ISSN 2413-3639

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 60, 2016

Scientia unescamus

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Индекс журнала в каталоге подписных изданий агентства «Роспечать» — 36832

ISSN 2413-3639

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 60, 2016

Труды
Седьмой Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 22-29 августа, 2014)

Часть 3

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 60 (2016). С. 5–22

УДК 517.988.63

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЯДРАМИ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА НА ОТРЕЗКЕ

© 2016 г. **С. Н. АСХАБОВ**

Аннотация. Методом монотонных операторов в вещественных пространствах Лебега $L_p(a, b)$ доказываются глобальные теоремы о существовании, единственности, оценках и способах нахождения решения для различных классов нелинейных уравнений, содержащих оператор типа потенциала (риссов потенциал). Приведены следствия, иллюстрирующие полученные результаты.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Линейные интегральные уравнения второго рода с ядрами типа потенциала (или, что то же самое, с полярными ядрами, с ядрами, имеющими слабую особенность) в настоящее время достаточно хорошо изучены, и для них справедлива классическая теория Фредгольма (см., например, [9, с. 57], [13, с. 475]). Что касается теории нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала, то она находится в стадии становления, и в этой области опубликовано не так много работ (см., например, работы [1, 2, 11] и приведенную в них библиографию). Интерес к нелинейным интегральным уравнениям вызван не только их многочисленными и разнообразными приложениями (например, при решении задач математической физики, теории упругости и др.), но и тем, что методы и результаты теории линейных интегральных уравнений, как правило, не распространяются на соответствующие им нелинейные уравнения, т. е. имеются принципиальные различия как по методам исследования, так и по характеру получаемых результатов. Как известно, локальные свойства линейных операторов фактически полностью определяют их свойства во всем пространстве, в котором они определены, и в случае линейных уравнений основные результаты имеют место сразу для целой серии классических пространств L_p, M, C, C_0, $C_u, \ldots$ (подробнее см. [9, с. 280]). Нелинейные операторы и уравнения такими свойствами не обладают. Так, например, из непрерывности нелинейного оператора в одной точке пространства не следует его непрерывность во всем этом пространстве и, кроме того, из непрерывности нелинейного оператора на ограниченном замкнутом множестве не следует его равномерная непрерывность на этом множестве (см. [6, с. 215]). Более того, для нелинейных операторов свойства непрерывности и компактности никак не связаны между собой: нелинейный оператор может не обладать свойством непрерывности и при этом быть компактным или же быть непрерывным и не обладать свойством компактности [9, с. 371]. Поэтому в случае нелинейных уравнений картина принципиально меняется и зависит не только от выбора рассматриваемого пространства, но и от характера допускаемой нелинейности.

В работах [1–3, 5], используя метод монотонных по Браудеру—Минти операторов, для различных классов нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала специального вида доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решений в пространствах $L_p(\Gamma)$, где Γ есть вся действительная ось $\mathbb{R}$ или некоторая ее часть, либо только при $p \in (1,2]$, либо только при $p \in [2,\infty)$, в зависимости от рассматриваемого класса уравнений.

В данной работе при достаточно легко обозримых ограничениях на нелинейность для трех различных классов нелинейных интегральных уравнений, содержащих оператор типа потенциала (риссов потенциал) $(I^\alpha u)(x) = \int\limits_a^b \frac{u(s)\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}}$, $0<\alpha<1$, методом монотонных операторов установлены теоремы о существовании, единственности и оценках решений в вещественных пространствах Лебега $L_p(a,b)$ при любых значениях $p \in (1,\infty)$, независимо от рассматриваемого класса уравнений. Приведены новые примеры и следствия, иллюстрирующие полученные результаты. Изучен также вопрос о приближенном решении рассмотренных уравнений при любых, не обязательно малых (ср. [9, с. 59], [13, с. 479]), значениях параметра λ, фигурирующего перед нелинейной частью рассматриваемых уравнений. Показано, что в случае монотонных (не степенных) нелинейностей решения могут быть найдены методом последовательных приближений пикаровского типа в пространстве $L_2(a,b)$, а в случае нечетностепенных нелинейностей вида u^{p-1} решения могут быть найдены методом наискорейшего спуска в пространствах $L_p(a,b)$, где p есть любое четное число, большее двух. В рамках пространства $L_2(a,b)$ доказанные теоремы охватывают и случай линейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала.

Для удобства ссылок приведем основные определения и вспомогательные утверждения, используемые в данной работе, придерживаясь терминологии и обозначений, принятых в монографии [8].

Пусть X — вещественное банахово пространство и X^* — сопряженное с ним пространство. Обозначим через $\langle y,x\rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$, а через $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ нормы в X и X^*, соответственно.

Определение 1.1. Пусть $u,v \in X$ — произвольные элементы. Оператор $A : X \to X^*$ (т. е. действующий из X в X^*) называется:

- *монотонным*, если $\langle Au - Av, u - v\rangle \geqslant 0$;
- *строго монотонным*, если $\langle Au - Av, u - v\rangle > 0$ при $u \neq v$;
- *сильно монотонным*, если $\langle Au - Av, u - v\rangle \geqslant m \cdot \|u-v\|^2$, $m>0$;
- *равномерно монотонным*, если $\langle Au - Av, u - v\rangle \geqslant \beta(\|u-v\|)$, где β — возрастающая на $[0,\infty)$ функция такая, что $\beta(0)=0$;
- *коэрцитивным*, если $\langle Au, u\rangle \geqslant \gamma(\|u\|)\cdot\|u\|$, где $\gamma(s)$ — вещественная функция неотрицательного аргумента такая, что $\gamma(s)\to\infty$ при $s\to\infty$;
- *Липшиц-непрерывным*, если $\|Au - Av\|_* \leqslant M\cdot\|u-v\|$, $M>0$;
- *ограниченно Липшиц-непрерывным*, если $\|Au-Av\|_* \leqslant \mu(r)\cdot\|u-v\|$, где μ — неотрицательная возрастающая на $[0,\infty)$ функция, а $r = \max(\|u\|,\|v\|)$;
- *хеминепрерывным*, если вещественная функция $s \to \langle A(u+s\cdot v), w\rangle$ непрерывна на $[0,1]$ при любых фиксированных $u,v,w \in X$.

Если A — *линейный* оператор, то определение монотонного, строго монотонного и сильно монотонного оператора совпадает, соответственно, с определением *положительного, строго положительного* и *сильно положительного* (*положительно определенного*) оператора [8].

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — произвольный (не обязательно линейный) функционал.

Определение 1.2. Функционал $f : X \to \mathbb{R}$ называется *дифференцируемым по Гато*, если существует оператор $A : X \to X^*$ такой, что для всех $u,v \in X$ выполняется равенство $\lim\limits_{t\to0} \frac{f(u+t\cdot v)-f(u)}{t} = \langle Au, v\rangle$. При этом оператор A называют *градиентом* функционала f и пишут $A = \operatorname{grad} f$.

Определение 1.3. Оператор $A : X \to X^*$ называется *потенциальным*, если существует функционал $f : X \to \mathbb{R}$ такой, что оператор A является его градиентом. При этом функционал f называют *потенциалом* оператора A.

Пример 1.1 (см. [2, с. 14]). Пусть X — вещественное рефлексивное банахово пространство и $A : X \to X^*$ — линейный ограниченный симметрический оператор, т. е. $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle\ \forall u, v \in X$. Тогда A является потенциальным оператором и его потенциал $f(u) = \dfrac{1}{2}\,\langle Au, u\rangle$.

2. О положительности оператора типа потенциала

Известно [15, с. 176], какую важную основополагающую роль играют положительно определенные (по Бохнеру) функции при построении гармонического анализа и в теории локально компактных групп. С понятием положительно определенной функции тесно связано определение положительного оператора, играющего центральную роль при решении многих задач математической физики, дифференциальных и интегральных уравнений, и других (см., например, [12, 18]). В этом пункте, обобщая известные для пространства $L_2(a, b)$ результаты, мы докажем положительность оператора типа потенциала в пространствах $L_p(a, b)$, $p > 1$, что позволит нам применить к исследованию различных классов нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала метод монотонных (по Браудеру—Минти) операторов.

Рассмотрим оператор типа потенциала (риссов потенциал) $(I^\alpha u)(x) = \displaystyle\int\limits_a^b \frac{u(s)\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}}$, $0 < \alpha < 1$, в вещественных пространствах Лебега $L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$, с нормой $\|u\|_p = \left(\displaystyle\int\limits_a^b |u(x)|^p dx\right)^{1/p}$.

Далее нам понадобится хорошо известная (см., например, [14]) теорема Харди—Литтлвуда с предельным показателем и непосредственное следствие из нее.

Теорема 2.1 (Харди—Литтлвуд). *Если $0 < \alpha < 1$, $1 < p < 1/\alpha$, то оператор I^α действует ограниченно из $L_p(a, b)$ в $L_q(a, b)$, где $q = p/(1 - \alpha \cdot p)$.*

Следствие 2.1. *Если $0 < \alpha < 1$, то оператор I^α действует ограниченно из пространства $L_{2/(1+\alpha)}(a, b)$ в сопряженное с ним пространство $L_{2/(1-\alpha)}(a, b)$, причем*

$$\|I^\alpha u\|_{2/(1-\alpha)} \leqslant n(\alpha)\cdot\|u\|_{2/(1+\alpha)} \quad \forall u(x) \in L_{2/(1+\alpha)}(a, b). \tag{2.1}$$

где $n(\alpha)$ есть норма оператора I^α.

В связи с теоремой 2.1 (Харди—Литтлвуда) отметим, что далее нам понадобится также простой факт (а именно — оценка (2.2), используемая в пункте 4) о том, что оператор I^α действует непрерывно из $L_p(a, b)$ в $L_p(a, b)$ при любом $p \in [1, \infty)$. Докажем это для полноты изложения. Известно (см., например, [14, с. 53]), что оператор левостороннего дробного интегрирования $\left(I^\alpha_{a+}u\right)(x) = \displaystyle\int\limits_a^x \frac{u(s)\,ds}{(x-s)^{1-\alpha}}$, $x > a$, и правостороннего дробного интегрирования $\left(I^\alpha_{b-}u\right)(x) = \displaystyle\int\limits_x^b \frac{u(s)\,ds}{(s-x)^{1-\alpha}}$, $x < b$, ограничены в $L_p(a, b)$ при любых $p \in [1, \infty)$ и $\alpha \in (0, 1)$, причем для любого $u(x) \in L_p(a, b)$ выполняются неравенства:

$$\|I^\alpha_{a+}u\|_p \leqslant (b-a)^\alpha \alpha^{-1}\|u\|_p, \qquad \|I^\alpha_{b-}u\|_p \leqslant (b-a)^\alpha \alpha^{-1}\|u\|_p.$$

Поскольку $(I^\alpha u)(x) = (I^\alpha_{a+}u)(x) + (I^\alpha_{b-}u)(x)$, то, применяя неравенство Минковского и используя последние два неравенства, непосредственно получаем:

$$\|I^\alpha u\|_p \leqslant 2(b-a)^\alpha \cdot \alpha^{-1} \cdot \|u\|_p \qquad \forall u(x) \in L_p(a, b), \quad p \geqslant 1, \tag{2.2}$$

что и требовалось.

В связи с приложениями метода монотонных операторов к нелинейным интегральным уравнениям с ядрами типа потенциала нас интересуют условия, при которых оператор I^α действует непрерывно из пространства $L_p(a, b)$, $p \in (1, \infty)$, в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(a, b)$, $p' = p/(p - 1)$, и положителен. Строгая положительность этого оператора в пространстве $L_2(a, b)$ доказана различными методами, представляющими самостоятельный интерес, в монографиях [12, с. 38] и [18, с. 175]. В специальных частных случаях строгая положительность оператора I^α в пространстве $L_2(a,b)$ ранее была установлена С. Геллерстедтом и Ф. Трикоми (см., например, [12, с. 38, 41], [14, с. 235]). Случаи пространств $L_p(a,b)$, $L_p(-\infty,\infty)$ и $L_p(0,\infty)$ с показателями p специального вида рассмотрены в монографиях [1, с. 26], [2, с. 23].

В данном пункте мы докажем непрерывность, строгую положительность и потенциальность оператора I^α в пространствах $L_p(a,b)$ при любых $p \geqslant 2/(1+\alpha)$ и тем самым обобщим упомянутые выше результаты, приведенные в монографиях [1, 2, 12, 18]. Следующая лемма, существенно используемая в данной работе при исследовании нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала, обобщает и дополняет утверждения следствия 2.1.

Лемма 2.1. *Если $0 < \alpha < 1$ и $p \geqslant 2/(1+\alpha)$, то оператор I^α действует непрерывно из пространства $L_p(a,b)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(a,b)$, $p' = p/(p-1)$, строго положителен и потенциален, причем*

$$\|I^\alpha u\|_{p'} \leqslant (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} \cdot n(\alpha) \cdot \|u\|_p \quad \forall u(x) \in L_p(a,b), \tag{2.3}$$

где $n(\alpha)$ есть норма оператора I^α, действующего ограниченно из $L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ в $L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$.

Доказательство. При $p = 2/(1+\alpha)$ и $p' = 2/(1-\alpha)$ утверждения леммы 2.1 доказаны в [2, с. 23]. Поэтому считаем далее, что $p > 2/(1+\alpha)$. Тогда справедливы непрерывные плотные вложения:

$$L_p(a,b) \subset L_{2/(1+\alpha)}(a,b) \quad \text{и} \quad L_{2/(1-\alpha)}(a,b) \subset L_{p'}(a,b). \tag{2.4}$$

Докажем первое (очевидное) вложение из (2.4). Применяя интегральное неравенство Гельдера с показателями $p(1+\alpha)/2$ и $p(1+\alpha)/[p(1+\alpha)-2]$ для любого $u(x) \in L_p(a,b)$, имеем

$$\|u\|_{2/(1+\alpha)} \leqslant (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/(2p)} \|u\|_p, \tag{2.5}$$

т. е. справедливо первое вложение из (2.4).

Аналогично, применяя неравенство Гельдера с показателями $2/[(1-\alpha)p']$ и $2/[2-(1-\alpha)p']$ для любого $u(x) \in L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$, получаем

$$\|u\|_{p'} \leqslant (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/(2p)} \|u\|_{2/(1-\alpha)} \tag{2.6}$$

(учли, что $[2-(1-\alpha)p']/(2p') = [p(1+\alpha)-2]/(2p)$), т. е. справедливо и второе вложение из (2.4).

Используя неравенства (2.1), (2.5), (2.6) и учитывая первое вложение из (2.4), имеем

$$\|I^\alpha u\|_{p'} \leqslant (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/(2p)} \|I^\alpha u\|_{2/(1-\alpha)} \leqslant (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/(2p)} n(\alpha) \cdot \|u\|_{2/(1+\alpha)} \leqslant$$
$$\leqslant (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} \cdot n(\alpha) \cdot \|u\|_p, \quad \forall u(x) \in L_p(a,b),$$

т. е. справедливо неравенство (2.3).

Таким образом, оператор I^α действует непрерывно из пространства $L_p(a,b)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(a,b)$ и ограничен. Значит, в силу интегрального неравенства Гельдера, для любого $u(x) \in L_p(a,b)$ существует и конечно выражение (число) $\langle I^\alpha u, u\rangle$. Далее, используя [12, формула (1.3.3)] и [2, теорема 3.2], получаем

$$\langle I^\alpha u, u\rangle = \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b \frac{u(s)\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}} \right) \cdot u(x)\,dx \geqslant 0 \quad \forall u(x) \in L_p(a,b), \tag{2.7}$$

причем $\langle I^\alpha u, u\rangle > 0$, если $u(x) \neq 0$, т. е. оператор I^α строго положителен в пространстве $L_p(a,b)$ при $p \geqslant 2/(1+\alpha)$.

Наконец, поскольку оператор I^α, имеющий четное ядро, является симметрическим, то на основании примера 1.1 заключаем, что он является потенциальным. □

Следующая лемма является двойственной лемме 2.1 и понадобится при исследовании уравнения типа Гаммерштейна с ядром типа потенциала (см. ниже теорему 3.2). Для полноты изложения приведем ее с доказательством.

Лемма 2.2. *Если $0 < \alpha < 1$ и $1 < p \leqslant 2/(1-\alpha)$, то оператор I^α действует непрерывно из $L_{p'}(a,b)$, $p' = p/(p-1)$, в $L_p(a,b)$, строго положителен и потенциален, причем*

$$\|I^\alpha u\|_p \leqslant (b-a)^{[2-p(1-\alpha)]/p} \cdot n(\alpha) \cdot \|u\|_{p'} \quad \forall u(x) \in L_{p'}(a,b). \tag{2.8}$$

Доказательство. При $p = 2/(1-\alpha)$ имеем $p' = 2/(1+\alpha)$, и в этом случае утверждение леммы о том, что оператор I^α действует непрерывно из $L_{p'}(a,b)$ в $L_p(a,b)$, равносильно известному (см. выше) утверждению о том, что оператор I^α действует непрерывно из $L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ в $L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$. Поэтому считаем далее $1 < p < 2/(1-\alpha)$. В этом случае справедливы непрерывные плотные вложения:

$$L_{p'}(a,b) \subset L_{2/(1+\alpha)}(a,b) \quad \text{и} \quad L_{2/(1-\alpha)}(a,b) \subset L_p(a,b). \tag{2.9}$$

Докажем первое вложение из (2.9). Для этого заметим, что неравенство $p < 2/(1-\alpha)$ равносильно неравенству $2/(1+\alpha) < p'$, поскольку $p' = p/(p-1)$. Применяя неравенство Гельдера с показателями $p'(1+\alpha)/2$ и $p'(1+\alpha)/[p'(1+\alpha)-2]$ для любого $u(x) \in L_{p'}(a,b)$, имеем

$$\|u\|_{2/(1+\alpha)} \leqslant (b-a)^{2-[p(1-\alpha)]/(2p)} \|u\|_{p'} \tag{2.10}$$

(здесь учли, что $p'(1+\alpha)-2]/(2p') = [2-p(1-\alpha)]/(2p)$). Следовательно, справедливо первое вложение из (2.9).

Аналогично, применяя неравенство Гельдера с показателями $2/[(1-\alpha)p]$ и $2/[2-(1-\alpha)p]$ для любого $u(x) \in L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$, получаем

$$\|u\|_p \leqslant (b-a)^{[2-p(1-\alpha)]/(2p)} \|u\|_{2/(1-\alpha)}, \tag{2.11}$$

т. е. справедливо и второе вложение из (2.9).

Используя неравенства (2.1), (2.10), (2.11) и учитывая первое вложение из (2.9), имеем

$$\|I^\alpha u\|_p \leqslant (b-a)^{[2-p(1-\alpha)]/(2p)} \|I^\alpha u\|_{2/(1-\alpha)} \leqslant (b-a)^{[2-p(1-\alpha)]/(2p)} n(\alpha) \cdot \|u\|_{2/(1+\alpha)} \leqslant$$
$$\leqslant (b-a)^{[2-p(1-\alpha)]/p} \cdot n(\alpha) \cdot \|u\|_{p'} \quad \forall u(x) \in L_{p'}(a,b),$$

т. е. справедливо неравенство (2.8).

Наконец, используя [12, формула (1.3.3)] и [2, теорема 3.2], с учетом примера 1.1 получаем, что оператор I^α строго положителен и потенциален в пространстве $L_{p'}(a,b)$, поскольку $p' \geqslant 2/(1+\alpha)$ при $1 < p \leqslant 2/(1-\alpha)$ и поэтому применима лемма 2.1 с заменой p на p'. $\square$

Заметим, что в леммах 2.1 и 2.2 показатель p может меняться от 1 до ∞, в зависимости от значений, принимаемых α.

3. Уравнения с ядрами типа потенциала и монотонными нелинейностями

При исследовании нелинейных интегральных уравнений методом монотонных операторов, как правило, предполагается [7, 10, 16, 17], что интегральный оператор, фигурирующий в этих уравнениях, заведомо является положительным. В данном пункте доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решений для трех различных классов нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала без такого предположения, что важно и удобно для приложений.

Пусть вещественная функция $F(x,u)$ определена при $x \in [a,b]$, $u \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x при каждом фиксированном u и непрерывна по u при почти всех x. Обозначим через F оператор Немыцкого $(Fu)(x) = F[x,u(x)]$, порожденный функцией $F(x,u)$, а через $L_p^+(a,b)$ — множество всех неотрицательных функций из $L_p(a,b)$.

Рассмотрим сначала наиболее простое для исследования методом монотонных операторов нелинейное уравнение с ядром типа потенциала.

Теорема 3.1. *Пусть $0 < \alpha < 1$ и $p \geqslant 2/(1+\alpha)$. Если для почти всех $x \in [a,b]$ и всех $u \in \mathbb{R}$ выполнены условия*:

3.1) $|F(x,u)| \leqslant c(x) + d_1 \cdot |u|^{p-1}$, *где* $c(x) \in L_{p'}^+(a,b)$, $d_1 > 0$;

3.2) $F(x,u)$ *не убывает по u при почти каждом фиксированном x*;

3.3) $F(x,u) \cdot u \geqslant d_2 \cdot |u|^p - D(x)$, *где* $D(x) \in L_1^+(a,b)$, $d_2 > 0$,

то при любых $\lambda > 0$ и $f(x) \in L_{p'}(a,b)$ уравнение

$$\lambda \cdot F[x,u(x)] + \int_a^b \frac{u(s)\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}} = f(x) \tag{3.1}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(a,b)$. *Кроме того, если условие* 3.3) *выполнено при* $D(x) = 0$, *то* $\|u^*\|_p \leqslant \left(\lambda^{-1} \cdot d_2^{-1} \cdot \|f\|_{p'}\right)^{1/(p-1)}$.

Доказательство. Условия 3.1) и 3.2) необходимы и достаточны [7, с. 61–64], соответственно, для того чтобы оператор Немыцкого F, порожденный функцией $F(x,u)$, действовал непрерывно из $L_p(a,b)$ в $L_{p'}(a,b)$ и был монотонным, а условие 3.3) обеспечивает его коэрцитивность, поскольку

$$\langle Fu, u\rangle \geqslant d_2 \cdot \|u\|_p^p - \|D\|_1. \tag{3.2}$$

Запишем данное уравнение (3.1) в операторном виде: $Au = f$, где $Au = \lambda \cdot Fu + I^\alpha u$. В силу леммы 2.1 и условий 3.1)–3.3) получаем, что оператор A действует непрерывно из $L_p(a,b)$ в $L_{p'}(a,b)$ и является монотонным и коэрцитивным. При этом оператор A является строго монотонным, так как оператор I^α является строго положительным. Поэтому утверждения о существовании и единственности решения вытекают из основной теоремы теории монотонных операторов — теоремы Браудера—Минти (см., например, [2, теорема 1.1]). Наконец, используя условие 3.3) при $D(x) = 0$, т. е. неравенство (3.2) при $\|D\|_1 = 0$, положительность оператора I^α и равенство $Au^* = f$, имеем

$$\lambda \cdot d_2 \cdot \|u^*\|_p^p \leqslant \lambda \cdot \langle Fu^*, u^*\rangle \leqslant \lambda \cdot \langle Fu^*, u^*\rangle + \langle I^\alpha u^*, u^*\rangle =$$

$$= \langle Au^*, u^*\rangle = \langle f, u^*\rangle \leqslant \|f\|_{p'} \|u\|_p,$$

откуда непосредственно вытекает доказываемая оценка. □

Следствие 3.1. *Пусть* $p \geqslant 2$ — *любое четное число и* $f(x) \in L_{p'}(a,b)$. *Тогда уравнение*

$$u^{p-1}(x) + \int_a^b \frac{u(s)\,ds}{\sqrt{|x-s|}} = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(a,b)$, *причем* $\|u^*\|_p \leqslant \|f\|_{p'}^{1/(p-1)}$.

В связи со следствием 3.1 заметим, что поскольку $p \geqslant 2$ и $2/(1+\alpha) \in (1,2)$, то требование $p \geqslant 2/(1+\alpha)$ теоремы 3.1 заведомо выполнено, причем нечетностепенная функция $F(x,u) = u^{p-1}$ удовлетворяет условиям 3.1)–3.3) при $d_1 = d_2 = 1$ и $c(x) = D(x) = 0$.

Замечание 3.1. Теорема 3.1 усиливает некоторые результаты, приведенные в [2], а именно дополняет [2, теорема 6.1], которая не охватывает случай $2/(1+\alpha) \leqslant p < 2$, и [2, теорема 6.2], в которой $1 < p < 2$ и α имеет специальный вид.

Прежде чем рассмотреть другой класс нелинейных уравнений с ядрами типа потенциала, приведем один результат с поправками (см. ниже), установленный в работе [16], придерживаясь обозначений этой работы. Пусть Ω есть пространство с σ-конечной мерой, K — монотонный оператор и $(Fu)(x) = f(x, u(x))$ — оператор Немыцкого. Рассмотрим уравнение типа Гаммерштейна

$$u + KFu = g. \tag{3.3}$$

Справедлива следующая теорема Брезиса—Браудера (ср. [16, теорема 3]).

Теорема 3.2 (Брезис—Браудер)**.** *Пусть* $p > 1$ *и* K — *монотонный, хеминепрерывный и ограниченный оператор из* $L_{p'}(\Omega)$ *в* $L_p(\Omega)$. *Предположим, что функция* $f(x,r) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна и не убывает по* r *для почти всех* $x \in \Omega$, *является измеримой по* x *для всех* $r \in \mathbb{R}$ *и удовлетворяет условию*

$$|f(x,r)| \leqslant c(x) + c_0 \cdot |r|^{p-1} \quad \text{для почти всех } x \in \Omega \text{ и всех } r \in \mathbb{R},$$

где $c \in L_{p'}(\Omega)$, $c_0 > 0$. *Тогда уравнение* (3.3) *имеет единственное решение* $u \in L_p(\Omega)$ *при любом* $g \in L_p(\Omega)$.

Следует отметить, что в формулировке теоремы 3.2, приведенной в [16, с. 570], допущены неточности, а именно функция $f(x,r)$ предполагается *невозрастающей* по r (что не согласуется с условием (3) из [16, с. 567]) и измеримой по x для всех $x \in \mathbb{R}$ (должно быть для всех $r \in \mathbb{R}$ — что очевидно). Кроме того, пропущены требования, что $p > 1$ и $c_0 > 0$. Покажем на простом примере, что если функция $f(x,r)$ является невозрастающей по r, то утверждение [16, теорема 3] о единственности решения неверно. Рассмотрим в пространстве $L_{4/3}(\Omega)$ уравнение

$$u(x) - w(x) \int\limits_{\Omega} w(s) \cdot u^{1/3}(s)\, ds = 0, \tag{3.4}$$

где $w(x) \neq 0$ почти всюду на Ω и $w(x) \in L_{4/3}(\Omega)$. В данном случае, в соответствии с [16, теорема 3], $p = 4/3$, $f(x,r) = -r^{1/3}$ есть невозрастающая по r функция и оператор K имеет вид: $(Ku)(x) = w(x) \int\limits_{\Omega} w(s)\, u(s)\, ds$. Покажем, что оператор K действует из $L_4(\Omega)$ в $L_{4/3}(\Omega)$ и ограничен. Для любого $u(x) \in L_4(\Omega)$ имеем

$$\|Ku\|_{4/3} = \left| \int\limits_{\Omega} w(s)\, u(s)\, ds \right| \cdot \left(\int\limits_{\Omega} |w(x)|^{4/3} dx \right)^{3/4} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |w(s)|^{4/3} ds \right)^{3/4} \left(\int\limits_{\Omega} |u(s)|^{4} ds \right)^{1/4} \|w\|_{4/3} = \|w\|_{4/3}^2 \cdot \|u\|_4.$$

Значит, оператор K действует из пространства $L_4(\Omega)$ в сопряженное с ним пространство $L_{4/3}(\Omega)$ и ограничен. Поскольку K является линейным оператором, то он является также непрерывным и тем более хеминепрерывным оператором. Далее, для любого $u(x) \in L_4(\Omega)$ имеем

$$\langle Ku, u \rangle = \int\limits_{\Omega} \left(w(x) \int\limits_{\Omega} w(s)\, u(s)\, ds \right) u(x)\, dx = \left(\int\limits_{\Omega} w(s)\, u(s)\, ds \right)^2 \geqslant 0,$$

т. е. K — положительный, а значит, в силу своей линейности, и монотонный оператор. Таким образом, оператор K и функция $f(x,r) = -r^{1/3}$ удовлетворяют всем требованиям [16, теорема 3] при $g = 0$, $c(x) = 0$, $c_0 = 1$ и $p = 4/3$. Покажем, наконец, что уравнение (3.4) имеет два различных решения в пространстве $L_{4/3}(\Omega)$. Пусть $u(x) \in L_{4/3}(\Omega)$ есть любое решение уравнения (3.4). Положим $\int\limits_{\Omega} w(s)\, u^{1/3}(s)\, ds = C$. Тогда из (3.4) получаем:

$$u(x) = C \cdot w(x) \quad \text{или} \quad w(x) \cdot u^{1/3}(x) = C^{1/3} w^{4/3}(x). \tag{3.5}$$

Интегрируя последнее равенство, имеем

$$C = C^{1/3} \int\limits_{\Omega} w^{4/3}(x)\, dx \quad \text{или} \quad C = \left(\int\limits_{\Omega} w^{4/3}(x)\, dx \right)^{3/2}.$$

Подставляя найденное значение C в первое равенство из (3.5), окончательно получаем

$$u(x) = \left(\int\limits_{\Omega} w^{4/3}(s)\, ds \right)^{3/2} w(x). \tag{3.6}$$

Таким образом, уравнение (3.4) помимо тривиального решения $u(x) = 0$ имеет еще и нетривиальное решение (3.6) в пространстве $L_{4/3}(\Omega)$, что противоречит утверждению о единственности решения в формулировке, приведенной в [16, теорема 3].

Замечание 3.2. В работе [17, с. 126] доказан более общий, чем в теореме 3.2, результат, из которого, в частности, следует, что в формулировке [16, теорема 3] функция $f(x,r)$ должна не убывать по r.

Теорема 3.3. *Пусть* $0<\alpha<1$ *и* $1<p\leqslant 2/(1-\alpha)$. *Если для почти всех* $x\in[a,b]$ *и всех* $u\in\mathbb{R}$ *выполнены условия* 3.1) *и* 3.2) *теоремы* 3.1, *то при любых* $\lambda\geqslant 0$ *и* $f(x)\in L_p(a,b)$ *уравнение*

$$u(x)+\lambda\cdot\int\limits_a^b \frac{F[s,u(s)]\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}}=f(x) \tag{3.7}$$

имеет единственное решение $u^*(x)\in L_p(a,b)$. *Кроме того, если условия* 3.1) *и* 3.3) *теоремы* 3.1 *выполнены при* $c(x)=D(x)=0$, *то* $\|u^*\|_p\leqslant d_1\cdot d_2^{-1}\cdot\|f\|_p$.

Доказательство. При $\lambda=0$ утверждения теоремы очевидны, поэтому считаем далее, что $\lambda>0$. Запишем уравнение (3.7) в операторном виде: $u+\lambda\cdot I^\alpha Fu=f$. Из условий 3.1) и 3.2) вытекает, что оператор F действует непрерывно из $L_p(a,b)$ в $L_{p'}(a,b)$ и является монотонным, а из леммы 2.2, вытекает, что оператор I^α действует непрерывно из $L_{p'}(a,b)$ обратно в $L_p(a,b)$ и положителен. Но тогда по теореме 3.2 данное уравнение имеет единственное решение $u^*(x)\in L_p(a,b)$.

Осталось доказать оценку нормы решения $u^*(x)$. Используя условия 3.1) и 3.3) теоремы 3.1 при $c(x)=D(x)=0$, положительность оператора I^α и равенство $u^*+\lambda\cdot I^\alpha Fu^*=f$, имеем

$$\begin{gathered} d_2\|u^*\|_p^p\leqslant\langle Fu^*,u^*\rangle\leqslant\langle u^*,Fu^*\rangle+\lambda\langle I^\alpha Fu^*,Fu^*\rangle= \\ =\langle f,Fu^*\rangle\leqslant\|f\|_p\|Fu^*\|_{p'}\leqslant d_1\|f\|_p\|u^*\|_p^{p-1}, \end{gathered}$$

откуда непосредственно вытекает доказываемая оценка. □

Следствие 3.2. *Если* $f(x)\in L_4(a,b)$, *то уравнение*

$$u(x)+\int\limits_a^b \frac{u^3(s)\,ds}{\sqrt{|x-s|}}=f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x)\in L_4(a,b)$, *причем* $\|u^*\|_4\leqslant\|f\|_4$.

Рассмотрим, наконец, третий класс нелинейных уравнений с ядрами типа потенциала, соответствующий случаю, когда оператор типа потенциала входит в уравнение нелинейно. В этом случае, в отличие от теорем 3.1 и 3.3, на нелинейность $F(x,u)$ вместо условий 3.1)–3.3) накладываются условия 3.4)–3.6), обеспечивающие существование хеминепрерывного, строго монотонного, коэрцитивного обратного оператора F^{-1} к оператору Немыцкого F, порожденному функцией $F(x,u)$.

Теорема 3.4. *Пусть* $0<\alpha<1$ *и* $p\geqslant 2/(1+\alpha)$. *Если для почти всех* $x\in[a,b]$ *и всех* $u\in\mathbb{R}$ *выполнены условия*:

3.4). $|F(x,u)|\leqslant g(x)+d_3\cdot|u|^{1/(p-1)}$, *где* $g(x)\in L_p^+(a,b)$, $d_3>0$;

3.5). $F(x,u)$ *строго возрастает по* u *при почти каждом фиксированном* x;

3.6). $F(x,u)\cdot u\geqslant d_4\cdot|u|^{p/(p-1)}-D(x)$, *где* $D(x)\in L_1^+(a,b)$, $d_4>0$,

то при любых $\lambda\geqslant 0$ *и* $f(x)\in L_p(a,b)$ *уравнение*

$$u(x)+\lambda\cdot F\left[x,\int\limits_a^b\frac{u(s)\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}}\right]=f(x) \tag{3.8}$$

имеет единственное решение $u^*(x)\in L_p(a,b)$. *Кроме того, если условия* 3.4) *и* 3.6) *выполнены при* $g(x)=D(x)=0$, *то*

$$\|u^*-f\|_p\leqslant\left(d_3^p\cdot d_4^{-1}\cdot n(\alpha)\cdot(b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p}\|f\|_p\right)^{1/(p-1)},$$

где $n(\alpha)$ *есть норма оператора* I^α, *действующего ограниченно из* $L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ *в* $L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$.

Доказательство. При $\lambda=0$ утверждения теоремы очевидны, поэтому считаем далее, что $\lambda>0$. В силу леммы 2.1 оператор I^α действует из $L_p(a,b)$ в $L_{p'}(a,b)$, непрерывен и положителен. Из условий 3.4)–3.6) вытекает, что оператор F действует обратно из $L_{p'}(a,b)$ в $L_p(a,b)$, непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Следовательно, в соответствии с [2, лемма 2.1], оператор Немыцкого F имеет обратный оператор F^{-1}, который действует из $L_p(a,b)$ в $L_{p'}(a,b)$, хеминепрерывен, строго монотонен и $\lim\limits_{\|v\|_p\to\infty}\langle F^{-1}v,v\rangle\cdot\|v\|_p^{-1}=\infty$. Запишем теперь уравнение (3.8) в операторном виде: $u+\lambda\cdot FI^\alpha u=f$. Полагая в нем $f-u=\lambda\cdot v$ и применяя затем к обеим частям получившегося уравнения обратный оператор F^{-1}, приходим к уравнению

$$\Phi v = I^\alpha f, \quad \text{где} \quad \Phi v = F^{-1}v + \lambda \cdot I^\alpha v. \tag{3.9}$$

В силу указанных свойств операторов F^{-1} и I^α оператор Φ действует из $L_p(a,b)$ в $L_{p'}(a,b)$, хеминепрерывен, строго монотонен и коэрцитивен, причем

$$\frac{\langle \Phi v, v\rangle}{\|v\|_p} \geqslant \frac{\langle F^{-1}v, v\rangle}{\|v\|_p} \to \infty \quad \text{при} \quad \|v\|_p \to \infty.$$

Значит, по теореме Браудера—Минти, уравнение (3.9) имеет единственное решение $v^*(x) \in L_p(a,b)$. Но тогда уравнение (3.8) имеет решение $u^* = f - \lambda\cdot v^* \in L_p(a,b)$. Покажем, что это решение u^* единственно. Предположим противное, т. е. что уравнение (3.8) имеет два различных решения $u_1, u_2 \in L_p(a,b)$. Тогда справедливы равенства:

$$u_1 + \lambda\cdot FI^\alpha u_1 = f \quad \text{и} \quad u_2 + \lambda \cdot FI^\alpha u_2 = f. \tag{3.10}$$

Из (3.10) путем вычитания первого равенства из второго имеем:

$$u_2 - u_1 + \lambda\cdot FI^\alpha u_2 - \lambda\cdot FI^\alpha u_1 = 0$$

и, значит,

$$\langle u_2 - u_1 + \lambda\cdot FI^\alpha u_2 - \lambda\cdot FI^\alpha u_1, I^\alpha u_2 - I^\alpha u_1\rangle = 0$$

или

$$\langle u_2 - u_1, I^\alpha u_2 - I^\alpha u_1\rangle + \lambda\cdot\langle FI^\alpha u_2 - FI^\alpha u_1, I^\alpha u_2 - I^\alpha u_1\rangle = 0.$$

Но последнее равенство невозможно, так как и первое слагаемое в левой части строго положительно, в силу строгой положительности оператора I^α, и второе слагаемое строго положительно, в силу строгой монотонности оператора F и того, что $I^\alpha u_1 \neq I^\alpha u_2$. В самом деле, если $I^\alpha u_1 = I^\alpha u_2$, то из (3.10) следует, что $u_1 + \lambda\cdot FI^\alpha u_2 = f$ и $u_2 + \lambda\cdot FI^\alpha u_2 = f$, откуда, путем вычитания левых и правых частей, получаем $u_1 - u_2 = 0$, что противоречит тому, что u_1 и u_2 различны.

Осталось доказать оценку нормы решения. Положим $\psi = F^{-1}v^*$. Тогда $F\psi = v^*$. Так как $F^{-1}v^* + \lambda\cdot I^\alpha v^* = I^\alpha f$, то с учетом леммы 2.1 и равенств $g(x) = D(x) = 0$, имеем

$$d_4\|\psi\|_{p'}^{p'} \leqslant \langle F\psi,\psi\rangle = \langle v^*, F^{-1}v^*\rangle \leqslant \langle v^*, F^{-1}v^*\rangle + \lambda\langle v^*, I^\alpha v^*\rangle = \langle v^*, I^\alpha f\rangle = \langle F\psi, I^\alpha f\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \|F\psi\|_p\|I^\alpha f\|_{p'} \leqslant (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} n(\alpha)\|F\psi\|_p\|f\|_p \leqslant (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} n(\alpha) d_3\|\psi\|_{p'}^{p'-1}\|f\|_p.$$

Следовательно,

$$\|\psi\|_{p'} \leqslant d_3 d_4^{-1}(b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p}\cdot n(\alpha)\cdot\|f\|_p. \tag{3.11}$$

Так как $\|v^*\|_p = \|F\psi\|_p \leqslant d_3\|\psi\|_{p'}^{p'-1}$ и $v^* = \lambda^{-1}(f-u^*)$, то $\|f-u^*\|_p \leqslant \lambda d_3\|\psi\|_{p'}^{1/(p-1)}$, откуда с учетом неравенства (3.11) получаем доказываемую оценку нормы решения. □

Следствие 3.3. *Пусть $p \geqslant 2$ — любое четное число и $f(x) \in L_p(a,b)$. Тогда уравнение*

$$u(x) + \left(\int_a^b \frac{u(s)\,ds}{\sqrt{|x-s|}}\right)^{1/(p-1)} = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(a,b)$, причем справедлива оценка

$$\|u^* - f\|_p \leqslant \Big((b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p}\cdot n(1/2)\cdot\|f\|_p\Big)^{1/(p-1)},$$

где $n(1/2)$ есть норма оператора $I^{1/2}$, действующего ограниченно из $L_{4/3}(a,b)$ в $L_4(a,b)$.

Замечание 3.3. При $p=2$ теоремы 3.1, 3.3 и 3.4 охватывают и случай линейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала.

4. Приближенное решение в $L_2(a,b)$. Метод последовательных приближений

Полученные в разделе 3 теоремы существования и единственности решения для различных классов нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала не содержат информации о том, как можно найти эти решения. В связи с этим рассмотрим вопрос о приближенном решении таких уравнений в гильбертовом пространстве $L_2(a,b)$. Особо отметим, что здесь, в отличие от [1, §9], где рассмотрены нелинейные сингулярные интегральные уравнения, существенно используется свойство потенциальности рассматриваемых операторов, что позволяет значительно улучшить соответствующие оценки скорости сходимости последовательных приближений. В этой связи заметим также, что основные теоремы теории монотонных операторов вначале были доказаны при дополнительном условии потенциальности рассматриваемых операторов (см., например, [10, с. 163]), которое затем во многих случаях было снято. Однако, использование свойства потенциальности операторов позволяет усилить некоторые результаты для уравнений с монотонными операторами, в частности, касающиеся приближенного решения таких уравнений (см. ниже теоремы 4.1 и 5.1).

Всюду в этом пункте предполагается, что $0 < \alpha < 1$, а нелинейность $F(x,u)$ при почти каждом фиксированном $x \in [a,b]$ и при любых $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:

4.1) $|F(x,u_1) - F(x,u_2)| \leqslant M \cdot |u_1 - u_2|$, где $M > 0$;

4.2) $\Big(F(x,u_1) - F(x,u_2)\Big) \cdot (u_1 - u_2) \geqslant m \cdot |u_1 - u_2|^2$, где $m > 0$.

Простейшим примером нелинейности, удовлетворяющей условиям 4.1) и 4.2) может служить $F(x,u) \equiv (u + 2\,u^3)/(1 + u^2)$, для которой $m = 1$, $M = 17/8$.

Из неравенства (2.2), в частности, вытекает, что оператор типа потенциала I^α действует непрерывно из $L_2(a,b)$ в $L_2(a,b)$, причем справедливо неравенство

$$\|I^\alpha u\|_2 \leqslant 2\,(b-a)^\alpha \alpha^{-1} \|u\|_2 \qquad \forall u(x) \in L_2(a,b). \tag{4.1}$$

Обозначим через $\mathbb{N}$ множество всех натуральных чисел. Далее нам понадобится следующая теорема (см. [2, с. 16], где приведено ее доказательство), являющаяся непосредственным следствием более общих результатов, доказанных в монографии [8].

Теорема 4.1 (Браудер—Петришин). *Пусть H — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|_H$, оператор A действует из H в H и является потенциальным. Если существуют постоянные $m > 0$ и $M > 0$ $(M > m)$ такие, что для любых $u, v \in H$ выполняются неравенства*

$$\|Au - Av\|_H \leqslant M \cdot \|u - v\|_H, \qquad (Au - Av, u - v) \geqslant m \cdot \|u - v\|_H^2,$$

то уравнение $Au = f$ имеет единственное решение $u^* \in H$ при любом $f \in H$. Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле $(n \in \mathbb{N})$

$$u_n = u_{n-1} - \frac{2}{M+m}(Au_{n-1} - f) \tag{4.2}$$

с оценкой погрешности

$$\|u_n - u^*\|_H \leqslant \frac{2}{M+m} \cdot \frac{\nu^n}{1-\nu} \|Au_0 - f\|_H, \tag{4.3}$$

где $\nu = (M-m)/(M+m)$, $u_0 \in H$ — начальное приближение.

Заметим, что оценка (4.3) обеспечивает более высокую скорость сходимости последовательных приближений по сравнению с [2, оценка (1.4)], полученной без предположения о потенциальности оператора A.

Приступим теперь к изложению основных результатов данного пункта. Наиболее простым для применения теоремы 4.1 является уравнение (3.1). Справедлива следующая

Теорема 4.2. *Пусть $0 < \alpha < 1$ и нелинейность $F(x,u)$ при почти каждом фиксированном $x \in [0,1]$ и при любых $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям 4.1) и 4.2). Тогда при любых $\lambda > 0$*

и $f(x) \in L_2(a,b)$ *уравнение* (3.1) *имеет единственное решение* $u^*(x) \in L_2(a,b)$. *Это решение можно найти методом итераций по схеме*

$$u_n = u_{n-1} - \mu_1 \cdot (\lambda \cdot F u_{n-1} + I^\alpha u_{n-1} - f) \tag{4.4}$$

с оценкой погрешности

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \mu_1 \cdot \frac{\alpha_1^n}{1-\alpha_1} \cdot \|\lambda \cdot F u_0 + I^\alpha u_0 - f\|_2, \tag{4.5}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\mu_1 = 2/(M + m + 2(b-a)^\alpha \alpha^{-1})$, $\alpha_1 = (M - m + 2(b-a)^\alpha \alpha^{-1})/(M + m + 2(b-a)^\alpha \alpha^{-1})$, $u_0(x) \in L_2(a,b)$ — *начальное приближение.*

Доказательство. Из условия 4.1) вытекает, что оператор Немыцкого F действует непрерывно из $L_2(a,b)$ в $L_2(a,b)$ и удовлетворяет условию Липшица:

$$\|Fu - Fv\|_2 \leqslant M \cdot \|u - v\|_2 \qquad \forall u, v \in L_2(a,b), \tag{4.6}$$

а из условия 4.2) вытекает, что он является сильно монотонным:

$$(Fu - Fv, u - v) \geqslant m \cdot \|u - v\|_2^2 \qquad \forall u, v \in L_2(a,b), \tag{4.7}$$

где $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в $L_2(a,b)$.

Кроме того, при выполнении условия 4.1) оператор Немыцкого F является потенциальным и его потенциал g вычисляется по формуле (см. [6, с. 90] или [7, с. 62]):

$$g(u) = g_0 + \int_0^1 \left[\int_0^{u(x)} F(x,v)\,dv \right] dx,$$

где $g_0 = \mathrm{const}$.

Пусть $u, v \in L_2(a,b)$ — любые функции. Запишем данное уравнение (3.1) в операторном виде: $Au = f$, где $A = \lambda \cdot F + I^\alpha$. Заметим, что, в силу неравенств (4.1) и (4.6), оператор A действует непрерывно из $L_2(a,b)$ в $L_2(a,b)$ и является потенциальным (как сумма двух потенциальных операторов $\lambda \cdot F$ и I^α). Далее, используя сначала неравенство Минковского, а затем неравенства (4.1) и (4.6), с одной стороны имеем $\|Au - Av\|_2 \leqslant \left(\lambda \cdot M + 2(b-a)^\alpha \alpha^{-1}\right) \cdot \|u - v\|_2$, а с другой стороны, используя неравенства (2.7) и (4.7), получаем $(Au - Av, u - v) \geqslant \lambda \cdot m \cdot \|u - v\|_2^2$. Следовательно, по теореме 4.1 уравнение $Au = f$ имеет единственное решение $u^* \in L_2(a,b)$ и это решение можно найти по схеме (4.4), получающейся из формулы (4.2), с оценкой погрешности (4.5), вытекающей из неравенства (4.3). □

Более трудными для исследования методом потенциальных монотонных операторов являются нелинейные уравнения (3.7) и (3.8), поскольку к ним, в отличие от уравнения (3.1), непосредственно применить теорему 4.1 нельзя. Для таких классов уравнений последовательные приближения удается построить лишь в терминах обратного оператора F^{-1}.

Теорема 4.3. *Пусть* $0 < \alpha < 1$ *и нелинейность* $F(x,u)$ *удовлетворяет условиям* 4.1) *и* 4.2). *Тогда при любых* $\lambda > 0$ *и* $f(x) \in L_2(a,b)$ *нелинейное уравнение* (3.7) *имеет единственное решение* $u^*(x) \in L_2(a,b)$. *Это решение можно найти методом итераций по схеме*

$$u_n = F^{-1} v_n, \quad v_n = v_{n-1} - \mu_2 \cdot (F^{-1} v_{n-1} + \lambda \cdot I^\alpha v_{n-1} - f) \tag{4.8}$$

с оценкой погрешности

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \frac{\mu_2}{m} \cdot \frac{\alpha_2^n}{1-\alpha_2} \cdot \|u_0 + \lambda \cdot I^\alpha F u_0 - f\|_2, \tag{4.9}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\mu_2 = 2/(m^{-1} + m\,M^{-2} + 2\,\lambda \cdot (b-a)^\alpha \alpha^{-1})$, $\alpha_2 = (m^{-1} - m\,M^{-2} + 2\,\lambda \cdot (b-a)^\alpha \alpha^{-1})/(m^{-1} + m\,M^{-2} + 2\,\lambda \cdot (b-a)^\alpha \alpha^{-1})$, F^{-1} — *оператор, обратный к* F, $v_0 = F u_0$, $u_0(x) \in L_2(a,b)$ — *начальное приближение.*

Доказательство. Так как оператор F удовлетворяет неравенствам (4.6) и (4.7), то согласно [2, теорема 1.3] существует обратный оператор F^{-1} такой, что

$$\|F^{-1}u - F^{-1}v\|_2 \leqslant \frac{1}{m} \|u - v\|_2 \qquad \forall u, v \in L_2(a,b), \tag{4.10}$$

$$(F^{-1}u - F^{-1}v, u - v) \geqslant \frac{m}{M^2}\|u - v\|_2^2 \qquad \forall u, v \in L_2(a, b). \tag{4.11}$$

Заметим [8, с. 137], что оператор F^{-1} является потенциальным, как оператор, обратный монотонному потенциальному оператору F. Запишем уравнение (3.7) в операторном виде:

$$u + \lambda \cdot I^\alpha F u = f. \tag{4.12}$$

Непосредственно проверяется, что если v^* является решением уравнения

$$Bv \equiv F^{-1}v + \lambda \cdot I^\alpha v = f, \tag{4.13}$$

то $u^* = F^{-1}v^*$ является решением уравнения (4.12).

Докажем, что уравнение (4.13) имеет единственное решение $v^* \in L_2(a, b)$. Используя неравенства (4.1), (2.7), (4.10) и (4.11), имеем

$$\|Bu - Bv\|_2 \leqslant (m^{-1} + 2\,\lambda \cdot (b - a)^\alpha \alpha^{-1})\,\|u - v\|_2, \quad (Bu - Bv, u - v) \geqslant \frac{m}{M^2}\|u - v\|_2^2.$$

Кроме того, оператор B является потенциальным как сумма двух потенциальных операторов F^{-1} и $\lambda \cdot I^\alpha$. Значит, по теореме 4.1 уравнение $Bv = f$ имеет единственное решение $v^* \in L_2(a, b)$ и это решение можно найти по схеме

$$v_n = v_{n-1} - \mu_2 \cdot (Bv_{n-1} - f) \tag{4.14}$$

с оценкой погрешности

$$\|v_n - v^*\|_2 \leqslant \mu_2 \cdot \frac{\alpha_2^n}{1 - \alpha_2}\|Bv_0 - f\|_2, \tag{4.15}$$

где μ_2 и α_2 определены выше (в формулировке теоремы 4.3). Но тогда уравнение (4.12) имеет единственное решение $u^* = F^{-1}v^* \in L_2$ и это решение можно найти по схеме (4.8), получающейся из (4.14), с оценкой погрешности (4.9), получающейся из (4.15), с учетом равенства $Bv = F^{-1}v + \lambda \cdot I^\alpha v$ и оценки: $\|u_n - u^*\|_2 = \|F^{-1}v_n - F^{-1}v^*\|_2 \leqslant m^{-1}\|v_n - v^*\|_2$. □

Теорема 4.4. *Пусть $0 < \alpha < 1$ и нелинейность $F(x, u)$ удовлетворяет условиям 4.1) и 4.2). Тогда при любых $\lambda > 0$ и $f(x) \in L_2(a, b)$ нелинейное уравнение (3.8) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(a, b)$. Это решение можно найти методом итераций по схеме*

$$u_n = u_{n-1} + \lambda \cdot \mu_2 \cdot \left(F^{-1}\left(\lambda^{-1}(f - u_{n-1})\right) - I^\alpha u_{n-1}\right) \tag{4.16}$$

с оценкой погрешности

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \lambda \cdot \mu_2 \cdot \frac{\alpha_2^n}{1 - \alpha_2} \cdot \|F^{-1}\left(\lambda^{-1}(f - u_0)\right) - I^\alpha u_0\|_2, \tag{4.17}$$

где $n \in \mathbb{N}$, μ_2 и α_2 определены в формулировке теоремы 4.3, F^{-1} — оператор, обратный к F, $u_0(x) \in L_2(a, b)$ — начальное приближение.

Доказательство. Запишем уравнение (3.8) в операторном виде:

$$u + \lambda \cdot F I^\alpha u = f. \tag{4.18}$$

Положим $f - u = \lambda \cdot v$. Тогда уравнение (4.18) примет вид: $FI^\alpha(f - \lambda \cdot v) = v$. Применив к обеим частям последнего уравнения оператор F^{-1}, существование которого доказано в теореме 4.3, приходим к уравнению:

$$Bv \equiv F^{-1}v + \lambda \cdot I^\alpha v = I^\alpha f. \tag{4.19}$$

Непосредственно проверяется, что если v^* является решением уравнения (4.19), то $u^* = f - \lambda \cdot v^*$ является решением уравнения (4.18).

Так как уравнение (4.19) имеет такой же вид, что и уравнение (4.13), то, повторяя рассуждения, приведенные в теореме 4.3, убеждаемся, что уравнение (4.19) имеет единственное решение $v^* \in L_2(a, b)$ и его можно найти по схеме вида (4.14):

$$v_n = v_{n-1} - \mu_2(Bv_{n-1} - I^\alpha f) \tag{4.20}$$

с оценкой погрешности вида (4.15):

$$\|v_n - v^*\| \leqslant \mu_2 \cdot \frac{\alpha_2^n}{1 - \alpha_2}\|Bv_0 - I^\alpha f\|_2. \tag{4.21}$$

Из (4.20) и (4.21), учитывая, что $v = \lambda^{-1}(f - u)$, непосредственно получаем, соответственно, итерационную схему (4.16) и оценку погрешности (4.17). $\square$

Заметим, что теоремы 4.2–4.4 охватывают, в частности, линейные интегральные уравнения с ядрами типа потенциала, и при этом не требуется, чтобы параметр λ был достаточно малым (ср. [9, с. 59], [13, с. 479]).

5. Приближенное решение в $L_p(a,b)$. Метод наискорейшего спуска

Результаты, полученные в разделе 4 по приближенному решению уравнений (3.1), (3.7) и (3.8), не охватывают степенные нелинейности, и использованные в нем методы непригодны в случае пространств $L_p(a,b)$ при $p \neq 2$. Цель данного раздела — доказать, что в случае пространства $L_p(a,b)$ и нечетностепенной нелинейности применим градиентный метод (или метод наискорейшего спуска). Для этого нам понадобятся следующие две простые леммы.

Лемма 5.1. *Пусть $q > 1$ — нечетное число. Тогда для любых чисел $t, s \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$|t^q - s^q| \leqslant \frac{q}{2} \cdot |t - s| \cdot (t^{q-1} + s^{q-1}). \tag{5.1}$$

Доказательство. Так как при $s = 0$ неравенство (5.1) очевидно, то считаем далее $s \neq 0$. Разделим обе части (5.1) на $|s|^q = |s| \cdot s^{q-1}$ и положим затем $t/s = x$. Тогда (5.1) примет вид:

$$|x^q - 1| \leqslant \frac{q}{2}\,|x - 1|\,(x^{q-1} + 1). \tag{5.2}$$

Итак, достаточно доказать неравенство (5.2) для всех нечетных $q > 1$ и любого $x \in \mathbb{R}$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $x \in (-\infty, 1]$. Тогда неравенство (5.2) принимает вид $1 - x^q \leqslant q^{-2}(1 - x)\,(x^{q-1} + 1) = q^{-2}(x^{q-1} + 1 - x^q - x)$ или

$$\frac{q-2}{2}\,x^q - \frac{q}{2}\,x^{q-1} + \frac{q}{2}\,x - \frac{q-2}{2} \leqslant 0. \tag{5.3}$$

Обозначим левую часть (5.3) через $\varphi(x)$. Нужно доказать, что $\varphi(x) \leqslant 0$ $\forall x \in (-\infty, 1]$. Ясно, что

$$\varphi(1) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi'(x) = \frac{(q-2)\,q}{2}\,x^{q-1} - \frac{q\,(q-1)}{2}\,x^{q-2} + \frac{q}{2}.$$

Так как $\varphi'(1) = 0$ и

$$\varphi''(x) = \frac{q\,(q-1)\,(q-2)}{2}\,x^{q-3}(x - 1) \leqslant 0 \qquad \forall x \leqslant 1,$$

то $\varphi'(x)$ убывает на $(-\infty, 1]$ и поэтому $\varphi'(x) \geqslant \varphi'(1) = 0$ $\forall x \leqslant 1$, т. е. $\varphi(x)$ возрастает на $(-\infty, 1]$. Но тогда $\varphi(x) \leqslant \varphi(1) = 0$ $\forall x \in (-\infty, 1]$.

2. Пусть, наконец, $x \in [1, \infty)$. Тогда неравенство (5.2) принимает вид:

$$x^q - 1 \leqslant \frac{q}{2}\,(x - 1)\,(x^{q-1} + 1) = \frac{q}{2}\,(x^q + x - x^{q-1} - 1)$$

или

$$\frac{q-2}{2}\,x^q - \frac{q}{2}\,x^{q-1} + \frac{q}{2}\,x - \frac{q-2}{2} \geqslant 0. \tag{5.4}$$

Обозначим левую часть (5.4) через $\psi(x)$. Нужно доказать, что $\psi(x) \geqslant 0$. Так как (см. пункт 1) $\psi''(x) = 2^{-1}q\,(q-1)\,(q-2)\,x^{q-3}(x-1) \geqslant 0$ $\forall x \geqslant 1$, то $\psi'(x)$ возрастает на $[1, \infty)$ и поэтому $\psi'(x) \geqslant \psi'(1) = 0$ $\forall x \geqslant 1$, т. е. и $\psi(x)$ возрастает на $[1, \infty)$. Значит, $\psi(x) \geqslant \psi(1) = 0$ $\forall x \in [1, \infty)$. $\square$

Интересно отметить, что при $q = 3$ неравенство (5.1) сводится к очевидному неравенству $(t - s)^2 \geqslant 0$.

Лемма 5.2. *Пусть $q > 1$ — нечетное число. Тогда для любых чисел $t, s \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$|t - s|^q \leqslant 2^{q-1}\,|t^q - s^q|. \tag{5.5}$$

Доказательство. Так как при $s = 0$ неравенство (5.5) очевидно, то считаем далее $s \neq 0$. Разделим обе части (5.5) на $|s|^q$ и положим затем $t/s = x$. Тогда (5.5) примет вид:

$$|x-1|^q \leqslant 2^{q-1}\,|x^q - 1|. \tag{5.6}$$

Итак, достаточно доказать неравенство (5.6) для любого нечетного $q > 1$ и любого $x \in \mathbb{R}$. Обозначим разность левой и правой части (5.6) через $r(x)$. Нужно доказать, что $r(x) \leqslant 0$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $x \in (-\infty, 1]$. Тогда $r(x) = (1-x)^q - 2^{q-1}\,(1-x^q)$.

Если $x \in (-\infty, -1]$, то $r'(x) = q\,x^{q-1}\,[2^{q-1} - (1-1/x)^{q-1}] \geqslant 0$ и, значит, $r(x) \leqslant r(-1) = 0$ — что и требовалось.

Если $x \in [-1, 1]$, то $r'(x) = q\,[(2\,x)^{q-1} - (1-x)^{q-1}]$ и $r'(x) = 0$ лишь при $x = 1/3$. Так как $r'(0) = -q < 0$ и $r'(1/2) = q\,[1 - (1/2)^{q-1}] > 0$, то $x = 1/3$ есть точка минимума функции $r(x)$, причем это единственная ее точка экстремума на отрезке $[-1, 1]$. Поскольку $r(\mp 1) = 0$ и $r(1/3) = (2/3)^q\,[1 - (3^q - 1)/2] < 0$, то $r(x) \leqslant 0$.

2. Пусть, наконец, $x \in [1, \infty)$. Тогда $r(x) = (x-1)^q - 2^{q-1}(x^q - 1)$. Ясно, что $r(1) = 0$ и $r'(x) = q\,x^{q-1}\,[(1-1/x)^{q-1} - 2^{q-1}] < 0$б так как $q - 1 \geqslant 2$ — четное число. Значит, $r(x) \leqslant 0$ $\forall x \in [1, \infty)$. □

Следствие 5.1. *Пусть $q > 1$ — нечетное число. Тогда для любых чисел $t, s \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$(t^q - s^q)\,(t-s) \geqslant 2^{1-q}|t-s|^{q+1}. \tag{5.7}$$

Доказательство. Так как при нечетном $q > 1$ функция $y = x^q$ возрастает, то $(t^q - s^q)\,(t-s) \geqslant 0$ $\forall t, s \in \mathbb{R}$. Значит (5.7) равносильно неравенству $|(t^q - s^q)\,(t-s)| \geqslant 2^{1-q}|t-s|^{q+1}$ или $|t^q - s^q| \geqslant 2^{1-q}|t-s|^q$, которое, в свою очередь, равносильно доказанному неравенству (5.5). □

Интересно отметить, что при $s = -t$ неравенство (5.5) обращается в равенство, а при $q = 3$ неравенство (5.5) сводится к очевидному неравенству $0 \leqslant (t-s)^2$.

Прежде чем приступить к изложению основных результатов данного пункта, приведем необходимые определения и вспомогательные утверждения.

Определение 5.1. Банахово пространство X называется *строго выпуклым*, если $\forall u, v \in X$ из того, что $u \neq v$, $\|u\| \leqslant 1$, $\|v\| \leqslant 1$ следует, что $\|u+v\| < 2$.

Определение 5.2. Оператор $J : X \to X^*$, где X^* строго выпуклое пространство, называется *дуализующим отображением*, если для любого $u \in X$ выполняются равенства $\langle Ju, u\rangle = \|u\|^2 = \|Ju\|_*^2$.

Заметим, что условие строгой выпуклости сопряженного пространства X^* в определении 5.2 обеспечивает (см. [8, с. 312-313]) единственность дуализующего отображения $J : X \to X^*$, причем [6, с. 115] J является потенциальным оператором с потенциалом $f(u) = \dfrac{1}{2}\,\|u\|^2$.

Далее нам понадобится следующая теорема, являющаяся непосредственным следствием более общего результата, доказанного в [8, теорема 4.2].

Теорема 5.1. *Пусть X — вещественное рефлексивное банахово пространство и $A : X \to X^*$ — хеминепрерывный равномерно монотонный коэрцитивный оператор. Тогда уравнение $Au = f$ имеет единственное решение $u^* \in X$ при любом $f \in X^*$. Кроме того, если X и X^* — строго выпуклые пространства, а оператор A является потенциальным ограниченно Липшиц-непрерывным, то последовательность $u_{n+1} = u_n - \delta_n \cdot J^*(Au_n - f)$, где $\delta_n = \min\{1, 2/[\varepsilon + \mu(\|u_n\| + \|Au_n - f\|_*)]\}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $J^* : X^* \to X$ — дуализующее отображение для X^*, $\varepsilon > 0$ — произвольное число, сходится к u^* по норме пространства X.*

Доказательство. Существование и единственность решения u^* вытекают из теоремы Браудера—Минти, а сильная сходимость последовательности $\{u_n\}$ к u^* по указанной схеме — из [8, теорема 4.2, с. 122] и [8, замечание 4.13, с. 125], поскольку всякий равномерно монотонный оператор является строго монотонным оператором и обладает (S)-свойством [8, с. 80-81]. □

Указанный в теореме 5.1 способ нахождения решения u^* известен [8] как метод *наискорейшего* спуска (или *градиентный* метод, так как $J^*v = \|v\|_* \mathrm{grad}\, \|v\|_*\ \forall v \in X^*$).

Сформулируем и докажем теперь основной результат данного пункта.

Теорема 5.2. *Пусть $p \geqslant 4$ — четное число и $0 < \alpha < 1$. Тогда при любом $f(x) \in L_{p'}(a,b)$ уравнение*

$$u^{p-1}(x) + \int\limits_a^b \frac{u(s)}{|s-x|^{1-\alpha}}\, ds = f(x) \tag{5.8}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(a,b)$. Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле

$$u_{n+1} = u_n - \delta_n \,\|Au_n - f\|_{p'}^{2-p'}\, |Au_n - f|^{p'-2} [Au_n - f], \tag{5.9}$$

где $n = 0,1,2,3,\ldots,\ \ u_0(x) \in L_p(a,b)$ — любая функция, $Au = \rho \cdot u^{p-1} + I^\alpha u$,

$$\delta_n = \min\left\{1,\ \frac{2}{\varepsilon + (p-1)\,\left(\|u_n\|_p + \|Au_n - f\|_{p'}\right)^p + n(\alpha)\,(b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p}}\right\},$$

$\varepsilon > 0$ — произвольное число.

Доказательство. Запишем уравнение (5.8) в операторном виде:

$$Au = f, \qquad \text{где} \quad Au = u^{p-1} + I^\alpha u.$$

Поскольку $\forall u(x) \in L_p(a,b)$ имеем, что $u^{p-1}(x) \in L_{p'}(a,b)$, то в силу леммы 2.1 оператор A действует из $L_p(a,b)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(a,b)$. Так как p — четное число и оператор I^α строго положителен, то оператор A является строго монотонным и коэрцитивным. Значит, по теореме Браудера—Минти уравнение (5.8) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(a,b)$. Покажем, что это решение можно найти по формуле (5.9). Для этого заметим, что пространства $L_p(a,b)$ при $1 < p < \infty$ являются строго выпуклыми и дуализующее отображение J^* для пространства $L_{p'}(a,b)$ имеет вид:

$$(J^*w)(x) = \|w\|_{p'}^{2-p'}\, |w(x)|^{p'-2}\, w(x). \tag{5.10}$$

Далее в силу интегрального неравенства Минковского $\forall u(x), v(x) \in L_p(a,b)$ имеем

$$\|Au - Av\|_{p'} \leqslant \|u^{p-1} - v^{p-1}\|_{p'} + \|I^\alpha(u-v)\|_{p'} = I_1 + I_2.$$

Оценим I_1. Так как в силу леммы 5.1 $|t^{p-1} - s^{p-1}| \leqslant \dfrac{p-1}{2}\, |t-s|\, (t^{p-2} + s^{p-2})$ для любых $t, s \in \mathbb{R}$, то

$$I_1 \leqslant \frac{p-1}{2}\, \left(\int\limits_a^b |u(x) - v(x)|^{p'} |u^{p-2}(x) + v^{p-2}(x)|^{p'} dx\right)^{1/p'} \leqslant$$

(применяем сначала неравенство Гельдера с показателями p/p' и $p/(p-p')$, а затем ко второму сомножителю применяем неравенство Минковского)

$$\leqslant \frac{p-1}{2}\, \|u-v\|_p\, \left(\|u\|_p^{p-2} + \|v\|_p^{p-2}\right) \leqslant (p-1)\, R^{p-2}\, \|u-v\|_p,$$

где $R = \max\,(\|u\|_p, \|v\|_p)$. Оценка I_2 содержится в лемме 2.1.

Таким образом, с учетом леммы 2.1 имеем

$$\|Au - Av\|_{p'} \leqslant \mu(R) \cdot \|u - v\|_p,$$

где $\mu(R) = (p-1)\, R^{p-2} + n(\alpha)\,(b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p}$ — возрастающая на $[0,\infty)$ функция. Значит, A — ограниченно Липшиц-непрерывный оператор.

Далее, используя положительность оператора I^α и неравенство (5.7) при $q = p-1$, имеем

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geqslant \int\limits_a^b \left[u^{p-1}(x) - v^{p-1}(x)\right]\, [u(x) - v(x)]\, dx \geqslant$$

$$\geqslant 2^{2-p} \int\limits_a^b |u(x) - v(x)|^p dx = \beta\ (\|u - v\|_p)\,,$$

где $\beta(s) = 2^{2-p}s^p$ — строго возрастающая на $[0,\infty)$ функция такая, что $\beta(0) = 0$, т. е. A — равномерно монотонный оператор.

Наконец, поскольку $Fu = u^{p-1}$ и I^α — потенциальные операторы, то оператор A также является потенциальным. Значит, на основании теоремы 5.1 последовательность (5.9) сходится к $u^*(x)$ по норме пространства $L_p(a,b)$, что и требовалось доказать. □

В заключение отметим, что дискретные аналоги уравнений (3.1), (3.7), (3.8) и (5.8) рассмотрены в статье [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00422).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Асхабов С. Н.* Сингулярные интегральные уравнения и уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью. — Майкоп: Майкопский гос. технол. ун-т, 2004.
2. *Асхабов С. Н.* Нелинейные уравнения типа свертки. — М.: Физматлит, 2009.
3. *Асхабов С. Н.* Нелинейные уравнения с весовыми операторами типа потенциала в пространствах Лебега// Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2011. — № 4 (25). — С. 160–164.
4. *Асхабов С. Н.* Приближенное решение нелинейных дискретных уравнений типа свертки// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2012. — *45*. — С. 18–31.
5. *Асхабов С. Н.* Нелинейные интегральные уравнения с ядрами типа потенциала на полуоси// Владикавказ. мат. ж. — 2013. — *15*, № 4. — С. 3–11.
6. *Вайнберг М. М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. — М.: ГИТТЛ, 1956.
7. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1972.
8. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978.
9. *Забрейко П. П., Кошелев А. И. и др.* Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
10. *Качуровский Р. И.* Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах// Усп. мат. наук. — 1968. — *23*, № 2. — С. 121–168.
11. *Мороз В. Б.* Уравнения Гаммерштейна с ядрами типа потенциала Рисса// Труды межд. конф. «Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление». — Минск, Беларусь, 16–20 февр. 1996. — С. 249–254.
12. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
13. *Полянин А. Д., Манжиров А. В.* Справочник по интегральным уравнениям. — М.: Наука, 1978.
14. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
15. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. — М.: Мир, 1985.
16. *Brezis H., Browder F. E.* Some new results about Hammerstein equations// Bull. Am. Math. Soc. (N.S.) — 1974. — *80* (*3*). — С. 567–572.
17. *Brezis H., Browder F. E.* Nonlinear integral equations and systems of Hammerstein type// Adv. Math. — 1975. — *18*. — С. 115–147.
18. *Porter D., Stirling D.* Integral equations. A practical treatment, from spectral theory to applications. — Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1990.

Султан Нажмудинович Асхабов
Чеченский государственный университет
364907, г. Грозный, ул. Шерипова, д. 32
E-mail: askhabov@yandex.ru

UDC 517.988.63

Nonlinear Integral Equations with Kernels of Potential Type on a Segment

© 2016 **S. N. Askhabov**

Abstract. We study various classes of nonlinear equations containing an operator of potential type (Riesz potential). By the monotone operators method in the Lebesgue spaces of real-valued functions $L_p(a,b)$ we prove global theorems on existence, uniqueness, estimates, and methods of obtaining of their solutions. We consider corollaries as applications of our results.

REFERENCES

1. S. N. Askhabov, *Singulyarnye integral'nye uravneniya i uravneniya tipa svertki s monotonnoy nelineynost'yu* [Singular Integral Equations and Equations of Convolution Type with Monotone Nonlinearity], Maykopskiy gos. tekhnol. univ. [Maykop State Techn. Univ.], Maykop, 2004 (in Russian).
2. S. N. Askhabov, *Nelineynye uravneniya tipa svertki* [Nonlinear Equations Convolution of Type], Fizmatlit, Moscow, 2009 (in Russian).
3. Askhabov S. N., "Nelineynye uravneniya s vesovymi operatorami tipa potentsiala v prostranstvakh Lebega" [Nonlinear equations with weight operators of potential type in Lebesgue spaces], *Vestn. Samarskogo gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki* [Bull. Samara State Techn. Univ. Phys.-Math. Sci.], 2011, No. 4 (25), 160–164 (in Russian).
4. Askhabov S. N., "Priblizhennoe reshenie nelineynykh diskretnykh uravneniy tipa svertki" [Approximate solution of nonlinear discrete equations of convolution type], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2012, **45**, 18–31 (in Russian).
5. Askhabov S. N., "Nelineynye integral'nye uravneniya s yadrami tipa potentsiala na poluosi" [Nonlinear integral equations with kernels of convolution type on a semiaxis], *Vladikavkaz. mat. zh.* [Vladikavkaz Math. J.], 2013, **15**, No. 4, 3–11 (in Russian).
6. M. M. Vaynberg, *Variatsionnye metody issledovaniya nelineynykh operatorov* [Variational Methods of Investigation of Nonlinear Operators], GITTL, Moscow, 1956 (in Russian).
7. M. M. Vaynberg, *Variatsionnyy metod i metod monotonnykh operatorov v teorii nelineynykh uravneniy* [Variational Method and Monotone Operators Method in Theory of Nonlinear Equations], Nauka, Moscow, 1972 (in Russian).
8. Kh. Gaevskiy, K. Greger, and K. Zakharias, *Nelineynye operatornye uravneniya i operatornye differentsial'nye uravneniya* [Nonlinear Operator Equations and Operator Differential Equations], Mir, Moscow, 1978 (in Russian).
9. P. P. Zabreyko, A. I. Koshelev, etc., *Integral'nye uravneniya* [Integral Equations], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
10. R. I. Kachurovskiy, "Nelineynye monotonnye operatory v banakhovykh prostranstvakh" [Nonlinear monotone operators in Banach spaces], *Usp. mat. nauk* [Progress Math. Sci.], 1968, **23**, No. 2, 121–168 (in Russian).
11. V. B. Moroz, "Uravneniya Gammershteyna s yadrami tipa potentsiala Rissa" [Hammerstein Equations with kernels of Riesz potential type], Abstr. Int. Conf. "Kraevye zadachi, spetsial'nye funktsii i drobnoe ischislenie" [Boundary-value problems, special functions, and fractional calculus], Minsk, Belarus, 16–20 Feb. 1996, 249–254 (in Russian).
12. A. M. Nakhushev, *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional Calculus and Its Applications], Fizmatlit, Moscow, 2003 (in Russian).
13. A. D. Polyanin and A. V. Manzhirov, *Spravochnik po integral'nym uravneniyam* [Handbook on Integral Equations], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
14. S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some Their Applications], Nauka i tekhnika, Minsk, 1987 (in Russian).
15. R. Edvards, *Ryady Fur'e v sovremennom izlozhenii. T.* 1 [Fourier Series in Contemporary Exposition. Vol. 1], Mir, Moscow, 1985 (in Russian).

16. H. Brezis and F. E. Browder, “Some new results about Hammerstein equations,” *Bull. Am. Math. Soc. (N.S.)*, 1974, **80** (**3**), 567–572.
17. H. Brezis and F. E. Browder, “Nonlinear integral equations and systems of Hammerstein type,” *Adv. Math.*, 1975, **18**, 115–147.
18. D. Porter and D. Stirling, *Integral Equations. A Practical Treatment, from Spectral Theory to Applications*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

S. N. Askhabov
Chechen State University, Grozny, Russia
E-mail: askhabov@yandex.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 60 (2016). С. 23–81

УДК 517+517.9+536

О ПРИРОДЕ ЛОКАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ УРАВНЕНИЙ КАРЛЕМАНА И ГОДУНОВА—СУЛТАНГАЗИНА

© 2016 г. **О. А. ВАСИЛЬЕВА, С. А. ДУХНОВСКИЙ, Е. В. РАДКЕВИЧ**

Аннотация. Для одномерных кинетических уравнений Карлемана и Годунова—Султангазина получены условия локального равновесия для решений задачи Коши с ограниченной энергией и периодическими начальными данными. Более того, доказана экспоненциальная стабилизация к состоянию равновесия.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

В этой статье мы продолжим исследование [2] стабилизации (асимптотической устойчивости) решений нелинейных гиперболических уравнений в частных производных на примере так называемых дискретных моделей кинетического уравнения Больцмана [1,3]. Гипотеза такова: *на больших*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 15-01-03587, № 09-01-12024).

временах решения задачи Коши с ограниченной энергией распадаются на суперпозицию слабо взаимодействующих солитонов и убывающих дисперсионных волн [5, 9, 10].

В этой статье мы ограничимся исследованием стабилизации решений задачи Коши для так называемых одномерных уравнений Карлемана [3, 4]:

$$\partial_t u + \partial_x u = -\frac{1}{\varepsilon}(u^2 - w^2), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{1.1}$$
$$\partial_t w - \partial_x w = \frac{1}{\varepsilon}(u^2 - w^2),$$
$$u|_{t=0} = u^0,\ w|_{t=0} = w^0$$

и Годунова—Султангазина

$$\partial_t u + \partial_x u = \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uw) \tag{1.2}$$
$$\partial_t v = -\frac{2}{\varepsilon}(v^2 - uw)$$
$$\partial_t w - \partial_x w = \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uw)$$
$$v(0) = v^0,\ u(0) = u^0,\ w(0) = w^0. \tag{1.3}$$

Здесь $x \in S^1 = [0, 2\pi]$ и $U(t, 0) = U(t, 2\pi)$ — пространственно-периодические граничные условия, ε — малый параметр, соответствующий числу Кнудсена.

Система (1.1) является кинетическим уравнением Больцмана модельного одномерного газа [1], состоящего из частиц со скоростями $c = 1, -1$ (их плотности соответственно $u = n_1(x, t)$, $w = n_2(x, t)$). Для этой модели не сохраняются импульс и энергия. На примере модели Карлемана хорошо видна суть уравнения Больцмана. Оно описывает смесь «конкурирующих» процессов: релаксации и свободного движения. Релаксация стремится сделать n_1 равным n_2 — «максвеллизировать». Свободное движение разгоняет эти две функции распределения в разные стороны (описывая слабо взаимодействующие солитоны).

Система же (1.2) является кинетическим уравнением Больцмана модельного одномерного газа [1], состоящего из частиц со скоростями $c = 1,\ 0, -1$ (их плотности соответственно $u = n_1(x, t)$, $v = n_2(x, t)$, $w = n_3(x, t)$). Две частицы — одна первого, а вторая третьего типов, сталкиваясь с вероятностью, пропорциональной $uw = n_1(x, t)n_3(x, t)$, вызывают реакцию, переводящую их в две частицы второго типа. В свою очередь, две частицы второго типа, сталкиваясь с вероятностью $v^2 = n_2^2(x, t)$, переходят в одну частицу первого типа и в одну частицу третьего типа. Здесь сохраняется импульс, а энергия — нет. Модель (1.2) при всей схожести с моделью Карлемана не имеет квадратичных диссипирующих интегралов, в связи с чем, как отмечено в [3], получение глобальной теоремы существования затруднительно.

Мы уточним результаты [7] о природе локального равновесия для дискретных кинетических моделей для периодических начальных данных. На наш взгляд, чрезвычайно простое доказательство глобальной разрешимости задачи Коши для одномерного кинетического уравнения (1.1) позволяет исследовать природу локального равновесия и установить скорость стабилизации к состоянию равновесия решений задачи Коши с ограниченной энергией и периодическими начальными данными. Здесь ε — малый параметр, соответствующий числу Кнудсена в кинетической теории. Система Карлемана хорошо исследована. Например, в [4] приводится доказательство Темама теоремы существования и единственности решения двумерной системы Карлемана в классах Соболева $W^{1,2}$. Приводимое нами доказательство позволяет выделить недиссипативную часть решения и свести задачу о существовании глобального решения к разрешимости соответствующего уравнения для секулярных членов. Как мы покажем ниже, для системы Карлемана такое уравнение имеет решение, аннулирующее недиссипативную часть решения задачи Коши. Мы приведем основные идеи доказательств и прежде всего исследуем интегродифференциальный оператор с трансляцией, определяющий линеаризацию задачи Коши.

В заключение — коротко о структуре предлагаемой работы. Первые три пункта раздела 2 об уравнении Карлемана носят предварительный характер. В пунктах 2.4–2.6 этого раздела — вывод условия секулярности, исследование его разрешимости и исследование разрешимости нелинейного уравнения для дисперсионной волны невозмущенной задачи Коши. В пункте 2.7 доказывается разрешимость линеаризованной задачи в весовых L_2 классах. В последнем пункте этого раздела доказывается теорема существования и единственности глобального решения задачи Коши (1.1) и его экспоненциальной стабилизации к состоянию равновесия.

Раздел 3 статьи посвящен исследованию стабилизации периодических решений задачи Коши с конечной энергией для модели Годунова—Султангазина. Здесь развиваются подходы и методы раздела 2 и устанавливается их универсальность для дискретных моделей типа Броудэла. Распределение материла раздела по пунктам идентично предыдущему разделу.

2. Локальное равновесие для уравнения Карлемана

2.1. Малые возмущения. Начнем наши исследования с периодических начальных данных задачи Коши. Мы исследуем задачу Коши (1.1) для малых возмущений состояния равновесия $w_e^2 = u_e^2$, $u_e = w_e > 0$, системы (1.1). Положим

$$u = u_e + w_e^{1/2}\varepsilon^2\widehat{u}, \;\; w = w_e + w_e^{1/2}\varepsilon^2\widehat{w} \tag{2.1}$$

Тогда

$$\begin{gathered}\partial_t\widehat{u} + \partial_x\widehat{u} - 2w_e\frac{1}{\varepsilon}(\widehat{w} - \widehat{u}) = -\varepsilon w_e^{1/2}(\widehat{u} + \widehat{w})(\widehat{u} - \widehat{w}), \quad x \in \mathbb{R}, \; t > 0, \\ \partial_t\widehat{w} - \partial_x\widehat{w} + 2w_e\frac{1}{\varepsilon}(\widehat{w} - \widehat{u}) = \varepsilon w_e^{1/2}(\widehat{u} + \widehat{w})(\widehat{u} - \widehat{w}). \\ \widehat{u}|_{t=0} = \widehat{u}^0, \quad \widehat{w}|_{t=0} = \widehat{w}^0.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Для периодических решении с нулевыми средними

$$\widehat{u}(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} u_k(t)e^{ikx}, \quad \widehat{w}(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} w_k(t)e^{ikx}, \quad \mathbb{Z}_0 = \{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\},$$

введем весовые пространства $\mathcal{H}_\sigma$, $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)$, $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)$ с нормами:

$$\|\widehat{u}|_{t=0}\|^2_{\mathcal{H}_\sigma} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} k^{2\sigma}|u_k^0|^2,$$

$$\|\widehat{u}\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)} = \|\frac{d}{dt}\widehat{u}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma-1})} + \|\widehat{u}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)}$$

$$\|\widehat{u}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)} = \int\limits_0^\infty e^{2\gamma t} \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} k^{2\sigma}|u_k(t)|^2 \, dt.$$

Теорема 2.1. *Существуют такие постоянные $\gamma > 0$, $\gamma = O(\varepsilon)$, $q \in (0,1)$, $q = O(1)$, что для периодических начальных данных $(\widehat{u}^0, \widehat{w}^0)$ с нулевыми средними и ограниченной нормой*

$$\sqrt{\varepsilon}\Big(\|\widehat{u}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|\widehat{w}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma}\Big) \leqslant q \tag{2.3}$$

для $\sigma > 2$ существует глобальное решение $(\widehat{u}, \widehat{w}) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)$ задачи Коши (2.2). *Отсюда следует принцип локального равновесия с экспоненциальной стабилизацией к состоянию равновесия.*

Из (2.2) следует закон сохранения

$$\partial_t(\widehat{u} + \widehat{w}) + \partial_x(\widehat{u} - \widehat{w}) = 0,$$

Для коэффициентов Фурье имеем

$$\frac{d}{dt}u_k + iku_k = -(\frac{d}{dt}w_k - ikw_k).$$

$$\frac{d}{dt}w_k - ikw_k + 2w_e\frac{1}{\varepsilon}(w_k - u_k) = \varepsilon w_e^{1/2}\sum_{k_1+k_2=k}(u_{k_1} + w_{k_1})(u_{k_2} - w_{k_2})$$

Интегрируя первое уравнение, получим

$$u_k = -w_k + (u_k^0 + w_k^0)e^{-ikt} + 2ik \int_0^t e^{ik(s-t)} w_k ds, \quad k \neq 0, \tag{2.4}$$

$$u_0 + w_0 \equiv 0,$$

если предположить, что выполнено

Условие 2.1.

$$u_0^0 + w_0^0 = \int_0^1 (u_0 + w_0) dx = 0.$$

Для $k = 0$ в силу условия (2.1) имеем

$$\frac{d}{dt} w_0 + 4w_e \frac{1}{\varepsilon} w_0 = \varepsilon w_e^{1/2} \sum_{k_1+k_2=0,\ k_1\neq 0} ((u_{k_1} - w_{k_1})(u_{k_2} + w_{k_2})$$

или

$$\frac{d}{dt} w_0 + 4w_e \frac{1}{\varepsilon} w_0 = \varepsilon w_e^{1/2} (d_0 + 2l_0(w) + 4B_0(w, w)), \tag{2.5}$$

где

$$d_0 = \sum_{k_1 \neq 0} (u_{k_1}^0 + w_{k_1}^0)((u_{-k_1}^0 + w_{-k_1}^0),$$

$$l_0(w) = \sum_{k_1 \neq 0} \Big\{ (u_{k_1}^0 + w_{k_1}^0) e^{-ik_1 t} (-ik_1 \int_0^t e^{-ik_1(s-t)} w_{-k_1} ds) +$$

$$+ \Big(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} w_{k_1} ds - w_{k_1} \Big) ((u_{-k_1}^0 + w_{-k_1}^0) e^{ik_1 t} \Big\},$$

$$B_0(w, w) = \sum_{k_1 \neq 0} (-ik_1 \int_0^t e^{-ik_1(s-t)} w_{-k_1} ds) \Big(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} w_{k_1} ds - w_{k_1} \Big).$$

Интегрируя (2.5), получим

$$w_0 = \varepsilon w_e^{1/2} \int_0^t e^{4w_e \frac{1}{\varepsilon}(s-t)} \Big(d_0 + 2l_0(w) + 4B_0(w, w) \Big) ds, \tag{2.6}$$

если

$$w_0^0 = 0.$$

Так же для коэффициентов Фурье w_k для $k \neq 0$ имеем

$$\frac{d}{dt} w_k - ikw_k + 2w_e \frac{1}{\varepsilon}(w_k - u_k) =$$

$$= \varepsilon w_e^{1/2} \Big((u_0 + w_0)(u_k - w_k) + (u_0 - w_0)(u_k + w_k) \Big) +$$

$$+ \varepsilon w_e^{1/2} \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1 k_2 \neq 0} (u_{k_1} - w_{k_1})(u_{k_2} + w_{k_2}).$$

В силу (2.4) и (2.1) получим бесконечную систему обыкновенных уравнений.

$$T_k(w_k) = \frac{d}{dt} w_k - ikw_k + 4w_e \frac{1}{\varepsilon} w_k - 4ikw_e \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{ik(s-t)} w_k ds = \tag{2.7}$$

$$= w_e^{1/2} \frac{1}{\varepsilon} d_k e^{-ikt} - \varepsilon w_e^{1/2} T_k^{add}(w) + \varepsilon w_e^{1/2} \Big(2l_k(w) + 4B_k(w, w) \Big),$$

$$w_k|_{t=0} = w_k^0, \quad k \in \mathbb{Z}_0,$$

где

$$T_k^{add}(w) = 2w_0\Big((u_k^0 + w_k^0)e^{-ikt} + 2ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}w_k ds\Big),$$

$$d_k = 2w_e^{1/2}(u_k^0 + w_k^0) - \varepsilon^2 \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0}(u_{k_1}^0 + w_{k_1}^0)(u_{k_2}^0 + w_{k_2}^0),$$

$$l_k(w) = \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0}\Big\{(u_{k_1}^0 + w_{k_1}^0)e^{-ik_1t}(ik_2\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}w_{k_2}ds) +$$

$$+\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}w_{k_1}ds - w_{k_1}\Big)\big)(u_{k_2}^0 + w_{k_2}^0)e^{-ik_2t}\Big\},$$

$$B_k(w,w) = \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0} ik_2\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}w_{k_2}ds\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}w_{k_1}ds - w_{k_1}\Big).$$

Теперь перейдем к нулевым начальным условиям, положив

$$w_k = w_k^0 e^{(ik-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} + y_k.$$

Имеем

$$-4ikw_e\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}w_k ds = -4ikw_e\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}y_k ds -$$

$$-\frac{2ik}{(ik-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_e w_k^0\frac{1}{\varepsilon}(e^{(ik-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ikt}),$$

$$l_k(w) = l_k(y) - \frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0}\Big\{(u_{k_1}^0 + w_{k_1}^0)\frac{ik_2}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0 +$$

$$+\frac{ik_1}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0(u_{k_2}^0 + w_{k_2}^0)\Big\}e^{-ikt} +$$

$$+e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}\sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0}\Big\{(u_{k_1}^0 + w_{k_1}^0)e^{-ik_1t}\frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0 +$$

$$+\Big(\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0 - w_{k_1}^0\Big)\big)(u_{k_2}^0 + w_{k_2}^0)e^{-ik_2t}\Big\},$$

$$B_k(w,w) = \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0}\Big\{\frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0 e^{-ikt} +$$

$$+e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}\Big[\frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0 e^{ik_2t}\times$$

$$\times\Big(\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0(e^{(ik_1-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_1t}) - w_k^0 e^{(ik_1-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t}\Big) -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0 e^{-ik_2t}\ e^{ik_1t}\Big(\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0 - w_{k_1}^0 +\Big)\Big]$$

$$+\frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0(e^{(ik_2-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_2t})\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}y_{k_1}ds - y_{k_1}\Big) +$$

$$+ik_2\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}y_{k_2}ds\Big(\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0(e^{(ik_1-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_1t}) - w_k^0 e^{(ik-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t}\Big) +$$

$$+ ik_2 \int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)} y_{k_2} ds \Big(ik_1 \int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)} y_{k_1} ds - y_{k_1} \Big).$$

Тогда

$$B_k(y,y) = \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0} ik_2 \int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)} y_{k_2} ds \Big(ik_1 \int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)} y_{k_1} ds - y_{k_1} \Big),$$

$$L_k(y) = l_k(y) +$$

$$+ \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0} \Big\{ \frac{1}{2} \frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_2} (e^{(ik_2 - 4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_2 t}) \Big(ik_1 \int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)} y_{k_1} ds - y_{k_1} \Big) +$$

$$+ ik_2 \int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)} y_{k_2} ds \Big(\frac{1}{2} \frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_1} (e^{(ik_1 - 4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_1 t}) - w^0_k e^{(ik - 4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} \Big) \Big\},$$

$$D_k = 2w_e^{1/2}(u^0_k - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_k) + \varepsilon^2 \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0} \Big((u^0_{k_1} + w^0_{k_1})(u^0_{k_2} + w^0_{k_2}) -$$

$$- (u^0_{k_1} + w^0_{k_1}) \frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_2} - \frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_1} (u^0_{k_2} + w^0_{k_2}) +$$

$$+ \frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_2} \frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_1} \Big\} = 2w_e^{1/2}(u^0_k - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_k) -$$

$$+ \varepsilon^2 \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0} \Big(u^0_{k_1} - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_1} \Big) \Big(u^0_{k_2} - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_2} \Big),$$

$$f_k(t) = -\frac{2ik}{(ik - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w_e w^0_k \frac{1}{\varepsilon} e^{ikt} +$$

$$+ 4\varepsilon w_e^{1/2} \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0} \Big\{ \frac{1}{2} \frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_2} e^{ik_2 t} \times$$

$$\times \Big(\frac{1}{2} \frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_1} (e^{(ik_1 - 4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_1 t}) - w^0_k e^{(ik_1 - 4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} \Big) -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_2} e^{-ik_2 t}\ e^{ik_1 t} \Big(\frac{1}{2} \frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_1} - w^0_{k_1} \Big) \Big\} +$$

$$+ 2\varepsilon w_e^{1/2} \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0} \Big\{ \frac{1}{2} \frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_2} e^{ik_2 t} \times$$

$$\times \Big(\frac{1}{2} \frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_1} (e^{(ik_1 - 4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_1 t}) - w^0_k e^{(ik_1 - 4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} \Big) -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_2} e^{-ik_2 t}\ e^{ik_1 t} \Big(\frac{1}{2} \frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w^0_{k_1} - w^0_{k_1} \Big) \Big\}.$$

Это позволяет переписать систему (2.7)

$$\frac{d}{dt} y_k - iky_k + 4w_e \frac{1}{\varepsilon}\, y_k - 4ikw_e \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^t e^{ik(s-t)} y_k ds = \tag{2.8}$$

$$= w_e^{1/2} \frac{1}{\varepsilon} D_k e^{-ikt} + f_k(t) e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t} +$$

$$+ \varepsilon w_e^{1/2} \Big(2L_k(y) + 4B_k(y,y) \Big) - \varepsilon w_e^{1/2} T^{add}_k(w),$$

$$w_k|_{t=0} = w^0_k, \quad k \in \mathbb{Z}_0.$$

Здесь $T_k^{add}(w)$ — оператор возмущения базовой системы

$$\frac{d}{dt}y_k - iky_k + 4w_e\frac{1}{\varepsilon}\,y_k - 4ikw_e\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}y_k ds = \tag{2.9}$$

$$= w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}D_k e^{-ikt} + f_k(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t} + \varepsilon w_e^{1/2}\Big(2L_k(y) + 4B_k(y,y)\Big),$$

$$w_k|_{t=0} = w_k^0, \quad k \in \mathbb{Z}_0,$$

исследованию задачи Коши которой мы посвятим следующий пункт.

Нулевая мода. Далее имеем

$$l_0(w) = l_0(y) + e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t}f_0^L(t) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=0,\ k_1k_2\neq 0}\Big\{(u_{k_1}^0 + w_{k_1}^0)\frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0 +$$

$$+\frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0(u_{k_2}^0 + w_{k_2}^0)\Big\},$$

$$f_0^L(t) = \sum_{k_1+k_2=0,\ k_1k_2\neq 0}\Big\{(u_{k_1}^0 + w_{k_1}^0)e^{-ik_1t}\frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0 +$$

$$+\Big(\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0 - w_{k_1}^0\Big)\Big)(u_{k_2}^0 + w_{k_2}^0)e^{-ik_2t}\Big\},$$

$$B_0(w,w) = f_0^B(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t} + l_0^B(y) + B_0(y,y) +$$

$$+\sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0}\Big\{\frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0,$$

$$B_0(y,y) = \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0}\Big\{ik_2\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}y_{k_2}ds\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}y_{k_1}ds - y_{k_1}\Big)\Big\},$$

$$l_0^B(y) = \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0}\Big\{\frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0(e^{(ik_2-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_2t})\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}y_{k_1}ds - y_{k_1}\Big) +$$

$$+ik_2\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}y_{k_2}ds\Big(\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0(e^{(ik_1-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_1t}) - w_k^0e^{(ik-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t}\Big)\Big\},$$

$$f_0^B(t) = \frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0e^{ik_2t}\times$$

$$\times\Big(\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0(e^{(ik_1-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_1t}) - w_k^0e^{(ik_1-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t}\Big) -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0e^{-ik_2t}\ e^{ik_1t}\Big(\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0 - w_{k_1}^0\Big).$$

Отсюда

$$w_0 = \varepsilon w_e^{1/2}\int\limits_0^t e^{4w_e\frac{1}{\varepsilon}(s-t)}\Big(D_0 + 2L_0(y) + 4B_0(y,y) + f_0(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}\Big)ds, \tag{2.10}$$

где $L_0(y) = l_0(y) + 2l_0^B(y)$,

$$D_0 = \sum_{k_1\in\mathbb{Z}_0}\Big(u_{k_1}^0 - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0\Big)\Big(u_{-k_1}^0 + \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1 + 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{-k_1}^0\Big).$$

Определение. *Фурье-решением* задачи Коши для системы (2.2) будем называть систему абсолютно непрерывных коэффициентов Фурье $U_k = (u_k, w_k)$, $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих системе (2.7), (2.4), (2.6) для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$.

2.2. Конечная аппроксимация. Для любого $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим конечную аппроксимацию:

$$T_k^{(m)}(y_k^{(m)}) = \frac{d}{dt}y_k^{(m)} - iky_k^{(m)} + 4w_e\frac{1}{\varepsilon}\,y_k^{(m)} - 4ikw_e\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}y_k^{(m)}ds = \tag{2.11}$$

$$= w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}D_k^{(m)}e^{-ikt} + f_k^{(m)}(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t} + \varepsilon w_e^{1/2}\Big(2L_k^{(m)}(y^{(m)}) + 4B_k^{(m)}(y^{(m)}, y^{(m)})\Big),$$

$$w_k|_{t=0} = w_k^0, \quad k \in \mathbb{Z}_0.$$

Для нулевой моды положим

$$w_0^{(m)} = \varepsilon w_e^{1/2}\int\limits_0^t e^{4w_e\frac{1}{\varepsilon}(s-t)}\Big(D_0^{(m)} + 2L_0^{(m)}(y^{(m)}) + \tag{2.12}$$

$$+4B_0^{(m)}(y^{(m)}, y^{(m)} + f_0^{(m)}(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t})\Big)ds.$$

Здесь

$$D_k^{(m)} = 2w_e^{1/2}(u_k^0 - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_k^0) +$$

$$+\varepsilon^2\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big(u_{k_1}^0 - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0\Big)\Big(u_{k_2}^0 - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0\Big),$$

$$L_k^{(m)}(y) = l_k^{(m)}(y) +$$

$$+2\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{\frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0(e^{(ik_2-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_2t})\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}y_{k_1}ds - y_{k_1}\Big) +$$

$$+ik_2\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}y_{k_2}ds\Big(\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0(e^{(ik_1-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} - e^{-ik_1t}) - w_k^0e^{(ik-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t}\Big)\Big\}.$$

Остальные функции $f_k^{(m)}(t), B_k^{(m)}(y,y), f_0^{(m)}(t), B_0^{(m)}(y,y), D_0^{(m)}, L_0^{(m)}$ определяются аналогично.

Теорема 2.2. *Пусть* $\sigma > 1$, $u|_{t=0}, v|_{t=0}, w|_{t=0} \in H^\sigma(0, 2\pi)$ *и средние значения* $u_0^0 = v_0^0 = w_0^0 = 0$. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$ *фиксировано. Тогда существует* $T^* > 0$, *возможно, зависящее от* m, *такое что усеченная система* (2.11), (2.12) *имеет единственное решение на интервале* $[0, T^*]$. *Как мы покажем ниже, решение* $U^{(m)} = \{w_0^{(m)}(t), y_k^{(m)}(t),\ |k| = 1\dots, m\}$, *при дополнительных так называемых условиях несекулярности, может быть продолжено на максимальный интервал* $[0, T^*_{max})$ *такой, что* $T^*_{max} = +\infty$, *если сумма норм* $\|u|_{t=0}\|_{H^\sigma(0,2\pi)} + \|v|_{t=0}\|_{H^\sigma(0,2\pi)} + \|w|_{t=0}\|_{H^\sigma(0,2\pi)}$ *достаточно мала.*

Следствие 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2. *Тогда существует глобальное Фурье-решение задачи Коши для системы* (2.2).

2.3. Невозмущенная задача Коши. Решим сначала невозмущенную задачу Коши

$$\frac{d}{dt}y_k^{(m)} - iky_k^{(m)} + 4w_e\frac{1}{\varepsilon}\,y_k^{(m)} - 4ikw_e\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}y_k^{(m)}ds = \tag{2.13}$$

$$= w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}D_k^{(m)}e^{-ikt} + f_k^{(m)}(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t} + \varepsilon w_e^{1/2}\Big(2L_k^{(m)}(y^{(m)}) + 4B_k^{(m)}(y^{(m)}, y^{(m)})\Big),$$

$$w_k|_{t=0} = w_k^0, \quad k \in \mathbb{Z}_0.$$

Введем векторное пространство $Q_m \in \mathcal{H}_\sigma^{(m)},\ Q_m = (Q_k^{(m)},\ |k| \leqslant m, k \neq 0)$ с нормой

$$\|Q_m\|^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} = \sum_{k,\ |k|\leqslant m, k\neq 0} k^{2\sigma}|Q_k^{(m)}|^2.$$

Как мы покажем ниже (лемма 2.3), для некоторого $\gamma > 0$ для любого $k \in \mathbb{Z}_0$ существует единственное решение задачи Коши

$$T_k(x_k) = e^{-ikt}, \quad x_k|_{t=0} = 0 \tag{2.14}$$

принадлежащее $x_k(t) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$. Такое решение будем обозначать через $x_k(t) = T_k^{-1}(e^{-ikt})$. Так же, единственное решение задачи Коши

$$T_k(x_k) = z_k, \quad x_k|_{t=0} = 0,\ z_k(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+), \tag{2.15}$$

$x_k(t) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, будем обозначать через $x_k(t) = T_k^{-1}(z_k)$.

Решение (2.13) будем искать в виде

$$y_k^{(m)} = Q_k^{(m)} T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)}), \quad z_k^{(m)}|_{t=0} = 0,$$
$$Q_m \in \mathcal{H}_\sigma^{(m)}, \quad z^{(m)} \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)}),$$

где $x^{(m)} = (x_k^{(m)},\ |k| \leqslant m, k \neq 0)$, $z^{(m)} = (z_k^{(m)},\ |k| \leqslant m, k \neq 0)$, норма

$$\|x^{(m)}\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} = \|\frac{d}{dt}x^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma-1}^{(m)})} + \|x^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})},$$

$$\|x^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} = \int\limits_0^\infty e^{2\gamma t} \sum_{k,\ |k|\leqslant m, k\neq 0} k^{2\sigma}|x_k^{(m)}(t)|^2\ dt.$$

Тогда

$$z_k^{(m)} = \Big(w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}D_k^{(m)} - Q_k\Big)e^{-ikt} + f_k^{(m)}(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t} + \tag{2.16}$$
$$+\varepsilon w_e^{1/2}\Big(2L_k^{(m)}(Q_k T_k^{-1}(e^{-ikt})) + 2L_k^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)})) +$$
$$+4B_k^{(m)}(Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)}), Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)}))\Big),$$

Имеем

$$B_k^{(m)}(Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)}), Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)}))\Big) =$$
$$= L_k^B(T_k^{-1}(z_k^{(m)})) + B_k^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}), T_k^{-1}(z_k^{(m)})) +$$
$$+ \sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m} \Big\{ik_2 \int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}(Q_{k_2}^{(m)}T_{k_2}^{-1}(e^{-ik_2t})ds \times$$
$$\times \Big(ik_1 \int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}Q_{k_1}^{(m)}T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t})ds - Q_{k_1}^{(m)}T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t})\Big)\Big\},$$

$$L_k^B(T_k^{-1}(z_k^{(m)})) = \sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m} \Big\{ik_2 \int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}(Q_{k_2}^{(m)}T_{k_2}^{-1}(e^{-ik_2t}) \times$$
$$\times \Big(ik_1 \int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)})ds - T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)})\Big) +$$
$$+ ik_2 \int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)})ds \times$$

$$\times\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}Q_{k_1}^{(m)}T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t})ds-Q_{k_1}^{(m)}T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t})\Big)\Big\},$$

$$B_k^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}),T_k^{-1}(z_k^{(m)}))=\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{ik_2\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)})ds\times$$

$$\times\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}ds-T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)})\Big)\Big\}.$$

Теперь применим трюк, который позволит выделить в (2.16) неинтегрируемые в $\mathbb{R}_+$ члены (солитонную часть). Заметим, что

$$ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}Q_kT_k^{-1}(e^{-iks})ds=-\frac{\varepsilon}{4w_e}Q_ke^{-ikt}+G_k, \tag{2.17}$$

где в силу приведенных выше свойств оператора T_k^{-1} функция

$$G_k=\frac{\varepsilon}{4w_e}Q_k\Big(\frac{d}{dt}T_k^{-1}(e^{-ikt})-ikT_k^{-1}(e^{-ikt})+4w_e\frac{1}{\varepsilon}T_k^{-1}(e^{-ikt})\Big)\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+).$$

Тогда

$$\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{ik_2\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}(Q_{k_2}^{(m)}T_{k_2}^{-1}(e^{-ik_2t})ds\times$$

$$\times\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}Q_{k_1}^{(m)}T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t})ds-Q_{k_1}^{(m)}T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t})\Big)\Big\}=$$

$$=H_k^B(t)+\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\frac{\varepsilon}{4w_e}Q_{k_2}\frac{\varepsilon}{4w_e}Q_{k_1}e^{-ikt}.$$

Отсюда следует, что

$$B_k^{(m)}(Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt})+T_k^{-1}(z_k^{(m)}),Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt})+T_k^{-1}(z_k^{(m)}))\Big)=$$

$$=H_k^B(t)+L_k^B(T_k^{-1}(z_k^{(m)}))+B_k^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}),T_k^{-1}(z_k^{(m)}))+$$

$$+\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\frac{\varepsilon}{4w_e}Q_{k_2}\frac{\varepsilon}{4w_e}Q_{k_1}e^{-ikt}.$$

Так же получим, что

$$L_k^{(m)}(Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt}))=l_k^{(m)}(Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt})+h_k^L(t)+g_k^L(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}+$$

$$+\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{\frac{ik_2}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0\frac{\varepsilon}{4w_e}Q_{k_1}+\frac{\varepsilon}{4w_e}Q_{k_2}\frac{ik_1}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0\Big\}e^{-ikt},$$

$$l_k^{(m)}(Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt})=h_k^l(t)-\sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0}\Big\{(u_{k_1}^0+w_{k_1}^0)\frac{\varepsilon}{4w_e}Q_{k_2}+\frac{\varepsilon}{4w_e}Q_{k_1}(u_{k_2}^0+w_{k_2}^0)\Big\}.e^{-ikt}$$

Окончательно получим

$$L_k^{(m)}(Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt}))=H_k^L(t)+g_k^L(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{\frac{ik_2}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}+\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_2}\frac{ik_1}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0-$$

$$-(u_{k_1}^0+w_{k_1}^0)\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_2}+\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}(u_{k_2}^0+w_{k_2}^0)\Big\}e^{-ikt}=H_k^L(t)+g_k^L(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}+$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{(u^0_{k_1}-\frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{k_1})\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_2}+$$
$$+\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}(u^0_{k_2}-\frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{k_2})\Big\}e^{-ikt}.$$

Отсюда

$$4B^{(m)}_k(Q^{(m)}_kT^{-1}_k(e^{-ikt})+T^{-1}_k(z^{(m)}_k),Q^{(m)}_kT^{-1}_k(e^{-ikt})+T^{-1}_k(z^{(m)}_k))\Big)+$$
$$+2L^{(m)}_k(Q_kT^{-1}_k(e^{-ikt})+T^{-1}_k(z^{(m)}_k))=2(H^L_k(t)+g^L_k(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t})+$$
$$+4H^B_k(t)+4L^B_k(T^{-1}_k(z^{(m)}_k))+4B^{(m)}_k(T^{-1}_k(z^{(m)}_k),T^{-1}_k(z^{(m)}_k))+2L^{(m)}_k(T^{-1}_k(z^{(m)}_k)+$$
$$-\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{(u^0_{k_1}-\frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{k_1})\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_2}+$$
$$+\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}(u^0_{k_2}-\frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{k_2})-\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_2}\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}\Big\}e^{-ikt}.$$

Положим

$$S_k(Q)=-\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{(u^0_{k_1}-\frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{k_1})\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_2}+$$
$$+\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}(u^0_{k_2}-\frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{k_2})-\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_2}\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}\Big\}.$$

В переменных $(z^{(m)}_k,Q^{(m)}_k)$ система (2.16)

$$z^{(m)}_k=\Big(w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}D^{(m)}_k-Q^{(m)}_k+\varepsilon w_e^{1/2}S^{(m)}_k(Q^{(m)})\Big)e^{-ikt}+f^{(m)}_k(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}+ \tag{2.18}$$
$$+\varepsilon w_e^{1/2}\Big(2(H^L_k(t)+g^L_k(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t})+$$
$$+4H^B_k(t)+4L^B_k(T^{-1}_k(z^{(m)}_k))+4B^{(m)}_k(T^{-1}_k(z^{(m)}_k),T^{-1}_k(z^{(m)}_k))+2L^{(m)}_k(T^{-1}_k(z^{(m)}_k),$$

Здесь

$$\|z^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}=\int_0^\infty e^{2\gamma t}|||z^{(m)}(t)|||^2_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}dt.$$

Если выполнено условие секулярности

$$w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}D^{(m)}_k-Q^{(m)}_k+\varepsilon w_e^{1/2}S^{(m)}_k(Q^{(m)})=0,\ |k|-1,\dots,m. \tag{2.19}$$

получаем нелинейное уравнение

$$z^{(m)}_k=f^{(m)}_k(t)+\varepsilon w_e^{1/2}g^L_k(t))e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}+\varepsilon w_e^{1/2}(2(H^L_k(t)+4H^B_k(t))+ \tag{2.20}$$
$$+\varepsilon w_e^{1/2}\Big(4L^B_k(T^{-1}_k(z^{(m)}_k))+4B^{(m)}_k(T^{-1}_k(z^{(m)}_k),T^{-1}_k(z^{(m)}_k))+2L^{(m)}_k(T^{-1}_k(z^{(m)}_k)\Big)$$

в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})$.

Нулевая мода. Теперь сделаем подстановку

$$y_k=Q_kT^{-1}_k(e^{-ikt})+T^{-1}_k(z_k),\quad k\in\mathbb{Z}_0$$

в уравнении (2.12) нулевой моды. Тогда, так же как выше, получим

$$L_0(Q_kT^{-1}_k(e^{-ikt})=l^B_0(Q_kT^{-1}_k(e^{-ikt})+l_0(Q_kT^{-1}_k(e^{-ikt})=$$
$$L_0(T^{-1}_k(z_k))=l^B_0(T^{-1}_k(z_k))+l_0(T^{-1}_k(z_k)=$$
$$l^B_0(Q_kT^{-1}_k(e^{-ikt})=f^{B,l}_0(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}+h^{B,l}_0(t)+$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0}\Big\{\frac{ik_2}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{k_2}\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}+\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_2}\frac{ik_1}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{k_1}\Big\},$$

$$l_0(Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt})) = h_0^l(t) - \frac{1}{2}\sum_{k_1\neq 0}\Big\{(u^0_{k_1}+w^0_{k_1})\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{-k_1}e^{ik_1t} + \frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}((u^0_{-k_1}+w^0_{-k_1})\Big\},$$

$$B_0((Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt}),(Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt})) = h_0^B(t) + \frac{1}{4}\sum_{k_1\neq 0}\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{-k_1}\frac{\varepsilon}{4w_e}Q_{k_1}ds.$$

Отсюда

$$2L_0(Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt})) + 4B_0(Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt}),Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt}) =$$
$$= 2h_0^l(t) + 4f_0^{B,l}(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t} + 4h_0^{B,l}(t) + 4h_0^B(t) -$$
$$+\sum_{k_1\neq 0}\Big\{\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{-k_1}\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}ds +$$
$$-(u^0_{k_1} - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})})\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{-k_1} - \frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}(u^0_{-k_1} + \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1+2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{-k_1})\Big\}.$$

Положим

$$S_0(Q) = \sum_{k_1\neq 0}\Big\{\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{-k_1}\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}ds +$$
$$-(u^0_{k_1} - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})})\frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{-k_1} - \frac{\varepsilon}{2w_e}Q_{k_1}(u^0_{-k_1} + \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1+2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{-k_1})\Big\}$$

Теперь заметим, что (2.12) можно переписать в виде

$$w_0^{(m)} = \varepsilon w_e^{1/2}\int\limits_0^t e^{4w_e\frac{1}{\varepsilon}(s-t)}\Big(D_0 + S_0(Q) + \tag{2.21}$$
$$+ 2h_0^l(t) + (4f_0^{B,l}(t) + f_0(t))e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t} + 4(h_0^{B,l}(t) + h_0^B(t)) +$$
$$+ 2\mathcal{L}_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)})) + 4B_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)}),T_k^{-1}(z_k^{(m)}))\Big)ds,$$

где $\mathcal{L}_0(y) = l_0(y) + 2l_0^B(y) + 2B_0(y,Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt})) + 2B_0(Q_kT_k^{-1}(e^{-ikt}),y)$. Условие секулярности нулевой моды записывается в виде

$$D_0 + S_0(Q) = 0. \tag{2.22}$$

Тогда (2.12) сводится к уравнению

$$w_0^{(m)} = \varepsilon w_e^{1/2}\int\limits_0^t e^{4w_e\frac{1}{\varepsilon}(s-t)}\Big(2h_0^l(t) + (4f_0^{B,l}(t) + f_0(t))e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t} + \tag{2.23}$$
$$+ 4(h_0^{B,l}(t) + h_0^B(t)) + 2\mathcal{L}_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)})) + 4B_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)}),T_k^{-1}(z_k^{(m)}))\Big)ds,$$

где правая часть принадлежит $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, если $z_k^{(m)}\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, $|k| = 1,\ldots,m$.

Окончательно получили систему нелинейных уравнений

$$z_k^{(m)} = (f_k^{(m)}(t) + \varepsilon w_e^{1/2}g_k^L(t))e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t} + \varepsilon w_e^{1/2}(2(H_k^L(t) + 4H_k^B(t)) - \tag{2.24}$$
$$+\varepsilon w_e^{1/2}\Big(4L_k^B(T_k^{-1}(z_k^{(m)})) + 4B_k^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}),T_k^{-1}(z_k^{(m)})) + 2L_k^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)})\Big),$$
$$w_0^{(m)} = \varepsilon w_e^{1/2}\int\limits_0^t e^{4w_e\frac{1}{\varepsilon}(s-t)}\Big(2h_0^l(t) + (4f_0^{B,l}(t) + f_0(t))e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t} +$$
$$+ 4(h_0^{B,l}(t) + h_0^B(t)) + 2\mathcal{L}_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)})) + 4B_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)}),T_k^{-1}(z_k^{(m)}))\Big)ds$$

в гильбертовом пространстве $(L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+))^{2m}$. Таким образом, окончательно, условие секулярности запишется в виде:

$$w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}D_k^{(m)} - Q_k^{(m)} + \varepsilon w_e^{1/2}S_k^{(m)}(Q^{(m)}) = 0,\ |k| - 1, \dots, m, \qquad (2.25)$$
$$D_0 + S_0(Q) = 0.$$

2.4. Локальное равновесие. Теперь заметим, что конечная аппроксимация первой компоненты скорости

$$u_k^{(m)} = \Big(u_k^0 - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{ik - 2w_e\frac{1}{\varepsilon}}w_k^0\Big)e^{-ikt} - w_k^0 e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}\Big(e^{-ikt} - \frac{ik}{ik - 2w_e\frac{1}{\varepsilon}}e^{ikt}\Big) - \qquad (2.26)$$
$$- y_k^{(m)} + 2ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}y_k^{(m)}ds, \quad k \neq 0,$$

в силу (2.17) в переменных (Q_k, z_k) запишется в виде

$$u_k^{(m)} = \Big(u_k^0 - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{ik - 2w_e\frac{1}{\varepsilon}}w_k^0 - \frac{\varepsilon}{2w_e}Q_k\Big)e^{-ikt} + \qquad (2.27)$$
$$+ \frac{\varepsilon}{2w_e(1 - \frac{1}{4w_e}a_0^{(m)}\varepsilon^4)}Q_k\Big(\frac{d}{dt}T_k^{-1}(e^{-ikt}) - ikT_k^{-1}(e^{-ikt}) + 4w_e\frac{1}{\varepsilon}T_k^{-1}(e^{-ikt})\Big) - \qquad (2.28)$$
$$- w_k^0 e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}\Big(e^{-ikt} - \frac{ik}{ik - 2w_e\frac{1}{\varepsilon}}e^{ikt}\Big) -$$
$$- Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt}) - T_k^{-1}(z_k^{(m)}) + 2ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}T_k^{-1}(z_k^{(m)})ds, \quad k \neq 0,$$

При выполнении условия секулярности (3.28) из приведенных выше оценок получим

$$u_k^{(m)} \to \ \Big(u_k^0 - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{ik - 2w_e\frac{1}{\varepsilon}}w_k^0 - \frac{\varepsilon}{2w_e}Q_k\Big)e^{-ikt}, \qquad (2.29)$$
$$w_k^{(m)} \to 0, \quad t \to \infty$$

Таким образом, при выполнении принципа локального равновесия,

$$Q_k = \frac{2w_e}{\varepsilon}\Big(u_k^0 - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{ik - 2w_e\frac{1}{\varepsilon}}w_k^0\Big), \quad |k| = 1\dots, m, \qquad (2.30)$$

должно быть решением условия секулярности (2.25)

2.5. Условие секулярности. Итак, проверим, что

$$Q_k = \frac{2w_e}{\varepsilon}\Big(u_k^0 - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{ik - 2w_e\frac{1}{\varepsilon}}w_k^0\Big), \quad |k| = 1, \dots, m. \qquad (2.31)$$

есть решение условия секулярности (2.25). Действительно, в этом случае

$$D_k^{(m)} = 2w_e^{1/2}(u_k^0 - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_k^0) +$$
$$+ \varepsilon^2 \sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m} \Big(u_{k_1}^0 - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0\Big)\Big(u_{k_2}^0 - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0\Big),$$

а также

$$S_k(Q) = -\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m} \Big(u_{k_1}^0 - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0\Big)\Big(u_{k_2}^0 - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon}}w_{k_2}^0\Big),$$

откуда следует справедливость первых $2m$ уравнений($|k| = 1, \dots, m$) условия секулярности (2.25).

Теперь проверим, что (2.31) удовлетворяет и последнему уравнению условия секулярности (2.25). В этом случае имеем

$$S_0(Q) = -\sum_{k_1\neq 0}\Big\{\Big(u^0_{-k_1} + \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{ik_1 + 2w_e\frac{1}{\varepsilon}}w^0_{-k_1}\Big)\Big(u^0_{k_1} - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon}}w^0_{k_1}\Big),$$

откуда следует справедливость последнего уравнения в условии секулярности (2.25). Тем самым разрешимость системы условий секулярности доказана.

Теперь докажем единственность решения в классе решений $Q^{(m)} \in \mathcal{H}^{(m)}_\sigma$, $Q^{(m)} = (Q^{(m)}_k, |k| \leqslant m,$ $k \neq 0)$. Пусть помимо решения $Q^{(1)}_k = \frac{2w_e}{\varepsilon}\Big(u^0_k - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{ik-2w_e\frac{1}{\varepsilon}}w^0_k\Big), |k| = 1,\dots,m$, есть второе решение условия секулярности $Q^{(2)}_k, |k| = 1,\dots,m$. Положим $\mathcal{Q}_k = Q^{(2)}_k - Q^{(1)}_k$. В силу (2.25) получим

$$\mathcal{Q}_k = \varepsilon w_e^{1/2}\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{(u^0_{k_1} - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{k_1})\frac{\varepsilon}{2w_e}\mathcal{Q}_{k_2} +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2w_e}\mathcal{Q}_{k_1}(u^0_{k_2} - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_2 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{k_2}) - (\frac{\varepsilon}{2w_e})^2(\mathcal{Q}_{k_2}Q^{(2)}_{k_1} + \mathcal{Q}_{k_1}Q^{(1)}_{k_1}\Big\}.$$

Сделаем нормировку $2w_eX_k = \varepsilon\mathcal{Q}_k$, $2w_e\widehat{Q}^{(j)}_k = \varepsilon Q^{(2)}_k, j = 1,2$. Тогда

$$X_k = \varepsilon^2\frac{1}{2w_e^{1/2}}\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}(u^0_{k_1} - \frac{2w_e\frac{1}{\varepsilon}}{(ik_1 - 2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{k_1} - \widehat{Q}^{(2)}_{k_1})X_{k_2}. \tag{2.32}$$

Введем нормы

$$|||X|||_{\sigma,m} = \sup_{|k|=1,\dots,m}|k|^\sigma\ |X_k|,\ \|X\|^2_{\mathcal{H}^{(m)}_\sigma} = \sum_{|k|=1,\dots,m,k\neq 0}|k|^{2\sigma}\ |X_k|^2.$$

Тогда

$$|||X|||_{\sigma,m} \leqslant \tag{2.33}$$

$$\leqslant \varepsilon^2\frac{C_{\sigma,m}}{2w_e^{1/2}}\ |||X|||_{\sigma,m}\Big(|||\widehat{Q}^{(m)}|||_{\sigma,m} + |||u^0|||_{\sigma,m} + |||w^0|||_{\sigma,m}\Big),$$

где

$$C_{\sigma,m} = \frac{1}{2w_e(1-\frac{1}{4w_e}a^{(m)}_0\varepsilon^4)}\sup_{|k|=1,\dots,m}\sum_{k_1+k_2=k,\ k_1k_2\neq 0,|k|,|k_1|,|k_2|\leqslant m}\Big(\frac{1}{|k_2|^\sigma} + \frac{1}{|k_1|^\sigma}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_\sigma}{w_e(1-\frac{1}{4w_e}a^{(m)}_0\varepsilon^4)},\quad c_\sigma = \sum_{|k|\geqslant 1}\frac{1}{|k|^\sigma}.$$

Отсюда следует, что если для некоторого $q \in (0,1)$ имеем

$$\varepsilon^2\frac{C_{\sigma,m}}{2w_e^{1/2}}\ \Big(|||\widehat{Q}^{(2)}|||_{\sigma,m} + |||u^0|||_{\sigma,m} + |||w^0|||_{\sigma,m}\Big) \leqslant q < 1$$

то $X = 0$, т. е. решение системы секулярности единственно в классе решений

$$|||\widehat{Q}^{(2)}|||_{\sigma,m} < \Big(\frac{2qw_e^{1/2}}{\varepsilon^2C_{\sigma,m}} - |||u^0|||_{\sigma,m} + |||w^0|||_{\sigma,m}\Big) \tag{2.34}$$

если

$$\varepsilon^2\ \Big(|||u^0|||_{\sigma,m} + |||w^0|||_{\sigma,m}\Big) \leqslant \frac{2qw_e^{1/2}}{C_{\sigma,m}} \tag{2.35}$$

В то же время имеем

$$|||\widehat{Q}^{(1)}|||_{\sigma,m} \leqslant \Big(|||u^0|||_{\sigma,m} + |||w^0|||_{\sigma,m}\Big),$$

и это решение лежит в окрестности (2.34), если

$$\varepsilon^2 \left(|||u^0|||_{\sigma,m} + |||w^0|||_{\sigma,m}\right) \leqslant \frac{q w_e^{1/2}}{C_{\sigma,m}}. \tag{2.36}$$

Лемма 2.1. *Для любых* $\sigma > 1$, $\varepsilon \leqslant 0$ *существует единственное решение условия секулярности* (2.25)*, если для некоторого* $q \in (0,1)$ *справедлива оценка* (2.36).

2.6. Нелинейное уравнение. Теперь перейдем к исследованию нелинейного уравнения в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})$:

$$z_k^{(m)} = \frac{1}{\varepsilon} e^{-4w_e \frac{1}{\varepsilon} t} \mathcal{F}_k^{(m)}(t) + \varepsilon \mathcal{G}_k^{(m)}(t) + \tag{2.37}$$

$$+ \varepsilon w_e^{1/2} \Big\{ 4B_k^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}), Q_k T_k^{-1}(e^{-ikt})) + 4B_k^{(m)}(Q_k T_k^{-1}(e^{-ikt}), T_k^{-1}(z_k^{(m)})) +$$

$$+ 2L_k^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)})) + 4B_k^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}), T_k^{-1}(z_k^{(m)})) - T^{add}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}) \Big\}.$$

где $Z_m, \mathcal{G}_m \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{m,\sigma})$ и $\mathcal{F}_m \in L_\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{m,\sigma})$. Здесь $Z_m(t) = (z_k^{(m)}(t),\ |k| \leqslant m,\ k \neq 0)$; $\mathcal{G}_m(t) = (\mathcal{G}_k^{(m)}(t),\ |k| \leqslant m,\ k \neq 0)$, $\mathcal{F}_m(t) = (\mathcal{F}_k^{(m)}(t),\ |k| \leqslant m,\ k \neq 0)$,

$$T^{add}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}) = 2w_0 \Big((u_k^0 - \frac{2w_e \frac{1}{\varepsilon}}{(ik - 2w_e \frac{1}{\varepsilon})} w_k^0) e^{-ikt} + \frac{ik}{(ik - 2w_e \frac{1}{\varepsilon})} w_k^0 e^{(ik - 4w_e \frac{1}{\varepsilon})t} +$$

$$+ 2ik \int_0^t e^{ik(s-t)} (Q_k^{(m)} T_k^{-1}(e^{-ikt}) ds + 2ik \int_0^t e^{ik(s-t)} T_k^{-1}(z_k^{(m)}) ds \Big),$$

где в силу (2.17) имеем

$$2ik \int_0^t e^{ik(s-t)} (Q_k^{(m)} T_k^{-1}(e^{-ikt}) ds = -\frac{\varepsilon}{2w_e} Q_k e^{-ikt} + 2G_k(t),$$

$$2G_k = \frac{\varepsilon}{2w_e} Q_k \Big(\frac{d}{dt} T_k^{-1}(e^{-ikt}) - ik T_k^{-1}(e^{-ikt}) + 4w_e \frac{1}{\varepsilon} T_k^{-1}(e^{-ikt}) \Big).$$

Отсюда

$$T^{add}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}) = 2w_0^{(m)} \Big\{ \Big(u_k^0 - \frac{2w_e \frac{1}{\varepsilon}}{(ik - 2w_e \frac{1}{\varepsilon})} w_k^0 - \frac{\varepsilon}{2w_e} Q_k \Big) e^{-ikt} +$$

$$+ \frac{ik}{(ik - 2w_e \frac{1}{\varepsilon})} w_k^0 e^{(ik - 4w_e \frac{1}{\varepsilon})t} + 2G_k(t) + 2ik \int_0^t e^{ik(s-t)} T_k^{-1}(z_k^{(m)}) ds \Big\}.$$

При выполнении условия секулярности (3.28) получим

$$T^{add}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}) = 2w_0^{(m)} \Big\{ \frac{ik}{(ik - 2w_e \frac{1}{\varepsilon})} w_k^0 e^{(ik - 4w_e \frac{1}{\varepsilon})t} + \tag{2.38}$$

$$+ 2G_k(t) + 2ik \int_0^t e^{ik(s-t)} T_k^{-1}(z_k^{(m)}) ds \Big\},$$

$$w_0^{(m)} = -\varepsilon w_e^{1/2} \int_0^t e^{4w_e \frac{1}{\varepsilon}(s-t)} \Big(2h_0^l(t) + (4f_0^{B,l}(t) + f_0(t)) e^{-4w_e \frac{1}{\varepsilon} t} +$$

$$+ 4(h_0^{B,l}(t) + h_0^B(t)) + 2\mathcal{L}_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)})) + 4B_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)}), T_k^{-1}(z_k^{(m)})) \Big) ds.$$

В силу свойств оператора T_k^{-1} (см. пункт 3.11) получим

$$\|T^{add}(T_k^{-1}(z_k^{(m)})(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})} \leqslant (||||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}})\ \|w_0^{(m)}(t)\ e^{-4w_e \frac{1}{\varepsilon} t}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} +$$

$$+ |||Q^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} \| \frac{d}{dt} T_k^{-1}(e^{-ikt}) - ikT_k^{-1}(e^{-ikt}) + 4w_e \frac{1}{\varepsilon} T_k^{-1}(e^{-ikt}) \|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{0,m})} +$$

$$+ \|w_0^{(m)}(t)(ik \int\limits_0^t e^{ik(s-t)} T_k^{-1}(z_k^{(m)}) ds)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{0,m})}.$$

Далее

$$|w_0^{(m)}(t)| \leqslant \varepsilon w_e^{1/2} \Big| \int\limits_0^t e^{4w_e \frac{1}{\varepsilon}(s-t)} \Big(2h_0^l(t) + (4f_0^{B,l}(t) + f_0(t)) e^{-4w_e \frac{1}{\varepsilon} t} + 4(h_0^{B,l}(t) + h_0^B(t)) \Big) ds +$$

$$+ \varepsilon w_e^{1/2} \int\limits_0^t e^{4w_e \frac{1}{\varepsilon}(s-t)} \Big(2\mathcal{L}_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)})) + 4B_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)}), T_k^{-1}(z_k^{(m)})) \Big) ds$$

Теперь заметим, что для функции $g(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ имеем

$$\varepsilon |\int\limits_0^t g(s) ds| = \varepsilon |\int\limits_0^t e^{-\gamma s}(e^{\gamma s} g(s)) ds| \leqslant \|g\|_{L_{2,\gamma}} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\gamma}}, \quad \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\gamma}} = O(\sqrt{\varepsilon}). \tag{2.39}$$

Фиксируем $\sigma > 1$. Это позволяет получить следующую оценку:

$$\varepsilon w_e^{1/2} \Big| \int\limits_0^t e^{4w_e \frac{1}{\varepsilon}(s-t)} \Big(2h_0^l(t) + (4f_0^{B,l}(t) + f_0(t)) e^{-4w_e \frac{1}{\varepsilon} t} + 4(h_0^{B,l}(t) + h_0^B(t)) \Big) ds \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\varepsilon}\ c_\sigma \Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||Q^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} \Big)$$

Перейдем к оценке интегралов

$$J_1 = 2\varepsilon w_e^{1/2} \int\limits_0^t e^{4w_e \frac{1}{\varepsilon}(s-t)} \mathcal{L}_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)})) ds,$$

$$J_2 = 4\varepsilon w_e^{1/2} \int\limits_0^t e^{4w_e \frac{1}{\varepsilon}(s-t)} B_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)}), T_k^{-1}(z_k^{(m)}) ds.$$

В силу соотношения (2.17) и свойств оператора T_k^{-1} получим

$$|J_1(t)| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\ c_\sigma^{(1)} \|\mathcal{L}_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)})\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})},$$

$$|J_2(t)| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\ c_\sigma^{(1)} \|B_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)}), T_k^{-1}(z_k^{(m)})\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}.$$

Теперь оценим

$$\|l_0^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}))\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})} =$$

$$= \| \sum_{|k_1|=1,\ldots,m} (u_{k_1}^0 + w_{k_1}^0) e^{-ik_1 t} (-ik_1 \int\limits_0^t e^{-ik_1(s-t)} T_{-k_1}^{-1}(z_{-k_1}^{(m)})) ds\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})} +$$

$$+ \| \sum_{|k_1|=1,\ldots,m} \Big(ik_1 \int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) ds - T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) \Big) ((u_{-k_1}^0 + w_{-k_1}^0) e^{ik_1 t} \|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})} \leqslant$$

$$\leqslant c_\sigma^l \Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} \Big) \times$$

$$\times \Big(\|(ik \int\limits_0^t e^{-ik(s-t)} T_k^{-1}(z_{k_1}^{(m)})) ds\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})} + \|T_k^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) s\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})} \Big).$$

В силу (2.17) имеем

$$ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)})ds=-\frac{\varepsilon}{4w_e}z_{k_1}^{(m)}+ \tag{2.40}$$

$$+\frac{\varepsilon}{4w_e}\Big(\frac{d}{dt}T_k^{-1}(z_{k_1}^{(m)})-ikT_k^{-1}(z_{k_1}^{(m)})+4w_e\frac{1}{\varepsilon}T_k^{-1}(z_{k_1}^{(m)})\Big).$$

Отсюда

$$\|(ik\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}T_k^{-1}(z_{k_1}^{(m)}))ds\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}=\frac{\varepsilon}{4w_e}\|z_{k_1}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}+$$

$$+\frac{\varepsilon}{4w_e}\|\Big(\frac{d}{dt}T_k^{-1}(z_{k_1}^{(m)})-ikT_k^{-1}(z_{k_1}^{(m)})+4w_e\frac{1}{\varepsilon}T_k^{-1}(z_{k_1}^{(m)})\Big)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{4w_e}(1+c_3)\|z_{k_1}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}.$$

Здесь мы опять воспользовались свойствами оператора T_k^{-1}. Окончательно получаем

$$\|l_0^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}))\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\leqslant$$

$$\leqslant c_\sigma^l c_3(1+\frac{\varepsilon}{4w_e}(1+c_3))\Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}\Big)\|z_{k_1}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}.$$

Аналогичная оценка справедлива для

$$L_0^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}))=l_0^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}))+$$

$$+2\sum_{k_1+k_2=0,\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{\frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_2}^0(e^{(ik_2-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t}-e^{-ik_2t})\times$$

$$\times\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)})ds-T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)})\Big)+$$

$$+ik_2\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)})ds\Big(\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w_{k_1}^0(e^{(ik_1-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t}-e^{-ik_1t})-w_k^0e^{(ik-4w_e\frac{1}{\varepsilon})t}\Big)\Big\}.$$

Имеем

$$\|L_0^{(m)}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}))\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\leqslant$$

$$\leqslant 2c_\sigma^l c_3(1+\frac{\varepsilon}{4w_e}(1+c_3))\Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}\Big)\|z_{k_1}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}.$$

Теперь воспользуемся аналогом оценки (2.39):

$$\varepsilon|ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)})ds|\leqslant\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\gamma}}\ \|k_1T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)})\|_{L_{2,\gamma}}\leqslant\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\gamma}}\ c_4\ \|z_{k_1}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}}. \tag{2.41}$$

Здесь мы опять воспользовались свойствами оператора T_k^{-1}. Это позволяет оценить норму $\|B_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)}),T_k^{-1}(z_k^{(m)}))\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}$. Имеем:

$$\varepsilon\|B_0(T_k^{-1}(z_k^{(m)}),T_k^{-1}(z_k^{(m)}))\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\|\sum_{k_1\neq 0}(-ik_1\int\limits_0^t e^{-ik_1(s-t)}T_{-k_1}^{-1}(z_{-k_1}^{(m)})ds\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)})ds\Big)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}+$$

$$+\varepsilon\|\sum_{k_1\neq 0}(-ik_1\int\limits_0^t e^{-ik_1(s-t)}T_{-k_1}^{-1}(z_{-k_1}^{(m)})ds)\Big(T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)})\Big)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\gamma}}\ c_4\ c_\sigma^B\ \left(\|z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\right)^2.$$

Суммируя, получим

$$T^{add}(T_k^{-1}(z_k^{(m)})(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})} \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}c_\sigma^T\Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + \tag{2.42}$$

$$+ |||Q^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + \|z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big)\ \|z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big)$$

Итерации. Рассмотрим последовательность итераций

$$X_k^{(j)} - X_k^{(0)} = \varepsilon w_e^{1/2}\Big\{B_k^{(m)}(T_k^{-1}(X_k^{(j-1)}), T_k^{-1}(X_k^{(j-1)})) + \tag{2.43}$$

$$+ 4B_k^{(m)}(T_k^{-1}(X_k^{(j-1)}), Q_k T_k^{-1}(e^{-ikt})) + 4B_k^{(m)}(Q_k T_k^{-1}(e^{-ikt}), T_k^{-1}(X_k^{(j-1)})) +$$

$$+ 2L_k^{(m)}(T_k^{-1}(X_k^{(j-1)})) - T^{add}(T_k^{-1}(X_k^{(j-1)})\Big\},\ j \geqslant 1,$$

$$X_k^{(0)} = \frac{1}{\varepsilon}e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}\mathcal{F}_k^{(m)}(t) + \varepsilon\mathcal{G}_k^{(m)}(t).$$

Так же, как выше, получим

$$\|(X^{(j)} - X^{(0)})(t)\|_{L_{2\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m}} \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}c_\sigma\ \Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + \tag{2.44}$$

$$+ |||Q^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + \|X^{(j-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big)\ \|X^{(j-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big).$$

Неравенство (2.44) можно переписать в виде

$$\|(X^{(j)} - X^{(0)})(t)\|_{L_{2\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m}} \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}c_\sigma E_*^{(m)}\ \|X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})} + \tag{2.45}$$

$$+ \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}c_\sigma\ \ \|X^{(j-1)} - X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big(E_*^{(m)} + \|X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big),$$

где

$$E_*^{(m)} = |||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} +\ + |||Q^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + \|X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}.$$

Отсюда следует ограниченность итераций

$$\|(X^{(j)} - X^{(0)})(t)\|_{L_{2\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})} \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}\frac{2c_\sigma}{1-q}E_*^{(m)}\ \|X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})},$$

если

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}c_\sigma\ \ \Big(E_*^{(m)} + \|X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big) \leqslant q,\quad q \in (0,1).$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2.3. *Пусть $\sigma > 1$ и существует $q \in (0,1)$, не зависящее от m, σ, ε, такое что*

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}c_\sigma\ \ \Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||Q^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + 2\|X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big) \leqslant q,\quad q \in (0,1). \tag{2.46}$$

Тогда для любого $j \geqslant 1$ справедлива оценка

$$\|(X^{(j)} - X^{(0)})(t)\|_{L_{2\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m}} \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}\ \frac{2c_\sigma}{1-q}\ E_*^{(m)}\ \|X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}. \tag{2.47}$$

Для $l,\ 0 < l < j$, (2.43) можно переписать в виде

$$X_k^{(j)} - X_k^{(l)} = \varepsilon w_e^{1/2}\Big\{4B_k^{(m)}(T_k^{-1}(X_k^{(j-1)}) - T_k^{-1}(X_k^{(l-1)}), Q_k T_k^{-1}(e^{-ikt})) + \tag{2.48}$$

$$+ 4B_k^{(m)}(Q_k T_k^{-1}(e^{-ikt}), T_k^{-1}(X_k^{(j-1)}) - T_k^{-1}(X_k^{(l-1)}) +$$

$$+ 2L_k^{(m)}(T_k^{-1}(X_k^{(j-1)}) - T_k^{-1}(X_k^{(l-1)}) - T^{add}(T_k^{-1}(X_k^{(j-1)} - T_k^{-1}(X_k^{(l-1)}) +$$

$$+ B_k^{(m)}(T_k^{-1}(X_k^{(j-1)}) - T_k^{-1}(X_k^{(l-1)}), T_k^{-1}(X_k^{(j-1)})) +$$

$$+ B_k^{(m)}(T_k^{-1}(X_k^{(l-1)}), T_k^{-1}(X_k^{(j-1)}) - T_k^{-1}(X_k^{(l-1)}))\Big\},$$

откуда следует аналог оценки (2.44):

$$\|(X^{(j)}-X^{(l)})(t)\|_{L_{2\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m}}\leqslant\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}c_\sigma\,\Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+$$

$$+|||Q^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+\|X^{(j-1)}-X^{(l-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big)\,\|X^{(j-1)}-X^{(l-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}+$$

$$+\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}c_\sigma\,\Big(\|X^{(j-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}+\|X^{(l-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}+$$

$$+\|X^{(j-1)}-X^{(l-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big)\|X^{(j-1)}-X^{(l-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}.$$

Положим

$$\mathcal{E}_*^{(m)}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}c_\sigma\,\Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||Q^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+$$

$$+\|X^{(j-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}+\|X^{(l-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}+2\|X^{(j-1)}-X^{(l-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big).$$

Тогда имеем

$$\|(X^{(j)}-X^{(l)})(t)\|_{L_{2\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m}}\leqslant\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}c_\sigma\,(\mathcal{E}_*^{(m)})^{j-l}\|X^{(l-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\leqslant \tag{2.49}$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon^2}{\gamma}\,\frac{2c_\sigma^2}{1-q}\,E_*^{(m)}\,\|X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\,\,(\mathcal{E}_*^{(m)})^{j-l}.$$

Как следствие, получается

Теорема 2.4. *В условиях теоремы* 2.3 *последовательность* $X^{(j)}$ *фундаментальна в пространстве* $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})$, *если*

$$\mathcal{E}_*^{(m)}\leqslant q_1,\quad q_1\in(0,1).$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2.5. *Пусть* $\sigma>1$. *В условиях теоремы* 2.3 *существует единственное решение* $Z_m\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{m,\sigma})$ *нелинейного уравнения* (2.37), *если*

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}c_\sigma\,\Big\{|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||Q^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+ \tag{2.50}$$

$$+6\Big(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}\,\frac{2c_\sigma}{1-q}\,E_*^{(m)}\Big)\,\|X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big\}\leqslant q_1<1.$$

Теперь отметим, что в рассматриваемом случае

$$\mathcal{F}_k^{(m)}(t)=(f_k^{(m)}(t)-\varepsilon w_e^{1/2}g_k^L(t)),$$

$$\mathcal{G}_k^{(m)}(t)=-\varepsilon w_e^{1/2}(2(H_k^L(t)+4H_k^B(t)),$$

где

$$\|w_e^{1/2}g_k^L(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}+\|\mathcal{G}_k^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\leqslant \tag{2.51}$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}c_\sigma\,\Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||Q^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}\Big),$$

$$\|f_k^L(t)e^{-4w_e\frac{1}{\varepsilon}t}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\leqslant\frac{w_e}{4w_e-\varepsilon\gamma}|||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+$$

$$+\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}c_\sigma\,\Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}+|||Q^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}}\Big). \tag{2.52}$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\int\limits_0^\infty\,e^{-2(\frac{1}{\varepsilon}4w_e-\gamma)t}dt\leqslant\frac{\varepsilon}{4w_e-\varepsilon\gamma}.$$

Теорема 2.6. *Построенное в теореме* 2.5 *решение нелинейного уравнения* (2.37) *определяет аппроксимацию*

$$(u^{(m)}(x,t), w^{(m)}(x,t)) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_{\sigma,m})$$

$$u^{(m)} = u_e + w_e^{1/2}\varepsilon^2\Big\{ - w_0(t) + \sum_{|k|=1,\dots,m} \Big((u_k^0 - \frac{4w_e\frac{1}{\varepsilon}}{2iks - 4w_e\frac{1}{\varepsilon}} w_k^0) e^{ik(x-t)} + \tag{2.53}$$

$$+ \sum_{|k|=1,\dots,m} \Big(\frac{4w_e\frac{1}{\varepsilon}}{2iks - 4w_e\frac{1}{\varepsilon}}) w_k^0 e^{(ik - 4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} +$$

$$+2ik \int\limits_0^t e^{ik(s-t)} (Q_k^{(m)} T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)}) ds - Q_k^{(m)} T_k^{-1}(e^{-ikt}) - T_k^{-1}(z_k^{(m)}) \Big) \; e^{ikx},$$

$$w^{(m)} = w_e + w_e^{1/2}\varepsilon^2 \Big(w_0(t) + \sum_{|k|=1,\dots,m} (w_k^0 e^{(ik - 4w_e\frac{1}{\varepsilon})t} +$$

$$+ Q_k^{(m)} T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)})) e^{ikx} \Big)$$

решения задачи Коши (1.1) (см. ниже), в том смысле, что в $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)$

$$(u^{(m)}(x,t), w^{(m)}(x,t)) \to (u(x,t), w(x,t)) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma),$$

где $(u(x,t), w(x,t))$ — решение задачи Коши (1.1).

2.7. Интегродифференциальное уравнение. Задача этого пункта — получить условия разрешимости задачи Коши для интегродифференциального уравнения

$$(\frac{d}{dt} - \partial_x + \frac{1}{\varepsilon} 4w_e)u + \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^t (-4w_e \partial_x u(x - (t-s), s) ds = f, \quad u_{t=0} = 0,$$

в классе периодических по x функций с нулевым средним, $u(t,x), f(t,x)$ — периодичны по x на интервале $x \in (-1,1)$. Сделав преобразование Фурье по x, для $k \in \mathbb{Z}_0$ получим

$$T_k(\widehat{u}(t,k)) = \Big(\frac{d}{dt} - ik + \frac{1}{\varepsilon} 4w_e \Big) \widehat{u}(t,k) - \tag{2.54}$$

$$-4ikw_e \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^t e^{-ik(t-s)} \widehat{u}(s,k) ds = \widehat{f}(t,k), \quad \widehat{u}(t,k)|_{t=0} = 0$$

оператор, рассмотренный выше (2.11). Преобразование Лапласа L по t приводит к алгебраическому уравнению

$$\sigma(p,k)(L(\widehat{u})(p,k)) = L(\widehat{f})(p,k) \Rightarrow \; L(\widehat{u})(p,k) = \frac{L(\widehat{f})(p,k)}{\sigma(p,k)},$$

где символ $\sigma(p,k)$ оператора T_k:

$$\sigma(p,k) = p - ik + \frac{1}{\varepsilon} 4w_e - \frac{1}{\varepsilon} \frac{4ikw_e}{p + ik}.$$

Докажем существование $\gamma > 0$ такого, что для любого $k \in \mathbb{Z}_0$ функция $1/\sigma(p,k)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant -\gamma$.

В этой статье мы исследуем случай $u_e = w_e > 0$. Тогда

$$\sigma(p,k) = \frac{p^2 + k^2 + \frac{1}{\varepsilon} 4w_e p}{p + ik} = \frac{(p - p_-)(p - p_+)}{p + ik},$$

где

$$p_- = -(\frac{1}{\varepsilon} 2w_e + \sqrt{(\frac{1}{\varepsilon} 2w_e)^2 - k^2}), \quad p_+ = -\frac{\varepsilon k^2}{2w_e + \sqrt{(2w_e)^2 - \varepsilon^2 k^2}},$$

корни уравнения $P_k(p) = p^2 + \frac{1}{\varepsilon}4w_e p + k^2 = 0$. Имеем

$$\operatorname{Re} p_- \geqslant -\frac{1}{\varepsilon}2w_e \quad \forall k \in \mathbb{Z}_0, \quad \operatorname{Re} p_+ = -\frac{2w_e}{\varepsilon}, \quad |k| \geqslant 2w_e/\varepsilon,$$

$$\operatorname{Re} p_+ = -\frac{\varepsilon k^2}{2w_e + \sqrt{(2w_e)^2 - \varepsilon^2 k^2}} \geqslant -\frac{\varepsilon k^2}{4w_e}, \quad 1 \leqslant |k| \leqslant 2w_e/\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\min(\operatorname{Re} p_-, \operatorname{Re} p_+) \geqslant -\frac{\varepsilon}{4w_e}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_0.$$

Лемма 2.2. *Функция $1/\sigma(p,k)$ для любого $k \in \mathbb{Z}_0$ аналитична в полуплоскости*

$$\operatorname{Re} p \geqslant -\gamma, \quad \gamma = \frac{\varepsilon}{5w_e} \tag{2.55}$$

Более того,

$$\frac{1}{|\sigma(p,k)|} \leqslant \frac{|p+ik|}{|p-p_-|}\,\frac{1}{\operatorname{Re}(p-p_+)} \leqslant c_0\frac{20w_e}{\varepsilon}, \tag{2.56}$$

$$\frac{|p|+|k|}{|\sigma(p,k)|} \leqslant c_1, \ k \in \mathbb{Z}_0, \ \operatorname{Re} p \geqslant -\gamma.$$

Здесь $|p+ik| \leqslant c_0|p-p_-| \ \forall k \in \mathbb{Z}_0, \operatorname{Re} p \geqslant \gamma$.

Определение 2.1. Назовем *пространством Харди* $H_2(\operatorname{Re} p > -\gamma, H)$, $\gamma > 0$, класс вектор-функций $\widetilde{f(p)}$ со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H, голоморфных в полуплоскости $\{p \in \mathbb{C}: \ \operatorname{Re} p > -\gamma\}$, для которых

$$\sup_{x>-\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\widetilde{f(x+iy)}\|_H^2 dy < \infty, \quad p = x+iy.$$

Сформулируем теорему Пэли—Винера для пространств Харди.

Теорема 2.7 (Пэли—Винер)**.**

1. *Пространство $H_2(\operatorname{Re} p > -\gamma, H)$ совпадает со множеством вектор-функций* (*преобразований Лапласа*)*, допускающих представление*

$$\widetilde{f(p)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{pt} f(t)dt \tag{2.57}$$

для $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > -\gamma \geqslant 0$.

2. *Для любой вектор-функции $\widetilde{f(p)} \in H_2(\operatorname{Re} p > -\gamma, H)$ существует единственное представление* (2.57)*, где вектор-функция $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, причем справедлива формула обращения*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-\gamma+iy)t} \widetilde{f(-\gamma+iy)}dy, \quad t \in \mathbb{R}_+, \ \gamma > 0.$$

3. *Для вектор-функций $\widetilde{f(p)} \in H_2(\operatorname{Re} p > -\gamma, H)$ и $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, связанных соотношением* (2.57)*, справедливо равенство*

$$\|\widetilde{f}\|^2_{H_2(\operatorname{Re} p>-\gamma,H)} \equiv \sup_{x>-\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\widetilde{f(x+iy)}\|_H^2 dy = \int_0^\infty e^{-2\gamma t}\|f(t)\|_N^2 dt \equiv \|f\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;H)}$$

Лемма 2.3. *Для любой $f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)$ решение задачи Коши* (2.54)

$$\widehat{u}(t) = \{\widehat{u}(t,k) = L^{-1}(\frac{L(\widehat{f})(p,k)}{\sigma(p,k)}), \ k \in \mathbb{Z}_0\} \in H^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma) \tag{2.58}$$

$$\|\widehat{u}(t)\|_{H^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)} \leqslant c_\gamma \ \|\widehat{f}(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)} \tag{2.59}$$

Рассмотрим случай $\widehat{f}(t,k) = e^{-ikt}$. Тогда

$$\sigma(p,k)L(\widehat{u})(p,k) = \frac{1}{p+ik} \Rightarrow \; L(\widehat{u})(p,k) = \frac{1}{(p-p_-)(p-p_+)}. \tag{2.60}$$

Лемма 2.4. *Решение* (2.60) *задачи Коши*

$$T_k(\widehat{u}(t,k)) = e^{-ikt}, \quad \widehat{u}(t,k)|_{t=0} = 0, \tag{2.61}$$

принадлежит

$$\widehat{u}(t) = \{\widehat{u}(t,k) = L^{-1}(\frac{1}{(p-p_-)(p-p_+)}), \; k \in \mathbb{Z}_0\} \in H^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma), \tag{2.62}$$

$$\|Q_k \widehat{u}(t,k)\|_{H^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)} \leqslant c_\gamma \; |||Q|||_{\mathcal{H}_\sigma}. \tag{2.63}$$

Доказательство лемм следует из результатов теоремы 2.7 и оценок (2.56).

2.8. Существование решения задачи Коши. Теперь покажем, что аппроксимационное решение $(u^{(m)}(x,t), w^{(m)}(x,t))$

$$(u^{(m)}(x,t), w^{(m)}(x,t)) \to (u(x,t), w(x,t)) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma) \tag{2.64}$$

в смысле $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)$, к решению $(u(x,t), w(x,t))$ задачи Коши (1.1).

Теорема 2.8. *Пусть равномерно по m выполнено условие теорем* 2.4, 2.5 *на начальные данные. Тогда существует решение $(u(x,t), w(x,t)) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)$ задачи Коши* (1.1).

Прежде всего, докажем утверждение (2.64), т. е. существование предела $(u(x,t), w(x,t)) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)$. Из полученных выше результатов следует ограниченность нормы

$$\|(u^{(m)}(x,t), w^{(m)}(x,t))\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})} \leqslant C_*, \tag{2.65}$$

с постоянной C_*, не зависящей от m, если равномерно по m выполнено условия теорем 2.4–2.6 на начальные данные. Более того, эта последовательность фундаментальна при $m \to \infty$. Отсюда следует существование подпоследовательности $(u^{(m')}(x,t), w^{(m')}(x,t)) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_{2\sigma,m'})$, сходящейся при $m' \to \infty$ в $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_{\sigma,m'})$ к элементу $(u(x,t), w(x,t)) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)$.

Теперь покажем, что полученное $(u(x,t), w(x,t))$ — решение задачи Коши (1.1). Подставляя в (1.1), в образах Фурье получим

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_0} (\partial_t u_k + iku_k)e^{ikx} - \frac{1}{\varepsilon}\Big((u_e + \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} u_k e^{ikx})^2 - (w_e + \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} w_k e^{ikx})^2\Big) = \mathcal{F}_1(u,w),$$

$$\mathcal{F}(u,w) = \sum_{|k|=1,\dots,m} (\partial_t(u_k - u_k^{(m)}) + ik(u_k - u_k^{(m)}))e^{ikx} +$$

$$+ \sum_{k\in\mathbb{Z}_0, |k|>m} (\partial_t u_k + iku_k)e^{ikx} - \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{Q}(u,w),$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_0} (\partial_t w_k - ikw_k)e^{ikx} + \frac{1}{\varepsilon}\Big((u_e + \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} u_k e^{ikx})^2 - (w_e + \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} w_k e^{ikx})^2\Big) = \mathcal{F}_2(u,w),$$

$$\mathcal{F}_2(u,w) = \sum_{|k|=1,\dots,m} (\partial_t(w_k - w_k^{(m)}) - ik(w_k - w_k^{(m)}))e^{ikx} +$$

$$+ \sum_{k\in\mathbb{Z}_0, |k|>m} (\partial_t w_k - ikw_k)e^{ikx} + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{Q}(u,w),$$

где

$$\mathcal{Q}(u,w) = (\sum_{k\in\mathbb{Z}_0, \; |k|>m} u_k e^{ikx})^2 - (\sum_{k\in\mathbb{Z}_0, \; |k|>m} w_k e^{ikx})^2 +$$

$$+ 2(u_e + \sum_{|k|=1,\dots,m} u_k e^{ikx})(\sum_{k\in\mathbb{Z}_0, \; |k|>m} u_k e^{ikx}) -$$

$$
\begin{aligned}
&- 2(w_e + \sum_{|k|=1,\dots,m} w_k e^{ikx})(\sum_{k\in\mathbb{Z}_0,\ |k|>m} w_k e^{ikx}) + \\
&+ 2u_e \sum_{|k|=1,\dots,m} (u_k - u_k^{(m)}) e^{ikx} - 2w_e \sum_{|k|=1,\dots,m} (w_k - w_k^{(m)}) e^{ikx} + \\
&+ (\sum_{|k|=1,\dots,m} u_k e^{ikx})^2 - \sum_{|k|=1,\dots,m} \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|,|k_2|\leqslant m} u_{k_1}^{(m)} u_{k_2}^{(m)} e^{ikx} - \\
&- (\sum_{|k|=1,\dots,m} w_k e^{ikx}))^2 + \sum_{|k|=1,\dots,m} \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|,|k_2|\leqslant m} w_{k_1}^{(m)} w_{k_2}^{(m)} e^{ikx}.
\end{aligned}
$$

Из приведенных выше оценок следует, что

$$
\|\mathcal{F}_1(u,w)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)} + \|\mathcal{F}_2(u,w)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)} \to 0, \quad m \to \infty.
$$

Это завершает доказательство теоремы 2.8.

В заключение докажем следующую лемму:

Лемма 2.5. *Периодическое решение* $(u,w) \in W_2^{1,1}(\mathbb{R}_+ \times (0,1)) \cap C_B(\mathbb{R}_+ \times (0,1))$ *задачи Коши* (1.1) *с вещественными начальными условиями является вещественным.*

Доказательство. В силу (1.1) для $X = u - \overline{u}$, $Y = w - \overline{w}$ имеем

$$
\begin{gathered}
\partial_t X + \partial_x X = \frac{1}{\varepsilon}(AX - BY), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\
\partial_t w - \partial_x w = -\frac{1}{\varepsilon}(AX - BY), \\
X|_{t=0} = 0, \quad Y|_{t=0} = 0,
\end{gathered}
\tag{2.66}
$$

где $A = u + \overline{u}$, $B = w + \overline{w}$. Отсюда

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\int_0^1 |X|^2 dx = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 ((A + \overline{A})|X|^2 - BY\overline{X} - X\overline{BY})dx,\ t > 0, \\
\frac{d}{dt}\int_0^1 |Y|^2 dx = -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 (AX\overline{Y} + Y\overline{AX} - (B + \overline{B})|Y|^2)dx.
\end{gathered}
\tag{2.67}
$$

Для вещественного решения

$$
X|_{t=0} = 0, \quad Y|_{t=0} = 0.
$$

Интегрируя, получим

$$
\begin{gathered}
\int_0^1 |X(x,t)|^2 dx = \leqslant CT \max_{t\in[0,T]} \Big(\int_0^1 |X(x,t)|^2 dx + \int_0^1 |Y(x,t)|^2 dx\Big), \\
\int_0^1 |Y(x,t)|^2 dx \leqslant CT \max_{t\in[0,T]} \Big(\int_0^1 |X(x,t)|^2 dx + \int_0^1 |Y(x,t)|^2 dx\Big), \quad \forall t \in (0,T),
\end{gathered}
\tag{2.68}
$$

где $C = 2 \max\limits_{(x,t)\in\mathbb{R}_+\times[0,1]} (|A| + |B|) \leqslant 4 \max\limits_{(x,t)\in\mathbb{R}_+\times[0,1]} (|u| + |w|)$. Выбирая T достаточно малым, так чтобы $CT < 1$, получим, что

$$
\int_0^1 |X(x,t)|^2 dx = \int_0^1 |Y(x,t)|^2 dx \equiv 0, \quad t \in (0,T),
$$

откуда следует вещественность u и w. □

3. О природе локального равновесия кинетического уравнения Годунова—Султангазина

В этом разделе мы рассмотрим задачу Коши для одномерной модели Годунова—Султангазина (типа Бродуэлла) (см. [3]):

$$\partial_t u + \partial_x u = \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uw), \tag{3.1}$$

$$\partial_t v = -\frac{2}{\varepsilon}(v^2 - uw),$$

$$\partial_t w - \partial_x w = \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uw),$$

$$v(0) = v^0,\ u(0) = u^0,\ w(0) = w^0. \tag{3.2}$$

Здесь $x \in S^1 = [0, 2\pi]$ и $U(t,0) = U(t, 2\pi)$ — пространственно-периодические граничные условия, ε — малая величина, которую мы выберем ниже. Все полученные результаты переносятся на двумерную и трехмерную модели, приведенные в [3].

3.1. Малые возмущения. Наша задача исследовать природу локального равновесия для модели Годунова—Султангазина (3.1) для периодических начальных данных с ограниченной энергией. Рассмотрим окрестность состояния равновесия $v_e^2 = u_e w_e,\ v_e, u_e, w_e > 0$

$$u = u_e + \varepsilon^2 u_e^{1/2}\widehat{u},\ w = w_e + \varepsilon^2 w_e^{1/2}\widehat{w},\ v = v_e + \varepsilon^2 v_e^{1/2}\widehat{v}.$$

Тогда можно переписать в виде

$$\partial_t\widehat{u} + \partial_x\widehat{u} - \frac{1}{\varepsilon}w_e^{1/2}\Big(2v_e^{1/2}\widehat{v} - u_e^{1/2}\widehat{w} - w_e^{1/2}\widehat{u}\Big) = \varepsilon\ w_e^{1/2}\Big(\widehat{v}^2 - \widehat{u}\widehat{w}\Big), \tag{3.3}$$

$$\partial_t\widehat{v} + \frac{2}{\varepsilon}v_e^{1/2}\Big(2v_e^{1,2}\widehat{v} - u_e^{1,2}\widehat{w} - w_e^{1,2}\widehat{u}\Big) = -2\varepsilon v_e^{1/2}\Big(\widehat{v}^2 - \widehat{u}\widehat{w}\Big),$$

$$\partial_t\widehat{w} - \partial_x\widehat{w} - \frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}\Big(2v_e^{1/2}\widehat{v} - u_e^{1/2}\widehat{w} - w_e^{1/2}\widehat{u}\Big) = \varepsilon u_e^{1/2}\Big(\widehat{v}^2 - \widehat{u}\widehat{w}\Big),$$

$$v(0) = v^0,\ \widehat{u}(0) = u^0,\ w(0) = w^0. \tag{3.4}$$

Два независимых закона сохранения:

$$\partial_t\widehat{u} + \partial_x\widehat{u} = -\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\partial_t\widehat{v},$$

$$\partial_t\widehat{w} - \partial_x\widehat{w} = -\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\partial_t\widehat{v}.$$

В образах Фурье:

$$\frac{d}{dt}u_k + iku_k = -\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{d}{dt}v_k, \tag{3.5}$$

$$\frac{d}{dt}w_k - ikw_k = -\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{d}{dt}v_k.$$

Отсюда

$$u_k = (u_k^0 + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0)e^{-ikt} - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k + ik\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}v_k ds, \tag{3.6}$$

$$w_k = (w_k^0 + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0)e^{ikt} - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k - ik\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}v_k ds.$$

Для $k = 0$ имеем

$$u_0 = (u_0^0 + \frac{1}{2}w_e^{1/2}v_0^0) - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_0,$$

$$w_0 = (w_0^0 + \frac{1}{2} u_e^{1/2} v_0^0) - \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_0.$$

Потребуем, чтобы выполнялось

Условие 3.1.

$$u_0^0 = w_0^0 = v_0^0 = 0.$$

Тогда

$$u_0(t) = -\frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_0(t), \quad w_0(t) = -\frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_0(t).$$

Далее

$$\frac{d}{dt} v_k + \frac{2}{\varepsilon}\Big(2v_e \widehat{v} - v_e^{1/2} u_e^{1/2} \widehat{w} - v_e^{1/2} w_e^{1/2} \widehat{u}_e\Big) = -2\varepsilon v_e^{1/2} \Big(\widehat{v}^2 - \widehat{u}\widehat{w}\Big)_k.$$

Заметим, что

$$2v_e \widehat{v} - v_e^{1/2} u_e^{1/2} \widehat{w} - v_e^{1/2} w_e^{1/2} \widehat{u}_e = \frac{1}{2}(4v_e - u_e - w_e) v_k - (v_e^{1/2} u_e^{1/2} w_k^0 + \frac{1}{2} u_e v_k^0) e^{ikt} -$$

$$- (v_e^{1/2} w_e^{1/2} u_k^0 + \frac{1}{2} w_e v_k^0) e^{-ikt} - ik \frac{1}{2} \int\limits_0^t \Big(u_e e^{-ik(s-t)} - w_e e^{ik(s-t)}\Big) v_k ds.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt} v_k + \frac{1}{\varepsilon} L_e \ v_k - \frac{1}{\varepsilon} ik \int\limits_0^t \Big(u_e e^{-ik(s-t)} - w_e e^{ik(s-t)}\Big) v_k ds = \tag{3.7}$$

$$= 2\frac{1}{\varepsilon} v_e^{1/2} u_e^{1/2} (w_k^0 + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_k^0) e^{ikt} + 2\frac{1}{\varepsilon} v_e^{1/2} w_e^{1/2} (u_k^0 + \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_k^0) e^{-ikt} - 2\varepsilon v_e^{1/2} \Big(\widehat{v}^2 - \widehat{u}\widehat{w}\Big)_k,$$

$$v_k|_{t=0} = v_k^0,$$

где $L_e = 4v_e + u_e + w_e > 0$, таким образом, выполнено условие диссипации $L_e > 0$.

3.2. Комплексификация. Для упрощения Фурье-анализа решений задачи Коши (3.7) удобно перейти к комплексификации (3.7):

$$\frac{d}{dt} v_k + \frac{1}{\varepsilon} L_e \ v_k - \frac{1}{\varepsilon} ik \int\limits_0^t \Big(u_e e^{-ik(s-t)} - w_e e^{ik(s-t)}\Big) v_k ds = \tag{3.8}$$

$$= 2\frac{1}{\varepsilon} v_e^{1/2} u_e^{1/2} (w_k^0 + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_k^0) e^{ikt} + 2\frac{1}{\varepsilon} v_e^{1/2} w_e^{1/2} (u_k^0 + \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_k^0) e^{-ikt} - \varepsilon v_e^{1/2} \Big(2\widehat{v}\overline{\widehat{v}} - \widehat{u}\overline{\widehat{w}} - \widehat{w}\overline{\widehat{u}}\Big)_k,$$

$$v_k|_{t=0} = v_k^0.$$

Очевидно, что вещественные решения этой системы являются решениями системы (3.7). Доказательство этого утверждения мы приводим в пункте 2.8.

Здесь для нулевой моды $k = 0$ имеем уравнение Риккати

$$\frac{d}{dt} v_0 + \frac{1}{\varepsilon} L_e \ v_0 = -\varepsilon v_e^{1/2} \Big(\frac{3}{2} v_0 \overline{v_0} - d_0 + L_0(v) + B_0(v, v)\Big)\Big), \tag{3.9}$$

$$v_0|_{t=0} = 0,$$

где

$$d_0 = \sum_{k_1+k_2=0, k_1,k_2 \neq 0} \Big((u_{k_1}^0 + \frac{1}{2} w_e^{1/2} v_{k_1}^0)(\overline{w_{k_2}^0} + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \overline{v_{k_2}^0}) +$$

$$+ (w_{k_2}^0 + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_{k_2}^0)(\overline{u_{k_1}^0} + \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \overline{v_{k_1}^0})\Big),$$

$$L_0(v)=-\sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\neq 0}\Big\{(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})e^{-ik_1t}(-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_2}}+ik_2\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}\overline{v_{k_2}}ds)+$$
$$+\Big(-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}+ik_1\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}v_{k_1}ds\Big)(\overline{w^0_{k_2}}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_2}})e^{-ik_2t}+$$
$$+((w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})e^{ik_2t}\Big(-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_1}}-ik_1\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_1(s-t)}\overline{v_{k_1}}ds\Big)+$$
$$+\Big(-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}-ik_2\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}v_{k_2}ds\Big)(\overline{u^0_{k_1}}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_1}})e^{ik_1t}\Big\},$$
$$B_0(v,v)=\sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\neq 0}\Big\{v_{k_1}\overline{v_{k_2}}+v_{k_2}\overline{v_{k_1}}-$$
$$-(-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}+ik_1\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}v_{k_1}ds)(-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_2}}+ik_2\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}\overline{v_{k_2}}ds)-$$
$$-(-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}-ik_2\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}v_{k_2}ds)(-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_1}}-ik_1\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_1(s-t)}\overline{v_{k_1}}ds)\Big\}.$$

Очевидно, что правая часть — вещественная функция. Положим

$$v_k=v^0_ke^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}+y_k,\quad k\in\mathbb{Z}_0,$$

где, как мы покажем ниже, существует $\gamma=O(\varepsilon)>0$, такое что $y_k(t)\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$. Здесь

$$\|y\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)}=\int\limits_0^\infty e^{2\gamma t}|y|^2dt.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}y_0+\frac{1}{\varepsilon}L_e\ y_0=-\varepsilon v_e^{1/2}\Big(\frac{3}{2}y_0\overline{y_0}-D_0+\mathcal{L}_0(y)+B_0(y,y)\Big)+f_0(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et},\tag{3.10}$$
$$v_0|_{t=0}=0,$$

где

$$L_0(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et})+B_0(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et},v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et})\Big)=d_0^{(1)}+f_0(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et},$$
$$d_0^{(1)}=\sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\in\mathbb{Z}_0}\Big\{(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})\frac{ik_2}{(ik_2-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_2}}+$$
$$+\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1}(\overline{w^0_{k_2}}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_2}})+$$
$$+(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})\frac{ik_1}{(ik_1+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_1}}+\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2}(\overline{u^0_{k_1}}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_1}})\Big\},$$
$$D_0=d_0-d_0^{(1)}=$$
$$=\sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\in\mathbb{Z}_0}\Big\{\Big(\Big(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\Big)(\overline{w^0_{k_2}}-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\overline{v^0_{k_2}}\Big)+$$
$$+\Big(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2}\Big)\Big(\overline{u^0_{k_1}}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\overline{v^0_{k_1}}\Big)\Big\},$$
$$\mathcal{L}_0(y)=L_0(y)+B_0(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et},y)+B_0(y,v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}),$$

$$f_0(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et} = -\varepsilon v_e^{1/2}\Big(\mathcal{L}_0(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}) + B_0(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}, y) + B_0(y, v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et})\Big).$$

Невозмущенное уравнение

$$\frac{d}{dt}v_0 = -\varepsilon v_e^{1/2}\frac{3}{2}\Big(v_0(v_0+\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{2L_e}{3v_e^{1/2}}) - \frac{2}{3}D_0\Big) = \varepsilon v_e^{1/2}\frac{3}{2}(v_0^+ - v_0)(v_0 - v_0^-).$$

Стационарные точки

$$(v_0)^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{2L_e}{3v_e^{1/2}}v_0 - \frac{2}{3}D_0 = 0,$$

$$v_0^{\pm} = \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{2L_e}{3v_e^{1/2}} \pm \sqrt{(\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{2L_e}{3v_e^{1/2}})^2 + \frac{8}{3}D_0}\Big).$$

Невозмущенное уравнение имеет ограниченное сепаратрисное решение

$$v_0^- < v_0^{sp}(t) < v_0^+,$$

если выполняется

Условие 3.2.

$$(\frac{2L_e}{3v_e^{1/2}})^2 + \varepsilon^4\frac{8}{3}D_0 > 0.$$

Отсюда следует, что задача Коши

$$\frac{d}{dt}v_0 = -\varepsilon v_e^{1/2}\frac{3}{2}\Big(v_0(v_0+\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{2L_e}{3v_e^{1/2}}) - \frac{2}{3}D_0\Big), \tag{3.11}$$

$$v_0|_{t=0} = 0$$

имеет ограниченное решение $v_0(t) = v_0^{sp}(t),\ t \geqslant 0$, если выполняется

Условие 3.3.

$$D_0 = \sum_{k_1+k_2=0, k_1,k_2\neq 0}\Big\{\Big(\Big(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1 - \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_{k_1}^0\Big)(\overline{w_{k_2}^0} - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2 - \frac{1}{\varepsilon}L_e)}\overline{v_{k_2}^0}\Big) +$$

$$+\Big(w_{k_2}^0 - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2 + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_{k_2}^0\Big)\Big(\overline{u_{k_1}^0} - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1 + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}\overline{v_{k_1}^0}\Big)\Big\} \geqslant 0.$$

Если $D_0 = 0$ имеем тривиальное решение $v_0(t) \equiv 0$.

3.3. ***k*-мода.** Так же, как выше для $k \in \mathbb{Z}_0$, имеем

$$\Big(2\widehat{v}\widehat{\overline{v}} - \widehat{u}\widehat{\overline{w}} - \widehat{w}\widehat{\overline{u}}\Big)_k = \frac{1}{2}(v_0\overline{v_k} + v_k\overline{v_0}) -$$

$$+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_0((\overline{w_k^0} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_k^0})e^{-ikt} + ik\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}\overline{v_k}ds) +$$

$$+((w_k^0 + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0)e^{ikt} - ik\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}v_kds)\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_0} +$$

$$+((u_k^0 + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0)e^{-ikt} + ik\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}v_kds)\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_0} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_0((\overline{u_k^0} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_k^0})e^{ikt} - ik\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}\overline{v_k}ds) +$$

$$+\sum_{k_1+k_2=k, k_1,k_2\neq 0}\Big\{v_{k_1}\overline{v_{k_2}} + v_{k_2}\overline{v_{k_1}} -$$

$$-\Big((u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})e^{-ik_1t}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}+ik_1\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}v_{k_1}ds\Big)\times$$

$$\times\Big((\overline{w^0_{k_2}}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_2}})e^{-ik_2t}-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_2}}+ik_2\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_2(s-t)}\overline{v_{k_2}}ds\Big)+$$

$$-\Big((w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})e^{ik_2t}-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}-ik_2\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}v_{k_2}ds\Big)(\overline{u^0_{k_1}}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_1}})e^{ik_1t}-$$

$$-\Big((w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})e^{ik_2t}-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}-ik_2\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}v_{k_2}ds\Big)\times$$

$$\times\Big(-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_1}}-ik_1\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_1(s-t)}\overline{v_{k_1}}ds\Big)\Big\}.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}v_k+\frac{1}{\varepsilon}L_e\ v_k-\frac{1}{\varepsilon}ik\int\limits_0^t\Big(u_ee^{-ik(s-t)}-w_ee^{ik(s-t)}\Big)v_kds= \tag{3.12}$$

$$=2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}D_k^+e^{ikt}+2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}D_k^-e^{-ikt}-\varepsilon v_e^{1/2}T_k^{add}(v)-$$
$$-\varepsilon v_e^{1/2}\Big(L_k(v)+B_k(v,v)\Big)$$
$$v_k|_{t=0}=v_k^0,$$

$$D_k^+=u_e^{1/2}(w^0_k+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_k)+\frac{1}{2}\varepsilon^2\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq0}(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})\overline{(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})},$$

$$D_k^-=w_e^{1/2}(u^0_k+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_k)+\frac{1}{2}\varepsilon^2\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq0}(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})\overline{(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})},$$

$$L_k(v)=-\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq0}\Big\{\Big(-\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}+ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}v_{k_1}ds\Big)\overline{(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})e^{-ik_2t}}+$$

$$+(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})e^{-ik_1t}\overline{\Big(-\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}v_{k_2}ds\Big)}+$$

$$+\Big(-\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}v_{k_2}ds\Big)\overline{(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})e^{ik_1t}}+$$

$$+(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})e^{ik_2t}\overline{\Big(-\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}+ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}v_{k_1}ds\Big)}\Big\},$$

$$B_k(v,v)=\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq0}\Big(v_{k_1}\overline{v_{k_2}}+v_{k_2}\overline{v_{k_1}}-$$

$$-\frac{1}{4}\Big(-\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}+ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}v_{k_1}ds\Big)\overline{\Big(-\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}v_{k_2}ds\Big)}+$$

$$-\frac{1}{4}\Big(-\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}v_{k_2}ds\Big)\overline{\Big(-\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}+ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}v_{k_1}ds\Big)}\Big\},$$

$$T_k^{add}(v)=\frac{1}{2}(v_0\overline{v_k}+v_k\overline{v_0})-$$

$$+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_0((\overline{w_k^0}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_k^0})e^{-ikt}+ik\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}\overline{v_k}ds)+$$

$$+((w_k^0+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0)e^{ikt}-ik\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}v_kds)\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_0}+$$

$$+((u_k^0+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0)e^{-ikt}+ik\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}v_kds)\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_0}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_0((\overline{u_k^0}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_k^0})e^{ikt}-ik\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}\overline{v_k}ds).$$

Определение. *Фурье-решением* задачи Коши для системы (3.3) будем называть систему абсолютно непрерывных коэффициентов Фурье $U_k=(u_k,v_k,w_k)$, $k\in\mathbb{Z}$, удовлетворяющих системе (3.12), (3.6), (3.8) для почти всех $t\in\mathbb{R}_+$.

Теорема 3.1. *Пусть* $\sigma>1$, $u|_{t=0},v|_{t=0},w|_{t=0}\in H^\sigma(0,2\pi)$ *и средние значения* $u_0^0=v_0^0=w_0^0=0$. *Пусть* $m\in\mathbb{N}$ *фиксировано. Тогда существует* $T^*>0$, *возможно зависящее от* m, *такое что усечение системы* (3.12), (3.8)

$$\frac{d}{dt}v_k^{(m)}+\frac{1}{\varepsilon}L_e\ v_k^{(m)}-\frac{1}{\varepsilon}ik\int\limits_0^t\Big(u_ee^{-ik(s-t)}-w_ee^{ik(s-t)}\Big)v_k^{(m)}ds= \tag{3.13}$$

$$=2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}D_{k,m}^+e^{ikt}+2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}D_{k,m}^-e^{-ikt}-\varepsilon v_e^{1/2}T_k^{add}(v^{(m)})-$$
$$-\varepsilon v_e^{1/2}\Big(L_k^{(m)}(v^{(m)})+B_k^{(m)}(v^{(m)},v^{(m)})\Big)$$
$$v_k^{(m)}|_{t=0}=v_k^0,\quad |k|=1,\dots,m,$$

$$\frac{d}{dt}v_0^{(m)}+\frac{1}{\varepsilon}L_e\ v_0^{(m)}=-\varepsilon v_e^{1/2}\Big(\frac{3}{2}v_0^{(m)}\overline{v_0^{(m)}}-d_0^{(m)}+ \tag{3.14}$$
$$+L_0^{(m)}(v^{(m)})+B_0^{(m)}(v^{(m)},v^{(m)}))\Big),\quad v_0|_{t=0}=0$$

имеет единственное решение на интервале $[0,T^*]$. *Как мы покажем ниже, решение* $U^{(m)}=\{v_k^{(m)}(t),\ |k|=0,1\dots,m\}$, *при дополнительных так называемых условиях несекулярности может быть продолжено на максимальный интервал* $[0,T^*_{max})$, *такой что* $T^*_{max}=+\infty$, *если сумма норм* $\|u|_{t=0}\|_{H^\sigma(0,2\pi)}+\|v|_{t=0}\|_{H^\sigma(0,2\pi)}+\|w|_{t=0}\|_{H^\sigma(0,2\pi)}$ *достаточно мала.*

Здесь

$$d_0^{(m)}=\sum_{k_1+k_2=0,|k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big((u_{k_1}^0+\frac{1}{2}w_e^{1/2}v_{k_1}^0)(\overline{w_{k_2}^0}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_2}^0})+$$
$$+(w_{k_2}^0+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}^0)(\overline{u_{k_1}^0}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_1}^0})\Big).$$

Величины $L_0^{(m)}(v^{(m)}),B_0^{(m)}(v^{(m)},v^{(m)})$, $D_{k,m}^\pm,L_k^{(m)}(v^{(m)}),B_k^{(m)}(v^{(m)},v^{(m)})$ определяются аналогично.

Следствие 3.1. *Пусть* $u|_{t=0}, v|_{t=0}, w|_{t=0} \in H^\sigma(0,2\pi)$, $\sigma > 1$. *Тогда при выполнении условий теоремы* 3.1 *существует глобальное Фурье-решение задачи Коши для системы* (3.3).

3.4. Однородные данные Коши. Положим

$$v_k = v_k^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} + y_k, \quad k \in \mathbb{Z}_0.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}y_k + \frac{1}{\varepsilon}L_e\, y_k - \frac{1}{\varepsilon}ik\int\limits_0^t \Big(u_e e^{-ik(s-t)} - w_e e^{ik(s-t)}\Big)y_k ds = \tag{3.15}$$
$$= 2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}_k^+ e^{ikt} + 2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}_k^- e^{-ikt} + e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}(f_k^L(t) + f_k^B(t)) -$$
$$- \varepsilon v_e^{1/2}T_k^{add}(v) - \varepsilon v_e^{1/2}\Big(\mathcal{L}_k(y) + B_k(y,y)\Big),$$
$$y_k|_{t=0} = 0.$$

Здесь

$$-\frac{1}{\varepsilon}ik\int\limits_0^t \Big(u_e e^{-ik(s-t)} - w_e e^{ik(s-t)}\Big)v_k^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s}ds =$$
$$= -\frac{1}{\varepsilon}v_k^0[-u_e\frac{ik}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}(e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} - e^{ikt}) - w_e\frac{ik}{(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}(e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} - e^{-ikt}) =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon}v_k^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}\Big(u_e\frac{ik}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)} + w_e\frac{ik}{(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\Big) -$$
$$- \frac{1}{\varepsilon}v_k^0 u_e\frac{ik}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}e^{ikt} - \frac{1}{\varepsilon}v_k^0 w_e\frac{ik}{(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}e^{-ikt},$$
$$\mathcal{L}_k(y) = L_k(y) + B_k(v^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}, y) + B_k(y, v^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}),$$
$$L_k(v_k^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}) = -\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k, k_1,k_2\neq 0}\Big\{ - e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}\Big(\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}^0(\overline{w_{k_2}^0} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_2}^0})e^{-ik_2 t} +$$
$$+ (u_{k_1}^0 + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}^0)e^{-ik_1 t}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_2}^0} + \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}^0(\overline{u_{k_1}^0} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_1}^0})e^{ik_1 t} + (w_{k_2}^0 + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}^0)e^{ik_2 t}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_1}^0}\Big) +$$
$$+ v_{k_1}^0\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}(e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} - e^{-ik_1 t})(\overline{w_{k_2}^0} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_2}^0})e^{-ik_2 t} +$$
$$+ (u_{k_1}^0 + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}^0)e^{-ik_1 t}\overline{\Big(v_{k_2}^0\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}(e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} - e^{ik_2 t}) +}$$
$$\overline{+ v_{k_2}^0\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}(e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} - e^{ik_2})}(\overline{u_{k_1}^0} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_1}^0})e^{ik_1 t} +$$
$$+ (w_{k_2}^0 + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}^0)e^{ik_2 t}\,\overline{v_{k_1}^0\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}(e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} - e^{-ik_1 t})}\Big\} =$$
$$= f_k^L(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k, k_1,k_2\neq 0}\Big(v_{k_1}^0\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}(\overline{w_{k_2}^0} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_2}^0}) +$$
$$+ (u_{k_1}^0 + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}^0)\overline{v_{k_2}^0}\frac{ik_2}{(ik_2-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}})\Big)e^{-ikt} +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k, k_1,k_2\neq 0}\Big(v_{k_2}^0\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}(\overline{u_{k_1}^0} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_1}^0}) +$$

$$+ (w^0_{k_2} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v^0_{k_2})\ \overline{v^0_{k_1}} \frac{ik_1}{(ik_1 + \frac{1}{\varepsilon}L_e)} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\Big) e^{ikt}.$$

Также получим

$$B_k(v^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}, v^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}) == f^B_k(t) e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} -$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k, k_1,k_2\neq 0} \Big(v^0_{k_1} \frac{ik_1}{(ik_1 - \frac{1}{\varepsilon}L_e)} \frac{ik_2}{(ik_2 - \frac{1}{\varepsilon}L_e)} \overline{v^0_{k_2}} \Big) e^{-ikt} -$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k, k_1,k_2\neq 0} \Big(v^0_{k_2} \frac{ik_2}{(ik_2 + \frac{1}{\varepsilon}L_e)} \overline{v^0_{k_1}} \frac{ik_1}{(ik_1 + \frac{1}{\varepsilon}L_e)} \Big) e^{ikt}.$$

Теперь положим

$$2v_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{D}^+_k = 2v_e^{1/2}u_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}(w^0_k - \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v^0_k) +$$

$$+\varepsilon v_e^{1/2} \sum_{k_1+k_2=k, k_1,k_2\neq 0} (w^0_{k_2} - \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2 + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v^0_{k_1}) \overline{(u^0_{k_1} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1 - \frac{1}{\varepsilon}L_e)} v^0_{k_1})}.$$

3.5. Конечномерная аппроксимация. Перейдем к конечномерной аппроксимации

$$\frac{d}{dt}y^{(m)}_k + \frac{1}{\varepsilon}L_e\ y^{(m)}_k - \frac{1}{\varepsilon}ik\int_0^t \Big(u_e e^{-ik(s-t)} - w_e e^{ik(s-t)}\Big) y^{(m)}_k ds = \tag{3.16}$$

$$= 2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}^+_{k,m}e^{ikt} + 2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}^-_{k,m}e^{-ikt} + e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}(f^{(m)}_{k,L}(t) + f^{(m)}_{k,B}(t)) -$$

$$-\varepsilon v_e^{1/2} T^{add}_k(y^{(m)}) - \varepsilon v_e^{1/2}\Big(\mathcal{L}^{(m)}_k(y^{(m)}) + B^{(m)}_k(y^{(m)}, y^{(m)})\Big),$$

$$y^{(m)}_k|_{t=0} = 0,\ |k| = 1, \dots, m$$

$$2v_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{D}^-_{k,m} = 2v_e^{1/2}w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}(u^0_k - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik - \frac{1}{\varepsilon}L_e)} v^0_k) + \tag{3.17}$$

$$+\varepsilon v_e^{1/2} \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|,|k_2|=1,\dots,m} \overline{\Big(w^0_{k_2} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2 + \frac{1}{\varepsilon}L_e)} v^0_{k_2}\Big)} \Big(u^0_{k_1} - \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1 - \frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v^0_{k_1}\Big),$$

$$2v_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{D}^+_{k,m} = 2v_e^{1/2}u_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}(w^0_k - \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v^0_k) + \tag{3.18}$$

$$+\varepsilon v_e^{1/2} \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|,|k_2|=1,\dots,m} (w^0_k - \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v^0_k) \overline{(u^0_{k_1} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1 - \frac{1}{\varepsilon}L_e)} v^0_{k_1})},$$

$$B^{(m)}_k(y^{(m)}, y^{(m)}) = \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|,|k_2|=1,\dots,m} \Big(y^{(m)}_{k_1}\overline{y^{(m)}_{k_2}} + y^{(m)}_{k_2}\overline{y^{(m)}_{k_1}} -$$

$$-\frac{1}{4}\Big(-\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} y^{(m)}_{k_1} + ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int_0^t e^{ik_1(s-t)} y^{(m)}_{k_1} ds\Big) \overline{\Big(-\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} y^{(m)}_{k_2} - ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int_0^t e^{-ik_2(s-t)} y^{(m)}_{k_2} ds\Big)} +$$

$$-\frac{1}{4}\Big(-\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} y^{(m)}_{k_2} - ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int_0^t e^{-ik_2(s-t)} y^{(m)}_{k_2} ds\Big) \overline{\Big(-\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} y^{(m)}_{k_1} + ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int_0^t e^{ik_1(s-t)} y^{(m)}_{k_1} ds\Big)}\Big\},$$

$$\mathcal{L}^{(m)}_k(y^{(m)}) = L^{(m)}_k(y^{(m)}) + B^{(m)}_k(v^0_k e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}, y^{(m)}) + B^{(m)}_k(y^{(m)}, v^0_k e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}),$$

$$L^{(m)}_k(y^{(m)}) =$$

$$
= -\frac{1}{2} \sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\dots,m} \Big(-\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} y_{k_1}^{(m)} + ik_1 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)} y_{k_1}^{(m)} ds \Big) (\overline{w_{k_2}^0} + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \overline{v_{k_2}^0}) e^{-ik_2 t} +
$$

$$
+ (u_{k_1}^0 + \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_{k_1}^0) e^{-ik_1 t} \overline{\Big(-\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} y_{k_2}^{(m)} - ik_2 \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)} y_{k_2}^{(m)} ds \Big)} +
$$

$$
+ \Big(-\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} y_{k_2}^{(m)} - ik_2 \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)} y_{k_2}^{(m)} ds \Big) (\overline{u_{k_1}^0} + \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \overline{v_{k_1}^0}) e^{ik_1 t} +
$$

$$
+ (w_{k_2}^0 + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_{k_2}^0) e^{ik_2 t} \overline{\Big(-\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} y_{k_1}^{(m)} + ik_1 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)} y_{k_1}^{(m)} ds \Big)} \Big\},
$$

$$
T_k^{add}(y^{(m)}) = \frac{1}{2} (v_0 \overline{(v_k^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon} L_e t} + y_k^{(m)})} + (v_k^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon} L_e t} + y_k^{(m)}) \overline{v_0}) -
$$

$$
+ \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_0 ((\overline{w_k^0} + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \overline{v_k^0}) e^{-ikt} + ik \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int\limits_0^t e^{ik(s-t)} \overline{(v_k^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon} L_e t} + y_k^{(m)})} ds) +
$$

$$
+ ((w_k^0 + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_k^0) e^{ikt} - ik \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int\limits_0^t e^{-ik(s-t)} (v_k^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon} L_e s} + y_k^{(m)}) ds) \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \overline{v_0} +
$$

$$
+ ((u_k^0 + \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_k^0) e^{-ikt} + ik \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int\limits_0^t e^{ik(s-t)} (v_k^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon} L_e s} + y_k^{(m)}) ds) \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \overline{v_0} +
$$

$$
+ \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_0 ((\overline{u_k^0} + \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \overline{v_k^0}) e^{ikt} - ik \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int\limits_0^t e^{-ik(s-t)} \overline{(v_k^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon} L_e s} + y_k^{(m)})} ds).
$$

3.6. Невозмущенная задача. Начнем с доказательства существования решения невозмущенной задачи

$$
T_k(y_k^{(m)}) = \frac{d}{dt} y_k^{(m)} + \frac{1}{\varepsilon} L_e \ y_k^{(m)} - \frac{1}{\varepsilon} ik \int\limits_0^t \Big(u_e e^{-ik(s-t)} - w_e e^{ik(s-t)} \Big) y_k^{(m)} ds = \tag{3.19}
$$

$$
= 2\frac{1}{\varepsilon} v_e^{1/2} \mathcal{D}_{k,m}^+ e^{ikt} + 2\frac{1}{\varepsilon} v_e^{1/2} \mathcal{D}_{k,m}^- e^{-ikt} + e^{-\frac{1}{\varepsilon} L_e t} (f_{k,L}^{(m)}(t) + f_{k,B}^{(m)}(t)) -
$$

$$
-\varepsilon v_e^{1/2} \Big(\mathcal{L}_k^{(m)}(y^{(m)}) + B_k^{(m)}(y^{(m)}, y^{(m)}) \Big),
$$

$$
y_k^{(m)}|_{t=0} = 0, \ |k| = 1, \dots, m.
$$

Положим

$$
y_k = Q_k^+ T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^- T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k), \quad k \in \mathbb{Z}_0. \tag{3.20}
$$

Если подставить $y_k = Q_k^+ T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^- T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k), \quad k \in \mathbb{Z}_0$ в $\mathcal{L}_k(y), B_k(y, y)$ и сделать соответствующие преобразования, выделяющие секулярные члены, то можно найти секулярное уравнение для невозмущенной задачи.

А именно,

$$
-ik \int\limits_0^t e^{-ik(s-t)} (Q_k^+ T_k^{-1}(e^{iks}) + Q_k^- T_k^{-1}(e^{-iks})) ds = -ik \int\limits_0^t e^{-ik(s-t)} Q_k^+ T_k^{-1}(e^{iks}) ds -
$$

$$- ik \int\limits_0^t e^{-ik(s-t)} Q_k^- T_k^{-1}(e^{-iks}) ds$$

Здесь $\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)} Q_k^- T_k^{-1}(e^{-iks}) ds$ стремится к нулю при $t \to \infty$, в то время как

$$-ik \int\limits_0^t e^{-ik(s-t)} Q_k^+ T_k^{-1}(e^{iks}) ds = \,?$$

Надо выделять секулярный член, используя T_k.

Также

$$ik \int\limits_0^t e^{ik(s-t)} (Q_k^+ T_k^{-1}(e^{iks}) + Q_k^- T_k^{-1}(e^{-iks})) ds = ik \int\limits_0^t e^{ik(s-t)} Q_k^+ T_k^{-1}(e^{iks} ds +$$

$$+ ik \int\limits_0^t e^{ik(s-t)} Q_k^- T_k^{-1}(e^{-iks})) ds,$$

где $ik \int\limits_0^t e^{ik(s-t)} Q_k^+ T_k^{-1}(e^{iks})) ds$ стремится к нулю при $t \to \infty$, в то время как

$$ik \int\limits_0^t e^{ik(s-t)} Q_k^- T_k^{-1}(e^{-iks}) ds = \,?$$

Надо выделять секулярный член, используя T_k. Опять делаем трюк:

$$-ik \int\limits_0^t e^{ik(s-t)} Q_k^- T_k^{-1}(e^{-iks}) ds = \frac{\varepsilon}{w_e} \Big(Q_k^- e^{-ikt} - \frac{d}{dt} Q_k^- T_k^{-1}(e^{-ikt}) - \tag{3.21}$$

$$- \frac{1}{\varepsilon} L_e \; Q_k^- T_k^{-1}(e^{-ikt}) - \frac{1}{\varepsilon} ik \int\limits_0^t u_e e^{-ik(s-t)} Q_k^- T_k^{-1}(e^{-iks}) ds \Big),$$

$$ik \int\limits_0^t e^{-ik(s-t)} Q_k^+ T_k^{-1}(e^{iks}) ds = \frac{\varepsilon}{u_e} \Big(Q_k^+ e^{ikt} - \frac{d}{dt} Q_k^+ T_k^{-1}(e^{ikt}) - \tag{3.22}$$

$$- \frac{1}{\varepsilon} L_e \; Q_k^+ T_k^{-1}(e^{ikt}) + \frac{1}{\varepsilon} ik \int\limits_0^t w_e e^{ik(s-t)} Q_k^+ T_k^{-1}(e^{iks}) ds \Big).$$

Отсюда

$$B_k^{(m)}(Q_k^+ T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^- T_k^{-1}(e^{-ikt}), Q_k^+ T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^- T_k^{-1}(e^{-ikt})) = G_{k,B}^{(m)}(t) -$$

$$- \frac{1}{4} \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2|=1,\ldots,m} \Big\{ ik_1 \int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)} Q_{k_1}^- T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s}) ds \times$$

$$\overline{\times \Big(- ik_2 \int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)} Q_{k_2}^+ T_{k_2}^{-1}(e^{ik_2 s}) ds -}$$

$$- ik_2 \int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)} (Q_{k_2}^+ T_{k_2}^{-1}(e^{ik_2 s}) \overline{\Big(ik_1 \int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)} Q_{k_1}^- T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s}) ds \Big) \Big\}} =$$

$$= G^{(m)}_{k,B}(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+).$$

Теперь опять воспользуемся (3.22), (3.21)

$$-\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{\Big(-ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}Q^-_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1s})ds\Big)\times$$

$$\times\overline{\Big(ik_2\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}Q^+_{k_2}T^{-1}_{k_2}(e^{ik_2s})ds+}$$

$$+ik_2\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}(Q^+_{k_2}T^{-1}_{k_2}(e^{ik_2s})\overline{\Big(-ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}Q^-_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1s})ds\Big)}\Big\}=$$

$$=-\frac{1}{4}\frac{\varepsilon}{w_e}\frac{\varepsilon}{u_e}\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big(Q^-_{k_1}\overline{Q^+_{k_2}}e^{-ikt}+Q^+_{k_2}\overline{Q^-_{k_1}}e^{ikt}\Big).$$

Далее имеем

$$\mathcal{L}^{(m)}_k(Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt})=$$

$$=L^{(m)}_k(Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}))+B^{(m)}_k(v^0_ke^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et},(Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}))+$$

$$+B^{(m)}_k((Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}),v^0_ke^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}),$$

где

$$L^{(m)}_k(Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}))=h^L_k(t)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq 0}\Big\{(\overline{w^0_{k_2}}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_2}})e^{-ik_2t}ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}Q^-_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1t})ds+$$

$$+(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})e^{-ik_1t}\overline{\Big(-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}Q^+_{k_2}T^{-1}_{k_2}(e^{ik_2s})ds\Big)}+$$

$$+(\overline{u^0_{k_1}}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_1}})e^{ik_1t}\Big(-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}Q^+_{k_2}T^{-1}_{k_2}(e^{ik_2s})ds\Big)+$$

$$+(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})e^{ik_2t}\overline{\Big(ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}Q^-_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1s})ds\Big)}\Big\}.$$

В силу (3.22), (3.21) получим

$$(\overline{w^0_{k_2}}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_2}})e^{-ik_2t}ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}Q^-_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1t})ds+$$

$$+(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})e^{-ik_1t}\overline{\Big(-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}Q^+_{k_2}T^{-1}_{k_2}(e^{ik_2s})ds\Big)}+$$

$$+(\overline{u^0_{k_1}}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_1}})e^{ik_1t}\Big(-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}Q^+_{k_2}T^{-1}_{k_2}(e^{ik_2s})ds\Big)+$$

$$+(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})e^{ik_2t}\overline{\Big(ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}Q^-_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1s})ds\Big)}=$$

$$= -\Big((\overline{w^0_{k_2}} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_2}})\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1} + (u^0_{k_1} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})\frac{\varepsilon}{u_e}\overline{Q^+_{k_2}}\Big)e^{-ikt} +$$
$$-\Big((\overline{u^0_{k_1}} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_1}})\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_k + (w^0_{k_2} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})\frac{\varepsilon}{w_e}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{Q^-_{k_1}}\Big)e^{ikt}.$$

Отсюда

$$L^{(m)}_k(Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt}) + Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt})) = H^L_k(t) +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq 0}\Big((\overline{w^0_{k_2}} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_2}})\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1} + (u^0_{k_1} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})\frac{\varepsilon}{u_e}\overline{Q^+_{k_2}}\Big)e^{-ikt} +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq 0}\Big((\overline{u^0_{k_1}} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_1}})\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_k + (w^0_{k_2} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})\frac{\varepsilon}{w_e}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{Q^-_{k_1}}\Big)e^{ikt}.$$

Далее

$$B^{(m)}_k(v^0_ke^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}, (Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt}) + Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt})) = F^{B,2}_k(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et} + H^{B,2}_k(t) -$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq 0}\Big\{\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\frac{\varepsilon}{u_e}\overline{Q^+_{k_2}}e^{-ikt} + \Big(\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_{k_2}\Big)\frac{ik_1}{(ik_1+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\overline{v^0_{k_1}}e^{ikt}\Big\}.$$

Так же получим

$$B^{(m)}_k((Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt}) + Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}), v^0_ke^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}) = F^{B,1}_k(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et} + H^{B,1}_k(t) -$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq 0}\Big\{\Big(\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\frac{ik_2}{(ik_2-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\overline{v^0_{k_2}}e^{-ikt} + (\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2}\frac{\varepsilon}{w_e}\overline{Q^-_{k_1}}e^{ik}\Big\}.$$

Положим

$$S^+(Q^-,Q^+)e^{ikt} + S^-(Q^-,Q^+)e^{-ikt} =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq 0}\Big\{\Big((\overline{w^0_{k_2}} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_2}})\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1} + (u^0_{k_1} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})\frac{\varepsilon}{u_e}\overline{Q^+_{k_2}}\Big)e^{-ikt} +$$
$$+\Big((\overline{u^0_{k_1}} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_1}})\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_k + (w^0_{k_2} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})\frac{\varepsilon}{w_e}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{Q^-_{k_1}}\Big)e^{ikt} -$$
$$-\frac{1}{2}\Big(\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\frac{\varepsilon}{u_e}\overline{Q^+_{k_2}} + \frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\frac{ik_2}{(ik_2-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\overline{v^0_{k_2}}\Big)e^{-ikt} -$$
$$-\frac{1}{2}\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2}\frac{\varepsilon}{w_e}\overline{Q^-_{k_1}} + \frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_{k_2}\Big)\frac{ik_1}{(ik_1+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\overline{v^0_{k_1}}\Big)e^{ikt}\Big\}.$$

Суммируя, получим сведение задачи Коши (3.19) к интегральному уравнению в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ вида

$$z^{(m)}_k + Q^+_k\ e^{ikt} + Q^-_k\ e^{-ikt} = S^+(Q^-,Q^+)e^{ikt} + S^-(Q^-,Q^+)e^{-ikt} + \tag{3.23}$$
$$+2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}^+_{k,m}e^{ikt} + 2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}^-_{k,m}e^{-ikt} +$$
$$+e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}(F^{(m)}_{k,L}(t) + F^{(m)}_{k,B}(t)) + H^{(m)}_{k,B}(t) + H^{(m)}_{k,B}(t) -$$
$$-\varepsilon v_e^{1/2}\Big(\mathcal{U}^{(m)}_k(T^{-1}_k(z^{(m)})) + B^{(m)}_k(T^{-1}_k(z^{(m)}), T^{-1}_k(z^{(m)}))\Big),$$

где

$$\mathcal{U}^{(m)}_k(T^{-1}_k(z^{(m)})) = \mathcal{L}^{(m)}_k(T^{-1}_k(z^{(m)}) + B^{(m)}_k(Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt}) + Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}), T^{-1}_k(z^{(m)})) +$$
$$+B^{(m)}_k(T^{-1}_k(z^{(m)}), Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt}) + Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt})),$$

функции $F^{(m)}_{k,L}(t), F^{(m)}_{k,B}(t)$ ограничены, а $H^{(m)}_{k,L}(t), H^{(m)}_{k,B}(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$.

Чтобы свести задачу Коши (3.19) к интегральному уравнению в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, мы должны аннулировать секулярные члены, потребовав, чтобы

$$Q^+_k\ e^{+ikt} + Q^-_k\ e^{-ikt} = S^+(Q^-,Q^+)e^{ikt} + S^-(Q^-,Q^+)e^{-ikt} +$$

$$+\,2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}^+_{k,m}e^{ikt}+2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}^-_{k,m}e^{-ikt},\quad |k|=1,\dots,m.$$

Тогда окончательно получим

$$z_k^{(m)}=e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}(F^{(m)}_{k,L}(t)+F^{(m)}_{k,B}(t))+H^{(m)}_{k,B}(t)+H^{(m)}_{k,B}(t)-$$
$$-\,\varepsilon v_e^{1/2}\Big(\mathcal{U}_k^{(m)}(T_k^{-1}(z^{(m)}))+B_k^{(m)}(T_k^{-1}(z^{(m)}),T_k^{-1}(z^{(m)}))\Big). \tag{3.24}$$

Условие на секулярные члены можно переписать как алгебраическую систему для (Q_k^+,Q_k^-):

$$Q_k^+=2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}^+_{k,m}+S^+(Q^-,Q^+), \tag{3.25}$$
$$Q_k^-=2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}^-_{k,m}+S^-(Q^-,Q^+),\quad |k|=1,\dots,m.$$

Нулевая мода. Теперь сделаем подстановку

$$y_k=Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt})+Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt})+T_k^{-1}(z_k),\quad k\in\mathbb{Z}_0$$

в уравнении (3.8) нулевой моды. Тогда получим

$$\frac{d}{dt}v_0+\frac{1}{\varepsilon}L_e\ v_0=-\varepsilon v_e^{1/2}\Big(\frac{3}{2}v_0\overline{v_0}-\mathcal{D}_0\Big)- \tag{3.26}$$
$$-\,\varepsilon v_e^{1/2}\Big(\mathcal{L}_0^{(1)}(T^{-1}(z))+B_0(T^{-1}(z),T^{-1}(z))+f_0(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}+h_0(t)$$
$$v_0|_{t=0}=0$$

где

$$\mathcal{L}_0^{(1)}(T^{-1}(z))=B_0(Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt})+Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}),T_k^{-1}(z_k))+$$
$$+\,B_0(T_k^{-1}(z_k),Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt})+Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}))+\mathcal{L}_0(T_k^{-1}(z_k)),$$
$$\mathcal{L}_0(Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt})+Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt})+$$
$$+\,B_0(Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt})+Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt},Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt})+Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt})=h_0(t)+D_0^{(1)},$$
$$\mathcal{D}_0(Q^+,Q^-)=D_0-D_0^{(1)},$$
$$D_0^{(1)}=\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\neq0}\Big\{(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1})\frac{\varepsilon}{u_e}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{Q_k^+}+$$
$$+\,\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{u_e}Q_k^+\overline{(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1})}+\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\overline{(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2})}+$$
$$+\,(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2})\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{\frac{\varepsilon}{w_e}Q_k^-}-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{w_eu_e}\sum_{k_1+k_2=0,k_1\in\mathbb{Z}_0}\Big(Q^-_{k_1}\overline{Q^+_{k_2}})+Q^+_{k_2}\overline{Q^-_{k_1}}\Big)\Big\}.$$

Здесь

$$L_0(Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt})+Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt})=h_0^L(t)+$$
$$+\,\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\neq0}\Big\{(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})\frac{\varepsilon}{u_e}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{Q_k^+}+\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\overline{(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})}+$$
$$+\,(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{\frac{\varepsilon}{w_e}Q_k^-}+\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{u_e}Q_k^+\overline{(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})}\Big\},$$
$$B_0((Q^+_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{ik_1t})+Q^-_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1t}),v^0_ke^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et})=f_0^{B,1}(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}+h_0^{B,1}(t)-$$
$$-\,\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\neq0}\Big\{ik_1\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\overline{v^0_{k_2}\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}}+v^0_{k_2}\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{\varepsilon}{w_e}\overline{Q^-_{k_1}}\Big\},$$
$$B_0(v^0_ke^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et},(Q^+_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{ik_1t})+Q^-_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1t}))=f_0^{B,2}(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}+h_0^{B,2}(t)-$$
$$-\,\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\neq0}\Big\{\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\frac{\varepsilon}{u_e}\ \overline{Q^+_{k_2}}+\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_{k_2}\overline{\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}}\Big\}.$$

В то же время имеем

$$B_0((Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt})+Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}),(Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt})+Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}))=h_0^B(t)-$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2}{w_eu_e}\sum_{k_1+k_2=0,k_1\in\mathbb{Z}_0}\Big(Q_{k_1}^-\overline{Q_{k_2}^+})+Q_{k_2}^+\overline{Q_{k_1}^-}\Big).$$

Суммируя, получим

$$L_0(Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt})+Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt})+B_0(v_k^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et},(Q_{k_1}^+T_{k_1}^{-1}(e^{ik_1t})+Q_{k_1}^-T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t}))+$$

$$+B_0((Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt})+Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}),(Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt})+Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}))=$$

$$=h_0^L(t)+f_0^{B,1}(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}+h_0^{B,1}(t)+f_0^{B,2}(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}+h_0^{B,2}(t)+h_0^B(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\neq0}\Big\{(u_{k_1}^0-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_{k_1}^0)\frac{\varepsilon}{u_e}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{Q_k^+}+$$

$$+\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{u_e}Q_k^+\overline{(u_{k_1}^0-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_{k_1}^0)}+\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}Q_{k_1}^-\overline{(w_{k_2}^0-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_{k_2}^0)}+$$

$$+(w_{k_2}^0-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_{k_2}^0)\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{\frac{\varepsilon}{w_e}Q_k^-}-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{w_eu_e}\sum_{k_1+k_2=0,k_1\in\mathbb{Z}_0}\Big(Q_{k_1}^-\overline{Q_{k_2}^+})+Q_{k_2}^+\overline{Q_{k_1}^-}\Big)\Big\}.$$

Чтобы завершить сведение задачи Коши (3.16) к интегральному уравнению в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, мы должны дополнительно аннулировать секулярные члены нулевой моды, потребовав, чтобы

$$\mathcal{D}_0(Q^+,Q^-)=0. \tag{3.27}$$

Тогда, положив $v_0=z_0$ в последнем уравнении системы интегральных уравнений в гильбертовом пространстве, получим $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$:

$$z_0=-\frac{3}{2}\varepsilon v_e^{1/2}\int\limits_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}L_e(s-t)}\Big[z_0\overline{z_0}-$$

$$+\frac{2}{3}\Big(\mathcal{L}_0^{(1)}(T^{-1}(z))+B_0(T^{-1}(z),T^{-1}(z)\Big)+f_0(s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_es}+h_0(s)\Big]ds.$$

Невозмущенное уравнение Риккати

$$\frac{d}{dt}z_0=-\frac{3}{2}\varepsilon v_e^{1/2}z_0\Big(\overline{z_0}+\frac{2}{3}\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{L_e}{v_e^{1/2}}\Big)$$

имеет единственное тривиальное решение $y_0\equiv0$, отвечающее начальному условию $z_0|_{t=0}=0$.

Лемма 3.1. *Для любой экспоненциально стремящейся к нулю при $t\to0$ вещественной функции $f\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)$ существует единственное решение $z_0\in H^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)$ задачи Коши* (3.19).

Таким образом, суммарно мы получили систему секулярных уравнений

$$Q_k^+=2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}_{k,m}^++S^+(Q^-,Q^+), \tag{3.28}$$

$$Q_k^-=2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}_{k,m}^-+S^-(Q^-,Q^+),\quad |k|=1,\dots,m,$$

$$\mathcal{D}_0(Q^+,Q^-)=0,$$

решение которой сводит задачу (3.23), (3.26) к системе уравнений

$$
\begin{gathered}
z_k^{(m)} = e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}(F_{k,L}^{(m)}(t) + F_{k,B}^{(m)}(t)) + H_{k,B}^{(m)}(t) + H_{k,B}^{(m)}(t) - \\
- \varepsilon v_e^{1/2}\Big(\mathcal{U}_k^{(m)}(T_k^{-1}(z^{(m)})) + B_k^{(m)}(T_k^{-1}(z^{(m)}), T_k^{-1}(z^{(m)}))\Big), \\
z_0^{(m)} = -\frac{3}{2}\varepsilon v_e^{1/2}\int\limits_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}L_e(s-t)}\Big[z_0^{(m)}\overline{z_0^{(m)}} - \\
+ \frac{2}{3}\Big(\mathcal{L}_0^{(1)}(T^{-1}(z^{(m)})) + B_0(T^{-1}(z^{(m)}), T^{-1}(z^{(m)})\Big) + f_0(s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s} + h_0(s)\Big]ds
\end{gathered}
\tag{3.29}
$$

в гильбертовом пространстве $(L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m}))^{2m}$.

Так же как при исследовании уравнения Карлемана, покажем, что ее единственное решение

$$
Q_{k,m}^+ = 2v_e^{1/2}u_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}(w_k^0 - \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0),
$$

$$
Q_k^- = 2v_e^{1/2}w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}(u_k^0 - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik - \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_k^0), \quad |k| = 1, \dots, m,
$$

определяется локальным равновесием.

3.7. Локальное равновесие. Выше мы получили представление коэффициентов Фурье скоростей $\widehat{u}$ и $\widehat{w}$:

$$
\begin{gathered}
u_k = \Big(u_k^0 - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{ik - \frac{1}{\varepsilon}L_e}v_k^0\Big)e^{-ikt} - v_k^0\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{ik - \frac{1}{\varepsilon}L_e}e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} - \\
- \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}y_k + ik\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}y_k ds, \\
w_k = \Big(w_k^0 - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_k^0\Big)e^{ikt} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{ik + \frac{1}{\varepsilon}L_e}e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} - \\
- \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}y_k - ik\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}y_k ds
\end{gathered}
\tag{3.30}
$$

Если подставить $y_k = Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k)$, $k \in \mathbb{Z}_0$ и сделать соответствующие преобразования, выделяющие секулярные члены, то можно найти решение секулярного уравнения для невозмущенной задачи.

А именно:

$$
\begin{gathered}
-ik\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}(Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-iks}))ds = -ik\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks})ds - \\
- ik\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-iks})ds.
\end{gathered}
$$

Здесь $\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-iks})ds$ стремится к нулю при $t \to \infty$, в то время как

$$
-ik\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks})ds = ?
$$

Надо выделять секулярный член, используя T_k.

Также

$$ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}(Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks})+Q_k^-T_k^{-1}(e^{-iks}))ds = ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks}ds+$$

$$+ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-iks}))ds,$$

$ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks}))ds$ стремится к нулю при $t\to\infty$, в то время как

$$ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-iks})ds = ?$$

Надо выделять секулярный член, используя T_k. Опять делаем трюк:

$$-ik\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks})ds = \frac{\varepsilon}{u_e}Q_k^+e^{+ikt}-$$

$$-\frac{\varepsilon}{u_e}\Big(\frac{d}{dt}Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt})+\frac{1}{\varepsilon}L_e\ Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt})+\frac{1}{\varepsilon}ikw_e\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks})ds\Big).$$

Так же получим

$$ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-iks})ds = \frac{\varepsilon}{w_e}Q_k^-e^{-ikt}-$$

$$-\frac{\varepsilon}{w_e}\Big(\frac{d}{dt}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt})+\frac{1}{\varepsilon}L_e\ Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt})-\frac{1}{\varepsilon}iku_e\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-iks})ds\Big).$$

Отсюда

$$u_k=\Big(u_k^0-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e}v_k^0-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{w_e^{1/2}v_e^{1/2}}Q_k^-\Big)e^{-ikt}- \tag{3.31}$$

$$-v_k^0\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e}e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}(Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt})+Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt})+T_k^{-1}(z_k))+$$

$$+ik\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}(Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks})+z_k)ds+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{w_e^{1/2}v_e^{1/2}}\Big(\frac{d}{dt}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt})+\frac{1}{\varepsilon}L_e\ Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt})-\frac{1}{\varepsilon}iku_e\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-iks})ds\Big),$$

$$w_k = \Big(w_k^0 - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_k^0 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{u_e^{1/2}v_e^{1/2}}Q_k^+\Big)e^{ikt} - \tag{3.32}$$
$$- \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{ik + \frac{1}{\varepsilon}L_e}e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}(Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k)) -$$
$$- ik\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}(Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k))ds -$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{u_e^{1/2}v_e^{1/2}}\Big(\frac{d}{dt}Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + \frac{1}{\varepsilon}L_e\ Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + \frac{1}{\varepsilon}ikw_e\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks})ds\Big).$$

Из условия локального равновесия следует, что должны быть выполнены равенства

$$u_k^0 - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{ik - \frac{1}{\varepsilon}L_e}v_k^0 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{w_e^{1/2}v_e^{1/2}}Q_k^- = 0, \tag{3.33}$$
$$w_k^0 - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_k^0 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{u_e^{1/2}v_e^{1/2}}Q_k^+ = 0,$$

определяющие решение условия секулярности невозмущенной задачи:

$$Q_k^- = 2\frac{w_e^{1/2}v_e^{1/2}}{\varepsilon}\Big(u_k^0 - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{ik - \frac{1}{\varepsilon}L_e}v_k^0\Big), \tag{3.34}$$
$$Q_k^+ = 2\frac{u_e^{1/2}v_e^{1/2}}{\varepsilon}\Big(w_k^0 - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_k^0\Big).$$

Таким образом, если справедлив принцип локального равновесия (стабилизации решений задачи для возмущений к нулю при $t \to +\infty$), то соотношения (3.34) должны определять решения условия секулярности (3.25). Проверим это предположение в следующем пункте.

3.8. Редукция секулярных членов. Приведенные исследования двух моделей дискретных кинетических уравнений показывают универсальность предлагаемых методов для исследования моделей типа Броудела. Позднее мы опубликуем исследование еще двух моделей: двумерной модели Броудела и трехмерной модели Годунова—Султангазина [3].

Чтобы понять основные трудности проверки принципа локального равновесия, еще раз проанализируем вывод секулярной системы (3.25).

I. *Секулярные члены k-моды перехода к однородным данным Коши.*

$$L_k(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}) = f_k^L(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} -$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k, k_1,k_2\neq 0}\Big\{\Big(ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}v_{k_1}^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s}ds\Big)(\overline{w_{k_2}^0} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_2}^0})e^{-ik_2t} +$$
$$+ (u_{k_1}^0 + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}^0)e^{-ik_1t}\overline{\Big(- ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}v_{k_2}^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s}ds\Big)} +$$
$$+ \Big(- ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}v_{k_2}^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s}ds\Big)(\overline{u_{k_1}^0} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_1}^0})e^{ik_1t} +$$
$$+ (w_{k_2}^0 + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}^0)e^{ik_2t}\overline{\Big(ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}v_{k_1}^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s}ds\Big)}\Big\} =$$

$$
\begin{gathered}
= f_k^L(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} + \frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq 0}\Big\{\Big[\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1}\overline{(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})}+\\
+(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})\overline{\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2}\Big)}\Big]e^{-ikt}+\\
+\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2}\overline{(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})}+\\
+(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})\overline{\Big(\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1}\Big)}\Big]e^{ikt}\Big\},\\
B_k^{(m)}(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t},v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}) = f_k^B(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}-\\
-\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\ldots,m}\Big(ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}v^0_{k_1}e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s}ds\Big)\times\\
\times\overline{\Big(-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}v^0_{k_2}e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s}ds\Big)}+\\
+\Big(-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}v^0_{k_2}e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s}ds\Big)\overline{\Big(ik_1\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}v^0_{k_1}e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s}ds\Big)}\Big\}=\\
= F_k^B(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}-\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\ldots,m}\Big\{\Big(\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\Big)\overline{\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2}\Big)}e^{-ikt}+\\
+\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2}\Big)\overline{\Big(v^0_{k_1}\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\Big)}e^{ikt}\Big\}.
\end{gathered}
$$

Отсюда

$$
\begin{gathered}
L_k(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t})+B_k^{(m)}(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t},v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}) = f_k^B(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}+f_k^L(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}+\\
+\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq 0}\Big\{\Big[\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1}\overline{(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})}+\\
+\Big(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1}\Big)\overline{\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2}\Big)}\Big]e^{-ikt}+\\
+\Big[\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2}\overline{(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})}+\\
+\Big(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2}\Big)\overline{\Big(\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1}\Big)}\Big]e^{ikt}\Big\}.
\end{gathered}
$$

Если добавить нелинейную часть $2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}^+_{k,m}e^{ikt}+2\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\mathcal{D}^-_{k,m}e^{-ikt}$,

$$
\begin{gathered}
I_k^{(m)} = -\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\ldots,m}(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})(\overline{u^0_{k_1}}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_1}})e^{ikt}+\\
-\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\ldots,m}(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})(\overline{w^0_{k_2}}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_2}})e^{-ikt},
\end{gathered}
$$

получим

$$
I_k^{(m)}+L_k(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t})+B_k^{(m)}(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t},v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}) = f_k^B(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}+f_k^L(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}+J_k^{(m)},
$$

$$J_k^{(m)} = -\sum_{k_1+k_2=k, k_1,k_2\neq 0} \Big\{ \Big(u^0_{k_1} - \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1 - \frac{1}{\varepsilon}L_e)} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v^0_{k_1} \Big) \overline{\Big(w^0_{k_2} - \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2 + \frac{1}{\varepsilon}L_e)} v^0_{k_2} \Big)} e^{-ikt} +$$

$$+ \Big(w^0_{k_2} - \frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2 + \frac{1}{\varepsilon}L_e)} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v^0_{k_2} \Big) \overline{\Big(u^0_{k_1} - \frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1 - \frac{1}{\varepsilon}L_e)} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v^0_{k_1} \Big)} e^{ikt} \Big\}.$$

II. *Секулярные члены k-моды перехода к интегральному уравнению в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$*. Секулярные члены перехода к интегральному уравнению в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ возникают из следующих членов:

$$B_k^{(m)}((Q_k^+ T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^- T_k^{-1}(e^{-ikt}), (Q_k^+ T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^- T_k^{-1}(e^{-ikt})) = h_k^B(t) +$$

$$-\frac{1}{4} \sum_{k_1+k_2=k, k_1,k_2\neq 0} \Big\{ \Big(ik_1 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int_0^t e^{ik_1(s-t)} Q^-_{k_1} T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1 s}) ds \Big) \times$$

$$\times \overline{\Big(-ik_2 \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int_0^t e^{-ik_2(s-t)} Q^+_{k_2} T^{-1}_{k_2}(e^{ik_2 s} ds \Big)} +$$

$$+ \Big(-ik_2 \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int_0^t e^{-ik_2(s-t)} Q^+_{k_2} T^{-1}_{k_2}(e^{ik_2 s}) ds \Big) \overline{\Big(ik_1 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int_0^t e^{ik_1(s-t)} Q^-_{k_1} T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1 s}) ds \Big)} \Big\} =$$

$$= H_k^B(t) - \frac{1}{4} \frac{\varepsilon^2}{v_e^2} \sum_{k_1+k_2=k, k_1,k_2\neq 0} \Big(Q^-_{k_1} \overline{Q^+_{k_2}} e^{-ikt} + \overline{Q^-_{k_1}} Q^+_{k_2} e^{ikt} \Big)$$

в силу соотношений

$$-ik \int_0^t e^{ik(s-t)} Q_k^- T_k^{-1}(e^{-iks}) ds = \frac{\varepsilon}{w_e} Q_k^- e^{-ikt} -$$

$$-\frac{\varepsilon}{w_e} \Big(\frac{d}{dt} Q_k^- T_k^{-1}(e^{-ikt}) + \frac{1}{\varepsilon} L_e \; Q_k^- T_k^{-1}(e^{-ikt}) - \frac{1}{\varepsilon} iku_e \int_0^t e^{-ik(s-t)} Q_k^- T_k^{-1}(e^{-iks}) ds \Big),$$

$$ik \int_0^t e^{-ik(s-t)} Q_k^+ T_k^{-1}(e^{iks}) ds = \frac{\varepsilon}{u_e} Q_k^+ e^{+ikt} -$$

$$-\frac{\varepsilon}{u_e} \Big(\frac{d}{dt} Q_k^+ T_k^{-1}(e^{ikt}) + \frac{1}{\varepsilon} L_e \; Q_k^+ T_k^{-1}(e^{ikt}) + \frac{1}{\varepsilon} ikw_e \int_0^t e^{ik(s-t)} Q_k^+ T_k^{-1}(e^{iks}) ds \Big).$$

Здесь $h_k^B(t), H_k^B(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$.

Далее

$$L_k^{(m)}(Q_k^+ T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^- T_k^{-1}(e^{-ikt}) = h_k^L(t) -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{k_1+k_2=k, k_1,k_2\neq 0} \Big\{ \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \Big(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} Q^-_{k_1} T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1 s}) ds \Big) (\overline{w^0_{k_2}} + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \overline{v^0_{k_2}}) e^{-ik_2 t} +$$

$$+ \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} (u^0_{k_1} + \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v^0_{k_1}) e^{-ik_1 t} \overline{\Big(-ik_2 \int_0^t e^{-ik_2(s-t)} Q^+_{k_2} T^{-1}_{k_2}(e^{ik_2 s}) ds \Big)} +$$

$$+ \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \Big(-ik_2 \int_0^t e^{-ik_2(s-t)} Q^+_{k_2} T^{-1}_{k_2}(e^{ik_2 s}) ds \Big) (\overline{u^0_{k_1}} + \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \overline{v^0_{k_1}}) e^{ik_1 t} +$$

$$+\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})e^{ik_2t}\overline{\Big(ik_1\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}Q^-_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1s})ds\Big)}\Big\}=H^L_k(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq0}\Big\{\Big[\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}(\overline{w^0_{k_2}}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_2}})+\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})\overline{\Big(\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_{k_2}\Big)}\Big]e^{-ikt}+$$

$$+\Big[\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_{k_2}(\overline{u^0_{k_1}}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_1}})+\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}(w^0_{k_2}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})\overline{\Big(\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\Big)}\Big]\ e^{ikt}\Big\}.$$

Если воспользоваться соотношениями локального равновесия

$$Q^+_{k,m}=2v_e^{1/2}u_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}(w^0_k-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_k),$$

$$Q^-_k=2v_e^{1/2}w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}(u^0_k-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_k),$$

получим

$$S^-_{k,m}=\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq0}\Big[\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}(\overline{w^0_{k_2}}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_2}})+\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})\overline{\Big(\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_{k_2}\Big)}\Big]=$$

$$=\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq0}\Big[(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1})(\overline{w^0_{k_2}}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_2}})+$$

$$+(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})\overline{(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})}\Big].$$

Далее

$$B^{(m)}_k(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_2t},(Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}))=f^{B,1}_k(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_2t}+h^{B,1}_k(t)-$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{\Big(-\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1}e^{-ik_1t}\Big)\times$$

$$\times\overline{\Big(-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}Q^+_{k_2}T^{-1}_{k_2}(e^{ik_2s})ds\Big)}+$$

$$+\Big(-ik_2\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik_2(s-t)}Q^+_{k_2}T^{-1}_{k_2}(e^{ik_2s})ds\Big)\times$$

$$\times\overline{\Big(-\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1}e^{-ik_1t}\Big)}\Big\}=$$

$$=F^{B,1}_k(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_2t}+H^{B,1}_k(t)-$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{\Big(\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\Big)\overline{\Big(\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_{k_2}\Big)}\ e^{-ikt}+$$

$$+\Big(\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_{k_2}\Big)\overline{\Big(\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\Big)}\ e^{+ikt}\Big\}.$$

Так же получим

$$B^{(m)}_k((Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}),v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_2t})=F^{B,2}_k(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_2t}+H^{B,2}_k(t)-$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{\Big(\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\Big)\overline{\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_2)}v^0_{k_2}\Big)}\ e^{-ikt}+$$

$$+\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2}\Big)\overline{\Big(\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\Big)}\ e^{ikt}\Big\}.$$

Отсюда

$$B^{(m)}_k(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_2t},(Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}))+B^{(m)}_k((Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}),v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_2t})=$$
$$=F^{B,1}_k(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_2t}+H^{B,1}_k(t)+F^{B,2}_k(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_2t}+H^{B,2}_k(t)-$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{\Big[\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2}\Big)\overline{\Big(\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\Big)}+\Big(\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_{k_2}\Big)\overline{\Big(\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\Big)}\Big]\ e^{+ikt}+$$
$$+\Big[\Big(\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\Big)\overline{\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_2)}v^0_{k_2}\Big)}+\Big(\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\Big)\overline{\Big(\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_{k_2}\Big)}\Big]\ e^{-ikt}\Big\}.$$

Если

$$Q^+_{k,m}=2v_e^{1/2}u_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}(w^0_k-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_k),$$
$$Q^-_k=2v_e^{1/2}w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}(u^0_k-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_k),$$
$$R^+_{k,m}=-\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2}\Big)\overline{\Big(\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\Big)}+\Big(\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_{k_2}\Big)\overline{\Big(\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\Big)}\Big\}=$$
$$=-\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{\Big(\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2}\Big)\overline{\Big(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\Big)}+$$
$$+\Big(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2}\Big)\overline{\Big(\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\Big)}\Big\}.$$

Положим

$$R^-_{k,m}=-\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|=1,\dots,m}\Big\{\Big((u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1})\Big)\overline{\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_2)}v^0_{k_2}\Big)}+$$
$$+\Big(\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\Big)\overline{\Big((w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})\Big)}\Big\}.$$

Отсюда

$$S^-_{k,m}+R^-_{k,m}=$$
$$=\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq0}\Big\{(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1})(\overline{w^0_{k_2}}+\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v^0_{k_2}})+$$
$$+(u^0_{k_1}+\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_1})\overline{(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})}-$$
$$-\Big((u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1})\Big)\overline{\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\Big(\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_2)}v^0_{k_2}\Big)}+$$
$$-\Big(\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\Big)\overline{\Big((w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})\Big)}\Big\}=$$
$$=2\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2\neq0}\Big(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\Big)\overline{\Big(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_2)}v^0_{k_2}\Big)}.$$

Отсюда следует, что

$$J^-_{k,m}+S^-_{k,m}+R^-_{k,m}=0,\quad J^+_{k,m}+S^+_{k,m}+R^+_{k,m}=0,\quad |k|=1,\dots,m,$$

что соответствует выполнению уравнения секулярности (3.25) невозмущенной задачи для

$$Q_k^- = 2\frac{w_e^{1/2}v_e^{1/2}}{\varepsilon}\Big(u_k^0 - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e}v_k^0\Big), \tag{3.35}$$

$$Q_k^+ = 2\frac{u_e^{1/2}v_e^{1/2}}{\varepsilon}\Big(w_k^0 - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_k^0\Big).$$

III. *Секулярные члены нулевой моды перехода к однородным данным Коши.* Чтобы закончить проверку принципа локального равновесия, проанализируем вывод секулярного уравнения нулевой моды (3.28). Так же, как выше, получим

$$L_0(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}) + B_0(v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}, v^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et})\Big) = d_0^{(1)} + f_0(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et},$$

где

$$d_0^{(1)} = \sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\in\mathbb{Z}_0}\Big\{(u_{k_1}^0 + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}^0)\frac{ik_2}{(ik_2-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_2}^0} +$$

$$+ \frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}^0(\overline{w_{k_2}^0} + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_2}^0}) +$$

$$+ (w_{k_2}^0 + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}^0)\frac{ik_1}{(ik_1+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_1}^0} + \frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}^0(\overline{u_{k_1}^0} + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{v_{k_1}^0})\Big\}.$$

Тогда секулярный член уравнения нулевой моды (3.28)

$$D_0 = d_0 - d_0^{(1)} =$$

$$= \sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\in\mathbb{Z}_0}\Big\{\Big(\Big(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_{k_1}^0\Big)(\overline{w_{k_2}^0} - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\overline{v_{k_2}^0}\Big) +$$

$$+ \Big(w_{k_2}^0 - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_{k_2}^0\Big)\Big(\overline{u_{k_1}^0} - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\overline{v_{k_1}^0}\Big)\Big\}.$$

IV. *Секулярные члены нулевой моды перехода к интегральному уравнению в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$.* Секулярные члены нулевой моды перехода к интегральному уравнению в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ возникают из следующих членов:

$$\mathcal{L}_0(Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}) +$$

$$+ B_0(Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}, Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}) = h_0(t) + D_0^{(1)},$$

$$\mathcal{D}_0(Q^+,Q^-) = D_0 - D_0^{(1)},$$

$$D_0^{(1)} = \frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\neq 0}\Big\{(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_{k_1}^0)\frac{\varepsilon}{u_e}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{Q_k^+} +$$

$$+ \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{u_e}Q_k^+\overline{(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_{k_1}^0)} + \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}Q_{k_1}^-\overline{(w_{k_2}^0 - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_{k_2}^0)} +$$

$$+ (w_{k_2}^0 - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v_{k_2}^0)\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{\frac{\varepsilon}{w_e}Q_k^-} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{w_eu_e}\sum_{k_1+k_2=0,k_1\in\mathbb{Z}_0}\Big(Q_{k_1}^-\overline{Q_{k_2}^+}) + Q_{k_2}^+\overline{Q_{k_1}^-}\Big)\Big\}.$$

Здесь

$$L_0(Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}) = h_0^L(t) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\neq 0}\Big\{(u_{k_1}^0 + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}^0)\frac{\varepsilon}{u_e}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{Q_k^+} + \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}Q_{k_1}^-\overline{(w_{k_2}^0 + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}^0)} +$$

$$+ (w_{k_2}^0 + \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_2}^0)\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{\frac{\varepsilon}{w_e}Q_k^-} + \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{u_e}Q_k^+\overline{(u_{k_1}^0 + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_{k_1}^0)}\Big\},$$

$$B_0((Q^+_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{ik_1t})+Q^-_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1t}),v^0_ke^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et})=f^{B,1}_0(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}+h^{B,1}_0(t)-$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\neq 0}\Big\{ik_1\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\overline{v^0_{k_2}\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}}+v^0_{k_2}\frac{ik_2}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{\varepsilon}{w_e}\overline{Q^-_{k_1}}\Big\},$$
$$B_0(v^0_ke^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et},(Q^+_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{ik_1t})+Q^-_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1t}))=f^{B,2}_0(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}+h^{B,2}_0(t)-$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\neq 0}\Big\{\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}\frac{\varepsilon}{u_e}\;\overline{Q^+_{k_2}}+\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_{k_2}\overline{\frac{ik_1}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1}}\Big\}.$$

В то же время имеем

$$B_0((Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}),(Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}))=h^B_0(t)-$$
$$-\frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2}{w_eu_e}\sum_{k_1+k_2=0,k_1\in\mathbb{Z}_0}\Big(Q^-_{k_1}\overline{Q^+_{k_2}})+Q^+_{k_2}\overline{Q^-_{k_1}}\Big).$$

Суммируя, получим

$$L_0(Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt})+B_0(v^0_ke^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et},(Q^+_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{ik_1t})+Q^-_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1t}))+$$
$$+B_0((Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}),(Q^+_kT^{-1}_k(e^{ikt})+Q^-_kT^{-1}_k(e^{-ikt}))=$$
$$=h^L_0(t)+f^{B,1}_0(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}+h^{B,1}_0(t)+f^{B,2}_0(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_et}+h^{B,2}_0(t)+h^B_0(t)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\neq 0}\Big\{(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1})\frac{\varepsilon}{u_e}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{Q^+_{k_2}}+$$
$$+\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_{k_2}\overline{(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1})}+\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\overline{(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2})}+$$
$$+(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2})\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}}-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{w_eu_e}\sum_{k_1+k_2=0,k_1\in\mathbb{Z}_0}\Big(Q^-_{k_1}\overline{Q^+_{k_2}})+Q^+_{k_2}\overline{Q^-_{k_1}}\Big)\Big\}.$$

Для значений (Q^+_k,Q^-k), определяемых локальным равновесием k-мод

$$Q^+_{k,m}=2v_e^{1/2}u_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}(w^0_k-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_k),\tag{3.36}$$
$$Q^-_k=2v_e^{1/2}w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}(u^0_k-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_k).$$

Получим

$$S_0(Q^+,Q^-)=\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\neq 0}\Big\{(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1})\frac{\varepsilon}{u_e}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{Q^+_{k_2}}+$$
$$+\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{u_e}Q^+_{k_2}\overline{(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1})}+\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}\overline{(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2})}+$$
$$+(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_2+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_2})\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\overline{\frac{\varepsilon}{w_e}Q^-_{k_1}}-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{w_eu_e}\sum_{k_1+k_2=0,k_1\in\mathbb{Z}_0}\Big(Q^-_{k_1}\overline{Q^+_{k_2}}+Q^+_{k_2}\overline{Q^-_{k_1}}\Big)\Big\}=$$
$$=\sum_{k_1+k_2=0,k_1,k_2\neq 0}\Big\{(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1})\overline{(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})}+$$
$$+(w^0_{k_2}-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik+\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_{k_2})\overline{(u^0_{k_1}-\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik_1-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_{k_1})}\Big\}.$$

Отсюда

$$\mathcal{D}_0=D_0-S_0(Q^+,Q^-)=0.$$

Таким образом, пара (3.36) есть решение последнего уравнения (3.28) (секулярного уравнения нулевой моды). Это завершает сведение задачи Коши (3.8), (3.16) к интегральному уравнению в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$

$$z_k = e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}(F^{(m)}_{k,L}(t) + F^{(m)}_{k,B}(t)) + H^{(m)}_{k,B}(t) + H^{(m)}_{k,B}(t) - \tag{3.37}$$

$$- \varepsilon v_e^{1/2}\Big(\mathcal{U}^{(m)}_k(T_k^{-1}(z^{(m)})) + B^{(m)}_k(T_k^{-1}(z^{(m)}), T_k^{-1}(z^{(m)}))\Big),\ |k| = 1, \ldots, m,$$

$$z_0 = -\frac{3}{2}\varepsilon v_e^{1/2}\int\limits_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}L_e(s-t)}\Big[z_0\overline{z_0} -$$

$$+ \frac{2}{3}\Big(\mathcal{L}^{(1)}_0(T^{-1}(z)) + B_0(T^{-1}(z), T^{-1}(z)\Big) + f_0(s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s} + h_0(s)\Big]ds.$$

3.9. Возмущенная задача. Возмущение задачи (3.8), (3.16) определяется $T^{add}_k(v)$, где $|k| = 1, \ldots, m$. Для $v_k = y^{(m)}_k + v^0_k e^{-\frac{1}{\varepsilon}t}$, $y^{(m)}_k = T_k^{-1}(Q^+_{k,m}e^{ikt}) + T_k^{-1}(Q^-_{k,m}e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z^{(m)}_k)$ имеем

$$T^{add}_k(v^{(m)}) = v_0\overline{\mathcal{T}^{add}_{k,m}} + \overline{v_0}\mathcal{T}^{add}_{k,m}, \tag{3.38}$$

$$\mathcal{T}^{add}_{k.m} = \frac{1}{2}(v^0_k e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} + y^{(m)}_k) +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\Big((w^0_k - \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}v^0_k)e^{ikt} + \frac{ik}{(ik + \frac{1}{\varepsilon}L_e)}\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_k e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} -$$

$$- ik\frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}y^{(m)}_k ds\Big) +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\Big((u^0_k + \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v^0_k)e^{-ikt} + ik\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}v^0_k e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s}ds +$$

$$+ ik\frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}y^{(m)}_k ds\Big).$$

3.10. Нелинейное уравнение в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$. Приемы и методы доказательства существования глобального решения нелинейного уравнения в пространстве $(L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_{\sigma,m}))^{2m}$ пунктов раздела об уравнении Карлемана переносятся на уравнение (3.29). Рассмотрим итерации

$$X^{(j)}_k - X^{(0)}_k = \tag{3.39}$$

$$= -\varepsilon v_e^{1/2}\Big(\mathcal{U}^{(m)}_k(T_k^{-1}(X^{(j-1)}_k)) + B^{(m)}_k(T_k^{-1}(X^{(j-1)}_k), T_k^{-1}(X^{(j-1)}_k))\Big),$$

$$X^{(j)}_0 = -\frac{3}{2}\varepsilon v_e^{1/2}\int\limits_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}L_e(s-t)}\Big[X^{(j-1)}_0\overline{X^{(j-1)}_0} -$$

$$+ \frac{2}{3}\Big(\mathcal{L}^{(1)}_0(T^{-1}(X^{(j-1)})) + B_0(T^{-1}(X^{(j-1)}), T^{-1}(X^{(j-1)})\Big) + f_0(s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s} + h_0(s)\Big]ds,$$

$$X^{(0)}_k = e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}(F^{(m)}_{k,L}(t) + F^{(m)}_{k,B}(t)) + H^{(m)}_{k,B}(t) + H^{(m)}_{k,B}(t).$$

Сформулируем результаты:

Теорема 3.2. *Пусть $\sigma > 1$, и существует $q \in (0,1)$, не зависящие от m, σ, ε, такое, что*

$$E^{(m)}_* = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}c_\sigma\ \Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||v^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + \tag{3.40}$$

$$|||Q^{(m)}_+|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||Q^{(m)}_-|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + 2\|X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big) \leqslant q,\quad q \in (0,1).$$

Тогда для любого $j \geqslant 1$ справедлива оценка

$$\|(X^{(j)} - X^{(0)})(t)\|_{L_{2\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m}} \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}\ \frac{2c_\sigma}{1-q}\ E_*^{(m)}\ \|X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}. \tag{3.41}$$

Теорема 3.3. *В условиях теоремы* 3.2 *последовательность* $X^{(j)}$ *фундаментальна в пространстве* $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})$, *если*

$$\mathcal{E}_*^{(m)} \leqslant q_1, \quad q_1 \in (0,1).$$

где

$$\mathcal{E}_*^{(m)} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} c_\sigma \Big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||v^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||Q_+^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||Q_-^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} +$$
$$+ \|X^{(j-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})} + \|X^{(l-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})} + 2\|X^{(j-1)} - X^{(l-1)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big).$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3.4. *Пусть* $\sigma > 1$. *В условиях теоремы* 3.2 *существует единственное решение* $Z_m \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{m,\sigma})$ *нелинейного уравнения* (3.29), *если*

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} c_\sigma \Big\{|||u^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||v^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||w^0|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||Q_+^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + |||Q_-^{(m)}|||_{\mathcal{H}_{\sigma,m}} + \tag{3.42}$$
$$+ 6\big(1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}\ \frac{2c_\sigma}{1-q}\ E_*^{(m)}\big)\ \|X^{(0)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big\} \leqslant q_1 < 1.$$

Теорема 3.5. *Построенное в теореме* 3.4 *решение нелинейного уравнения* (3.29) *определяет аппроксимацию*

$$(u^{(m)}(x,t), v^{(m)}(x,t), w^{(m)}(x,t)) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})$$

решения задачи Коши (3.3), *в том смысле, что в* $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)$

$$(u^{(m)}(x,t), v^{(m)}(x,t), w^{(m)}(x,t)) \to (u(x,t), v(x,t), w(x,t)) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma),$$

где $(u(x,t), v(x,t), w(x,t))$ — *решение задачи Коши* (3.3).

3.11. Интегродифференциальный оператор. Теперь исследуем задачу Коши для линеаризованного оператора

$$T_k(z_k) = \frac{d}{dt} z_k + \frac{1}{\varepsilon} L_e\ z_k - \frac{1}{\varepsilon} ik \int_0^t \Big(u_e e^{-ik(s-t)} - w_e e^{ik(s-t)}\Big) z_k ds = f_k(t), \tag{3.43}$$
$$z_k|_{t=0} = 0$$

для $f_k^{\pm} = e^{\pm ikt}$ и $f_k \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$.

Сделав преобразование Лапласа, получим

$$\sigma(p,k) L(z_k)(p) = L(f_k)(p) \Longrightarrow\ L(z_k)(p) = \frac{L(f_k)(p)}{\sigma(p,k)},$$
$$\sigma(p,k) = p + \frac{1}{\varepsilon} L_e - \frac{1}{\varepsilon} ik\Big(u_e \frac{1}{p - ik} - w_e \frac{1}{p + ik}\Big) =$$
$$= \frac{p(p^2 + k^2) + \frac{1}{\varepsilon} L_e(p^2 + k^2) + \frac{1}{\varepsilon} ik\Big(u_e(p + ik) - w_e(p - ik)\Big)}{(p + ik)(p - ik)} = \frac{P_3(p,k)}{p^2 + k^2},$$
$$P_3 = p^3 + \frac{1}{\varepsilon} L_e p^2 + k^2 p + \frac{1}{\varepsilon} 4 v_e k^2 - \frac{1}{\varepsilon} ik(u_e - w_e)p.$$

Нам нужны оценки символа $\sigma(p,k;\varepsilon)$ снизу. Ниже мы приведем результаты, касающиеся свойств символа $\sigma(p;\varepsilon,k)$ оператора T_k и прежде всего условий его строгой устойчивости, когда корни $\sigma(p) = 0$ находятся в левой полуплоскости $\mathrm{Re}\, p < -\mu_0 \varepsilon 0$ параметра $p \in \mathbb{C}$ для некоторого $\mu_0 \in (0,1)$.

Лемма 3.2. *Существует достаточно малое* $\mu_* > 0$, *не зависящее от* ε *и* $k \in \mathbb{Z}_0$, *такое, что функция* $1/\sigma(p,k)$ *аналитична по* p *в полуплоскости* $\mathrm{Re}\, p \geqslant -\varepsilon\mu_*\ \forall k \in \mathbb{Z}_0$.

1. Полином P_3 для $p = iy,\ y \in \mathbb{R}$,

$$P_3(iy) = -iy^3 + ik^2 y - \frac{1}{\varepsilon} L_e y^2 + \frac{1}{\varepsilon} 4v_e k^2 - \frac{1}{\varepsilon} k(u_e - w_e) y = 0,$$

$$-\frac{1}{L_e} \operatorname{Re} P_3(iy) = y^2 + \frac{1}{L_e} k(u_e - w_e) y - \frac{4v_e}{L_e} k^2 = 0, \quad \operatorname{Im} P_3(iy) = -y(y^2 - k^2) = 0.$$

а). Если $y = \pm |k|$,

$$-\operatorname{Re} P_3(iy) = k^2 \Big(u_e + w_e \pm (u_e - w_e) \Big) \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}_0.$$

б). Если $y = 0$,

$$P_3(0) = \frac{1}{\varepsilon} 4v_e k^2 \neq 0 \quad k \in \mathbb{Z}_0.$$

Таким образом, $P_3 \neq 0$ на мнимой оси ($\operatorname{Re} p = 0$).

2. В то же время,

$$\frac{\sigma(p,k)}{p} = 1 + \frac{1}{\varepsilon} L_e \frac{1}{p} + \frac{1}{\varepsilon} ik \Big(u_e \frac{1}{p(p-ik)} - w_e \frac{1}{p(p+ik)} \Big) =$$

$$= 1 + \frac{1}{\varepsilon} L_e \frac{1}{p} + \frac{1}{\varepsilon} \Big(u_e (\frac{1}{(p-ik)} - \frac{1}{p}) + w_e (\frac{1}{(p+ik)} - \frac{1}{p}) \Big) =$$

$$= 1 + \frac{1}{\varepsilon} (L_e - u_e - w_e) \frac{1}{p} + \frac{1}{\varepsilon} \Big(u_e \frac{1}{(p+ik)} + w_e \frac{1}{(p-ik)} \Big),$$

где

$$L_e - u_e - w_e = 4v_e > 0,$$

тогда

$$\operatorname{Re} \Big(\frac{\sigma(p,k)}{p} \Big) = 1 + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Re} p \Big((L_e - u_e - w_e) \frac{1}{|p|^2} + u_e \frac{1}{|p+ik|^2} + w_e \frac{1}{|p-ik|^2} \Big) \geqslant 1,$$

если $\operatorname{Re} p \geqslant 0$.

Отсюда следует, что

$$\sigma(p,k) \neq 0, \quad \operatorname{Re} p \geqslant 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_0$$

3. $p = x + iy,\ y \in \mathbb{R},,\ x = -\varepsilon\mu,\ \mu = O(1) > 0 \Longrightarrow x^3 + \frac{1}{\varepsilon} L_e x^2 = O(\varepsilon)$

$$\operatorname{Re} P_3 = x^3 + \frac{1}{\varepsilon} L_e x^2 - (\frac{1}{\varepsilon} L_e + 3x) y^2 + (\frac{1}{\varepsilon} 4v_e + x) k^2 - \frac{1}{\varepsilon} k(u_e - w_e) y =$$

$$= -(\frac{1}{\varepsilon} L_e + 3x) \Big(y^2 - \frac{(4v_e + \varepsilon x)}{(L_e + 3\varepsilon x)} k^2 + \frac{(u_e - w_e)}{(L_e + 3\varepsilon x)} ky - \frac{(\varepsilon x + L_e) x^2}{(L_e + 3\varepsilon x)} \Big),$$

$$\operatorname{Im} P_3 = -\Big(y^2 - (k^2 + 3x^2 + \frac{1}{\varepsilon} 2L_e x) \Big) y + \frac{1}{\varepsilon} k(u_e - w_e) x.$$

Положим $y = kz,\ |k| \geqslant 1$. Тогда

$$\operatorname{Re} P_3 = -k^3 (\frac{1}{\varepsilon} L_e + 3x) \Big(z^2 + \frac{(u_e - w_e)}{(L_e + 3\varepsilon x)} z - \frac{(4v_e + \varepsilon x)}{(L_e + 3\varepsilon x)} - \frac{(\varepsilon x + L_e) x^2}{k^2 (L_e + 3\varepsilon x)} \Big) = 0,$$

$$\operatorname{Im} P_3 = -k^2 \Big(z^3 - (1 + \frac{(3x^2 + \frac{1}{\varepsilon} 2L_e) x}{k^2}) z + \frac{1}{\varepsilon} x \frac{(u_e - w_e)}{k^2} \Big) = 0,$$

если

$$Q_2(z,\varepsilon) = z^2 + \frac{(u_e - w_e)}{(L_e + 3\varepsilon x)} z - \frac{(4v_e + \varepsilon x)}{(L_e + 3\varepsilon x)} - \frac{(\varepsilon x + L_e) x^2}{k^2 (L_e + 3\varepsilon x)} = 0,$$

$$Q_3(z,\varepsilon) = z^3 - (1 + \frac{(3x^2 + \frac{1}{\varepsilon} 2L_e) x}{k^2}) z + \frac{1}{\varepsilon} x \frac{(u_e - w_e)}{k^2} = 0,$$

где $x = -\varepsilon\mu$. Невозмущенные по ε

$$Q_2(z,0) = z^2 + \frac{(u_e - w_e)}{L_e} z - \frac{4v_e}{L_e} = 0, \quad Q_3(z,0) = z^3 - (1 - \frac{2\mu L_e}{k^2}) z - \frac{\mu(u_e - w_e)}{k^2} = 0.$$

Невозмущенные по μ корни $Q_3(z,0)$:

$$z^0_\pm = \pm 1, \quad z^0 = 0,$$

где

$$Q_2(0) = -\frac{4v_e}{L_e},\ Q_2(1) = \frac{1}{L_e}(L_e + (u_e - w_e) - 4v_e) = \frac{2u_e}{L_e} \neq 0,$$

$$Q_2(-1) = \frac{1}{L_e}(L_e - (u_e - w_e) - 4v_e) = \frac{2w_e}{L_e} \neq 0.$$

Отсюда следует существование достаточно малого $\mu_* > 0$, не зависящего от ε, такого, что

$$|P_3(x+iy)| \geqslant c_* > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R},\ x \in [-\varepsilon\mu_0, 0]$$

что влечет аналитичность $1/\sigma(p,k)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant -\varepsilon\mu_*$.

Теперь уточним полученную выше оценку.

Лемма 3.3. *Существуют положительные* $\mu_0 \in (0,1), c_0 > 0$ *такие, что равномерно по* $k \in \mathbb{Z}_0$

$$\sup_{\operatorname{Re} p \geqslant -\mu_0\varepsilon,\ k\in\mathbb{Z}_0} \Big|\frac{p}{\sigma(p,k)}\Big| \leqslant c_0, \tag{3.44}$$

Доказательство. Для этого оценим снизу модуль функцию $Z_k(p) = \sigma(p,k)/p$.

1. Как мы показали выше,

$$\varepsilon \operatorname{Re} Z_k(p) = \varepsilon + \operatorname{Re} p\Big((u_e + w_e)\frac{1}{(\operatorname{Re} p)^2 + (\operatorname{Im} p + k)^2} +$$

$$+ (v_e + u_e)\frac{1}{(\operatorname{Re} p)^2 + (\operatorname{Im} p - k)^2} + 4v_e\frac{1}{(\operatorname{Re} p)^2 + (\operatorname{Im} p)^2}\Big).$$

Откуда следует, что

$$\operatorname{Re} Z_k(p) \geqslant 1, \quad \operatorname{Re} p \geqslant 0.$$

2. Теперь посмотрим на поведение $|Z_k(p)|$ вне окрестности мнимой оси.

а). Вне полюсов $p = 0, \pm k$ функции $|Z_k(p)|$, для $\mu_1 \in (0, \frac{1}{2})$, если $|\operatorname{Im} p| \geqslant \mu_1$, $|\operatorname{Im} p - k| \geqslant \mu_1$, $|\operatorname{Im} p + k| \geqslant \mu_1$, $k \geqslant 1$, имеем

$$|\varepsilon \operatorname{Re} Z_k(p)| \geqslant \varepsilon - \frac{1}{\mu_1^2}|\operatorname{Re} p|(\mu_1^2(10v_e + w_e) + (v_e + u_e) \geqslant \varepsilon - \frac{1}{\mu_1^2}|\operatorname{Re} p|(11v_e + u_e + w_e) > \frac{1}{2}\varepsilon$$

при условии, что

$$|\operatorname{Re} p| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{(11v_e + u_e + w_e)}\mu_1^2\varepsilon.$$

б). В случае $|\operatorname{Im} p - k| \leqslant \mu_1$, $|\operatorname{Re} p| \leqslant \mu_2\varepsilon$ имеем

$$\Big|\frac{p}{\sigma(p,k)}\Big| \leqslant |p||p^2 + k^2|\frac{1}{|P_3(p,k)|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(|\operatorname{Re} p|^2 + 4k^2 - \mu_1^3)^{1/2}(|\operatorname{Re} p|^2 + k^2 - \mu_1^3)^{1/2}}{c_0(|p|^2 + k^2}(|\operatorname{Re} p|^2 + \mu_1^2)^{1/2},$$

если в этой области $|P_3(p,k)| \geqslant c_0(|p|^2 + k^2)$, что есть следствие следующей леммы: □

Лемма 3.4. *Существуют* $\mu_1,\ 0 < \mu_1 < 0;\ c_0 > 0$ *такие, что равномерно по* $k \in \mathbb{Z}_0$ *имеем*

$$|P_3(p,k,\varepsilon)| \geqslant c_0(|p|^2 + k^2), \quad \operatorname{Re} p \geqslant -\mu_1\varepsilon. \tag{3.45}$$

Доказательство.

1. Начнем с области $\{\kappa_0 \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} p|\}$. Здесь оценим главную часть символа $P_3(p,k,\varepsilon)$. Покажем, что в этой области $|p(p^2 + k^2)| \geqslant c_1(|p|^2 + k^2)$ при $|p| \geqslant c_0$ для достаточно большого $c_0 = c_0(\kappa_0) \gg 1$.

Положим $p = y(\pm i + \mu)$, $y \geqslant R_0$, $\mu \geqslant \kappa_0$. Рассмотрим три случая: $\min(|y-k|, |y+k|) \geqslant \delta k$, $|y-k| \leqslant \delta k$ и $|y+k| \leqslant \delta k$, где $0 < \delta < 1$, $k \geqslant 1$ (случай целых $k \leqslant -1$ исследуется так же).

В первом случае справедливы следующие неравенства

$$|p(p^2 + k^2)| = |y||i + \mu|(\mu^2y^2 + \delta^2k^2) \geqslant$$

$$\geqslant |y||i + \mu|\min(\delta^2, \frac{\mu^2}{1+\mu^2})(|p|^2 + k^2) \geqslant R_0(1+\mu^2)^{1/2}\min(\delta^2, \frac{\mu^2}{1+\mu^2})(|p|^2 + k^2).$$

Во втором случае $|y| \geqslant (1-\delta)k$ имеем

$$|p(p^2+k^2)| \geqslant |y|(1+\mu^2)^{1/2}\mu|y|(\mu^2y^2+(2-\delta)^2k^2)^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}R_0\mu(\min(\mu^2,(2-\delta)^2)^{1/2}\min((1+\mu^2)^{1/2},(1+\mu^2)^{1/2}(1-\delta))(|p|^2+k^2).$$

Теперь выберем $R_0 = R_0(\kappa_0)$ из условия

$$R_0 \min_{\mu\geqslant\kappa_0}\Big[\min\Big((1+\mu^2)^{1/2}\min(\delta^2,\frac{\mu^2}{1+\mu^2}),$$

$$\frac{1}{2}(\min(\mu^2,(2-\delta)^2)^{1/2}\min((1+\mu^2)^{1/2},(1+\mu^2)^{1/2}(1-\delta))\Big)\Big] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\varepsilon}(4v_e+w_e+u_e)\max_{|p|^2+k^2=1}\Big|p^2+ik\frac{(u_e-w_e)}{(4v_e+w_e+u_e)}p+4k^2\frac{v_e}{(4v_e+w_e+u_e)}\Big|.$$

Третий случай рассматривается аналогично.

2. Теперь рассмотрим случай $|\operatorname{Im} p| \geqslant \kappa_0|\operatorname{Re} p|$, и $|\operatorname{Re} p| \leqslant \mu_1\varepsilon$. Напомним, что все оценки проводятся для $|k| \geqslant 1$.

а). Начнем со случая $\operatorname{Re} p = 0$. Тогда

$$\operatorname{Im}(P_3(p,k;\varepsilon))|_{\operatorname{Re} p=0} = \operatorname{Im} p(k^2-(\operatorname{Im} p)^2)^2,$$

$$\operatorname{Re}(P_3(p,k;\varepsilon))|_{\operatorname{Re} p=0} = \frac{1}{\varepsilon}\Big((4v_e+w_e+u_e)(\operatorname{Im} p)^2+k(u_e-w_e)\operatorname{Im} p-4k^2v_e\Big)$$

Пусть для определенности $k \geqslant 1$. Рассмотрим три случая, когда $\operatorname{Im} p - k \geqslant \delta k$, $k \geqslant (1-\delta)\operatorname{Im} p \geqslant 0$ или $|\operatorname{Im} p - k| \leqslant \delta k$.

В первом случае

$$|\operatorname{Im} p(k^2-(\operatorname{Im} p)^2)^2| \geqslant \frac{1}{2}[\frac{1}{2}\delta k|\operatorname{Im} p|\ (|\operatorname{Im} p|+(2+\delta)k)+\delta^2|\operatorname{Im} p|k^2] \geqslant \frac{1}{2}\min(\frac{1}{2}\delta,\delta^2)(|\operatorname{Im} p|^2+k^2)$$

Во втором случае используем тот факт, что при условии $|\operatorname{Im} p \pm k| \geqslant \delta|k|$, $0<\delta<1$ так же, как выше, имеем

$$|\operatorname{Im} p(k^2-(\operatorname{Im} p)^2)^2| \geqslant \delta^2|\operatorname{Im} p|\ k^2 \geqslant \frac{1}{2}\delta^2|\operatorname{Im} p|(1-\delta)^2(k^2+|\operatorname{Im} p|^2).$$

Отсюда следует, что для $|\operatorname{Im} p| \geqslant c_1$ справедливо неравенство

$$|\operatorname{Im} p(k^2-(\operatorname{Im} p)^2)^2| \geqslant \frac{1}{2}\delta^2c_1|(1-\delta)^2(k^2+|\operatorname{Im} p|^2).$$

В третьем случае $|\operatorname{Im} p| \geqslant (1-\delta)k$, $\operatorname{Im} p \leqslant (1+\delta)k$ и

$$|\operatorname{Re}(P_3(p,k;\varepsilon))||_{\operatorname{Re} p=0} \geqslant \frac{1}{\varepsilon}[2u_e-(4v_e+w_e+u_e)(2+\delta)\delta-|u_e-w_e|\delta)]k^2 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\varepsilon}u_ek^2 \geqslant \frac{1}{2\varepsilon}u_e(k^2+(2+\delta)^{-2}|\operatorname{Im} p|^2) \geqslant \frac{1}{2\varepsilon}u_e(2+\delta)^{-2}(k^2+|\operatorname{Im} p|^2)$$

для достаточно малого δ.

В то же время для достаточно малого c_1 при $|\operatorname{Im} p| \leqslant c_1$

$$|\operatorname{Re}(P_3(p,k;\varepsilon))||_{\operatorname{Re} p=0} = \frac{1}{\varepsilon}|4v_e+w_e+u_e)(\operatorname{Im} p)^2+k(u_e-w_e)\operatorname{Im} p-4k^2v_e| \geqslant \frac{1}{\varepsilon}k^2v_e, \quad |k| \geqslant 1.$$

Следовательно,

$$|P_3(p,k;\varepsilon)||_{\operatorname{Re} p=0} \geqslant c_0(k^2+|\operatorname{Im} p|^2),\ |\operatorname{Im} p| \geqslant 0,\ |k| \geqslant 1.$$

Отсюда следует существование достаточно малого $\mu_1 > 0$ такого, что

$$|P_3(p,k;\varepsilon)| \geqslant c_0(\mu_1)(|p|^2+k^2)$$

для $|\operatorname{Im} p| \geqslant \kappa_0|\operatorname{Re} p|$, $\quad |\operatorname{Re} p| \leqslant \mu_1\varepsilon$.

б). Теперь рассмотрим случай $|\operatorname{Im} p| > \kappa_0 \operatorname{Re} p$, $\quad \operatorname{Re} p \geqslant \mu_1\varepsilon$. Заметим, что корни полинома

$$(4v_e+w_e+u_e)p^2+ik(u_e-w_e)p+4k^2v_e = (4v_e+w_e+u_e)(p-p^+)(p-p^-) = 0$$

чисто мнимые:

$$p^{\pm} = i\frac{k}{2(4v_e + w_e + u_e)}(-(u_e - w_e) \pm \sqrt{(u_e - w_e)^2 + 16v_e(4v_e + w_e + u_e)}) = ikh^{\pm}.$$

Положим $p = kz,\ B = \frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e)$. Тогда

$$P_3(p,k,\varepsilon) = k^2\Big(k\ z(z+i)(z-i) + B(z - ih^+)(z - ih^-)\Big).$$

Рассмотрим случай $\Omega^+ = \{\operatorname{Im} p > \kappa_0 \operatorname{Re} p, \quad \operatorname{Re} p \geqslant \mu_1\varepsilon\}$ (случай $\operatorname{Im} p < -\kappa_0 \operatorname{Re} p, \quad \operatorname{Re} p \geqslant \mu_1\varepsilon$ рассматривается аналогично). В Ω^+ имеем

$$|z(z+i)(z-i)| \geqslant \mu_1\varepsilon|z|(|z|^2+1)^{1/2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\mu_1^2\varepsilon^2(|z|^2+1).$$

Отсюда

$$|P_3(p,k,\varepsilon)| \geqslant k^2\Big(k\ \frac{1}{\sqrt{2}}\mu_1^2\varepsilon^2(|z|^2+1) - -B\max(1,|h^-|)(|z|+1)^2\Big) \geqslant$$

$$\geqslant c_0k^2(|z|^2+1) = c_0(|p|^2+k^2)$$

для достаточно большого $|k| \geqslant 2\sqrt{2}B\max(1,|h^-|)(\mu_1\varepsilon)^{-2}$.

Теперь рассмотрим случай $|\operatorname{Im} p| > \kappa_0 \operatorname{Re} p, \quad \operatorname{Re} p \geqslant \mu_1\varepsilon$ и $1 \leqslant |k| \leqslant k_0$. Тогда

$$|P_3(p,k,\varepsilon)| = k^3|(z+i)(z-i)|\ |z + \frac{1}{k}B\frac{(z-ih^+)(z-ih^-)}{(z+i)(z-i)}| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\mu_1\varepsilon(|z|^2+1)\ |z + \frac{1}{k}B\frac{(z-ih^+)(z-ih^-)}{(z+i)(z-i)}|$$

Очевидно, что в области Ω^+

$$\min_{z\in\Omega^+}|z + \frac{1}{k}B\frac{(z-ih^+)(z-ih^-)}{(z+i)(z-i)}| = c_1 > 0.$$

Отсюда

$$|P_3(p,k,\varepsilon)| \geqslant c_1\frac{1}{\sqrt{2}}\mu_1\varepsilon(|z|^2+1) \geqslant \frac{c_1}{k_0^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\mu_1\varepsilon(|p|^2+k^2).$$

Суммирование полученных оценок приводит к неравенству (3.45). □

3.12. Разрешимость интегродифференциального уравнения. Исследуем следующую задачу Коши:

$$\frac{d}{dt}y_k + \frac{1}{\varepsilon}L_e\,y_k - A(k,\varepsilon)y_k = f_k(t) + h_k(t), \qquad (3.46)$$
$$v_k|_{t=0} = 0,$$

$$A(k,\varepsilon)y_k = ik\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t [e^{ik(t-s)}u_e - e^{-ik(t-s)}w_e]y_k ds.$$

Здесь $f_k(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ для $\gamma = -\mu_0\varepsilon,\ 0 < \mu_0 < 1$ и $h_k(t)$ линейная комбинация экспонент

$$h_k(t) = \eta_k e^{ikt} + \eta_{-k}e^{-ikt},$$

$\eta_{\pm k}$ — постоянные. Норму весового пространства $g(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ определим следующим образом

$$\|g(t)\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} = \int\limits_0^\infty\ e^{-2\gamma t}|g(t)|^2.dt$$

Теорема 3.6. *Пусть функция $f_k \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ и $h_k = 0$. Тогда задача* (3.46) *однозначно разрешима в пространстве $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ и для ее решения справедлива равномерная по k оценка*

$$\|y_k\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} + \|A_k y_k\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leqslant d_0 \|f_k\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} \tag{3.47}$$

с постоянной d_0, не зависящей от k и f_k, к тому же $y_k|_{t=0} = 0$.

Если $f_k = 0$ и $h_k \neq 0$, тогда задача (3.46) *также однозначно разрешима в пространстве $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, справедлива равномерная по k оценка*

$$\|y_k\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leqslant d_0(|\eta_k|^2 + |\eta_{-k}|^2)^{1/2} \tag{3.48}$$

с постоянной d_0, не зависящей от k и η_k, η_{-k}. Также $y_k|_{t=0} = 0$.

Однако в этом случае $A_k y_k$ не принадлежит $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$. Имеем $A_k y_k \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$.

Сделав преобразование Лапласа по t, получим

$$[p + \frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e) + \frac{ik\frac{1}{\varepsilon}}{p - ik}u_e - \frac{ik\frac{1}{\varepsilon}}{p + ik}w_e]\widetilde{y_k}(p) = \widetilde{f_k}(p) + \widetilde{h_k}(p).$$

Символ $\sigma(p) = P_3(p,k)/(p^2 + k^2)$. Формально преобразование Лапласа по t решения уравнения (3.46) можем записать в виде:

$$\widetilde{y_k}(p,k) = \frac{(p^2+k^2)(\widetilde{f_k}(p))}{P_3(p,k)} + \frac{(p^2+k^2)\widetilde{h_k}(p)}{P_3(p,k)}, \quad \mathrm{Re}\, p > 0. \tag{3.49}$$

Чтобы получить оценки этого решения в соболевских нормах, приведем сначала широко известные факты, которые мы будем использовать в дальнейшем.

Определение. Назовем *пространством Харди* $H_2(\mathrm{Re}\, p > \gamma, H)$ класс вектор-функций $\widetilde{f(p)}$ со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H, голоморфных в полуплоскости $\{p \in \mathbb{C}:\ \mathrm{Re}\, p > -\gamma < \gamma > 0\}$, для которых

$$\sup_{x > -\gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|f\widetilde{(x+iy)}\|^2_H dy < \infty, \quad p = x + iy.$$

Сформулируем теорему Пэли—Винера для пространств Харди.

Теорема 3.7 (Пэли—Винер).

1. *Пространство $H_2(\mathrm{Re}\, p > \gamma, H)$ совпадает с множеством вектор-функций* (*преобразований Лапласа*), *допускающих представление*

$$\widetilde{f(p)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty e^{pt} f(t) dt \tag{3.50}$$

для $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, $p \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, p > -\gamma$.

2. *Для любой вектор-функции $\widetilde{f(p)} \in H_2(\mathrm{Re}\, p > -\gamma, H)$ существует единственное представление* (3.50), *где вектор-функция $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, причем справедлива формула обращения*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(-\gamma+iy)t} f(\widetilde{-\gamma+iy}) dy, \quad t \in \mathbb{R}_+,\ \gamma > 0.$$

3. *Для вектор-функций $\widetilde{f(p)} \in H_2(\mathrm{Re}\, p > -\gamma, H)$ и $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, связанных соотношением* (3.50), *справедливо равенство*

$$\|\widetilde{f}\|^2_{H_2(\mathrm{Re}\, p > \gamma, H)} \equiv \sup_{x > -\gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|f\widetilde{(x+iy)}\|^2_H dy = \int\limits_0^\infty e^{-2\gamma t} \|f(t)\|^2_N dt \equiv \|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}.$$

Начнем с доказательства первой части теоремы 3.6. Если мы установим, что функция $\widetilde{y_k}$ в (3.49) такова, что $p\widetilde{y_k}$, $\widetilde{y_k}$ и $A_k\widetilde{y_k}$ принадлежат пространству Харди $\widetilde{f(p)} \in H_2(\operatorname{Re} p > \gamma)$ при некотором $\gamma \in \mathbb{R}$, то по теореме Пэли—Винера функции $\dfrac{d}{dt}y_k$ и $A_k y_k$ принадлежат пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ и, следовательно, $y_k(t) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$. Отсюда следует разрешимость уравнения (3.46) в пространстве $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$. Здесь

$$\|y_k\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} + \|A_k y_k\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leqslant d_0\|T_k y_k\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)}.$$

Вторая часть теоремы 3.6 связана со случаем, когда правая часть не принадлежит $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$. Преобразование Лапласа

$$\widetilde{h_k}(p) = \frac{\eta_k^+}{p - ik} + \frac{\eta_k^-}{p + ik}$$

имеет чисто мнимые полюса $p = \pm k$. Однако, решение задачи (3.46) для $f_k = 0$

$$y_k(t) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} \Sigma(p,k,\varepsilon)^{-1}[(p+ik)\eta_{-k} + (p-ik)\eta_k]\, e^{pt}dp$$

для $\gamma \geqslant -\mu_0\varepsilon$, поскольку $\Sigma(p,k,\varepsilon)^{-1}[(p+ik)\eta_{-k} + (p-ik)\eta_k]$ аналитично в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant -\mu_0\varepsilon$, , где

$$\|\Sigma(p,k,\varepsilon)^{-1}[(p+ik)\eta_{-k} + (p-ik)\eta_k]\|^2_{H_2(\operatorname{Re} p>\gamma,H)} =$$

$$= \sup_{x>\gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Sigma(p,k,\varepsilon)^{-1}[(p+ik)\eta_{-k} + (p-ik)\eta_k]|^2 dy \leqslant \infty.$$

Отсюда получаем, что для $-\mu\varepsilon < \gamma < 0$ имеем

$$\frac{d}{dt}y_k(t) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} p\Sigma(p,k,\varepsilon)^{-1}[(p+ik)\eta_{-k} + (p-ik)\eta_k]\, e^{pt}dp,$$

поскольку в силу оценки (3.44) для $-\mu_0\varepsilon \leqslant \gamma$

$$\sup_{p=\operatorname{Re} p+ix,\ \operatorname{Re} p\geqslant\gamma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|p\Sigma(p,k,\varepsilon)^{-1}[(p+ik)\eta_{-k} + (p-ik)\eta_k]\right|^2 dx \leqslant c_0(|\eta_k|^2 + |\eta_{-k}|^2).$$

Отсюда следует, что равномерно по k

$$\|y_k\|^2_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leqslant c_*(|\eta_k|^2 + |\eta_{-k}|^2), \tag{3.51}$$

более того, $y_k(0) = 0$ в силу оценки символа $\Sigma(p,k,\varepsilon)$. Имеем

$$\sup_{p=\operatorname{Re} p+ix,\ \operatorname{Re} p\geqslant\gamma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|p\Sigma(p,k,\varepsilon)^{-1}[(p+ik)\eta_k^- + (p-ik)\eta_k^+]\right|^2 dx \leqslant c_1(1 + |\operatorname{Re} p|^2)^{-1/2} \to 0$$

при $\operatorname{Re} p \to +\infty$.

Замечание 3.1. В чем проблема существования глобального решения усеченной системы (3.12)? Как в самой системе (3.12), так и при переходе к однородным данным Коши, к системе (3.16), в правой части k-моды возникают осцилляции $D_k^+e^{ikt}$, $D_k^-e^{-ikt}$ и $\mathcal{D}_k^+e^{ikt}$, $\mathcal{D}_k^-e^{-ikt}$ соответственно, которые определяют часть решения (3.20) задачи Коши

$$y_k^{(1)} = Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_{-k}^-T_{-k}^{-1}(e^{-ikt}).$$

Теперь заметим, что

$$-ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-iks})ds = \frac{\varepsilon}{w_e}Q_k^-e^{-ikt} + h_k^+(t), \tag{3.52}$$

$$ik\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks})ds = \frac{\varepsilon}{u_e}Q_k^+e^{+ikt},$$

где в силу свойств оператора T_k^{-1} функции

$$h_k^+(t) = -\frac{\varepsilon}{w_e}\Big(\frac{d}{dt}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}) + \frac{1}{\varepsilon}L_e\ Q_k^-T_k^{-1}(e^{-ikt}) -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}iku_e\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}Q_k^-T_k^{-1}(e^{-iks})ds\Big) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+),$$

$$h_k^-(t) = -\frac{\varepsilon}{u_e}\Big(\frac{d}{dt}Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) + \frac{1}{\varepsilon}L_e\ Q_k^+T_k^{-1}(e^{ikt}) +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}ikw_e\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}Q_k^+T_k^{-1}(e^{iks})ds\Big) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+).$$

Но интегралы

$$ik\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}y_k^{(1)}ds, \quad -ik\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}y_k^{(1)}ds$$

входят в нелинейную часть уравнения (3.16) и порождают также секулярные члены.

Последнее и приводит к условию секулярности (3.28) как условию сведения уравнения (3.16) к интегральному уравнению в весовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, т. е. аннулированию секулярных членов.

3.13. Существование. Суммируя полученные результаты, по аналогии с приведенными выше результатами для уравнения Карлемана, можно показать, что

Теорема 3.8. *Пусть равномерно по m выполнены условия теорем* 3.2–3.6 *на вещественнозначные начальные данные. Тогда существует глобальное вещественнозначное решение задачи Коши для системы* (3.3)

Действительно, как мы показали выше, для вещественных начальных данных из окрестности состояния равновесия существует Фурье-решение $u_k, v_k, w_k, k \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим разность $u_k^\Delta = u_k - \overline{u_k}, v_k^\Delta = v_k - \overline{v_k}, w_k^\Delta = w_k - \overline{w_k}, k \in \mathbb{Z}$, которая удовлетворяет однородной задаче Коши для системы

$$\begin{gathered}
u_e^{1/2}(\frac{d}{dt} + ik)u_k^\Delta + \frac{1}{\varepsilon}(w_eu_e^{1/2}u_k^\Delta + u_ew_e^{1/2}w_k^\Delta - 2v_ev_e^{1/2}v_k^\Delta) = 0, \\
w_e^{1/2}(\frac{d}{dt} - ik)w_k^\Delta + \frac{1}{\varepsilon}(w_eu^{1/2}u_k^\Delta + u_ew_e^{1/2}w_k^\Delta - 2v_ev_e^{1/2}v_k^\Delta) = 0, \\
-\frac{1}{2}v_e^{1/2}\frac{d}{dt}v_k^\Delta + \frac{1}{\varepsilon}(w_eu_e^{1/2}u_k^\Delta + u_ew_e^{1/2}w_k^\Delta - 2v_ev^{1/2}v_k^\Delta) = 0, \\
u_k^\Delta(0) = v_k^\Delta(0) = w_k^\Delta(0) = 0.
\end{gathered} \tag{3.53}$$

Также как выше, сводим к системе уравнений для v_k^Δ. Для нулевой моды имеем

$$u_0^\Delta = -\frac{1}{2}\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_k^\Delta, \quad w_k^\Delta = -\frac{1}{2}\frac{v_e^{1/2}}{w_e^{1/2}}v_k^\Delta,$$

$$\frac{d}{dt}v_0^\Delta + \frac{1}{\varepsilon}L_e v_k^\Delta = 0, \quad v_0^\Delta(0) = 0. \tag{3.54}$$

Отсюда следует, что $v_0^\Delta \equiv 0$.

Для старших мод

$$u_k^\Delta = -\frac{1}{2}\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_k^\Delta + ik\frac{1}{2}\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik(t-s)}\frac{d}{dt}v_k^\Delta\,ds,$$

$$w_k^\Delta = -\frac{1}{2}\frac{v_e^{1/2}}{w_e^{1/2}}v_k^\Delta - ik\frac{1}{2}\frac{v_e^{1/2}}{w_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik(t-s)}v_k^\Delta,$$

$$\frac{d}{dt}v_k^\Delta + \frac{1}{\varepsilon}L_e v_k^\Delta + T_k v_k^\Delta = 0, \quad v_k^\Delta(0) = 0. \tag{3.55}$$

Из обратимости оператора T_k в классе $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ следует, что $v_k^\Delta \equiv 0$. Таким образом, решение задачи Коши для системы (3.16), (3.8) с вещественнозначными начальными условиями является вещественнозначным.

Как следствие этой теоремы получаем, что аппроксимационное решение

$$(u^{(m)}(x,t), v^{(m)}(x,t), w^{(m)}(x,t)) \to (u(x,t), v(x,t), w(x,t)) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma) \tag{3.56}$$

стремится к решению $(u(x,t), v(x,t), w(x,t))$ задачи Коши (3.3).

Следствие 3.2. *В условиях теоремы* 3.8 *существует глобальное вещественнозначное решение задачи Коши для системы* (3.1)*, стабилизирующееся экспоненциально быстро к состоянию равновесия.*

4. Выводы

Приведенные исследования принципа локального равновесия двух моделей дискретных кинетических уравнений показывают универсальность предлагаемых методов для исследования моделей типа Броудела. Позднее мы опубликуем исследование еще двух моделей: двумерной модели Броудела и трехмерной модели Годунова—Султангазина [3]. Для этих моделей справедлив принцип локального равновесия, когда на больших временах задачи Коши с ограниченной энергией распадаются на суперпозицию слабо взаимодействующих солитонов и убывающих дисперсионных волн [3]. Более того, мы имеем экспоненциальную стабилизацию к состоянию равновесия с показателем $\gamma = O(\varepsilon) > 0$. Переход от периодических начальных данных к L_2-теории на всей прямой будет опубликован позднее.

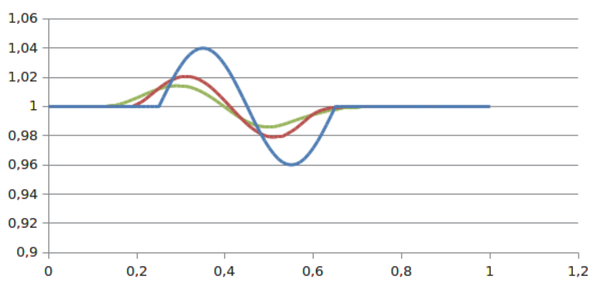

Рис. 1а

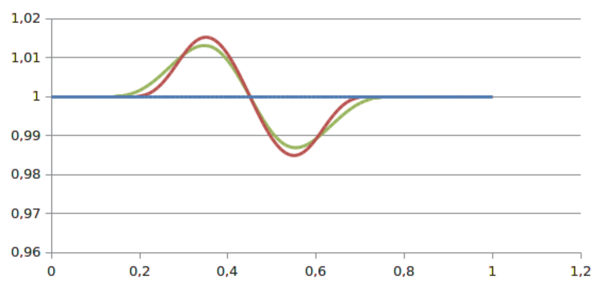

Рис. 1б

На рис. 1а слева направо графики $w(x,t) = 1 + \widehat{w}(x,t)$ для значений $t_1 = 0$ (синий), $t_2 = 0{,}05$ (красный), $t_3 = 0{,}1$ (зеленый), на рис. 1б соответственно справа налево графики $u(x,t) = 1+\widehat{u}(x,t)$ для тех же значений t; здесь $\varepsilon = 0{,}1$;

На рис. 2а слева направо графики $v(x,t) = 1 + \widehat{v}(x,t)$ для значений $t_1 = 0$ (синий), $t_2 = 0{,}25$ (красный), $t_3 = 0{,}5$ (зеленый), на рис. 2б соответственно справа налево графики $u(x,t) = 0{,}5 + \widehat{u}(x,t)$ для тех же значений t;

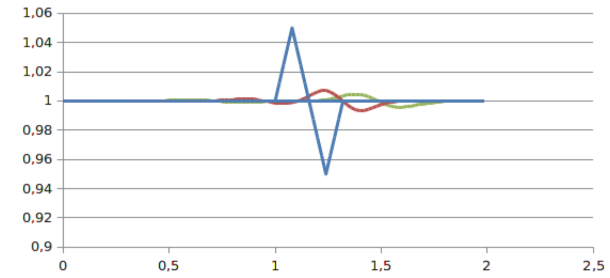

Рис. 2а

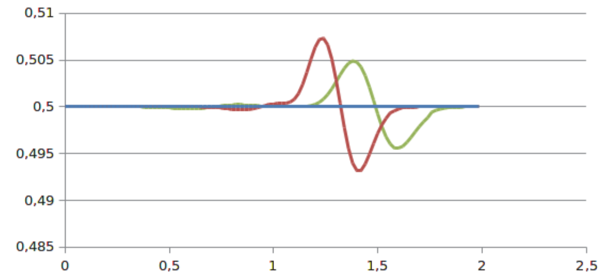

Рис. 2б

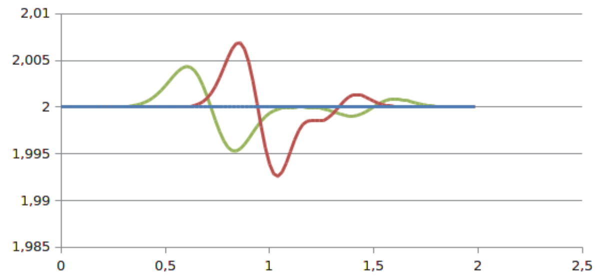

Рис. 2в

На рис. 2в соответственно справа налево графики $w(x,t) = 2 + \widehat{w}(x,t)$ для тех же значений t; здесь $\varepsilon = 0{,}02$.

Мы представили результаты численного счета решений задачи Коши для системы (1.1) с непериодическими начальными данными ограниченной энергии в $L_2(\mathbb{R})$: $u_0 \equiv 1$ и $w_0 = 1 + w(x)$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} w dx = 0$ (см. рис. 1).

Второй численный пример (см. рис. 2) касается задачи Коши для системы (1.2) с непериодическими начальными данными ограниченной энергии в $L_2(\mathbb{R})$: $u(0,x) \equiv \dfrac{1}{2}$, $w(0,x) \equiv 2$ и $v(0,x) = 1 + v^0(x)$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} v^0 dx = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Больцман Л.* О методе Максвелла выведения уравнений гидродинамики из кинетической теории газа// В сб. «Сообщения Британской ассоциации (1894). Памяти Л. Больцмана». — М.: Наука, 1984. — С. 307–321.
2. *Васильева О. А., Духновский С. А., Радкевич Е. В.* О локальном равновесии уравнения Карлемана// Пробл. мат. анализа. — 2015. — *78*. — С. 165–190.
3. *Годунов С. К., Султангазин У. М.* О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана// Усп. мат. наук. — 1974. — *XXVI*, № 3 (159). — С. 3–51.
4. *Ильин О. В.* Изучение существования решений и устойчивости кинетической системы Карлемана// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2007. — *47*, № 12. — С. 2076–2087.
5. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах (от диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации). — М.: Мир, 1979.
6. *Радкевич Е. В.* Математические вопросы неравновесных процессов. — Новосибирск: Изд-во Тамара Рожковская, 2007.
7. *Радкевич Е. В.* О поведении на больших временах решений задачи Коши для двумерного дискретного кинетического уравнения// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2013. — *47*. — С. 108–139.
8. *Broadwell T. E.* Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method// J. Fluid Mech. — 1964. — *19*, № 3. — С. 401–414.
9. *Komech A., Kopylova E.* Dispersion decay and scattering theory. — Naboken: John Willey and Sons, 2012.
10. *Kopylova E.* On long-time decay for magnetic Schrödinger and Klein—Gordon equations// Proc. Steklov Inst. Math. — 2012. — *278*. — С. 121–129.

О. А. Васильева
Московский государственный строительный университет

129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26
E-mail: vasiljeva.ovas@yandex.ru

С. А. Духновский
Московский государственный строительный университет
129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26
E-mail: sergeidukhnvskijj@rambler.ru

Е. В. Радкевич
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, г. Москва, ул. Ленинские Горы, д. 1
E-mail: evrad07@gmail.com

UDC 517+517.9+536

On the Nature of Local Equilibrium in the Carleman and Godunov–Sultangazin Equations

© 2016 **O. A. Vasil'eva, S. A. Dukhnovskii, E. V. Radkevich**

Abstract. Considering one-dimensional Carleman and Godunov–Sultangazin equations, we obtain the local equilibrium conditions for solutions of the Cauchy problem with finite energy and periodic initial data. Moreover, we prove the exponential stabilization to the equilibrium state.

REFERENCES

1. L. Boltzmann, "O metode Maksvella vyvedeniya uravneniy gidrodinamiki iz kineticheskoy teorii gaza" [On the Maxwell method for derivation of equations of hydrodinamics from the kinetic gas theory, In: "Soobshcheniya Britanskoy assotsiatsii (1894). Pamyati L. Bol'tsmana" [Reports of Britain Association (1894). To the memory of L. Boltzmann], Nauka, Moscow, 1984, 307–321 (in Russian).
2. O. A. Vasil'eva, S. A. Dukhnovskiy, and E. V. Radkevich, "O lokal'nom ravnovesii uravneniya Karlemana" [On local equilibrium of the Carleman equation], *Probl. mat. analiza* [Probl. Math. Anal.], 2015, **78**, 165–190 (in Russian).
3. S. K. Godunov and U. M. Sultangazin, "O diskretnykh modelyakh kineticheskogo uravneniya Bol'tsmana" [On discrete models of the Boltzman kinetic equation], *Usp. mat. nauk* [Progress Math. Sci.], 1974, **XXVI**, No. 3 (159), 3–51 (in Russian).
4. O. V. Il'in, "Izuchenie sushchestvovaniya resheniy i ustoychivosti kineticheskoy sistemy Karlemana" [Study of existence and stability of solutions of the Carleman kinetic system], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2007, **47**, No. 12, 2076–2087 (in Russian).
5. G. Nikolis and I. Prigozhin, *Samoorganizatsiya v neravnovesnykh sistemakh* (*ot dissipativnykh struktur k uporyadochennosti cherez fluktuatsii*) [Self-Organization in Nonequilibrium Systems (from Dissipative Structures to Ordering via Fluctuations)], Mir, Moscow, 1979 (in Russian).
6. E. V. Radkevich, *Matematicheskie voprosy neravnovesnykh protsessov* [Mathematical Issues in Nonequilibrium Processes], Tamara Rozhkovskaya, Novosibirsk, 2007 (in Russian).
7. E. V. Radkevich, "O povedenii na bol'shikh vremenakh resheniy zadachi Koshi dlya dvumernogo diskretnogo kineticheskogo uravneniya" [On the behavior of solutions of the Cauchy problem for the two-dimensional discrete kinetic equation at large time scales], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2013, **47**, 108–139 (in Russian).
8. T. E. Broadwell, "Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method," *J. Fluid Mech.*, 1964, **19**, No. 3, 401–414.
9. A. Komech and E. Kopylova, *Dispersion Decay and Scattering Theory*, John Willey and Sons, Naboken, 2012.
10. E. Kopylova, "On long-time decay for magnetic Schrödinger and Klein—Gordon equations," *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, **278**, 121–129.

O. A. Vasil'eva
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia
E-mail: vasiljeva.ovas@yandex.ru

S. A. Dukhnovskii
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia
E-mail: sergeidukhnvskijj@rambler.ru

E. V. Radkevich
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: evrad07@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 60 (2016). С. 82–101

УДК 531.3, 532.5, 537.6

НАРУШЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НАМАГНИЧЕННЫХ ПОТОКОВ, ВЫЗВАННЫЕ ДИССИПАЦИЕЙ

© 2016 г. О. Н. КИРИЛЛОВ

Аннотация. Изучаются локальные нарушения устойчивости дифференциально вращающегося потока электропроводящей несжимаемой жидкости, находящейся под воздействием внешнего азимутального магнитного поля. Гидродинамически устойчивый поток может быть дестабилизирован магнитным полем как в случае идеальной системы, так и в случае системы с вязкостью и сопротивлением; при этом возникает азимутальная магнитовращательная неустойчивость. Специальное решение уравнений идеальной магнитогидродинамики, для которого полное давление постоянно, скорость жидкости параллельна направлению магнитного поля, а магнитная и кинетическая энергии конечны и равны друг другу (такое решение называется чандрасекаровской эквипартицией), маргинально устойчиво при отсутствии вязкости и сопротивления. Локальный анализ устойчивости позволяет найти условия, при которых азимутальную магнитовращательную неустойчивость можно трактовать как нарушение устойчивости чандрасекаровской эквипартиции, вызванное диссипацией.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Динамика течения вязкой несжимаемой жидкости, проводящей электрический ток и взаимодействующей с магнитным полем, описывается следующей системой, состоящей из уравнения Навье—Стокса для скорости жидкости $\boldsymbol{u}$ и уравнения индукции для магнитного поля $\boldsymbol{B}$ (см. [14]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u} - \frac{1}{\mu_0\rho}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P - \nu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{u} &= 0, \\ \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u} - \eta\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{B} &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

В уравнениях (1.1) полное давление обозначается через $P = p + \dfrac{\boldsymbol{B}^2}{2\mu_0}$, p обозначает гидродинамическое давление, $\rho = \mathrm{const}$ — плотность, $\nu = \mathrm{const}$ — кинематическая вязкость, $\eta = (\mu_0\sigma)^{-1}$ — коэффициент магнитной диффузии, σ — проводимость жидкости, а μ_0 — магнитная проницаемость свободного пространства. Кроме того, несжимаемый поток и соленоидальное магнитное поле удовлетворяют следующим ограничениям:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0. \tag{1.2}$$

Предположим, что в стационарном состоянии поток жидкости дифференциально вращается в пределах между радиусами R_1 и $R_2 > R_1$, причем профиль угловой скорости $\Omega(R)$ зависит только от радиальной координаты R в цилиндрической системе координат (R, ϕ, z). Предположим, что у стационарного магнитного поля есть только азимутальная компонента и $B^0_\phi(R)$ — ее радиальный профиль, а гидродинамическое давление зависит только от R:

$$\boldsymbol{u}_0(R) = R\,\Omega(R)\,\boldsymbol{e}_\phi, \quad p = p_0(R), \quad \boldsymbol{B}_0(R) = B^0_\phi(R)\boldsymbol{e}_\phi. \tag{1.3}$$

В [12] найдено, что $\Omega = \dfrac{B^0_\phi}{R\sqrt{\rho\mu_0}}$ и $P = \mathrm{const}$ являются точным стационарным решением системы (1.1)-(1.2) в идеальном случае, т. е. когда $\nu = 0$ и $\eta = 0$. На этом решении скорость жидкости в каждой точке параллельна направлению магнитного поля в этой же точке (см. [14]), а их относительные величины таковы, что кинетическая и магнитная энергии равны друг другу: $\dfrac{\rho(\Omega R)^2}{2} = \dfrac{(B^0_\phi)^2}{2\mu_0}$. В [12, 14] доказано, что это решение идеальной магнитогидродинамики (называемое *эквипартицией*) маргинально устойчиво, что, как впоследствии отмечал в своих воспоминаниях (см. [15]) автор указанных работ, несколько удивило его самого: «Так или иначе, один замечательный результат в то время появился — доказательство устойчивости эквипартиции. Вентцель и Гольдбергер проверили мой анализ, так как я сам не очень поверил в результат.»

Введем угловую скорость Альфвена

$$\omega_{A_\phi} = \frac{B^0_\phi}{R\sqrt{\rho\mu_0}} \tag{1.4}$$

(см. [47]), а также гидродинамическое число Россби

$$\mathrm{Ro} := \frac{R}{2\Omega}\partial_R\Omega \tag{1.5}$$

и магнитное число Россби

$$\mathrm{Rb} := \frac{R}{2B^0_\phi R^{-1}}\partial_R(B^0_\phi R^{-1}) \tag{1.6}$$

(см. [31]), где $\partial_R = \dfrac{\partial}{\partial R}$. Из эквипартиции Чандрасекара следует (см. [33, 34]), что

$$\Omega = \omega_{A_\phi}, \quad \mathrm{Ro} = \mathrm{Rb} = -1. \tag{1.7}$$

Последнее равенство следует из условия постоянства полного давления и того факта, что в устойчивом состоянии центробежное ускорение фонового потока компенсируется градиентом давления: $R\Omega^2 = \dfrac{1}{\rho}\partial_R p_0$. Отметим, что значение $\mathrm{Ro} = -1$ соответствует профилю скорости $\Omega(R) \sim R^{-2}$, а значение $\mathrm{Rb} = -1$ соответствует магнитному полю, порожденному осевым током I, изолированным от жидкости: $B^0_\phi(R) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$ (см. [34]).

Эквипартиция Чандрасекара принадлежит широкому классу точных решений устойчивого состояния для уравнения идеальной магнитогидродинамики (МГД); это — решения с постоянным полным давлением. О свежих результатах в этой области можно узнать в [7, 22].

Если магнитное поле отсутствует, то вращающийся поток идеальной жидкости устойчив относительно осесимметрических возмущений тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ro} > -1$ (см. критерий Рэлея в [50]). В противном случае он становится центробежно неустойчивым из-за бифуркации устойчивого состояния (см. [30]). Отметим, что идеальный поток с кеплеровским профилем вращения, т. е. такой, для которого $\Omega(R) \propto R^{-3/2}$, гидродинамически устойчив, поскольку $\mathrm{Ro} = -\dfrac{3}{4} > -1$.

Согласно критерию Майкла (см. [45]), вращающийся поток идеальной полностью проводящей жидкости, на который действует азимутальное магнитное поле, устойчив относительно осесимметрических возмущений, если

$$\delta := \mathrm{Ro} - \mathrm{Rb}\mathrm{N}^2 > -1, \tag{1.8}$$

где

$$\mathrm{N} = \frac{\omega_{A_\phi}}{\Omega}. \tag{1.9}$$

Очевидно, неравенство (1.8) справедливо для чандрасекаровской эквипартиции (1.7).

Неустойчивости вращающегося потока невязкой полностью проводящей жидкости, отличные от осесимметрических, изучались в [3, 47, 64]. Как показывают коротковолновые приближения, если осевые и азимутальные волновые числа возмущений бесконечно растут, то устойчивость гидродинамического потока нарушается слабым азимутальным магнитным полем при

$$N^2 < -\frac{4\mathrm{Ro}}{n^2}, \tag{1.10}$$

где $n \gg 1$ — азимутальное волновое число, а $\mathrm{Ro} < 0$. Более того, при переходе к пределу при $n \to \infty$ скорость роста возмущения стремится к значению Оорта $|\Omega\mathrm{Ro}|$ (см. [47]). Следовательно, в случае идеальной магнитогидродинамики, т. е. при $\nu = 0$ и $\eta = 0$, для гидродинамически устойчивых потоков, для которых $-1 < \mathrm{Ro} < 0$, включая кеплеровский поток, для которого $\mathrm{Ro} = -\frac{3}{4}$, возможно развитие азимутальной магнитовращательной неустойчивости, если выполнено условие (1.10). Для чандрасекаровской эквипартиции (1.7) условие неустойчивости (1.10) нарушается уже при $n > 2$.

Физический механизм указанных нарушений устойчивости в случае идеальной магнитогидродинамики заключается в нарушении устойчивости медленных кориолисовских магнитных волн (см. [64]), что весьма сходно со стандартной магнитовращательной неустойчивостью по Велихову и Чандрасекару (см. [2, 13, 60]), имеющими место в намагниченном вращающемся потоке, находящемся под воздействием осевого магнитного поля (см. [29, 30]).

Магнитовращательные неустойчивости (как стандартные, так и азимутальные) считаются наиболее вероятными кандидатами на роль триггеров турбулентности в аккреционных дисках, в протопланетарных дисках и даже в звездах и внутренностях планет (см. [2, 3, 34, 52, 53]). Стандартная магнитовращательная неустойчивость подобно нарушениям устойчивости, возникающим в таких связанных искусственных космических системах, как пара соединенных спутников или даже кольцо связанных между собой спутников на орбите планеты (см. [2, 4, 41]). Азимутальная магнитовращательная неустойчивость имеет своим аналогом вязкоупругую устойчивость вращающихся полимерных потоков в предельном случае, т. е. при бесконечном времени релаксации сложной жидкости (см. [48, 49]). Обе аналогии возможны, поскольку линии магнитного поля, замороженные в идеально проводящей жидкости в силу теоремы Альфвена, «усиливают» жидкость и фактически превращают ее в сложную или неньютоновскую жидкость (см. [14]). Эти аналогии не только позволяют лучше понять механизм нарушения устойчивости в приложениях, не имеющих, на первый взгляд, никакого отношения друг к другу, но и открывают путь для изучения магнитогидродинамической неустойчивости в компактных лабораторных экспериментах с полимерными жидкостями (см. [8]).

Реалистичное моделирование астрофизических явлений, для которых важна магнитовращательная неустойчивость, требует учета диссипативных эффектов различной физической природы (см. [46]). Каждый отдельный диссипативный механизм может быть довольно слаб, но сила одного из них может отличаться от силы другого на несколько порядков. Это требует трудоемких численных вычислений. Поэтому, чтобы поддержать численные и теоретические исследования магнитовращательной неустойчивости, проводятся лабораторные эксперименты с электропроводящими средами (такими, как жидкие металлы или плазмы) в магнитных полях (см. [17, 23, 57]).

К настоящему времени спиралевидная и азимутальная магнитовращательная неустойчивость продемонстрирована лабораторными экспериментами с потоком Куэтта—Тейлора, состоящим из жидкого металла с особыми профилями скоростей в спиралевидном (т. е. осевом плюс азимутальном) либо чисто азимутальном магнитном поле (см. [51, 54]). Жидкие металлы — это материалы, характеризуемые очень малым отношением вязкости жидкости к ее электрическому сопротивлению. Это отношение, называемое магнитным числом Прандтля ($\mathrm{Pm} = \frac{\nu}{\eta}$), для таких материалов составляет, как правило, от 10^{-6} до 10^{-5}. Поэтому один цикл стандартной магнитовращательной неустойчивости требует очень высоких скоростей вращения цилиндров ячейки Куэтта—Тейлора, что не обеспечивает ламинарность потока даже в отсутствие магнитного поля (см. [23]). То же самое свойство жидких металлов препятствует дестабилизации кеплеровских потоков в успешных экспериментах с азимутальными или спиралевидными полями, если азимутальная компонента создается осевым электрическим током, изолированным от жидкости (см. [23]). Действительно, для $\mathrm{Rb} = -1$ диапазон гидродинамически устойчивых потоков, допускающих дестабилизацию азимутальным или спиралевидным магнитным полем, ограничен числами Россби от $\mathrm{Ro} = -1$ до

$\mathrm{Ro} = 2 - 2\sqrt{2}$, что не содержит кеплеровского профиля, для которого $\mathrm{Ro} = -\frac{3}{4}$ (см. [32, 42]). Следовательно, существующие эксперименты с жидкими металлами нуждаются в дальнейших улучшениях, чтобы их можно было использовать для лабораторного моделирования значимых для астрофизических приложений нарушений устойчивости (см. [23]).

В [31] показана возможность нарушить устойчивость гидродинамически устойчивого потока Куэтта—Тейлора жидкого металла, если снять ограничение $\mathrm{Rb} = -1$. С физической точки зрения это становится возможным за счет вклада в азимутальное поле, добавляемого электрическими токами через жидкий металл к полю, создаваемому изолированным осевым током (см. [33, 34]). В [31] найдено имеющее сравнительно простой вид условие неустойчивости, выражающееся при помощи гидродинамического и магнитного чисел Россби и получающееся в пределе при Pm, стремящемся к нулю:

$$\mathrm{Rb} > -\frac{1}{8}\frac{(\mathrm{Ro}+2)^2}{\mathrm{Ro}+1}. \tag{1.11}$$

Отсюда вытекает нарушение устойчивости кеплеровского потока при $\mathrm{Rb} > \mathrm{Rb}^{crit} = -\frac{25}{32}$, т. е. в случае, когда радиальный профиль азимутального поля является чуть более плоским, чем R^{-1}. Отметим, как значительно отличаются условия дестабилизации кеплеровского потока азимутальным магнитным полем для случая идеальной МГД, когда неустойчивость, не являющаяся осесимметрической, возможна уже при $\mathrm{Rb} = -1$, и для случая, когда есть вязкость и сопротивление (при $\mathrm{Pm} \ll 1$) — в этом случае существует предельная крутизна $\mathrm{Rb}^{crit} > -1$ радиального профиля магнитного поля.

Различие между порогами устойчивости идеальной системы без диссипации и системы с диссипацией (включая предельный случай, в котором диссипация стремится к нулю) является универсальным явлением, давно известным для многих областей физики и техники (см. [35]). В физике плазмы и магнитогидродинамике это уже привело к довольно радикальным выводам (см. [46]): «Очень много времени потрачено на анализ равновесий в идеальной МГД, которых невозможно достичь предельным переходом от равновесий в МГД с малым, но ненулевым сопротивлением. В результате мы получили неточные концепции, которые, видимо, будет очень трудно уточнить. Возможно, в этом причина того, что в настоящее время теория используется скорее как декорация для эксперимента, чем как руководство, куда двигаться дальше.» Такое же явление известно в гидродинамике, например, для бароклинной неустойчивости (см. [36, 58]), модуляционной неустойчивости Бенджамина—Фейра (см. [11, 26]) и неустойчивости устойчиво стратифицированного сдвигового потока (см. [59]). В механике этот эффект известен с 1952 г. как парадокс Циглера (см. [63]), который в [9] был назван «проблемой, представляющей наибольший теоретический интерес».

В [10] была найдена связь между парадоксом Циглера и особенностью «зонтик Уитни» в области асимптотической устойчивости диссипативной системы. После работы [1], посвященной типичным особенностям многопараметрических семейств матриц, прикладники постепенно приняли эту точку зрения и стали развивать для исследования парадокса дестабилизации и нарушений устойчивости, вызванных диссипацией, в системах с множественными механизмами затухания, методы, основанные на возмущениях кратных собственных значений, теории индекса и применении фундаментальных симметрий идеальной системы (см. [6, 25, 27, 35, 40, 43, 44]). Отметим, что роль взаимного влияния различных диссипационных механизмов на пороги устойчивости отмечалась еще в тридцатых годах прошлого века (см. работы [24, 55] о динамике ротора).

В [34] впервые получены признаки того, что азимутальное нарушение устойчивости магнитного поля или вращения может быть вызвано диссипативным возмущением чандрасекаровской эквипартиции для идеальной МГД. В настоящей работе мы развиваем эту идею, заново выводя уравнения ВКБ для этой задачи, выписывая гамильтонову форму соответствующей алгебраической задачи на собственные значения (она определяет отношение дисперсии для идеальной системы) и систематически изучая ее негамильтоновы возмущения вязкими членами и членами с ненулевым сопротивлением. Мы находим условия, при которых азимутальное нарушение устойчивости магнитного поля или вращения действительно является неустойчивостью чандрасекаровской эквипартиции либо ее расширений, и эта неустойчивость вызвана диссипацией.

2. Уравнения геометрической оптики

Линеаризуем уравнения (1.1)-(1.2) вблизи стационарного решения (1.3), вводя общие возмущения $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}'$, $p = p_0 + p'$ и $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}'$ и оставляя только члены первого порядка относительно первых производных. Получим выражения

$$\partial_t \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}_0 - \frac{1}{\rho\mu_0}\left(\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{B}' + \boldsymbol{B}' \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{B}_0\right) - \nu \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{u}' = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p' - \frac{1}{\rho\mu_0}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{B}'),$$
$$\partial_t \boldsymbol{B}' + \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{B}' + \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{B}_0 - \boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}' - \boldsymbol{B}' \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}_0 - \eta \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{B}' = 0 \tag{2.1}$$

(см. [34, 38]), где возмущения удовлетворяют ограничениям

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}' = 0, \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}' = 0. \tag{2.2}$$

Введем градиенты фоновых полей, представимые следующими двумя матрицами размерности 3×3:

$$\mathcal{U}(R) = \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}_0 = \Omega \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 + 2\mathrm{Ro} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}(R) = \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{B}_0 = \frac{B_\phi^0}{R} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 + 2\mathrm{Rb} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Тогда линеаризованную систему магнитогидродинамики можно записать в следующем виде (см. [34]):

$$\begin{pmatrix} \partial_t + \mathcal{U} + \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla} - \nu \boldsymbol{\nabla}^2 & -\frac{1}{\rho\mu_0}\left(\mathcal{B} + \boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla}\right) \\ \mathcal{B} - \boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla} & \partial_t - \mathcal{U} + \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla} - \eta \boldsymbol{\nabla}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}' \\ \boldsymbol{B}' \end{pmatrix} + \frac{\boldsymbol{\nabla}}{\rho} \begin{pmatrix} p' + \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{B}') \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{2.4}$$

Решения линеаризованных уравнений (2.4) ищутся в виде асимптотических рядов «геометрической оптики» по малому параметру ϵ, $0 < \epsilon \ll 1$ (см. [27]):

$$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}, t, \epsilon) = e^{i\Phi(\boldsymbol{x},t)/\epsilon}\left(\boldsymbol{u}^{(0)}(\boldsymbol{x}, t) + \epsilon \boldsymbol{u}^{(1)}(\boldsymbol{x}, t)\right) + \epsilon \boldsymbol{u}^{(r)}(\boldsymbol{x}, t),$$
$$\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{x}, t, \epsilon) = e^{i\Phi(\boldsymbol{x},t)/\epsilon}\left(\boldsymbol{B}^{(0)}(\boldsymbol{x}, t) + \epsilon \boldsymbol{B}^{(1)}(\boldsymbol{x}, t)\right) + \epsilon \boldsymbol{B}^{(r)}(\boldsymbol{x}, t),$$
$$p'(\boldsymbol{x}, t, \epsilon) = e^{i\Phi(\boldsymbol{x},t)/\epsilon}\left(p^{(0)}(\boldsymbol{x}, t) + \epsilon p^{(1)}(\boldsymbol{x}, t)\right) + \epsilon p^{(r)}(\boldsymbol{x}, t), \tag{2.5}$$

где $\boldsymbol{x}$ — вектор координат, Φ — вещественнозначная скалярная функция, представляющая фазу колебаний, $\boldsymbol{u}^{(j)}$, $\boldsymbol{B}^{(j)}$ и $p^{(j)}$ $(j = 0, 1, r)$ — комплекснозначные амплитуды, а индекс r обозначает остаточные члены.

Следуя [16, 18, 39], мы полагаем, что $\nu = \epsilon^2 \tilde{\nu}$ и $\eta = \epsilon^2 \tilde{\eta}$. Подставляя разложения (2.5) и (2.4) и приводя подобные при ϵ^{-1} и ϵ^0, мы приходим к следующим двум системам уравнений (см. [34]):

$$\begin{pmatrix} \partial_t \Phi + (\boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi) & -\frac{1}{\rho\mu_0}(\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi) \\ -(\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi) & \partial_t \Phi + (\boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^{(0)} \\ \boldsymbol{B}^{(0)} \end{pmatrix} = -\frac{\boldsymbol{\nabla}\Phi}{\rho} \begin{pmatrix} p^{(0)} + \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{B}^{(0)}) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

$$i \begin{pmatrix} \partial_t \Phi + (\boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi) & -\frac{1}{\rho\mu_0}(\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi) \\ -(\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi) & \partial_t \Phi + (\boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^{(1)} \\ \boldsymbol{B}^{(1)} \end{pmatrix} + i\frac{\boldsymbol{\nabla}\Phi}{\rho} \begin{pmatrix} p^{(1)} + \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{B}^{(1)}) \\ 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} \partial_t + \mathcal{U} + \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla} + \tilde{\nu}(\boldsymbol{\nabla}\Phi)^2 & -\frac{1}{\rho\mu_0}\left(\mathcal{B} + \boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla}\right) \\ \mathcal{B} - \boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla} & \partial_t - \mathcal{U} + \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla} + \tilde{\eta}(\boldsymbol{\nabla}\Phi)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^{(0)} \\ \boldsymbol{B}^{(0)} \end{pmatrix} +$$
$$+ \frac{\boldsymbol{\nabla}}{\rho} \begin{pmatrix} p^{(0)} + \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{B}^{(0)}) \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{2.7}$$

Из условия соленоидальности (2.2) следует, что

$$\boldsymbol{u}^{(0)} \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi = 0, \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}^{(0)} + i\boldsymbol{u}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi = 0,$$
$$\boldsymbol{B}^{(0)} \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi = 0, \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}^{(0)} + i\boldsymbol{B}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi = 0. \tag{2.8}$$

Скалярно умножая первое уравнение системы (2.6) на $\boldsymbol{\nabla}\Phi$, удовлетворяющее ограничению (2.8), получаем, что

$$(\nabla\Phi)^2\left(\frac{p^{(0)}}{\rho}+\frac{1}{\rho\mu_0}(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}^{(0)})\right)=0. \tag{2.9}$$

Следовательно, если $\boldsymbol{\nabla}\Phi\neq 0$, то

$$p^{(0)}=-\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}^{(0)}). \tag{2.10}$$

При условии (2.10) уравнение (2.6) имеет нетривиальное решение, если определитель матрицы размерности 6×6 в его левой части обращается в нуль. Это дает нам два характеристических корня, соответствующих двум волнам Альфвена (см. [19, 20, 38]), порождающим следующие два уравнения Гамильтона—Якоби для фазы Φ:

$$\partial_t\Phi+\left(\boldsymbol{u}_0\pm\frac{\boldsymbol{B}_0}{\sqrt{\rho\mu_0}}\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi=0. \tag{2.11}$$

Характеристические корни $\left(-\boldsymbol{u}_0\pm\dfrac{\boldsymbol{B}_0}{\sqrt{\rho\mu_0}}\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi$ — тройные и полупростые, с собственными векторами

$$\begin{pmatrix}0\\0\\\dfrac{\pm1}{\sqrt{\rho\mu_0}}\\0\\0\\1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\\dfrac{\pm1}{\sqrt{\rho\mu_0}}\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}\dfrac{\pm1}{\sqrt{\rho\mu_0}}\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

На поверхности

$$\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi=0 \tag{2.13}$$

тройные корни Альфвена сливаются в полупростой характеристический корень кратности 6 (см. [19, 20, 38]). Тогда

$$\frac{D\Phi}{Dt}=0, \tag{2.14}$$

где $\dfrac{D}{Dt}:=\partial_t+\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\nabla}$ — производная по направлению потока жидкости. Вычислим градиент от (2.14):

$$\boldsymbol{\nabla}\partial_t\Phi+\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\nabla})\Phi=\partial_t\boldsymbol{\nabla}\Phi+(\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\nabla}\Phi+\mathcal{U}^T\boldsymbol{\nabla}\Phi=\frac{D}{Dt}\boldsymbol{\nabla}\Phi+\mathcal{U}^T\boldsymbol{\nabla}\Phi=0. \tag{2.15}$$

Аналогично

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi)=(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\nabla}\Phi+\mathcal{B}^T\boldsymbol{\nabla}\Phi=0. \tag{2.16}$$

Используя соотношения (2.10), (2.13) и (2.14), мы упрощаем уравнения (2.7) следующим образом:

$$\begin{gathered}\left(\frac{D}{Dt}+\tilde{\nu}(\boldsymbol{\nabla}\Phi)^2+\mathcal{U}\right)\boldsymbol{u}^{(0)}-\frac{1}{\rho\mu_0}(\mathcal{B}+\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}^{(0)}=-\frac{i}{\rho}\left(p^{(1)}+\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}^{(1)})\right)\boldsymbol{\nabla}\Phi,\\ \left(\frac{D}{Dt}+\tilde{\eta}(\boldsymbol{\nabla}\Phi)^2-\mathcal{U}\right)\boldsymbol{B}^{(0)}+(\mathcal{B}-\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}^{(0)}=0.\end{gathered} \tag{2.17}$$

Исключим давление из первого из уравнений (2.17), умножив его на $\boldsymbol{\nabla}\Phi$, и учтем ограничения (2.8). Тогда уравнение примет вид

$$\begin{gathered}\left(\frac{D}{Dt}+\tilde{\nu}(\boldsymbol{\nabla}\Phi)^2+\mathcal{U}\right)\boldsymbol{u}^{(0)}-\frac{1}{\rho\mu_0}(\mathcal{B}+\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}^{(0)}=\\ =\frac{\boldsymbol{\nabla}\Phi}{|\boldsymbol{\nabla}\Phi|^2}\cdot\left[\left(\frac{D}{Dt}+\mathcal{U}\right)\boldsymbol{u}^{(0)}-\frac{1}{\rho\mu_0}(\mathcal{B}+\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}^{(0)}\right]\boldsymbol{\nabla}\Phi\end{gathered} \tag{2.18}$$

(соответствующая стандартная процедура описана, например, в [61]). Дифференцируя первое из тождеств (2.8), получаем, что

$$\frac{D}{Dt}(\boldsymbol{\nabla}\Phi\cdot\boldsymbol{u}^{(0)})=\frac{D\boldsymbol{\nabla}\Phi}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}^{(0)}+\boldsymbol{\nabla}\Phi\cdot\frac{D\boldsymbol{u}^{(0)}}{Dt}=0. \tag{2.19}$$

С другой стороны, из третьего тождества (2.8) следует, что

$$(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\nabla}\Phi\cdot\boldsymbol{B}^{(0)})=((\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\nabla}\Phi)\cdot\boldsymbol{B}^{(0)}+\boldsymbol{\nabla}\Phi\cdot(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}^{(0)}=0. \tag{2.20}$$

Используя тождества (2.19) и (2.20), приведем уравнение (2.18) к виду

$$\left(\frac{D}{Dt}+\tilde{\nu}(\boldsymbol{\nabla}\Phi)^2+\mathcal{U}\right)\boldsymbol{u}^{(0)}-\frac{1}{\rho\mu_0}(\mathcal{B}+\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}^{(0)}=$$
$$=\frac{\boldsymbol{\nabla}\Phi}{|\boldsymbol{\nabla}\Phi|^2}\cdot\left[\mathcal{U}\boldsymbol{u}^{(0)}-\frac{1}{\rho\mu_0}\mathcal{B}\boldsymbol{B}^{(0)}\right]\boldsymbol{\nabla}\Phi+\frac{1}{\rho\mu_0}\frac{\boldsymbol{\nabla}\Phi}{|\boldsymbol{\nabla}\Phi|^2}((\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\nabla}\Phi)\cdot\boldsymbol{B}^{(0)}-\frac{\boldsymbol{\nabla}\Phi}{|\boldsymbol{\nabla}\Phi|^2}\frac{D\boldsymbol{\nabla}\Phi}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}^{(0)}. \tag{2.21}$$

Учитывая тождества (2.16) и (2.15), приводим уравнение (2.21) и, следовательно, первое из уравнений (2.17) к виду

$$\left(\frac{D}{Dt}+\tilde{\nu}(\boldsymbol{\nabla}\Phi)^2+\mathcal{U}\right)\boldsymbol{u}^{(0)}-\frac{1}{\rho\mu_0}(\mathcal{B}+\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}^{(0)}=$$
$$=\boldsymbol{\nabla}\Phi\frac{\boldsymbol{\nabla}\Phi}{|\boldsymbol{\nabla}\Phi|^2}\cdot\left[\mathcal{U}\boldsymbol{u}^{(0)}-\frac{1}{\rho\mu_0}\mathcal{B}\boldsymbol{B}^{(0)}\right]-\frac{1}{\rho\mu_0}\frac{\boldsymbol{\nabla}\Phi}{|\boldsymbol{\nabla}\Phi|^2}\mathcal{B}^T\boldsymbol{\nabla}\Phi\cdot\boldsymbol{B}^{(0)}+\frac{\boldsymbol{\nabla}\Phi}{|\boldsymbol{\nabla}\Phi|^2}\mathcal{U}^T\boldsymbol{\nabla}\Phi\cdot\boldsymbol{u}^{(0)}=$$
$$=2\frac{\boldsymbol{\nabla}\Phi(\boldsymbol{\nabla}\Phi)^T}{|\boldsymbol{\nabla}\Phi|^2}\left[\mathcal{U}\boldsymbol{u}^{(0)}-\frac{1}{\rho\mu_0}\mathcal{B}\boldsymbol{B}^{(0)}\right]. \tag{2.22}$$

Вводя обозначение $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{\nabla}\Phi$, из фазового уравнения (2.15) получаем, что

$$\frac{D\boldsymbol{k}}{Dt}=-\mathcal{U}^T\boldsymbol{k}. \tag{2.23}$$

Аналогично уравнения переноса для амплитуд (2.17) принимают окончательный вид

$$\begin{aligned}\frac{D\boldsymbol{u}^{(0)}}{Dt}&=-\left(\mathcal{I}-\frac{2\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}^T}{|\boldsymbol{k}|^2}\right)\mathcal{U}\boldsymbol{u}^{(0)}-\tilde{\nu}|\boldsymbol{k}|^2\boldsymbol{u}^{(0)}+\frac{1}{\rho\mu_0}\left(\left(\mathcal{I}-\frac{2\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}^T}{|\boldsymbol{k}|^2}\right)\mathcal{B}+\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{B}^{(0)},\\ \frac{D\boldsymbol{B}^{(0)}}{Dt}&=\mathcal{U}\boldsymbol{B}^{(0)}-\tilde{\eta}|\boldsymbol{k}|^2\boldsymbol{B}^{(0)}-(\mathcal{B}-\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}^{(0)},\end{aligned} \tag{2.24}$$

где $\mathcal{I}$ — единичная матрица размерности 3×3. Напомним, что уравнения (2.23) и (2.24) выполняются при предположении, что выполнено условие (2.13).

Локальные уравнения в частных производных (2.24) эквивалентны уравнениям переноса, выведенным в [27,33,34]. В случае идеальной МГД (с нулевыми вязкостью и сопротивлением) уравнения (2.24) в точности совпадают с уравнениями из [38] и эквивалентны уравнениям переноса, выведенным в [21,61]. Если магнитное поле отсутствует, то эти уравнения можно рассматривать как обыкновенные дифференциальные уравнения относительно конвективной производной $\dfrac{D}{Dt}$. Тогда они сводятся к уравнениям из работы [18], исследующей устойчивость вязкого потока Куэтта—Тейлора. Отметим, что амплитудные уравнения той же формы (с другой матрицей $\mathcal{U}$) возникают при изучении эллиптической неустойчивости (см. [39]) и трехмерных локальных неустойчивостей вязких и невязких потоков более общего вида (см. [16]).

3. Уравнения переноса. Дисперсионное соотношение

Пусть ортогональные единичные векторы $\boldsymbol{e}_R(t)$, $\boldsymbol{e}_\phi(t)$ и $\boldsymbol{e}_z(t)$ образуют базис в цилиндрической координатной системе, движущейся вдоль траектории движения жидкости. Если $\boldsymbol{k}(t)=k_R\boldsymbol{e}_R(t)+k_\phi\boldsymbol{e}_\phi(t)+k_z\boldsymbol{e}_z(t)$, $\boldsymbol{u}(t)=u_R\boldsymbol{e}_R(t)+u_\phi\boldsymbol{e}_\phi(t)+u_z\boldsymbol{e}_z(t)$, а матрица $\mathcal{U}$ — такая, как в (2.3), то

$$\dot{\boldsymbol{e}}_R=\Omega(R)\mathbf{e}_\phi,\quad \dot{\mathbf{e}}_\phi=-\Omega(R)\boldsymbol{e}_R. \tag{3.1}$$

Следовательно, уравнение (2.23) в координатной форме имеет вид

$$\dot{k}_R=-R\partial_R\Omega k_\phi,\quad \dot{k}_\phi=0,\quad \dot{k}_z=0. \tag{3.2}$$

Согласно [18, 21], чтобы исследовать потенциально неустойчивые режимы, имеющие физический смысл, нужно выбирать ограниченные решения системы (3.2), не затухающие на бесконечности. Для таких решений $k_\phi \equiv 0$, а k_R и k_z не зависят от времени. Отметим, что такое решение удовлетворяет ограничению $\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{k} = 0$, вытекающему из (2.13).

Введем обозначение $\alpha = k_z|\boldsymbol{k}|^{-1}$, где $|\boldsymbol{k}|^2 = k_R^2 + k_z^2$. Тогда $k_R k_z^{-1} = \sqrt{1-\alpha^2}\alpha^{-1}$, и мы можем представить локальные амплитудные уравнения в частных производных (2.24) в координатном виде. Тогда уравнения для осевых компонент отделены от уравнений для радиальных и азимутальных компонент. Последние имеют следующий вид (см. [33, 34]):

$$\left(\partial_t + \Omega\partial_\phi + \widetilde{\nu}|\boldsymbol{k}|^2\right) u_R^{(0)} - 2\alpha^2\Omega u_\phi^{(0)} - \frac{B_\phi^0}{\rho\mu_0 R}\partial_\phi B_R^{(0)} + 2\alpha^2\frac{B_\phi^0}{\rho\mu_0 R}B_\phi^{(0)} = 0,$$

$$\left(\partial_t + \Omega\partial_\phi + \widetilde{\nu}|\boldsymbol{k}|^2\right) u_\phi^{(0)} + 2\Omega(1+\mathrm{Ro})u_R^{(0)} - \frac{2}{\rho\mu_0}\frac{B_\phi^0}{R}(1+\mathrm{Rb})B_R^{(0)} - \frac{1}{\rho\mu_0}\frac{B_\phi^0}{R}\partial_\phi B_\phi^{(0)} = 0,$$

$$\left(\partial_t + \Omega\partial_\phi + \widetilde{\eta}|\boldsymbol{k}|^2\right) B_R^{(0)} - \frac{B_\phi^0}{R}\partial_\phi u_R^{(0)} = 0,$$

$$\left(\partial_t + \Omega\partial_\phi + \widetilde{\eta}|\boldsymbol{k}|^2\right) B_\phi^{(0)} - 2\Omega\mathrm{Ro}B_R^{(0)} + 2\mathrm{Rb}\frac{B_\phi^0}{R}u_R^{(0)} - \frac{B_\phi^0}{R}\partial_\phi u_\phi^{(0)} = 0. \tag{3.3}$$

Решение уравнений (3.3) ищется в модальной форме: $\boldsymbol{u}^{(0)} = \widehat{\boldsymbol{u}}e^{\alpha\Omega\lambda t + im\phi}$, $\boldsymbol{B}^{(0)} = \sqrt{\rho\mu_0}\widehat{\boldsymbol{B}}e^{\alpha\Omega\lambda t + im\phi}$. Введем вязкую и резистивную частоты, модифицированное азимутальное волновое число и гидродинамическое и магнитное числа Рейнольдса (см. [33, 34]):

$$\omega_\nu = \widetilde{\nu}|\boldsymbol{k}|^2, \quad \omega_\eta = \widetilde{\eta}|\boldsymbol{k}|^2, \quad n = \frac{m}{\alpha}, \quad \mathrm{Re} = \frac{\alpha\Omega}{\omega_\nu}, \quad \mathrm{Rm} = \frac{\alpha\Omega}{\omega_\eta}. \tag{3.4}$$

Запишем амплитудные уравнения (3.3) в матричной форме

$$\mathbf{A}\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}, \tag{3.5}$$

где $\mathbf{z} = (\widehat{u}_R, \widehat{u}_\phi, \widehat{B}_R, \widehat{B}_\phi)^T$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1$ и

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} -in & 2\alpha & in\mathrm{N} & -2\alpha\mathrm{N} \\ -\dfrac{2(1+\mathrm{Ro})}{\alpha} & -in & \dfrac{2(1+\mathrm{Rb})}{\alpha}\mathrm{N} & in\mathrm{N} \\ in\mathrm{N} & 0 & -in & 0 \\ -\dfrac{2\mathrm{Rb}}{\alpha}\mathrm{N} & in\mathrm{N} & \dfrac{2\mathrm{Ro}}{\alpha} & -in \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = -\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\mathrm{Re}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\mathrm{Re}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\mathrm{Rm}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{\mathrm{Rm}} \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

(см. [31, 33, 34, 56]).

Записав условие разрешимости для этой системы алгебраических уравнений, получим дисперсионное соотношение

$$p(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0, \tag{3.7}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица размерности 4×4, а $p(\lambda)$ — следующий комплексный полином четвертого порядка:

$$p(\lambda) = (a_0 + ib_0)\lambda^4 + (a_1 + ib_1)\lambda^3 + (a_2 + ib_2)\lambda^2 + (a_3 + ib_3)\lambda + a_4 + ib_4. \tag{3.8}$$

В частном случае, когда $\omega_\nu = 0$ и $\omega_\eta = 0$, коэффициенты дисперсионного соотношения (3.7) в точности совпадают с коэффициентами, найденными в [21, 47]. Если магнитное поле отсутствует, то дисперсионное соотношение (3.7) сводится к тому, которое было выведено в [37].

4. Гамильтонова формулировка

Матрица $\mathbf{A}_0$ в (3.6) соответствует идеальной системе, а $\mathbf{A}_1$ представляет собой ее возмущение членами с ненулевыми вязкостью и сопротивлением. Наша цель — переформулировать задачу на собственные значения для матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1$ в виде задачи на спектре диссипативно возмущенной гамильтоновой системы (см. [44]).

Введем эрмитову матрицу

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & i\mathrm{N} \\ i & 0 & -i\mathrm{N} & 0 \\ 0 & i\mathrm{N} & 4\dfrac{\mathrm{Ro}-\mathrm{Rb}}{\alpha n} & -i \\ -i\mathrm{N} & 0 & i & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Тогда матрица $\mathbf{H}_0 = -i\mathbf{G}\mathbf{A}_0$ — тоже эрмитова. Действительно,

$$\mathbf{H}_0 = \begin{pmatrix} -\dfrac{2(\mathrm{N}^2\mathrm{Rb}-\mathrm{Ro}-1)}{\alpha} & in(\mathrm{N}^2+1) & -\dfrac{2\mathrm{N}(1+\mathrm{Rb}-\mathrm{Ro})}{\alpha} & -2in\mathrm{N} \\ -in(\mathrm{N}^2+1) & 2\alpha & 2in\mathrm{N} & -2\alpha\mathrm{N} \\ -\dfrac{2\mathrm{N}(1+\mathrm{Rb}-\mathrm{Ro})}{\alpha} & -2in\mathrm{N} & \dfrac{2(\mathrm{N}^2\mathrm{Rb}+\mathrm{N}^2+2\mathrm{Rb}-3\mathrm{Ro})}{\alpha} & in(\mathrm{N}^2+1) \\ 2in\mathrm{N} & -2\alpha\mathrm{N} & -in(\mathrm{N}^2+1) & 2\alpha\mathrm{N}^2 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Следовательно, задача на собственные значения

$$\mathbf{A}_0\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$$

может быть записана в гамильтоновой форме с гамильтонианом $\mathbf{H}_0$ (см. [27, 62]):

$$\mathbf{H}_0\mathbf{z} = i^{-1}\mathbf{G}\lambda\mathbf{z}. \tag{4.3}$$

Из фундаментальной симметрии

$$\mathbf{A}_0 = -\mathbf{G}^{-1}\overline{\mathbf{A}_0}^T\mathbf{G}, \tag{4.4}$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение, следует симметрия спектра матрицы $\mathbf{A}_0$ относительно мнимой оси (см. [27, 62]).

Таким образом, полная задача на собственные значения (3.5) является следующим диссипативным возмущением гамильтоновой задачи (4.3) на собственные значения:

$$(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1)\mathbf{z} = i^{-1}\mathbf{G}\lambda\mathbf{z}, \tag{4.5}$$

где $\mathbf{H}_1 = -i\mathbf{G}\mathbf{A}_1$ — это комплексная неэрмитова матрица

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\mathrm{Re}} & 0 & -\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{Rm}} \\ -\dfrac{1}{\mathrm{Re}} & 0 & \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{Rm}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{Re}} & 4i\dfrac{\mathrm{Ro}-\mathrm{Rb}}{\alpha n\mathrm{Rm}} & \dfrac{1}{\mathrm{Rm}} \\ \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{Re}} & 0 & -\dfrac{1}{\mathrm{Rm}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

5. Локальная линейная устойчивость идеальной системы

Идеальная система (4.3) без вязкости и сопротивления имеет характеристический полином

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^4 + 4in\lambda^3 + \left(2\mathrm{N}^2n^2 - 6n^2 + 4 + 4\delta\right)\lambda^2 + \\ &+ 4in\left(2\delta + (n^2-2)(\mathrm{N}^2-1)\right)\lambda + n^2(\mathrm{N}^2-1)\left(4\delta + (n^2-4)(\mathrm{N}^2-1)\right), \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $\delta = \mathrm{Ro} - \mathrm{Rb}\mathrm{N}^2$.

Дисперсионное соотношение, соответствующее (5.1), можно представить в более компактном виде (см. [21, 33, 34, 47, 64]):

$$4\delta((i\lambda-n)^2 - n^2\mathrm{N}^2) + 4(i\lambda - n + n\mathrm{N}^2)^2 - ((i\lambda-n)^2 - n^2\mathrm{N}^2)^2 = 0. \tag{5.2}$$

Если $\delta = 0$, т. е. $\mathrm{Ro} = \mathrm{Rb}\mathrm{N}^2$, то уравнение (5.2) упрощается, а его корни имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -i(n+1) \pm i\sqrt{\mathrm{N}^2(n+1)^2 + 1 - \mathrm{N}^2}, \tag{5.3}$$

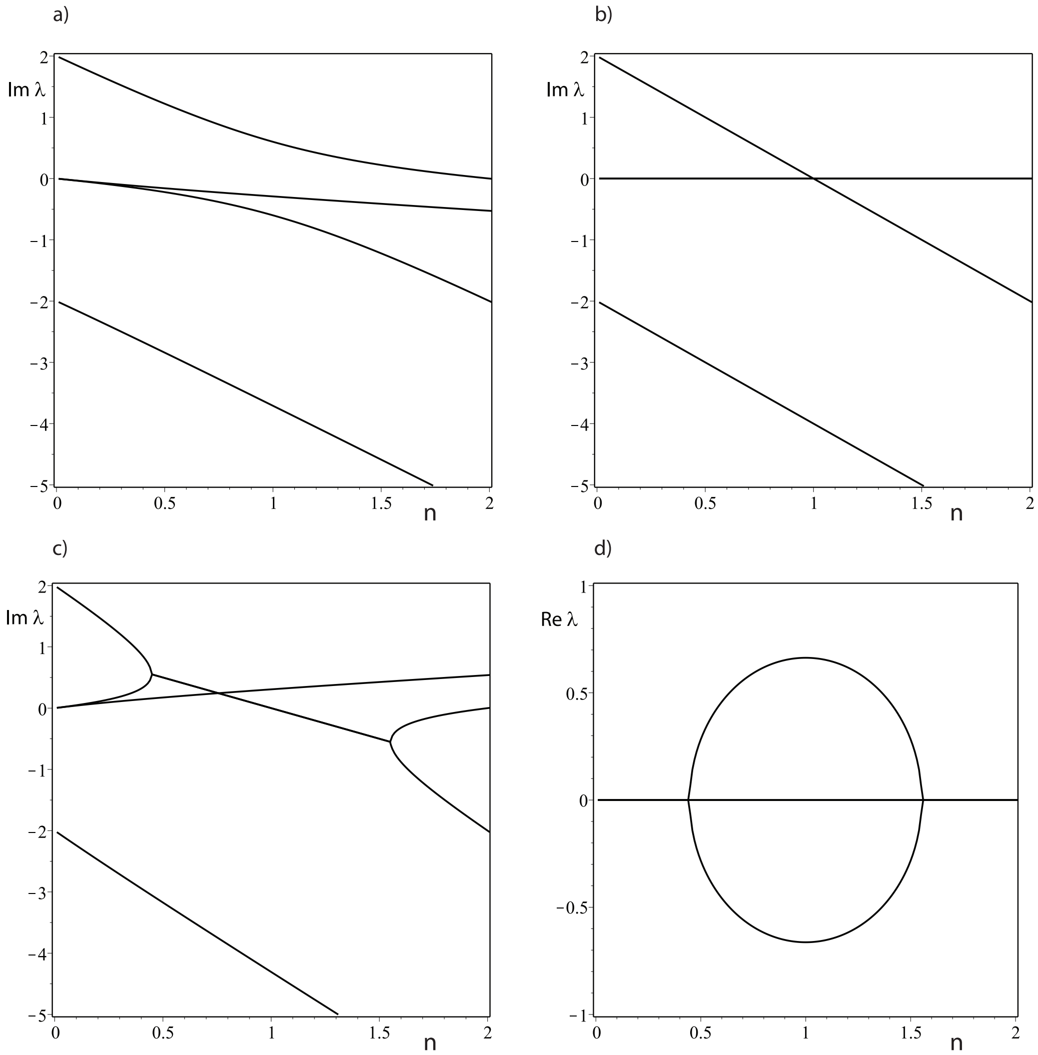

Рис. 1. Частоты и скорости роста корней (5.3) и (5.4) дисперсионного соотношения (5.2) при ограничении $\mathrm{Ro} = \mathrm{Rb}\mathrm{N}^2$ для (a) $\mathrm{N} = 0{,}8$, (b) $\mathrm{N} = 1$ и (c,d) $\mathrm{N} = 1{,}2$.

$$\lambda_{3,4} = -i(n-1) \pm i\sqrt{\mathrm{N}^2(n-1)^2 + 1 - \mathrm{N}^2}. \tag{5.4}$$

Эти корни показаны на рис. 1 для разных значений N. Если $0 \leqslant \mathrm{N} < 1$, то собственные значения мнимы и просты для всех $0 < n \leqslant 2$; при $n = 0$ ноль является двукратным собственным значением с жордановым блоком и парой простых мнимых собственных значений, как показано на рис. 1(a). Если $\mathrm{N} = 1$, то ноль является двукратным собственным значением, полупростым для всех n из $(0, 2)$, кроме случая $n = 1$; в этом случае у него есть жорданов блок второго порядка. Две остальные ветви собственных значений состоят из простых собственных значений, как показано на рис. 1(b), и соответствуют значениям $\mathrm{N} = 1$ и $\mathrm{Ro} = \mathrm{Rb}$, что включает в себя и чандрасекаровскую эквипартицию. Если $\mathrm{N} > 1$, то возникает пузырь комплексно сопряженных собственных значений, как показано на рис. 1(c,d); случай, когда n принадлежит области, ограниченной кривой

$$\mathrm{N} = \frac{1}{\sqrt{1-(n-1)^2}}, \tag{5.5}$$

показан на рис. 2(a).

На границе (5.5) имеем двойные мнимые собственные значения с жордановым блоком второго порядка. Следовательно, на пересечении маргинальная устойчивость пропадает за счет бифуркации Гамильтона—Хопфа, как показано на рис. 1(c,d). Если $\mathrm{N} = 1$ и $n = 1$, то двойное собственное значение с жордановым блоком — это нуль. Если его разбить на фиксированное $\mathrm{N} = 1$ и переменное n, то полученная функция будет линейной по n; она вырождается, поскольку это происходит вдоль направления, касательного к границе устойчивости. Отметим, что такой тип разбиения,

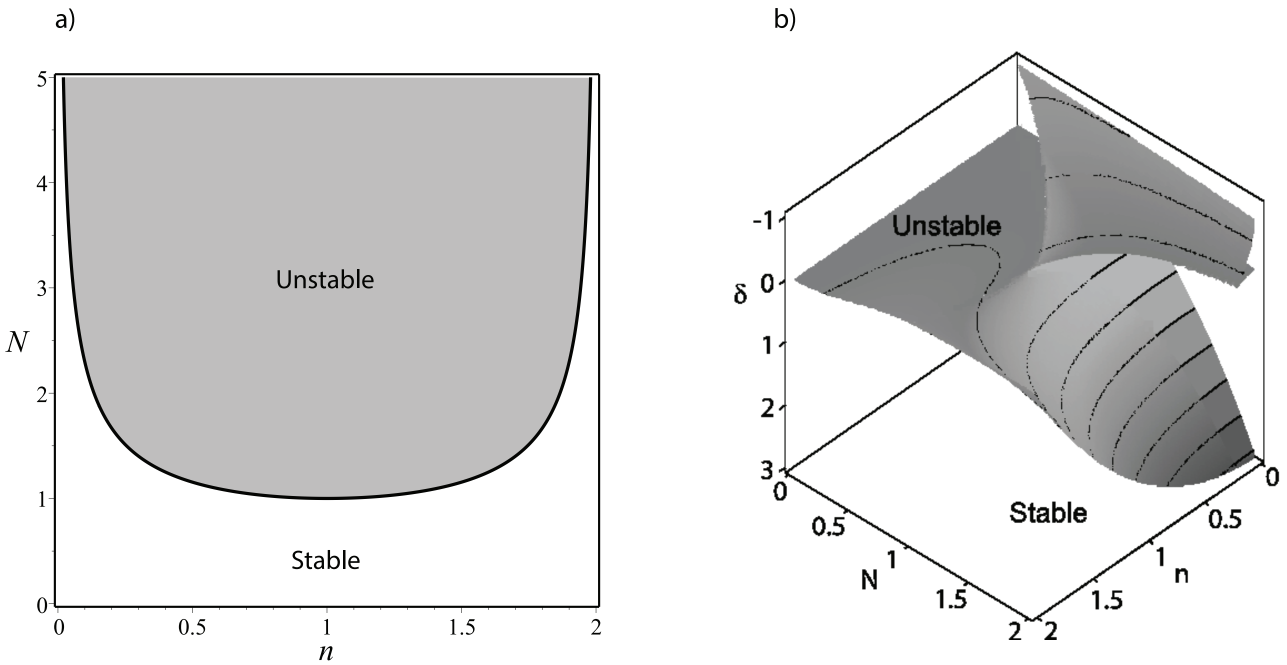

Рис. 2. (a) Диаграмма устойчивости идеальной системы (плоский случай), удовлетворяющей ограничению $\delta := \mathrm{Ro} - \mathrm{Rb}\mathrm{N}^2 = 0$, с границей (5.5) является сечением полной диаграммы устойчивости (b) с границей (5.6), имеющей особенность типа «ласточкин хвост» при $n = 1$, $\mathrm{N} = 1$ и $\delta = 0$.

равно как и соответствующие изменения кривых собственных значений, показанные на рис. 1, аналитически описан в [27, 28].

На рис. 2(a) показана только часть диаграммы неустойчивости полинома (5.1). удовлетворяющего ограничению $\delta = 0$. Чтобы представить себе. что происходит при $\delta \neq 0$, рассмотрим дискриминантное множество полинома (5.1):

$$\begin{aligned} 4\delta^5 &+ (\mathrm{N}^2n^2 - 4\mathrm{N}^2 + 16)\delta^4 + (8\mathrm{N}^4n^2 + 12\mathrm{N}^2n^2 - 12\mathrm{N}^2 + 24)\delta^3 + \\ &+ (2\mathrm{N}^6n^4 - 8\mathrm{N}^6n^2 + 2\mathrm{N}^4n^4 - 22\mathrm{N}^4n^2 + 22\mathrm{N}^2n^2 - 12\mathrm{N}^2 + 16)\delta^2 + \\ &+ 4(\mathrm{N}^2 - 1)(\mathrm{N}^6n^4 - 2\mathrm{N}^4n^4 + 5\mathrm{N}^4n^2 - 3\mathrm{N}^2n^2 - 1)\delta + \\ &+ \mathrm{N}^2n^2(\mathrm{N}^2 - 1)^2(\mathrm{N}^4n^4 - 4\mathrm{N}^4n^2 + 2\mathrm{N}^2n^2 + 1) = 0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Уравнение (5.6) определяет сингулярную поверхность в пространстве параметров n, N, δ с особенностью типа «ласточкин хвост» в точке $n = 1$, $\mathrm{N} = 1$, $\delta = 0$, как показано на рис. 2(b). Гладкие части этой поверхности соответствуют двойным мнимым собственным значениям с жордановыми блоками второго порядка; на двух ребрах возврата имеем тройные мнимые собственные значения с жордановыми блоками третьего порядка.

Для чандрасекаровской эквипартиции имеем $\mathrm{N} = 1$ и $\delta = \mathrm{Ro} - \mathrm{Rb} = 0$. следовательно, имеет смысл рассмотреть сечение полной диаграммы устойчивости, показанной на рис. 2(b), плоскостью $\mathrm{N} = 1$. Из (5.6) получаем границу на плоскости (n, δ):

$$n = \frac{1}{4}\sqrt{-2\delta^2 - 40\delta + 16 \pm 2\sqrt{\delta(\delta - 8)^3}}. \tag{5.7}$$

Результат изображен на рис. 3(a), где область неустойчивости плоской идеальной системы закрашена светло-серым цветом. Отметим, что стабилизация при $n = 0$ и $\delta > -1$ соответствует критерию Майкла (см. [45]), а ветвь границы устойчивости при $n > 1$ имеет следующее асимптотическое представление при $\delta \to -\infty$:

$$n = 2\sqrt{-\delta} + O\left(\frac{1}{\sqrt{-\delta}}\right); \tag{5.8}$$

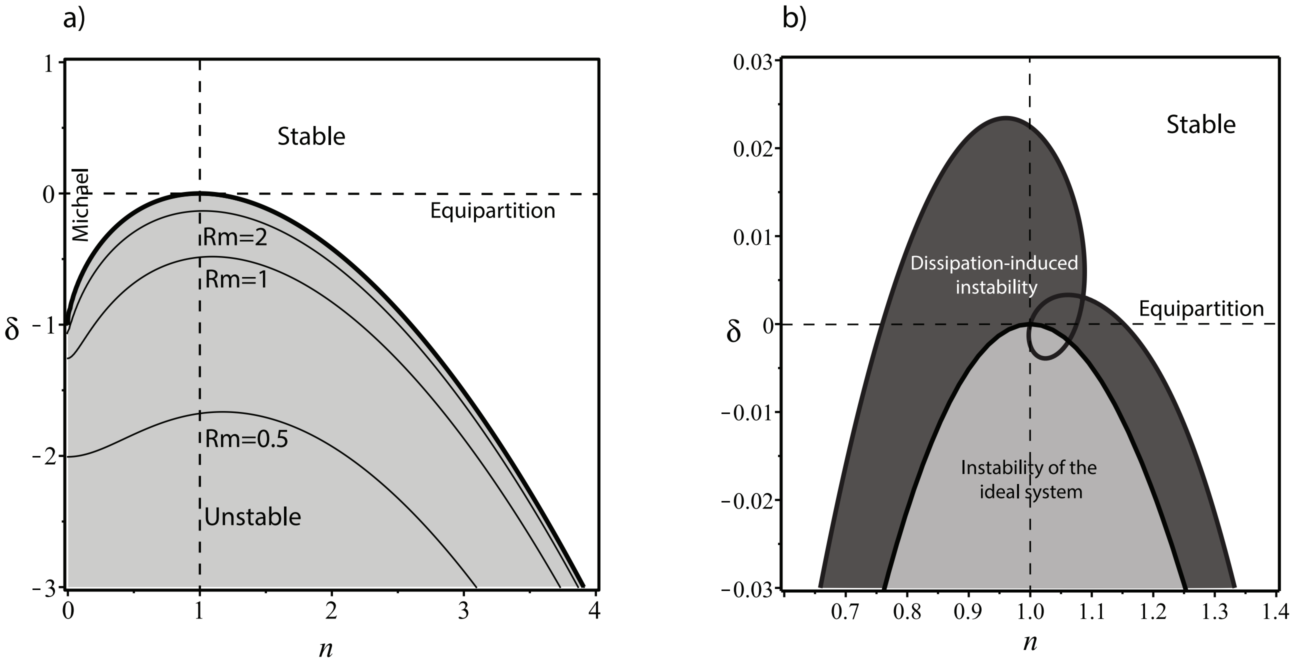

Рис. 3. (a) При $\mathrm{N} = 1$ область неустойчивости идеальной системы с границей (5.7) закрашена светло-серым цветом и показаны границы (6.3) областей неустойчивости диссипативной системы с $\mathrm{Re} = \mathrm{Rm}$, которые при $\mathrm{Rm} \to \infty$ стремятся к границе области неустойчивости идеальной системы. (b) При $\mathrm{N} = 1$ область неустойчивости идеальной системы (закрашена светло-серым цветом) сравнивается с областью неустойчивости диссипативной системы (закрашена темно-серым цветом) для $\mathrm{Re} = 10^6$, $\mathrm{Rm} = 10$ и $\mathrm{Pm} = 10^{-5}$, чтобы показать неустойчивость, вызванную диссипацией.

это полностью соответствует порогу азимутального нарушения устойчивости магнитного поля или вращения (1.10) в идеальном случае (см. [47, 64]).

Прямая $\delta = 0$, которой принадлежит эквипартиция, находится в области устойчивости идеальной системы, как показано на рис. 3(a). Соответствующие кривые мнимых собственных значений показаны на рис. 4(a); видно, что они пересекаются при $n = 1$, т. е. в случае, когда существуют чисто мнимое собственное значение, собственное значение — простой нуль и собственное значение — двойной нуль с жордановым блоком второго порядка. При $\delta > 0$ пересечения нет, как показано на рис. 4(b), и все собственные значения мнимы (маргинальная устойчивость). При $\delta < 0$ кривые собственных значений сливаются и образуется пузырь комплексных собственных значений, как показано на рис. 4(c,d). Неустойчивость имеет место в результате бифуркации Гамильтона—Хопфа на пороге (см. (5.7)).

6. Азимутальная магнитовращательная неустойчивость при малом Pm как неустойчивость, порожденная диссипацией

Рассмотрим влияние вязкости и сопротивления жидкости на порог неустойчивости идеальной системы. Вначале заметим, что при $\mathrm{Ro} = \mathrm{Rb}\mathrm{N}^2$ и $\mathrm{Re} = \mathrm{Rm}$ корни характеристического полинома (3.7) могут быть найдены в явном виде:

$$\lambda_{1,2} = -i(n+1) - \frac{1}{\mathrm{Rm}} \pm i\sqrt{\mathrm{N}^2(n+1)^2 + 1 - \mathrm{N}^2}, \tag{6.1}$$

$$\lambda_{3,4} = -i(n-1) - \frac{1}{\mathrm{Rm}} \pm i\sqrt{\mathrm{N}^2(n-1)^2 + 1 - \mathrm{N}^2}. \tag{6.2}$$

Это означает, что при $\mathrm{Pm} = 1$ чисто мнимые собственные значения (5.3) и (5.4) сдвигаются диссипацией влево на комплексной плоскости (асимптотическая устойчивость). Кроме того, если

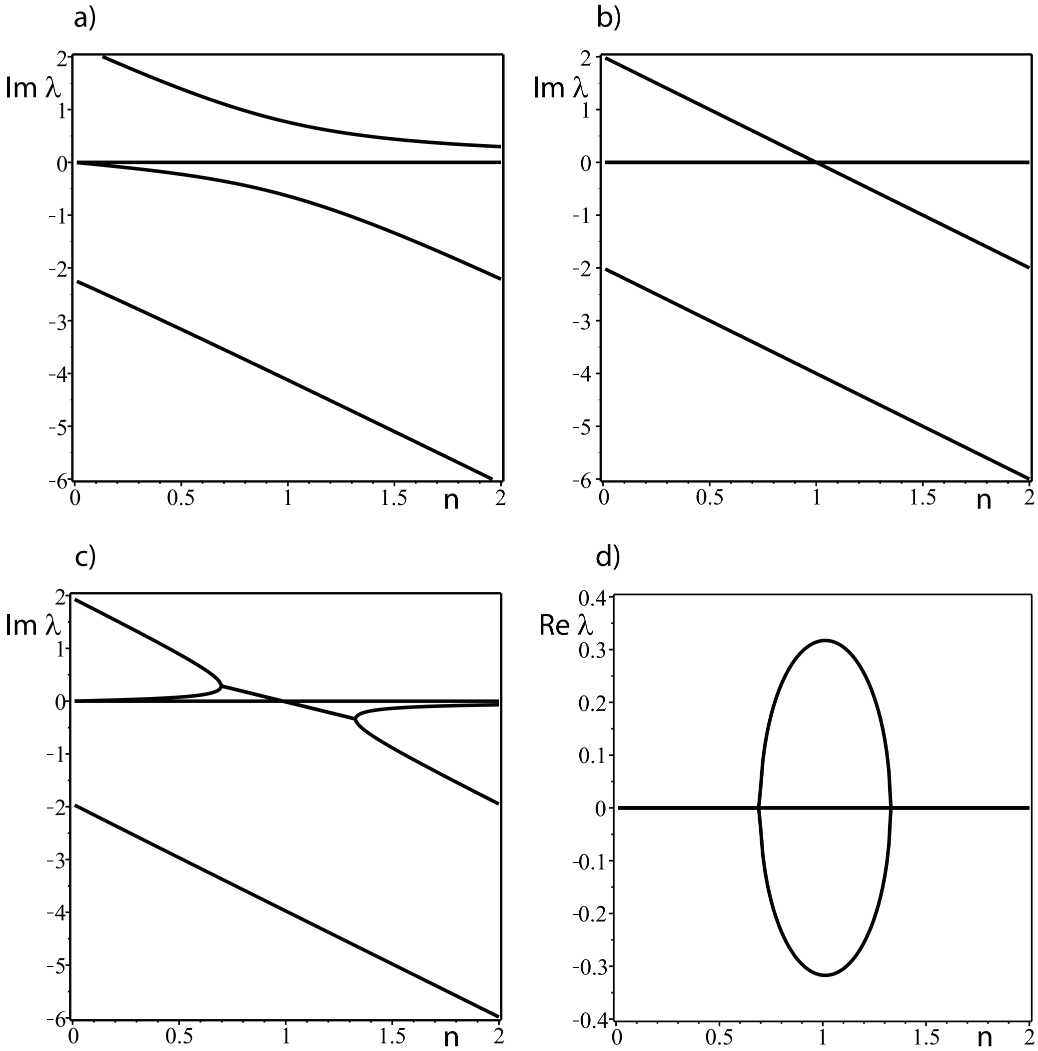

Рис. 4. Частоты и скорости роста корней дисперсионного соотношения (5.2) при выполнении ограничения $\mathrm{N} = 1$ для (a) $\mathrm{Ro} = -0{,}75$ и $\mathrm{Rb} = -1$ ($\delta = 0{,}25$), (b) $\mathrm{Ro} = -0{,}75$ и $\mathrm{Rb} = -0{,}75$ ($\delta = 0$) и (c,d) $\mathrm{Ro} = -0{,}75$ и $\mathrm{Rb} = -0{,}7$ ($\delta = -0{,}05$).

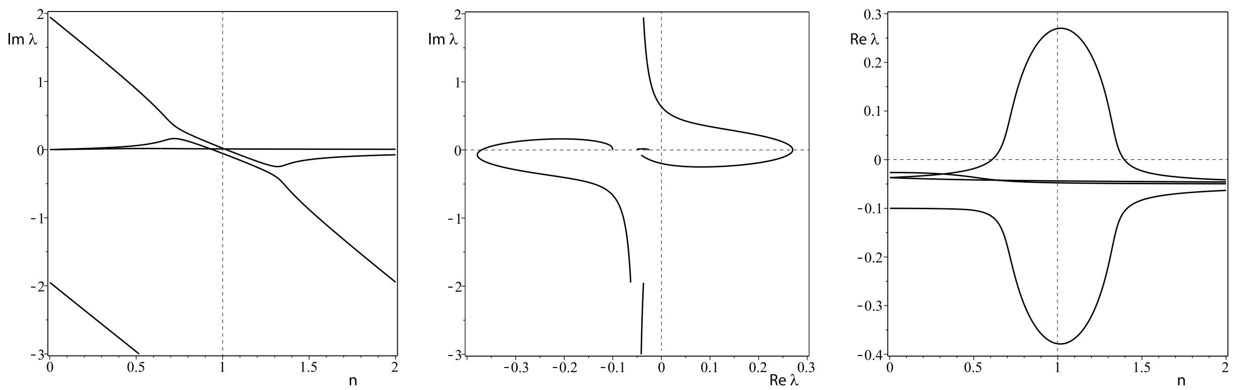

Рис. 5. Частоты и скорости роста в диссипативной системе при $\mathrm{Re} = 10^6$, $\mathrm{Rm} = 10$, $\mathrm{Pm} = 10^{-5}$ и $\mathrm{Ro} = -0{,}75$, $\mathrm{Rb} = -0{,}7$, $\mathrm{N} = 1$. Увеличение интервала неустойчивости из-за несовершенного объединения мод в случае, когда Re и Rm не равны друг другу.

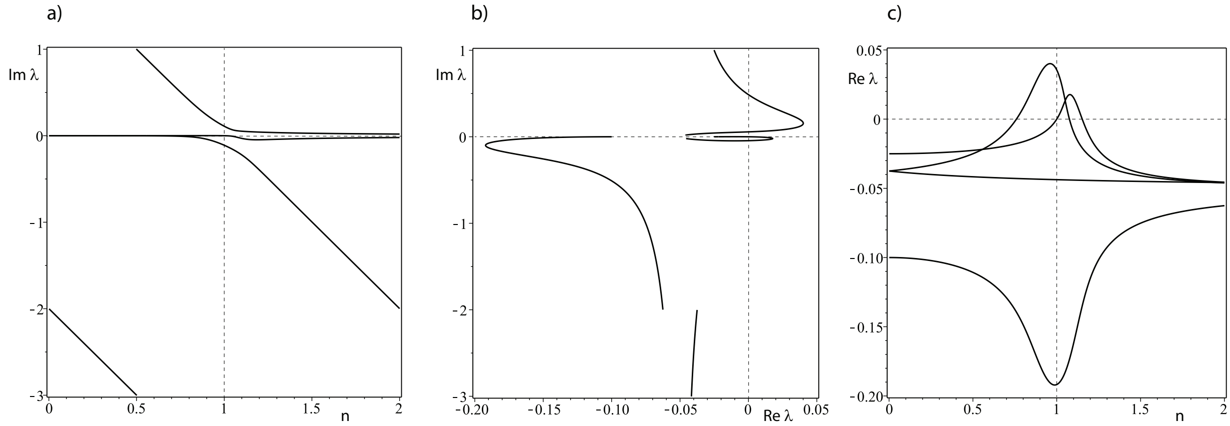

Рис. 6. Частоты и скорости роста в диссипативной системе при $\mathrm{Re} = 10^6$, $\mathrm{Rm} = 10$, $\mathrm{Pm} = 10^{-5}$, $\mathrm{Ro} = -0{,}75$, $\mathrm{Rb} = -0{,}75$, $\mathrm{N} = 1$. Отсутствие пересечения частот и положительные скорости роста эквипартиции.

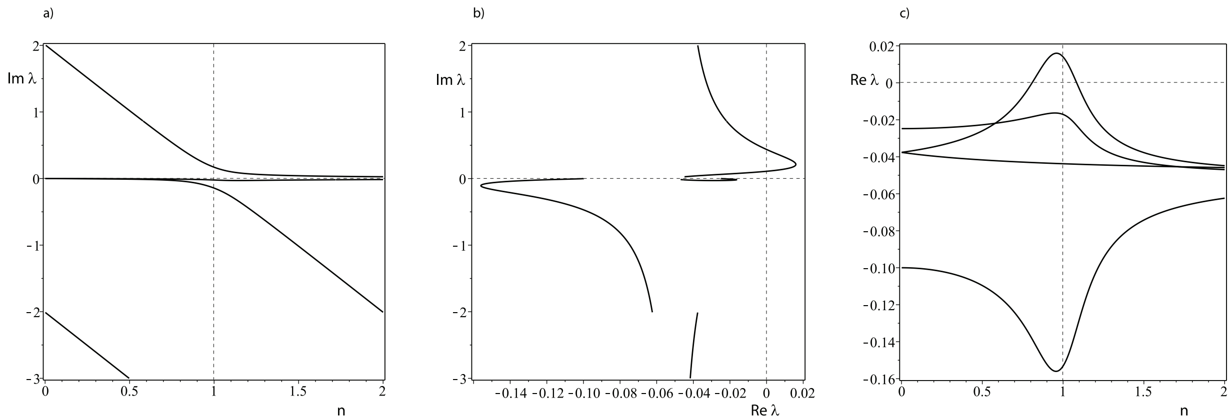

Рис. 7. Частоты и скорости роста в диссипативной системе при $\mathrm{Re} = 10^6$, $\mathrm{Rm} = 10$, $\mathrm{Pm} = 10^{-5}$, $\mathrm{Ro} = -0{,}75$, $\mathrm{Rb} = -0{,}76$, $\mathrm{N} = 1$. Порожденная диссипацией неустойчивость для случая, когда параметры находятся в области устойчивости для идеальной системы.

гидродинамическое и магнитное числа Рейнольдса равны друг другу, то диссипация уменьшает область неустойчивости.

Мы демонстрируем это явление, применяя критерий Бильхарца (см. [5]) к полиному (3.7) и полагая $\mathrm{Re} = \mathrm{Rm}$, $\mathrm{N} = 1$ и $\delta = \mathrm{Ro} - \mathrm{Rb}$, чтобы получить следующую границу области устойчивости:

$$4\delta^3 + \left(n^2 + 12 + \frac{9}{\mathrm{Rm}^2}\right)\delta^2 + 2\left(10n^2 + 6 + \frac{3n^2}{\mathrm{Rm}^2} + \frac{9}{\mathrm{Rm}^2} + \frac{3}{\mathrm{Rm}^4}\right)\delta + \\ + \left(4 + \frac{1}{\mathrm{Rm}^2}\right)\left((n+1)^2 + \frac{1}{\mathrm{Rm}^2}\right)\left((n-1)^2 + \frac{1}{\mathrm{Rm}^2}\right) = 0. \tag{6.3}$$

Из рис. 3(a) видно, что при $\mathrm{Pm} = 1$ плоская область неустойчивости системы с диссипацией меньше, чем область неустойчивости идеальной системы, растет с ростом Rm и стремится к области неустойчивости идеальной системы при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности.

Изучим вопрос, что происходит с порогом устойчивости идеальной системы, если отношение вязкости к сопротивлению меньше единицы и особенно если $\mathrm{Pm} \ll 1$. На рис. 3(b) изображена (темно-серым цветом) область неустойчивости системы с вязкостью и сопротивлением, в которой

$\mathrm{N} = 1$, $\mathrm{Re} \gg \mathrm{Rm}$ и $\mathrm{Pm} = 10^{-5}$. Область, закрашенная светло-серым цветом, является частью области неустойчивости идеальной системы, закрашенной светло-серым цветом на рис. 3(a). Темно-серым цветом на рис. 3(b) закрашена область неустойчивости для тех значений параметров, которые соответствуют маргинальной устойчивости идеальной системы. Прямая $\delta = 0$, которой принадлежит чандрасекаровская эквипартиция, пересекает область неустойчивости, вызванной диссипацией. Если Pm фиксировано, а Re и Rm бесконечно возрастают, то область неустойчивости, вызванной диссипацией, расширяется и стремится к некоторому пределу. Например, при $\mathrm{Ro} = -\dfrac{3}{4}$ разность $\delta := \mathrm{Ro} - \mathrm{Rb}$ не может превзойти величину $-\dfrac{3}{4} + \dfrac{25}{32} = \dfrac{1}{32} = 0{,}03125$. Указанная величина может быть достигнута только в предельном безиндукционном случае $\mathrm{Pm} = 0$ (см. [31, 33, 34]). Собственные значения диссипативной системы, показанной на рис. 5–7, показывают расширение области маргинальной устойчивости под воздействием двух различных диссипативных механизмов: вязкости и сопротивления. В отличие от случая, в котором коэффициенты вязкости и сопротивления совпадают, преобладание сопротивления над вязкостью действительно приводит к азимутальным нарушениям устойчивости магнитного поля или вращения для тех значений параметров, для которых указанные нарушения для идеальной системы запрещены. В частности, несовпадение вязкости и сопротивления нарушает устойчивость чандрасекаровской эквипартиции. Представляет интерес дальнейшее изучение этого эффекта с использованием фундаментальной симметрии гамильтоновой системы, чтобы классифицировать режимы идеальной системы и понять, какое воздействие на режимы с положительным или отрицательным симплектическим знаком (см. [27, 62]) могут оказывать возмущения вязкости и сопротивления. Эти вопросы будут изучены впоследствии.

Автор признателен С. Ю. Доброхотову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* О матрицах, зависящих от параметра// Усп. мат. наук. — 1971. — *26*, № 2. — С. 101–114.
2. *Balbus S. A., Hawley J. F.* A powerful local shear instability in weakly magnetized disks 1. Linear analysis// Astrophys. J. — 1991. — *376*. — С. 214–222.
3. *Balbus S. A., Hawley J. F.* A powerful local shear instability in weakly magnetized disks 4. Nonaxisymmetric perturbations// Astrophys. J. — 1992. — *400*. — С. 214–222.
4. *Beletsky V. V., Levin E. M.* Stability of a ring of connected satellites// Acta Astron. — 1985. — *12*. — С. 765–769.
5. *Bilharz H.* Bemerkung zu einem Satze von Hurwitz// Z. Angew. Math. Mech. — 1944. — *24*. — С. 77–82.
6. *Bloch A. M., Krishnaprasad P. S., Marsden J. E., Ratiu T. S.* Dissipation-induced instabilities// Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire — 1994. — *11*. — С. 37–90.
7. *Bogoyavlenskij O. I.* Unsteady equipartition MHD solutions// J. Math. Phys. — 2004. — *45*. — С. 381–390.
8. *Boldyrev S., Huynh D., Pariev V.* Analog of astrophysical magnetorotational instability in a Couette–Taylor flow of polymer fluids// Phys. Rev. E. — 2009. — *80*. — 066310.
9. *Bolotin V. V.* Nonconservative problems of the theory of elastic stability. — Oxford–London–New York–Paris: Pergamon Press, 1963.
10. *Bottema O.* The Routh–Hurwitz condition for the biquadratic equation// Indag. Math. — 1956. — *18*. — С. 403–406.
11. *Bridges T. J., Dias F.* Enhancement of the Benjamin–Feir instability with dissipation// Phys. Fluids. — 2007. — *19*. — 104104.
12. *Chandrasekhar S.* On the stability of the simplest solution of the equations of hydromagnetics// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1956. — *42*. — С. 273–276.
13. *Chandrasekhar S.* The stability of nondissipative Couette flow in hydromagnetics// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1960. — *46*. — С. 253–257.
14. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. — Oxford: Oxford University Press, 1961.
15. *Chandrasekhar S.* A scientific autobiography: S. Chandrasekhar. — Singapore: World Scientific, 2010.
16. *Dobrokhotov S., Shafarevich A.* Parametrix and the asymptotics of localized solutions of the Navier–Stokes equations in R^3, linearized on a smooth flow// Math. Notes. — 1992. — *51*. — С. 47–54.
17. *Ebrahimi F., Lefebvre B., Forest C. B., Bhattacharjee A.* Global Hall-MHD simulations of magnetorotational instability in the plasma Couette flow experiment// Phys. Plasmas. — 2011. — *18*. — 062904.

18. *Eckhardt B., Yao D.* Local stability analysis along Lagrangian paths// Chaos Solitons Fractals. — 1995. — *5*, №11. — С. 2073–2088.
19. *Eckhoff K. S.* On stability for symmetric hyperbolic systems, I// J. Differential Equations. — 1981. — *40*. — С. 94–115.
20. *Eckhoff K. S.* Linear waves and stability in ideal magnetohydrodynamics// Phys. Fluids. — 1987. — *30*. — С. 3673–3685.
21. *Friedlander S., Vishik M. M.* On stability and instability criteria for magnetohydrodynamics// Chaos. — 1995. — *5*. — С. 416–423.
22. *Golovin S. V., Krutikov M. K.* Complete classification of stationary flows with constant total pressure of ideal incompressible infinitely conducting fluid// J. Phys. A. — 2012. — *45*. — 235501.
23. *Ji H., Balbus S.* Angular momentum transport in astrophysics and in the lab// Phys. Today. — 2013. — *August 2013*. — С. 27–33.
24. *Kapitsa P. L.* Stability and passage through the critical speed of the fast spinning rotors in the presence of damping// Z. Tech. Phys. — 1939. — *9*. — С. 124–147.
25. *Kirillov O. N.* Campbell diagrams of weakly anisotropic flexible rotors// Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 2009. — *465*. — С. 2703–2723.
26. *Kirillov O. N.* Stabilizing and destabilizing perturbations of PT-symmetric indefinitely damped systems// Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 2013. — *371*. — 20120051.
27. *Kirillov O. N.* Nonconservative stability problems of modern physics. — Berlin–Boston: De Gruyter, 2013.
28. *Kirillov O. N., Seyranian A. P.* Metamorphoses of characteristic curves in circulatory systems// J. Appl. Math. Mech. — 2002. — *66*, №3. — С. 371–385.
29. *Kirillov O. N., Stefani F.* On the relation of standard and helical magnetorotational instability// Astrophys. J. — 2010. — *712*. — С. 52–68.
30. *Kirillov O. N., Stefani F.* Standard and helical magnetorotational instability: How singularities create paradoxal phenomena in MHD// Acta Appl. Math. — 2012. — *120*. — С. 177–198.
31. *Kirillov O. N., Stefani F.* Extending the range of the inductionless magnetorotational instability// Phys. Rev. Lett. — 2013. — *111*. — 061103.
32. *Kirillov O. N., Stefani F., Fukumoto Y.* A unifying picture of helical and azimuthal MRI, and the universal significance of the Liu limit// Astrophys. J. — 2012. — *756*. — С. 83.
33. *Kirillov O. N., Stefani F., Fukumoto Y.* Instabilities of rotational flows in azimuthal magnetic fields of arbitrary radial dependence// Fluid Dyn. Res. — 2014. — *46*. — 031403.
34. *Kirillov O. N., Stefani F., Fukumoto Y.* Local instabilities in magnetized rotational flows: A short-wavelength approach// J. Fluid Mech. — 2014. — *760*. — С. 591–633.
35. *Kirillov O. N., Verhulst F.* Paradoxes of dissipation-induced destabilization or who opened Whitney's umbrella?// Z. Angew. Math. Mech. — 2010. — *90*, №6. — С. 462–488.
36. *Krechetnikov R., Marsden J. E.* Dissipation-induced instabilities in finite dimensions// Rev. Modern Phys. — 2007. — *79*, №2. — С. 519–553.
37. *Krueger E. R., Gross A., Di Prima R. C.* On relative importance of Taylor-vortex and nonaxisymmetric modes in flow between rotating cylinders// J. Fluid Mech. — 1966. — *24*, №3. — С. 521–538.
38. *Kucherenko V. V., Kryvko A.* Interaction of Alfvén waves in the linearized system of magnetohydrodynamics for an incompressible ideal fluid// Russ. J. Math. Phys. — 2013. — *20*, №1. — С. 56–67.
39. *Landman M. J., Saffman P. G.* The three-dimensional instability of strained vortices in a viscous fluid// Phys. Fluids. — 1987. — *30*. — С. 2339–2342.
40. *Langford W. F.* Hopf meets Hamilton under Whitney's umbrella// Solid Mech. Appl. — 2003. — *110*. — С. 157–165.
41. *Latter H. N., Rein H., Ogilvie G. I.* The gravitational instability of a stream of coorbital particles// Mon. Not. R. Astron. Soc. — 2012. — *423*. — С. 1267–1276.
42. *Liu W., Goodman J., Herron I., Ji H.* Helical magnetorotational instability in magnetized Taylor–Couette flow// Phys. Rev. E. — 2006. — *74*, №1. — 056302.
43. *MacKay R. S.* Movement of eigenvalues of Hamiltonian equilibria under non-Hamiltonian perturbation// Phys. Lett. A. — 1991. — *155*. — С. 266–268.
44. *Maddocks J. H., Overton M. L.* Stability theory for dissipatively perturbed Hamiltonian systems// Comm. Pure Appl. Math. — 1995. — *48*. — С. 583–610.
45. *Michael D. H.* The stability of an incompressible electrically conducting fluid rotating about an axis when current flows parallel to the axis// Mathematika. — 1954. — *1*. — С. 5–50.
46. *Montgomery D.* Hartmann, Lundquist, and Reynolds: The role of dimensionless numbers in nonlinear magnetofluid behavior// Plasma Phys. Control. Fusion. — 1993. — *35*. — С. B105–B113.

47. *Ogilvie G. I., Pringle J. E.* The nonaxisymmetric instability of a cylindrical shear flow containing an azimuthal magnetic field// Mon. Not. R. Astron. Soc. — 1996. — *279.* — С. 152–164.
48. *Ogilvie G. I., Potter A. T.* Magnetorotational-type instability in Couette–Taylor flow of a viscoelastic polymer liquid// Phys. Rev. Lett. — 2008. — *100.* — 074503.
49. *Ogilvie G. I., Proctor M. R. E.* On the relation between viscoelastic and magnetohydrodynamic flows and their instabilities// J. Fluid Mech. — 2003. — *476.* — С. 389–409.
50. *Rayleigh J. W. S.* On the dynamics of revolving fluids// Proc. R. Soc. Lond. A. — 1917. — *93.* — С. 148–154.
51. *Rüdiger G., Gellert M., Schultz M., Hollerbach R.* Dissipative Taylor–Couette flows under the influence of helical magnetic fields// Phys. Rev. E. — 2010. — *82.* — 016319.
52. *Rüdiger G., Gellert M., Schultz M., Hollerbach R., Stefani F.* The azimuthal magnetorotational instability (AMRI)// Mon. Not. R. Astron. Soc. — 2014. — *438.* — С. 271–277.
53. *Rüdiger G., Kitchatinov L., Hollerbach R.* Magnetic processes in astrophysics. — New York: Wiley-VCH, 2013.
54. *Seilmayer M., Galindo V., Gerbeth G., Gundrum T., Stefani F., Gellert M., Rüdiger G., Schultz M., Hollerbach R.* Experimental evidence for nonaxisymmetric magnetorotational instability in an azimuthal magnetic field// Phys. Rev. Lett. — 2014. — *113.* — 024505.
55. *Smith D. M.* The motion of a rotor carried by a flexible shaft in flexible bearings// Proc. R. Soc. Lond. A. — 1933. — *142.* — С. 92–118.
56. *Squire J., Bhattacharjee A.* Nonmodal growth of the magnetorotational instability// Phys. Rev. Lett. — 2014. — *113.* — 025006.
57. *Stefani F., Gailitis A., Gerbeth G.* Magnetohydrodynamic experiments on cosmic magnetic fields// Z. Angew. Math. Mech. — 2008. — *88.* — С. 930–954.
58. *Swaters G. E.* Modal interpretation for the Ekman destabilization of inviscidly stable baroclinic flow in the Phillips model// J. Phys. Oceanogr. — 2010. — *40.* — С. 830–839.
59. *Thorpe S. A., Smyth W. D., Li L.* The effect of small viscosity and diffusivity on the marginal stability of stably stratified shear flows// J. Fluid Mech. — 2013. — *731.* — С. 461–476.
60. *Velikhov E. P.* Stability of an ideally conducting liquid flowing between cylinders rotating in a magnetic field// Sov. Phys. JETP-USSR — 1959. — *9.* — С. 995–998.
61. *Vishik M., Friedlander S.* Asymptotic methods for magnetohydrodynamic instability// Quart. Appl. Math. — 1998. — *56.* — С. 377–398.
62. *Yakubovich V. A., Starzhinskii V. M.* Linear differential equations with periodic coefficients. — New York: Wiley, 1975.
63. *Ziegler H.* Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik// Ing.-Arch. — 1952. — *20.* — С. 49–56.
64. *Zou R., Fukumoto Y.* Local stability analysis of the azimuthal magnetorotational instability of ideal MHD flows// Prog. Theor. Exp. Phys. — 2014. — 113J01.

О. Н. Кириллов
Helmholtz-Zentrum Dresden Rossendorf, Дрезден, Германия
E-mail: o.kirillov@hzdr.de

UDC 531.3, 532.5, 537.6

Dissipation-induced instabilities in magnetized flows

© 2016 **O. N. Kirillov**

Abstract. We study local instabilities of a differentially rotating viscous flow of electrically conducting incompressible fluid subject to an external azimuthal magnetic field. The hydrodynamically stable flow can be destabilized by the magnetic field both in the ideal and in the viscous and resistive system giving rise to the azimuthal magnetorotational instability. A special solution to the equations of the ideal magnetohydrodynamics characterized by the constant total pressure, the fluid velocity parallel to the direction of the magnetic field, and by the magnetic and kinetic energies that are finite and equal — the Chandrasekhar equipartition solution — is marginally stable in the absence of viscosity and resistivity. Performing a local stability analysis we find the conditions when the azimuthal magnetorotational instability can be interpreted as a dissipation-induced instability of the Chandrasekhar equipartition solution.

REFERENCES

1. V. I. Arnold, "O matritsakh, zavisyaschikh ot parametra" [On matrices depending on parameter], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1971, **26**, No. 2, 101–114 (in Russian).
2. S. A. Balbus and J. F. Hawley, "A powerful local shear instability in weakly magnetized disks 1. Linear analysis," *Astrophys. J.*, 1991, **376**, 214–222.
3. S. A. Balbus and J. F. Hawley, "A powerful local shear instability in weakly magnetized disks 4. Nonaxisymmetric perturbations," *Astrophys. J.*, 1992, **400**, 610–621.
4. V. V. Beletsky and E. M. Levin, "Stability of a ring of connected satellites," *Acta Astron.*, 1985, **12**, 765–769.
5. H. Bilharz, "Bemerkung zu einem Satze von Hurwitz," *Z. Angew. Math. Mech.*, 1944, **24**, 77–82.
6. A. M. Bloch, P. S. Krishnaprasad, J. E. Marsden, and T. S. Ratiu, "Dissipation-induced instabilities," *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1994, **11**, 37–90.
7. O. I. Bogoyavlenskij, "Unsteady equipartition MHD solutions," *J. Math. Phys.*, 2004, **45**, 381–390.
8. S. Boldyrev, D. Huynh, and V. Pariev, "Analog of astrophysical magnetorotational instability in a Couette–Taylor flow of polymer fluids," *Phys. Rev. E*, 2009, **80**, 066310.
9. V. V. Bolotin, *Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability*, Pergamon Press, Oxford–London–New York–Paris, 1963.
10. O. Bottema, "The Routh–Hurwitz condition for the biquadratic equation," *Indag. Math.*, 1956, **18**, 403–406.
11. T. J. Bridges and F. Dias, "Enhancement of the Benjamin–Feir instability with dissipation," *Phys. Fluids*, 2007, **19**, 104104.
12. S. Chandrasekhar, "On the stability of the simplest solution of the equations of hydromagnetics," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1956, **42**, 273–276.
13. S. Chandrasekhar, "The stability of nondissipative Couette flow in hydromagnetics," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1960, **46**, 253–257.
14. S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford University Press, Oxford, 1961.
15. S. Chandrasekhar, *A Scientific Autobiography: S. Chandrasekhar*, World Scientific, Singapore, 2010.
16. S. Dobrokhotov and A. Shafarevich, "Parametrix and the asymptotics of localized solutions of the Navier–Stokes equations in R^3, linearized on a smooth flow," *Math. Notes*, 1992, **51**, 47–54.
17. F. Ebrahimi, B. Lefebvre, C. B. Forest, and A. Bhattacharjee, "Global Hall-MHD simulations of magnetorotational instability in the plasma Couette flow experiment," *Phys. Plasmas*, 2011, **18**, 062904.
18. B. Eckhardt and D. Yao, "Local stability analysis along Lagrangian paths," *Chaos Solitons Fractals*, 1995, **5** (11), 2073–2088.
19. K. S. Eckhoff, "On stability for symmetric hyperbolic systems, I.," *J. Differ. Equ.*, 1981, **40**, 94–115.
20. K. S. Eckhoff, "Linear waves and stability in ideal magnetohydrodynamics," *Phys. Fluids*, 1987, **30**, 3673–3685.
21. S. Friedlander and M. M. Vishik, "On stability and instability criteria for magnetohydrodynamics," *Chaos*, 1995, **5**, 416–423.
22. S. V. Golovin and M. K. Krutikov, "Complete classification of stationary flows with constant total pressure of ideal incompressible infinitely conducting fluid," *J. Phys. A*, 2012, **45**, 235501.
23. H. Ji and S. Balbus, "Angular momentum transport in astrophysics and in the lab," *Phys. Today*, 2013, **August 2013**, 27–33.
24. P. L. Kapitsa, "Stability and passage through the critical speed of the fast spinning rotors in the presence of damping," *Z. Tech. Phys.*, 1939, **9**, 124–147.

25. O. N. Kirillov, “Campbell diagrams of weakly anisotropic flexible rotors,” *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 2009, **465**, 2703–2723.
26. O. N. Kirillov, “Stabilizing and destabilizing perturbations of PT-symmetric indefinitely damped systems,” *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 2013, **371**, 20120051.
27. O. N. Kirillov, *Nonconservative Stability Problems of Modern Physics*, De Gruyter, Berlin–Boston, 2013.
28. O. N. Kirillov and A. P. Seyranian, “Metamorphoses of characteristic curves in circulatory systems,” *J. Appl. Math. Mech.*, 2002, **66** (3), 371–385.
29. O. N. Kirillov and F. Stefani, “On the relation of standard and helical magnetorotational instability,” *Astrophys. J.*, 2010, **712**, 52–68.
30. O. N. Kirillov and F. Stefani, “Standard and helical magnetorotational instability: How singularities create paradoxal phenomena in MHD,” *Acta Appl. Math.*, 2012, **120**, 177–198.
31. O. N. Kirillov and F. Stefani, “Extending the range of the inductionless magnetorotational instability,” *Phys. Rev. Lett.*, 2013, **111**, 061103.
32. O. N. Kirillov, F. Stefani, and Y. Fukumoto, “A unifying picture of helical and azimuthal MRI, and the universal significance of the Liu limit,” *Astrophys. J.*, 2012, **756**(83).
33. O. N. Kirillov, F. Stefani, and Y. Fukumoto, “Instabilities of rotational flows in azimuthal magnetic fields of arbitrary radial dependence,” *Fluid Dyn. Res.*, 2014, **46**, 031403.
34. O. N. Kirillov, F. Stefani, and Y. Fukumoto, “Local instabilities in magnetized rotational flows: A short-wavelength approach,” *J. Fluid Mech.*, 2014, **760**, 591–633.
35. O. N. Kirillov and F. Verhulst, “Paradoxes of dissipation-induced destabilization or who opened Whitney’s umbrella?” *Z. Angew. Math. Mech.*, 2010, **90** (6), 462–488.
36. R. Krechetnikov and J. E. Marsden, “Dissipation-induced instabilities in finite dimensions,” *Rev. Mod. Phys.*, 2007, **79**, 519–553.
37. E. R. Krueger, A. Gross, and R. C. Di Prima, “On relative importance of Taylor-vortex and nonaxisymmetric modes in flow between rotating cylinders,” *J. Fluid Mech.*, 1966, **24** (3), 521–538.
38. V. V. Kucherenko and A. Kryvko, “Interaction of Alfvén waves in the linearized system of magnetohydrodynamics for an incompressible ideal fluid,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2013, **20** (1), 56–67.
39. M. J. Landman and P. G. Saffman, “The three-dimensional instability of strained vortices in a viscous fluid,” *Phys. Fluids*, 1987, **30**, 2339–2342.
40. W. F. Langford, “Hopf meets Hamilton under Whitney’s umbrella,” *Solid Mech. Appl.*, 2003, **110**, 157–165.
41. H. N. Latter, H. Rein, and G. I. Ogilvie, “The gravitational instability of a stream of coorbital particles,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2012, **423**, 1267–1276.
42. W. Liu, J. Goodman, I. Herron, and H. Ji, “Helical magnetorotational instability in magnetized Taylor–Couette flow,” *Phys. Rev. E*, 2006, **74** (5), 056302.
43. R. S. MacKay, “Movement of eigenvalues of Hamiltonian equilibria under non-Hamiltonian perturbation,” *Phys. Lett. A*, 1991, **155**, 266–268.
44. J. H. Maddocks and M. L. Overton, “Stability theory for dissipatively perturbed Hamiltonian systems,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1995, **48**, 583–610.
45. D. H. Michael, “The stability of an incompressible electrically conducting fluid rotating about an axis when current flows parallel to the axis,” *Mathematika*, 1954, **1**, 45–50.
46. D. Montgomery, “Hartmann, Lundquist, and Reynolds: The role of dimensionless numbers in nonlinear magnetofluid behavior,” *Plasma Phys. Control. Fusion*, 1993, **35**, B105–B113.
47. G. I. Ogilvie and J. E. Pringle, “The nonaxisymmetric instability of a cylindrical shear flow containing an azimuthal magnetic field,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 1996, **279**, 152–164.
48. G. I. Ogilvie and A. T. Potter, “Magnetorotational-type instability in Couette–Taylor flow of a viscoelastic polymer liquid,” *Phys. Rev. Lett.*, 2008, **100**, 074503.
49. G. I. Ogilvie and M. R. E. Proctor, “On the relation between viscoelastic and magnetohydrodynamic flows and their instabilities,” *J. Fluid Mech.*, 2003, **476**, 389–409.
50. J. W. S. Rayleigh, “On the dynamics of revolving fluids,” *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1917, **93**, 148–154.
51. G. Rüdiger, M. Gellert, M. Schultz, and R. Hollerbach, “Dissipative Taylor–Couette flows under the influence of helical magnetic fields,” *Phys. Rev. E*, 2010, **82**, 016319.
52. G. Rüdiger, M. Gellert, M. Schultz, R. Hollerbach, and F. Stefani, “The azimuthal magnetorotational instability (AMRI),” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2014, **438**, 271–277.
53. G. Rüdiger, L. Kitchatinov, and R. Hollerbach, *Magnetic Processes in Astrophysics*, Wiley-VCH, 2013.

54. M. Seilmayer, V. Galindo, G. Gerbeth, T. Gundrum, F. Stefani, M. Gellert, G. Rüdiger, M. Schultz, and R. Hollerbach, "Experimental evidence for nonaxisymmetric magnetorotational instability in an azimuthal magnetic field," *Phys. Rev. Lett.*, 2014, **113**, 024505.
55. D. M. Smith, "The motion of a rotor carried by a flexible shaft in flexible bearings," *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1933, **142**, 92–118.
56. J. Squire and A. Bhattacharjee, "Nonmodal growth of the magnetorotational instability," *Phys. Rev. Lett.*, 2014, **113**, 025006.
57. F. Stefani, A. Gailitis, and G. Gerbeth, "Magnetohydrodynamic experiments on cosmic magnetic fields," *Z. Angew. Math. Mech.*, 2008, **88**, 930–954.
58. G. E. Swaters, "Modal interpretation for the Ekman destabilization of inviscidly stable baroclinic flow in the Phillips model," *J. Phys. Oceanogr.*, 2010, **40**, 830–839.
59. S. A. Thorpe, W. D. Smyth, and L. Li, "The efect of small viscosity and diffusivity on the marginal stability of stably stratified shear flows," *J. Fluid Mech.*, 2013, **731**, 461–476.
60. E. P. Velikhov, "Stability of an ideally conducting liquid flowing between cylinders rotating in a magnetic field," *Sov. Phys. JETP-USSR*, 1959, **9**, 995–998.
61. M. Vishik and S. Friedlander, "Asymptotic methods for magnetohydrodynamic instability," *Quart. Appl. Math.*, 1998, **56**, 377–398.
62. V. A. Yakubovich and V. M. Starzhinskii, *Linear Differential Equations with Periodic Coefficients*. V. 1 and 2, Wiley, New York, 1975.
63. H. Ziegler, "Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik," *Archive Appl. Mech.*, 1952, **20**, 49–56.
64. R. Zou and Y. Fukumoto, "Local stability analysis of the azimuthal magnetorotational instability of ideal MHD flows," *Prog. Theor. Exp. Phys.*, 2014, 113J01.

Oleg N. Kirillov
Helmholtz-Zentrum Dresden Rossendorf, Dresden, Germany
E-mail: o.kirillov@hzdr.de

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 60 (2016). С. 102–113

УДК 517.929

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ В ПОЛУПЛОСКОСТИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2016 г. **А. Б. МУРАВНИК**

Аннотация. Рассматривается задача Дирихле в полуплоскости (с непрерывной и ограниченной граничной функцией) для модельного эллиптического дифференциально-разностного уравнения

$$u_{xx} + au_{xx}(x+h, y) + u_{yy} = 0, \ |a| < 1.$$

Доказывается ее разрешимость в смысле обобщенных функций, строится интегральное представление ее решения и доказывается, что вне граничной гиперплоскости построенное решение удовлетворяет уравнению и в классическом смысле.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Теория дифференциально-разностных эллиптических уравнений в частных производных в настоящее время активно развивается и находит многочисленные приложения. Для задач в ограниченных областях глубокое и полное изложение теории можно найти, например, в [5, 9, 10, 13] (см. также имеющуюся там библиографию). Задачи в неограниченных областях пока исследованы в меньшей степени.

Настоящая работа посвящена задаче Дирихле для модельного дифференциально-разностного сильно эллиптического уравнения в полуплоскости. Как известно, в классическом случае дифференциальных эллиптических уравнений такие задачи корректно разрешимы в естественных (и достаточно широких) классах краевых функций (см., например, [4, 8]), однако обладают и определенным своеобразием; в частности, в качественных свойствах их решений возникают эффекты, характерные, вообще говоря, для параболического случая (см. [7, 12]).

В настоящей работе доказывается разрешимость исследуемой задачи в смысле обобщенных функций, строится интегральное представление решения формулой пуассоновского типа, доказывается гладкость решения вне границы.

1. Основной результат

Рассмотрим задачу

$$u_{xx} + au_{xx}(x+h, y) + u_{yy} = 0, \ x \in (-\infty, +\infty), \ y \in (0, +\infty), \tag{1.1}$$

$$u\Big|_{y=0} = u_0(x), \ x \in (-\infty, +\infty), \tag{1.2}$$

где a и h — вещественные параметры, $|a| < 1$, а u_0 непрерывна и ограничена.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации НШ-4479.2014.1 и гранта РФФИ 14-01-00265.

Прежде всего отметим, что ограничение, наложенное на a, эквивалентно сильной эллиптичности рассматриваемого уравнения, т. е. положительной определенности вещественной части символа дифференциально-разностного оператора, стоящего в левой части этого уравнения, взятой с обратным знаком (см. [13, § 9]). Действительно, указанный символ равен $-\xi^2 - a\xi^2 e^{-ih\xi} - \eta^2$, т. е. его вещественная часть, взятая с обратным знаком, равна $(1 + a\cos h\xi)\xi^2 + \eta^2$. Если $|a| < 1$, то существует такая положительная постоянная C, что

$$(1 + a\cos h\xi)\xi^2 + \eta^2 \geqslant C(\xi^2 + \eta^2)$$

для любой точки (ξ, η) плоскости; в противном случае, полагая $\eta = 0$ и выбирая такое отличное от нуля ξ, что левая часть последнего неравенства обращается в нуль, получаем, что указанное неравенство не выполнено в точке $(\xi, 0)$ ни при каком положительном C, а значит, уравнение (1.1) не является сильно эллиптическим.

Далее, следуя классической операционной схеме (см., например, [2, §10]), применим (формально) преобразование Фурье к задаче (1.1)-(1.2), используя тот факт, что в образах Фурье оператор сдвига действует как мультипликатор: $\widehat{f(x+h)} = e^{-ih\xi}\widehat{f(\xi)}$. Получим следующую начальную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dy^2} = \xi^2(1 + ae^{-ih\xi})\widehat{u}, \ x \in (-\infty, +\infty), \tag{1.3}$$

$$\widehat{u}(0;\xi) = \widehat{u}_0(\xi). \tag{1.4}$$

Отметим, что полученная задача не является задачей Коши, поскольку уравнение имеет второй порядок, а начальное условие только одно.

Итак, (1.3) — это линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (зависящее от параметра ξ), характеристическое уравнение которого имеет два корня $\pm\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, где

$$\rho(\xi) = |\xi|\Big(2a\cos h\xi + a^2 + 1\Big)^{\frac{1}{4}}, \ \theta(\xi) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{a\sin h\xi}{1 + a\cos h\xi}. \tag{1.5}$$

Таким образом, любая функция вида

$$C_1(\xi)e^{y\rho(\xi)[\cos\theta(\xi) + i\sin\theta(\xi)]} + C_2(\xi)e^{-y\rho(\xi)[\cos\theta(\xi) + i\sin\theta(\xi)]}, \tag{1.6}$$

в которой функции $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ удовлетворяют условию $C_1(\xi) + C_2(\xi) = \widehat{u}_0(\xi)$, является решением задачи (1.3)-(1.4). Положим $C_1(\xi) \equiv 0$, $C_2(\xi) = \widehat{u}_0(\xi)$. Тогда решение задачи (1.3)-(1.4) равно

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\widehat{u}_0(\xi)e^{-y\rho(\xi)[\cos\theta(\xi) + i\sin\theta(\xi)]}d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}e^{-y\rho(\xi)[\cos\theta(\xi) + i\sin\theta(\xi)]}d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(\tau)e^{-i\tau\xi}d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(\tau)e^{i(x-\tau)\xi}e^{-y\rho(\xi)[\cos\theta(\xi) + i\sin\theta(\xi)]}d\xi d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(\tau)d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y\rho(\xi)\cos\theta(\xi)}\Big(\cos[(x-\tau)\xi - y\rho(\xi)\sin\theta(\xi)] + i\sin[(x-\tau)\xi - y\rho(\xi)\sin\theta(\xi)]\Big)d\xi.$$

Воспользовавшись четностью функции ρ и нечетностью функции θ, приводим последнее выражение к виду

$$2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(\tau)\int\limits_{0}^{\infty} e^{-y\rho(\xi)\cos\theta(\xi)}\cos[(x-\tau)\xi - y\rho(\xi)\sin\theta(\xi)]d\xi d\tau.$$

Теперь представим $\cos\theta(\xi)$ и $\sin\theta(\xi)$ в виде $\sqrt{\dfrac{1 \pm \cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{a\sin h\xi}{1 + a\cos h\xi}\right)}{2}}$. Тогда, воспользовавшись формулой $\operatorname{arctg} x = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, получаем, что

$$\cos\theta(\xi)=\frac{1}{\sqrt2}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{a^2\sin^2 h\xi}{(1+a\cos h\xi)^2}}}}=\frac{1}{\sqrt2}\sqrt{1+\frac{1+a\cos h\xi}{\sqrt{(1+a\cos h\xi)^2+a^2\sin^2 h\xi}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt2}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+1+2a\cos h\xi}+1+a\cos h\xi}{\sqrt{a^2+1+2a\cos h\xi}}}=\frac{1}{\sqrt2}\frac{\left(\sqrt{2a\cos h\xi+a^2+1}+a\cos h\xi+1\right)^{\frac12}}{\left(2a\cos h\xi+a^2+1\right)^{\frac14}},$$

$$\sin\theta(\xi)=\frac{1}{\sqrt2}\frac{\left(\sqrt{2a\cos h\xi+a^2+1}-a\cos h\xi-1\right)^{\frac12}}{\left(2a\cos h\xi+a^2+1\right)^{\frac14}}.$$

Обозначив $\left(2a\cos h\xi+a^2+1\right)^{\frac12}$ через $\varphi(\xi)$, получаем, что $\rho(\xi)\cos\theta(\xi)=\dfrac{|\xi|}{\sqrt2}\sqrt{\varphi(\xi)+a\cos h\xi+1}$, а $\rho(\xi)\sin\theta(\xi)=\dfrac{|\xi|}{\sqrt2}\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}$, откуда следует, что

$$u(x,y)=2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_0(\tau)\int\limits_0^{\infty}e^{-y\frac{\xi}{\sqrt2}\sqrt{\varphi(\xi)+a\cos h\xi+1}}\cos\left[(x-\tau)\xi-y\frac{\xi}{\sqrt2}\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}\right]d\xi d\tau=$$

$$=2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_0(x-\tau)\int\limits_0^{\infty}e^{-y\xi\sqrt{\frac{\varphi(\xi)+a\cos h\xi+1}{2}}}\cos\left[\tau\xi-y\xi\sqrt{\frac{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}{2}}\right]d\xi d\tau.$$

Отметим, что в предшествующих рассуждениях мы в соответствии с общей схемой [2, §10] не заботились об обосновании сходимости интегралов и законности перемены порядка интегрирования, поскольку речь шла о решениях в смысле обобщенных функций. В следующем утверждении речь пойдет и о гладких решениях.

Теорема 1.1. *Пусть функция $\mathcal{E}(x,y)$ определена следующим образом:*

$$\mathcal{E}(x,y)=\int\limits_0^{\infty}e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi, \tag{1.7}$$

где $G_1(\xi)=\xi\sqrt{\dfrac{\varphi(\xi)+a\cos h\xi+1}{2}}$, $G_2(\xi)=\xi\sqrt{\dfrac{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}{2}}$.

Тогда функция

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}(x-\xi,y)u_0(\xi)d\xi \tag{1.8}$$

является решением задачи (1.1)-(1.2) *в смысле обобщенных функций, а в полуплоскости* $\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$ *удовлетворяет уравнению* (1.1) *и в классическом смысле.*

Доказательство. Первое утверждение (о разрешимости в смысле обобщенных функций) вытекает из приведенного выше построения функции $\mathcal{E}(x,y)$ и [2, §10, Теорема 1]. Указанная теорема применима, несмотря на то что уравнение (1.1) имеет второй порядок по переменной y, потому что эта теорема верна не только для уравнений, но и для систем, а уравнение (1.1) можно свести к системе уравнений первого порядка по y аналогично [3, Гл. 2, §5, п. 2]. Отметим, что задача (1.1)-(1.2) не является эквивалентной указанному примеру из [3], поскольку в последнем задача имеет два краевых условия, а не одно, однако на разрешимость это различие не влияет.

Для доказательства утверждения о гладкости исследуем функцию (1.7).

Положительность подкоренного выражения в G_1 очевидна. Чтобы доказать ее для G_2, возведем в квадрат дробь $\dfrac{\varphi(\xi)}{a\cos h\xi+1}$; получим $\dfrac{a^2+2a\cos h\xi+1}{a^2\cos^2 h\xi+2a\cos h\xi+1}$. Последняя дробь больше единицы, поэтому и исходная дробь больше единицы, а значит, $\varphi(\xi)>a\cos h\xi+1$, т. е. G_2 определена корректно.

Подынтегральная функция в (1.7) ограничена сверху функцией $e^{-\nu\xi}$, где $\nu=y\sqrt{\dfrac{1-|a|}{2}}$ — положительная константа; значит, функция (1.7) корректно определена в полуплоскости $\{y>0\}$.

Подставим функцию (1.7) в уравнение (1.1). Получим, что

$$\mathcal{E}_{xx}(x,y)=-\int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi,$$

$$\mathcal{E}_{xx}(x+h,y)=-\int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[(x+h)\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi,$$

$$\mathcal{E}_{y}(x,y)=-\int\limits_0^\infty G_1(\xi)e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi+\int\limits_0^\infty G_2(\xi)e^{-yG_1(\xi)}\sin\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi,$$

$$\mathcal{E}_{yy}(x,y)=\int\limits_0^\infty G_1^2(\xi)e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi-\int\limits_0^\infty G_1(\xi)G_2(\xi)e^{-yG_1(\xi)}\sin\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi-$$

$$-\int\limits_0^\infty G_1(\xi)G_2(\xi)e^{-yG_1(\xi)}\sin\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi-\int\limits_0^\infty G_2^2(\xi)e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi=$$

$$=\int\limits_0^\infty \left[G_1^2(\xi)-G_2^2(\xi)\right]e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi-2\int\limits_0^\infty G_1(\xi)G_2(\xi)e^{-yG_1(\xi)}\sin\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi.$$

Вычислим

$$G_1^2(\xi)-G_2^2(\xi)=\frac{\xi^2}{2}\left[\varphi(\xi)+a\cos h\xi+1-\varphi(\xi)+a\cos h\xi+1\right]=\xi^2(a\cos h\xi+1),$$

$$G_1(\xi)G_2(\xi)=\frac{\xi^2}{2}\sqrt{\left[\varphi(\xi)+a\cos h\xi+1\right]\left[\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1\right]}=\frac{\xi^2}{2}\sqrt{\varphi^2(\xi)-(a\cos h\xi+1)^2}=$$
$$=\frac{\xi^2}{2}\sqrt{2a\cos h\xi+a^2+1-a^2\cos^2 h\xi-2a\cos h\xi-1}=\frac{a\xi^2}{2}\sqrt{1-\cos^2 h\xi}=\frac{a\xi^2}{2}\sin h\xi.$$

Таким образом,

$$\mathcal{E}_{yy}(x,y)=\int\limits_0^\infty \xi^2(a\cos h\xi+1)e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi-$$

$$-a\int\limits_0^\infty \xi^2\sin h\xi e^{-yG_1(\xi)}\sin\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi=$$

$$=a\int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\Big(\cos h\xi\cos\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]-\sin h\xi\sin\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]\Big)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi=$$

$$= a\int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[(x+h)\xi - yG_2(\xi)\right] + \int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[x\xi - yG_2(\xi)\right]d\xi =$$
$$= -a\mathcal{E}_{xx}(x+h,y) - \mathcal{E}_{xx}(x,y),$$

т. е. функция (1.7) действительно удовлетворяет уравнению (1.1).

Теперь, чтобы исследовать функцию (1.8), оценим поведение функции (1.7) при $x\to\infty$ (при фиксированном положительном y). Для этого разобьем ее на четное и нечетное (по x) слагаемые $\mathcal{E}_1(x,y)$ и $\mathcal{E}_2(x,y)$:

$$\mathcal{E}_1(x,y) = \int\limits_0^\infty e^{-yG_1(\xi)}\cos x\xi\,\cos[yG_2(\xi)]d\xi,$$

$$\mathcal{E}_2(x,y) = \int\limits_0^\infty e^{-yG_1(\xi)}\sin x\xi\,\sin[yG_2(\xi)]d\xi.$$

После замены переменной $\eta = x\xi$ получаем, что

$$\mathcal{E}_1(x,y) = \frac{1}{x}\int\limits_0^\infty e^{-yG_1(\frac{\eta}{x})}\cos\left[yG_2\left(\frac{\eta}{x}\right)\right]\cos\eta\,d\eta = \frac{1}{x}\int\limits_0^\infty \psi\Big(\frac{\eta}{x}\Big)f(\eta)d\eta,$$

где

$$f(\tau) = \cos\tau \in L_\infty(\mathbb{R}^1_+),$$
$$\psi(\tau) = e^{-yG_1(\tau)}\cos\left[yG_2(\tau)\right] \in L_1(\mathbb{R}^1_+).$$

Теперь обозначим $e^{-y\tau^2}$ через $\psi_0(\tau)$. Очевидно, $\psi_0(\tau)\in L_1(\mathbb{R}^1_+)$, кроме того, преобразование Меллина функции $\psi_0(\tau)$ определено на всей вещественной оси и не имеет вещественных нулей; действительно,

$$\int\limits_0^\infty \tau^{ix}\psi_0(\tau)d\tau = \frac{1}{2y^{\frac{1+ix}{2}}}\int\limits_0^\infty z^{\frac{ix-1}{2}}e^{-z}dz = \frac{\Gamma(\frac{1+ix}{2})}{2y^{\frac{1+ix}{2}}}.$$

Далее,

$$\frac{1}{r}\int\limits_0^\infty \psi_0\Big(\frac{\tau}{r}\Big)f(\tau)d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}\,e^{-\frac{r^2}{4t}} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0\;.$$

Тогда в силу тауберовой теоремы Винера (см. [6, с. 163])

$$\frac{1}{r}\int\limits_0^\infty \psi\Big(\frac{\tau}{r}\Big)f(\tau)d\tau \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

т. е. $\mathcal{E}_1(x,y)$ стремится к нулю при $x\to\infty$ для любых фиксированных $y>0,\ a\in(-1,1),\ h\in\mathbb{R}^1$.

Теперь рассмотрим $\mathcal{E}_2(x,y)$.

Обозначим функцию $e^{-yG_1(\tau)}\sin\left[yG_2(\tau)\right]$ через $\psi(\tau)\in L_1(\mathbb{R}^1_+)$, а $\sin\tau$ — через $f(\tau)\in L_\infty(\mathbb{R}^1_+)$. Получим, что

$$\frac{1}{r}\int\limits_0^\infty \psi_0\Big(\frac{\tau}{r}\Big)f(\tau)d\tau = \frac{r}{2y}F\Big(1,\frac{3}{2},-\frac{r^2}{4y}\Big) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(здесь через F обозначена вырожденная гипергеометрическая функция второго рода).

Таким образом, условия тауберовой теоремы Винера выполнены, следовательно, для любых фиксированных $y>0,\ a\in(-1,1),\ h\in\mathbb{R}^1$

$$\mathcal{E}_2(x,y) = \frac{1}{x}\int\limits_0^\infty \psi\Big(\frac{\tau}{x}\Big)f(\tau)d\tau \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0\;.$$

Итак, для любого положительного y и любых $a \in (-1, 1)$, $h \in \mathbb{R}^1$

$$\lim_{x\to\infty} \mathcal{E}(x, y) = 0.$$

Чтобы оценить скорость этого стремления, проинтегрируем слагаемое $\mathcal{E}_1(x, y)$ по частям:

$$\mathcal{E}_1(x,y) = \frac{1}{x}\int\limits_0^\infty e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)](\sin x\xi)'d\xi =$$

$$= \frac{1}{x}\left[e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)]\sin x\xi\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=+\infty} - \int\limits_0^\infty \left(e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)]\right)'\sin x\xi d\xi\right].$$

Выше установлено, что $e^{-yG_1(\xi)} \leqslant e^{-\nu\xi}$, следовательно, внеинтегральный член обращается в нуль. Таким образом,

$$\mathcal{E}_1(x,y) = \frac{y}{x}\int\limits_0^\infty \left(G_1'(\xi)e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)] + G_2'(\xi)e^{-yG_1(\xi)}\sin[yG_2(\xi)]\right)\sin x\xi d\xi =$$

$$= \frac{y}{x}\int\limits_0^\infty e^{-yG_1(\xi)}\left(G_1'(\xi)\cos[yG_2(\xi)] + G_2'(\xi)\sin[yG_2(\xi)]\right)\sin x\xi d\xi. \quad (1.9)$$

В дальнейшем будем учитывать, что подкоренное выражение в $G_1(\xi)$ ограничено сверху и снизу положительными константами, поэтому производные любых порядков от $G_1(\xi)$ не имеют особенностей, а на бесконечности растут не быстрее степенной функции. Подкоренное выражение в $G_2(\xi)$ ограничено положительной константой только сверху, а снизу ограничено нулем и обращается в нуль в тех и только тех точках, в которых $\cos h\xi = \pm 1$. Значит, производные функции $G_2(\xi)$ могут иметь особенности в указанных точках. Проанализируем поведение этих производных более детально. Для этого достаточно рассмотреть не всю функцию $G_2(\xi)$, а только ее сомножитель $\sqrt{\varphi(\xi) - a\cos h\xi - 1}$. Его производная равна

$$\frac{\varphi'(\xi) + ah\sin h\xi}{2\sqrt{\varphi(\xi) - a\cos h\xi - 1}} = \frac{\frac{-ah\sin h\xi}{\sqrt{2a\cos h\xi + a^2 + 1}} + ah\sin h\xi}{2\sqrt{\varphi(\xi) - a\cos h\xi - 1}} =$$

$$= \frac{ah\sin h\xi}{2\sqrt{\varphi(\xi) - a\cos h\xi - 1}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2a\cos h\xi + a^2 + 1}}\right).$$

Второй сомножитель ограничен сверху и снизу, значит, нас интересует только первый. Его знаменатель обращается в нуль в тех и только тех точках, в которых $\cos h\xi = \pm 1$, однако числитель имеет в тех же точках нули не менее высокого порядка, из чего следует, что последний интеграл сходится. Проинтегрируем его по частям. Получим, что

$$\mathcal{E}_1(x,y) = -\frac{y}{x^2}\int\limits_0^\infty e^{-yG_1(\xi)}\left(G_1'(\xi)\cos[yG_2(\xi)] + G_2'(\xi)\sin[yG_2(\xi)]\right)(\cos x\xi)'d\xi =$$

$$= \frac{y}{x^2}\left(\int\limits_0^\infty \left[e^{-yG_1(\xi)}\left(G_1'(\xi)\cos[yG_2(\xi)] + G_2'(\xi)\sin[yG_2(\xi)]\right)\right]'\cos x\xi d\xi - \right.$$

$$\left. - \left[e^{-yG_1(\xi)}\left(G_1'(\xi)\cos[yG_2(\xi)] + G_2'(\xi)\sin[yG_2(\xi)]\right)\cos x\xi\right]\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=+\infty}\right) =$$

$$= \frac{y}{x^2}\left(\int\limits_0^\infty \left[e^{-yG_1(\xi)}\left(G_1'(\xi)\cos[yG_2(\xi)] + G_2'(\xi)\sin[yG_2(\xi)]\right)\right]'\cos x\xi d\xi + \sqrt{a+1}\right).$$

Обозначая $\left[e^{-yG_1(\xi)}\left(G_1'(\xi)\cos[yG_2(\xi)]+G_2'(\xi)\sin[yG_2(\xi)]\right)\right]'$ через $\psi(\xi)$, получаем, что

$$x^2\mathcal{E}_1(x,y)=y\int\limits_0^\infty \psi(\xi)\cos x\xi d\xi+y\sqrt{a+1}. \tag{1.10}$$

Чтобы убедиться в сходимости последнего интеграла, исследуем особенности функции

$$\left(G_2'(\xi)\sin[yG_2(\xi)]\right)'=G_2''(\xi)\sin[yG_2(\xi)]+y(G_2'(\xi))^2\cos[yG_2(\xi)].$$

Как мы только что выяснили, первая производная функции $\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}$ (а значит, и функции $G_2(\xi)$) особенностей не имеет, поэтому достаточно рассмотреть первое слагаемое.

Поскольку производная функции $\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}$ особенностей не имеет, достаточно рассмотреть функцию $\xi\left(\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}\right)''\sin[yG_2(\xi)]$, равную

$$\xi\left(\frac{ah\sin h\xi}{2\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}}\right)'\left(1-\frac{1}{\sqrt{2a\cos h\xi+a^2+1}}\right)\sin[yG_2(\xi)]+$$
$$+\xi\frac{ah\sin h\xi}{2\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2a\cos h\xi+a^2+1}}\right)'\sin[yG_2(\xi)].$$

Как мы выяснили выше, второе слагаемое последней суммы особенностей не имеет. Осталось рассмотреть

$$\left(\frac{ah\sin h\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}}\right)'\sin[yG_2(\xi)]=$$
$$=\frac{ah^2\cos h\xi\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}-ah\sin h\xi\left(\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}\right)'}{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}\sin[yG_2(\xi)]=$$
$$=\frac{ah^2\cos h\xi\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}-ah\sin h\xi\frac{ah\sin h\xi}{2\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2a\cos h\xi+a^2+1}}\right)}{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}\sin[yG_2(\xi)]=$$
$$=\frac{2ah^2\cos h\xi\left[\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1\right]-a^2h^2\sin^2 h\xi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2a\cos h\xi+a^2+1}}\right)}{2\left[\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1\right]^{\frac{3}{2}}}\sin[yG_2(\xi)]=$$
$$=\frac{ah^2\cos h\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}}\sin[yG_2(\xi)]-$$
$$-\frac{a^2h^2}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2a\cos h\xi+a^2+1}}\right)\left(\frac{\sinh\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}}\right)^2\sin[yG_2(\xi)]\frac{1}{\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}}.$$

Как установлено выше, второе слагаемое последнего выражения имеет особенности только в последнем сомножителе, однако сомножитель

$$\sin[yG_2(\xi)]=\sin\left[y\xi\sqrt{\frac{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}{2}}\right]$$

имеет в этих точках нули того же самого порядка, что и доказывает сходимость интеграла в правой части формулы (1.10).

Итак, первое слагаемое в правой части равенства (1.10) равно $\dfrac{y}{x}\int\limits_0^\infty\psi\left(\dfrac{\eta}{x}\right)\cos\eta d\eta$, где $\psi\in L_1(\mathbb{R}^1_+)$, поэтому условия тауберовой теоремы Винера для этого слагаемого выполнены, следовательно, оно стремится к нулю при $x\to\infty$ для любого фиксированного положительного y.

Таким образом, $x^{2-\varepsilon}\mathcal{E}_1(x,y)\overset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$ для любых положительных y и ε.

Проанализируем таким же образом второе слагаемое функции $\mathcal{E}(x,y)$:

$$\mathcal{E}_2(x,y) = -\frac{1}{x}\int\limits_0^\infty e^{-yG_1(\xi)}\sin[yG_2(\xi)](\cos x\xi)'d\xi =$$

$$= \frac{1}{x}\left[\int\limits_0^\infty \left(e^{-yG_1(\xi)}\sin[yG_2(\xi)]\right)'\cos x\xi d\xi - e^{-yG_1(\xi)}\sin[yG_2(\xi)]\cos x\xi\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=+\infty}\right].$$

Внеинтегральный член обращается в нуль, поскольку $G_2(0) = 0$, значит,

$$\mathcal{E}_2(x,y) = \frac{1}{x}\int\limits_0^\infty \left(e^{-yG_1(\xi)}\sin[yG_2(\xi)]\right)'\cos x\xi d\xi =$$

$$= \frac{y}{x}\int\limits_0^\infty e^{-yG_1(\xi)}\left(G_2'(\xi)\cos[yG_2(\xi)] - G_1'(\xi)\sin[yG_2(\xi)]\right)\cos x\xi d\xi =$$

$$= \frac{y}{x^2}\int\limits_0^\infty e^{-yG_1(\xi)}\left(G_2'(\xi)\cos[yG_2(\xi)] - G_1'(\xi)\sin[yG_2(\xi)]\right)(\sin x\xi)'d\xi.$$

Снова применим формулу интегрирования по частям. Получим, что

$$\mathcal{E}_2(x,y) = \frac{y}{x^2}\left[e^{-yG_1(\xi)}\left(G_2'(\xi)\cos[yG_2(\xi)] - G_1'(\xi)\sin[yG_2(\xi)]\right)\sin x\xi\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=+\infty} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^\infty \left[e^{-yG_1(\xi)}\left(G_2'(\xi)\cos[yG_2(\xi)] - G_1'(\xi)\sin[yG_2(\xi)]\right)\right]'\sin x\xi d\xi\right].$$

Учитывая, что $G_2'(0) = 0$, поскольку $G_2(0) = 0$, мы видим, что внеинтегральный член обращается в нуль, поэтому $x^2\mathcal{E}_1(x,y) = y\int\limits_0^\infty \psi(\xi)\sin x\xi d\xi$, где через ψ обозначена суммируемая на положительной полуоси функция $\left[e^{-yG_1(\xi)}\left(G_2'(\xi)\cos[yG_2(\xi)] - G_1'(\xi)\sin[yG_2(\xi)]\right)\right]'$. Снова применив тауберову теоремы Винера, мы видим, что $x^2\mathcal{E}_2(x,y) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ для любого положительного y.

Таким образом, $x^{2-\varepsilon}\mathcal{E}(x,y) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ для любых положительных y и ε, а это значит, что свертка $\mathcal{E}(x,y)$ с любой непрерывной ограниченной функцией корректно определена в полуплоскости $\{y > 0\}$.

Теперь оценим поведение производных этой функции на бесконечности.

Разобьем $-\mathcal{E}_{xx}(x,y)$ на четное и нечетное слагаемые

$$\mathcal{E}_{xx,1}(x,y) = \int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos x\xi\,\cos[yG_2(\xi)]d\xi$$

и

$$\mathcal{E}_{xx,2}(x,y) = \int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\sin x\xi\,\sin[yG_2(\xi)]d\xi.$$

Применяя к первому слагаемому формулу интегрирования по частям, видим, что оно равно

$$\frac{1}{x}\int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\,\cos[yG_2(\xi)](\sin x\xi)'d\xi =$$

$$= \frac{1}{x}\left[\xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)]\sin x\xi\Big|_{\xi=0}^{\xi=+\infty} - \int\limits_0^\infty \left(\xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)]\right)'\sin x\xi d\xi\right] =$$
$$= -\frac{1}{x}\int\limits_0^\infty \left(\xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)]\right)'\sin x\xi d\xi.$$

Сходимость последнего интеграла доказывается точно так же, как и сходимость интеграла в (1.9). Применив формулу интегрирования по частям еще раз, получаем, что

$$\mathcal{E}_{xx,1}(x,y) = \frac{1}{x^2}\int\limits_0^\infty \left(\xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)]\right)'(\cos x\xi)'d\xi =$$
$$= \frac{1}{x^2}\left[\left(\xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)]\right)'\cos x\xi\Big|_{\xi=0}^{\xi=+\infty} - \int\limits_0^\infty \left(\xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)]\right)''\cos x\xi d\xi\right] =$$
$$= -\frac{1}{x^2}\int\limits_0^\infty \left(\xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)]\right)''\cos x\xi d\xi.$$

Суммируемость функции $\left(e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)]\right)''$ на положительной полуоси доказана выше, поэтому функция $\left(\xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)]\right)''$ суммируема на той же полуоси. Таким образом,

$$\mathcal{E}_{xx,1}(x,y) = \frac{1}{x^2}\int\limits_0^\infty \psi(\xi)\cos x\xi d\xi,$$

где $\psi \in L_1(\mathbb{R}^1_+)$, поэтому тауберова теорема Винера применима: $x^2\mathcal{E}_{xx,1}(x,y) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ для любого положительного y.

Для функции $\mathcal{E}_{xx,2}(x,y)$ это предельное соотношение доказывается точно так же.

Итак, $x^2\mathcal{E}_{xx}(x,y) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ для любого положительного y.

Поскольку h — константа, $x^2\mathcal{E}_{xx}(x+h,y) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ для любого положительного y.

Поскольку $\mathcal{E}(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1.1), то $x^2\mathcal{E}_{yy}(x,y) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ для любого положительного y.

Тем самым обосновывается дифференцирование и применение оператора сдвига под знаком интеграла в (1.8), а значит, функция (1.8) обладает в полуплоскости $\{y > 0\}$ всеми производными (в классическом смысле), входящими в уравнение (1.1), и удовлетворяет этому уравнению в классическом смысле, что и завершает доказательство теоремы. □

2. Замечания о природе обобщенного решения

Функция (1.8) удовлетворяет задаче (1.1)-(1.2) в смысле Гельфанда—Шилова (см. [2, §10]): она является обобщенной функцией переменной x, зависящей от вещественного параметра y и дифференцируемой по этому параметру на положительной полуоси (см., например, [11, §9, п. 5]), уравнение (1.1) понимается в смысле равенства обобщенных функцией переменной x, выполняемого для каждого положительного значения параметра y, а краевое условие (1.2) понимается как предельное соотношение в топологии обобщенных функций переменной x при стремящемся к нулю справа вещественном параметре y (см., например, [11, §9, п. 4]).

Для задач в полупространстве (в данном случае — в полуплоскости) хорошо известно и другое определение решений в смысле обобщенных функций — в смысле Владимирова. Проиллюстрируем это определение на примерах задачи Коши для волнового уравнения $u_{tt} = u_{xx}$ и уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$ (см. [1, §13, §16]). В обоих случаях под решением понимается обобщенная функция переменной (x,t), обращающаяся в нуль в полуплоскости $\{t < 0\}$ и удовлетворяющая уравнению в смысле равенства обобщенных функций переменной (x,t), однако вместо исходного уравнения должно выполняться другое: $u_{tt} = u_{xx} + u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t)$ вместо волнового уравнения и $u_t = u_{xx} + u_0(x)\delta(t)$ вместо уравнения теплопроводности. Это определение корректно: можно показать (см. [1, §13, §16]), что для каждой из указанных задач Коши классическое решение, продолженное в нижнюю полуплоскость тождественным нулем, является и обобщенным решением в смысле Владимирова. Однако в данной статье мы имеем дело не с задачей Коши, а с задачей Дирихле, что меняет ситуацию принципиальным образом: уравнение имеет второй порядок по переменной y, но задача имеет всего одно краевое условие. В этом случае автору не известно, как корректно определить по Владимирову решение задачи в смысле обобщенных функций не только для уравнения (1.1), но даже и для классического уравнения Лапласа.

В связи с этим уместно отметить, что функция $\mathcal{E}(x, y)$, определенная формулой (1.7), представляет собой ядро пуассоновского интегрального представления решения исследуемой задачи, однако нет оснований утверждать, что она же является и фундаментальным решением исследуемого уравнения. Такое совпадение (ядра формулы Пуассона и фундаментального решения) характерно для задачи Коши, однако в случае задачи Дирихле ситуация иная даже в классической теории. Так, даже для задачи Дирихле в полуплоскости для уравнения Лапласа ядром формулы Пуассона является функция $\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ (с точностью до константы), не говоря уже об областях с более сложными границами. Фундаментальное решение уравнения (1.1) могло бы представлять самостоятельный исследовательский интерес, однако это выходит за пределы настоящей работы, а интегральное представление решения строится непосредственным переходом к двойственной задаче в образах Фурье.

Автор глубоко признателен А. Л. Скубачевскому за постоянное внимание к работе.

Автор выражает благодарность В. Н. Денисову и А. И. Назарову за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по Программе повышения конкурентоспособности РУДН «5-100» среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2016–2020 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976.
2. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши// Усп. мат. наук. — 1953. — *8*, № 6. — С. 3–54.
3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Вып. 3: Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1958.
4. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические уравнения второго порядка. — М.: Мир, 1989.
5. *Гуревич П. Л.* Эллиптические задачи с нелокальными краевыми условиями и полугруппы Феллера// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *38*. — С. 3–173.
6. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральная теория. — М.: Мир, 1966.
7. *Денисов В. Н., Муравник А. Б.* Об асимптотике решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения в полупространстве// В сб.: «Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения». — М.: Физматлит, 2003. — С. 397–417.
8. *Кондратьев В. А., Ландис Е. М.* Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. — 1988. — *32*. — С. 99–218.
9. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — *26*. — С. 3–132.
10. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. II// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *33*. — С. 3–179.
11. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. — М.: МГУ, 1984.
12. *Denisov V. N., Muravnik A. B.* On asymptotic behavior of solutions of the Dirichlet problem in half-space for linear and quasi-linear elliptic equations// Electron. Res. Announc. Am. Math. Soc. — 2003. — *9*. — С. 88–93.
13. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

Андрей Борисович Муравник
E-mail: amuravnik@yandex.ru

АО «Концерн «Созвездие», Воронеж
Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

UDC 517.929

On the Dirichlet Problem for Differential-Difference Elliptic Equations in a Half-plane

© 2016 **A. B. Muravnik**

Abstract. The Dirichlet problem is considered in a half-plane (with continuous and bounded boundary-value function) for the model elliptic differential-difference equation

$$u_{xx} + au_{xx}(x+h, y) + u_{yy} = 0, \; |a| < 1.$$

Its solvability is proved in the sense of generalized functions, the integral representation of the solution is constructed, and it is proved that everywhere but the boundary hyperplane this solution satisfies the equation in the classic sense as well.

REFERENCES

1. V. S. Vladimirov, *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
2. I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, "Preobrazovaniya Fur'e bystro rastushchikh funktsiy i voprosy edinstvennosti resheniya zadachi Koshi" [Fourier transformations of rapidly growing functions and questions of unique solvability of the Cauchy problem], *Usp. mat. nauk.* [Progr. Math. Sci.], 1953, **8**, No. 6, 3–54 (in Russian).
3. I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, *Obobshchennye funktsii. Vyp.* 3: *Nekotorye voprosy teorii differentsial'nykh uravneniy* [Generalized Functions. Vol. 3: Some Questions of the Theory of Differential Equations], Fizmatgiz, Moscow, 1958 (in Russian).
4. D. Gilbarg and N. Trudinger, *Ellipticheskie uravneniya vtorogo poryadka* [Second-Order Elliptic Equations], Mir, Moscow, 1989 (in Russian).
5. P. L. Gurevich, "Ellipticheskie zadachi s nelokal'nymi kraevymi usloviyami i polugruppy Fellera" [Elliptic problems with nonlocal boundary-value conditions and Feller semigroups], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **38**, 3–173 (in Russian).
6. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Lineynye operatory. Spektral'naya teoriya* [Linear Operators. Spectral Theory], Mir, Moscow, 1966 (in Russian).
7. V. N. Denisov and A. B. Muravnik, "Ob asimptotike resheniya zadachi Dirikhle dlya ellipticheskogo uravneniya v poluprostranstve" [On asymptotic form of solution of the Dirichlet problem for an elliptic equation in a halfspace], In: "Nelineynyy analiz i nelineynye differentsial'nye uravneniya" [Nonlinear Analysis and Nonlinear Differential Equations], Fizmatlit, Moscow, 2003, 397–417 (in Russian).
8. V. A. Kondrat'ev and E. M. Landis, "Kachestvennaya teoriya lineynykh differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh vtorogo poryadka" [Qualitative theory of second-order linear partial differential equations], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat.* [Results Sci. Tech. Contemp. Probl. Math.], 1988, **32**, 99–218 (in Russian).
9. A. L. Skubachevskii, "Neklassicheskie kraevye zadachi. I" [Nonclassic Boundary-Value Problems. I], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2007, **26**, 3–132 (in Russian).
10. A. L. Skubachevskii, "Neklassicheskie kraevye zadachi. II" [Nonclassic Boundary-Value Problems. II], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **33**, 3–179 (in Russian).
11. G. E. Shilov, *Matematicheskiy analiz. Vtoroy spetsial'nyy kurs* [Analysis. The Second Special Course], MGU, Moscow, 1984 (in Russian).
12. V. N. Denisov and A. B. Muravnik, "On asymptotic behavior of solutions of the Dirichlet problem in half-space for linear and quasi-linear elliptic equations," *Electron. Res. Announc. Am. Math. Soc.*, 2003, **9**, 88–93.

13. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.

Andrey B. Muravnik
E-mail: amuravnik@yandex.ru

JSC Concern "Sozvezdie", Voronezh, Russia
RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., Moscow, 117198 Russia

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 60 (2016). С. 114–163

УДК 517.9

К ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОЙ УПРУГОСТИ

© 2016 г. **А. П. СОЛДАТОВ**

Аннотация. Для системы Ламе плоской анизотропной теории упругости введены обобщенные потенциалы двойного слоя, связанные с теоретико-функциональным подходом. Эти потенциалы построены как для вектора смещений — решения системы Ламе, так и для сопряженных вектор-функций, описывающих тензор напряжений. Получено интегральное представление этих решений через указанные потенциалы. Как следствие, первая и вторая краевые задачи в различных классах (Гельдера, Харди, класса только непрерывных в замкнутой области функций) редуцированы к эквивалентной системе граничных уравнений Фредгольма в соответствующих пространствах. Заметим, что подобный подход был развит [13, 14] для общих эллиптических систем второго порядка с постоянными (и только старшими) коэффициентами. Однако ввиду важного прикладного значения представляет интерес привести развернутое изложение непосредственно для системы Ламе. В качестве иллюстрации полученных результатов в последних двух разделах рассмотрена задача Дирихле с кусочно постоянными коэффициентами Ламе, когда на кривой раздела двух сред задаются контактные условия. Эта задача редуцирована к эквивалентной системе граничных уравнений Фредгольма. Подробно исследован характер гладкости ядер полученных интегральных операторов в зависимости от гладкости граничных контуров.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Система Ламе

Рассмотрим систему Ламе [4, 5]

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a_{12}+a_{21})\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1.1}$$

с постоянными коэффициентами

$$a_{11} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_6 \\ \alpha_6 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \qquad a_{12} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_4 \\ \alpha_3 & \alpha_5 \end{pmatrix},$$

$$a_{21} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}, \qquad a_{22} = \begin{pmatrix} \alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_5 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Элементы α_j матричных коэффициентов, называемые модулями упругости, подчиняются требованию положительной определенности матрицы

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_6 \\ \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_5 \\ \alpha_6 & \alpha_5 & \alpha_3 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Удобно наряду с этой матрицей ввести в рассмотрение и присоединенную к ней матрицу $\beta = \alpha^*$, записанную в том же виде:

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_4 & \beta_6 \\ \beta_4 & \beta_2 & \beta_5 \\ \beta_6 & \beta_5 & \beta_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{ll} \beta_1 = \alpha_2\alpha_3 - \alpha_5^2 & \beta_2 = \alpha_1\alpha_3 - \alpha_6^2, \\ \beta_3 = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_4^2 & \beta_4 = \alpha_5\alpha_6 - \alpha_3\alpha_4, \\ \beta_5 = \alpha_4\alpha_6 - \alpha_1\alpha_5, & \beta_6 = \alpha_4\alpha_5 - \alpha_2\alpha_6. \end{array} \tag{1.3}$$

Тогда критерий Сильвестра положительной определенности матрицы α можно выразить неравенствами $\det\alpha > 0$ и $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant 3$.

Из коэффициентов системы Ламе составим блочную матрицу $a = (a_{ij})_1^2$. Тогда из вида (1.2) непосредственно видно, что для любого вектора $\eta \in \mathbb{R}^4$ справедливо равенство

$$(a\eta)\eta = (\alpha\widetilde{\eta})\widetilde{\eta}, \quad \widetilde{\eta} = (\eta_1, \eta_4, \eta_2 + \eta_3), \tag{1.4}$$

по отношению к скалярным произведениям векторов в $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$. В частности, для любых ненулевого $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ и $\xi \in \mathbb{R}^2$, составляющих вектор $\eta = (\lambda_1\xi, \lambda_2\xi)$, имеем соотношение

$$\left[\left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\lambda_i\lambda_j\right)\xi\right]\xi = (\alpha\widetilde{\eta})\widetilde{\eta}.$$

Поэтому равенство нулю левой части влечет $\widetilde{\eta} = 0$ или, что равносильно, $\xi = 0$. Таким образом, матрица в левой части этого выражения положительно определена:

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\lambda_i\lambda_j > 0 \tag{1.5}$$

и, следовательно, система Ламе (1.1) сильно эллиптична.

Рассмотрим матричный трехчлен $p(z) = a_{11} + (a_{12} + a_{21})z + a_{22}z^2$ системы (1.1), представляющий собой симметричную матрицу

$$p = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} p_1(z) = \alpha_1 + 2\alpha_6 z + \alpha_3 z^2, \\ p_2(z) = \alpha_3 + 2\alpha_5 z + \alpha_2 z^2, \\ p_3(z) = \alpha_6 + (\alpha_3 + \alpha_4)z + \alpha_5 z^2. \end{array} \tag{1.6}$$

В силу (1.5) определитель $\det p(t) > 0$ для $t \in \mathbb{R}$, т. е. характеристический многочлен четвертой степени $\chi = \det p(z)$ системы Ламе не имеет вещественных корней. Соответственно, в верхней полуплоскости имеются два его корня ν_1, ν_2, для которых возможны два случая, когда (i) $\nu_1 \neq \nu_2$ и (ii) $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. В дальнейшем основную роль играют не сами по себе эти корни, а их симметричные комбинации

$$s = \nu_1 + \nu_2, \quad t = \nu_1\nu_2. \tag{1.7}$$

В случае (ii) кратных корней они принимают значения $s = 2\nu$ и $t = \nu^2$.

В обозначениях (1.3), (1.6) характеристический многочлен $\chi = p_1p_2 - p_3^2$ можно записать в виде

$$\chi(z) = \beta_2 - 2\beta_5 z + (\beta_3 + 2\beta_4)z^2 - 2\beta_6 z^3 + \beta_1 z^4. \tag{1.8}$$

Нетрудно описать условия на его коэффициенты, обеспечивающие случай (ii) кратных корней. В этом случае должно быть

$$\chi(z) = \beta_1(z - \nu)^2(z - \overline{\nu})^2, \quad (z - \nu)(z - \overline{\nu}) = \delta_0 + \delta_1 z + z^2,$$

где $\delta_1^2 < 4\delta_0$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим выражения

$$\delta_0 = \frac{\beta_2}{\beta_1}, \quad \delta_1 = -\frac{\beta_6}{\beta_1} = -\frac{\beta_5}{\sqrt{\beta_1\beta_2}}$$

для коэффициентов δ_j и соотношения

$$\beta_5^2 < 4\beta_2^2, \quad \beta_5 = \beta_6\sqrt{\beta_2/\beta_1}, \quad \beta_5^2 + 2\beta_2^2 = \beta_2(\beta_3 + 2\beta_4), \tag{1.9}$$

необходимые и достаточные для кратности корней характеристического уравнения. В этом случае согласно (1.9) для корня ν имеем выражение

$$2\beta_1\nu = \beta_6 + i\sqrt{4\beta_1\sqrt{\beta_1\beta_2} - \beta_6^2}. \tag{1.10}$$

В классе $\mathcal{A}$ положительно определенных матриц вида (1.2) выделим подмножества $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, которые определяются условием линейной независимости многочленов, соответственно, p_2, p_3 и p_1, p_3, фигурирующих в (1.6). Очевидно, дополнения к этим множествам можно описать условиями

$$\begin{gathered}\alpha \notin \mathcal{A}_1 \Leftrightarrow \alpha_3\alpha_5 = \alpha_2\alpha_6, \ \alpha_2(\alpha_3+\alpha_4) = 2\alpha_5^2 \Leftrightarrow \chi(\nu) = p_2(\nu) = 0,\\ \alpha \notin \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow \alpha_1\alpha_5 = \alpha_3\alpha_6, \ \alpha_1(\alpha_3+\alpha_4) = 2\alpha_6^2 \Leftrightarrow \chi(\nu) = p_1(\nu) = 0\end{gathered} \tag{1.11}$$

для одного из корней ν характеристического уравнения. Вторая эквивалентность вытекает из того, что $\chi = p_1p_2 - p_3^2$. Поэтому равенства $p_j(\nu) = p_3(\nu) = 0$ для одного из значений $j = 1, 2$ равносильны линейной зависимости многочленов p_j и p_3.

Заметим, что

$$\alpha_3^2 < \alpha_1\alpha_2 \quad \text{при} \quad \alpha \notin \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2. \tag{1.12}$$

В самом деле, пусть, например, выполнены условия $\alpha \notin \mathcal{A}_1$ в (1.11). Тогда $2\alpha_2\alpha_6^2 = \alpha_3^2(\alpha_3 + \alpha_4)$, $2\alpha_1\alpha_5^2 = \alpha_1\alpha_2(\alpha_3 + \alpha_4)$. Подставляя эти выражения в формулу для определителя матрицы (1.2), получим

$$2\det\alpha = (\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2)(\alpha_3 - \alpha_4) > 0.$$

Остается заметить, что неравенства $\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2 < 0$ и $\alpha_3 < \alpha_4$ противоречат неравенству $\alpha_1\alpha_2 - \alpha_4^2 > 0$. Случай $\alpha \notin \mathcal{A}_2$ рассматривается аналогично.

Введем еще класс $\mathcal{A}_0$ матриц α, для которых $p_3 = 0$, т. е. $\alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$. Очевидно, этот класс не пересекается с множествами $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Из (1.12) легко следует, что

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2. \tag{1.13}$$

Действительно, пусть $\alpha \notin \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, так что соответствующие условия в (1.11) выполнены одновременно. Тогда из первых равенств (1.11) следует $\alpha_5\alpha_6(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2) = 0$, так что на основании (1.12) должно быть $\alpha_5\alpha_6 = 0$. Согласно (1.11) отсюда $\alpha \in \mathcal{A}_0$.

Аналогичные соображения показывают, что матрица $p(\nu)$ отлична от нулевой для всех ν:

$$p(\nu) \neq 0, \quad \nu \in \mathbb{C}. \tag{1.14}$$

В самом деле, если $p(\nu) = 0$, то $\operatorname{Im}\nu \neq 0$ и $\alpha \notin \mathcal{A}_j$ для обоих значений $j = 1, 2$. Поэтому $\alpha \in \mathcal{A}_0$, но в этом случае многочлены p_1 и p_2 линейно независимы.

В случаях, когда α принадлежит одному из исключительных множеств $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_j$, $j = 1, 2$, корни ν_j характеристического уравнения вычисляются в явном виде через квадратные уравнения.

При $\alpha \in \mathcal{A}_0$ система Ламе диагонализируется, т. е. распадается на два уравнения

$$\alpha_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \alpha_3\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \quad \alpha_3\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \alpha_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0.$$

В этом случае $\chi = p_1p_2$ и можно считать $p_j(\nu_j) = 0$ или, в явной форме,

$$\nu_1 = i\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}}, \quad \nu_2 = i\sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}}. \tag{1.15}$$

В случае $\alpha \notin \mathcal{A}_j$ корни характеристического уравнения находятся из уравнений

$$\begin{gathered}(\alpha_2^2p_1 - \alpha_5^2p_2)(\nu_1) = 0, \ p_2(\nu_2) = 0, \quad \alpha \notin \mathcal{A}_1;\\ p_1(\nu_1) = 0, \ (\alpha_3^2p_2 - \alpha_5^2p_1)(\nu_2) = 0, \quad \alpha \notin \mathcal{A}_2.\end{gathered} \tag{1.16}$$

В самом деле, пусть, например, $\alpha \notin \mathcal{A}_1$. Тогда $\alpha_2p_3 - \alpha_5p_2 = 0$ и имеем равенство $\alpha_2^2\chi = (\alpha_2^2p_1 - \alpha_5^2p_2)p_2$.

Случай $\alpha \notin \mathcal{A}_2$ рассматривается аналогично. Заметим, что принятая в (1.16) нумерация корней согласуется со случаем $\alpha \in \mathcal{A}_0$ в (1.15).

Во всех отмеченных трех случаях корни ν_j различны. В случае (1.15) этот факт вытекает из (1.12). Если эти корни совпадают в случае (1.16), то $p_1(\nu) = p_2(\nu) = 0$ и, значит, $p(\nu) = 0$, что противоречит (1.14). В частности, в ситуации (ii) кратного корня матрица α обязательно принадлежит $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$.

Условимся ненулевой вектор $x \in \mathbb{C}^2$ называть *собственным вектором* многочлена p, отвечающим корню ν характеристического уравнения, если $p(\nu)x = 0$, и *присоединенным вектором*, если $p(\nu)x + p'(\nu)y = 0$, где $p(\nu)y = 0$ и $p'(\nu)y \neq 0$.

Лемма 1.1.

а). *Пусть корни ν_j различны. Тогда существует базис $e = \{e_1, e_2\}$ пространства $\mathbb{C}^2$, состоящий из собственных векторов, т. е. $p(\nu_j)e_j = 0$, $j = 1, 2$. Любой другой базис $\tilde{e}$ этого типа связан с e соотношением $\tilde{e}_j = \lambda_j e_j$, $j = 1, 2$.*

б). *Пусть корень ν кратен. Тогда существует базис $e = \{e_1, e_2\}$, состоящий из собственного и присоединенного векторов, т. е.*

$$p(\nu)e_1 = 0, \quad p(\nu)e_2 + p'(\nu)e_1 = 0. \tag{1.17}$$

Любой другой базис $\tilde{e}$ этого типа связан с e соотношением $\tilde{e}_1 = \lambda e_2$, $\tilde{e}_2 = \lambda e_2 + \lambda_0 e_1$, $\lambda \neq 0$.

Доказательство.

а). В силу (1.14) пространства $\{x \in \mathbb{C}^2,\ p(\nu_j)x = 0\}$, $j = 1, 2$, одномерны, поэтому достаточно убедиться, что для ненулевого вектора $x \in \mathbb{C}^2$ совместные равенства $p(\nu_1)x = p(\nu_2)x = 0$ невозможны.

В самом деле, предположим, что такой вектор $x = (x_1, x_2)$ существует. Тогда обязательно $x_1 x_2 \neq 0$, поскольку многочлены p_1 и p_2 не могут иметь своими корнями оба числа ν_j. Таким образом, можно считать $x_1 = 1$, $x_2 = \lambda$. Тогда равенство $p(\nu_j)x = 0$ сводится к двум скалярным равенствам $(p_1 + \lambda p_3)(\nu_j) = 0$, $(p_3 + \lambda p_2)(\nu_j) = 0$. Следовательно, многочлены $p_1 + \lambda p_3$ и $p_3 + \lambda p_2$ нацело делятся на многочлен $q(z) = (z - \nu_1)(z - \nu_2)$, так что

$$p_1 + \lambda p_3 = c_1 q, \quad p_3 + \lambda p_2 = c_2 q$$

с некоторыми множителями $c_j \in \mathbb{C}$. Поскольку коэффициенты многочленов p_j вещественны, отсюда и

$$p_1 + \overline{\lambda} p_3 = \overline{c}_1 \overline{q}, \quad p_3 + \overline{\lambda} p_2 = \overline{c}_2 \overline{q},$$

где $\overline{q}(z) = (z - \overline{\nu}_1)(z - \overline{\nu}_2)$. Поскольку квадратный трехчлен с вещественными коэффициентами не может быть кратен q, число λ не является вещественным. Поэтому из этих систем многочлены p_j можно выразить через q, $\overline{q}$ по формулам $p_j = d_j q + \overline{d}_j \overline{q}$, $1 \leqslant j \leqslant 3$, с соответствующими коэффициентами $d_j \in \mathbb{C}$. В частности,

$$p_1 p_2 - p_3^2 = (d_1 d_2 - d_3^2) q^2 + (d_1 \overline{d}_2 + \overline{d}_1 d_2 - 2 d_3 \overline{d}_3) q \overline{q} + (\overline{d}_1 \overline{d}_2 - \overline{d}_3^2) \overline{q}^2.$$

С другой стороны, согласно (1.6) в принятых обозначениях

$$p_1 p_2 - p_3^2 = c q \overline{q}, \quad c = \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_5^2 > 0.$$

Следовательно, должно быть $d_1 d_2 - d_3^2 = 0$ и $2\,\mathrm{Re}(d_1 \overline{d}_2) - 2 d_3 \overline{d}_3 = c$ (в противном случае многочлен $\overline{q}^2$ делится нацело на q, что невозможно). Но тогда $c = 2[\mathrm{Re}(d_1 \overline{d}_2) - |d_1 \overline{d}_2|]$, что противоречит неравенству $c > 0$.

б). Покажем прежде всего, что совместное равенство $p(\nu)x = p'(\nu)x = 0$ невозможно ни для какого ненулевого вектора $x \in \mathbb{C}$. В самом деле, предположим, что такой вектор $x = (x_1, x_2)$ существует. Тогда обязательно $x_1 x_2 \neq 0$, поскольку для вещественных многочленов p_j равенства $p_j(\nu) = p_j'(\nu) = 0$ невозможны. Как и в случае различных корней, отсюда приходим к соотношениям

$$p_1 + \lambda p_3 = c_1 q, \quad p_3 + \lambda p_2 = c_2 q,$$

где $q(z) = (z - \nu)^2$. Дальнейшие рассуждения аналогичны проведенным при доказательстве пункта а).

Таким образом, любая пара ненулевых векторов e_1, e_2 со свойством (1.17) является базисом. Существование такой пары будет показано ниже в лемме 1.2.

Остается установить связь между двумя базисами e и $\tilde{e}$, удовлетворяющими (1.17). Очевидно, $\tilde{e}_1 = \lambda e_1,\ \lambda \neq 0$, и $\tilde{e}_2 = \lambda_0 e_1 + \lambda' e_2,\ \lambda' \neq 0$. Следовательно,

$$p(\nu)\tilde{e}_2 + p'(\nu)\tilde{e}_1 = \lambda' p(\nu) e_2 + \lambda p'(\nu) e_1 = 0.$$

Вычитая из этого равенства второе равенство (1.17), умноженное на λ', получим $(\lambda - \lambda')p'(\nu)e_1 = 0$, откуда $\lambda' = \lambda$. □

Рассмотрим присоединенную с p матрицу

$$p^* = \begin{pmatrix} p_2 & -p_3 \\ -p_3 & p_1 \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

Лемма 1.2.

(i) *В случае различных корней при $\alpha \in \mathcal{A}_k,\ k = 1, 2$, условию $p(\nu_j)e_j = 0$ предложения* а) *леммы* 1.1 *удовлетворяет k-й столбец $e_j = p^*_{(k)}(\nu_j)$. Если $\alpha \notin \mathcal{A}_1$, то в обозначениях* (1.16) *можно положить $e_j = p^*_{(j)}(\nu_j)$. Соответственно в случае $\alpha \notin \mathcal{A}_2$ аналогичным образом можно положить $e_1 = p^*_{(1)}(\nu_2),\ \ e_2 = p^*_{(2)}(\nu_1)$.*

(ii) *В случае кратного корня матрица $\alpha \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ и условию* (1.17) *удовлетворяют векторы $e_1 = p^*_{(k)}(\nu)$ и $e_2 = (p^*)'_{(k)}(\nu)$ для любого значения $k = 1, 2$, где штрих означает производную матрицы* (1.18).

Доказательство. Проведем доказательство для каждого из случаев (i) и (ii) отдельно.

(i). Воспользуемся очевидным соотношением

$$p(z)p^*(z) = \chi(z), \tag{1.19}$$

где χ в правой части означает скалярную матрицу. Из этого соотношения следует, что $p(\nu_j)p^*_{(k)}(\nu_j) = 0$ для каждого из значений $k = 1, 2$. Другими словами, если столбец $p^*_{(k)}(\nu_j)$ матрицы $p^*(\nu_j)$ ненулевой, то он является собственным вектором, отвечающим ν_j. Согласно (1.18) при $k = 1$ ($k = 2$) нулевым он может быть только тогда, когда $\alpha \notin \mathcal{A}_1$ ($\alpha \notin \mathcal{A}_2$). С учетом леммы 1.1 первое утверждение леммы получается отсюда непосредственно.

(ii). Поскольку по условию $\chi(\nu) = \chi'(\nu) = 0$, то

$$p(\nu)p^*(\nu) = p(\nu)(p^*)'(\nu) + p'(\nu)p^*(\nu) = 0.$$

Следовательно, векторы $e_1 = p^*_{(k)}(\nu)$ и $e_2 = (p^*)'_{(k)}(\nu)$ удовлетворяют (1.17). Поскольку, как было отмечено ранее, в рассматриваемом случае кратного корня ν матрица α принадлежит $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$, эти векторы ненулевые. □

Упругая среда называется *ортотропной*, если

$$\alpha_5 = \alpha_6 = 0, \tag{1.20}$$

в этом случае координатные прямые служат осями симметрии упругой среды и для многочленов (1.6) имеем более простые выражения

$$p_1(z) = \alpha_1 + \alpha_3 z^2,\ p_2(z) = \alpha_3 + \alpha_2 z^2,\ p_3(z) = (\alpha_3 + \alpha_4)z. \tag{1.21}$$

В частности, в ортотропной среде либо $\alpha \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$, либо $\alpha \in \mathcal{A}_0$.

Из (1.21) следует, что характеристическое уравнение $p_1 p_2 - p_3^2 = 0$ биквадратно и его корни ν в верхней полуплоскости можно выразить явно. С этой целью введем положительные ρ и ρ_0 по формулам

$$\rho^2 = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \quad \rho_0^2 = \frac{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_4^2 + 2\alpha_3(\sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \alpha_4)}{\alpha_2\alpha_3}. \tag{1.22}$$

То, что выражение в правой части второго равенства положительно, следует из условия $\alpha_4^2 < \alpha_1\alpha_2$. Из этих же соображений величина

$$\rho_0^2 - 4\rho^2 = \frac{(\sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \alpha_4)(\sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \alpha_4 - 2\alpha_3)}{\alpha_2\alpha_3} \tag{1.23}$$

имеет один и тот же знак с $\sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \alpha_4 - 2\alpha_3$.

В этих обозначениях для корней ν имеем формулы

$$\nu_{1,2} = i\rho e^{\pm i\theta}, \quad 2\theta = \arccos\left[\frac{\rho_0^2 - 2\rho^2}{2\rho^2}\right], \text{ если } \rho_0 < 2\rho,$$

$$\nu_{1,2} = i\rho e^{\pm\tau}, \quad 2\tau = \operatorname{arch}\left[\frac{\rho_0^2 - 2\rho^2}{2\rho^2}\right], \text{ если } \rho_0 > 2\rho, \tag{1.24}$$

$$\nu_1 = \nu_2 = i\rho, \text{ если } \rho_0 = 2\rho.$$

В самом деле, пусть δ означает выражение в квадратных скобках (1.24), так что $\rho_0^2 = 2(\delta+1)\rho^2$. Тогда

$$p_1(z)p_2(z) - p_3^2(z) = \alpha_2\alpha_3(\rho^4 + 2\delta\rho^2 z^2 + z^4).$$

Следовательно, $\nu^2 = -\rho^2(\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1})$, что после элементарных преобразований приводит к (1.24).

Заметим, что случай $\alpha \in \mathcal{A}_0$ диагонализируемой системы Ламе соответствует первому равенству в (1.20) и в этом случае выражения для корней ν_j совпадают с (1.14). Случай (ii) кратных корней соответствует последнему равенству в (1.24). Заметим, что этот факт согласуется с критерием (1.9), (1.10) кратных корней.

Легко видеть, что независимо от трех возможных случаев в (1.24) для суммы и произведения (1.7) корней имеем единые выражения

$$s = i\rho_0, \ t = -\rho^2. \tag{1.25}$$

Ортотропная среда называется *изотропной*, если в дополнение к (1.20) выполнены соотношения

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 2\alpha_3 + \alpha_4. \tag{1.26}$$

Совместно с неравенством $\alpha_4^2 < \alpha_1\alpha_2$ отсюда вытекает, что $\alpha_1 > \alpha_3$, так что величина

$$\varkappa = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3} > 1. \tag{1.27}$$

Легко видеть, что в рассматриваемом случае характеристическое уравнение имеет кратный корень $\nu = i$.

2. Представление решений системы Ламе

Соответственно двум случаям (i) и (ii) корней характеристического уравнения введем матрицы

$$(i)\ J = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \quad (ii)\ J = \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

С этой матрицей свяжем эллиптическую систему первого порядка специального вида

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} - J\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \tag{2.2}$$

при $J = i$ она соответствует системе Коши—Римана, определяющей аналитические функции. По этой причине решения $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ этой системы называем J-*аналитическими* функциями.

В исследованиях краевых задач плоской упругости классическими методами можно выделить два основных направления. Первое из них состоит в использовании аналитических функций по аналогии с формулами Колосова—Мусхелишвили [6] в изотропном случае. Это направление представлено работами С. Г. Лехницкого, Г. Н. Савина, С. Г. Михлина и др. (см., например, [5, 6, 20]). Второе заключается в применении вместо аналитических функций решений некоторых эллиптических систем первого порядка (см., например, [17, 18, 21]). Рассматриваемый ниже подход примыкает к этому направлению и базируется на системе (2.2), точнее, на представлении общего решения системы Ламе через J-аналитические функции. В основе этого представления лежит следующая структурная лемма.

Лемма 2.1. *Существует такая обратимая матрица* $b \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, *что*

$$a_{11}b + (a_{12} + a_{21})bJ + a_{22}bJ^2 = 0, \tag{2.3}$$

при этом любая другая матрица $\tilde{b}$ *с теми же свойствами связана с* b *соотношением* $\tilde{b} = bd$ *с некоторой обратимой матрицей* d, *коммутирующей с* J.

Равенство (2.3) *равносильно соотношению*

$$AB = B\,\mathrm{diag}(J, \overline{J}) \tag{2.4}$$

для блочных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & \bar{b} \\ bJ & \overline{bJ} \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где положено $a_0 = -a_{22}^{-1}a_{11},\ a_1 = -a_{22}^{-1}(a_{12} + a_{21})$. *При этом матрица* B *обратима.*

Доказательство. Из (2.1) видно, что для любой матрицы $b \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ в случае (i) различных корней для j-го столбца имеем соотношения $(bJ)_{(j)} = \nu_j b_{(j)},\ (bJ^2)_{(j)} = \nu_j^2 b_{(j)}$ и, следовательно,

$$(a_{11} + (a_{12} + a_{21})bJ + a_{22}bJ^2)_{(j)} = p(\nu_j)b_{(j)} \quad (j = 1, 2).$$

Аналогично в случае (ii) кратного корня

$$(bJ)_{(1)} = \nu b_{(1)}, \qquad (bJ)_{(2)} = b_{(1)} + \nu b_{(2)},$$
$$(bJ^2)_{(1)} = \nu^2 b_{(1)}, \quad (bJ^2)_{(2)} = 2\nu b_{(1)} + \nu^2 b_{(2)},$$

откуда

$$(a_{11} + (a_{12} + a_{21})bJ + a_{22}bJ^2)_{(1)} = p(\nu)b_{(1)},$$
$$(a_{11} + (a_{12} + a_{21})bJ + a_{22}bJ^2)_{(2)} = p(\nu)b_{(2)} + p'(\nu)b_{(1)}.$$

Поэтому, выбирая в качестве столбцов $b_{(j)}$ вектора e_j леммы 1.1, приходим к справедливости первой части леммы. Нужно только принять во внимание, что матрицы d, коммутирующие с J, имеют вид

$$(i)\ d = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad (ii)\ J = \begin{pmatrix} d_1 & d_0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Равносильность соотношений (2.3) и (2.4) очевидна, поэтому остается установить обратимость матрицы B.

Рассмотрим обратимую матрицу B_1, приводящую A к жордановой форме. Поскольку матрица A вещественно, жорданову матрицу можно выбрать в виде $\mathrm{diag}(J_1, \overline{J_1})$, где собственные значения матрицы J_1 лежат в верхней полуплоскости, причем эта матрица либо диагональна, либо является клеткой Жордана. Соответственно B_1 можно подчинить блочной структуре

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & \overline{b_1} \\ b_2 & \overline{b_2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$AB_1 = B_1 \mathrm{diag}(J_1, \overline{J_1}). \tag{2.7}$$

В силу очевидного тождества

$$(z - A)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ -a_0 & z^2 - a_1 z - a_0 \end{pmatrix}$$

собственные значения матрицы A в верхней полуплоскости совпадают с корнями характеристического уравнения $\det p(z) = 0$. Следовательно, либо $J_1 = J$, либо матрица J_1 скалярна: $J_1 = \nu$. Покажем, что второй случай невозможен. В самом деле, если $J_1 = \nu$, то существуют два линейно независимых собственных вектора $\eta, \tilde{\eta} \in \mathbb{C}^4$ матрицы A, отвечающих собственному значению ν. Но тогда из вида (2.5) этой матрицы следует, что $\eta = (\eta_1, \eta_2)$, где векторы $\eta_j \in \mathbb{C}^2$ удовлетворяют соотношениям $\eta_2 = \nu\eta_1,\ p(\nu)\eta_1 = 0$ и аналогичным свойством обладает вектор $\tilde{\eta}$. Но тогда вектора η_1 и $\tilde{\eta}_1$, а вместе с ними и векторы $\eta, \tilde{\eta}$ должны быть линейно зависимыми, что противоречит принятому допущению.

Итак, матрица $J_1 = J$ и из (2.4) следует, что $b_2 = b_1 J$ и матрица b_1 удовлетворяет (2.3). Переходя к столбцам этих матриц, как и при доказательстве леммы 1.1, убеждаемся, что $b_1 = bd$ с некоторой матрицей d, коммутирующей с J. Но тогда $B_1 = B\operatorname{diag}(d, \overline{d})$, откуда $\det B_1 = \det B |\det d|^2$. Следовательно, матрицы B и d обратимы, что завершает доказательство леммы. $\square$

Обратимся к системе (2.2) в некоторой области D комплексной плоскости. Условимся записывать частные производные ее решений в виде

$$\phi' = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad J\phi' = \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

Тогда если с комплексным числом $z = x + iy$ связать матрицу

$$z_J = x + yJ, \tag{2.8}$$

то можно записать

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = dz_J \phi'.$$

В частности, функция ϕ восстанавливается по своей производной $\psi = \phi'$ криволинейным интегралом

$$\phi(z) = \phi(z_0) + \int_{z_0}^{z} dt_J \psi(t) \tag{2.9}$$

по некоторой гладкой дуге, соединяющей точки z и z_0 в области D.

Обратно, если J-аналитическая функция ψ задана, то эта формула определяет J-аналитическую функцию ϕ, производная которой совпадает с ψ. Если область D односвязна, то эта формула определяет однозначную функцию. Однако в случае многосвязной области функция ϕ, вообще говоря, многозначна и при обходе связных компонент границы ∂D может допускать ненулевые приращения. В дальнейшем под многозначными функциями понимаются функции, частные производные которой однозначны.

Теорема 2.1. *В обозначениях леммы* 2.1 *любое решение* u *системы Ламе* (1.1) *в области* D *представимо в виде*

$$u = \operatorname{Re} b\phi, \tag{2.10}$$

с некоторой (*вообще многозначной*) J*-аналитической функцией* ϕ *в этой области, причем ее производная* ϕ' *восстанавливается по градиенту* $\operatorname{grad} u$ *этого решения формулой*

$$\phi' = 2\left(d_1 \frac{\partial u}{\partial x} + d_2 \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ \overline{d}_1 & \overline{d}_2 \end{pmatrix} = B^{-1}. \tag{2.11}$$

Доказательство. В обозначениях (2.5) по отношению к вектору $U = \operatorname{grad} u$ систему (1.1) можно записать в форме системы первого порядка

$$\frac{\partial U}{\partial y} - A\frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

В силу (2.4) по отношению к $V = B^{-1}U$ эта система переходит в

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \operatorname{diag}(J, \overline{J})\frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Поскольку вектор U вещественен, вектор $V = B^{-1}\operatorname{grad} u$ имеет блочную структуру $(\psi, \overline{\psi})$, так что функция ψ является J-аналитической и

$$\operatorname{grad} u = BV, \quad V = (\psi, \overline{\psi}). \tag{2.12}$$

Таким образом, в соответствии с видом (2.5) матрицы B имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\operatorname{Re} b\psi, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2\operatorname{Re} bJ\psi.$$

Отсюда аналогично (2.9) приходим к равенству

$$u = \operatorname{Re} b\phi + \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^2,$$

где J-аналитическая функция ϕ имеет своей производной $\phi' = \psi$. В силу обратимости матрицы B найдется такой вектор $\eta \in \mathbb{C}^2$, что $\operatorname{Re} b\eta = \xi$. Поэтому, обозначая $\phi + \eta$ снова через ϕ, в результате приходим к представлению (2.10).

Что касается равенства (2.11), то оно равносильно (2.12) по отношению к $\psi = \phi'$. □

Теорему 2.1 можно дополнить формулой представления и для тензора напряжений

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & \sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что вектор $u = (u_1, u_2)$ характеризует вектор смещения, он связан со столбцами $\sigma_{(1)}$, $\sigma_{(2)}$ тензора напряжений соотношениями

$$\sigma_{(i)} = a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{i2}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad i = 1, 2, \tag{2.13}$$

которые составляют содержание закона Гука.

При отсутствии массовых сил матрица σ удовлетворяет уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{(2)}}{\partial y} = 0,$$

которые совместно с (2.13) и приводят к системе Ламе.

Столбцы тензора напряжений удобно описывать в форме частных производных так называемой сопряженной функции v. Последняя определяется соотношением

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\left(a_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2.14}$$

Записывая (1.1) в форме

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

убеждаемся, что необходимое условие существования функции v выполнено. Поэтому с точностью до аддитивного постоянного слагаемого $\xi \in \mathbb{R}^l$ она однозначно определена в каждой односвязной подобласти $D_0 \subseteq D$. Во всей области эта функция может оказаться многозначной и допускать ветвление при обходе связных компонент границы ∂D.

Если сопряженная функция v постоянна, то (2.14) является однородной системой относительно вектора градиента η, поэтому на основании (1.4) отсюда

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0$$

тождественно в области D. Очевидно, эти соотношения равносильны

$$u_1(x, y) = \lambda_1 - \lambda_0 y, \quad u_2(x, y) = \lambda_1 + \lambda_0 x \tag{2.15}$$

с некоторыми $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Решения такого типа назовем *тривиальными*, они соответствуют перемещению упругой среды как целого.

Из (2.13), (2.14) приходим к выражениям

$$\sigma_{(1)} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_{(2)} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.16}$$

для столбцов тензора напряжений.

Теорема 2.2. *В условиях теоремы* 2.1 *сопряженная функция к решению* (2.10) *системы Ламе представима в виде*

$$v = \operatorname{Re} c\phi, \quad c = -(a_{21}b + a_{22}bJ). \tag{2.17}$$

При этом v постоянна тогда и только тогда, когда в этом представлении производная ϕ' постоянна.

Доказательство. Дифференцируя (2.10) и подставляя результат в формулы (2.14), получим:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\operatorname{Re}(a_{21}b + a_{22}bJ)\phi', \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{Re}(a_{11}b + a_{12}bJ)\phi'. \tag{2.18}$$

В силу (2.11) для матрицы c в (2.17) имеем соотношение $a_{11}b + a_{12}bJ = cJ$, так что

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \operatorname{Re} c\phi', \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{Re} cJ\phi'.$$

Как и при доказательстве теоремы 2.1, отсюда приходим к формуле (2.17).

Если в представлении (2.17) функция v постоянна, то, как было отмечено выше, решение u системы Ламе тривиально и имеет вид (2.15). Совместно с (2.10) отсюда приходим к системе

$$\operatorname{Re} b\phi' = \xi, \quad \operatorname{Re} c\phi' = 0$$

с вектором $\xi = (0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^2$. Согласно лемме 2.1 матрица

$$\begin{pmatrix} b & \bar{b} \\ c & \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & \bar{b} \\ bJ & \overline{bJ} \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

обратима, так что предыдущая система дает постоянный вектор ϕ'. □

С помощью леммы 1.2 нетрудно дать явные выражения для матриц b и c, фигурирующих в теоремах 2.1, 2.2. Эти выражения введем отдельно для каждого из трех возможных случаев принадлежности матрицы α подмножествам в (1.13). С этой целью в обозначениях (1.3) введем многочлены

$$\begin{array}{ll} q_0(z) = \beta_5 - \beta_3 z + \beta_6 z^2, & \\ q_1(z) = \beta_2 - \beta_5 z + \beta_4 z^2, & q_3(z) = zq_2(z), \\ q_2(z) = \beta_4 - \beta_6 z + \beta_1 z^2, & q_4(z) = q_0(z) - zq_2(z). \end{array} \tag{2.20}$$

Непосредственно проверяется, что

$$-(a_{21} + a_{22}z)\begin{pmatrix} p_2(z) & -p_3(z) \\ -p_3(z) & p_1(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_3(z) & -q_1(z) \\ q_2(z) & q_4(z) \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Лемма 2.2. *В случае* (i) *различных корней можно положить*

$$\begin{aligned} b &= \begin{pmatrix} p_2(\nu_1) & p_2(\nu_2) \\ -p_3(\nu_1) & -p_3(\nu_2) \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} -q_3(\nu_1) & -q_3(\nu_2) \\ q_2(\nu_1) & q_2(\nu_2) \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathcal{A}_1, \\ b &= \begin{pmatrix} -p_3(\nu_1) & -p_3(\nu_2) \\ p_1(\nu_1) & p_1(\nu_2) \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} -q_1(\nu_1) & -q_1(\nu_2) \\ q_4(\nu_1) & q_4(\nu_2) \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathcal{A}_2, \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$b = 1, \quad c = \begin{pmatrix} -i\sqrt{\alpha_1\alpha_3} & -\alpha_3 \\ \alpha_3 & -i\sqrt{\alpha_2\alpha_3} \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathcal{A}_0. \tag{2.23}$$

В случае (ii) *кратного корня можно положить*

$$b = \begin{pmatrix} p_2(\nu) & p_2'(\nu) \\ -p_3(\nu) & -p_3'(\nu) \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} -q_3(\nu) & -q_3'(\nu) \\ q_2(\nu) & q_2'(\nu) \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

Во всех случаях матрица c *обратима и представима в виде*

$$c = c_0 d, \tag{2.25}$$

где

$$(i) \quad c_0 = \begin{pmatrix} -\nu_1 & -\nu_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (ii) \quad c_0 = \begin{pmatrix} -\nu & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и матрица d *коммутирует с* J.

Доказательство. Выражения (2.22) и (2.24) для матрицы b вытекают непосредственно из леммы 1.2. В том, что при $\alpha \in \mathcal{A}_0$ матрица $b = 1$ удовлетворяет (2.3), с учетом (1.15) можно убедиться прямой проверкой.

В случае (i) для столбцов матрицы c в (2.17) имеем выражения $c_{(j)} = -(a_{21} + a_{22}\nu_j)b_{(j)}$. Подставляя сюда столбцы матрицы b из (2.22) и пользуясь соотношением (2.20), получим соответствующие выражения для матриц c. Равенство (2.23) для c проверяется непосредственно.

В случае (ii) аналогичным образом соотношения

$$c_{(1)} = -(a_{21} + a_{22}\nu)b_{(1)}, \quad c_{(2)} = -(a_{21} + a_{22}\nu)b_{(2)} - a_{22}b_{(1)},$$

совместно с (2.20) и выражением (2.24) для b приводят к нужному результату.

Остается установить вторую часть леммы. В силу (1.15) для матрицы c в (2.23) можно записать

$$c = \begin{pmatrix} -\nu_1 & -\nu_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 \\ 0 & -i\sqrt{\alpha_2\alpha_3} \end{pmatrix},$$

поэтому достаточно рассмотреть случаи $\alpha \in \mathcal{A}_j, \ j = 1, 2$.

В обозначениях (2.20) многочлен (1.8) можно записать в форме

$$\chi(z) = q_1(z) - zq_0(z) + z^2q_2(z) = q_1(z) - zq_4(z). \tag{2.26}$$

В частности, $q_1(\nu) = \nu q_4(\nu)$ при $\chi(\nu) = 0$. Следовательно, в случае различных корней ν_j матрицу c в (2.22) можно записать в форме, соответственно,

$$c = \begin{pmatrix} -\nu_1 & -\nu_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p_2(\nu_1) & 0 \\ 0 & -p_2(\nu_2) \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathcal{A}_1,$$

и

$$c = \begin{pmatrix} -\nu_1 & -\nu_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_4(\nu_1) & 0 \\ 0 & p_4(\nu_2) \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathcal{A}_2.$$

Если корень ν кратный, то $\alpha \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ и матрицу c в (2.24) можно представить в форме

$$c = \begin{pmatrix} -\nu & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_3(\nu) & p_3'(\nu) \\ 0 & p_3(\nu) \end{pmatrix}.$$

Поэтому достаточно убедиться, что

$$\begin{aligned} &\chi(\nu) = q_2(\nu) = 0 \Rightarrow \alpha \notin \mathcal{A}_1, \\ &\chi(\nu) = q_4(\nu) = 0 \Rightarrow \alpha \notin \mathcal{A}_2. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Первые три равенства в (2.20) по отношению к векторам $q = (q_2, q_1, q_0)$ и $e = (z^2, 1, -z)$ можно записать в форме $q = \beta e$. В частности, вектор $q(z) \neq 0$ для любого z. Поскольку $\beta = (\det \alpha)\alpha^{-1}$, отсюда $(\det \alpha)e = \alpha q$, или, в явном виде,

$$\begin{gathered} (\det \alpha)z^2 = \alpha_1 q_2 + \alpha_4 q_1 + \alpha_6 q_0, \\ (\det \alpha) = \alpha_4 q_2 + \alpha_2 q_1 + \alpha_5 q_0, \\ -(\det \alpha)z = \alpha_6 q_2 + \alpha_5 q_1 + \alpha_3 q_0. \end{gathered}$$

В частности, многочлены q_j связаны двумя соотношениями

$$\begin{aligned} &(\alpha_4 z + \alpha_6)q_2 + (\alpha_2 z + \alpha_5)q_1 + (\alpha_5 z + \alpha_3)q_2 = 0, \\ &(\alpha_6 z + \alpha_1)q_2 + (\alpha_5 z + \alpha_4)q_1 + (\alpha_3 z + \alpha_6)q_2 = 0. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Предположим теперь, что $\chi(\nu) = q_2(\nu) = 0$. Тогда согласно (2.26) должно быть $q_1(\nu) = \nu q_0(\nu)$, $q_0(\nu) \neq 0$. Поэтому согласно (1.6) при $z = \nu$ левая часть первого равенства (2.28) совпадает с $p_2(\nu)q_0(\nu)$. Таким образом, $p_2(\nu) = 0$ и на основании (1.11) отсюда следует (2.27).

Рассуждения для второго случая аналогичны. Если $\chi(\nu) = q_4(\nu) = 0$, то в силу (2.26) должно быть $q_1(\nu) = 0$ и $q_0(\nu) = \nu q_2(\nu), \ q_2(\nu) \neq 0$. Поэтому из (1.6) и второго равенства (2.28) следует $p_1(\nu) = 0$, что означает линейную зависимость многочленов p_1 и p_3. □

Согласно теореме 2.2 пространство J-аналитических функций ϕ, для которых вещественная функция $v = \operatorname{Re} c\phi$ тождественно равна нулю, трехмерно и состоит из многочленов

$$\phi(z) = \eta_0 + z_J\eta_1, \quad \operatorname{Re} c\eta_0 = 0, \ \operatorname{Re} c\eta_1 = \operatorname{Re} cJ\eta_1 = 0. \tag{2.29}$$

Этот факт можно несколько уточнить.

Лемма 2.3. *Пространство* $\{\eta \in \mathbb{C}^2 \mid \operatorname{Re} c\eta = \operatorname{Re} cJ\eta = 0\}$ *одномерно и натянуто на вектор* e, *определяемый системой*

$$ce = i\xi^0, \ cJe = i\xi^1, \tag{2.30}$$

где в обозначениях (1.7) *векторы* $\xi^k \in \mathbb{R}^2$ $(k = 0, 1)$ *определяются равенствами*

$$\xi^0 = (-\operatorname{Im} t, \operatorname{Im} s), \quad \xi^1 = (-\operatorname{Im}(\bar{s}t), \operatorname{Im} t).$$

В частности, в формуле (2.29) *можно положить* $\eta_1 = \lambda e$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Совместные равенства $\operatorname{Re} c\eta = \operatorname{Re} cJ\eta = \operatorname{Re} cJ^2\eta = 0$ *возможны только для* $\eta = 0$.

Доказательство. Согласно (2.25) операция $\eta \to d\eta$ переводит подпространство $X_n \subseteq \mathbb{C}^2$, определяемое условиями $\operatorname{Re} cJ^k\eta = 0$, $0 \leqslant k \leqslant n$, в аналогичное пространство, отвечающее c_0. А в случае $c = c_0$ равенства $\dim X_1 = 1$ и $\dim X_2 = 0$ проверяются непосредственно.

Заметим далее, что система уравнений (2.30) разрешима тогда и только тогда, когда

$$(cJc^{-1})\xi^0 = \xi^1. \tag{2.31}$$

Но в силу (2.25) в обоих случаях (i) и (ii) матрица

$$cJc^{-1} = c_0Jc_0^{-1} = \begin{pmatrix} s & t \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

и равенство (2.31) для рассматриваемых векторов ξ^k проверяется непосредственно. □

Рассмотрим подробнее систему (2.1), (2.2). Если корни ν_j различны, то эта система распадается на два скалярных уравнения

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \nu_j \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0,$$

которые в переменных $\tilde{x} + i\tilde{y} = x + \nu_j y$ переходят в уравнение Коши—Римана. Поэтому подстановка

$$\phi_j(x,y) = \psi_j(x + \nu_j y), \quad j = 1,2, \tag{2.32}$$

определяет аналитические функции ψ_j в областях $D(\nu_j) = \{\tilde{z} = x + \nu_j y,\ z \in D\}$.

Прямая проверка показывает, что и в случае кратного корня ν подстановка

$$\phi_1(x,y) = \psi_1(x + \nu y) + y\psi_2'(x + \nu y),\ \phi_2(x,y) = \psi_2(x + \nu y) \tag{2.33}$$

осуществляет взаимно однозначное соответствие между J-аналитической вектор-функцией ϕ и вектор-функцией ψ, аналитической в области $D(\nu)$. Обратное преобразование дается аналогичной формулой

$$\psi_1(x + \nu y) = \phi_1(x,y) - y\phi_2'(x,y),\ \psi_2(x + \nu y) = \phi_2(x,y).$$

Следует заметить, что в случае, когда область D является верхней полуплоскостью, функция ψ определена также в этой полуплоскости.

Подстановка формул (2.32), (2.33) в (2.10), (2.17) совместно с (2.13) приводит к классическим представлениям вектора смещения и тензора напряжений через пару аналитических функций. В случае кратных корней в этом представлении участвует и производная одной из этих функций. Хорошо известно [5, 6], что данное обстоятельство несколько затрудняет использование данных представлений при исследовании краевых задач.

В качестве иллюстрации обсудим связь представлений (2.12), (2.15) для изотропной среды с классическими формулами Колосова—Мусхелишвили, выражающими вектор перемещений u и тензор напряжений σ через аналитические функции. Согласно разделу 1 в рассматриваемом случае имеем кратный корень $\nu = i$ и матрица J представляет собой клетку Жордана, а матрицы b и c даются формулами (2.24). В силу (1.20), (1.26) эти формулы дают равенства

$$b = \begin{pmatrix} \alpha_3 - \alpha_1 & 2\alpha_1 i \\ (\alpha_3 - \alpha_1)i & \alpha_3 - \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad c = 2\alpha_3 \begin{pmatrix} (\alpha_1 - \alpha_3)i & 2\alpha_1 - \alpha_3 \\ \alpha_3 - \alpha_1 & \alpha_1 i \end{pmatrix}.$$

Согласно лемме 2.1 в качестве b и c можно взять также матрицы, которые получаются умножением этих равенств справа на матрицу

$$d = (\alpha_3 - \alpha_1)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha_1(\alpha_1 - \alpha_3)^{-1} i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После элементарных вычислений в результате приходим к формулам

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & -\varkappa \end{pmatrix}, \quad c = \alpha_3 \begin{pmatrix} -2i & \varkappa - 1 \\ 2 & i(\varkappa + 1) \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

с положительной постоянной $\varkappa$ из (1.27).

С этими матрицами в покомпонентной записи представление (2.10) принимает вид

$$u_1 = \operatorname{Re} \phi_1, \quad u_2 = \operatorname{Re}(i\phi_1 - \varkappa\phi_2). \tag{2.35}$$

Подставляя в (2.17) выражение (2.34) матрицы c, для элементов матрицы σ в (2.16) получим представления

$$\begin{gathered}\sigma_1 = \mathrm{Re}[2\phi_1' + i(\varkappa - 3)\phi_2'],\\ \sigma_2 = -\,\mathrm{Re}[2\phi_1' + i(\varkappa + 1)\phi_2'],\\ \sigma_3 = \mathrm{Re}[2i\phi_1' - (\varkappa - 1)\phi_2')\end{gathered} \qquad (2.36)$$

компонент тензора напряжений. Стоит отметить, что матрица c обладает свойством $(cJ)_{2k} = -c_{1k}$, согласно которому в покомпонентной записи (2.35) равенство, определяющее σ_3, встречается дважды.

Подставляя (2.33) в (2.34), (2.36), приходим к представлению

$$u_1 = \mathrm{Re}[\psi_1 + y\psi_2'],\ u_2 = \mathrm{Re}[i(\psi_1 + y\psi_2') - \varkappa\psi_2]$$

компонент вектора смещения и

$$\begin{gathered}\sigma_1 = \alpha_3\,\mathrm{Re}[2(\psi_1' + y\psi_2'') + i(\varkappa - 3)\psi_2'],\\ \sigma_2 = -\alpha_3\,\mathrm{Re}[2(\psi_1' + y\psi_2'') + i(\varkappa + 1)\psi_2'],\\ \sigma_3 = \alpha_3\,\mathrm{Re}[2i(\psi_1' + y\psi_2'') - (\varkappa - 1)\psi_2']\end{gathered}$$

элементов тензора напряжений через пару аналитических функций ψ_1, ψ_2 той же переменной z.

С помощью линейной подстановки

$$\chi_1(z) = -i\psi_2(z),\ \chi_2(z) = -2\psi_1(z) + i\varkappa\psi_2(z) + iz\psi_2'(z)$$

эти представления можно переписать в форме равенств

$$\begin{gathered}2(u_1 - iu_2)(z) = \varkappa\overline{\chi_1(z)} - z\chi_1'(z) - \chi_2(z),\\ (\sigma_1 + \sigma_2)(z) = 4\alpha_3\,\mathrm{Re}\,\chi_1'(z), \quad (\sigma_2 - \sigma_1 + 2i\sigma_3)(z) = 2\alpha_3[\bar{z}\chi_1''(z) + \chi_1'(z)],\end{gathered}$$

которые и составляют классические формулы Колосова—Мусхелишвили [6].

3. Функции, аналитические по Дуглису

Пусть область D ограничена гладким контуром Γ, который ориентирован положительно по отношению к D. Эта область может быть как конечной, т. е. лежать внутри некоторого круга, так и бесконечной, т. е. содержать внешность некоторого круга и, следовательно, являться окрестностью бесконечно удаленной точки ∞ на плоскости. Удобно для краткости эти два возможных случая указывать обозначением, соответственно, $\sigma(D) = 1$ и $\sigma(D) = 0$.

Рассмотрим в области D систему (2.2) с произвольной матрицей $J \in \mathbb{C}^{l\times l}$, все собственные значения которой лежат в верхней полуплоскости. В случае, когда J является ганкелевой матрицей, эта система была изучена А. Дуглисом [19] в рамках гиперкомплексных чисел. Удобно с комплексным числом $z = x + iy$ связать матрицу

$$z_J = x1 + yJ, \qquad (3.1)$$

где $x = x1$ означает скалярную матрицу. Поскольку собственные значения J лежат в верхней полуплоскости, при $z \neq 0$ эта матрица обратима. Напомним, что решения ϕ системы (2.2) были названы J-аналитическими функциями, введение данного термина мотивируется тем, что эти решения можно описать как функции класса $C^1(D)$, допускающие в каждой точке $z \in D$ обобщенную производную

$$\phi'(z) = \lim_{t\to z}(t - z)_J^{-1}[\phi(t) - \phi(z)],$$

которая совпадает с частной производной по x. В случае $\sigma(D) = 0$ бесконечной области к этому определению добавляется условие ограниченности ϕ на ∞. В дальнейшем убедимся, что тогда ϕ имеет предел $\phi(\infty) = \lim \phi(z)$ при $z \to \infty$. Вообще условимся говорить, что ϕ имеет *порядок* $k \in \mathbb{Z}$ на ∞, если функция $|z|^{-k}\phi(z)$ ограничена в окрестности ∞.

Пусть l-вектор-функция $\phi \in C^1(D)$ удовлетворяет системе (2.2) в области D и в случае $\sigma(D) = 0$ имеет порядок -2 на бесконечности. Тогда, интегрируя равенство (2.2) и пользуясь формулой Грина, получим равенство

$$\int_\Gamma dt_J\phi^+(t) = 0, \qquad (3.2)$$

которое играет роль теоремы Коши. Матричный дифференциал здесь определяется аналогично (3.1) и действует на вектор ϕ^+ по обычному правилу и потому стоит впереди этого вектора. Как и в случае классических аналитических функций, отсюда выводится и формула Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)_J^{-1} dt_J \phi^+(t) = \begin{cases} \phi(z), & z \in D, \\ 0, & z \in \widetilde{D}, \end{cases} \tag{3.3}$$

где $\widetilde{D} = \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ и дополнительно предполагается, что в случае $\sigma(D) = 0$ функция ϕ имеет порядок -1 на бесконечности. Из этой формулы, в частности, следует, что функция $\phi \in C^\infty(D)$. Обозначая $\phi^{(k)}$ последовательные частные производные по x, с учетом (2.2) для остальных частных производных имеем выражения

$$\frac{\partial^k \phi}{\partial x^{k-s}\partial y^s} = J^s \phi^{(k)}, \quad 0 \leqslant s \leqslant k. \tag{3.4}$$

Из формулы Коши также вытекает, что функция, которая J-аналитична на всей плоскости и исчезает на бесконечности, тождественно равна нулю. Как и для обычных аналитических функций, из формул (3.2), (3.3) легко следует следующее предложение об аналитическом продолжении.

Пусть в области D проведен разрез L, т. е. гладкая дуга с концами в точках граничного контура Γ, которая за исключением этих концов лежит внутри D. Тогда, если функция ϕ непрерывна в D и J-аналитична в $D \setminus L$, то эта функция J-аналитична во всей области D.

Все основные результаты классической теории аналитических функций, основанные на интеграле Коши, сохраняют свою силу и для J-аналитических функций [11]. Для удобства приведем без доказательства основные положения этой теории.

В окрестности изолированной особой точки a для J-аналитической функции имеем разложение в ряд Лорана

$$\phi(z) = \sum (z-a)_J^k c_k, \quad c_k \in \mathbb{C}^l,$$

по целым степеням матрицы $(z-a)_J$. Если ϕ ограничена в окрестности этой точки, то она устранима и данное разложение переходит в соответствующий ряд Тейлора с коэффициентами $c_k = \phi^{(k)}/k!$. Соответствующие частичные суммы этого ряда представляют собой J-аналитические многочлены

$$p(z) = \sum_{k=0}^n (z-a)_J^k c_k, \quad c_k \in \mathbb{C}^l.$$

Если область D бесконечна, то бесконечно удаленную точку ∞ можно рассматривать как изолированную. В этом случае справедливо разложение Лорана в окрестности ∞ по целым степеням z_J. Если ϕ имеет порядок k на бесконечности, то в этом разложении участвуют только степени z_J^i, $i \leqslant k$. В частности, функция $z_J^{-k}\phi(z)$ аналитична по Дуглису в окрестности ∞.

Если функция ψ задана и J-аналитична в односвязной области D, то интеграл

$$\phi(z) = \int_{z_0}^{z} dt_J \psi(t) \tag{3.5}$$

не зависит от пути интегрирования и определяет J-аналитическую функцию с производной $\phi' = \psi$. В случае многосвязной области D первообразная ϕ функции ψ, вообще говоря, многозначна и допускает ветвление при обходе связных компонент границы области. Очевидно, формула (3.5) приводит к однозначной функции тогда и только тогда, когда

$$\int_{\Gamma'} dt_J \psi(t) = 0 \tag{3.6}$$

для любого простого контура $\Gamma' \subseteq D$. В общем случае интеграл здесь можно трактовать как приращение функции ϕ вдоль контура Γ'.

Пусть область D конечна и ее граница состоит из конечного числа m связных компонент. Рассмотрим в D простые контуры Γ'_j, $1 \leqslant j \leqslant m-1$, которые оставляют внутри себя соответствующие $m-1$ из этих компонент. Тогда в силу теоремы Коши условие (3.6) достаточно проверить для этих контуров. Аналогичное утверждение справедливо и для бесконечной области при условии, что ψ

имеет порядок -2 на бесконечности. В этом случае интегрирование в (3.5) можно вести от $z_0 = \infty$, а компоненты границы, связанные с Γ'_j, равноправны.

Аналогично (3.3) можно ввести обобщенный интеграл типа Коши

$$(I\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)_J^{-1} dt_J \varphi(t),$$

определяющий вне ориентируемого контура J-аналитическую функцию $\phi = I\varphi$ с порядком -1 на бесконечности, и соответствующий сингулярный интеграл Коши

$$(S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma (t-t_0)_J^{-1} dt_J \varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma,$$

который понимается в смысле главного значения. Определяемый этим интегралом оператор I ограничен в пространствах Гельдера $C^\mu(\Gamma) \to C^\mu(\overline{D})$, $0 < \mu < 1$, где D — любая из связных компонент дополнения к Γ, и для ее граничных значений $\phi^\pm$ (знаки определяются ориентацией контура) справедливы формула Сохоцкого—Племеля [1]

$$2\phi^\pm = \pm\varphi + S\varphi. \tag{3.7}$$

Пусть функция ϕ аналитична по Дуглису вне контура Γ, имеет конечный порядок на бесконечности и принадлежит $C^\mu(\overline{D})$, где D — любая из связных компонент дополнения к Γ. Тогда в силу (3.7) разность $\phi_0 = \phi - I\varphi$, где $\varphi = \phi^+ - \phi^-$, обладает свойством $\phi_0^+ = \phi_0^-$. С помощью формул Коши (3.2), (3.3), примененных к областям D, отсюда легко вывести, что ϕ_0 аналитична по Дуглису на всей плоскости и, следовательно, является J-аналитическим многочленом p.

Из формулы (3.7) также следует, что сингулярный оператор S ограничен в $C^\mu(\Gamma)$. Впрочем, с помощью следующей леммы этот факт легко сводится к аналогичному хорошо известному результату [7] для классического сингулярного оператора Коши

$$(S_0\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}, \quad t_0 \in \Gamma,$$

отвечающему случаю $J = i$.

Лемма 3.1. *Пусть контур Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}$ и*

$$k(t_0,t) \in C^\nu(\Gamma\times\Gamma), \quad k(t,t) \equiv 0. \tag{3.8}$$

Тогда интегральный оператор

$$(K\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{k(t_0,t)}{t-t_0}\varphi(t)dt, \quad t_0 \in \Gamma, \tag{3.9}$$

ограничен $C(\Gamma) \to C^\nu(\Gamma)$ и, в частности, компактен в пространствах $C(\Gamma)$ и $C^\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$.

Если функция φ суммируема, то интеграл (3.9) *существует почти всюду на Γ и оператор K компактен в лебеговом пространстве $L^p(\Gamma)$ для любого $p \geqslant 1$.*

Доказательство. Существует такое $0 < \rho < 1/2$ (стандартный радиус контура), что для любой точки $a \in \Gamma$ и $0 < \delta < \rho$ множество $\Gamma \cap \{|t-a| \leqslant \delta\}$ является гладкой дугой. Тогда для функции $\psi = K\varphi$ имеем очевидную оценку

$$|\psi(t_0)| \leqslant |k|_\nu |\varphi|_0 \int_\Gamma |t-t_0|^{\nu-1}|dt| \leqslant M_0 |k|_\nu |\varphi|_0, \tag{3.10}$$

где $|\ |_0$ и $|\ |_\nu$ означают нормы, соответственно, в C и C^ν, а постоянная $M_0 > 0$ зависит только от Γ. Воспользуемся далее оценкой

$$\int_{\Gamma\cap\{|t-a|\geqslant\delta\}} |t-a|^{\alpha-2}|dt| \leqslant M_1 \left\{ \begin{array}{ll} \delta^{\alpha-1}, & 0 < \alpha < 1, \\ \ln(1/\delta), & \alpha = 1, \end{array} \right. \tag{3.11}$$

где постоянная $M_1 > 0$ зависит только от Γ и α.

Зафиксируем точки $t_1, t_2 \in \Gamma$ и пусть $\delta = |t_1 - t_2| \leqslant \rho/3$. Запишем

$$\psi(t_1) - \psi(t_2) = \int\limits_\Gamma \left[\frac{k(t_1,t)}{t-t_1} - \frac{k(t_2,t)}{t-t_2}\right]\varphi(t)dt = \Delta_1 + \Delta_2,$$

где Δ_1 и Δ_2 означают интегралы по, соответственно, $\Gamma_1 = \Gamma \cap \{|t-t_1| \leqslant 2\delta\}$ и $\Gamma_2 = \Gamma \cap \{|t-t_1| \geqslant 2\delta\}$. Очевидно,

$$|\Delta_1| \leqslant |k|_\nu |\varphi|_0 \int\limits_{\Gamma_1} [|t-t_1|^{\nu-1} + |t-t_2|^{\nu-1}]|dt|.$$

Поскольку $|t-t_1| \leqslant 2\delta$ влечет $|t-t_2| \leqslant 3\delta$, аналогично (3.10) имеем:

$$|\Delta_1| \leqslant M_0[(2\delta)^\nu + (3\delta)^\nu]|k|_\nu|\varphi|_0.$$

Что касается Δ_2, то запишем

$$\Delta_2 = \int\limits_{\Gamma_2} \frac{k(t_1,t) - k(t_2,t)}{t-t_1}\varphi(t)dt + \int\limits_{\Gamma_2} \frac{(t_1-t_2)k(t_2,t)}{(t-t_1)(t-t_2)}\varphi(t)dt.$$

Тогда

$$|\Delta_2| \leqslant |k|_\nu |\varphi|_0 \left[\delta^\nu \int\limits_{\Gamma_2} |t-t_1|^{-1}|dt| + \delta \int\limits_{\Gamma_2} |t-t_1|^{-1}|t-t_2|^{\nu-1}|dt|\right].$$

Поскольку $|t-t_1| \geqslant 2\delta$ влечет $|t-t_2| \geqslant |t-t_1| - \delta \geqslant |t-t_1| - |t-t_1|/2$, к выражению в квадратных скобках можно применить оценку (3.11). Тогда

$$|\Delta_2| \leqslant |k|_\nu |\varphi|_0 M_1[\delta^\nu \ln(1/\delta) + 2^{1-\nu}\delta^\nu].$$

Объединяя обе оценки для Δ_1 и Δ_2, в результате получим:

$$|\psi(t_1) - \psi(t_2)| \leqslant C|k|_\nu|\varphi|_0|t_1-t_2|^\mu \quad \text{при} \quad |t_1-t_2| \leqslant \rho/3$$

с некоторой постоянной $C > 0$. С учетом (3.10) отсюда следует ограниченность оператора K из C в C^ν.

Обратимся ко второму утверждению леммы. Предполагая функцию φ суммируемой, в соответствии с (3.8) запишем (3.9) в форме

$$(K\varphi)(t_0) = \int\limits_\Gamma \frac{\tilde{k}(t_0,t)\varphi(t)|dt|}{|t-t_0|^\alpha},$$

где $1-\nu < \alpha < 1$, а функция $\tilde{k}$ непрерывна и обращается в нуль при $t = t_0$. Тогда по теореме Фубини этот интеграл существует почти всюду и определяет суммируемую функцию $\psi = K\varphi$ с оценкой

$$\int\limits_\Gamma |\psi(t_0)||dt_0| \leqslant |\tilde{k}|_0 \int\limits_\Gamma |\varphi(t)||dt| \int\limits_\Gamma |t-t_0|^{-\alpha}|dt_0| \leqslant M|\tilde{k}|_0 \int\limits_\Gamma |\varphi(t)||dt|.$$

Если функция $\varphi \in L^p(\Gamma)$, $p > 1$, то в силу неравенства Гельдера

$$|\psi(t_0)| \leqslant |\tilde{k}|_0 \left(\int\limits_\Gamma \frac{|\varphi(t)|^p|dt|}{|t-t_0|^\alpha}\right)^{1/p} \left(\int\limits_\Gamma \frac{|dt|}{|t-t_0|^\alpha}\right)^{1/q},$$

где $1/q = 1 - 1/p$. Возводя это неравенство в p-ую степень и интегрируя, совместно с предыдущим неравенством получим

$$\int\limits_\Gamma |\psi(t_0)|^p|dt_0| \leqslant |\tilde{k}|_0^p M^{p/q} \int\limits_\Gamma |\varphi(t)|^p|dt|.$$

Таким образом, оператор K ограничен в $L^p(\Gamma)$ с оценкой

$$|K|_{\mathcal{L}(L^p)} \leqslant M|\tilde{k}|_0 \tag{3.12}$$

для его нормы.

Очевидно, если для некоторого $\delta > 0$ функция $\tilde{k}(t_0,t)$ обращается в нуль при $|t-t_0| \leqslant \delta$, то оператор K компактен в $L^p(\Gamma)$. Выберем последовательность функций $\tilde{k}_n$ с этим свойством по отношению к $\delta = \delta_n$, сходящуюся к $\tilde{k}$ по sup-норме, и пусть K_n определяется по $\tilde{k}_n$ как выше. Тогда в силу оценки (3.12), примененной к разности $K - K_n$, последовательность компактных операторов K_n сходится к K по операторной норме, так что компактен и оператор K. □

Лемма 3.2. *Пусть контур Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}$ и собственные значения матрицы J не лежат на вещественной прямой. Тогда оператор $S - S_0$ компактен в пространствах $C^\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, и $L^p(\Gamma)$, $p > 1$.*

Если контур Γ служит границей области D и ориентирован положительно по отношению к ней, то $S^2 = S_0^2 = 1$.

Доказательство. Разность $S - S_0$ запишем в виде

$$[(S-S_0)\varphi)](t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{q(t;t-t_0)}{t-t_0}\varphi(t)dt$$

с матрицей-функцией $q(t,\xi) = [e(t)]_J \xi_J^{-1}\xi - e(t)$. Тогда остается воспользоваться леммой 3.1 и следующим общим свойством функций вида q.

Пусть $\Gamma \in C^{1,\nu}$ и функция $q(t_0,t;\xi)$, заданная для $t_0, t \in \Gamma$ и $\xi = \xi_1 + i\xi_2 \in \mathbb{C}$, $\xi \neq 0$, четна, однородна степени нуль и непрерывно дифференцируема по ξ, причем вместе с частными производными по ξ непрерывна по всем переменным. Тогда, если $q(t_0,t;\xi) \in C^\nu(\Gamma\times\Gamma)$ равномерно по $|\xi| = 1$, то функция $k(t_0,t) = q(t_0,t;t-t_0)$ принадлежит $C^\nu(\Gamma\times\Gamma)$, причем $k(t,t) = q(t,t;e(t)$, где $e(t)$ — единичный касательный вектор на Γ.

Доказательство этого предложения достаточно провести в окрестности фиксированной точки $(a,a) \in \Gamma\times\Gamma$. Запишем параметризацию контура в этой окрестности в форме $z = \gamma(s)$, $|s| \leqslant \delta$, где s — параметр длины дуги, отсчитываемый от точки a. Тогда функция

$$\alpha(s_0,s) = \frac{\gamma(s)-\gamma(s_0)}{s-s_0} = \int\limits_0^1 \gamma'[s\tau + s_0(1-\tau)]d\tau$$

принадлежит классу C^ν в квадрате $|s_0|, |s| \leqslant \delta$, отграничена по модулю от нуля и принимает значение $\gamma'(s)$ при $s_0 = s$. Следовательно, функция $k[\gamma(s_0),\gamma(s)] = q[\gamma(s_0),\gamma(s);\alpha(s_0,s)]$ также принадлежит этому классу и ее значение при $s_0 = s$ совпадает с $q[\gamma(s_0),\gamma(s);\gamma'(s)]$. Отсюда следует справедливость сформулированного предложения для функции $q(t_0,t;t-t_1)$ в рассматриваемой окрестности контура.

Обратимся ко второму утверждению леммы. Для оператора S_0 оно хорошо известно [7], а для S его доказательство проходит по той же схеме, что и в [7]. Именно, пусть контур Γ ориентирован положительно по отношению к области D и для краткости $P = (1+S)/2$. Тогда для граничного значения функции $\phi = I\varphi$ имеем равенство $\phi^+ = P\varphi$. С другой стороны, по формуле Коши $\phi = I\phi^+$, где учтено, что в случае бесконечной области D функция ϕ исчезает на ∞. Отсюда $P\phi^+ = \phi^+$ или $P^2\varphi = P\varphi$, что равносильно операторному равенству $S^2 = 1$. □

Граничные свойства интегралов типа Коши $I\varphi$ с плотностью из $\varphi \in L^p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, изучались в [10]. В этом случае J-аналитическая функция $\phi = I\varphi$ принадлежит пространству Харди $H^p(D)$, которое можно ввести [12] следующим образом. Пусть контур Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}$ и последовательность контуров $\Gamma_n \subseteq D$, $n = 1,2,\ldots$ сходится к Γ по метрике C^1. По определению это означает, что для некоторых диффеоморфизмов $\gamma_n : \Gamma \to \Gamma_n$ выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} |\gamma_n(t) - t|_{C^1(\Gamma)} = 0. \tag{3.13}$$

Тогда $H^p(D)$ состоит из всех J-аналитических в D функций, для которых конечна норма

$$|\phi| = \sup_n |\phi|_{L^p(\Gamma_n)}. \tag{3.14}$$

В этих обозначениях интеграл типа Коши как линейный оператор $\varphi \to \phi = I\varphi$ ограничен $L^p(\Gamma) \to H^p(D)$, угловые предельные значения $\phi^\pm$ существуют почти всюду на Γ и справедлива формула Сохоцкого—Племеля [10]. Обратно, любая функция $\phi \in H^p$ представима интегралом типа Коши с плотностью $\varphi \in L^p(\Gamma)$.

В самом деле, пусть область $D_n \subseteq D$ ограничена контуром Γ_n. Тогда для фиксированной точки $z \in D$ и достаточно больших n можно записать формулу Коши

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_n} (t-z)_J^{-1} dt_J \phi(t).$$

Из (3.14) и слабой компактности [9] единичного шара в рефлексивном банаховом пространстве $L^p,\ p > 1$, следует, что найдется такая функция $\varphi \in L^p(\Gamma)$, что некоторая подпоследовательность $\phi \circ \gamma_{n_k}$ слабо сходится к φ в L^p. Поэтому с учетом (3.13) в предыдущем равенстве для $n = n_k$ можно перейти к пределу при $k \to \infty$ и в результате представить ϕ интегралом типа Коши.

Отсюда, в частности, следует, что функция $\phi \in H^p(D)$ тогда и только тогда, когда существуют угловые предельные значения почти всюду на Γ, принадлежащие $L^p(\Gamma)$, и сохраняет свою силу формула Коши. Из этих же соображений пространство H^p можно определить как замыкание класса J-аналитических функций, непрерывных в замкнутой области $\overline{D}$, по норме

$$|\phi| = |\phi^+|_{L^p(\Gamma)},$$

которая эквивалентна норме (3.14). Напомним, что в случае $\sigma(D) = 0$ бесконечной области J-аналитические функции предполагаются ограниченными на ∞, так что указанное равенство определяет норму и в этом случае.

Хорошо известно [7], что каждая аналитическая функция с точностью до постоянного слагаемого может быть представлена интегралом типа Коши. Этот факт справедлив [10] и для J-аналитических функциях в классах Гельдера. С помощью следующей леммы его легко распространить и на класс Харди.

Лемма 3.3. *Пусть область D ограничена простым ляпуновским контуром Γ и матрица J треугольна. Пусть J-аналитическая функция $\phi \in H^p(D)$ такова, что $\mathrm{Re}\phi^+$ постоянна на Γ. Тогда ϕ постоянна в области D.*

Доказательство. Проведем доказательство сначала для скалярного случая $l = 1$, когда $J = \nu \in \mathbb{C}$ и ϕ является решением уравнения

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \nu \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0.$$

При аффинном преобразовании $z = x + iy \to z_\nu = x + \nu y$ это уравнение переходит в уравнение Коши—Римана, определяющее аналитические функции. Очевидно, класс Харди инвариантен относительно этих преобразований, так что без ограничения общности функцию ϕ можно считать аналитической. В этом случае утверждение леммы хорошо известно [2].

Итак, в скалярном случае утверждение леммы установлено. В общем случае пусть для определенности матрица $J \in \mathbb{C}^{l \times l}$ верхнетреугольна, т. е. $J_{ik} = 0$ при $i > k$. Тогда в покоординатной записи относительно вектора $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_l)$ систему Дуглиса можно переписать в виде

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial y} - \sum_{k=j}^{l} J_{kj} \frac{\partial \phi_k}{\partial x} = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant l.$$

В силу уже доказанного из последнего уравнения этой системы следует, что функция ϕ_l постоянна. Следовательно, $(l-1)$-ое уравнение этой системы переходит в рассмотренное выше скалярное уравнение по отношению к ϕ_{l-1} и $\nu = J_{l-1,l-1}$. Поэтому из тех же соображений функция ϕ_{l-1} постоянна. Повторяя эти рассуждения, в результате приходим к заключению, что постоянны все функции ϕ_k. □

Обратимся к вопросу о представимости J-аналитических функций $\phi \in H^p$ интегралами типа Коши с вещественной плотностью.

Теорема 3.1. *Пусть ляпуновский контур Γ ограничивает область D, ориентирован положительно по отношению к D и состоит из компонент $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, $m \geqslant 1$, причем в случае* *конечной области контур Γ_m охватывает все остальные. Пусть матрица J треугольна. Тогда любая J-аналитическая функция $\phi \in H^p(D)$ представляется в виде*

$$\phi = I\varphi + \eta, \quad \eta \in \mathbb{C}^l, \tag{3.15}$$

где вещественная l-вектор-функция $\varphi \in L^p(\Gamma)$ и $\operatorname{Re}\eta = 0$ в случае конечной области D.

В этом представлении $\phi = 0$ тогда и только тогда, когда $\eta = 0$ и функция φ постоянна на контурах Γ_j, причем в случае конечной области D она равна нулю на Γ_m.

Доказательство. Оно осуществляется по той же схеме, что и в случае функций, рассматриваемых в классах Гельдера [10]. Предположим сначала, что область D конечна и ограничена простым контуром (т. е. $m = 1$). Обозначим $\widetilde{D}$ дополнение к $\overline{D}$ на плоскости, и пусть $\widetilde{I}\varphi$ означает оператор типа Коши в области $\widetilde{D}$. Тогда на основании (3.7)

$$(I\varphi)^+ - (\widetilde{I}\varphi)^- = \varphi. \tag{3.16}$$

Утверждается, что

$$\operatorname{Re}(I\varphi)^+ = 0 \ \Rightarrow \ \varphi = 0, \tag{3.17}$$

$$\operatorname{Re}(\widetilde{I}\varphi)^- = \xi \in \mathbb{R}^l \ \Rightarrow \ \xi = 0, \ \varphi \in \mathbb{R}^l. \tag{3.18}$$

В самом деле, если $\operatorname{Re}(I\varphi)^+ = 0$, то на основании леммы 3.3 функция $I\varphi$ постоянна и с учетом (3.16) функция $\operatorname{Im}(\widetilde{I}\varphi)^-$ также постоянна. Опять пользуясь леммой 3.3, отсюда выводим, что постоянна и функция $\widetilde{I}\varphi$, а вместе с ней и плотность $\varphi = \xi \in \mathbb{R}^l$. Но тогда $I\varphi = \xi$ и поскольку по условию $\operatorname{Re}(I\varphi)^+ = 0$, отсюда следует (3.17). Рассуждения для интеграла $\widetilde{I}\varphi$ аналогичны. Как и выше, убеждаемся, что функции $\widetilde{I}\varphi$ и φ постоянны. Поскольку первая из них исчезает на бесконечности, отсюда вытекает (3.18).

Рассмотрим операторы $M\varphi = \operatorname{Re}(I\varphi)^+$ и $\widetilde{M}\varphi = \operatorname{Re}(\widetilde{I}\varphi)^-$, действующие в $L^p(\Gamma)$. Согласно (3.7) имеем:

$$M\varphi = \operatorname{Re}(\varphi + S\varphi)/2, \quad \widetilde{M}\varphi = \operatorname{Re}(-\varphi + S\varphi)/2.$$

Операция комплексного сопряжения $\varphi \to \overline{\varphi}$ функций индуцирует соответствующую операторную инволюцию $N \to \overline{N}$ по правилу $\overline{N}\varphi = \overline{N\overline{\varphi}}$. В этих обозначениях

$$M = 1 + (S + \overline{S})/2, \quad \widetilde{M} = -1 + (S + \overline{S})/2. \tag{3.19}$$

Если зависимость оператора S от матрицы J указывать обозначением $S = S(J)$, то $\overline{S(J)} = -S(\overline{J})$ (знак минус возник из-за множителя $1/\pi i$ перед сингулярным интегралом). Согласно лемме 3.2 операторы $S(J) - S_0$ и $S(\overline{J}) - S_0$ компактны в пространстве $L^p(\Gamma)$. Но тогда этим свойством обладает и оператор $S + \overline{S} = S(J) - S(\overline{J})$. Поэтому по теореме Рисса [9] операторы M и $\widetilde{M}$ в (3.19) фредгольмовы индекса нуль. В соединении с (3.17), (3.18) отсюда заключаем, что оператор M обратим и

$$\ker \widetilde{M} = 0, \quad \mathbb{R}^l \cap \operatorname{im} \widetilde{M} = 0. \tag{3.20}$$

Пусть теперь $\phi \in H^p(D)$ и $f = \operatorname{Re}\phi^+$. Полагая $\varphi = M^{-1}\varphi$, получим $(\phi - I\varphi)^+ = 0$ и по лемме 3.2 функция $\phi = I\varphi + i\xi$ с некоторым $\xi \in \mathbb{R}^l$. Если в этом равенстве $\phi = 0$, то $M\varphi = 0$ и, значит, $\varphi = 0$. Тем самым утверждение теоремы в рассматриваемом случае установлено.

Пусть далее $\widetilde{\phi} \in H^p(\widetilde{D})$ и $\widetilde{\phi}_0(z) = \widetilde{\phi}(z) - \widetilde{\phi}(\infty)$. Напомним, что оператор $\widetilde{M}$ фредгольмов индекса нуль. Поэтому с учетом (3.20) функцию $f = \operatorname{Re}\widetilde{\phi}_0$ можно представить в виде $\widetilde{M}\varphi + \xi$ с некоторыми $\varphi \in L^p$ и $\xi \in \mathbb{R}^l$. Тогда $\operatorname{Re}(\widetilde{\phi}_0 - \widetilde{I}\varphi) = \xi$ и на основании леммы 3.2 функция $\widetilde{\phi}_0 - \widetilde{I}\varphi$ постоянна. Поскольку она исчезает на ∞, то в действительности $\widetilde{\phi} = \widetilde{I}\varphi$, что приводит к разложению (3.15) для $\widetilde{\phi}$ с $\eta = \widetilde{\phi}(\infty)$. То, что $\widetilde{\phi} = 0$ в этом разложении влечет $\eta = 0$ и $\varphi \in \mathbb{R}^l$, доказывается аналогично. Таким образом, утверждение теоремы установлено и для случая бесконечной области, ограниченной простым контуром.

Рассмотрим общий случай контура Γ, предполагая для определенности область D конечной. Пусть область D_j ограничена контуром Γ_j, причем эта область бесконечна при $1 \leqslant j \leqslant m - 1$ и конечна при $j = m$, так что $D = D_1 \cap \ldots \cap D_m$. В соответствии с формулой Коши функцию $\phi \in H^p(D)$ можно представить в виде суммы

$$\phi(z) = \phi_1(z) + \ldots + \phi_m(z), \quad z \in D, \tag{3.21}$$

где $\phi_j \in H^p(D_j)$ определяются интегралом типа Коши

$$\phi_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_j} (t-z)_J^{-1} dt_J \phi^+(t), \quad z \in D_j.$$

К функциям ϕ_j утверждение теоремы уже применимо, так что

$$\phi_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_j} (t-z)_J^{-1} dt_J \varphi_j(t), \quad 1 \leqslant j \leqslant m-1,$$

$$\phi_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_m} (t-z)_J^{-1} dt_J \varphi_m(t) + i\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^l.$$

Подставляя эти выражения в (3.21), приходим к требуемому разложению (3.15). Если в этом разложении $\phi = 0$ и функции $\phi_j \in H^p(D_j)$ определяются интегралом типа Коши с плотностью $\varphi|_{\Gamma_j}$, то равенство $-\phi_m = \phi_1 + \ldots + \phi_{m-1}$ позволяет продолжить $-\phi_m$ до функции, аналитической по Дуглису на всей плоскости и исчезающей на ∞. Следовательно, $\phi_m = 0$. Аналогично показывается, что $\phi_j = 0$ для всех j. Применяя к ϕ_j утверждение теоремы, убеждаемся, что $\varphi|_{\Gamma_j} \in \mathbb{R}^l$ при $1 \leqslant j \leqslant m-1$ и $\xi = 0$, $\varphi|_{\Gamma_m} = 0$. □

4. Задача Римана—Гильберта

Как и в случае обычных аналитических функций, для функций, аналитических по Дуглису, можно рассмотреть задачу Римана—Гильберта

$$\operatorname{Re} G\phi\big|_{\Gamma} = f, \tag{4.1}$$

где $l \times l$-матрица-функция $G \in C(\Gamma)$ обратима всюду на Γ. Эта задача рассматривается в пространстве $H^p(D)$, $p > 1$ с правой частью $f \in L^p(\Gamma)$. Фредгольмовость и индекс задачи понимается по отношению к $\mathbb{R}$-линейному оператору $\phi \to \operatorname{Re}\, G\phi$ ее краевого условия.

Теорема 4.1. *Пусть ляпуновский контур Γ составлен из m связных компонент и определитель матрицы-функции $G \in C(\Gamma)$ отличен от нуля всюду на Γ. Тогда задача (4.1) фредгольмова и ее индекс $\varkappa$ дается формулой*

$$\varkappa = -\frac{1}{\pi} \arg\det G\big|_{\Gamma} + (2-m)l, \tag{4.2}$$

где приращение непрерывной ветви аргумента на Γ берется в направлении, оставляющем область D слева.

Если $\Gamma \in C^{1,\nu}$ и $G \in C^{\nu}(\Gamma)$, то любое решение $\phi \in H^p(D)$ этой задачи с правой частью $f \in C^{\mu}(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, принадлежит классу $C^{\mu}(\overline{D})$. При дополнительном предположении $G \in C^{1,\nu}(\Gamma)$ аналогичное утверждение справедливо и по отношению к классам $C^{1,\mu}$.

Доказательство. Без ограничения общности матрицу J можно считать жордановой и, в частности, треугольной. В самом деле, пусть матрица $b \in \mathbb{C}^{l\times l}$ приводит J к жордановой форме J_0, т. е. $J_0 = b^{-1}Jb$. Тогда подстановка $\phi = b\phi_0$ переводит J-аналитические функции в J_0-аналитические. Остается заметить, что при этой подстановке задача (4.1) переходит в аналогичную задачу для J_0-аналитической функции ϕ_0 с матрицей $G_0 = Gb$.

Таким образом, можно воспользоваться теоремой 3.1. Из этой теоремы следует, что интегральный оператор I, действующий из пространства $L^p(\Gamma)$ вещественных l-вектор-функций в $H^p(D)$, фредгольмов и его индекс $\operatorname{ind} I = l(m-2)$. С другой стороны, согласно (3.7) для композиции $N = 2RI$ оператора R задачи (4.1) с I имеем равенство $N\varphi = \operatorname{Re}(\varphi + S\varphi)$. В терминах операторной инволюции сопряжения, введенной при доказательстве теоремы 3.1, можно записать

$$N = G(1+S)/2 + \overline{G}(1+\overline{S})/2 = G(1+S_0)/2 + \overline{G}(1-S_0)/2 + K \tag{4.3}$$

с интегральным оператором $2K = G(S - S_0) + \overline{G}(\overline{S} + S_0)$, который в силу леммы 3.2 компактен в $L^p(\Gamma)$. Согласно классической теории сингулярных операторов с ядром Коши [3, 7] отсюда заключаем, что оператор N фредгольмов в L^p и его индекс определяется первым слагаемым в правой части (4.2). Поскольку $S_0^2 = 1$, с помощью леммы 3.2 аналогичным образом проверяется, что оператор $N^{(-1)} = G^{-1}(1+S_0)/2 + \overline{G}^{-1}(1-S_0)/2$ является регуляризатором N, т. е. операторы $1 - NN^{(-1)}$ и $1 - N^{(-1)}N$ компактны в $L^p(\Gamma)$.

Вторая часть теоремы опирается на лемму 4.1, которую докажем чуть ниже. Пусть $\Gamma \in C^{1,\nu}$, $G \in C^{\nu}(\Gamma)$ и $0 < \mu < \nu$. Тогда на основании леммы 3.1 оператор K в (4.4) компактен в пространстве $C^{\mu}(\Gamma)$ и оператор $N^{(-1)}$ является регуляризатором N в этом пространстве. Поэтому утверждение теоремы вытекает из леммы 4.1.

Пусть далее $G \in C^{1,\nu}(\Gamma)$. Рассмотрим операцию дифференцирования на Γ по формуле

$$(D\varphi)(t_0) = \lim_{t\to t_0,\, t\in\Gamma} (t-t_0)_J^{-1}[\varphi(t) - \varphi(t_0)].$$

С аналогичной операцией D_0 по отношению к $J = i$ она связана соотношением $D = dD_0$, где $d = e_J^{-1}e \in C^{\nu}(\Gamma)$. Интегрированием по частям непосредственно проверяется, что

$$(I\varphi)'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)_J^{-1} dt_J (D\varphi)(t).$$

В частности, оператор типа Коши I ограничен $C^{1,\mu}(\Gamma) \to C^{1,\mu}(\overline{D})$. Поэтому утверждение теоремы о гладкости достаточно установить по отношению к уравнению $N\varphi = f$, определяемому оператором (4.3).

Применяя к предыдущему равенству формулу Сохоцкого—Племеля (3.7) и сравнивая результат с продифференцированной формулой (3.7), получим равенство $DS = SD$ или $dD_0S = SdD_0$. Аналогичным образом и $D_0S_0 = S_0D_0$, так что

$$D_0(S - S_0) = [d^{-1}(S - S_0)d + (d^{-1}S_0 - S_0d^{-1})d]D_0.$$

В результате для оператора K в (4.3) имеем соотношение $D_0K = K_0 + K_1D_0$, где K_j $(j = 0, 1)$ определяются аналогично (3.9) с некоторыми функциями $k_j(t_0, t)$ со свойством (3.8). Следовательно, оператор K компактен в пространстве $C^{1,\mu}(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$. Аналогично проверяется, что оператор $N^{(-1)}$ является регуляризатором N и в пространстве $C^{1,\mu}(\Gamma)$, так что остается воспользоваться леммой 4.1. □

Лемма 4.1. *Пусть оператор N фредгольмов в пространстве $L^p(\Gamma)$, $p > 1$, и вместе со своим регуляризатором $N^{(-1)}$ ограничен в некотором банаховом пространстве X, вложенном в $L^p(\Gamma)$. Тогда если $N^{(-1)}$ является регуляризатором N и по отношению к X, то любое решение $\varphi \in L^p(\Gamma)$ уравнения $N\varphi = f$ с правой частью $f \in X$ также принадлежит X.*

Доказательство. Достаточно провести доказательство по отношению к уравнению $\varphi + K\varphi = f$, где $K = 1 - N^{(-1)}N$. По условию оператор K компактен как в L^p, так и в X. Пространстве $L^q(\Gamma)$, $q = p/(p-1)$, является сопряженным к $L^p(\Gamma)$ по отношению к билинейной форме

$$(\varphi, \psi) = \int_\Gamma \varphi(t)\psi(t)dt.$$

Соответственно, сопряженный оператор K', связанный с K тождеством $(K\varphi, \psi) = (\varphi, K'\psi)$, компактен в пространстве L^q. по теореме Рисса [9] размерность ядра $n = \dim[\ker(1+K)]$ оператора $1+K$ конечна и совпадает с $\dim[\ker(1+K')]$, а уравнение $N\varphi = f$ разрешимо тогда и только тогда, когда $(f, \psi) = 0$, $\psi \in \ker(1+K')$. Пусть n_0 имеет аналогичный смысл по отношению к оператору $K_0 = K|X$, действующему в X. Тогда, очевидно, условие $(f, \psi) = 0$, $\psi \in \ker(1+K')$ необходимо для разрешимости уравнения $N\varphi = f$ в пространстве X. Таким образом,

$$n_0 \leqslant n, \quad \dim[X/\mathrm{Im}\,(1+K_0)] \geqslant n_0,$$

так что $\mathrm{ind}(1+K_0) \leqslant \mathrm{ind}(1+K) = 0$. Поскольку в действительности $\mathrm{ind}(1+K_0) = 0$, то и предыдущие два неравенства являются точными равенствами. Таким образом, $\ker(1+K_0) = \ker(1+K)$, а условие $(f, \psi) = 0$, $\psi \in \ker(1+K')$ необходимо и достаточно для разрешимости уравнения $N\varphi = f$ в пространстве X. Отсюда утверждение леммы получается непосредственно. □

Особо остановимся на задаче Римана—Гильберта с постоянной матрицей G. В этом случае формула индекса (4.2) переходит в $\varkappa = l(2-m)$. Для более подробного рассмотрения этой задачи удобно ввести пространство Харди и для класса вещественных вектор-функций

$$u = \operatorname{Re} G\phi, \tag{4.4}$$

которое обозначим здесь $h^p(D)$. Оно вводится аналогично случаю J-аналитических функций с той разницей, что последовательность контуров $\Gamma_n \subseteq D$, $n = 1, 2, \dots$ сходится к Γ по метрике этого класса. Другими словами, область D ограничена контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$ и условие (3.13) выполнено по отношению к норме пространства $C^{1,\nu}(\Gamma)$. Тогда пространство $h^p(D)$ функций $u = \operatorname{Re} G\phi$ определяется условием конечности нормы

$$|u| = \sup_n |u|_{L^p(\Gamma_n)}. \tag{4.5}$$

Теорема 4.2. *Пусть область D ограничена контуром Γ класса $C^{1,\nu}$, тогда $u \in h^p(D)$ тогда и только тогда, когда в представлении (4.4) функция $\phi \in H^p(D)$.*

Доказательство. Без ограничения общности матрицу J можно считать треугольной, что обосновывается также, как и в случае теоремы 4.1. Поскольку утверждение теоремы связано с поведением ϕ вблизи связных компонент контура, область D можно считать конечной, а контур Γ — состоящим из двух компонент. В этом случае удобно слегка видоизменить оператор I интеграла типа Коши, полагая

$$(I\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_\Gamma (t-z)_J^{-1} dt_J \varphi(t) + \int_\Gamma \varphi(t)|dt|\right], \quad z \in D, \tag{4.6}$$

Тогда в силу теоремы 3.1 этот оператор обратим $L^p(\Gamma) \to H^p(D)$.

В принятых обозначениях формуле (3.7) соответствует равенство

$$2(I\varphi)^+ = \varphi + S\varphi, \quad (S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma [(t-t_0)_J^{-1} e_J(t) + 1]\varphi(t)|dt|. \tag{4.7}$$

и для оператора $N\varphi = \operatorname{Re} G(I\varphi)^+$ имеем аналогичное (4.5) выражение

$$N = G(1+S)/2 + \overline{G}(1+\overline{S})/2. \tag{4.8}$$

Таким образом, задача (4.1) равносильна уравнению $N\varphi = 2f$, решение φ которого определяет решение $\phi = I\varphi$ задачи. Согласно теореме 4.1 эта задача и, соответственно, оператор N фредгольмовы индекса нуль. Пусть $\phi_1, \dots, \phi_k \in H^p(D)$ образуют базис пространства решений однородной задачи (4.1). Не ограничивая общности, можно считать, что некоторая подобласть D_0 вместе со своей границей лежит внутри всех контуров Γ_n. Вещественные l-вектор-функции $\operatorname{Re}\phi_j$ как элементы $C(\overline{D_0})$ линейно независимы. В самом деле, если $\operatorname{Re}\phi \equiv 0$ в области D_0 для некоторой J-аналитической функции ϕ, то и $\phi \equiv 0$, что доказывается аналогично лемме 3.2. Выберем систему вещественных l-вектор-функций $\psi_1, \dots, \psi_k$, биортогональную к функциям $\operatorname{Re}\phi_j(z)$, $z \in D_0$. Другими словами,

$$\int_{D_0} (\operatorname{Re}\phi_i)\psi_j dxdy = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Тогда однородная задача (4.1), дополненная условиями

$$\int_{D_0} \psi_j \operatorname{Re}\phi\, dxdy = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant k,$$

имеет только нулевое решение. Рассмотрим оператор $L:\ L^p(\Gamma) \to \mathbb{R}^k$ по формуле

$$(L\varphi)_j = \int_{D_0} \operatorname{Re}\psi_j \operatorname{Re}(I\varphi) dxdy, \quad 1 \leqslant j \leqslant k.$$

С учетом (4.6) его можно записать в более явной форме скалярного произведения

$$(L\varphi)_j = \int\limits_\Gamma g_j(t)\varphi(t)|dt|, \quad 1 \leqslant j \leqslant k, \tag{4.9}$$

с функциями

$$g_j(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{D_0} \mathrm{Im}[e_J(t)(t-z)_J^{-1} + 1]\psi_j(z)dxdy.$$

В этих обозначениях оператор $(N, L) : L^p(\Gamma) \to L^p(\Gamma) \times \mathbb{R}^k$ фредгольмов и его ядро нулевое. Зависимость операторов (4.7)–(4.9) и определяющих их функций от Γ указываем обозначениями S_Γ, L_Γ и т. д.

Обратимся к последовательности контуров Γ_n, о которых идет речь в теореме. По условию найдутся такие гомеоморфизмы $\gamma_n : \Gamma \to \Gamma_n$ класса $C^{1,\nu}(\Gamma)$, что выполнено условие (3.12) в норме $C^{1,\nu}$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} |\gamma_n(t) - t|_{C^{1,\nu}} = 0. \tag{4.10}$$

Операция суперпозиции $\varphi \to \varphi\circ\gamma_n$ функций индуцирует операторное преобразование $M \to M\circ\alpha_n$ по правилу $(M\circ\gamma_n)(\varphi\circ\gamma_n) = (M\varphi)\circ\gamma_n$, которое переводит банахово пространство $\mathcal{L}[L^p(\Gamma_n)]$ операторов, ограниченных в $L^p(\Gamma_n)$, на $\mathcal{L}[L^p(\Gamma)]$. Аналогичный смысл имеет обозначение $(M\circ\gamma_n)(\varphi\circ\gamma_n) = M\varphi$ для оператора $M : L^p(\Gamma_n) \to \mathbb{R}^k$. Утверждается, что в этих обозначениях

$$|S_{\Gamma_n}\circ\gamma_n - S_\Gamma|_{\mathcal{L}} \to 0, \quad |L_{\Gamma_n}\circ\gamma_n - L_\Gamma|_{\mathcal{L}} \to 0 \tag{4.11}$$

при $n \to \infty$ по операторной норме соответствующих пространств. В самом деле, положим

$$q_n(t_0, t) = [\gamma_n(t) - \gamma_n(t_0)]_J^{-1} e_J[\gamma_n(t)] e_J^{-1}(t)(t - t_0)_J.$$

Тогда в силу (4.10) последовательность матриц-функций $q_n \to 1$ по норме $C^\nu(\Gamma\times\Gamma)$. Остается заметить, что в этих обозначениях

$$[(S\circ\gamma_n)\varphi](t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma [q_n(t_0,t)(t-t_0)_J^{-1} e_J(t) + 1]\varphi(t)|\gamma_n'(t)||dt|,$$

$$[(L_{\Gamma_n}\circ\gamma_n)\varphi]_j = \int\limits_\Gamma g_{\Gamma_n,j}[\gamma_n(t)]|\gamma_n'(t)|\varphi(t)|dt|,$$

и воспользоваться оценкой для операторной нормы оператора K в $L^p(\Gamma)$, установленной при доказательстве леммы 3.1.

Пусть теперь задана J-аналитическая в D функция ϕ, для которой норма (4.5) конечна, т. е. вещественные функции $f_n = \mathrm{Re}\,\phi|_{\Gamma_n}$ равномерно ограничены по норме пространств $L^p(\Gamma_n)$. Положим

$$\xi_j = \int\limits_{D_0} \psi_j \,\mathrm{Re}\,\phi\, dxdy, \quad 1 \leqslant j \leqslant k.$$

Пусть $\varphi_n \in L^p(\Gamma_n)$ определяются равенством $\phi = I_{\Gamma_n}\varphi_n$ в области $D_n \subseteq D$, ограниченной контуром Γ_n. Тогда $N_{\Gamma_n}\varphi_n = 2f_n$ и $(L_{\Gamma_n}\varphi_n)_j = \xi_j$, или, что равносильно,

$$(N_{\Gamma_n}\circ\alpha_n)\widetilde{\varphi}_n = 2f_n, \quad [(L_{\Gamma_n}\circ\alpha_n)\widetilde{\varphi}_n]_j = \xi_j,$$

где положено $\widetilde{\varphi}_n = \varphi_n\circ\alpha_n$. Согласно (4.8) соотношение (4.11) справедливо и для оператора N, поэтому на основании нижеследующей леммы 4.2 последовательность $\widetilde{\varphi}_n$ ограничена в $L^p(\Gamma)$. С учетом (4.7), (4.11) отсюда следует, что последовательность функций $(S_{\Gamma_n}\circ\alpha_n)\widetilde{\varphi}_n$, а вместе с ней и $\phi\circ\alpha_n$ ограничены в $L^p(\Gamma)$, что завершает доказательство теоремы. □

Лемма 4.2. *Пусть заданы банаховы пространства X, Y и фредгольмовый оператор $N \in \mathcal{L}(X,Y)$ с нулевым ядром. Пусть последовательность $N_n \to N$ при $n \to \infty$ по норме пространства $\mathcal{L}(X,Y)$. Тогда если последовательность векторов $N_n x_n$ ограничена в Y, то x_n ограничены в X.*

Доказательство. Предположим сначала, что образ $\operatorname{im} N$ оператора совпадает с Y, т. е. оператор N обратим. Тогда операторы N_n также обратимы для достаточно больших n и последовательность N_n^{-1} сходится к N^{-1} в $\mathcal{L}(Y, X)$, так что последовательность $x_n = N_n^{-1} y_n$ ограничена. В общем случае по условию образ $\operatorname{im} N$ замкнут и $Y = Y_0 \oplus \operatorname{im} N$ для некоторого конечномерного подпространства Y_0. Рассмотрим операторы $\widetilde{N}, \widetilde{N}_n \in \mathcal{L}(X \times Y_0, Y)$ по формуле

$$\widetilde{N}(x, y_0) = Nx + y_0, \quad \widetilde{N}_n(x, y_0) = N_n x + y_0.$$

Тогда оператор $\widetilde{N}$ обратим и последовательность $\widetilde{N}_n \to \widetilde{N}$ по операторной норме. Поскольку $\widetilde{N}_n(x_n, 0) = y_n$, отсюда следует ограниченность последовательности x_n. $\square$

Заметим, что аналог теоремы 4.2 справедлив и по отношению к классам Гельдера $C^\mu(\overline{D})$, $0 < \mu < \nu$.

В заключение обсудим многозначные J-аналитические функции, т. е. функции ϕ, производные ϕ' которых однозначны в области D. При этом в случае бесконечной области предполагается, что эта производная имеет порядок -2 на ∞. Указанные функции легко свести к однозначным с помощью специальной матрицы-функции $L(z)$, производная которой совпадает с $(2\pi i)^{-1} z_J^{-1}$. Нетрудно показать [11], что ее можно определить как значение аналитической функции $(2\pi i)^{-1} \ln \zeta$ от матрицы z_J. Тогда при любом $\eta \in \mathbb{C}^l$ многозначная вектор-функция $\phi(z) = L(z)\eta$ будет J-аналитической функцией, приращение которой при обходе точки $z = 0$ против часовой стрелки дает вектор η. В случае матрицы (2.1) эта функция дается формулой

$$\begin{aligned}
&(i)\ L(z) = \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} \ln(x + \nu_1 y) & 0 \\ 0 & \ln(x + \nu_2 y) \end{pmatrix}, \\
&(ii)\ L(z) = \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} \ln(x + \nu y) & y(x + \nu y)^{-1} \\ 0 & \ln(x + \nu y) \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Исходя из $L(z)$, построим семейство многозначных функций, имеющих аналогичное поведение по отношению к связным компонентам контура $\Gamma = \partial D$. Пусть этот контур состоит из связных компонент $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, причем в случае конечной области D контур Γ_m охватывает все остальные. Очевидно, дополнение к замкнутой области $\overline{D}$ на плоскости состоит из m областей $\widetilde{D}_1, \ldots, \widetilde{D}_m$, каждая из которых ограничена простым контуром. При $1 \leqslant j \leqslant m-1$ все области $\widetilde{D}_j$ конечны, а области $\widetilde{D}_m$ и D имеют противоположный тип. Выберем внутри каждой области $\widetilde{D}_j$ по точке a_j и положим

$$L_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \begin{cases} L(z - a_j), & \sigma(D) = 1, \\ L(z - a_j) - L(z - a_m), & \sigma(D) = 0, \end{cases} \quad 1 \leqslant j \leqslant m-1. \tag{4.13}$$

Заметим, что в случае бесконечной области производная $L_j'(z)$ имеет порядок -2 на ∞.

Нетрудно видеть, что в этих обозначениях любая многозначная функция единственным образом представима в виде

$$\phi(z) = \phi_0(z) + \sum_{j=1}^{m-1} L_j(z)\eta_j, \quad \eta_j \in \mathbb{C}^l, \tag{4.14}$$

где ϕ_0 однозначна. В соответствии с этим запись $\phi \in h^p(D)$ по определению означает, что в этом представлении $\phi_0 \in h^p(D)$. Аналогичным образом вводятся и другие классы многозначных функций.

Постановку задачи Римана—Гильберта (4.1) можно расширить на допустимые многозначные функции, т. е. функции ϕ, для которых вещественная l-вектор-функция $\operatorname{Re} G\phi$ однозначна. Они определяются разложением (4.14), в котором $\operatorname{Re} G\eta_j = 0$. Соответственно данную задачу можно рассматривать как задачу

$$\operatorname{Re} G\phi_0\big|_\Gamma + \sum_{j=1}^{m-1} \operatorname{Re}[GL_j\eta_j]\big|_\Gamma = f$$

относительно $(\phi_0, \eta_1, \ldots, \eta_{m-1})$, где ϕ_0 однозначна, а вектора η_j $(j = 1, \ldots, m-1)$ принадлежат конечномерному пространству $\{\eta \in \mathbb{C}^l,\ \operatorname{Re} G\eta = 0\}$ размерности l. Хорошо известно [8], что расширение фредгольмового оператора на n измерений увеличивает его индекс на n. Следовательно, с учетом (4.2) индекс задачи (4.1) в классе $h^p(D)$ допустимых многозначных функций равен l.

5. Первая и вторая краевые задачи для системы Ламе

Рассмотрим систему Ламе в области D, ограниченной ляпуновским контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$, $0 < \nu < 1$. Как известно [6], основные краевые условия для этой системы состоят в задании на граничном контуре либо вектора смещений

$$u^+ = f, \tag{5.1}$$

либо нормальной компоненты $\sigma^+ n = \sigma^+_{(1)} n_1 + \sigma^+_{(2)} n_2$ тензора напряжения σ, где $n = (n_1, n_2)$ — единичная внешняя нормаль на Γ и верхний знак $+$ указывает на граничное значение функций. Согласно (1.1), (2.13) последнее краевое условие можно записать в форме

$$n_1\left(a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right)^+ + n_2\left(a_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right)^+ = g, \tag{5.2}$$

где положено $x_1 = x,\ x_2 = y$. Таким образом, (5.1) отвечает задаче Дирихле для системы Ламе, а (5.2) — задаче Неймана. Эти задачи носят также название первой и второй краевых задач.

В случае $\sigma(D) = 0$ бесконечной области на градиент решения u этой системы накладывается условие

$$\operatorname{grad} u(z) = O(|z|^{-2}) \quad \text{при} \quad z \to \infty, \tag{5.3}$$

в частности, существует предел $u(\infty) = \lim u(z)$ на бесконечности. Из теоремы 2.1 тогда следует, что в представлении (2.10) функция $\phi'(z)$ имеет порядок -2 на ∞.

С точки зрения общих сильно эллиптических систем вопросы разрешимости задач Дирихле и Неймана для системы Ламе в гельдеровских и соболевских пространствах хорошо изучены [16]. В данном разделе рассмотрим эти задачи в классах Харди $h^p(D)$ для решений системы Ламе и сопряженных к ним функций, которые в соответствии с теоремами 2.1, 2.2 определяются как в разделе 4 по отношению к $G = b$ и $G = c$ соответственно.

В классе $C^1(\overline{D})$ единственность решения задачи Дирихле для системы (1.1) легко следует из формулы Грина:

$$\sum_{i,j=1}^{2}\int_D \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_1dx_2 = \sum_{i,j=1}^{2}\int_\Gamma \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}n_i\right)u|dt|, \tag{5.4}$$

где для единообразия положено $x_1 = x, x_2 = y$. Если u удовлетворяет однородному краевому условию (5.1), то интеграл по Γ в этом равенстве выпадает, и на основании (1.4) решение u должно быть тривиальным, т. е. иметь вид (2.15). Совместно с (1.4) отсюда $u = 0$.

Из тех же соображений заключаем, что однородная задача (5.2) допускает только тривиальные решения. С другой стороны, для двух решений $u, u_0 \in C^1(\overline{D})$ можно написать аналогичное (5.4) тождество

$$\sum_{i,j=1}^{2}\int_D \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u_0}{\partial x_i}dx_1dx_2 = \sum_{i,j=1}^{2}\int_\Gamma \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}n_i\right)u_0|dt|.$$

Если u_0 является тривиальным решением, то

$$\sum_{i,j=1}^{2}\int_D a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u_0}{\partial x_i}dx_1dx_2 = \sum_{i,j=1}^{2}\int_D a_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_1dx_2 = 0,$$

так что условие ортогональности

$$\int_\Gamma g(t)u_0(t)|dt| = 0 \tag{5.5}$$

правой части задачи (5.2) тривиальным решениям u_0 необходимо для ее разрешимости.

Теорема 5.1. *Пусть область D ограничена контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$. Тогда задача Дирихле однозначно разрешима в классе $h^p(D)$, $p > 1$.*

Если правая часть $f \in C^\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, то любое решение $u \in h^p(D)$ этой задачи принадлежит $C^\mu(\overline{D})$. Аналогично $f \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ влечет $u \in C^{1,\mu}(\overline{D})$.

Доказательство. В силу теорем 2.1 и 3.3 задача Дирихле равносильна задаче Римана—Гильберта

$$\operatorname{Re} b\phi^+ = f \tag{5.6}$$

в классе $h^p(D)$ допустимых многозначных решений. Как отмечено в конце раздела 3, в рассматриваемом классе эта задача фредгольмова и ее индекс равен 2. Если $f = 0$, то по теореме 4.1 функция $\phi \in C^1(\overline{D})$ и, соответственно, $u = \operatorname{Re} b\phi$ является решением однородной задачи Дирихле системы Ламе. Как отмечено выше, отсюда $u = 0$, так что по теореме 2.1 функция ϕ постоянна. Итак, размерность пространства решений однородной задачи (5.6) равна 2 и, поскольку ее индекс равен 2, эта задача безусловно разрешима. Тем самым первое утверждение теоремы установлено. Вторая часть теоремы является следствием второй части теоремы 4.1. □

Обратимся к постановке задачи (5.2) в классе Харди. Если $u \in C^1(\overline{D})$, то в силу (2.14) равенство (5.2) можно записать по отношению к сопряженной функции v в форме

$$(v^+)' = g, \tag{5.7}$$

где штрих означает производную по параметру длины дуги, отсчитываемой в направлении, положительном по отношению к D.

Пусть Γ_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, — простые контуры, составляющие Γ. В силу (2.19) существуют единственные $\eta_j \in \mathbb{C}^2$, удовлетворяющие системе

$$\operatorname{Re} b\eta_j = 0,\ \operatorname{Re} c\eta_j = \int\limits_{\Gamma_j} g(t)|dt|, \quad 1 \leqslant j \leqslant m-1. \tag{5.8}$$

Рассмотрим многозначное решение системы Ламе

$$u_1(z) = u(z) - \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m-1} bL_j(z)\eta_j, \tag{5.9}$$

сопряженная функция к которому согласно теореме 2.2 дается равенством

$$v_1(z) = v(z) - \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m-1} cL_j(z)\eta_j.$$

Очевидно, она удовлетворяет аналогичному (5.7) краевому условию

$$(v_1^+)' = g_1 \tag{5.10}$$

с правой частью

$$g_1 = g - \left[\left(\sum_{j=1}^{m-1} \operatorname{Re} cL_j\eta_j\right)^+\right]'.$$

В силу (5.8) функция g_1 удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\Gamma_j} g_1(t)|dt| = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{5.11}$$

Пусть необходимое условие разрешимости (5.5) задачи Неймана выполнено. Тогда, выбирая в качестве u_0 постоянные вектор-функции, приходим к аналогичному (5.11) равенству и на Γ_m. Таким образом, существует первообразная $f_1 \in C^1(\Gamma)$ функции g_1. При этом функция v_1 однозначна и (5.9) переходит в задачу Дирихле

$$v_1^+ = f_1 \tag{5.12}$$

для сопряженной функции v.

Последнюю задачу уже можно рассматривать как в классе Гельдера $C^\mu(\overline{D})$, так и в классе Харди $h^p(D)$ сопряженных функций. Если однозначная сопряженная функция $v_1 \in h^p(D)$ к решению u_1 системы Ламе, удовлетворяющая краевому условию (5.12), найдена, то однозначную функцию u, определяемую равенством (5.9), будем называть решением задачи Неймана. Приведенная процедура устанавливает соответствие между задачей (5.2) решения системы Ламе, для которого сопряженная функция многозначна, и задачей (5.12) для однозначных сопряженных функций к многозначным решениям системы Ламе.

В случае $v_1 \in C^{1,\mu}(\overline{D})$ так определенная функция u принадлежит тому же классу и удовлетворяет классическому краевому условию (5.2). В частности, тогда условие (5.5) для g_1 необходимо должно быть выполнено, поскольку оно имеет место для g и для сужения на Γ функции $\sum \operatorname{Re} cL_j\eta_j$. Напомним, что в случае бесконечной области тривиальными решениями являются только постоянные векторы.

Таким образом, после интегрирования по частям условие ортогональности (5.5) в случае бесконечной области выпадает, а в случае конечной области D переходит в одно условие

$$\int\limits_{\Gamma} f_1(t)n(t)|dt| = 0, \tag{5.13}$$

где подынтегральное выражение понимается как скалярное произведение $f_1(t)$ и вектора нормали $n = (n_1, n_2)$ в точке $t \in \Gamma$ в $\mathbb{R}^2$.

Итак, если область D конечна и $f_1 \in C^{\mu}(\Gamma)$, то условие (5.13) необходимо для разрешимости задачи (5.12). В силу соображений плотности отсюда заключаем, что оно необходимо и для любой правой части $f_1 \in L^p(\Gamma)$.

Теорема 5.2. *Пусть область D ограничена контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$. Тогда однородная задача Дирихле для сопряженных функций в классе $h^p(D)$, $p > 1$, имеет только нулевое решение, а неоднородная задача безусловно разрешима в случае $\sigma(D) = 0$, а при $\sigma(D) = 1$ она разрешима тогда и только тогда, когда ее правая часть удовлетворяет условию ортогональности* (5.13). *В частности, эта задача фредгольмова и ее индекс равен $-\sigma(D)$.*

Если правая часть $f_1 \in C^{\mu}(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, то любое решение $v_1 \in h^p(D)$ этой задачи принадлежит $C^{\mu}(\overline{D})$. Аналогично $f_1 \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ влечет $v_1 \in C^{1,\mu}(\overline{D})$.

Доказательство. Оно аналогично доказательству теоремы 5.1. В силу теорем 2.2 и 4.1 задача Дирихле (5.12) равносильна задаче Римана—Гильберта

$$\operatorname{Re} c\phi^+ = f_1 \tag{5.14}$$

в классе $h^p(D)$ допустимых многозначных решений. В частности, на основании теоремы 4.1 последняя задача фредгольмова индекса 2. Отсюда же следует и вторая часть доказываемой теоремы, в частности, любое решение v однородной задачи принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$. Аналогичным свойством обладает и многозначное решение u системы Ламе, сопряженная функция которого есть v.

Условимся под *разрезом* области D понимать гладкую дугу, которая соединяет различные контуры Γ_j. Рассмотрим конечное число попарно непересекающихся разрезов $L_1, \dots, L_n$, разбивающих область D на подобласти $D_1, \dots, D_l$, каждая из которых ограничена простым кусочно-гладким контуром. Тогда в каждой области D_k любая многозначная J-аналитическая функция ϕ допускает однозначную ветвь ϕ_k, при этом если $L_s \subseteq \partial D_k \cap \partial D_r$, то разность $\phi_k - \phi_r$ постоянна на L_s.

Рассмотрим теперь многозначное решение ϕ однородной задачи (5.14), которое по теореме 4.1 принадлежит классу $C^1(\overline{D})$. По определению для этого решения функция $v = \operatorname{Re} c\phi$ однозначна в области D и обращается в нуль на Γ. Тогда к функциям $u_r = \operatorname{Re} b\phi_r$ в области D_k можно применить тождество (5.4):

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_{D_k} \left(a_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_1 dx_2 = \int\limits_{\partial D_k} v_k' u_k |dt|,$$

где $v_k = \operatorname{Re} c\phi_k$ и штрих означает касательную производную в направлении, оставляющем область D_k слева. Сумма правых частей этого равенства по всем k обращается в нуль. В самом деле, интегралы по $\Gamma \cap \partial D_k$ обращаются в нуль в силу краевого условия для v. С другой стороны, если $L_s \subseteq \partial D_k \cap \partial D_r$, то на L_s имеем равенства $v_k = v_r$ и $v_k' = -v_r'$, поскольку касательные производные берутся по противоположным направлениям. С другой стороны, разность $u_k - u_r$

на L_s равна постоянному вектору $\xi_s \in \mathbb{R}^2$. Поэтому с точностью до знака

$$\int\limits_{\partial D_k} v_k' u_k |dt| + \int\limits_{\partial D_r} v_r' u_k |dt| = \int\limits_{\partial D_k} v_k' \xi_s |dt| = 0,$$

где учтено, что на концах L_s функция v_k обращается в нуль.

Таким образом, интеграл от левой части (5.4) равен нулю и, следовательно, $u = \operatorname{Re} b\phi$ является тривиальным решением системы Ламе и, соответственно, $v = 0$.

Как отмечено в разделе 2, функции ϕ с этим свойством в случае $\sigma(D) = 1$ являются многочленами первой степени и образуют трехмерное пространство, а при $\sigma(D) = 1$ являются постоянными векторами и образуют двумерное пространство. Поскольку индекс задачи равен 2, отсюда следует, что в случае $\sigma(D) = 1$ неоднородная задача безусловно разрешима, а при $\sigma(D) = 0$ эта задача разрешима при выполнении одного условия ортогональности, которым, очевидно, и является условие (5.13). □

В качестве следствия теоремы 5.2 приходим к следующему классическому результату о разрешимости задачи Неймана.

Теорема 5.3. *Пусть область D ограничена контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$. Тогда однородная задача Неймана для системы Ламе в классе $C^{1,\mu}(\overline{D})$, $0 < \mu < \nu$, имеет только тривиальные решения, а неоднородная разрешима тогда и только тогда, когда ее правая часть удовлетворяет условиям ортогональности* (5.5) *этим тривиальным решениям.*

Проиллюстрируем также применение теоремы 5.2 в следующей ситуации.

Лемма 5.1. *Пусть область D бесконечна и ограничена простым контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$. Пусть f есть сужение многочлена $p(x,y) = x\xi^0 + y\xi^1$ на Γ, где ξ^k $(k = 0,1)$ фигурируют в* (2.30). *Тогда существует единственная J-аналитическая функция ϕ_0, которая принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$ при любом $\mu < \nu$, исчезает на бесконечности и удовлетворяет краевому условию*

$$\operatorname{Re} c\phi_0^+ = \xi + f_1 \tag{5.15}$$

с некоторым $\xi \in \mathbb{R}^2$.

Доказательство. Оно требует только единственность. Пусть функция $\phi \in H^p(D)$ исчезает на бесконечности и удовлетворяет краевому условию $\operatorname{Re} c\phi^+ = \xi$ с некоторым $\xi \in \mathbb{R}^2$. Тогда по теореме 5.2 функция $v = \operatorname{Re} c\phi$ тождественно равна нулю, так что на основании теоремы 4.2 функция ϕ является многочленом второй степени. Поскольку по условию $\phi(z) \to 0$ при $z \to \infty$, этот многочлен равен нулю. Таким образом, единственность функции ϕ_0 леммы установлена. □

6. Потенциалы двойного слоя

Исходя из единичной внешней нормали $n = n_1 + in_2$ на ляпуновском контуре Γ, рассмотрим в области D интегралы

$$(P\varphi)(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Gamma} \frac{\operatorname{Re}[\overline{n(t)}(t-z)]}{|t-z|^2} \varphi(t)|dt|, \quad z \in D, \tag{6.1}$$

$$(Q\varphi)(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Gamma} \frac{\operatorname{Im}[\overline{n(t)}(t-z)]}{|t-z|^2} \varphi(t)|dt| \quad z \in D, \tag{6.2}$$

с вещественной плотностью φ.

Интегралы (6.1) и (6.2) можно также рассматривать и для $z = t_0 \in \Gamma$, в этом случае их обозначаем $P^*\varphi$ и $Q^*\varphi$ соответственно. Поскольку контур Γ ляпуновский, аналогично лемме 3.1 проверяется, что ядро интегрального оператора P имеет слабую особенность. Что касается интеграла (6.2), то, как и соответствующий интеграл Коши, он является сингулярным.

Поскольку $dt = in|dt|$, эти интегралы связаны с интегралом типа Коши соотношением

$$(P\varphi)(z) - i(Q\varphi)(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t)dt}{t-z}. \tag{6.3}$$

Поэтому функции $P\varphi$ и $Q\varphi$ являются гармоническими в области D. Из равенства (6.3) непосредственно следует, что операторы P, Q ограничены $L^p(\Gamma) \to h^p(D)$, $p > 1$, и справедливы формулы

$$(P\varphi)^+ = \varphi + P^*\varphi, \quad (Q\varphi)^+ = Q^*\varphi \tag{6.4}$$

для их граничных значений. Из этих же соображений в предположении $\Gamma \in C^{1,\nu}$ эти операторы ограничены $C^\mu(\Gamma) \to C^\mu(\overline{D})$ и $C^{1,\mu}(\Gamma) \to C^{1,\mu}(\overline{D})$, $0 < \mu < \nu$. Хорошо известно также, что оператор P ограничен $C(\Gamma) \to C(\overline{D})$.

Интеграл (6.1) представляет собой классический потенциал двойного слоя. Обобщенные потенциалы двойного слоя для решений системы Ламе и сопряженных к ним функций построим по аналогичной схеме, исходя из матрицы (2.1), интеграла типа Коши для J-аналитических функций и матриц b, c, фигурирующих в теоремах 2.1 и 2.2. С этой целью в обозначениях (3.1) введем однородные степени -1 матрицы-функции переменной $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ по формулам

$$\begin{aligned} H_{11}(\xi) &= \mathrm{Im}[b\,(i\xi)_J\xi_J^{-1}b^{-1}], \quad H_{22}(\xi) = \mathrm{Im}[c\,(i\xi)_J\xi_J^{-1}c^{-1}], \\ H_{21}(\xi) &= \mathrm{Im}[c\,(i\xi)_J\xi_J^{-1}b^{-1}], \quad H_{12}(\xi) = \mathrm{Im}[b\,(i\xi)_J\xi_J^{-1}c^{-1}]. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Заметим, что в явном виде $(i\xi)_J\xi_J^{-1} = (-\xi_2+\xi_1 J)(\xi_1+\xi_2 J)^{-1}$. Очевидно, матрицы $H(\xi)$ однородны степени нуль и в силу леммы 2.1 не зависят от выбора b. Эти матрицы определяют интегральные операторы

$$(P_{kr}\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma \frac{\mathrm{Re}[\overline{n(t)}(t-z)]}{|t-z|^2} H_{kr}(t-z)\varphi(t)|dt|, \quad z \in D, \tag{6.6}$$

$$(P^*_{kr}\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma \frac{\mathrm{Re}[\overline{n(t)}(t-t_0)]}{|t-t_0|^2} H_{kr}(t-t_0)\varphi(t)|dt|, \quad t_0 \in \Gamma. \tag{6.7}$$

Как и в случае P^*, ядро операторов P^*_{kr} имеет слабую особенность, что с учетом четности матриц-функций $H(\xi)$ устанавливается совершенно аналогично доказательству леммы 3.2. Поэтому на основании леммы 3.1 операторы P^*_{kr} компактны в $L^p(\Gamma)$.

Следующая лемма описывает связь функций $P_{kr}\varphi$ с интегралом типа Коши $I\varphi$, введенном в разделе 3. Удобно класс h^p ввести и для функций $w = P_{kr}\varphi$ условием конечности соответствующего выражения в правой части (3.8).

Лемма 6.1. *Имеет место равенство*

$$[\mathrm{Im}(b_k b_r^{-1})]Q\varphi + P_{kr}\varphi = 2\,\mathrm{Re}[b_k I(b_r^{-1}\varphi)], \quad k, r = 1, 2, \tag{6.8}$$

где для единообразия положено $b_1 = b$, $b_2 = c$. В частности, операторы P_{kr} ограничены $L^p(\Gamma) \to h^p(D)$, $p > 1$, и имеют место формулы

$$\begin{aligned} &(P_{kk}\varphi)^+ = \varphi + P^*_{kk}\varphi, \ k = 1, 2, \\ &(P_{21}\varphi)^+ = [\mathrm{Re}(cb^{-1})]\varphi + P^*_{21}\varphi, \\ &(P_{12}\varphi)^+ = [\mathrm{Re}(bc^{-1})]\varphi + P^*_{12}\varphi \end{aligned} \tag{6.9}$$

для угловых граничных значений.

Доказательство. По отношению к единичному касательному вектору $e = in$ можно записать $e\xi^{-1} = |\xi|^{-2}[\mathrm{Re}(\overline{n}\xi) - i\,\mathrm{Im}(\overline{n}\xi)]$ или

$$|\xi|^2(e_1 + ie_2) = [\mathrm{Im}(\overline{n}\xi)]\xi + [\mathrm{Re}(\overline{n}\xi)]i\xi.$$

Поскольку выражения в квадратных скобках вещественны, отсюда

$$|\xi|^2 e_J = [\mathrm{Im}(\overline{n}\xi)]\xi_J + [\mathrm{Re}(\overline{n}\xi)](i\xi)_J.$$

что с учетом определения (6.5) приводит к равенству

$$|\xi|^2\,\mathrm{Im}[b_k\xi_J^{-1}e_J)b_r^{-1}] = [\mathrm{Im}(\overline{n}\xi)]\,\mathrm{Im}(b_k b_r^{-1}) + [\mathrm{Re}(\overline{n}\xi)]H_{kr}(\xi).$$

На основании (6.2), (6.6) отсюда следует (6.8).

Аналогичное равенство справедливо и для интегральных операторов со «звездой» в обозначениях:

$$[\mathrm{Im}(b_k b_r^{-1})]Q_0^*\varphi + P^*_{kr}\varphi = \mathrm{Re}[b_k S(b_r^{-1}\varphi)]. \tag{6.10}$$

С другой стороны, формулы (3.7) и (6.4), примененные к (6.8), дают соотношение

$$[\mathrm{Im}(b_k b_r^{-1})]Q_0^*\varphi + (P_{kr}\varphi)^+ = [\mathrm{Re}(b_k b_r^{-1})]\varphi + \mathrm{Re}[b_k S(b_r^{-1}\varphi].$$

Совместно с предыдущим равенством отсюда следует (6.9). □

С учетом (6.5) из (6.8) и теорем 2.1, 2.2 непосредственно вытекает, что следующие пары являются решением u системы Ламе и сопряженной к ним функцией v:

$$\begin{aligned} u &= P_{11}\varphi, \quad v = [\mathrm{Im}(cb^{-1})]Q_0\varphi + P_{21}\varphi; \\ v &= P_{22}\varphi, \quad u = [\mathrm{Im}(bc^{-1})]Q_0\varphi + P_{12}\varphi. \end{aligned} \tag{6.11}$$

В соответствии с этим интегралы $P_{11}\varphi$ и $P_{22}\varphi$ естественно назвать *обобщенными потенциалами двойного слоя* для, соответственно, решений системы Ламе и сопряженных к ним функций.

Предыдущие результаты распространяются и на пространства непрерывных функций.

Лемма 6.2. *Пусть $\Gamma \in C^{1,\nu}$, $0 < \mu < \nu$ и X означает любой из символов C, $C^\mu, C^{1,\mu}$. Тогда оператор P_{kr} ограничен $X(\Gamma) \to X(\overline{D})$, а оператор P_{kr}^* компактен в $X(\Gamma)$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала операторы P_{kr}. Ограниченность этих операторов $C^\mu(\Gamma) \to C^\mu(\overline{D})$ вытекает из равенства (6.8) и аналогичного свойства операторов Q и I. По отношению к классам $C^{1,\mu}$ доказательство основывается на формуле дифференцирования интеграла типа Коши $\phi = I\varphi$. Пусть $\varphi \in C^1(\Gamma)$ и $D\varphi$ означает производную φ по параметру длины дуги на Γ, отсчитываемой в положительном направлении. Тогда

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [(t-z)_J^{-2} e_J(t)\varphi(t)|dt| = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [D(t-z)_J^{-1}]\varphi(t)|dt|,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [J(t-z)_J^{-2} e_J(t)\varphi(t)|dt| = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [DJ(t-z)_J^{-1}]\varphi(t)|dt|,$$

откуда после интегрирования по частям приходим к формулам дифференцирования

$$\frac{\partial(I\varphi)}{\partial x} = I(e_J^{-1}D\varphi), \quad \frac{\partial(I\varphi)}{\partial y} = I(Je_J^{-1}D\varphi). \tag{6.12}$$

С учетом (6.4) аналогичные формулы имеем и для оператора Q_0:

$$\frac{\partial(Q\varphi)}{\partial x} = -\,\mathrm{Im}\left[\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{(D\varphi(t)|dt|}{t-z}\right], \quad \frac{\partial(Q\varphi)}{\partial y} = -\,\mathrm{Im}\left[\frac{1}{\pi}\int_\Gamma \frac{(D\varphi(t)|dt|}{t-z}\right]. \tag{6.13}$$

Применяя эти формулы к (6.8), приходим к ограниченности операторов $P_{kr} : C^{1,\mu}(\Gamma) \to C^{1,\mu}(\overline{D})$.

Доказательство рассматриваемого утверждения леммы для пространств C опирается на оценку

$$\sup_{z\in D}\int_\Gamma \frac{|\,\mathrm{Re}[\overline{n(t)}(t-z)]|}{|t-z|^2}|dt| < \infty,$$

хорошо известную для классических потенциалов двойного слоя. Поскольку элементы однородной степени 0 матрицы-функции H по модулю не превосходят некоторой постоянной, отсюда и

$$\sup_{z\in D}\int_\Gamma \frac{|\,\mathrm{Re}[\overline{n(t)}(t-z)]|}{|t-z|^2}|H_{kr}(t-z)||dt| < \infty, \tag{6.14}$$

где под $|H(t-z)|$ понимается какая-либо норма в $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Поэтому рассматриваемое утверждение будет установлено, если покажем, что для $\varphi \in C(\Gamma)$ функция $(P_{kr}\varphi)(z)$, $z \in D$, допускает предел в фиксированной граничной точке $t_0 \in \Gamma$. Согласно (6.8) оператор P_{kr} переводит постоянные вектор-функции в постоянные. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $\varphi(t_0) = 0$. Если $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ — некоторая окрестность точки t_0, то, очевидно,

$$\int_{\Gamma\setminus\Gamma_0} \frac{\mathrm{Re}[\overline{n(t)}(t-z)]}{|t-z|^2}H(t-z)\varphi(t)|dt| \to \int_{\Gamma\setminus\Gamma_0} \frac{\mathrm{Re}[\overline{n(t)}(t-t_0)]}{|t-t_0|^2}H(t-t_0)\varphi(t)|dt|$$

при $t \to t_0$. С другой стороны, в силу (6.14) при надлежащем выборе Γ_0 аналогичный интеграл по Γ_0 можно сделать сколь угодно малым по модулю равномерно по z.

Обратимся к операторам P^*_{kr}. В предположении $\Gamma \in C^{1,\nu}$ их компактность в пространствах $C^\mu(\Gamma)$ и $C^\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, устанавливается с помощью леммы 3.1 совершенно аналогично доказательству леммы 3.2. Нужно только учесть, что однородная степени нуль матрица функция $H_{kr}(\xi)$ четна. Что касается последнего случая пространства $C^{1,\mu}$, то установим предварительно формулу дифференцирования

$$DP^*_{kr}\varphi = \widetilde{P}^*_{kr}D\varphi, \quad \varphi \in C^{1,\mu}(\Gamma), \tag{6.15}$$

где оператор $\widetilde{P}^*_{kr}$ получается заменой $n(t)$ на $n(t_0)$ под интегралом в левой части (6.7).

Доказательство основывается на использовании формул дифференцирования (6.12) и (6.13). Пусть оператор $\widetilde{Q}^*$ получается из Q^* аналогичным образом заменой $n(t)$ на $n(t_0)$ под знаком интеграла. Положим еще $\widetilde{S} = e_J S e_J^{-1}$ или, в явной форме,

$$(\widetilde{S}\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma e_J(t_0)(t-t_0)_J^{-1}\varphi(t)|dt|, \quad t_0 \in \Gamma.$$

Тогда, как и при доказательстве леммы 6.1, убеждаемся, что аналогичное (6.10) равенство справедливо и для рассматриваемых операторов:

$$[\operatorname{Im}(b_k b_r^{-1})]\widetilde{Q}^*_0\varphi + \widetilde{P}^*_{kr}\varphi = \operatorname{Re}[b_k\widetilde{S}(b_r^{-1}\varphi)]. \tag{6.16}$$

Зафиксируем далее точку $t_0 \in \Gamma$ и подставим в выражение

$$e_1(t_0)\frac{\partial(I\varphi)}{\partial x}(z) + e_2(t_0)\frac{\partial(I\varphi)}{\partial y}(z)$$

частные производные (6.12). Тогда в пределе при $z \to t_0$ с учетом формул Сохоцкого—Племеля (3.7) получим $2D(I\varphi)^+ = D\varphi + \widetilde{S}D\varphi$. С другой стороны, дифференцирование формулы Сохоцкого—Племеля дает аналогичное равенство $2D(I\varphi)^+ = D\varphi + DS\varphi$. Сравнивая его с предыдущим, получим формулу дифференцирования $DS = \widetilde{S}D$ сингулярного оператора S. Совершенно аналогично с использованием (6.13) получим равенство $DQ = \widetilde{Q}_0 D$ для оператора Q. Действуя на равенство (6.10) оператором D и применяя эти формулы, получим

$$[\operatorname{Im}(b_k b_r^{-1})]\widetilde{Q}D\varphi + DP^*_{kr}\varphi = \operatorname{Re}[b_k\widetilde{S}(b_r^{-1}\varphi)].$$

Совместно с (6.16) отсюда следует (6.15).

Как и выше убеждаемся, что оператор $\widetilde{P}^*_{kr}$ компактен в пространстве $C^\mu(\Gamma)$. На основании (6.15) отсюда следует компактность оператора P^*_{kr} в $C^{1,\mu}(\Gamma)$, что завершает доказательство леммы. □

Если сопряженная функция представлена одним из двух способов (6.11), то по формулам (2.16) можно определить элементы тензора напряжений σ. Поэтому важную роль играют явные формулы дифференцирования функции v в представлениях (6.11). Они непосредственно получаются из соотношения (6.8) леммы 6.1 и формул дифференцирования (6.12) интеграла типа Коши.

Лемма 6.3. *Пусть $\varphi \in C^1(\Gamma)$ и $D\varphi$ означает производную φ по касательному направлению $e = in$ на Γ. Тогда*

$$\frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \operatorname{Im}[c(t-z)_J^{-1}c^{-1}](D\varphi)(t)|dt|,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(z) = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \operatorname{Im}[cJ(t-z)_J^{-1}c^{-1}](D\varphi)(t)|dt|,$$

если $v = P_{22}\varphi$, и

$$\frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \operatorname{Im}[c(t-z)_J^{-1}b^{-1}](D\varphi)(t)|dt|,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(z) = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \operatorname{Im}[cJ(t-z)_J^{-1}b^{-1}](D\varphi)(t)|dt|,$$

если функция v сопряжена к $u = P_{11}\varphi$.

7. Интегральные представления потенциалами двойного слоя

Рассмотрим вопрос о представлении решений системы Ламе и сопряженных к ним функций обобщенными потенциалами двойного слоя. Предварительно опишем ядро $\ker P_{11} = \{\varphi \in L^p(\Gamma)\ |P_{11}\varphi = 0\}$ оператора P_{11}. Согласно теореме 3.1 аналогичное ядро оператора I состоит из комплексных функций, которые постоянны на простых контурах, составляющих Γ (и обращаются в нуль на внешнем контуре в случае $\sigma(D) = 1$ конечной области). Поэтому с учетом (6.8) аналогичные вещественные вектор-функции входят в ядро $\ker P_{11}$. В действительности они полностью описывают это ядро.

Лемма 7.1. *Пусть область D ограничена контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$, состоящим из связных компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, причем в случае конечной области контур Γ_m охватывает все остальные компоненты.*

Тогда ядро оператора P_{11} состоит из функций, которые постоянны на связных компонентах Γ и обращаются в нуль на Γ_m в случае конечной области. В частности, $\dim(\ker P_{11}) = 2[m - \sigma(D)]$.

Доказательство. Запишем равенство (6.8) для рассматриваемого оператора:

$$P_{11}\varphi = 2\,\mathrm{Re}[bI(b^{-1}\varphi)]. \tag{7.1}$$

Предполагая $P_{11}\varphi = 0$, рассмотрим в области D интеграл типа Коши $\phi = I(b^{-1}\varphi)$ и аналогичный интеграл в дополнении $\widetilde{D} = \mathbb{C} \setminus \overline{D}$, который обозначим $\psi = \widetilde{I}(b^{-1}\varphi)$. Для граничных значений этих функций в силу (3.7) можно записать:

$$\phi^+ - \psi^- = b^{-1}\varphi, \tag{7.2}$$

где учтено, что контур Γ ориентирован отрицательно по отношению к $\widetilde{D}$.

В соответствии с (7.1) предположение $P_{11}\varphi = 0$ означает, что $\mathrm{Re}\, b\phi = 0$. Следовательно, функция ϕ постоянна в области D, более точно,

$$b\phi = i\xi,\ \xi \in \mathbb{R}^2.$$

На основании (7.2) и вещественности φ отсюда

$$\mathrm{Im}\, b\psi^- = \xi, \quad \varphi = -\,\mathrm{Re}\, b\psi^-. \tag{7.3}$$

Следовательно, функция $u_0 = (\mathrm{Im}\, b\psi) - \xi$ является решением однородной задачи Дирихле для системы Ламе в связных компонентах открытого множества $\widetilde{D}$, и по теореме 5.1 она тождественно равна нулю. Поэтому функция ψ постоянна в связных компонентах $\widetilde{D}$. Если область D конечна, то область $\widetilde{D}_m$ бесконечна, и поскольку $\psi(\infty) = 0$, функция $\psi = 0$ в $\widetilde{D}_m$. Совместно со вторым равенством (7.3) отсюда следует, что функция φ постоянна на контурах Γ_j и в случае $\sigma(D) = 1$ обращается в нуль на Γ_m. □

Следующая основная теорема аналогично теореме 3.1 решает вопрос о представлении решений системы Ламе обобщенными потенциалами двойного слоя. Согласно (7.1) функцию $u = P_{11}\varphi$ можно записать в виде $u = \mathrm{Re}\, b\phi$, где J-аналитическая функция $\phi = I(b^{-1}\varphi)$ однозначна в области D. Таким образом, функция, сопряженная к $u = P_{11}\varphi$, однозначна в области D. Кроме того, в случае $\sigma(D) = 0$ функция $P_{11}\varphi$ исчезает на бесконечности. Поэтому в обозначениях (4.12), (4.13) функции вида

$$u = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m-1} \mathrm{Re}\, bL_j\eta_j, & \sigma(D) = 1, \\ \xi + \sum\limits_{j=1}^{m-1} \mathrm{Re}\, bL_j\eta_j, & \sigma(D) = 0, \end{cases} \qquad \mathrm{Re}\, b\eta_j = 0, \xi \in \mathbb{R}^2, \tag{7.4}$$

не могут быть представлены потенциалом $P_{11}\varphi$. Заметим, что эти функции образуют пространство размерности $2[m - \sigma(D)]$. В действительности дополнение к этому пространству дает образ оператора P_{11}.

Теорема 7.1. *Пусть область D ограничена контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$, состоящим из связных компонент $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, причем в случае конечной области контур Γ_m охватывает все остальные компоненты. Тогда любое решение $u \in h^p(D)$, $1 < p < \infty$, системы Ламе представимо в виде*

$$u = P_{11}\varphi + u_0 \tag{7.5}$$

с некоторыми $\varphi \in L^p(\Gamma)$ и функцией u_0 вида (7.4), *причем последняя функция определяется однозначно по u.*

Если $u \in X(\overline{D})$, где X означает любой из символов C, C^μ, $C^{1,\mu}$, $\mu < \nu$, то и $\varphi \in X(\Gamma)$.

Доказательство. Для первого утверждения доказательство почти очевидно. В силу леммы 6.1 композиция P_{11} с оператором задачи Дирихле (2.1) представляет собой фредгольмовый оператор $1 + P_{11}^*$ индекса нуль, поэтому на основании теоремы 4.2 и известных свойств фредгольмовых операторов [8] оператор P_{11} также фредгольмов и его индекс равен 1. В частности, образ $\operatorname{im} P_{11}$ замкнут и его коразмерность совпадает с размерностью $2[m - \sigma(D)$ ядра $\ker P_{11}$. Поскольку пространство функций (7.4) также имеет эту размерность и не пересекается с образом $\Im P_{11}$, откуда следует справедливость первой части теоремы.

Второе утверждение является следствием леммы 4.1. В самом деле, если $u \in X(\overline{D})$? то согласно (7.5) функция $\varphi \in L^p(\Gamma)$ является решением уравнения $\varphi + P_{11}^*\varphi = f_1$ с правой частью $f_1 = u^+ - u_0^+ \in X(\Gamma)$. Согласно лемме 6.2 оператор P_{11}^* компактен как в $L^p(\Gamma)$, так и в $X(\Gamma)$, так что регуляризатором оператора $1+P_{11}^*$ может служить единичный оператор. Поэтому на основании леммы 4.1 функция $\varphi \in X(\Gamma)$. □

Теорема 7.1 позволяет свести задачу Дирихле в пространстве $h^p(D)$ к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма в $L^p(\Gamma)$. Пусть $k = 2[m - \sigma(D)$ и $g_1, \ldots, g_k$ есть базис пространства $\ker P_{11}$. Пусть также $u_1, \ldots, u_k$ образуют базис пространства функций вида (7.4). Тогда в силу теоремы 7.1 оператор

$$\widetilde{P}\varphi = P_{11}\varphi + \sum_1^k (\varphi, g_j)u_j, \quad (\varphi, g) = \int_\Gamma \varphi(t)g(t)|dt|,$$

обратим $L^p(\Gamma) \to h^p(D)$ и задача Дирихле $u^+ = f$ редуцируется к эквивалентному уравнению Фредгольма второго рода

$$\varphi + P_{11}^*\varphi + \sum_1^k (\varphi, g_j)u_j^+ = f. \tag{7.6}$$

Если φ есть решение этого уравнения, то первая пара в (6.11) определяет решение u задачи Дирихле и отвечающее ему сопряженную функцию.

Как видно из доказательства теорем 3.1 и 5.1, разрешимость задачи Дирихле для системы Ламе сводится к сингулярному интегральному уравнению на Γ, что не позволяет в рамках этого подхода рассматривать эту задачу в классе $C(\overline{D})$. Классические потенциалы двойного слоя, как известно [5], строятся исходя из фундаментальной матрицы решений для исходной эллиптической системы. Для системы Ламе варианты матриц этого типа были предложены в [4], однако построенные с их помощью потенциалы двойного слоя также редуцируют основные краевые задачи для системы Ламе к сингулярным интегральным уравнениям на границе. Достоинством рассматриваемых обобщенных потенциалов двойного слоя $u = P_{11}\varphi$ является то, что они дают возможность свести задачу к уравнению Фредгольма (7.6), которое свободно от указанного недостатка. Заметим, что эти потенциалы связаны с вариантом $\operatorname{Re}[(2\pi i)^{-1} b \ln z_J]$ фундаментальной матрицы системы Ламе.

Обратимся к оператору P_{22} и аналогично предыдущему опишем сначала все его ядро.

Лемма 7.2. *В условиях леммы* 7.1 *ядро* $\ker P_{22}$ *оператора* P_{22} *состоит из функций* φ, *для которых в обозначениях* (2.30)

$$\varphi\big|_{\Gamma_j} = \xi_j + \lambda_j(x\xi^0 + y\xi^1)\big|_{\Gamma_j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m - \sigma(D), \tag{7.7}$$

$$\varphi\big|_{\Gamma_m} = \lambda_m \operatorname{Im}\left(c\psi_0\big|_{\Gamma_m}\right), \quad \sigma(D) = 1, \tag{7.8}$$

где $\xi_j \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$ и функция ψ_0 определена, как в лемме 5.1, *по отношению к $\widetilde{D}_m$.*

В частности, $\ker P_{22} \supseteq \ker P_{11}$ *и* $\dim\ker P_{22} = 3m - 2\sigma(D)$.

Доказательство. Оно осуществляется аналогично лемме 7.1. Пусть $P_{22}\varphi = 0$, так что для интегралов типа Коши $\phi = I(c^{-1}\varphi)$ и $\psi = \widetilde{I}(c^{-1}\varphi)$ в D и $\widetilde{D}$, соответственно, имеем соотношения

$$\operatorname{Re} c\phi = 0 \tag{7.9}$$

и $\phi^+ - \psi^- = c^{-1}\varphi$. Последнее комплексное равенство с учетом (7.9) равносильно двум вещественным:

$$\operatorname{Im} c\psi^- = \operatorname{Im} c\phi^+, \tag{7.10}$$

$$\varphi = -\operatorname{Re} c\psi^-. \tag{7.11}$$

Верно и обратное: если некоторые функции ϕ и ψ из класса H^p удовлетворяют (7.9) и (7.10), то $\varphi = -\operatorname{Re} c\psi^- \in \ker P_{22}$. В самом деле, тогда $\phi^+ - \psi^- = c^{-1}\varphi$ и формула Коши (3.3), примененная к ϕ в области D и к ψ в связных компонентах $\widetilde{D}$, дает равенства

$$\phi = I(c^{-1}\varphi), \quad \psi = \widetilde{I}(c^{-1}\varphi),$$

первое из которых совместно с (7.9) означает $P_{22}\varphi = 0$.

Дальнейшие рассуждения проведем отдельно для двух случаев конечной и бесконечной областей.

1) Пусть область D бесконечна. Тогда с учетом теоремы 2.2 из (7.9) следует $\phi = 0$ и (7.10) переходит в равенство $\operatorname{Im} c\psi^- = 0$. Поэтому на основании теоремы 5.2 в каждой компоненте $\widetilde{D}_j$ открытого множества $\widetilde{D}$ функция $\operatorname{Im} c\psi$ тождественно равна нулю. С учетом теоремы 2.2 отсюда заключаем, что в области $\widetilde{D}_j$ функция $i\psi(z)$ является многочленом вида (2.29), т. е. в обозначениях леммы 2.3

$$\psi(z) = i(\eta_j + \lambda_j z_J e), \quad z \in \widetilde{D}_j, \tag{7.12}$$

с некоторыми $\eta_j \in \mathbb{C}^2$ и $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Остается заметить, что $\varphi = -\operatorname{Re} c\psi^-$ для функций вида (7.11) описываются на Γ_j равенством (7.7).

2) Пусть область D конечна. Тогда уравнение (7.9) определяет многочлен $\phi = p$ вида (7.12):

$$p(z) = \eta + \lambda z_J e, \quad z \in D.$$

В случае $j \leqslant m-1$ задачу (7.10) для функции ψ в конечной области $\widetilde{D}_j$ можно переписать в форме $\operatorname{Re} ci(\psi - p)^- = 0$, так что $\psi - p$ определяется правой частью (7.12). Поскольку $\operatorname{Re} cp = 0$, для функции $\varphi = -\operatorname{Re} c\psi^-$ имеем выражение (7.7).

Что касается бесконечной области $\widetilde{D}_m$, то по отношению к $\phi_0 = -i\psi$ уравнение (7.10) в этой области можно записать в форме

$$\operatorname{Re} c\phi_0^- = \operatorname{Re} c(-ip)\big|_{\Gamma_m}.$$

В силу леммы 2.3 к рассматриваемой задаче можно применить лемму 5.1, согласно которой существует единственная функция $\psi = i\phi_0$, удовлетворяющая этому краевому условию. Соответственно $\varphi = -\operatorname{Re} c\psi^-$ на Γ_m определяется формулой (7.8). □

Заметим, что в предположении $\Gamma \in C^{1,\nu}$ функция (7.8) принадлежит классу $C^{1,\mu}(\Gamma)$ для любого $\mu < \nu$. Класс функций этого типа обозначаем кратко $C^{1,\nu-0}(\Gamma)$.

Обратимся к вопросу о представлении сопряженных функций потенциалами $P_{22}\varphi$. Как и в случае решений (7.4) системы Ламе убеждаемся, что функции вида

$$v = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m-1} \operatorname{Re} cL_j\eta_j, & \sigma(D) = 1, \\ \xi + \sum\limits_{j=1}^{m-1} \operatorname{Re} cL_j\eta_j, & \sigma(D) = 0, \end{cases} \qquad \operatorname{Re} c\eta_j = 0, \xi \in \mathbb{R}^2, \tag{7.13}$$

не могут быть представлены потенциалом $P_{22}\varphi$.

Теорема 7.2. *В условиях теоремы* 7.1 *существует такое конечномерное пространство* $V \subseteq C^{1,\nu-0}(\overline{D})$ *размерности* $3m - 2\sigma(D) - 1$, *содержащее функции вида* (7.13), *что любая функция* $v \in h^p(D)$, *сопряженная к некоторому* (*вообще многозначному*) *решению системы Ламе, представима в виде*

$$v = P_{22}\varphi + v_0 \tag{7.14}$$

с некоторыми $\varphi \in L^p(\Gamma)$ *и* $v_0 \in V$, *причем* v_0 *в этом представлении определяется по* v *однозначно.*

Если $v \in X(\overline{D})$, *где* X *означает любой из символов* C, C^μ, $C^{1,\mu}$, $\mu < \nu$, *то и* $\varphi \in X(\Gamma)$.

Доказательство. Оно совершенно аналогично доказательству теоремы 7.1. Поскольку композиция P_{22} с оператором задачи Дирихле (5.12) есть фредгольмов оператор $1 + P_{22}^*$ индекса нуль, с учетом теоремы 5.2 отсюда заключаем, что оператор P_{22} фредгольмов и его индекс равен $\sigma(D)$. Следовательно, его образ $\operatorname{im} P_{22}$ замкнут и имеет коразмерность, равную $k = \dim(ker P_{22}) - \sigma(D)$. С учетом леммы 6.2 аналогичные рассуждения можно провести и для оператора P_{22}, действующего из $X(\overline{D})$ в $X(\Gamma)$. В частности, в $C^{1,\mu}(\overline{D})$ существует подпространство V размерности k, которое содержит функции (7.13) и для которого справедливо разложение (7.14) функций $v \in (\overline{D})$. В силу соображений размерности это разложение имеет место и в $h^p(D)$.

Второе утверждение теоремы доказывается с помощью леммы 4.1 совершенно аналогично предыдущему. □

Как и выше, теорема 7.2 позволяет свести задачу Дирихле для сопряженных функций к эквивалентной системе граничных уравнений Фредгольма. Некоторых изменений требует только случай $\sigma(D) = 1$ конечной области D, на котором и остановимся. Положим $k = \dim(ker P_{22}) - 1$ и рассмотрим в пространствах $ker P_{22}$ и V базисы, соответственно, $g_1, \ldots, g_{k+1}$ и $v_1, \ldots, v_k$. Рассмотрим оператор

$$N\varphi = \varphi + P_{22}^*\varphi + \sum_1^k (g_j, \varphi) v_j^+ + (g_{k+1}, \varphi) n,$$

где, напомним, функция $n = (n_1, n_2)$ означает единичную внешнюю нормаль. Очевидно, функции $\varphi + P_{22}^*\varphi = (P_{22}\varphi)^+$ и v_j^+ удовлетворяют условию ортогональности n. Поэтому если $N\varphi = 0$, то $(g_{k+1}, \varphi) = 0$, с учетом теоремы 7.2 имеем также соотношения $N_{22}\varphi = 0$ и $(g_j, \varphi) = 0$, $1 \leqslant j \leqslant k$, откуда $\varphi = 0$. Таким образом, оператор N обратим, причем функция $N\varphi$ ортогональна n тогда и только тогда, когда $(g_{k+1}, \varphi) = 0$. Поэтому в предположении $(f, n) = 0$ решение φ уравнения $N\varphi = f$ будет давать решение задачи Дирихле по формуле

$$v = P_{22}\varphi + \sum_1^k (g_j, \varphi) v_j.$$

8. Структура матриц $H_{kr}(\xi)$

В обозначениях (1.7) введем квадратичные формы

$$\begin{gathered}
\omega(\xi) = (\xi_1 + \nu_1\xi_2)(\xi_1 + \nu_2\xi_2) = \xi_1^2 + s\xi_1\xi_2 + t\xi_2^2, \\
2\omega_1(\xi) = s\xi_1^2 + 2t\xi_1\xi_2 + \bar{s}t\xi_2^2, \\
\Omega(\xi) = \begin{pmatrix} [(t-1)\xi_1\xi_2 + s\xi_1^2] & t|\xi|^2 \\ -|\xi|^2 & (t-1)\xi_1\xi_2 - s\xi_2^2 \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{8.1}$$

Очевидно, достаточно описать матрицу-функцию

$$G_{kr}(\xi) = |\xi|^{-2}|\omega(\xi)|^2 H_{kr}(\xi), \tag{8.2}$$

однородную степени 2.

Теорема 8.1. *Матрицы* G_{kr} *определяются формулами*

$$G_{11}(\xi) = \operatorname{Im}[\omega_1(\xi) + \overline{\omega}(\xi)(b\Delta b^{-1})], \tag{8.3}$$

где параллельно двум случаям (i) *и* (ii) *положено*

$$(i)\ \Delta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \nu_1 - \nu_2 & 0 \\ 0 & \nu_2 - \nu_1 \end{pmatrix}, \quad (ii)\ \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$G_{22}(\xi) = \operatorname{Im}\begin{pmatrix} s\xi_1^2 + t\xi_1\xi_2 & t\xi_1^2 + \bar{s}t\xi_1\xi_2 \\ s\xi_1\xi_2 + t\xi_2^2 & t\xi_1\xi_2 + \bar{s}t\xi_2^2 \end{pmatrix}, \tag{8.4}$$

$$\begin{aligned} G_{21}(\xi) &= |\xi|^{-2}\operatorname{Re}[\overline{\omega}(\xi)\Omega(\xi)]\operatorname{Im}(cb^{-1}) + G_{22}(\xi)\operatorname{Re}(cb^{-1}), \\ G_{12}(\xi) &= |\xi|^{-2}\operatorname{Im}(bc^{-1})\operatorname{Re}[\overline{\omega}(\xi)\Omega(\xi)] + \operatorname{Re}(bc^{-1})G_{22}(\xi). \end{aligned} \tag{8.5}$$

Доказательство. Доказательство первого равенства (8.3) проведем для случаев (i) и (ii) отдельно.

(i). Положим

$$h(\xi,\nu) = \frac{-\xi_2 + \nu\xi_1}{\xi_1 + \nu\xi_2},$$

тогда

$$(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1} = \operatorname{diag}[h(\xi,\nu_1), h(\xi,\nu_2)]. \tag{8.6}$$

По определению матрицы Δ отсюда

$$(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1} = \frac{h(\xi,\nu_1) + h(\xi,\nu_2)}{2} + \frac{h(\xi,\nu_1) - h(\xi,\nu_2)}{\nu_1 - \nu_2}\Delta.$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{h(\xi,\nu_1) + h(\xi,\nu_2)}{2} = \frac{\omega_0(\xi)}{2\omega(\xi)}, \quad \frac{h(\xi,\nu_1) - h(\xi,\nu_2)}{\nu_1 - \nu_2} = \frac{|\xi|^2}{\omega(\xi)}, \tag{8.7}$$

где $\omega_0(\xi) = (-\xi_2 + \nu_1\xi_1)(\xi_1 + \nu_2\xi_2) + (-\xi_2 + \nu_2\xi_1)(\xi_1 + \nu_1\xi_2)$.

Следовательно,

$$2|\xi|^{-2}|\omega(\xi)|^2 b[(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1}]b^{-1} = |\xi|^{-2}\omega_0(\xi)\overline{\omega(\xi)} + 2\overline{\omega(\xi)}(b\Delta b^{-1}). \tag{8.8}$$

Как легко проверить,

$$\operatorname{Im} h(\xi,\nu) = \frac{|\xi|^2 \operatorname{Im}\nu}{|\xi_1 + \nu\xi_2|^2}, \tag{8.9}$$

так что по определению (8.1)

$$\operatorname{Im}[h(\xi,\nu_1) + h(\xi,\nu_2)] = \frac{|\xi|^2\omega_1(\xi)}{|\omega(\xi)|^2}.$$

Совместно с первым равенством (8.7) отсюда приходим к соотношению

$$\operatorname{Im}[(\omega_0(\xi)\overline{\omega(\xi)}] = |\xi|^2 \operatorname{Im}[\omega_1(\xi)]$$

для квадратичных форм. Поэтому в соответствии с определениями (6.5), (8.2) мнимая часть равенства (8.8) совпадает с (8.3).

(ii). По определению матрицы Δ в этом случае

$$(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1} = h(\xi,\nu)\left(1 + \frac{\xi_1}{-\xi_2 + \nu\xi_1}\Delta\right)\left(1 + \frac{\xi_2}{\xi_1 + \nu\xi_2}\Delta\right)^{-1},$$

так что

$$(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1} = h(\xi,\nu) + \frac{|\xi|^2}{\omega(\xi)^2}\Delta.$$

Полагая $\nu_k = \nu$ в первом соотношении (8.7), получим равенство

$$h(\xi,\nu) = \frac{\omega^1(\xi)}{2\omega(\xi)},$$

которое аналогично предыдущему случаю (i) приводит к (8.3).

Обратимся к доказательству остальных формул теоремы. Равенство (8.8) справедливо и по отношению к матрице c. Поскольку матрица d, фигурирующая в (2.25), коммутирует с Δ, матрицу $c\Delta c^{-1}$ в правой части этого равенства можно заменить на матрицу c_0. Прямая проверка показывает, что в обоих случаях (i) и (ii) произведение

$$c_0\Delta c_0^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} s & 2t \\ -2 & -s \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$2|\omega(\xi)|^2 c[(-\xi_2+\xi_1 J)(\xi_1+\xi_2 J)^{-1}]c^{-1} = \omega_0(\xi)\overline{\omega(\xi)} + 2\overline{\omega(\xi)}(c_0\Delta c_0^{-1}).$$

Из определения квадратичной формы ω_0 в (8.7) видно, что в обозначениях (1.7) ее можно записать в виде $\omega_0(\xi) = 2(t-1)\xi_1\xi_2 + s(\xi_1^2 - \xi_2^2)$. Как показывает прямая проверка, выражение $\omega_0(\xi) + 2|\xi|^2 c_0\Delta c_0^{-1}$ совпадает с матрицей $2\Omega(\xi)$ в (8.1), так что

$$|\omega(\xi)|^2 c[(-\xi_2+\xi_1 J)(\xi_1+\xi_2 J)^{-1}]c^{-1} = \Omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}. \tag{8.10}$$

С учетом (6.5), (8.2) отсюда

$$G_{22}(\xi) = |\xi|^{-2}\,\mathrm{Im}[\Omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}], \tag{8.11}$$

что непосредственно приводит к (8.4). Точно так же в силу (8.10) равенство

$$G_{21}(\xi) = |\xi|^{-2}|\omega(\xi)|^2\,\mathrm{Im}[c(-\xi_2+\xi_1 J)(\xi_1+\xi_2 J)^{-1}c^{-1}(cb^{-1})]$$

можно переписать в форме

$$G_{21}(\xi) = |\xi|^{-2}\,\mathrm{Im}[\Omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}(cb^{-1})],$$

откуда с учетом (8.11) следует первая формула (8.5). Вторая формула доказывается аналогично. $\square$

Подставляя в (8.3)–(8.5) соответствующие выражения леммы 2.2 для матриц b и c, можно вычислить элементы матриц G_{kr}. Проще всего это сделать с помощью следующих билинейных форм от многочленов, которые вводятся для каждого из двух случаев корней ν_j характеристического уравнения системы Ламе:

$$\begin{aligned} &(i)\ [f,g] = \frac{f(\nu_1)g(\nu_2) - f(\nu_2)g(\nu_1)}{\nu_1-\nu_2}, \quad (ii)\ [f,g] = f'(\nu)g(\nu) - f(\nu)g'(\nu),\\ &(i)\ \{f,g\} = \frac{f(\nu_1)g(\nu_2) + f(\nu_2)g(\nu_1)}{2}, \quad (ii)\ \{f,g\} = f(\nu)g(\nu). \end{aligned} \tag{8.12}$$

В принятых обозначениях лемма 2.2 приводит к следующим выражениям для рассматриваемых матриц.

Лемма 8.1. *Если $\alpha \in \mathcal{A}_1$, то*

$$\begin{aligned} b\Delta b^{-1} &= \frac{1}{[p_3,p_2]}\begin{pmatrix} -\{p_2,p_3\} & -\{p_2,p_2\} \\ \{p_3,p_3\} & \{p_2,p_3\} \end{pmatrix},\\ cb^{-1} &= \frac{1}{[p_3,p_2]}\begin{pmatrix} -[p_3,q_3] & -[p_2,q_3] \\ [p_3,q_2] & [p_2,q_2] \end{pmatrix},\\ bc^{-1} &= \frac{1}{[q_3,q_2]}\begin{pmatrix} -[p_2,q_2] & -[p_2,q_3] \\ [p_3,q_2] & [p_3,q_3] \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{8.13}$$

Если $\alpha \in \mathcal{A}_2$, то

$$\begin{aligned} b\Delta b^{-1} &= \frac{1}{[p_1,p_3]}\begin{pmatrix} -\{p_1,p_3\} & -\{p_3,p_3\} \\ \{p_1,p_1\} & \{p_1,p_3\} \end{pmatrix},\\ cb^{-1} &= \frac{1}{[p_1,p_3]}\begin{pmatrix} [p_1,q_1] & [p_3,q_1] \\ -[p_1,q_4] & -[p_3,q_4] \end{pmatrix},\\ bc^{-1} &= \frac{1}{[q_1,q_4]}\begin{pmatrix} [p_3,q_4] & [p_3,q_1] \\ -[p_1,q_4] & -[p_1,q_1] \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{8.14}$$

Наконец, в случае $\alpha \in \mathcal{A}_0$

$$\begin{aligned} &b\Delta b^{-1} = \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}-\alpha_3}{\sqrt{\alpha_2\alpha_3}}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad cb^{-1} = \alpha_3\begin{pmatrix} -i\sqrt{\alpha_1/\alpha_3} & -1 \\ 1 & -i\sqrt{\alpha_2/\alpha_3} \end{pmatrix},\\ &bc^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}-\alpha_3}\begin{pmatrix} -i\sqrt{\alpha_2/\alpha_3} & 1 \\ -1 & -i\sqrt{\alpha_1/\alpha_3} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{8.15}$$

Доказательство. С парой многочленов f_1, f_2 соответственно двум случаям корней свяжем матрицу

$$(i)\ W(f_1,f_2)=\begin{pmatrix} f_1(\nu_1) & f_1(\nu_2)\\ f_2(\nu_1) & f_2(\nu_2)\end{pmatrix},\quad (ii)\ W(f_1,f_2)=\begin{pmatrix} f_1(\nu) & f_1'(\nu)\\ f_2(\nu) & f_2'(\nu)\end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что для ее определителя имеем выражение

$$(i)\ \det W(f_1,f_2)=(\nu_1-\nu_2)[f_1,f_2],\quad (ii)\ \det W(f_1,f_2)=-[f_1,f_2],$$

так что обратимость этой матрицы обеспечивается условием $[f_1,f_2]\neq 0$.

Согласно лемме 2.2 в этих обозначениях можно записать

$$\begin{aligned} &b=W(p_2,-p_3),\quad c=W(-q_3,q_2),\quad \alpha\in\mathcal{A}_1,\\ &b=W(-p_3,p_1),\quad c=W(-q_1,q_4),\quad \alpha\in\mathcal{A}_2.\end{aligned}\tag{8.16}$$

Как показывает простая проверка, одинаково для обоих случаев (i) и (ii) имеют место равенства

$$W(f_1,f_2)\Delta[W(g_1,g_2)]^{-1}=\frac{1}{[g_1,g_2]}\begin{pmatrix}\{f_1,g_2\} & -\{f_1,g_1\}\\ \{f_2,g_2\} & -\{f_2,g_1\}\end{pmatrix},$$

$$W(f_1,f_2)[W(g_1,g_2)]^{-1}=\frac{1}{[g_1,g_2]}\begin{pmatrix}[f_1,g_2] & -[f_1,g_1]\\ [f_2,g_2] & -[f_2,g_1]\end{pmatrix}.$$

Подставляя в эти формулы выражения (8.16), приходим к справедливости формул (8.13) и (8.14).

Что касается (8.15), то эти равенства получаются непосредственно, исходя из (1.15) и (2.23). □

Важно отметить, что в силу леммы 2.1 при $\alpha\in\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2$ соответствующие матрицы в (8.13) и (8.14) совпадают. Явные выражения для элементов этих матриц получаются при вычислении форм (8.12) для многочленов (1.6) и (2.20). В частности, формулы (8.3)–(8.5) совместно с (8.13) показывают, что ядра $P_{kr}(n,\xi)$ зависят только от $\alpha\in\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2$ и являются непрерывными функциями от переменных α_j.

Исходя из конкретных выражений многочленов (1.6) и (2.20), элементы матриц в правой части (8.13) и (8.14) легко вычисляются. Поскольку форма $[\,,\,]$ кососимметрична, а форма $\{\,,\,\}$ — симметрична, достаточно знать значения этих форм от базисных элементов z^i, $0\leqslant i\leqslant 3$. Эти значения зависят только от простейших симметричных комбинаций (1.7). В частности, элементы матриц (8.13) вычисляются с помощью формул

$$\begin{aligned}
&[p_3,p_2]=\alpha_3(\alpha_3+\alpha_4)-2\alpha_5\alpha_6+(\alpha_3\alpha_5-\alpha_2\alpha_6)s+[2\alpha_5^2-\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4)]t,\\
&[q_3,q_2]=\beta_4^2-\beta_4\beta_6 s+(\beta_6^2-2\beta_1\beta_4)t+\beta_1\beta_4 s^2-\beta_1\beta_6 st+\beta_1^2t^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[p_2,q_2]=2\alpha_5\beta_4+\alpha_3\beta_6+(\alpha_2\beta_4-\alpha_3\beta_1)s-(\alpha_2\beta_6+2\alpha_5\beta_1)t,\\
&[p_2,q_3]=-\alpha_3\beta_4+\alpha_3\beta_6 s-\alpha_3\beta_1(s^2-t)+(\alpha_2\beta_4+2\alpha_5\beta_6)t-2\alpha_5\beta_1 st-\alpha_2\beta_1t^2,\\
&[p_3,q_2]=(\alpha_3+\alpha_4)\beta_4+\alpha_6\beta_6+(\alpha_5\beta_4-\alpha_6\beta_1)s-[\alpha_5\beta_6+(\alpha_3+\alpha_4)\beta_1]t,\\
&[p_3,q_3]=-\alpha_6\beta_4+\alpha_6\beta_6 s-\alpha_6\beta_1(s^2-t)+[\alpha_5\beta_4+(\alpha_3+\alpha_4)\beta_6]t-\\
&-(\alpha_3+\alpha_4)\beta_1 st-\alpha_5\beta_1t^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\{p_2,p_2\}=\alpha_3^2+4\alpha_5^2t+\alpha_2^2t^2+2\alpha_3\alpha_5 s+\alpha_2\alpha_3(s^2-2t)+2\alpha_2\alpha_5 st,\\
&\{p_3,p_3\}=\alpha_6^2+(\alpha_3+\alpha_4)^2t+\alpha_5^2t^2+(\alpha_3+\alpha_4)\alpha_6 s+\alpha_5\alpha_6(s^2-2t)+\\
&+(\alpha_3+\alpha_4)\alpha_5 st,\\
&2\{p_2,p_3\}=2\alpha_3\alpha_6+[2\alpha_5\alpha_6+\alpha_3(\alpha_3+\alpha_4)]s+4(\alpha_3+\alpha_4)\alpha_5 t+\\
&+(\alpha_2\alpha_6+\alpha_3\alpha_5)(s^2-2t)+[\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4)+2\alpha_5^2]st+2\alpha_2\alpha_5t^2.
\end{aligned}$$

В случае ортотропной среды приведенные выше формулы для матриц $G(\xi)$ существенно упрощаются. В этом случае либо $\alpha\in\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2$ и можно пользоваться любой из двух групп равенств (8.13), (8.14), либо $\alpha\in\mathcal{A}_0$. Пусть $\alpha\in\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2$, т. е. $\alpha_5=\alpha_6=0$ и $\alpha_3+\alpha_4\neq 0$. Тогда и $\beta_5=\beta_6=0$, так что предыдущие формулы принимают вид

$$[p_3,p_2]=\alpha_3(\alpha_3+\alpha_4)-\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4)t,\quad [q_3,q_2]=\beta_4^2+\beta_1\beta_4(s^2-t)-\beta_1\beta_4 t+\beta_1^2t^2,$$

$$[p_2,q_2]=(\alpha_2\beta_4-\alpha_3\beta_1)s,$$
$$[p_3,q_3]=-(\alpha_3+\alpha_4)\beta_1 st,\qquad 2\{p_2,p_3\}=\alpha_3(\alpha_3+\alpha_4)s+\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4)st,$$
$$[p_2,q_3]=-\alpha_3\beta_4-\alpha_3\beta_1(s^2-t)+\qquad \{p_2,p_2\}=\alpha_3^2+\alpha_2^2t^2+\alpha_2\alpha_3(s^2-2t),$$
$$+\alpha_2\beta_4 t-\alpha_2\beta_1 t^2,\qquad \{p_3,p_3\}=(\alpha_3+\alpha_4)^2t.$$
$$[p_3,q_2]=(\alpha_3+\alpha_4)\beta_4-(\alpha_3+\alpha_4)\beta_1 t,$$

Поскольку $\beta_1=\alpha_2\alpha_3,\ \beta_4=-\alpha_3\alpha_4$, с учетом (1.22), (1.25) отсюда после элементарных преобразований получим:

$$[p_3,p_2]=(\alpha_3+\alpha_4)(\alpha_3+\sqrt{\alpha_1\alpha_2}),\quad [q_3,q_2]=\alpha_3(\alpha_3+\alpha_4)(\alpha_1\alpha_2-\alpha_4^2),$$

$$[p_2,q_2]=-i\rho_0\alpha_2\alpha_3(\alpha_3+\alpha_4),\qquad 2\{p_2,p_3\}=i\rho_0(\alpha_3+\alpha_4)(\alpha_3-\sqrt{\alpha_1\alpha_2}),$$
$$[p_3,q_3]=i\rho_0\alpha_2\alpha_3(\alpha_3+\alpha_4)\rho^2,\qquad \{p_2,p_2\}=(\alpha_3+\alpha_4)^2,$$
$$[p_2,q_3]=[p_3,q_2]=\qquad \{p_3,p_3\}=-(\alpha_3+\alpha_4)^2\rho^2.$$
$$=\alpha_3(\alpha_3+\alpha_4)(\sqrt{\alpha_1\alpha_2}-\alpha_4),$$

В результате для матриц, фигурирующих в (8.13) и (8.13), получаем следующие выражения:

$$b\Delta b^{-1}=\frac{1}{2(\alpha_3+\sqrt{\alpha_1\alpha_2})}\begin{pmatrix}-i\rho_0(\alpha_3-\sqrt{\alpha_1\alpha_2}) & -2(\alpha_3+\alpha_4)\\ -2\rho^2(\alpha_3+\alpha_4) & i\rho_0(\alpha_3-\sqrt{\alpha_1\alpha_2})\end{pmatrix},$$
$$cb^{-1}=\frac{\alpha_3}{\alpha_3+\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\begin{pmatrix}-i\rho_0\alpha_2\rho^2 & -(\sqrt{\alpha_1\alpha_2}-\alpha_4)\\ \sqrt{\alpha_1\alpha_2}-\alpha_4 & -i\rho_0\alpha_2\end{pmatrix},$$
$$bc^{-1}=\frac{1}{\alpha_1\alpha_2-\alpha_4^2}\begin{pmatrix}i\rho_0\alpha_2 & -(\sqrt{\alpha_1\alpha_2}-\alpha_4)\\ \sqrt{\alpha_1\alpha_2}-\alpha_4 & i\rho_0\alpha_2\rho^2\end{pmatrix}.$$

Отсюда после элементарных вычислений

$$G_{11}(\xi)=\frac{\rho_0}{\alpha_3+\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\begin{pmatrix}\rho^2(\alpha_2\xi_1^2+\alpha_3\xi_2^2) & (\alpha_3+\alpha_4)\xi_1\xi_2\\ \rho^2(\alpha_3+\alpha_4)\xi_1\xi_2 & \alpha_3\xi_1^2+\alpha_1\xi_2^2\end{pmatrix},$$
$$G_{22}(\xi)=\rho_0\begin{pmatrix}\xi_1^2 & \rho^2\xi_1\xi_2\\ \xi_1\xi_2 & \rho^2\xi_2^2\end{pmatrix},$$
$$G_{21}(\xi)=\frac{\alpha_3\rho_0}{\alpha_3+\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\begin{pmatrix}\rho^2\xi_1\xi_2 g_1(\xi) & -\rho^4\alpha_2\widehat{\xi}^2-\delta\xi_1^2\\ \rho^2[\alpha_2\widehat{\xi}^2+\delta\xi_2^2] & \xi_1\xi_2 g_2(\xi)\end{pmatrix},$$
$$G_{12}(\xi)=\frac{\rho_0}{\alpha_1\alpha_2-\alpha_4^2}\begin{pmatrix}-\xi_1\xi_2 g_1(\xi) & \rho^2[\rho^2\alpha_2\widehat{\xi}^2-\delta\xi_2^2]\\ -\rho^2\alpha_2\widehat{\xi}^2+\delta\xi_1^2 & -\rho^2\xi_1\xi_2 g_2(\xi)\end{pmatrix},$$

где для краткости $\delta=\sqrt{\alpha_1\alpha_2}-\alpha_4$, $\widehat{\xi}^2=\xi_1^2-\rho^2\xi_2^2$ и положено

$$g_j(\xi)=\alpha_2(\rho^2+1)\widehat{\xi}^2|\xi|^{-2}+(-1)^j[\alpha_2\rho_0^2\xi_j^2|\xi|^{-2}-\delta],\ j=1,2.$$

Эти формулы еще более упрощаются в случае изотропной среды, когда соотношения (1.26): $\alpha_1=\alpha_2=2\alpha_3+\alpha_4$ или, что равносильно, $\rho=1,\ \rho_0=2$. В частности, $\delta=2\alpha_3$, $g_j(\xi)=2(-1)^j(\alpha_1-\alpha_3)$, $\widehat{\xi}^2=\xi_1^2-\xi_2^2$. В этом случае имеем кратный корень $\nu=i$ и неравенство $\alpha_1>\alpha_3$. По отношению к положительной постоянной $\varkappa=(\alpha_1+\alpha_3)/(\alpha_1-\alpha_3)$ отсюда

$$cb^{-1}=\frac{\alpha_3}{\varkappa}\begin{pmatrix}-i(\varkappa+1) & -(\varkappa-1)\\ \varkappa-1 & -i(\varkappa+1)\end{pmatrix},\quad bc^{-1}=\frac{1}{4\alpha_3}\begin{pmatrix}i(\varkappa+1) & -(\varkappa-1)\\ \varkappa-1 & i(\varkappa+1)\end{pmatrix},$$

$$G_{11}(\xi)=|\xi|^2+\frac{1}{\varkappa}G_1(\xi),\quad G_{22}(\xi)=|\xi|^2+G_1(\xi),$$
$$G_{21}(\xi)=\frac{\alpha_3}{\varkappa}[(\varkappa-1)|\xi|^2+2G_2(\xi)]E,\quad G_{12}(\xi)=\frac{1}{4\alpha_3}[(\varkappa-1)|\xi|^2-2G_2(\xi)]E,$$

где положено

$$G_1(\xi)=\begin{pmatrix}\xi_1^2-\xi_2^2 & 2\xi_1\xi_2\\ 2\xi_1\xi_2 & \xi_2^2-\xi_1^2\end{pmatrix},\ G_2(\xi)=\begin{pmatrix}\varkappa(\xi_1^2-\xi_2^2) & -2\xi_1\xi_2\\ -2\xi_1\xi_2 & \xi_1^2-\xi_2^2\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, в соответствии с определениями (6.5), (6.6) и (8.2) операторы P_{kr} $(k,r=1,2)$ можно записать в виде

$$P_{11}=P+\frac{1}{\varkappa}P_1,\quad P_{22}=P+P_1,$$

$$P_{21} = \frac{\alpha_3}{\varkappa}[(\varkappa - 1)P + 2P_2]E, \quad P_{12} = \frac{1}{4\alpha_3}[(\varkappa - 1)P - 2P_2]E,$$

где

$$P_j\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma \frac{\mathrm{Re}[\overline{n(t)}(t-z)]}{|t-z|^4} G_j(t-z)\varphi(t)|dt|.$$

Соответственно согласно (6.11) каждая пара равенств

$$u = P\varphi + \frac{1}{\varkappa}P_1\varphi, \quad v = \frac{\alpha_3}{\varkappa}(\varkappa + 1)Q\varphi + \frac{\alpha_3}{\varkappa}[(\varkappa - 1)P + 2P_2]E\varphi,$$
$$u = \frac{1}{4\alpha_3}(\varkappa + 1)Q\varphi + \frac{1}{4\alpha_3}[(\varkappa - 1)P - 2P_2]E\varphi, \quad v = P\varphi + P_1\varphi$$

определяет решение u системы Ламе и сопряженную к ней функцию v.

9. Задача Дирихле в кусочно однородной среде

Проиллюстрируем предыдущие результаты на задаче Дирихле для системы Ламе с кусочно постоянными коэффициентами. Пусть конечная односвязная область D на плоскости ограничена гладким контуром $\Gamma_1 \in C^{1,\nu}$, $0 < \nu < 1$, и содержит простой гладкий контур Γ_0 того же класса, разбивающий эту область на односвязную D^0 и двусвязную D^1 подобласти. Рассмотрим в D систему Ламе (1.1) с кусочно постоянными коэффициентами, принимающими в области D^k постоянное значение $a_{ij} = a_{ij}^k$, $k = 0, 1$. Аналогичный смысл имеют записи $\alpha_j = \alpha_j^k$, а также $u = u^k$, $v = v^k$ для векторов u, v и $\sigma = \sigma^k$ для тензора напряжений.

Пусть $n^k = (n_1^k, n_2^k)$ означает единичный вектор внешней нормали на ∂D^k (по отношению к области D^k), в частности, на контуре $\Gamma_0 = \partial D^0 \cap \partial D^1$ векторы n^0 и n^1 противоположны. Условимся под решением u системы (1.1) в области D понимать функцию u, сужение u^k которой принадлежит классу $C^1(D^k \cap \Gamma_0)$, $k = 0, 1$, и является классическим решением (1.1) в каждой из областей D^k, а на Γ_0 удовлетворяет контактным условиям

$$(u^0 - u^1)\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad (\sigma^0 n^0 + \sigma^1 n^1)\big|_{\Gamma_0} = 0. \tag{9.1}$$

В частности, функция u непрерывна в области D.

Смысл контактных условий заключается в том, что при дополнительном предположении интегрируемости частных производных $\partial u/\partial x_j$, где $x_1 = x$, $x_2 = y$, функция u удовлетворяет тождеству

$$\sum_{i,j=1}^2 \int\limits_D a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx = 0, \quad \varphi \in C_0^\infty(D).$$

Другими словами, функция u является обобщенным решением системы (1.1) в области D, записанной в дивергентной форме

$$\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0.$$

Этот факт получается непосредственно из (2.13), (9.1) интегрированием по частям.

В терминах сопряженной функции v второе контактное условие в (9.1) можно проинтегрировать. Пусть $(v^k)'_s$ означает производную на Γ_0 вдоль направления против часовой стрелки. Тогда, полагая $n = n^0 = -n^1$ на Γ_0, в силу (2.13), (2.14) будем иметь соотношение $\sigma^k n = (v^k)'_s$, и в результате (9.1) перейдет в

$$(u^0 - u^1)\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad (v^0 - v^1)\big|_{\Gamma_0} = \xi \tag{9.2}$$

с некоторой постоянной $\xi \in \mathbb{R}^2$.

Рассмотрим в области D для решения $u \in C(\overline{D})$ системы (1.1) в указанном выше смысле задачу Дирихле

$$u\big|_{\Gamma_1} = f. \tag{9.3}$$

Хорошо известно [16], что в соболевском классе $W_1^2(D)$ эта задача однозначно разрешима. Единственность решения доказывается непосредственно. В самом деле, в предположении $u \in C^1(\overline{D^k})$ по формуле Грина имеем:

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_{D^k} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_{\partial D^k} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i^k \right) u ds.$$

Если u удовлетворяет однородному краевому условию (9.3), то интеграл по Γ_1 в этом равенстве для $k = 1$ выпадает, и после сложения этих равенств с учетом (2.13), (9.1) получим соотношение

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_{D} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = 0. \tag{9.4}$$

Следовательно, в каждой из областей D^k функция u^k является тривиальным решением, т. е. существуют такие постоянные $c_j^k,\ k = 0, 1,\ j = 1, 2, 3$, что

$$u_1^k(x, y) = c_3^k y + c_1^k, \quad u_2^k(x, y) = -c_3^k x + c_2^k.$$

Подставляя эти выражения в (9.2) и однородное краевое условие (9.3), получим $c_j^k = 0$.

Заметим, что в двусвязной области D^1 сопряженная функция v^1, вообще говоря, многозначна и при обходе Γ_0 может получать ненулевое приращение. С другой стороны, в односвязной области D^0 функция v^0 всегда однозначна. Поэтому при выполнении контактных условий (9.2) однозначной будет и функция v^1.

Основная цель данного раздела состоит в эквивалентной редукции задачи (1.1), (9.3) к системе интегральных уравнений Фредгольма на $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$, которая в силу единственности будет однозначно разрешимой.

Отметим, что в каждой из областей D^k матрица (2.19) обратима. Этот факт можно распространить на случай двух пар матриц b и c.

Лемма 9.1. *Пусть матрицы* $\alpha^k,\ \ k = 0, 1$, *вида* (1.2) *положительно определены и матрицы* b^k, c^k *отвечают* α^k. *Тогда*

$$\det \begin{pmatrix} b^0 & \overline{b^1} \\ c^0 & \overline{c^1} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{9.5}$$

Доказательство. Предположим противное, тогда найдется ненулевой вектор $\eta = (\eta^0, \overline{\eta^1}) \in \mathbb{C}^4$ такой, что

$$b^0 \eta^0 + \overline{b^1 \eta^1} = 0, \quad c^0 \eta^0 + \overline{c^1 \eta^1} = 0.$$

В частности,

$$\operatorname{Re} \left(b^0 \frac{\eta^0}{t + i} + b^1 \frac{\eta^1}{t - i} \right) = \operatorname{Re} \left(c^0 \frac{\eta^0}{t + i} + c^1 \frac{\eta^1}{t - i} \right) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Пусть G^0 и G^1 означают, соответственно, верхнюю и нижнюю полуплоскости. Рассмотрим в $G = G^0 \cup G^1$ аналитическую вектор-функцию

$$\psi(z) = \begin{cases} \eta^0 (z + i)^{-1}, & z \in D^0, \\ \eta^1 (z - i)^{-1}, & z \in D^1, \end{cases}$$

по отношению к которой предыдущее равенство переходит в

$$\operatorname{Re}(b^0 \psi^0 + b^1 \psi^1)\big|_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re}(b^0 \psi^0 + b^1 \psi^1)\big|_{\mathbb{R}} = 0. \tag{9.6}$$

Пусть $\nu_j^k,\ j = 1, 2$ — корни характеристического уравнения $p_1^k p_2^k - (p_3^k)^2 = 0$, отвечающие матрице α^k. Рассмотрим J^k-аналитические функции $\phi^k(x, y)$ в области D^k, связанные с ψ^k соотношениями (2.32), (2.33). Здесь учтено, что для $\operatorname{Im} \nu > 0$ преобразование $x + iy \to x + \nu y$ переводит полуплоскость D^k на себя и оставляет ее граничные точки $x \in \mathbb{R}$ неподвижными. При этом $\phi^k(x) = \psi^k(x)$. Поэтому соотношение (9.6) справедливо и для функций ϕ^k. Но тогда для функции $u = \operatorname{Re} b\varphi$, удовлетворяющей системе Ламе в области D^k с матрицей упругости α^k, и сопряженной к ней функции $v = \operatorname{Re} c\phi$ имеют место контактные соотношения

$$(u^0 + u^1)\big|_{\mathbb{R}} = (v^0 + v^1)\big|_{\mathbb{R}} = 0$$

на прямой $\mathbb{R}$. Как и выше, отсюда заключаем, что для функции u справедливо равенство (9.4) во всей плоскости $D = \mathbb{C}$. В свою очередь, оно возможно только для $u = 0$, что приводит к противоречию. Тем самым утверждение (9.5) установлено. $\square$

Обратимся к постановке задачи Дирихле (9.2), (9.3). Условимся снабжать верхним индексом k операторы P, Q и P_{ij} из раздела 6 по отношению к области D^k, $k = 0, 1$, внешней нормали n^k на ∂D^k и матрице упругости α^k. Аналогичный смысл имеют и обозначения P^{k*}, Q^{k*} и P_{ij}^{k*} для граничных операторов. Согласно теореме 7.1 любые решения $u^k \in C(\overline{D^k})$ системы Ламе в области D^k, такие, что при $k = 1$ сопряженная функция v^1 однозначна, представимы в виде

$$u^0 = P_{11}^0 \varphi^0, \quad u^1 = P_{11}^1 \varphi^1 \tag{9.7}$$

с некоторыми вектор-функциями $\varphi^0 \in C(\Gamma_0)$ и $\varphi^1 \in C(\Gamma_0 \cup \Gamma_1)$, причем $u^0 = u^1 = 0$ в этих представлениях влечет

$$\varphi^0 = \varphi^1\big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \varphi^1\big|_{\Gamma_0} \in \mathbb{R}^2. \tag{9.8}$$

Положим для краткости $d = cb^{-1}$. Тогда на основании (6.11)

$$v^k = -\operatorname{Im} d^k Q^k \varphi^k + P_{21}^k \varphi^k, \quad k = 0, 1. \tag{9.9}$$

Поэтому с учетом леммы 6.2 краевые условия (9.2), (9.3) сводятся к эквивалентной системе уравнений относительно $(\varphi^0, \varphi^1, \xi)$, определяемой равенствами

$$\begin{gathered} \varphi^0 - \varphi^1 + P_{11}^{0*}\varphi^0 - P_{11}^{1*}\varphi^1 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \\ -(\operatorname{Im} d^0) Q^{0*}\varphi^0 + (\operatorname{Im} d^1) Q^{1*}\varphi^1 + (\operatorname{Re} d^0)\varphi^0 - (\operatorname{Re} d^1)\varphi^1 + \\ + P_{21}^{0*}\varphi^0 - P_{21}^{1*}\varphi^1 = \xi \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \\ \varphi^1 + P_{11}^{1*}\varphi^1 = f \quad \text{на} \quad \Gamma_1. \end{gathered} \tag{9.10}$$

С точки зрения разрешимости удобно вместо этой системы рассматривать систему относительно только пары (φ^0, φ^1), определяемую равенствами

$$\begin{gathered} \varphi^0 - \varphi^1 + P_{11}^{0*}\varphi^0 - P_{11}^{1*}\varphi^1 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \\ -(\operatorname{Im} d^0) Q^{0*}\varphi^0 + (\operatorname{Im} d^1) Q^{1*}\varphi^1 + (\operatorname{Re} d^0)\varphi^0 - (\operatorname{Re} d^1)\varphi^1 + \\ + P_{21}^{0*}\varphi^0 - P_{21}^{1*}\varphi^1 + \sum_{j=1,2} l_j \int_{\Gamma_0} \varphi^1(t) l_j |dt| = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \\ \varphi^1 + P_{11}^{1*}\varphi^1 = f \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \end{gathered} \tag{9.11}$$

где $\varphi^1(t) l_j$ означает скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$ с базисными элементами $l_1 = (1, 0)$ и $l_2 = (0, 1)$.

Лемма 9.2. *В классе $\varphi^0 \in C^{1,\mu}(\Gamma_0)$ и $\varphi^1 \in C^{1,\mu}(\Gamma_0 \cup \Gamma_1)$, $0 < \mu < \nu$, система уравнений* (9.11) *имеет только нулевое решение.*

Доказательство. Функции $\varphi^0 \in C^{1,\mu}(\Gamma_0)$ и $\varphi^1 \in C^{1,\mu}(\Gamma_0 \cup \Gamma_1)$, $0 < \mu < \nu$, удовлетворяют системе (9.10) с $f = 0$ тогда и только тогда, когда выполнены соотношения (9.8) и $\xi = 0$.

В самом деле, в силу леммы 6.2 функции $u^k = P_{11}^k \varphi^k$ принадлежат $C^{1,\mu}(\overline{D^k})$ и определяют в области D решение однородной задачи Дирихле. Поэтому, как показано выше, эти функции равны нулю. Следовательно, по теореме 7.1 имеют место соотношения (9.8). С учетом лемм 7.1, 7.2 отсюда заключаем также, что и $v^1 = P_{21}\varphi^1 = 0$. Поэтому постоянная ξ в (9.10) также равна нулю. Обратное утверждение очевидно, поскольку из (9.8) следует $P_{11}^k \varphi^k = 0$.

Пусть теперь пара (φ^0, φ^1) является решением однородной системы (9.11). Тогда в силу предыдущего предложения имеют место соотношения (9.8) и $\eta l_1 = \eta l_2 = 0$, где $\eta \in \mathbb{R}^2$ означает сужение φ^1 на Γ_0. Следовательно, $\varphi^0 = \varphi^1 = 0$. $\square$

Положим для определенности $n = n^0 = -n^1$ на Γ_0 и пусть для краткости

$$p(n, \xi) = |\xi|^{-2} \operatorname{Re}(\overline{n}\xi), \ q(n, \xi) = |\xi|^{-2} \operatorname{Im}(\overline{n}\xi), \quad n, \xi \in \mathbb{C}.$$

Тогда с учетом (6.1)–(6.3) и принятых обозначений систему (9.11) можно представить в следующем явном виде:

$$\varphi^0(t_0)-\varphi^1(t_0)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_0} p[n(t),t-t_0]\sum_{k=0,1}H^k_{11}(t-t_0)\varphi^k(t)|dt|-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_1} p[n^1(t),t-t_0][H^1_{11}(t-t_0)\varphi^1(t)|dt|=0,\quad t_0\in\Gamma_0,$$
$$\mathrm{Re}[d^0\varphi^0(t_0)-d^1\varphi^1(t_0)]-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_0} q[n(t),t-t_0]\,\mathrm{Im}[d^0\varphi^0(t)+d^1\varphi^1(t)]|dt|+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_0} p[n(t),t-t_0]\sum_{k=0,1}H^k_{21}(t-t_0)\varphi^k(t)|dt|-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_1}[p(n^1(t),t-t_0)H^1_{21}(t-t_0)-q(n^1(t),t-t_0)](\mathrm{Im}\,d^1)\varphi^1(t)|dt|+$$
$$+l_1\int\limits_{\Gamma_0}\varphi^1(t)l_1|dt|+l_2\int\limits_{\Gamma_0}\varphi^1(t)l_2|dt|=0,\quad t_0\in\Gamma_0,$$
$$\varphi^1(t_0)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_1} p[n^1(t),t-t_0]H^1_{11}(t-t_0)\varphi^1(t)|dt|-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_0} p[n(t),t-t_0][H^1_{11}(t-t_0)\varphi^1(t)|dt|=f(t_0),\quad t_0\in\Gamma_1.$$

Эту систему можно переписать кратко в операторной форме. С этой целью положим

$$\varphi_0=(\varphi^0,\varphi^1)\big|_{\Gamma_0},\quad \varphi_1=\varphi^1\big|_{\Gamma_1},$$

и пусть операторы P^*_0 и Q^*_0 определяются как в (6.1), (6.2) по отношению к Γ_0, в пространстве вектор-функций φ_0 они действуют покомпонентно. Таким образом, аналогично (6.3) можно написать

$$P^*_0-iQ^*_0=S_0 \tag{9.12}$$

с соответствующим сингулярным оператором Коши S_0. Введем далее интегральные операторы K_0,K_1 и K_{01},K_{10} по формулам

$$\begin{gathered}
(K_0\varphi_0)^0(t_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_0} p[n(t),t-t_0]\sum_{k=0,1}H^k_{11}(t-t_0)\varphi^k_0(t)|dt|,\\
(K_0\varphi_0)^1(t_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_0} p[n(t),t-t_0]\sum_{k=0,1}H^k_{21}(t-t_0)\varphi^k_0(t)|dt|+\\
+l_1\int\limits_{\Gamma_0}\varphi^1_0(t)l_1|dt|+l_2\int\limits_{\Gamma_0}\varphi^1_0(t)l_2|dt|,\\
(K_{01}\varphi_1)^0(t_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_1} p[n^1(t),t-t_0][H^1_{11}(t-t_0)-q(n^1(t),t-t_0)](\mathrm{Im}\,d^1)\varphi_1(t)|dt|,\\
(K_{01}\varphi_1)^1(t_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_1} p[n^1(t),t-t_0]H^1_{21}(t-t_0)\varphi_1(t)|dt|,\quad t_0\in\Gamma_0
\end{gathered}\tag{9.13}$$

и

$$\begin{gathered}
(K_1\varphi_1)(t_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_1} p[n^1(t),t-t_0]H^1_{11}(t-t_0)\varphi_1(t)|dt|,\\
(K_{10}\varphi_0)(t_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_0} p[n(t),t-t_0][H^1_{11}(t-t_0)\varphi^1_0(t)|dt|,\quad t_0\in\Gamma_1.
\end{gathered}\tag{9.14}$$

В этих обозначениях система (9.11) запишется в форме

$$(\mathrm{Re}\,D)\varphi_0-(\mathrm{Im}\,D)Q^*_0\varphi_0+K_0\varphi_0-K_{01}\varphi_1=0,\quad \varphi_1+K_1\varphi_1-K_{10}\varphi_0=f \tag{9.15}$$

с матрицей
$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ d^0 & -\overline{d^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^0 & \overline{b^1} \\ c^0 & \overline{c^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (b^0)^{-1} & 0 \\ 0 & -(\overline{b^1})^{-1} \end{pmatrix},$$
которая в силу леммы 9.1 обратима.

Согласно [7] оператор S_0 в (9.12) обладает свойством $S_0^2 = 1$. Поскольку он коммутирует с оператором умножения на постоянные матрицы, отсюда заключаем, что оператор
$$(\operatorname{Re} D)\varphi_0 + i(\operatorname{Im} D)S_0 = [D(1+S_0) + \overline{D}(1-S_0)]/2$$
обратим и обратным к нему служит
$$(\operatorname{Re} D^{-1})\varphi_0 + i(\operatorname{Im} D^{-1})S_0 = [D^{-1}(1+S_0) + \overline{D}^{-1}(1-S_0)]/2.$$
Поэтому, записывая первое уравнение системы (9.15) в форме
$$[(\operatorname{Re} D) + i(\operatorname{Im} D)S_0 - i(\operatorname{Im} D)P_0^* + K_0]\varphi_0 - K_{01}\varphi_1 - \xi_0 = 0,$$
получим
$$\varphi_0 + [(\operatorname{Re} D^{-1}) + i(\operatorname{Im} D^{-1})S_0][-i(\operatorname{Im} D)P_0^*\varphi_0 + K_0\varphi_0 - K_{01}\varphi_1] = 0,$$
или, после выделения действительной части,
$$\varphi_0 + [(\operatorname{Re} D^{-1}) - (\operatorname{Im} D^{-1})Q_0^*][K_0\varphi_0 - K_{01}\varphi_1] + (\operatorname{Im} D^{-1})(\operatorname{Im} D)(P_0^*)^2\varphi_0 = 0.$$
В результате приходим к эквивалентной (9.14) системе уравнений Фредгольма
$$\varphi_0 + \widetilde{K}_0\varphi_0 - \widetilde{K}_{01}\varphi_1 = 0, \quad \varphi_1 + K_1\varphi_1 - K_{10}\varphi_0 = f \tag{9.16}$$
с операторами
$$\widetilde{K}_0 = [(\operatorname{Re} D^{-1}) - (\operatorname{Im} D^{-1})Q_0^*]K_0 + (\operatorname{Im} D^{-1})(\operatorname{Im} D)(P_0^*)^2,$$
$$\widetilde{K}_{01} = [(\operatorname{Re} D^{-1}) - (\operatorname{Im} D^{-1})Q_0^*]K_{01}.$$

10. Гладкость матричных ядер интегральных операторов

Рассмотрим подробнее структуру матричных ядер операторов в (9.16), включая зависимость их гладкости от гладкости контуров Γ_j. С этой целью запишем операторы P_0 и S_0 в комплексной форме, полагая
$$\begin{aligned} (P_0^*\varphi_0)(t_0) &= \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} \frac{p_0^*(t_0,t)}{t-t_0}\varphi_0(t)dt, \quad p_0^*(t_0,t) = \frac{\operatorname{Im}[n(t)(\bar t - \bar t_0)]}{n(t)(\bar t - \bar t_0)}, \\ (Q_0^*\varphi_0)(t_0) &= \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} \frac{q_0^*(t_0,t)}{t-t_0}\varphi_0(t)dt, \quad q_0^*(t_0,t) = \frac{\operatorname{Im}[n(t)(\bar t - \bar t_0)]}{n(t)(\bar t - \bar t_0)}, \end{aligned} \tag{10.1}$$
где $dt = i(n_1 + in_2)|dt|$ — комплексный дифференциал, отвечающий ориентации контура против часовой стрелки, и положено $n = n_1 + in_2$, $\xi = \xi_1 + i\xi_2$. Аналогичным образом поступим и по отношению к операторам (9.13):
$$\begin{gathered} (K_0\varphi_0)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} \frac{k_0(t_0,t)}{t-t_0}\varphi_0(t)dt, \quad k_0(t_0,t) = \\ = \frac{\operatorname{Re}[n(t)(\bar t - \bar t_0)]}{n(t)(\bar t - \bar t_0)} \begin{pmatrix} H_{11}^0(t-t_0) & H_{11}^1(t-t_0) \\ H_{21}^0(t-t_0) & H_{21}^1(t-t_0) \end{pmatrix} + \frac{t-t_0}{n(t)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_1 & E_2 \end{pmatrix}, \\ (K_1\varphi_1)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} \frac{k_1(t_0,t)}{t-t_0}\varphi_1(t)dt, \\ k_1(t_0,t) = \frac{\operatorname{Re}[n(t)(\bar t - \bar t_0)]}{n(t)(\bar t - \bar t_0)} H_{11}^1(t-t_0), \quad t_0, t \in \Gamma_1, \end{gathered} \tag{10.2}$$
где матрицы $E_j \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ определяются равенствами
$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$
\begin{gathered}
(K_{01}\varphi_1)(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{k_{01}(t_0,t)}{t-t_0}\varphi_1(t)dt,\\
k_{01}(t_0,t)==\frac{\operatorname{Re}[n(t)(\bar t-\bar t_0)]}{n(t)(\bar t-\bar t_0)}\begin{pmatrix} H^1_{11}(t-t_0)\\ H^1_{21}(t-t_0)\end{pmatrix}-\frac{\operatorname{Im}[n(t)(\bar t-\bar t_0)]}{n(t)(\bar t-\bar t_0)}\begin{pmatrix}\operatorname{Im} d^1\\ 0\end{pmatrix},\\
(K_{10}\varphi_0)(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{k_{10}(t_0,t)}{t-t_0}\varphi_0(t)dt,\\
k_{10}(t_0,t)=\frac{\operatorname{Re}[n(t)(\bar t-\bar t_0)]}{n(t)(\bar t-\bar t_0)}H^1_{11}(t-t_0),\quad t_0\in\Gamma_1,\ t\in\Gamma_0.
\end{gathered}
\tag{10.3}
$$

Далее воспользуемся следующим вспомогательным результатом.

Лемма 10.1. *Пусть функция $h(\xi)$, $\xi=\xi_1+i\xi_2$, бесконечно дифференцируема при $\xi\neq 0$, однородна степени нуль и четна. Тогда на гладком контуре Γ класса $C^{m,\nu}$, где m — натуральное число и $0<\nu<1$, функция $k(t_1,t)=h(t_1-t)$ принадлежит классу $C^{m-1,\nu}(\Gamma\times\Gamma)$ и при $t_1=t$ принимает значение $h[in(t)]$, где $n(t)=n_1(t)+in_2(t)$ — единичная нормаль к Γ.*

Доказательство. Его достаточно провести в окрестности фиксированной точки $(t_0,t_0)\in\Gamma\times\Gamma$. Запишем параметризацию контура в этой окрестности в форме $z=z(s)$, $|s|\leqslant\delta$, где s — параметр длины дуги, отсчитываемый от точки t_0. Тогда функция

$$
\alpha(s_1,s)=\frac{z(s)-z(s_1)}{s-s_1}=\int\limits_0^1 z'[s\tau+s_1(1-\tau)]d\tau
$$

принадлежит классу $C^{m-1,\nu}$ в квадрате $|s_1|,|s|\leqslant\delta$, отграничена по модулю от нуля и принимает значение $z'(s)$ при $s_1=s$. Следовательно, функция $k[z(s_1),z(s)]=h[\alpha(s_1,s)]$ также принадлежит этому классу и ее значение при $s_1=s$ совпадает с $h[z'(s)]=h[in(s)]$. Отсюда следует и утверждение леммы для функции $k(t_1,t)$ в рассматриваемой окрестности контура. □

Из этой леммы и (10.1)–(10.3) следует, что в предположении $\Gamma_j\in C^{m,\nu}$, $m\geqslant 1$, функции

$$
p_0^*,\ q_0^*,\ k_0\in C^{m-1,\nu}(\Gamma_0\times\Gamma_0),\quad k_1\in C^{m-1,\nu}(\Gamma_1\times\Gamma_1),\tag{10.4}
$$

причем

$$
p_0^*(t,t)=0,\quad q_0^*(t,t)=-i,\quad k_j(t,t)=0,\ j=0,1.\tag{10.5}
$$

Что касается непрерывных функций $k_{0,1}(t_0,t)$ и $k_{1,0}(t_0,t)$, то по переменной t_0 они принадлежат, соответственно, $C^{m,\nu}(\Gamma_0)$ и $C^{m,\nu}(\Gamma_1)$ равномерно по t.

Рассмотрим теперь операторные произведения $Q_0^*K_0$ и $(P_0^*)^2$, фигурирующие в выражении (9.16) для оператора $\widetilde K_0$. Согласно (10.1), (10.2) имеем:

$$
(Q_0^*K_0\varphi)(t_1)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{q_0^*(t_1,t_0)dt_0}{t_0-t_1}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{k_0(t_0,t)\varphi(t)dt}{t-t_0},\quad t_1\in\Gamma_0.
$$

С учетом (10.5) перестановка двух фигурирующих здесь интегралов, первый из которых сингулярный, возможна [7], так что

$$
(Q_0^*K_0\varphi)(t_1)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\varphi(t)dt\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{q_0^*(t_1,t_0)k_0(t_0,t)dt_0}{(t_0-t_1)(t-t_0)}.
$$

Поскольку

$$
\frac{t-t_1}{(t_0-t_1)(t-t_0)}=\frac{1}{t_0-t_1}-\frac{1}{t_0-t},
$$

отсюда окончательно

$$
(Q_0^*K_0\varphi)(t_1)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{[k^*(t_1,t,t_1)-k^*(t_1,t,t)]\varphi(t)dt}{t-t_1},\quad t_1\in\Gamma_0,\tag{10.6}
$$

где

$$k^*(t_1, t, t_2) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} \frac{q_0^*(t_1, t_0) k_0(t_0, t) dt_0}{t_0 - t_2}.$$

Лемма 10.2. *Пусть* $\Gamma_0 \in C^{m+1,\nu}$, *где* m — *неотрицательное целое число и* $0 < \nu < 1$. *Тогда функция* $k^*(t_1, t, t_2)$ *по всем трем переменным принадлежит классу* $C^{m,\nu-\varepsilon}$ *для любого* $\varepsilon > 0$, *т. е.*

$$k^*(t_1, t, t_2) \in C^{m,\nu-0}(\Gamma_0 \times \Gamma_0 \times \Gamma_0). \tag{10.7}$$

Доказательство. Согласно (10.4) функция $k(t_1, t, t_0) = q^*(t_1, t_0) k_0(t_0, t)$ принадлежит классу $C^{m,\nu-0}(\Gamma_0 \times \Gamma_0 \times \Gamma_0)$, поэтому при $m = 0$ утверждение леммы вытекает из хорошо известных свойств [7] сингулярных интегралов, зависящих от параметра.

В общем случае $m \geqslant 1$ воспользуемся формулой дифференцирования сингулярного интеграла k^* по всем переменным. Удобно осуществлять дифференцирование функции φ на Γ_0 по комплексному параметру контура, т. е. как предел

$$\varphi'(t_0) = \lim_{t \to t_0,\, t \in \Gamma_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}.$$

Аналогично понимаются и частные производные. Хорошо известно [7], что сингулярный интеграл p^* можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла:

$$\frac{\partial k^*}{\partial t_1}(t_1, t, t_2) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} \frac{\partial k}{\partial t_1}(t_1, t, t_0) \frac{dt_0}{t_0 - t_2}, \quad \frac{\partial k^*}{\partial t}(t_1, t, t_2) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} \frac{\partial k}{\partial t}(t_1, t, t_0) \frac{dt_0}{t_0 - t_2}.$$

Утверждается, что аналогичная формула справедлива и по последней переменной:

$$\frac{\partial k^*}{\partial t_2}(t_1, t, t_2) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} \frac{\partial k}{\partial t_0}(t_1, t, t_0) \frac{dt_0}{t_0 - t_2}. \tag{10.8}$$

В самом деле, рассмотрим внутри контура Γ_0 аналитическую по переменной z функцию

$$\phi(t_1, t, z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} \frac{k(t_1, t, t_0) dt_0}{t_0 - z}.$$

Интегрированием по частям убеждаемся, что

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(t_1, t, z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} \frac{\partial k}{\partial t_0}(t_1, t, t_0) \frac{dt_0}{t_0 - z}.$$

По формуле Сохоцкого—Племеля [7] для граничных значений этих функций имеем:

$$\phi^+(t_1, t, t_2) = k(t_1, t, t_2) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} \frac{k(t_1, t, t_0) dt_0}{t_0 - t_2},$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^+ (t_1, t, t_2) = \frac{\partial k}{\partial t_2}(t_1, t, t_2) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} \frac{\partial k}{\partial t_0}(t_1, t, t_0) \frac{dt_0}{t_0 - t_2}.$$

Дифференцируя первое равенство по t_0 и сравнивая результат со вторым равенством, приходим к справедливости (10.8).

Утверждение (10.7) леммы теперь получается непосредственно индукцией по m из формул дифференцирования. □

Совершенно аналогично устанавливается и аналогичный результат для оператора $(P_0^*)^2$:

$$[(P_0^*)^2 \varphi](t_1) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} \frac{[k_0^*(t_1, t, t_1) - k_0^*(t_1, t, t)] \varphi(t) dt}{t - t_1}, \quad t_1 \in \Gamma_0, \tag{10.9}$$

где по лемме 10.2 функция

$$k_0^*(t_1,t,t_2) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} \frac{p_0^*(t_1,t_0)p_0^*(t_0,t)dt_0}{t_0-t_2}$$

принадлежит классу $C^{m,\nu-0}(\Gamma_0\times\Gamma_0\times\Gamma_0)$.

Поэтому на основании (10.2) и (10.6), (10.9) оператор $\widetilde{K}_0$ в (9.16) действует по формуле

$$(\widetilde{K}_0\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} \frac{\widetilde{k}_0(t_0,t)\varphi(t)dt}{t-t_0}, \quad t_0\in\Gamma_0, \tag{10.10}$$

где в предположении $\Gamma\in C^{m+1,\nu}$ функция

$$\widetilde{k}_0(t_0,t)\in C^{m,\nu-0}(\Gamma_0\times\Gamma_0), \quad \widetilde{k}_0(t,t)=0. \tag{10.11}$$

Аналогичным свойством обладает и оператор K_1 по отношению к контуру Γ. Таким образом, (4.10) является системой уравнений Фредгольма. Прежде чем сформулировать для нее центральный результат, рассмотрим следующую типичную ситуацию, связанную с этой системой, для аналогичного (10.10) интегрального оператора

$$(K\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} \frac{k(t_0,t)\varphi(t)dt}{t-t_0}, \quad t_0\in\Gamma, \tag{10.12}$$

Лемма 10.3. *Пусть в условиях леммы* 3.1 *оператор K компактен в пространстве $C^{m,\mu}(\Gamma)$, $m\geqslant 1$. Тогда любое решение $\varphi\in C(\Gamma)$ уравнения $\varphi+K\varphi=f$ с правой частью $f\in C^{m,\mu}(\Gamma)$ также принадлежит $f\in C^{m,\mu}(\Gamma)$.*

Доказательство. Согласно лемме 3.1 оператор K компактен в каждом из пространств $C(\Gamma)$, $C^{\mu}(\Gamma)$, причем любое решение $\varphi\in C(\Gamma)$ уравнения $\varphi+K\varphi=f$ с правой частью $f\in C^{\mu}(\Gamma)$ также принадлежит $f\in C^{\mu}(\Gamma)$. Кроме того, для этого уравнения справедливы следующие альтернативы Фредгольма:

1. однородное уравнение $\varphi+K\varphi=0$ имеет конечное число n линейно независимых решений $\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in C(\Gamma)$;
2. однородное союзное уравнение $\psi+K'\psi=0$, где оператор K' получается из (10.10) заменой $k(t_0,t)$ на $-k(t,t_0)$ под знаком интеграла, имеет то же число n линейно независимых решений $\psi_1,\ldots,\psi_n\in C(\Gamma)$;
3. неоднородное уравнение $\varphi+K\varphi=f$ разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{\Gamma} f(t)\psi_j(t)|dt| = 0, \quad 1\leqslant j\leqslant n. \tag{10.13}$$

Заметим, что в действительности функции φ_j и ψ_j принадлежат $C^{\mu}(\Gamma)$.

Пусть теперь оператор K компактен в $C^{m\mu}(\Gamma)$. Тогда по теореме Рисса для уравнения $\varphi+K\varphi=f$ в классе $C^{m,\mu}(\Gamma)$ также справедливы альтернативы Фредгольма, т. е. однородное уравнение в этом классе имеет $n_0\leqslant n$ линейно независимых решений и найдутся такие n_0 линейно независимых функционалов над $C^{m,\mu}(\Gamma)$, что обращение их в нуль на функции f необходимо и достаточно для разрешимости неоднородного уравнения $\varphi+K\varphi=f$. Но поскольку условия (10.13) необходимы для разрешимости этого уравнения и в классе $C^{m,\mu}(\Gamma)$, отсюда следует неравенство $n\leqslant n_0$. Таким образом, $n_0=n$, так что утверждения 1–3 справедливы и по отношению к классу $C^{m,\mu}$. В свою очередь отсюда вторая часть леммы получается непосредственно. □

Теорема 10.1. *Пусть $\Gamma_0,\Gamma_1\in C^{1,\nu}$. Тогда система уравнений* (9.16) *однозначно разрешима в классе $\varphi_0\in C(\Gamma_0)$ $\varphi_1\in C(\Gamma_1)$, причем $f\in C^{m,\mu}(\Gamma_1)$, $m=0,1$, $0<\mu<\nu$, влечет и $\varphi_0\in C^{m,\mu}(\Gamma_0)$ $\varphi_1\in C^{m,\mu}(\Gamma_1)$. Если дополнительно $\Gamma_j\in C^{m+1,\nu}$, $m\geqslant 2$, то предыдущее утверждение справедливо и для $m\geqslant 2$.*

Доказательство. Согласно (10.10) оператор $\widetilde{K}_0$ удовлетворяет условиям первой части леммы 10.3 и это же верно по отношению к оператору K_1 на контуре Γ_1. Кроме того, в силу леммы 6.2 эти операторы компактны и в пространстве $C^{1,\mu}(\Gamma_1)$. Поэтому первое утверждение теоремы вытекает из леммы 10.3, примененной к системе уравнений на контурах Γ_j, и леммы 9.1. Предположим далее, что $\Gamma_j \in C^{m+1,\nu}$. Тогда функция $\widetilde{k}(t_0,t)$, определяющая оператор $\widetilde{K}_0$ в (10.10), обладает свойством (10.11). Поэтому оператор $\widetilde{K}_0$ компактен в пространстве $C^{n,\mu}(\Gamma_1)$, что легко показывается индукцией по m с помощью формулы дифференцирования, установленной при доказательстве леммы 10.2. Ситуация с оператором K_1 совершенно аналогична, и нужный результат теперь следует из леммы 10.3. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А. В., Солдатов А. П.* Граничные свойства интегралов типа Коши. L_p-случай// Дифф. уравн. — 1991. — *27*, № 1. — С. 3–8.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1972.
3. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. И.* Введение в теорию одномерных сингулярных уравнений. — Кишинев: Штиинца, 1973.
4. *Купрадзе В. Д.* Методы потенциала в теории упругости. — М.: Физматгиз, 1963.
5. *Лехницкий Г. Г.* Теория упругости анизотропного тела. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1950.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
8. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи—Зингера об индексе. — М.: Мир, 1970.
9. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1991.
10. *Солдатов А. П.* Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1991. — *55*, № 5. — С. 1070–1100.
11. *Солдатов А. П.* Гипераналитические функции и их приложения// Соврем. мат. и ее прилож. — 2004. — *15*. — С. 142–199.
12. *Солдатов А. П.* Пространство Харди решений эллиптических систем первого порядка// Докл. РАН. — 2007. — *416*, № 1. — С. 26–30.
13. *Солдатов А. П.* Задача Дирихле для слабо связанных эллиптических систем на плоскости// Дифф. уравн. — 2013. — *49*, № 6. — С. 734–745.
14. *Солдатов А. П.* Задача Неймана для эллиптических систем на плоскости// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2013. — *48*. — С. 120–133.
15. *Солдатов А. П., Чернова О. В.* Задача Римана—Гильберта для эллиптической системы первого порядка в классах Гельдера// Науч. ведом. БелГУ. — 2009. — *13*, вып. 17/2. — С. 115–121.
16. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. — М.: Мир, 1974.
17. *Begehr H., Lin W.* A mixed-contact problem in orthotropic elasticity// В сб.: «Partial diifferential equations with real analysis». — Harlow: Longman Scientific & Technical, 1992. — С. 219–239.
18. *Begehr H., Lin W.* A mixed-contact problem in orthotropic elasticity// В сб.: «Complex analytic methods for partial differential equations. An introductory text». — Singapore, World Scientific, 1994.
19. *Douglis A.* A function-theoretical approach to elliptic systems of equations in two variables// Commun. Pure Appl. Math. — 1953. — *6*. — С. 259–289.
20. *England A. H.* Complex variable methods in elasticity. — London etc.: Wiley-Interscience, 1971.
21. *Gilbert R. P., Wendland W. L.* Analytic, generalized, hyper-analytic function theory and an application to elasticity// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 1975. — *73A*. — С. 317–371.

Александр Павлович Солдатов
Национальный исследовательский университет «Белгородский государственный университет»
308015, г. Белгород, ул. Победы, д. 85
E-mail: soldatov48@gmail.com

UDC 517.9

On the Theory of Anisotropic Flat Elasticity

© 2016 **A. P. Soldatov**

Abstract. For the Lamé system from the flat anisotropic theory of elasticity, we introduce generalized double-layer potentials in connection with the function-theory approach. These potentials are built both for the translation vector (the solution of the Lamé system) and for the adjoint vector functions describing the stress tensor. The integral representation of these solutions is obtained using the potentials. As a corolary, the first and the second boundary-value problems in various spaces (Hölder, Hardy, and the class of functions just continuous in a closed domain) are reduced to the equivalent system of the Fredholm boundary equations in corresponding spaces. Note that such an approach was developed in [13, 14] for common second-order elliptic systems with constant (higher-order only) coefficients. However, due to important applications, it makes sense to consider this approach in detail directly for the Lamé system. To illustrate these results, in the last two sections we consider the Dirichlet problem with piecewise-constant Lamé coefficients when contact conditions are given on the boundary between two media. This problem is reduced to the equivalent system of the Fredholm boundary equations. The smoothness of kernels of the obtained integral operators is investigated in detail depending on the smoothness of the boundary contours.

REFERENCES

1. A. V. Aleksandrov and A. P. Soldatov, "Granichnye svoystva integralov tipa Koshi. L_p-sluchay" [Boundary properties of integrals of the Cauchy type] *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1991, **27**, No. 1, 3–8 (in Russian).
2. G. M. Goluzin, *Geometricheskaya teoriya funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Geometric Theory of Functions of Complex Argument], Nauka, Moscow, 1972 (in Russian).
3. I. Ts. Gokhberg and N. I. Krupnik, *Vvedenie v teoriyu odnomernykh singulyarnykh uravneniy* [Introduction to the Theory of One-Dimensional Singular Equations], Shtiintsa, Kishinev, 1973 (in Russian).
4. V. D. Kupradze, *Metody potentsiala v teorii uprugosti* [Methods of Potential in the Theory of Elasticity], Fizmatgiz, Moscow, 1963 (in Russian).
5. G. G. Lekhnitskiy, *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [Elasticity Theory of Anisotropic Body], GITTL, Moscow—Leningrad, 1950 (in Russian).
6. N. I. Muskhelishvili, *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some General Problems of the Mathematical Theory of Elasticity], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
7. N. I. Muskhelishvili, *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular Integral Equations], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
8. R. Pale, *Seminar po teoreme At'i—Zingera ob indekse* [Seminar on the Atiyah—Singer Index Theorem], Mir, Moscow, 1970 (in Russian).
9. U. Rudin, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. — M.: Mir, 1991 (in Russian).
10. A. P. Soldatov, "Metod teorii funktsiy v kraevykh zadachakh na ploskosti. I. Gladkiy sluchay" [Function theory method for boundary-value problems on the plane. I. Smooth case], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1991, **55**, No. 5, 1070–1100 (in Russian).
11. A. P. Soldatov, "Giperanaliticheskie funktsii i ikh prilozheniya" [Hyper-analytic functions and their applications], *Sovrem. mat. i ee prilozh.* [Contemp. Math. Appl.], 2004, **15**, 142–199 (in Russian).
12. A. P. Soldatov, "Prostranstvo Khardi resheniy ellipticheskikh sistem pervogo poryadka" [The Hardy space of solutions of first-order elliptic systems], *Dokl. RAN.* [Proc. Russian Acad. Sci.], 2007, **416**, No. 1, 26–30 (in Russian).
13. A. P. Soldatov, "Zadacha Dirikhle dlya slabo svyazannykh ellipticheskikh sistem na ploskosti" [The Dirichlet problem for weakly connected elliptic systems on the plane], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2013, **49**, No. 6, 734–745 (in Russian).
14. A. P. Soldatov, "Zadacha Neymana dlya ellipticheskikh sistem na ploskosti" [The Neumann problem for elliptic systems on the plane], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Comtemp. Math. Fundam. Directions], 2013, **48**, 120–133 (in Russian).
15. A. P. Soldatov and O. V. Chernova, "Zadacha Rimana—Gil'berta dlya ellipticheskoy sistemy pervogo poryadka v klassakh Gel'dera" [The Riemann—Hilbert problem for first-order elliptic system in the Hölder classes] *Nauch. vedom. BelGU* [Sci. Bull. Uni. Belgorod], 2009, **13**, No. 17/2, 115–121 (in Russian).
16. G. Fikera, *Teoremy sushchestvovaniya v teorii uprugosti* [Existence Theorems in the Elasticity Theory], Mir, Moscow, 1974 (in Russian).
17. H. Begehr and W. Lin, "A mixed-contact problem in orthotropic elasticity," In: «Partial differential equations with real analysis», Longman Scientific & Technical, Harlow, 1992, 219–239.

18. H. Begehr and W. Lin, “A mixed-contact problem in orthotropic elasticity”, In: «Complex analytic methods for partial differential equations. An introductory text», World Scientific, Singapore, 1994.
19. A. Douglis, “A function-theoretical approach to elliptic systems of equations in two variables,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1953, **6**, 259–289.
20. A. H. England, Complex variable methods in elasticity. — London etc.: Wiley-Interscience, 1971.
21. R. P. Gilbert and W. L. Wendland, “Analytic, generalized, hyper-analytic function theory and an application to elasticity,” *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.*, 1975, **73A**, 317–371.

Alexandre P. Soldatov
National Research University "Belgorod State University", Belgorod, Russia
E-mail: soldatov48@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 60 (2016). С. 164–183

УДК 517.9

ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ВОЗВРАТНО-ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

© 2016 г. **А. ТЕСЕИ**

Аннотация. Изучается начально-краевая задача

$$\begin{cases} u_t = [\varphi(u)]_{xx} + \varepsilon[\psi(u)]_{txx} & \text{в } \Omega \times (0,T], \\ \varphi(u) + \varepsilon[\psi(u)]_t = 0 & \text{в } \partial\Omega \times (0,T], \\ u = u_0 \geqslant 0 & \text{в } \Omega \times \{0\} \end{cases}$$

с начальными данными, имеющими значениями меры Радона, при условии, что регуляризирующий член ψ возрастает и ограничен (случаи степенного и логарифмического ψ рассмотрены в [2, 3] для пространства любой размерности). Функция φ немонотонна и ограничена, а на бесконечности она либо убывает и обращается в нуль, либо возрастает. Для обоих случаев доказывается существование решений в пространстве положительных мер Радона. Кроме того, для первого случая устанавливается общий результат о спонтанном возникновении особенностей. Чтобы отметить влияние поведения функции φ на бесконечности на регулярность решений, рассматривается также и случай, когда φ ведет себя как кубическая функция.

Введение

В данной статье представлены недавние результаты для начально-краевой задачи

$$(P) \qquad \begin{cases} u_t = [\varphi(u)]_{xx} + \varepsilon[\psi(u)]_{txx} & \text{в } Q := \Omega \times (0,T], \\ \varphi(u) + \varepsilon[\psi(u)]_t = 0 & \text{в } \partial\Omega \times (0,T], \\ u = u_0 & \text{в } \Omega \times \{0\}, \end{cases}$$

где ε и T — положительные постоянные, $\Omega \equiv (a,b)$ — ограниченный интервал, а u_0 — положительная конечная мера Радона на Ω (за доказательствами читатель отсылается к [4–6], а также к [17, 18]). Функции $\varphi, \psi : [0,\infty] \mapsto [0,\infty)$ удовлетворяют следующим условиям:

(a) $\varphi(0) = \varphi(\infty) = 0$ и существует такое положительное α, что φ возрастает в интервале $(0,\alpha)$ и убывает в интервале (α,∞);

(b) $\psi(0) = 0$, $\psi(\infty) = \gamma \in (0,\infty)$, ψ возрастает на полуоси $(0,\infty)$ и $\psi'(u) \to 0$ при $u \to \infty$.

(см. условия (H_1)-(H_2) пункта 3.1). Поскольку φ немонотонна, предельная задача

$$\begin{cases} u_t = [\varphi(u)]_{xx} & \text{в } Q, \\ \varphi(u) = 0 & \text{в } \partial\Omega \times (0,T], \\ u = u_0 & \text{в } \Omega \times \{0\}, \end{cases} \tag{0.1}$$

соответствующая задаче (P) при $\varepsilon \to 0^+$, некорректна. Первое уравнение в (0.1) называется *уравнением возвратно-поступательного типа,* а сама задача (P), возникающая как псевдопараболическая регуляризация задачи (0.1), является вырожденной, поскольку $\psi'(u) \to 0$ при $u \to \infty$.

Интерес к данной тематике обусловлен уравнением Пероны—Малика (см. [13]) с одной пространственной переменной:

$$z_t = [\varphi(z_x)]_x; \tag{0.2}$$

здесь, как правило, функция φ имеет вид

$$\varphi(u) = \frac{u}{u^2+\alpha} \quad \text{либо} \quad \varphi(u) = u\exp\left(-\frac{u}{\alpha}\right) \qquad (\alpha > 0). \tag{0.3}$$

Положим $u := z_x$. Тогда, формальное дифференцируя уравнение (0.2) по переменной x, получим дифференциальное уравнение из задачи (0.1). Задача (0.1) с φ, определенной формулами из (0.3), возникает в моделях агрегации популяций (см. [12]), а для φ, ведущей себя, как кубическая функция — в теории фазовых переходов (см. [7, 10]).

Уравнение

$$z_t = [\varphi(z_x)]_x + \varepsilon[\psi(z_x)]_{tx} \tag{0.4}$$

(где ψ — такая же, как и выше), являющееся вырожденной псевдопараболической регуляризацией уравнения (0.2), естественным образом возникает в одномерной модели формирования слоев постоянной температуры в океане (см. [1]). Здесь слагаемое $\varepsilon[\psi(z_x)]_{tx}$ уравнения (0.4) является формальным приближением первого порядка модифицированной версии уравнения (0.2), учитывающей эффекты запаздывания. Отметим, что, формально дифференцируя $\varepsilon[\psi(z_x)]_{tx}$ и полагая $u := z_x$, мы получаем слагаемое $\varepsilon[\psi(u)]_{txx}$ в первом уравнении задачи (P).

В работе [1] обнаружено, что решения уравнения (0.4) могут иметь особенности при положительных значениях t; более того, с ростом времени такие особенности не исчезают. Это означает, что решение z уравнения (0.4) может стать разрывным по переменной x; эвристически, в терминах неизвестной функции $u = z_x$, это показывает, что в решении задачи (P) возникают массы Дирака. Значения решений задачи (P) фактически являются внутренними мерами Радона, поскольку положительные меры Радона могут возникать спонтанно даже в том случае, когда функция u_0 ограничена (см. теорему 3.4 ниже).

Исследуя возникновение особенностей, естественно применить к задаче (P) преобразование $t \to T - t$, обращающее время (см. [1, 4]). Тогда возникновение особенностей в (P) соответствует исчезновению особенностей в следующей «обратной» задаче для неизвестной функции $z(\cdot, t) := u(\cdot, T - t)$:

$$(B) \qquad \begin{cases} z_t = [\chi(z)]_{xx} + \varepsilon[\psi(z)]_{txx} & \text{в } Q \\ \chi(z) + \varepsilon[\psi(z)]_t = \varphi(\alpha) & \text{в } \partial\Omega \times (0, T) \\ z = u(\cdot, T) & \text{в } \Omega \times \{0\}, \end{cases}$$

где $\chi(u) := \varphi(\alpha) - \varphi(u)$ $(u \in [0, \infty))$. Отметим, что перейти к задаче (B) означает исследовать задачу (P) при других условиях на φ, в частности, при предположении, что φ ограничена и возрастает на бесконечности (см. условие (H_3)). Поведение функции φ на бесконечности играет ключевую роль для определения качественных свойств (в частности, регулярности) решений задачи (P). В разделе 2 это будет подробно рассмотрено для случая, когда φ ведет себя как кубическая функция, где $\varphi(u) \to \infty$ при $u \to \infty$ (см. условие (A)), сравнительно со случаем, когда φ задана формулами (0.3) (в более общем случае, удовлетворяет условию (H_1)).

Поведение ψ на бесконечности — это важное свойство задачи (P). Как сказано выше, первое уравнение в (P) является вырожденным псевдопараболическим, поскольку $\psi'(u) \to 0$ при $u \to \infty$. Этот случай существенно отличается от так называемой соболевской регуляризации, используемой в [12, 16], которая формально соответствует выбору $\psi(u) = u$. В [3] задача (P) рассмотрена в предположении, что ψ имеет степенной рост, а именно, $\psi(u) = (1 + u)^\theta - 1$ $(\theta \in (0, 1])$. В этом случае сингулярная (относительно меры Лебега) часть u_s решения u не меняется со временем (в частности, не может возникать спонтанно). Напротив, в логарифмическом случае, т. е. при $\psi(u) = \ln(1 + u)$, сингулярная часть u_s может возрастать по переменной t, однако она никогда не возникает спонтанно (см. [2]). Отметим, что, хотя $\psi'(u) \to 0$ при $u \to \infty$ для $\theta \in (0, 1)$ в обоих случаях (в степенном и логарифмическом), в логарифмическом случае $\psi'(u)$ стремится к нулю быстрее, а значит, регуляризация является более слабой. Таким образом, упомянутый выше эффект спонтанного возникновения особенностей представляется естественным: он возникает при выполнении условия (H_2), т. е. когда ψ' обращается в нуль на бесконечности быстрее (а значит, регуляризация является более слабой), чем в логарифмическом или степенном случае (см. раздел 2).

В разделе 1 настоящей работы мы определяем рамки математического исследования. В разделе 2 рассматривается случай, когда φ ведет себя, как кубическая функция. В разделе 3 приводятся основные результаты для случая, когда функция φ ограничена и убывает на бесконечности, в разделе 5 — для случая, когда она ограничена и возрастает на бесконечности. Идея доказательства результатов о существовании приводится в разделе 3; для случая, когда u_0 — непрерывная функция с компактным носителем, ее можно найти в разделе 4.

1. Предварительные сведения

Через $\mathcal{M}(\Omega)$ обозначим пространство конечных мер Радона на Ω, а через $\mathcal{M}^+(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$ — конус неотрицательных конечных мер Радона на Ω. *Носитель* меры μ из $\mathcal{M}^+(\Omega)$, обозначаемый через $\operatorname{supp}\mu$, определяется как дополнение максимального открытого подмножества E множества Ω, для которого $\mu(E) = 0$. Будем говорить, что $\mu \in \mathcal{M}^-(\Omega)$, если $-\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$. По теореме Рисса—Маркова справедливо равенство $\mathcal{M}(\Omega) = (C_c(\Omega))^*$; таким образом, $\mathcal{M}(\Omega)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} := |\,\mu\,|(\Omega),$$

где $|\,\mu\,|$ обозначает полную вариацию меры μ. Символ $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$, обозначающий отображение двойственности между пространством $\mathcal{M}(\Omega)$ и $C_c(\Omega)$, а именно

$$\langle \mu, \zeta \rangle_\Omega = \int\limits_\Omega \zeta(x)\, d\mu(x),$$

распространяется на любую μ-интегрируемую функцию ζ (в том числе на любую ζ из $C(\overline{\Omega})$).

Для любой μ из $\mathcal{M}(\Omega)$ и любого борелевского множества $E \subseteq \Omega$ сужение $\mu \llcorner E$ меры μ на множество E определяется следующим образом:

$$(\mu \llcorner E)(A) := \mu(E \cap A) \quad \text{для любого борелевского множества } A \subseteq \Omega.$$

Если μ, ν — неотрицательные меры, то мера μ называется *сингулярной относительно* ν, если существует борелевское множество E, для которого $\mu = \mu \llcorner E$ и $\nu(E) = 0$.

Через $\mathcal{M}_s(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$ и $\mathcal{M}_{ac}(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$ обозначим множества мер, сингулярных и абсолютно непрерывных (соответственно) относительно меры Лебега (далее обозначаемой через $|\cdot|$). Напомним, что $\mathcal{M}_s(\Omega) \cap \mathcal{M}_{ac}(\Omega) = \{0\}$. Кроме того, в силу лебеговского разложения и теоремы Радона—Никодима следующие утверждения справедливы для любой μ из $\mathcal{M}(\Omega)$:

(i) существует и единственна пара мер $\mu_{ac} \in \mathcal{M}_{ac}(\Omega)$, $\mu_s \in \mathcal{M}_s(\Omega)$, для которой

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_s; \tag{1.1}$$

(ii) существует и единственна μ_r из $L^1(\Omega)$ (называемая *плотностью меры* μ_{ac}), для которой

$$\mu_{ac}(E) = \int\limits_E \mu_r(x)dx \quad \text{для любого борелевского множества } E \subseteq \Omega.$$

Если $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$, то μ_{ac}, $\mu_s \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ и $\mu_r \geqslant 0$ п. в. в Ω.

Любая мера μ из $\mathcal{M}(\Omega)$ может быть представлена единственным образом в виде разности $\mu = \mu^+ - \mu^-$ двух положительных взаимно сингулярных мер $\mu^\pm$ (называемых соответственно *положительной и отрицательной частями* меры μ.). Легко видеть, что

$$[\mu_{ac}]^\pm = [\mu^\pm]_{ac}, \quad [\mu_s]^\pm = [\mu^\pm]_s.$$

Мера μ из $\mathcal{M}(\Omega)$ называется *дискретной*, если существует счетное борелевское множество $E \subseteq \Omega$, для которого $\mu = \mu \llcorner E$, и *непрерывной*, если $\mu(\{x\}) = 0$ для любого x из Ω. Согласно равенству (1.1) любая μ из $\mathcal{M}(\Omega)$ может быть представлена единственным образом в виде суммы

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_d,$$

где

(a) μ_{ac} абсолютно непрерывна, μ_{sc} и μ_d сингулярны относительно меры Лебега, μ_{sc} сингулярна относительно μ_d;

(b) μ_{ac} и μ_{sc} непрерывны, μ_d дискретна.

Меры μ_{sc} и μ_d называются *сингулярно непрерывной* и *дискретной* (соответственно) частями меры μ. Подобные замечания и обозначения остаются справедливыми (соответственно, неявно используются) для мер Радона и вещественных функций на $Q := \Omega \times (0, T) \subset \mathbb{R}^{N+1}$ и на $(0, T) \subset \mathbb{R}$.

Определение 1.1. Через $L^\infty(0,T;\mathcal{M}^+(\Omega))$ обозначим множество неотрицательных мер Радона z из $\mathcal{M}^+(Q)$, обладающих следующим свойством: почти для любого t из $(0,T)$ существует мера $z(\cdot,t)$ из $\mathcal{M}^+(\Omega)$, для которой справедливы следующие утверждения:

(i) для любого $\zeta \in C_c(Q)$ отображение $t \mapsto \langle z(\cdot,t),\zeta(\cdot,t)\rangle_\Omega$ принадлежит $L^1(0,T)$ и

$$\langle z,\zeta\rangle_Q = \int_0^T \langle z(\cdot,t),\zeta(\cdot,t)\rangle_\Omega\,dt; \tag{1.2}$$

(ii) отображение $t \mapsto \|z(\cdot,t)\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$ принадлежит $L^\infty(0,T)$.

Аналогично, через $L^\infty(\Omega;\mathcal{M}^+(0,T))$ обозначим множество таких мер Радона z из $\mathcal{M}^+(Q)$, что почти для любого x из Ω существует мера $z(x,\cdot)$ из $\mathcal{M}^+(0,T)$, обладающая следующими свойствами:

$(i)'$ для любого ζ из $C_c(Q)$ отображение $x \mapsto \langle z(x,\cdot),\zeta(x,\cdot)\rangle_{(0,T)}$ принадлежит $L^1(\Omega)$ и

$$\langle z,\zeta\rangle_Q = \int_\Omega \langle z(x,\cdot),\zeta(x,\cdot)\rangle_{(0,T)}\,dx;$$

$(ii)'$ отображение $x \mapsto \|z(x,\cdot)\|_{\mathcal{M}(0,T)}$ принадлежит $L^\infty(\Omega)$.

Через $C([0,T];\mathcal{M}^+(\Omega))$ обозначим множество таких мер z из $L^\infty(0,T;\mathcal{M}^+(\Omega))$, что след $z(\cdot,t)$ определен для любого t из $[0,T]$ и

$$\lim_{t\to t_0} \|z(\cdot,t)-z(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = 0$$

для любого t_0 из $[0,T]$.

Согласно (ii) и $(ii)'$ используем обозначения

$$\|z\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\Omega))} := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \|z(\cdot,t)\|_{\mathcal{M}(\Omega)} < \infty,$$

$$\|z\|_{L^\infty(\Omega;\mathcal{M}(0,T))} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \|z(x,\cdot)\|_{\mathcal{M}(0,T)} < \infty.$$

Если $z \in L^\infty(0,T;\mathcal{M}^+(\Omega))$, то, очевидно, и z_{ac}, $z_s \in L^\infty(0,T;\mathcal{M}^+(\Omega))$, а $z_r \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ (аналогичное утверждение справедливо для z из $C([0,T];\mathcal{M}^+(\Omega))$). Кроме того, из равенства (1.2) следует, что

$$\langle z_{ac},\zeta\rangle_Q = \iint_Q z_r\,\zeta\,dxdt$$

и

$$\langle z_s,\zeta\rangle_Q = \int_0^T \langle z_s(\cdot,t),\zeta(\cdot,t)\rangle_\Omega\,dt$$

для любой ζ из $C_c(Q)$

Через $[z(\cdot,t)]_{ac}$, $[z(\cdot,t)]_s \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ обозначим абсолютно непрерывную и сингулярную части (соответственно) меры $z(\cdot,t) \in \mathcal{M}^+(\Omega)$. Стандартными методами можно доказать, что для почти всех t из $(0,T)$ выполняются равенства

$$[z(\cdot,t)]_{ac} = z_{ac}(\cdot,t), \qquad [z(\cdot,t)]_s = z_s(\cdot,t). \tag{1.3}$$

Из первого из этих равенств следует, что

$$[z(\cdot,t)]_r = z_r(\cdot,t),$$

где $[z(\cdot,t)]_r$ обозначает плотность меры $[z(\cdot,t)]_{ac}$. Аналогичные соображения имеют место и в том случае, когда $z \in L^\infty(\Omega;\mathcal{M}^+(0,T))$.

Будем говорить, что конечная мера Радона z из $\mathcal{M}(Q)$ принадлежит $L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\Omega))$, если ее положительная часть z^+ и отрицательная часть z^- принадлежат $L^\infty(0,T;\mathcal{M}^+(\Omega))$. Отметим, что условия (i) и (ii) определения 1.1 выполняются при

$$z(\cdot,t) := z^+(\cdot,t) - z^-(\cdot,t).$$

Более того, если $z \in L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\Omega))$, то

$$[z(\cdot,t)]^\pm = z^\pm(\cdot,t),$$

а равенства (1.3) по-прежнему справедливы для почти всех t из $(0,T)$. Аналогичные определения можно ввести и для множества мер Радона $L^\infty(\Omega;\mathcal{M}(0,T))$, причем соответствующие замечания будут верны.

Введем еще несколько обозначений, используемых ниже. Для п. в. определенной измеримой функции $z:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$, $z\geqslant 0$, *существенный верхний предел* в точке x_0 из $\overline{\Omega}$ определяется (и обозначается) следующим образом:

$$\operatorname{ess}\limsup_{x\to x_0} z(x) := \lim_{\delta\to 0^+}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in I_\delta(x_0)} z(x)\right) = \inf_{\delta>0}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in I_\delta(x_0)} z(x)\right),$$

где

$$I_\delta(x_0) := (x_0-\delta, x_0+\delta)\cap\overline{\Omega} \qquad (x_0\in\overline{\Omega},\ \delta>0).$$

Тогда для каждого x_0 из $\overline{\Omega}$ определена функция

$$\overline{\lim}\, z:\ \overline{\Omega}\to\mathbb{R}, \quad \big(\overline{\lim}\, z\big)(x_0) := \operatorname{ess}\limsup_{x\to x_0} z(x).$$

Положим

$$\big\{\overline{\lim}\, z = \infty\big\} := \left\{x_0\in\overline{\Omega} \mid \operatorname{ess}\limsup_{x\to x_0} z(x) = \infty\right\} =$$

$$= \left\{x_0\in\overline{\Omega} \mid (\forall L>0)\ (\exists\bar{\delta}>0)\ (\forall\delta\in(0,\bar{\delta}))\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in I_\delta(x_0)} z(x) > L\right\} =$$

$$= \left\{x_0\in\overline{\Omega} \mid (\forall\delta>0)\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in I_\delta(x_0)} z(x) = \infty\right\}$$

и

$$\big\{\overline{\lim}\, z < \infty\big\} := \overline{\Omega}\setminus\big\{\overline{\lim}\, z = \infty\big\}.$$

Иными словами, имеем соотношение

$$\big\{\overline{\lim}\, z < \infty\big\} = \{x_0\in\overline{\Omega} \mid \exists\, I_\delta(x_0),\ \text{для которого } z\in L^\infty(I_\delta(x_0))\}.$$

2. Случай кубической функции φ

Одним из главных свойств задачи (P) является поведение функции φ на бесконечности. Изучим случай, когда φ удовлетворяет следующему условию:

$$(A) \qquad \begin{cases} (i)\ \ \varphi\in C^2(\mathbb{R}),\ \varphi(u)\to\pm\infty \ \text{ при } u\to\pm\infty, \\ (ii)\ \ \varphi'(u)>0 \ \text{в } (-\infty,a_1)\cup(a_2,\infty) \ \ (-\infty<a_1<a_2<\infty), \\ (iii)\ \varphi'(u)<0 \ \text{в } (a_1,a_2). \end{cases}$$

Рассмотрим задачу

$$(C) \qquad \begin{cases} u_t = \Delta[\varphi(u)] + \varepsilon\Delta u_t & \text{в } Q, \\ \varphi(u) + \varepsilon u_t = 0 & \text{в } \partial\Omega\times(0,T], \\ u = u_0 & \text{в } \Omega\times\{0\}, \end{cases}$$

где $\varepsilon>0$, $T>0$, а $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ $(N\geqslant 1)$ — ограниченная связная область с гладкой границей $\partial\Omega$ (если $N\geqslant 2$). Функция $v:=\varphi(u)+\varepsilon u_t$ называется *химическим потенциалом*. Задача (C) называется *соболевской регуляризацией* задачи

$$\begin{cases} u_t = \Delta[\varphi(u)] & \text{в } Q, \\ \varphi(u) = 0 & \text{в } \partial\Omega\times(0,T], \\ u = u_0 & \text{в } \Omega\times\{0\}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Если $N=1$, то задача (C) формально соответствует задаче (P) с $\psi(u)=u$; аналогично, задача (2.1) соответствует задаче (0.1).

Теорема 2.1. *Пусть* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ *и выполняется условие* (A). *Тогда существует единственная* u *из* $C^1([0,T]; L^\infty(\Omega))$, *для которой* $v \in C([0,T]; C_0(\overline{\Omega}) \cap W^{2,p}_{loc}(\Omega))$, $p > N$, $\Delta v \in C([0,T]; L^\infty(\Omega))$, *удовлетворяющая задаче* (C) *в классическом смысле, и существует положительное* M, *зависящее только от* $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$, *для которого*

$$||u||_{L^\infty(Q)} \leqslant M, \tag{2.2}$$

$$\|v\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} + \sqrt{\varepsilon}\,\|u_t\|_{L^2(Q)} \leqslant M, \tag{2.3}$$

$$\|v\|_{L^\infty(Q)} \leqslant M. \tag{2.4}$$

Замечание 2.1. Из определения химического потенциала и равенства $u_t = \Delta v$ следует, что $v(\cdot,t)$ удовлетворяет эллиптической задаче

$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta v(\cdot,t) + v(\cdot,t) = \varphi(u)(\cdot,t) & \text{в } \Omega, \\ v(\cdot,t) = 0 & \text{на } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.5}$$

для любого t из $(0,T]$

Отметим, что все неравенства (2.2)–(2.4) можно вывести из неравенства (2.7) (см. ниже), выбирая функцию g в (2.6) различным образом.

Предложение 2.1. *Пусть* u *удовлетворяет задаче* (C), $g \in C^1(\mathbb{R})$, $g' \geqslant 0$, $g(0) = 0$ *и*

$$G(u) := \int_0^u g(\varphi(s))ds + K \qquad (K \in \mathbb{R}). \tag{2.6}$$

Тогда

$$\int_\Omega G(u)(x,t)\,dx \leqslant \int_\Omega G(u_0)(x)\,dx \tag{2.7}$$

для любого t *из* $[0,T]$.

Доказательство. Из [11] известно, что в Q справедливо равенство

$$\begin{gathered} \big[G(u)\big]_t = g(\varphi(u))u_t = g(v)\,\Delta v + \big[g(\varphi(u)) - g(v)\big]\,\Delta v = \\ = \operatorname{div}\big[g(v)\nabla v\big] - \underbrace{g'(v)|\nabla v|^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{\big[g(\varphi(u)) - g(v)\big]\,\frac{v-\varphi(u)}{\varepsilon}}_{\leqslant 0}. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Поскольку $v = 0$ на $\partial\Omega \times (0,T)$ и $g(0) = 0$, интегрируя это равенство по области $\Omega \times (0,t)$ $(t \in (0,T])$, получаем (2.7). □

Замечание 2.2. Аналогично доказывается, что для любых неотрицательных ζ из пространства $C^1([0,T]; C^1_c(\Omega))$ и любых t_1, t_2 из $[0,T]$, для которых $t_1 \leqslant t_2$, справедливо неравенство

$$\begin{gathered} \int_\Omega G(u)(x,t_2)\zeta(x,t_2)\,dx - \int_\Omega G(u)(x,t_1)\zeta(x,t_1)\,dx \leqslant \\ \leqslant \int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_\Omega \big\{G(u)\zeta_t - g(v)\nabla v\cdot\nabla\zeta - g'(v)|\nabla v|^2\zeta\big\}\,dxdt. \end{gathered}$$

Последнее неравенство называют *неравенством энтропии* для задачи (C), по аналогии с неравенством энтропии для вязкого закона сохранения (например, см. [15]).

Главное следствие из неравенства (2.7) — существование положительно инвариантных областей для задачи (C). Это является содержанием следующего утверждения.

Предложение 2.2. *Пусть существуют такие вещественные* u_1, u_2, *что* $u_1 < u_2$ *и*

$$\varphi(u_1) \leqslant \varphi(u) \leqslant \varphi(u_2) \ \ \text{для любой } u \text{ из } [u_1,u_2]. \tag{2.9}$$

Пусть u *удовлетворяет задаче* (C) *с такой начальной функцией* u_0, *что* $u_1 \leqslant u_0 \leqslant u_2$ *п. в. в* Ω. *Тогда* $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$ *п. в. в* Q.

Доказательство. Не ограничивая общности, полагаем, что $\varphi(u) < \varphi(u_1)$ для $u < u_1$ и $\varphi(u) > \varphi(u_2)$ для $u > u_2$ (при необходимости можно доопределить φ вне отрезка $[u_1, u_2]$). Зафиксируем такое g из $C^1(\mathbb{R})$, что $g' \geqslant 0$, $g \equiv 0$ в $[\varphi(u_1), \varphi(u_2)]$, $g(z) < 0$ для $z < \varphi(u_1)$ и $g(z) > 0$ для $z > \varphi(u_2)$. Возьмем такую постоянную K в (2.6), что $G(u) = \int\limits_{u_1}^{u} g(\varphi(s))ds$. Тогда $G \equiv 0$ в $[u_1, u_2]$ и $G > 0$ в $(-\infty, u_1) \cup (u_2, \infty)$. Тогда доказываемое утверждение следует из неравенства (2.7). □

Теперь мы можем доказать теорему 2.1.

Доказательство теоремы 2.1. Существование и единственность решений доказывается стандартными методами теории полугрупп. Оценка (2.2) очевидно следует из предложения 2.2, условия которого в данном случае выполнены для всех достаточно больших $|u_1|$ и $|u_2|$, поскольку $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ и $\varphi(u) \to \pm\infty$ при $u \to \pm\infty$ в силу условия (A). Полагая $g(z) = z$ в (2.8), получаем равенство

$$[G(u)]_t = v\,\Delta v - \frac{|v - \phi(u)|^2}{\varepsilon} = v\,\Delta v - \varepsilon\,|u_t|^2,$$

откуда вытекает (2.3). Поскольку $v(\cdot, t)$ удовлетворяет эллиптической задаче (2.5) для любого t из $(0, T]$, неравенство (2.4) следует из (2.2) и принципа максимума. □

Поскольку оценки (2.2)–(2.4) равномерны относительно ε, они позволяют исследовать предельные точки семейства решений задачи (C) при $\varepsilon \to 0^+$. В дальнейшем в этом разделе это семейство обозначается через $\{u_\varepsilon\}$, а соответствующий химический потенциал — через $\{v_\varepsilon\}$. В силу (2.2)–(2.4) имеет место *-слабая компактность семейств $\{u_\varepsilon\}$ и $\{v_\varepsilon\}$ в $L^\infty(Q)$ и слабая компактность семейства $\{v_\varepsilon\}$ в $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Следовательно, существуют такие u из $L^\infty(Q)$ и v из $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ и такие последовательности $\{u_{\varepsilon_n}\} \subseteq \{u_\varepsilon\}$ и $\{v_{\varepsilon_n}\} \subseteq \{v_\varepsilon\}$, что

$$u_{\varepsilon_n} \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{в } L^\infty(Q), \tag{2.10}$$

$$v_{\varepsilon_n} \overset{*}{\rightharpoonup} v \quad \text{в } L^\infty(Q), \tag{2.11}$$

$$v_{\varepsilon_n} \rightharpoonup v \quad \text{в } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \tag{2.12}$$

Учитывая (2.10) и (2.12), перейдем к пределу при $n \to \infty$ в слабой формулировке задачи (C). Полагая $\varepsilon = \varepsilon_n$; получаем, что

$$\iint\limits_Q \{u\,\zeta_t - \nabla v \cdot \nabla\zeta\}\,dxdt + \int\limits_\Omega u_0(x)\,\zeta(x, 0)\,dx = 0. \tag{2.13}$$

Из последнего равенства можно получить решение задачи (2.1) в смысле мер Янга. Если последовательность $\{u_{\varepsilon_n}\}$ равномерно ограничена в $L^\infty(Q)$, то существует подпоследовательность (снова обозначаемая через $\{u_{\varepsilon_n}\}$) и семейство вероятностных мер $\nu_{(x,t)}$, определенных для п. в. (x, t) из Q, для которых

$$f(u_{\varepsilon_n}) \overset{*}{\rightharpoonup} \hat{f} \quad \text{в } L^\infty(Q) \tag{2.14}$$

для любой f из $C(\mathbb{R})$; здесь

$$\hat{f}(x, t) := \int\limits_{\mathbb{R}} f(\xi)\,d\nu_{(x,t)}(\xi) \quad \text{для п. в. } (x, t) \text{ из } Q \tag{2.15}$$

(см., например, [8]). Семейство $\nu_{(x,t)}$ называется *семейством мер Янга*, связанным с подпоследовательностью $\{u_{\varepsilon_n}\}$.

Как доказано в [14], для п. в. (x, t) из Q мера $\nu_{(x,t)}$ является суперпозицией мер Дирака, сосредоточенных на монотонных ветвях графика функции $v = \varphi(u)$. Иными словами, предположим, что

$$u := \beta_1(v),\ v \in (-\infty, \varphi(a_1)) \quad \Leftrightarrow \quad v = \varphi(u),\ u \in (-\infty, a_1),$$
$$u := \beta_0(v),\ v \in (\varphi(a_2), \varphi(a_1)) \quad \Leftrightarrow \quad v = \varphi(u),\ u \in (a_1, a_2).$$
$$u := \beta_2(v),\ v \in (\varphi(a_2), \infty) \quad \Leftrightarrow \quad v = \varphi(u),\ u \in (a_2, \infty).$$

Тогда справедливо следующее утверждение (см. [14]):

Теорема 2.2. *Пусть u из $L^\infty(Q)$, v из $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ — функции из равенства* (2.13). *Тогда существуют $\lambda_i \in L^\infty(Q)$, $\lambda_i \geqslant 0$ $(i = 0, 1, 2)$, обладающие следующими свойствами:*

(i) $\sum\limits_{i=0}^{2} \lambda_i(x,t) = 1$, $\lambda_1(x,t) = 1$ *при* $v(x,t) < \varphi(a_2)$, $\lambda_2(x,t) = 1$ *при* $v(x,t) > \varphi(a_1)$ *для п. в.* (x,t) *из* Q;

(ii) *семейство мер Янга* $\nu_{(x,t)}$, *связанное с подпоследовательностью* $\{u_{\varepsilon_n}\}$ *из* (2.14), *имеет вид*

$$\nu_{(x,t)}(\xi) = \sum_{i=0}^{2} \lambda_i(x,t)\delta(\xi - \beta_i(v(x,t)) \tag{2.16}$$

для п. в. (x,t) *из* Q *и любого вещественного* ξ.

Если в (2.10) и в (2.14)–(2.16) положить $f(\xi) = \xi$, а в (2.15) положить $f(\xi) = \varphi(\xi)$, то получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \xi\, d\nu_{(x,t)}(\xi) = \sum_{i=0}^{2} \lambda_i(x,t)\beta_i(v(x,t)) = u(x,t) \tag{2.17}$$

и

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(\xi)\, d\nu_{(x,t)}(\xi) = \sum_{i=0}^{2} \lambda_i(x,t)\varphi(\beta_i(v(x,t))) = v(x,t) \tag{2.18}$$

(соответственно) для п. в. (x,t) из Q (здесь мы используем теорему 2.2-(i)). Следовательно, из (2.13) мы получаем, что

$$\iint\limits_{Q} \big\{\zeta_t \int\limits_{\mathbb{R}} \xi\, d\nu_{(x,t)}(\xi) - \nabla\zeta \cdot \nabla\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(\xi)\, d\nu_{(x,t)}(\xi)\big\} dxdt + \int\limits_{\Omega} u_0(x)\zeta(x,0)dx = 0, \tag{2.19}$$

т. е. получаем решение задачи (P) в смысле мер Янга. Отметим, что, если φ монотонна, то такое решение сводится к слабому решению в обычном смысле.

Представляется естественным попытаться применить вышеприведенные рассуждения, справедливые при условии (A), к случаю, в котором φ имеет вид (0.3). Как и ранее, для любого u_0 из $L^\infty(\Omega)$ существует единственное сильное решение u_ε задачи (C). Однако L^∞-оценка (2.2) семейства $\{u_\varepsilon\}$, являющаяся главным инструментом приведенного выше анализа, в новой ситуации не имеет места. В самом деле, если φ удовлетворяет условию (A), то условие (2.9) выполняется для любого достаточно большого отрезка $[u_1, u_2]$, что и влечет за собой (2.2). Если же φ имеет форму (0.3), то условие (2.9) выполняется только при $[u_1, u_2] \subseteq [-\alpha, \alpha]$. Следовательно, L^∞-оценка семейства $\{u_\varepsilon\}$ выполняется только в том случае, когда $\{u_\varepsilon\}$ принимает значения из «устойчивой фазы», т. е. в тривиальном случае. Однако, можно доказать следующий результат (см. [16]):

Предложение 2.3. *Пусть* φ *имеет форму* (0.3), *а* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $u_0 \geqslant 0$. *Пусть* u_ε *и* v_ε — *соответствующее решение задачи* (C) *и соответствующий химический потенциал. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(i) u_ε *неотрицательна*;

(ii) *существует положительное* M, *для которого*

$$\|u_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|u_0\|_{L^1(\Omega)} \quad \text{для любого } t \text{ из } (0,T], \tag{2.20}$$

$$0 \leqslant v_\varepsilon \leqslant \varphi(\alpha) \quad \text{п. в. в } Q, \tag{2.21}$$

$$\|v\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leqslant M. \tag{2.22}$$

Доказательство. Доказательство (i) аналогично доказательству предложения 2.2, поэтому мы опустим его (подробности см. в [16]). Чтобы доказать (ii), заметим, что из (i) и (0.3) следует, что $0 \leqslant \varphi(u_\varepsilon) \leqslant \varphi(\alpha)$ в Q, откуда, применяя принцип максимума к эллиптической задаче (2.5), выводим неравенство (2.21). Поскольку $v_\varepsilon(\cdot,t) \geqslant 0$ в Ω, а $v_\varepsilon(\cdot,t) = 0$ на $\partial\Omega \times (0,T)$ для любого t из $(0,T]$, интегрируя первое уравнение из (C) по x, получаем, что

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} u_\varepsilon(x,t)\, dx = \int\limits_{\Omega} \Delta v_\varepsilon(x,t)\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu}(x,t)\, d\sigma < 0 \qquad (t \in (0,T]).$$

Тогда

$$\|u_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega u_\varepsilon(x,t)\,dx \leqslant \int\limits_\Omega u_0(x)\,dx = \|u_0\|_{L^1(\Omega)}$$

для любого t из $(0,T]$, из чего следует (2.20). Неравенство (2.22) легко выводится из (2.5) и (2.21). $\square$

Сравним данный случай с тем, что имеет место при выполнении условия (A). Для семейства $\{v_\varepsilon\}$ мы, как и ранее, из оценок (2.21)-(2.22) получаем равномерную ограниченность в $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^\infty(Q)$, а значит, слабую *-компактность в $L^\infty(Q)$ и слабую компактность в $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Для семейства $\{u_\varepsilon\}$, вместо слабой *-компактности в $L^\infty(Q)$, вытекающей из (2.2), имеет место лишь слабая *-компактность в пространстве $\mathcal{M}(Q)$ мер Радона, вытекающая из равномерной оценки (2.20) в пространстве $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$. Поэтому можно предположить, что последующая процедура получения равенств (2.13) и (2.19) даст решение задачи (2.1) со значениями в пространстве мер Радона.

Это предположение можно формализовать следующим образом. Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — любая последовательность, для которой выполняется (2.12). По лемме захвата (см., например, [9]) последовательности $\{u_{\varepsilon_n}\}$ можно сопоставить равномерно интегрируемую подпоследовательность; тогда эта подпоследовательность слабо компактна в $L^1(Q)$ по теореме Витали. Точнее, можно найти подпоследовательность $\{u_{\varepsilon_j}\}\equiv\left\{u_{\varepsilon_{n_j}}\right\}\subseteq\{u_{\varepsilon_n}\}$, убывающую последовательность измеримых множеств $A_j\subseteq Q$, $|A_j|\to 0$, и меру μ из $\mathcal{M}(Q)$, для которых

$$\iint\limits_Q u_{\varepsilon_j}\chi_{A_j}\zeta\,dxdt \ \to <\mu,\zeta>_Q \tag{2.23}$$

при $j\to\infty$ для любого ζ из $C(Q)$ и

$$u_{\varepsilon_j}\chi_{Q\setminus A_j}\rightharpoonup \hat u \quad \text{в } L^1(Q). \tag{2.24}$$

Здесь χ_E обозначает характеристическую функцию любого измеримого $E\subseteq Q$,

$$\hat u(x,t) := \int\limits_{[0,\infty)} \xi\,d\nu_{(x,t)}(\xi) \quad \text{для п. в. } (x,t) \text{ из } Q, \tag{2.25}$$

а $\nu_{(x,t)}$, как и ранее, обозначает семейство мер Янга, связанное с последовательностью $\{u_{\varepsilon_n}\}$.

В силу (2.12), (2.23) и (2.24), переходя к пределу при $j\to\infty$ в слабой постановке задачи (C), где $\varepsilon=\varepsilon_j$, получаем, что

$$\iint\limits_Q (\hat u\,\zeta_t - \nabla v\cdot\nabla\zeta)\,dxdt + \int\limits_\Omega u_0\,\zeta(x,0)\,dx = -<\mu,\zeta_t>_Q \tag{2.26}$$

для любого ζ из $C^1(Q)$, для которого $\zeta(.,T)=0$ в Ω. Далее можно исследовать связь между $\hat u$ и v подобно тому, как это сделано для u и v в равенстве (2.13). Теперь можно доказать, что для п. в. (x,t) из Q мера $\nu_{(x,t)}$ есть суперпозиция двух мер Дирака с носителем на ветвях сужения φ на $[0,\infty)$; таким образом, из (2.26) получаем равенство, обобщающее (2.19). Более подробно это изложено в [16, 18].

Если выполнено (2.2), то при $\mu=0$ равенство (2.26) сводится к (2.13), потому что равномерная L^∞-оценка влечет за собой равномерную интегрируемость семейства $\{u_\varepsilon\}$. Следовательно, возникновение меры μ связано с вырождением φ на бесконечности; в этом — принципиальное отличие случая функций вида (0.3) от случая кубических нелинейных членов.

Из последнего замечания ясно, что, если φ имеет вид (0.3) (или, в более общей постановке, удовлетворяет условию (H_1) ниже), то решения задачи (2.1) могут при положительных t иметь значения в $\mathcal{M}^+(\Omega)$ даже в том случае, когда начальная функция u_0 принадлежит $L^1(\Omega)$. Как указано во введении к настоящей работе, то же самое имеет место и для регуляризованной задачи (P) с вырождающейся псевдопараболической регуляризацией (отметим, что в данном разделе используется соболевская регуляризация, а она не является вырожденной). Таким образом, изучая задачу (P), нельзя пренебречь решениями со значениями в классе мер Радона.

3. Случай ограниченной φ, убывающей на бесконечности: результаты

3.1. Исходные допущения и определение решения. В этом разделе мы считаем, что функции φ и ψ удовлетворяют следующим условиям:

$$(H_1)\qquad \begin{cases} (i) & \text{существует такое } p \text{ из } [1,\infty), \text{ что } \varphi \in C^\infty([0,\infty)) \cap L^p((0,\infty)), \quad \varphi(0)=0,\\ (ii) & \text{существует такое положительное } \alpha, \text{ что } \varphi' > 0 \text{ в } [0,\alpha), \ \varphi' < 0 \text{ в } (\alpha,\infty),\\ (iii) & \varphi^{(j)} \in L^\infty((0,\infty)) \text{ для любого натурального } j, \end{cases}$$

$$(H_2)\qquad \begin{cases} (i) & \psi \in C^\infty([0,\infty)), \ \psi(0)=0, \ \psi' > 0 \text{ в } [0,\infty),\\ & \text{существует такое положительное } \gamma, \text{ что } \psi(u) \to \gamma \text{ при } u \to \infty,\\ (ii) & \psi'' \leqslant 0 \text{ в } [0,\infty),\\ (iii) & \text{существует такое положительное } k_1,\\ & \text{что } |\varphi'(u)| \leqslant k_1\,\psi'(u) \text{ для любого неотрицательного } u,\\ (iv) & \text{существуют такие положительные } k_2,\, k_3,\, \sigma,\\ & \text{что } k_2 \leqslant (1+u)^{1+\sigma}\psi'(u) \leqslant k_3 \text{ в } [0,\infty),\\ (v) & \psi^{(j)} \in L^\infty((0,\infty)) \text{ для любого натурального } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Здесь $\varphi^{(j)}$, $\psi^{(j)}$ обозначают производные порядка j от функций φ, ψ соответственно ($j \in \mathbb{N}$), но для первой и второй производных используются обычные обозначения φ', φ'', ψ', ψ''. Положим $\varphi(\infty) := 0$, $\psi(\infty) := \gamma$.

Введем следующее определение.

Определение 3.1. Пусть $u_0 \in \mathcal{M}^+(\Omega)$. Пара (u,v) называется *решением* задачи (P) с *химическим потенциалом* v, если выполняются следующие условия:

(i) $u \in C([0,T];\mathcal{M}^+(\Omega))$, $v \in L^\infty((0,T);C_0(\overline{\Omega}))$, $v_t \in L^\infty(\Omega;\mathcal{M}((0,T)))$, $v_x \in L^\infty(Q)$, $v_{xx} \in L^\infty((0,T);\mathcal{M}(\Omega))$,

$$v(x,t) = \begin{cases} \lim\limits_{\tau\to t^+} v(x,\tau) & \text{при } t \in [0,T)\\ \lim\limits_{\tau\to T^-} v(x,\tau) & \text{при } t = T \end{cases} \qquad (x \in \overline{\Omega}), \tag{3.1}$$

$$v(\cdot,t) = 0 \text{ на } \partial\Omega \quad \text{для любого } t \text{ из } (0,T).$$

(ii) Множество

$$\mathcal{N} := \{(x,t) \in \overline{Q} \mid v(x,t) = 0\}$$

замкнуто и

$$u_s = u_s \llcorner \mathcal{N}. \tag{3.2}$$

(iii) $[\psi(u_r)]_t \in L^\infty_{loc}(Q \setminus \mathcal{N})$, $\dfrac{[\psi(u_r)]_t}{\psi'(u_r)} \in L^\infty_{loc}(Q\setminus\mathcal{N})$ и

$$v = \varphi(u_r) + \varepsilon[\psi(u_r)]_t \quad \text{п. в. в } Q\setminus\mathcal{N}.$$

(iv) Для любого ζ из $C^1([0,T];C_c(\Omega))$, для которого $\zeta(\cdot,T) = 0$ в Ω, имеет место равенство

$$\int\limits_0^T \langle u(\cdot,t), \zeta_t(\cdot,t)\rangle_\Omega\, dt + \int\limits_0^T \langle v_{xx}(\cdot,t), \zeta(\cdot,t)\rangle_\Omega\, dt = -\langle u_0, \zeta(\cdot,0)\rangle_\Omega\,. \tag{3.3}$$

Замечание 3.1. Легко видеть, что отображение $v(x,\cdot)$ принадлежит пространству $BV(0,T)$ для любого x из Ω. Таким образом, пределы в правой части формулы (3.1) существуют и конечны. Из стандартных свойств одномерных функций ограниченной вариации следует существование такого множества меры нуль $E \subset [0,T]$, что равенство (3.1) справедливо для любого t из $[0,T]\setminus E$. Требуя выполнения формулы (3.1) для любого t из $[0,T]$, мы подразумеваем, что $v(x,\cdot)$ определена формулой (3.1) для любого t из E.

Легко доказать, что, если $t \in [0,T]$, то $v(\cdot,t) \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $[v(\cdot,t)]_{xx} \in \mathcal{M}(\Omega)$ и справедливы следующие утверждения:

(i)

$$[v(x,\cdot)]_t = v_t(x,\cdot) \quad \text{в } \mathcal{M}(0,T)$$

для п. в. x из Ω,

(*ii*)
$$[v(\cdot,t)]_x = v_x(\cdot,t) \ \text{ п. в. в } \Omega$$
для п. в. t из $(0,T)$,

(*iii*)
$$[v(\cdot,t)]_{xx} = v_{xx}(\cdot,t) \quad \text{в } \mathcal{M}(\Omega)$$
для п. в. t из $(0,T)$.

Кроме того, v принадлежит $BV(Q)$.

Отметим, что требование замкнутости множества $\mathcal{N}$ накладывается не только для того, чтобы определение 3.1 имело смысл; это требование является необходимым условием единственности решения задачи (P). В работе [6] приводится пример, где бесконечно много пар (u,v) обладают всеми свойствами, перечисленными в определении 3.1 (с одной и той же начальной функцией u_0), кроме замкнутости множества $\mathcal{N}$.

3.2. Существование: случай непрерывной начальной функции. Пусть $u_0 \in C_c(\Omega)$, $u_0 \geqslant 0$. Положим
$$\psi_n(u) := \psi(u) + \frac{u}{n} \qquad (u \in [0,\infty), n \in \mathbb{N})$$
и рассмотрим нелинейную аппроксимирующую задачу
$$(P_n) \qquad \begin{cases} u_{nt} = v_{nxx} & \text{в } Q, \\ v_n = 0 & \text{на } \partial\Omega \times (0,T), \\ u_n = u_0 \geqslant 0 & \text{в } \Omega \times \{0\} \qquad (n \in \mathbb{N}), \end{cases}$$
где
$$v_n := \varphi(u_n) + \varepsilon[\psi_n(u_n)]_t. \tag{3.4}$$
Изучая предельные точки последовательностей $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, можно доказать следующие результаты о существовании (см. [4]).

Теорема 3.1. *Пусть выполняются* (H_1)-(H_2) *и* $u_0 \in C_c(\Omega)$, $u_0 \geqslant 0$. *Тогда существует решение* (u,v) *задачи* (P), *удовлетворяющее неравенству*
$$\|u\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\Omega))} \leqslant \|u_0\|_{\mathcal{M}(\Omega)}, \tag{3.5}$$
и справедливы следующие утверждения:

(*i*) *мера множества* $\mathcal{N}$ *равна нулю,*

(*ii*) $\psi(u_r) \in C(\overline{Q})$, $\varphi(u_r) \in C(\overline{Q})$, $u_r \in C(Q \setminus \mathcal{N})$,
$$\lim_{\operatorname{dist}((x,t),\mathcal{N}) \to 0} u_r(x,t) = \infty$$
и $\psi(u_r) = \gamma$, $\varphi(u_r) = 0$ *на* $\mathcal{N}$,

(*iii*) *для всех* t_1, t_2 *из* $[0,T]$, *удовлетворяющих неравенству* $t_1 \leqslant t_2$, *имеем* $\mathcal{N}(t_2) \supseteq \mathcal{N}(t_1)$ *и*
$$u_r(x,t_2) \geqslant e^{-\frac{k_2}{\varepsilon}(t_2-t_1)} u_r(x,t_1) \quad \textit{для п. в. } x \textit{ из } Q \setminus \mathcal{N}(t_2). \tag{3.6}$$

Приведем несколько оценок решения, существование которого установлено теоремой 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть выполняются* (H_1)-(H_2), $u_0 \in C_c(\Omega)$, $u_0 \geqslant 0$, *а* (u,v) — *решение задачи* (P), *существование которого установлено теоремой* 3.1. *Тогда*
$$0 \leqslant v \leqslant \varphi(\alpha) \quad \textit{п. в. в } Q, \tag{3.7}$$
$$\|[\psi(u_r)]_t\|_{L^\infty(Q)} \leqslant \frac{\varphi(\alpha)}{\varepsilon} \tag{3.8}$$
и существует такая положительная постоянная M, *зависящая только от* $\|u_0\|_{L^1(\Omega)}$, *что*
$$\left\| \frac{v}{\psi'(u_r)} \right\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \leqslant M, \tag{3.9}$$
$$\begin{gathered} \|v\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leqslant M, \\ \|u_t\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\Omega))} = \|v_{xx}\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\Omega))} \leqslant M, \\ \|v_x\|_{L^\infty(Q)} \leqslant M, \end{gathered} \tag{3.10}$$

$$\|v_t\|_{L^\infty(\Omega;\mathcal{M}(0,T))} \leqslant M.$$

Кроме того, положительная часть v_t^+ функции v_t абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, а ее плотность $\left(v_t^+\right)_r$ удовлетворяет неравенству

$$\| \left(v_t^+\right)_r \|_{L^\infty(Q)} \leqslant M. \tag{3.11}$$

3.3. Существование: случай начальной функции общего вида. Опираясь на результат о существовании, полученный в теореме 3.1, докажем существование решений задачи (P) для случая начальной функции общего вида, т. е. для $u_0 \in \mathcal{M}^+(\Omega)$. Подберем для этого удобную процедуру аппроксимации. Вначале аппроксимируем u_0 из $\mathcal{M}^+(\Omega)$ следующим образом:

Лемма 3.1. *Если $u_0 \in \mathcal{M}^+(\Omega)$, то существует такое $\{u_{0n}\} \subseteq C_c^\infty(\Omega)$, $u_{0n} \geqslant 0$, что*

$$\|u_{0n}\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|u_0\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \quad \text{для } n \in \mathbb{N},$$

$$u_{0n} \overset{*}{\rightharpoonup} u_0 \text{ в } \mathcal{M}(\Omega) \quad \text{и} \quad u_{0n} \to u_{0r} \text{ п. в. в } \Omega \quad \text{при } n \to \infty.$$

Кроме того, если существуют x_0 из Ω и $I_\delta(x_0)$, для которых

$$u_{0s}\left(I_\delta(x_0)\right) = 0, \quad u_{0r} \in L^\infty(I_\delta(x_0)),$$

то для любого $\hat{\delta}$ из $(0,\delta)$ существует такое натуральное $\hat{n}$, что

$$\|u_{0n}\|_{L^\infty(I_{\hat{\delta}}(x_0))} \leqslant \|u_{0r}\|_{L^\infty(I_\delta(x_0))} \quad \text{для любого } n \geqslant \hat{n}.$$

Выберем $\{u_{0n}\}$ согласно лемме 3.1. Пусть (u_n, v_n) — решение задачи

$$(P_n') \qquad \begin{cases} u_t = [\varphi(u)]_{xx} + \varepsilon[\psi(u)]_{txx} & \text{в } Q, \\ \varphi(u) + \varepsilon[\psi(u)]_t = 0 & \text{на } \partial\Omega \times (0,T), \\ u = u_{0n} & \text{в } \Omega \times \{0\}, \end{cases}$$

разрешимость которого установлена теоремой 3.1. Отметим, что в этой процедуре аппроксимации ψ не заменяется на ψ_n. В частности, v_n удовлетворяет соотношению

$$v_n = \varphi(u_{nr}) + \varepsilon[\psi(u_{nr})]_t \quad \text{п. в. в } Q \setminus \mathcal{N}_n,$$

где

$$\mathcal{N}_n := \{(x,t) \in \overline{Q} \mid v_n(x,t) = 0\} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

что отличается от (3.4). В [4] доказан следующий результат о существовании.

Теорема 3.3. *Пусть $u_0 \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ и выполнены условия (H_1)-(H_2). Тогда существует такое решение (u,v) задачи (P), что и удовлетворяет неравенству* (3.5).

3.4. Возникновение особенностей. Как указано выше, исходя из [1, Theorem 3.4], мы предполагаем, что существует такая начальная функция u_0 из $L^\infty_{loc}(\Omega)$, что в соответствующем решении задачи (P) при $t > 0$ возникают массы Дирака. Обращаясь к доказательству в [1], можно доказать следующий более общий результат (см. [6]).

Теорема 3.4. *Пусть $\Omega = (-3,3)$, (H_1)-(H_2) выполняются, а p_0 из $\mathcal{M}^+(\Omega)$ обладает следующими свойствами*:

(i) *p_0 четно,*
(ii) *$p_{0r} \geqslant \alpha$ п. в. в Ω,*
(iii) *p_{0s} сосредоточена на множестве $(-2,-1) \cup (1,2)$,*
(iv) $\operatorname{supp} u_{0s} \subseteq \left\{ \overline{\lim}\, u_{0r} = \infty \right\}$.

Тогда существует такое положительное ξ_0, что, если

$$6\alpha \leqslant p_0(\Omega) \leqslant 6\alpha + \xi_0,$$

то существует такое u_0 из $L^\infty_{loc}(\Omega)$, $u_0 \geqslant 0$, и такое соответствующее решение (u,v) задачи (P) с $T \geqslant 1$, что

$$u(\cdot,1) = p_0.$$

Применяя указанный результат, можно показать, что спонтанно может возникнуть гораздо больше особенностей, чем рассмотрено в [1]. Можно построить такие примеры меры p_0, что условия теоремы 3.4 выполняются, а сингулярная часть p_{0s} содержит счетное либо канторово множество мер Дирака (а именно, сингулярно непрерывна). В работе [6] содержится подробное исследование этого явления.

4. Случай ограниченной φ, убывающей на бесконечности: идеи доказательств

В этом разделе приводятся идеи доказательств результатов существования, сформулированных в предыдущем разделе. Для простоты мы ограничиваемся случаем непрерывной начальной функции (см. пункт 3.2).

Для решения аппроксимирующей задачи (P_n) и соответствующего химического потенциала можно доказать следующие априорные оценки:

Предложение 4.1. *Пусть $u_0 \in C_c(\Omega)$, $u_0 \geqslant 0$, u_n — решение задачи (P_n), а v_n — соответствующий химический потенциал, определенный формулой* (3.4). *Тогда*

$$\|u_n\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \leqslant \|u_0\|_{L^1(\Omega)}, \tag{4.1}$$

$$\|[\psi_n(u_n)]_t\|_{L^\infty(Q)} \leqslant \frac{\varphi(\alpha)}{\varepsilon}$$

и существует такое положительное M, зависящее только от $\|u_0\|_{L^1(\Omega)}$, что

$$\begin{gathered}
\left\|\frac{v_n}{\psi_n'(u_n)}\right\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \leqslant M,\\
\|v_n\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leqslant M,\\
\|u_{nt}\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} = \|v_{nxx}\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \leqslant M,\\
\|v_{nx}\|_{L^\infty(Q)} \leqslant M,\\
\|v_{nt}^+\|_{L^\infty(Q)} \leqslant M
\end{gathered} \tag{4.2}$$

(v_{nt}^+ — положительная часть функции v_{nt}),

$$\begin{gathered}
\|v_{nt}\|_{L^\infty(\Omega;L^1(0,T))} \leqslant M,\\
\|v_n\|_{BV(Q)} \leqslant M.
\end{gathered}$$

Из этих оценок вытекают следующие результаты о сходимости.

Предложение 4.2. *Пусть $u_0 \in C_c(\Omega)$, $u_0 \geqslant 0$. Пусть u_n — решение задачи (P_n), а v_n определена формулой* (3.4) $(n \in \mathbb{N})$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(i) *Существуют такие подпоследовательности последовательностей $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ (для простоты мы снова обозначаем их через $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$) и такие функции u из $C([0,T];\mathcal{M}^+(\Omega))$ и v из $L^\infty(0,T;C_0(\overline{\Omega}))$ с u_t из $L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\Omega))$, v_t из $L^\infty(\Omega;\mathcal{M}(0,T))$, v_x из $L^\infty(Q)$ и v_{xx} из $L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\Omega))$, что*

$$\begin{gathered}
u_n(\cdot,t) \overset{*}{\rightharpoonup} u(\cdot,t) \text{ в } \mathcal{M}(\Omega),\\
u_{nt}(\cdot,t) \overset{*}{\rightharpoonup} u_t(\cdot,t) \ \text{ в } \mathcal{M}(\Omega)
\end{gathered} \tag{4.3}$$

для п. в. t из $(0,T)$,

$$\begin{gathered}
v_n \to v \ \text{ в } \ L^1(Q),\\
v_n \to v \quad \text{п. в. в } Q,\\
v_n \rightharpoonup v \text{ в } L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \qquad (p \in (1,\infty)),\\
v_n(\cdot,t) \rightharpoonup v(\cdot,t) \text{ в } W_0^{1,p}(\Omega) \qquad (p \in (1,\infty)),\\
v_{nxx}(\cdot,t) \overset{*}{\rightharpoonup} v_{xx}(\cdot,t) \ \text{ в } \mathcal{M}(\Omega)
\end{gathered} \tag{4.4}$$

для п. в. t из $(0,T)$,

$$\begin{gathered}
v_{nx} \overset{*}{\rightharpoonup} v_x \ \text{ в } L^\infty(Q),\\
v_{nt} \overset{*}{\rightharpoonup} v_t \ \text{ в } \mathcal{M}(Q).
\end{gathered}$$

(*ii*) *Существует такая* w *из* $C(\overline{Q})$, *что* $0 \leqslant w \leqslant \gamma$ *в* $\overline{Q}$, $w_t \in L^\infty(Q)$ *и* (*с точностью до подпоследовательности*)

$$\psi_n(u_n) \to w \text{ в } C(\overline{Q}),$$

$$\psi(u_n) \to w \quad \text{п. в. в } Q$$

и

$$u_n \to \psi^{-1}(w) \text{ в } C(K) \text{ для любого компактного } K \subset \overline{Q} \setminus \mathcal{S},$$

где

$$\mathcal{S} := \big\{(x,t) \in \overline{Q} \mid w(x,t) = \gamma\big\}. \tag{4.5}$$

Кроме того, справедливо предельное соотношение

$$[\psi_n(u_n)]_t \overset{*}{\rightharpoonup} w_t \text{ в } L^\infty(Q).$$

Приведенные ниже предложения 4.3–4.6 показывают, что предельные точки u, v и w предложения 4.2 можно использовать для построения решения задачи (P).

Предложение 4.3. *Пусть* u, v *и* w — *такие же, как в предложении* 4.2. *Тогда выполняются неравенства* (3.5) *и* (3.7)–(3.11),

$$v = \varphi(u_r) + \varepsilon[\psi(u_r)]_t \quad \text{п. в. в } Q$$

и

$$\|w_t\|_{L^\infty(Q)} \leqslant \frac{\varphi(\alpha)}{\varepsilon}.$$

Предложение 4.4. *Пусть* u *и* w — *такие же, как в предложении* 4.2. *Тогда множество* $\mathcal{S}$, *определенное формулой* (4.5), *замкнуто, его мера Лебега равна нулю,* $\psi^{-1}(w) \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$,

$$u_s = u_s \llcorner (\mathcal{S} \cap Q)$$

и

$$u_r = \psi^{-1}(w) \quad \text{п. в. в } Q. \tag{4.6}$$

Из равенства (4.6) следует, что

$$w = \psi(u_r) \quad \text{п. в. в } Q.$$

Будем отождествлять w из $C(\overline{Q})$ с непрерывным представителем элемента $\psi(u_r)$. В частности, из предложения 4.2 следует, что

$$\psi_n(u_n) \to \psi(u_r) \text{ в } C(\overline{Q}),$$

$$u_n \to u_r \quad \text{п. в. в } Q,$$

$$u_n \to u_r \text{ в } C(K) \text{ для любого компактного } K \subset \overline{Q} \setminus \mathcal{S},$$

где

$$\mathcal{S} = \big\{(x,t) \in \overline{Q} \mid \psi(u_r)(x,t) = \gamma\big\}, \tag{4.7}$$

и

$$[\psi_n(u_n)]_t \overset{*}{\rightharpoonup} [\psi(u_r)]_t \text{ в } L^\infty(Q).$$

Предложение 4.5. *Пусть* u — *такая же, как в предложении* 4.2, *а* $\mathcal{S}$ — *множество, определенное равенством* (4.7). *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(*i*) $\varphi(u_r) \in C(\overline{Q})$, $u_r \in C(\overline{Q} \setminus \mathcal{S})$, $\varphi(u_r) = 0$ *на* $\mathcal{S}$ *и*

$$\lim_{\operatorname{dist}((x,t),\mathcal{S}) \to 0} u_r(x,t) = \infty. \tag{4.8}$$

(*ii*) $\mathcal{S}(t_1) \subseteq \mathcal{S}(t_2)$ *для любых* $0 < t_1 \leqslant t_2 < T$, *где*

$$\mathcal{S}(t) := \{x \in \overline{\Omega} \mid \psi(u_r)(x,t) = \gamma\} \qquad (t \in (0,T)), \tag{4.9}$$

и неравенство (3.6) *выполняется для любых* $0 < t_1 \leqslant t_2 < T$ *и любого* x *из* $\Omega \setminus \mathcal{S}(t_2)$.

Предложение 4.6. *Пусть* $u_0 \in C_c(\Omega)$, $u_0 \geqslant 0$, *u и v — такие же, как в предложении* 4.2, $t \in [0,T]$ *и* $\mathcal{S}(t)$ *определена формулой* (4.9). *Тогда*

$$-\varepsilon v_{xx}(\cdot,t) + \frac{v(\cdot,t)}{\psi'(u_r)(\cdot,t)} = \frac{\varphi(u_r)(\cdot,t)}{\psi'(u_r)(\cdot,t)} \quad \text{в} \ \ \mathcal{D}'(\Omega \setminus \mathcal{S}(t))$$

и

$$\mathcal{S}(t) \cap \Omega = \mathcal{N}(t) \cap \Omega \quad \text{для п. в. } t \text{ из } (0,T),$$

где

$$\mathcal{N}(t) := \{x \in \overline{\Omega} \mid v(x,t) = 0\}.$$

Теперь мы можем доказать теоремы 3.1 и 3.2.

Доказательство теорем 3.1 *и* 3.2. Покажем, что пара (u,v), где u и v — такие, как в предложении 4.2, является решением задачи (P). В силу предложений 4.2–4.6 свойства (i)–(iii) определения 3.1 и пункты (i)–(iii) теоремы 3.1 выполнены. Чтобы доказать равенство (3.3), рассмотрим слабую постановку задачи (P_n):

$$\iint_Q \{u_n\zeta_t - v_{nxx}\,\zeta\}\,dxdt = -\int\limits_{\Omega} u_0\,\zeta(x,0)\,dx \tag{4.10}$$

для любой ζ из $C^1([0,T];C_c(\Omega))$, для которой $\zeta(\cdot,T) = 0$ в Ω. Из (4.3) следует, что для любого ρ из $C_c(\Omega)$ справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} u_n(x,t)\rho(x)\,dx = \langle u(\cdot,t),\rho\rangle_\Omega \ \text{ для п. в. } t \text{ из } (0,T)\,.$$

Следовательно, поскольку

$$\left|\int\limits_{\Omega} u_n(x,t)\zeta_t(x,t)\,dx\right| \leqslant \|u_0\|_{L^1(\Omega)}\|\zeta_t\|_{C(\overline{Q})}$$

для п. в. t из $(0,T)$ в силу неравенства (4.1), из теоремы о мажорируемой сходимости вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \iint_Q u_n(x,t)\zeta_t(x,t)\,dxdt = \int\limits_0^T \langle u(\cdot,t),\zeta_t(\cdot,t)\rangle_\Omega\,dt. \tag{4.11}$$

Аналогично, из (4.2), (4.4) и теоремы о мажорируемой сходимости следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \iint_\Omega v_{nxx}(x,t)\zeta(x,t)\,dxdt = \int\limits_0^T \langle v_{xx}(\cdot,t),\zeta(\cdot,t)\rangle_\Omega\,dt. \tag{4.12}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в (4.10) и используя (4.11)-(4.12), получаем (3.3). Этим завершается доказательство теоремы 3.1. Теорема 3.2 следует из предложений 4.1 и 4.2. □

5. Случай ограниченной φ, возрастающей на бесконечности

5.1. Исходные допущения и определение решения. В этом разделе предполагается, что функция φ удовлетворяет следующим условиям:

$$(H_3) \qquad \begin{cases} (i) & \varphi \in C^\infty([0,\infty)),\ \varphi(0) = 0,\ \varphi(u) \geqslant 0, \\ (ii) & \varphi' > 0 \text{ в } [0,\alpha),\ \varphi' < 0 \text{ в } (\alpha,\beta),\ \varphi' > 0 \text{ в } (\beta,\infty) \quad (0 < \alpha < \beta), \\ (iii) & \varphi(u) \to \gamma^* \text{ при } u \to \infty,\ \ 0 \leqslant \varphi(u) \leqslant \gamma^* \text{ для любого неотрицательного } u \\ & (0 < \gamma^* < \infty), \\ (iv) & \varphi^{(j)} \in L^\infty((0,\infty)) \text{ для любого натурального } j. \end{cases}$$

Кроме того, полагаем $\varphi(\infty) := \gamma^*$.

Введем следующее определение (ср. определение 3.1).

Определение 5.1. Пусть $u_0 \in \mathcal{M}^+(\Omega)$. *Решением* задачи (P) мы называем любую u из пространства $C([0,T];\mathcal{M}^+(\Omega))$, обладающую следующими свойствами:

(i) $[\psi(u_r)]_t \in L^\infty(Q)$ и $\dfrac{[\psi(u_r)]_t}{\psi'(u_r)} \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$.

(ii) *Химический потенциал*

$$v := \varphi(u_r) + \varepsilon[\psi(u_r)]_t$$

принадлежит $L^\infty(0,T;C(\overline{\Omega}))$, $v_t \in L^\infty(\Omega;\mathcal{M}(0,T))$, $v_x \in L^\infty(Q)$, $v_{xx} \in L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\Omega))$,

$$v(x,t) = \begin{cases} \lim\limits_{\tau\to t^-} v(x,\tau) & \text{при } t \in (0,T] \\ \lim\limits_{\tau\to 0^+} v(x,\tau) & \text{при } t = 0 \end{cases} \qquad (x \in \overline{\Omega}),$$

$$v(\cdot,t) = \gamma^* \text{ на } \partial\Omega \quad \text{для любого } t \text{ из } (0,T).$$

(iii) Для любого t из $(0,T)$ имеем

$$u_s(\cdot,t) = u_s(\cdot,t) \llcorner \mathcal{N}(t), \tag{5.1}$$

где

$$\mathcal{N}(t) := \{x \in \overline{\Omega} \mid v(x,t) = \gamma^*\}. \tag{5.2}$$

(iv) Для любого ζ из $C^1([0,T];C_c(\Omega))$, для которого $\zeta(\cdot,T) = 0$ в Ω, справедливо равенство

$$\int_0^T \langle u(\cdot,t), \zeta_t(\cdot,t)\rangle_\Omega \, dt + \int_0^T \langle v_{xx}(\cdot,t), \zeta(\cdot,t)\rangle_\Omega \, dt = -\langle u_0, \zeta(\cdot,0)\rangle_\Omega .$$

Отметим, что из равенства (5.1) следует, что

$$\operatorname{supp} u_s(\cdot,t) \subseteq \mathcal{N}(t) \text{ для любого } t \text{ из } (0,T).$$

5.2. Существование решений и их свойства. Как и в случае убывающей на бесконечности φ, существование решения доказывается с помощью процедуры аппроксимации. Пусть $u_0 \in \mathcal{M}^+(\Omega)$, а последовательность $\{u_{0n}\} \subseteq C(\overline{\Omega})$ такова, что $u_{0n} \geqslant 0$ в Ω,

$$\|u_{0n}\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|u_0\|_{\mathcal{M}(\Omega)},$$

$$u_{0n} \xrightarrow{*} u_0 \quad \text{в } \mathcal{M}(\Omega), \quad u_{0n} \to u_{0r} \quad \text{п. в. в } \Omega.$$

Для любого натурального n рассмотрим регуляризованную задачу

$$(P_n'') \qquad \begin{cases} u_{nt} = v_{nxx} & \text{в } Q, \\ v_n = \gamma^* & \text{на } \partial\Omega \times (0,T), \\ u_n = u_{0n} & \text{в } \Omega \times \{0\}, \end{cases}$$

где

$$v_n := \varphi(u_n) + \varepsilon[\psi(u_n)]_t.$$

Изучая сходимость последовательностей $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ и рассуждая, как в разделе 4, доказываем следующий результат (см. [5]):

Теорема 5.1. *Если условия (H_2)-(H_3) выполнены, то существует решение u задачи (P).*

Приведем некоторые свойства решений задачи (P), имеющие место в рассматриваемом случае (см. доказательства в [5]). Химический потенциал обладает следующими свойствами.

Предложение 5.1. *Если условия (H_2)-(H_3) выполнены, то для любого решения u задачи (P) справедливы следующие утверждения*:

(i) *для любого t из $(0,T)$ химический потенциал $v(\cdot,t)$ удовлетворяет уравнению*

$$-\varepsilon\,[v(\cdot,t)]_{xx} + \frac{v(\cdot,t)}{\psi'(u_r(\cdot,t))} = \frac{\varphi(u_r(\cdot,t))}{\psi'(u_r(\cdot,t))} \quad \text{в } \mathcal{M}\big(\Omega \setminus \operatorname{supp} u_s(\cdot,t)\big),$$

(ii) *неравенство $0 \leqslant v(x,t) \leqslant \gamma^*$ выполняется для любого (x,t) из $\overline{Q}$,*

(iii) *для любого t из $(0,T)$ сингулярная мера $\big[v_{xx}(\cdot,t)\big]_s$ дискретна и принадлежит $\mathcal{M}^-(\Omega)$.*

Следующая теорема устанавливает свойства монотонности решений по переменной t.

Теорема 5.2. *Пусть условия* (H_2)-(H_3) *выполнены, а* u — *любое решение задачи* (P). *Тогда для любых* t_1, t_2 *из* $(0, T)$, *для которых* $t_1 \leqslant t_2$, *выполняются следующие неравенства*:

$$\|u(\cdot, t_2)\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \geqslant \|u(\cdot, t_1)\|_{\mathcal{M}(\Omega)},$$
$$[1 + u_r(x, t_2)] \leqslant e^{\frac{k_0(t_2 - t_1)}{\varepsilon}} [1 + u_r(x, t_1)] \quad \text{для п. в. } x \text{ из } \Omega,$$
$$u_s(\cdot, t_2) \leqslant u_s(\cdot, t_1) \quad \text{в } \mathcal{M}(\Omega). \tag{5.3}$$

По условию (H_3)-(ii) промежутки $[0, \alpha)$ и (β, ∞) соответствуют «устойчивым фазам» функции φ, а интервал (α, β) — ее «неустойчивой фазе». Следующее предложение показывает, что при подходящих условиях на химический потенциал v «устойчивые фазы не могут убывать по переменной t».

Предложение 5.2. *Пусть условия* (H_2)-(H_3) *выполнены,* $\Omega_0 \subseteq \Omega$, $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$ *и* $Q_0 := \Omega_0 \times (t_1, t_2)$. *Тогда для любого решения* u *задачи* (P) *выполняются следующие утверждения*:

(i) *если* $v \leqslant \varphi(\alpha)$ *в* Q_0 *и* $0 \leqslant u_r(x, t_1) \leqslant \alpha$ *для п. в.* x *из* Ω_0, *то* $0 \leqslant u_r \leqslant \alpha$ *п. в. в* Q_0,

(ii) *если* $v \geqslant \varphi(\beta)$ *в* Q_0 *и* $u_r(x, t_1) \geqslant \beta$ *для п. в.* x *из* Ω_0, *то* $u_r \geqslant \beta$ *п. в. в* Q_0.

5.3. Регуляризация. Следующее предложение показывает, что для п. в. t из $(0, T)$ множество $\Omega \cap \mathcal{N}(t)$ (где $\mathcal{N}(t)$ определен формулой (5.2)) — «плохое», поскольку оно содержит все такие точки x_0 из Ω, что

$$u_s(\cdot, t)(I_\delta(x_0)) > 0 \quad \text{и (или)} \quad \|u_r(\cdot, t)\|_{L^\infty(I_\delta(x_0))} = \infty,$$

где $I_\delta(x_0)$ — любая окрестность точки x_0.

Предложение 5.3. *Пусть условия* (H_2)-(H_3) *выполнены, а* u — *любое решение задачи* (P). *Тогда для п. в.* $t \in (0, T)$

$$\Omega \cap \left[\operatorname{supp} u_s(\cdot, t) \cup \left\{ \overline{\lim}\, u_r(\cdot, t) = \infty \right\}\right] \subseteq \Omega \cap \mathcal{N}(t)$$

для п. в. t *из* $(0, T)$ *и справедливы следующие утверждения*:

(i) *Если* $\varphi(\alpha) < \gamma^*$, *то*

$$\Omega \cap \mathcal{N}(t) = \Omega \cap \left[\operatorname{supp} u_s(\cdot, t) \cup \left\{ \overline{\lim}\, u_r(\cdot, t) = \infty \right\}\right].$$

(ii) *Если* $\varphi(\alpha) = \gamma^*$, *то для любого* x_0 *из* $\Omega \cap \mathcal{N}(t)$ *либо* $x_0 \in \Omega \cap \left[\operatorname{supp} u_s(\cdot, t) \cup \left\{ \overline{\lim}\, u_r(\cdot, t) \right\}\right]$, *либо существует такой интервал* $I \equiv (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$ $(\delta_1, \delta_2 > 0)$, *что*

$$u_s(\cdot, t) \llcorner I = 0, \quad v(\cdot, t) = \gamma^* \text{ в } I, \quad u_r(\cdot, t) = \alpha \text{ п. в. в } I.$$

Отметим, что из свойств монотонности, установленных в теореме 5.2, следует, что при $\varphi(\alpha) < \gamma^*$ «плохое множество» не растет с течением времени; более того, для п. в. положительных t его мера равна нулю. Это доказывается в следующей теореме:

Теорема 5.3. *Пусть* $\varphi(\alpha) < \gamma^*$. *Тогда для любого решения задачи* (P) *справедливы следующие утверждения*:

(i) $\mathcal{N}(t_2) \subseteq \mathcal{N}(t_1)$ *для п. в.* t_1, t_2 *из* $(0, T)$, *для которых* $t_1 \leqslant t_2$,

(ii) $|\mathcal{N}(t)| = 0$ *для п. в.* t *из* $(0, T)$.

Исходя из неравенства (5.3), можно предположить, что сингулярная часть $u_s(\cdot, t)$ решения (P) может обращаться в нуль для некоторых τ из $(0, T)$ (а значит, и для некоторых t из (τ, T)) даже в том случае, когда $u_{0s}(\Omega) > 0$. Например, это имеет место при $\Omega = (-1, 1)$,

$$\psi(u) = \gamma \left[1 - (1 + u)^{-\sigma}\right] \qquad (\gamma,\, \sigma > 0) \tag{5.4}$$

и

$$\begin{cases} (i) \quad u_0 = u_{0ac} + A\delta_0, \\ (ii) \quad x \mapsto \dfrac{|x|}{\psi'(1 + u_{0r}(x))} \in L^1_{loc}(\Omega) \end{cases} \tag{5.5}$$

для некоторой положительной постоянной A (здесь δ_0 обозначает меру Дирака в начале координат). Можно доказать следующую теорему (см. [5]):

Теорема 5.4. *Пусть* $\varphi(\alpha) < \gamma^*$ *и выполняется* (5.4). *Тогда существует такое положительное* m, *что, если* u_0 *удовлетворяет условию* (5.5) *при* $A < mT$, *то*

$$u_s(\cdot, t) = 0 \;\; \text{для любого } t \text{ из } \left[\frac{A}{m}, T\right]$$

для любого решения u *задачи* (P).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Barenblatt G. I., Bertsch M., Dal Passo R., Ughi M.* A degenerate pseudoparabolic regularization of a nonlinear forward-backward heat equation arising in the theory of heat and mass exchange in stably stratified turbulent shear flow// SIAM J. Math. Anal. — 1993. — *24.* — С. 1414–1439.
2. *Bertsch M., Smarrazzo F., Tesei A.* Pseudo-parabolic regularization of forward-backward parabolic equations: a logarithmic nonlinearity// Anal. PDE. — 2013. — *6.* — С. 1719–1754.
3. *Bertsch M., Smarrazzo F., Tesei A.* Pseudo-parabolic regularization of forward-backward parabolic equations: power-type nonlinearities// J. Reine Angew. Math. — 2016. — *712.* — С. 51–80.
4. *Bertsch M., Smarrazzo F., Tesei A.* Forward-backward parabolic equations with pseudo-parabolic regularization and bounded nonlinearities decreasing at infinity: existence of solutions. — 2015, препринт.
5. *Bertsch M., Smarrazzo F., Tesei A.* Pseudo-parabolic regularization of forward-backward parabolic equations: bounded nonlinearities increasing at infinity. — 2015, препринт.
6. *Bertsch M., Smarrazzo F., Tesei A.* Forward-backward parabolic equations with pseudo-parabolic regularization and bounded nonlinearities decreasing at infinity: qualitative properties of solutions. — в печати.
7. *Brokate M., Sprekels J.* Hysteresis and phase transitions. — Berlin: Springer, 1996.
8. *Evans L. C.* Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations. — Providence: AMS, 1990.
9. *Giaquinta M., Modica G., Souček J.* Cartesian currents in the calculus of variations. — Berlin: Springer, 1998.
10. *Mascia C., Terracina A., Tesei A.* Two-phase entropy solutions of a forward-backward parabolic equation// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2009. — *194.* — С. 887–925.
11. *Novick-Cohen A., Pego L.* Stable patterns in a viscous diffusion equation// Trans. Amer. Math. Soc. — 1991. — *324.* — С. 331–351.
12. *Padròn V.* Sobolev regularization of a nonlinear ill-posed parabolic problem as a model for aggregating populations// Comm. Partial Differential Equations. — 1998. — *23.* — С. 457–486.
13. *Perona P., Malik J.* Scale space and edge detection using anisotropic diffusion// IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. — 1990. — *12.* — С. 629–639.
14. *Plotnikov P. I.* Passing to the limit with respect to viscosity in an equation with variable parabolicity direction// Differ. Equ. — 1994. — *30.* — С. 614–622.
15. *Serre D.* Systems of conservation laws. Vol. 1: hyperbolicity, entropies, shock waves. — Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
16. *Smarrazzo F.* On a class of equations with variable parabolicity direction// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2008. — *22.* — С. 729–758.
17. *Smarrazzo F., Tesei A.* Degenerate regularization of forward-backward parabolic equations: the regularized problem// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2012. — *204.* — С. 85–139.
18. *Smarrazzo F., Tesei A.* Degenerate regularization of forward-backward parabolic equations: the vanishing viscosity limit// Math. Ann. — 2013. — *355.* — С. 551–584.

Alberto Tesei
Istituto per le Applicazioni del Calcolo «M. Picone»
Consiglio Nazionale delle Ricerche
Via dei Taurini 19
I-00185 Rome, Italy
E-mail: albertotesei@gmail.com

UDC 517.9

Pseudo-Parabolic Regularization of Forward-Backward Parabolic Equations with Bounded Nonlinearities

© 2016 **A. Tesei**

Abstract. We study the initial-boundary value problem

$$\begin{cases} u_t = [\varphi(u)]_{xx} + \varepsilon[\psi(u)]_{txx} & \text{in } \Omega \times (0,T], \\ \varphi(u) + \varepsilon[\psi(u)]_t = 0 & \text{in } \partial\Omega \times (0,T], \\ u = u_0 \geqslant 0 & \text{in } \Omega \times \{0\}, \end{cases}$$

with *Radon measure-valued initial data*, by assuming that the regularizing term ψ is increasing and bounded (the cases of power-type or logarithmic ψ were dealt with in [2, 3] in any space dimension). The function φ is *nonmonotone* and bounded, and either (i) decreasing and vanishing at infinity, or (ii) increasing at infinity. Existence of solutions in a space of positive Radon measures is proven in both cases. Moreover, a general result proving *spontaneous appearance of singularities* in case (i) is given. The case of a cubic-like φ is also discussed, to point out the influence of the behavior at infinity of φ on the regularity of solutions.

REFERENCES

1. G. I. Barenblatt, M. Bertsch, R. Dal Passo, and M. Ughi, “A degenerate pseudoparabolic regularization of a nonlinear forward-backward heat equation arising in the theory of heat and mass exchange in stably stratified turbulent shear flow,” *SIAM J. Math. Anal.*, 1993, **24**, 1414–1439.
2. M. Bertsch, F. Smarrazzo, and A. Tesei, “Pseudo-parabolic regularization of forward-backward parabolic equations: A logarithmic nonlinearity,” *Anal. PDE*, 2013, **6**, 1719–1754.
3. M. Bertsch, F. Smarrazzo, and A. Tesei, “Pseudo-parabolic regularization of forward-backward parabolic equations: Power-type nonlinearities,” *J. Reine Angew. Math.*, 2014, **712**, 51–80.
4. M. Bertsch, F. Smarrazzo, and A. Tesei, “Forward-backward parabolic equations with pseudo-parabolic regularization and bounded nonlinearities decreasing at infinity: Existence of solutions,” preprint, 2015.
5. M. Bertsch, F. Smarrazzo, and A. Tesei, “Pseudo-parabolic regularization of forward-backward parabolic equations: Bounded nonlinearities increasing at infinity,” preprint, 2015.
6. M. Bertsch, F. Smarrazzo, and A. Tesei, “Forward-backward parabolic equations with pseudo-parabolic regularization and bounded nonlinearities decreasing at infinity: Qualitative properties of solutions,” in preparation.
7. M. Brokate and J. Sprekels, *Hysteresis and Phase Transitions*, Springer, Berlin, 1996.
8. L. C. Evans, *Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*, Am. Math. Soc., Providence, 1990.
9. M. Giaquinta, G. Modica, and J. Souček, *Cartesian Currents in the Calculus of Variations*, Springer, Berlin, 1998.
10. C. Mascia, A. Terracina, and A. Tesei, “Two-phase entropy solutions of a forward-backward parabolic equation,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2009, **194**, 887–925.
11. A. Novick-Cohen and R. L. Pego, “Stable patterns in a viscous diffusion equation,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1991, **324**, 331–351.
12. V. Padròn, “Sobolev regularization of a nonlinear ill-posed parabolic problem as a model for aggregating populations,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 1998, **23**, 457–486.
13. P. Perona and J. Malik, “Scale space and edge detection using anisotropic diffusion,” *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 1990, **12**, 629–639.
14. P. I. Plotnikov, “Passing to the limit with respect to viscosity in an equation with variable parabolicity direction,” *Differ. Equ.*, 1994, **30**, 614–622.
15. D. Serre, *Systems of conservation laws, Vol. 1: Hyperbolicity, Entropies, Shock Waves*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
16. F. Smarrazzo, “On a class of equations with variable parabolicity direction,” *Discr. Contin. Dyn. Syst.*, 2008, **22**, 729–758.

17. F. Smarrazzo and A. Tesei, “Degenerate regularization of forward-backward parabolic equations: The regularized problem,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2012, **204**, 85–139.
18. F. Smarrazzo and A. Tesei, “Degenerate regularization of forward-backward parabolic equations: The vanishing viscosity limit,” *Math. Ann.*, 2013, **355**, 551–584.

Alberto Tesei
Istituto per le Applicazioni del Calcolo “M. Picone”
Consiglio Nazionale delle Ricerche
Via dei Taurini 19
I-00185 Rome, Italy
E-mail: albertotesei@gmail.com