ISSN 2413-3639

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 61, 2016

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Индекс журнала в каталоге подписных изданий агентства «Роспечать» — 36832

ISSN 2413-3639

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 61, 2016

Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Системы Морса—Смейла и топологическая структура несущих многообразий (*В. З. Гринес, Е. В. Жужома, О. В. Починка*) 5

Модель сжимаемой жидкости Олдройта (*Д. А. Закора*) 41

Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения и их приложения (*Н. Д. Копачевский, К. А. Радомирская*) 67

О формуле объема гиперболического октаэдра с mm2-симметрией (*В. А. Краснов, Э. Ш. Хисяметдинова*) 103

Топологические алгебры измеримых и локально измеримых операторов (*М. А. Муратов, В. И. Чилин*) 115

О коэрцитивной разрешимости параболических уравнений с переменным оператором (*А. Р. Ханалыев*) 164

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 61 (2016). С. 5–40

УДК 517.938

СИСТЕМЫ МОРСА—СМЕЙЛА И ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА НЕСУЩИХ МНОГООБРАЗИЙ

© 2016 г. **В. З. ГРИНЕС, Е. В. ЖУЖОМА, О. В. ПОЧИНКА**

Аннотация. Настоящий обзор посвящен изложению результатов, относящихся к взаимосвязи между глобальной динамикой систем Морса—Смейла на замкнутых многообразиях и топологией несущих многообразий. Мы приводим также результаты, связанные с топологической классификацией систем Морса—Смейла.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 5
1. Основные определения 7
2. Фильтрация Смейла и неравенства Морса 10
3. Одномерные и двумерные системы 12
4. Потоки Морса—Смейла без состояний равновесия 20
5. Потоки Морса—Смейла с состояниями равновесия на 3-многообразиях 21
6. Потоки с тремя состояниями равновесия 22
7. О взаимосвязи числовых характеристик неблуждающего множества систем Морса—Смейла и топологии несущего многообразия 24
8. Глобальная динамика систем Морса—Смейла 27
9. Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса—Смейла на n-многообразиях для $n \geqslant 3$ 30
Список литературы 31

Введение

В 1937 году А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин [2] ввели понятие *грубой* динамической системы с непрерывным временем (потока) на компактной плоской области, диффеоморфной кругу и ограниченной циклом без контакта. Смысл понятия грубости состоит в том, что достаточно малые C^1-возмущения системы не меняют качественного поведения решений системы. Плодотворность введенного понятия была продемонстрирована тем, что в [2] фактически было доказано, что грубые системы типичны, т. е. образуют открытое всюду плотное множество в пространстве рассматриваемых систем, снабженном C^1-топологией. Кроме этого, А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин показали, что грубые системы обладают достаточно ясной динамикой. А именно, согласно [2], грубые потоки в ограниченной части плоскости (это понятие естественно обобщается на потоки на двумерной сфере и ниже для простоты мы будем в основном уделять внимание многообразиям без края) составляют потоки с конечным числом состояний равновесия и периодических траекторий, которые гиперболичны и их объединение содержит предельное множество любой траектории. Более того, нет сепаратрис, идущих из седла в седло (включая то же самое седло).

Естественно, что работа [2] оказала большое влияние на исследования так называемой горьковской школы, т. е. самого А. А. Андронова, его учеников и его сотрудников. Представителем этой школы А. Г. Майером [29] было введено понятие *грубости* для динамических систем с дискретным временем (каскадов) на окружности и, фактически, понятие грубого потока без состояний равновесия на торе. Из работы [29] следует, что грубые каскады на окружности также типичны и имеют достаточно ясную динамику. А именно, грубый каскад имеет только конечное число периодических точек, причем каждая такая точка является гиперболической.

В 1959 году М. Пейшото [82] обобщил результаты А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина на произвольные ориентируемые замкнутые поверхности. При этом М. Пейшото модифицировал понятие грубости и ввел понятие *структурной устойчивости*, которое стало более популярным и употребимым. Фактически результат Пейшото дословно повторяет результат Андронова—Понтрягина о динамике структурно устойчивого потока, при этом было явно сформулировано утверждение о типичности таких полей (у Андронова—Понтрягина это утверждение формально не выделялось). Отметим, что М. Пейшото передоказал часть результатов А. Г. Майера, не зная о работе [29].

Под влиянием работ [2, 82] в 1960 году С. Смейл [90] ввел класс динамических систем на многообразиях, изначально претендовавших на роль типичных динамических систем с достаточно ясной (как тогда казалось) динамикой и которые в дальнейшем стали называть системами Морса—Смейла. По существу определение С. Смейла содержало перечисление свойств, полученных в [2, 82], при этом аналогом условия Андронова—Понтрягина об отсутствии сепаратрисных связей в многомерном случае стало условие трансверсальности пересечений сепаратрис. До этой работы С. Смейл был уже известным топологом в связи с его доказательством гипотезы Пуанкаре для многообразий размерности $\geqslant 5$. В его работах [91, 93], связанных с доказательством гипотезы Пуанкаре, существенно использовалась теория Морса и векторные поля, порождаемые градиентом функций Морса. В 1961 году С. Смейл [92] выделил класс градиентно-подобных векторных полей (т. е. потоков Морса—Смейла без периодических траекторий) и доказал, что выделенный класс открыт и плотен в множестве градиентных векторных полей.

Естественным является вопрос о существовании систем Морса—Смейла на замкнутых многообразиях. С. Смейл [92] доказал, что любую функцию Морса на многообразии можно аппроксимировать такой функцией Морса, что ее градиент будет являться векторным полем Морса—Смейла без периодических орбит. Тогда сдвиг на время $t = 1$ вдоль траекторий такого поля является диффеоморфизмом Морса—Смейла. Так как функции Морса существуют на любом замкнутом многообразии, то получаем, что *системы Морса—Смейла* (*как потоки, так и диффеоморфизмы*) *существуют на любом замкнутом многообразии*. Дж. Палис и С. Смейл [80, 81] доказали структурную устойчивость систем Морса—Смейла. Поэтому эти системы *образуют открытое множество в пространстве C^1-гладких динамических систем*. С современной точки зрения системы Морса—Смейла на замкнутых многообразиях суть в точности структурно устойчивые динамические системы с нулевой топологической энтропией. С этой точки зрения они являются простейшими структурно устойчивыми системами (спустя короткое время Д. В. Аносов [3, 4] и С. Смейл [39, 94] доказали существование широких классов структурно устойчивых динамических систем с положительной топологической энтропией).

Уже в пионерской работе [90] была выявлена тесная связь между динамическими характеристиками системы Морса—Смейла и топологией несущего многообразия. Именно этим обстоятельством объясняется пристальное внимание к системам Морса—Смейла и непрекращающийся поток работ по данной тематике. Результаты многих разделов топологии, которые изначально не имели никакого отношения к динамическим системам, нашли применение при исследовании систем Морса—Смейла. Например, для потоков Морса—Смейла без состояний равновесия было установлено, что периодические траектории образуют довольно специальный набор узлов и зацеплений. Сравнительно недавно была обнаружено, что инвариантные многообразия седловых точек могут иметь дикое вложение.

Настоящий обзор посвящен изложению результатов, относящихся к взаимосвязи между глобальной динамикой систем Морса—Смейла на замкнутых многообразиях и топологией несущих многообразий. Мы приводим также результаты, связанные с топологической классификацией систем Морса—Смейла. Системы Морса—Смейла рассматриваются на замкнутых гладких n-мерных ($n \geqslant 1$) связных многообразиях M^n.

Структура статьи следующая. В разделе 1 мы даем исторически первое определение системы Морса—Смейла, принадлежащее С. Смейлу, и приводим элементарные следствия, вытекающие непосредственно из определения. В разделе 2 приводится конструкция фильтрации несущего многообразия, связанная с динамикой системы Морса—Смейла и введенная Смейлом для вывода системы неравенств, названных Смейлом неравенствами Морса. Эти неравенства устанавливают соотношения между числами Бетти несущего многообразия и динамическими характеристиками системы Морса—Смейла. В разделе 3 рассматриваются системы Морса—Смейла на одномерных и двумерных многообразиях. Далее мы рассматриваем системы Морса—Смейла на многообразиях, размерность которых не меньше трех. В разделе 4 рассматриваются потоки Морса—Смейла без состояний равновесия (неблуждающее множество системы состоит из периодических траекторий), и приводятся ставшие уже классическими результаты Дж. Моргана и Д. Азимова о структуре несущего многообразия. В разделе 5 рассматриваются потоки Морса—Смейла на 3-многообразиях, неблуждающее множество которых содержит состояния равновесия. Наряду с теоремами о структуре несущего многообразия приводятся условия существования периодических траекторий, что обычно бывает важно для приложений. В разделе 6 описывается динамика потоков с тремя состояниями равновесия и изучается топология многообразия, допускающего такие системы. В разделе 7 рассматриваются системы Морса—Смейла (как потоки, так и диффеоморфизмы) с некоторыми ограничениями, в основном касающимися отсутствия гетероклинических пересечений различных типов. В качестве следствий мы получаем достаточные условия наличия гетероклинических кривых или гетероклинических точек. Теоремы о существовании гетероклинических кривых, как выяснилось сравнительно недавно, важны для изучения магнитных полей в электропроводящих средах (см. например, [67]). В разделе 8 мы приводим представление произвольного диффеоморфизма Морса—Смейла в виде диффеоморфизма источник—сток, которое используется в разделе 9 для получения некоторых классификационных результатов.

Благодарности. Авторы благодарят В. С. Медведева, а также всех участников семинара «Топологические методы в динамике» в Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики» за полезные обсуждения. Исследования выполнялись в рамках проектов РФФИ 15-01-03687-а, 16-51-10005-Ко_а, РНФ 14-41-00044 и программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ (проект 98) в 2016 году.

1. Основные определения

Прежде чем дать исторически первое определение динамической системы Морса—Смейла (в современной терминологии), напомним некоторые понятия и введем необходимые обозначения. Пространство C^r-диффеоморфизмов (соответственно, векторных полей гладкости C^r), наделенное равномерной C^r-топологией, обозначим через $Diff^r\ (M^n)$ (соответственно, $\chi^r\ (M^n)$). Для $r = 1$ будем обычно писать $Diff\ (M^n)$, $\chi\ (M^n)$. Для краткости мы в основном даем определения только для диффеоморфизмов, поскольку соответствующие определения для векторных полей (и потоков) аналогичны.

Зафиксируем $f \in Diff\ (M^n)$. Напомним, что точка $x \in M^n$ называется *неблуждающей*, если для любой ее окрестности U и любого натурального числа N найдется $n_0 \in \mathbb{Z}$ такое, что $|n_0| \geqslant N$ и $f^{n_0}(U) \cap U \neq \varnothing$. Множество неблуждающих точек диффеоморфизма f обозначается через $NW(f)$. Очевидно, периодическая точка является неблуждающей. Периодическая точка $x_0 \in Per\ (f)$, $f^q(x_0) = x_0$, называется *гиперболической*, если производная $Df^q(x_0) : T_{x_0}M^n \to T_{x_0}M^n$ (рассматриваемая как линейное отображение касательного пространства в себя) не имеет собственных чисел, равных по модулю единице. Согласно теореме Гробмана—Хартмана, в некоторой окрестности гиперболической неподвижной точки x_0 диффеоморфизм f сопряжен линейному диффеоморфизму, определяемому матрицей Якоби $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{x_0}$ $[22, 23, 71]$. Напомним, что два диффеоморфизма $f : M \to M$, $f' : M' \to M'$ называются *топологически сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h : M \to M'$ такой, что $hf = f'h$.

Отсюда получаем, что для гиперболической точки x_0 существуют так называемые устойчивое $W^s(x_0)$ и неустойчивое $W^u(x_0)$ многообразия, которые можно определить как множества точек $y \in M^n$ таких, что $\varrho_M(f^{qk}x_0, f^{qk}y) \to 0$ при $k \to +\infty$ и $k \to -\infty$, соответственно, где ϱ_M — метрика на M^n. Заметим, что неустойчивое многообразие $W^u(x_0)$ есть устойчивое многообразие относительно f^{-1}. Известно, что $W^s(x_0)$ и $W^u(x_0)$ гомеоморфны (во внутренней топологии) евклидовым пространствам $\mathbb{R}^{\dim W^s(x_0)}$, $\mathbb{R}^{\dim W^u(x_0)}$, соответственно, и являются гладкими инъективными иммерсиями последних в M^n $[39, 72]$. При этом периодическая гиперболическая точка

$p \in NW(f)$ называется *узловой*, если либо $\dim W^s(p) = n$ (в этом случае p называется *стоковой точкой*, см. рис. 1.1 (c)), либо $\dim W^u(p) = n$ (в этом случае p называется *источниковой точкой*, см. рис. 1.1 (b)). В частном случае, когда точка p неподвижна, она называется *узлом* (соответственно, *стоком* или *источником*). Гиперболическая периодическая точка $\sigma \in NW(f)$ называется *седловой*, если ее устойчивое и неустойчивое многообразия имеют ненулевую топологическую размерность (см. рис. 1.1 (a)).

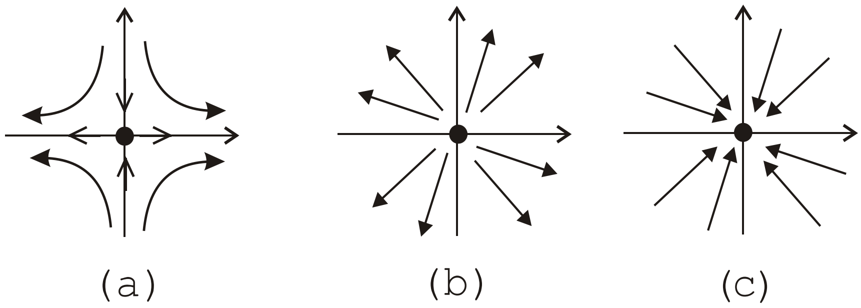

Рис. 1.1

Аналогично вводятся определения гиперболического состояния равновесия потока и гиперболического периодического движения и их устойчивых и неустойчивых многообразий. Однако для потоков имеется нюанс, состоящий в том, что неустойчивые многообразия состояния равновесия гомеоморфны евклидовым пространствам, в то время как для одномерных периодических траекторий они гомеоморфны цилиндрам соответствующей размерности.

Диффеоморфизм f называется *диффеоморфизмом Морса—Смейла*, если $NW(f)$ состоит из конечного числа периодических точек (следовательно, $NW(f) = Per\ (f)$), все периодические точки гиперболические и инвариантные многообразия $W^s(x)$, $W^u(y)$ пересекаются трансверсально (если пересечение не пусто) для любых точек x, $y \in NW(f)$. Для потоков определение аналогично. Обозначим через $\mathcal{MS}^r\ (M^n)$ (соответственно, $\Sigma^r(M^n)$) множество C^r-диффеоморфизмов (соответственно, векторных полей) Морса—Смейла на M^n. Для $r = 1$ будем писать $\mathcal{MS}\ (M^n)$, $\Sigma\ (M^n)$.

Приведем некоторые определения, которые нам понадобятся в дальнейшем. Пусть $f \in \mathcal{MS}\ (M^n)$. Если $\dim W^u(\sigma) = i$, то каждую компоненту множества $W^u(\sigma) \setminus \sigma$ будем называть *i-мерной неустойчивой сепаратрисой*, а каждую компоненту множества $W^s(\sigma) \setminus \sigma$ будем называть *$(n-i)$-мерной устойчивой сепаратрисой*. Поскольку точка разбивает одномерное евклидово пространство, но не разбивает евклидово пространство большей размерности, то одномерное (устойчивое или неустойчивое) многообразие седловой периодической точки состоит из самой седловой точки и двух одномерных сепаратрис, а i-мерное многообразие при $i \geqslant 2$ состоит из седловой точки и одной i-мерной сепаратрисы.

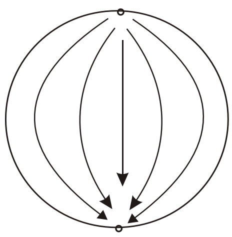

Рис. 1.2

Самым простым диффеоморфизмом Морса—Смейла является диффеоморфизм замкнутого многообразия с двумя неподвижными точками, одна из которых является притягивающей (сток), а другая — отталкивающей (источник), и других периодических точек нет, см. рис. 1.2. В этом случае многообразие является сферой $\mathbb{S}^n$, и динамика такого диффеоморфизма проста: все точки, отличные от неподвижных точек, являются блуждающими и движутся под действием диффеоморфизма от источника к стоку. Все такие диффеоморфизмы попарно топологически сопряжены друг другу (см., например, [21, теорема 2.2.1]).

Если $\psi : M^n \to \mathbb{R}$ — функция Морса, то векторное поле $\nabla\psi = grad\ \psi$ на M^n определяет поток ψ^t без периодических траекторий и с конечным числом состояний равновесия, причем все состояния равновесия гиперболические. Поток ψ^t называется *градиентным* и в общем случае не является потоком Морса—Смейла, поскольку у него может нарушаться трансверсальность пересечения сепаратрис различных седел. Однако С. Смейл [92] показал, что в пространстве функций Морса существует открытое и всюду плотное множество функций Морса, градиент которых задает поток Морса—Смейла.

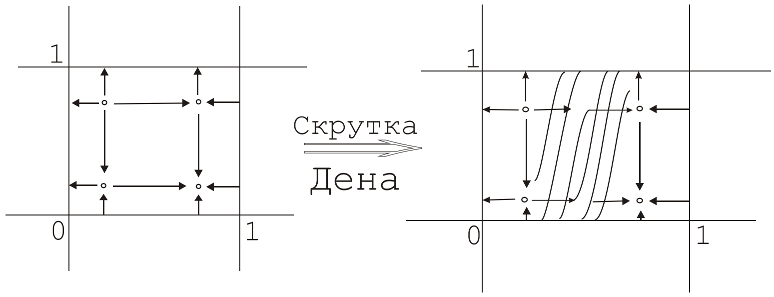

Рис. 1.3

Диффеоморфизмы Морса—Смейла, являющиеся сдвигами на единицу времени потока, очевидно индуцируют тождественное отображение в группе гомологий. Спрашивается, существуют ли диффеоморфизмы Морса—Смейла, индуцирующие нетривиальные изоморфизмы в группе гомологий? Ответ положительный: например, диффеоморфизм Морса—Смейла двумерного тора, не вкладываемый в поток и индуцирующий нетривиальный изоморфизм в одномерной группе гомологий, можно получить как композицию сдвига вдоль траекторий градиентного векторного поля Морса—Смейла и соответствующим образом подобранной скрутки Дэна вдоль замкнутой трансверсали. На рис. 1.3 (левая часть) приводится фазовый портрет градиентного векторного поля с двумя седлами и двумя узлами на квадрате, который является фундаментальной областью на универсальной накрывающей тора. Скрутка Дена производится вдоль кривой, в которую проектируется прямая $x = \dfrac{1}{2}$. В результате композиции сдвига вдоль траекторий и скрутки Дена получается диффеоморфизм, у которого устойчивое многообразие одного седла трансверсально пересекается с неустойчивым многообразием другого седла, см. рис. 1.3 (правая часть). Скрутка Дена приводит не только к нетривиальному действию в группе гомологий, но и к возникновению так называемых гетероклинических точек, являющихся препятствием к включению такого диффеоморфизма в поток. Дж. Палис [80] доказал, что в любой окрестности тождественного отображения поверхности существуют диффеоморфизмы Морса—Смейла, не вкладываемые в поток.

В работе [88] была анонсирована, а в [89] была доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть $f : M^d \to M^d$ — диффеоморфизм Морса—Смейла. Тогда собственные значения индуцированного отображения $f_* : H_*(M^d, \mathbb{R}) \to H_*(M^d, \mathbb{R})$ являются корнями из единицы.*

Напомним, что f_* означает семейство всех отображений $f_{*,k} : H_k(M^d, \mathbb{R}) \to H_k(M^d, \mathbb{R})$, $k \in \{0, \ldots, d\}$.

Пусть $f : M^n \to M^n$ — диффеоморфизм Морса—Смейла, и σ_1, $\sigma_2 \in NW(f)$ — различные седловые периодические точки. Пересечение их инвариантных многообразий $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ в случае $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2) \neq \varnothing$ называется *гетероклиническим*. Поскольку каждое из $W^s(\sigma_1)$, $W^u(\sigma_2)$ является локально вложенным подмногообразием, то любая компонента связности гетероклинического пересечения $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ также является локально вложенным подмногообразием. Если $\dim(W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)) \geqslant 1$, то компонента связности пересечения $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ называется *гетероклиническим многообразием*. В частности, если $\dim(W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)) = 1$, то гетероклиническое многообразие является *гетероклинической кривой*, см. рис. 1.4.

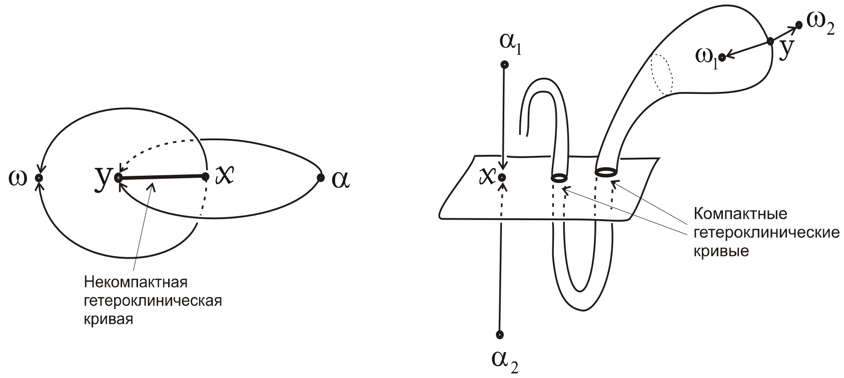

Рис. 1.4

Если $\dim(W^s(\sigma_1)\cap W^u(\sigma_2)) = 0$, то пересечение $W^s(\sigma_1)\cap W^u(\sigma_2)$ есть счетное множество точек, которые называются *гетероклиническими*. Множество гетероклинических точек инвариантно и представляет собой объединение *гетероклинических орбит*. Отметим, что у потоков Морса—Смейла гетероклинических точек не бывает, и гетероклиническое многообразие состоит из одномерных траекторий.

2. Фильтрация Смейла и неравенства Морса

Одними из первых свойств, вытекающих из определения систем Морса—Смейла и доказанных Смейлом [90], являются следующие результаты.

Предложение 2.1. *Пусть $f: M^n \to M^n$ — диффеоморфизм Морса—Смейла. Тогда*
$$M^n = \bigcup_{p\in NW(f)} W^s(p) = \bigcup_{p\in NW(f)} W^u(p).$$

Аналогичное утверждение справедливо и для потоков Морса—Смейла.

Теорема 2.1. *Пусть $f: M^n \to M^n$ — диффеоморфизм Морса—Смейла, и p, $q \in NW(f)$. Если $W^u(p)\cap W^s(q)\neq\varnothing$, то*
1. $W^u(q)\subset \operatorname{clos} W^u(p)$ *и* $\dim W^u(p)\geqslant \dim W^u(q)$;
2. $W^s(p)\subset \operatorname{clos} W^s(q)$ *и* $\dim W^s(p)\leqslant \dim W^s(q)$.

Неравенства, связывающие размерности, доказываются следующим образом. Действительно, пусть $W^u(p)\cap W^s(q)\neq\varnothing$ для некоторых точек p, $q\in NW(f)$. Поскольку инвариантные многообразия $W^u(p)$, $W^s(q)$ пересекаются трансверсально, то $\dim\ W^s(q)+\dim\ W^u(p)\geqslant n$. Следовательно, всегда $\dim\ W^s(q)\geqslant \dim\ W^s(p)$, так как $\dim\ W^s(p) = n-\dim\ W^u(p)$. Аналогично доказывается неравенство $\dim W^u(p)\geqslant\dim W^u(q)$.

Условие $W^u(p)\cap W^s(q)\neq\varnothing$ будем обозначать через $p\succ q$. Из конечности числа неблуждающих орбит и теоремы 2.1 вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.2. *Для диффеоморфизма Морса—Смейла отношение $\succ$ является отношением частичного порядка на множестве периодических орбит.*

Отношение $\succ$ очевидным образом переносится на множество периодических орбит. Обозначим через O_r орбиту точки $r\in NW(f)$. Положим $O_p\succ O_q$, если существуют точки $r\in O_p$, $s\in O_q$ такие, что $r\succ s$. Из предложения 2.2 вытекает, что отношение $\succ$ также является отношением частичного порядка на множестве периодических орбит.

Первоначальное и схематичное изображение динамики системы Морса—Смейла было предложено Смейлом [39] в виде графа (позднее стали говорить «*граф Смейла*»), который строится следующим образом. Периодической орбите O_p точки p поставим в соответствие вершину $\upsilon(O_p)$ графа G. Две вершины $\upsilon(O_p)$, $\upsilon(O_q)$ графа G соединяются ребром, идущим от $\upsilon(O_p)$ к $\upsilon(O_q)$, тогда и только тогда, когда $W^u(p)\cap W^s(q)\neq\varnothing$ и нет $r\in NW(f)$ таких, что $W^u(p)\cap W^s(r)\neq\varnothing$ и $W^u(r)\cap W^s(q)\neq\varnothing$ (т. е. $p\succ r\succ q$). Построенный таким образом граф (иногда его вершины наделяют дополнительной информацией о размерности устойчивых и неустойчивых многообразий) называется *графом Смейла* диффеоморфизма f.

Аналогичное определение порядка и графа Смейла можно ввести и для потоков Морса—Смейла. Ясно, что топологически эквивалентные системы Морса—Смейла должны иметь изоморфные графы Смейла. Оказалось, что обратное неверно даже для потоков Морса—Смейла без периодических траекторий на поверхностях. Пейшото [85] построил топологически не эквивалентные потоки Морса—Смейла на сфере с изоморфными графами Смейла (кроме оригинальной работы, см., например, [79]).

Напомним, что последовательность подмножеств $M_0 \subset M_1 \subset \ldots$ топологического пространства M^n называется *фильтрацией*, если семейство множеств $M_0, M_1, \ldots$ составляет фундаментальное покрытие пространства M^n. В своей пионерской работе [90] Смейл, используя теорему 2.1, построил конечную фильтрацию, связанную с динамикой системы Морса—Смейла. Смейл заметил, что подмножества $K^d = \bigcup\limits_{\dim W_i^u \leqslant d} W_i^u$ образуют фильтрацию, но из включения $W_i^u \subset K^d$ не обязательно следует включение $\partial W_i^u \subset K^{d-1}$, что связано с возможным существованием неустойчивых многообразий, лежащих в предельном множестве других неустойчивых многообразий той же размерности. В действительности Смейл использовал следующую фильтрацию для диффеоморфизма Морса—Смейла $f : M^n \to M^n$. Возьмем в качестве $M_0 = K^0$ семейство стоковых периодических точек. Пусть M_1 — объединение M_0 и одномерных неустойчивых многообразий, границы которых принадлежат M_0. Заметим, что $M_1 \subset K^1$, но в M_1 не входят одномерные неустойчивые многообразия, в предельном множестве которых лежат другие одномерные неустойчивые многообразия, см. рис. 1.3. Если M_{i-1} построено, то M_i получается присоединением к M_{i-1} неустойчивых многообразий, граница которых принадлежит M_{i-1}. Из предложения 2.1 вытекает, что $M_k = M^n$ для некоторого k. Ясно, что все M_i замкнуты, инвариантны относительно f и образуют конечную фильтрацию многообразия M^n.

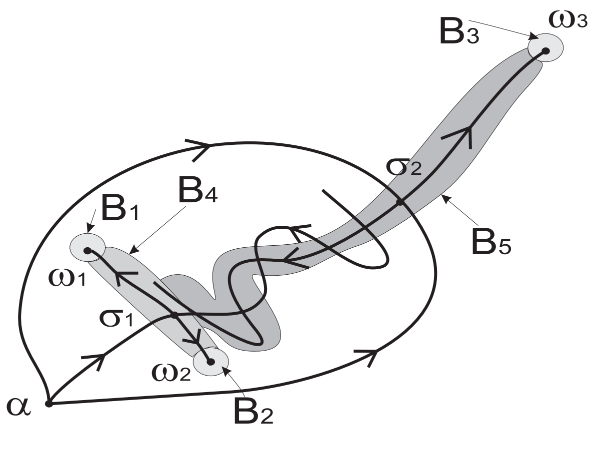

Рис. 2.1

На рис. 2.1 изображен фазовый портрет диффеоморфизма сферы S^2, неблуждающее множество которого гиперболично и состоит из трех неподвижных стоковых точек $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, двух неподвижных седловых точек σ_1, σ_2 и одного неподвижного источника α. Элементы фильтрация для этого диффеоморфизма имеют вид $M_i = \bigcup\limits_{j=1}^{i} B_j$, $i = \overline{1,5}$, и $M_6 = S^2$, где B_i — специально подобранные диски.

Обозначим через C_j число периодических точек p диффеоморфизма f, у которых устойчивое многообразие имеет размерность $j = \dim W^s(p)$, $p \in Per\ (f)$. Пусть $\beta_i(M^n) = \beta_i$ — i-е число Бетти многообразия M^n, т. е. $\beta_i(M^n) = rank\ H_i(M^n, \mathbb{Z})$. Используя построенную фильтрацию $M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{i-1} \subset M_i \subset \cdots$, Смейл [90] показал, что имеют место следующие соотношения:

$$C_0 \geqslant \beta_0, \qquad C_1 - C_0 \geqslant \beta_1 - \beta_0, \qquad C_2 - C_1 + C_0 \geqslant \beta_2 - \beta_1 + \beta_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \beta_i.$$

Эти соотношения имеют место также для потока Морса—Смейла, но числа Бетти вычисляются в кольце $\mathbb{Z}_2$, $\beta_i(M^n) = rank\ H_i(M^n, \mathbb{Z}_2)$, а под C_j понимается число состояний равновесия с j-мерными устойчивыми сепаратрисами плюс число одномерных периодических траекторий с $(j+1)$-мерными устойчивыми сепаратрисами. Для потоков Морса—Смейла без состояний равновесия в работе [63] (см. также [64]) получено усиление неравенств Морса—Смейла.

Название неравенств именем Морса связано с исследованиями М. Морса [76] связи между числом критических точек функции Морса и топологической структурой многообразия.

Поскольку для связного многообразия $\beta_0 = 1$, то из первого неравенства приведенной системы неравенств следует, что *система Морса—Смейла имеет по крайней мере одну стоковую и по крайней мере одну источниковую периодическую орбиту*. Это подтверждает упомянутый ранее факт о том, что самым простым диффеоморфизмом Морса—Смейла является диффеоморфизм замкнутого многообразия с двумя неподвижными точками, одна из которых есть источник, а другая — сток, и других периодических точек нет, см. рис. 1.2.

3. Одномерные и двумерные системы

Окружность S^1 является единственным замкнутым одномерным многообразием. Системы (как потоки, так и диффеоморфизмы) Морса—Смейла на S^1 всюду плотны и имеют достаточно простое комбинаторное описание. Поскольку такой поток всегда имеет только конечное число траекторий, то мы оставим характеристику потоков читателю в качестве упражнения. Что касается диффеоморфизмов, то для доказательства их плотности необходимо доказывать лемму о замыкании. Это впервые было сделано Майером [29] в 1939 году и позже передоказано Плиссом [34] и Пейшото [83, 84]. Так как для окружности лемму о замыкании удается доказать в любом классе гладкости (даже аналитическом), то получаем, что *диффеоморфизмы Морса—Смейла $\mathcal{MS}^k(S^1)$ всюду плотны в $Diff^r\ (S^1)$ для любых $1 \leqslant k \leqslant r \leqslant \omega$*. Учитывая этот результат, уже нетрудно показать, что C^r-грубые или (что то же самое) C^r-структурно устойчивые диффеоморфизмы окружности совпадают с $\mathcal{MS}^r(S^1)$.

Описание и топологическая классификация сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса—Смейла окружности достаточно проста. Разобьем $\mathcal{MS}^r(S^1)$ на два подкласса $\mathcal{MS}^r_+(S^1)$ и $\mathcal{MS}^r_-(S^1)$, состоящих из сохраняющих ориентацию и меняющих ориентацию диффеоморфизмов соответственно. Сформулируем результаты Майера по топологической классификации структурно устойчивых преобразований окружности. Из работы А. Г. Майера [29] известен следующий факт.

Предложение 3.1.

1. *Для каждого диффеоморфизма $\varphi \in \mathcal{MS}^r_+(S^1)$ неблуждающее множество $NW(\varphi)$ состоит из $2n$, $n \in \mathbb{N}$, периодических орбит, каждая из которых имеет период k.*
2. *Для каждого диффеоморфизма $\varphi \in \mathcal{MS}^r_-(S^1)$ множество $NW(\varphi)$ состоит из $2q$, $q \in \mathbb{N}$, периодических точек, две из которых являются неподвижными, а другие имеют период 2.*

Пусть $\varphi \in \mathcal{MS}^r_+(S^1)$. Перенумеруем периодические точки из $NW(\varphi)$: $p_0, p_1, \dots, p_{2nk-1}, p_{2nk}{=}p_0$, начиная с произвольной периодической точки p_0 по часовой стрелке, тогда существует целое число l такое, что $\varphi(p_0) = p_{2nl}$, причем $l = 0$ для $k = 1$, $l \in \{1, \dots, k-1\}$ для $k > 1$, и числа (k, l) являются взаимно простыми[1]. Заметим, что l не зависит от выбора точки p_0 (см. рис. 3.1 (A)). Для $\varphi \in \mathcal{MS}^r_-(S^1)$ положим $\nu = -1$; $\nu = 0$; $\nu = +1$, если его неподвижные точки являются, соответственно: источниками; стоком и источником; стоками. Заметим, что $\nu = 0$, если q нечетное, и $\nu = \pm 1$, если q четное (см. рис. 3.1 (B)).

Также из работы А. Г. Майера [29] известен следующий факт.

[1] На самом деле, А. Г. Майер вместо числа l использовал число r_1, которое называл *порядковым числом* таким, что $l \cdot r_1 \equiv 1 (mod\ k)$

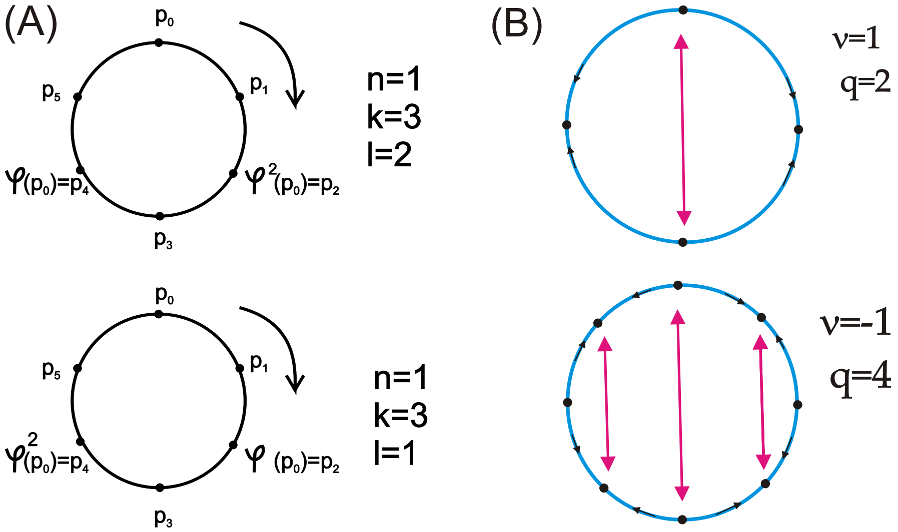

Рис. 3.1

Теорема 3.1.

1. *Два диффеоморфизма* $\varphi; \varphi' \in \mathcal{MS}^r_+(S^1)$ *с параметрами* $n, k, l; n', k', l'$ *топологически сопряжены тогда и только тогда, когда* $n = n', k = k'$ *и верно одно из следующих утверждений*:
   - $l = l'$ (*при этом, если* $l \neq 0$, *то сопрягающий гомеоморфизм сохраняет ориентацию*),
   - $l = k' - l'$ (*при этом сопрягающий гомеоморфизм меняет ориентацию*).
2. *Два диффеоморфизма* $\varphi; \varphi' \in \mathcal{MS}^r_-(S^1)$ *с параметрами* $q; q'$ *топологически сопряжены тогда и только тогда, когда* $q = q'$ *и* $\nu = \nu'$.

Перейдем теперь к системам Морса—Смейла на замкнутых двумерных многообразиях. Сперва мы рассмотрим потоки, а затем диффеоморфизмы.

Для потока Морса—Смейла с определенным набором состояний равновесия единственным необходимым ограничением существования на данной замкнутой поверхности является формула Эйлера—Пуанкаре: сумма индексов состояний равновесия должна равняться эйлеровой характеристике (см., например, [42]). Что касается типичности потоков Морса—Смейла, то имеет место следующая теорема.

Теорема 3.2. *Векторные поля Морса—Смейла* $\Sigma\,(M^2)$ *совпадают с пространством структурно устойчивых векторных полей на замкнутой поверхности* M^2. *Более того,* $\Sigma\,(M^2)$ *открыто и плотно в пространстве* $\chi\,(M^2)$ *всех векторных полей на* M^2. *Если поверхность* M^2 *ориентируемая или неориентируемая рода* $1 \leqslant g \leqslant 3$, *то* $\Sigma^r(M^2)$ *совпадают с пространством* C^r*-структурно устойчивых векторных полей для любого* $r \geqslant 1$. *Более того, в этом случае* $\Sigma^r(M^2)$ *открыто и плотно в* $\chi^r\,(M^2)$.

Для сферы $M^2 = S^2$ теорема 3.2 фактически доказана в работе [2]. Для остальных поверхностей в случае $r = 1$, а также всех ориентируемых поверхностей и проективной плоскости в случае $r \geqslant 1$ теорема 3.2 доказана Пейшото [83, 84]. Из теоремы Арансона—Маркли [5, 73] о том, что любой поток на бутылке Клейна не имеет нетривиально рекуррентных траекторий, вытекает справедливость теоремы 3.2 для бутылки Клейна в случае $r \geqslant 1$. Наконец, для неориентируемой поверхности рода 3 теорема 3.2 в случае $r \geqslant 1$ следует из результата Гутиерреза [68] о том, что на этой поверхности у потоков нет так называемых неориентируемых нетривиально рекуррентных траекторий.

Перед тем как перейти к вопросам классификации, напомним необходимые определения. Два потока f^t_1, f^t_2 на многообразии M^n называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h : M^n \to M^n$, переводящий траектории одного потока в траектории другого потока. Если при этом h сохраняет направление по времени, то f^t_1, f^t_2 называются *топологически траекторно* (*орбитально*) *эквивалентными*. Данный инвариант называется *полным*, если его совпадение у двух потоков является необходимым и достаточным условием эквивалентности этих потоков. Обычно инвариант топологической эквивалентности тесно связан с инвариантом топологической траекторной эквивалентности (как правило, построив один из инвариантов, легко построить второй). Поэтому мы иногда не уточняем, о какой из указанных эквивалентностей идет речь.

М. Пейшото [85] в 1973 году ввел для потоков Морса—Смейла без периодических траекторий полный топологический инвариант в виде оснащенного графа (см. рис. 3.2), который включает в себя информацию о взаимном расположении неблуждающих траекторий и их инвариантных многообразий (в частности, сепаратрис). Фактически, Пейшото оснастил граф Смейла дополнительной информацией так, чтобы он стал полным топологическим инвариантом (так называемый различающий граф). Подчеркнем, что значительно раньше [27, 28] Е. А. Леонтович и А. Г. Майер (см. также [1]) ввели полный топологический инвариант для потоков на сфере с конечным числом особых траекторий, названный схемой потока, который для структурно устойчивых потоков принципиально совпадает с графом Пейшото. Отметим, что имеются другие формы полного топологического инварианта таких потоков, которые по духу соответствуют оснащенному графу Пейшото, см., например, [78, 96].

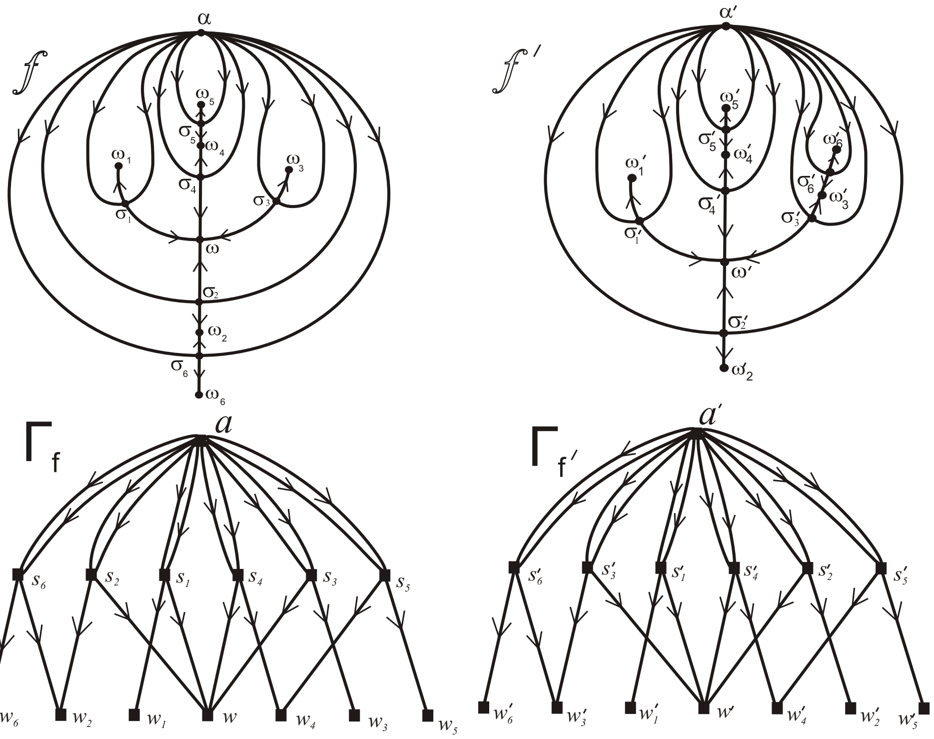

Рис. 3.2

На рис. 3.2 изображены два градиентно-подобных потока и их графы. Эта иллюстрация показывает, что граф без оснащения дополнительной информацией не является полным топологическим инвариантом. Так, изображенные потоки не являются эквивалентными, а их графы совпадают.

Полный топологический инвариант для произвольных потоков Морса—Смейла на замкнутых поверхностях был построен Ошемковым и Шарко [33]. Опишем схематично этот инвариант. Рассмотрим векторное поле $\vec{v}$ на компактной поверхности N, трансверсальное границе ∂N. Поверхность N называется *элементарной*, если она содержит либо ровно одну неблуждающую траекторию (узел или предельный цикл), либо все неблуждающие траектории суть седла. Элементарная поверхность называется *узловой* и ей приписывается $\vec{v}$-атом типа У, если она гомеоморфна диску и содержит ровно один узел (сток или источник). N приписывается $\vec{v}$-атом типа К-Меб, если она гомеоморфна либо кольцу, либо листу Мебиуса и содержит ровно один предельный цикл. Если N содержит только седла, то ей приписывается $\vec{v}$-атом типа С, см. рис. 3.3. Можно показать, что для

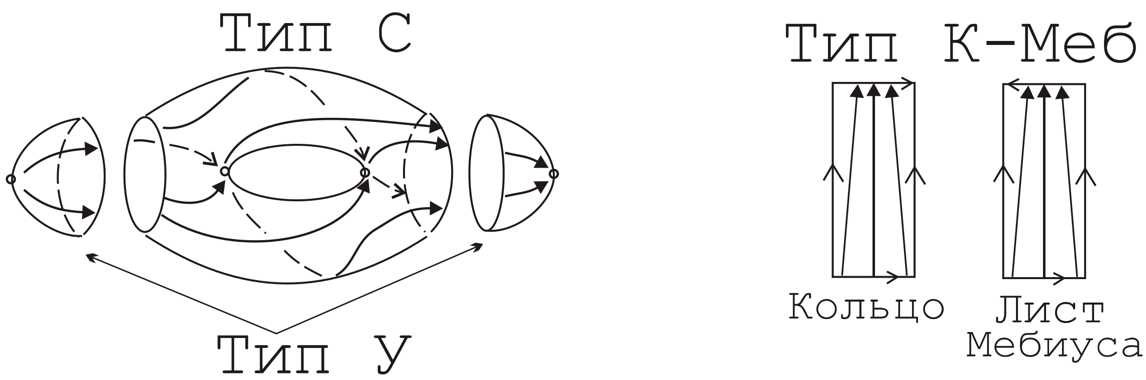

Рис. 3.3

любого векторного поля Морса—Смейла $\vec{v}$ существует семейство замкнутых попарно непересекающихся трансверсалей, которое разбивает несущую поверхность M^2 на элементарные поверхности. Поэтому полю $\vec{v}$ можно поставить в соответствие граф $\Gamma(\vec{v})$, вершины которого суть $\vec{v}$-атомы с указанием типа. Две вершины соединяются ребрами, если соответствующие элементарные поверхности имеют общую граничную компоненту. Каждое ребро наделяется направлением согласно направлению векторного поля на общей граничной компоненте. Если ребро соединяет вершины, ни одна из которых не имеет тип У, то ребру приписывается число -1 либо $+1$ в соответствии с тем, является ли гомеоморфизм, склеивающий две граничные компоненты, меняющим ориентацию или нет.

Структура потока на элементарных поверхностях, соответствующих атомам типа У и К-Меб, ясна, поскольку содержит только одну неблуждающую притягивающую или отталкивающую траекторию. Что касается типа С, то для таких атомов, по существу, строится инвариант, аналогичный по духу различающему графу Пейшото. Пусть элементарной поверхности N приписан $\vec{v}$-атом типа С. Возьмем седло $\sigma \in N$. Для векторного поля Морса—Смейла каждая сепаратриса седла σ пересекает ∂N. Дугу неустойчивой (устойчивой) сепаратрисы от σ к ∂N назовем $u(s)$-дугой. Замыкания всех $u(s)$-дуг разбивают N на открытые области, каждая из которых имеет ровно одну граничную компоненту, где поле направлено наружу, и ровно одну граничную компоненту, где поле направлено внутрь, см. рис. 3.4 (a), (b). Дуга траектории от одной граничной компоненты к другой называется *t-дугой*. Выберем произвольным образом в каждой из областей по одной t-дуге. Тогда семейство всех $u(s)$-дуг и выбранных t-дуг разбивает N на криволинейные многоугольники, качественный вид которых изображен на рис. 3.4 (c). Будем называть полученные криволинейные многоугольники *каноническими*. Для данного разбиения элементарной поверхности N типа С в

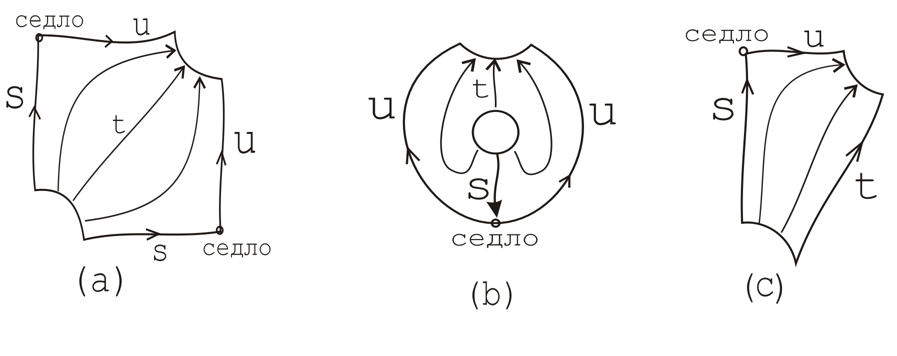

Рис. 3.4

работе [33] строится граф$\Gamma(N)$ (авторы называют его *трехцветным*) следующим образом (см. рис. 3.5):

1. вершины графа $\Gamma(N)$ взаимно однозначно соответствуют каноническим криволинейным многоугольникам;
2. если канонические многоугольники имеют общую сторону, образованную $u(s,t)$-дугой, то ребро, соединяющее соответствующие вершины, снабжаются меткой u (соответственно, s,t).

Результат построения не зависит от выбора t-дуг.

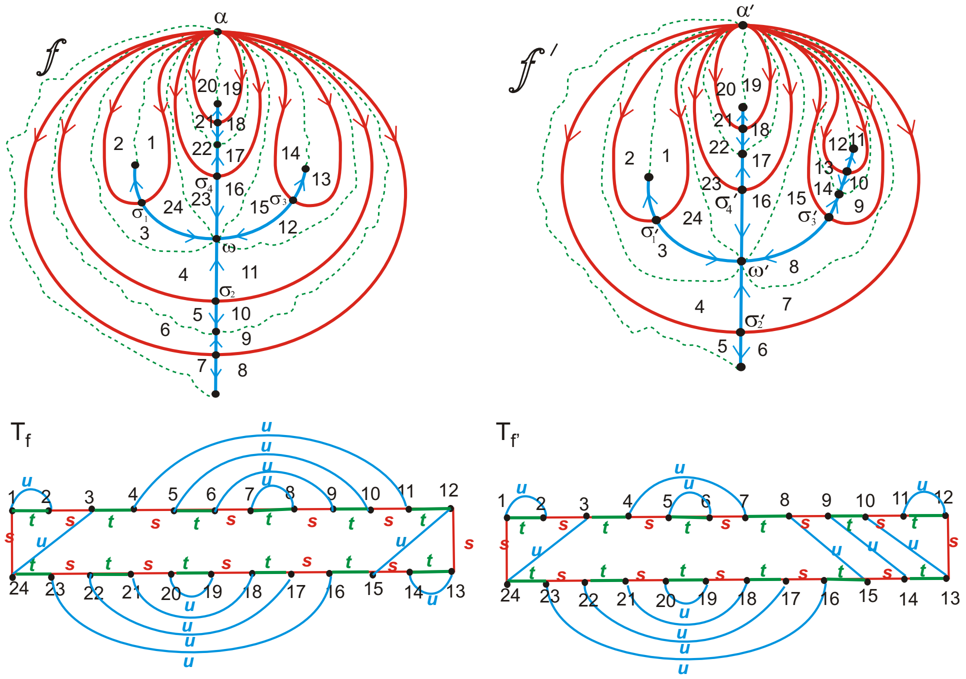

Рис. 3.5

По информации об атомах, соединяющих их кривых, а также трехцветных графах строится граф потока, который в [33] назван *молекулой*, и доказывается следующая теорема.

Теорема 3.3. *Два векторных поля Морса—Смейла $\vec{v}$, $\vec{v}'$ на замкнутой поверхности топологически траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им молекулы $\Gamma(\vec{v})$, $\Gamma(\vec{v}')$ изоморфны.*

Имеются ограничения, которые необходимо наложить на молекулу и трехцветные графы, чтобы абстрактно определенная молекула могла быть реализована как молекула некоторого векторного поля Морса—Смейла [33, теорема 3.24]. Отметим, что в [33] также предложен алгоритм сравнения молекул и алгоритм перечисления молекул по некоторому критерию сложности. В работе [66] показано, что предложенный Ошемковым и Шарко алгоритм не является эффективным. Напомним, что алгоритм решения задачи различения графов называется *эффективным*, если он занимает время, полиномиальное зависящее от числа вершин графа. Понятие эффективно решаемой задачи было предложено А. Кобэм и оно означает, что вычислительная проблема может быть реально решена на каком-либо устройстве, только если она может быть вычислена за время, ограниченное полиномом от параметра, представляющего длину входных данных [59]. На сегодняшний день неизвестно, существует ли эффективный алгоритм различения произвольных графов. В работе [66] авторы добиваются эффективности алгоритмов различения трехцветных графов и графов Пейшото за счет следующих фактов: трехцветные графы тривалентны, а графы Пейшото вложимы в 2-сферу. Кроме того, доказано, что полиномиальной является также задача установления ориентируемости поверхности и определения ее рода.

Приведем простой результат применения классификационной теоремы 3.3, который нам понадобится в дальнейшем и который иллюстрирует взаимосвязь между динамикой потока Морса—Смейла и несущей поверхностью.

Предложение 3.2. *Пусть f^t — поток Морса—Смейла на замкнутой поверхности M^2 такой, что неблуждающее множество потока f^t состоит из трех состояний равновесия. Тогда $M^2 = \mathbb{P}^2$ является проективной плоскостью. Более того, все потоки Морса—Смейла на $\mathbb{P}^2$,* *неблуждающее множество которых состоит из трех состояний равновесия, топологически эквивалентны.*

Перейдем к рассмотрению диффеоморфизмов на поверхностях.

В следующей теореме устанавливается связь между родом несущей поверхности и некоторыми динамическими характеристиками диффеоморфизмов Морса—Смейла замкнутых поверхностей (как ориентируемых, так и неориентируемых). Она вытекает из последнего равенства из системы неравенств Морса.

Теорема 3.4. *Пусть $f : M_g^2 \to M_g^2$ — диффеоморфизм Морса—Смейла замкнутой поверхности M_g^2 рода g ($g \geqslant 0$, если M_g^2 ориентируемая, и $g \geqslant 1$, если M_g^2 неориентируемая), и пусть f имеет $\nu(f)$ седловых и $\mu(f)$ узловых периодических точек. Тогда*

$$g = \frac{\nu(f) - \mu(f) + 2}{2}, \text{ если поверхность } M_g^2 \text{ ориентируемая, и}$$

$$g = \nu(f) - \mu(f) + 2, \text{ если поверхность } M_g^2 \text{ неориентируемая.}$$

Отметим, что в теореме 3.4 не делается никаких предположений о возможных пересечениях инвариантных многообразий седловых периодических точек, равно как и о характере вложения в M_g^2 этих многообразий.

В работах [46–48,51,69,77] получены более тонкие результаты, касающиеся взаимосвязи между периодическими данными диффеоморфизмов Морса—Смейла, их гомотопическими классами и топологическими характеристиками несущих поверхностей (во многих из этих работ рассматриваются более широкие классы гомеоморфизмов поверхностей, включающие диффеоморфизмы Морса—Смейла). Отметим, что в [62] получено выражение дзета-функции диффеоморфизма Морса—Смейла через его периодические данные.

При решении задачи классификации (с точностью до сопряженности) диффеоморфизмов поверхностей естественно сперва рассмотреть вопрос о топологической структуре областей, на которые разбивается блуждающее множество сепаратрисами седловых периодических точек. Пусть $f \in \mathcal{MS}\ (M^2)$. Из блуждающего множества $M^2 \setminus NW(f)$ удалим сепаратрисы всех седловых периодических точек диффеоморфизма f. Тогда компонента связности оставшегося множества может быть только одного из следующих типов: 1) односвязная компонента блуждающего типа; 2) односвязная компонента периодического типа; 3) двусвязная компонента периодического типа. В последнем случае M^2 есть S^2, и граница компоненты состоит ровно из двух точек: стока и источника [6].

Диффеоморфизмы Морса—Смейла без гетероклинических точек (*градиентно-подобные диффеоморфизмы*) на ориентируемых замкнутых поверхностях были классифицированы Безденежных и Гринесом [8–10]. Немного утрируя, можно сказать, что такие диффеоморфизмы получаются суперпозицией сдвигов на единицу времени потоков Морса—Смейла без замкнутых траекторий и периодических преобразований поверхностей. Полным инвариантом таких диффеоморфизмов является аналог различающего графа Пейшото, снабженного периодическими автоморфизмами. Исчерпывающая классификация (включающая реализацию) градиентно-подобных диффеоморфизмов на поверхностях была получена также недавно в работе [20] на языке трехцветных графов, оснащенных периодическим автоморфизмом.

Классификация диффеоморфизмов Морса—Смейла значительно усложняется, если допустить наличие гетероклинических точек (см. рис. 3.6). Гетероклинические точки естественным образом приводят к появлению так называемых гетероклинических цепочек из седловых орбит (т. е., орбит, порождаемых седловыми периодическими точками). Напомним, что последовательность седловых орбит $O_1, \ldots, O_h$ образует *гетероклиническую цепочку*, если $W^u(O_i) \cap W^s(O_{i+1}) \neq \varnothing$ для всех $1 \leqslant i < h$. Так как диффеоморфизмы Морса—Смейла не имеют гомоклинических точек, то гетероклинические цепочки состоят из конечного числа $h \geqslant 2$ попарно различных седловых орбит. Число $h - 1$ называется *длиной* цепочки $O_1, \ldots, O_h$. Максимальная из длин цепочек, соединяющих две орбиты $O \prec O'$, обозначается $beh(O'|O)$. Гетероклиническая цепочка максимальной длины соответствует простому незамкнутому пути в графе Смейла данного диффеоморфизма. На рис. 3.6 (a), (b) изображены гетероклинические цепочки длины 1 и 2.

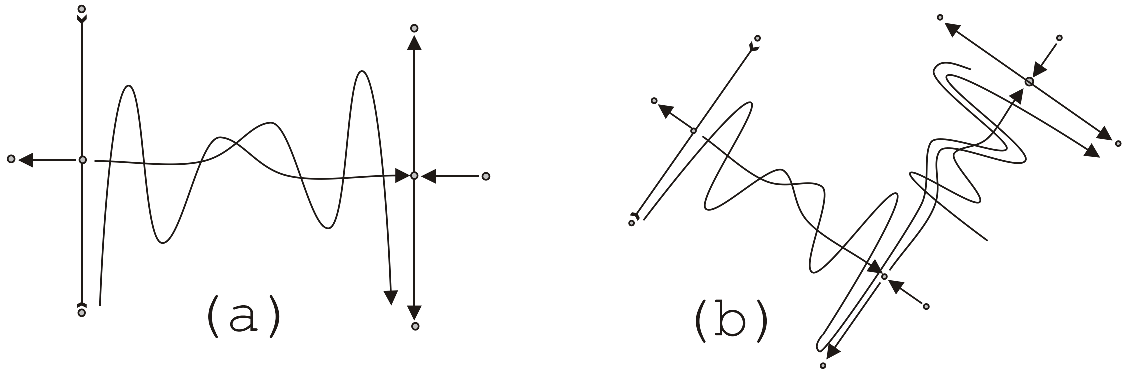

Рис. 3.6

Поскольку гетероклинические точки образованы пересечением инвариантных многообразий седловых орбит, то множество гетероклинических точек инвариантно и, следовательно, представляет собой объединение орбит. Естественно сперва рассмотреть класс диффеоморфизмов с конечным числом гетероклинических орбит. В этом случае максимальные гетероклинические цепочки имеют длину 1. Диффеоморфизмы Морса—Смейла с конечным числом гетероклинических орбит были классифицированы Гринесом [14]. В этом случае к графу Безденежных—Гринеса добавляется так называемая сигнатура, несущая требуемую информацию о гетероклинических точках (см. рис. 3.7).

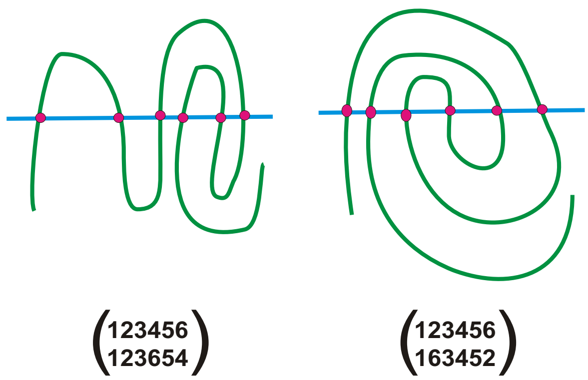

Рис. 3.7

Исчерпывающая классификация (включающая реализацию) диффеоморфизмов Морса—Смейла с конечным числом гетероклинических орбит на поверхностях была также получена в работе Митряковой—Починки [32], где рассматривался более широкий класс диффеоморфизмов с конечным числом модулей устойчивости на поверхностях. При этом введенный в [32] полный топологический инвариант, *схема*, с точностью до гомеоморфизма представляет собой конечное число двумерных торов — пространств блуждающих орбит с набором простых замкнутых кривых — пространств орбит сепаратрис (см. рис. 3.8)

Произвольные диффеоморфизмы Морса—Смейла на ориентируемых поверхностях были классифицированы в рамках работы [56], где в терминах марковских разбиений получены необходимые и достаточные условия сопряженности любых структурно устойчивых диффеоморфизмов ориентируемых замкнутых поверхностей. Мы сформулируем основной результат работы [56] не в полной общности (для любых структурно устойчивых диффеоморфизмов), а в облегченной форме для диффеоморфизмов Морса—Смейла.

Рассмотрим максимальную гетероклиническую цепочку $O_1, \ldots, O_h$ седловых орбит диффеоморфизма Морса—Смейла f. Объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{h} O_i \cup K_{1h}$, где $K_{1h} = \left(\bigcup\limits_{i=1}^{h} W^u(O_i)\right) \bigcap \left(\bigcup\limits_{i=1}^{h} W^s(O_i)\right)$, называется *насыщением* данной цепочки. Другими словами, насыщение цепочки есть объединение седловых орбит и всевозможных пересечений устойчивых и неустойчивых сепаратрис седловых

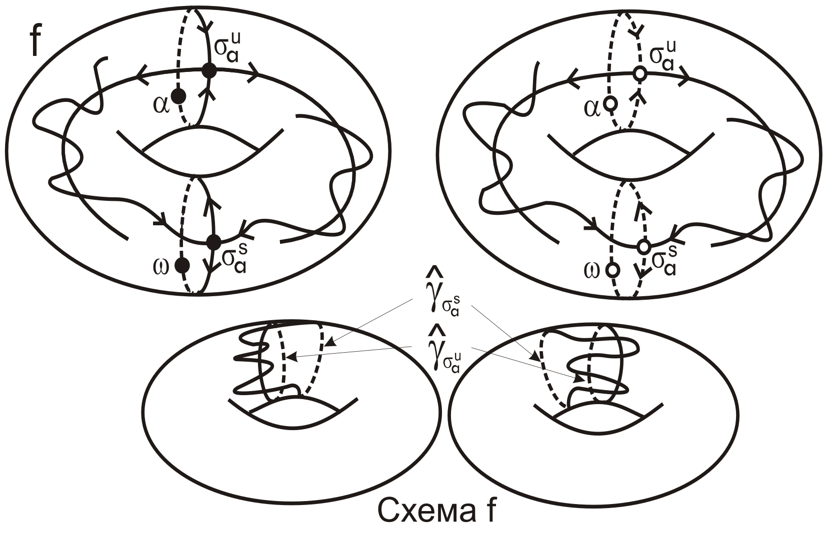

Рис. 3.8

периодических точек, входящих в цепочку. Отметим, что насыщение максимальной гетероклинической цепочки является инвариантным множеством. В силу структурной устойчивости диффеоморфизмов Морса—Смейла сепаратрисы седловых периодических точек пересекаются трансверсально. Используя этот факт, Бонатти и Ланжевен [56] доказали, что насыщение максимальных гетероклинических цепочек можно наделить равномерной гиперболической структурой, при этом на пересечении насыщений можно ввести согласованную гиперболическую структуру. Поэтому диффеоморфизму Морса—Смейла f можно поставить в соответствие гиперболическое множество K_f седлового типа, которое мы назовем *насыщенным гиперболическим* множеством. В [56] показано, что насыщенное гиперболическое множество обладает инвариантной окрестностью *конечного топологического типа* — замкнутой поверхностью с конечным числом дыр.

Насыщенное гиперболическое множество можно рассматривать как обобщение базисного множества седлового типа (на настоящем базисном множестве, кроме гиперболической структуры, имеется транзитивность). Это позволяет применить технику Боуэна—Синая для построения марковских разбиений для таких множеств [37, 38, 57]. Другими словами, насыщенное гиперболическое множество покрывается специальным семейством криволинейных четырехугольников, образованными отрезками устойчивых и неустойчивых сепаратрис. В работе [56] вводится понятие геометрического типа так называемого хорошего марковского разбиения. Геометрический тип включает в себя описание взаимного расположения, ориентацию и нумерацию криволинейных четырехугольников, а также их образов под действием диффеоморфизма. Два геометрических типа *эквивалентны*, если они являются геометрическими типами некоторых хороших марковских разбиений одного и того же гиперболического насыщенного множества (например, при изменении нумерации криволинейных прямоугольников получаются эквивалентные геометрические типы). Основной результат (см. [56, теорема 1.0.3]) содержится в следующей теореме (для случая систем Морса—Смейла).

Теорема 3.5. *Пусть K_{f_1}, K_{f_2} — насыщенные гиперболические множества диффеоморфизмов Морса—Смейла f_1, f_2 замкнутых ориентируемых поверхностей M_1, M_2 соответственно. Предположим, что K_{f_1} и K_{f_2} имеют хорошие марковские разбиения с эквивалентными геометрическими типами. Тогда f_1, f_2 сопряжены на инвариантных окрестностях множеств K_{f_1}, K_{f_2}, т. е. существует гомеоморфизм h инвариантной окрестности U_1 конечного топологического типа множества K_{f_1} в инвариантную окрестность U_2 конечного топологического типа множества K_{f_2} такой, что h сопрягает ограничения $f_1|_{U_1}$, $f_2|_{U_2}$.*

В [49] приводится конечный алгоритм, позволяющий решить вопрос об эквивалентности двух геометрических типов.

4. Потоки Морса—Смейла без состояний равновесия

В описании несущих многообразий для потоков Морса—Смейла без состояний равновесия используются понятия топологии многообразий такие, как разложение на (стандартные) ручки, разложение на круговые ручки, пространство Зейферта и т.п.

Пространством Зейферта (иногда говорят «многообразие Зейферта» или «расслоение Зейферта») называется 3-многообразие M^3, которое представляет собой объединение $M^3 = \cup C_\alpha$ попарно непересекающихся замкнутых простых кривых C_α таких, что каждая кривая C_α имеет замкнутую окрестность, гомеоморфную полноторию $D^2 \times S^1$, которая возникает из произведения $D^2 \times [0;1]$ диска на отрезок при склейке каждой точки $(x;0)$ с точкой $(d(x);1)$, где $d : D^2 \to D^2$ — поворот диска D^2 на угол $2\pi\dfrac{m}{n}$ (m, n — взаимно простые целые числа, $0 \leqslant m < n$).

Трехмерное многообразие M^3 называется *большим* в смысле Вальдхаузена, если M^3 содержит вложенную поверхность, фундаментальная группа которой бесконечна и является подгруппой фундаментальной группы многообразия M^3. Класс больших многообразий содержит, например, 3-многообразия с бесконечной первой группой гомологий и 3-многообразия с несжимаемым краем (скажем, такие как $T^2 \times [0;1]$). Дополнения к нетривиально вложенным в 3-сферу узлам также являются большими в смысле Вальдхаузена многообразиями [30].

Следующую теорему о топологической структуре несущего 3-многообразия для потока Морса—Смейла без состояний равновесия доказал Морган [75].

Теорема 4.1. *Пусть f^t — поток Морса—Смейла без состояний равновесия на замкнутом трехмерном многообразии M^3. Тогда если M^3 не является большим в смысле Вальдхаузена, то M^3 — пространство Зейферта. Если M^3 является большим в смысле Вальдхаузена, то M^3 есть специальное объединение пространств Зейферта и прямых произведений $T^2 \times [0;1]$.*

Немного раньше Френкс [63] получил необходимые и достаточные условия существования потока Морса—Смейла без состояний равновесия на трехмерной сфере S^3 с предписанным набором периодических траекторий. Именно, обозначим через A_k число одномерных нескрученных[1] периодических траекторий индекса k (индекс периодической траектории равен размерности неустойчивого многообразия минус единица). Тогда на S^3 существует поток Морса—Смейла без состояний равновесия с предписанным набором (A_0, A_1, A_2) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: 1) $A_0 \geqslant 1$, $A_2 \geqslant 1$; 2) $A_1 \geqslant A_0 - 1$, $A_1 \geqslant A_2 - 1$. При этом, число скрученных периодических траекторий индекса 1 может быть произвольным [63].

На трехмерной сфере S^3 периодические траектории потока Морса—Смейла образуют индексированные зацепления (индексированность означает, что каждому узлу приписан индекс соответствующей периодической траектории). Простейшим потоком Морса—Смейла на S^3 без состояний равновесия является поток ровно с двумя периодическими траекториями, одна из которых имеет индекс 0 — притягивающая, а вторая имеет индекс 2 — отталкивающая (см. рис. 4.1). Эти траектории образуют известное зацепление Хопфа. С учетом индексов, будем называть его $(0,2)$ зацеплением Хопфа.

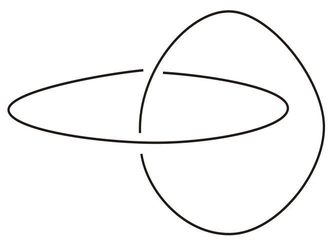

Рис. 4.1. Зацепление Хопфа

Вада [95] ввел шесть операций (назовем их *операциями Вады*) на множестве индексированных зацеплений и доказал, что любое индексированное зацепление, образованное периодическими

[1]Периодическая траектория называется *скрученной*, если отображение последования Пуанкаре на ее неустойчивом многообразии сопряжено инволюции $\vec{x} \to -\vec{x}$. В противном случае траектория называется *нескрученной*.

траекториями потока Морса—Смейла без состояний равновесия на S^3, может быть получено из $(0,2)$ зацепления Хопфа с помощью операций Вады. Обратно, любое индексированное зацепление на S^3, получаемое из $(0,2)$ зацепления Хопфа с помощью операций Вады, можно реализовать с помощью периодических траекторий некоторого потока Морса—Смейла без состояний равновесия (см. также [87, 97]). В работе Бина [50] индексированные зацепления несингулярных потоков без гетероклинических пересечений на S^3 описываются на языке *графа Ляпунова* — ориентированного графа, вершины и ребра которого соответствуют элементам фильтрации и регулярным линиям уровня, соответственно, функции Ляпунова для потока.

Напомним, что *k-ручкой* размерности n, $0 \leqslant k \leqslant n$, называется произведение $D^k \times D^{n-k}$ или гомеоморфный образ этого произведения, где D^j — j-мерный замкнутый шар. Иногда $D^k \times D^{n-k}$ называют ручкой индекса k. Часть $S^{k-1} \times D^{n-k}$ границы $\partial\left(D^k \times D^{n-k}\right)$ называется *подошвой* ручки $D^k \times D^{n-k}$. Приклеивание k-ручки $D^k \times D^{n-k}$ к n-мерному многообразию M^n с непустой границей состоит в отождествлении подошвы

$$S^{k-1} \times D^{n-k} \subset S^{k-1} \times D^{n-k} \bigcup D^k \times S^{n-k-1} = \partial\left(D^k \times D^{n-k}\right)$$

и некоторой части границы ∂M^n с помощью некоторого гомеоморфизма $S^{k-1} \times D^{n-k} \to \partial M^n$. Отметим, что приклеивание ручки индекса 0 состоит в добавлении к M^n отдельно взятого шара размерности n, а приклеивание ручки индекса n заключается в заклеивании n-мерным шаром одной из компонент ∂M^n.

Круговой k-ручкой размерности n, $0 \leqslant k \leqslant n$, называется произведение $S^1 \times D^k \times D^{n-k-1}$. Приклеивание круговой k-ручки $S^1 \times D^k \times D^{n-k-1}$ к M^n состоит в отождествлении множества

$$S^1 \times S^{k-1} \times D^{n-k-1} \subset \partial\left(S^1 \times D^k \times D^{n-k-1}\right)$$

и части границы ∂M^n с помощью некоторого диффеоморфизма $S^1 \times S^{k-1} \times D^{n-k-1} \to \partial M^n$. Если M^n может быть получено из $M^{n-1} \times [0;1]$, где M^{n-1} — некоторое $(n-1)$-многообразие, последовательным приклеиванием круговых ручек (вообще говоря, различных индексов), то говорят, что *M^n допускает разложение на круговые ручки*.

Для многообразий размерности $n \geqslant 4$ Азимов [44] доказал следующую теорему.

Теорема 4.2. *На многообразии M^n ($n \geqslant 4$) существует поток Морса—Смейла без состояний равновесия тогда и только тогда, когда M^n допускает разложение на круговые ручки.*

В работе [45] Азимов доказал для многообразий размерности $n \geqslant 4$, что любое векторное поле без особенностей гомотопно (в пространстве векторных полей без особенностей) векторному полю Морса—Смейла. Поэтому описание несущего многообразия в силу теоремы 4.2 может быть применимо для более широкого класса потоков без состояний равновесия.

5. Потоки Морса—Смейла с состояниями равновесия на 3-многообразиях

В описании несущих многообразий для потоков Морса—Смейла с состояниями равновесия используются такие понятия топологии многообразий, как разложение Хегора, род Хегора и т.п.

Трехмерное многообразие D^3_g называется *3-шаром с g ручками*, если D^3_g получается из трехмерного диска D^3 приклеиванием $g \geqslant 0$ ручек индекса 1. *Разбиением Хегора* рода $g \geqslant 0$ замкнутого трехмерного многообразия M^3 называется представление M^3 в виде склейки двух 3-шаров с g ручками с помощью некоторого гомеоморфизма, отождествляющего их границы. *Родом Хегора* $h(M^3)$ многообразия M^3 называется наименьшее g, для которого существует соответствующее разбиение Хегора многообразия M^3.

В работах [16, 17] рассматривается в некотором смысле альтернативная к работе [44] ситуация, когда поток Морса—Смейла необходимо содержит состояния равновесия. В [17] доказана следующая теорема.

Теорема 5.1. *Пусть на замкнутом трехмерном многообразии M^3 задан поток f^t Морса—Смейла, неблуждающее множество которого состоит из $\nu(f^t)$ седловых и $\mu(f^t)$ узловых состояний равновесия. Тогда многообразие M^3 можно представить в виде разбиения Хегора* *рода*

$$h_D = \frac{\nu(f^t) - \mu(f^t) + 2}{2}.$$

На любом замкнутом многообразии M^3 существует поток Морса—Смейла без периодических траекторий такой, что $2h(M^3) = \nu(f^t)$.

Следствие 5.1. *Пусть на замкнутом 3-многообразии M^3 задан поток f^t Морса—Смейла, неблуждающее множество которого состоит из $\nu(f^t)$ седловых и $\mu(f^t)$ узловых состояний равновесия. Тогда*

$$h(M^3) \leqslant \frac{\nu(f^t) - \mu(f^t) + 2}{2}.$$

Из теоремы 5.1 можно извлечь следующее достаточное условие существования периодических траекторий.

Предложение 5.1. *Пусть на замкнутом 3-многообразии M^3 задан поток f^t Морса—Смейла, множество состояний равновесия которого состоит из $\nu(f^t)$ седел и $\mu(f^t)$ узлов. Тогда если*

$$h(M^3) > \frac{\nu(f^t) - \mu(f^t) + 2}{2},$$

то поток f^t имеет периодические траектории.

Теорема 5.2. *Пусть на замкнутом трехмерном многообразии M^3 задан поток f^t Морса—Смейла, неблуждающее множество которого состоит из $\nu(f^t) \geqslant 0$ седловых состояний равновесия, $\mu(f^t) \geqslant 0$ узловых состояний равновесия, $s(f^t) \geqslant 0$ седловых периодических траекторий и $r(f^t) \geqslant 0$ узловых периодических траекторий. Тогда многообразие M^3 можно представить в виде разбиения Хегора рода*

$$h_D = \frac{\nu(f^t) - \mu(f^t) + 2}{2} + s(f^t).$$

Более того,

$$h(M^3) \leqslant \frac{\nu(f^t) + r(f^t)}{2} + s(f^t).$$

Имеется несколько классификационных результатов для частных классов потоков Морса—Смейла на замкнутых 3-многообразиях. В [61] получена классификация *полярных потоков*, т. е. градиентно-подобных потоков, у которых имеется ровно один устойчивый и ровно один неустойчивый узел. Рассматривая пересечения сепаратрис седел со сферами, окружающими узлы, автор строит полный классификационный инвариант таких потоков, который называется в работе [61] диаграммой Хегора. Уманский [40] построил полный топологический инвариант для потоков Морса—Смейла с конечным числом траекторий, принадлежащих пересечению двумерных сепаратрис седловых неблуждающих траекторий. Этот инвариант представляет собой комбинаторное описание границ ячеек потока и описание характера примыкания ячеек к стокам и источникам. В работе [36] построен полный инвариант для потоков Морса—Смейла без периодических траекторий. Этот инвариант с точностью до гомеоморфизма представляет собой поверхность, трансверсальную траекториям потока, лежащим вне замыкания одномерных сепаратрис седловых точек, со следами от пересечения этой поверхности с двумерными сепаратрисами седловых точек.

6. Потоки с тремя состояниями равновесия

Как указывалось ранее, если неблуждающее множество потока Морса—Смейла на замкнутом многообразии M^n состоит из двух точек, то поток имеет ровно один устойчивый и ровно один неустойчивый узлы, многообразие M^n является n-мерной сферой и поток топологически эквивалентен стандартному потоку типа «север—юг». Естественно рассмотреть вопрос о динамике потоков Морса—Смейла, неблуждающее множество которых состоит из трех точек. Согласно предложению 3.2, несущее двумерное многообразие такого потока является проективной плоскостью $M^2 = \mathbb{P}^2$, и все потоки Морса—Смейла на $\mathbb{P}^2$, неблуждающее множество которых состоит из трех состояний равновесия, топологически эквивалентны. Фазовый портрет такого потока изображен на рис. 6.1. Нетрудно видеть, что сток ω и неустойчивое многообразие $W^u(\sigma)$ седла σ образуют

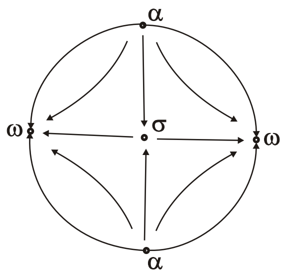

Рис. 6.1. Поток на проективной плоскости (диаметрально противоположные точки окружности отождествляются)

локально плоско вложенную окружность $S^1 \subset \mathbb{P}^2$ такую, что $\mathbb{P}^2 \setminus S^1$ гомеоморфно открытому шару. Это обстоятельство мотивирует следующее определение.

Напомним, что топологически вложенная в M^n k-мерная сфера S^k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, называется *локально плоско вложенной*, если для любой точки $z \in S^k$ существует окрестность $U(z) = U \subset M^n$ и гомеоморфизм $\varphi_z : U \to \mathbb{R}^n$ такие, что $\varphi_z(S^k \cap U) = \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$. Многообразие M^n называется *проективно-подобным*, если

1. $n \in \{2, 4, 8, 16\}$;
2. M^n есть дизъюнктное объединение[1] $\dfrac{n}{2}$-мерной сферы $S^{\frac{n}{2}}$, локально плоско вложенной в M^n, и открытого n-мерного шара B^n,

$$M^n = S^{\frac{n}{2}} \cup B^n, \quad S^{\frac{n}{2}} \cap B^n = \varnothing.$$

Жужомой и Медведевым в [74] (см. также [26]) была доказана следующая теорема.

Теорема 6.1. *Пусть f^t — поток Морса—Смейла, неблуждающее множество которого состоит из трех состояний равновесия, на замкнутом n-мерном многообразии M^n, $n \geqslant 2$. Тогда M^n является проективно-подобным многообразием. При этом M^2 является проективной плоскостью $M^2 = \mathbb{P}^2$ (неориентируемой поверхностью рода единица с фундаментальной группой $\pi_1(M^2) = \mathbb{Z}_2$), а при $n \geqslant 4$*

$$\pi_1(M^n) = \dots = \pi_{\frac{n}{2}-1}(M^n) = 0, \quad \textit{и следовательно, } M^n \textit{ — ориентируемое.}$$

Более того, на каждом проективно-подобном многообразии существует поток Морса—Смейла, неблуждающее множество которого состоит из трех состояний равновесия.

Отметим, что поток Морса—Смейла на M^n, неблуждающее множество которого состоит из трех состояний равновесия, имеет ровно одно седло, и замыкания инвариантных многообразий (устойчивых и неустойчивых) этого седла являются топологически вложенными сферами размерности $n/2$. Сформулируем теперь результаты о топологической эквивалентности потоков с тремя состояниями равновесия, недавно полученные Е. В. Жужомой и В. С. Медведевым [31]. Для этого введем ключевое понятие локально эквивалентно вложенных в несущее многообразие подмногообразий.

Пусть M_1^k, M_2^k — топологически вложенные в M^n k-мерные подмногообразия, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Будем говорить, что M_1^k и M_2^k *локально эквивалентно вложены*, если существуют окрестности $U(\operatorname{clos} M_1^k)$, $U(\operatorname{clos} M_2^k)$ топологических замыканий $\operatorname{clos} M_1^k$, $\operatorname{clos} M_2^k$ подмногообразий M_1^k, M_2^k, соответственно, и гомеоморфизм $h : U(\operatorname{clos} M_1^k) \to U(\operatorname{clos} M_2^k)$ такой, что $h(M_1^k) = M_2^k$. Для несущих многообразий размерностей $n = 8$ и $n = 16$ имеет место следующая теорема.

Теорема 6.2. *Пусть f_i^t — поток Морса—Смейла $(i = 1, 2)$, неблуждающее множество которого состоит из трех состояний равновесия, на замкнутом n-мерном топологическом многообразии M_i^n, где $n = 8, 16$. Потоки f_1^t, f_2^t топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда устойчивые (равносильно неустойчивые) многообразия седел потоков f_1^t, f_2^t локально эквивалентно вложены.*

Что касается размерностей $n = 2$ и $n = 4$, то имеет место следующая теорема.

[1] Объединение называется *дизъюнктным*, если объединяемые множества попарно не пересекаются.

Теорема 6.3. *Пусть f_1^t, f_2^t — потоки Морса—Смейла, неблуждающее множество которых состоит из трех состояний равновесия, на замкнутых топологических многообразиях M_1^n, M_2^n соответственно, где $n = 2, 4$. Тогда f_1^t, f_2^t топологически эквивалентны. В частности, многообразия M_1^4, M_2^4 гомеоморфны, а для размерности $n = 2$ многообразия M_1^2, M_2^2 гомеоморфны проективной двумерной плоскости $\mathbb{P}^2$.*

7. О взаимосвязи числовых характеристик неблуждающего множества систем Морса—Смейла и топологии несущего многообразия

В этом разделе рассматриваются диффеоморфизмы Морса—Смейла, удовлетворяющие некоторым специальным условиям.

Как указывалось ранее, на любом трехмерном многообразии можно задать диффеоморфизм Морса—Смейла. Однако не на всех многообразиях существуют диффеоморфизмы Морса—Смейла без гетероклинических кривых. Замечательный результат был получен в работах [12,53] о топологической структуре замкнутых 3-многообразий, на которых такие диффеоморфизмы существуют.

Теорема 7.1. *Пусть $f : M^3 \to M^3$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса—Смейла замкнутого ориентируемого 3-многообразия без гетероклинических кривых. Тогда M^3 есть либо сфера S^3, и в этом случае $\nu(f) = \mu(f) - 2$, либо M^3 есть связная сумма $(S^2 \times S^1)\sharp \cdots \sharp(S^2 \times S^1)$. В последнем случае число слагаемых в связной сумме равно*

$$\frac{\nu(f) - \mu(f) + 2}{2},$$

где $\nu(f)$ — число седловых и $\mu(f)$ — число узловых периодических точек.

Обозначим через $G^*(M^n)$ множество сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса—Смейла ориентируемого n-мерного ($n \geqslant 4$) замкнутого многообразия M^n, у которых все седловые периодические точки имеют одномерное устойчивое или неустойчивое многообразие, а инвариантные многообразия различных седловых точек не пересекаются. Е. Гуревич и В. Медведев в работах [24, 25] (см. также [65]) обобщили теорему 7.1, доказав следующую теорему.

Теорема 7.2. *Замкнутое ориентируемое n-многообразие M^n ($n \geqslant 4$) допускает сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса—Смейла $f : M^n \to M^n$ из класса $G^*(M^n)$ с $\nu(f) \geqslant 0$ седловыми и $\mu(f) \geqslant 2$ узловыми периодическими точками тогда и только тогда, когда M^n есть либо сфера, и в этом случае $\nu(f) = \mu(f) - 2$, либо M^n есть связная сумма $(S^{n-1} \times S^1)\sharp \cdots \sharp(S^{n-1} \times S^1)$. В последнем случае число слагаемых в связной сумме равно*

$$\frac{\nu(f) - \mu(f) + 2}{2}.$$

По существу, из теоремы 7.1 вытекает, что на 3-многообразиях не существует диффеоморфизмов Морса—Смейла ровно с тремя периодическими точками. Опуская тривиальный случай диффеоморфизма ровно с двумя периодическими точками, получаем, что простейшим является диффеоморфизм Морса—Смейла ровно с четырьмя периодическими точками. У таких диффеоморфизмов возможно достаточно сложное вложение инвариантных многообразий седловых периодических точек, что приводит к существованию нетривиальных примеров даже на 3-сфере S^3. Возможность дикого (не ручного) вложения инвариантных многообразий седловых периодических точек была открыта в работе Д. Пикстона [86] для диффеоморфизма Морса—Смейла $f : S^3 \to S^3$ с тремя узлами (два стока и один источник) и одним седлом с одномерной (неустойчивой) и двумерной (устойчивой) сепаратрисами (далее мы называем класс таких диффеоморфизмов *классом Пикстона*). Чтобы понять возникновение дикого вложения сепаратрис седловой неподвижной точки диффеоморфизма f, обозначим через ω_1, ω_2 стоки и через $W^{u+}(\sigma)$ сепаратрису седла σ, идущую в сток ω_2, см. рис. 7.1 (a). Теперь представим объединение $\alpha \cup W^s(\sigma) \cup W^{u+}(\sigma) \cup \omega_2$ как бесконечную «кривую», половина которой немного раздута (эта половина соответствует $\alpha \cup W^s(\sigma)$), где $W^s(\sigma)$ — устойчивое многообразие седла σ. Затем вложим эту кривую вместе с некоторой окрестностью в S^3, как кривую с двумя концами дикости. Например, как хорошо известную дикую дугу Артина—Фокса [43], см. рис. 7.1 (b).

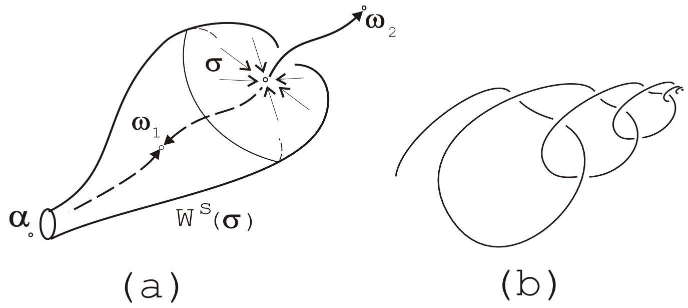

Рис. 7.1

Дадим точное определение. Пусть $f \in \mathcal{MS}(M^3)$, ω — стоковая точка и $\ell^u(\sigma)$ — одномерная сепаратриса седловой точки σ такая, что $\ell^u(\sigma) \subset W^s(\omega)$. Сепаратриса $\ell^u(\sigma)$ называется *ручно вложенной* в M^3, если существует гомеоморфизм $h : W^s(\omega) \to \mathbb{R}^3$ такой, что $h(\ell^u(\sigma))$ — луч в $\mathbb{R}^3$. Аналогичным образом пучок L_ω одномерных сепаратрис, содержащих ω в своем замыкании, называется *ручным*, если существует гомеоморфизм $h : W^s(\omega) \to \mathbb{R}^3$, распрямляющий сепаратрисы.

Из работы [70] вытекает следующий критерий ручного вложения одномерной седловой сепаратрисы.

Предложение 7.1. *Пусть $f \in \mathcal{MS}(M^3)$, ω — стоковая точка и $\ell^u(\sigma)$ — одномерная сепаратриса седловой точки σ такая, что $\ell^u(\sigma) \subset W^s(\omega)$. Сепаратриса $\ell^u(\sigma)$ ручно вложена в M^3 тогда и только тогда, когда существует гладкий 3-шар $B_\omega \subset W^s(\omega)$, содержащий ω в своей внутренности и такой, что $\ell^u(\sigma)$ пересекает ∂B_ω в одной точке.*

Аналогичный критерий для пучка одномерных сепаратрис не имеет места. Так, в работе [60] построен пучок дуг в $\mathbb{R}^3$, пересекающих границу некоторого 3-шара по одной точке, но являющийся ручным (см. рис. 7.2, где пучок дуг Дебрунера—Фокса реализован пучком сепаратрис диффеоморфизма Морса—Смейла на S^3). Авторы назвали такой пучок *умеренно диким*, поскольку при извлечении любой дуги из такого пучка оставшееся объединение дуг становится ручным.

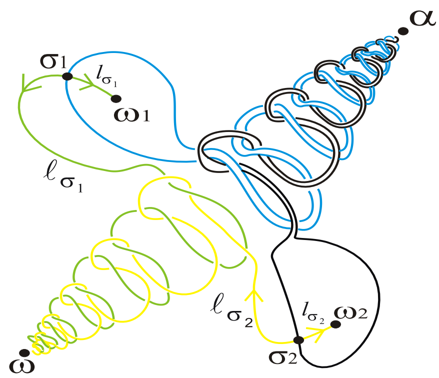

Рис. 7.2

Пусть $f : M^3 \to M^3$ — диффеоморфизм Морса—Смейла без гетероклинических точек замкнутого 3-многообразия M^3. Будем говорить, что одномерные сепаратрисы диффеоморфизма f *тривиально вложены*, если все пучки одномерных сепаратрис являются ручными.

Следующая теорема и следствия из нее о связи динамических характеристик диффеоморфизма Морса—Смейла с тривиально вложенными сепаратрисами и без гетероклинических точек с родом разбиения Хегора несущего 3-многообразия получены в работах [16, 17].

Теорема 7.3. *Пусть $f : M^3 \to M^3$ — градиентно-подобный диффеоморфизм замкнутого 3-многообразия M^3, имеющий $\nu(f)$ седловых и $\mu(f)$ узловых периодических точек. Если одномерные сепаратрисы диффеоморфизма f тривиально вложены, то многообразие M^3 можно* *представить в виде разбиения Хегора рода*

$$h = \frac{\nu(f) - \mu(f) + 2}{2}.$$

Следствие 7.1. *Пусть $f : M^3 \to M^3$ — градиентно-подобный диффеоморфизм замкнутого 3-многообразия M^3. Если одномерные сепаратрисы диффеоморфизма f тривиально вложены, то число седловых периодических точек диффеоморфизма f не меньше удвоенного рода Хегора многообразия M^3. На любом замкнутом многообразии M^3 рода Хегора $h(M^3)$ существует диффеоморфизм f Морса—Смейла без гетероклинических точек такой, что число седловых периодических точек диффеоморфизма f равно $2h(M^3)$.*

Из следствия 7.1 вытекает следующее достаточное условие наличия гетероклинических точек у диффеоморфизма Морса—Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами седловых периодических точек.

Предложение 7.2. *Пусть $f : M^3 \to M^3$ — диффеоморфизм Морса—Смейла замкнутого 3-многообразия M^3, имеющий $\nu(f)$ седловых и $\mu(f)$ узловых периодических точек, и предположим, что одномерные сепаратрисы седловых периодических точек диффеоморфизма f тривиально вложены. Тогда если*

$$h(M^3) > \frac{\nu(f) - \mu(f) + 2}{2},$$

то f имеет гетероклинические точки. В частности, f не вкладывается в поток.

Известно, что род Хегора аддитивен по отношению к связным суммам 3-многообразий [30]. Поскольку $h(S^2 \times S^1) = 1$, то род Хегора связной суммы $h\left((S^2 \times S^1)\sharp \cdots \sharp (S^2 \times S^1)\right)$ равен числу слагаемых в связной сумме. Отсюда, теоремы 7.1 и теоремы Зейферта—Ван Кампена вытекает следующее утверждение.

Предложение 7.3. *Пусть $f : M^3 \to M^3$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса—Смейла замкнутого ориентируемого 3-многообразия, имеющий $\nu(f)$ седловых и $\mu(f)$ узловых периодических точек, и выполняется одно из следующих условий*:

1. $h(M^3) > \dfrac{\nu(f) - \mu(f) + 2}{2}$;
2. *фундаментальная группа $\pi_1(M^3)$ не равна свободному произведению $\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$ g экземпляров группы целых чисел $\mathbb{Z}$.*

Тогда f имеет гетероклинические кривые.

Замкнутые гетероклинические кривые нередко имеют искусственное происхождение и их наличие не обусловлено топологической структурой несущего многообразия или динамическими ограничениями. Что касается незамкнутых гетероклинических кривых, то, как показывает следующая теорема, доказанная в [18], имеются диффеоморфизмы Морса—Смейла, которые необходимо имеют незамкнутые гетероклинические кривые.

Теорема 7.4. *Пусть f — диффеоморфизм Морса—Смейла замкнутого ориентируемого трехмерного многообразия, для которого 3-мерная сфера S^3 является универсальным накрытием, и пусть неблуждающее множество f состоит из двух седловых и двух узловых периодических точек. Тогда существует, по крайней мере, одна гетероклиническая незамкнутая кривая, граница которой состоит из седловых точек* (*см. рис.* 7.3). *Каждая такая гетероклиническая кривая инвариантна относительно некоторой итерации диффеоморфизма f. Более того, если пересечение двумерных инвариантных многообразий седловых точек не исчерпывается такими гетероклиническими кривыми, то оставшаяся часть пересечения содержит счетное семейство замкнутых гетероклинических кривых, которые представляют собой объединение орбит некоторого конечного набора замкнутых гетероклинических кривых.*

В следующей теореме получена нижняя оценка числа незамкнутых гетероклинических кривых для диффеоморфизмов Морса—Смейла на линзах $L_{p,q}$ в предположении, что неблуждающее множество диффеоморфизма содержит ровно четыре периодические точки [18].

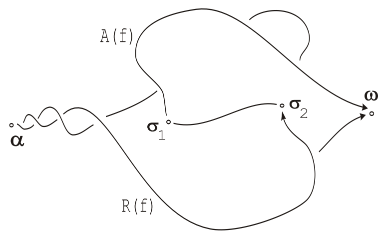

Рис. 7.3

Теорема 7.5. *Пусть $f : L_{p,q} \to L_{p,q}$ — диффеоморфизм Морса—Смейла, неблуждающее множество которого состоит в точности из четырех периодических точек. Тогда*

1. *f имеет 2 узловых и 2 седловых периодических точек, при этом седловые точки имеют разный индекс Морса.*
2. *Если одномерные сепаратрисы диффеоморфизма f тривиально вложены, то существует, по крайней мере, p гетероклинических незамкнутых кривых, граница каждой из которых состоит из седловых точек. Каждая такая гетероклиническая кривая инвариантна относительно некоторой итерации диффеоморфизма f.*

Из теоремы 7.1 следует, что каждый градиентно-подобный диффеоморфизм на любом неприводимом многообразии при наличии хотя бы одной седловой точки необходимо имеет гетероклинические кривые (компактные или некомпактные). Следующая теорема, доказанная в [67], уточняет этот результат для полярных систем.

Теорема 7.6. *Двумерное инвариантное многообразие каждой седловой точки полярного градиентно-подобного диффеоморфизма на неприводимом многообразии содержит некомпактную гетероклиническую кривую.*

8. Глобальная динамика систем Морса—Смейла

Сложность динамики произвольных систем Морса—Смейла хорошо иллюстрирует следующий результат В. С. Афраймовича и Л. П. Шильникова [7]. Пусть f^t — поток на компактном многообразии M^n. Обозначим через $G(f^t)$ группу гомеоморфизмов потока f^t на себя, т. е. каждый гомеоморфизм из $G(f^t)$ переводит любую траекторию потока f^t в траекторию потока f^t с сохранением ориентации по времени. Метрика на M^n индуцирует естественную метрику на $G(f^t)$. Следуя [7], будем называть траекторию l потока f^t *особой*, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $g \in G(f^t)$, ε-близкого к тождественному гомеоморфизму, выполняется условие $g(l) = l$.

Все состояния равновесия и периодические траектории потока Морса—Смейла являются особыми, поскольку они изолированы в неблуждающем множестве. Однако помимо этих траекторий особой может быть блуждающая траектория l, принадлежащая пересечению устойчивого W^s и неустойчивого многообразия W^u некоторых неблуждающих траекторий, при этом $\dim W^s + \dim W^u = \dim M^n + 1$. Траектории l приписывается тип $(\dim W^s, \dim W^u)$. Множество всех таких особых траекторий типа $(m + 1, \dim M^n - m)$ и предельных для них неблуждающих траекторий обозначим через $\mathfrak{M}_{m+1}$. Это множество в общем случае несвязно и состоит из конечного числа компонент, которые обозначаются через $\mathfrak{M}^{(1)}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{M}^{(\kappa)}_{m+1}$. В этих обозначениях имеет место следующая теорема, доказанная в [7].

Теорема 8.1. *Пусть f^t — Морса—Смейла, и пусть $\mathfrak{M}^{(i)}_{m+1}$ — компонента множества $\mathfrak{M}_{m+1}$. Тогда ограничение потока Морса—Смейла на $\mathfrak{M}^{(i)}_{m+1}$ топологически орбитально эквивалентно специальной надстройке (Σ_A, f) над некоторой топологической марковской цепью (Σ_A, σ) с конечным числом состояний, где Σ_A — пространство двусторонних последовательностей, определяемых матрицей A, из нулей и единиц, а неотрицательная функция $f : \Sigma_A \to [0; 1]$ обращается в ноль только в точках, соответствующим постоянным последовательностям (σ — сдвиг влево на единицу).*

Однако несмотря на сложную структуру множества особых траекторий, любую систему Морса—Смейла можно представить в виде «источник— сток», где под «источником» и «стоком» уже понимаются по возможности просто устроенные инвариантные замкнутые множества, одно из которых является аттрактором, а другое — репеллером, см. рис. 1.2. Опишем конструкцию аттрактора A_f и репеллера R_f для диффеоморфизма Морса—Смейла $f: M^n \to M^n$. Когда пространство $\hat{V}_f$ орбит блуждающего множества $V_f = M^n \setminus (A_f \cup R_f)$ (вместе с вложенными в него образами при факторизации инвариантных многообразий седловых периодических точек) поддается описанию, то это приводит к обнаружению новых топологических инвариантов, описывающих вложение (возможно, дикое) устойчивых и неустойчивых многообразий седловых периодических точек в несущее многообразие. Это создает предпосылки для топологической классификации в рамках данного класса диффеоморфизмов (см. раздел 9).

Пусть $f: M^n \to M^n$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса—Смейла. Обозначим через Σ_f, Δ_f^s и Δ_f^u все седла, стоки и источники, соответственно, диффеоморфизма f. Разделим седловые точки Σ_f на два непересекающихся подмножества Σ_f^A и Σ_f^R таких, что множества

$$A_f = \Delta_f^s \cup W^u_{\Sigma_f^A} \quad \text{и} \quad R_f = \Delta_f^u \cup W^s_{\Sigma_f^R}$$

являются замкнутыми и инвариантными. Заметим, что если одно из множеств A_f или R_f инвариантно и замкнуто, то другое также является замкнутым и инвариантным. Кроме того, множества A_f и R_f содержат все периодические точки диффеоморфизма f и не пересекаются. Наибольшую размерность неустойчивого (устойчивого) многообразия точек из Σ_f^A (Σ_f^R) будем называть *размерностью* A_f (R_f).

Теорема 8.2. *Пусть $f: M^n \to M^n$ — диффеоморфизм Морса—Смейла. Тогда множество A_f (соответственно, R_f) является аттрактором (репеллером) диффеоморфизма f. Более того, если размерность аттрактора A_f (репеллера R_f) $\leqslant n-2$, то репеллер R_f (аттрактор A_f) является связным.*

Мы будем называть A_f и R_f *глобальными аттрактором и репеллером диффеоморфизма Морса—Смейла* $f: M^n \to M^n$.

Следующая теорема описывает топологическую структуру пространства орбит множества

$$V_f = M^n \setminus (A_f \cup R_f).$$

Обозначим через

$$\hat{V}_f = V_f / f$$

множество орбит действия f на многообразии V_f, которое совпадает с множеством орбит диффеоморфизма f на V_f. Пусть

$$p_f : V_f \to \hat{V}_f$$

— естественная проекция, ставящая в соответствие точке $x \in V_f$ ее орбиту в силу диффеоморфизма f и наделяющая множество $\hat{V}_f$ фактортопологией.

Напомним, что сфера $S^{n-1} \subset M^n$ называется *цилиндрически вложенной в* M^n, если существует топологическое вложение $h: \mathbb{S}^{n-1} \times [-1;+1] \to M^n$ такое, что $h(\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}) = S^{n-1}$. По аналогии с трехмерным случаем мы называем M^n *неприводимым*, если любая цилиндрически вложенная в M^n $(n-1)$-сфера ограничивает в M^n n-шар.

Теорема 8.3. *Пространство V_f является замкнутым гладким ориентируемым n-многообразием. Более того, если размерность аттрактора A_f и репеллера $R_f \leqslant n-2$, то V_f связно и $\hat{V}_f$ либо неприводимо, либо гомеоморфно $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.*

Сформулируем несколько следствий теорем 8.2 и 8.3.

Следствие 8.1. *Если диффеоморфизм Морса—Смейла $f: M^n \to M^n$ не имеет седловых точек с одномерными неустойчивыми (устойчивыми) многообразиями, то неблуждающее множество f содержит в точности один сток (источник).*

Естественным обобщением диффеоморфизмов «источник—сток» являются так называемые *полярные диффеоморфизмы* — диффеоморфизмы Морса—Смейла, имеющие ровно один источник и один сток. Тогда из следствия 8.1 немедленно получаем.

Следствие 8.2. *Если диффеоморфизм Морса—Смейла $f : M^n \to M^n$ не имеет седловых точек с одномерными инвариантными многообразиями, то f — полярный диффеоморфизм.*

Напомним, что *ручкой индекса q размерности n* $(0 \leqslant q \leqslant n)$ называется прямое произведение двух дисков $H_q^n = \mathbb{B}^q \times \mathbb{B}^{n-q}$. Диск $\mathbb{B}^q$ называют *осью ручки*. Ручка H_q^n является гладким многообразием с краем $\partial H_q^n = \partial(\mathbb{B}^q \times \mathbb{B}^{n-q}) = (\partial\mathbb{B}^q \times \mathbb{B}^{n-q}) \cup (\mathbb{B}^q \times \partial\mathbb{B}^{n-q}) = (\mathbb{S}^{q-1} \times \mathbb{B}^{n-q}) \cup (\mathbb{B}^q \times \mathbb{S}^{n-q-1})$. Напомним операцию *приклеивания ручки* H_q^n к n-многообразию A^n с краем $B^{n-1} = \partial A^n$. Пусть $\mathbb{S}^{q-1} \subset B^{n-1}$ — гладко вложенная сфера и $N(\mathbb{S}^{q-1})$ — ее трубчатая окрестность, диффеоморфная прямому произведению $\mathbb{S}^{q-1} \times \mathbb{B}^{n-q}$. Склеим многообразие A^n с ручкой H_q^n по отображению $g : \mathbb{S}^{q-1} \times \mathbb{B}^{n-q} \to N(\mathbb{S}^{q-1})$, которое есть диффеоморфизм между трубчатой окрестностью $N(\mathbb{S}^{q-1})$ и многообразием $\mathbb{S}^{q-1} \times \mathbb{B}^{n-q}$, являющимся частью границы ∂H_q^n. Сглаживая затем «углы», возникшие в точках $\partial N(\mathbb{S}^{q-1}) = \mathbb{S}^{q-1} \times \mathbb{S}^{n-q-1}$, получим гладкое многообразие $\tilde{A}^n$ с гладким краем $\tilde{B}^{n-1}$.

Компактный n-мерный *кобордизм* — это тройка (K, L_0, L_1), где L_0 и L_1 — замкнутые многообразия размерности $n-1$, и K — компактное n-мерное многообразие такое, что $\partial K = L_0 \sqcup L_1$.

Следствие 8.3. *Пусть $f : M^n \to M^n$ — диффеоморфизм Морса—Смейла, Σ_f^A — множество седловых точек с одномерными неустойчивыми многообразиями и $\Sigma_f^R = \Sigma_f \setminus \Sigma_f^A$. Тогда соответствующие глобальные аттрактор A_f и репеллер R_f являются связными. Более того, существует n-мерный кобордизм (K, L_0, L_1), где $K \subset V_f$, L_i, $i = 1, 2$, гомеоморфно границе n-шара с приклеенными $g \geqslant 0$ n-мерными ручками индекса 1, такой, что $\hat{V}_f$ получается из (K, L_0, L_1) отождествлением его границ в силу диффеоморфизма f.*

Следующая теорема описывает структуру глобального аттрактора и репеллера в случае, когда они не содержат гетероклинических пересечений.

q-Клеткой e^q $(q \geqslant 0)$ в хаусдорфовом пространстве X называется образ открытого n-диска $int\ \mathbb{B}^q$ при непрерывном отображении $g^q : \mathbb{B}^q \to X$, ограничение которого $g^q|_{int\ \mathbb{B}^q} : int\ \mathbb{B}^q \to g^q(int\ \mathbb{B}^q)$ является гомеоморфизмом. Заметим, что $\partial\mathbb{B}^q = \mathbb{S}^{q-1}$ для всех $q \geqslant 0$. В случае $q = 1$ граница $\mathbb{S}^0$ диска $\mathbb{B}^1$ — две точки. В случае $q = 0$ диск $\mathbb{B}^0$ — точка и его граница $\mathbb{S}^{-1}$ — пустое множество. *Конечным клеточным комплексом* называется хаусдорфово пространство X, которое можно представить в виде объединения попарно непересекающихся клеток (клеточного разбиения) $X = \bigcup\limits_{q=0}^{n} \Big(\bigcup\limits_{j=1}^{c_q(X)} e_j^q \Big)$ такого, что граница $Fr\ e_j^q$ каждой клетки e_j^q содержится в объединении клеток меньших размерностей. Размерность наибольшей входящей в клеточный комплекс клетки называется *размерностью клеточного комплекса*.

Частным случаем клеточного комплекса является *сферический букет*, который получается из сфер $X_1, \ldots, X_m$ (возможно, разной положительной размерности) с отмеченными точками после отождествления их отмеченных точек с одной точкой [41]. Изолированную точку мы будем считать тривиальным сферическим букетом.

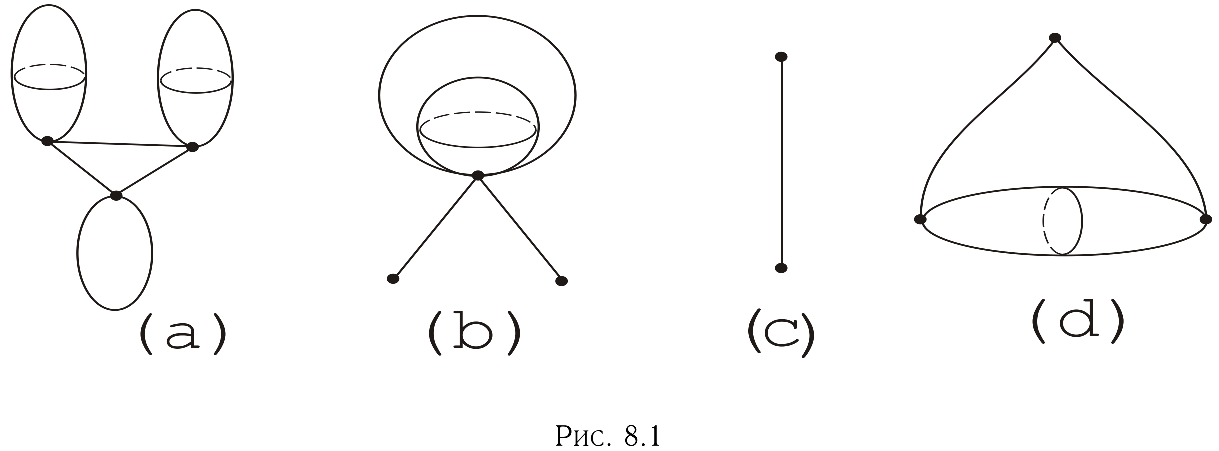

Рис. 8.1

Будем говорить, что два букета, вложенные в некоторое объемлющее пространство, *связаны дугой*, если к букетам добавляется дуга (топологическое вложение отрезка), соединяющая отмеченные точки букетов, внутренность которой не пересекается с букетами. Эту дугу будем называть *связывающей дугой*. Связное множество, состоящее из конечного числа сферических букетов и связывающих дуг назовем *связкой сферических букетов*. Например, на рис. 8.1 (a), (b), (c) изображены связки сферических букетов, в то время как множество, изображенное на рис. 8.1 (d) не является связкой сферических букетов, поскольку сфера букета должна иметь только одну отмеченную точку.

Теорема 8.4. *Пусть A_f (R_f) — глобальный аттрактор (репеллер) диффеоморфизма Морса—Смейла $f : M^n \to M^n$ такой, что A_f (R_f) не содержит гетероклинических пересечений. Тогда A_f (R_f) является конечным семейством связок сферических букетов.*

9. Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса—Смейла на n-многообразиях для $n \geqslant 3$

Рассмотрим вопросы классификации диффеоморфизмов Морса—Смейла на замкнутых 3-многообразиях.

Топологическая классификация диффеоморфизмов из класса Пикстона свелась к изотопической классификации узлов в $S^2 \times S^1$, гомотопных узлам $\{\cdot\} \times S^1$, см. детали в [52]. Как следствие, доказывалось существование счетного множества классов топологической сопряженности диффеоморфизмов Морса—Смейла на S^3 с тремя узлами и одним седлом.

Работа [52] ознаменовала прорыв в проблеме классификации диффеоморфизмов Морса—Смейла на 3-мерных многообразиях, поскольку в ней был найден принципиально новый инвариант сопряженности и на простейшем классе были проработаны основные этапы в доказательстве необходимых и достаточных условий сопряженности двух диффеоморфизмов из более широких классов. Эта работа послужила своеобразным катализатором, повлекшим поток работ по классификации различных классов диффеоморфизмов Морса—Смейла на замкнутых 3-мерных многообразиях [11–13, 54, 55] и др., приведший к полной топологической классификации в [35] сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов из множества $\mathcal{MS}$ (M^3). Мы опишем конструкцию построения полного топологического инварианта для таких диффеоморфизмов.

Пусть f сохраняющий ориентацию диффеоморфизм из класса $\mathcal{MS}$ (M^3). Обозначим через A_f (соответственно, R_f) объединение всех стоковых (соответственно, источниковых) периодических точек и всех одномерных неустойчивых (соответственно, устойчивых) многообразий седловых периодических точек диффеоморфизма f. Множество A_f является притягивающим и представляет собой объединение конечного числа дуг и окружностей, возможно, имеющих точки дикого заузления в стоковых периодических точках. Аналогичное описание имеет отталкивающее множество R_f. Также множества A_f и R_f могут содержать дуги, к которым, «осцилируя», стремятся одномерные сепаратрисы седловых периодических точек.

Положим $V_f = M^3 \setminus (A_f \bigcup R_f)$. Множество V_f является инвариантным открытым и связным подмножеством, принадлежащим блуждающему множеству диффеоморфизма f. Поскольку оно инвариантное, то можно рассмотреть пространство орбит $\hat{V}_f$, лежащих в V_f. Формально, $\hat{V}_f$ есть фактор-пространством по следующему отношению эквивалентности: две точки эквивалентны, если они принадлежат одной орбите. Обозначим через $p_f : V_f \to \hat{V}_f$ естественную проекцию. В силу теоремы 8.3, $\hat{V}_f$ является связным замкнутым ориентируемым трехмерным многообразием, а проекция p_f — накрытием с группой накрывающих преобразований, изоморфной $\mathbb{Z}$ (см., например, [19]). Поэтому p_f определяет эпиморфизм $\alpha_f : \pi_1(\hat{V}_f) \to \mathbb{Z}$. Обозначим через $\hat{\Gamma}^u_f$, $\hat{\Gamma}^s_f$ образы относительно p_f всех двумерных неустойчивых и устойчивых сепаратрис соответственно. Эти множества компактны и каждая из компонент линейной связности множеств $\hat{\Gamma}^u_f$, $\hat{\Gamma}^s_f$ представляет собой двумерный тор или бутылку Клейна с пустым, конечным или счетным множеством выколотых точек (см. рис. 9.1). При этом множества $\hat{\Gamma}^u_f$, $\hat{\Gamma}^s_f$ могут трансверсально пересекаться.

Набор $S_f = (\hat{V}_f, \alpha_f, \hat{\Gamma}^u_f, \hat{\Gamma}^s_f)$ назовем *схемой*. Две схемы $S_f = (\hat{V}_f, \alpha_f, \hat{\Gamma}^u_f, \hat{\Gamma}^u_f)$, $S_{f'} = (\hat{V}_{f'}, \alpha_{f'}, \hat{\Gamma}^u_{f'}, \hat{\Gamma}^s_{f'})$ называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h : \hat{V}_f \to \hat{V}_{f'}$ такой, что

1. $h(\hat{\Gamma}^u_f) = \hat{\Gamma}^u_{f'}$, $h(\hat{\Gamma}^u_f) = \hat{\Gamma}^u_{f'}$.
2. $h_*(\alpha_{f'}) = \alpha_f$, где изоморфизм $h_* : \pi_1(\hat{V}_{f'}, \mathbb{Z}) \to \pi_1(\hat{V}_f, \mathbb{Z})$ индуцируется гомеоморфизмом h.

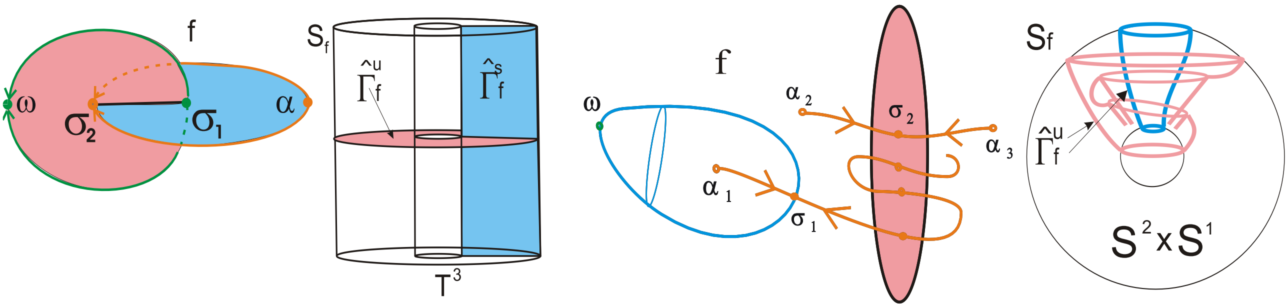

Рис. 9.1

Теорема 9.1. *Схема с точностью до эквивалентности является полным топологическим инвариантом в классе сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов из* $\mathcal{MS}$ (M^3).

Теорема 9.1 обобщена на класс G^* (M^n) в работе [65], где для диффеоморфизма $f \in G^*$ (M^n) введена схема, подобная схеме 3-диффеоморфизма Морса—Смейла.

Теорема 9.2. *Схема с точностью до эквивалентности является полным топологическим инвариантом в классе сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов из* G^* (M^n).

В работе [15] для диффеоморфизма f из класса $G(S^n)$ диффеоморфизмов Морса—Смейла с одномерным множеством неустойчивых сепаратрис на n-сфере введен граф $G(f)$ с автоморфизмом на нем, аналогичный различающему графу Безденежных—Гринеса (напомним, что этот граф, в свою очередь, есть аналог различающего графа Пейшото), и доказана следующая теорема.

В [18] доказана следующая теорема.

Теорема 9.3. *Пусть f и g — сохраняющие ориентацию диффеоморфизмы Морса—Смейла n-мерной сферы S^n* $(n \geqslant 4)$ *такие, что неблуждающее множество каждого диффеоморфизма состоит из четырех неподвижных точек*: *одного седла коразмерности один и трех узлов. Тогда f, g сопряжены тогда и только тогда, когда индекс Морса их седел одинаков* (*либо* 1, *либо* $n-1$).

Этот результат контрастирует с тем, что на 3-мерной сфере имеется счетное семейство попарно несопряженных диффеоморфизмов Морса—Смейла с одним седлом и тремя узлами [52]. Более простая картина в многомерном случае объясняется тем, что одномерная сепаратриса и ее топологическое замыкание (плюс один из узлов) не может быть дико вложена. Это вытекает из работы [58], в которой доказано, что при $n \geqslant 4$ дико вложенная дуга должна иметь континуальное множество точек дикости. Поэтому в данном случае не требуется инвариантов заузления, как для размерности $n = 3$.

Теорема 9.4. *Пусть f и f' — сохраняющие ориентацию диффеоморфизмы из класса* $G(S^n)$. *Для топологической сопряженности диффеоморфизмов f, f' необходимо и достаточно, чтобы существовал изоморфизм графов $G(f)$ и $G(f')$, сопрягающий автоморфизмы.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. — М.: Наука, 1966.
2. *Андронов А. А., Понтрягин Л. С.* Грубые системы// Докл. АН СССР. — 1937. — *14*, № 5. — С. 247–250.
3. *Аносов Д. В.* Грубость геодезических потоков на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны// Докл. АН СССР. — 1962. — *145*, № 4. — С. 707–709.
4. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны// Тр. МИАН. — 1967. — *90*.
5. *Арансон С. Х.* Траектории на неориентируемых двумерных многообразиях// Мат. сб. — 1969. — *80*, № 3. — С. 314–333.
6. *Арансон С. Х., Медведев В. С.* Регулярные компоненты гомеоморфизмов n-мерной сферы// Мат. сб. — 1971. — *85*. — С. 3–17.
7. *Афраймович В. С., Шильников Л. П.* Об особых множествах систем Морса—Смейла// Тр. Моск. Мат. об-ва. — 1973. — *28*. — С. 181–214.

8. *Безденежных А.Н., Гринес В.З.* Реализация градиентноподобных диффеоморфизмов двумерных многообразий// В сб.: «Дифференциальные и интегральные уравнения». — ГГУ: Горький, 1985. — С. 33–37.
9. *Безденежных А.Н., Гринес В.З.* Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. I// В сб.: «Методы КТДУ». — Горький, 1985. — С. 22–38.
10. *Безденежных А.Н., Гринес В.З.* Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. II// В сб.: «Методы КТДУ». — Горький, 1987. — С. 24–32.
11. *Бонатти Х., Гринес В.З., Медведев В.С., Пеку Е.* О топологической классификации градиентноподобных диффеоморфизмов без гетероклинических кривых на трехмерных многообразиях// Докл. РАН. — 2001. — *377*, № 2. — С. 151–155.
12. *Бонатти Х., Гринес В.З., Медведев В.С., Пеку Е.* О диффеоморфизмах Морса—Смейла без гетероклинических пересечений на трехмерных многообразиях// Тр. МИАН. — 2002. — *236*. — С. 66–78.
13. *Бонатти Х., Гринес В.З., Починка О.В.* Классификация диффеоморфизмов Морса—Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях// Тр. МИАН. — 2005. — *250*. — С. 5–53.
14. *Гринес В.З.* Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса—Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях// Мат. заметки. — 1993. — *54*. — С. 3–17.
15. *Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С.* О классификации диффеоморфизмов Морса—Смейла с одномерным множеством неустойчивых сепаратрис// Тр. МИАН. — 2010. — *270*. — С. 20–35.
16. *Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С.* Новые соотношения для потоков и диффеоморфизмов Морса—Смейла// Докл. РАН. — 2002. — *382*, № 6. — С. 730–733.
17. *Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С.* Новые соотношения для систем Морса—Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами// Мат. сб. — 2003. — *194*, № 7. — С. 25–56.
18. *Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С.* О диффеоморфизмах Морса—Смейла с четырьмя периодическими точками на замкнутых ориентируемых многообразиях// Мат. заметки. — 2003. — *74*, № 3. — С. 369–386.
19. *Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С., Починка О.В.* Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса—Смейла// Тр. МИАН. — 2010. — *271*. — С. 111–133.
20. *Гринес В.З., Капкаева С.Х., Починка О.В.* Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей// Мат. сб. — 2014. — *205*, № 10. — С. 19–46.
21. *Гринес В.З., Починка О.В.* Введение в топологическую классификацию диффеоморфизмов на многообразиях размерности два и три. — Москва—Ижевск, 2011.
22. *Гробман Д.М.* О гомеоморфизме систем дифференциальных уравнений// Докл. АН СССР. — 1959. — *128*, № 5. — С. 880–881.
23. *Гробман Д.М.* Топологическая классификация окрестностей особой точки в n-мерном пространстве// Мат. сб. — 1962. — *56*, № 1. — С. 77–94.
24. *Гуревич Е.Я.* О диффеоморфизмах Морса—Смейла на многообразиях размерности большей 3// Труды Средневолжского мат. об-ва. — 2003. — *5*, № 1. — С. 161–165.
25. *Гуревич Е.Я., Медведев В.С.* О многообразиях размерности n, допускающих диффеоморфизмы с седловыми точками индексов 1 и $n-1$// Труды Средневолжского мат. об-ва. — 2006. — *8*, № 1. — С. 204–208.
26. *Жужома Е.В., Медведев В.С.* Системы Морса—Смейла с тремя неблуждающими точками// Докл. РАН. — 2011. — *440*, №1. — С. 11–14.
27. *Леонтович Е.А., Майер А.Г.* О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории// Докл. АН СССР. — 1937. — *14*, № 5. — С. 251–257.
28. *Леонтович Е.А., Майер А.Г.* О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории// Докл. АН СССР. — 1955. — *103*, № 4. — С. 557–560.
29. *Майер А.Г.* Грубое преобразование окружности в окружность// Ученые записки Горьк. гос. ун-та. — 1939. — *12*. — С. 215–229.
30. *Матвеев С.В.* Классификация достаточно больших трехмерных многообразий// Усп. мат. наук. — 1997. — *52*, № 5. — С. 147–174.
31. *Медведев В.С., Жужома Е.В.* Непрерывные потоки Морса—Смейла с тремя состояниями равновесия// Мат. сб. — принято к печати.
32. *Митрякова Т.М., Починка О.В.* О необходимых и достаточных условиях топологической сопряженности диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом орбит гетероклинического касания. Дифференциальные уравнения и динамические системы// Тр. МИАН. — 2010. — *270*. — С. 198–219.
33. *Ошемков А.А., Шарко В.В.* О классификации потоков Морса—Смейла на двумерных многообразиях// Мат. сб. — 1998. — *189*, № 8. — С. 93–140.

34. *Плисс В. А.* О грубости дифференциальных уравнений, заданных на торе// Вестн. ЛГУ. Сер. Мат. — 1960. — *13*. — С. 15–23.
35. *Починка О. В.* Классификация диффеоморфизмов Морса—Смейла на 3- многообразиях// Докл. АН СССР. — 2011. — *440*, № 6. — С. 34–37.
36. *Пришляк А.* Векторные поля Морса—Смейла без замкнутых траекторий на трехмерных многообразиях// Мат. заметки. — 2002. — *71*, № 2. — С. 230–235.
37. *Синай Я. Г.* Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы// Функц. анализ и его прилож. — 1968. — *2*, № 1. — С. 64–89.
38. *Синай Я. Г.* Построение марковских разбиений// Функц. анализ и его прилож. — 1968. — *2*, № 3. — С. 70–80.
39. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы// Усп. мат. наук. — 1970. — *25*, № 1. — С. 113–185.
40. *Уманский Я. Л.* Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса—Смейла с конечным числом особых траекторий// Мат. сб. — 1990. — *181*, № 2. — С. 212–239.
41. *Фоменко А. Т., Фукс Д. Б.* Курс гомотопической топологии. — М.: Наука, 1989.
42. *Aranson S., Belitsky G., Zhuzhoma E.* Introduction to qualitative theory of dynamical systems on closed surfaces. — Providence: Am. Math. Soc., 1996.
43. *Artin E., Fox R. H.* Some wild cells and spheres in three-dimensional space// Ann. Math. — 1948. — *49*. — C. 979–990.
44. *Asimov D.* Round handles and non-singular Morse—Smale flows// Ann. Math. — 1975. — *102*. — C. 41–54.
45. *Asimov D.* Homotopy of non-singular vector fields to structurally stable ones// Ann. Math. — 1975. — *102*. — C. 55–65.
46. *Batterson S.* The dynamics of Morse—Smale diffeomorphisms on the torus// Trans. Am. Math. Soc. — 1979. — *256*. — C. 395–403.
47. *Batterson S.* Orientation reversing Morse—Smale diffeomorphisms on the torus// Trans. Am. Math. Soc. — 1981. — *264*. — C. 29–37.
48. *Batterson S., Handel M., Narasimhan C.* Orientation reversing Morse—Smale diffeomorphisms of S^2// Invent. Math. — 1981. — *64*. — C. 345–356.
49. *Béguin F.* Smale diffeomorphisms of surfaces: an algorithm for the conjugacy problem. — Preprint, 1999.
50. *Bin Yu.* Behavior 0 nonsingular Morse—Smale flows on S^3// Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2016. — *36*, № 1. — C. 509–540.
51. *Blanchard P., Franks J.* The dynamical complexity of orientation reversing homeomorphisms of surfaces// Invent. Math. — 1980. — *62*. — C. 333–339.
52. *Bonatti Ch., Grines V.* Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3// Journal of Dynamical and Control Systems. — 2000. — *6*, № 4. — C. 579–602.
53. *Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pecou E.* Three-dimensional manifolds admitting Morse—Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves// Topology and Appl. — 2002. — *117*. — C. 335–344.
54. *Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pecou E.* Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds// Topology. — 2004. — *43*. — C. 369–391.
55. *Bonatti Ch., Grines V., Pochinka O.* Classification of Morse—Smale diffeomorphisms with the chain of saddles on 3-manifolds// В сб.: «Foliations 2005». — Singapore: World Scientific, 2006. — C. 121-–147.
56. *Bonatti Ch., Langevin R.* Difféomorphismes de Smale des surfaces. — Société Mathématique de France, 1998.
57. *Bowen R.* Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms// Transactions of the American. Math. Soc. — 1971. — *154*. — C. 337–397.
58. *Cantrell J. C., Edwards C. H.* Almost locally polyhedral curves in Euclidean n-space// Trans. Am. Math. Soc. — 1963. — *107*. — C. 451–457.
59. *Cobham A.* The intrinsic computational difficulty of functions// International Congress for Logic, Methodology, and Philosophy of Science, North-Holland, Amsterdam. — 1964. — C. 24–30.
60. *Debrunner H., Fox R.* A mildly wild imbedding of an n-frame// Duke Math. Journal. — 1960. — *27*. — C. 425–429.
61. *Fleitas G.* Classification of gradient-like flows in dimension two and three// Bol. Soc. Mat. Brasil. — 1975. — *2*, № 6. — C. 155–183.
62. *Franks J.* Some maps with infinitely many hyperbolic periodic points// Trans. Am. Math. Soc. — 1977. — *226*. — C. 175–179.
63. *Franks J.* The periodic structure of non-singular Morse—Smale flows// Comment. Math. Helv. — 1978. — *53*. — C. 279–294.

64. *Franks J. M.* Homology and dynamical systems. — Am. Math. Soc., 1982.
65. *Grines V., Gurevich E., Pochinka O.* Topological classification of Morse—Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersection// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2015. — *208*, № 1. — С. 81–91.
66. *Grines V., Malyshev D., Pochinka O., Zinina S.* Efficient algorithms for the recognition of topologically conjugate gradient-like diffeomorphisms// Regul. Chaotic Dyn. — 2016. — *21*, No 2. — С. 189–203.
67. *Grines V., Medvedev T., Pochinka O., Zhuzhoma E.* On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids// Phys. D. — 2015. — *294*. — С. 1–5.
68. *Gutierrez C.* Structural stability for flows on the torus with a cross-cap// Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — *241*. — С. 311–320.
69. *Handel M.* The entropy of orientation reversing homeomorphisms of surfaces// Topology. — 1982. — *21*. — С. 291–296.
70. *Harrold O. G., Griffith H. C., Posey E. E.* A characterization of tame curves in three-space// Trans. Am. Math. Soc. — 1955. — *79*. — С. 12–34.
71. *Hartman P.* On the local linearization of differential equations// Proc. Am. Math. Soc. — 1963. — *14*, № 4. — С. 568–573.
72. *Hirsch M., Pugh C., Shub M.* Invariant manifolds. — Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1977.
73. *Markley N. G.* The Poincare—Bendixon theorem for the Klein bottle// Trans. Am. Math. Soc. — 1969. — *135*. — С. 159–165.
74. *Medvedev V., Zhuzhoma E.* Morse—Smale systems with few non-wandering points// Topology Appl. — 2013. — *160*, № 3. — С. 498–507.
75. *Morgan J. W.* Non-singular Morse—Smale flows on 3-dimensional manifolds// Topology. — 1979. — *18*. — С. 41–53.
76. *Morse M.* Calculus of variations in the large. — New York: Interscience Publ., 1934.
77. *Narasimhan C.* The periodic behavior of Morse—Smale diffeomorphisms on compact surfaces// Trans. Am. Math. Soc. — 1979. — *248*. — С. 145–169.
78. *Nikolaev I.* Graphs and flows on surfaces// Ergodic Theory Dynam. Systems. — 1998. — *18*. — С. 207–220.
79. *Nikolaev I., Zhuzhoma E.* Flows on 2-dimensional manifolds. — Berlin: Springer, 1999.
80. *Palis J.* On Morse—Smale dynamical systems// Topology. — 1969. — *8*, № 4. — С. 385–404.
81. *Palis J., Smale S.* Structural stability theorems// Global Analysis. Proc. Sympos. Pure Math. — 1970. — *14*. — С. 223–231.
82. *Peixoto M. M.* On structural stability// Ann. Math. — 1959. — *69*. — С. 199–222.
83. *Peixoto M. M.* Structural stability on two-dimensional manifolds// Topology. — 1962. — *1*. — С. 101–120.
84. *Peixoto M. M.* Structural stability on two-dimensional manifolds. A further remark// Topology. — 1963. — *2*. — С. 179-180.
85. *Peixoto M. M.* On a classification of flows on 2-manifolds// Proc. Symp. Dyn. Syst. Salvador. — 1973. — С. 389–492.
86. *Pixton D.* Wild unstable manifolds// Topology. — 1977. — *16*. — С. 167–172.
87. *Sasano K.* Links of closed orbits of non-singular Morse—Smale flows// Proc. Am. Math. Soc. — 1983. — *88*. — С. 727–734.
88. *Shub M.* Morse—Smale diffeomorphisms are unipotent on homology// Dynamical Syst., Proc. Sympos. Univ. Bahia, Salvador, 1971. — 1973. — С. 489–491.
89. *Shub M., Sullivan D.* Homology theory and dynamical systems// Topology. — 1975. — *4*. — С. 109–132.
90. *Smale S.* Morse inequalities for a dynamical system// Bull. Am. Math. Soc. — 1960. — *66*. — С. 43–49.
91. *Smale S.* Generalized Poincare's conjecture in dimensions greater than four// Bull. Am. Math. Soc. — 1960. — *66*. — С. 485–488.
92. *Smale S.* On gradient dynamical systems// Ann. Math. — 1961. — *74*. — С. 199–206.
93. *Smale S.* Generalized Poincare's conjecture in dimensions greater than four// Ann. Math. — 1961. — *74*. — С. 391–406.
94. *Smale S.* Diffeomorphisms with many periodic points// Differ. and Combinat. Topology, Sympos. Marston Morse, Princeton. — 1965. — С. 63–80.
95. *Wada M.* Closed orbits of non-singular Morse—Smale flows on S^3// J. Math. Soc. Jpn. — 1989. — *41*. — С. 405–413.
96. *Wang X.* The C^*-algebras of Morse—Smale flows on two-manifolds// Ergodic Theory Dynam. Systems. — 1990. — *10*. — С. 565–597.
97. *Yano K.* A note on non-singular Morse—Smale flows on S^3// Proc. Jpn Acad. Ser. A Math. Sci. — 1982. — *58*. — С. 447–450.

В. З. Гринес
НИУ ВШЭ, 603155, Н. Новгород, Б. Печерская, 25/12; ННГУ, 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23
E-mail: vgrines@yandex.ru

Е. В. Жужома
НИУ ВШЭ, 603155, Н. Новгород, Б. Печерская, 25/12
E-mail: zhuzhoma.ev@mail.ru

О. В. Починка
НИУ ВШЭ, 603155, Н. Новгород, Б. Печерская, 25/12
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru

UDC 517.938

Morse–Smale Systems and Topological Structure of Supporting Manifolds

© 2016 **V. Z. Grines, Ye. V. Zhuzhoma, O. V. Pochinka**

Abstract. In this paper, we review the results describing the connection between the global dynamics of Morse–Smale systems on closed manifolds and the topology of supporting manifolds. Also we consider the results related to topological classification of Morse–Smale systems.

REFERENCES

1. A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, and A. G. Mayer, *Kachestvennaya teoriya dinamicheskikh sistem vtorogo poryadka* [Qualitative Theory of Second-Order Dynamical Systems], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
2. A. A. Andponov and L. S. Pontpyagin, "Grubye sistemy" [Rough systems], *Dokl. AN SSSP* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1937, **14**, No. 5, 247–250 (in Russian).
3. D. V. Anosov, "Grubost' geodezicheskikh potokov na kompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh otritsatel'noy krivizny" [Roughness of geodesic flows on compact Riemann manifolds of negative curvature], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1962, **145**, No. 4, 707–709 (in Russian).
4. D. V. Anosov, "Geodezicheskie potoki na zamknutykh rimanovykh mnogoobraziyakh otritsatel'noy krivizny" [Geodesic flows on close Riemann manifolds of negative curvature], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1967, **90** (in Russian).
5. S. Kh. Apanson, "Tpaektopii na neopientipuemykh dvumepnykh mnogoobpaziyakh" [Trajectories on nonoriented two-dimensional manifolds], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1969, **80**, No. 3, 314–333 (in Russian).
6. S. Kh. Aranson and V. S. Medvedev, "Regulyarnye komponenty gomeomorfizmov n-mernoy sfery" [Regular components of homeomorphisms of n-dimensional sphere], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1971, **85**, 3–17 (in Russian).
7. V. S. Afraymovich and L. P. Shil'nikov, "Ob osobykh mnozhestvakh sistem Morsa—Smeyla" [On singular sets of Morse–Smale systems] *Tr. Mosk. Mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1973, **28**, 181–214 (in Russian).
8. A. N. Bezdenezhnykh and V. Z. Grines, "Realizatsiya gradientnopodobnykh diffeomorfizmov dvumernykh mnogoobraziy" [Realization of gradient-like diffeomorphisms of two-dimensional manifolds], In: *Differentsial'nye i integral'nye uravneniya* [Differential and Integral Equations], Gor'kiy, GGU, 1985, 33–37 (in Russian).
9. A. N. Bezdenezhnykh and V. Z. Grines, "Dinamicheskie svoystva i topologicheskaya klassifikatsiya gradientnopodobnykh diffeomorfizmov na dvumernykh mnogoobraziyakh. I" [Dynamical properties and topological classification of gradient-like diffeomorphisms on two-dimensional manifolds. I], In: *Metody KTDU* [KTDU Methods], Gor'kiy, 1985, 22–38 (in Russian).
10. A. N. Bezdenezhnykh and V. Z. Grines, "Dinamicheskie svoystva i topologicheskaya klassifikatsiya gradientnopodobnykh diffeomorfizmov na dvumernykh mnogoobraziyakh. II" [Dynamical properties and topological classification of gradient-like diffeomorphisms on two-dimensional manifolds. II], In: *Metody KTDU* [KTDU Methods], Gor'kiy, 1987, 24–32 (in Russian).
11. Kh. Bonatti, V. Z. Grines, V. S. Medvedev, and E. Peku, "O topologicheskoy klassifikatsii gradientnopodobnykh diffeomorfizmov bez geteroklinicheskikh krivykh na trekhmernykh mnogoobraziyakh" [On topological classification of gradient-like diffeomorphisms without heteroclinic curves on three-dimensional manifolds] *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2001, **377**, No. 2, 151–155 (in Russian).
12. Kh. Bonatti, V. Z. Grines, V. S. Medvedev, and E. Peku, "O diffeomorfizmakh Morsa—Smeyla bez geteroklinicheskikh peresecheniy na trekhmernykh mnogoobraziyakh" [On Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections on three-dimensional manifolds], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2002, **236**, 66–78 (in Russian).
13. Kh. Bonatti, V. Z. Grines, and O. V. Pochinka, "Klassifikatsiya diffeomorfizmov Morsa—Smeyla s konechnym mnozhestvom geteroklinicheskikh orbit na 3-mnogoobraziyakh" [Classification of Morse–Smale

diffeomorphisms with finite set of heteroclinic orbits on 3-manifolds] *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2005, **250**, 5–53 (in Russian).
14. V. Z. Grines, "Topologicheskaya klassifikatsiya diffeomopfizmov Mopsa—Smeyla s konechnym mnozhestvom getepoklinicheskikh traektopiy na poverkhnostyakh" [Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms with finite set of heteroclinic trajectories on surfaces] *Mat. zametki* [Math. Notes], 1993, **54**, 3–17 (in Russian).
15. V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, and V. S. Medvedev, "O klassifikatsii diffeomorfizmov Morsa—Smeyla s odnomernym mnozhestvom neustoychivykh separatris" [On classification of Morse–Smale diffeomorphisms with one-dimensional set of nonstable separatrices], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2010, **270**, 20–35 (in Russian).
16. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, and V. S. Medvedev, "Novye sootnosheniya dlya potokov i diffeomorfizmov Morsa—Smeyla" [New relations for Morse–Smale flows and diffeomorphisms], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2002, **382**, No. 6, 730–733 (in Russian).
17. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, and V. S. Medvedev, "Novye sootnosheniya dlya sistem Morsa—Smeyla s trivial'no vlozhennymi odnomernymi separatrisami" [New relations for Morse–Smale systems with trivially embedded one-dimensional separatrices], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2003, **194**, No. 7, 25–56 (in Russian).
18. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, and V. S. Medvedev, "O diffeomorfizmakh Morsa—Smeyla s chetyr'mya periodicheskimi tochkami na zamknutykh orientiruemykh mnogoobraziyakh" [On Morse–Smale diffeomorphisms with four periodic points on closed oriented manifolds], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2003, **74**, No. 3, 369–386 (in Russian).
19. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, and O. V. Pochinka, "Global'nye attraktor i repeller diffeomorfizmov Morsa—Smeyla" [Global attractor and repeller of Morse–Smale diffeomorphisms], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2010, **271**, 111–133 (in Russian).
20. V. Z. Grines, S. Kh. Kapkaeva, and O. V. Pochinka, "Trekhtsvetnyy graf kak polnyy topologicheskiy invariant dlya gradientno-podobnykh diffeomorfizmov poverkhnostey" [Three-colored graph as complete topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of surfaces], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2014, **205**, No. 10, 19–46 (in Russian).
21. V. Z. Grines and O. V. Pochinka, *Vvedenie v topologicheskuyu klassifikatsiyu diffeomorfizmov na mnogoobraziyakh razmernosti dva i tri* [Introduction to Topological Classification of Diffeomorphisms on Two- and Three-Dimensional Manifolds], Moscow—Izhevsk, 2011 (in Russian).
22. D. M. Grobman, "O gomeomorfizme sistem differentsial'nykh uravneniy" [On the diffeomorphism of systems of differential equations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1959, **128**, No. 5, 880–881 (in Russian).
23. D. M. Grobman, "Topologicheskaya klassifikatsiya okrestnostey osoboy tochki v n-mernom prostranstve" [Topological classification of neighborhoods of a singular point in n-dimensional space], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1962, **56**, No. 1, 77–94 (in Russian).
24. E. Ya. Gurevich, "O diffeomorfizmakh Morsa—Smeyla na mnogoobraziyakh razmernosti bol'shey 3" [On Morse–Smale diffeomorphisms on manifolds of dimension greater than 3], *Trudy Srednevolzhskogo mat. ob-va* [Proc. Srednevolzhskoe Math. Soc.], 2003, **5**, No. 1, 161–165 (in Russian).
25. E. Ya. Gurevich and V. S. Medvedev, "O mnogoobraziyakh razmernosti n, dopuskayushchikh diffeomorfizmy s sedlovymi tochkami indeksov 1 i $n-1$" [On n-dimensional manifolds allowing diffeomorphisms with saddle points of indices 1 and $n-1$], *Trudy Srednevolzhskogo mat. ob-va* [Proc. Srednevolzhskoe Math. Soc.], 2006, **8**, No. 1, 204–208 (in Russian).
26. E. V. Zhuzhoma and V. S. Medvedev, "Sistemy Morsa—Smeyla s tremya nebluzhdayushchimi tochkami" [Morse–Smale systems with three nonwandering points], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2011, **440**, No. 1, 11–14 (in Russian).
27. E. A. Leontovich and A. G. Mayep, "O traektoriyakh, opredelyayushchikh kachestvennuyu strukturu razbieniya sfery na traektorii" [On trajectories determining qualitative structure of partition of a sphere into trajectories], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1937, **14**, No. 5, 251–257 (in Russian).
28. E. A. Leontovich and A. G. Mayep, "O skheme, opredelyayushchey topologicheskuyu strukturu razbieniya na traektorii" [On the scheme determining topological structure of partition into trajectories], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1955, **103**, No. 4, 557–560 (in Russian).
29. A. G. Mayer, "Gruboe preobrazovanie okruzhnosti v okruzhnost'" [Rough transformation of a circle to a circle] *Uchenye zapiski Gor'k. gos. un-ta* [Sci. Notes Gor'kiy State Univ.], 1939, **12**, 215–229 (in Russian).

30. S.V. Matveev, “Klassifikatsiya dostatochno bol'shikh trekhmernykh mnogoobraziy” [Classification of sufficiently large three-dimensional manifolds], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1997, **52**, No. 5, 147–174 (in Russian).
31. V.S. Medvedev and E.V. Zhuzhoma, “Nepreryvnye potoki Morsa—Smeyla s tremya sostoyaniyami ravnovesiya” [Continuous Morse–Smale flows with three equilibrium states], *Mat. sb.* [Math. Digest], accepted (in Russian).
32. T.M. Mitryakova and O.V. Pochinka, “O neobkhodimykh i dostatochnykh usloviyakh topologicheskoy sopryazhennosti diffeomorfizmov poverkhnostey s konechnym chislom orbit geteroklinicheskogo kasaniya. Differentsial'nye uravneniya i dinamicheskie sistemy” [On necessary and sufficient conditions of topological conjugacy of diffeomorphisms of surfaces with finite number of orbits of heteroclinic tangency], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2010, **270**, 198–219 (in Russian).
33. A.A. Oshemkov and V.V. Sharko, “O klassifikatsii potokov Morsa—Smeyla na dvumernykh mnogoobraziyakh” [On classification of Morse–Smale flows on two-dimensional manifolds], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1998, **189**, No. 8, 93–140 (in Russian).
34. V.A. Pliss, “O grubosti differentsial'nykh uravneniy, zadannykh na tore” [On roughness of differential equations set on a torus], *Vestn. LGU. Ser. Mat.* [Bull. Leningrad State Univ. Ser. Math.], 1960, **13**, 15–23 (in Russian).
35. O.V. Pochinka, “Klassifikatsiya diffeomorfizmov Morsa—Smeyla na 3- mnogoobraziyakh” [Classification of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 2011, **440**, No. 6, 34–37 (in Russian).
36. A. Prishlyak, “Vektornye polya Morsa—Smeyla bez zamknutykh traektoriy na trekhmernykh mnogoobraziyakh” [Morse–Smale vector fields without closed trajectories on three-dimensional manifolds], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2002, **71**, No. 2, 230–235 (in Russian).
37. Ya.G. Sinay, “Markovskie razbieniya i U-diffeomorfizmy” [Markov partitions and U-diffeomorphisms], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1968, **2**, No. 1, 64–89 (in Russian).
38. Ya.G. Sinay, “Postroenie markovskikh razbieniy” [Construction of Markov partitions], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1968, **2**, No. 3, 70–80 (in Russian).
39. S. Smeyl, “Differentsiruemye dinamicheskie sistemy” [Differentiable dynamical systems], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1970, **25**, No. 1, 113–185 (in Russian).
40. Ya.L. Umanskiy, “Neobkhodimye i dostatochnye usloviya topologicheskoy ekvivalentnosti trekhmernykh dinamicheskikh sistem Morsa—Smeyla s konechnym chislom osobykh traektoriy” [Necessary and sufficient conditions for topological equivalence of three-dimensional Morse–Smale dynamical systems with finite number of singular trajectories], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1990, **181**, No. 2, 212–239 (in Russian).
41. A.T. Fomenko and D.B. Fuks, *Kurs gomotopicheskoy topologii* [Course in Homotopical Topology], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
42. S. Aranson, G. Belitsky, and E. Zhuzhoma, *Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces*, Am. Math. Soc., Providence, 1996.
43. E. Artin and R.H. Fox, “Some wild cells and spheres in three-dimensional space,” *Ann. Math.*, 1948, **49**, 979–990.
44. D. Asimov, “Round handles and non-singular Morse–Smale flows,” *Ann. Math.*, 1975, **102**, 41–54.
45. D. Asimov, “Homotopy of non-singular vector fields to structurally stable ones,” *Ann. Math.*, 1975, **102**, 55–65.
46. S. Batterson, “The dynamics of Morse–Smale diffeomorphisms on the torus,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1979, **256**, 395–403.
47. S. Batterson, “Orientation reversing Morse–Smale diffeomorphisms on the torus,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1981, **264**, 29–37.
48. S. Batterson, M. Handel, and C. Narasimhan, “Orientation reversing Morse–Smale diffeomorphisms of S^2,” *Invent. Math.*, 1981, **64**, 345–356.
49. F. Béguin, *Smale Diffeomorphisms of Surfaces: an Algorithm for the Conjugacy Problem*, Preprint, 1999.
50. Yu. Bin, “Behavior 0 nonsingular Morse—Smale flows on S^3,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2016, **36**, No. 1, 509–540.
51. P. Blanchard and J. Franks, “The dynamical complexity of orientation reversing homeomorphisms of surfaces,” *Invent. Math.*, 1980, **62**, 333–339.
52. Ch. Bonatti and V. Grines, “Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3,” *J. Dyn. Control Syst.*, 2000, **6**, No. 4, 579–602.

53. Ch. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, and E. Pecou, "Three-dimensional manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves," *Topology Appl.*, 2002, **117**, 335–344.
54. Ch. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, and E. Pecou, "Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds," *Topology*, 2004, **43**, 369–391.
55. Ch. Bonatti, V. Grines, and O. Pochinka, "Classification of Morse–Smale diffeomorphisms with the chain of saddles on 3-manifolds," In: *Foliations 2005*, World Scientific, Singapore, 2006, 121-–147.
56. Ch. Bonatti and R. Langevin, *Difféomorphismes de Smale des Surfaces*, Société Mathématique de France, 1998.
57. R. Bowen, "Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1971, **154**, 337–397.
58. J. C. Cantrell and C. H. Edwards, "Almost locally polyhedral curves in Euclidean n-space," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1963, **107**, 451–457.
59. A. Cobham, "The intrinsic computational difficulty of functions," *International Congress for Logic, Methodology, and Philosophy of Science*, North-Holland, Amsterdam, 1964, 24–30.
60. H. Debrunner and R. Fox, "A mildly wild imbedding of an n-frame," *Duke Math. J.*, 1960, **27**, 425–429.
61. G. Fleitas, "Classification of gradient-like flows in dimension two and three," *Bol. Soc. Mat. Brasil.*, 1975, **2**, No. 6, 155–183.
62. J. Franks, "Some maps with infinitely many hyperbolic periodic points," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1977, **226**, 175–179.
63. J. Franks, "The periodic structure of non-singular Morse–Smale flows," *Comment. Math. Helv.*, 1978, **53**, 279–294.
64. J. M. Franks, *Homology and Dynamical Systems*, Am. Math. Soc., 1982.
65. V. Grines, E. Gurevich, and O. Pochinka, "Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersection," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2015, **208**, No. 1, 81–91.
66. V. Grines, D. Malyshev, O. Pochinka, and S. Zinina, "Efficient algorithms for the recognition of topologically conjugate gradient-like diffeomorphisms," *Regul. Chaotic Dyn.*, 2016, **21**, No 2, 189–203.
67. V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, and E. Zhuzhoma, "On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids," *Phys. D.*, 2015, **294**, 1–5.
68. C. Gutierrez, "Structural stability for flows on the torus with a cross-cap," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1978, **241**, 311–320.
69. M. Handel, "The entropy of orientation reversing homeomorphisms of surfaces," *Topology*, 1982, **21**, 291–296.
70. O. G. Harrold, H. C. Griffith, and E. E. Posey, "A characterization of tame curves in three-space," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1955, **79**, 12–34.
71. P. Hartman, "On the local linearization of differential equations," *Proc. Am. Math. Soc.*, 1963, **14**, No. 4, 568–573.
72. M. Hirsch, C. Pugh, and M. Shub, *Invariant Manifolds*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.
73. N. G. Markley , "The Poincare–Bendixon theorem for the Klein bottle," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1969, **135**, 159–165.
74. V. Medvedev and E. Zhuzhoma, "Morse–Smale systems with few non-wandering points," *Topology Appl.*, 2013, **160**, No. 3, 498–507.
75. J. W. Morgan, "Non-singular Morse–Smale flows on 3-dimensional manifolds," *Topology*, 1979, **18**, 41–53.
76. M. Morse, *Calculus of Variations in the Large*, Interscience Publ., New York, 1934.
77. C. Narasimhan, "The periodic behavior of Morse–Smale diffeomorphisms on compact surfaces," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1979, **248**, 145–169.
78. I. Nikolaev, "Graphs and flows on surfaces," *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 1998, **18**, 207–220.
79. I. Nikolaev and E. Zhuzhoma, *Flows on 2-Dimensional Manifolds*, Springer, Berlin, 1999.
80. J. Palis, "On Morse–Smale dynamical systems," *Topology*, 1969, **8**, No. 4, 385–404.
81. J. Palis and S. Smale, "Structural stability theorems," *Global Analysis. Proc. Sympos. Pure Math.*, 1970, **14**, 223–231.
82. M. M. Peixoto, "On structural stability," *Ann. Math.*, 1959, **69**, 199–222.
83. M. M. Peixoto, "Structural stability on two-dimensional manifolds," *Topology*, 1962, **1**, 101–120.
84. M. M. Peixoto, "Structural stability on two-dimensional manifolds. A further remark," *Topology*, 1963, **2**, 179-180.
85. M. M. Peixoto, "On a classification of flows on 2-manifolds," *Proc. Symp. Dyn. Syst. Salvador*, 1973, 389–492.

86. D. Pixton, "Wild unstable manifolds," *Topology*, 1977, **16**, 167–172.
87. K. Sasano, "Links of closed orbits of non-singular Morse–Smale flows," *Proc. Am. Math. Soc.*, 1983, **88**, 727–734.
88. M. Shub, "Morse–Smale diffeomorphisms are unipotent on homology," *Dynamical Syst., Proc. Sympos. Univ. Bahia*, Salvador, 1971, 1973, 489–491.
89. M. Shub and D. Sullivan, "Homology theory and dynamical systems," *Topology*, 1975, **4**, 109–132.
90. S. Smale, "Morse inequalities for a dynamical system," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1960, **66**, 43–49.
91. S. Smale, "Generalized Poincare's conjecture in dimensions greater than four," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1960, **66**, 485–488.
92. S. Smale, "On gradient dynamical systems," *Ann. Math.*, 1961, **74**, 199–206.
93. S. Smale, "Generalized Poincare's conjecture in dimensions greater than four," *Ann. Math.*, 1961, **74**, 391–406.
94. S. Smale, "Diffeomorphisms with many periodic points," *Differ. and Combinat. Topology, Sympos. Marston Morse*, Princeton, 1965, 63–80.
95. M. Wada, "Closed orbits of non-singular Morse–Smale flows on S^3," *J. Math. Soc. Jpn.*, 1989, **41**, 405–413.
96. X. Wang, "The C^*-algebras of Morse–Smale flows on two-manifolds," *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 1990, **10**, 565–597.
97. K. Yano, "A note on non-singular Morse–Smale flows on S^3," *Proc. Jpn Acad. Ser. A Math. Sci.*, 1982, **58**, 447–450.

V. Z. Grines

NRU HSE, 603155, Nizhniy Novgorod, ul. Bolshaya Pecherskaya, 25/12; NNSU, 603950, Nizhniy Novgorod, pr. Gagarina, 23

E-mail: `vgrines@yandex.ru`

Ye. V. Zhuzhoma

NRU HSE, 603155, Nizhniy Novgorod, ul. Bolshaya Pecherskaya, 25/12

E-mail: `zhuzhoma.ev@mail.ru`

O. V. Pochinka

NRU HSE, 603155, Nizhniy Novgorod, ul. Bolshaya Pecherskaya, 25/12

E-mail: `olga-pochinka@yandex.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 61 (2016). С. 41–66

УДК 517.984.48:532.135

МОДЕЛЬ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ОЛДРОЙТА

© 2016 г. **Д. А. ЗАКОРА**

Аннотация. В работе выведены математические модели сжимаемых вязкоупругих жидкостей Максвелла, Олдройта и Кельвина—Фойгта. Изучена модель вращающейся вязкоупругой баротропной жидкости Олдройта. Доказана теорема об однозначной сильной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи. Исследована спектральная задача, ассоциированная с изучаемой системой. Доказаны утверждения о локализации спектра, о существенном и дискретном спектре, об асимптотике спектра. В случае, если система находится в невесомости и не вращается, доказаны утверждения о кратной полноте и базисности специальной системы элементов. В последнем случае и при условии достаточно большой вязкости в системе найдено разложение решения эволюционной задачи по специальной системе элементов.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . 41
2. Постановка задачи . . . 42
2.1. Модели вязкоупругих сжимаемых жидкостей . . . 42
2.2. Уравнения малых движений баротропной жидкости Олдройта, заполняющей равномерно вращающуюся область . . . 43
3. Теорема о существовании и единственности сильного решения задачи . . . 44
3.1. Операторная формулировка задачи . . . 44
3.2. Переход к дифференциально-операторному уравнению первого порядка. Теорема о сильной разрешимости . . . 46
4. Задача о спектре вязкоупругой сжимаемой жидкости . . . 50
4.1. Вывод основных спектральных задач . . . 51
4.2. О существенном и дискретном спектре задачи . . . 51
4.3. Локализация спектра и асимптотика спектра на бесконечности . . . 55
4.4. Локализация спектра в случае $\omega_0 = 0$ . . . 56
4.5. О представлении решения эволюционной задачи и его стабилизации . . . 59
4.6. Теорема о кратной базисности для специальной системы элементов в случае $\omega_0 = 0$, $g = 0$. Разложение решения эволюционной задачи . . . 61
Список литературы . . . 63

1. Введение

В работе изучается модель вязкоупругой баротропной жидкости, которая является развитием модели Олдройта для несжимаемой жидкости. Первые модели несжимаемых жидкостей, учитывающие предысторию течения и названные впоследствии линейными вязкоупругими жидкостями, были предложены в XIX в. Дж. Максвеллом [25,26], В. Кельвином [23] и В. Фойгтом [30,31]. Эти модели были развиты в середине XX в. в значительной степени благодаря работам Дж. Г. Олдройта [27,28]. Впоследствии эти и более общие модели изучались многими авторами. Отметим работы [7, 16] (см. также указанную там литературу), посвященные исследованию начально-краевых

Работа сделана при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-21-00066, выполняемый в Воронежском государственном университете).

задач для уравнений движений жидкостей Кельвина—Фойгта и жидкостей Олдройта. Спектральному анализу модели Олдройта вязкоупругой несжимаемой жидкости посвящены работы [2,13,14] (см. также указанную там литературу).

В настоящей работе исследуется задача о малых движениях вязкоупругой сжимаемой жидкости, заполняющей ограниченную равномерно вращающуюся область. В третьем разделе исследуется вопрос разрешимости соответствующей системы интегродифференциальных уравнений, граничных и начальных условий. При этом соответствующая задача Коши для системы интегродифференциальных уравнений сводится к задаче Коши

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0,$$

в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Оператор $\mathcal{A}$ представляет из себя некоторую операторную блок-матрицу и является максимальным секториальным оператором. Отсюда выводится утверждение о сильной разрешимости исходной начально-краевой задачи.

В четвертом разделе исследуется задача о спектре оператора $\mathcal{A}$, которая ассоциируется со спектральной задачей для исходной системы интегродифференциальных уравнений. Установлено, что спектр оператора $\mathcal{A}$ расположен в правой открытой полуплоскости. Существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ в общем случае состоит из конечного количества точек и отрезков на действительной положительной полуоси. Дискретный спектр расположен в некоторой полосе, содержащей действительную положительную полуось. Если система не вращается, то дискретный спектр оператора $\mathcal{A}$ — вещественный за исключением, быть может, конечного количества комплексно сопряженных собственных значений. Если, дополнительно, система находится в невесомости, то при некоторых условиях система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ образует p-базис (при $p > 3$) пространства $\mathcal{H}$.

2. Постановка задачи

2.1. Модели вязкоупругих сжимаемых жидкостей. Как известно, движение вязкой сжимаемой жидкости в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ описывается следующей системой уравнений в форме Коши (см., например, [19, с. 21-22]):

$$\widehat{\rho}\Big[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\Big] = -\nabla\widehat{P} + \mathrm{Div}\sigma + \widehat{\rho}\vec{F} \quad (\text{в } \Omega), \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial\widehat{\rho}}{\partial t} + \mathrm{div}(\widehat{\rho}\vec{v}) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{v} = \vec{0} \quad (\text{на } \partial\Omega). \tag{2.2}$$

В данной системе $\vec{v} = \vec{v}(t,x)$ $(x := (x_1, x_2, x_3) \in \Omega)$ — поле скоростей жидкости, $\widehat{\rho} = \widehat{\rho}(t,x)$ — плотность жидкости, $\widehat{P} = \widehat{P}(t,x)$ — давление в жидкости, $\vec{F} = \vec{F}(t,x)$ — поле внешних сил. Через $\mathrm{Div}\sigma$ обозначен вектор, координатами которого являются дивергенции строк матрицы $\sigma = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^3$, где σ — тензор вязких напряжений в жидкости. При этом определяющее соотношение для вязкой сжимаемой жидкости имеет вид:

$$\sigma_{ij} = \mu\Big[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\,\delta_{ij}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\Big] + \eta\delta_{ij}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} =: \mu\sigma_{ij}^{(1)} + \eta\sigma_{ij}^{(2)} \quad (i,j = 1,2,3).$$

Будем считать далее, что жидкость удовлетворяет обобщенной математической модели, описываемой следующим определяющим соотношением:

$$P_m\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\sigma = Q_n\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\sigma^{(1)} + R_n\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\sigma^{(2)}, \tag{2.3}$$

где $P_m(\lambda)$, $Q_n(\lambda)$, $R_n(\lambda)$ — многочлены степеней m и n соответственно. Если $n = m-1$, то определяющее соотношение (2.3) будет соответствовать модели Максвелла, если $n = m$ — модели Олдройта, если $n = m+1$ — модели Кельвина—Фойгта. Предположим, что корни полинома $P_m(\lambda)$ вещественны, различны и отрицательны, обозначим их через $-b_l$ $(l = \overline{1,m})$, а дроби $Q_n(\lambda)P_m^{-1}(\lambda)$, $R_n(\lambda)P_m^{-1}(\lambda)$ имеют следующие разложения:

$$\frac{Q_n(\lambda)}{P_m(\lambda)} = \gamma_1\mu_{-1}\lambda + \gamma_2\mu_0 + \sum_{l=1}^{m}\frac{\mu_l}{b_l + \lambda}, \quad \frac{R_n(\lambda)}{P_m(\lambda)} = \gamma_1\eta_{-1}\lambda + \gamma_2\eta_0 + \sum_{l=1}^{m}\frac{\eta_l}{b_l + \lambda}, \tag{2.4}$$

где $\mu_l, \eta_l > 0$, $l = \overline{-1, m}$, и γ_1, γ_2 принимают значения 0 или 1. При этом $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ для модели Максвелла, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$ для модели Олдройта, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ для модели Кельвина—Фойгта. Из определяющего соотношения (2.3) с помощью преобразования Лапласа и представлений (2.4) можно найти (см. [7, с. 43–46]) тензор вязких напряжений σ:

$$\sigma(t,x) = J_1(t)\sigma^{(1)}(t,x) + J_2(t)\sigma^{(2)}(t,x), \tag{2.5}$$

$$J_1(t)\sigma^{(1)}(t,x) := \gamma_1\mu_{-1}\frac{\partial}{\partial t}\sigma^{(1)}(t,x) + \gamma_2\mu_0\sigma^{(1)}(t,x) + \sum_{l=1}^{m}\int_0^t \mu_l e^{-b_l(t-s)}\sigma^{(1)}(s,x)\,ds,$$

$$J_2(t)\sigma^{(2)}(t,x) := \gamma_1\eta_{-1}\frac{\partial}{\partial t}\sigma^{(2)}(t,x) + \gamma_2\eta_0\sigma^{(2)}(t,x) + \sum_{l=1}^{m}\int_0^t \eta_l e^{-b_l(t-s)}\sigma^{(2)}(s,x)\,ds.$$

В (2.5) мы пренебрегли экспоненциально затухающим во времени слагаемым, порождаемым состоянием жидкости в начальный момент времени. Это слагаемое можно считать отнесенным к полю внешних сил.

Из системы (2.1)-(2.2) и соотношения (2.5) получим систему уравнений, описывающую движения обобщенной сжимаемой вязкоупругой жидкости, заполняющей ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$\widehat{\rho}\Big[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\Big] = -\nabla\widehat{P} + J_1(t)\big(\Delta\vec{v} + \frac{1}{3}\nabla\mathrm{div}\vec{v}\big) + J_2(t)\nabla\mathrm{div}\vec{v} + \widehat{\rho}\vec{F} \quad (\text{в } \Omega), \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial\widehat{\rho}}{\partial t} + \mathrm{div}(\widehat{\rho}\vec{v}) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{v} = \vec{0} \quad (\text{на } \partial\Omega). \tag{2.7}$$

Отметим здесь, что если $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$ и жидкость несжимаема, то уравнения (2.6), (2.7) будут описывать обычную жидкость Одройта (см., например, [2]).

2.2. Уравнения малых движений баротропной жидкости Олдройта, заполняющей равномерно вращающуюся область. Пусть сжимаемая жидкость Олдройта занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, равномерно вращающуюся вокруг оси, сонаправленной с действием силы тяжести. Обозначим через $\vec{n}$ единичный вектор, нормальный к границе $\partial\Omega$ и направленный вне области Ω. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с областью, таким образом, что ось Ox_3 совпадает с осью вращения и направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится в области Ω. В этом случае равномерная скорость вращения области запишется в виде $\vec{\omega}_0 := \omega_0\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — орт оси вращения Ox_3, а $\omega_0 > 0$, для определенности. Будем считать, что внешнее стационарное поле сил $\vec{F}_0$ является гравитационным и действует вдоль оси вращения, т. е. $\vec{F}_0 = -g\vec{e}_3$, $g > 0$.

Далее будем считать, что сжимаемая жидкость удовлетворяет уравнению состояния баротропной жидкости: $\widehat{P} = a_\infty^2\widehat{\rho}$, где $a_\infty = \mathrm{const}$ — скорость звука в сжимаемой жидкости.

Рассмотрим состояние относительного равновесия жидкости. Из уравнения (2.6) движения сжимаемой жидкости Олдройта, записанного в подвижной системе координат, найдем формулу для градиента стационарного давления:

$$\nabla P_0 = \rho_0\big(-\vec{\omega}_0\times(\vec{\omega}_0\times\vec{r}) - g\vec{e}_3\big) = \rho_0\nabla\big(2^{-1}|\vec{\omega}_0\times\vec{r}|^2 - gx_3\big), \tag{2.8}$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор текущей точки области Ω, а ρ_0 — стационарная плотность жидкости. Из (2.8) и соотношения $P_0 = a_\infty^2\rho_0$ заключаем, что стационарная плотность ρ_0 является функцией параметра $z := 2^{-1}\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) - gx_3$. При этом ρ_0 будет постоянной только если в системе отсутствует вращение и гравитационное поле. Для функции $\rho_0(z)$ выполнено также следующее свойство: $0 < \alpha_1 \leqslant \rho_0(z) \leqslant \alpha_2$.

Представим теперь полное давление и плотность жидкости в виде: $\widehat{P}(t,x) = P_0(z) + p(t,x)$, $\widehat{\rho}(t,x) = \rho_0(z) + \widetilde{\rho}(t,x)$, где $p(t,x)$ и $\widetilde{\rho}(t,x)$ — это динамическое давление и плотность соответственно, возникающие при малых движениях жидкости относительно стационарного состояния.

Осуществим линеаризацию уравнений (2.6), (2.7) (при $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$), записанных в подвижной системе координат, относительно состояния относительного равновесия. Получим задачу о малых движениях баротропной вращающейся жидкости Олдройта, заполняющей равномерно вращающееся твердое тело:

$$\frac{\partial\vec{u}(t,x)}{\partial t}-2\omega_0\big(\vec{u}(t,x)\times\vec{e}_3\big)=-\nabla\Big(\frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)}\,\widetilde{\rho}(t,x)\Big)+$$
$$+\frac{1}{\rho_0(z)}\big(\mu_0\Delta\vec{u}(t,x)+(\eta_0+\frac{\mu_0}{3})\nabla\mathrm{div}\vec{u}(t,x)\big)+$$
$$+\sum_{l=1}^{m}\int\limits_0^t e^{-b_l(t-s)}\frac{1}{\rho_0(z)}\big(\mu_l\Delta\vec{u}(s,x)+(\eta_l+\frac{\mu_l}{3})\nabla\mathrm{div}\vec{u}(s,x)\big)\,ds+\vec{f}(t,x)\ \ (\text{в }\Omega),$$
$$\frac{\partial\widetilde{\rho}(t,x)}{\partial t}+\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\vec{u}(t,x)\big)=0\ \ (\text{в }\Omega),\quad \vec{u}(t,x)=\vec{0}\ \ (\text{на }\partial\Omega),$$

где $\vec{u}(t,x)$ — поле скоростей жидкости в подвижной системе координат, $\vec{f}(t,x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное поле.

Осуществим в полученной системе, с целью ее симметризации, следующую замену:

$$a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\widetilde{\rho}(t,x)=\rho(t,x).$$

В результате получим основную задачу:

$$\frac{\partial\vec{u}(t,x)}{\partial t}-2\omega_0\big(\vec{u}(t,x)\times\vec{e}_3\big)=-\nabla\big(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho(t,x)\big)+$$
$$+\frac{1}{\rho_0(z)}\big(\mu_0\Delta\vec{u}(t,x)+(\eta_0+\frac{\mu_0}{3})\nabla\mathrm{div}\vec{u}(t,x)\big)+ \tag{2.9}$$
$$+\sum_{l=1}^{m}\int\limits_0^t e^{-b_l(t-s)}\frac{1}{\rho_0(z)}\big(\mu_l\Delta\vec{u}(s,x)+(\eta_l+\frac{\mu_l}{3})\nabla\mathrm{div}\vec{u}(s,x)\big)\,ds+\vec{f}(t,x)\ \ (\text{в }\Omega),$$
$$\frac{\partial\rho(t,x)}{\partial t}+a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\vec{u}(t,x)\big)=0\ \ (\text{в }\Omega),\quad \vec{u}(t,x)=\vec{0}\ \ (\text{на }\partial\Omega). \tag{2.10}$$

Для полноты формулировки задачи зададим еще начальные условия:

$$\vec{u}(0,x)=\vec{u}^0(x),\quad \rho(0,x)=\rho^0(x). \tag{2.11}$$

3. Теорема о существовании и единственности сильного решения задачи

В этом разделе начально-краевая задача (2.9)–(2.11), описывающая малые движения вращающейся сжимаемой вязкоупругой жидкости Олдройта, с помощью специальных операторов сводится к задаче Коши (3.6) для системы дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве. Затем исследуется вопрос разрешимости задачи Коши (3.6). Основное утверждение раздела — теорема 3.1.

3.1. Операторная формулировка задачи. Введем векторное гильбертово пространство $H:=\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ с весом $\rho_0(z)$ и скалярным произведением и нормой следующего вида:

$$(\vec{u},\vec{v})_{H=\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)}:=\int\limits_\Omega\rho_0(z)\vec{u}(x)\cdot\overline{\vec{v}(x)}\,d\Omega,\quad \|\vec{u}\|^2_{H=\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)}=\int\limits_\Omega\rho_0(z)|\vec{u}(x)|^2\,d\Omega.$$

Введем скалярное гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ функций, суммируемых со своими квадратами по области Ω, а также его подпространство $L_{2,\rho_0}(\Omega):=\{f\in L_2(\Omega)\mid (f,\rho_0^{1/2})_{L_2(\Omega)}=0\}$.

Определим оператор $S\vec{u}(t,x):=i\big(\vec{u}(t,x)\times\vec{e}_3\big)$, $\mathcal{D}(S)=\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$. Верна лемма, доказательство которой подобно доказательству аналогичной леммы о свойствах кориолисова оператора из [9].

Лемма 3.1. *Оператор $\mathcal{S}$ является самосопряженным и ограниченным в $H=\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$: $\mathcal{S}=\mathcal{S}^*$, $\mathcal{S}\in\mathcal{L}(H)$; более того, $\|\mathcal{S}\|_{\mathcal{L}(H)}=1$.*

Будем считать далее, что граница $\partial\Omega$ области Ω — класса C^2.

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу:

$$-\rho_0^{-1}(z)\big(\alpha\Delta\vec{u}(x)+\beta\nabla\mathrm{div}\vec{u}(x)\big)=\vec{v}(x) \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{u}(x)=\vec{0} \quad (\text{на } \partial\Omega), \quad \alpha>0, \;\; \beta\geqslant 0. \tag{3.1}$$

Эта задача, как известно (см. [17]), имеет единственное обобщенное решение $\vec{u}=A^{-1}(\alpha,\beta)\vec{v}$ для любого $\vec{v}\in H$, где оператор $A(\alpha,\beta)$ является самосопряженным и положительно определенным в H. Энергетическое пространство $H_{A(\alpha,\beta)}=\mathcal{D}(A^{1/2}(\alpha,\beta))=\{\vec{u}\in\vec{W}_2^1(\Omega)|\;\vec{u}=\vec{0}\;(\text{на }\partial\Omega)\}$ оператора $A(\alpha,\beta)$ компактно вложено в пространство H, а значит, оператор $A^{-1}(\alpha,\beta)$ компактен и положителен в H. Для любых $\vec{u}$, $\vec{v}\in H_{A(\alpha,\beta)}$

$$\begin{gathered}(\vec{u},\vec{v})_{A(\alpha,\beta)}=(A^{1/2}(\alpha,\beta)\vec{u},A^{1/2}(\alpha,\beta)\vec{v})_{\vec{L}(\Omega,\rho_0)}=\alpha\mathcal{J}(\vec{u},\vec{v})+\beta\mathcal{D}(\vec{u},\vec{v}),\\ \mathcal{J}(\vec{u},\vec{v}):=\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^3\nabla u_i(x)\cdot\overline{\nabla v_i(x)}\,d\Omega,\quad \mathcal{D}(\vec{u},\vec{v}):=\int\limits_\Omega \mathrm{div}\vec{u}(x)\,\overline{\mathrm{div}\vec{v}(x)}\,d\Omega.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Кроме того, можно проверить, что нормы в любых двух энергетических пространствах $H_{A(\alpha_1,\beta_1)}$ и $H_{A(\alpha_2,\beta_2)}$ эквивалентны между собой.

Определим операторы $A_l:=A(\mu_l,\eta_l+3^{-1}\mu_l)$ $(l=\overline{0,m})$ (напомним, что $\mu_l,\eta_l>0$, $l=\overline{0,m}$). При этом $\mathcal{D}(A_0)=\mathcal{D}(A_l)$ $(l=\overline{1,m})$ в силу гладкости границы.

Определим оператор $B\vec{u}(t,x):=a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\vec{u}(t,x)\big)$, $\mathcal{D}(B):=\{\vec{u}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)|\;\mathrm{div}(\rho_0\vec{u})\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0),\;\vec{u}\cdot\vec{n}=0\;(\text{на }\partial\Omega)\}\supset\mathcal{D}(A_0^{1/2})=\mathcal{D}(A_l^{1/2})$ $(l=\overline{1,m})$.

Лемма 3.2. *Сопряженный оператор определяется по формуле* $B^*\rho(x)=-\nabla\big(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho(x)\big)$, $\mathcal{D}(B^*)=W^1_{2,\rho_0}(\Omega):=W_2^1(\Omega)\cap L_{2,\rho_0}(\Omega)$. *Кроме того, имеют место неравенства*:

$$\exists\, c_l>0:\quad \|B\vec{u}\|_{W^1_{2,\rho_0}(\Omega)}\leqslant c_l\|A_l\vec{u}\|_H\quad\forall\,\vec{u}\in\mathcal{D}(A_l)\;\;(l=\overline{0,m}).$$

Доказательство. Пусть $\vec{u}\in\mathcal{D}(B)$. Вычислим

$$(B\vec{u},\rho)_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}=\int\limits_\Omega a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\mathrm{div}(\rho_0(z)\vec{u}(x))\overline{\rho(x)}\,d\Omega=-\int\limits_\Omega\rho_0(z)\vec{u}(x)\cdot\overline{\nabla\big(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho(x)\big)}\,d\Omega+$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega}a_\infty\rho_0^{1/2}(z)\overline{\rho(x)}\vec{u}(x)\cdot\vec{n}\,dS=-\int\limits_\Omega\rho_0(z)\vec{u}(x)\cdot\overline{\nabla\big(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho(x)\big)}\,d\Omega=(\vec{u},-\nabla\big(a_\infty\rho_0^{-1/2}\rho\big))_H.$$

Отсюда и из определения сопряженного оператора следуют формулы для B^*.

Для доказательства неравенств в лемме понадобятся некоторые вспомогательные оценки и рассуждения. Для $l=\overline{0,m}$ рассмотрим задачи

$$L_l\vec{u}:=-\mu_l\Delta\vec{u}(x)-(\eta_l+3^{-1}\mu_l)\nabla\mathrm{div}\vec{u}(x)=\vec{f}(x)\;\;(\text{в }\Omega),\quad B_{L,l}\vec{u}:=\vec{u}(x)=\vec{g}(x)\;\;(\text{на }\partial\Omega).$$

Можно проверить, что матричное дифференциальное выражение L_l определяет невырожденную правильно эллиптическую по Дуглису—Ниренбергу систему, а граничное условие $B_{L,l}$ удовлетворяет условию дополнительности (см. [18]). Из теоремы о нормальной разрешимости [18, с. 241] следует, что существуют константы $d_{1,l}>0$, $d_{2,l}>0$ $(l=\overline{0,m})$, не зависящие от поля $\vec{u}$, такие, что

$$\begin{gathered}d_{1,l}\|\vec{u}\|^2_{\vec{W}_2^2(\Omega)}\leqslant\|L_l\vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega)}\leqslant d_{2,l}\|\vec{u}\|^2_{\vec{W}_2^2(\Omega)}\quad\forall\,\vec{u}\in\vec{W}_2^2(\Omega,B_{L,l}),\\ \vec{W}_2^2(\Omega,B_{L,l}):=\{\vec{u}\in\vec{W}_2^2(\Omega)\big|\;B_{L,l}\vec{u}=\vec{u}(x)=\vec{0}\;\;(\text{на }\partial\Omega)\}=\mathcal{D}(A_l),\\ \|\vec{u}\|^2_{\vec{W}_2^2(\Omega)}:=\sum_{k=1}^3\Big[\|u_k\|^2_{L_2(\Omega)}+\sum_{i,j=1}^3\Big\|\frac{\partial^2u_k}{\partial x_i\partial x_j}\Big\|^2_{L_2(\Omega)}\Big].\end{gathered} \tag{3.3}$$

Далее, из неравенства Эрлинга—Ниренберга [3, с. 33] следует, что существует константа $d_1>0$, не зависящая от поля $\vec{u}$, такая, что

$$\Big\|\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\Big\|^2_{L_2(\Omega)}\leqslant d_1\|\vec{u}\|^2_{\vec{W}_2^2(\Omega)}\quad\forall\,\vec{u}\in\vec{W}_2^2(\Omega),\quad k,j=1,2,3. \tag{3.4}$$

Пусть теперь $\vec{u}\in\mathcal{D}(A_l)=\vec{W}_2^2(\Omega,B_{L,l})$ $(l=\overline{0,m})$. С использованием неравенств (3.3), (3.4) проведем следующие оценки:

$$\|B\vec{u}\|^2_{W^1_{2,\rho_0}(\Omega)}=a_\infty^2\int\limits_\Omega\left(\left|\nabla\left(\rho_0^{-1/2}(z)\mathrm{div}(\rho_0(z)\vec{u}(x))\right)\right|^2+\left|\rho_0^{-1/2}(z)\mathrm{div}(\rho_0(z)\vec{u}(x))\right|^2\right)d\Omega\leqslant$$
$$\leqslant d_2\|\vec{u}\|^2_{\vec{W}_2^2(\Omega)}\leqslant d_2d_{1,l}^{-1}\|L_l\vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega)}\leqslant d_2d_{1,l}^{-1}\max_{x\in\overline{\Omega}}\rho_0(z)\int\limits_\Omega\rho_0(z)|\rho_0^{-1}(z)L_l\vec{u}(x)|^2\,d\Omega=c_l\|A_l\vec{u}\|^2_H,$$

где $c_l=c_l(d_{1,l},d_1,\rho_0,a_\infty,\Omega)>0$ — некоторая абсолютная константа. □

Для $l=\overline{1,m}$ определим следующие операторы:

$$Q_l:=A_l^{1/2}A_0^{-1/2},\quad Q_l^+:=A_0^{-1/2}A_l^{1/2},\quad Q_B:=BA_0^{-1/2},\quad Q_B^+:=A_0^{-1/2}B^*.\tag{3.5}$$

Лемма 3.3. $Q_l\in\mathcal{L}(H)$, $Q_B\in\mathcal{L}(H,L_{2,\rho_0}(\Omega))$. *Операторы* Q_l^+, Q_B^+ *расширяются по непрерывности до ограниченных операторов* Q_l^*, Q_B^* *соответственно. При этом* $Q_B^+=Q_B^*|_{\mathcal{D}(B^*)}$, $Q_l^+=Q_l^*|_{\mathcal{D}(A_l^{1/2})}$ $(l=\overline{1,m})$, *операторы* $Q_l^*Q_l$ *положительно определены.*

Доказательство. Доказательство проведем для оператора Q_l. Ограниченность Q_l следует из равенства $\mathcal{D}(A_l)=\mathcal{D}(A_0)$ $(l=\overline{1,m})$. Следовательно, $Q_l^*\in\mathcal{L}(H)$. Далее, для любого $\vec{u}\in H$ и $\vec{v}\in\mathcal{D}(A_l^{1/2})$ имеем $(Q_l\vec{u},\vec{v})_H=(A_l^{1/2}A_0^{-1/2}\vec{u},\vec{v})_H=(\vec{u},Q_l^+\vec{v})_H=(\vec{u},Q_l^*\vec{v})_H$. Отсюда следует, что $Q_l^+=Q_l^*|_{\mathcal{D}(A_l^{1/2})}$, $\overline{Q_l^+}=Q_l^*$ $(l=\overline{1,m})$. Далее, для любого $\vec{u}\in H$ с учетом (3.2) имеем

$$\left(Q_l^*Q_l\vec{u},\vec{u}\right)_H=\left(Q_l\vec{u},Q_l\vec{u}\right)_H=\left(A_0^{-1/2}\vec{u},A_0^{-1/2}\vec{u}\right)_{A_l}=$$
$$=\mu_l\mathcal{J}(A_0^{-1/2}\vec{u},A_0^{-1/2}\vec{u})+\left(\eta_l+\frac{\mu_l}{3}\right)\mathcal{D}(A_0^{-1/2}\vec{u},A_0^{-1/2}\vec{u})\geqslant$$
$$\geqslant\min\left\{\frac{\mu_l}{\mu_0},\frac{3\eta_l+\mu_l}{3\eta_0+\mu_0}\right\}\left[\mu_0\mathcal{J}(A_0^{-1/2}\vec{u},A_0^{-1/2}\vec{u})+\left(\eta_0+\frac{\mu_0}{3}\right)\mathcal{D}(A_0^{-1/2}\vec{u},A_0^{-1/2}\vec{u})\right]=$$
$$=\min\left\{\frac{\mu_l}{\mu_0},\frac{3\eta_l+\mu_l}{3\eta_0+\mu_0}\right\}\left(A_0^{-1/2}\vec{u},A_0^{-1/2}\vec{u}\right)_{A_0}=\min\left\{\frac{\mu_l}{\mu_0},\frac{3\eta_l+\mu_l}{3\eta_0+\mu_0}\right\}\|\vec{u}\|^2_H,$$

откуда следует положительная определенность оператора $Q_l^*Q_l$. □

С использованием введенных операторов задачу (2.9)–(2.11) запишем в виде задачи Коши для системы интегродифференциальных уравнений первого порядка в гильбертовом пространстве $H_0:=H\oplus L_{2,\rho_0}(\Omega)$ $(H=\vec{L}_2(\Omega,\rho_0))$:

$$\begin{cases}\dfrac{d\vec{u}}{dt}+(2\omega_0 iS+A_0)\vec{u}-B^*\rho+\displaystyle\sum_{l=1}^m\int\limits_0^t e^{-b_l(t-s)}A_l\vec{u}(s)\,ds=\vec{f}(t),\\[2mm] \dfrac{d\rho}{dt}+B\vec{u}=0,\quad(\vec{u}(0);\rho(0))^\tau:=(\vec{u}^0;\rho^0)^\tau,\end{cases}\tag{3.6}$$

где символ τ обозначает операцию транспонирования.

Определение 3.1. Сильное решение задачи (3.6) назовем *сильным решением* начально-краевой задачи (2.9)–(2.11). Элемент $\zeta(t):=(\vec{u}(t);\rho(t))^\tau$ назовем *сильным решением* задачи (3.6), если $\zeta(t)\in\mathcal{D}(A_0)\oplus\mathcal{D}(B^*)$ при каждом $t\in\mathbb{R}_+:=[0,+\infty)$, $(A_0\vec{u}(t);B^*\rho(t))^\tau\in C(\mathbb{R}_+,H_0)$, $(\vec{u}(t);\rho(t))^\tau\in C^1(\mathbb{R}_+,H_0)$, $(\vec{u}(0);\rho(0))^\tau:=(\vec{u}^0;\rho^0)^\tau$ и выполнены уравнения из (3.6) для любого $t\in\mathbb{R}_+$.

3.2. Переход к дифференциально-операторному уравнению первого порядка. Теорема о сильной разрешимости. Пусть $\vec{u}(t)$, $\rho(t)$ — сильное решение задачи (3.6). Тогда из леммы 3.3

следует, что $\vec{u}(t)$, $\rho(t)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt} + 2\omega_0 iS\vec{u} + A_0^{1/2}\Big\{A_0^{1/2}\vec{u} - Q_B^*\rho + \sum\limits_{l=1}^{m} Q_l^* \int\limits_0^t e^{-b_l(t-s)} Q_l A_0^{1/2}\vec{u}(s)\,ds\Big\} = \vec{f}(t), \\ \dfrac{d\rho}{dt} + Q_B A_0^{1/2}\vec{u} = 0, \quad (\vec{u}(0);\rho(0))^\tau := (\vec{u}^0;\rho^0)^\tau. \end{cases} \tag{3.7}$$

Осуществим в системе (3.7) следующие замены:

$$\vec{v}_l(t) := \int\limits_0^t e^{-b_l(t-s)} Q_l A_0^{1/2}\vec{u}(s)\,ds \quad (l = \overline{1,m}). \tag{3.8}$$

Поля $\vec{v}_l(t)$ $(l = \overline{1,m})$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}_+$. Продифференцированные соотношения (3.8) и преобразованные уравнения системы (3.7) составляют следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt} + 2\omega_0 iS\vec{u} + A_0^{1/2}\Big\{A_0^{1/2}\vec{u} - Q_B^*\rho + \sum\limits_{l=1}^{m} Q_l^*\vec{v}_l\Big\} = \vec{f}(t), \\ \dfrac{d\rho}{dt} + Q_B A_0^{1/2}\vec{u} = 0, \quad \dfrac{d\vec{v}_l}{dt} - Q_l A_0^{1/2}\vec{u} + b_l\vec{v}_l = 0 \quad (l = \overline{1,m}), \\ \qquad \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \quad \rho(0) = \rho^0, \quad \vec{v}_l(0) = 0 \ \ (l = \overline{1,m}). \end{cases} \tag{3.9}$$

Эту систему будем трактовать как задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := H \oplus \mathcal{H}_0$, где $\mathcal{H}_0 := L_{2,\rho_0}(\Omega) \oplus \big(\oplus_{l=1}^m H\big)$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0. \tag{3.10}$$

Здесь $\xi := (\vec{u}; w)^\tau$, $w := (\rho; \vec{v}_1; \ldots; \vec{v}_m)^\tau$, $\xi^0 := (\vec{u}^0; w^0)^\tau$, $w^0 := (\rho^0; \vec{0}; \ldots; \vec{0})^\tau$, $\mathcal{F}(t) := (\vec{f}(t); 0)^\tau$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что для операторного блока $\mathcal{A}$ справедливы следующие представления — факторизация с симметричным множителями и факторизация в форме Шура—Фробениуса:

$$\mathcal{A} = \operatorname{diag}\big(A_0^{1/2}, \mathcal{I}\big) \begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \operatorname{diag}\big(A_0^{1/2}, \mathcal{I}\big) + \operatorname{diag}\big(2\omega_0 iS, 0\big), \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{Q}A_0^{-1/2} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \operatorname{diag}\big(A_0, \mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*\big) \begin{pmatrix} I & A_0^{-1/2}\mathcal{Q}^* \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} + \operatorname{diag}\big(2\omega_0 iS, 0\big) = \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{Q}TA_0^{-1/2} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \operatorname{diag}\big(A_0^{1/2}TA_0^{1/2}, \mathcal{G} + \mathcal{Q}T\mathcal{Q}^*\big) \begin{pmatrix} I & A_0^{-1/2}T\mathcal{Q}^* \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\xi = (\vec{u}; w)^\tau \in \mathcal{H} \mid \vec{u} + A_0^{-1/2}\mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(A_0)\}, \tag{3.13}$$

где I, $\mathcal{I}$ — единичные операторы в $H = \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ и $\mathcal{H}_0$ соответственно,

$$T := (I + 2\omega_0 iA_0^{-1/2}SA_0^{-1/2})^{-1}, \quad \mathcal{Q} := \big(-Q_B, Q_1, \ldots, Q_m\big)^\tau, \quad \mathcal{G} := \operatorname{diag}\big(0, b_1 I, \ldots, b_m I\big).$$

Определение 3.2 (см. [10, с. 38]). *Сильным решением* задачи Коши (3.10) назовем функцию $\xi(t)$ такую, что $\xi(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ для любого t из $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{A}\xi(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\xi(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\xi(0) = \xi^0$ и выполнено уравнение из (3.10) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Таким образом, если поле $\vec{u}(t)$ и функция $\rho(t)$ составляют сильное решение задачи (3.6), то элемент $\xi(t)$ есть сильное решение задачи (3.10). Обратное, однако, не всегда верно. Это ясно из того, что при выводе задачи Коши (3.10) осуществлялось замыкание операторов Q_B^+ и Q_l^+. Тем не менее, далее будет установлено, что если начальные данные выбирать специальным образом, то от задачи (3.10) можно будет вернуться к задаче (3.6).

Напомним, что *числовой областью* оператора $\mathcal{A}$ называется множество

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}) := \{\big(\mathcal{A}\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}} \mid \ \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \ \ \|\xi\|_{\mathcal{H}} = 1\} \subset \mathbb{C}.$$

Лемма 3.4. *Оператор $\mathcal{A}$ — максимальный аккретивный и секториальный. Более того,*

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \big|\mathrm{Im}\lambda\big| \leqslant \|\mathcal{Q}^*\|^2(2\omega_0)^{-1}\mathrm{Re}\lambda + 2\omega_0,\ \ 0 \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant 4\omega_0^2\|\mathcal{Q}^*\|^{-2}\} \cup \\ \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \big|\mathrm{Im}\lambda\big| \leqslant 2\|\mathcal{Q}^*\|(\mathrm{Re}\lambda)^{1/2},\ \ \mathrm{Re}\lambda \geqslant 4\omega_0^2\|\mathcal{Q}^*\|^{-2}\}.$$

Доказательство. **1**. Прежде всего заметим, что $\mathcal{D}(A_0) \oplus \mathcal{D}(B^*) \bigoplus_{l=1}^{m} \mathcal{D}(A_l^{1/2}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$, а значит, оператор $\mathcal{A}$ плотно определен. Действительно, пусть $\xi = (\vec{u}; w)^\tau \in \mathcal{D}(A_0) \oplus \big[\mathcal{D}(B^*) \bigoplus_{l=1}^{m} \mathcal{D}(A_l^{1/2})\big]$, т. е. $\vec{u} \in \mathcal{D}(A_0)$, $\rho \in \mathcal{D}(B^*)$, $\vec{v}_l \in \mathcal{D}(A_l^{1/2})$ $(l = \overline{1, m})$. Тогда с использованием леммы 3.3 найдем

$$\vec{u} + A_0^{-1/2}\mathcal{Q}^* w = \vec{u} + A_0^{-1/2}\big[-Q_B^*\rho + \sum_{l=1}^{m} Q_l^*\vec{v}_l\big] = \vec{u} + A_0^{-1/2}\big[-Q_B^*\big|_{\mathcal{D}(B^*)}\rho + \sum_{l=1}^{m} Q_l^*\big|_{\mathcal{D}(A_l^{1/2})}\vec{v}_l\big] = \\ = \vec{u} + A_0^{-1/2}\big[-A_0^{-1/2}B^*\rho + \sum_{l=1}^{m} A_0^{-1/2}A_l^{1/2}\vec{v}_l\big] = A_0^{-1}\big[A_0\vec{u} - B^*\rho + \sum_{l=1}^{m} A_l^{1/2}\vec{v}_l\big] \in \mathcal{D}(A_0),$$

т. е. $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (3.13)).

2. Докажем, что оператор $\mathcal{A}$ аккретивен и секториален. Пусть $\xi = (\vec{u}; w)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, тогда $\vec{u} \in \mathcal{D}(A_0^{1/2})$, и из факторизации (3.11) оператора $\mathcal{A}$ симметричной форме и леммы 3.1 получим

$$\mathrm{Re}\big(\mathcal{A}\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}} = \mathrm{Re}\left(\begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_0^{1/2}\vec{u} \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_0^{1/2}\vec{u} \\ w \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} = \|A_0^{1/2}\vec{u}\|_H^2 + \|\mathcal{G}^{1/2}w\|_{\mathcal{H}_0}^2 \geqslant 0, \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} \big|\mathrm{Im}\big(\mathcal{A}\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}}\big| &= \big|\mathrm{Im}\big[(\mathcal{Q}^* w, A^{1/2}\vec{u})_H - (\mathcal{Q}A^{1/2}\vec{u}, w)_{\mathcal{H}_0} + 2\omega_0 i(S\vec{u}, \vec{u})_H\big]\big| = \\ &= \big|2\,\mathrm{Im}(\mathcal{Q}^* w, A^{1/2}\vec{u})_H + 2\omega_0 i(S\vec{u}, \vec{u})_H\big| \leqslant 2\,\|A^{1/2}\vec{u}\|_H\|\mathcal{Q}^* w\|_H + 2\omega_0\|\vec{u}\|_H^2. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Из (3.14) следует, что оператор $\mathcal{A}$ аккретивен. Из (3.14), (3.15) при любом $\alpha > 0$ найдем, что

$$\mathrm{Re}\big(\mathcal{A}\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}} - \alpha\big|\mathrm{Im}\big(\mathcal{A}\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}}\big| \geqslant \big(\|A^{1/2}\vec{u}\|_H - \alpha\|\mathcal{Q}^* w\|_H\big)^2 - \\ - \alpha^2\|\mathcal{Q}^* w\|_H^2 + \|\mathcal{G}^{1/2}w\|_{\mathcal{H}_0}^2 - 2\omega_0\alpha\|\vec{u}\|_H^2 \geqslant -\max\{\alpha^2\|\mathcal{Q}^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_0, H)}^2, 2\omega_0\alpha\}\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Re}\big(\big[\mathcal{A} + \gamma(\alpha)\big]\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}} - \alpha\big|\mathrm{Im}\big(\big[\mathcal{A} + \gamma(\alpha)\big]\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}}\big| \geqslant 0,$$

где $\gamma(\alpha) := \max\{\alpha^2\|\mathcal{Q}^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_0, H)}^2, 2\omega_0\alpha\}$. Таким образом,

$$\big|\mathrm{Im}\big(\big[\mathcal{A} + \gamma(\alpha)\big]\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}}\big| \leqslant \alpha^{-1}\mathrm{Re}\big(\big[\mathcal{A} + \gamma(\alpha)\big]\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}} \quad \forall\, \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),\ \ \alpha > 0.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\arg(\lambda + \gamma(\alpha))| \leqslant \operatorname{arctg}\alpha^{-1}\}$ при любом $\alpha > 0$, т. е. оператор $\mathcal{A}$ секториален с вершиной $-\gamma(\alpha)$ и полууглом раствора $\operatorname{arctg}\alpha^{-1}$.

Формула из формулировки леммы получается построением огибающих соответствующих семейств прямых.

3. Докажем, что оператор $\mathcal{A}$ максимален и замкнут. Для этого достаточно показать (см. [10, теорема 4.3, с. 109]), что оператор $\mathcal{A} - \lambda$ непрерывно обратим при $\lambda < 0$. Положим $\xi_1 := (\vec{u}_1; w_1)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\xi_2 := (\vec{u}_2; w_2)^\tau \in \mathcal{H}$. Определим оператор $S_A := A_0^{-1/2}SA_0^{-1/2}$. Из (3.11) найдем, что уравнение $(\mathcal{A} - \lambda)\xi_1 = \xi_2$ можно переписать в векторно-матричной форме:

$$\mathrm{diag}(A_0^{1/2}, \mathcal{I})\begin{pmatrix} I + 2\omega_0 iS_A - \lambda A_0^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix}\mathrm{diag}(A_0^{1/2}, \mathcal{I})\begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}_2 \\ w_2 \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Отсюда видно, что оператор $\mathcal{A} - \lambda$ будет иметь ограниченный обратный оператор, определенный на всем пространстве $\mathcal{H}$, т. е. будет иметь резольвенту $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) := (\mathcal{A} - \lambda)^{-1}$, если средний блок в (3.16) будет непрерывно обратим в $\mathcal{H}$.

Введем оператор-функцию $L(\lambda) := I - \lambda A_0^{-1} + 2\omega_0 i S_A + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\lambda)^{-1}\mathcal{Q}$. Фиксируем $\lambda < 0$. Для любого $0 \neq \vec{u} \in H = \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ найдем, что

$$\begin{aligned}
&\|L(\lambda)\vec{u}\|_H \geqslant \|\vec{u}\|_H^{-1} \cdot |(L(\lambda)\vec{u}, \vec{u})_H| \geqslant \|\vec{u}\|_H^{-1} \cdot \mathrm{Re}(L(\lambda)\vec{u}, \vec{u})_H = \\
&\qquad = \|\vec{u}\|_H - \lambda \|\vec{u}\|_H^{-1} \cdot \|A_0^{-1/2}\vec{u}\|_H^2 + \|\vec{u}\|_H^{-1} \cdot ((\mathcal{G}-\lambda)^{-1}\mathcal{Q}\vec{u}, \mathcal{Q}\vec{u})_{\mathcal{H}_0} \geqslant \|\vec{u}\|_H, \\
&\|[L(\lambda)]^*\vec{u}\|_H \geqslant \ldots \geqslant \|\vec{u}\|_H.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Следовательно, $L^{-1}(\lambda) \in \mathcal{L}(H)$, и непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} I - \lambda A_0^{-1} + 2\omega_0 i S_A & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}-\lambda \end{pmatrix}^{-1} = \\
&= \left[\begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{G}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I} \end{pmatrix}\right]^{-1} = \\
&= \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} L^{-1}(\lambda) & -L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda) & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) - \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),
\end{aligned}$$

где $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) := (\mathcal{G}-\lambda)^{-1}$. Отсюда следует, что оператор $\mathcal{A}$ замкнут и максимален.

Из (3.16) получим представление для резольвенты оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} A_0^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A_0^{-1/2} & -A_0^{-1/2}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)A_0^{-1/2} & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) - \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

при всех $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G}) \cup \sigma(L(\lambda))$, где $\sigma(\mathcal{G})$, $\sigma(L(\lambda))$ — спектры оператора $\mathcal{G}$ и операторного пучка $L(\lambda)$ соответственно. □

Отметим здесь, что свойство секториальности операторного блока $\mathcal{A}$ никак не связано с компактностью оператора A_0^{-1}. Хотя свойство $A_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ и факторизация (3.12) показывают, что оператор $\mathcal{A}$ подобен слабому возмущению самосопряженного неотрицательного оператора. В этом случае из [10, теорема 7.2, с. 183] получим, что оператор $-\mathcal{A}$ порождает сильно непрерывную полугруппу операторов, голоморфную в некотором секторе, содержащем положительную полуось.

Основываясь на лемме 3.4, докажем теорему о сильной разрешимости задачи (2.9)–(2.11).

Теорема 3.1. *Пусть $\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A_0)$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, а поле $\vec{f}(t,x)$ удовлетворяет условию Гельдера: $\forall\, \tau \in \mathbb{R}_+ \ \exists\, K = K(\tau) > 0$, $k(\tau) \in (0,1]$, что $\|\vec{f}(t) - \vec{f}(s)\|_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)} \leqslant K|t-s|^k$ при $0 \leqslant s,t \leqslant \tau$. Тогда сильное решение задачи* (2.9)–(2.11) *существует и единственно.*

Доказательство. **1**. Пусть $\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A_0)$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, $\xi^0 := (\vec{u}^0; w^0)^\tau$, $w^0 := (\rho^0; 0; \ldots; 0)^\tau$. Из (3.13) и леммы 3.3 найдем, что $\xi^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$:

$$\vec{u}^0 + A_0^{-1/2}\mathcal{Q}^*w^0 = \vec{u}^0 - A_0^{-1/2}Q_B^*\big|_{\mathcal{D}(B^*)}\rho^0 = \vec{u}^0 - A_0^{-1}B^*\rho^0 = A_0^{-1}\big[A_0\vec{u}^0 - B^*\rho^0\big] \in \mathcal{D}(A_0).$$

Далее, из условий теоремы и равенства $\|\mathcal{F}(t) - \mathcal{F}(s)\|_{\mathcal{H}} = \|\vec{f}(t) - \vec{f}(s)\|_H$ следует, что функция $\mathcal{F}(t)$ удовлетворяет условию Гельдера.

Из [5, теорема 5.9, с. 61] следует, что оператор $-\mathcal{A}$ порождает сильно непрерывную полугруппу операторов, голоморфную в некотором секторе, содержащем положительную полуось. Из [5, теорема 1.4, с. 130] следует, что задача Коши (3.10) имеет единственное сильное (в смысле определения 3.2) решение.

2. Пусть функция $\xi(t)$ — единственное решение задачи Коши (3.10). То есть $\xi(t) = (\vec{u}(t); w(t))^\tau$, где $w(t) = (\rho(t); \vec{v}_1(t); \ldots; \vec{v}_m(t))^\tau$, причем $\mathcal{A}\xi(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\xi(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$.

Покажем, что $A_0\vec{u} \in C(\mathbb{R}_+; H)$. Тогда в системе (3.7) можно будет раскрыть фигурные скобки и заменить «$*$» на «$+$»; в результате получим, что найденное сильное решение задачи Коши (3.10) (системы (3.7)) будет сильным решением задачи (3.6) (в смысле определения 3.1).

Запишем уравнение из (3.10) в виде системы (3.9). Учитывая, что $\vec{v}_l(0)=\vec{0}$ ($l=\overline{1,m}$), из второго и последующих уравнений системы (3.9) последовательно найдем:

$$\rho(t)=-\int\limits_0^t Q_B A_0^{1/2}\vec{u}(s)\,ds+\rho^0,\quad \vec{v}_l(t)=\int\limits_0^t e^{-b_l(t-s)}Q_l A_0^{1/2}\vec{u}(s)\,ds,\ \ l=\overline{1,m}.$$

Отсюда и из первого уравнения системы (3.9) найдем, что

$$\frac{d\vec{u}}{dt}+2\omega_0 iS\vec{u}+A_0\Big\{\vec{u}+\int\limits_0^t A_0^{-1/2}\Big[Q_B^*Q_B+\sum_{l=1}^m e^{-b_l(t-s)}Q_l^*Q_l\Big]A_0^{1/2}\vec{u}(s)\,ds-A_0^{-1/2}Q_B^*\rho^0\Big\}=\vec{f}(t). \quad (3.19)$$

Из $\rho^0\in\mathcal{D}(B^*)$ и леммы 3.3 следует, что $A_0^{-1/2}Q_B^*\rho^0=A_0^{-1/2}Q_B^*|_{\mathcal{D}(B^*)}\rho^0=A_0^{-1}B^*\rho^0\in\mathcal{D}(A_0)$. Отсюда и из (3.19) получим, что

$$\vec{u}(t)+\int\limits_0^t R(t-s)\vec{u}(s)\,ds=:\vec{g}(t),\quad A_0\vec{g}(t)\in C(\mathbb{R}_+;H=\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)), \quad (3.20)$$

$$R(t):=A_0^{-1/2}\Big[Q_B^*Q_B+\sum_{l=1}^m e^{-b_lt}Q_l^*Q_l\Big]A_0^{1/2}.$$

Введем пространство $H(A_0):=(\mathcal{D}(A_0),\|\cdot\|_{H(A_0)})$, где $\|\vec{u}\|_{H(A_0)}:=\|A_0\vec{u}\|_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)}$ для любого $\vec{u}\in\mathcal{D}(A_0)$. Известно, что $H(A_0)$ банахово пространство. Будем рассматривать (3.20) как интегральное уравнение Вольтерра второго рода в пространстве $H(A_0)$.

Покажем, что оператор-функция $R(t)$ непрерывна при $t\in\mathbb{R}_+$ в равномерной операторной топологии пространства $H(A_0)$. Для этого достаточно показать, что $A_0^{-1/2}Q_B^*Q_BA_0^{1/2}\in\mathcal{L}(H(A_0))$, $A_0^{-1/2}Q_l^*Q_lA_0^{1/2}\in\mathcal{L}(H(A_0))$ ($l=\overline{1,m}$). Докажем первое включение, оставшиеся включения доказываются аналогично.

Из леммы 3.2 заключаем, что $Q_BA_0^{-1/2}=BA_0^{-1}\in\mathcal{L}(H,W_{2,\rho_0}^1(\Omega))$. Учитывая, что $\mathcal{D}(B^*)=W_{2,\rho_0}^1(\Omega)$ и $B^*\in\mathcal{L}(W_{2,\rho_0}^1(\Omega),H)$, вычислим

$$\begin{aligned}\|A_0^{-1/2}Q_B^*Q_BA_0^{1/2}\vec{u}\|_{H(A_0)}&=\|A_0^{1/2}Q_B^*Q_BA_0^{-1/2}(A_0\vec{u})\|_H=\\&=\|A_0^{1/2}Q_B^*|_{\mathcal{D}(B^*)}BA_0^{-1}(A_0\vec{u})\|_H=\|B^*BA_0^{-1}(A_0\vec{u})\|_H\leqslant\\&\leqslant\|B^*\|_{\mathcal{L}(W_{2,\rho_0}^1(\Omega),H)}\|BA_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(H,W_{2,\rho_0}^1(\Omega))}\|\vec{u}\|_{H(A_0)}\quad\forall\,\vec{u}\in H(A_0).\end{aligned}$$

Таким образом, ядро уравнения (3.20) непрерывно при $0\leqslant s\leqslant t<+\infty$ со значениями в $H(A_0)$. Если $\vec{g}(t)\in C(\mathbb{R}_+,H(A_0))$, то уравнение (3.20) имеет единственное решение $\vec{u}(t)\in C(\mathbb{R}_+,H(A_0)=\mathcal{D}(A_0))$. Следовательно, в системе (3.7) можно раскрыть фигурные скобки и заменить «$*$» на «$+$»; в результате получим, что найденное сильное решение задачи Коши (3.10) (системы (3.7)) является сильным решением задачи (3.6) (в смысле определения 3.1). □

4. Задача о спектре вязкоупругой сжимаемой жидкости

В этом разделе исследуется спектр операторного блока $\mathcal{A}$ (см. (3.11)–(3.13)). В пункте 4.1 осуществляется вывод основных спектральных задач. В пункте 4.2 исследуется существенный и дискретный спектр оператора $\mathcal{A}$ (леммы 4.1–4.4). В частности, доказано, что оператор непрерывно обратим: $\mathcal{A}^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

В пункте 4.3 исследуется локализация спектра оператора $\mathcal{A}$. Доказывается, что спектр оператора лежит в правой открытой полуплоскости (лемма 4.5) в некоторой полосе, содержащей положительную полуось (лемма 4.7). Устанавливается формула асимптотического распределения собственных значений оператора $\mathcal{A}$ с предельной точкой в бесконечности (лемма 4.6).

В пункте 4.4 исследуется локализация спектра оператора $\mathcal{A}$ в случае, если $\omega=0$. С использованием методов индефинитной метрики доказывается, что в этом случае спектр оператора лежит на положительной действительной оси за исключением, быть может, конечного количества комплексно сопряженных изолированных собственных значений конечной кратности (лемма 4.8).

Вычисляется область комплексной плоскости, которая содержит невещественные собственные значения; выводится условие, достаточное для отсутствия невещественных собственных значений (лемма 4.9).

В пункте 4.5 доказывается теорема о представлении решения эволюционной задачи (3.6), а также об асимптотическом поведении этого решения (теорема 4.1). Если внешнее поле стабилизируется, то решение эволюционной задачи сходится к решению следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\rho_0(z)}\left(\Big(\mu_0+\displaystyle\sum_{l=1}^m\frac{\mu_l}{b_l}\Big)\Delta\vec u(x)+\Big(\eta_0+\frac{\mu_0}{3}+\sum_{l=1}^m\frac{1}{b_l}\Big[\eta_l+\frac{\mu_l}{3}\Big]\Big)\nabla\mathrm{div}\vec u(x)\right)- \\ \qquad\qquad -2\omega_0\big(\vec u(x)\times\vec e_3\big)+\nabla\Big(\dfrac{a_\infty}{\rho_0^{1/2}(z)}\rho(x)\Big)=\vec f(x)\quad(\text{в }\Omega), \\ \dfrac{a_\infty}{\rho_0^{1/2}(z)}\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\vec u(x)\big)=0\quad(\text{в }\Omega),\qquad\qquad \vec u(x)=0\quad(\text{на }\partial\Omega). \end{cases}$$

В частности, в случае $\omega_0=0$ доказано, что если внешнее поле стабилизируется к некоторому потенциальному полю, то решение эволюционной задачи сходится к равновесному состоянию с новым распределением плотности.

В пункте 4.6 доказывается теорема о полноте и базисности системы корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ в случае, если система находится в невесомости и не вращается. В случае, если спектр оператора $\mathcal{A}$ действительный, найдено разложение эволюционной задачи (3.6) по соответствующей системе собственных элементов.

4.1. Вывод основных спектральных задач. Будем разыскивать решения однородного (при $\mathcal{F}(t)\equiv 0$) уравнения (3.10) в виде $\xi(t)=\exp(-\lambda t)\xi$, где λ — спектральный параметр, а ξ — амплитудный элемент. В результате придем к следующей основной спектральной задаче:

$$\mathcal{A}\xi=\lambda\xi,\quad \xi\in\mathcal{D}(\mathcal{A})\subset\mathcal{H}, \tag{4.1}$$

которую будем ассоциировать с задачей о спектре вязкоупругой сжимаемой жидкости Олдройта.

Пусть $\xi=(\vec u;w)^\tau\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Осуществим, с учетом факторизации (3.11), в спектральной задаче (4.1) замену искомого элемента $\mathrm{diag}(A_0^{1/2},\mathcal{I})\xi=\eta=:(\vec z;w)^\tau$. Получим спектральную задачу

$$\mathcal{A}(\lambda)\eta:=\begin{pmatrix} I-\lambda A_0^{-1}+2\omega_0 iS_A & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec z\\ w\end{pmatrix}=0,\quad \eta\in\mathcal{H}=H\oplus\mathcal{H}_0, \tag{4.2}$$

где $S_A=A_0^{-1/2}SA_0^{-1/2}$. Пусть $\lambda\notin\{0,b_1,\dots,b_m\}=\sigma(\mathcal{G})$, тогда из (4.2) найдем, что

$$L(\lambda)\vec z:=\big[I-\lambda A_0^{-1}+2\omega_0 iS_A+\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\lambda)^{-1}\mathcal{Q}\big]\vec z=0,\quad \vec z\in H.$$

Эту задачу, вспоминая определение операторов $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{G}$, можно переписать в следующем виде:

$$L(\lambda)\vec z:=\Big[I-\lambda A_0^{-1}+2\omega_0 iS_A-\frac{1}{\lambda}Q_B^*Q_B+\sum_{l=1}^m\frac{1}{b_l-\lambda}Q_l^*Q_l\Big]\vec z=0,\quad \vec z\in H. \tag{4.3}$$

Из (3.18) следует, что спектр оператора $\mathcal{A}$ и спектр пучка $L(\lambda)$ (спектры задач (4.1) и (4.3)) совпадают между собой при $\lambda\notin\sigma(\mathcal{G})$.

4.2. О существенном и дискретном спектре задачи. Прежде всего, установим следующую лемму о точках множества $\{0,b_1,\dots,b_m\}$.

Лемма 4.1. $\{b_1,\dots,b_m\}\subset\rho(\mathcal{A})$. *Точка* $\lambda=0$ *не является собственным значением оператора* $\mathcal{A}$ (*спектральной задачи* (4.1)).

Доказательство. Запишем уравнение $(\mathcal{A}-\lambda)\xi=\xi_0$ в виде системы (см. (3.9), (3.11)):

$$\begin{cases} A_0^{1/2}\Big[A_0^{1/2}\vec u+2\omega_0 iA_0^{-1/2}S\vec u-Q_B^*\rho+\displaystyle\sum_{l=1}^m Q_l^*\vec v_l\Big]-\lambda\vec u &=\vec u_0, \\ Q_BA_0^{1/2}\vec u-\lambda\rho &=\rho_0, \\ -Q_lA_0^{1/2}\vec u+b_l\vec v_l-\lambda\vec v_l &=\vec v_{l0},\quad l=\overline{1,m}. \end{cases} \tag{4.4}$$

1. Положим в системе (4.4) $\lambda=0$, $\xi_0=(\vec u_0;\rho_0;\vec v_{10};\dots;\vec v_{m0})^\tau=0$ и выразим из третьего уравнения поле $\vec v_l$. С учетом (3.5) найдем, что $\vec v_l=b_l^{-1}Q_lA_0^{1/2}\vec u=b_l^{-1}A_l^{1/2}\vec u$ $(l=\overline{1,m})$. Используем найденные элементы в первом уравнении системы (4.4); умножим первое уравнение системы скалярно на поле $\vec u$, а второе — на функцию ρ. После простых преобразований получим систему

$$\begin{cases}\|A_0^{1/2}\vec u\|_H^2+2\omega_0 i(S\vec u,\vec u)_H-(Q_B^*\rho,A_0^{1/2}\vec u)_H+\sum\limits_{l=1}^m\dfrac{1}{b_l}\,\|A_l^{1/2}\vec u\|_H^2=0,\\ (Q_BA_0^{1/2}\vec u,\rho)_{L_{2,\rho_0(\Omega)}}=\overline{(Q_B^*\rho,A_0^{1/2}\vec u)_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}}=0.\end{cases}$$

Из этой системы следует, что $\|A_0^{1/2}\vec u\|_H^2+\sum\limits_{l=1}^m b_l^{-1}\|A_l^{1/2}\vec u\|_H^2=0$, а значит, $\vec u=0$ в $H_{A_0}=H_{A_l}$. Следовательно, $\vec v_l=0$ $(l=\overline{1,m})$. Из системы (4.4) (при $\lambda=0$, $\xi_0=0$) найдем теперь, что $Q_B^*\rho=0$. Отсюда следует, что $\rho=0$, так как $\mathrm{Ker}Q_B^*=\{0\}$. Таким образом, $\xi=0$, и точка $\lambda=0$ не является собственным значением оператора $\mathcal A$.

2. Положим теперь в системе (4.4) $\lambda=b_q$, $\xi_0=0$:

$$\begin{cases}A_0^{1/2}\Big[A_0^{1/2}\vec u+2\omega_0 iA_0^{-1/2}S\vec u-Q_B^*\rho+\sum\limits_{l=1}^m Q_l^*\vec v_l\Big]-b_q\vec u=0,\\ Q_BA_0^{1/2}\vec u-b_q\rho=0,\qquad -Q_qA_0^{1/2}\vec u=-A_q^{1/2}\vec u=0,\\ -Q_lA_0^{1/2}\vec u+(b_l-b_q)\vec v_l=0,\quad l=\overline{1,m},\ \ l\neq q.\end{cases}\tag{4.5}$$

Последовательно из третьего, второго и четвертого уравнений системы (4.5) найдем, что $\vec u=0$, $\rho=0$, $\vec v_l=0$ $(l\neq q)$. Теперь из первого уравнения из (4.5) следует, что $A_0^{1/2}Q_q^*\vec v_q=0$, а значит, $\vec v_q=0$. Таким образом, $\xi=0$, и точка $\lambda=b_q$ не является собственным значением оператора $\mathcal A$.

3. Покажем теперь, что $b_q\in\rho(\mathcal A)$. Для этого достаточно установить, в силу формулы (3.18), что в некоторой проколотой окрестности точки $\lambda=b_q$ существует $L^{-1}(\lambda)\in\mathcal L(H)$. С использованием леммы 3.3 преобразуем пучок $L(\lambda)$ в окрестности точки $\lambda=b_q$ следующим образом:

$$L(\lambda)=\Big[I-\lambda A_0^{-1}+2\omega_0 iS_A-\frac{1}{\lambda}Q_B^*Q_B+\sum_{l=1,l\neq q}^m\frac{1}{b_l-\lambda}Q_l^*Q_l\Big]+\frac{1}{b_q-\lambda}Q_q^*Q_q=$$

$$=\frac{1}{b_q-\lambda}Q_q^*Q_q\Big(I+(b_q-\lambda)\big[Q_q^*Q_q\big]^{-1}\Big[I-\lambda A_0^{-1}+2\omega_0 iS_A-\frac{1}{\lambda}Q_B^*Q_B+\sum_{l=1,l\neq q}^m\frac{1}{b_l-\lambda}Q_l^*Q_l\Big]\Big)=$$

$$=:\frac{1}{b_q-\lambda}Q_q^*Q_q\big(I+G_q(\lambda)\big),$$

где $G_q(\lambda)\to0$ при $\lambda\to b_q$. Отсюда и из теоремы об обращении оператора, близкого к единичному, следует требуемое утверждение. □

Приведем известное утверждение об эллиптичности двух специальных краевых задач.

Лемма 4.2.

1°. *Пусть* $a(x)$, $b(x)$, $c(x)\in C(\overline\Omega)$, $c(x)\neq0$ $(x\in\overline\Omega)$. *Тогда следующая краевая задача является эллиптической при* $a(x)\neq0$ $(x\in\overline\Omega)$:

$$\begin{cases}-a(x)\Delta\vec u(x)-b(x)\nabla\mathrm{div}\vec u(x)+c(x)\nabla p(x)=\vec v(x)\quad(\textit{в}\ \Omega),\\ c(x)\,\mathrm{div}\vec u(x)=q(x)\quad(\textit{в}\ \Omega),\qquad \vec u(x)=\vec g(x)\quad(\textit{на}\ \partial\Omega).\end{cases}$$

2°. *Пусть* $a(x)$, $b(x)\in C(\overline\Omega)$. *Тогда следующая краевая задача является эллиптической если* $a(x)\neq0$, $a(x)+b(x)\neq0$ $(x\in\overline\Omega)$ *и* $2a(x)+b(x)\neq0$ $(x\in\partial\Omega)$:

$$-a(x)\Delta\vec u(x)-b(x)\nabla\mathrm{div}\vec u(x)=\vec v(x)\quad(\textit{в}\ \Omega),\qquad \vec u(x)=\vec g(x)\quad(\textit{на}\ \partial\Omega).$$

Основываясь на лемме 4.2, докажем следующие два утверждения.

Лемма 4.3. $0\in\rho(\mathcal A)$.

Доказательство. Нужно доказать, что существует $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Из факторизации (3.12) оператора $\mathcal{A}$ в форме Шура—Фробениуса видно, что для этого достаточно установить, что существует $(\mathcal{G} + \mathcal{Q}T\mathcal{Q}^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$. Проведем дальнейшее доказательство в несколько этапов.

1. Для любого $\vec{u} \in H = \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ с использованием леммы 3.1 имеем

$$\|(I + 2\omega_0 iS_A)\vec{u}\|_H = \|(I + 2\omega_0 iA_0^{-1/2}SA_0^{-1/2})\vec{u}\|_H \leqslant (1 + 2\omega_0\|A_0^{-1/2}\|^2_{\mathcal{L}(H)})\|\vec{u}\|_H.$$

Отсюда следует, что для любого $\vec{v} \in H = \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$

$$\|T\vec{v}\|^2_H = \|(I + 2\omega_0 iS_A)^{-1}\vec{v}\|^2_H \geqslant (1 + 2\omega_0\|A_0^{-1/2}\|^2_{\mathcal{L}(H)})^{-2}\|\vec{v}\|^2_H =: \gamma\|\vec{v}\|^2_H.$$

Отсюда и из соотношения $T + T^* = 2T^*T = 2TT^*$ для любого $w \in \mathcal{H}_0$ имеем

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{G} + \mathcal{Q}T\mathcal{Q}^*)w\|_{\mathcal{H}_0} \cdot \|w\|_{\mathcal{H}_0} &\geqslant \mathrm{Re}((\mathcal{G} + \mathcal{Q}T\mathcal{Q}^*)w, w)_{\mathcal{H}_0} = \|\mathcal{G}^{1/2}w\|^2_{\mathcal{H}_0} + \mathrm{Re}(T\mathcal{Q}^*w, \mathcal{Q}^*w)_H = \\ &= \|\mathcal{G}^{1/2}w\|^2_{\mathcal{H}_0} + (\frac{1}{2}(T + T^*)\mathcal{Q}^*w, \mathcal{Q}^*w)_H = \|\mathcal{G}^{1/2}w\|^2_{\mathcal{H}_0} + \|T\mathcal{Q}^*w\|^2_H \geqslant \\ &\geqslant \|\mathcal{G}^{1/2}w\|^2_{\mathcal{H}_0} + \gamma\|\mathcal{Q}^*w\|^2_H = ((\mathcal{G} + \gamma\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)w, w)_{\mathcal{H}_0}, \\ \|(\mathcal{G} + \mathcal{Q}T\mathcal{Q}^*)^*w\|_{\mathcal{H}_0} \cdot \|w\|_{\mathcal{H}_0} &\geqslant \mathrm{Re}((\mathcal{G} + \mathcal{Q}T^*\mathcal{Q}^*)w, w)_{\mathcal{H}_0} \geqslant \cdots \geqslant ((\mathcal{G} + \gamma\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)w, w)_{\mathcal{H}_0}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Из (4.6) следует, что для доказательства $(\mathcal{G} + \mathcal{Q}T\mathcal{Q}^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$ достаточно установить, что оператор $\mathcal{G} + \gamma\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*$ положительно определен или $(\mathcal{G} + \gamma\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$.

2. С этой целью определим операторы

$$\widehat{Q} := \big(Q_1, \ldots, Q_m\big)^{\tau}, \quad \widehat{G} := \mathrm{diag}\big(b_1 I, \ldots, b_m I\big)$$

и перепишем оператор $\mathcal{G} + \gamma\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*$ относительно разложения $\mathcal{H}_0 = L_{2,\rho_0}(\Omega) \oplus \widehat{H}$, где $\widehat{H} := \bigoplus_{l=1}^{m} H$, в следующей форме:

$$\mathcal{G} + \gamma\mathcal{Q}\mathcal{Q}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \widehat{G} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -Q_B \\ \widehat{Q} \end{pmatrix} \cdot \big(-Q_B^*, \widehat{Q}^*\big) = \begin{pmatrix} \gamma Q_B Q_B^* & -\gamma Q_B\widehat{Q}^* \\ -\gamma\widehat{Q}Q_B^* & \widehat{G} + \gamma\widehat{Q}\widehat{Q}^* \end{pmatrix}.$$

Допустим, что существует $(Q_BQ_B^*)^{-1} \in \mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega))$. Тогда из последнего соотношения найдем следующее разложение оператора $\mathcal{G} + \gamma\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*$ в форме Шура—Фробениуса:

$$\begin{aligned}\mathcal{G} + \gamma\mathcal{Q}\mathcal{Q}^* &= \begin{pmatrix} \gamma Q_B Q_B^* & -\gamma Q_B\widehat{Q}^* \\ -\gamma\widehat{Q}Q_B^* & \widehat{G} + \gamma\widehat{Q}\widehat{Q}^* \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\widehat{Q}Q_B^*(Q_BQ_B^*)^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma Q_BQ_B^* & 0 \\ 0 & \widehat{F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -(Q_BQ_B^*)^{-1}Q_B\widehat{Q}^* \\ 0 & I \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{4.7}$$

где $\widehat{F} := \widehat{G} + \gamma\widehat{Q}\widehat{Q}^* - \gamma\widehat{Q}Q_B^*(Q_BQ_B^*)^{-1}Q_B\widehat{Q}^*$.

По теореме о полярном разложении плотно определенного замкнутого оператора [20, теорема 2, с. 184] существует единственный частично изометричный оператор U, действующий из H в $L_{2,\rho_0}(\Omega)$, такой, что

$$Q_B = U(Q_B^*Q_B)^{1/2} = (Q_BQ_B^*)^{1/2}U, \quad Q_B^* = (Q_B^*Q_B)^{1/2}U^* = U^*(Q_BQ_B^*)^{1/2}, \quad U^*U = P.$$

Здесь P — это оператор ортогонального проектирования пространства H на $H \ominus \mathrm{Ker}Q_B$. Отсюда следует положительная определенность оператора $\widehat{F}$:

$$\widehat{F} = \widehat{G} + \gamma\widehat{Q}\widehat{Q}^* - \gamma\widehat{Q}Q_B^*(Q_BQ_B^*)^{-1}Q_B\widehat{Q}^* = \widehat{G} + \gamma\widehat{Q}(I - U^*U)\widehat{Q}^* = \widehat{G} + \gamma\widehat{Q}(I - P)\widehat{Q}^* \gg 0.$$

Из (4.7) следует, что существует $(\mathcal{G} + \gamma\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$ и лемма будет доказана.

3. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} -\rho_0^{-1}(z)\Big(\mu_0\Delta\vec{u}(x) + \big(\eta_0 + \dfrac{\mu_0}{3}\big)\nabla\mathrm{div}\vec{u}(x)\Big) + \nabla\big(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho(x)\big) = \vec{v}(x) \quad (\text{в } \Omega), \\ a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\vec{u}(x)\big) = q(x) \quad (\text{в } \Omega), \qquad \vec{u}(x) = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega). \end{cases} \tag{4.8}$$

Система (4.8) — это система Дуглиса—Ниренберга. Краевая задача, отвечающая главной части системы (4.8), имеет вид (первое уравнение умножено на $\rho_0(z)$)

$$\begin{cases} -\Big(\mu_0\Delta\vec{u}(x) + \big(\eta_0 + \dfrac{\mu_0}{3}\big)\nabla \mathrm{div}\vec{u}(x)\Big) + a_\infty \rho_0^{1/2}(z)\nabla\rho(x) = \rho_0(z)\vec{v}(x) \quad (\text{в } \Omega), \\ a_\infty \rho_0^{1/2}(z)\mathrm{div}\vec{u}(x) = q(x) \quad (\text{в } \Omega), \qquad\qquad \vec{u}(x) = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega) \end{cases}$$

и является эллиптической в силу леммы 4.2. Из [22] следует, что максимальный оператор, являющийся L_2-реализацией краевой задачи (4.8), фредгольмов. С использованием операторов A_0, Q_B, Q_B^* краевую задачу (4.8) можно переписать в следующей операторной форме в гильбертовом пространстве $H_0 = H \oplus L_{2,\rho_0}(\Omega)$ $(H = \vec{L}_2(\Omega, \rho_0))$:

$$B_0\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \rho\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_0^{1/2} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & -Q_B^*\\ Q_B & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_0^{1/2} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \rho\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_0^{1/2}\big(A_0^{1/2}\vec{u} - Q_B^*\rho\big)\\ Q_B A_0^{1/2}\vec{u}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{v}\\ q\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(B_0) = \{\zeta = (\vec{u};\rho)^\tau \in H_0 \mid \vec{u} - A_0^{-1/2}Q_B^*\rho \in \mathcal{D}(A_0)\}.$$

Оператор B_0 является максимальным аккретивным оператором, $\mathrm{Ker}B_0 = \{0\}$. Эти факты доказываются по аналогии с соответствующими утверждениями в леммах 3.4 и 4.1. Оператор B_0^* также является максимальным аккретивным оператором, $\mathrm{Ker}B_0^* = \{0\}$. Отсюда и из фредгольмовости оператора B_0 следует, что существует $B_0^{-1} \in \mathcal{L}(H_0)$.

4. Докажем теперь, что существует $(Q_BQ_B^*)^{-1} \in \mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega))$. Допустим, что это не верно. Тогда существует некомпактная последовательность $\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset L_{2,\rho_0}(\Omega)$ такая, что $\|\rho_n\|_{L_{2,\rho_0}(\Omega)} = 1$, $Q_BQ_B^*\rho_n \to 0$ $(n \to +\infty)$ в $L_{2,\rho_0}(\Omega)$. Определим $\zeta_n := (A_0^{-1/2}Q_B^*\rho_n;\rho_n)^\tau$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\{\zeta_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{D}(B_0)$, так как $[A_0^{-1/2}Q_B^*\rho_n] - A_0^{-1/2}Q_B^*[\rho_n] = 0 \in \mathcal{D}(A_0)$. Кроме того, имеем

$$\zeta_n \nrightarrow 0, \quad B_0\zeta_n = B_0\begin{pmatrix}A_0^{-1/2}Q_B^*\rho_n\\ \rho_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ Q_BQ_B^*\rho_n\end{pmatrix} \to 0 \quad (n \to +\infty),$$

что противоречит $B_0^{-1} \in \mathcal{L}(H_0)$. Таким образом, $(Q_BQ_B^*)^{-1} \in \mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega))$. □

Определение 4.1. *Существенным спектром* оператора $\mathcal{A}$ (спектральной задачи (4.1)) назовем множество $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\mathcal{A} - \lambda) — \text{нефредгольмов}\}$.

Для описания существенного спектра задачи определим функции

$$\varphi(\lambda) := \mu_0 + \sum_{l=1}^{m}\frac{\mu_l}{b_l - \lambda}, \quad \psi(\lambda, x) := \eta_0 + \frac{\mu_0}{3} + \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l - \lambda}\Big(\eta_l + \frac{\mu_l}{3}\Big) - \frac{1}{\lambda}\,a_\infty^2\rho_0(z). \tag{4.9}$$

С помощью функций (4.9) определим множества в комплексной плоскости (точнее, на $\mathbb{R}_+$)

$$\begin{aligned} \Lambda_{E,1} &:= \big\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \varphi(\lambda) = 0\big\}, \\ \Lambda_{E,2} &:= \big\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \varphi(\lambda) + \psi(\lambda, x) = 0,\ x \in \Omega\big\}, \\ \Lambda_L &:= \big\{\lambda \in \mathbb{C} \mid 2\varphi(\lambda) + \psi(\lambda, x) = 0,\ x \in \partial\Omega\big\}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Простые геометрические рассуждения показывают, что множество $\Lambda_{E,1}$ состоит ровно из m различных точек, находящихся на луче $(b_1, +\infty)$ и разделенных точками b_l $(l = \overline{1,m})$. Каждое из множеств $\Lambda_{E,2}$, Λ_L состоит ровно из $(m+1)$-го отрезка на луче $(0, +\infty)$. Для каждого множества отрезки разделены точками b_l $(l = \overline{1,m})$. Если рассматриваемая система не вращается и находится в невесомости $(\omega_0 = 0,\ g = 0)$, то $\rho_0 = \mathrm{const}$, и каждое из множеств $\Lambda_{E,2}$, Λ_L превращается в набор из $(m+1)$-й точки.

Лемма 4.4. $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \Lambda_{E,1} \cup \Lambda_{E,2} \cup \Lambda_L \subset (0, +\infty)$. *Множество* $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ *состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора* $\mathcal{A}$.

Доказательство. Пусть $\lambda \notin \Lambda_{E,1} \cup \Lambda_{E,2} \cup \Lambda_L$, $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G})$. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered} -\frac{1}{\rho_0(z)}\Big[\mu_0 + \sum_{l=1}^m \frac{\mu_l}{b_l-\lambda}\Big]\Delta\vec{u}(x) - \frac{1}{\rho_0(z)}\Big[\eta_0 + \frac{\mu_0}{3} + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l-\lambda}\Big(\eta_l + \frac{\mu_l}{3}\Big)\Big]\nabla\mathrm{div}\vec{u}(x) + \\ + \frac{1}{\lambda}\nabla\Big[\frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)}\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\vec{u}(x)\big)\Big] - 2\omega_0\big(\vec{u}(x)\times\vec{e}_3\big) - \lambda\vec{u}(x) = \vec{v}(x) \quad (\text{в } \Omega), \\ \vec{u}(x) = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega). \end{gathered} \tag{4.11}$$

Из (4.9), (4.10) и леммы 4.2 найдем, что краевая задача (4.11) является эллиптической. Из [22] следует, что оператор, являющийся L_2-реализацией краевой задачи (4.11), фредгольмов. С использованием введенных ранее операторов и пучка (4.3) можно проверить, что краевую задачу (4.11) можно переписать в виде $A_0^{1/2}L(\lambda)A_0^{1/2}\vec{u} = \vec{v}$. Таким образом, оператор $A_0^{1/2}L(\lambda)A_0^{1/2}$ фредгольмов в $H = \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$.

Из [15, лемма 1, с. 52] следует, что оператор $A_0^{1/2}L(\lambda)A_0^{1/2}$ фредгольмов как оператор, действующий из H_{A_0} в $H_{A_0}^*$ ($H_{A_0}^*$ — пространство, сопряженное к H_{A_0} относительно скалярного произведения в H). Следовательно, оператор $L(\lambda)$ также фредгольмов в $H = \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$.

Из [21, теорема 3.1, с. 374] (теорема о произведении фредгольмовых операторов) и факторизации (3.11) теперь найдем, что оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{A} - \lambda &= \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - \lambda A_0^{-1} + 2\omega_0 i S_A & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) = (\mathcal{G} - \lambda)^{-1}$, $S_A = A_0^{-1/2} S A_0^{-1/2}$, фредгольмов. Следовательно, для существенного спектра оператора $\mathcal{A}$ получаем включение $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \subset \Lambda_{E,1} \cup \Lambda_{E,2} \cup \Lambda_L$.

Множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$, очевидно, является связным, а оператор $\mathcal{A}$ имеет регулярные точки. Отсюда и из [8, теорема 5.17, с. 296] (теорема об устойчивости индекса и дефекта замкнутого оператора) следует, что множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$.

Предположим теперь, что $\lambda \notin \sigma_{ess}(\mathcal{A})$, $\lambda \in \Lambda_{E,1} \cup \Lambda_{E,2} \cup \Lambda_L$. В этом случае получим противоречие, так как регулярные точки (отличные от $0, b_1, \cdots, b_m$) и изолированные собственные значения конечной кратности оператора $\mathcal{A}$ являются регулярными и изолированными собственными значениями конечной кратности для пучка $L(\lambda)$ (см. (3.18) и лемму 4.10). $\square$

4.3. Локализация спектра и асимптотика спектра на бесконечности. Из леммы 3.4 следует, что $\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} | \, \mathrm{Re}\lambda \geqslant 0\}$. Докажем, что спектр оператора $\mathcal{A}$ лежит в правой открытой полуплоскости.

Лемма 4.5. $\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} | \, \mathrm{Re}\lambda > 0\}$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, $\lambda \notin \sigma_{ess}(\mathcal{A})$, $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G}) = \{0, b_1, \ldots, b_m\}$. Тогда λ, являющееся собственным значением оператора $\mathcal{A}$, является также собственным значением пучка $L(\lambda)$ (см. (4.3)). То есть, существует $0 \neq \vec{z} \in H = \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ такой, что $L(\lambda)\vec{z} = 0$. Умножая последнее равенство скалярно на $\vec{z}$, получим уравнение, которому удовлетворяет λ:

$$1 - \lambda p + 2\omega_0 i s - \frac{1}{\lambda}\, q_0 + \sum_{l=1}^m \frac{q_l}{b_l - \lambda} = 0, \tag{4.12}$$

$$p := \frac{\|A_0^{-1/2}\vec{z}\|_H^2}{\|\vec{z}\|_H^2}, \quad s := \frac{(S_A\vec{z}, \vec{z})_H}{\|\vec{z}\|_H^2}, \quad q_0 := \frac{\|Q_B\vec{z}\|_H^2}{\|\vec{z}\|_H^2}, \quad q_l := \frac{\|Q_l\vec{z}\|_H^2}{\|\vec{z}\|_H^2} \ \ (l = \overline{1,m}).$$

Выделим действительную и мнимую части из (4.12):

$$1 - p\mathrm{Re}\lambda - q_0\frac{\mathrm{Re}\lambda}{|\lambda|^2} + \sum_{l=1}^m \frac{q_l(b_l - \mathrm{Re}\lambda)}{|b_l - \lambda|^2} = 0, \tag{4.13}$$

$$-p\mathrm{Im}\lambda + 2\omega_0 s + q_0\frac{\mathrm{Im}\lambda}{|\lambda|^2} + \sum_{l=1}^{m}\frac{q_l\mathrm{Im}\lambda}{|b_l-\lambda|^2} = 0. \tag{4.14}$$

Учитывая, что $p > 0$, из (4.13) и леммы 4.3 следует утверждение леммы. □

Лемма 4.6. *Для любого сколь угодно малого* $\varepsilon > 0$ *существует* $R = R(\varepsilon) > 0$ *такое, что весь спектр оператора* $\mathcal{A}$ *принадлежит множеству* $\Lambda_\varepsilon \cup C_R$, *где* $\Lambda_\varepsilon := \{\,|\mathrm{arg}\lambda| < \varepsilon\}$, $C_R := \{\,|\lambda| < R\}$. *Более того, спектр оператора* $\mathcal{A}$ *имеет ветвь собственных значений* $\{\lambda_n^{(+\infty)}\}_{n=1}^{\infty}$, *расположенных в* Λ_ε *со следующей асимптотикой*:

$$\lambda_n^{(+\infty)} = \lambda_n(A_0)(1+o(1)) \quad (n\to+\infty),$$

$$\lambda_n(A_0) = \Big[\frac{2\mu_0^{-3/2}+\zeta_0^{-3/2}}{6\pi^2}\int_\Omega \rho_0^{3/2}(z)\,d\Omega\Big]^{-2/3} n^{2/3}(1+o(1)) \ \Big(\zeta_0 := \eta_0 + \frac{4\mu_0}{3}\Big) \quad (n\to+\infty).$$

Доказательство. Оператор S_A компактен, $\mathrm{Ker}A_0^{-1} = \{0\}$, следовательно (см. [11, лемма 3.1, с. 15]), $\|(I-\lambda A_0^{-1})^{-1}S_A\|_H \to 0$ при $\lambda\to\infty$, $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\Lambda_\varepsilon$. Отсюда следует, что существует $R = R(\varepsilon)$ такое, что пучок $L(\lambda)$ из (4.3) непрерывно обратим в $\mathbb{C}\backslash(\Lambda_\varepsilon\cup C_R)$. Наличие соответствующей ветви собственных значений и ее асимптотика следует из степенной асимптотики собственных значений оператора A_0 и теоремы А. С. Маркуса—В. И. Мацаева [12]. Асимптотика собственных значений оператора A_0 следует из [4, с. 10]. □

Лемма 4.7. *Для любого сколь угодно малого* $\varepsilon > 0$ *спектр* $\sigma(\mathcal{A})$ *оператора* $\mathcal{A}$, *за исключением, быть может, конечного количества собственных значений, лежит в полосе* $\{\lambda\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\lambda > 0,\ |\mathrm{Im}\lambda| \leqslant 2\omega_0+\varepsilon\}$.

Доказательство. Достаточно доказать, очевидно, что ветвь собственных значений из леммы 4.6 попадает в указанную область. Пусть λ — собственное значение из указанной ветви, а $\vec{z}$ — соответствующий ему собственный элемент пучка $L(\lambda)$, т. е. $L(\lambda)\vec{z} = 0$. Умножив последнее равенство скалярно на $\vec{z}$ и выделив из полученного соотношения действительную и мнимую части, получим равенства (4.13) и (4.14) соответственно. Из (4.14) с учетом (4.13) найдем:

$$|\mathrm{Im}\lambda| = |2\omega_0 s|\cdot\Big|-p+\frac{q_0}{|\lambda|^2}+\sum_{l=1}^{m}\frac{q_l}{|b_l-\lambda|^2}\Big|^{-1} =$$

$$= \frac{2\omega_0|s|\mathrm{Re}\lambda}{\Big|2p\mathrm{Re}\lambda - 1 - \sum\limits_{l=1}^{m}\frac{q_l b_l}{|b_l-\lambda|^2}\Big|} = 2\omega_0\cdot\frac{|s|}{p}\cdot\frac{p\mathrm{Re}\lambda}{\Big|2p\mathrm{Re}\lambda - 1 - \sum\limits_{l=1}^{m}\frac{q_l b_l}{|b_l-\lambda|^2}\Big|}. \tag{4.15}$$

Из леммы 3.1 получим, что $|s|p^{-1} = (SA_0^{-1/2}\vec{z}, A_0^{-1/2}\vec{z})_H\|A_0^{-1/2}\vec{z}\|_H^{-2} \leqslant 1$. Из (4.13) следует, что $p\mathrm{Re}\lambda\to 1$ при $\lambda\to\infty$. Теперь из (4.15) следует, что $|\mathrm{Im}\lambda| \leqslant 2\omega_0+\varepsilon$, если только λ — достаточно большое по абсолютной величине собственное значение. □

4.4. Локализация спектра в случае $\omega_0 = 0$**.** В следующих двух утверждениях установим локализацию спектра оператора $\mathcal{A}$ в случае, когда в системе отсутствует вращение, т. е., когда $\omega_0 = 0$. Рассуждения будут основаны на применении методов индефинитной метрики, которые можно найти в [1, 24]. В связи с этим обстоятельством будем считать, что $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+\oplus\mathcal{H}_-$, где $\mathcal{H}_+ := H = \vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$, $\mathcal{H}_- := \mathcal{H}_0$.

Определим оператор $\mathcal{J} := \mathrm{diag}(I, -\mathcal{I}_0)$ и введем в $\mathcal{H}$ индефинитное скалярное произведение по формуле $[\xi_1,\xi_2] := (\mathcal{J}\zeta_1,\zeta_2)_{\mathcal{H}} = (\vec{v}_1,\vec{v}_2)_{\mathcal{H}_+} - (w_1,w_2)_{\mathcal{H}_-}$. Введем ортопроекторы $\mathcal{P}_+$ и $\mathcal{P}_-$: $\mathcal{P}_+\mathcal{H} = \mathcal{H}_+$, $\mathcal{P}_-\mathcal{H} = \mathcal{H}_-$. Приведем необходимые понятия и факты из теории пространств с индефинитной метрикой.

Подпространство L_+ пространства Крейна $\mathcal{H}$ называется *неотрицательным*, если $[\xi,\xi]\geqslant 0$ для любого $\xi\in L_+$, и *максимальным неотрицательным* ($L_+\in\mathfrak{M}^+$), если оно не является частью другого неотрицательного подпространства. Аналогично определяется *неположительное* подпространство L_-.

Известно (см. [1, с. 70]), что $L_+ \in \mathfrak{M}^+$ тогда и только тогда, когда существует $K_+ : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$ ($\|K_+\| \leqslant 1$) такой, что $L_+ = \{\xi = \xi_+ + K_+\xi_+ : \xi_+ \in \mathcal{H}_+\}$.

Подпространство L_+ называется *равномерно положительным*, если оно является гильбертовым пространством по отношению к скалярному произведению, порождаемому индефинитной метрикой.

Будем говорить, что пространство L_+ *принадлежит классу* h^+, если оно допускает разложение в прямую $\mathcal{J}$-ортогональную сумму конечномерного изотропного подпространства и равномерно положительного подпространства. В частности, $L_+ \in h^+$, если $K_+ \in \mathfrak{S}_\infty$ (см. [1, с. 84]).

Если $L_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$ и L_+ $\mathcal{J}$-ортогонально L_-, то будем говорить, что они образуют *дуальную пару* $\{L_+, L_-\}$. Будем писать $\{L_+, L_-\} \in h$, если $L_\pm \in h^\pm$.

Будем говорить, что непрерывный $\mathcal{J}$-самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ *принадлежит классу* (H) ($\mathcal{A} \in (H)$), если у него есть хотя бы одна дуальная пара $\{L_+, L_-\}$ инвариантных подпространств и каждая $\mathcal{A}$-инвариантная дуальная пара принадлежит классу h.

Лемма 4.8. *В случае $\omega_0 = 0$ спектр оператора $\mathcal{A}$ действительный, за исключением, быть может, конечного количества собственных значений, расположенных симметрично относительно действительной оси.*

Доказательство. Из факторизации (3.12) оператора $\mathcal{A}$ в форме Шура—Фробениуса и положительной определенности оператора $\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^* \gg 0$ (см. лемму 4.3) найдем

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} I & -A_0^{-1/2}\mathcal{Q}^* \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \operatorname{diag}(A_0^{-1}, (\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}) \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathcal{Q}A_0^{-1/2} & \mathcal{I} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_0^{-1} - A_0^{-1/2}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}\mathcal{Q}A_0^{-1/2} & -A_0^{-1/2}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1} \\ (\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}\mathcal{Q}A_0^{-1/2} & (\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1} \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Оператор $\mathcal{A}^{-1}$ $\mathcal{J}$-самосопряженный и ограниченный, следовательно, спектр оператора $\mathcal{A}$ симметричен относительно действительной оси (этот же факт следует и из самосопряженности пучка $L(\lambda)$). Теорема будет доказана полностью, если оператор $\mathcal{A}^{-1}$ имеет не более конечного количества невещественных собственных значений. Последнее, в свою очередь, будет верно, если $\mathcal{A}^{-1} \in (H)$ (см. [1, следствие 5.21, с. 245]). В самом деле, из компактности оператора $A_0^{-1/2}$ следует, что $\mathcal{P}_+\mathcal{A}^{-1}\mathcal{P}_-$ компактен, а значит (см. [1, с. 287]), оператор $\mathcal{A}^{-1}$ имеет дуальную инвариантную пару $\{L_+(\mathcal{A}^{-1}), L_-(\mathcal{A}^{-1})\}$. Пусть K_+ — угловой оператор инвариантного неотрицательного подпространства $L_+(\mathcal{A}^{-1})$, тогда $K_+ : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$, $\|K_+\| \leqslant 1$ и

$$L_+(\mathcal{A}^{-1}) = \big\{(\vec{u}; w)^\tau \in \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- | \ \ (\vec{u}; w)^\tau = (\vec{u}; K_+\vec{u})^\tau, \ \ \vec{u} \in \mathcal{H}_+\big\}.$$

Пусть $(\vec{u}_1; w_1)^\tau = (\vec{u}_1; K_+\vec{u}_1)^\tau \in L_+(\mathcal{A}^{-1})$, тогда $\mathcal{A}^{-1}(\vec{u}_1; K_+\vec{u}_1)^\tau = (\vec{u}_2; K_+\vec{u}_2)^\tau$. Отсюда и из (4.16) следует уравнение для определения углового оператора K_+:

$$\begin{aligned}(\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}K_+ &= -(\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}\mathcal{Q}A_0^{-1/2} + \\ &+ K_+\big(A_0^{-1} - A_0^{-1/2}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}\mathcal{Q}A_0^{-1/2}\big) - K_+A_0^{-1/2}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}K_+.\end{aligned} \tag{4.17}$$

Отсюда и из $A_0^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty$ следует, что $K_+ \in \mathfrak{S}_\infty$. □

Лемма 4.9. *Пусть $\omega_0 = 0$ и λ_0 — невещественное собственное значение оператора $\mathcal{A}$, тогда*

$$\gamma_1 < \mathrm{Re}\lambda_0 < \gamma_2, \quad |\lambda_0|^2 < \big(b_m + 2c + 2(c^2 + b_m c)^{1/2}\big)\big(2b_m + c\big),$$

$$\gamma_1 := \big[2\|A_0^{-1/2}\|^2\big]^{-1}, \quad \gamma_2 := b_m + c + (c^2 + b_m c)^{1/2}, \quad c := \|Q_B\|^2_{\mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega))} + \sum_{l=1}^m \|Q_l\|^2_{\mathcal{L}(H)}.$$

Спектр оператора $\mathcal{A}$ действительный, если выполнено условие

$$2\|A_0^{-1/2}\|^2 \leqslant \big(b_m + c + (c^2 + b_m c)^{1/2}\big)^{-1}. \tag{4.18}$$

Доказательство. Поскольку $\omega_0 = 0$ и λ_0 — невещественное собственное значение оператора $\mathcal{A}$, тогда λ_0 есть корень уравнения (4.12) при некотором фиксированном $\vec{z} = \vec{z}_0$. Перепишем уравнение (4.12) в следующих формах:

$$0 = 1 - \lambda p - \frac{1}{\lambda}\Big(\widehat{q} - \sum_{l=1}^{m} \frac{\widehat{q}_l}{b_l - \lambda}\Big), \quad \widehat{q} := q_0 + \sum_{l=1}^{m} q_l, \quad \widehat{q}_l := b_l q_l \quad (l = \overline{1,m}),$$

$$0 = (\lambda - \lambda^2 p - \widehat{q}) \prod_{l=1}^{m} (b_l - \lambda) + \sum_{l=1}^{m} \widehat{q}_l \prod_{k \neq l}^{m} (b_k - \lambda) =$$

$$= -p(-1)^m \lambda^{m+2} + (-1)^m \lambda^{m+1}\Big[1 + p\sum_{l=1}^{m} b_l\Big] - (-1)^m \lambda^m \Big[\widehat{q} + \sum_{l=1}^{m} b_l + p\sum_{i<j} b_i b_j\Big] + \ldots. \quad (4.19)$$

Уравнение (4.12) имеет m действительных корней, которые мы обозначим через λ_l ($\lambda_l \in (b_{l-1}, b_l)$, $l = \overline{1,m}$, $b_0 := 0$), и еще два корня — λ_0 и $\overline{\lambda_0}$. Обозначим $\xi_0 := \mathrm{Re}\lambda_0$, $\eta_0 := \mathrm{Im}\lambda_0$, тогда

$$0 = -p\prod_{l=1}^{m} (\lambda_l - \lambda)\big((\lambda - \xi_0)^2 + \eta_0^2\big) = -p(-1)^m \lambda^{m+2} + (-1)^m \lambda^{m+1} p\Big[2\xi_0 + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l\Big] -$$

$$- (-1)^m \lambda^m p\Big[(\xi_0^2 + \eta_0^2) + 2\xi_0 \sum_{l=1}^{m} \lambda_l + \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j\Big] + \ldots. \quad (4.20)$$

Приравнивая коэффициенты при λ^{m+1} и λ^m из (4.19) и (4.20), получим

$$2\xi_0 + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l = \frac{1}{p} + \sum_{l=1}^{m} b_l, \quad (4.21)$$

$$(\xi_0^2 + \eta_0^2) + 2\xi_0 \sum_{l=1}^{m} \lambda_l + \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j = \frac{\widehat{q}}{p} + \frac{1}{p}\sum_{l=1}^{m} b_l + \sum_{i<j} b_i b_j. \quad (4.22)$$

Из (4.21) следует, что $2\mathrm{Re}\lambda_0 = 2\xi_0 = p^{-1} + \sum_{l=1}^{m} (b_l - \lambda_l) > p^{-1} \geqslant \|A_0^{-1/2}\|^2$, и оценка снизу на $\mathrm{Re}\lambda_0$ получена.

Далее мы следуем идеям из [24, с. 378]. Обозначим $\delta := 2^{-1}\sum_{l=1}^{m}(b_l - \lambda_l)$, $\omega := (2p)^{-1}$, тогда $\xi_0 = \omega + \delta$ (см. (4.21)). Выразим из (4.21) $\sum_{l=1}^{m} \lambda_l$ и подставим его в (4.22). После ряда преобразований получим

$$\eta_0^2 + 2\delta \sum_{l=1}^{m} \lambda_l - \sum_{i<j} (b_i b_j - \lambda_i \lambda_j) = -\omega^2 + 2\omega(\delta + \widehat{q}) - \delta^2. \quad (4.23)$$

Из условия $\lambda_l \in (b_{l-1}, b_l)$, $l = \overline{1,m}$ ($b_0 = 0$) можно вывести оценку [24, формула (5.24), с. 380]:

$$\sum_{i<j} (b_i b_j - \lambda_i \lambda_j) < \sum_{j=1}^{m} (b_j - \lambda_j)\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\Big) = 2\delta \sum_{l=1}^{m} \lambda_l. \quad (4.24)$$

Из (4.24) следует положительность правой части в (4.23), а значит, $\omega < \delta + \widehat{q} + (2\delta\widehat{q} + \widehat{q}^2)^{1/2}$. Отсюда $\mathrm{Re}\lambda_0 = \xi_0 < 2\delta + \widehat{q} + (2\delta\widehat{q} + \widehat{q}^2)^{1/2} \leqslant b_m + c + (c^2 + b_m c)^{1/2}$, $c = \|Q_B\|^2 + \sum_{l=1}^{m} \|Q_l\|^2$, и оценка сверху на $\mathrm{Re}\lambda_0$ получена.

Из оценки на $\mathrm{Re}\lambda_0$ выводится условие (4.18), достаточное для отсутствия невещественного собственного значения λ_0.

Далее, выразим из (4.22) $(\xi_0^2 + \eta_0^2) = |\lambda_0|^2$ и преобразуем его с помощью (4.21). С использованием оценки (4.24) получим, что $|\lambda_0|^2 < 2\omega(q + 4\delta)$. После простых оценок отсюда следует неравенство для $|\lambda_0|^2$. □

4.5. О представлении решения эволюционной задачи и его стабилизации. Из лемм 3.4 и 4.5 следует, что оператор $-\mathcal{A}$ является генератором голоморфной полугруппы, и эта полугруппа имеет отрицательный тип, так как $\sigma(-\mathcal{A}) \subset \{\mathrm{Re}\lambda < 0\}$ (см., например, [29, теорема 4.3, с. 118]). Это обстоятельство позволяет применить к задаче (3.10) (а затем и к задаче (3.6)) соответствующие теоремы о представлении решения эволюционного уравнения и об асимптотическом поведении этого решения.

По краевой задаче (3.1) определим оператор

$$A := A\Big(\mu_0 + \sum_{l=1}^{m} \frac{\mu_l}{b_l}, \eta_0 + \frac{\mu_0}{3} + \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{b_l}\big(\eta_l + \frac{\mu_l}{3}\big)\Big),$$

с помощью которого можно существенно упростить формулы следующей теоремы при $\omega_0 = 0$.

Теорема 4.1. *Пусть* $\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A_0)$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, *а поле* $\vec{f}(t)$ *удовлетворяет условию теоремы* 3.1. *Тогда сильное решение задачи* (3.6) *представимо в виде*

$$\begin{pmatrix} \vec{u}(t) \\ \rho(t) \end{pmatrix} = \mathcal{U}(t) \begin{pmatrix} \vec{u}^0 \\ \rho^0 \end{pmatrix} + \int_0^t \mathcal{U}(t-s) \begin{pmatrix} \vec{f}(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds,$$

$$\mathcal{U}(t) := -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2} \begin{pmatrix} \lambda^2 A_0^{-1/2} L^{-1}(\lambda) A_0^{-1/2} & -\lambda A_0^{-1/2} L^{-1}(\lambda) Q_B^* \\ \lambda Q_B L^{-1}(\lambda) A_0^{-1/2} & Q_B L^{-1}(\lambda) Q_B^* - \lambda I \end{pmatrix} d\lambda,$$

где контур Γ *является границей сектора* $\Lambda_{\omega,\theta} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg(\lambda - \omega)| < \theta\}$ *и ориентирован так, что* $\mathrm{Im}\lambda$ *убывает при его обходе. Числа* $\omega > 0$ *и* $\theta \in (0, \pi/2)$ *выбраны так, чтобы* $\sigma(\mathcal{A}) \subset \Lambda_{\omega,\theta}$ (*см. леммы* 3.4, 4.5). *При этом*

$$\lim_{t\to+\infty} \vec{f}(t) = \vec{f} \implies \lim_{t\to+\infty} \begin{pmatrix} \vec{u}(t) \\ \rho(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \rho \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_0^{-1/2} M \Big(M^{-1} - Q_B^* \big(Q_B M Q_B^*\big)^{-1} Q_B\Big) M A_0^{-1/2} \vec{f} \\ -\big(Q_B M Q_B^*\big)^{-1} Q_B M A_0^{-1/2} \vec{f} \end{pmatrix},$$

$$M := \Big(I + \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{b_l} Q_l^* Q_l + 2\omega_0 i S_A\Big)^{-1}.$$

Если $\omega_0 = 0$, *то*

$$\lim_{t\to+\infty} \begin{pmatrix} \vec{u}(t) \\ \rho(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1/2}\big(I - P\big) A^{-1/2} \vec{f} \\ -\big((BA^{-1/2})(BA^{-1/2})^*\big)^{-1} BA^{-1} \vec{f} \end{pmatrix},$$

где P — *ортопроектор пространства* $H = \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ *на* $H \ominus \mathrm{Ker}(BA^{-1/2})$. *Если предположить дополнительно, что* $\vec{f} = \nabla q$, *то*

$$\vec{u} = 0, \quad \rho = \frac{\rho_0^{1/2}(z)}{a_\infty} \Big(q - \int_\Omega \rho_0(z) q \, d\Omega \Big[\int_\Omega \rho_0(z) \, d\Omega\Big]^{-1}\Big).$$

Доказательство. **1**. Пусть $\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A_0)$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, а поле $\vec{f}(t)$ удовлетворяет условию теоремы 3.1. Тогда по теореме 3.1 задача Коши (3.6) имеет единственное сильное решение $\zeta(t) = (\vec{u}(t); \rho(t))^\tau$, а построенная по $\zeta(t)$ функция $\xi(t)$ — сильное решение задачи Коши (3.10). Это решение представимо в виде

$$\xi(t) = \mathcal{U}(t)\xi^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\mathcal{F}(s) \, ds, \quad \mathcal{U}(t)\xi^0 := -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{-\lambda t} (\mathcal{A} - \lambda)^{-1} \xi^0 \, d\lambda, \tag{4.25}$$

где контур Γ выбирается как описано в условии теоремы. Дальнейшее доказательство состоит в простых вычислениях с использованием в (4.25) формулы (3.18), формул для ξ^0, $\mathcal{F}(t)$ и $\xi(t)$.

2. Из условий теоремы следует, что $\mathcal{F}(t) \to \mathcal{F} := (\vec{f}; 0)^\tau$ при $t \to +\infty$. Из лемм 3.4 и 4.5 следует, что оператор $-\mathcal{A}$ — генератор голоморфной полугруппы и справедливо включение $\sigma(-\mathcal{A}) \subset \{\mathrm{Re}\lambda < 0\}$. Отсюда следует (см. [29, теорема 4.3, с. 118]), что соответствующая полугруппа имеем отрицательный тип. По теореме [29, теорема 4.4, с. 119] $\xi(t) \to \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}$ при $t \to +\infty$.

Пусть $\mathcal{A}\mathcal{X}=\mathcal{F}$. Полагая в (4.4) $\lambda=0$, $\xi=\mathcal{X}$, $\xi_0=\mathcal{F}$ найдем, что

$$\begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I+\sum\limits_{l=1}^m b_l^{-1}Q_l^*Q_l+2\omega_0 iS_A & -Q_B^* \\ Q_B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \rho \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q_BMA_0^{-1/2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{1/2}M^{-1}A_0^{1/2} & 0 \\ 0 & Q_BMQ_B^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A_0^{-1/2}MQ_B^* \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получим

$$\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A_0^{-1/2}MQ_B^* \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{-1/2}MA_0^{-1/2} & 0 \\ 0 & (Q_BMQ_B^*)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -Q_BMA_0^{-1/2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{f} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_0^{-1/2}M\Big(M^{-1}-Q_B^*\big(Q_BMQ_B^*\big)^{-1}Q_B\Big)MA_0^{-1/2}\vec{f} \\ -\big(Q_BMQ_B^*\big)^{-1}Q_BMA_0^{-1/2}\vec{f} \end{pmatrix}.$$

3. Пусть теперь $\omega_0=0$. Проведем ряд вычислений, воспользовавшись тем, что если два ограниченных оператора совпадают на некотором плотном в пространстве множестве, то они совпадают:

$$M^{-1}\Big|_{\mathcal{D}(A_0^{1/2})} = I+\sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l}Q_l^*Q_l\Big|_{\mathcal{D}(A_0^{1/2})} = I+\sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l}A_0^{-1/2}A_lA_0^{-1/2}\Big|_{\mathcal{D}(A_0^{1/2})} =$$

$$= A_0^{-1/2}AA_0^{-1/2}\Big|_{\mathcal{D}(A_0^{1/2})} = (A^{1/2}A_0^{-1/2})^*(A^{1/2}A_0^{-1/2})\Big|_{\mathcal{D}(A_0^{1/2})},$$

$$M=\big(I+\sum_{l=1}^m\frac{1}{b_l}Q_l^*Q_l\big)^{-1} = (A^{1/2}A_0^{-1/2})^{-1}\big((A^{1/2}A_0^{-1/2})^*\big)^{-1} = (A_0^{1/2}A^{-1/2})(A_0^{1/2}A^{-1/2})^*,$$

$$A_0^{-1/2}MA_0^{-1/2} = A_0^{-1/2}(A_0^{1/2}A^{-1/2})(A_0^{1/2}A^{-1/2})^*A_0^{-1/2} = A^{-1},$$

$$A_0^{-1/2}MQ_B^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)} = A_0^{-1/2}(A_0^{1/2}A^{-1/2})(A_0^{1/2}A^{-1/2})^*(BA_0^{-1/2})^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)} =$$

$$= A^{-1}B^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)} = A^{-1/2}(BA^{-1/2})^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)},$$

$$Q_BMQ_B^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)} = (BA_0^{-1/2})(A_0^{1/2}A^{-1/2})(A_0^{1/2}A^{-1/2})^*(BA_0^{-1/2})^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)} =$$

$$= BA^{-1}B^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)} = (BA^{-1/2})(BA^{-1/2})^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)},$$

$$Q_BMA_0^{-1/2} = (BA_0^{-1/2})(A_0^{1/2}A^{-1/2})(A_0^{1/2}A^{-1/2})^*A_0^{-1/2} = BA^{-1} = (BA^{-1/2})A^{-1/2}.$$

По теореме [20, теорема 2, с. 184] о полярном разложении плотно определенного замкнутого оператора существует единственный частично изометричный оператор U, действующий из H в $L_{2,\rho_0}(\Omega)$, такой, что

$$(BA^{-1/2}) = \big((BA^{-1/2})(BA^{-1/2})^*\big)^{1/2}U, \quad (BA^{-1/2})^* = U^*\big((BA^{-1/2})(BA^{-1/2})^*\big)^{1/2}, \quad U^*U=P.$$

Здесь P — это оператор ортогонального проектирования пространства H на $H\ominus\mathrm{Ker}(BA^{-1/2})$.

С использованием проведенных вычислений теперь найдем, что

$$\vec{u} = A_0^{-1/2}M\Big(M^{-1}-Q_B^*\big(Q_BMQ_B^*\big)^{-1}Q_B\Big)MA_0^{-1/2}\vec{f} =$$

$$= \Big(A_0^{-1/2}MA_0^{-1/2}-A_0^{-1/2}MQ_B^*\big(Q_BMQ_B^*\big)^{-1}Q_BMA_0^{-1/2}\Big)\vec{f} =$$

$$= \Big(A^{-1}-A^{-1/2}(BA^{-1/2})^*\big((BA^{-1/2})(BA^{-1/2})^*\big)^{-1}(BA^{-1/2})A^{-1/2}\Big)\vec{f} =$$

$$= A^{-1/2}\big(I-U^*U\big)A^{-1/2}\vec{f} = A^{-1/2}\big(I-P\big)A^{-1/2}\vec{f},$$

$$\rho = -\big(Q_BMQ_B^*\big)^{-1}Q_BMA_0^{-1/2}\vec{f} = -\big((BA^{-1/2})(BA^{-1/2})^*\big)^{-1}BA^{-1}\vec{f}.$$

4. Предположим теперь, что $\vec{f} = \nabla q$. Тогда мы можем записать поле $\vec{f}$ следующим образом:

$$\vec{f} = \nabla q = \nabla\Big(q - \int\limits_{\Omega} \rho_0(z) q\, d\Omega \Big[\int\limits_{\Omega} \rho_0(z)\, d\Omega\Big]^{-1}\Big) =$$

$$= -\nabla\left(\frac{a_\infty}{\rho_0^{1/2}(z)}\Big\{-\frac{\rho_0^{1/2}(z)}{a_\infty}\Big(q - \int\limits_{\Omega} \rho_0(z) q\, d\Omega \Big[\int\limits_{\Omega} \rho_0(z)\, d\Omega\Big]^{-1}\Big)\Big\}\right) = B^* p,$$

$$p := -\frac{\rho_0^{1/2}(z)}{a_\infty}\Big(q - \int\limits_{\Omega} \rho_0(z) q\, d\Omega \Big[\int\limits_{\Omega} \rho_0(z)\, d\Omega\Big]^{-1}\Big) \in \mathcal{D}(B^*).$$

Из этого представления, учитывая, что $(BA^{-1/2})^* p \in \overline{\operatorname{Im}(BA^{-1/2})^*} = H \ominus \operatorname{Ker}(BA^{-1/2})$ и, соответственно, $P(BA^{-1/2})^* p = (BA^{-1/2})^* p$, теперь найдем

$$\vec{u} = A^{-1/2}\big(I - P\big)A^{-1/2}B^* p = A^{-1/2}\big(I - P\big)(BA^{-1/2})^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)} p = 0,$$

$$\rho = -\big((BA^{-1/2})(BA^{-1/2})^*\big)^{-1} BA^{-1}B^* p =$$

$$= -\big((BA^{-1/2})(BA^{-1/2})^*\big)^{-1}(BA^{-1/2})(BA^{-1/2})^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)} p = -p.$$

Теорема доказана. □

4.6. Теорема о кратной базисности для специальной системы элементов в случае $\omega_0 = 0$, $g = 0$. **Разложение решения эволюционной задачи.** Дадим следующее определение.

Определение 4.2 (см. [11, с. 61])**.** Пусть λ_0 — собственное значение, а $\vec{z}_0$ — отвечающий ему собственный элемент оператор-функции $L(\lambda)$, т. е. $L(\lambda_0)\vec{z}_0 = 0$. Элементы $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \ldots, \vec{z}_{n-1}$ называют *присоединенными* к собственному элементу $\vec{z}_0$, если $\sum\limits_{k=0}^{j} (k!)^{-1} L^{(k)}(\lambda_0)\vec{z}_{j-k} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$. Число n называют *длиной цепочки* $\vec{z}_0, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_{n-1}$ из собственного и присоединенных элементов.

В работе [6] установлена следующая лемма о связи собственных и присоединенных элементов оператора $\mathcal{A}$ (задачи (4.1)) и пучка $L(\lambda)$ (см. (4.3)).

Лемма 4.10. *Пусть набор элементов* $\{\xi_k = (\vec{u}_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ *является цепочкой из собственного и присоединенных к нему элементов оператора* $\mathcal{A}$, *отвечающей собственному значению* λ_0 $(\lambda_0 \neq 0, b_1, \ldots, b_m)$, *тогда* $\{\vec{z}_k\}_{k=0}^{n-1} := \{A_0^{1/2}\vec{u}_k\}_{k=0}^{n-1}$ — *цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов пучка* $L(\lambda)$, *отвечающая собственному значению* λ_0.

Обратно, пусть набор элементов $\{\vec{z}_k\}_{k=0}^{n-1}$ — *цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов пучка* $L(\lambda)$, *отвечающая собственному значению* λ_0, *тогда* $\{\xi_k = (A_0^{-1/2}\vec{z}_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$, *где* $w_k = \sum\limits_{l=0}^{k} (\mathcal{G} - \lambda_0)^{-(k-l+1)}\mathcal{Q}\vec{z}_l$, — *цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов оператора* $\mathcal{A}$.

Рассмотрим пространство $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ с индефинитным скалярным произведением (см. п. 4.4). Назовем базис $\mathcal{J}$-пространства $\mathcal{H}$ *почти* $\mathcal{J}$*-ортонормированным*, если его можно представить как объединение конечного подмножества элементов и $\mathcal{J}$-ортонормированного подмножества, причем эти подмножества $\mathcal{J}$-ортогональны друг другу.

Обозначим через $\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A})$ корневой линеал оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению λ $(\lambda \in \sigma_p(\mathcal{A}))$. Введем также следующие обозначения:

$$\mathfrak{F}(\mathcal{A}) := \overline{\operatorname{sp}\{\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A}) |\ \lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})\}}, \quad \mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) := \overline{\operatorname{sp}\{\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda) |\ \lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})\}}.$$

Будем писать $\lambda \in s(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}$, если $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ вырождено, т. е. если существует $\xi_0 \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ такое, что $[\xi_0, \xi] = 0$ для любого $\xi \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$.

Основываясь на теореме Т. Я. Азизова [1, теорема 2.12, с. 271] установим следующую теорему в случае, когда $\omega_0 = 0$, $g = 0$.

Теорема 4.2. *Имеют место следующие утверждения.*

1°. $\operatorname{codim}\mathfrak{F}(\mathcal{A}) \leqslant \operatorname{codim}\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) < \infty$.

2°. $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) = \mathcal{H} \iff \operatorname{sp}\{\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A}) | \lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{A}) \cap (\gamma_1, \gamma_2)\}$ *— невырожденное подпространство, где* γ_1, γ_2 *— числа, определенные в лемме* 4.9.

3°. $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H} \iff \mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A}) = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ *при* $\lambda \neq \overline{\lambda}$ *и* $s(\mathcal{A}) = \varnothing$. *Если* $\gamma_2 \leqslant \gamma_1$, *то* $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$.

4°. *Если* $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$ (*соответственно,* $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$), *то в* $\mathcal{H}$ *существует почти* $\mathcal{J}$*-ортонормированный* p*-базис* (*при* $p > 3$), *составленный из собственных* (*соответственно, корневых*) *элементов оператора* $\mathcal{A}$. *Если* $\gamma_2 \leqslant \gamma_1$, *то указанный базис из собственных элементов будет* $\mathcal{J}$*-ортонормированным.*

Доказательство. В лемме 4.8 установлено, что $\mathcal{A}^{-1} \in (H)$. Кроме того, из (4.17) следует, что $K_+ \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 3$, поскольку $A_0^{-1} \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 3/2$, согласно лемме 4.6. Из леммы 4.4 следует, что спектр оператора $\mathcal{A}^{-1}$ (при $\omega_0 = 0$, $g = 0$) имеет конечное количество точек сгущения. Таким образом, оператор $\mathcal{A}^{-1}$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Т. Я. Азизова. Применим эту теорему к оператору $\mathcal{A}^{-1}$.

1. Из равенств $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) = \mathfrak{F}(\mathcal{A}^{-1})$, $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathfrak{F}_0(\mathcal{A}^{-1})$ следует 1°.

2. $\mathfrak{F}(\mathcal{A}^{-1}) = \mathcal{H} \iff \operatorname{sp}\{\mathfrak{L}_{\lambda^{-1}}(\mathcal{A}^{-1}) | \lambda^{-1} \in s(\mathcal{A}^{-1})\}$ — невырожденное подпространство. Из [1, замечание 3.8, с. 271] следует, что при доказательстве равенства $\mathfrak{F}(\mathcal{A}^{-1}) = \mathcal{H}$ невырожденность $\mathfrak{L}_{\lambda^{-1}}(\mathcal{A}^{-1})$ нужно проверять только для тех $\lambda^{-1} \in s(\mathcal{A}^{-1})$, которые являются точками сгущения спектра оператора $\mathcal{A}^{-1}$. Из равенства $\mathfrak{L}_{\lambda^{-1}}(\mathcal{A}^{-1}) = \mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A})$ следует, что нужно проверять невырожденность $\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A})$ для $\lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{A}) \cap s(\mathcal{A})$.

Выясним расположение множества $s(\mathcal{A})$. Пусть $\lambda = \overline{\lambda} \in \sigma_p(\mathcal{A})$, $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G})$ и $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ вырождено. В силу леммы 4.10 это эквивалентно тому, что в $\operatorname{Ker} L(\lambda)$ существует такой элемент $\vec{z}_0$, что элемент $\xi_0 = (A_0^{-1/2}\vec{z}_0; (\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}\vec{z}_0)^\tau$ $\mathcal{J}$-ортогонален всем элементам вида $\xi = (A_0^{-1/2}\vec{z}; (\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}\vec{z})^\tau$, где $\vec{z} \in \operatorname{Ker} L(\lambda)$, т. е. $[\xi_0, \xi] = 0$. Используя введенные ранее обозначения, последнее уравнение можно привести к виду $\big(L'(\lambda)\vec{z}_0, \vec{z}\big)_H = 0$. В частности, имеем два соотношения: $\big(L(\lambda)\vec{z}_0, \vec{z}_0\big)_H = 0$, $\big(L'(\lambda)\vec{z}_0, \vec{z}_0\big)_H = 0$. Таким образом, λ есть кратный корень уравнения (4.12) при $\vec{z} = \vec{z}_0$. Полагая в формуле (4.20) леммы 4.9 $\eta_0 = 0$ и считая, что ξ_0 и есть этот кратный корень, найдем, что $\lambda \in (\gamma_1, \gamma_2)$.

Из лемм 4.1, 4.3 следует, что $\sigma(\mathcal{G}) = \{0, b_1, \cdots, b_m\} \subset \rho(\mathcal{A})$, а значит, $\{0, b_1, \cdots, b_m\} \cap s(\mathcal{A}) = \varnothing$. Таким образом, $s(\mathcal{A}) \subset (\gamma_1, \gamma_2)$, и утверждение 2° доказано.

3. Первые части утверждений 3° и 4° — это переформулировки соответствующих утверждений используемой теоремы Т. Я. Азизова. Если $\gamma_2 \leqslant \gamma_1$, то $s(\mathcal{A}) = \varnothing$, и оператор $\mathcal{A}$ не имеет невещественных собственных значений. Следовательно, $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$, и соответствующий p-базис (при $p > 3$) в $\mathcal{H}$, составленный из собственных элементов оператора $\mathcal{A}$, будет $\mathcal{J}$-ортонормированным. □

Пусть $\omega_0 = 0$, $g = 0$. Будем считать, что $\gamma_2 \leqslant \gamma_1$, тогда по теореме 4.2 существует $\mathcal{J}$-ортонормированный p-базис (при $p > 3$) в $\mathcal{H}$, составленный из собственных элементов оператора $\mathcal{A}$. По лемме 4.10 этот базис можно представить в следующем виде, разделив его на систему позитивных и негативных элементов:

$$\begin{gathered}\Big\{\xi_k^\pm := \big(A_0^{-1/2}\vec{z}_k^\pm; (\mathcal{G} - \lambda_k^\pm)^{-1}\mathcal{Q}\vec{z}_k^\pm\big)^\tau\Big\}_{k=1}^\infty, \\ \xi_k^\pm \in L_\pm(\mathcal{A}^{-1}), \quad [\xi_k^+, \xi_j^+] = \delta_{kj}, \quad [\xi_k^-, \xi_j^-] = -\delta_{kj}, \quad [\xi_k^+, \xi_j^-] = 0,\end{gathered} \tag{4.26}$$

где собственные значения λ_k^+ составляют ветвь из леммы 4.6.

Представим решение $\xi(t)$ задачи (3.10) в форме

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^\infty c_k^+(t)\xi_k^+ + \sum_{j=1}^\infty c_j^-(t)\xi_j^-, \quad c_k^+(0) = [\xi^0, \xi_k^+], \quad c_j^-(0) = -[\xi^0, \xi_j^-]. \tag{4.27}$$

Из (3.10), (4.26), (4.27), вида ξ^0 и $\mathcal{F}(t)$ найдем, что

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(e^{-\lambda_k^+ t}[\xi^0, \xi_k^+] + \int_0^t e^{-\lambda_k^+(t-s)}[\mathcal{F}(s), \xi_k^+]\,ds\Big)\xi_k^+ -$$

$$- \sum_{j=1}^{\infty}\Big(e^{-\lambda_j^- t}[\xi^0, \xi_j^-] + \int_0^t e^{-\lambda_j^-(t-s)}[\mathcal{F}(s), \xi_j^-]\,ds\Big)\xi_j^-, \tag{4.28}$$

$$[\xi^0, \xi_k^\pm] = \big(\vec{u}^0, A_0^{-1/2}\vec{z}_k^\pm\big)_H - \frac{1}{\lambda_k^\pm}\big(\rho^0, Q_B\vec{z}_k^\pm\big)_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}, \quad [\mathcal{F}(t), \xi_k^\pm] = \big(\vec{f}(t), A_0^{-1/2}\vec{z}_k^\pm\big)_H, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Из (4.28), (3.5) получим в явном виде разложение решения $\vec{u}(t)$, $\rho(t)$ задачи (3.6) по нормированной специальным образом системе собственных элементов $\{\vec{z}_k^\pm\}_{k=1}^{+\infty}$, связанных с $\mathcal{J}$-ортонормированным базисом (4.26):

$$\begin{pmatrix}\vec{u}(t)\\ \rho(t)\end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k^+(t)\begin{pmatrix}A_0^{-1/2}\vec{z}_k^+\\ (\lambda_k^+)^{-1}BA_0^{-1/2}\vec{z}_k^+\end{pmatrix} - T_k^-(t)\begin{pmatrix}A_0^{-1/2}\vec{z}_k^-\\ (\lambda_k^-)^{-1}BA_0^{-1/2}\vec{z}_k^-\end{pmatrix}\right),$$

$$T_k^\pm(t) := e^{-\lambda_k^\pm t}\left(\big(\vec{u}^0, A_0^{-1/2}\vec{z}_k^\pm\big)_H - \frac{1}{\lambda_k^\pm}\big(\rho^0, BA_0^{-1/2}\vec{z}_k^\pm\big)_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}\right) + \int_0^t e^{-\lambda_k^\pm(t-s)}\big(\vec{f}(s), A_0^{-1/2}\vec{z}_k^\pm\big)_H\,ds.$$

Автор приносит благодарность проф. Н. Д. Копачевскому за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.
2. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д., Орлова Л. Д.* Эволюционные и спектральные задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости// Тр. СПб. Мат. об-ва. — 1998. — *6*. — С. 5–33.
3. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наукова думка, 1965.
4. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений// Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. мат. ан. — 1977. — *14*. — С. 5–58.
5. *Голдстейн Дж. А.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Выща школа, 1989.
6. *Закора Д. А.* Операторный подход к модели Ильюшина вязкоупругого тела параболического типа// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *57*. — С. 31–64.
7. *Звягин В. Г., Турбин М. В.* Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина—Фойгта// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *31*. — С. 3–144.
8. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
9. *Копачевский Н. Д, Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
10. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
11. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.
12. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Теорема о сравнении спектров и спектральная асимптотика для пучка М. В. Келдыша// Мат. сб. — 1984. — *123*, № 3. — С. 391–406.
13. *Милославский А. И.* Спектр малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом сосуде// Усп. мат. наук. — 1989. — *44*, № 4.
14. *Милославский А. И.* Спектр малых колебаний вязкоупругой наследственной среды// Докл. АН СССР. — 1989. — *309*, № 3. — С. 532–536.
15. *Михлин С. Г.* Спектр пучка операторов теории упругости// Усп. мат. наук. — 1973. — *28*, № 3. — С. 43–82.
16. *Осколков А. П.* Начально-краевые задачи для уравнений движений жидкостей Кельвина—Фойгта и жидкостей Олдройта// Тр. МИАН. — 1989. — *179*. — С. 126–164.
17. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. — М.: Мир, 1985.
18. *Солонников В. А.* Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса—Л. Ниренберга. II// Тр. МИАН. — 1966. — *92*. — С. 233–297.

19. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды. — М.: Физматгиз, 1962.
20. *Birman M. Sh., Solomjak M. Z.* Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space. — Dordrecht—Boston—Lancaser—Tokyo: D. Reidel Publishing Company, 1987.
21. *Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M. A.* Classes of linear operators. Vol. 1. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1990.
22. *Grubb G., Geymonat G.* The essential spectrum of elliptic systems of mixed order// Math. Ann. — 1977. — *227.* — С. 247–276.
23. *Kelvin (Thomson) W.* On the theory viscoelastic fluids// Math. A. Phys. Pap. — 1875. — *3.* — С. 27–84.
24. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint problems for viscous fluids. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2003.
25. *Maxwell J. C.* On the dynamical theory of gases// Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 1867. — *157.* — С. 49–88.
26. *Maxwell J. C.* On the dynamical theory of gases// Philos. Mag. — 1868. — *35.* — С. 129–145.
27. *Oldroyd J. G.* On the formulation of rheological equations of state// Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 1950. — *A200.* — С. 523–541.
28. *Oldroyd J. G.* The elastic and viscous properties of emulsions and suspensions// Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 1953. — *A218.* — С. 122–137.
29. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. — New York: Springer, 1983.
30. *Voight W.* Uber die innere Reibung der fasten Korper, inslesondere der krystalle// Gottinden Abh. — 1889. — *36*, № 1. — С. 3–47.
31. *Voight W.* Uber innex Reibung faster Korper, insbesondere der Metalle// Ann. Phys. U. Chem. — 1892. — *47*, № 9. — С. 671–693.

Д. А. Закора
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, Симферополь, проспект Вернадского, 4;
Воронежский государственный университет,
394006, Воронеж, Университетская площадь, 1
E-mail: dmitry.zkr@gmail.com, dmitry_@crimea.edu

V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, 295007, Russia;
Voronezh State University
Universitetskaya Square, 1, Voronezh, 1394006, Russia

UDC 517.984.48:532.135

Model of the Oldroyd Compressible Fluid

© 2016 **D. A. Zakora**

Abstract. In this paper, mathematical models of compressible viscoelastic Maxwell, Oldroyd, and Kelvin–Voigt fluids are derived. A model of rotating viscoelastic barotropic Oldroyd fluid is studied. A theorem on strong unique solvability of the corresponding initial-boundary value problem is proved. The spectral problem associated with such a system is studied. Results on the spectrum localization, essential and discrete spectra, and spectrum asymptotics are obtained. In the case where the system is in the weightlessness state and does not rotate, results on multiple completeness and basisness of a special system of elements are proved. In such a case, under condition of sufficiently large viscosity, expansion of the solution of the evolution problem with respect to a special system of elements is obtained.

REFERENCES

1. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Osnovy teorii lineynykh operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy* [Foundations of Theory of Linear Operators in Spaces with Indefinite Metrics], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
2. T. Ya. Azizov, N. D. Kopachevskiy and L. D. Orlova, "Evolyutsionnye i spektral'nye zadachi, porozhdennye problemoy malykh dvizheniy vyazkouprugoy zhidkosti" [Evolution and spectral problems generated by the problem of small movements of viscoelastic fluid], *Tr. SPb. Mat. ob-va* [Proc. Saint-Petersburg Math. Soc.], 1998, **6**, 5–33 (in Russian).
3. Yu. M. Berezanskiy, *Razlozhenie po sobstvennym funktsiyam samosopryazhennykh operatorov* [Expansion in Eigenfunctions of Self-Adjoint Operators], Naukova dumka, Kiev, 1965 (in Russian).
4. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, "Asimptotika spektra differentsial'nykh uravneniy" [Asymptotics of spectra of differential equations] *Totals Sci. Tech. VINITI. Ser. Math. Anal.*, 1977, **14**, 5–58 (in Russian).
5. Dzh. A. Goldsteyn, *Polugruppy lineynykh operatorov i ikh prilozheniya* [Semigroups of Linear Operators and Their Applications], Vyshcha shkola, Kiev, 1989 (in Russian).
6. D. A. Zakora, "Operatornyy podkhod k modeli Il'yushina vyazkouprugogo tela parabolicheskogo tipa" [Operator approach to the Il'yushin model of viscoelastic body of parabolic type], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **57**, 31–64 (in Russian).
7. V. G. Zvyagin and M. V. Turbin, "Issledovanie nachal'no-kraevykh zadach dlya matematicheskikh modeley dvizheniya zhidkostey Kel'vina—Foygta" [Investigation of initial-boundary value problems for Kelvin–Voigt mathematical models of motion of fluids], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **31**, 3–144 (in Russian).
8. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (in Russian).
9. N. D. Kopachevskiy, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: evolyutsionnye i spektral'nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolution and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
10. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
11. A. S. Markus, *Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu polinomial'nykh operatornykh puchkov* [Introduction to Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils], Shtiintsa, Kishinev, 1986 (in Russian).
12. A. S. Markus and V. I. Matsaev, "Teorema o sravnenii spektrov i spektral'naya asimptotika dlya puchka M. V. Keldysha" [Theorem on comparison of spectra and spectral asymptotics for the M. V. Keldysh Pencil], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1984, **123**, No. 3, 391–406 (in Russian).
13. A. I. Miloslavskiy "Spektr malykh kolebaniy vyazkouprugoy zhidkosti v otkrytom sosude" [Spectrum of small oscillation of viscoelastic fluid in open vessel], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1989, **44**, No. 4 (in Russian).
14. A. I. Miloslavskiy, "Spektr malykh kolebaniy vyazkouprugoy nasledstvennoy sredy" [Spectrum of small oscillations of viscoelastic inheritance medium], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1989, **309**, No. 3, 532–536 (in Russian).
15. S. G. Mikhlin, "Spektr puchka operatorov teorii uprugosti" [Spectrum of the operator pencil from the elasticity theory], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1973, **28**, No. 3, 43–82 (in Russian).
16. A. P. Oskolkov, "Nachal'no-kraevye zadachi dlya uravneniy dvizheniy zhidkostey Kel'vina—Foygta i zhidkostey Oldroyta" [Initial-boundary value problems for equations of motion for Kelvin–Voigt and Oldroyd fluids], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1989, **179**, 126–164 (in Russian).
17. K. Rektoris, *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike i tekhnike* [Variational Methods in Mathematical Physics and Technics], Mir, Moscow, 1985 (in Russian).
18. V. A. Solonnikov, "Ob obshchikh kraevykh zadachakh dlya sistem, ellipticheskikh v smysle A. Daglisa—L. Nirenberga. II" [On general boundary-value problems for elliptic systems in the A. Douglis–L. Nirenberg sense] *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1966, **92**, 233–297 (in Russian).
19. A. Freydental' and Kh. Geyringer, *Matematicheskie teorii neuprugoy sploshnoy sredy* [Mathematical Theories of Nonelastic Continuous Medium], Fizmatgiz, Moscow, 1962 (in Russian).
20. M. Sh. Birman and M. Z. Solomjak, *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht–Boston–Lancaser–Tokyo, 1987.
21. I. Gohberg, S. Goldberg, and M. A. Kaashoek, *Classes of Linear Operators. Vol. 1*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1990.

22. G. Grubb and G. Geymonat, “The essential spectrum of elliptic systems of mixed order,” *Math. Ann.*, 1977, **227**, 247–276.
23. W. Kelvin (Thomson), “On the theory viscoelastic fluids,” *Math. A. Phys. Pap.*, 1875, **3**, 27–84.
24. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-Adjoint Problems for Viscous Fluids*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2003.
25. J. C. Maxwell, “On the dynamical theory of gases,” *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1867, **157**, 49–88.
26. J. C. Maxwell, “On the dynamical theory of gases,” *Philos. Mag.*, 1868, **35**, 129–145.
27. J. G. Oldroyd, “On the formulation of rheological equations of state,” *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1950, **A200**, 523–541.
28. J. G. Oldroyd, “The elastic and viscous properties of emulsions and suspensions,” *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1953, **A218**, 122–137.
29. A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, New York, 1983.
30. W. Voight, “Uber die innere Reibung der fasten Korper, inslesondere der krystalle,” *Gottinden Abh.*, 1889, **36**, No. 1, 3–47.
31. W. Voight, “Uber innex Reibung faster Korper, insbesondere der Metalle,” *Ann. Phys. U. Chem.*, 1892, **47**, No. 9, 671–693.

D. A. Zakora
E-mail: dmitry.zkr@gmail.com, dmitry_@crimea.edu

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 61 (2016). С. 67–102

УДК 517.95+517.98

АБСТРАКТНЫЕ СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

© 2016 г. **Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ, К. А. РАДОМИРСКАЯ**

Аннотация. На базе абстрактной формулы Грина рассмотрен общий подход к абстрактным краевым задачам сопряжения. Разобраны примеры некоторых конфигураций пристыкованных областей для задач сопряжения на основе обобщенной формулы Грина для оператора Лапласа. Рассмотрены также спектральные задачи, содержащие в постановке два комплексных параметра, один из которых можно считать фиксированным, а другой спектральным. Эти задачи с использованием предложенного общего подхода сведены к изучению спектральной проблемы для операторного пучка с самосопряженными операторными коэффициентами, действующего в гильбертовом пространстве и зависящего от двух параметров.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Предварительные сведения 68
  1.1. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и оператора следа 68
  1.2. Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач 70
  1.3. Случай примыкающих друг к другу областей 71
  1.4. Более общая формулировка абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач 73
2. Общая схема рассмотрения абстрактных краевых задач сопряжения 75
  2.1. К постановке задачи 75
  2.2. Общая схема исследования абстрактных задач сопряжения 76
3. Некоторые приложения общей схемы исследования краевых задач сопряжения 83
  3.1. Скалярные искомые функции, оператор Лапласа, конфигурация «дважды разрезанный банан» 83
  3.2. Другой пример конфигурации пристыкованных областей 88
  3.3. Третья конфигурация: одна область с границей, гомеоморфной сфере с тремя разрезанными ручками 90
4. Спектральные проблемы, порожденные смешанными краевыми задачами и задачами сопряжения 93
  4.1. Смешанная спектральная задача в одной области 93
  4.2. Спектральная задача сопряжения для двух примыкающих областей 95
  Список литературы 98

Введение

Данная работа является изложением доклада авторов на международной конференции в Ростове-на-Дону [17], а также соответствующей лекции, прочитанной в Крымской осенней математической школе (Ласпи—Батилиман) [18]. Исходным толчком для авторов заняться исследованием краевых и спектральных задач в липшицевых областях, а также соответствующих задач сопряжения, стали работы М. С. Аграновича (см. [2, 3, 28]) и его лекции в ежегодной Крымской осенней математической школе. С другой стороны, многочисленные приложения, в частности, в задачах гидродинамики (колебания жидкости в частично заполненном сосуде, колебания жидкого топлива в баке космической ракеты), которыми много лет занимался первый из авторов статьи (см. [4, 5, 16, 30–32]), требовали детального рассмотрения краевых задач в негладких, в частности, в липшицевых областях.

Наконец, общие подходы, которые применялись при исследовании этих проблем, побуждали рассматривать их на базе абстрактной формулы Грина (аналог первой формулы Грина для оператора Лапласа) и теории слабых (вариационных) решений краевых задач. Отсюда возник интерес к развитию теории абстрактной формулы Грина.

Сначала первый автор данной статьи считал, что первый вариант абстрактной формулы Грина был выведен в монографии [16, с. 119], и этот вывод принадлежит С. Г. Крейну. Однако позже выяснилось, что еще раньше один из вариантов такой формулы доказал Ж.-П. Обэн (см. [22, гл. 6], а также [29]). Далее, в монографии Р. Шоуволтера [35] существенно использовалась абстрактная формула Грина в форме Ж.-П. Обэна без ссылки на [22] или [29]. Дальнейшее исследование в этом направлении, а также применение этой теории в приложениях, отражено, в частности, в работах [6–8, 11–13, 23–25, 36, 37].

Данная статья посвящена разработке общего подхода к изучению абстрактных смешанных краевых и спектральных задач сопряжения, а также применению этого подхода к различным конфигурациям пристыкованных областей в задачах сопряжения с использованием обобщенной формулы Грина в основном для оператора Лапласа. Другие аналогичные задачи математической физики, гидродинамики, теории упругости и т. д. исследуются по этой предлагаемой общей схеме.

В первом разделе излагаются без доказательств теоремы о существовании абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств и абстрактного оператора следа, а также аналогичные факты для абстрактных смешанных краевых задач. Приводятся формулировки обобщенной формулы Грина на основе оператора Лапласа.

Во втором разделе приводится общая схема рассмотрения абстрактных краевых задач сопряжения на примере конфигурации пристыкованных областей, которую авторы для простоты называют «дважды разрезанный банан» (см. рис. 2.1).

В третьем разделе эта схема реализуется для этой конфигурации и оператора Лапласа. Далее рассматривается другой пример трех областей, когда две области вложены в третью и расстояние между частями этих границ положительно (рис. 3.1). Здесь общие рассмотрения, связанные с оснащением гильбертовых пространств на границах, упрощаются. Наконец, изучается еще один пример, когда имеется лишь одна область, граница которой гомеоморфна сфере с тремя разрезанными ручками, а на границах разреза задаются условия сопряжения.

Четвертый раздел посвящен изучению спектральных проблем для смешанных краевых задач в одной области, а также аналогичных спектральных задач сопряжения. Здесь установлено, что как для одной области, граница которой разбита на четыре липшицевых куска с различными условиями на этих кусках, так и для двух пристыкованных областей, границы которых в общей сложности разбиты на 15 липшицевых кусков, исходные спектральные проблемы математической физики приводятся к исследованию одного и того же операторного пучка (см. (4.17), (4.18), а также (4.31), (4.32)) с самосопряженными операторными коэффициентами, являющегося оператор-функцией двух комплексных параметров, один из которых считают фиксированным, а другой — спектральным. Частными случаями такой задачи являются спектральные проблемы, возникающие при исследовании нормальных колебаний вязкой жидкости (пучок Крейна), задач конвекции (см. [32]), задач дифракции (см. [28]) и других.

Авторы благодарят М. С. Аграновича за многочисленные обсуждения данного круга проблем и полезные советы.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00066, выполняемый в Воронежском госуниверситете).

1. Предварительные сведения

1.1. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и оператора следа. Приведем сначала необходимые сведения, которые будут далее использоваться в работе. Доказательства соответствующих утверждений можно найти в [14].

Пусть $\{E,\ (\cdot,\cdot)_E\}$, $\{F,\ (\cdot,\cdot)_F\}$ и $\{G,\ (\cdot,\cdot)_G\}$ — сепарабельные гильбертовы пространства с введенными в них скалярными произведениями. Будем считать, что для этой тройки пространств выполнены следующие условия.

1°. Пространство F плотно вложено в E (обозначение $F \hookrightarrow E$), т. е. F плотно в E и

$$\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F,\ a > 0,\ \forall u \in F.$$

Иными словами, пространства F и E с указанными свойствами образуют гильбертову пару $(F; E)$.

2°. На F задан оператор γ, называемый (абстрактным) *оператором следа* и ограниченно действующий из F в G, причем γ отображает F на плотное множество $\mathcal{R}(\gamma) =: G_+ \subset G$:

$$\gamma : F \to G_+ \hookrightarrow G,\ \|\gamma u\|_G \leqslant b\|u\|_F,\ b > 0,\ \forall u \in F.$$

3°. Ядро оператора γ, т. е. $\ker\gamma =: N$, плотно вложено в E:

$$N \hookrightarrow E,\ \|u\|_E \leqslant c\|u\|_F,\ c > 0,\ \forall u \in N.$$

Теорема 1.1. *Пусть для тройки гильбертовых пространств E, F, G (с введенными на них скалярными произведениями) и для оператора следа γ выполнены условия 1°–3°. Тогда существует абстрактное дифференциальное выражение $Lu \in F^*$ и абстрактная производная по внешней нормали $\partial u \in (G_+)^*$ такие, что имеет место абстрактная формула Грина (аналог первой формулы Грина для оператора Лапласа)*

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G \quad \forall \eta, u \in F. \tag{1.1}$$

При этом ∂u по элементам $u \in F$ и $Lu \in F^*$ определяются однозначно.

Замечание 1.1. При доказательстве этой теоремы (см. [14]) дифференциальное выражение Lu и производная ∂u строятся неоднозначно. Именно, их сужения на подпространство $M = F \ominus N$ определяются однозначно, а сужения на N связаны линейной связью. Однако в приложениях, в частности, в задачах математической физики, конкретный вид дифференциального выражения Lu определяется однозначно, исходя из исследуемого физического процесса. Поэтому далее будем считать, что выражение для $Lu \in F^*$ в формуле Грина (1.1) задано, а потому однозначно определено и $\partial u \in (G_+)^*$. В связи с этим все дальнейшие построения будут проводиться на базе выбранной формулы Грина. Отметим еще, что уже в классической работе [21] указывалось, что краевые задачи Дирихле, Неймана и др. следует изучать относительно выбранной формула Грина, а неоднозначность выбора дифференциального выражения Lu подробно обсуждалось в [33], а также в [1].

Замечание 1.2. Типичным примером, когда выполнены условия 1°–3°, является тройка пространств $E = L_2(\Omega),\ F = H^1(\Omega),\ G = L_2(\Gamma),\ \Gamma := \partial\Omega,\ \Omega \subset \mathbb{R}^m$, с введенными на них стандартными нормами и обычным оператором следа:

$$\gamma u := u|_\Gamma,\ \forall u \in H^1(\Omega). \tag{1.2}$$

При этом область Ω имеет липшицеву границу $\Gamma = \partial\Omega$. В этом случае имеем три пары гильбертовых пространств

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega),\ H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Gamma),\ N := H^1_0(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega), \tag{1.3}$$

причем вложения в (1.3) компактные. Отметим еще, что в этом примере имеет место свойство

$$(H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma), \tag{1.4}$$

см., например, [33, с. 98], [26, с. 149].

Теорема 1.2. *Для тройки пространств $L_2(\Omega),\ H^1(\Omega),\ L_2(\Gamma),\ \Gamma = \partial\Omega$ и оператора следа γ (см. (1.2)) имеет место следующая обобщенная формула Грина для оператора Лапласа:*

$$\int\limits_\Omega (\nabla\eta \cdot \nabla u + \eta u) d\Omega =: (\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma)},\ \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \tag{1.5}$$

$$u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*,\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

(*Здесь, как и в* (1.1), *символом $\langle \eta, v\rangle_E$ обозначается значение функционала $v \in F^*$ на элементе $\eta \in F$, аналогичный смысл имеют другие выражения с косыми скобками.*)

Другие примеры обобщенных формул Грина для равномерно эллиптического дифференциального выражения, для систем линейных эллиптических уравнений, для уравнений линейной теории упругости приведены в работе [14, п. 1.3].

1.2. Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач. В математической физике часто рассматривают такие краевые задачи, когда на одной части границы $\Gamma = \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ задают краевое условие Дирихле, на другой — условие Неймана, а на третьей — так называемое третье краевое условие, или условие Ньютона. Задачи подобного вида называют смешанными. Для таких задач функционал, связанный с $\Gamma = \partial\Omega$ и фигурирующий в формуле Грина (1.5), естественно разбить на части, отвечающие тому или иному краевому условию.

Переходя к рассмотрению этой проблемы в абстрактной форме, приходим к выводу, что в формуле (1.1) желательно выражение $\langle\gamma\eta, \partial u\rangle_G$ заменить при определенных дополнительных условиях на выражение $\sum\limits_{k=1}^{l}\langle\gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{G_k}$, где $\gamma_k\eta$ — абстрактный аналог следа элемента $\eta \in F$ на части Γ_k границы Γ, а $\partial_k u$ — соответствующий аналог производной по внешней нормали на этой части границы.

Предположим, что для тройки пространств E, F, G и оператора γ выполнены условия 1°–3° пункта 1.1, а также следующие условия.

4°. Имеет место ортогональное разложение и оснащения:

$$G = \bigoplus_{k=1}^{l} G_k,\ \exists (G_+)_k,\ (G_+)_k^* : (G_+)_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow (G_+)_k^*,\ k = \overline{1,l}.$$

5°. В пространстве G_+ действуют прямые ограниченные проекторы

$$p_k : G_+ \to \widehat{(G_+)}_k,\ \sum_{k=1}^{l} p_k = I_+, \tag{1.6}$$

причем

$$p_k = \omega_k\rho_k,\ k = \overline{1,l},$$

где $\rho_k : G_+ \to (G_+)_k$ — абстрактный оператор сужения на часть границы, а $\omega_k : (G_+)_k \to \widehat{(G_+)}_k$ — абстрактный оператор продолжения нулем из $(G_+)_k$ на $\widehat{(G_+)}_k \subset G_+$. Кроме того, будем предполагать, что

$$\rho_k\omega_k = (I_+)_k,\ k = \overline{1,l}. \tag{1.7}$$

Требуется также, чтобы ρ_k и ω_k были ограниченными операторами, а потому и $p_k = \omega_k\rho_k$ — ограничены.

Теорема 1.3. *Пусть для тройки пространств* E, F, G *и оператора следа* γ *выполнены условия* 1°–3° *пункта* 1.1, *а также условия* 4° *и* 5°. *Тогда имеет место абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач в следующем виде*:

$$(\eta, u)_F = \langle\eta, Lu\rangle_E + \sum_{k=1}^{q}\langle\gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{G_k}\quad \forall \eta, u \in F,$$

$$\gamma_k\eta := \rho_k\gamma\eta \in (G_+)_k,\quad \partial_k u := \omega_k^*\partial u \in (G_+)_k^*,\ k = \overline{1,l}.$$

Здесь γ_k *— абстрактный оператор следа на часть границы области, а* ∂_k *— абстрактный оператор производной по внешней нормали, действующий на этой части границы.*

Для иллюстрации свойств 4° и 5° вернемся к рассмотрению примера из замечания 1.2, т. е. тройке пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$ и оператора следа (1.2). Будем считать, что липшицева граница Γ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ неодносвязна и состоит из трех частей: внешней границы Γ_1 и двух внутренних границ Γ_2 и Γ_3, причем все Γ_k, $k = \overline{1,3}$, находятся на положительном расстоянии друг от друга.

Тогда, очевидно,

$$L_2(\Gamma) = \bigoplus_{k=1}^{3} L_2(\Gamma_k),\ H^{1/2}(\Gamma) = (\dot{+})_{k=1}^{3} H^{1/2}(\Gamma_k),$$

и так же, как и для односвязной области (см. (1.4)), имеют место соотношения

$$(H^{1/2}(\Gamma_k))^* = H^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,3}.$$

Отсюда следует, что для этого примера имеют место свойства 4°.

Переходя к рассмотрению свойств 5°, введем для любого $\varphi = (\varphi_1; \varphi_2; \varphi_3) \in H^{1/2}(\Gamma)$ операторы

$$\rho_k \varphi := \varphi_k := \varphi|_{\Gamma_k},\ k = \overline{1,3}.$$

Введем также операторы ω_k продолжения нулем на оставшуюся часть границы:

$$\omega_k \varphi_k := (\varphi_k; 0; 0),\ k = \overline{1,3}.$$

Исходя из определения нормы в пространстве $H^{1/2}(\Gamma)$, можно проверить (см. [14, с. 92–94]), что $\rho_k : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma_k)$ — ограниченный оператор с нормой, не превышающей единицы, а $\omega_k : H^{1/2}(\Gamma_k) \to H^{1/2}(\Gamma)$ — при условии $\operatorname{dist}(\Gamma_k, \Gamma_j) \geqslant d > 0$ — также ограничен. Кроме того, очевидно, что для ω_k и ρ_k выполнено свойство (1.7), т. е. $\rho_k \omega_k$ — единичный оператор в $H^{1/2}(\Gamma_k)$. Отсюда следует, что $p_k = \omega_k \rho_k,\ k = \overline{1,3}$, является ограниченным проектором: $p_k : H^{1/2}(\Gamma) \to \widehat{H^{1/2}}(\Gamma_k)$, где $\widehat{H^{1/2}}(\Gamma_k)$ — подпространство в $H^{1/2}(\Gamma)$, у которого ненулевые элементы имеются лишь на $\Gamma_k,\ k = \overline{1,3}$. Эти факты показывают, что в разбираемом примере выполнены также свойства 5°, сформулированные выше (см. (1.6)-(1.7)).

Опираясь на разобранный пример, а также теорему 1.3, сформулируем следующий вывод.

Теорема 1.4. *Пусть для тройки пространств* $L_2(\Omega),\ H^1(\Omega),\ L_2(\Gamma),\ \Gamma = \partial\Omega,\ \Omega \in \mathbb{R}^m$ *и оператора следа* γ (*см.* (1.2)), *липшицева граница* Γ *неодносвязна и разбита на части* Γ_k, $k = \overline{1,l}$, *находящиеся на положительном расстоянии друг от друга, т. е.* $\operatorname{dist}(\Gamma_k, \Gamma_j) \geqslant d > 0$, $k, j = \overline{1,l},\ k \neq j$. *Тогда имеет место следующая обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач*:

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \triangle u \rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{l} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{L_2(\Gamma_k)} \ \ \forall\, \eta,\ u \in H^1(\Omega), \tag{1.8}$$

$$\gamma_k \eta := \eta\,|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k),\ \ \partial_k u = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}. \tag{1.9}$$

1.3. Случай примыкающих друг к другу областей. Будем теперь считать, в отличие от примера, рассмотренного в п. 1.2, что липшицева граница Γ области $\Omega \in \mathbb{R}^m$ односвязна. Разобьем ее на односвязные открытые части $\Gamma_k,\ k = \overline{1,l}$, с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$. Такое разбиение называют разбиением на липшицевы куски.

Как известно, функции $\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_k)$ не всегда продолжимы нулем на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$ (см. [21, с. 78], а также [9, с. 116-117]). Введем важные понятия, связанные с этим обстоятельством. Пусть $r(x),\ x \in \Gamma_k,$ — гладкая функция в $\overline{\Gamma}_k$, строго положительная в Γ_k, положительно определенная вне некоторой окрестности границы $\partial\Gamma_k$, а в окрестности этой границы эквивалентная (в смысле двусторонних оценок) расстоянию от точки $x \in \Gamma_k$ до $\partial\Gamma_k$.

Обозначим через $\widetilde{H}^s(\Gamma_k),\ |s| \leqslant 1$, множество (линеал), состоящее из (обобщенных) функций с носителем в $\overline{\Gamma}_k$. Как указано в [1, с. 76], $\widetilde{H}^s(\Gamma_k)$ — это пополнение множества функций из $C_0^\infty(\Gamma_k)$, для которых имеется продолжение нулем вне Γ_k в классе $H^s(\Gamma)$.

Лемма 1.1. *Справедливо соотношение*

$$\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) = \{\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_k) : r^{-1/2}\varphi \in L_2(\Gamma_k)\}.$$

При этом следующая норма эквивалентна стандартной норме (*которая наследуется из* $H^{1/2}(\Gamma)$) *на классе* $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$:

$$\|\varphi\|^2_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)} = \|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_k)} + \|r^{-1/2}\varphi\|^2_{L_2(\Gamma_k)}.$$

Лемма 1.2. *При любом* $s \in \mathbb{R},\ |s| \leqslant 1$, *пространства* $\widetilde{H}^s(\Gamma_k)$ *и* $H^{-s}(\Gamma_k)$ *дуальны относительно спаривания в* $L_2(\Gamma_k)$. *В частности,*

$$(\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k))^* = H^{-1/2}(\Gamma_k),\ (H^{1/2}(\Gamma_k))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}. \tag{1.10}$$

Как хорошо известно, пространство $H^1(\Omega)$ со стандартной нормой (см. (1.5)) имеет ортогональное разложение, которое называют разложением Вейля:

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus H_h^1(\Omega), \tag{1.11}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma u = 0\},\ H_h^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v - \Delta v = 0\}. \tag{1.12}$$

Для простоты $H_h^1(\Omega)$ будем называть подпространством гармонических элементов из $H^1(\Omega)$.

При исследовании линейных смешанных краевых задач, содержащих заданные функции как в уравнениях, так и в краевых условиях на разных частях границы, естественно решения таких задач разыскивать в виде суперпозиции решений вспомогательных краевых задач, в которых заданные функции (неоднородности) содержатся лишь в одном месте, т. е. в уравнении либо в одном из краевых условий. В связи с этим при использовании обобщенных формул Грина вида (1.8) следует выделять такие множества (подпространства) из $H^1(\Omega)$, для которых указанное свойство суперпозиции имеет место.

Переходя к рассмотрению этого подхода, введем следующие классы функций:

$$\widehat{H}^{1/2}(\Gamma) := \{\varphi \in H^{1/2}(\Gamma) : \rho_k\varphi \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}\} \subset H^{1/2}(\Gamma), \tag{1.13}$$

$$\widehat{H}^1(\Omega) := H_0^1(\Omega) \oplus \{(\dot{+})_{k=1}^l H_{h,\Gamma_k}^1(\Omega)\} \subset H^1(\Omega), \tag{1.14}$$

$$H_{h,\Gamma_k}^1(\Omega) := \{u \in H_h^1(\Omega) : \gamma u = 0 \text{ на } \Gamma\backslash\Gamma_k\} = \ker((I_+ - \rho_k)\gamma),\ k = \overline{1,l}. \tag{1.15}$$

Определение 1.1. Назовем след γu элемента $u \in H^1(\Omega)$ *регулярным следом первого типа* по отношению к разбиению $\Gamma = \partial\Omega$ на липшицевы куски Γ_k, $k = \overline{1,l}$, если для любого k выполнено $\gamma_k u = \rho_k\gamma u \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, т. е. элемент продолжи́м нулем на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$.

Нетрудно видеть, учитывая свойства (1.10), что регулярным следом первого типа обладают слабые решения $w \in H_h^1(\Omega)$ смешанной краевой задачи

$$w - \Delta w = 0 \text{ (в } \Omega),\ w = 0 \text{ (на } \Gamma\backslash\Gamma_k),\ \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} = \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k).$$

Отметим еще, что, согласно определениям (1.13)–(1.15), элементы из $\widehat{H}^1(\Omega)$ имеют регулярный след первого типа: для любого $u \in \widehat{H}^1(\Omega)$ получаем представление

$$u = u_0 + \sum_{k=1}^{l} u_k,\ u_0 \in H_0^1(\Omega),\ u_k \in H_{h,\Gamma_k}^1(\Omega),\ k = \overline{1,l},$$

$$\gamma u_0 = 0,\ \gamma_k u_k =: \varphi_k \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),\ \gamma_k u_j = 0 \quad (k \neq j),\ j,k = \overline{1,l}.$$

При этом элементы $\gamma u \in \widehat{H}^{1/2}(\Gamma)$ имеют сужения на Γ_k, продолжимые нулем на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$.

Итогом проведенных рассмотрений является следующее утверждение.

Теорема 1.5. *Для тройки пространств* $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$ *и оператора следа* $\gamma : \widehat{H}^1(\Omega) \to L_2(\Gamma)$, $\gamma\eta := \eta|_\Gamma$, $\eta \in \widehat{H}^1(\Omega)$, *в области* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *с липшицевой границей* Γ, *разбитой на липшицевы куски* Γ_k, $k = \overline{1,l}$, *справедлива следующая обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач*:

$$\langle \eta, u - \triangle u\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \sum_{k=1}^{l} \langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)}\ \ \forall\, \eta,\ u \in \widehat{H}^1(\Omega), \tag{1.16}$$

$$u - \triangle u \in (H^1(\Omega))^*,\ \gamma_k\eta := \eta\,|_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),$$

$$\partial_k u = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}. \tag{1.17}$$

1.4. Более общая формулировка абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач. Формулировка абстрактной формулы Грина, выраженная теоремой 1.3, не всегда соответствует тем классам смешанных краевых задач, которые встречаются в приложениях. Именно, оператор ω_k продолжения нулем с $(G_+)_k$ на $\widehat{(G_+)}_k$, как было видно из рассмотрений пунктов 1.2, 1.3, полезно использовать в случаях, когда односвязные куски Γ_k границы $\Gamma = \partial\Omega$ расположены на положительном расстоянии либо когда на разных кусках границы ставят краевые условия Дирихле с заданными функциями класса $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$. Поэтому целесообразно получить другую форму абстрактной формулы Грина с тем, чтобы можно было использовать и краевые условия Неймана либо Ньютона.

Переходя к рассмотрению этого вопроса в абстрактной форме, будем считать, что выполнены свойства 4° пункта 1.2, т. е.

$$G = \bigoplus_{k=1}^{l} G_k,\ (G_+)_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow (G_+)_k^*,\ k = \overline{1,l}, \tag{1.18}$$

а также следующие свойства.

$(5°)'$. Для операторов $p_k : G_+ \to \widehat{(G_+)}_k$ имеем соотношения

$$p_k = \omega_k\rho_k,\ k = \overline{1,l},\ \rho_k\omega_k = (I_+)_k,\ k = \overline{1,l},\ \sum_{k=1}^{l} p_k = I_+, \tag{1.19}$$

где $(I_+)_k$ — единичный оператор в $(G_+)_k$. При этом ρ_k — оператор сужения с G_+ на $(G_+)_k$, а ω_k — оператор продолжения с $(G_+)_k$ на $\widehat{(G_+)}_k$, но *не обязательно нулем*. Предполагается также, что $\rho_k : G_+ \to (G_+)_k$ и $\omega_k : (G_+)_k \to \widehat{(G_+)}_k$ — непрерывные операторы.

Заметим, что в сформулированных предположениях

$$p_k^* = \rho_k^*\omega_k^*,\ \rho_k^* : (G_+)_k^* \to (G_+)^*,\ \omega_k^* : \widehat{(G_+)}_k^* \to (G_+)_k^*,\ k = \overline{1,l}, \tag{1.20}$$

где ω_k^* — ограниченный оператор сужения с $\widehat{(G_+)}_k^*$ на $(G_+)_k^*$, а ρ_k^* — ограниченный оператор продолжения с $(G_+)_k^*$ на $(G_+)^*$.

Теорема 1.6. *Пусть для тройки пространств E, F, G и оператора следа γ выполнены условия* 1°–3° *пункта* 1.1, *условие* 4° *пункта* 1.2 (*см.* (1.18)), *а также условие* $(5°)'$ (*см.* (1.19)) *либо условие* (1.20). *Тогда имеет место абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач в следующей форме*:

$$\langle \eta, Lu\rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{l} \langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{G_k} \quad \forall \eta, u \in F,$$

$$\gamma_k\eta := \rho_k\gamma\eta \in (G_+)_k, \quad \partial_k u := \omega_k^*\partial u \in (G_+)_k^*,$$

где ρ_k и ω_k^* — операторы со свойствами (1.19), (1.20).

Вернемся снова к тройке пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — область с липшицевой границей Γ, разбитой на липшицевы куски Γ_k, $k = \overline{1,l}$. Введем одно важное понятие, относящееся к возможности продолжения элементов из $H^s(\Gamma_k)$, $|s| \leqslant 1$, до элементов из $H^s(\Gamma)$. Оказывается, при сформированных выше предположениях такое продолжение возможно многими способами, однако один из них является универсальным, и он предложен в работе [34] для случая, когда функции из $H^s(\Omega)$ продолжаются до функций из $H^s(\mathbb{R}^m)$. Как указано в работе [26], аналогичный факт имеет место и для продолжения функций из $H^s(\Gamma_k)$, $|s| \leqslant 1$, до функций из $H^s(\Gamma)$. При этом в обоих случаях оператор продолжения не зависит от s. Сформулируем итоговое утверждение в виде леммы, которая понадобится в дальнейшем.

Лемма 1.3 (В. С. Рычков [34], М. С. Агранович [26]). *Пусть липшицева граница $\Gamma = \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ разбита на липшицевы куски Γ_k, $k = \overline{1,l}$. Тогда существует линейный оператор ω_k (оператор Рычкова) продолжения функций из $H^s(\Gamma_k)$ с Γ_k на всю Γ функциями из $H^s(\Gamma)$. При этом*

$$\|\omega_k\varphi_k\|_{H^s(\Gamma)} \leqslant c_k\|\varphi_k\|_{H^s(\Gamma_k)}\ \forall \varphi_k \in H^s(\Gamma_k),\ |s| \leqslant 1,$$

причем c_k не зависит от s.

Введем теперь операторы сужения и продолжения такие, что для них выполнены общие требования из теоремы 1.6. Пусть $\rho_k : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma_k)$ — ограниченный оператор сужения ($\|\rho_k\|_{H^{1/2}(\Gamma)\to H^{1/2}(\Gamma_k)} \leqslant 1$), а $\rho_k^* : (H^{1/2}(\Gamma_k))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k) \to (H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma)$ — сопряженный ему ограниченный *оператор продолжения нулем:*

$$\rho_k^*\psi_k = \begin{cases} \psi_k \ (\text{на } \Gamma_k), & \psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}. \\ 0 \ (\text{на } \Gamma\backslash\Gamma_k). \end{cases}$$

Введем также ограниченный оператор продолжения (оператор Рычкова) $\omega_k : H^{1/2}(\Gamma_k) \to H^{1/2}(\Gamma)$. Тогда

$$\omega_k^* : (H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma) \to (H^{1/2}(\Gamma_k))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)$$

— ограниченный *оператор сужения.*

Введем еще пространство

$$\check{H}^{-1/2}(\Gamma) := (\dot{+})_{k=1}^{l} \check{H}^{-1/2}(\Gamma_k) \subset H^{-1/2}(\Gamma), \tag{1.21}$$

$$\check{H}^{-1/2}(\Gamma_k) := \{\rho_k^*\psi_k : \psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)\} \subset H^{-1/2}(\Gamma),$$

а также ограниченные операторы

$$p_k^* = \rho_k^*\omega_k^* : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma).$$

Очевидно, операторы p_k^* обладают свойствами

$$\omega_k^*\rho_k^*\psi_k = \psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l},$$

а потому в пространстве $\check{H}^{-1/2}(\Gamma)$ имеем

$$p_k^* = (p_k^*)^2,\ p_k^* p_j^* = 0\ (k \neq j),\ \sum_{k=1}^{l} p_k^* = (\check{I}_-),$$

где $(\check{I}_-)$ — единичный оператор в $\check{H}^{-1/2}(\Gamma)$.

Таким образом, в пространстве $\check{H}^{-1/2}(\Gamma)$ выполнены общие требования (1.18)–(1.20), где

$$(G_+)_k = H^{1/2}(\Gamma_k),\ G_k = L_2(\Gamma_k),\ (G_+)_k^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}.$$

Введем теперь по аналогии с (1.13)–(1.15) классы функций, связанных не с задачей Дирихле, а с задачей Неймана. Именно, введем пространство (1.21), а также пространство

$$\check{H}^1(\Omega) := H_0^1(\Omega) \oplus \{(\dot{+})_{k=1}^{l} \check{H}^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)\} \subset H^1(\Omega), \tag{1.22}$$

$$\check{H}^1_{h,\Gamma_k}(\Omega) = H_h^1(\Omega) \cap H^1_{\Gamma\backslash\Gamma_k}(\Omega), \tag{1.23}$$

$$H^1_{\Gamma\backslash\Gamma_k}(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma\backslash\Gamma_k} = 0\}. \tag{1.24}$$

Определение 1.2. Назовем след γu элемента $u \in H^1(\Omega)$ *регулярным следом второго типа*, если для любого $k \in \overline{1,l}$ элемент

$$\partial_k u = \omega_k^* \partial u = (\partial u/\partial n)_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),$$

т. е. он продолжи́м нулем на всю Γ в классе $H^{-1/2}(\Gamma) = (H^{1/2}(\Gamma))^*$.

Согласно определениям (1.22)–(1.24) элементы из $\check{H}^1(\Omega)$ имеют регулярный след второго типа: для любого $u \in \check{H}^1(\Omega)$ имеет место представление

$$u = u_0 + \sum_{k=1}^{l} u_k,\ u_0 \in H_0^1(\Omega),\ u_k \in \check{H}^1_{h,\Gamma_k}(\Omega),\ k = \overline{1,l},$$

$$\gamma u_0 = 0,\ \partial_k u_k = (\partial u_k/\partial n)_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),$$

$$\partial_k u_j = 0\ (k \neq j),\ k, j \in \overline{1,l}.$$

В качестве следствия из теоремы 1.6 и проведенных выше построений приходим к такому выводу.

Теорема 1.7. *Для тройки пространств $L_2(\Omega)$, $\check{H}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, и оператора следа $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$, $\gamma\eta := \eta|_\Gamma$, в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей Γ, разбитой на липшицевы куски Γ_k, $k = \overline{1,l}$, справедлива следующая обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач*:

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \triangle u\rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{l} \langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)} \ \ \forall\, \eta,\ u \in \check{H}^1(\Omega), \tag{1.25}$$

$$\gamma_k\eta := \eta\,|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k),\ \partial_k u = (\partial u/\partial n)_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}. \tag{1.26}$$

Рассмотрения этого раздела (см. теоремы 1.3–1.7) показывают, что вид обобщенной формулы Грина для смешанных краевых задач при исследовании классических проблем следует выбирать, исходя из вида области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ и характера краевых условий, заданных на $\Gamma = \partial\Omega$.

2. Общая схема рассмотрения абстрактных краевых задач сопряжения

2.1. К постановке задачи. Рассмотрим сначала простой пример задачи сопряжения для проблемы математической физики, порожденной оператором Лапласа, точнее дифференциальным выражением $u - \Delta u$. Будем считать, что конфигурация областей, в которых рассматривается эта задача, представляет собой «дважды разрезанный банан» (см. рис. 2.1)

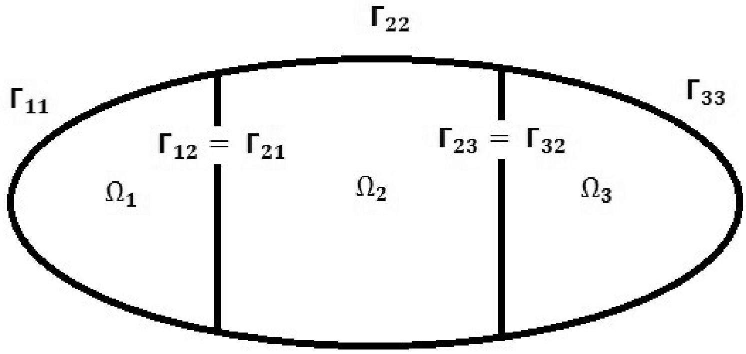

Рис. 2.1

Обозначим через Γ_{jj}, $j = \overline{1,3}$, внешние свободные границы, а через Γ_{kj} $(k \neq j)$ — ту часть границы $\Gamma_j = \partial\Omega_j$, которая стыкуется с частью Γ_{jk} границы $\Gamma_k = \partial\Omega_k$. При этом очевидно, что $\Gamma_{jk} = \Gamma_{kj}$. Полагаем, что области $\Omega_k \subset \mathbb{R}^m$ имеют липшицевы границы, разбитые на липшицевы куски Γ_{kj}. Будем обозначать через $\gamma_{kj}u_j$ след функции u_j, заданной в области Ω_j, на границе Γ_{kj}, а через $\partial_{kj}u_j$ — соответствующую производную по внешней нормали.

Сформулируем теперь постановку задачи сопряжения для данной совокупности областей Ω_j, $j = \overline{1,3}$.

Требуется найти такие функции $u_j(x) \in H^1(\Omega_j)$, $j = \overline{1,3}$, что для них выполнены уравнения

$$u_j - \Delta u_j = f_j \ (\text{в } \Omega_j),\ j = \overline{1,3}, \tag{2.1}$$

внешние граничные условия Дирихле

$$\gamma_{jj}u_j = \varphi_j \ (\text{на } \Gamma_{jj}),\ j = \overline{1,3}, \tag{2.2}$$

а также условия сопряжения на стыках:

$$\gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = \varphi_{21},\ \partial_{21}u_1 + \partial_{12}u_2 = \psi_{21} \ (\text{на } \Gamma_{21} = \Gamma_{12}), \tag{2.3}$$

$$\gamma_{32}u_2 - \gamma_{23}u_3 = \varphi_{32},\ \partial_{32}u_2 + \partial_{23}u_3 = \psi_{32} \ (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23}). \tag{2.4}$$

Здесь f_j — заданные функции в Ω_j, $j = \overline{1,3}, \varphi_j$ — заданные функции на внешних границах Γ_{jj}, $j = \overline{1,3}$, функции φ_{21} и φ_{32} задают разрывы следов, а ψ_{21} и ψ_{32} — разрывы производных по внешним нормалям на границах стыка областей.

Приведем теперь формулировку абстрактной задачи сопряжения, частным случаем которой является проблема (2.1)–(2.4).

Пусть имеется набор пространств E_j, F_j, G_j и операторов следа γ_j, $j=\overline{1,3}$, таких, что для них выполнены условия теоремы 1.1 и потому имеется три абстрактные формулы Грина:

$$\langle \eta_j, L_j u_j\rangle_{E_j} = (\eta_j, u_j)_{F_j} - \langle \gamma_j\eta_j, \partial_j u_j\rangle_{G_j} \ \ \forall \eta_j, u_j \in F_j.$$

Более того, будем считать, что для каждого $j=\overline{1,3}$ выполнены свойства (1.18)–(1.20) и потому справедливы утверждения теоремы 1.6. Тогда по аналогии с проблемой (2.1)–(2.4) (см. рис. 2.1) будем считать, что для граничных пространств G_j, $j=\overline{1,3}$, выполнены соотношения

$$G_1 = G_{11}\oplus G_{21},\ G_2 = G_{22}\oplus G_{12}\oplus G_{32},\ G_3 = G_{33}\oplus G_{23}, \tag{2.5}$$

причем каждое из этих подпространств имеет оснащение:

$$\begin{gathered}(G_+)_{jj} \hookrightarrow G_{jj} \hookrightarrow (G_+)^*_{jj},\ j=\overline{1,3},\\ (G_+)_{21} = (G_+)_{12} \hookrightarrow G_{21} = G_{12} \hookrightarrow (G_+)^*_{21} = (G_+)^*_{12},\\ (G_+)_{32} = (G_+)_{23} \hookrightarrow G_{32} = G_{23} \hookrightarrow (G_+)^*_{32} = (G_+)^*_{23}.\end{gathered} \tag{2.6}$$

При этих предположениях по теореме 1.6 будем иметь следующие тождества (абстрактные формулы Грина для смешанных краевых задач):

$$(\eta_1, u_1)_{F_1} = \langle \eta_1, L_1 u_1\rangle_{E_1} + \langle \gamma_{11}\eta_1, \partial_{11}u_1\rangle_{G_{11}} + \langle \gamma_{21}\eta_1, \partial_{21}u_1\rangle_{G_{21}} \ \ \forall \eta_1, u_1 \in F_1, \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}(\eta_2, u_2)_{F_2} = \langle \eta_2, L_2 u_2\rangle_{E_2} + \langle \gamma_{22}\eta_2, \partial_{22}u_2\rangle_{G_{22}} +\\ +\langle \gamma_{12}\eta_2, \partial_{12}u_2\rangle_{G_{12}} + \langle \gamma_{32}\eta_2, \partial_{32}u_2\rangle_{G_{32}} \ \ \forall \eta_2, u_2 \in F_2,\end{gathered} \tag{2.8}$$

$$(\eta_3, u_3)_{F_3} = \langle \eta_3, L_3 u_3\rangle_{E_3} + \langle \gamma_{33}\eta_3, \partial_{33}u_3\rangle_{G_{33}} + \langle \gamma_{23}\eta_3, \partial_{23}u_3\rangle_{G_{23}} \ \ \forall \eta_3, u_3 \in F_3. \tag{2.9}$$

Формулировка абстрактной задачи сопряжения в рассматриваемом случае такова: требуется найти элементы $u_j \in F_j$, $j=\overline{1,3}$, для которых выполнены уравнения

$$L_j u_j = f_j \ (j=\overline{1,3}), \tag{2.10}$$

внешние граничные условия

$$\gamma_{jj}u_j = \varphi_j \ (j=\overline{1,3}), \tag{2.11}$$

а также условия сопряжения на стыковых граничных пространствах:

$$\gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = \varphi_{21},\ \partial_{21}u_1 + \partial_{12}u_2 = \psi_{21} \ (\text{на } \Gamma_{21}=\Gamma_{12}), \tag{2.12}$$

$$\gamma_{32}u_2 - \gamma_{23}u_3 = \varphi_{32},\ \partial_{32}u_2 + \partial_{23}u_3 = \psi_{32} \ (\text{на } \Gamma_{32}=\Gamma_{23}). \tag{2.13}$$

Элементы f_j и φ_{jj} заданы, $j=\overline{1,3}$, а φ_{21}, φ_{32}, ψ_{21} и ψ_{32} задают разрывы следов элементов u_j и их производных по нормали.

Таким образом, абстрактная задача сопряжения, порожденная проблемой (2.1)–(2.4), состоит в решении проблемы (2.10)–(2.13) на основе использования абстрактных формул Грина (2.7)–(2.9).

2.2. Общая схема исследования абстрактных задач сопряжения. Целью дальнейших рассмотрений является получение необходимых и достаточных условий разрешимости задачи (2.10)–(2.13), а также представление этого решения через операторы вспомогательных (абстрактных) краевых задач. При этом будет использован, как уже упоминалось, принцип суперпозиции, позволяющий представить решение задачи (2.10)–(2.13) в виде суммы решений вспомогательных краевых задач, содержащих неоднородности (заданные элементы) лишь в одном месте, т. е. либо в уравнении, либо в одном из краевых условий.

Эта общая схема состоит из четырех этапов. Именно, слабое (вариационное) решение задачи (2.10)–(2.13), т. е.

$$u = (u_1,\ u_2,\ u_3) \in \bigoplus_{k=1}^{3} F_k =: F, \tag{2.14}$$

будем разыскивать в виде суммы

$$(u_1,\ u_2,\ u_3) = \sum_{j=1}^{4} (u_{j1},\ u_{j2},\ u_{j3}), \tag{2.15}$$

где $u_j = (u_{j1},\ u_{j2},\ u_{j3})$, $j=\overline{1,4}$, — слабые решения формулируемых ниже вспомогательных задач.

2.2.1. Первая вспомогательная задача (*задача Зарембы*).

$$L_1 u_{11} = 0, \ \gamma_{11} u_{11} = \varphi_1; \ \partial_{21} u_{11} = 0, \tag{2.16}$$

$$L_2 u_{12} = 0, \ \gamma_{22} u_{12} = \varphi_2; \ \partial_{12} u_{12} = 0, \ \partial_{32} u_{12} = 0, \tag{2.17}$$

$$L_3 u_{13} = 0, \ \gamma_{33} u_{13} = \varphi_3; \ \partial_{23} u_{23} = 0. \tag{2.18}$$

Здесь уравнения и условия Неймана на стыке однородные, а условия Дирихле на внешних границах неоднородные. При этом задача (2.16) распадается на три независимые задачи Зарембы для функций $u_{1k}, \ k = \overline{1,3}$.

Переходя к рассмотрению задачи (2.16)–(2.18), заметим, что для ее решения $u_{11} \in F_1$ должно выполняться необходимое условие (см. (2.6))

$$\gamma_{11} u_{11} = \varphi_1 \in (G_+)_{11} \subset G_{11}. \tag{2.19}$$

Будем считать, что это условие выполнено, и воспользуемся оператором продолжения $\omega_{11} : (G_+)_{11} \to (G_+)_1$, который в условиях теоремы 1.6 существует и ограничен. Тогда элемент $\widehat{\varphi}_1 := \omega_{11}\varphi_1 \in (G_+)_1$. Будем разыскивать решение задачи (2.16) в виде суммы

$$u_{11} = v_{11} + w_{11},$$

где v_{11} и w_{11} — слабые решения задач

$$L_1 v_{11} = 0, \ \gamma_1 v_{11} = \widehat{\varphi}_1, \tag{2.20}$$

$$L_1 w_{11} = 0, \ \gamma_{11} w_{11} = 0, \ \partial_{21} w_{11} = -\partial_{21} v_{11} =: \delta_{21}. \tag{2.21}$$

Напомним (см. [14]), что имеет место ортогональное разложение

$$F_1 = N_1 \oplus M_1, \ N_1 := \ker \gamma_1, \ M_1 = \ker L_1,$$

причем между элементами $v_{11} \in M_1$ и их следами $\gamma_1 v_{11}$ имеет место изоморфизм и даже изометрия при соответствующем выборе нормы в $(G_+)_1$. Отсюда следует, что при любом $\widehat{\varphi}_1 \in (G_+)_1$ задача (2.20) имеет единственное решение $v_{11} = \widetilde{\gamma}_1^{-1}\widehat{\varphi}_1 = \tilde{\gamma}_1^{-1}\omega_{11}\varphi_1 \in M_1 \subset F_1$, где $\widetilde{\gamma}_1 = \gamma_1|_{M_1}$. Тогда, как следует из рассмотрений первого раздела,

$$\delta_{21} := -\partial_{21} v_{11} \in (G_+)^*_{21}. \tag{2.22}$$

Назовем слабым решением задачи (2.21) такой элемент $w_{11} \in M_1$, для которого выполнено тождество

$$(\eta_1, w_{11})_{F_1} = \langle \gamma_{21}\eta_1, \delta_{21} \rangle_{G_{21}} \ \forall \eta_1 \in F_{0,G_{11}}, \tag{2.23}$$

$$F_{0,G_{11}} := \{\eta_1 \in F_1 : \gamma_{11}\eta_1 = 0\}.$$

В (2.23) правая часть является линейным ограниченным функционалом в $(G_+)_{21}$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.22). Поэтому задача (2.23) имеет единственное слабое решение

$$w_{11} \in F_{0,G_{11}} \cap M_1 =: M_{0,G_{11}} \subset F_1. \tag{2.24}$$

Эти рассмотрения, а также аналогичные рассмотрения задач (2.17), (2.18) приводят к следующему выводу.

Теорема 2.1. *Каждая из задач Зарембы* (2.16)–(2.18) *имеет единственное слабое решение* $u_{1k} \in M_k \subset F_k, \ k = \overline{1,3}$, *тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\varphi_k \in (G_+)_{kk} \subset G_{kk}, \ k = \overline{1,3}. \tag{2.25}$$

Отсюда следует, что решение задачи (2.16)–(2.18) имеет вид

$$u_{(1)} = (u_{11}; u_{12}; u_{13}), \ u_{1k} = \widetilde{\gamma}_{kk}^{-1}\varphi_k, \ k = \overline{1,3}, \tag{2.26}$$

где $\widetilde{\gamma}_{kk}^{-1} : (G_+)_{kk} \to M_k \subset F_k$ — ограниченные (и ограниченно обратимые) операторы, $\widetilde{\gamma}_{kk} := \gamma|_{G_{kk}}$.

2.2.2. Вторая вспомогательная задача (*задача Стеклова*). Найти набор элементов

$$u_{(2)} = (u_{21}; u_{22}; u_{23}) \in F = \bigoplus_{k=1}^{3} F_k \tag{2.27}$$

из следующей системы уравнений и краевых условий:

$$\begin{gathered} L_k u_{2k} = 0,\ \gamma_{kk} u_{2k} = 0,\ k = \overline{1,3}, \\ \gamma_{21} u_{21} - \gamma_{12} u_{22} = \widetilde{\varphi}_{21} := \varphi_{21} - \gamma_{21} u_{11} + \gamma_{12} u_{12}, \\ \partial_{21} u_{21} + \partial_{12} u_{22} = 0, \\ \gamma_{32} u_{22} - \gamma_{23} u_{23} = \widetilde{\varphi}_{32} := \varphi_{32} - \gamma_{32} u_{12} + \gamma_{23} u_{13}, \\ \partial_{32} u_{22} + \partial_{23} u_{23} = 0. \end{gathered} \tag{2.28}$$

Здесь φ_{21} и φ_{32} — заданные элементы, а $u_{11},\ u_{12}$ и u_{13} — компоненты решения $u_{(1)}$ первой вспомогательной задачи (2.16)–(2.18).

Представим последнюю группу условий на стыках в виде

$$\partial_{21} u_{21} = -\partial_{12} u_{22} =: \chi_{21},\ \partial_{32} u_{22} = -\partial_{23} u_{23} =: \chi_{32}.$$

Если элементы χ_{21} и χ_{32} известны, то для нахождения $u_{2k},\ k = \overline{1,3}$, возникают три задачи вида (2.21):

$$L_1 u_{21} = 0,\ \gamma_{11} u_{21} = 0;\ \partial_{21} u_{21} = \chi_{21}; \tag{2.29}$$

$$L_2 u_{22} = 0,\ \gamma_{22} u_{22} = 0;\ \partial_{12} u_{22} = -\chi_{21},\ \partial_{32} u_{22} = \chi_{32}; \tag{2.30}$$

$$L_3 u_{23} = 0,\ \gamma_{33} u_{23} = 0;\ \partial_{23} u_{23} = -\chi_{32}. \tag{2.31}$$

Определим, как и в (2.23), слабое решение задачи (2.29) посредством тождества

$$(\eta_1, u_{21})_{F_1} = \langle \gamma_{21} \eta_1, \chi_{21} \rangle_{G_{21}}\ \forall \eta_1 \in F_{0,G_{11}}. \tag{2.32}$$

Если $\chi_{21} \in (G_+)^*_{21}$, то существует единственное слабое решение

$$u_{21} =: V_{21} \chi_{21} \in M_{0,G_{11}} \subset M_1 \subset F_1, \tag{2.33}$$

где $V_{21} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{21},\ M_{0,G_{11}})$, т. е. является линейным ограниченным оператором, действующим из $(G_+)^*_{21}$ в $M_{0,G_{11}}$. Заметим еще, что если $\chi_{21} \in G_{21}$ (см. (2.5), (2.6)), то задача (2.29) имеет единственное обобщенное решение.

Аналогичным образом, представляя решение задачи (2.30) в виде суммы двух слагаемых, которые определяются элементами $-\chi_{21}$ и χ_{32}, используя формулу Грина (2.8) и определяя для этих слагаемых слабые решения посредством тождеств вида (2.32), приходим к выводу, что при условиях

$$\chi_{21} \in (G_+)^*_{21},\ \chi_{32} \in (G_+)^*_{32}$$

задача (2.30) имеет единственное слабое решение, выражаемое формулой

$$u_{22} = V_{12}(-\chi_{21}) + V_{32}(\chi_{32}), \tag{2.34}$$

$$V_{12} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{21},\ M_{0,G_{22}}),\ V_{32} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{32},\ M_{0,G_{22}}),$$

$$M_{0,G_{22}} = F_{0,G_{22}} \cap M_2,\quad F_{0,G_{22}} = \{\eta_2 \in F_2 : \gamma_{22} \eta_2 = 0\}. \tag{2.35}$$

Если $\chi_{21} \in G_{21},\ \chi_{32} \in G_{32}$ (см. (2.5)), то задача (2.30) имеет единственное обобщенное решение, также выражаемое формулой (2.34).

Наконец, при условии $\chi_{32} \in (G_+)^*_{32}$ задача (2.31), аналогично задаче (2.29), имеет единственное слабое решение

$$u_{23} = V_{23}(-\chi_{32}),\ V_{23} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{32},\ M_{0,G_{33}}), \tag{2.36}$$

а при $\chi_{32} \in G_{32}$ формула (2.36) дает ее обобщенное решение.

Имея представления (2.33), (2.34) и (2.36) для слабых решений вспомогательных задач (2.29)–(2.31) и опираясь на первую группу граничных условий на стыке в (2.28), получим следующие уравнения для нахождения неизвестных до сих пор элементов χ_{21} и χ_{32}:

$$\begin{gathered} \gamma_{21} V_{21} \chi_{21} - \gamma_{12}(V_{12}(-\chi_{21}) + V_{32}\chi_{32}) = \widetilde{\varphi}_{21}, \\ \gamma_{32}(V_{12}(-\chi_{21}) + V_{32}\chi_{32}) - \gamma_{23}(-V_{23}\chi_{32}) = \widetilde{\varphi}_{32}. \end{gathered} \tag{2.37}$$

Перепишем эту систему в виде:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{21} \\ \chi_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_{21} \\ \widetilde{\varphi}_{32} \end{pmatrix}, \tag{2.38}$$

$$\begin{gathered} C_{11} := \gamma_{21} V_{21} + \gamma_{12} V_{12} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{21}, (G_+)_{21}), \\ C_{12} := -\gamma_{12} V_{32} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{32}, (G_+)_{21}), \\ C_{21} := -\gamma_{32} V_{12} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{21}, (G_+)_{32}), \\ C_{22} := \gamma_{32} V_{32} + \gamma_{23} V_{23} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{32}, (G_+)_{32}) \end{gathered} \tag{2.39}$$

и будем рассматривать (2.38) как отображение

$$C\chi = \widetilde{\varphi}, \quad C := (C_{jk})^2_{j,k=1}, \tag{2.40}$$

$$\widetilde{\varphi} := (\widetilde{\varphi}_{21}; \widetilde{\varphi}_{32})^\tau \in (G_+)_{21} (\dot{+}) (G_+)_{32};$$

$$\chi := (\chi_{21}; \chi_{32})^\tau \in (G_+)^*_{21} (\dot{+}) (G_+)^*_{32}.$$

Назовем операторную матрицу C *матрицей Стеклова*; в задаче (2.28) она переводит данные Неймана в данные Дирихле.

Опираясь на свойства операторов $\gamma_{jk} = \rho_{jk}\gamma_k$, V_{jk}, а также слабых и обобщенных решений вспомогательных задач (2.29)–(2.31), изучим общие свойства оператора Стеклова из (2.40), (2.39).

Лемма 2.1. *Операторы* $\gamma_{jk} : F_k \to G_{jk}$ *и* $V_{jk} : (G_{jk})^* \to M_{0,G_{kk}} \subset F_k$ *взаимно сопряжены.*

Доказательство. Проверим сначала, что γ_{21} и V_{21} взаимно сопряжены. С этой целью подставим представление (2.33) для слабого решения вспомогательной задачи (2.29) в тождество (2.32); будем иметь соотношение

$$(\eta_1, V_{21}\chi_{21})_{F_1} = \langle \gamma_{21}\eta_1, \chi_{21} \rangle_{G_{21}} \ \forall \eta_1 \in F_{0,G_{11}} \ \forall \chi_{21} \in (G_+)^*_{21}. \tag{2.41}$$

Аналогично проверяется, исходя из тождества

$$(\eta_3, u_{23})_{F_3} = \langle \gamma_{23}\eta_3, (-\chi_{32}) \rangle_{G_{32}} \ \forall \eta_3 \in F_{0,G_{33}} \ \forall \chi_{32} \in (G_+)^*_{32}, \tag{2.42}$$

а также представления (2.36) для u_{23}, что γ_{23} и V_{23} тоже взаимно сопряжены. Наконец, свойства взаимной сопряженности γ_{12} и V_{12}, а также γ_{32} и V_{32}, следуют из тождеств

$$(\eta_2, v_{22})_{F_2} = \langle \gamma_{12}\eta_2, (-\chi_{21}) \rangle_{G_{21}} \ \forall \eta_2 \in F_{0,G_{22}} \ \forall \chi_{21} \in (G_+)^*_{21}, \tag{2.43}$$

$$(\eta_2, w_{22})_{F_2} = \langle \gamma_{32}\eta_2, \chi_{32} \rangle_{G_{32}} \ \forall \eta_2 \in F_{0,G_{22}} \ \forall \chi_{32} \in (G_+)^*_{32}, \tag{2.44}$$

а также соотношений (см. (2.34))

$$v_{22} = V_{12}(-\chi_{21}), \ w_{22} = V_{32}\chi_{32}, \ u_{22} = v_{22} + w_{22}, \tag{2.45}$$

которые выполнены для слабых решений задачи (2.30). □

Лемма 2.2. *Оператор* C *из* (2.39), (2.40),

$$C : (G_+)^*_{21} (\dot{+}) (G_+)^*_{32} \to (G_+)_{21} (\dot{+}) (G_+)_{32},$$

является положительным оператором:

$$\langle C\chi, \chi \rangle = \sum_{k=1}^{3} \|u_{2k}\|^2_{F_k}, \tag{2.46}$$

где u_{2k}, $k = \overline{1,3}$, *— слабые решения вспомогательных задач* (2.29)–(2.31).

Доказательство. Оно основано на тождествах (2.32), (2.43), (2.44), представлениях (2.33), (2.36), (2.45) и свойствах взаимной сопряженности операторов γ_{jk} и V_{jk}. Имеем

$$\begin{gathered} \langle C\chi, \chi \rangle = \langle C_{11}\chi_{21}, \chi_{21} \rangle_{G_{21}} + \langle C_{12}\chi_{32}, \chi_{21} \rangle_{G_{21}} + \langle C_{21}\chi_{21}, \chi_{32} \rangle_{G_{32}} + \\ + \langle C_{22}\chi_{32}, \chi_{32} \rangle_{G_{32}} = \langle \gamma_{21} V_{21}\chi_{21}, \chi_{21} \rangle_{G_{21}} + \{ -\langle \gamma_{12}(V_{32}\chi_{32} + V_{12}(-\chi_{21})), \chi_{21} \rangle_{G_{21}} + \\ + \langle \gamma_{32}(V_{32}\chi_{32} + V_{12}(-\chi_{21})), \chi_{32} \rangle_{G_{32}} \} + \langle \gamma_{23} V_{23}(-\chi_{32}), (-\chi_{32}) \rangle_{G_{32}} = \\ = \|V_{21}\chi_{21}\|^2_{F_1} + \|V_{32}\chi_{32} + V_{12}(-\chi_{21})\|^2_{F_2} + \|V_{23}(-\chi_{32})\|^2_{F_3} = \sum_{k=1}^{3} \|u_{2k}\|^2_{F_k}. \end{gathered}$$

□

Из тождества (2.46), а также из (2.5), (2.6), получаем, что существует обратный оператор C^{-1}, действующий из $(G_+)_{21}(\dot{+})(G_+)_{32}$ на $(G_+)^*_{21}(\dot{+})(G_+)^*_{32}$, тогда этот оператор по теореме Банаха ограничен. Поэтому задача (2.40) имеет единственное решение

$$\chi = (\chi_{21}; \chi_{32})^\tau = C^{-1}\widetilde{\varphi} = C^{-1}(\widetilde{\varphi}_{21}; \widetilde{\varphi}_{32})^\tau.$$

Итогом проведенных рассмотрений является такой вывод.

Теорема 2.2. *Задача Стеклова* (2.27) *имеет единственное слабое решение*

$$u_{(2)} = (u_{21}; u_{22}; u_{23})^\tau \in \bigoplus_{k=1}^{3} M_{0,G_{kk}} \subset \bigoplus_{k=1}^{3} F_k,\ k = \overline{1,3},$$

тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.25)*, а также условия*

$$\varphi_{21} \in (G_+)_{21}, \quad \varphi_{32} \in (G_+)_{32}. \tag{2.47}$$

При этом имеет место следующее представление для ее решения:

$$u_{(2)} = (u_{21}; u_{22}; u_{23})^\tau = (V_{21}\chi_{21}; V_{32}\chi_{32} - V_{12}\chi_{21}; -V_{32}\chi_{32})^\tau, \tag{2.48}$$

$$\chi = (\chi_{21}; \chi_{32})^\tau = C^{-1}(\varphi_{21} - \gamma_{21}\widetilde{\gamma}_{11}^{-1}\varphi_1 + \gamma_{12}\widetilde{\gamma}_{22}^{-1}\varphi_2;\ \varphi_{32} - \gamma_{32}\widetilde{\gamma}_{22}^{-1}\varphi_2 + \gamma_{23}\widetilde{\gamma}_{33}^{-1}\varphi_3)^\tau.$$

Здесь операторы V_{jk} введены в (2.33), (2.34), (2.36)*, операторы $\widetilde{\gamma}_{kk}^{-1}$ — в* (2.26)*, операторная матрица C задана формулами* (2.40), (2.39)*, а γ_{jk} — оператор следа из F_k на $(G_+)_{jk}$* (*см.* (2.5)*,* (2.6)).

2.2.3. Первая вспомогательная задача Крейна. Такое название происходит от подхода, примененного С. Крейном при исследовании проблемы колебаний тяжелой вязкой жидкости в открытом сосуде (см. [19, 20], а также [16, гл. 6]).

Эта задача в исследуемой проблеме состоит в нахождении набора элементов

$$u_{(3)} = (u_{31}; u_{32}; u_{33})^\tau \in \bigoplus_{k=1}^{3} F_k,$$

которые являются решением следующей системы уравнений и краевых условий:

$$\begin{array}{ll} L_k u_{3k} = f_k, & \gamma_{kk} u_{3k} = 0,\ k = \overline{1,3}, \\ \gamma_{21}u_{31} - \gamma_{12}u_{32} = 0, & \partial_{21}u_{31} + \partial_{12}u_{32} = 0, \\ \gamma_{32}u_{32} - \gamma_{23}u_{33} = 0, & \partial_{32}u_{32} + \partial_{23}u_{33} = 0. \end{array} \tag{2.49}$$

Здесь все граничные условия однородные, а уравнения неоднородные.

Для исследования проблемы (2.49) введем в рассмотрение подпространство, отвечающее «главным» краевым условиям:

$$W_{0,\gamma} := \{u = (u_1; u_2; u_3)^\tau \in \bigoplus_{k=1}^{3} F_k : \gamma_{kk}u_k = 0,\ k = \overline{1,3};$$

$$\gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = 0,\ \gamma_{32}u_2 - \gamma_{23}u_3 = 0\} \subset \bigoplus_{k=1}^{3} F_{0,G_{kk}} \subset \bigoplus_{k=1}^{3} F_k. \tag{2.50}$$

Для элементов $\eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3)^\tau$ и $u = (u_1; u_2; u_3)^\tau$ из $W_{0,\gamma}$ в силу тождеств (2.7)-(2.8) получаем следующую формулу Грина

$$\sum_{k=1}^{3}(\eta_k, u_k)_{F_k} = \sum_{k=1}^{3}\langle \eta_k, L_k u_k\rangle_{E_k} + \langle \gamma_{21}\eta_1, \partial_{21}u_1 + \partial_{12}u_2\rangle_{G_{21}} + \langle \gamma_{32}\eta_2, \partial_{32}u_2 + \partial_{23}u_3\rangle_{G_{32}}. \tag{2.51}$$

На ее основе определим слабое решение задачи (2.51) как такой элемент $u_{(3)} = (u_{31}; u_{32}; u_{33})^\tau$ из $W_{0,\gamma}$, для которого имеет место тождество

$$\sum_{k=1}^{3}(\eta_k, u_{3k})_{F_k} = \sum_{k=1}^{3}\langle \eta_k, f_k\rangle_{E_k}\ \forall \eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3)^\tau \in W_{0,\gamma}. \tag{2.52}$$

Теорема 2.3. *Первая вспомогательная задача Крейна* (2.49) *имеет единственное слабое решение* $u_{(3)} \in W_{0,\gamma}$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$f := (f_1; f_2; f_3)^\tau \in (W_{0,\gamma})^*. \tag{2.53}$$

В этом случае решение выражается формулой

$$u_{(3)} = A^{-1} f, \tag{2.54}$$

где A — *оператор гильбертовой пары* $(W_{0,\gamma}; E)$, $E := \bigoplus_{k=1}^3 E_k$.

В частности, если

$$f := (f_1; f_2; f_3)^\tau \in E := \bigoplus_{k=1}^3 E_k, \tag{2.55}$$

то задача (2.49) *имеет единственное обобщенное решение, выражаемое той же формулой* (2.54).

Доказательство. Перепишем коротко тождество (2.52) в виде

$$(\eta, u_{(3)})_F = \langle \eta, f \rangle_E \ \forall \eta \in W_{0,\gamma}. \tag{2.56}$$

Заметим теперь, что $W_{0,\gamma}$ плотно вложено в $E := \bigoplus_{k=1}^3 E_k$, так как

$$N := \bigoplus_{k=1}^3 N_k \subset W_{0,\gamma} \subset F = \bigoplus_{k=1}^3 F_k,$$

а N_k и F_k плотно вложены в E_k (см. свойства 1° и 3° из пункта 1.1). Поэтому $W_{0,\gamma}$ и E образуют гильбертову пару пространств.

Отсюда следует, что правая часть в (2.56) является линейным ограниченным функционалом в $W_{0,\gamma}$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.53). Поэтому по теореме Рисса получаем, что существует единственный элемент $u_{(3)} \in W_{0,\gamma}$, для которого выполнено тождество (2.56).

Пусть A — оператор гильбертовой пары $(W_{0,\gamma}; E)$. Тогда из (2.56) и определения оператора этой пары имеем

$$(\eta, u_{(3)})_F = \langle \eta, A u_{(3)} \rangle_E = \langle \eta, f \rangle_E \ \forall \eta \in W_{0,\gamma}.$$

Отсюда и следует представление (2.54). Если же $f \in E$ (см. (2.55)), то можно считать, что оператор A задан на области определения $\mathcal{D}(A) \subset W_{0,\gamma} = \mathcal{D}(A^{1/2}) \subset E$ и имеет область значений $\mathcal{R}(A) = E$. В этом случае $\langle \eta, f \rangle_E = (\eta, f)_E$, и $u_{(3)} = A^{-1} f \in \mathcal{D}(A)$ — обобщенное решение задачи (2.49). □

2.2.4. Вторая вспомогательная задача Крейна. Эта проблема является аналогом неоднородной задачи Неймана для уравнения Лапласа, в то время как первая вспомогательная задача Крейна — аналог однородной задачи Неймана для уравнения Пуассона.

Требуется найти такой набор элементов

$$u_{(4)} = (u_{41}; u_{42}; u_{43})^\tau \in W_{0,\gamma},$$

которые являются решением следующей системы уравнений и граничных условий:

$$\begin{array}{ll} L_1 u_{41} = 0, & \gamma_{11} u_{41} = 0, \\ L_2 u_{42} = 0, & \gamma_{22} u_{42} = 0, \\ L_3 u_{43} = 0, & \gamma_{33} u_{43} = 0, \\ \gamma_{21} u_{41} - \gamma_{12} u_{42} = 0, & \partial_{21} u_{41} + \partial_{12} u_{42} = \psi_{21}, \\ \gamma_{32} u_{42} - \gamma_{23} u_{43} = 0, & \partial_{32} u_{42} + \partial_{23} u_{43} = \psi_{32}. \end{array} \tag{2.57}$$

Здесь неоднородными являются лишь граничные условия типа Неймана.

Из формулы Грина (2.51) получаем определение слабого решения задачи (2.57): это такой элемент $u_{(4)} \in W_{0,\gamma}$, для которого выполнено тождество

$$(\eta, u_{(4)})_F = \sum_{k=1}^3 (\eta_k, u_{4k})_{F_k} = \langle \gamma_{21} \eta_1, \psi_{21} \rangle_{G_{21}} + \langle \gamma_{32} \eta_2, \psi_{32} \rangle_{G_{32}} \ \forall \eta \in W_{0,\gamma}. \tag{2.58}$$

Теорема 2.4. *Вторая вспомогательная задача Крейна* (2.57) *имеет единственное слабое решение* $u_{(4)} \in W_{0,\gamma}$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\psi_{21} \in (G_+)^*_{21}, \ \psi_{32} \in (G_+)^*_{32}. \tag{2.59}$$

Это решение имеет вид

$$u_{(4)} = B_{21}\psi_{21} + B_{32}\psi_{32}, \tag{2.60}$$

$$B_{21} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{21}; M_{0,\gamma}), \ B_{32} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{32}; M_{0,\gamma}), \tag{2.61}$$

$$M_{0,\gamma} = W_{0,\gamma} \cap M_0, \ M_0 := \bigoplus_{k=1}^{3} M_{0,G_{kk}}.$$

(*Определение подпространств* $M_{0,G_{kk}}$ *см. в* (2.24), (2.35).)

Доказательство. Оно проводится по схеме доказательства существования слабого решения задачи (2.30) и основано на том, что правая часть в (2.58) является суммой линейных ограниченных функционалов в $W_{0,\gamma}$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.59). Поэтому слабое решение задачи (2.57) представляется в виде суммы двух слагаемых и имеет вид (2.60) со свойствами операторов из (2.61). □

Лемма 2.3. *Операторы* B_{21} *и* B_{32} *из* (2.60), (2.61) *обладают свойствами*

$$\gamma_{21}\rho_1 = \gamma_{12}\rho_2 = (B_{21})^*, \ \gamma_{32}\rho_2 = \gamma_{23}\rho_3 = (B_{32})^*, \tag{2.62}$$

где $\rho_k : F \to F_k, \ k = \overline{1,3},$ — *операторы сужения.*

Доказательство. Свойства $\gamma_{21}\rho_1 = \gamma_{12}\rho_2$ и $\gamma_{32}\rho_2 = \gamma_{23}\rho_3$ следуют из определения (2.50) подпространства $W_{0,\gamma}$, а свойства $\gamma_{21}\rho_1 = (B_{21})^*$ и $\gamma_{32}\rho_2 = (B_{32})^*$ — из определения слабых решений двух слагаемых, сумма которых дает слабое решение задачи (2.57):

$$\begin{gathered} u_{(4)} = v_{(4)} + w_{(4)}, \\ (\eta, v_{(4)})_F = \langle \gamma_{21}\rho_1\eta, \psi_{21}\rangle_{G_{21}}, \quad (\eta, w_{(4)})_F = \langle \gamma_{32}\rho_2\eta, \psi_{32}\rangle_{G_{32}} \ \forall \eta \in W_{0,\gamma}, \\ v_{(4)} = B_{21}\psi_{21}, \ w_{(4)} = B_{32}\psi_{32}. \end{gathered}$$

□

2.2.5. Итоговый результат. Итогом рассмотрения исходной смешанной краевой задачи сопряжения (2.10)–(2.13) является следующее утверждение.

Теорема 2.5. *Пусть выполнены условия* (*см. раздел* 1, *теорема* 1.6), *обеспечивающие существование абстрактных формул Грина* (2.7)–(2.9). *Тогда задача сопряжения* (2.10)–(2.13) *имеет единственное слабое решение в форме* (2.14), (2.15) *в том и только в том случае, когда выполнены условия теорем* 2.1–2.4, *т. е. условия* (2.25), (2.47), (2.53), (2.59). *При этом*

$$u = (u_1; u_2; u_3)^\tau = \sum_{j=1}^{4}(u_{j1}; u_{j2}; u_{j3})^\tau =: \sum_{j=1}^{4} u_{(j)},$$

где $u_{(j)}$ *при* $j = \overline{1,4}$, *даются соответственно формулами* (2.26), (2.48), (2.54) *и* (2.60), *т. е. выражаются через исходные данные с помощью операторов введенных выше абстрактных краевых задач.*

Замечание 2.1. То, что сумма решений четырех вспомогательных краевых задач (Зарембы, Стеклова и двух задач Крейна) действительно дает решение исходной задачи (2.10)–(2.13), легко проверяется непосредственно. Кроме того, можно проверить, опираясь на формулы Грина (2.7)–(2.9), что однородная задача имеет лишь нулевое решение. Отсюда следует единственность представления решения исходной задачи в виде суммы решений упомянутых четырех вспомогательных задач, выражаемых приведенными итоговыми формулами.

3. Некоторые приложения общей схемы исследования краевых задач сопряжения

3.1. Скалярные искомые функции, оператор Лапласа, конфигурация «дважды разрезанный банан». Вернемся к задаче (2.1)–(2.4) (см. рис. 2.1) и применим к ее исследованию общую схему, изложенную во втором разделе. При этом будем использовать обобщенные формулы Грина в форме (1.16), (1.17) (теорема 1.5) либо в форме (1.25), (1.26) (теорема 1.7), а также уточним функциональные пространства, в которых будет происходить рассмотрение вспомогательных краевых задач.

Итак, в составной области, представленной на рис. 2.1, рассмотрим следующую задачу сопряжения:

$$\begin{gathered} u_1 - \triangle u_1 = f_1 \ (\text{в } \Omega_1), \qquad \gamma_{11}u_1 = \varphi_1 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\ u_2 - \triangle u_2 = f_2 \ (\text{в } \Omega_2), \qquad \gamma_{22}u_2 = \varphi_2 \ (\text{на } \Gamma_{22}), \\ u_3 - \triangle u_3 = f_3 \ (\text{в } \Omega_3), \qquad \gamma_{33}u_3 = \varphi_3 \ (\text{на } \Gamma_{33}); \\ \gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = \varphi_{21}, \quad \partial_{21}u_1 + \partial_{12}u_2 = \psi_{21} \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ \gamma_{32}u_2 - \gamma_{23}u_3 = \varphi_{32}, \quad \partial_{32}u_2 + \partial_{23}u_3 = \psi_{32} \ (\text{на } \Gamma_{23} = \Gamma_{32}). \end{gathered} \tag{3.1}$$

Ее решение ищем в виде набора $u = (u_1; u_2; u_3)^\tau$, причем

$$u = (u_1; u_2; u_3)^\tau = \sum_{j=1}^{4} (u_{j1}; u_{j2}; u_{j3})^\tau =: \sum_{j=1}^{4} u_{(j)},$$

где $u_{(j)}$, $j = \overline{1,4}$, — решения четырех вспомогательных задач, которые сейчас будут рассмотрены.

Для $u_{(1)} = (u_{11}; u_{12}; u_{13})^\tau$ имеем задачу Зарембы, которая распадается на три независимые задачи:

$$u_{11} - \triangle u_{11} = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \ \gamma_{11}u_{11} = \varphi_1 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \ \partial_{21}u_{11} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}); \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered} u_{12} - \triangle u_{12} = 0 \ (\text{в } \Omega_2), \ \gamma_{22}u_{12} = \varphi_2 \ (\text{на } \Gamma_{22}), \\ \partial_{12}u_{12} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \ \partial_{32}u_{12} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23}); \end{gathered} \tag{3.3}$$

$$u_{13} - \triangle u_{13} = 0 \ (\text{в } \Omega_3), \ \gamma_{33}u_{13} = \varphi_3 \ (\text{на } \Gamma_{33}), \ \partial_{23}u_{13} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23}). \tag{3.4}$$

Рассматривая первую из них, т. е. задачу (3.2), будем считать, что ее решение $u_{11}(x)$ есть функция из $H_h^1(\Omega_1)$ (см. (1.11), (1.12)). Тогда ее след $\gamma_1 u_{11}(x)$ на $\partial\Omega_1$ есть функция из $H^{1/2}(\partial\Omega_1)$, а на Γ_{11} — след является функцией из $H^{1/2}(\Gamma_{11})$. Таким образом, необходимым условием разрешимости задачи (3.2) является условие

$$\varphi_1 \in H^{1/2}(\Gamma_{11}). \tag{3.5}$$

Покажем, что это условие является и достаточным для существования слабого решения задачи (3.2).

Продолжим функцию φ_1, заданную на Γ_{11}, на всю границу $\partial\Omega_1$ липшицевой области Ω_1. Это можно сделать согласно лемме 1.3, так как по предположению $\partial\Gamma_{11}$ — липшицева граница липшицевой поверхности Γ_{11}. Тогда функция $\widehat{\varphi}_1 := \omega_{11}\varphi_1 \in H^{1/2}(\partial\Omega_1)$, где $\omega_{11} : H^{1/2}(\Gamma_{11}) \to H^{1/2}(\partial\Omega_1)$ — ограниченный оператор продолжения Рычкова. Поскольку между элементами из $H_h^1(\Omega_1)$ и $H^{1/2}(\partial\Omega_1)$ имеет место взаимно однозначное соответствие (и даже изометрия при соответствующем выборе эквивалентной нормы в $H^{1/2}(\partial\Omega_1)$), то существует единственный элемент

$$v_{11} = \widehat{\gamma}_1^{-1}\omega_{11}\varphi_1 \in H_h^1(\Omega_1), \tag{3.6}$$

который является решением задачи

$$v_{11} - \Delta v_{11} = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \ \ \gamma_1 v_{11} = \omega_{11}\varphi_1 \ (\text{на } \partial\Omega_1). \tag{3.7}$$

Для функции $w_{11} := u_{11} - v_{11}$ из (3.2), (3.7) возникает задача Неймана

$$\begin{gathered} w_{11} - \Delta w_{11} = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \ \ \gamma_{11}w_{11} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\ \partial_{21}w_{11} = -\partial_{21}v_{11} \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}). \end{gathered} \tag{3.8}$$

Ее слабое решение естественно рассматривать в пространстве

$$H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) := \{u_1 \in H^1(\Omega_1) : \gamma_{11}u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11})\}. \tag{3.9}$$

Из условия на Γ_{11} в (3.8) следует, что $\gamma_{21}w_{11} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21})$ (см. пункт 1.3), и тогда по лемме 1.2 получаем, что в задаче (3.8) должно быть выполнено необходимое условие

$$\partial_{21}v_{11} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}). \tag{3.10}$$

Покажем, что это условие является и достаточным для существования слабого решения задачи (3.8), причем оно действительно имеет место.

Воспользуемся формулой Грина

$$(\eta_1,\ w_{11})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \eta_1,\ w_{11} - \triangle w_{11}\rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle \gamma_{21}\eta_1,\ \partial_{21}w_{11}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})}, \tag{3.11}$$

$$\gamma_{21}\eta_1 \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21}),\ \partial_{21}w_{11} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21})\ \forall \eta_1,\ w_{11} \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1), \tag{3.12}$$

которая следует из формулы (1.16) (теорема 1.5). На ее основе естественно определяется слабое решение $w_{11} \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap H^1_h(\Omega_1)$ задачи (3.8) как такая функция, для которой выполнено тождество

$$(\eta_1,\ w_{11})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \gamma_{21}\eta_1,\ (-\partial_{21}v_{11})\rangle_{L_2(\Gamma_{21})}\ \forall \eta_1 \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1). \tag{3.13}$$

Здесь в силу (3.10) и леммы 1.2 правая часть является линейным ограниченным функционалом в $H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1)$. Поэтому при любом $\varphi_1 \in H^{1/2}(\Gamma_{11})$ существует единственная функция $w_{11} \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap H^1_h(\Omega_1)$, являющаяся слабым решением задачи (3.8):

$$w_{11} =: V_{21}(-\partial_{21}v_{11}) = -V_{21}\partial_{21}\widehat{\gamma}_1^{-1}\omega_{11}\varphi_1,$$

где $V_{21} : H^{-1/2}(\Gamma_{21}) \to H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap H^1_h(\Omega_1)$ — ограниченный оператор.

Окончательно приходим к выводу, что условие (3.5) является необходимым и достаточным условием существования слабого решения $u_{11} \in H^1_h(\Omega_1)$, и это решение выражается формулой

$$u_{11} = v_{11} + w_{11} = \widehat{\gamma}_1^{-1}\omega_{11}\varphi_1 - V_{21}\partial_{21}\widehat{\gamma}_1^{-1}\omega_{11}\varphi_1 =: \widehat{\gamma}_{11}^{-1}\varphi_1, \tag{3.14}$$

где $\widehat{\gamma}_{11}^{-1} : H^{1/2}(\Gamma_{11}) \to H^1_h(\Omega_1)$ — ограниченный оператор.

Аналогично рассматриваются задачи (3.3) и (3.4), и итогом рассмотрения является следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Каждая из задач Зарембы* (3.2)–(3.4) *имеет единственное слабое решение* $u_{1k} \in H^1_{0,\Gamma_{kk}}(\Omega_k) \cap H^1_h(\Omega_k)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_{kk}),\ k = \overline{1,3}, \tag{3.15}$$

и это решение выражается формулой (*см.* (3.14))

$$u_{1k} = \widehat{\gamma}_{kk}^{-1}\varphi_k,\ \widehat{\gamma}_{kk}^{-1} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_{kk});\ H^1_h(\Omega_k)),\ k = \overline{1,3}. \tag{3.16}$$

Перейдем теперь ко второму этапу — рассмотрению задачи Стеклова применительно к проблеме (3.1). Как следует из абстрактной постановки этой задачи (см. (2.27), (2.28)), необходимо исследовать проблему нахождения набора $u_{(2)} = (u_{21}; u_{22}; u_{23})^\tau$ из следующих уравнений и краевых условий:

$$\begin{array}{ll} u_{21} - \triangle u_{21} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), & \gamma_{11}u_{21} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \\ u_{22} - \triangle u_{22} = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), & \gamma_{22}u_{22} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{22}), \\ u_{23} - \triangle u_{23} = 0 \quad (\text{в } \Omega_3), & \gamma_{33}u_{23} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{33}), \end{array} \tag{3.17}$$

$$\begin{gathered} \gamma_{21}u_{21} - \gamma_{12}u_{22} = \widetilde{\varphi}_{21} := \varphi_{21} - \gamma_{21}u_{11} + \gamma_{12}u_{12}, \\ \partial_{21}u_{21} = -\partial_{12}u_{22} (=: \chi_{21}) \quad (\text{на } \Gamma_{21} = \Gamma_{12}), \\ \gamma_{32}u_{22} - \gamma_{23}u_{23} = \widetilde{\varphi}_{32} := \varphi_{32} - \gamma_{32}u_{12} + \gamma_{23}u_{13}, \\ \partial_{32}u_{22} = -\partial_{23}u_{23} (=: \chi_{32}) \quad (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23}). \end{gathered} \tag{3.18}$$

Здесь $(u_{11}; u_{12}; u_{13})^\tau = u_{(1)}$ — решение задачи Зарембы (см. (3.2)–(3.4)), а φ_{21} и φ_{32} — заданные функции.

Если функции χ_{21} и χ_{32} известны, то вместо (3.17), (3.18) возникают три распадающиеся задачи Неймана. В частности, для функции u_{21} имеем задачу

$$u_{21} - \Delta u_{21} = 0\ (\text{в } \Omega_1),\ \gamma_{11}u_{21} = 0\ (\text{на } \Gamma_{11}),\ \partial_{21}u_{21} = \chi_{21}\ (\text{на } \Gamma_{21} = \Gamma_{12}),$$

слабое решение которой будем разыскивать в пространстве

$$H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap H^1_h(\Omega_1) =: H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1).$$

Эта задача уже рассмотрена выше (см. (3.8)–(3.13)). Для ее слабой разрешимости необходимо и достаточно (см. (3.10)), чтобы выполнялось условие

$$\chi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}),$$

а тогда решение выражается формулой

$$u_{21} = V_{21}\chi_{21},\ V_{21} \in \mathfrak{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21});\ H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1)). \tag{3.19}$$

Аналогичное рассмотрение двух других задач Неймана, возникающих из проблемы (3.17), (3.18) и основанное на обобщенных формулах Грина

$$(\eta_2,\ u_{22})_{H^1(\Omega_2)} = \langle \eta_2,\ u_{22} - \Delta u_{22}\rangle_{L_2(\Omega_2)} + \langle \gamma_{12}\eta_2,\ \partial_{12}u_{22}\rangle_{L_2(\Gamma_{12})}+$$
$$+\langle \gamma_{32}\eta_2,\ \partial_{32}u_{22}\rangle_{L_2(\Gamma_{32})}\ \forall \eta_2,\ u_{22} \in H^1_{0,\Gamma_{22}}(\Omega_2),$$
$$(\eta_3,\ u_{23})_{H^1(\Omega_3)} = \langle \eta_3,\ u_{23} - \Delta u_{23}\rangle_{L_2(\Omega_3)} + \langle \gamma_{23}\eta_3,\ \partial_{23}u_{23}\rangle_{L_2(\Gamma_{23})}\ \forall \eta_3,\ u_{23} \in H^1_{0,\Gamma_{33}}(\Omega_3),$$

приводит к следующему выводу:

$$\begin{gathered} u_{22} = V_{12}\chi_{21} - V_{32}\chi_{32}, \\ V_{12} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21});\ H^1_{0,\Gamma_{22},h}(\Omega_2)),\ V_{32} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{32});\ H^1_{0,\Gamma_{22},h}(\Omega_2)), \\ u_{23} = -V_{23}\chi_{32},\ V_{23} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{32});\ H^1_{0,\Gamma_{33},h}(\Omega_3)). \end{gathered} \tag{3.20}$$

Имея представления (3.19), (3.20), из главных граничных условий в (3.18) приходим к системе уравнений (см. (2.37), (2.38)):

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{21} \\ \chi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_{21} \\ \widetilde{\varphi}_{32} \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

$$\begin{gathered} C_{11} := \gamma_{21}V_{21} + \gamma_{12}V_{12} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21});\ \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21})), \\ C_{12} := -\gamma_{12}V_{32} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{32});\ \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21})), \\ C_{21} := -\gamma_{32}V_{12} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21});\ \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{32})), \\ C_{22} := \gamma_{32}V_{32} + \gamma_{23}V_{23} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{32});\ \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{32})). \end{gathered} \tag{3.22}$$

Здесь матрица Стеклова

$$C := (C_{jk})^2_{j,k=1} \tag{3.23}$$

отображает $H^{-1/2}(\Gamma_{21})(\dot{+})H^{-1/2}(\Gamma_{32})$ на $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21})(\dot{+})\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{32})$ и является положительным оператором: подсчет, основанный на преобразованиях, описанных в лемме 2.2 и на определениях операторов V_{jk}, аналогичных (2.41)–(2.45) (см. лемму 2.1), приводит к формуле (см. (2.46))

$$\langle C\chi, \chi\rangle = \sum_{k=1}^{3} \|u_{2k}\|^2_{H^1(\Omega_k)}.$$

Отсюда следует, что существует обратный оператор

$$C^{-1} \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21})(\dot{+})\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{32});\ H^{-1/2}(\Gamma_{21})(\dot{+})H^{-1/2}(\Gamma_{32})),$$

и тогда решение задачи (3.21) существует и единственно при

$$\widetilde{\varphi} = (\widetilde{\varphi}_{21}; \widetilde{\varphi}_{32})^\tau \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21})(\dot{+})\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{32}).$$

Теорема 3.2. *Пусть в задаче* (3.17), (3.18) *выполнены условия* (3.15), *а также условия согласования*

$$\begin{gathered} \widetilde{\varphi}_{21} := \varphi_{21} - \gamma_{21}u_{11} + \gamma_{12}u_{12} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21}), \\ \widetilde{\varphi}_{32} := \varphi_{32} - \gamma_{32}u_{12} + \gamma_{23}u_{13} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{32}), \end{gathered} \tag{3.24}$$

где $(u_{11}; u_{12}; u_{13})^\tau$ *— слабое решение вспомогательной задачи Зарембы* (3.2)–(3.4). *Тогда задача Стеклова* (3.17), (3.18) *имеет единственное слабое решение*

$$u_{(2)} = (u_{21}; u_{22}; u_{23})^\tau \in H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1)(\dot{+})H^1_{0,\Gamma_{22},h}(\Omega_2)(\dot{+})H^1_{0,\Gamma_{33},h}(\Omega_3),$$

представимое формулами

$$\begin{gathered} u_{(2)} = (V_{21}\chi_{21};\ V_{32}\chi_{32} - V_{12}\chi_{21}; -V_{32}\chi_{32})^\tau, \\ \chi := (\chi_{21};\ \chi_{32})^\tau = C^{-1}(\widetilde{\varphi}_{21}; \widetilde{\varphi}_{32})^\tau, \end{gathered} \tag{3.25}$$

где операторы V_{jk} введены формулами (*см.* (2.41), (2.43)–(2.45))

$$(\eta_1, V_{21}\chi_{21})_{H^1(\Omega_1)} := \langle \gamma_{21}\eta_1, \chi_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})} \ \forall \eta_1 \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1)\ \forall \chi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}); \tag{3.26}$$

$$(\eta_3, V_{23}\chi_{32})_{H^1(\Omega_3)} := \langle \gamma_{23}\eta_3, \chi_{32}\rangle_{L_2(\Gamma_{32})} \ \forall \eta_3 \in H^1_{0,\Gamma_{33}}(\Omega_3)\ \forall \chi_{32} \in H^{-1/2}(\Gamma_{32});$$

$$(\eta_2, V_{12}\chi_{21})_{H^1(\Omega_2)} := \langle \gamma_{12}\eta_2, \chi_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})}, \quad (\eta_2, V_{32}\chi_{32})_{H^1(\Omega_2)} := \langle \gamma_{32}\eta_2, \chi_{32}\rangle_{L_2(\Gamma_{32})}$$
$$\forall \eta_2 \in H^1_{0,\Gamma_{22}}(\Omega_1)\ \forall \chi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21})\ \forall \chi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}).$$

Соответственно, операторная матрица Стеклова C (*см.* (3.23)) *введена посредством ее элементов* (3.22)*, а операторы γ_{jk} — это операторы следа из $H^1_{0,\Gamma_{kk}}(\Omega_k)$ на $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{jk})$ $(j \neq k)$.*

Третьим этапом, согласно общей схеме раздела 2, является рассмотрение первой вспомогательной задачи Крейна, порожденной проблемой (3.1), (3.2):

$$u_{(3)} = (u_{31}; u_{32}; u_{33})^\tau \in \bigoplus_{k=1}^{3} H^1(\Omega_k) =: H^1(\Omega),$$

$$u_{3k} - \triangle u_{3k} = f_k \ (\text{в } \Omega_k), \quad \gamma_{kk}u_{3k} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{kk}), \ k = \overline{1,3}; \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned} &\gamma_{21}u_{31} - \gamma_{12}u_{32} = 0, \quad \partial_{21}u_{31} + \partial_{12}u_{32} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{21}), \\ &\gamma_{32}u_{32} - \gamma_{23}u_{33} = 0, \quad \partial_{32}u_{32} + \partial_{23}u_{33} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{32}). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Введем в $H^1(\Omega)$ подпространство $H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ наборов элементов $(u_{31}; u_{32}; u_{33})$, для которых выполнены главные (с вариационной точки зрения) краевые условия задачи (3.27), (3.28), т. е.

$$H^1_{0,\Gamma}(\Omega) := \{(u_1; u_2; u_3) \in H^1(\Omega), \ \gamma_{kk}u_k = 0 \ (\text{на } \Gamma_{kk}), \ k = \overline{1,3},$$
$$\gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{21}), \ \gamma_{32}u_2 - \gamma_{23}u_3 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{32})\}.$$

Это подпространство плотно вложено в

$$L_2(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^{3} L_2(\Omega_k),$$

так как оно содержит подпространство

$$H^1_{00,\Gamma}(\Omega) := \{(u_1; u_2; u_3) : \ u_k \in H^1_0(\Omega_k), \ k = \overline{1,3}\},$$

где $H^1_0(\Omega_k)$ плотно вложено в $L_2(\Omega_k)$, $k = \overline{1,3}$. Поэтому $(H^1_{0,\Gamma}(\Omega);\ L_2(\Omega))$ — гильбертова пара пространств.

Для функций $\eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3)^\tau$ и $u_{(3)} = (u_{31}; u_{32}; u_{33})$ из $H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ имеем следующую обобщенную формулу Грина:

$$\sum_{k=1}^{3} (\eta_k, u_{3k})_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{3} \langle \eta_k, u_{3k} - \Delta u_{3k}\rangle_{L_2(\Omega_k)} +$$
$$+ \langle \gamma_{21}\eta_1, \partial_{21}u_{31} + \partial_{12}u_{32}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})} + \langle \gamma_{32}\eta_2, \partial_{32}u_{32} + \partial_{23}u_{23}\rangle_{L_2(\Gamma_{32})}.$$

Отсюда и из (3.27), (3.28) естественно дается определение слабого решения этой задачи: это такой набор $u_{(3)} = (u_{31}; u_{32}; u_{33})^\tau \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$, для которого выполнено тождество

$$\sum_{k=1}^{3} (\eta_k, u_{3k})_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{3} \langle \eta_k, f_k\rangle_{L_2(\Omega_k)} \ \forall u_{(3)} \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega).$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 2.3, приходим к следующему результату.

Теорема 3.3. *Первая вспомогательная задача Крейна* (3.27), (3.28) *имеет единственное слабое решение $u_{(3)} \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$f := (f_1; f_2; f_3)^\tau \in (H^1_{0,\Gamma}(\Omega))^*. \tag{3.29}$$

Это решение выражается формулой

$$u_{(3)} = A^{-1}f, \tag{3.30}$$

где A — оператор гильбертовой пары $(H^1_{0,\Gamma}(\Omega);\ L_2(\Omega))$.

Если, в частности,

$$f := (f_1; f_2; f_3)^\tau \in L_2(\Omega) = \bigoplus_{k=1}^{3} L_2(\Omega_k),$$

то задача (3.27), (3.28) *имеет единственное обобщенное решение*

$$u_{(3)} \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) = H^1_{0,\Gamma}(\Omega),$$

выражаемое той же формулой (3.30).

Рассмотрим, наконец, четвертый этап — вторую вспомогательную задачу Крейна, порожденную проблемой (3.1), (3.2). Здесь для набора функций

$$u_{(4)} = (u_{41}; u_{42}; u_{43})^\tau \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$$

следует рассмотреть следующую задачу:

$$u_{4k} - \triangle u_{4k} = 0 \ (\text{в } \Omega_k), \ \ \gamma_{kk} u_{4k} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{kk}), \ k = \overline{1,3}; \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{21}u_{41} - \gamma_{12}u_{42} = 0, \quad \partial_{21}u_{41} + \partial_{12}u_{42} = \psi_{21} \ (\text{на } \Gamma_{21} = \Gamma_{12}), \\ \gamma_{32}u_{42} - \gamma_{23}u_{43} = 0, \quad \partial_{32}u_{42} + \partial_{23}u_{43} = \psi_{32} \ (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23}). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Согласно условиям (3.31) для решений из $H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ имеем свойства

$$\gamma_{21}u_{41} = \gamma_{12}u_{42} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21}), \ \gamma_{32}u_{42} = \gamma_{23}u_{43} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{32}),$$

а потому необходимые условия разрешимости задачи (3.31), (3.32) таковы:

$$\psi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}), \ \psi_{32} \in H^{-1/2}(\Gamma_{32}). \tag{3.33}$$

При этом слабое решение определяется из тождества

$$\sum_{k=1}^{3} (\eta_k, u_{4k})_{H^1(\Omega_k)} = \langle \gamma_{21}\eta_1, \psi_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})} + \langle \gamma_{32}\eta_2, \psi_{32}\rangle_{L_2(\Gamma_{32})},$$

$$\forall \eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3)^\tau \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega).$$

Теорема 3.4. *Вторая вспомогательная задача Крейна* (3.31)-(3.32) *имеет единственное слабое решение* $u_{(4)} \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (3.33). *Это решение имеет вид*

$$u_{(4)} = B_{21}\psi_{21} + B_{32}\psi_{32}, \tag{3.34}$$

$$B_{21} \in \mathfrak{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21}); \ H^1_{0,\Gamma,h}(\Omega)), \ B_{32} \in \mathfrak{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{32}); \ H^1_{0,\Gamma,h}(\Omega)), \tag{3.35}$$

$$H^1_{0,\Gamma,h}(\Omega) := H^1_{0,\Gamma}(\Omega) \cap H^1_h(\Omega), \ H^1_h(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^{3} H^1_h(\Omega_k). \tag{3.36}$$

При этом операторы B_{21} *и* B_{32} *обладают свойствами* (*см.* (2.62))

$$\gamma_{21}\rho_1 = \gamma_{12}\rho_2 = (B_{21})^*, \ \gamma_{32}\rho_2 = \gamma_{23}\rho_3 = (B_{32})^*, \tag{3.37}$$

где $\rho_k\eta = \rho_k(\eta_1; \eta_2; \eta_3) := \eta_k, \ k = \overline{1,3},$ — *операторы сужения.*

Доказательство. Оно проводится по схеме доказательства теоремы 2.4 и леммы 2.3. □

Подводя итог рассмотрения четырех вспомогательных задач, порожденных исходной задачей сопряжения (3.1), приходим к следующему выводу.

Теорема 3.5. *Пусть области* Ω_k ($k = \overline{1,3}$) *из* $\mathbb{R}^m$ *имеют липшицевы границы* $\partial\Omega_k$, *разбитые на липшицевы куски* Γ_{jk}, *и примыкают друг к другу, как это показано на рис.* 2.1 (*конфигурация — «дважды разрезанный банан»*). *Пусть, кроме того, выполнены условия существования решений четырех вспомогательных задач* (*см. задачи* (3.2)–(3.4), (3.17)-(3.18), (3.27)-(3.28), (3.31)-(3.32)), *т. е. условия* (3.15), (3.24), (3.29), (3.33). *Тогда задача сопряжения* (3.1) *имеет единственное слабое решение*

$$u = (u_1; u_2; u_3)^\tau = \sum_{j=1}^{4} (u_{j1}; u_{j2}; u_{j3})^\tau =: \sum_{j=1}^{4} u_{(j)} \in H^1(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^{3} H^1(\Omega_k),$$

где слагаемые $u_{(j)}$ *при* $j = \overline{1,4}$*, представлены соответственно формулами* (3.14)*,* (3.16); (3.25)*,* (3.26); (3.30); (3.34)–(3.36).

Замечание 3.1. Если, в частности, в задаче (3.1) граничные условия Дирихле на внешних границах Γ_{kk}, $k = \overline{1,3}$, однородные, т. е. на них выполнены условия

$$\gamma_{kk} u_k = 0 \text{ (на } \Gamma_{kk}), \ k = \overline{1,3},$$

то решение задачи Зарембы нулевое, т. е. $u_{(1)} = 0$. В этом случае вместо условий согласования заданных граничных функций (3.24) имеем лишь естественные необходимые и достаточные условия

$$\varphi_{21} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21}), \ \varphi_{32} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{32}).$$

Замечание 3.2. Если конфигурация примыкающих друг к другу липшицевых областей будет представлять собой не «дважды разрезанный банан», как это показано на рис. 2.1, а аналогичную фигуру, разрезанную n раз, то приведенный в данном разделе подход примени́м и в этом случае. Отличием является лишь тот факт, что матрица Стеклова во второй вспомогательной задаче будет задана как оператор, действующий из прямой суммы не двух, а n экземпляров пространств функционалов, заданных на границах стыка (производных по нормали от решений на этих границах), в прямую сумму n экземпляров следов решений на границах стыка. При этом все общие свойства решений всех четырех вспомогательных задач и соответствующие утверждения об их разрешимости сохраняются.

3.2. Другой пример конфигурации пристыкованных областей. Рассмотрим теперь кратко задачу, в математическом отношении более простую, чем разобранная выше задача сопряжения (3.1).

Будем считать, что область $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 3)$ с внешней липшицевой границей Γ_{11} содержит внутри себя две области Ω_2 и Ω_3 с липшицевыми границами $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$ и $\Gamma_{13} = \Gamma_{31}$, находящимися друг от друга и от Γ_{11} на положительном расстоянии (см. рис. 3.1).

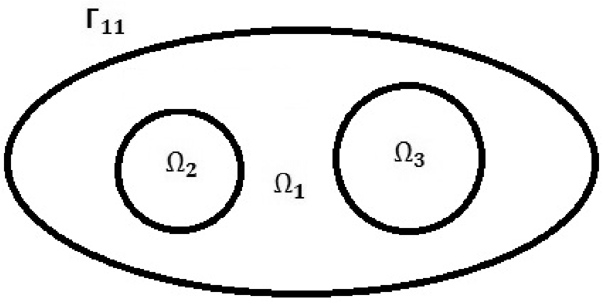

Рис. 3.1

В этой составной области рассмотрим задачу сопряжения снова на основе дифференциального выражения для оператора Лапласа, хотя аналогичные общие построения можно провести и на основе равномерно эллиптического дифференциального выражения, а также для соответствующих дифференциальных выражений, возникающих для векторных полей в теории упругости, гидродинамики и в других проблемах математической физики.

Итак, для искомых функций $u_1(x)$, $u_2(x)$ и $u_3(x)$ имеем следующую задачу сопряжения:

$$u_1 - \triangle u_1 = f_1 \text{ (в } \Omega_1), \ \ \gamma_{11} u_1 = \varphi_1 \text{ (на } \Gamma_{11}), \tag{3.38}$$

$$u_2 - \triangle u_2 = f_2 \text{ (в } \Omega_2), \ \ u_3 - \triangle u_3 = f_3 \text{ (в } \Omega_3), \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{21} u_1 - \gamma_{12} u_2 = \varphi_{21}, \quad \partial_{21} u_1 + \partial_{12} u_2 = \psi_{21} \text{ (на } \Gamma_{21}), \\ \gamma_{31} u_1 - \gamma_{13} u_3 = \varphi_{31}, \quad \partial_{31} u_1 + \partial_{13} u_3 = \psi_{31} \text{ (на } \Gamma_{31}). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Как и ранее, будем разыскивать слабое решение в виде

$$u = (u_1; u_2; u_3)^\tau = \sum_{j=1}^{4} u_{(j)} = \sum_{j=1}^{4} (u_{j1}; u_{j2}; u_{j3})^\tau \subset H^1(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^{3} H^1(\Omega_k). \tag{3.41}$$

Здесь на первом этапе в проблеме Зарембы возникает краевая задача лишь для функции u_{11}, и формально можно считать, что $u_{12} = 0$, $u_{13} = 0$. Имеем задачу

$$\begin{gathered} u_{11} - \triangle u_{11} = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \quad \gamma_{11} u_{11} = \varphi_1 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\ \partial_{21} u_{11} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \qquad \partial_{31} u_{11} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{31}). \end{gathered}$$

Как и при рассмотрении задачи (3.2), приходим к выводу, что условие

$$\varphi_1 \in H^{1/2}(\Gamma_{11}) \tag{3.42}$$

является необходимым и достаточным для существования слабого решения $u_{11} \in H_h^1(\Omega_1)$, и оно выражается формулой (см. (3.14))

$$u_{11} = \widehat{\gamma}_{11}^{-1} \varphi_1, \ \ \widehat{\gamma}_{11}^{-1} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_{11});\ H_h^1(\Omega_1)). \tag{3.43}$$

На втором этапе, т. е. для вспомогательной задачи Стеклова, возникает проблема

$$\begin{array}{ll} u_{21} - \triangle u_{21} = 0 \ (\text{в } \Omega_1), & \gamma_{11} u_{21} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\ u_{22} - \triangle u_{22} = 0 \ (\text{в } \Omega_2), & u_{23} - \triangle u_{23} = 0 \ (\text{в } \Omega_3), \\ \gamma_{21} u_{21} - \gamma_{12} u_{22} = \widetilde{\varphi}_{21} := \varphi_{21} - \gamma_{21} u_{11}, & \partial_{21} u_{21} = -\partial_{12} u_{22} (=: \chi_{21}) \ (\text{на } \Gamma_{21} = \Gamma_{12}), \\ \gamma_{31} u_{21} - \gamma_{13} u_{23} = \widetilde{\varphi}_{31} := \varphi_{31} - \gamma_{31} u_{11}, & \partial_{31} u_{21} = -\partial_{13} u_{23} (=: \chi_{31}) \ (\text{на } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{array} \tag{3.44}$$

Упрощающей особенностью задачи (3.38)–(3.40) является тот факт, что здесь, как и в (1.4), имеют место свойства

$$(H^{1/2}(\Gamma_{11}))^* = H^{-1/2}(\Gamma_{11}),\ (H^{1/2}(\Gamma_{21}))^* = H^{-1/2}(\Gamma_{21}),\ (H^{1/2}(\Gamma_{31}))^* = H^{-1/2}(\Gamma_{31}).$$

Поэтому, используя соответствующие формулы Грина вида (1.8), (1.9) для областей $\Omega_k,\ k = \overline{1,3}$, а также общие рассуждения для задачи Стеклова, приходим к выводу, что

$$u_{21} = V_{21}\chi_{21} + V_{31}\chi_{31},\ u_{22} = -V_{12}\chi_{21},\ u_{23} = -V_{13}\chi_{31}, \tag{3.45}$$

$$\begin{gathered} V_{21} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21});\ H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1)),\ V_{31} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{31});\ H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1)), \\ V_{12} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21});\ H^1_h(\Omega_2)),\ V_{13} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{31});\ H^1_h(\Omega_3)). \end{gathered}$$

Соответствующая операторная матрица Стеклова

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{21}V_{21} + \gamma_{12}V_{12} & \gamma_{21}V_{21} \\ \gamma_{31}V_{21} & \gamma_{31}V_{31} + \gamma_{13}V_{13} \end{pmatrix}$$

действует из $H^{-1/2}(\Gamma_{21})(\dot{+})H^{-1/2}(\Gamma_{31})$ на $H^{1/2}(\Gamma_{21})(\dot{+})H^{1/2}(\Gamma_{31})$ и обладает свойством

$$\langle C\chi, \chi \rangle = \sum_{k=1}^{3} \|u_{2k}\|^2_{H^1(\Omega_k)}, \quad \chi = (\chi_{21}, \chi_{31})^\tau.$$

Отсюда следует, что

$$(\widetilde{\varphi}_{21}; \widetilde{\varphi}_{31})^\tau = C^{-1}\chi, \tag{3.46}$$

и потому слабое решение $u_{(2)} = (u_{21}; u_{22}; u_{23})^\tau$ задачи (3.44) существует, единственно и выражается формулами (3.45), (3.46). При этом необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.42), а также условия

$$\varphi_{21} \in H^{1/2}(\Gamma_{21}),\ \varphi_{31} \in H^{1/2}(\Gamma_{31}). \tag{3.47}$$

Заметим, что в этой задаче не требуется выполнение условий согласования типа (3.19).

Рассмотрим теперь третий этап, связанный с проблемой (3.38)–(3.40), — первую вспомогательную задачу Крейна:

$$\begin{gathered} u_{3k} - \triangle u_{3k} = f_k \ (\text{в } \Omega_k), \ \ \gamma_{11} u_{31} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\ \gamma_{21} u_{31} - \gamma_{12} u_{32} = 0, \ \ \partial_{21} u_{31} + \partial_{12} u_{32} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{21}), \\ \gamma_{31} u_{31} - \gamma_{13} u_{33} = 0, \ \ \partial_{31} u_{31} + \partial_{13} u_{33} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{31}). \end{gathered} \tag{3.48}$$

Введем подпространство

$$H^1_{0,\Gamma}(\Omega) := \{(u_1; u_2; u_3)^\tau \in H^1(\Omega) : \gamma_{11} u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}),$$

$$\gamma_{21} u_1 - \gamma_{12} u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{21}),\ \gamma_{31} u_1 - \gamma_{13} u_3 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{31})\},$$

содержащее плотное в $L_2(\Omega) = \bigoplus_{k=1}^3 L_2(\Omega_k)$ подпространство $H_0^1(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^3 H_0^1(\Omega_k)$. Как и ранее, для задачи (3.48) приходим к следующему выводу. Задача (3.48) имеет единственное слабое решение $u_{(3)} \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда

$$f := (f_1; f_2; f_3)^\tau \in (H_{0,\Gamma}^1(\Omega))^*. \tag{3.49}$$

При этом $u_{(3)} = A^{-1}f$, где A — оператор гильбертовой пары $(H_{0,\Gamma}^1(\Omega); L_2(\Omega))$. Если $f \in L_2(\Omega)$, то $u_{(3)} = A^{-1}f \subset \mathcal{D}(A)$ — обобщенное решение задачи (3.48).

Вторая вспомогательная задача Крейна для проблемы (3.38)–(3.40) формулируется следующим образом:

$$\begin{gathered} u_{4k} - \triangle u_{4k} = 0 \text{ (в } \Omega_k), \ k = \overline{1,3}, \ \ \gamma_{11}u_{41} = 0 \text{ (на } \Gamma_{11}), \\ \gamma_{21}u_{41} - \gamma_{12}u_{42} = 0, \ \ \partial_{21}u_{41} + \partial_{12}u_{42} = \psi_{21} \text{ (на } \Gamma_{21}), \\ \gamma_{31}u_{41} - \gamma_{13}u_{43} = 0, \ \ \partial_{31}u_{41} + \partial_{13}u_{43} = \psi_{31} \text{ (на } \Gamma_{31}). \end{gathered} \tag{3.50}$$

Здесь для определения слабого решения используем обобщенную формулу Грина

$$\sum_{k=1}^3 (\eta_k, u_{4k})_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^3 \langle \eta_k, u_{4k} - \triangle u_{4k}\rangle_{L_2(\Omega_k)} + \langle \gamma_{21}\eta_1, \partial_{21}u_{41} + \partial_{12}u_{42}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})} +$$
$$+ \langle \gamma_{31}\eta_1, \partial_{31}u_{41} + \partial_{13}u_{43}\rangle_{L_2(\Gamma_{31})},$$
$$\forall \eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3)^\tau, \ u_{(4)} = (u_{41}; u_{42}; u_{43})^\tau \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega),$$

и обычным образом устанавливаем, что задача (3.50) имеет слабое решение из $H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\psi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}), \ \psi_{31} \in H^{-1/2}(\Gamma_{31}). \tag{3.51}$$

Таким образом, приходим к следующему итогу. Задача сопряжения (3.38)–(3.40) имеет слабое решение $u = (u_1; u_2; u_3)^\tau \in H^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (3.42), (3.47), (3.49), (3.51). Это решение выражается формулами (3.41), (3.43), (3.45), (3.46) $u_{(3)} = A^{-1}f$ а также формулами

$$u_{(4)} = B_{21}\psi_{21} + B_{31}\psi_{31},$$
$$B_{21} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21}); H_{0,\Gamma,h}^1(\Omega)), \ \ B_{31} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{31}); H_{0,\Gamma,h}^1(\Omega)),$$

причем для B_{21} и B_{31} выполнены свойства, аналогичные свойствам (3.37).

Отметим еще раз, что в проблеме сопряжения (3.38)–(3.40) никаких условий согласования заданных граничных функций не требуется.

3.3. Третья конфигурация: одна область с границей, гомеоморфной сфере с тремя разрезанными ручками. Задачу сопряжения по предполагаемой схеме можно исследовать и в случае, когда имеется лишь одна область, в которой разыскивается искомая функция, а условия сопряжения задаются на двух или более примыкающих друг к другу участках границы этой области. Так будет, в частности, если область Ω односвязна, а граница $\partial\Omega$ этой области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 3)$ гомеоморфна сфере с тремя разрезанными ручками (см. рис. 3.2)

Обозначим часть $\partial\Omega$ вне стыков через Γ_0, а на стыках Γ_k выделим экземпляры Γ_k' и Γ_k'', по которым можно достичь этих стыков по непрерывности изнутри Ω. При этом, очевидно, на $\Gamma_k = \Gamma_k' = \Gamma_k''$ возможны разрывы с двух сторон как у предельных функций $\gamma_k'u$ и $\gamma_k''u$, так и у производных по внешней нормали $\partial_k'u$ и $\partial_k''u$. Будем считать также, как обычно, что куски Γ_k $(k = \overline{1,3})$ — липшицевы.

В итоге возникает следующая задача сопряжения. Необходимо найти функцию $u(x)$, $x \in \Omega$, из уравнения и граничных условий:

$$\begin{gathered} u - \Delta u = f \text{ (в } \Omega), \qquad\qquad \gamma_0 u = \varphi_0 \text{ (на } \Gamma_0), \\ \gamma_k'u - \gamma_k''u = \varphi_k, \quad \partial_k'u + \partial_k''u = \psi_k \text{ (на } \Gamma_k), \ k = \overline{1,3}. \end{gathered} \tag{3.52}$$

Здесь заданными функциями являются f, а также φ_0, φ_k $(k = \overline{1,3})$ и ψ_k $(k = \overline{1,3})$.

Будем разыскивать слабое решение задачи (3.52) из пространства $H^1(\Omega)$ по общей схеме, предложенной выше. Тогда на первом этапе возникает задача Зарембы для функции $u_1(x)$:

$$\begin{gathered} u_1 - \Delta u_1 = 0 \text{ (в } \Omega), \qquad \gamma_0 u_1 = \varphi_0 \text{ (на } \Gamma_0), \\ \partial_k' u_1 = 0 \text{ (на } \Gamma_k') \qquad \partial_k'' u_1 = 0 \text{ (на } \Gamma_k''), \ k = \overline{1,3}. \end{gathered} \tag{3.53}$$

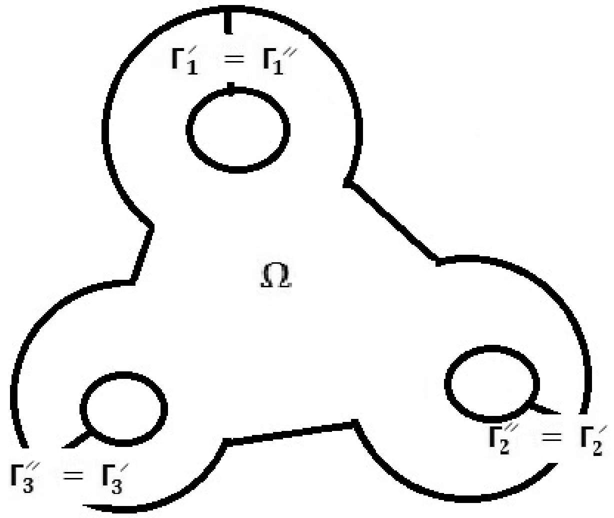

Рис. 3.2

Если слабое решение этой задачи принадлежит $H^1_h(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, то его след на $\partial\Omega$ является функцией из $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Поэтому возникает следующее дополнительное условие: существует функция $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ такая, что ее сужение на Γ_0 совпадает с φ_0, т. е.

$$\rho_0\varphi = \varphi_0 \in H^{1/2}(\Gamma_0), \tag{3.54}$$

где $\rho_0 : H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma_0)$ — оператор сужения (он ограничен).

Тогда так же, как для рассмотренной выше задачи (3.2), в частности, для задачи (3.8), приходим к выводу, что задача (3.53) имеет единственное слабое решение $u_1 \in H^1_h(\Omega)$, выражаемое формулой

$$u_1 = \widehat{\gamma}_0^{-1}\varphi_0,\ \widehat{\gamma}_0^{-1} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_0); H^1_h(\Omega)). \tag{3.55}$$

Здесь при доказательстве (3.55), как и в (3.11), (3.12), снова используется обобщенная формула Грина в форме (1.16):

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \triangle u\rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{3}\langle \gamma_k'\eta, \partial_k' u\rangle_{L_2(\Gamma_k)} + \sum_{k=1}^{3}\langle \gamma_k''\eta, \partial_k'' u\rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \tag{3.56}$$

$$\eta,\ u \in \widehat{H}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega),\ \gamma_k'\eta,\ \gamma_k''\eta \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),$$

$$\partial_k' u,\ \partial_k'' u \in H^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,3}.$$

На втором этапе исследования проблемы (3.52) возникает следующая задача Стеклова:

$$u_2 - \Delta u_2 = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \gamma_0 u_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_0),$$

$$(\gamma_k' - \gamma_k'')u_2 = \widetilde{\varphi}_k := \varphi_k - (\gamma_k' - \gamma_k'')u_1,\ \ \partial_k' u_2 = -\partial_k'' u_2 (=: \chi_k) \text{ (на } \Gamma_k),\ k = \overline{1,3}. \tag{3.57}$$

С использованием формулы Грина (3.56) ее решение через функции χ_k выражается в виде

$$u_{(2)} = \sum_{k=1}^{3}(V_k' - V_k'')\chi_k,$$

$$V_k' = (\gamma_k')^* \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_k'); H^1_{0,\Gamma_0,h}(\Omega)), \quad V_k'' = (\gamma_k'')^* \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_k''); H^1_{0,\Gamma_0,h}(\Omega)), \tag{3.58}$$

а условия для следов функций на стыках дают уравнение

$$\begin{pmatrix}\gamma_1'-\gamma_1''\\ \gamma_2'-\gamma_2''\\ \gamma_3'-\gamma_3''\end{pmatrix}(V_1'-V_1'';\ V_2'-V_2'',\ V_3'-V_3'')\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\\ \chi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}_1\\ \widetilde{\varphi}_2\\ \widetilde{\varphi}_3\end{pmatrix} \tag{3.59}$$

для нахождения неизвестных $\chi_k,\ k=\overline{1,3}$. В силу (3.58) матрица C из (3.59), очевидно, самосопряженная, т. е.

$$\langle C\chi,\widehat{\chi}\rangle=\overline{\langle C\widehat{\chi},\chi\rangle},\quad \chi,\ \widehat{\chi}\in(\dot{+})_{k=1}^3H^{-1/2}(\Gamma_k),$$

и, кроме того, положительная:

$$\langle C\chi,\chi\rangle=\Big\|\sum_{k=1}^3(V_k'-V_k'')\chi_k\Big\|^2_{H^1(\Omega)}=\|u_2\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Поэтому система уравнений (3.59) имеет единственное решение

$$\chi:=(\chi_1;\chi_2;\chi_3)^\tau=C^{-1}\widetilde{\varphi},\ \widetilde{\varphi}:=(\widetilde{\varphi}_1;\widetilde{\varphi}_2,\widetilde{\varphi}_3)^\tau\in(\dot{+})_{k=1}^3\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k).$$

Значит, при выполнении этого требования на $\widetilde{\varphi}$ задача (3.57) имеет единственное слабое решение $u_{(2)}\in H^1_{0,\Gamma_0,h}(\Omega)$.

На третьем этапе имеем проблему

$$\begin{gathered} u_3-\Delta u_3=f\ (\text{в }\Omega),\quad \gamma_0u_3=0\ (\text{на }\Gamma_0),\\ (\gamma_k'-\gamma_k'')u_3=0,\ \ (\partial_k'+\partial_k'')u_3=0\ (\text{на }\Gamma_k),\ k=\overline{1,3}. \end{gathered} \tag{3.60}$$

Введем подпространство

$$H^1_{0,\Gamma}(\Omega):=\{u\in H^1_{0,\Gamma_0}(\Omega):(\gamma_k'-\gamma_k'')u=0\ (\text{на }\Gamma_k)\},$$

плотное в $L_2(\Omega)$, т. е. $(H^1_{0,\Gamma}(\Omega);L_2(\Omega))$ — гильбертова пара. Из формулы Грина (3.56) для элементов из $H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ будем иметь тождество

$$(\eta,u)_{H^1(\Omega)}=\langle\eta,u-\Delta u\rangle_{L_2(\Omega)}+\sum_{k=1}^3\langle\gamma_k'\eta,(\partial_k'+\partial_k'')u\rangle_{L_2(\Gamma_k)}.$$

Отсюда, определяя слабое решение задачи (3.60), получаем, что при $f\in(H^1_{0,\Gamma}(\Omega))^*$ эта задача имеет решение $u_{(3)}=A^{-1}f$, где A — оператор гильбертовой пары $(H^1_{0,\Gamma}(\Omega);L_2(\Omega))$.

Наконец, на четвертом этапе возникает задача

$$\begin{gathered} u_4-\Delta u_4=0\ (\text{в }\Omega),\quad \gamma_0u_4=0\ (\text{на }\Gamma_0),\\ (\gamma_k'-\gamma_k'')u_4=0,\ \ (\partial_k'+\partial_k'')u_4=\psi_k\ (\text{на }\Gamma_k),\ k=\overline{1,3}, \end{gathered}$$

слабое решение которой при условиях $\psi_k\in H^{-1/2}(\Gamma_k),\ k=\overline{1,3}$, существует, единственно и выражается формулой

$$u_{(4)}=\sum_{k=1}^3B_k\psi_k,\ B_k\in\mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_k);H^1_{0,\Gamma,h}(\Omega)).$$

Подводя итоги рассмотрения задачи (3.52), приходим к выводу, что при предположении (3.54), а также при других необходимых условиях эта задача имеет единственное слабое решение $u=\sum\limits_{k=1}^4u_k\in H^1(\Omega)$, где составляющие u_k выражаются приведенными выше формулами.

Замечание 3.3. Проведенные построения показывают, что аналогичным образом рассматривается проблема в области с границей, гомеоморфной сфере с произвольным числом n разрезанных ручек.

Замечание 3.4. По такой же схеме можно рассмотреть проблемы, в которых для области Ω вместо разрезов с поверхностями $\Gamma_k=\Gamma_k'=\Gamma_k''$ имеются разведенные липшицевы куски Γ_k' и Γ_k'' с одинаковыми свойствами, т. е. имеются оснащения

$$\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k')=\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k'')\hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Gamma_k')=L_2(\Gamma_k'')\hookrightarrow\hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma_k')=H^{-1/2}(\Gamma_k''),\ k=\overline{1,n}.$$

4. Спектральные проблемы, порожденные смешанными краевыми задачами и задачами сопряжения

4.1. Смешанная спектральная задача в одной области. Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega =: \Gamma$, разбитой на четыре липшицевых куска Γ_k с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$, $k = \overline{1,4}$. В этой области будем исследовать следующую спектральную задачу:

$$u - \Delta u = \lambda u =: f \ (\text{в } \Omega), \ \ \gamma_1 u := u|_{\Gamma_1} = 0 \ (\text{на } \Gamma_1), \tag{4.1}$$

$$\partial_2 u = \mu\gamma_2 u =: \psi_2 \ (\text{на } \Gamma_2), \ \ \partial_3 u = \lambda\gamma_3 u =: \psi_3 \ (\text{на } \Gamma_3), \tag{4.2}$$

$$\partial_4 u = \lambda^{-1}\gamma_4 u =: \psi_4 \ (\text{на } \Gamma_4). \tag{4.3}$$

Здесь на Γ_1 задано однородное условие Дирихле, на Γ_2 — условие типа Стефана (или Стеклова), на Γ_3 — условие Аграновича (см. [28]), или условие, возникающее в задачах дифракции, на Γ_4 — условие типа Крейна, появившееся в задачах о нормальных движениях тяжелой вязкой жидкости в частично заполненном сосуде. Отметим еще, что в этой проблеме имеется два параметра, т. е. λ и μ, один из которых можно считать спектральным, а второй — фиксированным. В частности, в задачах дифракции спектральным является параметр $\mu \in \mathbb{C}$ (см. [28]). Другой вариант, когда спектральным является $\lambda \in \mathbb{C}$, рассматривается в работах В. И. Горбачук (см. [10]).

Задачу (4.1)–(4.3) можно исследовать с помощью общей схемы, которая обсуждалась в первых трех разделах. С этой точки зрения здесь подлежит рассмотрению одна первая вспомогательная задача Крейна и три вторых вспомогательных задачи Крейна.

Именно, слабое решение задачи (4.1)–(4.3), в силу однородного условия Дирихле на Γ_1, естественно искать в пространстве

$$H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \gamma_1 u = 0 \ (\text{на } \Gamma_1)\} \subset \widehat{H}^1(\Omega).$$

Будем разыскивать решение $u \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ в виде суммы решений четырех задач, т. е.

$$u = \sum_{k=1}^{4} u_k, \ u_k \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega), \tag{4.4}$$

где u_k — слабые решения таких задач соответственно:

$$\begin{gathered} u_1 - \triangle u_1 = f := \lambda u \ (\text{в } \Omega), \ \ \gamma_1 u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_1), \ \partial_2 u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_3), \ \partial_4 u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_4); \end{gathered} \tag{4.5}$$

$$\begin{gathered} u_2 - \triangle u_2 = 0 \ (\text{в } \Omega), \ \ \gamma_1 u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_1), \ \ \partial_2 u_2 = \psi_2 := \mu\gamma_2 u \ (\text{на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_3), \ \partial_4 u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_4); \end{gathered} \tag{4.6}$$

$$\begin{gathered} u_3 - \triangle u_3 = 0 \ (\text{в } \Omega), \ \ \gamma_1 u_3 = 0 \ (\text{на } \Gamma_1), \ \ \partial_2 u_3 = 0 \ (\text{на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u_3 = \psi_3 := \lambda\gamma_3 u \ (\text{на } \Gamma_3), \ \partial_4 u_3 = 0 \ (\text{на } \Gamma_4); \end{gathered} \tag{4.7}$$

$$\begin{gathered} u_4 - \triangle u_4 = 0 \ (\text{в } \Omega), \ \ \gamma_1 u_4 = 0 \ (\text{на } \Gamma_1), \ \ \partial_2 u_4 = 0 \ (\text{на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u_4 = 0 \ (\text{на } \Gamma_3), \ \partial_4 u_4 = \psi_4 := \lambda^{-1}\gamma_4 u \ (\text{на } \Gamma_4). \end{gathered} \tag{4.8}$$

Желая представить решение u в виде (4.4), естественно ввести пространство

$$\check{H}^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \partial_k u = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \ k = \overline{1,4}\}$$

(см. (1.22)) и его подпространство

$$\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) := \check{H}^1(\Omega) \cap H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega). \tag{4.9}$$

Для элементов из $\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ имеем формулу Грина, следующую из (1.25), (1.26):

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \triangle u\rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=2}^{4} \langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)} \ \ \forall\, \eta, \ u \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega), \tag{4.10}$$

$$\gamma_k\eta \in H^{1/2}(\Gamma_k), \ \partial_k u = (\partial u/\partial n)_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \ k = \overline{2,4}.$$

Из этой формулы следует, что слабое решение задачи (4.5) определяется тождеством

$$(\eta, u_1)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, f\rangle_{L_2(\Omega)} (= \langle \eta, \lambda u\rangle_{L_2(\Omega)}) \ \ \forall\, \eta \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega),$$

и предыдущие рассмотрения показывают, что

$$u_1 = A^{-1}f = \lambda A^{-1}u, \tag{4.11}$$

где A — оператор гильбертовой пары $(\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega);\ L_2(\Omega))$.

Далее, слабое решение задачи (4.6) определяется тождеством

$$(\eta, u_2)_{H^1(\Omega)} = \langle\gamma_2\eta, \psi_2\rangle_{L_2(\Gamma_2)} = \langle\gamma_2\eta, \mu\gamma_2 u\rangle_{L_2(\Gamma_2)} \ \ \forall\, \eta \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega).$$

Это решение задается формулой

$$\begin{gathered} u_2 = V_2\psi_2 = \lambda V_2\gamma_2 u,\ V_2 \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_2);\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega)),\ V_2 = \gamma_2^*, \\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega) := \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) \cap H^1_h(\Omega). \end{gathered} \tag{4.12}$$

Аналогично рассматриваются задачи (4.7) и (4.8), и их решения выражаются формулами

$$\begin{gathered} u_3 = V_3\psi_3 = \lambda V_3\gamma_3 u,\ V_3 \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_3);\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega)),\ V_3 = \gamma_3^*, \\ u_4 = V_4\psi_4 = \lambda^{-1} V_4\gamma_4 u,\ V_4 \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_4);\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega)),\ V_4 = \gamma_4^*. \end{gathered} \tag{4.13}$$

Складывая левые и правые части соотношений (4.11), (4.12), (4.13), получаем, что слабое решение u задачи (4.1)–(4.3) должно быть решением следующей спектральной проблемы:

$$u = \lambda(A^{-1} + V_3\gamma_3)u + \mu V_2\gamma_2 u + \lambda^{-1}V_4\gamma_4 u,\ u \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega). \tag{4.14}$$

Это уравнение можно привести к более симметричной форме, воспользовавшись тем, что имеют место свойства

$$A^{1/2}V_k = (\gamma_k A^{-1/2})^* \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_k);\ L_2(\Omega)),\ k = \overline{1,3}. \tag{4.15}$$

Действительно, представим элемент $u \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2}),\ \mathcal{R}(A^{1/2}) = L_2(\Omega)$, в виде

$$u = A^{-1/2}v,\ v \in L_2(\Omega), \tag{4.16}$$

подставим это выражение в (4.14) и подействуем на обе части полученного соотношения оператором $A^{1/2}$ (это можно сделать в силу (4.15)). Тогда взамен (4.14) возникает спектральная задача

$$L(\lambda,\mu)v := (I - \lambda(A_1^{-1} + B_3) - \mu B_2 - \lambda^{-1}B_4)v = 0, \quad v \in L_2(\Omega), \tag{4.17}$$

$$B_k := (A^{1/2}V_k)(\gamma_k A^{-1/2}) = B_k^* \geqslant 0,\ B_k \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)),\ \ k = \overline{2,4}, \tag{4.18}$$

для операторного пучка $L(\lambda,\mu)$ с параметрами λ и μ, один из которых можем считать спектральным, другой — заданным фиксированным.

Не проводя подробного анализа свойств решений задачи (4.17), (4.18), сделаем несколько предварительных выводов.

1°. Если $\mu \leqslant 0$, то $I - \mu B_2 \geqslant I \gg 0$; тогда задача (4.17) приводится к уравнению

$$\eta = (I-\mu B_2)^{-1/2}(\lambda(A^{-1} + B_3) + \lambda^{-1}B_4)(I-\mu B_2)^{-1/2}\eta,\ \eta \in L_2(\Omega),$$

и возникает хорошо изученный операторный пучок Крейна.

2°. Если $\mu > 0$ и $\ker(I - \mu B_2) = \{0\}$, то возникает индефинитная метрика (пространство Понтрягина Π_κ). Такие проблемы встречаются в задачах конвекции.

3°. Если $\operatorname{Im}\mu \neq 0$, то оператор $I - \mu B_2$ обратим. В этом варианте имеем спектральную проблему для пучка, близкого к пучку Крейна (вращающаяся тяжелая вязкая жидкость).

4°. Если Γ_4 — пустое множество, то $B_4 = 0$ и возникает проблема, аналогичная задаче сопряжения из теории дифракции (μ — спектральный параметр).

5°. Если λ — фиксированный параметр, то (4.17) приводится к задаче на собственные значения слабо возмущенного самосопряженного оператора (проблема Келдыша).

Таким образом, задача (4.17), (4.18) содержит в себе много известных спектральных проблем, встречающихся в приложениях.

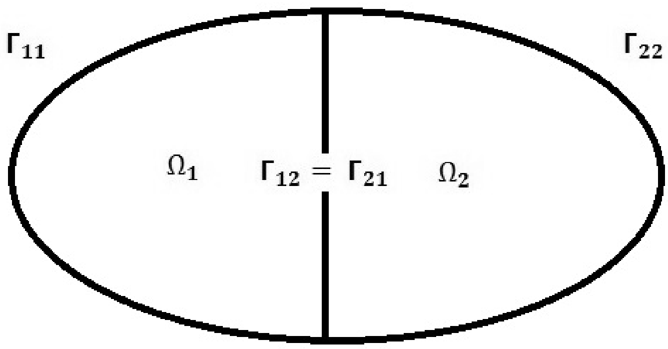

Рис. 4.1

4.2. Спектральная задача сопряжения для двух примыкающих областей. Рассмотрим теперь более сложную задачу — конфигурацию из двух примыкающих областей, причем на отдельных участках границы этих областей заданы однородные условия, содержащие спектральный либо фиксированный параметр.

Итак, будем считать, что две области Ω_1 и Ω_2 из $\mathbb{R}^m$ с липшицевыми границами примыкают друг к другу, как это показано на рис. 4.1.

Их внешние границы Γ_{11} и Γ_{22} являются липшицевыми кусками и сами разбиты на липшицевы куски:

$$\Gamma_{kk} = (\bigcup_{j=1}^{4} \Gamma_{kk,j}) \cup \partial\Gamma^0_{kk},\ k = 1, 2,$$

а граница стыка $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$ разбита на семь липшицевых кусков:

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = (\bigcup_{j=1}^{7} \Gamma_{21,j}) \cup \partial\Gamma^0_{21},\ \Gamma_{21,j} = \Gamma_{12,j}.$$

Здесь символом $\partial\Gamma^0_{kl}$ обозначено объединение внутренних границ при разбиении Γ_{kl} на части $\Gamma_{kl,j}$.

Опираясь на эти определения, сформулируем постановку спектральной задачи сопряжения для искомых функций $u_k(x)$, заданных в областях Ω_k, $k = 1, 2$, с соответствующими граничными условиями. Имеем: в областях Ω_1 и Ω_2 —

$$u_1 - \triangle u_1 = f_1 := \lambda u_1 \ \ (\text{в } \Omega_1), \quad u_2 - \triangle u_2 = f_2 := \lambda u_2 \ \ (\text{в } \Omega_2); \tag{4.19}$$

на внешних границах:

$$\gamma_{11,1} u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11,1}),\ \gamma_{22,1} u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22,1}); \tag{4.20}$$

$$\begin{array}{ll} \partial_{11,2} u_1 = \psi_{11,2} := \mu\gamma_{11,2} u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{11,2}), & \partial_{22,2} u_2 = \psi_{22,2} := \mu\gamma_{22,2} u_2 \ \ (\text{на } \Gamma_{22,2}); \\ \partial_{11,3} u_1 = \psi_{11,3} := \lambda\gamma_{11,3} u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{11,3}), & \partial_{22,3} u_2 = \psi_{22,3} := \lambda\gamma_{22,3} u_2 \ \ (\text{на } \Gamma_{22,3}); \\ \partial_{11,4} u_1 = \psi_{11,4} := \lambda^{-1}\gamma_{11,4} u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{11,4}), & \partial_{22,4} u_2 = \psi_{22,4} := \lambda^{-1}\gamma_{22,4} u_2 \ \ (\text{на } \Gamma_{22,4}); \end{array} \tag{4.21}$$

на границах стыка:

$$\gamma_{21,1} u_1 - \gamma_{12,1} u_2 = 0, \quad \partial_{21,1} u_1 + \partial_{12,1} u_2 = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,1}); \tag{4.22}$$

$$\gamma_{21,2} u_1 - \gamma_{12,2} u_2 = 0,\ \ \partial_{21,2} u_1 + \partial_{12,2} u_2 = \psi_{21,2} := \mu\gamma_{21,2} u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,2}), \tag{4.23}$$

$$\gamma_{21,3} u_1 - \gamma_{12,3} u_2 = 0,\ \partial_{21,3} u_1 + \partial_{12,3} u_2 = \psi_{21,3} := \lambda\gamma_{21,3} u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,3}), \tag{4.24}$$

$$\gamma_{21,4} u_1 - \gamma_{12,4} u_2 = 0,\ \ \partial_{21,4} u_1 + \partial_{12,4} u_2 = \psi_{21,4} := \lambda^{-1}\gamma_{21,4} u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,4}); \tag{4.25}$$

$$\partial_{21,5} u_1 = -\partial_{12,5} u_2 = \psi_{21,5} := \lambda(\gamma_{21,5} u_1 - \gamma_{12,5} u_2) \ \ (\text{на } \Gamma_{21,5}); \tag{4.26}$$

$$\partial_{21,6} u_1 = -\partial_{12,6} u_2 = \psi_{21,6} := \lambda(\gamma_{21,6} u_1 - \gamma_{12,6} u_2) \ (\text{на } \Gamma_{21,6}); \tag{4.27}$$

$$\partial_{21,7} u_1 = -\partial_{12,7} u_2 = \psi_{21,7} := \lambda^{-1}(\gamma_{21,7} u_1 - \gamma_{12,7} u_2) \ \ (\text{на } \Gamma_{21,7}). \tag{4.28}$$

Здесь λ и μ, как и в задаче (4.1)–(4.3), — параметры, один из которых является спектральным, а другой — фиксированным. Отметим еще, что условия (4.23), (4.25), (4.27) называют условиями первой задачи сопряжения, а (4.24), (4.26), (4.28) — условиями второй задачи сопряжения (см. [28]).

Из постановки задачи (4.19)–(4.28) видно (см. (4.20)), что ее слабое решение $u = (u_1; u_2)$ естественно искать в пространстве $H^1_{0,\Gamma_{11,1}}(\Omega_1) \oplus H^1_{0,\Gamma_{22,1}}(\Omega_2)$. Более того, это решение должно принадлежать подпространству $\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega)$ тех элементов, для которых выполнены главные (с вариационной точки зрения) однородные краевые условия на стыках — это группа первых условий в (4.21)–(4.25). Значит,

$$\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega) := \{(u_1; u_2) \in H^1_{0,\Gamma_{11,1}}(\Omega_1) \oplus H^1_{0,\Gamma_{22,1}}(\Omega_2) : \gamma_{21,k}u_1 - \gamma_{12,k}u_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_{21,k}),\ k = \overline{1,4}\}.$$

Далее, представляя решение задачи в виде суммы вспомогательных задач, в которых неоднородности, т. е. формально полагаемые заданными функции в (4.19)–(4.28), содержатся либо в уравнениях, либо в одном из краевых условий для областей Ω_k, $k = 1, 2$, следует воспользоваться обобщенными формулами Грина в форме (1.25)-(1.26). Тогда для элементов из $\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega)$ будем иметь обобщенную формулу Грина в следующем виде:

$$\begin{aligned}(\eta, u)_{H^1(\Omega)} := \sum_{k=1}^{2} (\eta_k, u_k)_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{2} \langle \eta_k, u_k - \triangle u_k \rangle_{L_2(\Omega_k)} + \\ + \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=2}^{4} \langle \gamma_{kk,j}\eta_k, \partial_{kk,j}u_k \rangle_{L_2(\Gamma_{kk,j})} + \sum_{j=1}^{4} \langle \gamma_{21,j}\eta_1, \partial_{21,j}u_1 + \partial_{12,j}u_2 \rangle_{L_2(\Gamma_{21,j})} + \\ + \sum_{j=5}^{7} \langle \gamma_{21,j}\eta_1 - \gamma_{12,j}\eta_2, \partial_{21,j}u_1 \rangle_{L_2(\Gamma_{21,j})},\end{aligned} \tag{4.29}$$

где следы $\gamma_{kl,j}\eta_l \in H^{1/2}(\Gamma_{kl,j})$, а производные по нормали $\partial_{kl,j}u_l \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{kl,j})$, т. е. из сопряженного пространства (см. (4.9), (4.10)).

Отметим еще, что пространство $\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega) := L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2)$, так как оно содержит подпространство $H^1_0(\Omega_1) \oplus H^1_0(\Omega_2)$, плотное в $L_2(\Omega)$.

Следуя схеме, уже изложенной для задачи (4.1)–(4.3), приходим к выводу, что первая вспомогательная задача Крейна, отвечающая неоднородным членам лишь в уравнениях (4.19) с заданными f_1 и f_2, определяется как слабое решение $u_{(1)} = (u_{11}; u_{12})$ на основе тождества

$$(\eta, u_{(1)})_{H^1(\Omega)} = \sum_{k=1}^{2} \langle \eta_k, f_k \rangle_{L_2(\Omega_k)},\ \eta = (\eta_1; \eta_2) \in \mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega),$$

следующего из формулы Грина (4.29). Поэтому

$$u_{(1)} = A^{-1}f = \lambda A^{-1}u,\ f = (f_1, f_2) \in (\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega))^*.$$

Далее, заданным функциям $\psi_{11,2}$ и $\psi_{22,2}$ из (4.27) отвечают слабые решения $u^I_{(2)}$ и $u^{II}_{(2)}$, соответственно, определяемые тождествами

$$(\eta, u^I_{(2)})_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_{11,2}\eta_1, \psi_{11,2} \rangle_{L_2(\Gamma_{11,2})}\ \forall \eta \in \mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega),$$

$$(\eta, u^{II}_{(2)})_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_{22,2}\eta_2, \psi_{22,2} \rangle_{L_2(\Gamma_{22,2})}\ \forall \eta \in \mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega).$$

Обозначая эти решения через $V_{11,2}\psi_{11,2}$ и $V_{22,2}\psi_{22,2}$, приходим к выводу, что

$$u_{(2)} = u^I_{(2)} + u^{II}_{(2)} = \mu(V_{11,2}\gamma_{11,2}p_1 + V_{22,2}\gamma_{22,2}p_2)u,$$

где $p_k u = p_k(u_1; u_2) := u_k$, $k = 1, 2$. Отметим еще, что имеют место свойства

$$V_{kk,2} = (\gamma_{kk,2}p_k)^*,\ k = 1, 2.$$

Аналогично определяются слабые решения задач, отвечающие элементам $\psi_{11,3}$ и $\psi_{11,4}$ соответственно. Тогда

$$u_{(3)} = \lambda(V_{11,3}\gamma_{11,3}p_1 + V_{22,3}\gamma_{22,3}p_2)u,\ \ V_{kk,3} = (\gamma_{kk,3}p_k)^*,\ k = 1, 2.$$

Таким же образом имеем

$$u_{(4)} = \lambda^{-1}(V_{11,4}\gamma_{11,4}p_1 + V_{22,4}\gamma_{22,4}p_2)u, \;\; V_{kk,4} = (\gamma_{kk,4}p_k)^*, \; k = 1, 2.$$

Рассмотрим теперь вспомогательные задачи, отвечающие заданным элементам $\psi_{21,j}$ из (4.23)–(4.25), $j = \overline{1,3}$. Решение, соответствующее $\psi_{21,2}$, определяется из тождества

$$(\eta, u_{(5)})_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_{21,2}\eta_1, \psi_{21,2}\rangle_{L_2(\Gamma_{21,2})}, \; \eta \in \mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega),$$

и при $\psi_{21,2} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{21,2})$ имеем единственное решение

$$u_{(5)} = V_{21,2}\psi_{21,2} = \mu V_{21,2}\gamma_{21,2}p_1 u, \;\; V_{21,2} = (\gamma_{21,2}p_1)^*.$$

Аналогично получаем формулы, отвечающие $\psi_{21,3}$ и $\psi_{21,4}$:

$$u_{(6)} = \lambda V_{21,3}\gamma_{21,3}p_1 u, \quad V_{21,3} = (\gamma_{21,3}p_1)^*,$$

$$u_{(7)} = \lambda^{-1} V_{21,4}\gamma_{21,4}p_1 u, \quad V_{21,4} = (\gamma_{21,4}p_1)^*.$$

Перейдем теперь к рассмотрению решений, отвечающих элементам $\psi_{21,j}$, $j = \overline{5,7}$, из (4.26)–(4.28). Решение $u_{(8)}$, отвечающее $\psi_{21,5}$, как следует из формулы Грина (4.29), определено тождеством

$$(\eta, u_{(8)})_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_{21,5}\eta_1 - \gamma_{12,5}\eta_2, \psi_{21,5}\rangle_{L_2(\Gamma_{21,5})} \; \forall \eta \in \mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega).$$

При любом $\psi_{21,5} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{21,5})$ существует единственное решение

$$u_{(8)} = V_{21,5}\psi_{21,5} = \mu V_{21,5}(\gamma_{21,5}p_1 - \gamma_{12,5}p_2)u, \;\; V_{21,5} = (\gamma_{21,5}p_1 - \gamma_{12,5}p_2)^*.$$

Аналогичным образом получаем формулы для оставшихся двух решений $u_{(9)}$ и $u_{(10)}$ вспомогательных задач, отвечающих заданным $\psi_{21,6}$ и $\psi_{21,7}$ соответственно из (4.27), (4.28). Имеем

$$u_{(9)} = \lambda V_{21,6}(\gamma_{21,6}p_1 - \gamma_{12,6}p_2)u, \quad V_{21,6} = (\gamma_{21,6}p_1 - \gamma_{12,6}p_2)^*,$$

$$u_{(10)} = \lambda^{-1} V_{21,7}(\gamma_{21,7}p_1 - \gamma_{12,7}p_2)u, \quad V_{21,7} = (\gamma_{21,7}p_1 - \gamma_{12,7}p_2)^*.$$

Итогом проведенных построений является такой вывод. Слабое решение $u = (u_1; u_2)$ задачи (4.19)–(4.28) удовлетворяет уравнению

$$u = \sum_{j=1}^{10} u_{(j)} = \lambda(A^{-1} + C_3)u + \mu C_2 u + \lambda^{-1} C_4 u, \quad u \in \mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega), \tag{4.30}$$

$$C_2 := V_{11,2}V_{11,2}^* + V_{22,2}V_{22,2}^* + V_{21,2}V_{21,2}^* + V_{21,5}V_{21,5}^*,$$

$$C_3 := V_{11,3}V_{11,3}^* + V_{21,3}V_{21,3}^* + V_{21,6}V_{21,6}^*,$$

$$C_4 := V_{11,4}V_{11,4}^* + V_{22,4}V_{22,4}^* + V_{21,4}V_{21,4}^* + V_{21,7}V_{21,7}^*.$$

Таким образом, для спектральной проблемы сопряжения (4.19)–(4.28) получилось уравнение (4.30) такого же общего вида, как уравнение (4.14) для более простой спектральной проблемы (4.1)–(4.3).

Осуществляя еще в (4.30) такую же замену, как в (4.16), т. е.

$$u = A^{-1/2}v, \; v \in L_2(\Omega) = L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2),$$

и действуя оператором $A^{1/2}$, приходим окончательно к спектральной задаче

$$L(\lambda, \mu)v := (I - \lambda(A^{-1} + B_3) - \mu B_2 - \lambda^{-1} B_4)v = 0, \quad v \in L_2(\Omega), \tag{4.31}$$

$$0 \leqslant B_k = A^{1/2} C_k A^{-1/2} = B_k^* \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)), \; k = \overline{1,4}, \tag{4.32}$$

равносильной исходной проблеме (4.19)–(4.28).

Очевидно, для задачи (4.31), (4.32) имеют место те же предварительные выводы, которые были указаны в свойствах 1°–5° для задачи (4.17).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. — М.: МЦНМО, 2013.
2. *Агранович М. С., Амосов Г. А., Левитин М.* Спектральные задачи для системы Ламе в гладких и негладких областях со спектральным параметром в краевом условии// Росс. ж. мат. физ. — 1999. — *6*, № 3. — С. 247–281.
3. *Агранович М. С., Менникен Р.* Спектральные задачи для уравнения Гельмгольца со спектральным параметром в граничных условиях на негладкой поверхности// Мат. сб. — 1999. — *30*, № 1. — С. 29–68.
4. *Бабский В. Г., Жуков М. Ю., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости. — Киев: Наукова думка, 1992.
5. *Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Гидромеханика невесомости. — М.: Наука, 1976.
6. *Войтицкий В. И.* Абстрактная спектральная задача Стефана// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Мат. Мех. Информ. Киберн. — 2006. — *19*, № 2. — С. 20–28.
7. *Войтицкий В. И.* О спектральных задачах, порожденных задачей Стефана с условиями Гиббса—Томсона// Нелин. гранич. задачи. — 2007. — *17*. — С. 31–49.
8. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д., Старков П. А.* Многокомпонентные задачи сопряжения и вспомогательные абстрактные краевые задачи// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *34*. — С. 5–44.
9. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Обобщенные функции и уравнения в свертках. — М.: Наука, 1994.
10. *Горбачук В. И.* Диссипативные граничные задачи для эллиптических дифференциальных уравнений// В сб.: «Функциональные и численные методы математической физики», Ин-т матем. и механики. — Киев: Наукова думка, 1998. — С. 60–63.
11. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложениях к задаче Стокса// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2004. — *2*. — С. 52–80.
12. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Мат. Мех. Информ. Киберн. — 2007. — *20*, № 2. — С. 3–12.
13. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и некоторых ее приложениях// Спектр. и эволюц. задачи. — 2011. — *21*, № 1. — С. 2–39.
14. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и полуторалинейных форм// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *57*. — С. 71–107.
15. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г.* Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи// Укр. мат. вестн. — 2004. — *1*, № 1. — С. 69–97.
16. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
17. *Копачевский Н. Д., Радомирская К. А.* Абстрактные смешанные краевые задачи сопряжения// Межд. науч. конф. «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — V», Ростов-на-Дону. — 2015. — С. 211.
18. *Копачевский Н. Д., Радомирская К. А.* Абстрактные краевые и спектральные задачи сопряжения// XXVI Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. — 2015. — С. 52.
19. *Крейн С. Г.* О колебаниях вязкой жидкости в сосуде// Докл. АН СССР. — 1964. — *159*, № 2. — С. 262–265.
20. *Крейн С. Г., Лаптев Г. И.* К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде// Функц. анализ и его прилож. — 1968. — *1*, № 2. — С. 40–50.
21. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
22. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1977.
23. *Старков П. А.* Операторный подход к задачам сопряжения// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Мат. Мех. Информ. Киберн. — 2002. — *15*, № 2. — С. 82–88.
24. *Старков П. А.* О базисности системы собственных элементов в задачах сопряжения// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2003. — *1*. — С. 118–131.
25. *Старков П. А.* Примеры многокомпонентных задач сопряжения// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Мат. Мех. Информ. Киберн. — 2005. — *18*, № 1. — С. 89–94.
26. *Agranovich M. S.* Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary// Russ. J. Math. Phys. — 2008. — *15*, № 2. — С. 146–155.
27. *Agranovich M. S.* Sobolev spaces, their generalizations, and elliptic problems in smooth and lipschitz domains. — Cham: Springer, 2015.

28. *Agranovich M. S., Katsenelenbanm B. Z., Sivov A. N., Voitovich N. N.* Generalized method of eigenoscillations in difraction theory. — Berlin: Wiley-VCN, 1999.
29. *Aubin J.-P.* Abstract boundary-value operators and their adjoint// Rend. Semin. Math. Univ. Padova. — 1970. — *43*. — С. 1–33.
30. *Babckii V. G., Kopachevskii N. D., Myshkis A. D., Slobozhanin L. A., Tyuptsov A. D.* Low-gravity fluid mechanics. — Springer, 1987.
31. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint problems for an ideal fluid. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 2001.
32. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint problems for viscous fluid. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 2003.
33. *McLean W.* Strongly elliptic systems and boundary integral equations. — Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
34. *Rychkov V. S.* On restrictions and extensions of the Besov and Triebel—Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains// J. Lond. Math. Soc. — 1999. — *60*, № 1. — С. 237–257.
35. *Showalter R. E.* Hilbert space methods for partial differential equations. — San Marcos: Southwest Texas State Univ., 1994.
36. *Voytitsky V. I., Kopachevsky N. D.* On the modified spectral Stefan problem and its abstract generalizations// Modern analysis and applications. The Mark Krein centenary conference. Volume 2: Differential operators and mechanics. Papers based on invited talks at the international conference on modern analysis and applications, Odessa, Ukraine, April 9–14, 2007. — Basel: Birkhauser, 2009. — С. 381–394.
37. *Voytitsky V. I., Kopachevsky N. D., Starkov P. A.* Multicomponent conjugation problems and auxiliary abstract boundary-value problems// J. Math. Sci. — 2010. — *170*, № 2. — С. 131–172.

Н. Д. Копачевский
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, Симферополь, проспект Вернадского, 4
E-mail: kopachevsky@list.ru

К. А. Радомирская
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, Симферополь, проспект Вернадского, 4
E-mail: radomirskaya@mail.ru

UDC 517.95+517.98

Abstract Mixed Boundary-Value and Spectral Conjugation Problems and Their Applications

© 2016 **N. D. Kopachevskii, K. A. Radomirskaya**

Abstract. Basing on the abstract Green formula, we study general approach to abstract boundary-value conjugation problems. We consider examples of some configurations of docked domains for conjugation problems using generalized Green formula for the Laplace operator. Also we consider spectral problems with two complex parameters: one of them can be treated as fixed and the other one as spectral. By means of the proposed general approach, we reduce these problems to the spectral problem for operator pencil with self-adjoint operator coefficients acting in Hilbert space and depending on two parameters.

REFERENCES

1. M. S. Agranovich, *Sobolevskie prostranstva, ikh obobshcheniya i ellipticheskie zadachi v oblastyakh s gladkoy i lipshitsevoy granitsey* [Sobolev Spaces, Their Generalizations, and Elliptic Problems in Domains with Smooth and Lipschitz Boundary], MTsNMO, Moscow, 2013 (in Russian).

2. M. S. Agranovich, G. A. Amosov, and M. Levitin, “Spektral’nye zadachi dlya sistemy Lame v gladkikh i negladkikh oblastyakh so spektral’nym parametrom v kraevom uslovii” [Spectral problems for the Lame system in smooth and nonsmooth domains with spectral parameter in the boundary-value condition], *Ross. zh. mat. fiz.* [Russ. J. Math. Phys.], 1999, **6**, No. 3, 247–281 (in Russian).
3. M. S. Agranovich and R. Menniken, “Spektral’nye zadachi dlya uravneniya Gel’mgol’tsa so spektral’nym parametrom v granichnykh usloviyakh na negladkoy poverkhnosti” [Spectral problems for the Helmholtz equation with spectral parameter in the boundary-value conditions on nonsmooth surface], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1999, **30**, No. 1, 29–68 (in Russian).
4. V. G. Babskiy, M. Yu. Zhukov, N. D. Kopachevskiy, A. D. Myshkis, L. A. Slobozhanin, and A. D. Tyuptsov, *Metody resheniya zadach gidromekhaniki dlya usloviy nevesomosti* [Methods of Solution for Problems of Hydromechanics in Weightlessness Conditions], Naukova Dumka, Kiev, 1992 (in Russian).
5. V. G. Babskiy, N. D. Kopachevskiy, A. D. Myshkis, L. A. Slobozhanin, and A. D. Tyuptsov, *Gidromekhanika nevesomosti* [Hydromechanics in Weightlessness], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
6. V. I. Voytitskiy, “Abstraktnaya spektral’naya zadacha Stefana” [Abstract Stefan spectral problem] *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. Mat. Mekh. Inform. Kibern.* [Sci. Notes Tavricheskiy Nat. Vernadskiy Univ. Ser. Math. Mech. Inform. Cybern.], 2006, **19**, No. 2, 20–28 (in Russian).
7. V. I. Voytitskiy, “O spektral’nykh zadachakh, porozhdennykh zadachey Stefana s usloviyami Gibbsa—Tomsona” [On spectral problems generated by the Stefan problem with Gibbs–Thomson conditions], *Nelin. granich. zadachi* [Nonlinear Bound. Value Probl.], 2007, **17**, 31–49 (in Russian).
8. V. I. Voytitskiy, N. D. Kopachevskiy, and P. A. Starkov, “Mnogokomponentnye zadachi sopryazheniya i vspomogatel’nye abstraktnye kraevye zadachi” [Multicomponent conjugation problems and auxiliary abstract boundary-value problems], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **34**, 5–44 (in Russian).
9. L. R. Volevich and S. G. Gindikin, *Obobshchennye funktsii i uravneniya v svertkakh*, Nauka, M., 1994 (in Russian).
10. V. I. Gorbachuk, “Dissipativnye granichnye zadachi dlya ellipticheskikh differentsial’nykh uravneniy” [Dissipative boundary-value problems for elliptic differential equations], In: *Funktsional’nye i chislennye metody matematicheskoy fiziki* [Functional and Numerical Methods of Mathematical Physics], In-t matem. i mekhaniki, Naukova dumka, Kiev, 1998, 60–63 (in Russian).
11. N. D. Kopachevskiy, “Ob abstraktnoy formule Grina dlya troyki gil’bertovykh prostranstv i ee prilozheniyakh k zadache Stoksa” [On abstract Green formula for triple of Hilbert spaces and its applications to the Stokes problem], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2004, **2**, 52–80 (in Russian).
12. N. D. Kopachevskiy, “Abstraktnaya formula Grina dlya smeshannykh kraevykh zadach” [Abstract Green formula for mixed boundary-value problems], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. Mat. Mekh. Inform. Kibern.* [Sci. Notes Tavricheskiy Nat. Vernadskiy Univ. Ser. Math. Mech. Inform. Cybern.], 2007, **20**, No. 2, 3–12 (in Russian).
13. N. D. Kopachevskiy, “Ob abstraktnoy formule Grina dlya smeshannykh kraevykh zadach i nekotorykh ee prilozheniyakh” [On abstract Green formula for mixed boundary-value problems and some its applications], *Spektr. i evolyuts. zadachi* [Spectral Evolution Probl.], 2011, **21**, No. 1, 2–39 (in Russian).
14. N. D. Kopachevskiy, “Ob abstraktnoy formule Grina dlya troyki gil’bertovykh prostranstv i polutoralineynykh form” [On abstract Green formula for a triple of Hilbert spaces and sesquilinear forms] *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **57**, 71–107 (in Russian).
15. N. D. Kopachevskiy and S. G. Kreyn, “Abstraktnaya formula Grina dlya troyki gil’bertovykh prostranstv, abstraktnye kraevye i spektral’nye zadachi” [Abstract Green formula for a triple of Hilbert spaces, abstract boundary-value and spectral problems], *Ukr. mat. vestn.* [Ukr. Math. Bull.], 2004, **1**, No. 1, 69–97 (in Russian).
16. N. D. Kopachevskiy, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: evolyutsionnye i spektral’nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolution and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
17. N. D. Kopachevskiy and K. A. Radomirskaya, “Abstraktnye smeshannye kraevye zadachi sopryazheniya” [Abstract mixed boundary-value conjugation problems], Int. Sci. Conf. *Sovremennye metody i problemy teorii operatorov i garmonicheskogo analiza i ikh prilozheniya — V* [Contemporary methods and problems of operator theory and harmonic analysis and their applications], Rostov-na-Donu, 2015, 211 (in Russian).
18. N. D. Kopachevskiy and K. A. Radomirskaya, “Abstraktnye kraevye i spektral’nye zadachi sopryazheniya” [Abstract boundary-value and spectral conjugation problems], *XXVI Krymskaya osennyaya*

matematicheskaya shkola-simpozium po spektral'nym i evolyutsionnym zadacham [XXVI Crimean Autumn Mathematical School-Symposium on Spectral and Evolution Problems], 2015, 52 (in Russian).

19. S. G. Kreyn, "O kolebaniyakh vyazkoy zhidkosti v sosude" [On oscillations of viscous fluid in a vessel], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1964, **159**, No. 2, 262–265 (in Russian).
20. S. G. Kreyn and G. I. Laptev, "K zadache o dvizhenii vyazkoy zhidkosti v otkrytom sosude" [To the problem of motion of viscous fluid in an open vessel], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1968, **1**, No. 2, 40–50 (in Russian).
21. Zh.-L. Lions and E. Madzhenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Nonhomogeneous Boundary-Value Problems and Their Applications], Mir, Moscow, 1971 (in Russian).
22. Zh.-P. Oben, *Priblizhennoe reshenie ellipticheskikh kraevykh zadach* [Approximate Solution of Elliptic Boundary-Value Problems], Mir, Moscow, 1977 (in Russian).
23. P. A. Starkov, "Operatornyy podkhod k zadacham sopryazheniya" [Operator approach to conjugation problems], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. Mat. Mekh. Inform. Kibern.* [Sci. Notes Tavricheskiy Nat. Vernadskiy Univ. Ser. Math. Mech. Inform. Cybern.], 2002, **15**, No. 2, 82–88 (in Russian).
24. P. A. Starkov, "O bazisnosti sistemy sobstvennykh elementov v zadachakh sopryazheniya" [On basisness of eigenelements in conjugation problems] *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2003, **1**, 118–131 (in Russian).
25. P. A. Starkov, "Primery mnogokomponentnykh zadach sopryazheniya" [Examplex of multicomponent conjugation problems], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. Mat. Mekh. Inform. Kibern.* [Sci. Notes Tavricheskiy Nat. Vernadskiy Univ. Ser. Math. Mech. Inform. Cybern.], 2005, **18**, No. 1, 89–94 (in Russian).
26. M. S. Agranovich, "Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary," *Russ. J. Math. Phys.*, 2008, **15**, No. 2, 146–155.
27. M. S. Agranovich, *Sobolev Spaces, Their Generalizations, and Elliptic Problems in Smooth and Lipschitz Domains*, Springer, Cham, 2015.
28. M. S. Agranovich, B. Z. Katsenelenbanm, A. N. Sivov, and N. N. Voitovich, *Generalized Method of Eigenoscillations in Difraction Theory*, Wiley-VCN, Berlin, 1999.
29. J.-P. Aubin, "Abstract boundary-value operators and their adjoint," *Rend. Semin. Math. Univ. Padova*, 1970, **43**, 1–33.
30. V. G. Babckii, N. D. Kopachevskii, A. D. Myshkis, L. A. Slobozhanin, and A. D. Tyuptsov, *Low-Gravity Fluid Mechanics*, Springer, 1987.
31. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Self-Adjoint Problems for an Ideal Fluid*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 2001.
32. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-Adjoint Problems for Viscous Fluid*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 2003.
33. W. McLean, *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
34. V. S. Rychkov, "On restrictions and extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains," *J. Lond. Math. Soc.* , 1999, **60**, No. 1, 237–257.
35. R. E. Showalter, *Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations*, Southwest Texas State Univ., San Marcos, 1994.
36. V. I. Voytitsky and N. D. Kopachevsky, "On the modified spectral Stefan problem and its abstract generalizations"// *Modern analysis and applications. The Mark Krein centenary conference. Volume 2: Differential operators and mechanics. Papers based on invited talks at the international conference on modern analysis and applications*, Odessa, Ukraine, April 9–14, 2007, Birkhauser, Basel, 2009, 381–394.
37. V. I. Voytitsky, N. D. Kopachevsky, and P. A. Starkov, "Multicomponent conjugation problems and auxiliary abstract boundary-value problems," *J. Math. Sci.*, 2010, **170**, No. 2, 131–172.

N. D. Kopachevskii
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, 295007, Russia
E-mail: kopachevsky@list.ru

K. A. Radomirskaya
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, 295007, Russia
E-mail: radomirskaya@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 61 (2016). С. 103–114

УДК 514.13+514.132

О ФОРМУЛЕ ОБЪЕМА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОКТАЭДРА С mm2-СИММЕТРИЕЙ

© 2016 г. В. А. КРАСНОВ, Э. Ш. ХИСЯМЕТДИНОВА

Аннотация. В настоящей работе получены явные интегральные формулы объема произвольных компактных гиперболических октаэдров, обладающих mm2-симметрией, в терминах двугранных углов, а также указан алгоритм вычисления объема таких октаэдров в сферическом пространстве.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение 103
2. Предварительные результаты 104
3. Объем гиперболического октаэдра с mm2-симметрией 106
3.1. Гиперболический октаэдр с mmm-симметрией 106
3.2. Гиперболический октаэдр с mm2-симметрией 109
3.3. Проверка формулы (3.7) 112
Список литературы 112

1. Введение

Вычисление объемов является очень старой и сложной проблемой, берущей свое начало во времена античной математики и не потерявшей актуальности по сей день. По-видимому, первый серьезный результат об объеме треугольной пирамиды получен еще Архимедом, а в 16-м веке Тарталья выразил объем евклидова тетраэдра через квадраты длин его ребер. В настоящее время результат Тартальи известен как детерминантная формула Кэли—Менгера. Заметим, что аналогичная формула имеет место и для симплексов произвольной размерности.

В сферическом и гиперболическом случаях ситуация более сложная. Объем бипрямоугольного тетраэдра (ортосхемы) в сферическом случае был найден Л. Шлефли [20], а Н. И. Лобачевский [9] и Я. Бойяи [10] независимо друг от друга вычислили объем гиперболической ортосхемы. Объем идеального гиперболического тетраэдра был найден еще в 1835 году Н. И. Лобачевским [9], а в 1982 году Дж. Милнор [15] представил этот результат в более компактном виде. В свою очередь, Э. Б. Винбергом [4] были получены формулы объема гиперболических идеальных пирамид, а также тетраэдров, имеющих одну, две и три вершины на бесконечности.

Что касается формулы объема произвольного неевклидова тетраэдра, то она долгое время была неизвестна. Лишь на рубеже веков эта проблема была полностью решена в работах Ю. Чо и Х. Кима [11], Дж. Мураками и У. Яно [19], Дж. Мураками и А. Ушиджимы [17], Д. А. Деревнина и А. Д. Медных [12], а также Дж. Мураками [18]. Нельзя не упомянуть, что еще в 1906 году итальянский герцог Г. Сфорца нашел формулу для вычисления объема неевклидова тетраэдра. К сожалению, выдающаяся работа Г. Сфорца [21] долгое время была полностью забыта и приобрела широкую известность лишь после дискуссии А. Д. Медных с Х. М. Монтезиносом на конференции в Испании в августе 2006 года.

В 2002 году Я. Моханти [16] был вычислен объем симметричного идеального октаэдра, а в 2008 году Н. В. Абросимовым, М. Годой-Молина и А. Д. Медных [3] были получены формулы объемов

Рукопись поступила в редакцию 26 января 2016 г. Работа первого автора выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, задание 1.1974.2014/K «Краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений с частными производными».

трехмерных сферических многогранников, обладающих нетривиальными симметриями, в частности, mmm- и 2|m-октаэдров. В 2011 году Г. А. Байгонакова, М. Годой-Молина и А. Д. Медных [5] вычислили объем гиперболического mmm-октаэдра в простейшей геометрической ситуации. Наконец, в 2013 году в работах Н. В. Абросимова и Г. В. Байгонаковой [2], а также В. А. Краснова [8] параллельно и независимо были получены формулы объема произвольного гиперболического mmm-октаэдра. Кроме того, в работе [7] предложена интегральная формула объема произвольного гиперболического октаэдра с 2|m-симметрией.

В настоящей статье найдена явная интегральная формула объема произвольного компактного гиперболического октаэдра, обладающего mm2-симметрией, а также описан алгоритм вычисления объема mm2-октаэдров в сферическом пространстве. Стоит отметить, что полученный в работе результат является обобщением теоремы Р. В. Галиулина, С. Н. Михалева и И. Х. Сабитова [6] на случаи классических неевклидовых пространств.

2. Предварительные результаты

Будем рассматривать задачу вычисления объема многогранника на трехмерной сфере $\mathbb{S}^3$ и в трехмерном гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^3$. Кроме того, для простоты будем предполагать, что мы имеем дело с пространствами постоянной кривизны $K = 1$ и $K = -1$ соответственно.

Одним из основных инструментов при вычислении объемов трехмерных неевклидовых многогранников является формула Шлефли для дифференциала объема. Заметим, что Л. Шлефли [20] доказал эту формулу для сферического n-мерного пространства, а позднее Х. Кнезер [13] обобщил ее и на гиперболический случай. Однако нас будет интересовать лишь ее частный случай, когда $n = 3$.

Теорема 2.1 (дифференциальная формула Шлефли). *Пусть P — выпуклый многогранник в пространстве $\mathbb{S}^3$ или $\mathbb{H}^3$. Если многогранник P непрерывно деформируется в пространстве, не изменяя своего комбинаторного строения, а его двугранные углы изменяются дифференцируемым образом, то и объем $V = V(P)$ также изменяется дифференцируемым образом и его дифференциал выражается по формуле*

$$K\,dV = \frac{1}{2}\sum_i l_i\,d\alpha_i, \tag{2.1}$$

где K — кривизна пространства, l_i — длина i-го ребра многогранника, а суммирование ведется по всем ребрам многогранника P. При этом $d\alpha_i$ обозначает дифференциал двугранного угла α_i при i-м ребре.

В дальнейшем нам также понадобится формула объема произвольного гиперболического тетраэдра, полученная в работе [12].

Теорема 2.2 (Д. А. Деревнин, А. Д. Медных, 2004). *Пусть $T = T(A, B, C, D, E, F)$ — гиперболический тетраэдр, двугранные углы которого A, B, C лежат при одной вершине, а D, E, F — противолежащие им двугранные углы* (*рис.* 2.1). *Тогда объем гиперболического тетраэдра выражается интегралом по отрезку вещественной прямой с вещественнозначной подынтегральной функцией*

$$\mathrm{V}(T) = -\frac{1}{4}\int\limits_{Z_2}^{Z_1}\ln\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}\sin\frac{\xi+A+B+D+E}{2}\sin\frac{\xi+A+C+D+F}{2}\sin\frac{\xi+B+C+E+F}{2}}{\cos\frac{\xi+A+B+C}{2}\cos\frac{\xi+A+E+F}{2}\cos\frac{\xi+B+D+F}{2}\cos\frac{\xi+C+D+E}{2}}\right|d\xi, \tag{2.2}$$

где

$$Z_1 = \mathrm{arctg}\frac{k_2}{k_1} - \mathrm{arctg}\frac{k_4}{k_3},$$
$$Z_2 = \mathrm{arctg}\frac{k_2}{k_1} + \mathrm{arctg}\frac{k_4}{k_3},$$

а вещественные числа k_1, k_2, k_3 и k_4 имеют вид

$$k_1 = -(\cos(A+B+C+D+E+F) + \cos(A+D) + \cos(B+E) + \cos(C+F) +$$
$$+ \cos(D+E+F) + \cos(D+B+C) + \cos(A+E+C) + \cos(A+B+F)),$$

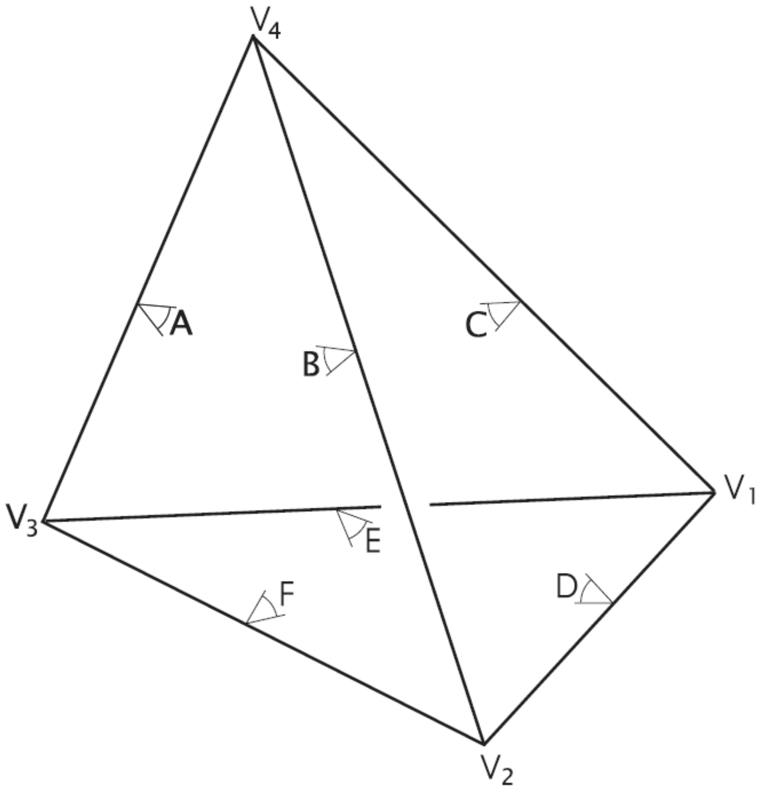

Рис. 2.1

$$k_2 = \sin(A+B+C+D+E+F) + \sin(A+D) + \sin(B+E) + \sin(C+F) +$$
$$+ \sin(D+E+F) + \sin(D+B+C) + \sin(A+E+C) + \sin(A+B+F)),$$
$$k_3 = 2(\sin A \sin D + \sin B \sin E + \sin C \sin F),$$
$$k_4 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}.$$

Заметим, что доказательство этой формулы основывается на геометрических соотношениях между длинами ребер тетраэдра и его двугранными углами, определенных теоремой синусов—тангенсов. Кроме того, одним из ключевых шагов доказательства является применение дифференциальной формулы Шлефли (2.1). В работе [12] также было сказано, что из формулы Деревнина—Медных вытекает формула Мураками—Яно [19]. Однако формулу (2.2) можно легко получить и из формулы Мураками—Яно [19]. Так, в работе [7] приведен ее обратный вывод и, как следствие, получена интегральная формула объема гиперболического тетраэдра в терминах длин ребер.

Далее, пусть по-прежнему T — неевклидов тетраэдр, двугранные углы которого суть A, B, C, D, E, F (рис. 2.1).

Обозначим через

$$G = \langle -\cos\alpha_{ij}\rangle_{i,j=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & -\cos B & -\cos F \\ -\cos A & 1 & -\cos C & -\cos E \\ -\cos B & -\cos C & 1 & -\cos D \\ -\cos F & -\cos E & -\cos D & 1 \end{pmatrix}$$

матрицу Грама тетраэдра T. Рассмотрим присоединенную матрицу $H = \langle c_{ij}\rangle_{i,j=1,2,3,4}$, где $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, при этом M_{ij} — ij-й минор матрицы G.

В следующей теореме приведены некоторые основные соотношения для двугранных углов и длин ребер гиперболического и сферического тетраэдра.

Теорема 2.3. *Пусть* $T = T(A, B, C, D, E, F)$ — *гиперболический* (*сферический*) *тетраэдр, двугранные углы которого* A, B, C *лежат при одной вершине, а* D, E, F — *противолежащие*

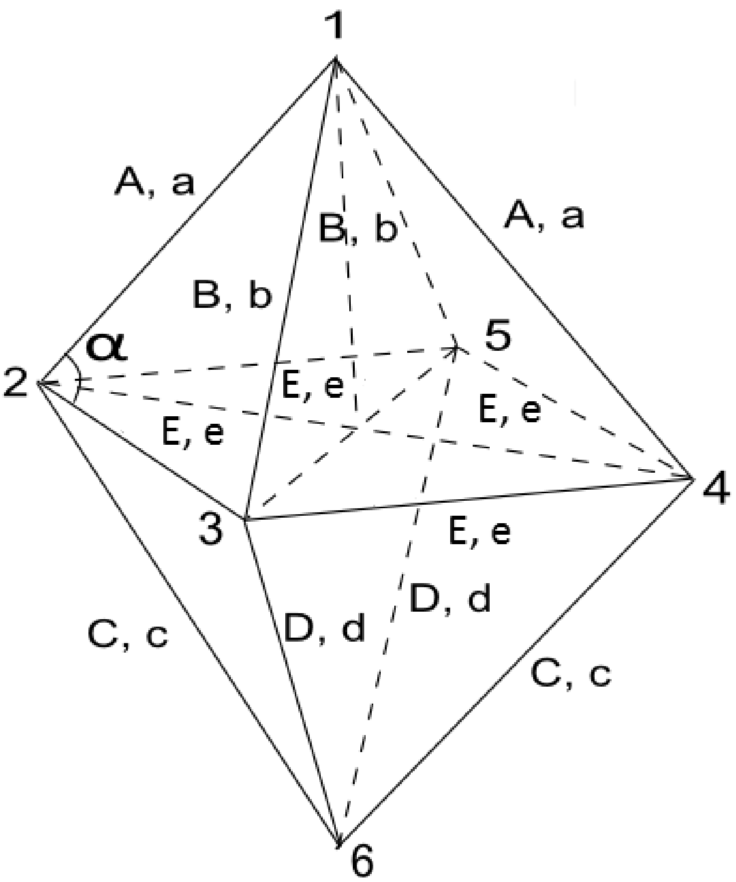

Рис. 3.1

им двугранные углы (*см. рис.* 2.1). *Кроме того, пусть* l_{ij} — *длина ребра, соединяющего вершины* v_i *и* v_j. *Тогда*:

$$\det G < 0 \quad (\det G > 0); \tag{2.3}$$

$$c_{ii} > 0; \tag{2.4}$$

$$\operatorname{ch} l_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}} \quad (\cos l_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}}), \tag{2.5}$$

В свою очередь, критерий существования гиперболического тетраэдра с наперед заданным набором двугранных углов дается теоремой, доказательство которой приведено в работе [22].

Теорема 2.4 (А. Ушиджима, 2013)**.** *Для существования гиперболического тетраэдра* $T = T(A, B, C, D, E, F)$ *необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих условий*:

$$\begin{cases} \operatorname{sgn} G = (3, 1) \\ c_{ij} > 0, \end{cases}$$

где $i \neq j$, *при этом* $\operatorname{sgn} G$ *есть сигнатура матрица* G.

Наконец, для существования сферического тетраэдра с заданным набором двугранных углов необходимо и достаточно, чтобы его матрица Грама G была положительно определена [4].

3. Объем гиперболического октаэдра с mm2-симметрией

3.1. Гиперболический октаэдр с mmm-симметрией. Рассмотрим октаэдр O, обладающий mm2-симметрией, т. е. октаэдр, остающийся инвариантным при отражениях от двух взаимно перпендикулярных плоскостей, пересекающих O по его реберным циклам (рис. 3.1). Обозначим через A, B, C, D, E величины его двугранных углов.

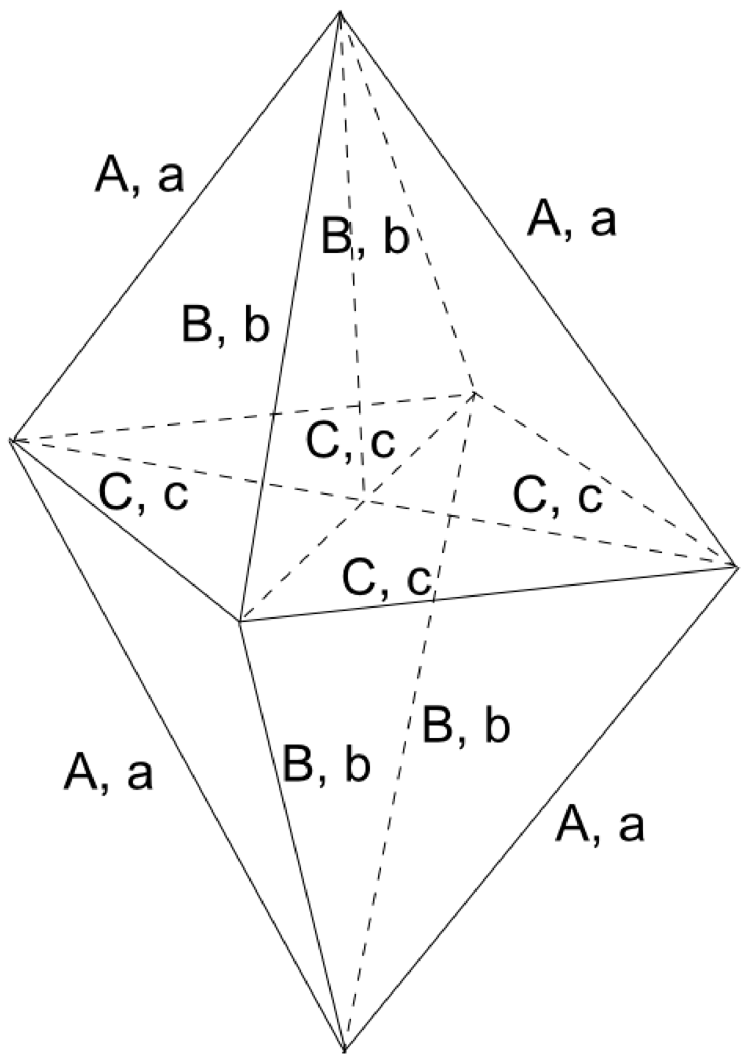

Рис. 3.2

Очевидно, что mmm-октаэдр (рис. 3.2), т. е. октаэдр $O = O(A, B, C)$, остающийся инвариантным при отражениях относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей, пересекающих его по реберным циклам, является частным случаем октаэдра с mm2-симметрией.

Как было сказано во введении, объем гиперболического mmm-октаэдра параллельно и независимо был вычислен в работах [2, 8].

Теорема 3.1 (В. А. Краснов, 2013). *Пусть $O = O(A, B, C)$ — гиперболический октаэдр, обладающий* mmm-*симметрией. Тогда его объем $V = V(O)$ выражается формулой*

$$V(O) = -2\int\limits_{\tilde{Z}_2}^{\tilde{Z}_1} \ln\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}\cos\frac{2\xi+A+B}{4}\cos\frac{2\xi+A+C}{4}\cos\frac{2\xi+B+C}{4}}{\cos\frac{2\xi+A+B+\pi}{4}\cos\frac{2\xi+A+C+\pi}{4}\cos\frac{2\xi+B+C+\pi}{4}\cos\frac{2\xi+3\pi}{4}}\right| d\xi, \tag{3.1}$$

где

$$\tilde{Z}_1 = \operatorname{arctg}\frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1} - \operatorname{arctg}\frac{\tilde{k}_4}{\tilde{k}_3},$$

$$\tilde{Z}_2 = \operatorname{arctg}\frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1} + \operatorname{arctg}\frac{\tilde{k}_4}{\tilde{k}_3},$$

$$\tilde{k_1} = \sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{2A+\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2B+\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2C+\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{2A+2B+2C+\pi}{4}\right)\right),$$

$$\tilde{k_2} = -\sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{2A-\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2B-\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2C-\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{2A+2B+2C-\pi}{4}\right)\right),$$

$$\tilde{k_3} = 2\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right),$$

$$\tilde{k_4} = \sqrt{\tilde{k_1}^2 + \tilde{k_2}^2 - \tilde{k_3}^2}.$$

Теорема 3.2 (Абросимов, Байгонакова, 2013)**.** *Пусть* $O = O(A, B, C)$ — *гиперболический октаэдр с* mmm*-симметрией. Тогда его объем* $V = V(O)$ *отыскивается по формулам*:

1. *если* $0 \leqslant T \leqslant 1$, *то*

$$V = -\int\limits_0^{\tau} \ln\left|\frac{(1-\cos A)(\cos A - \cos t)(\cos B - \cos t)(\cos C - \cos t)}{(1+\cos A)(\cos A + \cos t)(\cos B + \cos t)(\cos C + \cos t)}\right| dt, \tag{3.2$'$}$$

где острый угол $0 < \tau < \dfrac{\pi}{2}$ *находится из уравнения* $\sin\tau = T$;

2. *если* $T > 1$, *то*

$$V = 2\int\limits_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{arctg}\frac{1}{\mathrm{tg}\eta} + \mathrm{arctg}\frac{\cos A}{\mathrm{tg}\eta} + \mathrm{arctg}\frac{\cos B}{\mathrm{tg}\eta} + \mathrm{arctg}\frac{\cos C}{\mathrm{tg}\eta}\right)\frac{d\eta}{\cos\eta}, \tag{3.2$''$}$$

где величина $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ *находится из уравнения* $\dfrac{1}{\cos\theta} = T$;

3. *если* $T = 1$, *то*

$$V = 2\left(\int\limits_0^{\mathrm{arth}(\sin A)} \frac{x dx}{\mathrm{ch} x} + \int\limits_0^{\mathrm{arth}(\sin B)} \frac{x dx}{\mathrm{ch} x} - \int\limits_0^{\mathrm{arth}(\sin C)} \frac{x dx}{\mathrm{ch} x}\right), \tag{3.2$'''$}$$

при этом

$$T = \sqrt{\frac{(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)}{1+\cos A+\cos B+\cos C}}.$$

Замечание 3.1. Идея доказательства формулы (3.1) основана на выборе подходящей триангуляции mmm-октаэдра, последующим исключении возникающих вспомогательных параметров (двугранных углов) и вычислении объемов тетраэдров триангуляции по формуле Деревнина—Медных (2.2). В свою очередь, для доказательства справедливости формул (3.2$'$)–(3.2$'''$) в работе [2] проверяется, что соответствующие функции объема удовлетворяют дифференциальной формуле Шлефли (2.1) и некоторым начальным условиям (т. е. функции объема октаэдров с mmm-симметриями есть единственные решения некоторых задач Коши). Несмотря на то, что формулы (3.1) и (3.2$'$)–(3.2$''$) существенно отличаются по своей записи, на конкретных примерах они приводят к одинаковым результатам.

Пример 3.1. Рассмотрим гиперболический mmm-октаэдр $O = O(A, B, C)$, где

$$A = B = \frac{2\pi}{3}, \quad C = \arccos\frac{2}{5}.$$

Тогда по формулам (3.1) и (3.2$'$) $V(O) \approx 0{,}948$.

Пример 3.2. Пусть $O = O(A, B, C)$ — гиперболический октаэдр с mmm-симметрией, при этом пусть

$$A = B = \frac{2\pi}{3}, \quad C = \arccos\frac{1}{3}.$$

Согласно формулам (3.1) и (3.2$''$), $V(O) \approx 0{,}661$.

Пример 3.3. Рассмотрим гиперболический mmm-октаэдр $O = O(A, B, C)$. Пусть

$$A = B = \frac{2\pi}{3}, \quad C = \arccos\frac{1}{4}.$$

Тогда в силу (3.1) и (3.2$'''$) $V(O) \approx 0{,}394$.

Замечание 3.2. Заметим, что метод, основанный на применении формулы Шлефли (2.1), может быть использован и при доказательстве формулы (3.1). А именно, используя метрические соотношения между длинами ребер и двугранными углами гиперболического тетраэдра (теорема 2.3, формула (2.5)), элементарными вычислениями можно легко установить, что длины ребер двугранных углов $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ тетраэдра $\tilde{T}$ равны длинам ребер двугранных углов A, B, C октаэдра O соответственно [5]. Значит, если подходящим образом склеить 8 одинаковых экземпляров $\tilde{T}$, то получится в точности гиперболический mmm-октаэдр $O(A,B,C)$.

Заметим, что в работах [2,8] приведены разные доказательства критерия существования гиперболического октаэдра с mmm-симметрией. В заключение данного пункта мы докажем критерий существования сферического mmm-октаэдра $O = O(A,B,C)$ с заданным набором двугранных углов.

Лемма 3.1. *Для существования сферического* mmm-*октаэдра* $O = O(A,B,C)$ (*рис.* 3.1) *необходимо и достаточно выполнения следующей системы условий*:

$$\begin{cases} \cos^2\dfrac{A}{2} + \cos^2\dfrac{B}{2} < 1, \\ \cos^2\dfrac{A}{2} - \sin^2\dfrac{B}{2} - \cos^2\dfrac{C}{2} < 0. \end{cases}$$

Доказательство. Из определения октаэдра с mmm-симметрией следует, что существование mmm-октаэдра $O = O(A,B,C)$ равносильно существованию сферического тетраэдра $\tilde{T} = \tilde{T}\Big(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big)$ с матрицей Грама

$$G(\tilde{T}) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\dfrac{A}{2} & -\cos\dfrac{B}{2} & -\cos\dfrac{C}{2} \\ -\cos\dfrac{A}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\cos\dfrac{B}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\cos\dfrac{C}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Применяя к G критерий Сильвестра (квадратичная форма с матрицей G должна быть положительно определена), получаем требуемую систему. □

3.2. Гиперболический октаэдр с mm2**-симметрией.** А теперь рассмотрим задачу вычисления объема произвольного компактного гиперболического октаэдра, обладающего mm2-симметрией (рис. 3.1).

Для вычисления объема гиперболического октаэдра O, допускающего mm2-симметрию, рассмотрим его разбиение на тетраэдры T_1, T_2, T_3 и T_4 с вершинами (1234), (1245), (2346) и (2456) соответственно.

Так как плоскость (1264) является плоскостью симметрии нашего октаэдра, то тетраэдры T_1 и T_2, а также T_3 и T_4 попарно конгруэнтны. Следовательно, вычисление объема октаэдра $V = V(O)$ в нашем случае сводится к вычислению объемов тетраэдров T_1 и T_3:

$$V(O) = 2 \cdot V(T_1) + 2 \cdot V(T_3). \tag{3.3}$$

В свою очередь, для вычисления объемов тетраэдров триангуляции нам достаточно найти двугранный угол x при основании четырехугольной гиперболической пирамиды (12345). Для нахождения x мы, как и в случае октаэдров с mmm- и 2|m-симметриями (см. [2,5,8]), будем использовать технику, заключающуюся в описании сферы бесконечно малого радиуса, центр которой совпадает с некоторой вершиной многогранника, и последующим применением сферической теоремы косинусов [9].

Вначале опишем сферу бесконечного малого радиуса с центром в вершине 2 и найдем ее пересечение с тетраэдром (1234). Далее, обозначим плоский угол грани (123) при вершине 2 через α. Не нарушая общности, предположим, что ее пересечение с тетраэдром триангуляции (1234) есть сферический прямоугольный треугольник с внутренними углами x, $\dfrac{A}{2}$ и $\dfrac{\pi}{2}$ и гипотенузой α [9]. Запишем сферическую теорему Пифагора для этого треугольника:

$$\cos\alpha = \mathrm{ctg}x \cdot \mathrm{ctg}\frac{A}{2},$$

откуда

$$x = \mathrm{arctg}\frac{\cos\alpha}{\mathrm{ctg}\frac{A}{2}}. \tag{3.4}$$

Найдем плоский угол α, предварительно рассмотрев четырехугольную пирамиду (12643) и описав сферу бесконечного малого радиуса с центром в вершине 2. Как и ранее, предположим, что полученное пересечение сферы и многогранника представляет собой сферический треугольник с углами E, $\dfrac{A}{2}$ и $\dfrac{C}{2}$ и стороной α, лежащей против угла $\dfrac{C}{2}$ [9].

Применим теперь к полученному треугольнику вторую теорему косинусов и выразим $\cos\alpha$. Окончательно имеем:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{A}{2}\cos E}{\sin\frac{A}{2}\sin E}. \tag{3.5}$$

Наконец, подставив (3.5) в (3.4), получим выражение неизвестного двугранного угла x через двугранные углы исходного октаэдра:

$$x = \mathrm{arcctg}\frac{\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{A}{2}\cos E}{\cos\frac{A}{2}\sin E}. \tag{3.6}$$

Таким образом, гиперболический октаэдр, обладающий mm2-симметрией, однозначно с точностью до движения определяется своими двугранными углами A, B, C, D и E, т. е. $O = O(A, B, C, D, E)$.

Вычислив теперь объемы тетраэдров триангуляции T_1 и T_3 по формуле Деревнина—Медных (2.2) и воспользовавшись формулой (3.3), мы получим следующую теорему.

Теорема 3.3. *Пусть $O = O(A, B, C, D, E)$ — гиперболический октаэдр, обладающий* mm2-*симметрией. Тогда его объем $V = V(O)$ выражается формулой*

$$V(O) = 2V(\frac{A}{2}, B, \frac{A}{2}, \lambda, \frac{\pi}{2}, \lambda) + 2V(\frac{C}{2}, D, \frac{C}{2}, E-\lambda, \frac{\pi}{2}, E-\lambda), \tag{3.7}$$

где

$$\lambda = \mathrm{arcctg}\frac{\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{A}{2}\cos E}{\cos\frac{A}{2}\sin E},$$

$$V(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon,\zeta) = -\frac{1}{4}\int\limits_{z_2}^{z_1} \ln\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}\sin\frac{\xi+\alpha+\beta+\delta+\epsilon}{2}\sin\frac{\xi+\alpha+\gamma+\delta+\zeta}{2}\sin\frac{\xi+\beta+\gamma+\epsilon+\zeta}{2}}{\cos\frac{\xi+\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\xi+\alpha+\epsilon+\zeta}{2}\cos\frac{\xi+\beta+\delta+\zeta}{2}\cos\frac{\xi+\gamma+\delta+\epsilon}{2}}\right| d\xi,$$

$$z_1 = \mathrm{arctg}\frac{k_2}{k_1} - \mathrm{arctg}\frac{k_4}{k_3},$$

$$z_2 = \mathrm{arctg}\frac{k_2}{k_1} + \mathrm{arctg}\frac{k_4}{k_3},$$

$$k_1 = -(\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon+\zeta) + \cos(\alpha+\delta) + \cos(\beta+\epsilon) + \cos(\gamma+\zeta) +$$
$$+ \cos(\delta+\epsilon+\zeta) + \cos(\delta+\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\epsilon+\gamma) + \cos(\alpha+\beta+\zeta)),$$

$$k_2 = \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon+\zeta) + \sin(\alpha+\delta) + \sin(\beta+\epsilon) + \sin(\gamma+\zeta) +$$
$$+ \sin(\delta+\epsilon+\zeta) + \sin(\delta+\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\epsilon+\gamma) + \sin(\alpha+\beta+\zeta)),$$

$$k_3 = 2(\sin\alpha\sin\delta + \sin\beta\sin\epsilon + \sin\gamma\sin\zeta),$$

$$k_4 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}.$$

Таким образом, формула (3.7) является интегральной формулой, выражающей объем произвольного гиперболического октаэдра, обладающего mm2-симметрией, через величины двугранных углов.

Что касается сферического октаэдра, обладающего mm2-симметрией, то здесь вместо формулы Деревнина—Медных [12] для вычислении объема тетраэдра триангуляции можно использовать формулу Мураками [18] объема произвольного сферического тетраэдра в терминах двугранных углов, а вспомогательный параметр λ будет выражаться через двугранные углы A, C и E исходного октаэдра $O = O(A,B,C,D,E)$ точно так же, как и в гиперболическом случае [9].

Нетрудно заметить, что существование неевклидова октаэдра $O = O(A,B,C,D,E)$ с mm2-симметрией равносильно существованию тетраэдров $T_1 = T_1\Big(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \lambda\Big)$ и $T_1 = T_1\Big(\frac{C}{2}, \frac{D}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, E-\lambda\Big)$ $(E > \lambda)$ с равными ребрами (23), (34) и (24) (см. рис. 3.1).

Таким образом, используя теоремы 2.3, 2.4, а также условие положительной определенности матрицы Грама сферического тетраэдра (см. раздел 2), можно сформулировать критерии существования гиперболического и сферического октаэдра с mm2-симметрией с наперед заданными наборами двугранных углов $(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D},\mathrm{E})$.

Лемма 3.2. *Для существования компактного гиперболического* mm2*-октаэдра* $O = O(A,B,C,D,E)$ (*рис.* 3.1) *необходимо и достаточно выполнения следующей системы условий*:

$$\begin{cases} \mathrm{sign} G_1 = (3,1), \\ \mathrm{sign} G_2 = (3,1), \\ c^1_{ij} > 0, i \neq j, \\ c^2_{ij} > 0, i \neq j, \\ \dfrac{c^1_{23}}{\sqrt{c^1_{22}c^1_{33}}} = \dfrac{c^2_{23}}{\sqrt{c^2_{22}c^2_{33}}}, \\ \dfrac{c^1_{13}}{\sqrt{c^1_{11}c^1_{33}}} = \dfrac{c^2_{13}}{\sqrt{c^2_{11}c^2_{33}}}, \\ \dfrac{c^1_{12}}{\sqrt{c^1_{11}c^1_{22}}} = \dfrac{c^2_{12}}{\sqrt{c^2_{11}c^2_{22}}}, \end{cases}$$

где матрицы G_1 *и* G_2 *имеют вид*:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\dfrac{A}{2} & -\cos B & -\cos\lambda \\ -\cos\dfrac{A}{2} & 1 & -\cos\dfrac{A}{2} & 0 \\ -\cos B & -\cos\dfrac{A}{2} & 1 & -\cos\lambda \\ -\cos\lambda & 0 & -\cos\lambda & 1 \end{pmatrix},$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\dfrac{C}{2} & -\cos D & -\cos(E-\lambda) \\ -\cos\dfrac{C}{2} & 1 & -\cos\dfrac{C}{2} & 0 \\ -\cos D & -\cos\dfrac{C}{2} & 1 & -\cos(E-\lambda) \\ -\cos(E-\lambda) & 0 & -\cos(E-\lambda) & 1 \end{pmatrix},$$

а c^1_{ij} *и* c^2_{ij} — *суть алгебраические дополнения к* ij*-м элементам матриц* G_1 *и* G_2 *соответственно.*

Замечание 3.3. В условиях теоремы 3.3 и леммы 3.2 мы предполагаем, что среди вершин октаэдра O нет бесконечно удаленных. Заметим, что если идеальными являются вершины (2.1) и (или) (3.4), то лемма 3.1 также справедлива. В случае, если среди бесконечно удаленных вершин находятся вершины гиперболического ромба (2345), то вычисление объема $O = O(A,B,C,D,E)$ легко сводится к проблеме вычисления объемов тетраэдров с идеальными вершинами, полностью решенной в работе [4].

Лемма 3.3. *Для существования сферического* $\mathrm{mm2}$*-октаэдра* $O = O(A, B, C, D, E)$ (*рис.* 3.1) *необходимо и достаточно выполнения следующей системы условий*:

$$\begin{cases} \dfrac{c^1_{23}}{\sqrt{c^1_{22}c^1_{33}}} = \dfrac{c^2_{23}}{\sqrt{c^2_{22}c^2_{33}}}, \\ \dfrac{c^1_{13}}{\sqrt{c^1_{11}c^1_{33}}} = \dfrac{c^2_{13}}{\sqrt{c^2_{11}c^2_{33}}}, \\ \dfrac{c^1_{12}}{\sqrt{c^1_{11}c^1_{22}}} = \dfrac{c^2_{12}}{\sqrt{c^2_{11}c^2_{22}}}, \\ \det G_1 > 0, \\ \det G_1 > 0, \\ \sin^2 B - 2\cos^2\dfrac{A}{2}(1+\cos B) > 0, \\ \sin^2 D - 2\cos^2\dfrac{C}{2}(1+\cos D) > 0, \end{cases}$$

где c^1_{ij} *и* c^2_{ij} — *алгебраические дополнения к* ij*-м элементам матриц* G_1 *и* G_2 *соответственно, при этом*:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\dfrac{A}{2} & -\cos B & -\cos\lambda \\ -\cos\dfrac{A}{2} & 1 & -\cos\dfrac{A}{2} & 0 \\ -\cos B & -\cos\dfrac{A}{2} & 1 & -\cos\lambda \\ -\cos\lambda & 0 & -\cos\lambda & 1 \end{pmatrix},$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\dfrac{C}{2} & -\cos D & -\cos(E-\lambda) \\ -\cos\dfrac{C}{2} & 1 & -\cos\dfrac{C}{2} & 0 \\ -\cos D & -\cos\dfrac{C}{2} & 1 & -\cos(E-\lambda) \\ -\cos(E-\lambda) & 0 & -\cos(E-\lambda) & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3. Проверка формулы (3.7)**.** Как было сказано выше, mmm-симметрия является частным случаем $\mathrm{mm2}$-симметрии. Поэтому с помощью формулы (3.7) можно считать объемы произвольных гиперболических mmm-октаэдров. Вычисляя объемы октаэдров из примеров 3.1–3.3 с помощью программы MathCad по формуле (3.7), можно убедиться, что формулы из теорем 3.1, 3.2 и 3.3 приводят нас к одинаковым результатам.

Авторы благодарят В. П. Лексина и А. Л. Скубачевского за полезные советы и ценные замечания при написании статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абросимов Н. В.* Об объемах многогранников в пространстве постоянной кривизны// Вестн. Кемеровского гос. ун-та. — 2011. — *3/1*. — С. 7–13.
2. *Абросимов Н. В., Байгонакова Г. А.* Гиперболический октаэдр с mmm-симметрией// Сиб. электрон. мат. изв. — 2013. — *10*. — С. 123–140.
3. *Абросимов Н. В., Годой-Молина М., Медных А. Д.* Об объеме сферического октаэдра с симметриями// Соврем. мат. и ее прилож. — 2008. — *60*. — С. 3–12.
4. *Алексеевский Д. В., Винберг Э. Б., Солодовников А. С.* Геометрия пространств постоянной кривизны// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. — 1988. — *29*. — С. 1–146.
5. *Байгонакова Г. А., Годой-Молина М., Медных А. Д.* О геометрических свойствах гиперболического октаэдра, обладающего mmm-симметрией// Вестн. Кемеровского гос. ун-та. — 2011. — *3/1*. — С. 13–18.
6. *Галиулин Р. В., Михалев С. Н., Сабитов И. Х.* Некоторые приложения формулы для объема октаэдра// Мат. заметки. — 2004. — *1*. — С. 27–43.
7. *Краснов В. А.* Об интегральных формулах объема гиперболических тетраэдров// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2013. — *49*. — С. 89–99.
8. *Краснов В. А.* Об объеме гиперболического октаэдра с нетривиальными симметриями// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2013. — *51*. — С. 74–87.

9. *Лобачевский Н. И.* Воображаемая геометрия// Полное собр. соч. Т. 3. — М.—Л.: ОГИЗ-ГИТТЛ, 1949.
10. *Bolyai J.* Appendix. The theory of space// В сб.: «Janos Bolyai». — Budapest, 1987.
11. *Cho Yu., Kim H.* On the volume formula for hyperbolic tetrahedra// Discrete Comput. Geom. — 1999. — *22*. — C. 347–366.
12. *Derevnin D. A., Mednykh A. D.* A formula for the volume of hyperbolic tetrahedron// Rus. Math. Surv. — 2005. — *60*, № 346.
13. *Kneser H.* Der Simplexinhalt in der nichteuklidischen Geometrie// Deutsche Math. — 1936. — *1*. — C. 337–340.
14. *Leibon G.* The symmetries of hyperbolic volume// Preprint. — 2002.
15. *Milnor J.* Hyperbolic geometry: the first 150 years// Bull. Am. Math. Soc. — 1982. — *6*, № 1. — C. 307–332.
16. *Mohanty Y.* The Regge symmetry is a scissors congruence in hyperbolic space// Algebr. Geom. Topol. — 2003. — *3*. — C. 1–31.
17. *Murakami J., Ushijima A.* A volume formula for hyperbolic tetrahedra in terms of edge lengths// J. Geom. — 2005. — *83*, № 1-2. — C. 153–163.
18. *Murakami J.* The volume formulas for a spherical tetrahedron// Arxiv: 1011.2584v4. — 2011.
19. *Murakami J., Yano M.* On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron// Commun. Anal. Geom. — 2005. — *13*. — C. 379–400.
20. *Schläfli L.* Theorie der vielfachen Kontinuität// В сб.: «Gesammelte mathematische Abhandlungen». — Basel: Birkhäuser, 1950.
21. *Sforza G.* Spazi metrico-proiettivi// Ric. Esten. Differ. Ser. — 1906. — *8*, № 3. — C. 3–66.
22. *Ushijima A.* A volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra// Non-Euclid. Geom. — 2006. — *581*. — C. 249–265.

В. А. Краснов
Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: vladimir.krasnov3107@gmail.com

Э. Ш. Хисяметдинова
Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: elmira-lector@yandex.ru

UDC 514.13+514.132

On the volume formula for a hyperbolic octahedron with mm2-symmetry

© 2016 **V. A. Krasnov, E. Sh. Khisyametdinova**

Abstract. In this paper, explicit integral volume formulas for arbitrary compact hyperbolic octahedra with mm2-symmetry are obtained in terms of dihedral angles. Also we give an algorithm for calculation of volume of such octahedra in spherical space.

REFERENCES

1. N. V. Abrosimov, "Ob ob"emakh mnogogrannikov v prostranstve postoyannoy krivizny" [On volumes of polyhedra in a space of constant curvature], *Vestn. Kemerovskogo gos. un-ta* [Bull. Kemerovo State Univ.], 2011, **3/1**, 7–13.
2. N. V. Abrosimov and G. A. Baygonakova, "Giperbolicheskiy oktaedr s *mmm*-simmetriey" [Hyperbolic octahedron with *mmm*-symmetry], *Sib. elektron. mat. izv.* [Sib. Electron. Math. Bull.], 2013, **10**, 123–140.
3. N. V. Abrosimov, M. Godoy-Molina, and A. D. Mednykh, "Ob ob"eme sfericheskogo oktaedra s simmetriyami" [On the volume of a spherical octahedron with symmetries], *Sovrem. mat. i ee prilozh.* [Contemp. Math. Appl.], 2008, **60**, 3–12.

4. D. V. Alekseevskiy, E. B. Vinberg, and A. S. Solodovnikov, “Geometriya prostranstv postoyannoy krivizny” [Geometry of spaces of constant curvature], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math.], 1988, **29**, 1–146.
5. G. A. Baygonakova, M. Godoy-Molina, and A. D. Mednykh, “O geometricheskikh svoystvakh giperbolicheskogo oktaedra, obladayushchego mmm-simmetriey” [On geometric properties of hyperbolic octahedron with mmm-symmetry], *Vestn. Kemerovskogo gos. un-ta* [Bull. Kemerovo State Univ.], 2011, **3/1**, 13–18.
6. R. V. Galiulin, S. N. Mikhalev, and I. Kh. Sabitov, “Nekotorye prilozheniya formuly dlya ob"ema oktaedra” [Some applications of the volume formula for an octahedron], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2004, **1**, 27–43.
7. V. A. Krasnov, “Ob integral’nykh formulakh ob"ema giperbolicheskikh tetraedrov” [On integral expressions for volumes of hyperbolic tetrahedra], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2013, **49**, 89–99.
8. V. A. Krasnov, “Ob ob"eme giperbolicheskogo oktaedra s netrivial’nymi simmetriyami” [On the volume of hyperbolic octahedra with nontrivial symmetry], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2013, **51**, 74–87.
9. N. I. Lobachevskiy, “Voobrazhaemaya geometriya” [Imaginary geometry] In: *Polnoe sobr. soch. T. 3* [Complete Set of Works. Vol. 3], OGIZ-GITTL, Moscow–Leningrad, 1949.
10. J. Bolyai, “Appendix. The theory of space,” In: *Janos Bolyai*, Budapest, 1987.
11. Yu. Cho and H. Kim, “On the volume formula for hyperbolic tetrahedra,” *Discrete Comput. Geom.*, 1999, **22**, 347–366.
12. D. A. Derevnin and A. D. Mednykh, “A formula for the volume of hyperbolic tetrahedron,” *Rus. Math. Surv.*, 2005, **60**, No. 346.
13. H. Kneser, “Der Simplexinhalt in der nichteuklidischen Geometrie,” *Deutsche Math.*, 1936, **1**, 337–340.
14. G. Leibon, “The symmetries of hyperbolic volume”, Preprint, 2002.
15. J. Milnor, “Hyperbolic geometry: the first 150 years,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1982, **6**, No. 1, 307–332.
16. Y. Mohanty, “The Regge symmetry is a scissors congruence in hyperbolic space,” *Algebr. Geom. Topol.*, 2003, **3**, 1–31.
17. J. Murakami and A. Ushijima, “A volume formula for hyperbolic tetrahedra in terms of edge lengths,” *J. Geom.*, 2005, **83**, No. 1-2, 153–163.
18. J. Murakami, “The volume formulas for a spherical tetrahedron”, *Arxiv*: 1011.2584v4, 2011.
19. J. Murakami and M. Yano, “On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron,” *Commun. Anal. Geom.*, 2005, **13**, 379–400.
20. L. Schläfli, “Theorie der vielfachen Kontinuität,” In: *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Birkhäuser, Basel, 1950.
21. G. Sforza, “Spazi metrico-proiettivi,” *Ric. Esten. Differ. Ser.*, 1906, **8**, No. 3, 3–66.
22. A. Ushijima, “A volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra,” *Non-Euclid. Geom.*, 2006, **581**, 249–265.

V. A. Krasnov
RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., Moscow, 117198 Russia
E-mail: vladimir.krasnov3107@gmail.com

E. Sh. Khisyametdinova
RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., Moscow, 117198 Russia
E-mail: elmira-lector@yandex.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 61 (2016). С. 115–163

УДК 517.98

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ ИЗМЕРИМЫХ И ЛОКАЛЬНО ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2016 г. **М. А. МУРАТОВ, В. И. ЧИЛИН**

Аннотация. В работе дается обзор результатов по топологическим $*$-алгебрам $S(\mathcal{M})$, $S(\mathcal{M},\tau)$ и $LS(\mathcal{M})$ измеримых, τ-измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Кроме того, рассматриваются взаимосвязи между этими алгебрами для различных классов алгебр фон Неймана, устанавливается непрерывность операторнозначных функций относительно сходимости локально по мере. Описываются также максимальные коммутативные $*$-подалгебры алгебры $LS(\mathcal{M})$.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . 116
2. Предварительные сведения . . . 117
  2.1. Алгебры фон Неймана и их классификация . . . 117
  2.2. Решетка ортопроекторов алгебры фон Неймана . . . 119
  2.3. Следы на алгебрах фон Неймана . . . 121
  2.4. Центрозначный след. Размерностная функция . . . 122
  2.5. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов . . . 122
3. $*$-Алгебры локально измеримых операторов . . . 126
  3.1. $*$-Алгебра $S(\mathcal{M})$ измеримых операторов . . . 126
  3.2. $*$-Алгебра $LS(\mathcal{M})$ локально измеримых операторов . . . 129
  3.3. Частичный порядок на $LS_h(\mathcal{M})$ . . . 130
  3.4. $*$-Алгебра $S(\mathcal{M},\tau)$ τ-измеримых операторов . . . 131
4. Соотношения между $*$-алгебрами $S(\mathcal{M})$, $LS(\mathcal{M})$ и $S(\mathcal{M},\tau)$ . . . 131
  4.1. Соотношения между $*$-алгебрами $\mathcal{M}$ и $S(\mathcal{M})$ . . . 132
  4.2. Соотношения между $*$-алгебрами $LS(\mathcal{M})$ и $S(\mathcal{M})$ . . . 133
  4.3. Прямое произведение алгебр локально измеримых операторов . . . 135
  4.4. $*$-Алгебры $S(\mathcal{M},\tau)$, ассоциированные с различными следами . . . 137
5. Заполненные $*$-подалгебры в $LS(\mathcal{M})$ . . . 140
  5.1. Заполненность $*$-подалгебр $S(\mathcal{M})$ и $S(\mathcal{M},\tau)$ . . . 140
  5.2. $*$-Алгебры τ-локально измеримых операторов . . . 144
  5.3. $*$-Алгебры компактных локально измеримых операторов . . . 147
  5.4. $*$-Алгебры τ-компактных операторов . . . 149
6. Непрерывность операторнозначных функций в $*$-алгебрах локально измеримых операторов . . . 150
  6.1. Топология сходимости локально по мере . . . 150
  6.2. Непрерывность операторнозначных функций . . . 152
7. Максимальные коммутативные $*$-подалгебры в алгебрах локально измеримых операторов . . . 156
  Список литературы . . . 160

1. Введение

Исследования по теории операторных алгебр были начаты в работах Дж. фон Неймана и Дж. Мюррея [32–34, 36], где изучались слабо замкнутые алгебры линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, которые впоследствии были названы алгебрами фон Неймана. Позднее был выделен класс C^*-алгебр и дана их характеризация как равномерно замкнутых $*$-алгебр операторов, действующих в гильбертовом пространстве (И.М. Гельфанд, М.А. Наймарк [4]).

Главными мотивировками этих исследований были, с одной стороны, применение полученных результатов к теории унитарных представлений групп, а с другой — анализ математических аспектов квантово-механического формализма.

Плодотворное взаимодействие математических и физических идей позволило построить содержательную структурную теорию операторных алгебр и получить важные приложения в квантовой статистической механике. Подробное изложение физических приложений приведено в известной монографии У. Брателли, Д. Робинсона [3]. Отметим, также, две обстоятельные монографии по алгебрам неограниченных операторов [17,42]. В настоящий момент теория операторных алгебр активно развивается и занимает центральное место в исследованиях по алгебре, функциональному анализу, теории представлений и их приложениям.

Пусть H — гильбертово пространство, а $\mathcal{B}(H)$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H. $*$-Подалгебра $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(H)$, содержащая тождественный оператор I, и замкнутая в слабой операторной топологии, называется *алгеброй фон Неймана*.

Заметим, что если $\mathcal{M}' = \{S \in \mathcal{B}(H)\colon\ TS = ST$ для любого $T \in \mathcal{M}\}$ — коммутант алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, то она удовлетворяет следующему характеристическому равенству: $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$.

Алгебры фон Неймана являются естественными некоммутативными аналогами алгебр комплексных ограниченных в существенном измеримых функций $L_\infty(\Omega, \Sigma, m)$, где (Ω, Σ, m) — измеримое пространство с полной локально конечной мерой m (см., например, [23, 39]). Этот факт послужил толчком к построению естественных некоммутативных аналогов алгебры $S(\Omega, \Sigma, m)$ всех комплексных измеримых функций, заданных на пространстве (Ω, Σ, m).

Один из первых подходов к введению некоммутативного варианта кольца измеримых функций был предложен И. Сигалом [43], который рассмотрел $*$-алгебру $S(\mathcal{M})$ измеримых операторов, присоединенных к произвольной алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Впоследствии, для целей некоммутативного интегрирования, изучались $*$-подалгебры $S(\mathcal{M}, \tau) \subset S(\mathcal{M})$ всех τ-измеримых операторов, ассоциированные с точным нормальным полуконечным следом τ на $\mathcal{M}$ (см., например, [25,35,48]). Алгебры $S(\mathcal{M}, \tau)$ и $S(\mathcal{M})$ являются $*$-алгебрами замкнутых, плотно определенных линейных операторов, действующих в том же гильбертовом пространстве H, что и сама алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$. При этом все эти операторы присоединены к $\mathcal{M}$, а алгебраические операции в этих $*$-алгебрах совпадают с операциями «сильной» суммы, «сильного» произведения, перехода к сопряженному оператору и обычного умножения на скаляры. Сама алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ является $*$-подалгеброй как в $S(\mathcal{M}, \tau)$, так и в $S(\mathcal{M})$ и совпадает с множеством всех ограниченных операторов из $S(\mathcal{M}, \tau)$ и из $S(\mathcal{M})$. Особо следует отметить, что $*$-алгебра $S(\mathcal{M}, \tau)$ содержит в себе как линейные подпространства все некоммутативные версии функциональных банаховых пространств, таких как L_p-пространства, пространства Орлича, Лоренца, Марцинкевича и т. п.

Другой важный класс $*$-алгебр $\mathcal{A}$ замкнутых операторов, действующих в гильбертовом пространстве H и присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, у которых $*$-подалгебра $\mathcal{A}_b$ ограниченных операторов удовлетворяет равенству:

$$\mathcal{A}_b = \{T \in \mathcal{A}\colon\ T \in \mathcal{B}(H)\} = \mathcal{M},$$

был введен П. Диксоном [24], который назвал их EW^*-алгебрами. Помимо указанных выше $*$-алгебр $S(\mathcal{M})$ и $S(\mathcal{M}, \tau)$, EW^*-алгебрами являются $*$-алгебры $LS(\mathcal{M})$ локально измеримых операторов, присоединенных к $\mathcal{M}$ [40, 47]. В работах [5, 6] Б.С. Закирова, В.И. Чилина была приведена абстрактная характеризация EW^*-алгебр и было показано, что любая EW^*-алгебра $\mathcal{A}$, у которой $\mathcal{A}_b = \mathcal{M}$, является $*$-подалгеброй в $LS(\mathcal{M})$, что объясняет уникальность $*$-алгебры $LS(\mathcal{M})$ для алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ в классе EW^*-алгебр.

Исследования алгебр $S(\mathcal{M}), S(\mathcal{M},\tau)$ и $LS(\mathcal{M})$ были связаны, в первую очередь, с построением некоммутативной теории меры и теории некоммутативного интегрирования для точных нормальных полуконечных следов, заданных на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. В отмеченной выше работе И. Сигала [43] были впервые введены и изучены банаховы пространства интегрируемых и интегрируемых с квадратом операторов, рассмотрена сходимость почти всюду последовательностей измеримых операторов. Там же была неявно введена и сходимость по мере как звездная к сходимости почти всюду. В этой работе были установлены некоммутативные варианты таких основных результатов теории меры, как теоремы Фишера—Рисса, Радона—Никодима, теоремы Лебега о монотонной сходимости, теоремы Фубини, а также выдвинута идея изучения свойств операторов и последовательностей операторов, принадлежащих алгебре фон Неймана или присоединенных к ней, при помощи методов теории меры и теории вероятностей.

После появления работы И. Сигала в этом направлении был получен целый ряд новых результатов. В первую очередь следует отметить работы следующих авторов: W. F. Stinespring [44], F. J. Yeadon [47, 48], E. Nelson [35], S. Sankaran [40, 41], A. R. Padmanabhan [37] и др. Важное место в этих работах занимают исследования свойств топологий сходимости по мере и локально по мере, относительно которых $*$-алгебры $S(\mathcal{M},\tau)$ и $LS(\mathcal{M})$ становятся топологическими $*$-алгебрами.

В настоящей работе дается обзор основных результатов, относящихся к теории $*$-алгебр $S(\mathcal{M})$, $S(\mathcal{M},\tau)$ и $LS(\mathcal{M})$. Кроме того, рассматриваются взаимосвязи между этими алгебрами для различных классов алгебр фон Неймана, устанавливается непрерывность операторнозначных функций относительно сходимости локально по мере. Также описываются максимальные коммутативные $*$-подалгебры алгебры $LS(\mathcal{M})$.

Используются обозначения и результаты теории алгебр фон Неймана из [23, 39, 45, 46] и теории измеримых и локально измеримых операторов из [9, 43, 47].

2. Предварительные сведения

В этом разделе приводятся необходимые сведения из теории алгебр фон Неймана и общей теории линейных неограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Подробное изложение теории алгебр фон Неймана можно найти, например, в монографиях [23, 39, 45, 46], а изложение теории замкнутых операторов в книгах [11, 13, 38, 45].

2.1. Алгебры фон Неймана и их классификация. Пусть H — гильбертово пространство и $\mathcal{B}(H)$ — C^*-алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H. Для произвольного подмножества $\mathcal{M}\subset\mathcal{B}(H)$ через $\mathcal{M}'$ обозначим его *коммутант* $\mathcal{M}$, т. е.

$$\mathcal{M}' = \{S\in\mathcal{B}(H)\colon TS = ST \text{ для каждого } T\in\mathcal{M}\}.$$

Ясно, что $\mathcal{M}'$ является унитальной подалгеброй в $\mathcal{B}(H)$ и что *бикоммутант* $\mathcal{M}'' = (\mathcal{M}')'$ содержит $\mathcal{M}$.

$*$-Подалгебра $\mathcal{M}\subset\mathcal{B}(H)$ называется *алгеброй фон Неймана*, если $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$. В этом случае говорят, что алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ действует в H. Так как $\mathcal{M}''$ — замкнутое подмножество в $\mathcal{B}(H)$ в равномерной топологии, порожденной нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(H)}$, то алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ сама является C^*-алгеброй. Норма оператора T из алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ обозначается через $\|T\|_{\mathcal{M}}$.

Простейшими примерами алгебр фон Неймана являются алгебра $\mathcal{B}(H)$ и алгебра

$$\mathbb{C}_H = \{\lambda I\colon\ \lambda\in\mathbb{C}\}$$

всех скалярных кратных тождественного оператора I в $\mathcal{B}(H)$.

Подмножество $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}(H)$ называется *самосопряженным*, если из $T\in\mathcal{A}$ следует $T^*\in\mathcal{A}$. Если $\mathcal{A}$ — самосопряженное подмножество, то $\mathcal{A}' = \mathcal{A}'''$, и поэтому $\mathcal{A}'$ есть алгебра фон Неймана.

Если $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана, то множество

$$Z(\mathcal{M}) = \{T\in\mathcal{M}\colon\ TS = ST \text{ для любого } S\in\mathcal{M}\}$$

называется *центром* $\mathcal{M}$. Легко видеть, что

$$Z(\mathcal{M}) = \mathcal{M}\cap\mathcal{M}' = \mathcal{M}''\cap\mathcal{M}' = Z(\mathcal{M}');$$

в частности, $Z(\mathcal{M})$ — коммутативная алгебра фон Неймана, при этом, $\mathbb{C}_H\subset Z(\mathcal{M})\subset\mathcal{M}$.

Если $\mathcal{M}$ — коммутативная алгебра фон Неймана, то $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$, и потому $Z(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$. Если $Z(\mathcal{M}) = \mathbb{C}_H$, то алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ называется *фактором*.

Так как $(\mathcal{B}(H))' = \mathbb{C}_H$ [11, § 34], то $Z(\mathcal{B}(H)) = \mathcal{B}(H) \cap \mathbb{C}_H = \mathbb{C}_H$, т. е. $\mathcal{B}(H)$ — фактор.

В дальнейшем через $\mathcal{M}_h$ обозначается множество всех самосопряженных операторов из $\mathcal{M}$. Оператор $T \in \mathcal{M}_h$ называется положительным, если он имеет вид $T = S^*S$ для некоторого $S \in \mathcal{M}$. Множество всех положительных операторов из $\mathcal{M}_h$ является выпуклым собственным конусом в $\mathcal{M}_h$ и обозначается через $\mathcal{M}_+$. С помощью $\mathcal{M}_+$ в $\mathcal{M}_h$ определятся частичный порядок по следующему правилу: $T \leqslant S$, если $(S - T) \in \mathcal{M}_+$.

Пусть (Ω, Σ, m) — пространство с полной локально конечной мерой m, для которой булева алгебра всех классов равных почти всюду измеримых множеств из Σ является порядково полной (такие пространства с мерой в дальнейшем будем называть пространствами с локально конечной мерой). Для каждой функции $f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, m)$ определим линейный оператор T_f на $H = L_2(\Omega, \Sigma, m)$ с помощью равенства $T_f(g) = fg, \quad g \in H$.

Теорема 2.1 ([23, § 7]).

1. *Множество* $\mathcal{M} = \{T_f\colon\ f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, m)\}$ *является коммутативной алгеброй фон Неймана, действующей в гильбертовом пространстве* $L_2(\Omega, \Sigma, m)$; *при этом* $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$. *Более того, отображение*
$$\varphi\colon L_\infty(\Omega, \Sigma, m) \to \mathcal{M},$$
задаваемое как $\varphi(f) = T_f$, *является* $*$-*изоморфизмом из* $L_\infty(\Omega, \Sigma, m)$ *на* $\mathcal{M}$.
2. *Для каждой коммутативной алгебры фон Неймана* $\mathcal{N}$ *существует пространство* (Ω, Σ, m) *с локально конечной мерой* m *такое, что* $\mathcal{N}$ $*$-*изоморфна алгебре фон Неймана* $L_\infty(\Omega, \Sigma, m)$, *т. е. можно считать, что* $\mathcal{N}$ *действует в* $L_2(\Omega, \Sigma, m)$ *и* $\mathcal{N} = \{T_f\colon f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, m)\}$.

Пусть $\{\mathcal{A}_j\}_{j\in J}$ — семейство C^*-алгебр, где J — некоторое множество индексов. Обозначим через $\mathcal{A}$ множество всех наборов $\{x_j\}_{j\in J}$, где $x_j \in \mathcal{A}_j$, $j \in J$ и $\sup\limits_{j\in J} \|x_j\|_{\mathcal{A}_j} < \infty$. Тогда множество $\mathcal{A}$ является C^*-алгеброй относительно покоординатных алгебраических операций:

1. $\{x_j\}_{j\in J} + \{y_j\}_{j\in J} = \{x_j + y_j\}_{j\in J}$,
2. $\lambda\{x_j\}_{j\in J} = \{\lambda x_j\}_{j\in J}$,
3. $\{x_j\}_{j\in J}\{y_j\}_{j\in J} = \{x_j y_j\}_{j\in J}$,
4. $\{x_j\}^*_{j\in J} = \{x^*_j\}_{j\in J}$

и нормы, определяемой равенством
$$\|\{x_j\}_{j\in J}\|_{\mathcal{A}} = \sup_{j\in J} \|x_j\|_{\mathcal{A}_j}.$$

C^*-алгебра $\mathcal{A}$ называется *C^*-произведением* C^*-алгебр $\mathcal{A}_j$ и обозначается $\mathcal{A} = C^*\text{-}\prod\limits_{j\in J} \mathcal{A}_j$. Ясно, что $\mathcal{A}$ является $*$-подалгеброй в *прямом произведении* $\prod\limits_{j\in J} \mathcal{A}_j$ (определение алгебраических операций и инволюции в последней алгебре точно такое же, как и в $\mathcal{A}$). Более того,
$$C^*\text{-}\prod_{j\in J} \mathcal{A}_j = \prod_{j\in J} \mathcal{A}_j$$
тогда и только тогда, когда $\operatorname{card}(J) < \infty$.

Для произвольного семейства гильбертовых пространств $\{H_j\}_{j\in J}$ определена *гильбертова сумма* $H = \sum\limits_{j\in J} H_j$ как множество
$$\{\{\xi_j\}_{j\in I}\colon\ \xi_j \in H_j \text{ для любого } j \in J,\ \ \sum_{j\in J} \|\xi_j\|^2 < \infty\},$$
алгебраические операции в котором определяются покоординатно, а скалярное произведение задается равенством:
$$(\{\xi_j\}_{j\in J}, \{\eta_j\}_{j\in J}) = \sum_{j\in J} (\xi_j, \eta_j)_{H_j}.$$

Пусть $\mathcal{M}_j$ — алгебры фон Неймана, действующие в гильбертовых пространствах H_j, $j \in J$, соответственно. Для каждого элемента $\{T_j\}_{j\in J}$ из C^*-произведения $C^*\text{-}\prod\limits_{j\in J}\mathcal{M}_j$ определим оператор T в $H = \sum\limits_{j\in J} H_j$ следующим равенством:

$$T\left(\{\xi_j\}_{j\in J}\right) = \{T_j\xi_j\}_{j\in J}.$$

Множество всех таких операторов T, действующих в гильбертовой сумме $H = \sum\limits_{j\in J} H_j$, образует алгебру фон Неймана, которая называется C^*-произведением алгебр фон Неймана $\mathcal{M}_j$, $j \in J$, и обозначается через

$$\mathcal{M} = C^*\text{-}\prod_{j\in J}\mathcal{M}_J$$

(так же, как и для C^*-алгебр). В случае, когда множество индексов J конечно, например, $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, то C^*-произведение алгебр фон Неймана записывается в виде

$$\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_n = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{M}_j.$$

2.2. Решетка ортопроекторов алгебры фон Неймана. Обозначим через $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ множество всех самосопряженных проекторов (ортопроекторов) из алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, т. е.

$$\mathcal{P}(\mathcal{M}) = \{P \in \mathcal{M}\colon P = P^* = P^2\}.$$

Следующее предложение перечисляет наиболее важные свойства множества $\mathcal{P}(\mathcal{M})$.

Предложение 2.1 ([45, § 3])**.**

1. *Множество $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ является полной решеткой с ортогональным дополнением относительно частичного порядка, индуцированного из $\mathcal{M}_h$, в которой нулем является нулевой проектор 0, единицей — тождественный оператор I, а ортогональным дополнением проектора P — проектор $P^\perp = I - P$.*
2. *Если $\mathcal{M}$ — коммутативная алгебра фон Неймана, то множество $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ является полной булевой алгеброй, в частности, $\mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$ есть полная булева подалгебра в $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, и*
$$\sup|_{\mathcal{P}(\mathcal{M})}\{P\colon\ P \in F\} = \sup|_{\mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))}\{P\colon\ P \in F\}$$
для каждого подмножества F в $\mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$.
3. *Если семейство $\{P_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ таково, что $P_iP_j = 0$ для $i \neq j$, то $\sup\limits_{j\in J} P_j = \sum\limits_{j\in J} P_j$, где сходимость ряда рассматривается в сильной операторной топологии ((so)-топологии).*

Из предложения 2.1 следует, что для каждого $T \in \mathcal{M}$ определен проектор

$$z(T) = \inf\{Z \in \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))\colon\ ZT = T\},$$

который называется *центральным носителем* оператора T.

Пусть T — произвольный оператор из $\mathcal{B}(H)$. Обозначим через $n(T)$ проектор на ядро

$$\operatorname{Ker}(T) = \{\xi \in H\colon\ T\xi = 0\}$$

оператора T, а через $l(T)$ — проектор на замыкание

$$\operatorname{Ran}(T) = \{T\xi\colon\ \xi \in H\}$$

образа оператора T.

Проектор

$$r(T) = I - n(T)$$

называется *правым носителем* оператора T, а проектор $l(T)$ — его *левым носителем*. Если $T = T^*$, то проектор

$$s(T) = r(T) = l(T)$$

называют *носителем* оператора T. Легко видеть, что

1. $r(T) = l(T^*)$;
2. $r(T)$ есть наименьший из проекторов $E \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(H))$, для которых $TE = T$;

3. $l(T)$ есть наименьший из проекторов $E \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(H))$, для которых $ET = T$;
4. $r(T) = s(|T|)$, $l(T) = s(|T^*|)$, где $|T| = \sqrt{T^*T}$ — модуль оператора T.

Проекторы E и F из $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ называются *эквивалентными* (обозначение: $E \sim F$), если существует частично изометрический оператор $V \in \mathcal{M}$, для которого проектор E является начальным, а проектор F — конечным, т. е. $V^*V = E$ и $VV^* = F$. Очевидно, что $VE = V = FV$ и $EV^* = V^* = V^*F$.

Отношение «$\sim$» является отношением эквивалентности на решетке $\mathcal{P}(\mathcal{M})$.

Говорят, что проектор $E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ *мажорируется* проектором $F \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ (обозначение: $E \precsim F$), если существует такой проектор $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $Q \leqslant F$ и $Q \sim E$.

Приведем основные свойства указанного выше отношения эквивалентности «$\sim$».

Предложение 2.2 ([45, §4]). *Пусть $\mathcal{M}$ алгебра фон Неймана.*

1. *Если $E, F \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $E \precsim F$ и $F \precsim E$, то $E \sim F$.*
2. *Если $E \sim F$, то $z(E) = z(F)$.*
3. *Если $E \sim F$, $Z \in \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, то $EZ \sim FZ$.*
4. *Если $\{E_j\}_{j\in J}$, $\{F_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ такие, что $E_iE_j = 0$, $F_iF_j = 0$, как только $i \neq j$, $i, j \in J$, и $E_j \sim F_j$ для всех $j \in J$, то $\sup\limits_{j\in J} E_j \sim \sup\limits_{j\in J} F_j$.*
5. *Если $T \in \mathcal{M}$, то $l(T) \sim r(T)$.*
6. *Для любых $E, F \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ существует такой центральный проектор $Z \in Z(\mathcal{P}(\mathcal{M}))$, что $ZE \precsim ZF$ и $Z^\perp F \precsim Z^\perp E$.*
7. *Для любых $E, F \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ имеют место следующие соотношения*:
$$(E \vee F - F) \sim (E - E \wedge F), \quad E - E \wedge (I - F) \sim F - (I - E) \wedge F;$$
в частности, если $E \wedge F = 0$, то $E \precsim F^\perp$ (через $E \vee F$ и $E \wedge F$ обозначаются супремум и инфимум проекторов $E, F \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$).

Ненулевой проектор $E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ называется *минимальным* (или *атомом*), если из $0 \neq Q \leqslant E$, $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ следует, что $Q = E$. Проектор E называется *абелевым*, если алгебра фон Неймана $E\mathcal{M}E$ является коммутативной. Проектор E называется *конечным*, если из $F \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $F \leqslant E$ и $F \sim E$ следует, что $E = F$. Ненулевой проектор E называется *собственно бесконечным*, если из условий $Z \in \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, ZE — конечный проектор, следует, что $ZE = 0$. Проектор E называется проектором *счетного типа*, если любое семейство ненулевых попарно ортогональных проекторов из $\mathcal{P}(E\mathcal{M}E)$ не более чем счетно.

Если $I \in \mathcal{M}$ является проектором счетного типа, то алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ называется алгеброй *счетного типа*, или *σ-конечной* алгеброй фон Неймана.

Предложение 2.3 ([45, §4]). *Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана и $E, F \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$.*

1. *Если проекторы E, F — конечные, то проектор $E \vee F$ тоже конечен.*
2. *Ненулевой проектор E является собственно бесконечным тогда и только тогда, когда существует такая последовательность попарно ортогональных проекторов $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $E = \sup\limits_{n\geqslant 1} E_n$ и $E_n \sim E$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$*

Алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ называется:

атомической, если для любого ненулевого проектора $E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ существует такой минимальный проектор $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $P \leqslant E$;

конечной, если I — конечный проектор;

полуконечной, если для любого ненулевого центрального проектора $Z \in Z(\mathcal{M})$ существует такой ненулевой конечный проектор $E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $E \leqslant Z$;

типа I, если для любого ненулевого центрального проектора $Z \in Z(\mathcal{M})$ существует такой ненулевой абелев проектор $E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $E \leqslant Z$;

типа II, если $\mathcal{M}$ — полуконечная алгебра, не содержащая ненулевых абелевых проекторов;

типа III, если $\mathcal{M}$ не содержит ненулевых конечных проекторов;

типа I_{fin}, если $\mathcal{M}$ — конечная алгебра типа I;

типа I_∞, если $\mathcal{M}$ — не конечная алгебра типа I;

типа II_1, если $\mathcal{M}$ — конечная алгебра типа II;

типа II_∞, если $\mathcal{M}$ — не конечная алгебра типа II;
собственно бесконечной, если I — собственно бесконечный проектор;
чисто бесконечной, если $\mathcal{M}$ — типа III.

Теорема 2.2 ([45, § 4]). *Каждая алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ содержит такие однозначно определенные центральные проекторы Z_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, что*

1. $\sum\limits_{i=1}^{5} Z_i = I$;
2. $Z_1\mathcal{M}$ — *алгебра фон Неймана типа* I_{fin};
3. $Z_2\mathcal{M}$ — *алгебра фон Неймана типа* I_∞;
4. $Z_3\mathcal{M}$ — *алгебра фон Неймана типа* II_1;
5. $Z_4\mathcal{M}$ — *алгебра фон Неймана типа* II_∞;
6. $Z_5\mathcal{M}$ — *алгебра фон Неймана типа* III.

Как следует из теоремы 2.2, произвольная алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ представима в виде

$$\mathcal{M} = \sum_{i=1}^{5} \mathcal{M}_i,$$

где каждая из алгебр $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$, $\mathcal{M}_4$, $\mathcal{M}_5$ является алгеброй фон Неймана соответствующего типа I_{fin}, I_∞, II_1, II_∞, III (некоторые слагаемые могут отсутствовать).

Следствие 2.1 ([45, § 4]). *Если алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ — фактор, то она одного* (*и только одного*) *из следующих пяти типов*: I_{fin}, I_∞, II_1, II_∞, III.

Заметим, что алгебра фон Неймана $\mathcal{M} = \mathcal{B}(H)$ является фактором типа I.

2.3. Следы на алгебрах фон Неймана. Функционал $\tau\colon \mathcal{M}_+ \to [0, \infty]$ называется *следом* на $\mathcal{M}_+$, если

1. $\tau(T + S) = \tau(T) + \tau(S)$ для любых $T, S \in \mathcal{M}_+$;
2. $\tau(\lambda T) = \lambda\tau(T)$ для каждого $T \in \mathcal{M}_+$ и $\lambda \geqslant 0$ (считается, что $0 \cdot \infty = 0$);
3. $\tau(U^*TU) = \tau(T)$ для любого $T \in \mathcal{M}_+$ и любого унитарного оператора $U \in \mathcal{M}$.

След τ называется:
конечным, если $\tau(T) < \infty$ для каждого $T \in \mathcal{M}_+$;
полуконечным, если $\tau(T) = \sup\{\tau(S)\colon\ 0 \leqslant S \leqslant T,\ \tau(S) < \infty\}$ для каждого $T \in \mathcal{M}_+$;
точным, если из $\tau(T) = 0$, $T \in \mathcal{M}_+$ следует, что $T = 0$.
нормальным, если из $T_\alpha \uparrow T$, $T, T_\alpha \in \mathcal{M}_+$ следует, что $\tau(T_\alpha) \uparrow \tau(T)$.

Пример 2.1 (канонический след на $\mathcal{B}(H)$ [23, § 1.6]). Пусть $\{e_j\}_{j\in J}$ — ортонормированный базис гильбертова пространства H. Для каждого $T \in \mathcal{B}(H)_+$ положим

$$tr(T) = \sum_{j\in J}(Te_j, e_j).$$

Функционал tr является точным нормальным полуконечным следом на $\mathcal{B}(H)_+$, который не зависит от выбора базиса $\{e_j\}_{j\in J}$. Мы будем называть этот след *каноническим следом* на $\mathcal{B}(H)$.

Пример 2.2 (коммутативная алгебра фон Неймана [23, § 1.7]). Пусть (Ω, Σ, m) — пространство с локально конечной мерой m и $\mathcal{M} = \{T_f\colon\ f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, m)\}$ — коммутативная алгебра фон Неймана мультипликаторов (см. теорему 2.1). Линейный функционал $\tau\colon \mathcal{M}_+ \to [0, \infty]$, определяемый равенством

$$\tau(T_f) = \int\limits_\Omega f dm,$$

является точным нормальным полуконечным следом на $\mathcal{M}_+$.

Следующее предложение характеризует конечные и полуконечные алгебры фон Неймана в терминах следов.

Предложение 2.4 ([23, § 1.7], [46, § 5.2]). *Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана.*

1. *$\mathcal{M}$ является конечной тогда и только тогда, когда для каждого ненулевого оператора $T \in \mathcal{M}_+$ существует конечный след τ такой, что $\tau(T) \neq 0$;*
2. *$\mathcal{M}$ является полуконечной тогда и только тогда, когда на $\mathcal{M}_+$ существует точный нормальный полуконечный след.*

2.4. Центрозначный след. Размерностная функция. В следующей теореме устанавливается существование центрозначного следа на конечной алгебре фон Неймана.

Теорема 2.3 ([46, § 5.2]). *Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана. Следующие условия эквивалентны*:

1. *$\mathcal{M}$ — конечная*;
2. *Существует линейное отображение $\Phi\colon \mathcal{M} \to Z(\mathcal{M})$, обладающее следующими свойствами*:
   2.1. $\Phi(T^*T) = \Phi(TT^*) \geqslant 0$;
   2.2. $\Phi(ZT) = Z\Phi(T)$ *для всех* $Z \in Z(\mathcal{M})$ *и* $T \in \mathcal{M}$;
   2.3. $\Phi(I) = I$;
   2.4. *Если* $T \in \mathcal{M}$, $T \neq 0$, *то* $\Phi(T^*T) \neq 0$.

Линейное отображение, определенное в теореме 2.3, называется (*каноническим*) *центрозначным следом*. Как следует из этой теоремы, для не конечной алгебры фон Неймана центрозначного следа не существует. С другой стороны, для произвольной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ на структуре $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ всех проекторов можно определить отображение со значениями во множестве измеримых функций подходящего пространства с мерой, свойства которого аналогичны свойствам центрозначного следа (см. ниже теорему 2.4).

Пусть $\mathcal{M}$ — произвольная алгебра фон Неймана. Тогда ее центр $Z(\mathcal{M})$ является коммутативной алгеброй фон Неймана, и потому по теореме 2.1, существует $*$-изоморфизм φ между $Z(\mathcal{M})$ и алгеброй $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, где (Ω, Σ, μ) — некоторое пространство с локально конечной мерой μ. Обозначим через L_+ множество всех измеримых функций

$$f\colon (\Omega, \Sigma, \mu) \to [0, \infty]$$

(равные почти всюду функции отождествляются).

Теорема 2.4 ([43, § 1]). *Существует отображение $d\colon \mathcal{P}(\mathcal{M}) \to L_+$, обладающее следующими свойствами*:

1. $d(E)$ *конечна тогда и только тогда, когда проектор* E *конечен*;
2. $d(E + Q) = d(E) + d(Q)$, *если* $EQ = 0$;
3. $d(U^*U) = d(UU^*)$ *для каждой частичной изометрии* $U \in \mathcal{M}$;
4. $d(ZE) = \varphi(Z)d(E)$ *для любых* $Z \in \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$ *и* $E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$;
5. *Если* $\{E_\alpha\}_{\alpha \in J}, E \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ *и* $E_\alpha \uparrow E$, *то* $d(E) = \sup\limits_{\alpha \in J} d(E_\alpha)$.

Отображение $d\colon \mathcal{P}(\mathcal{M}) \to L_+$, обладающее свойствами 1–5, называется *размерностной функцией* на $\mathcal{P}(\mathcal{M})$.

2.5. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов. Линейный оператор T в H называется *положительным*, если его область определения $\mathfrak{D}(T)$ плотна в H и $(T\xi, \xi) \geqslant 0$ для всех $\xi \in \mathfrak{D}(T)$.

Согласно [38, теорема VII.3], положительный оператор является самосопряженным тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ran}(T \pm iI) = H$. Кроме того, положительный оператор является самосопряженным тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ran}(T \pm I) = H$.

Если T — положительный оператор, то для каждого $\xi \in \mathfrak{D}(T)$ имеем, что

$$\|(T + I)\xi\|_H^2 = \|T\xi\|_H^2 + 2(T\xi, \xi) + \|\xi\|_H^2 \geqslant \|\xi\|_H^2.$$

Отсюда следует, что линейное отображение $T + I$ инъективно, и поэтому на $\mathrm{Ran}(T + I)$ определен обратный оператор $(T + I)^{-1}$. Более того,

$$\|(T + I)^{-1}\xi\|_H \leqslant \|\xi\|_H$$

для каждого $\xi \in \mathrm{Ran}(T+I)$.

Если T — положительный самосопряженный оператор, то $\mathrm{Ran}(T+I) = H$, и поэтому,

$$(T+I)^{-1} \in \mathcal{B}(H),\ 0 \leqslant (T+I)^{-1} \leqslant I \text{ и } s((T+I)^{-1}) = I.$$

Обозначим через

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\{(T+I)^{-1}\})$$

коммутативную подалгебру фон Неймана в $\mathcal{B}(H)$, порожденную оператором $(T+I)^{-1}$. Проекторы

$$E_n = \chi_{(\frac{1}{n+1},+\infty)}((T+I)^{-1}),\ n = 1,2,\ldots$$

принадлежат алгебре $\mathfrak{R}$, где $\chi_{(\cdot)}$ — характеристическая функция соответствующего интервала (см. [45, § 9.9]). Тогда для каждого $n = 1,2,\ldots$ существует такой однозначно определенный оператор $T_n \in \mathfrak{R}$, что

$$E_n \leqslant T_n \leqslant (n+1)E_n,\ E_n = (T+I)^{-1}T_n.$$

Так как

$$(T+I)^{-1}(H) = \mathfrak{D}(T),$$

то $E_n(H) \subset \mathfrak{D}(T)$, и поэтому $\mathfrak{D}(TE_n) = H$.

Кроме того,

$$T_n - E_n = (I - (T+I)^{-1})T_n = T(T+I)^{-1}T_n = TE_n.$$

Следовательно, $TE_n \in \mathfrak{R}$ и $0 \leqslant TE_n \leqslant nE_n$.

Для каждого компактного подмножества $K \subset (-\infty,+\infty)$ через $\mathcal{B}(K)$ обозначим C^*-алгебру всех ограниченных борелевских комплексных функций на K, а через $\mathcal{B}([0,\infty))$ (соответственно, $\mathcal{B}(-\infty,+\infty)$) C^*-алгебру всех борелевских комплексных функций на $[0,+\infty)$ (соответственно, на $(-\infty,+\infty)$), ограниченных на компактных подмножествах.

Сужение каждой функции $f \in \mathcal{B}([0,+\infty))$ на спектр $\sigma(TE_n)$ оператора TE_n является функцией из $\mathcal{B}(\sigma(TE_n))$. Поэтому $f(TE_n) \in \mathcal{B}(H)$ (см. [45, § 9.9]).

Определим множество

$$\mathfrak{D}(f(T)) = \{\xi \in H\colon \{f(TE_n)\xi\}_{n=1}^{\infty} \text{ сходится в } H\}.$$

Ясно, что $\mathfrak{D}(f(T))$ является линейным подпространством в H. Определим линейный оператор $f(T)$ в H следующим образом:

$$f(T)\xi = \lim_{n\to\infty} f(TE_n)\xi$$

для каждого $\xi \in \mathfrak{D}(f(T))$.

Теорема 2.5 ([45, §§ 9.11, 9.12]). *Пусть T — положительный линейный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда*

1. *Если $f_0(\lambda) \equiv c$, $c \in \mathbb{C}$, для любого $\lambda \in [0,+\infty)$, то*

$$f_0(T) = cI.$$

Если $f_1(\lambda) \equiv \lambda$ для любого $\lambda \in [0,+\infty)$, то

$$f_1(T) = T.$$

2. *Для каждой функции $f \in \mathcal{B}([0,+\infty))$ линейный оператор $f(T)$ является замкнутым и*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n(H) \subset \{\xi \in H\colon \sup_{n\geqslant 1} \|f(TE_n)\xi\|_H < \infty\} = \mathfrak{D}(f(T)).$$

Более того, оператор $f(T)$ является замыканием сужения $f(T)$ на $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n(H)$.

3. *Для каждой функции $f \in \mathcal{B}([0,+\infty))$ верно равенство*

$$f(T)^* = \overline{f}(T).$$

4. *Если $f, g \in \mathcal{B}([0, +\infty))$, то линейный оператор $f(T) + g(T)$ является предзамкнутым,*
$$\mathfrak{D}(f(T) + f(S)) = \mathfrak{D}(f(T)) \cap \mathfrak{D}(f(S))$$
и
$$\overline{f(T) + g(T)} = (f + g)(T).$$
5. *Если $f, g \in \mathcal{B}([0, +\infty))$, то линейный оператор $f(T)g(T)$ является предзамкнутым,*
$$\mathfrak{D}(f(T)g(T)) = \mathfrak{D}((fg)(T)) \cap \mathfrak{D}(g(T))$$
и
$$\overline{f(T)g(T)} = (fg)(T).$$
6. *Если $f, g \in \mathcal{B}([0, +\infty))$, $|f| \leqslant |g|$, то*
$$\mathfrak{D}(g(T)) \subset \mathfrak{D}(f(T))$$
и
$$\|f(T)\xi\|_H \leqslant \|g(T)\xi\|_H$$
для всех $\xi \in \mathfrak{D}(g(T))$. В частности, если функция f ограничена, то $f(T) \in \mathcal{B}(H)$ и
$$\|f(T)\| \leqslant \sup\{|f(\lambda)|: \ \lambda \in [0, +\infty)\}.$$
7. *Если $f, g \in \mathcal{B}([0, +\infty))$ и одна из функций f, g является ограниченной, то*
$$(f + g)(T) = f(T) + g(T), \ (fg)(T) = f(T)g(T).$$

Из теоремы 2.5 непосредственно вытекает следующее

Следствие 2.2 ([45, §§ 9.13, 9.14])**.** *Пусть T — положительный самосопряженный оператор в H. Тогда*:

1. *$f(T)$ является самосопряженным (положительным самосопряженным) оператором для каждой действительной (неотрицательной) функции $f \in \mathcal{B}([0, +\infty))$;*
2. *$f(T)$ является проектором для каждой характеристической функции $f \in \mathcal{B}([0, +\infty))$;*
3. *Существует такой однозначно определенный положительный самосопряженный оператор S в H, что $S^2 = T$ (оператор S называется* квадратным корнем *из оператора T и обозначается через $\sqrt{T}$).*

В следующей теореме приводится важное свойство положительных самосопряженных операторов.

Теорема 2.6 ([45, § 9.28])**.** *Если T — замкнутый линейный оператор в гильбертовом пространстве H, то оператор T^*T является положительным самосопряженным оператором, причем T совпадает с замыканием сужения T на $\mathfrak{D}(T^*T)$.*

Из теоремы 2.6 и следствия 2.2 вытекает, что для каждого замкнутого линейного оператора T однозначно определен положительный самосопряженный оператор $(T^*T)^{1/2}$. Этот оператор называется *абсолютной величиной* (или *модулем*) оператора T и обозначается через $|T|$.

Для замкнутого оператора T в H, как и для ограниченного линейного оператора, обозначим через $n(T)$ ортогональный проектор на $\operatorname{Ker}(T)$, а через $l(T)$ — ортогональный проектор на $\overline{\operatorname{Ran}(T)}$. Проектор $r(T) = I - n(T)$ называется *правым носителем* оператора T, а проектор $l(T))$ — *левым носителем* оператора T. Если $T = T^*$, то проектор $s(T) = r(T) = l(T)$ называется *носителем* оператора T.

Теорема 2.7 (полярное разложение неограниченного оператора [45, § 9.29])**.** *Для каждого замкнутого линейного оператора T в H существуют положительный самосопряженный оператор A в H и частичная изометрия $V \in \mathcal{B}(H)$, такие что $T = VA$ и $V^*V = s(A)$. Операторы A и V этими условиями определяются однозначно. Более того, $A = |T|$, $V^*V = r(T)$ и $VV^* = l(T)$.*

Представление замкнутого линейного оператора в виде $T = V|T|$, где $V^*V = s(|T|)$, называется *полярным разложением* оператора T. Так как линейный оператор $V|T|V^*$ является положительным и самосопряженным, то из соотношений $T^* = V^*(V|T|V^*)$ и $VV^* = s(V|T|V^*)$ получается полярное разложение оператора T^*. В частности, $|T^*| = V|T|V^*$, $T = |T^*|V$, $VV^* = s(|T^*|)$ (см. [45, § 9.30]).

Следствие 2.3 ([45, § 9.31])**.** *Для каждого линейного самосопряженного оператора T в H существуют такие положительный самосопряженные операторы T_+, T_- в H, что*

$$T = T_+ - T_-,\ s(T_+)s(T_-) = 0.$$

Эти соотношения определяют операторы T_+, T_- однозначно и $|T| = T_+ + T_-$.

С помощью следствия 2.3 функциональное счисление для положительных линейных самосопряженных операторов расширяется на класс произвольных самосопряженных линейных операторов [45, § 9.32].

Пусть T — линейный самосопряженный оператор в H и $T = T_+ - T_-$. Для каждой функции $f \in \mathcal{B}(-\infty, +\infty)$ определим функцию $\hat{f} \in \mathcal{B}(-\infty, +\infty)$ соотношением

$$\hat{f}(\lambda) = f(-\lambda), \lambda \in (-\infty, +\infty).$$

Положим

$$f(T) = (f\chi_{(0,+\infty)})(T_+) + (\hat{f}\chi_{(0,+\infty)})(T_-) + f(0)(I - s(T)).$$

Так как

$$H = s(T_+)(H) \oplus s(T_-)(H) \oplus (I - s(T))(H),$$

и для положительных самосопряженных операторов верны равенства

$$T_+ = T_+s(T_+),\quad T_- = T_-s(T_-),$$

причем первый из них действует в пространстве $s(T_+(H))$, а второй — в пространстве $s(T_-(H))$, то для T сохраняется вариант теоремы 2.5. Следовательно $f(T)$ — замкнутый линейный оператор в H и для $f(T)$ выполняются все утверждения теоремы 2.5 с соответствующей заменой проекторов E_n на проекторы

$$\chi_{(\frac{1}{n+1},+\infty)}((T_+ + I)^{-1}) + \chi_{(\frac{1}{n+1},+\infty)}((T_- + I)^{-1}),\ n = 1, 2, \dots$$

Пусть T — произвольный линейный самосопряженный оператор в H, χ_λ — характеристическая функция множества $(-\infty, \lambda)$ и

$$E_\lambda = \chi_\lambda(T),\quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Согласно следствию 2.2, все E_λ являются проекторами в H и имеет место следующее предложение.

Предложение 2.5.

1. $E_\lambda \leqslant E_\mu$, *если* $\lambda \leqslant \mu$;
2. $\inf\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} E_\lambda = 0$, $\sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} E_\lambda = I$;
3. $E_\mu = \sup\limits_{\lambda<\mu} E_\lambda$;
4. $T(E_\mu - E_\lambda) \in \mathcal{B}_h(H)$ *для всех* $\lambda \leqslant \mu$ *и*
$$\lambda(E_\mu - E_\lambda) \leqslant T(E_\mu - E_\lambda) \leqslant \mu(E_\mu - E_\lambda);$$
5. $E_\lambda S = SE_\lambda$ *для каждого оператора* $S \in \mathcal{B}(H)$ *такого, что* S *коммутирует с* T (*т. е.* $ST \subset TS$).

Семейство проекторов $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ называется *спектральным семейством* для линейного самосопряженного оператора T. Как и в случае ограниченного линейного оператора, функция

$$E_{\xi,\eta}(\lambda) = (E_\lambda\xi, \eta),\ \lambda \in \mathbb{R},$$

определяет комплекснозначную борелевскую меру на $\mathbb{R}$ для всех $\xi, \eta \in H$.

Теорема 2.8 ([13]). *Пусть T — линейный самосопряженный оператор в H и $E_\lambda = \chi_\lambda(T)$. Тогда для каждой функции $f \in \mathcal{B}(-\infty, +\infty)$ имеет место следующее равенство*:

$$(f(T)\xi, \eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE_{\xi,\eta}(\lambda),\ \xi \in \mathfrak{D}(f(T)),\ \eta \in H,$$

и

$$\mathfrak{D}(f(T)) = \left\{ \xi \in H\colon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 dE_{\xi,\xi}(\lambda) < \infty \right\}.$$

В частности, если $f(\lambda) = \lambda$, то

$$(T\xi, \eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_{\xi,\eta}(\lambda),\ \xi \in \mathfrak{D}(T),\ \eta \in H, \quad и \quad \mathfrak{D}(T) = \left\{ \xi \in H\colon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^2 dE_{\xi,\xi}(\lambda) < \infty \right\}.$$

3. $*$-Алгебры локально измеримых операторов

В этом разделе описываются $*$-алгебры $S(\mathcal{M})$ и $LS(\mathcal{M})$ замкнутых измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. В случае, когда на $\mathcal{M}$ существует точный нормальный полуконечный след τ, рассматриваются также $*$-алгебры $S(\mathcal{M}, \tau)$ τ-измеримых операторов, присоединенных к $\mathcal{M}$.

$*$-Алгебры $S(\mathcal{M})$ впервые были введены И. Сигалом [43], $*$-алгебры $S(\mathcal{M}, \tau)$ — Е. Нельсоном [35] и Ф. Йедоном [48], а $*$-алгебры $LS(\mathcal{M})$ — С. Санкараном [40] и Ф. Йедоном [47].

3.1. $*$-Алгебра $S(\mathcal{M})$ измеримых операторов. Пусть H — гильбертово пространство, $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана операторов, действующих в H, и $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ — полная решетка всех проекторов из $\mathcal{M}$.

Линейное подпространство $\mathfrak{D}$ в H называется *присоединенным* к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ (обозначение: $\mathfrak{D}\ \eta\ \mathcal{M}$), если $U(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{D}$ для каждого унитарного оператора $U \in \mathcal{M}'$.

Если $\mathfrak{D}$ — замкнутое линейное подпространство в H и $P_\mathfrak{D}$ — проектор на $\mathfrak{D}$, то $\mathfrak{D}\ \eta\ \mathcal{M}$ в том и только в том случае, когда $P_\mathfrak{D} \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$.

Линейное подпространство $\mathfrak{D} \subset H$ называется *сильно плотным* в H относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, если $\mathfrak{D}\ \eta\ \mathcal{M}$ и существует последовательность проекторов $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ из $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ такая, что $P_n \uparrow I$, $P_n(H) \subset \mathfrak{D}$ и $P_n^\perp$ — конечный проектор для каждого $n = 1, 2, \ldots$ В этом случае говорят, что сильно плотное линейное подпространство $\mathfrak{D}$ *определено* последовательностью проекторов $\{P_n\}_{n=1}^\infty$.

Из условия $P_n \uparrow I$ непосредственно следует, что каждое сильно плотное линейное подпространство является плотным в H.

Линейный оператор T с областью определения $\mathfrak{D}(T)$, действующий в гильбертовом пространстве H, называется *присоединенным* к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ (обозначение: $T\ \eta\ \mathcal{M}$), если $UT \subset TU$ для каждого унитарного оператора $U \in \mathcal{M}'$, т. е. $\mathfrak{D}(T)\ \eta\ \mathcal{M}$ и $UT\xi = TU\xi$ для любого $\xi \in \mathfrak{D}(T)$.

Легко видеть, что ограниченный линейный оператор $T \in \mathcal{B}(H)$ присоединен к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда $T \in \mathcal{M}$.

Предложение 3.1 ([9, § 2.1], [11, § 35.1]).

1. *Если $T\ \eta\ \mathcal{M}$, $S\ \eta\ \mathcal{M}$, то $(T + S)\ \eta\ \mathcal{M}$, $(TS)\ \eta\ \mathcal{M}$ и $(\lambda T)\ \eta\ \mathcal{M}$ для любого комплексного числа $\lambda \in \mathbb{C}$.*
2. *Если T — предзамкнутый линейный оператор и $T\ \eta\ \mathcal{M}$, то $\overline{T}\ \eta\ \mathcal{M}$ и $T^*\ \eta\ \mathcal{M}$.*
3. *Если T — замкнутый линейный оператор и $T = W|T|$ — его полярное разложение, то $T\ \eta\ \mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда $W \in \mathcal{M}$ и $|T|\ \eta\ \mathcal{M}$. В этом случае правый носитель $r(T)$ и левый носитель $l(T)$ оператора T принадлежат $\mathcal{M}$ и $l(T) \sim r(T)$ в $\mathcal{M}$.*
4. *Если T — самосопряженный линейный оператор, $T\ \eta\ \mathcal{M}$, и $T = T_+ - T_-$, то $T_+ \eta\ \mathcal{M}$ и $T_- \eta\ \mathcal{M}$.*
5. *Если T — самосопряженный линейный оператор и $T\ \eta\ \mathcal{M}$, то*
   5.1. *$f(T)\ \eta\ \mathcal{M}$ для каждой борелевской функции $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$;*

5.2. $f(T) \in \mathcal{M}$ *для каждой ограниченной борелевской функции* $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$;
5.3. $E_A(T) = \chi_A(T) \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ *для каждого борелевского подмножества* $A \subset \mathbb{R}$.

Замкнутый линейный оператор T, действующий в гильбертовом пространстве H, называется *измеримым* относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, если $T \,\eta\, \mathcal{M}$ и его область определения $\mathfrak{D}(T)$ сильно плотна в H.

Пусть оператор T измерим и $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность проекторов из $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, определяющая его область определения $\mathfrak{D}(T)$. Так как T замкнут и $P_n(H) \subset \mathfrak{D}(T)$, то TP_n — замкнутый оператор, отображающий $P_n(H)$ в H. При этом $\mathfrak{D}(TP_n) = P_n(H)$. Поэтому в силу теоремы о замкнутом графике (см., например, [13, п. 2.15]) получим $TP_n \in \mathcal{B}(H)$. Кроме того, если U — унитарный оператор из $\mathcal{M}'$ и $\xi \in H$, то $UTP_n\xi = TUP_n\xi = TP_nU\xi$, $n = 1, 2, \ldots$, т. е., $U(TP_n) = (TP_n)U$. Это означает, что $TP_n \in \mathcal{M}$ для любого $n = 1, 2, \ldots$

Предложение 3.2 ([43]). *Если T — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения и $T = W|T|$ его полярное разложение, то оператор T измерим относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда $W \in \mathcal{M}$ и $|T|$ измерим относительно $\mathcal{M}$.*

Предложение 3.3 ([47]). *Пусть T — замкнутый линейный оператор в H, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, с плотной областью определения $\mathfrak{D}(T)$, и $\{E_\lambda\}_{\lambda \geqslant 0}$ — спектральное семейство проекторов оператора $|T|$. Если $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $Q(H) \subset \mathfrak{D}(T)$, то $TQ \in \mathcal{B}(H)$ и $E_\lambda^\perp \precsim Q^\perp$ для любого λ с $\|TQ\|_{\mathcal{B}(H)} < \lambda$.*

В следующем предложении дается критерий измеримости замкнутого линейного оператора T, присоединенного к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, в терминах спектрального семейства проекторов оператора $|T|$.

Предложение 3.4 ([47]). *Пусть T — замкнутый линейный оператор, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ и пусть $\{E_\lambda\}_{\lambda \geqslant 0}$ — спектральное семейство проекторов оператора $|T|$. Следующие условия эквивалентны*:

1. *Оператор T измерим относительно $\mathcal{M}$.*
2. *Область определения $\mathfrak{D}(T)$ оператора T плотна в H и $E_\lambda^\perp$ является конечным проектором для некоторого $\lambda > 0$.*

Следствие 3.1. *Если $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана, то любой замкнутый линейный оператор T, действующий в H и присоединенный к $\mathcal{M}$, измерим относительно $\mathcal{M}$.*

Предложение 3.5 ([9, утверждение 2.2.6]). *Пусть T — симметрический линейный оператор, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, и пусть его область определения $\mathfrak{D}(T)$ сильно плотна в H. Тогда самосопряженный линейный оператор $\overline{T}$ измерим относительно $\mathcal{M}$.*

Следствие 3.2. *Пусть $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана и $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ — семейство проекторов из $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, обладающее следующими свойствами*:

1. $E_\lambda E_\mu = E_\lambda$, *если* $\lambda \leqslant \mu$;
2. $\inf\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} E_\lambda = 0$, $\sup\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} E_\lambda = I$;
3. $\sup\limits_{\lambda < \mu} E_\lambda = E_\mu$.

Тогда существует самосопряженный оператор T, измеримый относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, такой, что

$$(T\xi, \zeta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_{\xi,\zeta}(\lambda)$$

для любых $\xi \in \mathfrak{D} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n E_{-n}^\perp(H)$ *и* $\zeta \in H$.

Предзамкнутый линейный оператор T, действующий в гильбертовом пространстве H с областью определения $\mathfrak{D}(T)$, называется *предызмеримым* относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, если $T \,\eta\, \mathcal{M}$ и существует такая последовательность проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ из $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $P_n \uparrow I$, $P_n(H) \subset$

$\mathfrak{D}(T)$, $TP_n \in \mathcal{B}(H)$ и $P_n^\perp$ — конечный проектор для каждого $n = 1, 2, \ldots$ (в этом случае говорят, что оператор T *сильно определен* на последовательности $\{P_n\}_{n=1}^\infty$).

Ясно, что любой измеримый оператор является предызмеримым. Обратно, если оператор T предызмерим относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, то его замыкание $\overline{T}$ является измеримым оператором относительно $\mathcal{M}$. При этом $TP_n = \overline{T}P_n \in \mathcal{M}$, где $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность из $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, на которой сильно определен оператор T.

В следующем предложении приведены наиболее важные свойства предызмеримых операторов.

Предложение 3.6 ([43]).

1. *Если T — предызмеримый оператор, то оператор T^* является измеримым.*
2. *Если T и S — предызмеримые операторы, совпадающие на сильно плотном подпространстве $\mathfrak{D}$, то $\overline{T} = \overline{S}$.*
3. *Если измеримый оператор T сильно определен на последовательности проекторов $\{P_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$, то T совпадает с замыканием сужения T на подпространство $\mathfrak{D} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n(H)$.*

Обозначим через $S(\mathcal{M})$ множество всех операторов, измеримых относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$. Ясно, что $\mathcal{M} \subset S(\mathcal{M})$.

Следующее предложение позволяет определить алгебраические операции в $S(\mathcal{M})$.

Предложение 3.7 ([43]). *Если операторы T и S предызмеримы относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, то операторы $T + S$ и TS тоже предызмеримы относительно $\mathcal{M}$.*

Пусть T и S — операторы, измеримые относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$. Согласно предложению 3.7, замыкания $\overline{T+S}$ и $\overline{TS}$ операторов $T+S$ и TS являются измеримыми относительно $\mathcal{M}$ операторами. Эти замыкания называются *сильной суммой и сильным произведением* операторов T и S соответственно, и обозначаются

$$\overline{T+S} = T \dotplus S, \quad \overline{TS} = T \cdot S.$$

В [43] показано, что если $T \in S(\mathcal{M})$ и $S \in \mathcal{M}$, то

$$T \dotplus S = T + S, \ T \cdot S = TS.$$

Теорема 3.1 ([43]). *Множество $S(\mathcal{M})$ является $*$-алгеброй над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ с единичным элементом I относительно операций сильной суммы, сильного произведения и операции перехода к сопряженному оператору (умножение на скаляры определяется обычным образом, причем считается, что $0 \cdot T = 0$).*

Отметим, что из определения алгебраических операций в $S(\mathcal{M})$ следует, что алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ является $*$-подалгеброй в $S(\mathcal{M})$. В дальнейшем, если не возникает необходимость, операции сильной суммы и сильного произведения измеримых операторов мы будем обозначать обычным образом.

В случае коммутативной алгебры фон Неймана понятие измеримого оператора, по существу, эквивалентно понятию измеримой функции (см., например, [43]).

Пример 3.1 ([31, § 4.4]). Пусть $\mathcal{M}$ — коммутативная алгебра фон Неймана. Согласно предложению 2.1 алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ отождествляется с алгеброй фон Неймана $L_\infty(\Omega, \Sigma, m)$ всех измеримых ограниченных комплекснозначных функций, заданных на пространстве (Ω, Σ, m) с локально конечной мерой m. Считаем, что алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ действует в гильбертовом пространстве $H = L_2(\Omega, \Sigma, m)$ по правилу: $T(f)(\omega) = T(\omega)f(\omega)$, где $T \in \mathcal{M} \cong L_\infty(\Omega, \Sigma, m)$, $f \in H, \ \omega \in \Omega$.

Обозначим через $S(\Omega, \Sigma, m)$ $*$-алгебру всех измеримых почти всюду конечных комплекснозначных функций, заданных на пространстве (Ω, Σ, m) (как обычно, равные почти всюду функции отождествляются). Для каждой функции $f \in S(\Omega, \Sigma, m)$ положим $\mathfrak{D}(f) = \{g \in H\colon \ fg \in H\}$. Ясно, что $\mathfrak{D}(f)$ — всюду плотное линейное подпространство в H. Определим линейный оператор $T_f\colon \mathfrak{D}(f) \to H$, полагая $T_f(g) = fg$. В следующем предложении дается описание $*$-алгебры $S(\mathcal{M})$ с помощью операторов T_f.

Предложение 3.8.
1. *Оператор T_f принадлежит $*$-алгебре $S(\mathcal{M})$ для каждой функции $f \in S(\Omega, \Sigma, m)$.*
2. *Для каждого оператора $T \in S(\mathcal{M})$ существует единственная функция $f \in S(\Omega, \Sigma, m)$ такая, что $T = T_f$.*

Следствие 3.3. *$*$-Алгебры $S(\Omega, \Sigma, m)$ и $S(\mathcal{M})$ $*$-изоморфны.*

Отметим следующее полезное свойство измеримых операторов.

Предложение 3.9 ([14, глава V, § 1]). *Пусть $T \in S(\mathcal{M})$, $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ и*
$$P_T = I - r(P^{\perp}T),$$
где $r(P^{\perp}T)$ — правый носитель оператора $P^{\perp}T$. Тогда $TP_T = PTP_T$ и $P_T^{\perp} \precsim P^{\perp}$.

Более подробное изложение свойств измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, можно найти, например, в [9, 14, 43].

3.2. $*$-Алгебра $LS(\mathcal{M})$ локально измеримых операторов. Замкнутый линейный оператор T, действующий в гильбертовом пространстве H, называется *локально измеримым* относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(H)$, если $T \;\eta\; \mathcal{M}$ и существует такая последовательность центральных проекторов $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, что $Z_n \uparrow I$ и $TZ_n \in S(\mathcal{M})$ для всех $n = 1, 2, \ldots$

Предзамкнутый линейный оператор T, действующий в гильбертовом пространстве H, называется *локально предызмеримым* относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(H)$, если $T \;\eta\; \mathcal{M}$ и существует такая последовательность центральных проекторов $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, что $Z_n \uparrow I$ и операторы TZ_n предызмеримы относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$

Очевидно, что любой локально измеримый оператор является локально предызмеримым. Обратно, если T — локально предызмеримый линейный оператор, то оператор $\overline{T}$ — локально измерим.

Обозначим множество всех линейных операторов, локально измеримых относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, через $LS(\mathcal{M})$. Ясно, что $S(\mathcal{M}) \subset LS(\mathcal{M}$ и $S(\mathcal{M}) = LS(\mathcal{M})$, если $\mathcal{M}$ — фактор.

Предложение 3.10 ([9, утверждение 2.3.3]). *Если T — замкнутый оператор с плотной областью определения и $T = W|T|$ — его полярное разложение, то оператор T локально измерим относительно $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда $W \in \mathcal{M}$ и $|T|$ локально измерим относительно $\mathcal{M}$.*

В следующем предложении даются необходимые и достаточные условия локальной измеримости линейного оператора.

Предложение 3.11 ([9, утверждение 2.3.4]). *Пусть T — замкнутый оператор с областью определения $\mathfrak{D}(T)$, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Следующие условия эквивалентны*:
1. *Оператор T локально измерим относительно $\mathcal{M}$.*
2. *Существует возрастающая сеть $\{Z_\alpha\}_{\alpha \in J}$ центральных проекторов из $Z(\mathcal{M})$, для которых $\sup\limits_{\alpha} Z_\alpha = I$ и $TZ_\alpha \in S(\mathcal{M})$ для всех $\alpha \in J$.*
3. *Существует возрастающая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральных проекторов из $\mathcal{M}$, для которых $\sup\limits_{n \geqslant 1} Z_n = I$ и $Z_n E_n^{\perp}$ — конечные проекторы для всех $n = 1, 2, \ldots$, где $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ — спектральное семейство проекторов для $|T|$.*
4. *Существуют такие последовательность проекторов $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ и последовательность центральных проекторов $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, что $Q_n \uparrow I$, $Z_n \uparrow I$, $Q_n(H) \subset \mathfrak{D}(T)$ и $Z_n Q_n^{\perp}$ — конечные проекторы для всех $n = 1, 2, \ldots$.*

Из предложения 3.11 непосредственно вытекает следующее следствие.

Следствие 3.4. *Если $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана, то $S(\mathcal{M}) = LS(\mathcal{M})$.*

Линейное подпространство $\mathfrak{D}$ в гильбертовом пространстве H называется *локально измеримым* относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, если $\mathfrak{D} \;\eta\; \mathcal{M}$ и существуют такие последовательности проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ и $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, что $P_n \uparrow I$, $Z_n \uparrow I$, $P_n(H) \subset \mathfrak{D}$ и $Z_n P_n^{\perp}$ —

конечные проекторы для всех $n = 1, 2, \ldots$ В этом случае говорят, что линейное подпространство $\mathfrak{D}$ *определено последовательностями* $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Из предложения 3.11 следует, что замкнутый линейный оператор T, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ локально измерим относительно $\mathcal{M}$ в том и только в том случае, когда его область определения $\mathfrak{D}(T)$ локально измерима относительно $\mathcal{M}$.

Предложение 3.12 ([9, утверждение 2.3.7]). *Пусть T — предзамкнутый линейный оператор, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Следующие условия эквивалентны*:

1. *Оператор T локально предызмерим относительно $\mathcal{M}$*;
2. *Существуют такие последовательность проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ и последовательность центральных проекторов $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, что $P_n \uparrow I$, $Z_n \uparrow I$, $P_n(H) \subset \mathfrak{D}(T)$, $Z_n P_n^{\perp}$ — конечные проекторы, $n = 1, 2, \ldots$, и $TZ_nP_m \in \mathcal{B}(H)$ для всех $n, m = 1, 2, \ldots$*

Если T — линейный оператор, локально предызмеримый относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, и $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательности проекторов из утверждения 3.12, то говорят, что оператор T определен последовательностями $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$.

В следующем предложении приведены основные свойства локально предызмеримых операторов (см., например, [9, 14, 40, 47]).

Предложение 3.13.

1. *Если T — симметрический оператор, присоединенный к $\mathcal{M}$, и его область определения $\mathfrak{D}(T)$ локально измерима относительно $\mathcal{M}$, то его замыкание $\overline{T}$ является самосопряженным оператором, локально измеримым относительно $\mathcal{M}$.*
2. *Если T — линейный оператор, локально предызмеримый относительно $\mathcal{M}$, то оператор T^* является локально измеримым относительно $\mathcal{M}$.*
3. *Если локально предызмеримые операторы T и S совпадают на локально измеримом подпространстве $\mathfrak{D}$, то $\overline{T} = \overline{S}$.*
4. *Если оператор $T \in LS(\mathcal{M})$ и его область определения $\mathfrak{D}(T)$ определена последовательностями проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ и $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, то оператор T совпадает с замыканием сужения T на $\mathfrak{D} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n(H)$.*
5. *Если T и S — операторы, локально предызмеримые относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, то операторы $T + S$ и TS также локально предызмеримы относительно $\mathcal{M}$.*

Так же как и для измеримых операторов, будем обозначать сильную сумму и сильное произведение операторов $T, S \in LS(\mathcal{M})$ через $T \dotplus S$ и $T \cdot S$ соответственно. Согласно предложению 3.13 имеем, что

$$T \dotplus S,\ T \cdot S,\ T^* \in LS(\mathcal{M}).$$

Отметим, что если $T \in LS(\mathcal{M})$, $S \in \mathcal{M}$, то $T \dotplus S = T + S$ и $T \cdot S = TS$. Кроме того, если $T \in LS(\mathcal{M})$, $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ и $P(H) \subset \mathfrak{D}(T)$, то $TP \in \mathcal{M}$.

Теорема 3.2 ([47]). *Множество $LS(\mathcal{M})$ является $*$-алгеброй над полем комплексных чисел с единицей I относительно сильного сложения, сильного умножения и перехода к сопряженному оператору* (*умножение на скаляры определяется обычным образом, причем считается, что* $0 \cdot T = 0$). *При этом алгебра $S(\mathcal{M})$ есть $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$.*

3.3. Частичный порядок на $LS_h(\mathcal{M})$. Обозначим множество всех самосопряженных операторов из $LS(\mathcal{M})$ через $LS_h(\mathcal{M})$ и определим частичный порядок на $LS_h(\mathcal{M})$, полагая $T \leqslant S$, если $(S - T)$ — положительно определенный оператор. Ясно, что $T^*T \geqslant 0$ для любого $T \in LS(\mathcal{M})$.

Множество всех положительных операторов из $LS(\mathcal{M})$ обозначим через $LS_+(\mathcal{M})$. Для каждого оператора $T \in LS_+(\mathcal{M})$ оператор $\sqrt{T}$ тоже принадлежит $LS_+(\mathcal{M})$ (см. ниже предложение 5.1). В следующем предложении приведены основные свойства введенного на $LS_h(\mathcal{M})$ отношения частичного порядка.

Предложение 3.14.

1. *Для любого неотрицательного числа λ и для любых операторов $T, S, R \in LS_h(\mathcal{M})$, $A \in LS(\mathcal{M})$ верны следующие соотношения*:

1.1. *Если* $T \leqslant S$, *то* $T + R \leqslant S + R$ *и* $\lambda T \leqslant \lambda S$;
1.2. *Если* $T \geqslant 0$, $S \geqslant 0$, $TS = ST$, *то* $TS \geqslant 0$;
1.3. *Если* $T \leqslant S$, *то* $A^*TA \leqslant A^*SA$.

2. *Если* $T \in LS_+(\mathcal{M})$ *и в* $LS(\mathcal{M})$ *существует обратный оператор* T^{-1}, *то* $T^{-1} \geqslant 0$.
3. *Если* $T \in LS_+(\mathcal{M})$, $0 \leqslant T \leqslant I$ *и в* $LS(\mathcal{M})$ *существует обратный оператор* T^{-1}, *то* $T^{-1} \geqslant I$.
4. *Если* $T, S \in LS_+(\mathcal{M})$, $0 \leqslant T \leqslant S$ *и в* $LS(\mathcal{M})$ *существуют обратные операторы* T^{-1} *и* S^{-1}, *то* $0 \leqslant S^{-1} \leqslant T^{-1}$.
5. *Если* $\{T_\alpha\}_{\alpha \in J}$ — *возрастающая сеть операторов из* $LS_h(\mathcal{M})$ *и* $T_\alpha \leqslant S \in LS(\mathcal{M})$ *для каждого* $\alpha \in J$, *то существует точная верхняя грань* $\sup\limits_{\alpha \in J} T_\alpha$ *в* $LS_h(\mathcal{M})$.

Отметим еще одно важное свойство частичного порядка в $LS_h(\mathcal{M})$.

Теорема 3.3 ([9, 15, теорема 2.4.5]). *Для любых операторов* $T, S \in LS(\mathcal{M})$ *существуют такие частично изометрические операторы* $U, V \in \mathcal{M}$, *что верно неравенство*:

$$|T + S| \leqslant U|T|U^* + V|S|V^*.$$

3.4. $*$-Алгебра $S(\mathcal{M}, \tau)$ τ-измеримых операторов. Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, действующей в гильбертовом пространстве H.

Линейное подпространство $\mathfrak{D}$ в H называется *τ-плотным*, если $\mathfrak{D}\ \eta\ \mathcal{M}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такой проектор $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $P(H) \subset \mathfrak{D}$ и $\tau(I - P) \leqslant \varepsilon$.

Предложение 3.15. *Если* $\mathfrak{D}$ — *τ-плотное подпространство в* H, *то существует такая последовательность проекторов* $\{P_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$, *что* $P_n \uparrow I$, $P_n(H) \subset \mathfrak{D}$, $n = 1, 2, \ldots$, *и* $\tau(P_n^\perp) \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Из предложения 3.15 следует, что каждое τ-плотное подпространство $\mathfrak{D}$ в H является сильно плотным.

Замкнутый линейный оператор T, действующий в H, называется *τ-измеримым* относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, если $T\ \eta\ \mathcal{M}$ и $\mathfrak{D}(T)$ τ-плотно в H.

Обозначим через $S(\mathcal{M}, \tau)$ множество всех τ-измеримых операторов. Очевидно, что

$$\mathcal{M} \subset S(\mathcal{M}, \tau) \subset S(\mathcal{M}),$$

при этом $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ в том и только в том случае, когда $T \in S(\mathcal{M})$ и $\mathfrak{D}(T)$ τ-плотно в H.

Предложение 3.16 ([9, утверждение 2.6.5]). *Пусть* T — *замкнутый оператор с плотной областью определения* $\mathfrak{D}(T)$ *такой, что* $T\ \eta\ \mathcal{M}$, *и пусть* $T = U|T|$ — *полярное разложение оператора* T, *а* $\{E_\lambda\}_{\lambda > 0}$ — *спектральное семейство проекторов для оператора* $|T|$. *Следующие условия эквивалентны*:

1. $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$;
2. $U \in \mathcal{M}$ *и* $|T| \in S(\mathcal{M}, \tau)$;
3. $\tau(E_\lambda^\perp) < \infty$ *для некоторого* $\lambda > 0$;
4. $\tau(E_\lambda^\perp) \to 0$ *при* $\lambda \to +\infty$;
5. *существует такой проектор* $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, *что* $Q(H) \subset \mathfrak{D}(T)$ *и* $\tau(Q^\perp) < \infty$.

Замечание 3.1.

1. Если $\mathcal{M}$ — фактор типа I и τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, то $\mathcal{M} = S(\mathcal{M}, \tau) = S(\mathcal{M}) = LS(\mathcal{M})$.
2. Пусть $\mathcal{M}$ — фактор типа II_∞, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Тогда $\tau(P) < \infty$ в том и только в том случае, когда P — конечный проектор. Поэтому из утверждений 3.4 и 3.16 следует, что $\mathcal{M} \neq S(\mathcal{M}, \tau) = S(\mathcal{M})$.

4. Соотношения между $*$-алгебрами $S(\mathcal{M})$, $LS(\mathcal{M})$ и $S(\mathcal{M}, \tau)$

Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H. Как уже отмечалось выше, $\mathcal{M} \subset S(\mathcal{M}, \tau) \subset S(\mathcal{M}) \subset LS(\mathcal{M})$. Рассмотрим условия на алгебру фон Неймана $\mathcal{M}$, при выполнении которых эти алгебры попарно совпадают, или соответствующие вложения строгие (см. [7–9, 30]).

4.1. Соотношения между $*$-алгебрами $\mathcal{M}$ и $S(\mathcal{M})$. В следующем примере приведены условия, при выполнении которых существуют неограниченные операторы, измеримые относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, т. е. вложение $\mathcal{M} \subset S(\mathcal{M})$ — строгое.

Пример 4.1. Пусть в алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ существует возрастающая последовательность проекторов $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ такая, что $E = \sup\limits_{n\geqslant 1} E_n$ — конечный проектор, и $E_n \neq E$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Покажем, что тогда $S(\mathcal{M}) \neq \mathcal{M}$.

Положим

$$P_n = E^{\perp} + E_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда $P_n \uparrow I$ и $P_n^{\perp} = E - E_n$ — конечные проекторы в $\mathcal{M}$.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве H всюду плотное линейное подпространство

$$\mathfrak{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(H)$$

и определим линейный оператор T на $\mathfrak{D}$, полагая $T\xi = n\xi$ для всех $\xi \in (P_n - P_{n-1})(H), n = 1, 2, \ldots$, где $P_0 = 0$.

Покажем, что оператор T допускает замыкание.

Если $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}$, $\|\xi_k\|_H \to 0$ и $\|T\xi_k - \eta\|_H \to 0$ при $k \to \infty$, $\eta \in H$, то для каждого фиксированного $n = 1, 2, \ldots$ имеем, что $\|P_n\xi_k\|_H \to 0$ и $\|TP_n\xi_k - P_n\eta\|_H \to 0$ при $k \to \infty$. Полагая $Q_m = P_m - P_{m-1}$, получим, что

$$\left\|\sum_{m=1}^{n} Q_m\xi_k\right\|_H^2 = \sum_{m=1}^{n} \|Q_m\xi_k\|_H^2 = \sum_{m=1}^{n} \|P_m\xi_k - P_{m-1}\xi_k\|_H^2 \to 0$$

при $k \to \infty$ и

$$\|TP_n\xi_k - P_n\eta\|_H^2 = \left\|T\sum_{m=1}^{n} Q_m\xi_k - \sum_{m=1}^{n} Q_m\eta\right\|_H^2 =$$

$$= \left\|\sum_{m=1}^{n} mQ_m\xi_k - \sum_{m=1}^{n} Q_m\eta\right\|_H^2 = \sum_{m=1}^{n} \|Q_m(m\xi_k - \eta)\|_H^2 \to 0.$$

Отсюда следует, что $Q_m\eta = 0$ для всех $m = 1, 2, \ldots, n$, т. е. $P_n\eta = 0$ для любых $n = 1, 2, \ldots$. Так как $P_n \uparrow I$, то это означает, что $\eta = 0$, и потому оператор T допускает замыкание $\overline{T}$, которое в силу определения T является положительно определенным оператором, присоединенным к $\mathcal{M}$.

Обозначим через $\{E_\lambda\}_{\lambda\geqslant 0}$ спектральное семейство проекторов для оператора $\overline{T} = |\overline{T}|$. Поскольку

$$\|\overline{T}P_n\|_{\mathcal{B}(H)} = \|TP_n\|_{\mathcal{B}(H)} \leqslant n < n+1,$$

то в силу предложения 3.3 $E_{n+1}^{\perp} \precsim P_n^{\perp}$,

Действительно, допустим, что $P = P_n \wedge E_{n+1}^{\perp} \neq 0$ и рассмотрим ненулевой вектор $\xi \in P(H)$. Тогда $\xi \in \mathfrak{D}(\overline{T})$ и $E_\mu\xi = 0$ для всех $\mu \in [0, n+1]$. Следовательно,

$$\|\overline{T}\xi\|_H^2 = (|\overline{T}|^2\xi, \xi) = \int\limits_0^{\infty} \mu^2 d(E_\mu\xi, \xi) = \int\limits_0^{\infty} \mu^2 d\|E_\mu\xi\|_H^2 = \int\limits_{n+1}^{\infty} \mu^2 d\|E_\mu\xi\|_H^2 \geqslant (n+1)^2\|\xi\|_H^2.$$

Отсюда $\|\overline{T}\xi\|_H \geqslant (n+1)\|\xi\|_H$, что противоречит неравенству $\|\overline{T}P_n\|_{\mathcal{B}((H)} < n+1$. Это означает, что $P = 0$, и поэтому $E_{n+1}^{\perp} \precsim Q^{\perp}$ (см. предложение 2.2). Следовательно, $E_{n+1}^{\perp}$ — конечный проектор. Отсюда согласно предложению 3.4 получим, что $\overline{T} \in S(\mathcal{M})$.

Так как $E_n \neq E$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$, то найдутся такие номера $n_1 < n_2 < \ldots$, что $P_{n_{k+1}} - P_{n_k} \neq 0$, в частности, $\|\overline{T}\xi_k\|_H \geqslant n_k$ для некоторых $\xi_k \in (P_{n_{k+1}} - P_{n_k})(H)$ с нормой $\|\xi_k\|_H = 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Это означает, что $\overline{T} \notin \mathcal{M}$, и потому $S(\mathcal{M}) \neq \mathcal{M}$.

Предложение 4.1. *Если $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана типа II, то $S(\mathcal{M}) \neq \mathcal{M}$.*

Доказательство. Возьмем произвольный ненулевой конечный проектор $E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$. Так как $\mathcal{M}$ имеет тип II, то в $P(\mathcal{M})$ нет атомов. В частности, найдется такая последовательность ненулевых проекторов $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $Q_n \leqslant E$, $Q_nQ_m = 0$ при $n \neq m$, где $n, m = 1, 2, \ldots$, и

$$E = \sup_{n \geqslant 1} Q_n.$$

Положим $E_n = \sup\limits_{1 \leqslant m \leqslant n} Q_m = \sum\limits_{m=1}^{n} Q_m$. Тогда $E_n \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $E_n \uparrow E$ и $E_n \neq E$ при каждом $n = 1, 2, \ldots$. Из примера 4.1 непосредственно следует, что $S(\mathcal{M}) \neq \mathcal{M}$. □

В следующей теореме даются необходимые и достаточные условия для совпадения $*$-алгебр $S(\mathcal{M})$ и $\mathcal{M}$.

Теорема 4.1. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1. $S(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$.
2. $\mathcal{M}$ *представима в виде прямой суммы* $\mathcal{M} = \sum\limits_{n=0}^{m} \mathcal{M}_n$, *где* $\mathcal{M}_0$ — *алгебра фон Неймана типа* III, *а* $\mathcal{M}_n$ — *факторы типа* I, $n = 1, 2, \ldots, m$, m — *некоторое натуральное число* (*некоторые из слагаемых могут отсутствовать*).

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть $S(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$. Используя предложение 4.1 и представление алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ в виде прямой суммы алгебр фон Неймана типов I, II и III (см. предложение 2.2), получим, что $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}_0$ — алгебра фон Неймана типа III, а $\mathcal{N}$ — алгебра фон Неймана типа I. Существует такой центральный проектор $Z \in \mathcal{P}(Z(\mathcal{N}))$, что $Z\mathcal{N}$ — атомическая алгебра фон Неймана, а в решетке $\mathcal{P}((I_{\mathcal{N}} - Z)\mathcal{N})$ нет атомов, где $I_{\mathcal{N}}$ — единица алгебры фон Неймана $\mathcal{N}$.

Допустим, что $Z \neq I_{\mathcal{N}}$. Так как $(I_{\mathcal{N}} - Z)\mathcal{N}$ имеет тип I, то в $\mathcal{P}((I_{\mathcal{N}} - Z)\mathcal{N})$ существует ненулевой конечный проектор. Повторяя рассуждения примера 4.1, получим, что в этом случае $S(\mathcal{M}) \neq \mathcal{M}$, что не так. Следовательно, $Z = I_{\mathcal{N}}$, т. е. $\mathcal{N}$ — атомическая алгебра фон Неймана типа I.

Пусть $\{Q_i\}_{i \in J}$ — множество всех атомов в $\mathcal{P}(Z(\mathcal{N}))$, где J — некоторое множество индексов. Обозначим: $\mathcal{M}_i = Q_i\mathcal{N}$, $\ i \in J$. Тогда из равенства $Z(\mathcal{M}_i) = Q_iZ(\mathcal{N}) = Q_i\mathbb{C}$ получим, что $\mathcal{M}_i$ — факторы типа I.

Предположим, что J — бесконечное множество.

Выберем ненулевые конечные проекторы $E_i \in \mathcal{M}_i$ и положим $E = \sup\limits_{i \in J} E_i$. Поскольку $E_i = E_iQ_i$, $Q_iQ_j = 0$ при $i \neq j$, $Q_i \in Z(\mathcal{M})$, то E — конечный проектор. Поэтому, как и в примере 4.1, получим, что $S(\mathcal{M}) \neq \mathcal{M}$, что не так. Следовательно, J — конечное множество, т. е. $\mathcal{M}$ представима в виде прямой суммы $\mathcal{M} = \sum\limits_{n=0}^{m} \mathcal{M}_n$, где $\mathcal{M}_0$ — алгебра фон Неймана типа III, а $\mathcal{M}_n$ — факторы типа I, $n = 1, 2, \ldots, m$.

$2 \Rightarrow 1$. Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ представима в виде прямой суммы $\mathcal{M} = \sum\limits_{n=0}^{m} \mathcal{M}_n$, где $\mathcal{M}_0$ — алгебра фон Неймана типа III, а $\mathcal{M}_n$ — факторы типа I, $n = 1, 2, \ldots, m$. Если $T \in S(\mathcal{M})$, то найдется такая последовательность $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $P_n \uparrow I$, $P_n(H) \subset \mathfrak{D}(T)$ и $P_n^{\perp}$ — конечные проекторы, $n = 1, 2, \ldots$.

Поскольку $P_n^{\perp} \downarrow 0$ и в каждом факторе $\mathcal{M}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, может быть только конечная последовательность конечных проекторов, убывающая к нулю, то $P_n^{\perp} = 0$, начиная с некоторого номера. Это означает, что $\mathfrak{D}(T) = H$ и $T \in \mathcal{M}$, т. е., $S(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$. □

Следствие 4.1. *Если* $\mathcal{M}$ — *алгебра фон Неймана типа* III *или фактор типа* I, *то* $\mathcal{M} = S(\mathcal{M})$, *в частности,* $S(\mathcal{B}(H)) = \mathcal{B}(H)$.

4.2. Соотношения между $*$-алгебрами $LS(\mathcal{M})$ и $S(\mathcal{M})$. В следующем предложении приводятся условия для алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, при выполнении которых алгебры $LS(\mathcal{M})$ и $S(\mathcal{M})$ не совпадают, т. е. вложение $S(\mathcal{M}) \subset LS(\mathcal{M})$ является строгим.

Предложение 4.2. *Если в алгебре фон Неймана* $\mathcal{M}$ *существует такая последовательность центральных проекторов* $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$, *что* $Z_n \uparrow I$ *и* $(I - Z_n)$ — *не конечный проектор,* $n = 1, 2, \ldots$, *то* $LS(\mathcal{M}) \neq S(\mathcal{M})$.

Доказательство. Положим

$$\mathfrak{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n(H), \ P_n = Z_n, \ n = 1, 2, \ldots$$

Ясно, что $\mathfrak{D}$ — локально измеримое подпространство относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, определяемое последовательностями проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Линейный оператор T с областью определения $\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}$, определяемый равенством $T\xi = n\xi$ для $\xi \in (Z_n - Z_{n-1})(H)$, $Z_0 = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, является положительно определенным оператором, присоединенным к $\mathcal{M}$. Согласно предложению 3.13, имеем: $\overline{T} = \overline{T}^* \in LS(\mathcal{M})$. Так как

$$\overline{T} Z_n = \sum_{k=1}^{n} k(Z_k - Z_{k-1}),$$

то спектральный проектор для $\overline{T}$, соответствующий множеству $(-\infty, n)$, совпадает с Z_{n-1}, и поэтому, в силу предложения 3.4, оператор $\overline{T}$ не принадлежит $S(\mathcal{M})$. □

Следствие 4.2. *Если алгебра фон Неймана $\mathcal{M} = C^*\text{-} \prod_{j \in J} \mathcal{M}_j$ является C^*-произведением не конечных алгебр фон Неймана $\mathcal{M}_j$, где J — бесконечное множество индексов, то $LS(\mathcal{M}) \neq S(\mathcal{M})$.*

В следующей теореме приводятся необходимые и достаточные условия для совпадения $*$-алгебр $LS(\mathcal{M})$ и $S(\mathcal{M})$.

Теорема 4.2. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1. $LS(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M})$.
2. *$\mathcal{M}$ представима в виде прямой суммы $\mathcal{M} = \sum_{n=0}^{m} \mathcal{M}_n$, где $\mathcal{M}_0$ — конечная алгебра фон Неймана, а $\mathcal{M}_n$ — факторы типа I_∞, II_∞, III, $n = 1, 2, \ldots, m$, и m — некоторое натуральное число* (*некоторые из слагаемых могут отсутствовать*).

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть $LS(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M})$. Выберем центральный проектор Z_0 из $\mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$ так, чтобы

$$\mathcal{M} = Z_0\mathcal{M} + (I - Z_0)\mathcal{M},$$

где $Z_0\mathcal{M} = \mathcal{M}_0$ — конечная алгебра фон Неймана, а в алгебре фон Неймана $(I - Z_0)\mathcal{M} = \mathcal{N}$ нет ненулевых конечных центральных проекторов. Если булева алгебра $\mathcal{P}(Z(\mathcal{N}))$ содержит бесконечное число элементов, то найдется такая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ненулевых проекторов из $\mathcal{P}(Z(\mathcal{N}))$, что $Z_n Z_m = 0$ при $n \neq m$ и $\sup\limits_{n \geqslant 1} Z_n = I - Z_0$.

Положим $P_n = \sum_{m=0}^{n} Z_m$. Тогда $P_n \in \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, $P_n \uparrow I$ и $(I - P_n)$ — ненулевой центральный проектор из $\mathcal{N}$, т. е. $(I - P_n)$ — не конечный проектор в $\mathcal{M}$, $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, в силу предложения 4.2 выполнено $LS(\mathcal{M}) \neq S(\mathcal{M})$, что противоречит предположению.

Таким образом, булева алгебра $\mathcal{P}(Z(\mathcal{N}))$ содержит только конечное число элементов. Пусть $\{Q_n\}_{n=1}^{m}$ — множество всех атомов в $\mathcal{P}(Z(\mathcal{N}))$ и

$$\mathcal{M}_n = Q_n\mathcal{N} = Q_n\mathcal{M}.$$

Тогда $\mathcal{M}_n$ — не конечный фактор, т. е. $\mathcal{M}_n$ имеет один из типов I_∞, II_∞ или III, $n = 1, 2, \ldots, m$, при этом $\mathcal{M} = \sum_{n=0}^{m} \mathcal{M}_n$.

$2 \Rightarrow 1$. Пусть $\mathcal{M} = \sum_{n=0}^{m} \mathcal{M}_n$, где $\mathcal{M}_0$ — конечная алгебра фон Неймана, а $\mathcal{M}_n$ — факторы одного из типов I_∞, II_∞ или III, $n = 1, 2, \ldots, m$. Обозначим через Q_n единицу в алгебре $\mathcal{M}_n$, $n = 0, 1, \ldots, m$.

Предположим, что $T \in LS(\mathcal{M})$ и $\{Z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$ — такая последовательность центральных проекторов, что $Z_k \uparrow I$ и $TZ_k \in S(\mathcal{M})$, $k = 1, 2, \ldots$. Так как $\mathcal{M}_n$ — факторы, $n = 1, 2, \ldots, m$, то найдется такой номер k_0, что $Q_nZ_k = Q_n$ при всех $k \geqslant k_0$, $n = 1, 2, \dots, m$. В частности,

$$T(I - Q_0) = \sum_{n=1}^{m} TQ_n = \sum_{n=1}^{m} TZ_{k_0}Q_n \in S(\mathcal{M}).$$

Так как Q_0 — конечный центральный проектор, то $LS(Q_0\mathcal{M}) = S(Q_0\mathcal{M})$, и поэтому TQ_0 принадлежит $S(\mathcal{M})$. Следовательно,

$$T = TQ_0 + T(I - Q_0) \in S(\mathcal{M}).$$

Это означает, что $LS(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M})$. □

4.3. Прямое произведение алгебр локально измеримых операторов. Пусть $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in J}$ — семейство алгебр фон Неймана, действующих в гильбертовых пространствах H_i, $i \in J$, соответственно, где J — некоторое множество индексов. C^*-произведение $\mathcal{M} = C^*\text{-} \prod\limits_{i\in J} \mathcal{M}_i$ является алгеброй фон Неймана, действующей в гильбертовом пространстве $H = \sum\limits_{i\in J} H_i$.

Рассмотрим прямое произведение

$$\mathcal{A} = \prod_{i\in J} LS(\mathcal{M}_i) = \{\{T_i\}_{i\in J}\colon\ T_i \in LS(\mathcal{M}_i),\ i \in J\}$$

$*$-алгебр $LS(\mathcal{M}_i)$ операторов, локально измеримых относительно алгебр фон Неймана $\mathcal{M}_i$, $i \in J$. Множество $\mathcal{A}$ является $*$-алгеброй над полем комплексных чисел относительно покоординатных операций умножения на скаляр, сложения, умножения и инволюции. Обозначим через $Z_j = \{P_i\}_{i\in J}$ центральный проектор из $\mathcal{M}$, где $P_i = 0$ для $i \neq j$ и $P_j = I_{\mathcal{M}_j}$. Ясно, что $TZ_i \in LS(\mathcal{M}_i)$ для каждого $T \in LS(\mathcal{M})$. Зададим отображение

$$\varphi\colon LS(\mathcal{M}) \mapsto \mathcal{A},$$

полагая

$$\varphi(T) = \{TZ_i\}_{i\in J}.$$

Предложение 4.3. *Отображение φ является $*$-изоморфизмом между $*$-алгебрами $LS(\mathcal{M})$ и $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Очевидно, что отображение φ является $*$-гомоморфизмом из $*$-алгебры $LS(\mathcal{M})$ в $*$-алгебру $\mathcal{A}$. Если $\varphi(T) = 0$, то $TZ_i = 0$ для каждого $i \in J$, и поскольку $\sup\limits_{i\in J} Z_i = I_{\mathcal{M}}$, то $T = 0$. Следовательно, φ — инъективное отображение.

Возьмем произвольный элемент $\{T_i\}_{i\in J} \in \mathcal{A}$ и рассмотрим в гильбертовом пространстве H линейное подпространство $\mathfrak{D}$, полагая

$$\mathfrak{D} = \{\{\xi_i\}_{i\in J} \in \sum_{i\in J} H_i\colon\ \xi_i \in \mathfrak{D}(T_i)\}.$$

Если U — унитарный оператор из $\mathcal{M}'$, то $UZ_i \in (\mathcal{M}_i)'$ (мы отождествляем $LS(\mathcal{M}_i)$ с $*$-подалгеброй $\mathcal{A}_i$ в $\mathcal{A}$, где $\mathcal{A}_i = \{\{T_j\}_{j\in J} \in \mathcal{A}\colon\ T_j = 0 \text{ при } j \neq i\}$). Следовательно,

$$UZ_i(\mathfrak{D}(T_i)) \subset \mathfrak{D}(T_i),$$

и поэтому $U(\{\xi_i\}_{i\in J}) = \{UZ_i\xi_i\}_{i\in J} \in \mathfrak{D}$ для любого $\{\xi_i\}_{i\in J} \in \mathfrak{D}$. Это означает, что $\mathfrak{D}\ \eta\ \mathcal{M}$.

Обозначим через $\{Q_n^i\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M}_i)$ и $\{Z_n^i\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}_i))$ последовательности проекторов, определяющие локально измеримые операторы T_i, $i \in J$. Тогда $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\{Q_n^i\}_{i\in J}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\{Z_n^i\}_{i\in J}\}_{n=1}^{\infty}$ возрастающие последовательности проекторов из $\mathcal{M}$, такие, что $\sup\limits_{n\geqslant 1} Q_n = \sup\limits_{n\geqslant 1} Z_n = I_{\mathcal{M}}$, $Q_n(H) \subset \mathfrak{D}$ и проекторы $Z_nQ_n^{\perp}$ являются конечными для всех $n = 1, 2, \dots$ Это означает, что линейное подпространство $\mathfrak{D}$ является локально измеримым относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$. Рассмотрим линейный оператор T с областью определения $\mathfrak{D}$, задаваемый равенством

$$T(\{\xi_i\}_{i\in J}) = \{T_i(\xi_i)\}_{i\in J}.$$

Так как $T_i = \overline{T_i}$ для каждого $i \in J$, то $T = \overline{T}$ (последнее условие следует из поточечной сходимости в $\sum\limits_{i \in J} H_i$, и из определения оператора T). Это означает, что $T \in LS(\mathcal{M})$ и $\varphi(T) = \{T_i\}_{i \in J}$. Следовательно, φ является $*$-изоморфизмом. □

Согласно предложению 4.3, можно считать, что

$$LS\left(C^*\text{-}\prod_{i \in J} \mathcal{M}_i\right) = \prod_{i \in J} LS(\mathcal{M}_i).$$

Таким образом, конструкция алгебр локально измеримых операторов выдерживает операцию взятия прямого произведения. Для алгебр измеримых операторов, вообще говоря, это не так.

Пример 4.2. Пусть $\mathcal{M}_n$ — факторы типа III, $n = 1, 2, \ldots$, и пусть

$$\mathcal{M} = C^*\text{-}\prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n.$$

Так как в $\mathcal{M}$ не существует ни одного ненулевого конечного проектора, то по предложению 3.4

$$S(\mathcal{M}) = \mathcal{M}.$$

Далее, так как $\mathcal{M}_n$ — факторы типа III, $n = 1, 2, \ldots$, то по предложению 3.13

$$LS(\mathcal{M}_n) = \mathcal{M}_n = S(\mathcal{M}_n).$$

В тоже время, согласно предложению 4.2

$$LS(\mathcal{M}) \neq \mathcal{M} = S(\mathcal{M}).$$

Поэтому в силу предложения 4.3

$$\prod_{n=1}^{\infty} S(\mathcal{M}_n) = \prod_{n=1}^{\infty} LS(\mathcal{M}_n) = LS(\mathcal{M}) \neq S(\mathcal{M}).$$

В следующей теореме приводятся необходимые и достаточные условия совпадения $*$-алгебр $LS(\mathcal{M})$ и $\mathcal{M}$.

Теорема 4.3. *Следующие условия эквивалентны*:

1. $LS(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$;
2. $\mathcal{M}$ *представима в виде прямой суммы* $\mathcal{M} = \sum\limits_{n=1}^{m} \mathcal{M}_n$, *где* $\mathcal{M}_n$ — *факторы типа* I *или типа* III, $n = 1, 2, \ldots, m$ *и* m — *некоторое натуральное число* (*некоторые из слагаемых могут отсутствовать*).

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Предположим, что булева алгебра $\mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$ всех проекторов из центра $Z(\mathcal{M})$ алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ содержит бесконечное число элементов. Тогда существует такая последовательность проекторов $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, что $Z_n Z_m = 0$ при $n \neq m$ и

$$\sup_{n \geqslant 1} Z_n = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n = I.$$

Положим $\mathcal{M}_n = Z_n \mathcal{M}$. C^*-произведение алгебр фон Неймана $\mathcal{M}_n$ совпадает с $\mathcal{M}$ и потому согласно предложению 4.3 имеем, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} LS(\mathcal{M}_n) = LS(\mathcal{M}) = \mathcal{M}.$$

Однако элемент $T = \{nZ_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит $*$-алгебре $\prod\limits_{n=1}^{\infty} LS(\mathcal{M}_n)$, но не принадлежит $\mathcal{M}$.

Противоречие показывает, что булева алгебра $\mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$ содержит только конечное число элементов.

Пусть $\{Q_n\}_{n=1}^m$ — множество всех атомов в $\mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$ и $\mathcal{M}_n = Q_n\mathcal{M}$, где $n = 1, 2, \ldots, m$. Так как Q_n — атом в $\mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, то из равенства

$$Z(\mathcal{M}_n) = Q_n Z(\mathcal{M}) = Q_n\mathbb{C}$$

следует, что $\mathcal{M}_n$ — фактор для каждого $n = 1, 2, \ldots, m$, при этом $\mathcal{M} = \sum\limits_{n=1}^{m} \mathcal{M}_n$.

Если для некоторого n фактор $\mathcal{M}_n$ имеет тип II, то $LS(\mathcal{M}_n) = S(\mathcal{M}_n) \neq \mathcal{M}_n$ (см. предложение 4.1). Тогда в силу предложения 4.3 получим, что

$$LS(\mathcal{M}) = \prod_{n=1}^{m} LS(\mathcal{M}_n) \neq \sum_{n=1}^{m} \mathcal{M}_n = \mathcal{M},$$

что неверно.

Следовательно, $\mathcal{M}_n$ — факторы либо типа I, либо типа III для любого $n = 1, 2, \ldots, m$.

$2 \Rightarrow 1$. Пусть $\mathcal{M} = \sum\limits_{n=1}^{m} \mathcal{M}_n$, где $\mathcal{M}_n$ — факторы либо типа I, либо типа III, $n = 1, 2, \ldots, m$.

Тогда

$$LS(\mathcal{M}_n) = S(\mathcal{M}_n) = \mathcal{M}_n$$

для каждого $n = 1, 2, \ldots, m$ и потому

$$LS(\mathcal{M}) = \prod_{n=1}^{m} LS(\mathcal{M}_n) = \sum_{n=1}^{m} \mathcal{M}_n = \mathcal{M}.$$

□

4.4. $*$-Алгебры $S(\mathcal{M}, \tau)$, ассоциированные с различными следами. Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, действующей в гильбертовом пространстве H, и $S(\mathcal{M}, \tau)$ — $*$-алгебра всех τ-измеримых операторов, присоединенных к $\mathcal{M}$. Если $\mathcal{M}$ — фактор типа I, то $\mathcal{M} = S(\mathcal{M}, \tau) = S(\mathcal{M}) = LS(\mathcal{M})$. Если же $\mathcal{M}$ — фактор типа II_∞, то $\tau(P) < \infty$ тогда и только тогда, когда P — конечный проектор. Поэтому в этом случае

$$\mathcal{M} \neq S(\mathcal{M}, \tau) = S(\mathcal{M}).$$

Следующий пример показывает, что, вообще говоря, $*$-алгебра $S(\mathcal{M}, \tau)$ зависит от точного нормального полуконечного следа τ.

Пример 4.3. Пусть $\mathcal{M} = l_\infty$ — коммутативная алгебра фон Неймана ограниченных последовательностей комплексных чисел с покоординатными алгебраическими операциями. В этом случае $\mathcal{M} = L_\infty(\Omega, \Sigma, m)$, где Ω представляет собой множество $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел, Σ — σ-алгебра всех подмножеств из $\mathbb{N}$, и m — считающая мера на Σ.

Мера m определяет точный нормальный полуконечный след τ на $\mathcal{M}_+$ формулой:

$$\tau(\{c_n\}_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,\ c_n \geqslant 0,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Элемент $P = \{c_n\}_{n=1}^\infty \in l_\infty$ является проектором тогда и только тогда, когда для каждого $n = 1, 2, \ldots$ либо $c_n = 0$, либо $c_n = 1$. Поэтому $\tau(P) < \infty$ тогда и только тогда, когда $c_n = 0$ для всех n, кроме конечного числа индексов. Согласно предложению 3.8 $*$-алгебру $S(l_\infty) = S(\Omega, \Sigma, m)$ можно отождествить с $*$-алгеброй s всех комплексных последовательностей с покоординатными алгебраическими операциями.

Предположим, что $T \in S(l_\infty, \tau)$. Тогда по предложению 3.16 $\tau(E_\lambda^\perp) < \infty$ для некоторого $\lambda > 0$, где $\{E_\lambda\}_{\lambda \geqslant 0}$ — спектральное семейство проекторов для оператора $|T|$. Следовательно, $|T|E_\lambda^\perp \in l_\infty$. Так как

$$0 \leqslant |T|E_\lambda \leqslant \lambda E_\lambda \in l_\infty,$$

то

$$|T| = |T|E_\lambda + |T|E_\lambda^\perp \in l_\infty.$$

Поэтому $T \in l_\infty$ и, следовательно, $S(l_\infty, \tau) = l_\infty$.

Рассмотрим на $\mathcal{M}_+$ другой точный нормальный конечный след τ_1, определяемый формулой:

$$\tau_1(\{c_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} c_n,\ c_n \geqslant 0,\ n = 1, 2, \ldots .$$

Так как след τ_1 конечен, то

$$S(l_\infty, \tau_1) = S(l_\infty) \neq l_\infty = S(l_\infty, \tau).$$

Обозначим через $Tr(\mathcal{M})$ множество всех точных нормальных полуконечных следов на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Так как $\mathcal{M} \subset S(\mathcal{M}, \tau) \subset S(\mathcal{M})$ для любого $\tau \in Tr(\mathcal{M})$, то

$$\mathcal{M} \subset \bigcap_{\tau \in Tr(\mathcal{M})} S(\mathcal{M}, \tau) \subset \bigcup_{\tau \in Tr(\mathcal{M})} S(\mathcal{M}, \tau) \subset S(\mathcal{M}).$$

Следующий пример показывает, что вложение

$$\mathcal{M} \subset \bigcap_{\tau \in Tr(\mathcal{M})} S(\mathcal{M}, \tau)$$

может быть строгим, т. е. существуют алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ и присоединенные к ним неограниченные операторы, которые τ-измеримы относительно любого точного полуконечного нормального следа на $\mathcal{M}$.

Пример 4.4. Пусть $\mathcal{M}$ — фактор типа II_∞. Тогда

$$Tr(\mathcal{M}) = \{\alpha\mu \colon \alpha \in (0, +\infty)\},$$

где μ — некоторый фиксированный точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Поэтому

$$S(\mathcal{M}, \tau) = S(\mathcal{M}, \mu)$$

для любого $\tau \in Tr(\mathcal{M})$, и в силу примера 4.1

$$\mathcal{M} \neq S(\mathcal{M}, \mu) = \bigcap_{\tau \in Tr(\mathcal{M})} S(\mathcal{M}, \tau).$$

В следующем примере рассматривается алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$, для которой вложение

$$\bigcup_{\tau \in Tr(\mathcal{M})} S(\mathcal{M}, \tau) \subset S(\mathcal{M})$$

является строгим, т. е. существуют алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ и присоединенные к ним неограниченные измеримые операторы, которые не являются τ-измеримыми ни для какого точного нормального полуконечного следа τ на $\mathcal{M}$.

Пример 4.5. Пусть $\mathcal{M}$ — коммутативная алгебра фон Неймана, являющаяся C^*-произведением континуального числа экземпляров алгебры фон Неймана $L_\infty([0,1], m)$ всех ограниченных измеримых комплекснозначных функций, заданных на отрезке $[0,1]$ с мерой Лебега m (равные почти всюду функции отождествляются), т. е.

$$\mathcal{M} = C^*\text{-} \prod_{j \in J} \mathcal{M}_j, \quad \mathcal{M}_j = L_\infty([0,1], m)$$

для всех $j \in J$, $\operatorname{card} J = \operatorname{card}[0,1]$. Для каждого

$$X = \{X_j\}_{j \in J} \in \mathcal{M},\ X \geqslant 0,$$

положим

$$\mu(X) = \sum_{j \in J} \int_0^1 X_j \, dm.$$

Ясно, что μ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Будем считать, что $\mathcal{M}$ действует в гильбертовом пространстве

$$H = L_2(\mathcal{M}, \mu) = \left\{ \{\xi_j\}_{j \in J} \colon \xi_j \in L_2([0,1], m), \sum_{j \in J} ||\xi_j||^2_{L_2([0,1],m)} < \infty \right\}$$

по правилу
$$\{X_j\}_{j\in J}(\{\xi_j\}_{j\in J}) = \{X_j\xi_j\}_{j\in J},\ \{\xi_j\}_{j\in J}\in H.$$
Разобьем множество J на счетное число попарно непересекающихся континуальных подмножеств $J_n,\ n=1,2,\ldots,$ и положим
$$E_n = \{P_j\}_{j\in J}\in\mathcal{P}(\mathcal{M}),$$
где $P_j = 1$ при $j\in J_n$ и $P_j=0$ при $j\in J\setminus J_n$. Ясно, что $E_nE_k=0$ при $n\neq k$, $\sup\limits_{n\geqslant 1}E_n = I$, и E_n не является проектором счетного типа (напомним, что проектор E имеет счетный тип, если любое семейство ненулевых попарно ортогональных проекторов в $\mathcal{P}(E\mathcal{M}E)$ не более чем счетно).

Положим
$$Z_n = \sup_{k\leqslant n}E_k.$$
Так же как и в доказательстве предложения 4.2, определим линейный оператор T на всюду плотном линейном подпространстве $\mathfrak{D}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}Z_n(H)$, полагая $T\xi=n\xi$ для всех $\xi\in E_n(H), n=1,2,\ldots.$ Тогда замыкание $\overline{T}$ оператора T является положительно определенным оператором, присоединенным к $\mathcal{M}$, причем спектральный проектор для $\overline{T}$, отвечающий $\lambda=n$, совпадает с Z_n. Поскольку $\mathcal{M}$ — коммутативная алгебра фон Неймана, то $\mathcal{M}$ — конечна, и поэтому $\overline{T}\in S(\mathcal{M})$ (см. предложение 3.4). Предположим, что существует след $\tau\in Tr(\mathcal{M})$, для которого $\overline{T}\in S(\mathcal{M},\tau)$. Тогда, в силу предложения 3.16, найдется такое натуральное n, что $\tau(Z_n^{\perp})<\infty$. Так как $Z_n^{\perp}=\sup\limits_{k>n}E_k$, то $\tau(E_{n+1})<\tau(Z_n^{\perp})<\infty$, что влечет счетность типа проектора E_{n+1}. Из полученного противоречия следует, что $\overline{T}$ не принадлежит $S(\mathcal{M},\tau)$, и потому
$$\bigcup_{\tau\in Tr(\mathcal{M})}S(\mathcal{M},\tau)\neq S(\mathcal{M}).$$

Рассмотрим теперь связь между алгебрами $S(\mathcal{M},\tau_1)$ и $S(\mathcal{M},\tau_2)$ для различных следов $\tau_1,\ \tau_2\in Tr(\mathcal{M})$.

Для каждого $\tau\in Tr(\mathcal{M})$ положим
$$\mathcal{P}(\mathcal{M},\tau)=\{P\in\mathcal{P}(\mathcal{M}):\ \tau(P)<\infty\}.$$

Теорема 4.4. *Для $\tau_1,\tau_2\in Tr(\mathcal{M})$ следующие условия эквивалентны.*
1. $S(\mathcal{M},\tau_2)\subset S(\mathcal{M},\tau_1)$;
2. $\mathcal{P}(\mathcal{M},\tau_2)\subset\mathcal{P}(\mathcal{M},\tau_1)$.

Доказательство. $1\Rightarrow 2$. Пусть $S(\mathcal{M},\tau_2)\subset S(\mathcal{M},\tau_1)$. Предположим, что существует такой проектор $P\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $\tau_1(P)=\infty$ и $\tau_2(P)<\infty$. Поскольку след τ_1 — полуконечный, то найдется такая возрастающая последовательность проекторов $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, что
$$\tau_1(E_n)<\infty,\ \sup_{n\geqslant 1}E_n = E\leqslant P,\ \tau_1(E)=\infty,$$
в частности, $E_n\neq E$ для всех $n=1,2,\ldots.$ Так же как и в примере 4.1, определим линейный оператор T на всюду плотном линейном подпространстве
$$\mathfrak{D}=\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n(H),$$
полагая $T\xi=n\xi$ для всех $\xi\in(P_n-P_{n-1})(H)$, где $P_n=E^{\perp}+E_n, n=1,2,\ldots,$ $P_0=0$. Как показано в примере 4.1, положительно определенный оператор $\overline{T}$ является измеримым оператором, при этом спектральный проектор для $\overline{T}$, отвечающий собственному значению $\lambda=n$, совпадает с P_n. Поскольку $\tau_1(P_n^{\perp})=\tau_1(E-E_n)=\infty$ и $\tau_2(P_n^{\perp})\leqslant\tau_2(P)<\infty,\ n=1,2,\ldots,$ то
$$\overline{T}\in S(\mathcal{M},\tau_2)\setminus S(\mathcal{M},\tau_1),$$
что противоречит вложению $S(\mathcal{M},\tau_2)\subset S(\mathcal{M},\tau_1)$. Следовательно,
$$\mathcal{P}(\mathcal{M},\tau_2)\subset\mathcal{P}(\mathcal{M},\tau_1).$$
Импликация $2\Rightarrow 1$ следует непосредственно из предложения 3.16. □

Из теоремы 4.4 вытекает, что для $\tau_1, \tau_2 \in Tr(\mathcal{M})$

$$S(\mathcal{M}, \tau_1) = S(\mathcal{M}, \tau_2) \Longleftrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{M}, \tau_1) = \mathcal{P}(\mathcal{M}, \tau_2).$$

Заменяя в доказательстве предложения 4.4 условие $\tau_2(P) < \infty$ на условие: P — *конечный проектор*, и используя предложения 4.3 и 3.16, получим следующее предложение.

Предложение 4.4. *Для* $\tau \in Tr(\mathcal{M})$ *следующие условия эквивалентны*:
1. $S(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M}, \tau)$;
2. $\mathcal{P}(\mathcal{M}, \tau) = \{P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})\colon\ P$— *конечный проектор*$\}$.

5. Заполненные $*$-подалгебры в $LS(\mathcal{M})$

$*$-Подалгебра $\mathcal{A}$ в $LS(\mathcal{M})$ называется *заполненной*, если из соотношений $0 \leqslant T \leqslant S \in \mathcal{A}$, $T \in LS(\mathcal{M})$ следует, что $T \in \mathcal{A}$. Ясно, что $\mathcal{M}$ есть заполненная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$.

5.1. Заполненность $*$-подалгебр $S(\mathcal{M})$ и $S(\mathcal{M}, \tau)$. Для установления свойства заполненности у $*$-подалгебр $S(\mathcal{M})$ и $S(\mathcal{M}, \tau)$ нам понадобится следующее предложение.

Предложение 5.1.
1. *Если операторы* $T, S \in LS(\mathcal{M})$ *и* $l(T)l(S) = 0$, *то* $T \dot{+} S = T + S$.
2. *Если* T — *самосопряженный оператор из* $S(\mathcal{M})$ (*соответственно, из* $LS(\mathcal{M})$) *и* $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *то* $f(T) \in S(\mathcal{M})$ (*соответственно,* $f \in LS(\mathcal{M})$).

Доказательство. 1. Пусть $\xi_n \in \mathfrak{D}(T+S) = \mathfrak{D}(T) \cap \mathfrak{D}(S)$ и $\xi_n \to \xi$, $(T+S)\xi_n \to \eta$, где $\xi,\ \eta \in H$. Так как $l(T)l(S) = 0$, то

$$T\xi_n = l(T)(T+S)\xi_n \to l(T)\eta.$$

Оператор T замкнут, поэтому $\xi \in \mathfrak{D}(T)$ и $T\xi = l(T)\eta$. Рассуждая аналогично, получим, что $\xi \in \mathfrak{D}(S)$ и $S\xi = l(S)\eta$. Следовательно, $\xi \in \mathfrak{D}(T+S)$ и $(T+S)\xi = (l(T)+l(S))\eta$. Осталось заметить, что из сходимости $(T+S)\xi_n \to \eta$ вытекает сходимость

$$(T+S)\xi_n = (l(T)+l(S))(T+S) \to (l(T)+l(S))\eta,$$

и поэтому $\eta = (l(T)+l(S))\eta = (T+S)\eta$. Следовательно, $T+S = \overline{T+S} = T \dot{+} S$.

2. Пусть $T \in S_h(\mathcal{M})$. Согласно определению оператора $f(T)$ (см. пункт 2.5) имеем

$$f(T) = (f\chi(0,+\infty))(T_+) + (\hat{f}\chi(0,+\infty))(T_-) + f(0)(I - s(T)),$$

где $\hat{f}(\lambda) = f(-\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$. Поэтому в силу первой части предложения достаточно доказать, что $f(T) \in S(\mathcal{M})$ для $T \geqslant 0$.

Линейный оператор $f(T)$ является замкнутым и $f(T)\ \eta\ \mathcal{M}$. Так как $T \in S(\mathcal{M})$, то по предложению 3.4, мы получаем, что $E_{\lambda_0}^{\perp}$ является конечным проектором для некоторого $\lambda_0 > 0$, где $E_\lambda = \chi_{(-\infty,\lambda)}(T)$.

Пусть $P_n = E_{\lambda_0+n}$. Тогда $P_n \uparrow I$ и, как уже было показано в доказательстве импликации $1 \Rightarrow 2$ предложения 3.4, $P_n(H) \subset \mathfrak{D}(T)$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Поэтому (см. пункт 2.5)

$$\mathfrak{D}(f(T)) = \left\{\xi \in H\colon\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 dE_{\xi,\xi}(\lambda) < \infty\right\},$$

где $E_{\xi,\xi}(\lambda) = (E_\lambda\xi, \xi)$. Если $\xi \in P_n(H)$, то $E_{\xi,\xi}(\lambda) = E_{\xi,\xi}(\lambda_0+n)$ для всех $\lambda > \lambda_0 + n$ и, так как $T \geqslant 0$, то $E_{\xi,\xi}(\lambda) = 0$, если $\lambda < 0$. Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 dE_{\xi,\xi}(\lambda) = \int\limits_{0}^{\lambda_0+n} |f(\lambda)|^2 dE_{\xi,\xi}(\lambda) \leqslant \sup_{\lambda\in[0,\lambda_0+n]} |f(\lambda)|^2 \int\limits_{0}^{\lambda_0+n} dE_{\xi,\xi}(\lambda) < \infty.$$

Таким образом, $\xi \in \mathfrak{D}(f(T))$, что равносильно включению $P_n(H) \subset \mathfrak{D}(f(T))$. Так как проектор $P_n^{\perp}$ является конечным для любого $n = 1, 2\ldots$, то $f(T) \in S(\mathcal{M})$.

Используя доказанное включение $f(T) \in S(\mathcal{M})$ и определение локально измеримого оператора, получаем, что для самосопряженного оператора T из $LS(\mathcal{M})$ и $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ также верно включение $f(T) \in LS(\mathcal{M})$. $\square$

Предложение 5.2. *Если $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ — самосопряженный оператор и $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, то $f(T) \in S(\mathcal{M}, \tau)$.*

Доказательство. Так же как и при доказательстве предложения 5.1, можно считать, что $T \geqslant 0$. Так как

$$T \in S(\mathcal{M}, \tau) \subset S(\mathcal{M}),$$

то в силу предложения 5.1 $f(T) \in S(\mathcal{M})$. Далее, по предложению 3.16 существует такое $\lambda_0 > 0$, для которого $\tau(E_{\lambda_0}^{\perp}) < \infty$.

Положим $P_n = E_{\lambda_0+n}$. Тогда $P_n \uparrow I$, $\tau(P_n^{\perp}) \leqslant \tau(E_{\lambda_0}^{\perp}) < \infty$, и поскольку след τ нормален, то $\tau(P_n^{\perp}) \to 0$ при $n \to \infty$.

Далее, $P(H) \subset \mathfrak{D}(f(T))$ (см. доказательство предложения 5.1) и поэтому, согласно предложениям 3.15 и 3.16 получим, что $f(T) \in S(\mathcal{M}, \tau)$. □

В следующем предложении приведены некоторые дополнительные свойства введенного на $LS_h(\mathcal{M})$ отношения частичного порядка.

Предложение 5.3.

1. *Если T_α, $T \in LS_h(\mathcal{M})$ для всех $\alpha \in J$, $T_\alpha \uparrow T$, то для любого оператора $A \in LS(\mathcal{M})$*
$$A^*T_\alpha A \uparrow A^*TA.$$
2. *Если $T \in LS_h(\mathcal{M})$, $\{P_\alpha\}_{\alpha \in J}, P \subset \mathcal{P}(M)$, $P_\alpha \uparrow P$ и $P_\alpha T P_\alpha = 0$ для всех $\alpha \in J$, то $PTP = 0$. При этом если $T \geqslant 0$, то $TP = 0$.*

Доказательство. 1. Поскольку $T_\alpha \leqslant T$, то в силу предложения 3.14 имеем, что для любого оператора $A \in LS(\mathcal{M})$ сеть $\{A^*T_\alpha A\}_{\alpha \in J}$ возрастает и $A^*T_\alpha A \leqslant A^*TA$ для всех $\alpha \in J$.

Предположим сначала, что оператор $A \in LS(\mathcal{M})$ обратим. Согласно предложению 3.14, в $LS_h(\mathcal{M})$ существует точная верхняя грань

$$S = \sup_{\alpha \in J}(A^*T_\alpha T) \leqslant A^*TA.$$

Так как $A^*T_\alpha A \leqslant S$ для любого $\alpha \in J$, то $T_\alpha \leqslant (A^{-1})^*SA^{-1}$. Следовательно,

$$T = \sup_{\alpha \in J} T_\alpha \leqslant (A^{-1})^*SA^{-1}.$$

Поэтому $A^*TA \leqslant S$, что влечет равенство $\sup\limits_{\alpha \in J}(A^*T_\alpha T) = A^*TA$.

Пусть теперь T_α, T, $A \in LS_+(\mathcal{M})$. Рассмотрим оператор $B = A + \dfrac{1}{n}I$. Тогда $B \geqslant \dfrac{1}{n}I$ и, следовательно, оператор B обратим. Поэтому, по доказанному выше,

$$\sup_{\alpha \in J}(BT_\alpha B) = BTB.$$

Далее имеем

$$BT_\alpha B = (A + \frac{1}{n}I)T_\alpha(A + \frac{1}{n}I) = AT_\alpha A + \frac{1}{n}(AT_\alpha + T_\alpha A) + \frac{1}{n^2}T_\alpha \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\alpha \in J}(AT_\alpha A) + \frac{1}{n}(AT_\alpha + T_\alpha A) + \frac{1}{n^2}T_\alpha.$$

Так как $T_\alpha \geqslant 0$, то

$$(A - I)T_\alpha(A - I) \geqslant 0.$$

Поэтому

$$AT_\alpha A - T_\alpha A - AT_\alpha + T_\alpha \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$AT_\alpha A + T_\alpha \geqslant T_\alpha A + AT_\alpha.$$

Аналогично, рассматривая неравенство

$$(I - A)T(I - A) \geqslant 0,$$

получим, что

$$TA + AT \geqslant -ATA - T.$$

Поэтому

$$BT_\alpha B \leqslant \sup_{\alpha\in J}(AT_\alpha A) + \frac{1}{n}(AT_\alpha + T_\alpha A) + \frac{1}{n^2}T_\alpha \leqslant \sup_{\alpha\in J}(AT_\alpha A) + \frac{1}{n}(AT_\alpha A + T_\alpha) + \frac{1}{n^2}T_\alpha \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\alpha\in J}(AT_\alpha A) + \frac{1}{n}(ATA + T) + \frac{1}{n^2}T$$

для всех $\alpha \in J$. Следовательно,

$$\sup_{\alpha\in J}(BT_\alpha B) = BTB \leqslant \sup_{\alpha\in J}(AT_\alpha A) + \frac{1}{n}(ATA + T) + \frac{1}{n^2}T.$$

Кроме того,

$$BTB = (A + \frac{1}{n}I)T(A + \frac{1}{n}I) = ATA + \frac{1}{n}(AT + TA) + \frac{1}{n^2}T \geqslant$$
$$\geqslant ATA - \frac{1}{n}(ATA + T) + \frac{1}{n^2}T.$$

Поэтому

$$ATA - \frac{1}{n}(ATA + T) + \frac{1}{n^2}T \leqslant BTB \leqslant \sup_{\alpha\in J}(AT_\alpha A) + \frac{1}{n}(ATA + T) + \frac{1}{n^2}T.$$

Следовательно,

$$ATA \leqslant \sup_{\alpha\in J}(AT_\alpha A) + \frac{2}{n}(ATA + T).$$

Так как $ATA + T \geqslant 0$ и n — произвольное натуральное число, то

$$ATA \leqslant \sup_{\alpha\in J}(AT_\alpha A).$$

С другой стороны, из $T_\alpha \leqslant T$ следует, что $AT_\alpha A \leqslant ATA$ для любого $\alpha \in J$. Поэтому

$$\sup_{\alpha\in J}(AT_\alpha A) \leqslant ATA,$$

что влечет равенство

$$\sup_{\alpha\in J}(AT_\alpha A) = ATA.$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда оператор $A \in LS(\mathcal{M})$ — произвольный. Зафиксируем $\alpha_0 \in J$ и положим

$$S_\alpha = T_\alpha - T_{\alpha_0}.$$

Так как $T_\alpha \uparrow T$, то сеть $\{S_\alpha\}_{\alpha\in J}$ возрастает и $S_\alpha \geqslant 0$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$.

Рассмотрим оператор $B = AA^* \geqslant 0$. По доказанному, $\sup\limits_{\alpha\in J}(BS_\alpha B) = BSB$, где $S = \sup\limits_{\alpha\in J} S_\alpha$. Из неравенства $S_\alpha \leqslant S$ следует, что $A^*S_\alpha A \leqslant A^*SA$ для любого $\alpha \in J$. Поэтому

$$\sup_{\alpha\in J}(A^*S_\alpha A) \leqslant A^*SA.$$

Обозначим $\sup\limits_{\alpha\in J}(A^*S_\alpha A) = Z$ и предположим, что $Z \neq A^*SA$.

Рассмотрим оператор

$$H = A^*SA - Z.$$

Тогда $H \geqslant 0$ и, по нашему предположению, $H \neq 0$. Так как для любого $\alpha \in J$

$$A^*S_\alpha A + H \leqslant Z + H = A^*SA,$$

то умножая это неравенство слева на A, а справа — на A^*, получим:

$$AA^*S_\alpha AA^* + AHA^* \leqslant AA^*SAA^*,$$

т. е. $BS_\alpha B + AHA^* \leqslant BSB$ для любого $\alpha \in J$. Следовательно,

$$B(T_\alpha - T_{\alpha_0})B + AHA^* \leqslant B(T_\alpha - T_{\alpha_0})B,$$

откуда

$$BT_\alpha B + AHA^* \leqslant BTB$$

и, значит,
$$BT_\alpha B \leqslant BTB - AHA^*.$$
Следовательно,
$$BTB = \sup_{\alpha\in J}(BT_\alpha B) \leqslant BTB - AHA^*.$$
Поэтому $AHA^* = 0$. Так как, с другой стороны, $H \geqslant 0$, то существует оператор
$$W = \sqrt{H} \in LS_+(\mathcal{M}).$$
Тогда
$$(AW)(AW)^* = AW^2A^* = AHA^* = 0.$$
т. е. $AW = 0$. Кроме того, так как $Z \geqslant 0$, то
$$H = A^*SA - Z \leqslant A^*SA.$$
Следовательно,
$$H^2 = WHW \leqslant WA^*SAW = 0,$$
что влечет равенство $H = 0$, и потому
$$\sup_{\alpha\in J}(A^*S_\alpha A) = A^*SA.$$
Но $S_\alpha = T_\alpha - T_{\alpha_0}$ и, следовательно,
$$S = \sup_{\alpha\in J} S_\alpha = T - T_{\alpha_0}.$$
Поэтому
$$A^*S_\alpha A = A^*T_\alpha A - A^*T_{\alpha_0}A$$
и
$$\sup_{\alpha\in J}(A^*S_\alpha A) = \sup_{\in J}(A^*T_\alpha A) - A^*T_{\alpha_0}A.$$
Но
$$\sup_{\alpha\in J}(A^*S_\alpha A) = A^*SA = A^*TA - A^*T_{\alpha_0}A.$$
Следовательно,
$$\sup_{\alpha\in J}(A^*T_\alpha A) = A^*TA.$$
2. Так как $P_\alpha TP_\alpha = 0$ для всех $\alpha \in J$, то $P_\alpha TP_\beta = P_\alpha P_\beta TP_\beta = 0$ для всех $\beta \geqslant \alpha$. Поэтому $I - r(P_\alpha T) \geqslant \sup_\beta P_\beta = P$. В частности, $P_\alpha TP = 0$, откуда $PTP_\alpha = 0$ для всех $\alpha \in J$. Следовательно,
$$I - r(PT) \geqslant \sup_\alpha P_\alpha = P,$$
т. е. $PTP = 0$.

Если $T \geqslant 0$, то
$$(\sqrt{T}P)^*(\sqrt{T}P) = PTP = 0,$$
и потому $\sqrt{T}P = 0$, откуда следует, что $TP = 0$. □

Предложение 5.4. *Если $T, S \in LS(\mathcal{M})$ и $0 \leqslant T \leqslant S$, то*
$$\sqrt{T} \leqslant \sqrt{S}.$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $0 \leqslant T \leqslant S$, то
$$\varepsilon I \leqslant T + \varepsilon I \leqslant S + \varepsilon I.$$
Отсюда в силу предложения 3.14 следует, что операторы $T + \varepsilon I$ и $S + \varepsilon I$ обратимы в $LS(\mathcal{M})$ и
$$0 \leqslant (S + \varepsilon I)^{-1} \leqslant (T + \varepsilon I)^{-1} \leqslant \frac{1}{\varepsilon} I.$$
Это означает, что $(S + \varepsilon I)^{-1}$, $(T + \varepsilon I)^{-1} \in \mathcal{M}_+$ и в силу [31, теорема 2.2.6] имеем, что
$$\left(\sqrt{S + \varepsilon I}\right)^{-1} = \sqrt{(S + \varepsilon I)^{-1}} \leqslant \sqrt{(T + \varepsilon I)^{-1}} = \left(\sqrt{T + \varepsilon I}\right)^{-1}.$$

Отсюда в силу предложения 3.14 получим, что

$$\sqrt{T} \leqslant \sqrt{T+\varepsilon I} \leqslant \sqrt{S+\varepsilon I}.$$

Для последовательности чисел $\varepsilon_n \downarrow 0$ имеем $S_n = (S+\varepsilon_n I) \downarrow S$ в $LS(\mathcal{M})$ (см. предложение 3.14) и $S_n S_k = S_k S_n$, $n,k = 1,2,\ldots$.

Пусть $\mathcal{A}$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$, содержащая операторы S, S_n, $n = 1,2,\ldots$. Отождествим $\mathcal{A}$ с $*$-подалгеброй в $S(\Omega,\Sigma,m)$ для некоторого пространства (Ω,Σ,m) с локально конечной мерой m. Ясно, что $S_n(\omega) \downarrow S(\omega)$ при $n \to \infty$ для всех $\omega \in \Omega$. Следовательно, $\sqrt{S_n(\omega)} \downarrow \sqrt{S(\omega)}$ при $n \to \infty$. Поэтому $\sqrt{S_n} \downarrow \sqrt{S}$ в $\mathcal{A}$ и, следовательно, $\sqrt{S_n} \downarrow \sqrt{S}$ в $LS(\mathcal{M})$. Наконец, так как $\sqrt{T} \leqslant \sqrt{S_n}$, то $\sqrt{T} \leqslant \sqrt{S}$. □

Предложение 5.5 ([18, предложение 6.1]). *Если $T,S \in LS_h(\mathcal{M})$, $0 \leqslant T \leqslant S$, то существует оператор $A \in \mathcal{M}$ такой, что $\|A\|_{\mathcal{M}} \leqslant 1$ и*

$$\sqrt{T} = A \cdot \sqrt{S}.$$

Предложение 5.6. *$*$-Алгебра $S(\mathcal{M})$ является заполненной $*$-подалгеброй в $LS(\mathcal{M})$.*

Доказательство. Пусть $0 \leqslant T \leqslant S$, $T \in LS(\mathcal{M})$, $S \in S(\mathcal{M})$. В силу предложения 5.5 существует такой оператор $A \in \mathcal{M}$, что

$$\sqrt{T} = A\sqrt{S}.$$

Согласно предложению 5.1 $\sqrt{S} \in S(\mathcal{M})$, откуда $\sqrt{T} \in S(\mathcal{M})$, и поэтому $T \in S(\mathcal{M})$.

□

Аналогично устанавливается следующее предложение.

Предложение 5.7. *$*$-Алгебра $S(\mathcal{M},\tau)$ является заполненной $*$-подалгеброй в $LS(\mathcal{M})$.*

5.2. $*$-Алгебры τ-локально измеримых операторов. Если алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ коммутативна, то, как уже отмечалось выше, $\mathcal{M}$ можно отождествить с $*$-алгеброй $L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$ всех ограниченных в существенном измеримых комплекснозначных функций, заданных на пространстве (Ω,Σ,μ) с локально конечной мерой μ. В этом случае $*$-алгебра $S(\mathcal{M})$ отождествляется с $*$-алгеброй $S(\Omega,\Sigma,\mu)$ всех измеримых почти всюду конечных комплекснозначных функций, заданных на пространстве (Ω,Σ,μ) (см. следствие 3.3).

Если $Z(\mathcal{M})$ — центр алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, то $S(Z(\mathcal{M}))$, вообще говоря, не содержится в $S(\mathcal{M})$. В связи с этим естественно возникает вопрос о выделении тех заполненных $*$-подалгебр $\mathcal{A}$ в $LS(\mathcal{M})$ с ограниченной частью $\mathcal{A}_b = \mathcal{M}$, для которых $S(Z(\mathcal{M})) \subset \mathcal{A}$. Можно было бы предположить, что среди всех заполненных $*$-подалгебр $\mathcal{A}$ с $\mathcal{A}_b = \mathcal{M}$ только $*$-алгебра $LS(\mathcal{M})$ содержит $S(Z(\mathcal{M}))$. Оказалось, что это не так. Ниже вводятся $*$-алгебры $LS(\mathcal{M},\tau)$ τ-локально измеримых операторов, для которых

$$S(Z(\mathcal{M})) \subset LS(\mathcal{M},\tau),$$

при этом $LS(\mathcal{M},\tau)$ являются заполненными $*$-подалгебрами в $LS(\mathcal{M})$, вообще говоря, не совпадающими с $LS(\mathcal{M})$.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$. Обозначим через $E(\mathcal{A})$ множество всех тех операторов $T \in LS(\mathcal{M})$, для которых существует разбиение единицы $\{Z_j\}_{j\in J}$ и набор операторов $\{T_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{A}$ такие, что $TZ_j = T_jZ_j$ для всех $j \in J$. Ясно, что $E(\mathcal{A})$ — $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$, $\mathcal{A} \subset E(\mathcal{A})$ и $E(E(\mathcal{A})) = E(\mathcal{A})$. $*$-Алгебру $E(\mathcal{A})$ называют центральным расширением $*$-алгебры $\mathcal{A}$ (см. [10]).

Пусть $\mathcal{M}$ — полуконечная алгебра фон Неймана и τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Оператор $T \in LS(\mathcal{M})$ называется *τ-локально измеримым*, если существует такая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^\infty$ центральных проекторов из $\mathcal{M}$, что $Z_n \uparrow I$ и $Z_nT \in S(\mathcal{M},\tau)$ для всех $n = 1,2,\ldots$.

Множество всех τ-локально измеримых операторов обозначим через $LS(\mathcal{M},\tau)$. Ясно, что

$$S(\mathcal{M},\tau) \subset LS(\mathcal{M},\tau) \subset E(S(\mathcal{M},\tau)) \subset LS(\mathcal{M})$$

и $S(\mathcal{M},\tau) = LS(\mathcal{M},\tau)$ в случае, когда след τ конечен или когда $\mathcal{M}$ — фактор.

Теорема 5.1. *$LS(\mathcal{M},\tau)$ является заполненной $*$-подалгеброй в $LS(\mathcal{M})$, причем $S(Z(\mathcal{M}))$ совпадает с центром $Z(LS(\mathcal{M},\tau))$ алгебры $LS(\mathcal{M},\tau)$.*

Доказательство. Пусть $T,\ S \in LS(\mathcal{M},\tau)$ и $\{Z'_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Z''_n\}_{n=1}^{\infty}$ — такие последовательности центральных проекторов из $P(Z(\mathcal{M}))$, что $Z'_n \uparrow I$, $Z''_n \uparrow I$ и $Z'_nT,\ Z''_nS \in S(\mathcal{M},\tau)$, $n = 1,2,\dots$. Положим $Z_n = Z'_nZ''_n$. Тогда $Z_n \in P(Z(\mathcal{M}))$, $Z_n \uparrow I$ и $Z_nT,\ Z_nS \in S(\mathcal{M},\tau)$, $n = 1,2,\dots$. Следовательно,

$$Z_n(T+S) = Z_nT + Z_nS \in S(\mathcal{M},\tau),$$
$$Z_n(TS) = (Z_nT)(Z_nS) \in S(\mathcal{M},\tau),$$
$$Z_nT^* = (Z_nT)^* \in S(\mathcal{M},\tau).$$

Это означает, что $T+S,\ T\cdot S,\ T^* \in LS(\mathcal{M},\tau)$. Таким образом, $LS(\mathcal{M},\tau)$ является $*$-подалгеброй в $LS(\mathcal{M})$.

Поскольку $Z_n|T| = |Z_nT|$, то $|T| \in LS(\mathcal{M},\tau)$.

Возьмем произвольный оператор $L \in LS(\mathcal{M})$, для которого $|L| \leqslant |T|$. Тогда

$$|Z_nL| = Z_n|L| \leqslant Z_n|T| = |Z_nT| \in S(\mathcal{M},\tau).$$

Так как $*$-алгебра $S(\mathcal{M},\tau)$ — заполненная в $LS(\mathcal{M})$, то $Z_nL \in S(\mathcal{M},\tau)$ для всех $n = 1,2,\dots$, т. е. $L \in LS(\mathcal{M},\tau)$. Следовательно, $LS(\mathcal{M},\tau)$ — заполненная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$.

Пусть теперь $T \in S(Z(\mathcal{M}))$ и $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ — такая последовательность проекторов из $P(Z(\mathcal{M}))$, для которой $Z_n \uparrow I$ и $Z_n|T| \in \mathcal{M}$ для всех $n = 1,2,\dots$ Поскольку $\mathcal{M} \subset S(\mathcal{M},\tau)$, то $|T| \in LS(\mathcal{M},\tau)$, и потому $T \in LS(\mathcal{M},\tau)$, т. е. $S(Z(\mathcal{M})) \subset LS(\mathcal{M},\tau)$.

Обратно, пусть T — центральный оператор из $LS(\mathcal{M},\tau)$ и $T = U|T|$ — его полярное разложение. Если V — унитарный оператор из $\mathcal{M}$, то $VT = TV$ и потому

$$T = VTV^* = (VUV^*)(V|T|V^*);$$

при этом

$$(VUV^*)^*(VUV^*) = Vr(T)V^* = r(T).$$

В силу единственности полярного разложения, получим, что $VUV^* = U$ и $V|T|V^* = |T|$, т. е. $VU = UV$ и $V|T| = |T|V$. Отсюда следует, что $U \in Z(\mathcal{M})$. Поэтому $|T| = U^*T$ принадлежит центру $Z(LS(\mathcal{M},\tau))$ алгебры $LS(\mathcal{M},\tau)$. Следовательно, спектральное семейство проекторов $\{E_\lambda\}$ для оператора $|T|$ лежит в $Z(\mathcal{M})$, что влечет включение $|T| \in S(Z(\mathcal{M}))$. Таким образом, $S(Z(\mathcal{M})) = Z(S(\mathcal{M},\tau))$. $\square$

Если центр $Z(\mathcal{M})$ есть σ-конечная алгебра фон Неймана, то для любого оператора $T \in E(S(\mathcal{M},\tau))$ существует такое счетное разбиение единицы $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $TZ_n \in S(\mathcal{M},\tau)$ при $n = 1,2,\dots$. Следовательно, $T \in LS(\mathcal{M},\tau)$, т. е. в этом случае $LS(\mathcal{M},\tau) = E(S(\mathcal{M},\tau))$. На самом деле, σ-конечность центра $Z(\mathcal{M})$ обеспечивает совпадение $*$-алгебр $LS(\mathcal{M},\tau)$ и $LS(\mathcal{M})$.

Теорема 5.2. *Пусть $\mathcal{M}$ — полуконечная алгебра фон Неймана, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Тогда*

1. *Если центр $Z(\mathcal{M})$ σ-конечен, то $LS(\mathcal{M},\tau) = LS(\mathcal{M})$.*
2. *Если $\mathcal{M}$ имеет тип II и $LS(\mathcal{M},\tau) = E(S(\mathcal{M},\tau))$, то центр $Z(\mathcal{M})$ σ-конечен и $E(S(\mathcal{M},\tau)) = LS(\mathcal{M})$.*

Доказательство. 1. *Случай* 1. Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ имеет конечный тип. Рассмотрим центрозначный след $\Phi : \mathcal{M} \mapsto Z(\mathcal{M})$ (см. теорему 2.3). Для каждого оператора $T \in \mathcal{M}$ значение следа $\Phi(T)$ принадлежит замыканию по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ выпуклой оболочки элементов вида UTU^*, где U — унитарный оператор из $\mathcal{M}$ [45, 7.11]. Поэтому $\tau(\Phi(T)) = \tau(T)$. Если $0 \neq Z \in P(Z(\mathcal{M}))$, $0 \neq Q \leqslant Z$, $Q \in P(\mathcal{M})$, $\tau(Q) < \infty$, то $\tau(\Phi(Q)) < \infty$, и потому существует такой проектор $Z_0 \in P(Z(\mathcal{M}))$, что $0 \neq Z_0 \leqslant Z$ и $\tau(Z_0) < \infty$. Поскольку алгебра $Z(\mathcal{M})$ σ-конечна, то найдется счетное разбиение единицы $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которого $\tau(Z_n) < \infty$, $n = 1,2,\dots$, в частности, $TZ_n \in S(\mathcal{M},\tau)$ для всех $T \in LS(\mathcal{M})$. Это означает, что $LS(\mathcal{M},\tau) = LS(\mathcal{M})$.

Случай 2. Пусть $\mathcal{M}$ — полуконечная алгебра фон Неймана. Рассмотрим $0 \leqslant T \in S(\mathcal{M})$ и $\lambda_0 > 0$ такие, что $\{T > \lambda_0\} = E^{\perp}_{\lambda_0}(T) \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M})$. Тогда алгебра фон Неймана $\mathcal{N} = E^{\perp}_{\lambda_0}(T)\mathcal{M}E^{\perp}_{\lambda_0}(T)$ конечна и сужение $\tau_{\mathcal{N}}$ следа τ на $\mathcal{N}$ является полуконечным следом. Согласно первой части доказательства (случай 1), найдутся такие проекторы $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(\mathcal{M}))$, что $Z_nZ_m = 0$ при $n \neq m$, $\sup\limits_{n\geqslant 1} Z_n = z(E^{\perp}_{\lambda_0}(T))$ — центральный носитель проектора $E^{\perp}_{\lambda_0}(T)$, и

$$TZ_n \in S(\mathcal{N}, \tau_{\mathcal{N}}) \subset S(\mathcal{M}, \tau).$$

Поскольку $TE_{\lambda_0}(T) \in \mathcal{M}$, то $T(I - z(E^{\perp}_{\lambda_0}(T))) \in \mathcal{M}$. Следовательно, $T \in LS(\mathcal{M}, \tau)$. Таким образом, $S(\mathcal{M}) \subset LS(\mathcal{M}, \tau)$, и потому $LS(\mathcal{M}, \tau) = LS(\mathcal{M})$.

2. Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ имеет тип II и центр $Z(\mathcal{M})$ не является σ-конечным. Поскольку след τ полуконечен, то существуют такое несчетное разбиение единицы $\{Z_q\}_{q\in\Delta}$ и проекторы $P_q \in \mathcal{P}(\mathcal{M}Z_q)$, что $\tau(P_q) < \infty$ и $z(P_q) = Z_q$, $q \in \Delta$. Строим теперь такие операторы $T_q \in S(\mathcal{M}Z_q, \tau)$, что

$$\{T_q \geqslant n+1\} \cdot Z \neq 0$$

для всех $0 \neq Z \in P(Z(\mathcal{M}Z_q))$ и рассмотрим оператор $T_0 \in E(S(\mathcal{M}, \tau))$, для которого $T_0Z_q = T_q$ для всех $q \in \Delta$. Поскольку $E(S(\mathcal{M}, \tau)) = LS(\mathcal{M}, \tau)$, то существует такая последовательность $\{Z'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(\mathcal{M}))$, что $Z'_n \uparrow I$ и $T_0Z'_n \in S(\mathcal{M}, \tau)$, в частности, $\tau(E^{\perp}_{m_0}(T_0Z'_n)) < \infty$ при некотором натуральном $m_0 \geqslant 2$. Так как множество Δ несчетно, то найдется номер n_0, для которого $Z'_{n_0}Z_q \neq 0$ для всех q из некоторого несчетного подмножества $\Delta' \subset \Delta$. Следовательно, $\{T_q \geqslant m_0\}Z'_{n_0}Z_q \neq 0$ для всех $q \in \Delta'$. Поэтому проектор $E^{\perp}_{m_0}(T_0Z'_n)$ не является σ-конечным, что противоречит неравенству $\tau(E^{\perp}_{m_0}(T_0Z'_n)) < \infty$. □

Следствие 5.1.

1. *Если $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана типа II, у которой центр $Z(\mathcal{M})$ не σ-конечен, то $LS(\mathcal{M}, \tau) \neq LS(\mathcal{M})$.*
2. *$LS(\mathcal{M}, \tau) \neq LS(\mathcal{M})$ в том и только в том случае, когда существует такой центральный проектор Z из $\mathcal{M}$, что алгебра фон Неймана $\mathcal{M}Z$ имеет тип II и не имеет σ-конечный центр.*
3. *Если $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана типа I, то $LS(\mathcal{M}, \tau) = LS(\mathcal{M})$.*

Напомним, что ненулевой проектор $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ называется *атомом*, если из $Q \leqslant P$, $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ следует, что $Q = 0$ или $Q = P$. Алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ называется *атомической*, если каждый ее ненулевой проектор мажорирует атом. В следующей теореме приводятся достаточные условия совпадения $*$-алгебр $LS(\mathcal{M})$ и $LS(\mathcal{M}, \tau)$.

Теорема 5.3. *Пусть $\mathcal{M}$ — полуконечная алгебра фон Неймана, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, и $\mathcal{M}$ удовлетворяет одному из следующих условий*:

1. *$\mathcal{M}$ — коммутативная алгебра*;
2. *$\mathcal{M}$ — атомическая алгебра.*

Тогда $LS(\mathcal{M}) = LS(\mathcal{M}, \tau)$.

Доказательство. 1. Если $\mathcal{M}$ — коммутативная алгебра фон Неймана, то $Z(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$, $LS(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M})$, и поэтому для каждого $T \in LS(\mathcal{M})$ существует такая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральных проекторов, что $Z_n \uparrow I$ и $Z_nT \in \mathcal{M} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$. Следовательно, $T \in LS(\mathcal{M}, \tau)$, что влечет равенство $LS(\mathcal{M}, \tau) = LS(\mathcal{M})$.

2. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольная атомическая алгебра фон Неймана. В этом случае $\mathcal{M}$ отождествляется с C^*-произведением $C^*\text{-}\prod\limits_{q\in\Delta} \mathcal{M}_q$, где $\mathcal{M}_q = Z_q\mathcal{M} = \mathcal{B}(H_q)$ — факторы типа I, $\{Z_q\}_{q\in\Delta}$ — множество всех атомов в $\mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$. Согласно предложению 4.3, имеем

$$LS(\mathcal{M}) = \prod_{q\in\Delta} LS(\mathcal{M}_q) = \prod_{q\in\Delta} \mathcal{M}_q.$$

Пусть

$$T = \{T_q\}_{q\in\Delta} \in LS(\mathcal{M}),\ Z_n = \sup\{Z_q : \|T_q\|_{\mathcal{M}_q} \leqslant n\}.$$

Тогда

$$Z_n \in Z(\mathcal{M}),\ Z_n \uparrow I,\ Z_nT \in \mathcal{M} \subset S(\mathcal{M}, \tau),$$

т. е. $T \in LS(\mathcal{M}, \tau)$.

□

Приведем теперь пример алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ и точного нормального полуконечного следа τ на $\mathcal{M}$, для которых $LS(\mathcal{M},\tau) \neq LS(\mathcal{M})$.

Пример 5.1. Пусть $\mathcal{M}_0$ — фактор типа II_1 или II_∞, τ_0 — канонический след на $\mathcal{M}_0$. Тогда

$$\tau_0(P) < \infty,\ P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) \Longleftrightarrow P \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M}).$$

Пусть Δ — несчетное множество индексов. Положим $\mathcal{M} = C^*\text{-}\prod\limits_{q\in\Delta} \mathcal{M}_q$, где $\mathcal{M}_q = \mathcal{M}_0$ для каждого $q \in \Delta$. Ясно, что

$$\tau(\{T_q\}_{q\in\Delta}) = \sum_{q\in\Delta} \tau_0(T_q)$$

есть точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$.

Выберем положительный неограниченный оператор T_0 из $S(\mathcal{M}_0,\tau_0) = S(\mathcal{M}_0) = LS(\mathcal{M}_0)$, и рассмотрим оператор

$$T = \{T_q\}_{q\in\Delta} \in LS(\mathcal{M}) = \prod_{q\in\Delta} S(\mathcal{M}_0,\tau_0),$$

для которого $T_q = T$ для всех $q \in \Delta$.

Пусть $Z = \{Z_q\}_{q\in\Delta}$ — не σ-конечный центральный проектор из $Z(\mathcal{M})$, т. е. $Z_q = I_{\mathcal{M}_q}$ для всех q из некоторого несчетного множества $\Delta' \subset \Delta$ и $Z_q = 0$ для $q \in \Delta \setminus \Delta'$.

Если $ZT \in S(\mathcal{M},\tau)$, то существует такое $\lambda_0 > 0$, что $\tau(E^\perp_{\lambda_0}(ZT)) < \infty$, где $\{E_\lambda(ZT)\}$ — спектральное семейство проекторов для оператора ZT. Поскольку

$$E^\perp_{\lambda_0}(ZT) = ZE^\perp_{\lambda_0}(T) = \{E_q\}_{q\in\Delta},$$

где $E_q = E^\perp_{\lambda_0}(T_0) \neq 0$ для всех $q \in \Delta'$ и $E_q = 0$ для $q \in \Delta \setminus \Delta'$, то $E^\perp_{\lambda_0}$ — не σ-конечный проектор в $\mathcal{M}$, что противоречит неравенству $\tau(E^\perp_{\lambda_0}(ZT)) < \infty$.

Следовательно, ZT не принадлежит $S(\mathcal{M},\tau)$ для любого не σ-конечного проектора $Z \in P(Z(\mathcal{M}))$. Осталось заметить, что из сходимости $Z_n \uparrow I_\mathcal{M}$, $Z_n \in P(Z(\mathcal{M}))$ и не σ-конечности $I_\mathcal{M}$ в $Z(\mathcal{M})$ следует не σ-конечность Z_n в $Z(\mathcal{M})$ начиная с некоторого номера. Следовательно, оператор T не является τ-локально измеримым.

Замечание 5.1.

1. Если в примере 5.1 $\mathcal{M}_0$ есть фактор типа II_1, то $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана и $S(\mathcal{M}) = LS(\mathcal{M})$. Таким образом, в этом случае в примере 5.1 имеем, что $LS(\mathcal{M},\tau) \not\subset S(\mathcal{M})$.
2. Если в примере 5.1 множество Δ счетное, то $Z(\mathcal{M})$ — σ-конечная атомическая алгебра фон Неймана, и в этом случае $LS(\mathcal{M},\tau) = LS(\mathcal{M})$ (см. теорему 5.2).
3. Поскольку
$$LS(\mathcal{M}_q) = S(\mathcal{M}_0,\tau_0) = LS(\mathcal{M}_0,\tau_0) = LS(\mathcal{M}_q,\tau_q),$$
где τ_q — сужение следа τ на $\mathcal{M}_q$, то
$$\prod_{q\in\Delta} LS(\mathcal{M}_q,\tau_q) = \prod_{q\in\Delta} LS(\mathcal{M}_q) = LS(\mathcal{M}) \neq LS(\mathcal{M},\tau),$$
т. е. в отличии от конструкции $*$-алгебр локально измеримых операторов, прямое произведение $*$-алгебр τ-локально измеримых операторов $\prod\limits_{i\in J} LS(\mathcal{M}_i,\tau_i)$ не совпадает с $*$-алгеброй τ-локально измеримых операторов, присоединенных к C^*-произведению алгебр фон Неймана $(\mathcal{M}_i,\tau_i)$.

5.3. $*$-Алгебры компактных локально измеримых операторов. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольная алгебра фон Неймана. Оператор $T \in LS(\mathcal{M})$ называется *компактным* относительно $\mathcal{M}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой проектор $P \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M})$, что $TP^\perp \in \mathcal{M}$ и $\|TP^\perp\|_\mathcal{M} < \varepsilon$.

Обозначим множество всех компактных относительно $\mathcal{M}$ операторов из $LS(\mathcal{M})$ через $S_0(\mathcal{M})$. Если $T = U|T|$ — полярное разложение оператора $T \in LS(\mathcal{M})$, то $|T| = U^*T$, и поэтому $T \in S_0(\mathcal{M})$ тогда и только тогда, когда $|T| \in S_0(\mathcal{M})$.

Предложение 5.8. *Для оператора $T \in LS(\mathcal{M})$ следующие условия эквивалентны*:

1. $T \in S_0(\mathcal{M})$;

2. $E_\lambda^\perp \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M})$ *для всех* $\lambda > 0$, *где* $\{E_\lambda\}$ — *спектральное семейство проекторов для оператора* $|T|$.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть $T \in S_0(\mathcal{M})$ и $\{E_\lambda\}$ — спектральное семейство проекторов для оператора $|T|$. Фиксируем $\lambda > 0$ и выбираем проектор $P \in P_{fin}(\mathcal{M})$ так, чтобы $\|TP^\perp\|_\mathcal{M} < \lambda$. Тогда $E_\lambda^\perp \precsim P$ (см. предложение 3.3), и потому $E_\lambda^\perp \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M})$.

Импликация $2 \Rightarrow 1$ следует из неравенства

$$\|TE_\lambda\|_\mathcal{M} = \|U|T|E_\lambda\|_\mathcal{M} \leqslant \||T|E_\lambda\|_\mathcal{M} \leqslant \lambda$$

для всех $\lambda > 0$, где $T = U|T|$ — полярное разложение оператора T. □

Следствие 5.2. $S_0(\mathcal{M}) \subset S(\mathcal{M})$.

Теорема 5.4. $S_0(\mathcal{M})$ — *заполненная* $*$-*подалгебра в* $LS(\mathcal{M})$, *причем*

$$\mathcal{M}S_0(\mathcal{M})\mathcal{M} \subset S_0(\mathcal{M}).$$

Доказательство. Пусть $T, S \in S_0(\mathcal{M})$ и $\varepsilon > 0$. Ясно, что $\alpha T \in S_0(\mathcal{M})$ для всех $\alpha \in \mathbb{C}$.

Выберем проекторы $P, Q \in P_{fin}(\mathcal{M})$ так, чтобы

$$\|TP^\perp\|_\mathcal{M} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|SQ^\perp\|_\mathcal{M} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Проектор $L = P \vee Q$ тоже конечен. При этом $L^\perp = P^\perp \wedge Q^\perp$, и потому

$$\|(T+S)L^\perp\|_\mathcal{M} \leqslant \|TP^\perp L^\perp\|_\mathcal{M} + \|SQ^\perp L^\perp\|_\mathcal{M} < \varepsilon.$$

Таким образом, $(T+S) \in S_0(\mathcal{M})$.

Далее, положим $G = I - r(PS)$, где $r(PS)$ — правый носитель оператора PS. Тогда $SG = P^\perp SG$ и $G^\perp \precsim P$ (предложение 3.9). Следовательно, проектор $F = Q \vee G^\perp$ конечен, при этом

$$TSF^\perp = TSGF^\perp = T(P^\perp SG)F^\perp = (TP^\perp)(SQ^\perp)F^\perp,$$

в частности,

$$\|TSF^\perp\|_\mathcal{M} < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Следовательно, $TS \in S_0(\mathcal{M})$.

Пусть $T = U|T|$ — полярное разложение оператора T. Положим $G_1 = I - r(PU)$. В силу предложения 3.9 $G_1^\perp \precsim P$, откуда следует, что проектор $G_1^\perp$ конечен. При этом

$$T^*G_1 = U^*TUG_1 = U^*(TP^\perp)UG_1 \in \mathcal{M}$$

и

$$\|T^*G_1\|_\mathcal{M} \leqslant \|TP^\perp\|_\mathcal{M} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $T^* \in S_0(\mathcal{M})$. Таким образом, $S_0(\mathcal{M})$ — $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$.

Покажем теперь, что $S_0(\mathcal{M})$ — заполненная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$. Для этого достаточно показать, что из соотношений $O \leqslant T \leqslant S$, $T \in LS(\mathcal{M})$, $S \in S_0(\mathcal{M})$ следует, что $T \in S_0(\mathcal{M})$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и, используя предложение 5.8, выберем спектральный проектор E так, чтобы проектор $E^\perp \in P_{fin}(\mathcal{M})$ и

$$ES = SE \leqslant \varepsilon E.$$

Поскольку $\sqrt{T} \in LS(\mathcal{M})$, то $\sqrt{T}E \in LS(\mathcal{M})$, при этом

$$0 \leqslant (\sqrt{T}E)^*(\sqrt{T}E) = ETE \leqslant ESE \leqslant \varepsilon E.$$

Следовательно, $\sqrt{T}E \in \mathcal{M}$ и $\|\sqrt{T}E\|_\mathcal{M}^2 \leqslant \varepsilon$. Это означает, что $\sqrt{T} \in S_0(\mathcal{M})$ и, следовательно, $T = \sqrt{T}\sqrt{T} \in S_0(\mathcal{M})$.

Пусть теперь $0 \neq A \in \mathcal{M}$, $T \in S_0(\mathcal{M})$, $\varepsilon > 0$. Выберем проектор $P \in P_{fin}(\mathcal{M})$ так, чтобы $\|TP^\perp\|_\mathcal{M} < \varepsilon\|A\|_\mathcal{M}^{-1}$. Тогда $AT \in LS(\mathcal{M})$, $(AT)P^\perp \in \mathcal{M}$ и $\|(AT)P^\perp\|_\mathcal{M} < \varepsilon$. Следовательно, $AT \in S_0(\mathcal{M})$, т. е. $\mathcal{M}S_0(\mathcal{M}) \subset S_0(\mathcal{M})$. Отсюда

$$S_0(\mathcal{M})\mathcal{M} = (\mathcal{M}S_0(\mathcal{M}))^* \subset (S_0(\mathcal{M}))^* = S_0(\mathcal{M}).$$

Таким образом, $\mathcal{M}S_0(\mathcal{M})\mathcal{M} \subset S_0(\mathcal{M})$.

□

Предложение 5.9. *$S(\mathcal{M}) = S_0(\mathcal{M})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана.*

Доказательство. Если $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана, то $S(\mathcal{M}) = S_0(\mathcal{M})$ (см. предложение 5.8). Если же $I \notin P_{fin}(\mathcal{M})$, то $I \notin S_0(\mathcal{M})$, и в этом случае $S(\mathcal{M}) \neq S_0(\mathcal{M})$.

□

5.4. $*$-Алгебры τ-компактных операторов. Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Оператор $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ называется *τ-компактным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой проектор $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $\tau(P^\perp) < \infty$, $TP \in \mathcal{M}$ и $\|TP\|_\mathcal{M} < \varepsilon$.

Множество $S_0(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ-компактных операторов является $*$-подалгеброй в $S(\mathcal{M}, \tau)$, при этом

$$\mathcal{M} \subset S_0(\mathcal{M}, \tau) \Longleftrightarrow \tau(I) < \infty \Longleftrightarrow S_0(\mathcal{M}, \tau) = S(\mathcal{M}, \tau).$$

Если T — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения в H и $T = U|T|$ — полярное разложение оператора T, то $T \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$ в том и только в том случае, когда $U \in \mathcal{M}$ и $|T| \in S_0(\mathcal{M}, \tau))$ [9, § 2.6].

Замечание 5.2.

1. Если $\tau(I) < \infty$, то из предложений 3.16, 5.8 и следствия 3.4 вытекает, что
$$S_0(\mathcal{M}, \tau) = S(\mathcal{M}, \tau) = S(\mathcal{M}) = LS(\mathcal{M}).$$
2. Если $\tau(I) = \infty$, то $I \notin S_0(\mathcal{M}, \tau)$, в частности, $S_0(\mathcal{M}, \tau) \neq S(\mathcal{M}, \tau)$.
3. Если $T \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$, $A \in \mathcal{M}$, то $TA, AT \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$. Действительно, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой проектор $P \in P(\mathcal{M})$, что $\tau(P^\perp) < \infty$, $TP \in \mathcal{M}$ и $\|TP\|_\mathcal{M} < \varepsilon \|A\|_\mathcal{M}^{-1}$ (считаем, что $A \neq 0$). Положим $Q = I - r(P^\perp A)$. Тогда $AQ = PAQ$ и $Q^\perp \precsim P^\perp$. Отсюда
$$\tau(Q^\perp) < \infty, \ TAQ = (TP)(AQ) \in \mathcal{M}$$
и
$$\|TAQ\|_\mathcal{M} < \varepsilon \|A\|_\mathcal{M}^{-1} \|AQ\|_\mathcal{M} < \varepsilon,$$
т. е.
$$TA \in S_0(\mathcal{M}, \tau).$$
Аналогично, из неравенства
$$\|ATP\|_\mathcal{M} < \|A\|_\mathcal{M} \ \varepsilon \ \|A\|_\mathcal{M}^{-1} = \varepsilon$$
следует, что $AT \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$.
4. Если $\tau(s(T)) = \infty$, $T = T^* \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$, $f_0(\lambda) = 1$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, то $f_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, но $f_0(T) = s(T)$ не принадлежит $S_0(\mathcal{M}, \tau)$.

В следующем предложении устанавливается связь между $*$-алгебрами $S_0(\mathcal{M})$ и $S_0(\mathcal{M}, \tau)$.

Предложение 5.10. *Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Тогда $S_0(\mathcal{M}, \tau) \subset S_0(\mathcal{M})$ и равенство $S_0(\mathcal{M}, \tau) = S_0(\mathcal{M})$ достигается в том и только в том случае, когда*

$$\mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M}) = \{P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) : \tau(P) < \infty\}.$$

Доказательство. Очевидно, что равенство $\mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M}) = \{P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) : \tau(P) < \infty\}$ влечет равенство $S_0(\mathcal{M}) = S_0(\mathcal{M}, \tau)$.

Всякий проектор $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, для которого $\tau(P) < \infty$, является конечным проектором. Поэтому $S_0(\mathcal{M}, \tau) \subset S_0(\mathcal{M})$, и неравенство $\mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M}) \neq \{P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) : \tau(P) < \infty\}$ влечет существование такого проектора $P_0 \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M})$, для которого $\tau(P_0) = \infty$. Это означает, что $P_0 \in S_0(\mathcal{M})$ и $P_0 \notin S_0(\mathcal{M}, \tau)$, т. е. $S_0(\mathcal{M}) \neq S_0(\mathcal{M}, \tau)$.

□

6. Непрерывность операторнозначных функций в $*$-алгебрах локально измеримых операторов

Если на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ существует точный нормальный конечный след τ, $*$-алгебры $LS(\mathcal{M})$, $S(\mathcal{M})$ и $S(\mathcal{M},\tau)$ совпадают, и естественной топологией, наделяющая эти $*$-алгебры структурой топологической $*$-алгебры, является топология сходимости по мере t_τ, порожденная следом τ [35]. Если след τ является полуконечным, но не конечным, топология t_τ рассматривается лишь в $*$-алгебре $S(\mathcal{M},\tau)$ и относительно этой топологии $S(\mathcal{M},\tau)$ является полной метризуемой $*$-алгеброй [35]. Для полуконечных следов в работах [1, 2] А. М. Бикчентаева рассматривались и исследовались также свойства топологии τ-локальной сходимости по мере и топологии слабо τ-локальной сходимости по мере. Однако, для алгебр фон Неймана $\mathcal{M}$, не имеющих конечного типа, умножение не является непрерывным по совокупности переменных в этих топологиях. В связи с этим, в $*$-алгебре $LS(\mathcal{M})$ рассматривается топология локальной сходимости по мере $t(\mathcal{M})$, которая определяется для произвольной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ [47]. Эта топология наделяет $LS(\mathcal{M})$ структурой полной топологической $*$-алгебры (см. [47], [9, § 3.5]).

Для каждого оператора $T \in LS_h(\mathcal{M})$ и для каждой функции $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ корректно определен локально измеримый оператор $f(T) \in LS(\mathcal{M})$ (см. пункт 2.5). Поэтому естественно рассматривать операторнозначную функцию $T \mapsto f(T)$ из $LS_h(\mathcal{M})$ в $LS(\mathcal{M})$ и исследовать условия ее непрерывности в топологии $t(\mathcal{M})$ локальной сходимости по мере. Для случая $\mathcal{M} = \mathcal{B}(H) = LS(\mathcal{M})$ и сильной операторной топологии эта задача была исследована И. Капланским [28], Р. Кадисоном [26] и Е. Девисом [21]. Случай $*$-алгебры $S(\mathcal{M},\tau)$ и топологии t_τ сходимости по мере этот вопрос был исследован О. Е. Тихоновым [16].

Ниже мы доказываем, что для $\{T_\alpha\} \subset LS_h(\mathcal{M})$, $T \in LS_h(\mathcal{M})$ и борелевской функции f, непрерывной на спектре $\sigma(T)$ оператора T, из сходимости $T_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T$ следует сходимость $f(T_\alpha) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f(T)$.

6.1. Топология сходимости локально по мере. Пусть $\mathcal{M}$ — коммутативная алгебра фон Неймана. В силу теоремы 2.1 $\mathcal{M}$ $*$-изоморфна $*$-алгебре $L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$, где (Ω,Σ,μ) — пространство с локально конечной мерой μ. Рассмотрим $*$-алгебру $LS(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M}) = L_0(\Omega,\Sigma,\mu)$ всех измеримых почти всюду конечных комплекснозначных функций, определенных на (Ω,Σ,μ) (функции, равные почти всюду, отождествляются). На $L_0(\Omega,\Sigma,\mu)$ определим топологию локальной сходимости по мере $t(\mathcal{M})$ как хаусдорфову векторную топологию, базис окрестностей нуля которой образуют множества

$$W(B,\varepsilon,\delta) = \{f \in L_0(\Omega,\, \Sigma,\, \mu)\colon \text{ существует множество } E \in \Sigma \text{ такое что}$$

$$E \subset B,\ \mu(B \setminus E) \leqslant \delta,\ f\chi_E \in L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu),\ \|f\chi_E\|_{L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)} \leqslant \varepsilon\},$$

где $\varepsilon,\ \delta > 0$, $B \in \Sigma$, $\mu(B) < \infty$.

Сходимость сети $\{f_\alpha\}$ к f в топологии $t(\mathcal{M})$ (запись: $f_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f$) означает, что $f_\alpha\chi_B \longrightarrow f\chi_B$ по мере μ для каждого $B \in \Sigma$ с $\mu(B) < \infty$. Ясно, что топология $t(\mathcal{M})$ не изменится, если заменить меру μ на эквивалентную ей меру.

Пусть теперь $\mathcal{M}$ — произвольная алгебра фон Неймана, φ — $*$-изоморфизм из ее центра $Z(\mathcal{M})$ на $*$-алгебру $L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$ и $L_+(\Omega,\,\Sigma,\,m)$ — множество всех измеримых функций, определенных на (Ω,Σ,μ), значения которых лежат в полупрямой $[0,+\infty]$ (функции, равные почти всюду, отождествляются).

Пусть $d\colon \mathcal{P}(\mathcal{M}) \to L_+(\Omega,\Sigma,\mu)$ — размерностная функция на $\mathcal{P}(\mathcal{M})$. Для произвольных чисел $\varepsilon,\delta > 0$ и произвольного множества $B \in \Sigma$, $\mu(B) < \infty$ положим

$$V(B,\varepsilon,\delta) = \{T \in LS(\mathcal{M})\colon \text{ существуют такие } P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}),\ Z \in \mathcal{P}(Z(\mathcal{M})),$$

$$\text{что } TP \in \mathcal{M}, \|TP\|_{\mathcal{M}} \leqslant \varepsilon,\ \varphi(Z^\perp) \in W(B,\varepsilon,\delta),\ d(ZP^\perp) \leqslant \varepsilon\varphi(Z)\}.$$

В [47] установлено, что система множеств

$$\{\{T + V(B,\,\varepsilon,\,\delta)\}\colon\ T \in LS(\mathcal{M}),\ \varepsilon,\ \delta > 0,\ B \in \Sigma,\ \mu(B) < \infty\} \tag{6.1}$$

определяет в $LS(\mathcal{M})$ хаусдорфову векторную топологию $t(\mathcal{M})$, в которой множества (6.1) образуют базу окрестностей оператора $T \in LS(\mathcal{M})$. Топология $t(\mathcal{M})$ называется *топологией сходимости локально по мере*. Как уже отмечалось выше, $(LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$ является полной топологической

$*$-алгеброй, при этом топология $t(\mathcal{M})$ не зависит от выбора размерностной функции d и от выбора $*$-изоморфизма φ (см. [47], [9, § 3.5]).

Приведем критерий сходимости сетей в топологии $t(\mathcal{M})$.

Предложение 6.1 ([9, § 3.5]).

1. *Сеть $\{P_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ сходится к нулю в топологии $t(\mathcal{M})$ тогда и только тогда, когда существует сеть $\{Z_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$ такая, что $Z_\alpha P_\alpha \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M})$ для любого $\alpha \in A$, $\varphi(Z_\alpha^\perp) \xrightarrow{t(L_0(\Omega))} 0$, и $d(Z_\alpha P_\alpha) \xrightarrow{t(L_0(\Omega))} 0$, где $t(L_0(\Omega))$ — топология локальной сходимости по мере на $L_0(\Omega,\Sigma,\mu)$, φ — $*$-изоморфизм из $Z(\mathcal{M})$ на $L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$.*
2. *Сеть $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset LS(\mathcal{M})$ сходится к нулю в топологии $t(\mathcal{M})$ тогда и только тогда, когда $E_\lambda^\perp(|T_\alpha|) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$ для любого $\lambda > 0$, где $\{E_\lambda^\perp(|T_\alpha|)\}$ — спектральное семейство проекторов для оператора $|T_\alpha|$.*

Как следует из предложения 6.1, топология $t(\mathcal{M})$ индуцирует топологию $t(Z(\mathcal{M}))$ на $LS(Z(\mathcal{M}))$; следовательно, $S(Z(\mathcal{M}))$ является замкнутой $*$-подалгеброй в $(LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$.

Ясно, что

$$X \cdot V(B,\varepsilon,\delta) \subset V(B,\varepsilon,\delta)$$

для каждого $X \in \mathcal{M}$ с $\|X\|_\mathcal{M} \leqslant 1$. Поскольку $V^*(B,\varepsilon,\delta) \subset V(B,2\varepsilon,\delta)$ [9, § 3.5], то

$$V(B,\varepsilon,\delta)\cdot Y \subset V(B,4\varepsilon,\delta)$$

для каждого $Y \in \mathcal{M}$, удовлетворяющего условию $\|Y\|_\mathcal{M} \leqslant 1$. Следовательно,

$$X \cdot V(B,\varepsilon,\delta)\cdot Y \subset V(B,4\varepsilon,\delta) \tag{6.2}$$

для любых $\varepsilon,\delta > 0$, $B \in \Sigma$, $\mu(B) < \infty$, $X, Y \in \mathcal{M}$, таких что $\|X\|_\mathcal{M} \leqslant 1$, $\|Y\|_\mathcal{M} \leqslant 1$.

Инволюция непрерывна в топологии $t(\mathcal{M})$, и поэтому множество $LS_h(\mathcal{M})$ замкнуто в $(LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$. Конус $LS_+(\mathcal{M})$ положительных элементов также является замкнутым в $(LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$ [47].

Как следует из определения, сходимость сети $\{T_\alpha\}_{\alpha\in J}$ к оператору T в топологии $t(\mathcal{M})$ означает, что для любых $\varepsilon,\delta > 0$, $B \in \Sigma$, $\mu(B) < \infty$, существует $\alpha_0 = \alpha(B,\varepsilon,\delta)$ такое, что для любого $\alpha \geqslant \alpha_0$ найдутся такие проекторы $P(\alpha) \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $Z(\alpha) \in \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, $Z(\alpha)P^\perp(\alpha) \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M})$, что

$$\|(T_\alpha - T)P(\alpha)\|_\mathcal{M} \leqslant \varepsilon \tag{6.3}$$

и

$$\varphi(Z^\perp(\alpha)) \in W(B,\varepsilon,\delta), \quad d(Z(\alpha)P^\perp(\alpha)) \leqslant \varepsilon\varphi(Z(\alpha)).$$

Если вместо неравенства (6.3) имеет место неравенство

$$\|P(\alpha)(T_\alpha - T)P(\alpha)\|_\mathcal{M} \leqslant \varepsilon, \tag{6.3$'$}$$

то говорят, что сеть $\{T_\alpha\}_{\alpha\in J}$ сходится к T *двусторонне локально по мере*.

Двусторонняя сходимость локально по мере равносильна сходимости в векторной топологии $LS(\mathcal{M})$, базу окрестностей нуля которой образуют множества

$$U(B,\varepsilon,\delta) = \{T \in LS(\mathcal{M}):\ \text{существуют такие } P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}), Z \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M})), ZP^\perp \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M}),$$

$$\text{такие что } PTP \in \mathcal{M},\ \|PTP\|_\mathcal{M} \leqslant \varepsilon, \varphi(Z^\perp) \in W(B,\varepsilon,\delta), \quad d(ZP^\perp) \leqslant \varepsilon\varphi(Z)\},$$

где $\varepsilon,\delta > 0$, $B \in \Sigma$, $\mu(B) < \infty$. Из соотношения

$$V(B,\varepsilon,\delta) \subset U(B,\varepsilon,\delta) \subset V(A,2\varepsilon,\delta),\ \varepsilon,\delta > 0,\ B \in \Sigma, \mu(B) < \infty$$

следует, что эта векторная топология совпадает с топологией $t(\mathcal{M})$.

Приведем критерий метризуемости топологии $t(\mathcal{M})$ на $LS(\mathcal{M})$.

Предложение 6.2 ([9, теорема 3.5.2]). *Топология сходимости локально по мере $t(\mathcal{M})$ на $LS(\mathcal{M})$ метризуема тогда и только тогда, когда центр $Z(\mathcal{M})$ является σ-конечным.*

Отметим также следующее полезное свойство топологии сходимости локально по мере.

Предложение 6.3 ([19, предложение 8]). *Пусть* $\{Z_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$ — *семейство ненулевых попарно ортогональных центральных проекторов такое, что* $\sup\limits_{j\in J} Z_j = I$. *Для* $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset LS(\mathcal{M})$, $T \in LS(\mathcal{M})$ *следующие условия эквивалентны*:

1. $T_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T$;
2. $Z_jT_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{M})} Z_jT$ *для всех* $j \in J$;
3. $Z_jT_\alpha \xrightarrow{t(Z_j\mathcal{M})} Z_jT$ *для всех* $j \in J$.

6.2. Непрерывность операторнозначных функций. В этом пункте устанавливается непрерывность операторнозначной функции $T \mapsto f(T)$ из $LS_h(\mathcal{M})$ в $LS(\mathcal{M})$ относительно топологии сходимости локально по мере (см. [20]).

Теорема 6.1. *Пусть* $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ — *функция, непрерывная на спектре* $\sigma(T)$ *оператора* $T \in LS_h(\mathcal{M})$. *Если сеть операторов* $\{T_\alpha\} \subset LS_h(\mathcal{M})$ *сходится к оператору* T *в топологии* $t(\mathcal{M})$, *то* $f(T_\alpha) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f(T)$.

Для доказательства теоремы 6.1 нам понадобятся несколько лемм. Прежде всего заметим, что из определения оператора $f(T)$ (см. пункт 2.5) следует, что $Zf(T) = f(ZT)$ для любых $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $Z \in \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$ и $T \in LS_h(\mathcal{M})$. Поэтому согласно предложению 6.3 для доказательства теоремы 6.1 достаточно рассмотреть только случай σ-конечности центра $Z(\mathcal{M})$ алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$. Следовательно, в силу предложения 6.2, нам нужно только проверить импликацию

$$(T_n \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T) \Rightarrow (f(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f(T)).$$

Лемма 6.1. *Пусть* $T_k, T \in LS_h(\mathcal{M})$ *и* $f, f_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *таковы, что* $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| = 0$ *и* $f_n(T_k) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f_n(T)$ *при* $k \to \infty$ *для каждого* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $f(T_k) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f(T)$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. Так как топология сходимости локально по мере $t(\mathcal{M})$ и топология двусторонней сходимости локально по мере совпадают, достаточно показать, что для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $B \in \Sigma$, $\mu(B) < \infty$, существует такое $K = K(B, \varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}$, что для любого $k \geqslant K$ существуют проекторы $P_k \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ и $Z_k \in \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, такие, что

$$P_k(f(T_k) - f(T))P_k \in \mathcal{M}, \quad \|P_k(f(T_k) - f(T))P_k\|_{\mathcal{M}} \leqslant \varepsilon,$$
$$\varphi(Z_k^\perp) \in W(B, \varepsilon, \delta), \; d(Z_kP_k^\perp) \leqslant \varepsilon\varphi(Z_k).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| = 0$, то существует номер n_0 такой, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f_{n_0}(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Это означает, что $(f_{n_0}(T) - f(T)) \in \mathcal{M}$, $(f_{n_0}(T_k) - f(T_k)) \in \mathcal{M}$, и

$$\|f_{n_0}(T) - f(T)\|_{\mathcal{M}} < \frac{\varepsilon}{3} \;\text{ и }\; \|f_{n_0}(T_k) - f(T_k)\|_{\mathcal{M}} < \frac{\varepsilon}{3} \text{ для всех } k \in \mathbb{N}.$$

Так как $f_{n_0}(T_k) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f_{n_0}(T)$, то существует $K = K(B, \varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ такое, что для каждого $k \geqslant K$ существуют проекторы $P_k \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ и $Z_k \in \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, для которых

$$P_k(f_{n_0}(T_k) - f_{n_0}(T))P_k \in \mathcal{M}, \quad \|P_k(f_{n_0}(T_k) - f_{n_0}(T))P_k\|_{\mathcal{M}} \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$
$$\varphi(Z_k^\perp) \in W(B, \frac{\varepsilon}{3}, \delta), \; d(Z_kP_k^\perp) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\varphi(Z_k).$$

Так как

$$f(T_k) - f(T) = [f(T_k) - f_{n_0}(T_k)] + [f_{n_0}(T_k) - f_{n_0}(T)] + [f_{n_0}(T) - f(T)],$$

то в силу теоремы 3.3 существуют такие частично изометрические операторы U, V и W из алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, что

$$P_k|f(T_k) - f(T)|P_k \leqslant UP_k|f(T_k) - f_{n_0}(T_k)|P_kU^* + VP_k|f_{n_0}(T_k) - f_{n_0}(T)|P_kV^* +$$
$$+WP_k|f_{n_0}(T) - f(T)|P_kW^*.$$

Таким образом, имеют место включение $P_k(f(T_k) - f(T))P_k \in \mathcal{M}$ и условия

$$\|P_k(f(T_k) - f(T))P_k\|_{\mathcal{M}} \leqslant \varepsilon,\ \varphi(Z_k^{\perp}) \in W(B, \frac{\varepsilon}{3}, \delta) \subset W(B, \varepsilon, \delta),$$

$$d(Z_k P_k^{\perp}) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\varphi(Z_k) \leqslant \varepsilon\varphi(Z_k)$$

для каждого $k \geqslant K$. Это означает, что

$$f(T_k) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f(T), \quad k \to \infty.$$

□

Лемма 6.2. *Если $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $T_n, T \in LS_h(\mathcal{M})$ и $T_n \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T$, то $(T_n - \lambda I)^{-1} \xrightarrow{t(\mathcal{M})} (T - \lambda I)^{-1}$.*

Доказательство. Операторы T_n и T — самосопряженные, и поэтому $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$, $\sigma(T_n) \subset \mathbb{R}$, и для любого $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ существуют $(T_n - \lambda I)^{-1}$ и $(T - \lambda I)^{-1}$. Эти операторы являются значениями непрерывной операторнозначной функции $f(t) = (t - \lambda)^{-1}$, $t \in \mathbb{R}$, от операторов T_n и T соответственно. К тому же в силу предложения 5.1 имеем $(T_n - \lambda I)^{-1}, (T - \lambda I)^{-1} \in LS(\mathcal{M})$. Так как

$$|f(t)| = \frac{1}{|t - \mathrm{Re}\lambda - i\mathrm{Im}\lambda|} = \frac{1}{\sqrt{(t - \mathrm{Re}\lambda)^2 + (\mathrm{Im}\lambda)^2}} \leqslant \frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|},$$

получим, что $(T_n - \lambda I)^{-1}, (T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{M}$ и

$$\|(T_n - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{M}} \leqslant \frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|}, \quad \|(T - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{M}} \leqslant \frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|}.$$

Равенства

$$(T_n - \lambda I)^{-1} - (T - \lambda I)^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}[(T - \lambda I) - (T_n - \lambda I)](T_n - \lambda I)^{-1} =$$
$$= (T - \lambda I)^{-1}[T - T_n](T_n - \lambda I)^{-1}.$$

и сходимость $T_n \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T$ обеспечивают сходимость

$$(T_n - \lambda I)^{-1} \xrightarrow{t(\mathcal{M})} (T - \lambda I)^{-1}, \quad n \to \infty.$$

□

Лемма 6.3. *Пусть f — непрерывная функция на $\mathbb{R}$ такая, что $f(z) \to 0$ при $|z| \to +\infty$. Если $T_n, T \in LS_h(\mathcal{M})$ и $T_n \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T$, то $f(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f(T)$.*

Доказательство. Если функция $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ — рациональная, где $q(z)$ не имеет вещественных корней, то $f(z)$ представима в виде суммы полинома $r(z)$ и конечного числа слагаемых вида

$$\varphi(z) = \frac{b}{(z - \lambda)^k},\ b \in \mathbb{C},\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Так как $T_n \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T$ и $(LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$ является топологической $*$-алгеброй, то имеет место сходимость $r(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} r(T)$. Непрерывность произведения относительно топологии $t(\mathcal{M})$ и лемма 6.2 обеспечивают сходимость $\varphi(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} \varphi(T)$. Следовательно,

$$f(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f(T).$$

Если $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ — произвольная непрерывная функция, такая что $f(z) \to 0$ при $|z| \to +\infty$, то существует последовательность рациональных функций $f_n(z) = \dfrac{p_n(z)}{q_n(z)}$, для которых $q_n(z) \neq 0$ при $z \in \mathbb{R}$, и f_n сходится равномерно к f на $\mathbb{R}$. Тогда по лемме 6.1 мы получаем, что

$$f(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f(T).$$

□

Лемма 6.4. *Если* $T_n, T \in LS_h(\mathcal{M})$ *и* $T_n \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T$, *то* $E_\lambda^\perp(|T_n|) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$ *при* $\lambda \to +\infty$ *равномерно по* n, *где* $\{E_\lambda(|T_n|)\}_{\lambda \geqslant 0}$ — *спектральное семейство проекторов для оператора* $|T_n|$.

Доказательство. Обозначим $S = T^2$, $S_n = T_n^2$ и зафиксируем произвольную окрестность нуля $V(B, \varepsilon, \delta)$ в топологии $t(\mathcal{M})$. Так как $S \in LS(\mathcal{M})$, то в силу предложения 6.1 и предложения 3.11 имеем, что $E_\lambda^\perp(S) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$ при $\lambda \to +\infty$. Следовательно, существует такое $\lambda_\varepsilon > 1$, что $E^\perp_{\frac{\lambda_\varepsilon}{2}}(S) \in V\left(B, \dfrac{\varepsilon}{2}, \dfrac{\delta}{2}\right)$.

Из $T_n \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T$ следует, что $S_n \xrightarrow{t(\mathcal{M})} S$. Поэтому из предложения 6.1 имеем, что

$$E_\lambda^\perp(|S_n - S|) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$$

при $n \to \infty$ для любого $\lambda > 0$. Следовательно, существует такое n_ε, что $E^\perp_{\frac{\lambda_\varepsilon}{2}}(|S_n - S|) \in V(B, \dfrac{\varepsilon}{2}, \dfrac{\delta}{2})$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$.

Обозначим $Q_\lambda = E_{\frac{\lambda}{2}}(|S_n - S|) \wedge E_{\frac{\lambda}{2}}(S)$. Из неравенств

$$-\frac{\lambda}{2} Q_\lambda \leqslant Q_\lambda(S_n - S)Q_\lambda \leqslant \frac{\lambda}{2} Q_\lambda, \quad 0 \leqslant Q_\lambda S Q_\lambda \leqslant \frac{\lambda}{2} Q_\lambda$$

получим, что

$$-\lambda Q_\lambda \leqslant Q_\lambda(S_n - S)Q_\lambda + Q_\lambda S Q_\lambda = Q_\lambda S_n Q_\lambda = Q_\lambda(S_n - S)Q_\lambda + Q_\lambda S Q_\lambda \leqslant \lambda Q_\lambda.$$

Следовательно, $Q_\lambda S_n Q_\lambda \in \mathcal{M}$ и $\|Q_\lambda S_n Q_\lambda\|_\mathcal{M} \leqslant \lambda$. Это значит, что $T_n Q_\lambda \in \mathcal{M}$ и $\|T_n Q_\lambda\|_\mathcal{M} \leqslant \lambda^{\frac{1}{2}} < \lambda$ при $\lambda \geqslant \lambda_\varepsilon$. Таким образом, в силу предложения 3.3 имеем

$$E_\lambda^\perp(|T_n|) \precsim Q_\lambda^\perp = E^\perp_{\frac{\lambda}{2}}(|S_n - S|) \vee E^\perp_{\frac{\lambda}{2}}(S) \leqslant E_{\frac{\lambda}{2}}(|S_n - S|)^\perp + E^\perp_{\frac{\lambda}{2}}(S) \in V(B, \varepsilon, \delta).$$

для всех $\lambda \geqslant \lambda_\varepsilon$ и $n \geqslant n_\varepsilon$. Используя свойство размерностной функции d, мы получим $d(E_\lambda^\perp(|T_n|)) \leqslant d(Q_\lambda^\perp)$, откуда следует включение

$$E_\lambda^\perp(|T_n|) \in V(B, \varepsilon, \delta)$$

для $\lambda \geqslant \lambda_\varepsilon$ и $n \geqslant n_\varepsilon$.

□

Доказательство теоремы 6.1. Пусть $T_n, T \in LS_h(\mathcal{M}), n \in \mathbb{N}$, и $T_n \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T$. Покажем сначала, что если f — действительная непрерывная функция на $\mathbb{R}$, то

$$f(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f(T).$$

Зафиксируем произвольную окрестность нуля $V(B, \varepsilon, \delta)$ топологии $t(\mathcal{M})$, где $0 < \varepsilon < 1$. Тогда по лемме 6.4 существует $\lambda_V > 0$ такое, что $E_\lambda^\perp(|T_n|) \in V\left(B, \dfrac{\varepsilon}{3}, \dfrac{\delta}{3}\right)$ для любых $\lambda \geqslant \lambda_V$ и $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, в силу сходимости $E_\lambda^\perp(|T|) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$ при $\lambda \to +\infty$ можно выбрать число λ_V так, что $E_\lambda^\perp(|T|) \in V\left(B, \dfrac{\varepsilon}{3}, \dfrac{\delta}{3}\right)$ для всех $\lambda \geqslant \lambda_V$.

Пусть $g(t)$ — непрерывная действительная функция на $\mathbb{R}$ такая, что $g(t) = f(t)$ при $t \in [-\lambda_V, \lambda_V]$ и $g(t) \to 0$ при $|t| \to +\infty$. Пусть $\varphi(t) = f(t) - g(t)$. Так как

$$f(T_n) - f(T) = g(T_n) - g(T) + \varphi(T_n) - \varphi(T),$$

то в силу теоремы 3.3 существуют частичные изометрии $U, V, W \in \mathcal{M}$ такие, что

$$|f(T_n) - f(T)| \leqslant U|g(T_n) - g(T)|U^* + V|\varphi(T_n)|V^* + W|\varphi(T)|W^*. \tag{6.4}$$

В силу леммы 6.3 имеем, что $g(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} g(T)$. Следовательно, в силу включения (6.2) существует число n_V такое, что

$$U|g(T_n) - g(T)|U^* \in V\left(B, \frac{\varepsilon}{3}, \frac{\delta}{3}\right)$$

для всех $n \geqslant n_V$.

Так как $\varphi(t) = 0$ при $t \in [-\lambda_V, \lambda_V]$, то
$$\varphi(|T|) = \varphi(|T|(E_{\lambda_V}(|T|) + E^{\perp}_{\lambda_V}(|T|)) = \varphi(|T|E^{\perp}_{\lambda_V}(|T|)) = (\varphi(|T|))E^{\perp}_{\lambda_V}(|T|).$$
Из определения окрестности $V(B,\varepsilon,\delta)$ следует, что включение
$$Q \in V(B,\varepsilon,\delta) \cap \mathcal{P}(\mathcal{M})$$
для $0 < \varepsilon < 1$ влечет включение $TQ \in V(B,\varepsilon,\delta)$ для всех $T \in LS(\mathcal{M})$. Отсюда, из включения $E^{\perp}_{\lambda_V}(|T|) \in V\left(B, \dfrac{\varepsilon}{3}, \dfrac{\delta}{3}\right)$ следует, что $\varphi(|T|) \in V\left(B, \dfrac{\varepsilon}{3}, \dfrac{\delta}{3}\right)$. Аналогично, $\varphi(|T_n|) \in V\left(B, \dfrac{\varepsilon}{3}, \dfrac{\delta}{3}\right)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Наконец, из неравенства (6.4), предложения 6.1 и включения (6.2) получаем, что $|f(T_n) - f(T)| \in V(B,\varepsilon,\delta)$ для всех $n \geqslant n_V$. Это означает, что $f(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f(T)$.

Пусть теперь f — произвольная непрерывная функция на $\sigma(T)$ из $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Покажем, что и в этом случае
$$f(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f(T).$$
Так как алгебраические операции в $(LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$ непрерывны и
$$f(S) = (\mathrm{Re} f)(S) \dot{+} (\mathrm{i}\ \mathrm{Im} f)(S)$$
для всех $S \in LS_h(\mathcal{M})$, без ограничения общности можно предположить, что f — действительная функция из $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Допустим сначала, что $|f(t)| \leqslant 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Так как спектр $\sigma(T)$ оператора T замкнут в $\mathbb{R}$, по теореме Титце—Урысона о продолжении (см., например, [22, теорема 4.5.1]), существует непрерывная функция $g : \mathbb{R} \to [-1, +1]$ такая, что $g(t) = f(t)$ для всех $t \in \sigma(T)$. Пусть
$$\sigma_n = \left\{ t \in \mathbb{R} : |f(t) - g(t)| \geqslant \frac{1}{2^n} \right\}.$$
Ясно, что $\sigma(T) \cap \sigma_n = \varnothing$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Так как функция g непрерывна на $\mathbb{R}$, а функция f непрерывна на $\sigma(T)$, то $\sigma(T) \cap \overline{\sigma_n} = \varnothing$.

Для $t \in \mathbb{R}$ и $A \subset \mathbb{R}$ обозначим через $\rho(t, A) = \inf\limits_{a \in A} |t - a|$ расстояние от точки t до множества A. Рассмотрим следующую функцию:
$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n} \rho(t, \sigma(T))}{\rho(t, \sigma(T)) + \rho(t, \overline{\sigma_n})}.$$
Так как расстояние $\rho(t, A)$ есть непрерывная функция на $\mathbb{R}$, то функция $h(t)$ тоже непрерывна на $\mathbb{R}$. Более того,
$$0 \leqslant h(t) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2, \ \ h(t) = 0 \ \text{ для всех } \ t \in \sigma(T)$$
и
$$g - h \leqslant f \leqslant g + h.$$
Так как функции $g(t)$ и $h(t)$ непрерывны на $\mathbb{R}$, по доказанному выше имеем, что
$$h(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} h(T) = 0,$$
$$g(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} g(T) = f(T).$$
Используя неравенство $0 \leqslant f - g + h \leqslant 2h$, получим
$$0 \leqslant (f - g + h)(T_n) \leqslant 2h(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0.$$
Следовательно, $(f - g + h)(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$ и
$$f(T_n) = (f - g + h)(T_n) + g(T_n) - h(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f(T).$$
Таким образом, теорема 6.1 доказана в случае, когда $|f(t)| \leqslant 1$, $t \in \mathbb{R}$.

Пусть теперь условие $|f(t)| \leqslant 1$, $t \in \mathbb{R}$, не выполняется. Так как
$$\sup_{t \in [n, n+1]} |f(t)| < \infty \ \text{ для всех } \ n \in \mathbb{N},$$

можно выбрать кусочно-линейную непрерывную функцию $\varphi(t)$ на $\mathbb{R}$ так, чтобы

$$\varphi(t) \geqslant |f(t)| + 1 \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Как было доказано выше, для функции $\dfrac{f(t)}{\varphi(t)}$ получим сходимость

$$\left(\frac{f}{\varphi}\right)(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} \left(\frac{f}{\varphi}\right)(T).$$

С другой стороны, из непрерывности функции φ следует, что

$$\varphi(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} \varphi(T).$$

Так как $(LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$ — топологическая $*$-алгебра, получаем

$$f(T_n) = \left(\varphi \cdot \frac{f}{\varphi}\right)(T_n) = \varphi(T_n)\left(\frac{f}{\varphi}\right)(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} \varphi(T) \cdot \left(\frac{f}{\varphi}\right)(T) = f(T).$$

Таким образом, теорема 6.1 полностью доказана.

□

Из теоремы 6.1 непосредственно вытекают два полезных следствия.

Следствие 6.1. *Если $\{T_\alpha\}$ — сеть операторов из $LS(\mathcal{M})$, $T \in LS(\mathcal{M})$ и $T_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T$, то*

$$|T_\alpha|^p \xrightarrow{t(\mathcal{M})} |T|^p$$

для всех $p > 0$.

Доказательство. Так как $(LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$ — топологическая $*$-алгебра, то

$$|T_\alpha|^2 = T_\alpha^* T_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T^*T = |T|^2.$$

Используя теорему 6.1 для непрерывной функции $f(t) = |t|^{p/2}$, получим, что $|T_\alpha|^p \xrightarrow{t(\mathcal{M})} |T|^p$ для всех $p > 0$. □

Обозначим через $\{E_\lambda(T)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ спектральное семейство проекторов оператора $T \in LS_h(\mathcal{M})$. Так как $E_\lambda(T) = \varphi_\lambda(T)$, где $\varphi_\lambda(t) = 1$ при $t \leqslant \lambda$ и $\varphi_\lambda(t) = 0$ при $t > \lambda$, то из теоремы 6.1 получаем следующее

Следствие 6.2. *Если λ не принадлежит спектру оператора $T \in LS_h(\mathcal{M})$, $\{T_\alpha\}$ — сеть таких операторов из $LS_h(\mathcal{M})$, что $T_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T$, то $E_\lambda(T_\alpha) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} E_\lambda(T)$.*

7. Максимальные коммутативные $*$-подалгебры в алгебрах локально измеримых операторов

Пусть $\mathcal{M}$ — произвольная алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H. Для каждого подмножества $\mathcal{A} \subset LS(\mathcal{M})$ обозначим через $\mathcal{A}'$ коммутант подмножества $\mathcal{A}$ в алгебре $LS(\mathcal{M})$:

$$\mathcal{A}' = \{T \in LS(\mathcal{M}) : TS = ST \text{ для любого } \ S \in \mathcal{A}\}.$$

Поскольку $(LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$ — топологическая $*$-алгебра, то коммутант $\mathcal{A}'$ произвольного подмножества $\mathcal{A}$ всегда замкнут в топологии сходимости локально по мере $t(\mathcal{M})$.

Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(H)$, то $LS(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ и топология $t(\mathcal{M})$ совпадает с равномерной топологией на $\mathcal{B}(H)$. Поэтому в этой ситуации существуют замкнутые в топологии $t(\mathcal{M})$ коммутативные $*$-подалгебры $\mathcal{A}$ в $LS(\mathcal{M})$, самосопряженные части которых $\mathcal{A}_h = \{T \in \mathcal{A} : T^* = T\}$ не являются векторными решетками относительно частичного порядка, индуцированного из $LS(\mathcal{M})_h$. Ниже будет показано, что для максимальных коммутативных $*$-подалгебр $\mathcal{A}$ в $LS(\mathcal{M})$ линейное пространство $\mathcal{A}_h$ всегда является условно полной векторной решеткой относительно частичного порядка, индуцированного из $LS_h(\mathcal{M})$.

Следующее предложение устанавливает совпадение максимальной коммутативной $*$-подалгебры в $LS(\mathcal{M})$ со своим коммутантом.

Предложение 7.1. *Если $\mathcal{A}$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$, то $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, в частности, $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$. Если $T \in \mathcal{A}'$, $T = \mathrm{Re}T + i\mathrm{Im}T$, где $\mathrm{Re}T,\ \mathrm{Im}T \in LS(\mathcal{M})_h$, то из $TS = ST$, $S \in \mathcal{A}$, следует, что $S^*T^* = T^*S^*$. Так как $\mathcal{A}$ — $*$-алгебра, то $S \in \mathcal{A} \Leftrightarrow S^* \in \mathcal{A}$. Поэтому $T^*S = ST^*$ для всех $S \in \mathcal{A}$, т. е. $T^* \in \mathcal{A}'$. Следовательно,

$$\mathrm{Re}T = \frac{T+T^*}{2} \in \mathcal{A}' \text{ и } \mathrm{Im}T = \frac{T-T^*}{2i} \in \mathcal{A}'.$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что из $T \in \mathcal{A}'$, $T = T^*$, следует, что $T \in \mathcal{A}$.

Если $T^* = T \in \mathcal{A}'$, то множество

$$\mathcal{B} = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k S_k T^k \colon \alpha_k \in \mathbb{C}, S_k \in \mathcal{A}, k = 0, 1, 2, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

является коммутативной $*$-подалгеброй в $LS(\mathcal{M})$, которая содержит $\mathcal{A}$ и T. В силу максимальности коммутативной $*$-подалгебры $\mathcal{A}$, получим, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, т. е. $T \in \mathcal{A}$ и значит, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$. Таким образом, $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, и потому $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$. □

Пусть $T = T^* \in LS(\mathcal{M})$. Рассмотрим борелевскую функцию $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, задаваемую равенством $f(\lambda) = \dfrac{\lambda - i}{\lambda + i}$, и положим

$$U_T = f(T) = (T - iI)(T + iI)^{-1}.$$

Оператор U_T называется *преобразованием Кэли* оператора T (см. [12, глава VIII, § 3.123]). Так как $|f(\lambda)| = 1$, то U_T — унитарный оператор из $\mathcal{M}$.

Предложение 7.2. *Если $T = T^* \in LS(\mathcal{M})$, $S \in LS(\mathcal{M})$, то*

$$TS = ST \Longleftrightarrow U_T S = S U_T.$$

Если при этом $S = S^*$, то

$$TS = ST \Longleftrightarrow U_T U_S = U_S U_T.$$

Доказательство. Функция $g(\lambda) = (\lambda + i)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, принадлежит $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Поэтому согласно предложению 5.1 имеем $X = g(T) \in LS(\mathcal{M})$ и в силу теоремы 2.5

$$(T + iI)X = (T + iI)(T + iI)^{-1} = I \quad \text{и} \quad X(T + iI) = (T + iI)^{-1}(T + iI) = I,$$

т. е. $X = (T + iI)^{-1}$ — обратный элемент к $(T + iI)$ в алгебре $LS(\mathcal{M})$.

Если $TS = ST$, то $(T + iI)S = S(T + iI)$ и поэтому $(T + iI)^{-1}S = XS = SX = S(T + iI)^{-1}$. Отсюда получаем, что

$$U_T S = (T - iI)(T + iI)^{-1} S = S(T - iI)(T + iI)^{-1} = S U_T.$$

Отсюда, в частности, следует, что если $S = S^*$, то $U_T U_S = U_S U_T$.

Докажем противоположную импликацию. Пусть $U_T S = S U_T$. Так как

$$\lambda = i \left(1 + \frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right) \left(1 - \frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{-1},$$

то, в силу теоремы 2.5, имеем, что

$$T = i(I + U_T)(I - U_T)^{-1}.$$

Поскольку $(I - U_T)^{-1} S = S(I - U_T)^{-1}$, то $TS = ST$.

Наконец, если $U_T U_S = U_S U_T$ и при этом $S = S^*$, то в силу доказанного выше, $U_T S = S U_T$, и, следовательно, $TS = ST$. □

Теорема 7.1. *Если $\mathcal{A}$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$, то $\mathcal{A}_b = \mathcal{A} \cap \mathcal{M}$ является коммутативной подалгеброй фон Неймана в $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Очевидно, что $\mathcal{A}_b$ есть $*$-подалгебра в $\mathcal{M}$. Если $T = T^* \in \mathcal{A}$, то $TS = ST$ для всех $S \in \mathcal{A}$, и поэтому, согласно утверждению 7.2, $U_T S = S U_T$ для всех $S \in \mathcal{A}$, т. е., в силу предложения 7.1, $U_T \in \mathcal{A}' \cap \mathcal{M} = \mathcal{A} \cap \mathcal{M}$, откуда $U_T \in \mathcal{A}_b$.

Пусть $A \in \mathcal{M}$ и $AD = DA$ для всех $D \in \mathcal{A}$. Тогда $AU_T = U_T A$ для всех $T = T^* \in \mathcal{A}$ и потому $AT = TA$ (предложение 7.2). Так как $\mathcal{A}$ — $*$-алгебра, то каждый элемент $X \in \mathcal{M}$ имеет вид $X = \mathrm{Re}X + i\mathrm{Im}T$, где $\mathrm{Re}X \in \mathcal{A}_h$, $\mathrm{Im}T \in \mathcal{A}_h$. Следовательно, $AX = XA$ для всех $X \in \mathcal{A}$, т. е. $A \in \mathcal{A}' = \mathcal{A}$ (предложение 7.1). Таким образом, $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{M} = \mathcal{A}_b$. Так как $\mathcal{A}_b \subset \mathcal{M}$, то

$$(\mathcal{A}_b)'_{\mathcal{B}(H)} = \{D \in \mathcal{B}(H) \colon AD = DA \ \text{ для всех } \ A \in \mathcal{A}_b\} \supseteq (\mathcal{M})'_{\mathcal{B}(H)}.$$

Отсюда

$$\mathcal{M} = ((\mathcal{M})'_{\mathcal{B}(H)})'_{\mathcal{B}(H)} \supseteq ((\mathcal{A}_b)'_{\mathcal{B}(H)})'_{\mathcal{B}(H)} = (\mathcal{A}_b)''_{\mathcal{B}(H)}.$$

Поэтому, если $A \in (\mathcal{A}_b)''_{\mathcal{B}(H)}$, то $A \in \mathcal{M}$ и $AD = DA$ для всех $D \in (\mathcal{A}_b)'_{\mathcal{B}(H)}$. Но алгебра $\mathcal{A}_b$ — коммутативная. Следовательно, $\mathcal{A}_b \subset (\mathcal{A}_b)'_{\mathcal{B}(H)}$ и в силу доказанного выше, получим, что $A \in \mathcal{A}_b$. Следовательно, $\mathcal{A}_b = (\mathcal{A}_b)''_{\mathcal{B}(H)}$, т. е. $\mathcal{A}_b$ — коммутативная подалгебра фон Неймана в $\mathcal{M}$. □

Пусть $\mathcal{A}$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$, $\mathcal{A}_b = \mathcal{A} \cap \mathcal{M}$. В силу теоремы 7.1, $\mathcal{A}_b$ — коммутативная алгебра фон Неймана, действующая в том же гильбертовом пространстве H, что и алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$. В частности, $\mathcal{A}_b$ — конечная алгебра фон Неймана, и потому $LS(\mathcal{A}_b) = S(\mathcal{A}_b)$ (см. следствие 3.4).

Пусть $T \in \mathcal{A}_h$, $E_\lambda = \chi_{(-\infty,\lambda)}(T)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Согласно предложению 2.5, если $A \in \mathcal{M}$ и $TA = AT$, то $E_\lambda A = AE_\lambda$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. В силу предложения 7.2 получим, что если $S^* = S \in \mathcal{A}'$, то $E_\lambda U_S = U_S E_\lambda$, откуда следует, что $E_\lambda S = SE_\lambda$ для любого $S \in \mathcal{A}'$, т. е. $E_\lambda \in \mathcal{A}'' = \mathcal{A}$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Таким образом, получено следующее предложение.

Предложение 7.3. *Если $T \in \mathcal{A}_h$, где $\mathcal{A}$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$, то $E_\lambda = \chi_{(-\infty,\lambda)}(T) \in \mathcal{A}_b$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Теорема 7.2. *Пусть $\mathcal{A}$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$. Тогда $\mathcal{A}$ — заполненная $*$-подалгебра в $S(\mathcal{A}_b)$.*

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{A}_h$, $E_\lambda = \chi_{(-\infty,\lambda)}(T)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Для каждого $\xi \in H$ положим $T_n\xi = \int\limits_{-n}^{n+0} \lambda dE_\lambda \xi$. Операторы T_n, $n = 1, 2, \ldots$ принадлежат $\mathcal{A}_b$ и являются самосопряженными. Обозначим $Q_n = E_n E_{-n}^{\perp}$. Тогда для всех $n = 1, 2, \ldots$ и $m > n$

$$T_n Q_n = Q_n T_n = T_n \ \text{ и } \ T_m Q_n = T_n Q_n = T_n.$$

Так как $Q_n \uparrow I$, то $\mathfrak{D} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n(H)$ плотно в H. Для каждого $\xi \in \mathfrak{D}$ положим $T_0\xi = T_n\xi$, где n — такой номер, что $\xi \in Q_n(H)$. Оператор T_0 определен корректно, является линейным и удовлетворяет условию

$$(T_0\xi,\ \xi) = (T_n\xi,\ \xi) = (\xi,\ T_n\xi) = (\xi,\ T_0\xi)$$

для каждого $\xi \in Q_n(H)$, т. е. оператор T_0 является симметрическим.

Если U — унитарный оператор из $\mathcal{A}_b'$ и $\xi \in Q_n(H)$, то

$$U\xi = UQ_n\xi = Q_n U\xi \in Q_n(H) \subset \mathfrak{D}(T_0) = \mathfrak{D}$$

и

$$UT_0\xi = UT_n\xi = T_n U\xi = T_0 U\xi.$$

Это означает, что $T_0 \ \eta \ \mathcal{A}_b$ и, согласно предложению 3.1, оператор $\widehat{T} = \overline{T_0} \ \eta \ \mathcal{A}_b$. Так как $\mathcal{A}_b$ — конечная алгебра фон Неймана и $Q_n \uparrow I$, то линейное подпространство $\mathfrak{D}$ сильно плотно в H. Поэтому, в силу следствия 3.1 и утверждения 3.5, оператор $\widehat{T} \in S_h(\mathcal{A}_b)$.

Если $\xi \in \mathfrak{D}$, $\zeta \in H$, и n — такой номер, что $\xi \in Q_n(H)$, то $(E_\lambda\xi, \zeta) = 0$ для $\lambda \leqslant -n$ и $(E_\lambda\xi, \zeta) = (E_n\xi, \zeta)$ для $\lambda \geqslant n$. Поэтому

$$(\widehat{T}\xi, \zeta) = (T_0\xi, \zeta) = (T_n\xi, \zeta) = \int\limits_{-n}^{n+0} \lambda dE_{\xi,\zeta}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_{\xi,\zeta}(\lambda).$$

Из представления $T = T_+ - T_-$, $T_+, T_- \in LS_+(\mathcal{M})$ и предложения 3.11 следует, что существует такая последовательность центральных проекторов $Z_n \in \mathcal{M}$, что $Z_n \uparrow I$ и $Z_n Q_n^\perp$ — конечный проектор. Это означает, что $\mathfrak{D}$ — локально измеримо относительно $\mathcal{M}$. Заметим, что для любого унитарного оператора $U \in \mathcal{M}'$ имеем, что $E_\lambda U = U E_\lambda$, и поэтому $U(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{D}$, т. е. $\mathfrak{D}\eta\mathcal{M}$. Из предложения 3.13 вытекает, что

$$T = \overline{T|_{\mathfrak{D}}} = \overline{T_0} = \widehat{T}.$$

Это означает, что $T \in S(\mathcal{A}_b)$.

Таким образом, для любого оператора $T \in \mathcal{A}_h$ существует локально измеримое относительно $\mathcal{M}$ подпространство $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}(T)$ такое, что $T = \overline{T|_{\mathfrak{D}}}$ и $\mathfrak{D}$ сильно плотно относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{A}_b$.

Если $T \in \mathcal{A}$ — произвольный, то $T = \operatorname{Re} T + i \operatorname{Im} T$, $\operatorname{Re} T$, $\operatorname{Im} T \in \mathcal{A}_h \subset S_h(\mathcal{A}_b)$. Пусть $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ — локально измеримые относительно $\mathcal{M}$ подпространства такие, что

$$\operatorname{Re} T = \overline{\operatorname{Re} T|_{\mathfrak{D}}},\ \operatorname{Im} T = \overline{\operatorname{Im} T|_{\mathfrak{D}}},$$

и $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ сильно плотны относительно $\mathcal{A}_b$.

Тогда $\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$ локально измеримо относительно $\mathcal{M}$ и сильно плотно относительно $\mathcal{A}_b$. Из предложений 3.6 и 3.13 имеем, что

$$\operatorname{Re} T = \overline{\operatorname{Re} T|_{\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2}},\ \operatorname{Im} T = \overline{\operatorname{Im} T|_{\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2}} \in S(\mathcal{A}_b),$$

и

$$T = \overline{T|_{\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2}} = \overline{\operatorname{Re} T|_{\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2}} + i\,\overline{\operatorname{Im} T|_{\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2}} \in S(\mathcal{A}_b).$$

Аналогично показывается, что если $T, S \in \mathcal{A}$, то сумма $T \dotplus S$ в $\mathcal{A}$ совпадает с суммой $T \dotplus S$ в $S(\mathcal{A}_b)$. Так как инволюция определяется независимо от $\mathcal{M}$ и $\mathcal{A}_b$, то $T^* \in S(\mathcal{A})$ есть сопряженный оператор к T в $S(\mathcal{A}_b)$.

С помощью предложения 3.6 и 3.13 аналогично показывается, что если $T, S \in \mathcal{A}$, то произведение $T \cdot S$ в $\mathcal{A}$ есть произведение $T \cdot S$ в $S(\mathcal{A}_b)$. Таким образом, $\mathcal{A}$ — $*$-подалгебра в $S(\mathcal{A}_b)$.

Покажем теперь, что $\mathcal{A}$ — заполненная $*$-подалгебра в $S(\mathcal{A}_b)$. Если $0 \leqslant T \leqslant S \in \mathcal{A}_b$, $T \in S(\mathcal{A}_b)$, то $\|T\|_{\mathcal{A}_b} \leqslant \|S\|_{\mathcal{A}_b} < \infty$, т. е. $T \in \mathcal{A}_b$. Пусть теперь $S \in \mathcal{A}$ и $E_\lambda = \chi_{(-\infty,\lambda)}(S)$. Согласно предложению 3.11, существует такая последовательность центральных проекторов $Z_n \in \mathcal{M}$, что $Z_n \uparrow I$ и $Z_n E_n^\perp$ — конечный проектор относительно $\mathcal{M}$ для всех n. Так как $\mathcal{A}$ — максимальная в $LS(\mathcal{M})$, то $Z(\mathcal{M}) \subset \mathcal{A}_b$, в частности, $\{Z_n\} \subset \mathcal{A}_b$. Из предложения 3.14 следует, что

$$0 \leqslant Z_n E_{n+m} T E_{n+m} \leqslant Z_n E_{n+m} S E_{n+m} \leqslant (n+m) Z_n E_{n+m},$$

т. е.

$$\|\sqrt{T} Z_n E_{n+m}\|_{\mathcal{A}_b} \leqslant \sqrt{n+m} < n+m.$$

Из предложения 3.3 следует, что $G_{n+m}^\perp \preceq E_{n+m}^\perp$, где $G_m = \chi_{(\infty,m)}(\sqrt{T} Z_n)$. В частности, $Z_n G_{n+m}^\perp \preceq Z_n E_{n+m}^\perp$, и поэтому $Z_n G_{n+m}^\perp$ — конечный проектор для любого m. Так как $Z_n G_{m+m} \uparrow Z_n$ при $m \to \infty$, то $\sqrt{T} Z_n$ — измеримый относительно $\mathcal{M}$ оператор для любого $n = 1, 2, \ldots$. Из предложения 3.11 следует, что $\sqrt{T} \in LS(\mathcal{M})$. Поэтому $T = \sqrt{T} \cdot \sqrt{T} \in LS(\mathcal{M})$. Следовательно, $\mathcal{A}$ — заполненная $*$-подалгебра в $S(\mathcal{A}_b)$. □

Так как $\mathcal{A}_b$ — коммутативная алгебра фон Неймана, то в силу следствия 3.3 $S(\mathcal{A}_b)$ отождествляется с $S(\Omega, \Sigma, \mu)$ для соответствующего пространства с локально конечной мерой. Следовательно, если $\mathcal{A}$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$, то $\mathcal{A}$ отождествляется с заполненной $*$-подалгеброй в $S(\Omega, \Sigma, \mu)$. Отсюда, в частности, вытекает

Теорема 7.3. *Если $\mathcal{A}$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$, то $\mathcal{A}_h$ — условно полная векторная решетка относительно частичного порядка, индуцированного из $LS_h(\mathcal{M})$. При этом, если $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана, то $\mathcal{A}_h$ — расширенная условно полная векторная решетка.*

Доказательство. Если $T \in \mathcal{A}$ и $T \geqslant 0$, то $(T\xi, \xi) \geqslant 0$ для всех $\xi \in \mathfrak{D}(T)$. Это определение не зависит от $\mathcal{M}$ и $\mathcal{A}_b$. Следовательно,

$$T \in \mathcal{A}_+ \Longleftrightarrow T \in S(\mathcal{A}_b) \text{ и } T \geqslant 0 \text{ в } S(\mathcal{A}_b).$$

таким образом, частичный порядок из $S_h(\mathcal{A}_b)$ индуцирует исходный частичный порядок в $\mathcal{A}_h$.

Пусть $T, S \in \mathcal{A}_h \subset S_h(\mathcal{A}_b) = S_h(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тогда

$$T_+ = T \cdot (\chi_{(-\infty,0)}(T))^\perp \in \mathcal{A}_h \quad \text{и} \quad T_+ = T \vee 0 \text{ в } S_h(\Omega, \Sigma, \mu),$$

т. е. $T \vee 0 \in \mathcal{A}_h$. Аналогично, $T_- = (-T) \vee 0 \in \mathcal{A}_h$ и $|T| = T_+ - T_- \in \mathcal{A}_h$. Отсюда

$$T \vee S = ((T - S) \vee 0) + S \in \mathcal{A}_h \quad \text{и} \quad T \wedge S = (T + S) - T \vee S \in \mathcal{A}_h.$$

Следовательно, $\mathcal{A}_h$ — векторная решетка.

Пусть $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_h$ и $S \leqslant T \in \mathcal{A}_h$ для любого $S \in \mathcal{B}$. Тогда в $S(\mathcal{A}_b)$ существует точная верхняя грань $\sup \mathcal{B} \leqslant T$. Поскольку $\mathcal{A}$ — заполненная подалгебра в $S(\mathcal{A}_b)$ (теорема 7.2), то $\sup \mathcal{B} \in \mathcal{A}_h$. Это означает, что $\mathcal{A}_h$ — условно полная векторная решетка.

Покажем теперь, что $\mathcal{A}_h$ — расширенная условно полная векторная решетка, т. е. любое семейство $\{T_j\}_{j \in J}$ положительных попарно дизъюнктных элементов из $\mathcal{A}_h$ имеет точную верхнюю грань в $\mathcal{A}_h$. Поскольку проекторы $\{s(T_j)\}_{j \in J}$ попарно ортогональны и $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана, то существует такой измеримый оператор $T \in S(\mathcal{M}) = LS(\mathcal{M})$, что $Ts(T_j) = T_j$ для всех $j \in J$ и $s(T) = \sup\limits_{j \in J} s(T_j)$, в частности, $T_j \leqslant T$ для всех $j \in J$. Так как $\{T_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{A}_h$, то $TS = ST$ для всех $S \in \mathcal{A}$, т. е. $T \in \mathcal{A}' = \mathcal{A}$. Если $S \in \mathcal{A}_h$ и $T_j \leqslant S$ для всех $j \in J$, то $T \leqslant S$, что влечет равенство $T = \sup\limits_{j \in J} T_j$. $\square$

Следует отметить, что в случае не конечных алгебр фон Неймана свойство расширенности векторных решеток $\mathcal{A}_h$ для максимальных коммутативных $*$-подалгебр $\mathcal{A}$ в $LS(\mathcal{M})$, вообще говоря, не выполняется. Более точно, верна следующая

Теорема 7.4. *Если для любой максимальной коммутативной $*$-подалгебры $\mathcal{A}$ в $LS(\mathcal{M})$ векторная решетка $\mathcal{A}_h$ является расширенной, то $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бикчентаев А. М.* Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана// Тр. МИАН. — 2006. — *255*. — С. 41–54.
2. *Бикчентаев А. М.* Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана. II// Мат. заметки. — 2007. — *82*, № 5. — С. 703–707.
3. *Брателли У., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. — М.: Мир, 1982.
4. *Гельфанд И. М., Наймарк М. А.* О включении нормированного кольца в кольцо операторов в гильбертовом пространстве// Мат. сб. — 1943. — *12*. — С. 197–213.
5. *Закиров Б. С., Чилин В. И.* Абстрактная характеризация EW^*-алгебр// Функц. анализ и его прилож. — 1991. — *25*, № 1. — С. 76–78.
6. *Закиров Б. С., Чилин В. И.* Описание GB^*-алгебр, ограниченная часть которых есть W^* алгебра// Узбек. мат. ж. — 1991. — № 2. — С. 24–29.
7. *Муратов М. А., Чилин В. И.* $*$-Алгебры измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана// Доповiд. НАН Укр. — 2005. — *9*. — С. 28–30.
8. *Муратов М. А., Чилин В. И.* $*$-Алгебры неограниченных операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана// Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2005. — *326*. — С. 183–197.
9. *Муратов М. А., Чилин В. И.* Алгебры измеримых и локально измеримых операторов. — Київ: Праці Iн-т. Матем. НАН України, 2007.
10. *Муратов М. А., Чилин В. И.* Центральные расширения $*$-алгебры измеримых операторов// Доповiд. НАН Укр. — 2009. — *7*. — С. 24–28.
11. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. — М.: Наука, 1968.
12. *Рисс Ф., Секевальфи-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979.
13. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
14. *Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А., Хаджиев Д., Чилин В. И.* Упорядоченные алгебры. — Ташкент: ФАН, 1983.
15. *Сукочев Ф. А., Чилин В. И.* Неравенство треугольника для измеримых операторов относительно порядка Харди—Литлвуда// Изв. АН Уз. ССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1988. — *4*. — С. 44–50.
16. *Тихонов О. Е.* Непрерывность операторных функций в топологиях, связанных со следом на алгебре Неймана// Изв. вузов. Сер. мат. — 1987. — *1*. — С. 77–79.

17. *Antoine J. P., Inoue A., Trapani C.* Partial $*$-algebras and their operator realizations. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.
18. *Ber A. F., Chilin V. I., Sukochev F. A.* Continuous derivations on algebras of locally measurable operators are inner// Proc. Lond. Math. Soc. — 2014. — *109*, № 3. — С. 65–89.
19. *Chilin V. I., Muratov M. A.* Comparison of topologies on $*$-algebras of locally measurable operators// Positivity. — 2013. — *17*, № 1. — С. 111–132.
20. *Chilin V. I., Muratov M. A.* Continuity of operator-valued functions in the $*$-algebra of locally measurable operators// Methods Funct. Anal. Topology. — 2014. — *20*, № 2. — С. 124–134.
21. *Davies E. B.* A generalization of Kaplansky's theory// J. Lond. Math. Soc. — 1972. — *4*. — С. 435-436.
22. *Dieudonne J.* Foundations of modern analysis. — New York—London: Acad. Press, 1960.
23. *Dixmier J.* Les Algebres d'operateurs dans l'espace Hilbertien (Algebres de von Neumann). — Paris: Gauthier-Villars, 1969.
24. *Dixon P. G.* Unboubded operator algebras// Proc. Lond. Math. Soc. — 1973. — *23*, № 3. — С. 53–59.
25. *Fack T., Kosaki H.* Generalized s-numbers of τ-measurable operators// Pacific J. Math. — 1986. — *123*. — С. 269–300.
26. *Kadison R. V.* Strong continuity of operator functions// Pacific J. Math. — 1968. — *26*. — С. 121–129.
27. *Kaplansky I.* Projections in Banach algebras// Ann. Math. — 1951. — *53*. — С. 235–249.
28. *Kaplansky I.* A theorem on rings operators// Pacific J. Math. — 1951. — *1*. — С. 227–232.
29. *Kunce R. A.* L^p Fourier transforms on locally compact unimodular groups// Trans. Am. Math. Soc. — 1958. — *89*. — С. 519–540.
30. *Muratov M. A., Chilin V. I.* $*$-Algebras of unbounded operators affiliated with a von Neumann algebra// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2007. — *140*, № 3. — С. 445–451.
31. *Murphy G. J.* $C^\star$-algebras and operator theory. — New York—London: Academic Press, Inc. , 1990.
32. *Murrey F. J., von Neumann J.* On ring of operators// Ann. Math. — 1936. — *37*. — С. 116–229.
33. *Murrey F. J., von Neumann J.* On ring of operators. II// Trans. Am. Math. Soc. — 1937. — *41*. — С. 208–248.
34. *Murrey F. J., von Neumann J.* On ring of operators. IV// Ann. Math. — 1943. — *44*. — С. 716–808.
35. *Nelson E.* Notes on noncommutative integration// J. Funct. Anal. — 1974. — *15*. — С. 103–116.
36. *von Neumann J.* On ring of operators. III// Ann. Math. — 1940. — *41*. — С. 94–161.
37. *Padmanabhan A. R.* Convergence in measure and related results in finite rings of operators// Trans. Am. Math. Soc. — 1967. — *128*. — С. 359–388.
38. *Reed M., Simon B.* Methods of modern mathematical physics. I. Functional Analysis. — New York: Academic Press, 1980.
39. *Sakai S.* $C^\star$-algebras and $W^\star$-algebras. — New York: Springer, 1971.
40. *Sankaran S.* The $*$-algebra of unbounded operators// J. Lond. Math. Soc. — 1959. — *343*. — С. 337–344.
41. *Sankaran S.* Stochastic convergence for operators// Quart. J. Math. — 1964. — *2*, № 15. — С. 97–102.
42. *Schmudgen K.* Unbounded operator algebras an representation theory. — Basel: Birkhauser, 1990.
43. *Segal I. E.* A non-commutative extension of abstract integration// Ann. Math. — 1953. — *57*. — С. 401–457.
44. *Stinespring W. E.* Integration theorems for gages and duality for unimodular groups// Trans. Am. Math. Soc. — 1959. — *90*. — С. 15–56.
45. *Strătilă S., Zsidó L.* Lectures on von Neumann algebras. — Bucharest: Abacus Press, 1979.
46. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. I. — New York: Springer, 1979.
47. *Yeadon F. J.* Convergence of measurable operators// Proc. Camb. Philos. Soc. — 1973. — *74*. — С. 257–268.
48. *Yeadon F. J.* Non-commutative L^p-spaces// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1975. — *77*. — С. 91–102.

М. А. Муратов
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, Симферополь, проспект Вернадского, 4
E-mail: mamuratov@gmail.com

В. И. Чилин
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 700174, Ташкент, Вузгородок
E-mail: chilin@usd.uz

UDC 517.98

Topological Algebras of Measurable and Locally Measurable Operators

© 2016 **M. A. Muratov, V. I. Chilin**

Abstract. In this paper, we review the results on topological $*$-algebras $S(\mathcal{M})$, $S(\mathcal{M},\tau)$, and $LS(\mathcal{M})$ of measurable, τ-measurable, and locally measurable operators affiliated with the von Neumann algebra $\mathcal{M}$. Also we consider relations between these algebras for different classes of von Neumann algebras and establish the continuity of operator-valued functions with respect to local convergence in measure. We describe maximal commutative $*$-subalgebras of the algebra $LS(\mathcal{M})$ as well.

REFERENCES

1. A. M. Bikchentaev, "Lokal'naya skhodimost' po mere na polukonechnykh algebrakh fon Neymana" [Local convergence in measure on semifinite von Neumann algebras], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2006, **255**, 41–54 (in Russian).
2. A. M. Bikchentaev, "Lokal'naya skhodimost' po mere na polukonechnykh algebrakh fon Neymana. II" [Local convergence in measure on semifinite von Neumann algebras. II], *Mat. zametki.*, 2007, **82**, No. 5, 703–707 (in Russian).
3. U. Bratelli and D. Robinson, *Operatornye algebry i kvantovaya statisticheskaya mekhanika* [Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics], Mir, Moscow, 1982 (in Russian).
4. I.M. Gel'fand and M.A. Naymark, "O vklyuchenii normirovannogo kol'tsa v kol'tso operatorov v gil'bertovom prostranstve" [On the inclusion of the normed ring into the ring of operators in a Hilbert space], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1943, **12**, 197–213 (in Russian).
5. B.S. Zakirov and V.I. Chilin, "Abstraktnaya kharakterizatsiya EW^*-algebr" [Abstract characterization of EW^*-algebras], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1991, **25**, No. 1, 76–78 (in Russian).
6. B.S. Zakirov and V.I. Chilin, "Opisanie GB^*-algebr, ogranichennaya chast' kotorykh est' W^* algebra" [Description of GB^*-algebras that have a W^* algebra as a bounded part], *Uzbek. mat. zh.* [Uzbek Math. J.], 1991, No. 2, 24–29 (in Russian).
7. M. A. Muratov and V. I. Chilin, "$*$-Algebry izmerimykh i lokal'no izmerimykh operatorov, prisoedinennykh k algebre fon Neymana" [$*$-Algebras of measurable and locally measurable operators affiliated with the von Neumann algebra], *Dopovid. NAN Ukr.* [], 2005, **9**, 28–30 (in Russian).
8. M. A. Muratov and B. I. Chilin, "$*$-Algebry neogranichennykh operatorov, prisoedinennykh k algebre fon Neymana" [$*$-Algebras of unbounded operators affiliated with the von Neumann algebra], *Zap. nauch. sem. POMI* [Notes Sci. Semin. Saint-Petersburg Dept. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2005, **326**, 183–197 (in Russian).
9. M.A. Muratov and V.I. Chilin, *Algebry izmerimykh i lokal'no izmerimykh operatorov* [Algebras of Measurable and Locally Measurable Operators], Pratsi In-t. Matem. NAN Ukraïni, Kiïv, 2007 (in Russian).
10. M.A. Muratov and V.I. Chilin, "Tsentral'nye rasshireniya $*$-algebry izmerimykh operatorov" [Central extensions of $*$-algebra of bounded operators] *Dopovid. NAN Ukr.* [Rep. Ukrainian Nat. Acad. Sci.], 2009, **7**, 24–28 (in Russian).
11. M. A. Naymark, *Normirovannye kol'tsa* [Normed Rings], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
12. F. Riess and B. Szokefalvi-Nagy, *Lektsii po funktsional'nomu analizu* [Lectures in Functional Analysis], Mir, Moscow, 1979 (in Russian).
13. W. Rudin, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1975 (in Russian).
14. T. A. Sarymsakov, Sh. A. Ayupov, D. Khadzhiev, and V. I. Chilin, *Uporyadochennye algebry* [Ordered Algebras], FAN, Tashkent, 1983 (in Russian).
15. F. A. Sukochev and V. I. Chilin, "Neravenstvo treugol'nika dlya izmerimykh operatorov otnositel'no poryadka Khardi—Litlvuda" [The triangle inequality for measurable operators with respect to the Hardy–Littlewood ordering] *Izv. AN Uz. SSR Ser. fiz.-mat. nauk* [Bull. Acad. Sci. Uzbek SSR. Ser. Phys. Math. Sci.], 1988, **4**, 44–50 (in Russian).
16. O. E. Tikhonov, "Nepreryvnost' operatornykh funktsiy v topologiyakh, svyazannykh so sledom na algebre Neymana" [Continuity of operator functions in topologies connected to the trace on the Neumann algebra] *Izv. vuzov. Ser. mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1987, **1**, 77–79 (in Russian).

17. J. P. Antoine, A. Inoue, and C. Trapani, *Partial $*$-Algebras and Their Operator Realizations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.
18. A. F. Ber, V. I. Chilin, and F. A. Sukochev, "Continuous derivations on algebras of locally measurable operators are inner," *Proc. Lond. Math. Soc.*, 2014, **109**, No. 3, 65–89.
19. V. I. Chilin and M. A. Muratov, "Comparison of topologies on $*$-algebras of locally measurable operators," *Positivity*, 2013, **17**, No. 1, 111–132.
20. V. I. Chilin and M. A. Muratov, "Continuity of operator-valued functions in the $*$-algebra of locally measurable operators," *Methods Funct. Anal. Topology*, 2014, **20**, No. 2, 124–134.
21. E. B. Davies, "A generalization of Kaplansky's theory," *J. Lond. Math. Soc.*, 1972, **4**, 435-436.
22. J. Dieudonne, *Foundations of Modern Analysis*, Acad. Press, New York–London, 1960.
23. J. Dixmier, *Les Algebres d'Operateurs dans l'Espace Hilbertien (Algebres de von Neumann)*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
24. P. G. Dixon, "Unboubded operator algebras," *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1973, **23**, No. 3, 53–59.
25. T. Fack and H. Kosaki, "Generalized s-numbers of τ-measurable operators," *Pacific J. Math.*, 1986, **123**, 269–300.
26. R. V. Kadison, "Strong continuity of operator functions," *Pacific J. Math.*, 1968, **26**, 121–129.
27. I. Kaplansky, "Projections in Banach algebras," *Ann. Math.*, 1951, **53**, 235–249.
28. I. Kaplansky, "A theorem on rings operators," *Pacific J. Math.*, 1951, **1**, 227–232.
29. R. A. Kunce, "L^p Fourier transforms on locally compact unimodular groups," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1958, **89**, 519–540.
30. M. A. Muratov and V. I. Chilin, "$*$-Algebras of unbounded operators affiliated with a von Neumann algebra," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2007, **140**, No. 3, 445–451.
31. G. J. Murphy, *$C^\star$-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, Inc., New York–London, 1990.
32. F. J. Murrey and J. von Neumann, "On ring of operators," *Ann. Math.*, 1936, **37**, 116–229.
33. F. J. Murrey and J. von Neumann, "On ring of operators. II," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1937, **41**, 208–248.
34. F. J. Murrey and J. von Neumann, "On ring of operators. IV," *Ann. Math.*, 1943, **44**, 716–808.
35. E. Nelson, "Notes on noncommutative integration," *J. Funct. Anal.*, 1974, **15**, 103–116.
36. J. von Neumann, "On ring of operators. III," *Ann. Math.*, 1940, **41**, 94–161.
37. A. R. Padmanabhan, "Convergence in measure and related results in finite rings of operators," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1967, **128**, 359–388.
38. M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. I. Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1980.
39. S. Sakai, *$C^\star$-Algebras and $W^\star$-Algebras*, Springer, New York, 1971.
40. S. Sankaran, "The $*$-algebra of unbounded operators," *J. Lond. Math. Soc.*, 1959, **343**, 337–344.
41. S. Sankaran, "Stochastic convergence for operators," *Quart. J. Math.*, 1964, **2**, No. 15, 97–102.
42. K. Schmudgen, *Unbounded Operator Algebras an Representation Theory*, Birkhauser, Basel, 1990.
43. I. E. Segal, "A non-commutative extension of abstract integration," *Ann. Math.*, 1953, **57**, 401–457.
44. W. E. Stinespring, "Integration theorems for gages and duality for unimodular groups," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1959, **90**, 15–56.
45. S. Strătilă and L. Zsidó, *Lectures on von Neumann Algebras*, Abacus Press, Bucharest, 1979.
46. M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras. I*, Springer, New York, 1979.
47. F. J. Yeadon, "Convergence of measurable operators," *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 1973, **74**, 257–268.
48. F. J. Yeadon, "Non-commutative L^p-spaces," *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1975, **77**, 91–102.

M. A. Muratov
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, 295007, Russia
E-mail: mamuratov@gmail.com

V. I. Chilin
M. Ulugbek National University of Uzbekistan,
VUZ Gorodok, 700174 Tashkent, Uzbekistan
E-mail: chilin@usd.uz

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 61 (2016). С. 164–181

УДК 517.9

О КОЭРЦИТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

© 2016 г. **А. Р. ХАНАЛЫЕВ**

Аннотация. В произвольном банаховом пространстве E рассматривается задача Коши

$$v'(t) + A(t)v(t) = f(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),\ v(0) = v_0$$

для дифференциального уравнения с линейным сильно позитивным оператором $A(t)$, имеющим не зависящую от t, всюду плотную в E область определения $D = D(A(t))$, порождающим аналитическую полугруппу $\exp\{-sA(t)\}$ $(s \geqslant 0)$. При естественных предположениях относительно $A(t)$ устанавливается коэрцитивная разрешимость задачи Коши в банаховом пространстве $C_0^{\beta,\gamma}(E)$. Доказана более сильная оценка решения по сравнению с известными ранее при меньших ограничениях на $f(t)$ и v_0.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение. Оценки и обозначения 164
2. Формулировка и доказательство основной теоремы 167
3. Следствие 179
Список литературы 180

1. Введение. Оценки и обозначения

Рассмотрим задачу Коши

$$v'(t) + A(t)v(t) = f(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),\ v(0) = v_0 \tag{1.1}$$

в произвольном банаховом пространстве E. Здесь $v(t)$ и $f(t)$ — искомая и заданная функции, определенные на $[0,1]$ со значениями в E; $v'(t)$ — производная, понимаемая как предел по норме E соответствующего конечно-разностного отношения; $A(t)$ — действующий в E линейный неограниченный оператор, имеющий не зависящую от t, всюду плотную в E область определения D; $v_0 \in D$. К такой задаче сводятся различные краевые задачи для эволюционных уравнений в частных производных [3].

Будем предполагать, что

1. при любых $t \in [0,1]$ и λ с $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$ оператор $A(t) + \lambda I$ имеет ограниченный обратный, причем
$$\left\| [A(t) + \lambda I]^{-1} \right\|_{E\to E} \leqslant M(1 + |\lambda|)^{-1}$$
(согласно [2], оператор $A(t)$ принято называть сильно позитивным);
2. для любых $t, s, \tau \in [0,1]$ справедливо неравенство
$$\left\| [A(t) - A(s)]A^{-1}(\tau) \right\|_{E\to E} \leqslant M|t-s|^{\varepsilon}, 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{1.2}$$

Функцию $v(t)$ назовем *решением* задачи (1.1), если выполнены следующие условия:

1. функция $v(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,1]$. Производная в концах отрезка понимается как соответствующая односторонняя производная;
2. элемент $v(t)$ принадлежит $D = D(A(t))$ при каждом $t \in [0,1]$ и $A(t)v(t)$ непрерывна на $[0,1]$;
3. функция $v(t)$ удовлетворяет уравнению и начальному условию (1.1).

Задача (1.1) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение $v(t)$ при определенных ограничениях на v_0 и достаточно гладких функциях $f(t)$, а для ее решения справедлива формула

$$v(t) = v(t,0)v_0 + \int_0^t v(t,s)f(s)ds,$$

где $v(t,s)$ — фундаментальное решение уравнения (1.1), называемое также *эволюционной оператор-функцией* [3, 10]. Оно определяется из соотношения

$$v(t,s) = \exp\{-(t-s)A(t)\} + \int_s^t \exp\{-(t-t_1)A(t)\}[A(t) - A(t_1)]v(t_1,s)dt_1$$

или

$$v(t,s) = \exp\{-(t-s)A(s)\} + \int_s^t v(t,t_1)[A(s) - A(t_1)]\exp\{-(t_1-s)A(s)\}dt_1$$

и удовлетворяет следующим условиям:

1. оператор $v(t,s)$ сильно непрерывен по t и s $(0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1)$;
2. $v(t,s) = v(t,\tau)v(\tau,s), v(t,t) = I$, $0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant 1$;
3. оператор $v(t,s)$ отображает область $D = D(A(t))$ в себя, оператор $u(t,s) = A(t)v(t,s)A^{-1}(s)$ ограничен, сильно непрерывен по t и s $(0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1)$;
4. на области D оператор $v(t,s)$ сильно дифференцируем по t и s, причем

$$\frac{\partial v(t,s)}{\partial t} = -A(t)v(t,s), \qquad \frac{\partial v(t,s)}{\partial s} = v(t,s)A(s).$$

Определение. Говорят, что задача (1.1) *коэрцитивно разрешима* в некотором банаховом пространстве $F(E) = F([0,1],E)$ функций $f(t)$ со значениями в E на $[0,1]$, если для всякой $f(t) \in F(E)$ существует единственное решение задачи (1.1), причем v' и $A(t)v$ принадлежат тому же пространству $F(E)$ [4].

Введем банахово пространство $C_0^{\beta,\gamma}(E) = C_0^{\beta,\gamma}([0,1],E)$ $(0 \leqslant \gamma \leqslant \beta,\ 0 < \beta < 1)$, полученное замыканием множества всех гладких функций $f(t)$, определенных на отрезке $[0,1]$, со значениями из E в норме

$$\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} = \|f\|_{C(E)} + \sup_{0 \leqslant t < t+\tau \leqslant 1} \frac{(t+\tau)^\gamma \|f(t+\tau) - f(t)\|_E}{\tau^\beta}.$$

Здесь под $C(E) = C([0,1],E)$ понимается банахово пространство определенных на $[0,1]$ со значениями в E непрерывных функций $f(t)$ с нормой

$$\|f\|_{C(E)} = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|f(t)\|_E.$$

Таким образом, при $\beta = \alpha$ и $\gamma = 0$ пространство $C_0^{\alpha,0}(E) = C_0^{\alpha,0}([0,1],E)$ $(0 < \alpha < 1)$ совпадает с пространством $C^\alpha(E) = C^\alpha([0,1],E)$ $(0 < \alpha < 1)$. А если $\gamma = \beta = \alpha$, то тогда пространство $C_0^{\alpha,\alpha}(E) = C_0^{\alpha,\alpha}([0,1],E)$ $(0 < \alpha < 1)$ совпадает с пространством $C_0^\alpha(E) = C_0^\alpha([0,1],E)$ $(0 < \alpha < 1)$, причем нормы этих пространств равномерно по $\alpha \in (0,1)$ эквивалентны.

Обозначим через $E_\alpha^t = E_{\alpha,\infty}^t(A(t),E)$ $(0 < \alpha < 1)$ дробные пространства с нормой

$$\|u\|_{E_\alpha^t} = \sup_{z>0} z^{1-\alpha}\|A(t)\exp\{-zA(t)\}u\|_E + \|u\|_E,$$

состоящие из всех элементов $u \in E$, для которых эта норма конечна.

Из результатов работы [7] следует, что пространство E_α^t не зависит от t в силу предположения $D(A(t)) = D$, т. е., что норма $\|u\|_{E_\alpha^t}$ эквивалентна $\|u\|_{E_\alpha^s}$ при любых $t, s \in [0,1]$. В дальнейшем пространство E_α^t обозначается просто E_α.

Известно, что в случае произвольного неограниченного сильно позитивного оператора $A(t)$ и любого банахова пространства E коэрцитивная разрешимость задачи (1.1) отсутствует в $C(E)$. В условиях настоящей работы коэрцитивная разрешимость задачи (1.1) в пространстве Гельдера

$C_0^\alpha(E)$ с весом t^α установлена в [6], и в пространстве $C(E_\alpha)=C([0,1],E_\alpha)$ установлена в [8] при $0<\alpha<\varepsilon\leqslant 1$.

Известно, что для аналитической полугруппы справедливы оценки [5, 10]:

$$\|\exp\{-(t-s)A(t)\}\|_{E\to E}\leqslant M\exp\{-\delta(t-s)\},\ t>s,\ M>0,\ \delta>0, \tag{1.3}$$

$$\left\|A^{1+\alpha}(t)\exp\{-(t-s)A(t)\}\right\|_{E\to E}\leqslant\frac{M}{(t-s)^{1+\alpha}},\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1, \tag{1.4}$$

$$\left\|z^{1-\alpha}A^{1-\alpha}(t)\exp\{-zA(t)\}\right\|_{E\to E}\leqslant M,\ z>0,\ 0<\alpha<1, \tag{1.5}$$

$$\|\exp\{-(t+\tau-s)A(t+\tau)\}-\exp\{-(t+\tau-s)A(t)\}\|_{E\to E}\leqslant M\tau^\varepsilon,\ 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{1.6}$$

Как показано в [5, 10], для $v(t,s)$ справедливы следующие леммы:

Лемма 1.1. *Для любых $0\leqslant s<t\leqslant 1$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, $0<\varepsilon\leqslant 1$ верны оценки*

$$\|v(t,s)\|_{E\to E}\leqslant M,$$

$$\left\|A^{1+\alpha}(t)v(t,s)A^{-1}(s)\right\|_{E\to E}\leqslant\frac{M}{(t-s)^\alpha}, \tag{1.7}$$

$$\left\|A^{1+\alpha}(t)v(t,s)\right\|_{E\to E}\leqslant\frac{M}{(t-s)^{1+\alpha}}, \tag{1.8}$$

$$\|v(t,s)-\exp\{-(t-s)A(t)\}\|_{E\to E}\leqslant M(t-s)^\varepsilon,$$

$$\left\|A^{1+\alpha}(t)[v(t,s)-\exp\{-(t-s)A(t)\}]\right\|_{E\to E}\leqslant\frac{M}{(t-s)^{1+\alpha-\varepsilon}},$$

$$\left\|A^{1+\alpha}(t)[v(t,s)-\exp\{-(t-s)A(t)\}]A^{-1}(s)\right\|_{E\to E}\leqslant M(t-s)^{\varepsilon-\alpha}, \tag{1.9}$$

где M не зависит от t, s,α и ε.

Лемма 1.2. *Для любых $0\leqslant s<t<t+\tau\leqslant 1$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, $0<\varepsilon\leqslant 1$ справедливы оценки*

$$\|v(t+\tau,s)-v(t,s)\|_{E\to E}\leqslant M\varphi,$$

$$\|A(t+\tau)v(t+\tau,s)-A(t)v(t,s)\|_{E\to E}\leqslant\frac{M\varphi}{t-s}, \tag{1.10}$$

$$\left\|A(t+\tau)v(t+\tau,s)A^{-1}(s)-A(t)v(t,s)A^{-1}(s)\right\|_{E\to E}\leqslant M\varphi, \tag{1.11}$$

где $\varphi=\tau^\varepsilon+\dfrac{\tau^\alpha}{(t-s)^\alpha}$ и M не зависит от t, s,τ,α и ε.

Приведем одно тождество для $v'(t)$:

$$v'(t)=\int_0^t A(t)v(t,s)(f(t)-f(s))ds+\int_0^t A(t)v(t,s)[A(s)-A(t)]A^{-1}(t)f(t)ds+$$
$$+A(t)v(t,0)A^{-1}(0)(f(t)-f(0))+A(t)v(t,0)A^{-1}(0)[A(0)-A(t)]A^{-1}(t)f(t)+$$
$$+A(t)v(t,0)A^{-1}(0)v_0'=W_1(t)+W_2(t)+W_3(t)+W_4(t)+W_5(t),$$

где

$$W_1(t)=\int_0^t A(t)v(t,s)(f(t)-f(s))ds,$$

$$W_2(t)=\int_0^t A(t)v(t,s)[A(s)-A(t)]A^{-1}(t)f(t)ds,$$

$$W_3(t)=A(t)v(t,0)A^{-1}(0)(f(t)-f(0)),$$
$$W_4(t)=A(t)v(t,0)A^{-1}(0)[A(0)-A(t)]A^{-1}(t)f(t),$$
$$W_5(t)=A(t)v(t,0)A^{-1}(0)v_0'\quad(v_0'=f(0)-A(0)v_0).$$

2. Формулировка и доказательство основной теоремы

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть* $v_0' = f(0) - A(0)v_0 \in E_{\beta-\gamma}$, $f(t) \in C_0^{\beta,\gamma}(E)$ *при некоторых* $0 \leqslant \gamma < \beta < \varepsilon \leqslant 1$, $0 < \beta < 1$. *Тогда задача* (1.1) *коэрцитивно разрешима в* $C_0^{\beta,\gamma}(E)$ *и для ее единственного решения* $v(t)$ *справедливо неравенство коэрцитивности*

$$\left\|v'\right\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} + \|A(.)v\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} + \left\|v'\right\|_{C(E_{\beta-\gamma})} \leqslant M\left[\frac{1}{\beta-\gamma}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} + \frac{1}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\right] \qquad (2.1)$$

с постоянной M, *не зависящей от* β, γ, v_0' *и* $f(t)$.

Доказательство. Для доказательства нужно получить оценки функций $W_1(t), W_2(t), W_3(t), W_4(t)$, $W_5(t)$ в нормах $C(E_{\beta-\gamma})$ и $C_0^{\beta,\gamma}(E)$. Сначала оценим $W_1(t)$ в $C(E_{\beta-\gamma})$:

$$z^{1-(\beta-\gamma)}\|A(t)\exp\{-zA(t)\}W_1(t)\|_E \leqslant$$

$$\leqslant z^{1-\beta+\gamma}\int_0^t \left\|A^2(t)\exp\{-zA(t)\}v(t,s)\right\|_{E\to E}\|f(t)-f(s)\|_E\,ds \leqslant$$

$$\leqslant Mz^{1-\beta+\gamma}\int_0^t \min\left[\frac{1}{z^2},\frac{1}{(t-s)^2}\right](t-s)^{\beta}t^{-\gamma}ds\,\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant M_1z^{1-\beta+\gamma}\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta}ds}{(z+t-s)^2t^{\gamma}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Пусть сначала $z \leqslant t$, тогда

$$z^{1-\beta+\gamma}\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta}ds}{(z+t-s)^2t^{\gamma}} \leqslant z^{1-\beta}\int_0^t \frac{ds}{(z+t-s)^{2-\beta}} \leqslant \frac{1}{1-\beta}.$$

Пусть теперь $z > t$, тогда

$$z^{1-\beta+\gamma}\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta}ds}{(z+t-s)^2t^{\gamma}} \leqslant \frac{1}{z^{\beta-\gamma}t^{\gamma}}\int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{1-\beta}} = \frac{t^{\beta-\gamma}}{\beta z^{\beta-\gamma}} < \frac{1}{\beta}.$$

Поэтому для любого $z > 0$

$$z^{1-\beta+\gamma}\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta}ds}{(z+t-s)^2t^{\gamma}} \leqslant \frac{1}{\beta(1-\beta)}.$$

Итак, установили оценку

$$\|W_1(t)\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{M_1}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Отсюда имеем

$$\|W_1\|_{C(E_{\beta-\gamma})} \leqslant \frac{M_1}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}. \qquad (2.2)$$

Теперь оценим $W_1(t)$ в $C_0^{\beta,\gamma}(E)$. Для этого установим оценки

$$\|W_1(t)\|_E \leqslant \frac{M}{\beta}||f||_{C_0^{\beta,\gamma}(E)},\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \qquad (2.3)$$

$$\|W_1(t+\tau) - W_1(t)\|_E \leqslant \frac{M\tau^{\beta}}{\beta(1-\beta)(t+\tau)^{\gamma}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)},\ 0 \leqslant t < t+\tau \leqslant 1. \qquad (2.4)$$

В силу (1.8) при $\alpha = 0$ получаем

$$\|W_1(t)\|_E \leqslant \int_0^t \|A(t)v(t,s)\|_{E\to E}\|f(t)-f(s)\|_E\,ds \leqslant$$

$$\leqslant M\int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{1-\beta}t^{\gamma}}\,\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{Mt^{\beta-\gamma}}{\beta}\,\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Итак, для любого $0 \leqslant t \leqslant 1$ получена оценка

$$\|W_1(t)\|_E \leqslant \frac{Mt^{\beta-\gamma}}{\beta}\,\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}. \tag{2.5}$$

Из последнего неравенства, во-первых, следует (2.3), во-вторых, (2.4) при $t \leqslant \tau$. Действительно, в силу (2.5) и неравенства треугольника имеем

$$\|W_1(t+\tau)-W_1(t)\|_E \leqslant \|W_1(t+\tau)\|_E + \|W_1(t)\|_E \leqslant M\beta^{-1}[(t+\tau)^{\beta-\gamma}+t^{\beta-\gamma}]\,\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant$$

$$\leqslant 2M\beta^{-1}(t+\tau)^{\beta-\gamma}\,\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{M2^{1+\beta}\tau^{\beta}}{\beta(t+\tau)^{\gamma}}\,\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} = \frac{M_1\tau^{\beta}}{\beta(t+\tau)^{\gamma}}\,\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Пусть теперь $t > \tau$. Разобьем $W_1(t+\tau)-W_1(t)$ в сумму следующих интегралов:

$$W_1(t+\tau)-W_1(t) = \int_0^{t-\tau} A(t+\tau)v(t+\tau,s)ds(f(t+\tau)-f(t))+$$

$$+\int_0^{t-\tau}[A(t+\tau)v(t+\tau,s)-A(t)v(t,s)](f(t)-f(s))ds+$$

$$+\int_{t-\tau}^{t+\tau} A(t+\tau)v(t+\tau,s)(f(t+\tau)-f(s)ds-$$

$$-\int_{t-\tau}^{t} A(t)v(t,s)(f(t)-f(s)ds = I_1+I_2+I_3+I_4,$$

где

$$I_1 = \int_0^{t-\tau} A(t+\tau)v(t+\tau,s)ds(f(t+\tau)-f(t)),$$

$$I_2 = \int_0^{t-\tau}[A(t+\tau)v(t+\tau,s)-A(t)v(t,s)](f(t)-f(s))ds,$$

$$I_3 = \int_{t-\tau}^{t+\tau} A(t+\tau)v(t+\tau,s)(f(t+\tau)-f(s)ds,$$

$$I_4 = -\int_{t-\tau}^{t} A(t)v(t,s)(f(t)-f(s)ds.$$

Оценим I_1, I_2, I_3 и I_4 в отдельности. Сначала оценим I_1. Воспользовавшись тождеством

$$\int_0^{t-\tau} A(t+\tau)v(t+\tau,s)ds = A(t+\tau)[v(t+\tau,t-\tau)-v(t+\tau,0)]A^{-1}(t)+$$

$$+\int_0^{t-\tau} A(t+\tau)v(t+\tau,s)[A(t)-A(s)]A^{-1}(t)ds, \tag{2.6}$$

оценками (1.2) и (1.7), (1.8) при $\alpha = 0$, получим

$$\|I_1\|_E \leqslant [\left\|A(t+\tau)v(t+\tau,t-\tau)A^{-1}(t)\right\|_{E\to E}\left\|A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(t)\right\|_{E\to E}+$$

$$+\int\limits_0^{t-\tau}\|A(t+\tau)v(t+\tau,s)\|_{E\to E}\left\|[A(t)-A(s)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E}ds]\,\|f(t+\tau)-f(t)\|_E\leqslant$$

$$\leqslant\left[M+M_1+M_2\int\limits_0^{t-\tau}\frac{(t-s)^\varepsilon ds}{t+\tau-s}\right]\frac{\tau^\beta}{(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant$$

$$\leqslant M_3\int\limits_0^{t-\tau}\frac{\tau^\beta ds}{(t+\tau-s)^{1-\varepsilon}(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M_3\tau^\beta(t+\tau)^\varepsilon}{\varepsilon(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M_3\tau^\beta}{\beta(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Оценим теперь I_2. В силу (1.10) при $\alpha=1$ имеем

$$\|I_2\|_E\leqslant\int\limits_0^{t-\tau}\|A(t+\tau)v(t+\tau,s)-A(t)v(t,s)\|_{E\to E}\|f(t)-f(s)\|_E\leqslant$$

$$\leqslant M\left[\int\limits_0^{t-\tau}\frac{\tau^\varepsilon ds}{(t-s)^{1-\beta}}+\int\limits_0^{t-\tau}\frac{\tau ds}{(t-s)^{2-\beta}}\right]\frac{1}{t^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M_1\tau^\beta}{\beta(1-\beta)t^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M_2\tau^\beta}{\beta(1-\beta)(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Далее, воспользовавшись оценкой (1.8) при $\alpha=0$, получаем оценку для I_3,

$$\|I_3\|_E\leqslant\int\limits_{t-\tau}^{t+\tau}\|A(t+\tau)v(t+\tau,s)\|_{E\to E}\|f(t+\tau)-f(s)\|_E\,ds\leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_{t-\tau}^{t+\tau}\frac{ds}{(t+\tau-s)^{1-\beta}(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M_1\tau^\beta}{\beta(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Точно так же получаем оценку для I_4,

$$\|I_4\|_E\leqslant\int\limits_{t-\tau}^{t}\|A(t)v(t,s)\|_{E\to E}\|f(t)-f(s)\|_E\,ds\leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_{t-\tau}^{t}\frac{ds}{(t-s)^{1-\beta}t^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M_1\tau^\beta}{\beta(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Объединив оценки для I_1,I_2,I_3 и I_4, получим (2.4). Из (2.3) и (2.4) вытекает, что

$$\|W_1\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}. \tag{2.7}$$

Теперь аналогичные оценки установим для $W_2(t)$. Сначала оценим $W_2(t)$ в $C(E_{\beta-\gamma})$:

$$z^{1-(\beta-\gamma)}\|A(t)\exp\{-zA(t)\}W_2(t)\|_E\leqslant$$

$$\leqslant z^{1-\beta+\gamma}\int\limits_0^t\left\|A^2(t)\exp\{-zA(t)\}v(t,s)\right\|_{E\to E}\left\|[A(s)-A(t)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E}\|f(t)\|_E\,ds\leqslant$$

$$\leqslant z^{1-\beta+\gamma}\int\limits_0^t\min\left[\frac{1}{z^2},\frac{1}{(t-s)^2}\right](t-s)^\varepsilon ds\,\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant M_1z^{1-\beta+\gamma}\int\limits_0^t\frac{(t-s)^\varepsilon ds}{(z+t-s)^2}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Пусть $z \leqslant t$, тогда

$$z^{1-\beta+\gamma}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^\varepsilon ds}{(z+t-s)^2} \leqslant z^{1-\beta}t^\gamma \int\limits_0^t \frac{ds}{(z+t-s)^{2-\beta}} \leqslant \frac{t^\gamma}{1-\beta} \leqslant \frac{1}{1-\beta}.$$

Пусть теперь $z > t$, тогда

$$z^{1-\beta+\gamma}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^\varepsilon ds}{(z+t-s)^2} \leqslant \frac{1}{z^{\beta-\gamma}} \int\limits_0^t \frac{ds}{(t-s)^{1-\varepsilon}} = \frac{t^\varepsilon}{\varepsilon z^{\beta-\gamma}} < \frac{t^\varepsilon}{\varepsilon t^{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{1}{\beta}.$$

Поэтому для любого $z > 0$ получим

$$z^{1-\beta+\gamma}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^\varepsilon ds}{(z+t-s)^2} \leqslant \frac{1}{\beta(1-\beta)}.$$

Итак, установили, что

$$\|W_2(t)\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{M_1}{\beta(1-\beta)} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Отсюда получаем

$$\|W_2\|_{C(E_{\beta-\gamma})} \leqslant \frac{M_1}{\beta(1-\beta)} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}. \tag{2.8}$$

Теперь оценим $W_2(t)$ в $C_0^{\beta,\gamma}(E)$. Установим оценку

$$\|W_2\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{M}{\beta(1-\beta)} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}. \tag{2.9}$$

Для этого достаточно доказать, что

$$\|W_2(t)\|_E \leqslant \frac{M}{\beta} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)},\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{2.10}$$

$$\|W_2(t+\tau) - W_2(t)\|_E \leqslant \frac{M\tau^\beta}{\beta(1-\beta)(t+\tau)^\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}, 0 \leqslant t < t+\tau \leqslant 1. \tag{2.11}$$

Сначала установим (2.10). Воспользовавшись оценками (1.2) и (1.8) при $\alpha = 0$, получаем

$$\|W_2(t)\|_E \leqslant \int\limits_0^t \|A(t)v(t,s)\|_{E\to E} \left\|[A(s)-A(t)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E} \|f(t)\|_E\, ds \leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_0^t \frac{ds}{(t-s)^{1-\varepsilon}t^\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{Mt^\varepsilon}{\varepsilon} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{Mt^{\beta-\gamma}}{\beta} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Поэтому для любого $0 \leqslant t \leqslant 1$ справедливо неравенство

$$\|W_2(t)\|_E \leqslant \frac{Mt^{\beta-\gamma}}{\beta} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}. \tag{2.12}$$

Из последнего неравенства, во-первых, следует (2.10), во-вторых, (2.11) при $t \leqslant \tau$. Действительно, в силу (2.12) и неравенства треугольника получим

$$\|W_2(t+\tau) - W_2(t)\|_E \leqslant \|W_2(t+\tau)\|_E + \|W_2(t)\|_E \leqslant M\beta^{-1}[(t+\tau)^{\beta-\gamma} + t^{\beta-\gamma}] \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant$$

$$\leqslant 2M\beta^{-1}(t+\tau)^{\beta-\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{M2^{1+\beta}\tau^\beta}{\beta(t+\tau)^\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} = \frac{M_1\tau^\beta}{\beta(t+\tau)^\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Пусть теперь $t > \tau$. Тогда представим разность $W_2(t+\tau) - W_2(t)$ в виде суммы следующих интегралов:

$$W_2(t+\tau) - W_2(t) = \int\limits_0^{t-\tau} \{A(t+\tau)v(t+\tau,s)[A(s) - A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)f(t+\tau) -$$

$$-A(t)v(t,s)[A(s)-A(t)]A^{-1}(t)f(t)\}ds+$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t+\tau} A(t+\tau)v(t+\tau,s)[A(s)-A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)f(t+\tau)ds+$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t} A(t)v(t,s)[A(s)-A(t)]A^{-1}(t)f(t)ds = I_5+I_6+I_7,$$

где

$$I_5=\int\limits_{0}^{t-\tau}\{A(t+\tau)v(t+\tau,s)[A(s)-A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)f(t+\tau)-$$

$$-A(t)v(t,s)[A(s)-A(t)]A^{-1}(t)f(t)\}ds,$$

$$I_6=\int\limits_{t-\tau}^{t+\tau} A(t+\tau)v(t+\tau,s)[A(s)-A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)f(t+\tau)ds,$$

$$I_7=\int\limits_{t-\tau}^{t} A(t)v(t,s)[A(s)-A(t)]A^{-1}(t)f(t)ds.$$

Сначала оценим I_5. Для этого преобразуем I_5 в виде

$$I_5=\int\limits_{0}^{t-\tau} A(t+\tau)v(t+\tau,s)[A(t)-A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)f(t+\tau)ds-$$

$$-\int\limits_{0}^{t-\tau}[A(t+\tau)v(t+\tau,s)-A(t)v(t,s)][A(t)-A(s)]A^{-1}(t)f(t)ds-$$

$$-\int\limits_{0}^{t-\tau} A(t+\tau)v(t+\tau,s)[A(t)-A(s)]A^{-1}(t)(f(t+\tau)-f(t))ds+$$

$$+\int\limits_{0}^{t-\tau} A(t+\tau)v(t+\tau,s)[A(t)-A(s)]A^{-1}(t)[A(t+\tau)-A(t)]A^{-1}(t+\tau)f(t+\tau)ds=$$

$$=Q_1+Q_2+Q_3+Q_4,$$

где

$$Q_1=\int\limits_{0}^{t-\tau} A(t+\tau)v(t+\tau,s)[A(t)-A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)f(t+\tau)ds,$$

$$Q_2=-\int\limits_{0}^{t-\tau}[A(t+\tau)v(t+\tau,s)-A(t)v(t,s)][A(t)-A(s)]A^{-1}(t)f(t)ds,$$

$$Q_3=-\int\limits_{0}^{t-\tau} A(t+\tau)v(t+\tau,s)[A(t)-A(s)]A^{-1}(t)(f(t+\tau)-f(t))ds,$$

$$Q_4=\int\limits_{0}^{t-\tau} A(t+\tau)v(t+\tau,s)[A(t)-A(s)]A^{-1}(t)[A(t+\tau)-A(t)]A^{-1}(t+\tau)f(t+\tau)ds.$$

Оценим Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 в отдельности. Оценим сначала Q_1. Воспользовавшись тождеством (2.6), оценками (1.2) и (1.7), (1.8) при $\alpha=0$, получаем

$$\|Q_1\|_E \leqslant \{\left\|A(t+\tau)v(t+\tau,t-\tau)A^{-1}(t)\right\|_{E\to E}+\left\|A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(t)\right\|_{E\to E}+$$

$$+\int\limits_0^{t-\tau}\|A(t+\tau)v(t+\tau,s)\|_{E\to E}\left\|[A(t)-A(s)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E}ds\}\times$$

$$\times\left\|[A(t)-A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)\right\|_{E\to E}\|f(t+\tau)\|_E\leqslant\left[M+M_1+M_2\int\limits_0^{t-\tau}\frac{(t-s)^\varepsilon ds}{t+\tau-s}\right]\tau^\varepsilon\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant$$

$$\leqslant M_3\int\limits_0^{t-\tau}\frac{\tau^\varepsilon ds}{(t+\tau-s)^{1-\varepsilon}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M_3\tau^\beta}{\beta(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Точно так же получаем оценки для Q_3 и Q_4:

$$\|Q_3\|_E\leqslant\int\limits_0^{t-\tau}\|A(t+\tau)v(t+\tau,s)\|_{E\to E}\left\|[A(t)-A(s)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E}\|f(t+\tau)-f(t)\|_E\leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_0^{t-\tau}\frac{(t-s)^\varepsilon\tau^\beta ds}{(t+\tau-s)(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant M\int\limits_0^{t-\tau}\frac{\tau^\beta ds}{(t+\tau-s)^{1-\varepsilon}(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M(t+\tau)^\varepsilon\tau^\beta}{\varepsilon(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M\tau^\beta}{\beta(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)},$$

$$\|Q_4\|_E\leqslant\int\limits_0^{t-\tau}\|A(t+\tau)v(t+\tau,s)\|_{E\to E}\left\|[A(t)-A(s)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E}ds\times$$

$$\times\left\|[A(t+\tau)-A(t)]A^{-1}(t+\tau)\right\|_{E\to E}\|f(t+\tau)\|_E\leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_0^{t-\tau}\frac{(t-s)^\varepsilon\tau^\varepsilon ds}{t+\tau-s}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant M\int\limits_0^{t-\tau}\frac{\tau^\varepsilon ds}{(t+\tau-s)^{1-\varepsilon}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M(t+\tau)^\varepsilon\tau^\varepsilon}{\varepsilon}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M\tau^\beta}{\beta(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Наконец, оценим Q_2. В силу (1.2) и (1.10) при $\alpha=1$ имеем

$$\|Q_2\|_E\leqslant\int\limits_0^{t-\tau}\|A(t+\tau)v(t+\tau,s)-A(t)v(t,s)\|_{E\to E}\left\|[A(t)-A(s)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E}\|f(t)\|_E\,ds\leqslant$$

$$\leqslant M\left[\int\limits_0^{t-\tau}\frac{\tau^\varepsilon ds}{(t-s)^{1-\varepsilon}}+\int\limits_0^{t-\tau}\frac{\tau ds}{(t-s)^{2-\varepsilon}}\right]\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant M\left[\frac{\tau^\varepsilon t^\varepsilon}{\varepsilon}+\int\limits_0^{t-\tau}\frac{\tau ds}{(t-s)^{2-\beta}}\right]\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant$$

$$\leqslant M\left[\frac{\tau^\beta t^\varepsilon}{\beta}+\frac{\tau}{(1-\beta)\tau^{1-\beta}}\right]\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M\tau^\beta}{\beta(1-\beta)(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Объединив оценки для Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 получим, что

$$\|I_5\|_E\leqslant\frac{M\tau^\beta}{\beta(1-\beta)(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Воспользовавшись оценками (1.2) и (1.8) при $\alpha=0$, получим оценку для I_6,

$$\|I_6\|_E\leqslant\int\limits_{t-\tau}^{t+\tau}\|A(t+\tau)v(t+\tau,s)\|_{E\to E}\left\|[A(s)-A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)\right\|_{E\to E}\|f(t+\tau)\|_E\,ds\leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_{t-\tau}^{t+\tau}\frac{ds}{(t+\tau-s)^{1-\varepsilon}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M(t+\tau)^\varepsilon\tau^\varepsilon}{\varepsilon(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M\tau^\beta}{\beta(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Точно так же оцениваем I_7:

$$\|I_7\|_E \leqslant \int\limits_{t-\tau}^{t} \|A(t)v(t,s)\|_{E\to E} \left\|[A(s)-A(t)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E} \|f(t)\|_E \, ds \leqslant$$

$$\leqslant M \int\limits_{t-\tau}^{t} \frac{ds}{(t-s)^{1-\varepsilon}} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{M(t+\tau)^\gamma \tau^\varepsilon}{\varepsilon(t+\tau)^\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{M\tau^\beta}{\beta(t+\tau)^\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Объединив оценки для I_1, I_2, I_3 и I_4, получаем (2.11).

Оценим теперь $W_3(t)$ в $C(E_{\beta-\gamma})$ и $C_0^{\beta,\gamma}(E)$. Сначала оценим $W_3(t)$ в $C(E_{\beta-\gamma})$. Воспользовавшись оценками (1.5) и (1.7), получаем

$$z^{1-(\beta-\gamma)} \|A(t)\exp\{-zA(t)\}W_3(t)\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \left\|z^{1-(\beta-\gamma)}A^{1-(\beta-\gamma)}(t)\exp\{-zA(t)\}\right\|_{E\to E} \left\|A^{1+\beta-\gamma}(t)v(t,0)A^{-1}(0)\right\|_{E\to E} \|f(t)-f(0)\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Mt^{\beta-\gamma}}{t^{\beta-\gamma}} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} = M \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Отсюда для любого $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$\|W_3(t)\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant M \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Поэтому

$$\|W_3\|_{C(E_{\beta-\gamma})} \leqslant M \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}. \tag{2.13}$$

Теперь оценим $W_3(t)$ в норме $C_0^{\beta,\gamma}(E)$. В силу (1.7) при $\alpha = 0$ имеем

$$\|W_3(t)\|_E \leqslant \left\|A(t)v(t,0)A^{-1}(0)\right\|_{E\to E} \|f(t)-f(0)\|_E \leqslant Mt^{\beta-\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)},$$

т. е.

$$\|W_3(t)\|_E \leqslant Mt^{\beta-\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Отсюда, во-первых, следует оценка

$$\|W_3(t)\|_E \leqslant M \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}, \ 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{2.14}$$

во-вторых,

$$\|W_3(t+\tau) - W_3(t)\|_E \leqslant \frac{M\tau^\beta}{(t+\tau)^\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}, 0 \leqslant t < t+\tau \leqslant 1, \tag{2.15}$$

при $t \leqslant \tau$. Действительно,

$$\|W_3(t+\tau) - W_3(t)\|_E \leqslant \|W_3(t+\tau)\|_E + \|W_3(t)\|_E \leqslant M[(t+\tau)^{\beta-\gamma} + t^{\beta-\gamma}] \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant$$

$$\leqslant 2M(t+\tau)^{\beta-\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{M2^{1+\beta}\tau^\beta}{(t+\tau)^\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} = \frac{M_1\tau^\beta}{(t+\tau)^\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Пусть теперь $t > \tau$, тогда преобразуем разность $W_3(t+\tau) - W_3(t)$ в виде

$$W_3(t+\tau) - W_3(t)_E = A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)(f(t+\tau) - f(t)) +$$

$$+[A(t+\tau)v(t+\tau,0) - A(t)v(t,0)]A^{-1}(0)(f(t) - f(0)) = I_8 + I_9,$$

где

$$I_8 = A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)(f(t+\tau) - f(t)),$$

$$I_9 = [A(t+\tau)v(t+\tau,0) - A(t)v(t,0)]A^{-1}(0)(f(t) - f(0)).$$

Воспользовавшись формулой (1.7) при $\alpha = 0$, оценим I_8:

$$\|I_8\|_E \leqslant \left\|A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)\right\|_{E\to E} \|f(t+\tau) - f(t)\|_E \leqslant \frac{M\tau^\beta}{(t+\tau)^\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Далее, воспользовавшись оценкой (1.11), оценим I_9:

$$\|I_9\|_E \leqslant \left\|[A(t+\tau)v(t+\tau,0) - A(t)v(t,0)]A^{-1}(0)\right\|_{E\to E} \|f(t) - f(0)\|_E \leqslant$$

$$\leqslant M\left(\tau^\varepsilon+\frac{\tau^\beta}{t^\beta}\right)t^{\beta-\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant M\left(\frac{\tau^\varepsilon t^\beta}{t^\gamma}+\frac{\tau^\beta}{t^\gamma}\right)\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant$$
$$\leqslant M\left(\frac{2^\gamma\tau^\beta t^\beta}{(t+\tau)^\gamma}+\frac{2^\gamma\tau^\beta}{(t+\tau)^\gamma}\right)\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M2^{1+\gamma}\tau^\beta}{(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}=\frac{M_1\tau^\beta}{(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Объединив оценки для I_8 и I_9, получаем (2.15). В силу (2.14) и (2.15) имеем

$$\|W_3\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant M\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}. \tag{2.16}$$

Теперь аналогичные оценки установим и для $W_4(t)$. Сначала оценим $W_4(t)$ в норме $C(E_{\beta-\gamma})$. В силу (1.2), (1.5) и (1.7) имеем

$$z^{1-(\beta-\gamma)}\|A(t)\exp\{-zA(t)\}W_4(t)\|_E\leqslant$$
$$\leqslant\left\|z^{1-(\beta-\gamma)}A^{1-(\beta-\gamma)}(t)\exp\{-zA(t)\}\right\|_{E\to E}\left\|A^{1+\beta-\gamma}(t)v(t,0)A^{-1}(0)\right\|_{E\to E}\times$$
$$\times\left\|[A(0)-A(t)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E}\|f(t)\|_E\leqslant\frac{Mt^\varepsilon}{t^{\beta-\gamma}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant M\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Отсюда для любого $0\leqslant t\leqslant 1$ получаем

$$\|W_4(t)\|_{E_{\beta-\gamma}}\leqslant M\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Поэтому

$$\|W_4\|_{C(E_{\beta-\gamma})}\leqslant M\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}. \tag{2.17}$$

Оценим теперь $W_4(t)$ в норме $C_0^{\beta,\gamma}(E)$, т. е. установим оценку

$$\|W_4\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant M\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}. \tag{2.18}$$

Для этого достаточно доказать, что

$$\|W_4(t)\|_E\leqslant M\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)},\ 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{2.19}$$

$$\|W_4(t+\tau)-W_4(t)\|_E\leqslant\frac{M\tau^\beta}{(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)},\ 0\leqslant t<t+\tau\leqslant 1. \tag{2.20}$$

Сначала установим (2.19). Воспользовавшись оценками (1.2) и (1.7), при $\alpha=0$ получаем

$$\|W_4(t)\|_E\leqslant\left\|A(t)v(t,0)A^{-1}(0)\right\|_{E\to E}\left\|[A(0)-A(t)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E}\|f(t)\|_E\leqslant$$
$$\leqslant Mt^\varepsilon\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant Mt^{\beta-\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Поэтому

$$\|W_4(t)\|_E\leqslant Mt^{\beta-\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \tag{2.21}$$

при любом $0\leqslant t\leqslant 1$. Из последнего неравенства, во-первых, следует (2.19), во-вторых, (2.20) при $t\leqslant\tau$. Действительно, в силу (2.21) и неравенства треугольника имеем

$$\|W_4(t+\tau)-W_4(t)\|_E\leqslant\|W_4(t+\tau)\|_E+\|W_4(t)\|_E\leqslant M[(t+\tau)^{\beta-\gamma}+t^{\beta-\gamma}]\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant$$
$$\leqslant 2M(t+\tau)^{\beta-\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M2^{1+\beta}\tau^\beta}{(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}=\frac{M_1\tau^\beta}{(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Пусть теперь $t>\tau$, тогда представим разность $W_4(t+\tau)-W_4(t)$ в виде

$$W_4(t+\tau)-W_4(t)=A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)[A(0)-A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)(f(t+\tau)-f(t))+$$
$$+A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)[A(t)-A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)f(t)+$$
$$+A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)[A(0)-A(t)]A^{-1}(t+\tau)[A(t)-A(t+\tau)]A^{-1}(t)f(t)+$$
$$+[A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)-A(t)v(t,0)A^{-1}(0)][A(0)-A(t)]A^{-1}(t)f(t)=$$
$$=I_{10}+I_{11}+I_{12}+I_{13},$$

где

$$I_{10}=A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)[A(0)-A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)(f(t+\tau)-f(t)),$$
$$I_{11}=A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)[A(t)-A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)f(t),$$
$$I_{12}=A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)[A(0)-A(t)]A^{-1}(t+\tau)[A(t)-A(t+\tau)]A^{-1}(t)f(t),$$

$$I_{13} = [A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0) - A(t)v(t,0)A^{-1}(0)][A(0) - A(t)]A^{-1}(t)f(t).$$

Оценим I_{10}, I_{11}, I_{12} и I_{13} в отдельности. Сперва оценим I_{10}. В силу (1.2) и (1.7) при $\alpha = 0$ имеем

$$\|I_{10}\|_E \leqslant \left\|A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)\right\|_{E\to E} \left\|[A(0) - A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)\right\|_{E\to E} \|f(t+\tau) - f(t)\|_E \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M\tau^\beta(t+\tau)^\varepsilon}{(t+\tau)^\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{M\tau^\beta}{(t+\tau)^\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Точно так же оцениваем I_{11} и I_{12}:

$$\|I_{11}\|_E \leqslant \left\|A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)\right\|_{E\to E} \left\|[A(t) - A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)\right\|_{E\to E} \|f(t)\|_E \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M\tau^\varepsilon(t+\tau)^\gamma}{(t+\tau)^\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{M\tau^\beta}{(t+\tau)^\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)},$$
$$\|I_{12}\|_E \leqslant \left\|A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)\right\|_{E\to E} \left\|[A(0) - A(t)]A^{-1}(t+\tau)\right\|_{E\to E} \times$$
$$\times \left\|[A(t) - A(t+\tau)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E} \|f(t)\|_E \leqslant$$
$$\leqslant Mt^\varepsilon\tau^\varepsilon \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{M\tau^\beta}{(t+\tau)^\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Наконец, воспользовавшись оценками (1.2) и (1.11), оценим I_{13}:

$$\|I_{13}\|_E \leqslant \left\|A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0) - A(t)v(t,0)A^{-1}(0)\right\|_{E\to E} \left\|[A(0) - A(t)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E} \|f(t)\|_E \leqslant$$
$$\leqslant M\left(\tau^\varepsilon + \frac{\tau^\beta}{t^\beta}\right)t^\varepsilon \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{M\tau^\beta}{(t+\tau)^\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Объединив оценки для I_{10}, I_{11}, I_{12} и I_{13}, получаем (2.20).

В конце доказательства оценим $W_5(t)$ в нормах $C(E_{\beta-\gamma})$ и $C_0^{\beta,\gamma}(E)$. Вначале оценим $W_5(t)$ в $C(E_{\beta-\gamma})$. Преобразуем $W_5(t)$ в виде

$$W_5(t) = \exp\{-tA(t)\}v_0' + \exp\{-tA(t)\}[A(t) - A(0)]A^{-1}(0)v_0' +$$
$$+ A(t)[v(t,0) - \exp\{-tA(t)\}]A^{-1}(0)v_0' = F_1(t) + F_2(t) + F_3(t), \tag{2.22}$$

где

$$F_1(t) = \exp\{-tA(t)\}v_0',$$
$$F_2(t) = \exp\{-tA(t)\}[A(t) - A(0)]A^{-1}(0)v_0',$$
$$F_3(t) = A(t)[v(t,0) - \exp\{-tA(t)\}]A^{-1}(0)v_0'.$$

Сначала оценим $F_1(t)$. В силу (1.3) имеем

$$\|F_1(t)\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \|\exp\{-tA(t)\}\|_{E\to E} \left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant M\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Отсюда

$$\|F_1\|_{C(E_{\beta-\gamma})} \leqslant M\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}. \tag{2.23}$$

Воспользовавшись оценками (1.2) и (1.4) при $\alpha = 0$, получаем оценку для $F_2(t)$:

$$z^{1-(\beta-\gamma)} \|A(t)\exp\{-zA(t)\}F_2(t)\|_E \leqslant$$
$$\leqslant z^{1-(\beta-\gamma)} \|A(t)\exp\{-(z+t)A(t)\}\|_{E\to E} \left\|[A(t) - A(0)]A^{-1}(0)\right\|_{E\to E} \left\|v_0'\right\|_E \leqslant$$
$$\leqslant \frac{Mz^{1-(\beta-\gamma)}t^\varepsilon}{z+t} \left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant M\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Итак, для любого $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$\|F_2(t)\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant M\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Отсюда

$$\|F_2\|_{C(E_{\beta-\gamma})} \leqslant M\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}. \tag{2.24}$$

Наконец, оцениваем $F_3(t)$ в $C(E_{\beta-\gamma})$. Пусть сначала $z \leqslant t$, тогда в силу (1.3) и (1.9) при $\alpha = 1$ имеем

$$z^{1-(\beta-\gamma)} \|A(t)\exp\{-zA(t)\}F_3(t)\|_E \leqslant$$
$$\leqslant z^{1-(\beta-\gamma)} \|\exp\{-zA(t)\}\|_{E\to E} \left\|A^2(t)[v(t,0) - \exp\{-tA(t)\}]A^{-1}(0)\right\|_{E\to E} \left\|v_0'\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant Mt^{1-(\beta-\gamma)}t^{\varepsilon-1}\left\|v_0'\right\|_E = Mt^{\varepsilon-\beta+\gamma}\left\|v_0'\right\|_E \leqslant M\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}. \tag{2.25}$$

Пусть теперь $z > t$, тогда воспользовавшись оценками (1.4) и (1.9) при $\alpha = 0$, получим

$$z^{1-(\beta-\gamma)}\left\|A(t)\exp\{-zA(t)\}F_3(t)\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{z}{t^{\beta-\gamma}}\left\|A(t)\exp\{-zA(t)\}\right\|_{E\to E}\left\|A(t)[v(t,0)-\exp\{-tA(t)\}]A^{-1}(0)\right\|_{E\to E}\left\|v_0'\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Mt^{\varepsilon}}{t^{\beta-\gamma}}\|v_0'\|_E = Mt^{\varepsilon-\beta+\gamma}\left\|v_0'\right\|_E \leqslant M\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}. \tag{2.26}$$

Из (2.25) и (2.26) следует, что при любом $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$\|F_3(t)\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant M\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Отсюда

$$\|F_3\|_{C(E_{\beta-\gamma})} \leqslant M\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}. \tag{2.27}$$

Используя оценки (2.23), (2.24) и (2.27), получаем для $W_5(t)$ неравенство

$$\|W_5\|_{C(E_{\beta-\gamma})} \leqslant M\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}. \tag{2.28}$$

Теперь оценим $W_5(t)$ в норме $C_0^{\beta,\gamma}(E)$, т. е. докажем оценку

$$\|W_5\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{M}{\beta-\gamma}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}. \tag{2.29}$$

Для этого достаточно установить, что

$$\|W_5(t)\|_E \leqslant M\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}},\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{2.30}$$

$$\|W_5(t+\tau) - W_5(t)\|_E \leqslant \frac{M\tau^{\beta}}{(\beta-\gamma)\,(t+\tau)^{\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}},\ 0 \leqslant t < t+\tau \leqslant 1. \tag{2.31}$$

Сначала установим неравенство (2.30). В силу (1.7) при $\alpha = 0$ имеем

$$\|W_5(t)\|_E \leqslant \left\|A(t)v(t,0)A^{-1}(0)\right\|_{E\to E}\left\|v_0'\right\|_E \leqslant M\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Далее, установим (2.31). Пусть $t \leqslant \tau$, тогда воспользовавшись тождеством (2.22), оценим сначала разность $F_1(t+\tau) - F_1(t)$. Преобразуем разность $F_1(t+\tau) - F_1(t)$ в виде

$$F_1(t+\tau) - F_1(t) = [\exp\{-(t+\tau)A(t+\tau)\} - \exp\{-(t+\tau)A(t)\}]v_0' +$$
$$+[\exp\{-(t+\tau)A(t)\} - \exp\{-tA(t)\}]v_0' = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Вначале оценим Δ_1. В силу (1.6) имеем

$$\|\Delta_1\|_E \leqslant \left\|\exp\{-(t+\tau)A(t+\tau)\} - \exp\{-(t+\tau)A(t)\}\right\|_{E\to E}\left\|v_0'\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant M\tau^{\varepsilon}\left\|v_0'\right\|_E \leqslant \frac{M\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}. \tag{2.32}$$

Теперь оценим Δ_2:

$$\|\Delta_2\|_E \leqslant \left\|[\exp\{-(t+\tau)A(t)\} - \exp\{-tA(t)\}]v_0'\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{\tau}\left\|A(t)\exp\{-(t+s)A(t)\}v_0'\right\|_E ds \leqslant M\int\limits_0^{\tau}\frac{ds}{(t+s)^{1-\beta+\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_1\tau^{\beta}}{(\beta-\gamma)\,(t+\tau)^{\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}. \tag{2.33}$$

Из (2.32) и (2.33) следует, что

$$\|F_1(t+\tau) - F_1(t)\|_E \leqslant \frac{M_1\tau^{\beta}}{(\beta-\gamma)\,(t+\tau)^{\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}},\ 0 \leqslant t < t+\tau \leqslant 1. \tag{2.34}$$

Теперь оценим разность $F_2(t+\tau) - F_2(t)$ при $t \leqslant \tau$. Сначала воспользовавшись оценками (1.2) и (1.3), оценим $F_2(t)$ в норме E:

$$\|F_2(t)\|_E \leqslant \|\exp\{-tA(t)\}\|_{E\to E}\left\|[A(t)-A(0)]A^{-1}(0)\right\|_{E\to E}\left\|v_0'\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant Mt^{\varepsilon}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant Mt^{\beta-\gamma}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Итак,

$$\|F_2(t)\|_E \leqslant Mt^{\beta-\gamma}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}. \tag{2.35}$$

Отсюда следует оценка

$$\|F_2(t+\tau)-F_2(t)\|_E \leqslant \frac{M_1\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}},\ 0\leqslant t<t+\tau\leqslant 1. \tag{2.36}$$

Действительно, в силу (2.35) и неравенства треугольника имеем

$$\|F_2(t+\tau)-F_2(t)\|_E \leqslant \|F_2(t+\tau)\|_E+\|F_2(t)\|_E \leqslant M[(t+\tau)^{\beta-\gamma}+t^{\beta-\gamma}]\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant$$

$$\leqslant 2M(t+\tau)^{\beta-\gamma}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{M2^{1+\beta}\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{M_1\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Наконец, оценим разность $F_3(t+\tau)-F_3(t)$. Для этого сначала $F_3(t)$ оценим в E:

$$\|F_3(t)\|_E \leqslant \|\exp\{-tA(t)\}\|_{E\to E}\left\|A(t)[v(t,0)-\exp\{-tA(t)\}]A^{-1}(0)\right\|_{E\to E}\left\|v_0'\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant Mt^{\varepsilon}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant Mt^{\beta-\gamma}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Отсюда в силу неравенства треугольника получаем оценку

$$\|F_3(t+\tau)-F_3(t)\|_E \leqslant \frac{M_1\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}, 0\leqslant t<t+\tau\leqslant 1. \tag{2.37}$$

Используя оценки (2.34), (2.36) и (2.37), получим (2.31).

Пусть теперь $t>\tau$. Преобразуем разность $W_5(t+\tau)-W_5(t)$ в виде

$$W_5(t+\tau)-W_5(t)=[A(t+\tau)-A(t)]v(t+\tau,0)A^{-1}(0)v_0'+A(t)[v(t+\tau,0)-v(t,0)]A^{-1}(0)v_0'=$$

$$=I_{14}+I_{15},$$

где

$$I_{14}=[A(t+\tau)-A(t)]v(t+\tau,0)A^{-1}(0)v_0',$$

$$I_{15}=A(t)[v(t+\tau,0)-v(t,0)]A^{-1}(0)v_0'.$$

Оценим I_{14} и I_{15} в отдельности. Воспользовавшись оценками (1.2) и (1.7), для I_{14} получим

$$\|I_{14}\|_E \leqslant \left\|[A(t+\tau)-A(t)]A^{-1}(t+\tau)\ \right\|_{E\to E}\left\|A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)\right\|_{E\to E}\left\|v_0'\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant M\tau^{\varepsilon}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{M\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Далее, оценим I_{15}. Воспользовавшись тождеством

$$v(t+\tau,0)-v(t,0)=[v(t+\tau,t)-I]v(t,0),$$

где

$$v(t+\tau,t)-I=\exp\{-\tau A(t)\}-I+\int\limits_t^{t+\tau}v(t+\tau,t_1)[A(t)-A(t_1)]\exp\{-(t_1-t)A(t)\}dt_1=$$

$$=-\int\limits_0^{\tau}A(t)\exp\{-t_1A(t)\}dt_1+\int\limits_t^{t+\tau}v(t+\tau,t_1)[A(t)-A(t_1)]\exp\{-(t_1-t)A(t)\}dt_1,$$

преобразуем I_{15} в виде

$$I_{15}=-\int\limits_0^{\tau}A(t)\exp\{-(t+t_1)A(t)\}v_0'dt_1-\int\limits_0^{\tau}A(t)\exp\{-(t+t_1)A(t)\}[A(t)-A(0)]A^{-1}(0)v_0'dt_1-$$

$$-\int\limits_0^{\tau}\exp\{-t_1A(t)\}A^2(t)[v(t,0)-\exp\{-tA(t)\}]A^{-1}(0)v_0'dt_1+$$

$$+\int\limits_t^{t+\tau} A(t)v(t+\tau,t_1)[A(t)-A(t_1)]\exp\{-(t_1-t)A(t)\}v(t,0)A^{-1}(0)v_0'dt_1 = \Delta_3+\Delta_4+\Delta_5+\Delta_6,$$

где

$$\Delta_3 = -\int\limits_0^{\tau} A(t)\exp\{-(t+t_1)A(t)\}v_0'dt_1,$$

$$\Delta_4 = -\int\limits_0^{\tau} A(t)\exp\{-(t+t_1)A(t)\}[A(t)-A(0)]A^{-1}(0)v_0'dt_1,$$

$$\Delta_5 = -\int\limits_0^{\tau} \exp\{-t_1A(t)\}A^2(t)[v(t,0)-\exp\{-tA(t)\}]A^{-1}(0)v_0'dt_1,$$

$$\Delta_6 = \int\limits_t^{t+\tau} A(t)v(t+\tau,t_1)[A(t)-A(t_1)]\exp\{-(t_1-t)A(t)\}v(t,0)A^{-1}(0)v_0'dt_1.$$

Сначала оценим Δ_3:

$$\|\Delta_3\|_E \leqslant \int\limits_0^{\tau} \left\|(t+t_1)^{1-\beta+\gamma}A(t)\exp\{-(t+t_1)A(t)\}v_0'\right\|_E (t+t_1)^{\beta-\gamma-1}dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{\tau} \frac{dt_1}{(t+t_1)^{1-\beta+\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{\tau}{t^{1-\beta+\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{2^\gamma\tau^{1-\beta}\tau^\beta}{t^{1-\beta}(t+\tau)^\gamma}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{M_1\tau^\beta}{(t+\tau)^\gamma}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Теперь воспользовавшись оценками (1.2) и (1.4) при $\alpha=0$, оценим Δ_4:

$$\|\Delta_4\|_E \leqslant \int\limits_0^{\tau} \|A(t)\exp\{-(t+t_1)A(t)\}\|_{E\to E}\left\|[A(t)-A(0)]A^{-1}(0)\right\|_{E\to E}\left\|v_0'\right\|_E dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{\tau} \frac{t^\varepsilon dt_1}{t+t_1}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{M\tau t^\varepsilon}{t}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{M\tau^{1-\beta}\tau^\beta}{t^{1-\beta}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{M\tau^\beta}{(t+\tau)^\gamma}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Для Δ_5 имеем

$$\|\Delta_5\|_E \leqslant \int\limits_0^{\tau} \|\exp\{-t_1A(t)\}\|_{E\to E}\left\|A^2(t)[v(t,0)-\exp\{-tA(t)\}]A^{-1}(0)\right\|_{E\to E}\left\|v_0'\right\|_E dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M\tau}{t^{1-\varepsilon}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{M\tau^{1-\beta}\tau^\beta}{t^{1-\beta}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{M\tau^\beta}{(t+\tau)^\gamma}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Наконец, оценим Δ_6. В силу (1.2), (1.3) и (1.7), (1.8) при $\alpha=0$ получаем

$$\|\Delta_6\|_E \leqslant \int\limits_t^{t+\tau} \|A(t)v(t+\tau,t_1)\|_{E\to E}\left\|[A(t)-A(t_1)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E}\|\exp\{-(t_1-t)A(t)\}\|_{E\to E}dt_1\times$$

$$\times\left\|A(t)v(t,0)A^{-1}(0)\right\|_{E\to E}\left\|v_0'\right\|_E \leqslant M\int\limits_t^{t+\tau}\frac{|t-t_1|^\varepsilon dt_1}{t+\tau-t_1}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_t^{t+\tau}\frac{dt_1}{(t+\tau-t_1)^{1-\varepsilon}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant M\varepsilon^{-1}\tau^\varepsilon\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{M\tau^\beta}{(\beta-\gamma)\,(t+\tau)^\gamma}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Объединив оценки для $\Delta_3, \Delta_4, \Delta_5$ и Δ_6 получаем, что

$$\|I_{15}\|_E \leqslant \frac{M\tau^\beta}{(\beta-\gamma)\,(t+\tau)^\gamma}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Наконец, объединив оценки для I_{14} и I_{15}, получаем (2.31).

Используя оценки (2.2), (2.8), (2.13), (2.17) и (2.28), получим оценку для $v'(t)$ в норме $C(E_{\beta-\gamma})$, т. е.

$$\left\|v'\right\|_{C(E_{\beta-\gamma})} \leqslant M\left[\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} + \frac{1}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\right], \tag{2.38}$$

а используя оценки (2.7), (2.9), (2.16), (2.18) и (2.29), получим оценку для $v'(t)$ в норме $C_0^{\beta,\gamma}(E)$, т. е.

$$\left\|v'\right\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant M\left[\frac{1}{\beta-\gamma}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} + \frac{1}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\right]. \tag{2.39}$$

Оценку для $A(t)v(t)$ в норме $C_0^{\beta,\gamma}(E)$ получаем в силу неравенства треугольника из уравнений (1.1):

$$\|A(.)v\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant M\left[\frac{1}{\beta-\gamma}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} + \frac{1}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\right]. \tag{2.40}$$

Остается, используя оценки (2.38), (2.39) и (2.40), получить неравенство коэрцитивности (2.1). Теорема доказана. □

3. Следствие

Теорема 3.1. *Пусть* $A(0)v_0 = f(0)$, $f(t) \in C_0^{\beta,\gamma}(E)$ *при некоторых* $0 \leqslant \gamma \leqslant \beta < \varepsilon \leqslant 1$, $0 < \beta < 1$. *Тогда задача* (1.1) *коэрцитивно разрешима в* $C_0^{\beta,\gamma}(E)$ *и для ее единственного решения* $v(t)$ *справедливо неравенство коэрцитивности*

$$\left\|v'\right\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} + \|A(.)v\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{M}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}$$

с постоянной M, *не зависящей от* β, γ *и* $f(t)$.

Если в доказанной теореме $\beta = \alpha$ и $\gamma = 0$, тогда получаем (см. [1]):

Теорема 3.2. *Пусть* $v_0' = f(0) - A(0)v_0 \in E_\alpha$, $f(t) \in C^\alpha(E)$ *при некоторых* $0 < \alpha < \varepsilon \leqslant 1$. *Тогда задача* (1.1) *коэрцитивно разрешима в* $C^\alpha(E)$ *и для ее единственного решения* $v(t)$ *справедливо неравенство коэрцитивности*

$$\left\|v'\right\|_{C^\alpha(E)} + \|A(.)v\|_{C^\alpha(E)} + \left\|v'\right\|_{C(E_\alpha)} \leqslant M\left[\frac{1}{\alpha}\left\|v_0'\right\|_{E_\alpha} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C^\alpha(E)}\right],$$

где M *не зависит от* α, v_0' *и* $f(t)$.

Теорема 3.3. *Пусть* $A(0)v_0 = f(0)$, $f(t) \in C^\alpha(E)$ *при некоторых* $0 < \alpha < \varepsilon \leqslant 1$. *Тогда задача* (1.1) *коэрцитивно разрешима в* $C^\alpha(E)$ *и справедливо неравенство коэрцитивности*

$$\left\|v'\right\|_{C^\alpha(E)} + \|A(.)v\|_{C^\alpha(E)} \leqslant \frac{M}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C^\alpha(E)},$$

где M *не зависит от* α *и* $f(t)$.

Теперь введем банахово пространство $E_0^{\beta,\gamma}$, состоящее из элементов $w \in E$, для которых конечна норма

$$|w|_0^{\beta,\gamma} = \max_{0\leqslant z\leqslant 1}\left\|e^{-zA(t)}w\right\|_E + \sup_{0\leqslant z<z+\tau\leqslant 1}\tau^{-\beta}(z+\tau)^\gamma\left\|(e^{-(z+\tau)A(t)} - e^{-zA(t)})w\right\|_E.$$

Тогда справедлива следующая теорема [10]:

Теорема 3.4. *Пусть* $v_0' = f(0) - A(0)v_0 \in E_0^{\beta,\gamma}$, $f(t) \in C_0^{\beta,\gamma}(E)$ *при некоторых* $0 \leqslant \gamma \leqslant \beta$, $0 < \beta < \varepsilon \leqslant 1$. *Тогда задача* (1.1) *коэрцитивно разрешима в* $C_0^{\beta,\gamma}(E)$ *и для ее единственного решения* $v(t)$ *справедливо неравенство коэрцитивности*

$$\|v'\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} + \|A(.)v\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant M\left[|v_0'|_0^{\beta,\gamma} + \frac{1}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\right]$$

с M, *не зависящей от* β, γ, v_0' *и* $f(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ашыралыев А., Ханалыев А.* Коэрцитивная оценка в гельдеровых нормах для параболических уравнений с переменным оператором// В сб.: «Моделирование процессов разработки газовых месторождений и прикладные задачи теоретической газогидродинамики». — Ашгабат: Ылым, 1998. — С. 154–162.
2. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.
3. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
4. *Крейн С. Г., Хазан М. И.* Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве// Итоги науки и техн. Сер. мат. анал. — 1983. — *21*. — С. 130–264.
5. *Соболевский П. Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве// Труды Моск. мат. об-ва. — 1961. — *10*. — С. 297–350.
6. *Соболевский П. Е.* Неравенства коэрцитивности для абстрактных параболических уравнений// Докл. АН СССР. — 1964. — *157*, № 1. — С. 52–55.
7. *Соболевский П. Е.* О дробных нормах в банаховом пространстве, порожденных неограниченным оператором// Усп. мат. наук. — 1964. — *19*, № 6. — С. 219–222.
8. *Рудецкий В. А.* Коэрцитивная разрешимость параболических уравнений в интерполяционных пространствах// ВИНИТИ № 34-85 Деп. — ВГУ, 1984. — Ржмат 751102, 1985.
9. *Ashyralyev A., Hanalyev A., Sobolevskii P. E.* Coercive solvability of the nonlocal boundary-value problem for parabolic differential equations// Abstr. Appl. Anal. — 2001. — *6*, № 1. — С. 53–61.
10. *Ashyralyev A., Sobolevskii P. E.* New difference schemes for partial differential equations. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2004.

А. Р. Ханалыев
Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: asker-hanalyyew@rambler.ru

UDC 517.9

On Coercive Solvability of Parabolic Equations with Variable Operator

© 2016 **A. R. Hanalyev**

Abstract. In a Banach space E, the Cauchy problem

$$v'(t) + A(t)v(t) = f(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),\ v(0) = v_0$$

is considered for a differential equation with linear strongly positive operator $A(t)$ such that its domain $D = D(A(t))$ is everywhere dense in E independently off t and $A(t)$ generates an analytic semigroup $\exp\{-sA(t)\}$ $(s \geqslant 0)$. Under some natural assumptions on $A(t)$, we establish coercive solvability of the Cauchy problem in the Banach space $C_0^{\beta,\gamma}(E)$. We prove a stronger estimate of the solution compared to estimates known earlier, using weaker restrictions on $f(t)$ and v_0.

REFERENCES

1. A. Ashyralyev and A. Khanalyev, “Koertsitivnaya otsenka v gel’derovykh normakh dlya parabolicheskikh uravneniy s peremennym operatorom” [Coercive estimate in Hölder norms for parabolic equations with variable operator], In: *Modelirovanie protsessov razrabotki gazovykh mestorozhdeniy i prikladnye zadachi teoreticheskoy gazogidrodinamiki* [Modelling of mining processes for gas deposits and applied problems of theoretical gas-hydrodynamics], Ylym, Ashgabat, 1998, 154–162 (in Russian).
2. M. A. Krasnosel’skiy, P. P. Zabreyko, E. I. Pustyl’nik, and P. E. Sobolevskiy, *Integral’nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsiy* [Integral Operators in Spaces of Summable Functions], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
3. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial’nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
4. S. G. Kreyn and M. I. Khazan, “Differentsial’nye uravneniya v banakhovom prostranstve” [Differential equations in Banach space], *Itogi nauki i tekhn. Ser. mat. anal.* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1983, **21**, 130–264 (in Russian).
5. P. E. Sobolevskiy, “Ob uravneniyakh parabolicheskogo tipa v banakhovom prostranstve” [On equations of parabolic type in a Banach space], *Trudy Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1961, **10**, 297–350 (in Russian).
6. P. E. Sobolevskiy, “Neravenstva koertsitivnosti dlya abstraktnykh parabolicheskikh uravneniy” [Coercivity inequalities for abstract parabolic equations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1964, **157**, No. 1, 52–55 (in Russian).
7. P. E. Sobolevskiy, “O drobnykh normakh v banakhovom prostranstve, porozhdennykh neogranichennym operatorom” [On fractional norms generated by an unbounded operator in Banach space], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1964, **19**, No. 6, 219–222 (in Russian).
8. V. A. Rudetskiy, “Koertsitivnaya razreshimost’ parabolicheskikh uravneniy v interpolyatsionnykh prostranstvakh” [Coercive solvability of parabolic equations in interpolation spaces], VINITI No. 34-85 Dep., VGU, 1984, Rzhmat 751102, 1985 (in Russian).
9. A. Ashyralyev and A. Hanalyev, and P. E. Sobolevskii, “Coercive solvability of the nonlocal boundary-value problem for parabolic differential equations,” *Abstr. Appl. Anal.*, 2001, **6**, No. 1, 53–61.
10. A. Ashyralyev and P. E. Sobolevskii, *New Difference Schemes for Partial Differential Equations*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2004.

A. R. Hanalyev
RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., Moscow, 117198 Russia
E-mail: asker-hanalyyew@rambler.ru