

***СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА.  
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ  
НАПРАВЛЕНИЯ***

*Том 59, 2016*



**РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ**

## Редакционная коллегия

### Главный редактор:

*Р.В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН)*

### Заместитель главного редактора:

*А.Л. Скубачевский (Российский университет дружбы народов)*

### Члены редколлегии:

*А.А. Азрачев (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, SISSA)*

*Е.С. Голод (Московский государственный университет)*

*Н.Д. Копачевский (Таврический национальный университет)*

*П.С. Красильников (Московский авиационный институт)*

*А.В. Овчинников (Московский государственный университет)*

*В.Л. Попов (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН)*

*А.В. Сарычев (Флорентийский университет)*

Индекс журнала в каталоге подписных изданий агентства «Роспечать» — 36832

***СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА.  
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ  
НАПРАВЛЕНИЯ***

*Том 59, 2016*

**Труды  
Седьмой Международной конференции  
по дифференциальным  
и функционально-дифференциальным уравнениям  
(Москва, 22-29 августа, 2014)**

**Часть 2**



**РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ**

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Нестационарная задача сложного теплообмена в системе полупрозрачных тел с краевыми условиями диффузного отражения и преломления излучения (А. А. Амосов) . . . . .	5
Устойчивость решений начально-краевой задачи аэрогидроупругости (П. А. Вельмисов, А. В. Анкилов) . . . . .	35
О скорости стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с младшими коэффициентами (В. Н. Денисов) . . . . .	53
Непрерывная зависимость решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений от сдвигов аргумента (Е. П. Иванова) . . . . .	74
Об устойчивости возмущенных полугрупп в полупорядоченных банаховых пространствах (М. И. Каменский, И. М. Гудошников) . . . . .	97
Дифференциальные уравнения с вырожденным зависящим от неизвестного оператором при производной (Б. В. Логинов, Ю. Б. Русак, Л. Р. Ким-Тян) . . . . .	119
Квадратичная оценка взаимодействия для гиперболических законов сохранения: обзор (С. Модена) . . . . .	148
Эллиптические $G$ -операторы на многообразиях с изолированными особенностями (А. Ю. Савин, Б. Ю. Стернин) . . . . .	173
Магнитный оператор Шредингера с точки зрения некоммутативной геометрии (А. Г. Сергеев) . . . . .	192

## НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА В СИСТЕМЕ ПОЛУПРОЗРАЧНЫХ ТЕЛ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ДИФFUЗНОГО ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

© 2016 г. А. А. АМОСОВ

Аннотация. Рассматривается нестационарная начально-краевая задача, описывающая сложный (радиационно-кондуктивный) теплообмен в системе полупрозрачных тел. Для описания распространения излучения используется уравнение переноса излучения с краевыми условиями диффузного отражения и диффузного преломления излучения. Учтена зависимость интенсивности излучения и оптических свойств тел от частоты излучения. Установлены существование и единственность слабого решения. Доказана теорема сравнения. Выведены априорные оценки слабого решения и получен результат о его регулярности.

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Физическая постановка задачи . . . . .	6
2. Некоторые обозначения и используемые функциональные пространства . . . . .	8
2.1. Пространства функций, заданных на $G$ и $Q_T$ . . . . .	8
2.2. Пространства функций, заданных на $D$ и $\Gamma$ . . . . .	9
3. Краевая задача для уравнения переноса излучения с условиями диффузного отражения и диффузного преломления . . . . .	10
3.1. Граничные операторы . . . . .	10
3.2. Формулировка краевых условий диффузного отражения и преломления . . . . .	11
3.3. Предварительная формулировка рассматриваемой краевой задачи . . . . .	12
3.4. Краевая задача для уравнения переноса с условиями диффузного отражения-преломления и ее свойства . . . . .	12
4. Задача $\mathcal{P}_d$ и формулировка результатов о ее свойствах . . . . .	14
4.1. Предположения о данных, оператор $\mathcal{H}_d$ и функция $f_*$ . . . . .	14
4.2. Задача $\mathcal{P}_d$ и формулировка результатов об ее свойствах . . . . .	17
5. Априорные оценки слабых решений задач $\mathcal{P}_d$ и $\mathcal{P}_d^{[n]}$ . . . . .	19
6. Доказательство теоремы 4.4 . . . . .	24
7. Разрешимость вспомогательной задачи $\mathcal{P}_d^{[n]}$ . . . . .	26
8. Разрешимость задачи $\mathcal{P}_d$ . . . . .	28
9. Регулярность слабого решения . . . . .	29
Список литературы . . . . .	31

### ВВЕДЕНИЕ

Задачи сложного (радиационно-кондуктивного) теплообмена, в которых необходим одновременный учет распространения тепла излучением и теплопроводностью, возникают в самых разных областях науки и техники. Этим задачам посвящена обширная физическая литература (см., например, [29, 30, 32, 33]).

---

Результаты работы были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (задание № 1.756.2014/К) и при частичной финансовой поддержке Совета по грантам при Президенте РФ (проект НШ-2081.2014.1).

Математическая теория этих задач находится пока еще в стадии построения. Краткий обзор результатов о разрешимости задач сложного теплообмена в непрозрачных для излучения материалах по состоянию на 2008 год можно найти, например, в [9]; из более поздних работ в этом направлении отметим статьи [9, 10, 17–20]. Вопросам разрешимости задач радиационно-кондуктивного теплообмена в полупрозрачных средах посвящены работы [1–3, 7, 8, 22–24, 26–28, 31]. Отметим, что в статьях [1–3, 23, 24, 31] уравнение переноса излучения заменено его диффузионным  $P_1$ -приближением.

Настоящая статья посвящена исследованию нестационарной задачи, описывающей сложный теплообмен в системе полупрозрачных тел. Для описания распространения излучения используется уравнение переноса излучения с краевыми условиями диффузного отражения и диффузного преломления излучения. Учтена зависимость интенсивности излучения и оптических свойств тел от частоты излучения.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 рассматривается исходная физическая постановка решаемой задачи. В разделе 2 вводятся некоторые обозначения и используемые функциональные пространства. В разделе 3 дается формулировка краевой задачи для уравнения переноса излучения с условиями диффузного отражения и диффузного преломления излучения на границах раздела сред и напоминаются нужные для дальнейшего свойства этой задачи. Математическая постановка рассматриваемой задачи  $\mathcal{P}_d$  дается в разделе 4. Там же кратко формулируются основные результаты работы, доказательству которых посвящены разделы 5–9. В разделе 5 устанавливаются априорные оценки слабых решений задачи  $\mathcal{P}_d$  и вспомогательной задачи  $\mathcal{P}_d^{[n]}$ . В разделе 6 доказывается теорема об устойчивости слабых решений задачи  $\mathcal{P}_d$  по данным, следствиями которой являются теорема сравнения и теорема единственности. В разделе 7 устанавливается существование слабого решения вспомогательной задачи  $\mathcal{P}_d^{[n]}$ . В разделе 8 приводится доказательство теорем о разрешимости задачи  $\mathcal{P}_d$ , а в разделе 9 доказывается регулярность слабого решения.

## 1. ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача нестационарного радиационно-кондуктивного теплообмена в системе  $G = \bigcup_{j=1}^m G_j$  полупрозрачных тел, разделенных вакуумом. Каждое из тел  $G_j$  является ограниченной областью в  $\mathbb{R}^3$  с границей  $\partial G_j$  класса  $C^2$ ; тело  $G_j$  заполнено оптически однородным материалом с постоянными значениями коэффициентов поглощения  $\varkappa_{j,\nu} > 0$ , рассеяния  $s_{j,\nu} \geq 0$  и показателем преломления  $k_{j,\nu} > 1$ , зависящими от частоты излучения  $\nu$ . Предполагается, что тела  $G_i$  и  $G_j$  попарно не пересекаются, но их границы могут пересекаться для некоторых  $i \neq j$ .

Искомыми являются функции  $u(x, t)$  и  $I_\nu(\omega, x, t)$ , имеющие физический смысл абсолютной температуры в точке  $x \in G$  в момент времени  $t \in (0, T)$  и интенсивности излучения на частоте  $\nu$ , распространяющегося в направлении  $\omega \in \Omega$ . Здесь  $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 \mid |\omega| = 1\}$  — единичная сфера (сфера направлений).

Излучение и поглощение энергии происходят на частотах  $\nu \in \mathfrak{N} = \mathcal{N} \cup \{\nu_\ell\} \subset (0, +\infty)$ . Множество  $\mathcal{N}$  предполагается измеримым. Через  $\nu_\ell$  обозначены частоты, соответствующие спектральным линиям с шириной  $\Delta\nu_\ell > 0$ . Множество  $\{\nu_\ell\}$  может быть счетным, конечным или пустым; последнее — в случае, когда спектральные линии отсутствуют. Положим  $\varkappa_\nu(x) = \varkappa_{j,\nu}$ ,  $s_\nu(x) = s_{j,\nu}$ ,  $k_\nu(x) = k_{j,\nu}$  для  $x \in G_j$ ,  $1 \leq j \leq m$  и  $\nu \in \mathfrak{N}$ .

Введем следующие обозначения:

$$Q_T = G \times (0, T), \quad D = \Omega \times G = \bigcup_{j=1}^m D_j, \quad D_j = \Omega \times G_j, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Для описания процесса радиационно-кондуктивного теплообмена будем использовать систему, состоящую из уравнения теплопроводности и уравнения переноса излучения:

$$c_p D_t u - \operatorname{div}(\lambda(x, u) \nabla u) + H(x, u) = \int_{\mathcal{N}} \varkappa_\nu \int_{\Omega} I_\nu d\omega d\nu + \sum_{\ell} \varkappa_{\nu_\ell} \int_{\Omega} I_{\nu_\ell} d\omega \Delta\nu_\ell + f_0, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1.1)$$

$$\omega \cdot \nabla I_\nu + \beta_\nu I_\nu = s_\nu \mathcal{S}_\nu(I_\nu) + \varkappa_\nu k_\nu^2 h_\nu(u), \quad (\omega, x, t) \in D \times (0, T), \quad \nu \in \mathfrak{N}. \quad (1.2)$$

Здесь  $c_p(x)$  — коэффициент теплоемкости,  $\lambda(x, u)$  — коэффициент теплопроводности,  $f_0(x, t)$  — заданная плотность тепловых источников. Функция

$$H(x, u) = 4\pi \int_{\mathcal{N}} \varkappa_\nu(x) k_\nu^2(x) h_\nu(u) d\nu + 4\pi \sum_\ell \varkappa_{\nu_\ell}(x) k_{\nu_\ell}^2(x) h_{\nu_\ell}(u) \Delta\nu_\ell$$

отвечает плотности излучаемой энергии, а первые два слагаемых в правой части уравнения (1.1) — плотности поглощаемой энергии. Функция

$$h_\nu(u) = \frac{2\nu^2}{c_0^2} \frac{\hbar\nu}{\exp(\hbar\nu/(\widehat{k}u)) - 1}$$

при  $u > 0$  отвечает спектральному распределению Планка; здесь  $\hbar > 0$ ,  $\widehat{k} > 0$  — постоянные Планка и Больцмана,  $c_0$  — скорость света в вакууме. Для удобства будем считать функцию  $h_\nu$  доопределенной при  $u \leq 0$  так, чтобы  $h_\nu(u) = -h_\nu(|u|)$  при  $u < 0$  и  $h_\nu(0) = 0$ . Напомним, что при  $u > 0$  справедливо равенство  $\pi \int_0^\infty h_\nu(u) d\nu = \sigma_0 u^4$ , где  $0 < \sigma_0$  — постоянная Стефана—Больцмана.

В (1.1) и всюду далее мы используем обозначение  $D_t$  для частной производной  $\frac{\partial}{\partial t}$ .

В уравнении (1.2) через  $\omega \cdot \nabla I_\nu = \sum_{i=1}^3 \omega_i \frac{\partial}{\partial x_i} I_\nu$  обозначена производная функции  $I_\nu$  по направлению  $\omega$ . Через  $\mathcal{S}_\nu$  обозначен оператор рассеяния

$$\mathcal{S}_\nu(I_\nu)(\omega, x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \theta_{j,\nu}(\omega' \cdot \omega) I_\nu(\omega', x, t) d\omega', \quad (\omega, x) \in D_j \times (0, T), \quad 1 \leq j \leq m$$

с индикатрисой рассеяния, обладающей следующими свойствами:

$$\theta_{j,\nu} \in L^1(-1, 1), \quad \theta_{j,\nu} \geq 0, \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \theta_{j,\nu}(\mu) d\mu = 1, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Кроме того,  $\beta_\nu = \varkappa_\nu + s_\nu$  — это коэффициент экстинкции.

Будем рассматривать  $\mathbb{R}^3$  как евклидово пространство с элементами  $x = (x_1, x_2, x_3)$  и скалярным произведением  $x \cdot y = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$ .

Обозначим через  $n_j(x)$  внешнюю нормаль к границе  $\partial G_j$  в точке  $x$ ,  $1 \leq j \leq m$ . Введем множества

$$\begin{aligned} \Gamma &= \bigcup_{j=1}^m \Gamma_j, \quad \Gamma_j = \Omega \times \partial G_j, \quad 1 \leq j \leq m, \\ \Gamma^- &= \bigcup_{j=1}^m \Gamma_j^-, \quad \Gamma_j^- = \{(\omega, x) \in \Gamma_j \mid \omega \cdot n_j(x) < 0\}, \quad 1 \leq j \leq m, \\ \Gamma^+ &= \bigcup_{j=1}^m \Gamma_j^+, \quad \Gamma_j^+ = \{(\omega, x) \in \Gamma_j \mid \omega \cdot n_j(x) > 0\}, \quad 1 \leq j \leq m, \\ \Gamma^0 &= \bigcup_{j=1}^m \Gamma_j^0, \quad \Gamma_j^0 = \{(\omega, x) \in \Gamma_j \mid \omega \cdot n_j(x) = 0\}, \quad 1 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

Дополним систему (1.1), (1.2) краевыми условиями

$$\lambda(x, u) \nabla u \cdot n_j(x) = 0, \quad (x, t) \in \partial G_j \times (0, T), \quad 1 \leq j \leq m, \quad (1.3)$$

$$I_\nu|_{\Gamma^-} = \mathfrak{B}_{d,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+}) + \mathfrak{C}_{d,\nu}(J_{*\nu}), \quad (\omega, x, t) \in \Gamma^- \times (0, T), \quad \nu \in \mathfrak{N} \quad (1.4)$$

и начальным условием

$$u|_{t=0} = u^0, \quad x \in G. \quad (1.5)$$

Условие (1.3) означает отсутствие конвективных тепловых потоков на границах  $\partial G_j$  (напомним, что тела  $G_j$  разделены вакуумом). Краевое условие (1.4) описывает диффузное отражение и диффузное преломление излучения на границах тел  $G_j$ . Определение операторов  $\mathfrak{B}_{d,\nu}$  и  $\mathfrak{C}_{d,\nu}$  дано в разделе 3.

Заметим, что величина  $\omega \cdot n_j(x)$  представляет собой косинус угла между направлением распространения излучения  $\omega$  и внешней нормалью  $n_j(x)$ . Таким образом,  $I_\nu|_{\Gamma^-}$  и  $I_\nu|_{\Gamma^+}$  можно интерпретировать как значения интенсивности входящего в  $G$  и выходящего из  $G$  излучений. Через  $J_{*\nu}$  обозначена интенсивность приходящего извне излучения.

## 2. НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть  $1 \leq p \leq \infty$ . Через  $p'$  будем обозначать сопряженный по Гельдеру показатель такой, что  $p' \in [1, \infty]$  и  $1/p + 1/p' = 1$ .

Пусть  $E$  — измеримое множество в  $\mathbb{R}^n$ ,  $B$  — банахово пространство. Через  $\mathfrak{M}(E; B)$  будем обозначать пространство заданных на  $E$  сильно измеримых (измеримых по Бохнеру) функций со значениями в  $B$ . Как обычно, положим  $\mathfrak{M}(E) = \mathfrak{M}(E; \mathbb{R})$  и  $\mathfrak{M}(0, T; B) = \mathfrak{M}((0, T); B)$ .

Пусть  $z \in L^r(0, T; B)$ , где  $B$  — банахово пространство,  $r \in [1, \infty]$ . Введем оператор интегрирования  $I_t z(t) = \int_0^t z(s) ds$  и разность  $\Delta^{(\tau)} z(t) = z(t + \tau) - z(t)$  с параметром  $\tau \in (0, T)$ . Заметим, что  $\Delta^{(\tau)} I_t z(t) = \int_t^{t+\tau} z(s) ds$ , и обратим внимание на неравенство

$$\|\Delta^{(\tau)} I_t z\|_{L^{r_1}(0, T-\tau; B)} \leq \tau^{1-1/r+1/r_1} \|z\|_{L^r(0, T; B)}, \quad 1 \leq r \leq r_1 \leq \infty. \quad (2.1)$$

**2.1. Пространства функций, заданных на  $G$  и  $Q_T$ .** Будем использовать следующие обозначения:

$$(f, g)_{\tilde{G}} = \int_{\tilde{G}} f(x)g(x) dx, \quad (f, g)_{\tilde{Q}} = \int_{\tilde{Q}} f(x, t)g(x, t) dx dt,$$

где  $\tilde{G}$  и  $\tilde{Q}$  — измеримые подмножества множеств  $G$  и  $Q_T$  соответственно.

Обозначим через  $L^{r,q}(Q_T)$  пространство  $L^r(0, T; L^q(G))$  (где  $r, q \in [1, \infty]$ ) с нормой

$$\|f\|_{L^{r,q}(Q_T)} = \left\| \|f\|_{L^q(G)} \right\|_{L^r(0, T)}.$$

Напомним, что  $L^{r,r}(Q_T) = L^r(Q_T)$ ,  $L^{\infty, \infty}(Q_T) \subset L^\infty(Q_T) \subset L^{\infty, r}(Q_T)$  для всех  $r \in [1, \infty)$ .

Подчеркнем, что множество  $G = \bigcup_{j=1}^m G_j$  не является связным. В связи с этим под  $W^{1,2}(G)$  понимается пространство функций

$$W^{1,2}(G) = \{u \in L^2(G) \mid u \in W^{1,2}(G_j), \quad 1 \leq j \leq m\}$$

(где  $W^{1,2}(G_j)$  — классические пространства Соболева) с нормой

$$\|u\|_{W^{1,2}(G)} = \left( \|u\|_{L^2(G)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(G)}^2 \right)^{1/2}.$$

Следуя [4], введем пространство  $V_2(Q_T) = L^2(0, T; W^{1,2}(G)) \cap L^{\infty, 2}(Q_T)$  с нормой

$$\|u\|_{V_2(Q_T)} = \|u\|_{L^{\infty, 2}(Q_T)} + \|\nabla u\|_{L^2(Q_T)}$$

и пространство  $V_2^{1,0}(Q_T) = V_2(Q_T) \cap C([0, T]; L^2(G))$ .

Известно [4], что для всех показателей, удовлетворяющих условиям

$$r \in [1, \infty], \quad q \in [1, 6], \quad 2/r + 3/q \geq 3/2, \quad (2.2)$$

справедливо неравенство

$$\|u\|_{L^{r,q}(Q_T)} \leq C(G, T) \|u\|_{V_2(Q_T)} \quad \forall u \in V_2(Q_T). \quad (2.3)$$

Из неравенства (2.3) следует, что  $V_2(Q_T) \subset L^{10/3}(Q_T)$  и, если  $|u|^{\gamma-1}u \in V_2(Q_T)$  с  $\gamma \geq 1$ , то  $u \in L^{10\gamma/3}(Q_T)$ , причем справедлива оценка

$$\|u\|_{L^{10\gamma/3}(Q_T)}^\gamma \leq C(G, T) \| |u|^{\gamma-1}u \|_{V_2(Q_T)}. \quad (2.4)$$



Пусть  $v$  — вещественное число или вещественнозначная функция. Введем срезы  $v^{[L,M]} = \max\{L, \min\{v, M\}\}$ , где  $-\infty \leq L < M \leq +\infty$  и  $v^{[M]} = v^{[-M,M]}$ , где  $M > 0$ . Положим также  $v_+ = \max\{v, 0\}$  и  $v_- = \max\{-v, 0\}$ . Заметим, что  $(-v)_+ = v_-$  и  $v^{[0,M]} = v_+^{[M]}$ ,  $(-v)_+^{[M]} = v_-^{[M]}$  при  $M > 0$ .

Пусть  $u \in W^{1,2}(G)$ ,  $w \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $w' \geq 0$ . Известно (см., например [21]), что  $u^{[L,M]} \in W^{1,2}(G)$ ,  $w(u^{[L,M]}) \in W^{1,2}(G)$ , причем  $\nabla u^{[L,M]} = \nabla u$ ,  $\nabla w(u^{[L,M]}) = w'(u)\nabla u$  п.в. (почти всюду) на  $G^{[L,M]} = \{x \in G \mid L < u(x) < M\}$  и  $\nabla u^{[L,M]} = 0$ ,  $\nabla w(u^{[L,M]}) = 0$  п.в. на  $G \setminus G^{[L,M]}$ .

**2.2. Пространства функций, заданных на  $D$  и  $\Gamma$ .** Через  $d\omega$  и  $d\sigma(x)$  будем обозначать меры, индуцированные мерой Лебега в  $\mathbb{R}^3$  на  $\Omega$  и  $\partial G$  соответственно. Будем предполагать, что на  $\Gamma$  введена мера  $d\Gamma(\omega, x) = d\omega d\sigma(x)$ . Введем на  $\Gamma^-$  и  $\Gamma^+$  меры

$$\begin{aligned} \widehat{d\Gamma}^-(\omega, x) &= |\omega \cdot n_j(x)| d\omega d\sigma(x), \quad (\omega, x) \in \Gamma_j^-, \quad 1 \leq j \leq m, \\ \widehat{d\Gamma}^+(\omega, x) &= \omega \cdot n_j(x) d\omega d\sigma(x), \quad (\omega, x) \in \Gamma_j^+, \quad 1 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

Напомним, что  $D = \Omega \times G = \bigcup_{j=1}^m D_j$ , где  $D_j = \Omega \times G_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ .

Пусть  $1 \leq p \leq \infty$ . Через  $L^p(D)$  обозначим банахово пространство заданных на  $D$  и измеримых относительно меры  $d\omega dx$  функций  $f$ , обладающих конечной нормой

$$\|f\|_{L^p(D)} = \begin{cases} \left( \int_D |f(\omega, x)|^p d\omega dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{(\omega, x) \in D} |f(\omega, x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Обозначим через  $\mathcal{W}^p(D)$  банахово пространство функций  $f \in L^p(D)$ , обладающих обобщенной производной  $\omega \cdot \nabla f \in L^p(D)$ , оснащенное нормой

$$\|f\|_{\mathcal{W}^p(D)} = \begin{cases} \left( \|f\|_{L^p(D)}^p + \|\omega \cdot \nabla f\|_{L^p(D)}^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max\{\|f\|_{L^\infty(D)}, \|\omega \cdot \nabla f\|_{L^\infty(D)}\}, & p = \infty. \end{cases}$$

Пусть  $E^\pm$  — измеримое относительно меры  $d\Gamma$  подмножество множества  $\Gamma^\pm$ . Через  $\mathfrak{M}_\Gamma(E^\pm)$  будем обозначать множество функций, заданных на  $E^\pm$  и измеримых относительно меры  $d\Gamma$ . Через  $\widehat{L}^p(E^\pm)$ , где  $1 \leq p \leq \infty$ , обозначим банаховы пространства функций  $g \in \mathfrak{M}_\Gamma(E^\pm)$ , обладающих конечными нормами

$$\|g\|_{\widehat{L}^p(E^\pm)} = \begin{cases} \left( \int_{E^\pm} |g(\omega, x)|^p \widehat{d\Gamma}^\pm(\omega, x) \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{(\omega, x) \in E^\pm} |g(\omega, x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Определим пространство  $L_{loc}^p(\Gamma^\pm)$  как множество всех функций  $g \in \mathfrak{M}_\Gamma(\Gamma^\pm)$  таких, что  $g \in L^p(K)$  для любого компактного подмножества  $K \subset \Gamma^\pm$ .

Будем также использовать пространства  $\widehat{L}^{1,p}(E^\pm)$ , элементами которых являются функции  $g \in \mathfrak{M}_\Gamma(E^\pm)$ , которые после доопределения нулем на  $\Gamma^\pm \setminus E^\pm$  обладают конечными нормами

$$\|g\|_{\widehat{L}^{1,p}(E^\pm)} = \begin{cases} \left( \sum_{j=1}^m \int_{\partial G_j} \left[ \int_{\Omega_j^\pm(x)} |g(\omega, x)| |\omega \cdot n_j(x)| d\omega \right]^p d\sigma(x) \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{1 \leq j \leq m} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \partial G_j} \int_{\Omega_j^\pm(x)} |g(\omega, x)| |\omega \cdot n_j(x)| d\omega, & p = \infty. \end{cases}$$

Здесь и всюду ниже

$$\Omega_j^+(x) = \{\omega \in \Omega \mid \omega \cdot n_j(x) > 0\}, \quad \Omega_j^-(x) = \{\omega \in \Omega \mid \omega \cdot n_j(x) < 0\}.$$

Ясно, что  $\widehat{L}^1(E^\pm) = \widehat{L}^{1,1}(E^\pm)$ .

Будем использовать обозначения

$$(f, g)_{E^\pm} = \int_{E^\pm} f(\omega, x) g(\omega, x) d\widehat{\Gamma}^\pm(\omega, x),$$

$$(f, g)_D = \int_D f(\omega, x) g(\omega, x) d\omega dx.$$

Напомним, что для  $f \in \mathcal{W}^p(D)$ ,  $1 \leq p < \infty$  определены следы  $f|_{\Gamma^\pm} \in L^p_{loc}(\Gamma^\pm)$ , причем операторы  $f \rightarrow f|_{\Gamma^\pm}$  являются линейными непрерывными операторами из  $\mathcal{W}^p(D)$  в  $L^p_{loc}(\Gamma^\pm)$ . Сужение следа  $f|_{\Gamma^\pm}$  на  $\Gamma_j^\pm$  будем обозначать через  $f|_{\Gamma_j^\pm}$ .

Введем пространства

$$\widehat{\mathcal{W}}^p(D) = \{f \in \mathcal{W}^p(D) \mid f|_{\Gamma^-} \in \widehat{L}^p(\Gamma^-), f|_{\Gamma^+} \in \widehat{L}^p(\Gamma^+)\}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Заметим, что  $\widehat{\mathcal{W}}^\infty(D) = \mathcal{W}^\infty(D)$ .

Более подробную информацию о свойствах пространств  $\mathcal{W}^p(D)$  и следов функций из этих пространств можно найти, например, в [6, 11, 14–16].

### 3. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ С УСЛОВИЯМИ ДИФFUЗНОГО ОТРАЖЕНИЯ И ДИФFUЗНОГО ПРЕЛОМЛЕНИЯ

В данном разделе дается краткое изложение постановки краевой задачи для уравнения переноса излучения с краевыми условиями диффузного отражения и диффузного преломления. Вывод краевых условий и доказательство используемых свойств задачи приведены в [12, 13].

#### 3.1. Граничные операторы.

Пусть  $\nu$  — фиксированная частота излучения,  $\nu \in \mathfrak{N}$ .

Напомним, что каждое из тел  $G_j$  заполнено оптически однородной средой с коэффициентами поглощения и рассеяния  $\kappa_\nu(x) = \kappa_{j,\nu} > 0$ ,  $s_\nu(x) = s_{j,\nu} \geq 0$  и показателем преломления  $k_\nu(x) = k_{j,\nu} > 1$ , где  $x \in G_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ .

Введем операторы  $\mathcal{R}_d^+$  и  $\mathcal{R}_d^-$  диффузного внешнего отражения и диффузного внутреннего отражения формулами

$$\mathcal{R}_{d,\nu}^-(\varphi)(\omega, x) = \frac{\rho_{j,\nu}^-(x)}{\pi} \int_{\Omega_j^+(x)} \varphi(\omega', x) \omega' \cdot n_j(x) d\omega', \quad (\omega, x) \in \Gamma_j^-, \quad 1 \leq j \leq m,$$

$$\mathcal{R}_{d,\nu}^+(\psi)(\omega, x) = \frac{\rho_{j,\nu}^+(x)}{\pi} \int_{\Omega_j^-(x)} \psi(\omega', x) |\omega' \cdot n_j(x)| d\omega', \quad (\omega, x) \in \Gamma_j^+, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Здесь  $\rho_{j,\nu}^+(x)$  и  $\rho_{j,\nu}^-(x)$  — отражательные способности поверхности  $\partial G_j$  в точке  $x$ . Эти величины удовлетворяют неравенствам  $0 < \rho_{j,\nu}^+(x) < 1$ ,  $0 < \rho_{j,\nu}^-(x) < 1$  и связаны равенством  $\rho_{j,\nu}^-(x) = 1 - \frac{1}{k_{j,\nu}^2}(1 - \rho_{j,\nu}^+(x))$ .

Мы предполагаем дополнительно, что  $\rho_{j,\nu}^+, \rho_{j,\nu}^- \in L^\infty(\partial G_j)$  для всех  $1 \leq j \leq m$  и

$$\bar{\rho}_\nu^+ = \max_{1 \leq j \leq m} \|\rho_{j,\nu}^+\|_{L^\infty(\partial G_j)} < 1.$$

Введем также операторы  $\mathcal{P}_{d,\nu}^-$  и  $\mathcal{P}_{d,\nu}^+$  диффузного преломления внутрь  $G$  и диффузного преломления вне  $G$  формулами

$$\mathcal{P}_{d,\nu}^-(\psi)(\omega, x) = \frac{1 - \rho_{j,\nu}^+(x)}{\pi} \int_{\Omega_j^-(x)} \psi(\omega', x) |\omega' \cdot n_j(x)| d\omega', \quad (\omega, x) \in \Gamma_j^-, \quad 1 \leq j \leq m,$$

$$\mathcal{P}_{d,\nu}^+(\varphi)(\omega, x) = \frac{1 - \rho_{j,\nu}^-(x)}{\pi} \int_{\Omega_j^+(x)} \varphi(\omega', x) \omega' \cdot n_j(x) d\omega', \quad (\omega, x) \in \Gamma_j^+, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Пусть  $\partial G_{ij} = \partial G_i \cap \partial G_j \neq \emptyset$  для некоторых  $i \neq j$ . Заметим, что  $n_j(x) = -n_i(x)$ . Положим

$$\Gamma_{ij}^- = \Gamma_i^- \cap \Gamma_j^+, \quad \Gamma_{ij}^+ = \Gamma_{ji}^- = \Gamma_i^+ \cap \Gamma_j^-.$$

Введем операторы  $\mathcal{R}_{d,ij,\nu}^-$  и  $\mathcal{P}_{d,ij,\nu}^-$  формулами

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{d,ij,\nu}^-(\varphi)(\omega, x) &= \frac{\rho_{ij,\nu}^-(x)}{\pi} \int_{\Omega_i^+(x)} \varphi(\omega', x) \omega' \cdot n_i(x) d\omega', \quad (\omega, x) \in \Gamma_{ij}^-, \\ \mathcal{P}_{d,ij,\nu}^-(\psi)(\omega, x) &= \frac{1 - \rho_{ji,\nu}^-(x)}{\pi} \int_{\Omega_j^+(x)} \psi(\omega', x) \omega' \cdot n_j(x) d\omega', \quad (\omega, x) \in \Gamma_{ij}^-, \end{aligned}$$

где

$$\rho_{ij,\nu}^- = 1 - \frac{(1 - \rho_{i,\nu}^-)(1 - \rho_{j,\nu}^+)}{1 - \rho_{i,\nu}^+ \rho_{j,\nu}^+}, \quad 1 - \rho_{ji,\nu}^- = (1 - \rho_{ij,\nu}^-) \frac{k_{i,\nu}^2}{k_{j,\nu}^2} = \frac{(1 - \rho_{i,\nu}^+)(1 - \rho_{j,\nu}^-)}{1 - \rho_{i,\nu}^+ \rho_{j,\nu}^+}.$$

Заметим, что  $\rho_{ij,\nu}^- \in L^\infty(\partial G_{ij})$ , причем  $0 < \rho_{i,\nu}^- < \rho_{ij,\nu}^- < 1$ .

Из [12] следует следующее утверждение.

**Лемма 3.1.**

1. Для всех  $1 \leq p \leq \infty$  операторы  $\mathcal{R}_{d,\nu}^-$  и  $\mathcal{R}_{d,\nu}^+$  являются линейными ограниченными операторами из  $\widehat{L}^{1,p}(S^+)$  в  $\widehat{L}^p(S^-)$  и из  $\widehat{L}^{1,p}(S^-)$  в  $\widehat{L}^p(S^+)$  соответственно.
2. Для всех  $1 \leq p \leq \infty$  операторы  $\mathcal{P}_{d,\nu}^-$  и  $\mathcal{P}_{d,\nu}^+$  являются линейными ограниченными операторами из  $\widehat{L}^{1,p}(S^-)$  в  $\widehat{L}^p(S^-)$  и из  $\widehat{L}^{1,p}(S^+)$  в  $\widehat{L}^p(S^+)$  соответственно.
3. Пусть  $\partial G_{ij} \neq \emptyset$  при некоторых  $i \neq j$ . Тогда для всех  $1 \leq p \leq \infty$  операторы  $\mathcal{R}_{d,ij,\nu}^-$  и  $\mathcal{P}_{d,ij,\nu}^-$  являются линейными ограниченными операторами из  $\widehat{L}^{1,p}(\Gamma_{ij}^+)$  в  $\widehat{L}^p(\Gamma_{ij}^-)$  и из  $\widehat{L}^{1,p}(\Gamma_{ji}^+)$  в  $\widehat{L}^p(\Gamma_{ji}^-)$  соответственно.

Введем множества

$$\begin{aligned} S_j^- &= \{(\omega, x) \in \Gamma_j^- \mid x \in \partial G_j \setminus \bigcup_{i \neq j} \partial G_i\}, \quad S^- = \bigcup_{j=1}^m S_j^-, \\ S^{*-} &= \{(\omega, x) \in S^- \mid \{x - t\omega \mid t > 0\} \cap \overline{G} = \emptyset\}. \end{aligned}$$

Пусть  $(\omega, x) \in S^- \setminus S^{*-} = \{(\omega, x) \in S^- \mid \{x - t\omega \mid t > 0\} \cap \overline{G} \neq \emptyset\}$ . Положим

$$\tau^-(\omega, x) = \inf \{t > 0 \mid x - t\omega \in \overline{G}\}, \quad X^-(\omega, x) = x - \tau^-(\omega, x)\omega$$

и заметим, что  $X^-(\omega, x) \in \partial G$ , причем  $(\omega, X^-(\omega, x)) \in \Gamma^+ \cup \Gamma^0$ .

Введем множество

$$\widetilde{S}^- = \{(\omega, x) \in S^- \setminus S^{*-} \mid (\omega, X^-(\omega, x)) \in \Gamma^+\}$$

и определим оператор трансляции  $T$  формулой

$$T\varphi(\omega, x) = \begin{cases} \varphi(\omega, X^-(\omega, x)), & (\omega, x) \in \widetilde{S}^-, \\ 0, & (\omega, x) \in S^- \setminus \widetilde{S}^-. \end{cases}$$

**Лемма 3.2** (см. [11, 13]). Пусть  $\widetilde{S}^- \neq \emptyset$ . Тогда для всех  $1 \leq p \leq \infty$  оператор  $T$  является линейным ограниченным оператором из  $\widehat{L}^p(S^+)$  в  $\widehat{L}^p(S^-)$ , причем  $\|T\|_{\widehat{L}^p(S^+) \rightarrow \widehat{L}^p(S^-)} = 1$ .

**3.2. Формулировка краевых условий диффузного отражения и преломления.** Значения на множествах  $\Gamma^\pm$  и  $\Gamma_j^\pm$  интенсивности  $I_\nu$  распространяющегося в  $G$  излучения мы будем обозначать через  $I_\nu|_{\Gamma^\pm}$  и  $I_\nu|_{\Gamma_j^\pm}$  соответственно. Значения на множестве  $\Gamma^-$  интенсивности распространяющегося в вакууме излучения будем обозначать через  $J_\nu$ .

Для  $(\omega, x) \in S^{*-}$  падающее из вакуума на  $\partial G$  излучение  $J_\nu$  приходит извне и может считаться заданным:

$$J_\nu = J_{*\nu}, \quad (\omega, x) \in S^{*-}.$$

Для  $(\omega, x) \in \tilde{S}^-$  падающее из вакуума на  $\partial G$  излучение  $J_\nu$  приходит от точки  $X^-(\omega, x) \in \partial G$ . Оно складывается из диффузно отраженного и диффузно преломленного в точке  $X^-(\omega, x)$  излучений:

$$J_\nu = T\mathcal{R}_{d,\nu}^+(J_\nu) + TP_{d,\nu}^+(I_\nu|_{\Gamma^+}), \quad (\omega, x) \in \tilde{S}^-.$$

Для  $(\omega, x) \in S^-$  входящее в  $G$  излучение складывается из диффузно отраженного и диффузно преломленного излучений:

$$I_\nu|_{\Gamma^-} = \mathcal{R}_{d,\nu}^-(I_\nu|_{\Gamma^+}) + \mathcal{P}_{d,\nu}^-(J_\nu), \quad (\omega, x) \in S^-.$$

Пусть  $\partial G_{ij} = \partial G_i \cap \partial G_j \neq \emptyset$  для некоторых  $i \neq j$ . Как показано в [12], условие диффузного отражения-преломления для  $(\omega, x) \in \Gamma_{ij}^-$  имеет следующий вид:

$$I_\nu|_{\Gamma_i^-} = \mathcal{R}_{d,ij,\nu}^-(I_\nu|_{\Gamma_i^+}) + \mathcal{P}_{d,ij,\nu}^-(I_\nu|_{\Gamma_j^+}), \quad (\omega, x) \in \Gamma_{ij}^-.$$

**3.3. Предварительная формулировка рассматриваемой краевой задачи.** Таким образом, рассматриваемая в данном разделе задача на «физическом» уровне строгости может быть сформулирована следующим образом: требуется найти функцию  $I_\nu$ , определенную на множестве  $D = \Omega \times G$ , и функцию  $J_\nu$ , определенную на множестве  $S^-$ , которые удовлетворяют уравнению

$$\omega \cdot \nabla I_\nu + \beta_\nu I_\nu = s_\nu \mathcal{S}_\nu(I_\nu) + \varkappa_\nu k_\nu^2 F_\nu, \quad (\omega, x) \in D \quad (3.1)$$

и условиям

$$I_\nu|_{\Gamma^-} = \mathcal{R}_{d,\nu}^-(I_\nu|_{\Gamma^+}) + \mathcal{P}_{d,\nu}^-(J_\nu), \quad (\omega, x) \in S^-, \quad (3.2)$$

$$I_\nu|_{\Gamma_i^-} = \mathcal{R}_{d,ij,\nu}^-(I_\nu|_{\Gamma_i^+}) + \mathcal{P}_{d,ij,\nu}^-(I_\nu|_{\Gamma_j^+}), \quad (\omega, x) \in \Gamma_{ij}^-, \quad i \neq j, \quad (3.3)$$

$$J_\nu = T\mathcal{R}_{d,\nu}^+(J_\nu) + TP_{d,\nu}^+(I_\nu|_{\Gamma^+}), \quad (\omega, x) \in \tilde{S}^-, \quad (3.4)$$

$$J_\nu = J_{*\nu}, \quad (\omega, x) \in S^{*-}. \quad (3.5)$$

В [12] показано, что функцию  $J_\nu$ , входящую в условия (3.4), (3.5), можно исключить из задачи, представив ее в виде

$$J_\nu = \mathcal{B}_{d,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+}) + \mathcal{C}_{d,\nu}(J_{*\nu}),$$

где  $\mathcal{B}_{d,\nu} : \widehat{L}^{1,p}(S^+) \rightarrow \widehat{L}^{1,p}(S^-)$  и  $\mathcal{C}_{d,\nu} : \widehat{L}^{1,p}(S^{*-}) \rightarrow \widehat{L}^{1,p}(S^-)$  — операторы, определяемые сходящимися в  $\widehat{L}^{1,p}(S^-)$  рядами

$$\mathcal{B}_{d,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (T\mathcal{R}_{d,\nu}^+)^{\ell} TP_{d,\nu}^+(I_\nu|_{\Gamma^+}), \quad \mathcal{C}_{d,\nu}(J_{*\nu}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (T\mathcal{R}_{d,\nu}^+)^{\ell} J_{*\nu}.$$

Предполагается, что  $I_\nu|_{\Gamma^+} \in \widehat{L}^{1,p}(S^+)$  и  $J_{*\nu} \in \widehat{L}^{1,p}(S^{*-})$ , причем функция  $J_{*\nu}$  продолжена нулем на  $S^- \setminus S^{*-}$ .

**3.4. Краевая задача для уравнения переноса с условиями диффузного отражения-преломления и ее свойства.** Исключая из задачи (3.1)–(3.5) функцию  $J_\nu = \mathcal{B}_{d,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+}) + \mathcal{C}_{d,\nu}(J_{*\nu})$ , приходим к краевой задаче

$$\omega \cdot \nabla I_\nu + \beta_\nu I_\nu = s_\nu \mathcal{S}_\nu(I_\nu) + \varkappa_\nu k_\nu^2 F_\nu, \quad (\omega, x) \in D, \quad (3.6)$$

$$I_\nu|_{\Gamma^-} = \mathcal{R}_{d,\nu}^-(I_\nu|_{\Gamma^+}) + \mathcal{P}_{d,\nu}^-\mathcal{B}_{d,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+}) + \mathcal{P}_{d,\nu}^-\mathcal{C}_{d,\nu}(J_{*\nu}), \quad (\omega, x) \in S^-, \quad (3.7)$$

$$I_\nu|_{\Gamma_i^-} = \mathcal{R}_{d,ij,\nu}^-(I_\nu|_{\Gamma_i^+}) + \mathcal{P}_{d,ij,\nu}^-(I_\nu|_{\Gamma_j^+}), \quad (\omega, x) \in \Gamma_{ij}^-, \quad i \neq j. \quad (3.8)$$

Будем предполагать, что  $F_\nu \in L^p(D)$ ,  $J_{*\nu} \in \widehat{L}^{1,p}(S^{*-})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

Заметим, что  $\Gamma^- = S^- \cup (\bigcup_{i \neq j} \Gamma_{ij}^-)$ , и введем оператор  $\mathfrak{B}_{d,\nu} : \widehat{L}^{1,p}(\Gamma^+) \rightarrow \widehat{L}^p(\Gamma^-)$  следующим образом:

$$\mathfrak{B}_{d,\nu}(\varphi)(\omega, x) = \begin{cases} \mathcal{R}_{d,\nu}^-(\varphi)(\omega, x) + \mathcal{P}_{d,\nu}^-\mathcal{B}_{d,\nu}(\varphi)(\omega, x), & (\omega, x) \in S^-, \\ \mathcal{R}_{d,ij,\nu}^-(\varphi_i)(\omega, x) + \mathcal{P}_{d,ij,\nu}^-(\varphi_j)(\omega, x), & (\omega, x) \in \Gamma_{ij}^-, \quad i \neq j, \end{cases}$$

где  $\varphi_i$  и  $\varphi_j$  — сужения функции  $\varphi \in \widehat{L}^{1,p}(\Gamma^+)$  на  $\Gamma_i^+$  и  $\Gamma_j^+$  соответственно.

Введем также оператор  $\mathfrak{C}_{d,\nu} : \widehat{L}^{1,p}(S^*) \rightarrow \widehat{L}^p(\Gamma^-)$  следующим образом:

$$\mathfrak{C}_{d,\nu}(J_{*\nu})(\omega, x) = \begin{cases} \mathcal{P}_{d,\nu}^- \mathcal{C}_{d\nu}(J_{*\nu})(\omega, x), & (\omega, x) \in S^-, \\ 0, & (\omega, x) \in \Gamma^- \setminus S^- \end{cases}$$

и запишем задачу (3.6)–(3.8) в следующей компактной форме:

$$\omega \cdot \nabla I_\nu + \beta_\nu I_\nu = s_\nu \mathcal{S}_\nu(I_\nu) + \varkappa_\nu k_\nu^2 F_\nu, \quad (\omega, x) \in D, \quad (3.9)$$

$$I_\nu|_{\Gamma^-} = \mathfrak{B}_{d,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+}) + \mathfrak{C}_{d,\nu}(J_{*\nu}), \quad (\omega, x) \in \Gamma^-. \quad (3.10)$$

Назовем решением задачи (3.9), (3.10) функцию  $I_\nu \in \widehat{\mathcal{W}}^p(D)$ , которая удовлетворяет уравнению (3.9) почти всюду на  $D$ , а условию (3.10) — почти всюду на  $\Gamma^-$ .

Сформулируем некоторые результаты о свойствах этой задачи, доказанные в [12].

**Теорема 3.1.** Пусть  $1 \leq p \leq \infty$  и  $I_\nu \in \widehat{\mathcal{W}}^p(D)$  является решением задачи (3.9), (3.10). Тогда при  $1 \leq p < \infty$  справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\varkappa_\nu^{1/p} k_\nu^{-2/p'} I_\nu\|_{L^p(D)} &\leq \left( \|\varkappa_\nu^{1/p} k_\nu^{2/p} F_\nu\|_{L^p(D)}^p + \frac{1}{\pi^{p-1}} \|J_{*\nu}\|_{\widehat{L}^{1,p}(S^*)}^p \right)^{1/p}, \\ \|\varkappa_\nu^{-1/p'} k_\nu^{-2/p'} \omega \cdot \nabla I_\nu\|_{L^p(D)} &\leq \frac{2}{1 - \varpi_{\max,\nu}} \left( \|\varkappa_\nu^{1/p} k_\nu^{2/p} F_\nu\|_{L^p(D)}^p + \frac{1}{\pi^{p-1}} \|J_{*\nu}\|_{\widehat{L}^{1,p}(S^*)}^p \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

а при  $p = \infty$  — оценки

$$\begin{aligned} \|k_\nu^{-2} I_\nu\|_{L^\infty(D)} &\leq \max \left\{ \|F_\nu\|_{L^\infty(D)}, \frac{1}{\pi} \|J_{*\nu}\|_{\widehat{L}^{1,\infty}(S^*)} \right\}, \\ \|\varkappa_\nu^{-1} k_\nu^{-2} \omega \cdot \nabla I_\nu\|_{L^\infty(D)} &\leq \frac{2}{1 - \varpi_{\max,\nu}} \max \left\{ \|F_\nu\|_{L^\infty(D)}, \frac{1}{\pi} \|J_{*\nu}\|_{\widehat{L}^{1,\infty}(S^*)} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь  $\varpi_{\max,\nu} = \max_{1 \leq j \leq m} \varpi_{j,\nu} < 1$ , где  $\varpi_{j,\nu} = \frac{s_{j,\nu}}{\varkappa_{j,\nu} + s_{j,\nu}}$ .

**Следствие 3.1.** Если задача (3.9), (3.10) имеет решение, то оно единственно.

**Замечание 3.1.** В [12] показано также, что из  $F_\nu \geq 0$ ,  $J_{*\nu} \geq 0$  следует, что  $I_\nu \geq 0$ .

**Теорема 3.2.** Пусть  $F_\nu \in L^p(D)$ ,  $J_{*\nu} \in \widehat{L}^{1,p}(S^*)$ , где  $p \in (3/2, \infty]$ . Тогда у задачи (3.9), (3.10) существует единственное решение  $I_\nu \in \widehat{\mathcal{W}}^p(D)$ .

**Замечание 3.2.** Используемое в данной статье предположение  $\partial G_j \in C^2$ ,  $1 \leq j \leq m$  в некоторых случаях можно ослабить. Так, для  $F_\nu \in L^\infty(D)$ ,  $J_{*\nu} \in \widehat{L}^{1,\infty}(S^*)$  существование и единственность решения  $I_\nu \in \mathcal{W}^\infty(D)$  имеют место и в предположении, что  $\partial G_j \in C^1$  для  $1 \leq j \leq m$ .

Теорема 3.2 не охватывает математически трудный, но физически важный случай  $p = 1$ , когда данные задачи  $F_\nu \in L^1(D)$  и  $J_{*\nu} \in \widehat{L}^1(S^*)$ . Следующая теорема содержит результат об однозначной разрешимости рассматриваемой задачи в этом случае при наличии двух дополнительных предположений:

(H<sub>1</sub>) Для всех  $i \neq j$  множества  $\partial G_{ij}$  пусты либо имеют нулевую меру на  $\partial G$ ;

(H<sub>2</sub>) Справедливо неравенство

$$\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_j^-(x)} \chi_{\widetilde{S}^-}(\omega, x) |\omega \cdot n_j(x)| d\omega \leq \bar{\alpha} < 1 \quad \forall x \in \partial G_j, \quad 1 \leq j \leq m,$$

в котором  $\chi_{\widetilde{S}^-}$  — характеристическая функция множества  $\widetilde{S}^-$ .

Обратим внимание на то, что  $\alpha(x) \equiv 0$ , если  $G$  — выпуклая область.

**Теорема 3.3.** Пусть  $\partial G_j \in C^1$ ,  $1 \leq j \leq m$  и выполнены условия  $(H_1)$ ,  $(H_2)$ . Пусть  $F_\nu \in L^p(D)$ ,  $J_{*\nu} \in \widehat{L}^{1,p}(S^-)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Тогда у задачи (3.9), (3.10) существует единственное решение  $I_\nu \in \widehat{W}^p(D)$ .

Предположим теперь, что объемные источники излучения изотропны, т. е.  $F_\nu = F_\nu(x)$ .

Обозначим через  $\mathcal{A}_{d,\nu}$  линейный оператор, ставящий в соответствие функции  $F_\nu \in L^p(G)$  решение  $I_\nu \in \widehat{W}^p(D)$  задачи

$$\begin{aligned} \omega \cdot \nabla I_\nu + \beta_\nu I_\nu &= s_\nu \mathcal{S}_\nu(I_\nu) + \varkappa_\nu k_\nu^2 F_\nu, \quad (\omega, x) \in D, \\ I_\nu|_{\Gamma^-} &= \mathfrak{B}_{d,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+}), \quad (\omega, x) \in \Gamma^-. \end{aligned}$$

Через  $\mathcal{D}_{d,\nu}$  обозначим линейный оператор, ставящий в соответствие функции  $J_{*\nu} \in \widehat{L}^{1,p}(S^-)$  решение  $I_\nu \in \widehat{W}^p(D)$  задачи

$$\begin{aligned} \omega \cdot \nabla I_\nu + \beta_\nu I_\nu &= s_\nu \mathcal{S}_\nu(I_\nu), \quad (\omega, x) \in D, \\ I_\nu|_{\Gamma^-} &= \mathfrak{B}_{d,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+}) + \mathfrak{C}_{d,\nu}(J_{*\nu}), \quad (\omega, x) \in \Gamma^-. \end{aligned}$$

С использованием введенных операторов решение задачи (3.9), (3.10) может быть представлено в виде

$$I_\nu = \mathcal{A}_{d,\nu}(F_\nu) + \mathcal{D}_{d,\nu}(J_{*\nu}).$$

Введем также операторы

$$\langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(F_\nu) = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \mathcal{A}_{d,\nu}(F_\nu) d\omega, \quad \langle \mathcal{D}_{d,\nu} \rangle_\Omega(J_{*\nu}) = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \mathcal{D}_{d,\nu}(J_{*\nu}) d\omega,$$

действующие из  $L^p(G)$  в  $L^p(G)$  и из  $\widehat{L}^{1,p}(S^-)$  в  $L^p(G)$  соответственно.

Операторы  $\mathcal{A}_{d,\nu}$ ,  $\mathcal{B}_{d,\nu}$ ,  $\langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega$ ,  $\langle \mathcal{B}_{d,\nu} \rangle_\Omega$  определены для  $p \in (3/2, \infty]$ , а при выполнении условий  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  — для всех  $p \in [1, \infty]$ .

Из теоремы 3.1 (с учетом замечания 3.1) следуют оценки

$$\|\varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(F_\nu)\|_{L^1(G)} \leq \|\varkappa_\nu k_\nu^2 F_\nu\|_{L^1(G)} \quad \forall F_\nu \in L^p(G), \quad p \in (3/2, \infty], \quad (3.11)$$

$$\|k_\nu^{-2} \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(F_\nu)\|_{L^\infty(G)} \leq \|F_\nu\|_{L^\infty(G)} \quad \forall F_\nu \in L^\infty(G), \quad (3.12)$$

$$0 \leq k_\nu^{-2} \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(1) \leq 1 \quad (3.13)$$

и оценка

$$4\pi \|\varkappa_\nu \langle \mathcal{D}_{d,\nu} \rangle_\Omega(J_{*\nu})\|_{L^p(G)} \leq 4^{1/p'} \varkappa_{\max,\nu}^{1/p'} k_{\max,\nu}^{2/p'} \|J_{*\nu}\|_{\widehat{L}^{1,p}(S^-)} \quad \forall J_{*\nu} \in \widehat{L}^{1,p}(S^-), \quad p \in (3/2, \infty], \quad (3.14)$$

где  $\varkappa_{\max,\nu} = \max_{1 \leq j \leq m} \varkappa_{j,\nu}$ ,  $k_{\max,\nu} = \max_{1 \leq j \leq m} k_{j,\nu}$ .

В [13] установлен следующий результат о самосопряженности оператора  $\varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega$ .

**Теорема 3.4.** Для всех  $p, q \in (3/2, \infty]$ ,  $1/p + 1/q \leq 1$  справедливо тождество

$$(\varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(F), v)_G = (F, \varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(v))_G \quad \forall F \in L^p(G), \quad \forall v \in L^q(G). \quad (3.15)$$

#### 4. ЗАДАЧА $\mathcal{P}_d$ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ О ЕЕ СВОЙСТВАХ

**4.1. Предположения о данных, оператор  $\mathcal{H}_d$  и функция  $f_*$ .** Будем считать выполненными следующие предположения о данных:

(A<sub>1</sub>)  $\varkappa_{\nu,j} > 0$ ,  $s_{\nu,j} \geq 0$ ,  $k_{\nu,j} > 1$  для всех  $\nu \in \mathfrak{N}$  и  $1 \leq j \leq m$ . Кроме того,  $\varkappa_{\nu,j}, s_{\nu,j}, k_{\nu,j} \in \mathfrak{M}(\mathcal{N})$  для всех  $1 \leq j \leq m$ .

(A<sub>2</sub>)  $\theta_{j,\nu} \in L^1(-1, 1)$ ,  $\theta_{j,\nu} \geq 0$ ,  $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \theta_{j,\nu}(\mu) d\mu = 1$  для всех  $\nu \in \mathfrak{N}$  и  $1 \leq j \leq m$ ; кроме того,

$\theta_{j,\nu} \in \mathfrak{M}(\mathcal{N}; L^1(-1, 1))$  для всех  $1 \leq j \leq m$ .

(A<sub>3</sub>)  $\rho_{j,\nu}^+ \in L^\infty(\partial G_j)$ ,  $0 < \rho_{j,\nu}^+$  и  $\|\rho_{j,\nu}^+\|_{L^\infty(\partial G_j)} < 1$  для всех  $\nu \in \mathfrak{N}$  и  $1 \leq j \leq m$ ; кроме того,  $\rho_{j,\nu}^+ \in \mathfrak{M}(\mathcal{N}; L^\infty(\partial G_j))$  для всех  $1 \leq j \leq m$ .

(A<sub>4</sub>)  $c_p \in L^\infty(G)$ ;  $0 < \underline{c}_p \leq c_p(x) \leq \bar{c}_p$  для п.в.  $x \in G$ , где  $\underline{c}_p, \bar{c}_p$  — постоянные.

(A<sub>5</sub>) Функция  $\lambda(x, u)$  определена на  $G \times \mathbb{R}$  и удовлетворяет условиям Каратеодори, т. е. для п.в.  $x \in G$  она непрерывна по  $u$ , а при любом  $u \in \mathbb{R}$  измерима по  $x$ . Кроме того, справедливо неравенство

$$0 < \lambda_{\min} \leq \lambda(x, u) \leq \lambda_{\max} \quad \forall (x, u) \in G \times \mathbb{R} \quad (4.1)$$

с некоторыми постоянными  $\lambda_{\min}$  и  $\lambda_{\max}$ .

(A<sub>6</sub>) Функция

$$H(x, u) = 4\pi \int_{\mathcal{N}} \varkappa_{\nu}(x) k_{\nu}^2(x) h_{\nu}(u) d\nu + 4\pi \sum_{\ell} \varkappa_{\nu_{\ell}}(x) k_{\nu_{\ell}}^2(x) h_{\nu_{\ell}}(u) \Delta\nu_{\ell}, \quad (4.2)$$

определена на  $G \times \mathbb{R}$  и удовлетворяет неравенству

$$|H(x, u)| \leq c_H(|u|^s + 1) \quad \forall (x, u) \in G \times \mathbb{R} \quad (4.3)$$

с некоторыми постоянными  $s > 3/2$ ,  $c_H > 0$ .

(A<sub>7</sub>)  $u^0 \in L^p(G)$  и  $f_0 \in L^{r_0, q_0}(Q_T)$ , где  $p, r_0, q_0 \in [1, \infty]$ .

(A<sub>8</sub>) Функция  $J_{*\nu}$  определена на  $\mathfrak{N} \times \overset{*}{S}^- \times (0, T)$ . Существуют показатели  $r_* \in [1, \infty]$  и  $q_* \in (3/2, \infty]$  такие, что  $J_{*\nu} \in \mathfrak{M}(\mathcal{N} \times (0, T); \widehat{L}^{1, q_*}(\overset{*}{S}^-))$  и  $J_{*\nu} \in \mathfrak{M}(0, T; \widehat{L}^{1, q_*}(\overset{*}{S}^-))$  для всех  $\nu \in \{\nu_{\ell}\}$ . Кроме того, конечна величина

$$\|J_{*}\|_{r_*, q_*} = 4^{1/q_*} \left\| \int_{\mathcal{N}} \varkappa_{\max, \nu}^{1/q_*} k_{\max, \nu}^{2/q_*} \|J_{*\nu}\|_{\widehat{L}^{1, q_*}(\overset{*}{S}^-)} d\nu + \sum_{\ell} \varkappa_{\max, \nu_{\ell}}^{1/q_*} k_{\max, \nu_{\ell}}^{2/q_*} \|J_{*\nu_{\ell}}\|_{\widehat{L}^{1, q_*}(\overset{*}{S}^-)} \Delta\nu_{\ell} \right\|_{L^{r_*}(0, T)}.$$

Заметим, что из непрерывности и монотонности функции  $h_{\nu}(u)$  по  $u$  следует непрерывность и монотонность  $H(x, u)$  по  $u$ . Обратим также внимание на то, что функция  $H(x, u)$  удовлетворяет условиям Каратеодори, так как при фиксированном  $u \in \mathbb{R}$  она является кусочно постоянной функцией аргумента  $x$ .

Для математической формулировки рассматриваемой в статье задачи нам потребуется оператор  $\mathcal{H}_d[u]$ , задаваемый формулой

$$\mathcal{H}_d[u] = 4\pi \int_{\mathcal{N}} \varkappa_{\nu} \langle \mathcal{A}_{d, \nu} \rangle_{\Omega}(h_{\nu}(u)) d\nu + 4\pi \sum_{\ell} \varkappa_{\nu_{\ell}} \langle \mathcal{A}_{d, \nu_{\ell}} \rangle_{\Omega}(h_{\nu_{\ell}}(u)) \Delta\nu_{\ell}. \quad (4.4)$$

**Лемма 4.1.** Пусть выполнены условия (A<sub>1</sub>)–(A<sub>3</sub>), (A<sub>6</sub>) Тогда  $\mathcal{H}_d : L^s(G) \rightarrow L^1(G)$ , причем справедливы оценки

$$\|\mathcal{H}_d[u]\|_{L^1(G)} \leq \|H(\cdot, u)\|_{L^1(G)} \leq c_H \| |u|^s + 1 \|_{L^1(G)} \quad \forall u \in L^s(G), \quad (4.5)$$

$$\|\mathcal{H}_d[u] - \mathcal{H}_d[\tilde{u}]\|_{L^1(G)} \leq \|H(\cdot, u) - H(\cdot, \tilde{u})\|_{L^1(G)} \quad \forall u, \tilde{u} \in L^s(G). \quad (4.6)$$

*Доказательство.* Из непрерывности функции  $h_{\nu}(u)$  по  $u$  и очевидной оценки

$$|h_{\nu}(u)| \leq \frac{2\nu^2 \widehat{k}}{c_0^2} |u| \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad (4.7)$$

вытекает, что из  $u \in L^s(G)$  следует  $h_{\nu}(u) \in L^s(G)$  для всех  $\nu \in \mathfrak{N}$ . Значит,  $\langle \mathcal{A}_{d, \nu} \rangle_{\Omega}(h_{\nu}(u)) \in L^s(G)$  для всех  $\nu \in \mathfrak{N}$ .

Покажем, что  $\langle \mathcal{A}_{d, \nu} \rangle_{\Omega}(h_{\nu}(u)) \in \mathfrak{M}(\mathcal{N} \times G)$ . Поскольку функция  $h_{\nu}$  непрерывна по  $\nu$  и удовлетворяет оценке (4.7), то  $h_{\nu}(u) \in C(\mathcal{N}; L^s(G))$ . Поэтому существует последовательность определенных на  $\mathcal{N}$  простых функций  $\{h_{\nu}(u)^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$  со значениями в  $L^s(G)$  такая, что  $h_{\nu}(u)^{(n)} \rightarrow h_{\nu}(u)$  в  $L^s(G)$  для почти всех  $\nu \in \mathcal{N}$ .

Из предположений (A<sub>1</sub>)–(A<sub>6</sub>) для всех  $1 \leq j \leq m$  следует существование последовательностей определенных на  $\mathcal{N}$  простых функций  $\{\varkappa_{\nu, j}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{s_{\nu, j}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{k_{\nu, j}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ , последовательности определенных на  $\mathcal{N}$  простых функций  $\{\theta_{j, \nu}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$  со значениями в  $L^1(-1, 1)$  и последовательности определенных на  $\mathcal{N}$  простых функций  $\{\rho_{j, \nu}^{+, (n)}\}_{n=1}^{\infty}$  со значениями в  $L^{\infty}(\partial G_j)$  таких, что:  $\varkappa_{\nu, j}^{(n)} \rightarrow \varkappa_{\nu, j}$ ,  $s_{\nu, j}^{(n)} \rightarrow s_{\nu, j}$ ,  $k_{\nu, j}^{(n)} \rightarrow k_{\nu, j}$  для п.в.  $\nu \in \mathcal{N}$ ,  $\theta_{j, \nu}^{(n)} \rightarrow \theta_{j, \nu}$  в  $L^1(-1, 1)$  для п.в.  $\nu \in \mathcal{N}$  и  $\rho_{j, \nu}^{+, (n)} \rightarrow \rho_{j, \nu}^+$  в

$L^\infty(\partial G_j)$  для п.в.  $\nu \in \mathcal{N}$ . Кроме того, можно считать, что  $\varkappa_{j,\nu}^{(n)} > 0$ ,  $s_{j,\nu}^{(n)} \geq 0$ ,  $k_{j,\nu}^{(n)} > 1$ ,  $\theta_{j,\nu}^{(n)} \geq 0$ ,  $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \theta_{j,\nu}^{(n)}(\mu) d\mu = 1$ ,  $0 < \rho_j^{+, (n)}$ ,  $\max_{1 \leq j \leq m} \|\rho_j^{+, (n)}\|_{L^\infty(\partial G_j)} < 1$ .

Заменяя в задаче (3.9), (3.10) данные  $\varkappa_{\nu,j}$ ,  $s_{\nu,j}$ ,  $\beta_\nu$ ,  $k_{\nu,j}$ ,  $\theta_{j,\nu}$ ,  $\rho_{j,\nu}^+$ ,  $F_\nu$  на  $\varkappa_{\nu,j}^{(n)}$ ,  $s_{\nu,j}^{(n)}$ ,  $\beta_\nu^{(n)} = \varkappa_\nu^{(n)} + s_\nu^{(n)}$ ,  $k_{\nu,j}^{(n)}$ ,  $\theta_{j,\nu}^{(n)}$ ,  $\rho_{j,\nu}^{+, (n)}$ ,  $h_\nu^{(n)}(u)$  и полагая  $J_{*\nu} = 0$ , приходим к последовательности задач

$$\begin{aligned} \omega \cdot \nabla I_\nu^{(n)} + \beta_\nu^{(n)} I_\nu^{(n)} &= s_\nu^{(n)} \mathcal{S}_\nu^{(n)}(I_\nu^{(n)}) + \varkappa_\nu^{(n)} (k_\nu^{(n)})^2 h_\nu^{(n)}(u), \quad (\omega, x) \in D, \\ I_\nu^{(n)}|_{\Gamma^-} &= \mathfrak{B}_{d,\nu}^{(n)}(I_\nu^{(n)}|_{\Gamma^+}), \quad (\omega, x) \in \Gamma^-. \end{aligned}$$

Решая эти задачи для всех  $n \geq 1$  и  $\nu \in \mathcal{N}$ , получаем последовательность  $\{I_\nu^{(n)}\}_{n=1}^\infty$  простых функций, определенных на  $\mathcal{N}$  и принимающих значения в  $\widehat{\mathcal{W}}^s(D)$ .

Из теоремы о непрерывной зависимости решения задачи (3.9), (3.10) от данных, доказанной в [13], следует, что  $I_\nu^{(n)} \rightarrow \mathcal{A}_{d,\nu}(h_\nu(u))$  в  $\mathcal{W}^1(D)$  для почти всех  $\nu \in \mathcal{N}$ . Таким образом,  $\mathcal{A}_{d,\nu}(h_\nu(u)) \in \mathfrak{M}(\mathcal{N}; \mathcal{W}^1(D))$ . Как следствие,  $\langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(h_\nu(u)) \in \mathfrak{M}(\mathcal{N}; L^1(G)) \subset \mathfrak{M}(\mathcal{N} \times G)$ .

Пользуясь оценкой (3.11) с  $F_\nu = h_\nu(u)$ , имеем:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}_d[u]\|_{L^1(G)} &\leq 4\pi \int_{\mathcal{N}} \|\varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(h_\nu(u))\|_{L^1(G)} d\nu + 4\pi \sum_\ell \|\varkappa_{\nu_\ell} \langle \mathcal{A}_{d,\nu_\ell} \rangle_\Omega(h_{\nu_\ell}(u))\|_{L^1(G)} \Delta\nu_\ell \leq \\ &\leq 4\pi \int_{\mathcal{N}} \|\varkappa_\nu k_\nu^2 h_\nu(u)\|_{L^1(G)} d\nu + 4\pi \sum_\ell \|\varkappa_{\nu_\ell} k_{\nu_\ell}^2 h_{\nu_\ell}(u)\|_{L^1(G)} \Delta\nu_\ell = \\ &= \left\| 4\pi \int_{\mathcal{N}} \varkappa_\nu k_\nu^2 h_\nu(|u|) d\nu + 4\pi \sum_\ell \varkappa_{\nu_\ell} k_{\nu_\ell}^2 h_{\nu_\ell}(|u|) \Delta\nu_\ell \right\|_{L^1(G)} = \|H(\cdot, |u|)\|_{L^1(G)} \leq c_H \| |u|^s + 1 \|_{L^1(G)}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}_d[u] - \mathcal{H}_d[\tilde{u}]\|_{L^1(G)} &\leq \\ &\leq 4\pi \int_{\mathcal{N}} \|\varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(h_\nu(u) - h_\nu(\tilde{u}))\|_{L^1(G)} d\nu + 4\pi \sum_\ell \|\varkappa_{\nu_\ell} \langle \mathcal{A}_{d,\nu_\ell} \rangle_\Omega(h_{\nu_\ell}(u) - h_{\nu_\ell}(\tilde{u}))\|_{L^1(G)} \Delta\nu_\ell \leq \\ &\leq 4\pi \int_{\mathcal{N}} \|\varkappa_\nu k_\nu^2 |h_\nu(u) - h_\nu(\tilde{u})|\|_{L^1(G)} d\nu + 4\pi \sum_\ell \|\varkappa_{\nu_\ell} k_{\nu_\ell}^2 |h_{\nu_\ell}(u) - h_{\nu_\ell}(\tilde{u})|\|_{L^1(G)} \Delta\nu_\ell = \\ &= \left\| 4\pi \int_{\mathcal{N}} \varkappa_\nu k_\nu^2 |h_\nu(u) - h_\nu(\tilde{u})| d\nu + 4\pi \sum_\ell \varkappa_{\nu_\ell} k_{\nu_\ell}^2 |h_{\nu_\ell}(u) - h_{\nu_\ell}(\tilde{u})| \Delta\nu_\ell \right\|_{L^1(G)} = \|H(\cdot, u) - H(\cdot, \tilde{u})\|_{L^1(G)}. \end{aligned}$$

Последнее равенство имеет место в силу монотонности  $h_\nu(u)$  по  $u$  при всех  $\nu$ .  $\square$

**Следствие 4.1.** *Оператор  $\mathcal{H}_d$  является непрерывным оператором, действующим из  $L^s(G)$  в  $L^1(G)$ .*

**Следствие 4.2.** *Оператор  $\mathcal{H}_d$  является непрерывным оператором, действующим из  $L^s(Q_T)$  в  $L^1(Q_T)$ , причем справедливы оценки*

$$\|\mathcal{H}_d[u]\|_{L^1(Q_T)} \leq \|H(\cdot, u)\|_{L^1(Q_T)} \leq c_H \| |u|^s + 1 \|_{L^1(Q_T)} \quad \forall u \in L^s(Q_T), \quad (4.8)$$

$$\|\mathcal{H}_d[u] - \mathcal{H}_d[\tilde{u}]\|_{L^1(Q_T)} \leq \|H(\cdot, u) - H(\cdot, \tilde{u})\|_{L^1(Q_T)} \quad \forall u, \tilde{u} \in L^s(Q_T). \quad (4.9)$$

**Лемма 4.2.** *Справедливы неравенства*

$$\|\mathcal{H}[u]\|_{L^\infty(G)} \leq \|H(\cdot, \|u\|_{L^\infty(G)})\|_{L^\infty(G)} \leq c_H (\|u\|_{L^\infty(G)}^s + 1) \quad \forall u \in L^\infty(G).$$

*Доказательство.* Пользуясь оценкой (3.12), имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}[u]\|_{L^\infty(G)} &\leq \left\| 4\pi \int_{\mathcal{N}} \varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(h_\nu(|u|)) d\nu + 4\pi \sum_\ell \varkappa_{\nu_\ell} \langle \mathcal{A}_{d,\nu_\ell} \rangle_\Omega(h_{\nu_\ell}(|u|)) \Delta\nu_\ell \right\|_{L^\infty(G)} \leq \\ &\leq \left\| 4\pi \int_{\mathcal{N}} \varkappa_\nu k_\nu^2 h_\nu(\|u\|_{L^\infty(G)}) d\nu + 4\pi \sum_\ell \varkappa_{\nu_\ell} k_{\nu_\ell}^2 h_{\nu_\ell}(\|u\|_{L^\infty(G)}) \Delta\nu_\ell \right\|_{L^\infty(G)} = \\ &= \|H(\cdot, \|u\|_{L^\infty(G)})\|_{L^\infty(G)} \leq c_H (\|u\|_{L^\infty(G)}^s + 1). \end{aligned}$$

$\square$



**Лемма 4.3.** Пусть выполнены условия  $(A_1)$ – $(A_3)$ ,  $(A_8)$ . Тогда функция

$$f_* = 4\pi \int_{\mathcal{N}} \varkappa_\nu \langle \mathcal{D}_{d,\nu} \rangle_\Omega(J_{*\nu}) d\nu + 4\pi \sum_{\ell} \varkappa_{\nu_\ell} \langle \mathcal{D}_{d,\nu_\ell} \rangle_\Omega(J_{*\nu_\ell}) \Delta\nu_\ell$$

принадлежит пространству  $L^{r^*,q^*}(Q_T)$ , причем справедлива оценка

$$\|f_*\|_{L^{r^*,q^*}(Q_T)} \leq \|J_*\|_{r^*,q^*}. \quad (4.10)$$

*Доказательство.* Из сделанных предположений следует существование последовательности определенных на  $\mathcal{N} \times (0, T)$  простых функций  $\{J_{*\nu}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$  со значениями в  $\widehat{L}^{1,q^*}(S^-)$  и для каждого  $\nu \in \{\nu_\ell\}$  — последовательности определенных на  $(0, T)$  простых функций  $\{J_{*\nu}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$  со значениями в  $\widehat{L}^{1,q^*}(S^-)$  таких, что:  $J_{*\nu}^{(n)} \rightarrow J_{*\nu}$  в  $\widehat{L}^{1,q^*}(S^-)$  для п.в.  $(\nu, t) \in \mathcal{N} \times (0, T)$  и  $J_{*\nu}^{(n)} \rightarrow J_{*\nu}$  в  $\widehat{L}^{1,q^*}(S^-)$  для п.в.  $t \in (0, T)$  и всех  $\nu \in \{\nu_\ell\}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Заменяя в задаче (3.9), (3.10) данные  $\varkappa_{\nu,j}$ ,  $s_{\nu,j}$ ,  $\beta_\nu$ ,  $k_{\nu,j}$ ,  $\theta_{j,\nu}$ ,  $\rho_{j,\nu}^+$  на те же данные  $\varkappa_{\nu,j}^{(n)}$ ,  $s_{\nu,j}^{(n)}$ ,  $\beta^{(n)}$ ,  $k_{\nu,j}^{(n)}$ ,  $\theta_{j,\nu}^{(n)}$ ,  $\rho_{j,\nu}^{+, (n)}$ , что и в доказательстве леммы 4.1, полагая  $F_\nu = 0$  и заменяя  $J_{*\nu}$  на  $J_{*\nu}^{(n)}$ , приходим к последовательности задач

$$\begin{aligned} \omega \cdot \nabla I_\nu^{(n)} + \beta_\nu^{(n)} I_\nu^{(n)} &= s_\nu^{(n)} \mathcal{S}_\nu^{(n)}(I_\nu^{(n)}), \quad (\omega, x) \in D, \\ I_\nu^{(n)}|_{\Gamma^-} &= \mathfrak{B}_{d,\nu}^{(n)}(I_\nu^{(n)}|_{\Gamma^+}) + \mathfrak{C}_{d,\nu}^{(n)}(J_{*\nu}^{(n)}), \quad (\omega, x) \in \Gamma^-. \end{aligned}$$

Решая эти задачи для всех  $n \geq 1$  и  $\nu \in \mathfrak{N}$ , получаем последовательность  $\{I_\nu^{(n)}\}_{n=1}^\infty$  простых функций, определенных на  $\mathcal{N} \times (0, T)$  и принимающих значения в  $\widehat{W}^{q^*}(D)$ , а также для всех  $\nu_\ell \in \{\nu_\ell\}$  — последовательности  $\{I_{\nu_\ell}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$  простых функций, определенных на  $(0, T)$  и принимающих значения в  $\widehat{W}^{q^*}(D)$ .

Из [13] следует, что  $I_\nu^{(n)} \rightarrow \mathcal{D}_{d,\nu}(J_{*\nu})$  в  $\mathcal{W}^1(D)$  для п.в.  $(\nu, t) \in \mathcal{N} \times (0, T)$  и  $I_{\nu_\ell}^{(n)} \rightarrow \mathcal{D}_{d,\nu_\ell}(J_{*\nu_\ell})$  в  $\mathcal{W}^1(D)$  для п.в.  $t \in (0, T)$  и всех  $\nu_\ell \in \{\nu_\ell\}$ . Таким образом,  $\mathcal{D}_{d,\nu}(J_{*\nu}) \in \mathfrak{M}(\mathcal{N} \times (0, T); \mathcal{W}^1(D))$  и  $\mathcal{D}_{d,\nu_\ell}(J_{*\nu_\ell}) \in \mathfrak{M}((0, T); \mathcal{W}^1(D))$ . Значит,  $\langle \mathcal{D}_{d,\nu} \rangle_\Omega(J_{*\nu}) \in \mathfrak{M}(\mathcal{N} \times (0, T); L^1(G)) \subset \mathfrak{M}(\mathcal{N} \times Q_T)$  и  $\langle \mathcal{D}_{d,\nu_\ell} \rangle_\Omega(J_{*\nu_\ell}) \in \mathfrak{M}(0, T; L^1(G)) \subset \mathfrak{M}(Q_T)$ .

Для завершения доказательства леммы осталось заметить, что в силу оценки (3.14) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|f_*\|_{L^{r^*,q^*}(Q_T)} &\leq \\ &\leq \|4\pi \int_{\mathcal{N}} \varkappa_\nu \langle \mathcal{D}_{d,\nu} \rangle_\Omega(J_{*\nu}) \|_{L^{q^*}(G)} d\nu + 4\pi \sum_{\ell} \|\varkappa_{\nu_\ell} \langle \mathcal{D}_{d,\nu_\ell} \rangle_\Omega(J_{*\nu_\ell}) \|_{L^{q^*}(G)} \Delta\nu_\ell \|_{L^{r^*}(0,T)} \leq \|J_*\|_{r^*,q^*}. \end{aligned}$$

□

**4.2. Задача  $\mathcal{P}_d$  и формулировка результатов об ее свойствах.** В силу описанных в разделе 3 результатов входящая в задачу (1.1)–(1.5) неизвестная функция  $I_\nu$  может быть выражена формулой

$$I_\nu = \mathcal{A}_{d,\nu}(h_\nu(u)) + \mathcal{D}_{d,\nu}(J_{*\nu}),$$

(т. е. формулой (3.4) с  $F_\nu = h_\nu(u)$ ) и исключена из задачи. Как следствие, исходная задача может быть сведена к следующей задаче, которую далее будем называть задачей  $\mathcal{P}_d$ :

$$c_p D_t u - \operatorname{div}(\lambda(x, u) \nabla u) + H(x, u) = \mathcal{H}_d[u] + f, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (4.11)$$

$$\lambda(x, u) \nabla u \cdot n_j = 0, \quad (x, t) \in \partial G_j \times (0, T), \quad 1 \leq j \leq m, \quad (4.12)$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in G. \quad (4.13)$$

Введем следующие обозначения:

$$a(u, v) = (\lambda(\cdot, u) \nabla u, \nabla v)_G = \int_G \lambda(x, u(x)) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx,$$

$$b(u, v) = (H(\cdot, u) - \mathcal{H}_d[u], v)_G = 4\pi \int_{\mathcal{N}} b_\nu(u, v) d\nu + 4\pi \sum_{\ell} b_{\nu_\ell}(u, v) \Delta\nu_\ell,$$

где

$$b_\nu(u, v) = (\mathcal{K}_\nu k_\nu^2 h_\nu(u), v)_G - (\mathcal{K}_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega (h_\nu(u)), v)_G.$$

Введем пространства функций

$$\mathcal{V}(Q_T) = V_2(Q_T) \cap C([0, T]; L^1(G)) \cap L^s(Q_T), \quad V = W^{1,2}(G) \cap L^\infty(G).$$

Наряду с пространством  $C_0^\infty[0, T]$  бесконечно дифференцируемых финитных на  $[0, T]$  функций мы будем использовать пространство  $C_*^\infty[0, T]$  функций  $\eta \in C^\infty[0, T]$  таких, что  $\eta(t) = 0$  для всех  $t \in [T - \delta, T]$ , где  $\delta = \delta(\eta) \in (0, T)$ .

Функцию  $u \in \mathcal{V}(Q_T)$  назовем *слабым решением задачи  $\mathcal{P}_d$* , если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} - \int_0^T (c_p u(t), v)_G \frac{d}{dt} \eta(t) dt + \int_0^T a(u(t), v) \eta(t) dt + \int_0^T b(u(t), v) \eta(t) dt = \\ = (c_p u^0, v)_G \cdot \eta(0) + \int_0^T (f(t), v)_G \eta(t) dt \quad \forall v \in V, \quad \forall \eta \in C_*^\infty[0, T]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Сформулируем теперь кратко основные результаты статьи.

**Теорема 4.1.** Пусть выполнены условия  $(A_1)$ – $(A_8)$  и пусть показатели  $p, r_0, q_0, r_*, q_*$ , входящие в условия  $(A_7)$ ,  $(A_8)$ , дополнительно таковы, что

$$p \in [2, \infty), \quad 2/r_0 + 3/q_0 \leq 2 + 3/p, \quad 2/r_* + 3/q_* \leq 2 + 3/p, \quad (4.15)$$

и пусть  $u$  – слабое решение задачи  $\mathcal{P}_d$ . Тогда  $|u|^{\gamma-1} u \in V_2(Q_T)$  для всех  $\gamma \in [1, p/2]$ , причем справедлива оценка

$$\| |u|^{\gamma-1} u \|_{V_2(Q_T)}^{1/\gamma} \leq C (\|u^0\|_{L^p(G)} + \|f_0\|_{L^{r_0, q_0}(Q_T)} + \|J_*\|_{r_*, q_*}). \quad (4.16)$$

Здесь и всюду ниже через  $C$  (с индексами или без) обозначаются различные положительные постоянные, которые могут зависеть от  $G, T, \underline{c}_p, \bar{c}_p, \lambda_{\min}, \lambda_{\max}$  и  $p, r_0, q_0, r_*, q_*$ .

**Теорема 4.2.** Пусть выполнены условия  $(A_1)$ – $(A_8)$  и пусть показатели  $p, r_0, q_0, r_*, q_*$ , входящие в условия  $(A_7)$ ,  $(A_8)$ , дополнительно таковы, что

$$p = \infty, \quad 2/r_0 + 3/q_0 < 2, \quad 2/r_* + 3/q_* < 2, \quad (4.17)$$

и пусть  $u$  – слабое решение задачи  $\mathcal{P}_d$ . Тогда  $u \in L^\infty(Q_T)$ , причем справедлива оценка

$$\|u\|_{L^\infty(Q_T)} \leq M_\infty = C (\|u^0\|_{L^\infty(G)} + \|f_0\|_{L^{r_0, q_0}(Q_T)} + \|J_*\|_{r_*, q_*}). \quad (4.18)$$

Поскольку по физическому смыслу задачи  $u$  – это абсолютная температура, важно показать, что при естественных предположениях на данные эта величина неотрицательна. Справедлив следующий результат.

**Теорема 4.3.** Пусть выполнены условия  $(A_1)$ – $(A_8)$  и пусть  $u$  – слабое решение задачи  $\mathcal{P}_d$ . Если  $u^0 \geq 0$  и  $f \geq 0$ , то  $u \geq 0$ .

Справедлива следующая теорема об устойчивости слабых решений задачи  $\mathcal{P}_d$  по данным.

**Теорема 4.4.** Пусть выполнены условия  $(A_1)$ – $(A_6)$  и дополнительное условие  $(A_9)$  Функция  $\lambda$  удовлетворяет следующему условию Гельдера по переменной  $u$ :

$$|\lambda(x, u + v) - \lambda(x, u)| \leq L v^{1/2} \quad \forall (x, u) \in G \times \mathbb{R}, \quad \forall v \in [0, 1],$$

где  $L$  – положительная постоянная.

Пусть  $u^1, u^2$  – два слабых решения задачи  $\mathcal{P}_d$ , отвечающие данным  $u^{0,1}, u^{0,2} \in L^1(G)$  и  $f^1, f^2 \in L^1(Q_T)$ . Тогда справедливы оценки

$$\|c_p(u^1 - u^2)_+\|_{C([0, T]; L^1(G))} \leq \|c_p(u^{0,1} - u^{0,2})_+\|_{L^1(G)} + \|(f^1 - f^2)_+\|_{L^1(Q_T)}, \quad (4.19)$$

$$\|c_p(u^1 - u^2)_-\|_{C([0, T]; L^1(G))} \leq \|c_p(u^{0,1} - u^{0,2})_-\|_{L^1(G)} + \|(f^1 - f^2)_-\|_{L^1(Q_T)} \quad (4.20)$$

и оценка

$$\|c_p(u^1 - u^2)\|_{C([0,T];L^1(G))} \leq \|c_p(u^{0,1} - u^{0,2})\|_{L^1(G)} + \|f^1 - f^2\|_{L^1(Q_T)}. \quad (4.21)$$

Очевидными следствиями теоремы 4.4 являются следующие два результата.

**Теорема 4.5** (теорема единственности). *Пусть выполнены условия (A<sub>1</sub>)–(A<sub>9</sub>). Если слабое решение задачи  $\mathcal{P}_d$  существует, то оно единственно.*

**Теорема 4.6** (теорема сравнения). *Пусть выполнены условия (A<sub>1</sub>)–(A<sub>6</sub>), (A<sub>9</sub>). Пусть  $u^1, u^2$  — два слабых решения задачи  $\mathcal{P}_d$ , отвечающие данным  $u^{0,1}, u^{0,2} \in L^1(G)$  и  $f^1, f^2 \in L^1(Q_T)$ . Если  $u^{0,1} \leq u^{0,2}$  и  $f^1 \leq f^2$ , то  $u^1 \leq u^2$ .*

Справедливы следующие результаты о разрешимости задачи  $\mathcal{P}_d$ .

**Теорема 4.7.** *Пусть выполнены условия теоремы 4.2. Тогда у задачи  $\mathcal{P}_d$  существует слабое решение  $u \in V_2^{1,0}(Q_T) \cap L^\infty(Q_T)$ .*

**Теорема 4.8.** *Пусть выполнены условия теоремы 4.1, условие (A<sub>9</sub>) и пусть  $p \geq 3s/5$ . Тогда у задачи  $\mathcal{P}_d$  существует слабое решение и оно единственно.*

Сформулируем результат о регулярности слабого решения задачи  $\mathcal{P}_d$  в предположении, что в одной из областей  $G_j$  коэффициент  $\lambda$  удовлетворяет следующему условию:

(A<sub>10</sub>)  $\lambda(x, u) = \lambda_j(u)$  для всех  $x \in G_j$ , причем функция  $\lambda_j$  удовлетворяет следующему условию Гельдера:

$$|\lambda_j(u+v) - \lambda_j(u)| \leq Lv^{1/2} \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in [0, 1],$$

где  $L$  — положительная постоянная.

Обозначим через  $u_j$  сужение слабого решения  $u$  задачи  $\mathcal{P}_d$  на  $Q_{jT} = G_j \times (0, T)$  и положим  $\Lambda_j(u) = \int_0^u \lambda_j(s) ds$ . Заметим, что при выполнении условия (A<sub>10</sub>) справедливо равенство  $\lambda_j(u_j) \nabla u_j = \nabla \Lambda_j(u_j)$ .

Назовем слабое решение  $u$  задачи  $\mathcal{P}_d$  *регулярным* в области  $G_j$ , если  $D_t u_j \in L^2(Q_{jT})$ ,  $\Lambda_j(u_j) \in L^2(0, T; W^{2,2}(G_j))$ , уравнение

$$c_p D_t u_j - \operatorname{div}(\lambda_j(u_j) \nabla u_j) + H(x, u_j) = \mathcal{H}_d[u] + f, \quad (x, t) \in Q_{jT} \quad (4.22)$$

выполняется в  $L^2(Q_{jT})$ , а краевое условие

$$\lambda_j(u_j) \nabla u_j \cdot n_j = 0, \quad (x, t) \in \partial G_j \times (0, T) \quad (4.23)$$

выполняется в  $L^2(0, T; W^{1/2,2}(\partial G_j))$ .

**Теорема 4.9.** *Пусть выполнены условия теоремы 4.2. Пусть для некоторого  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , выполнено условие (A<sub>10</sub>) и дополнительно  $u^0 \in W^{1,2}(G_j)$ . Тогда слабое решение задачи  $\mathcal{P}_d$  регулярно в области  $G_j$  и справедлива оценка*

$$\begin{aligned} & \|D_t u_j\|_{L^2(Q_{jT})} + \|\Lambda_j(u_j)\|_{L^2(0,T;W^{2,2}(G_j))} \leq \\ & \leq C \left( \|\nabla u^0\|_{L^2(G_j)} + \|u^0\|_{L^\infty(G)}^s + \|f_0\|_{L^{r_0,q_0}(Q_T)}^s + \|J_*\|_{r_*,q_*}^s + 1 \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

с постоянной  $C$ , зависящей от  $G$ ,  $T$ ,  $\varepsilon_p$ ,  $\bar{c}_p$ ,  $\lambda_{\min}$ ,  $\lambda_{\max}$ ,  $r_0$ ,  $q_0$ ,  $r_*$ ,  $q_*$  и  $sH$ .

Справедливость теорем 4.1–4.9 следует из результатов разделов 5–9.

## 5. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ $\mathcal{P}_d$ И $\mathcal{P}_d^{[n]}$

Для доказательства разрешимости задачи  $\mathcal{P}_d$  нам потребуется вспомогательная задача  $\mathcal{P}_d^{[n]}$ , которая отличается от задачи  $\mathcal{P}_d$  только тем, что в ее формулировке функция  $h_\nu(u)$  заменена на  $h_\nu(u^{[n]})$ , где  $0 < n$  — параметр. Напомним, что  $u^{[n]} = \max\{-n, \min\{u, n\}\}$ .

Функцию  $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$  назовем *слабым решением задачи*  $\mathcal{P}_d^{[n]}$ , если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} - \int_0^T (c_p u(t), v)_G \frac{d}{dt} \eta(t) dt + \int_0^T a(u(t), v) \eta(t) dt + \int_0^T b(u^{[n]}(t), v) \eta(t) dt &= (c_p u^0, v)_G \cdot \eta(0) + \\ &= \int_0^T (f(t), v)_G \eta(t) dt \quad \forall v \in W_2^1(G), \quad \forall \eta \in C_*^\infty[0, T]. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Выведем априорные оценки слабых решений задачи  $\mathcal{P}_d$  и задачи  $\mathcal{P}_d^{[n]}$ , считая выполненными условия (A<sub>1</sub>)–(A<sub>8</sub>).

Важную роль в дальнейшем играет следующее утверждение.

**Лемма 5.1.** Пусть  $\tilde{w}$  — заданная на  $\mathbb{R}$  неубывающая непрерывная ограниченная функция такая, что  $\tilde{w}(0) = 0$ . Тогда для всех  $\nu \in \mathfrak{N}$ ,  $n > 0$  справедливы неравенства

$$b_\nu(u, \tilde{w}(u)) \geq 0, \quad b_\nu(u^{[n]}, \tilde{w}(u)) \geq 0 \quad \forall u \in L^s(G). \quad (5.2)$$

*Доказательство.* Пусть сначала  $u$  — простая функция вида  $u(x) = \sum_{i=1}^N u_i \chi_i(x)$ , где  $\chi_i$  — характеристические функции измеримых попарно непересекающихся множеств  $E_i$ ,  $1 \leq i \leq N$  таких, что  $G = \bigcup_{i=1}^N E_i$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} b_\nu(u, \tilde{w}(u)) &= (\varkappa_\nu k_\nu^2 h_\nu(u) - \varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(h_\nu(u)), \tilde{w}(u))_G = \\ &= (\varkappa_\nu k_\nu^2 h_\nu(u) [1 - k_\nu^{-2} \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(1)], \tilde{w}(u))_G + (\varkappa_\nu h_\nu(u) \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(1) - \varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(h_\nu(u)), \tilde{w}(u))_G. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства неотрицательно, потому что  $h_\nu(u) \tilde{w}(u) \geq 0$  и  $1 - k_\nu^{-2} \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(1) \geq 0$  (см. (3.13)). Поэтому

$$b_\nu(u, \tilde{w}(u)) \geq (h_\nu(u) \tilde{w}(u), \varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(1))_G - (\varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(h_\nu(u)), \tilde{w}(u))_G.$$

Пользуясь свойством (3.15) самосопряженности оператора  $\varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega$  и элементарными формулами

$$h(u) = \sum_{i=1}^N h(u_i) \chi_i, \quad \tilde{w}(u) = \sum_{i=1}^N \tilde{w}(u_i) \chi_i, \quad 1 = \sum_{j=1}^N \chi_j,$$

имеем:

$$\begin{aligned} 2 b_\nu(u, \tilde{w}(u)) &\geq (h_\nu(u) \tilde{w}(u), \varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(1))_G + (\varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(1), h_\nu(u) \tilde{w}(u))_G - \\ &\quad - (\varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(h_\nu(u)), \tilde{w}(u))_G - (h_\nu(u), \varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(\tilde{w}(u)))_G = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_\nu(u_i) \tilde{w}(u_i) (\chi_i, \varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(\chi_j))_G + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_\nu(u_j) \tilde{w}(u_j) (\varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(\chi_i), \chi_j)_G - \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_\nu(u_i) \tilde{w}(u_j) (\varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(\chi_i), \chi_j)_G - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_\nu(u_j) \tilde{w}(u_i) (\chi_j, \varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(\chi_i))_G = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [h_\nu(u_i) - h_\nu(u_j)] [\tilde{w}(u_i) - \tilde{w}(u_j)] (\varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(\chi_i), \chi_j)_G \geq 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из монотонности функций  $h_\nu$ ,  $\tilde{w}$  и неотрицательности функции  $\langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(\chi_i)$ .

Пусть теперь  $u \in L^s(G)$ . Построим последовательность простых функций  $\{u^{(k)}\}_{k=1}^\infty$  такую, что  $u^{(k)} \rightarrow u$  в  $L^s(G)$  при  $k \rightarrow \infty$ . В силу доказанного выше  $b_\nu(u^{(k)}, \tilde{w}(u^{(k)})) \geq 0$ .

Заметим, что  $\sup_{u \in \mathbb{R}} |h'_\nu(u)| < \infty$ . Поэтому  $h_\nu(u^{(k)}) \rightarrow h_\nu(u)$  в  $L^s(G)$  и, как следствие,  $\langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(u^{(k)}) \rightarrow \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega(u)$  в  $L^1(G)$ . Кроме того,  $\tilde{w}(u^{(k)}) \rightarrow \tilde{w}(u)$  \*-слабо в  $L^\infty(G)$ . Поэтому

$$b_\nu(u, \tilde{w}(u)) = \lim_{k \rightarrow \infty} b_\nu(u^{(k)}, \tilde{w}(u^{(k)})) \geq 0.$$

Первое из неравенств (5.2) доказано. Аналогично доказывается и второе неравенство.  $\square$

**Следствие 5.1.** Пусть  $w$  — заданная на  $\mathbb{R}$  неубывающая непрерывная функция такая, что  $w(0) = 0$ . Тогда для всех  $n > 0$ ,  $M > 0$  справедливы неравенства

$$b(u, w(u^{[0,M]})) \geq 0, \quad b(u^{[n]}, w(u^{[0,M]})) \geq 0 \quad \forall u \in L^s(G). \quad (5.3)$$

*Доказательство.* Взяв  $\tilde{w}(u) = w(u^{[0,M]})$  в лемме 5.1, имеем:

$$\begin{aligned} b(u, w(u^{[0,M]})) &= 4\pi \int_{\mathcal{N}} b_\nu(u, w(u^{[0,M]})) d\nu + 4\pi \sum_{\ell} b_{\nu_\ell}(u, w(u^{[0,M]})) \Delta\nu_\ell \geq 0, \\ b(u^{[n]}, w(u^{[0,M]})) &= 4\pi \int_{\mathcal{N}} b_\nu(u^{[n]}, w(u^{[0,M]})) d\nu + 4\pi \sum_{\ell} b_{\nu_\ell}(u^{[n]}, w(u^{[0,M]})) \Delta\nu_\ell \geq 0. \end{aligned}$$

$\square$

Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 5.2.** Пусть функция  $u \in V_2(Q_T)$  удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} - \int_0^T (c_p u(t), v)_G \frac{d}{dt} \eta(t) dt &= \int_0^T (F(t), \nabla v)_G \eta(t) dt + \sum_{k=1}^K \int_0^T (f_k(t), v)_G \eta(t) dt \\ &\quad \forall v \in W_2^1(G), \quad \forall \eta \in C_0^\infty[0, T], \end{aligned} \quad (5.4)$$

где  $F \in L^2(0, T; (L^2(G))^3)$ ,  $f_k \in L^{r_k, q_k}(Q_T)$ ,  $1 \leq k \leq K$  с показателями  $r_k \in [1, \infty]$ ,  $q_k \in [6/5, \infty]$ , удовлетворяющими условию  $2/r_k + 3/q_k \leq 7/2$ . Тогда  $u \in C([0, T]; L^2(G))$ .

Это утверждение при  $c_p = \text{const} > 0$  является стандартным для теории параболических уравнений. В случае, когда  $c_p$  удовлетворяет условию  $(A_4)$ , его доказательство можно найти, например, в [10, лемма 4.1].

Напомним, что

$$\begin{aligned} u_+^0 &= \max\{u^0, 0\}, \quad u_-^0 = \max\{-u, 0\}, \quad f_+ = \max\{f, 0\}, \quad f_- = \max\{-f, 0\}, \\ u_+ &= \max\{u, 0\}, \quad u_- = \max\{-u, 0\}. \end{aligned}$$

**Лемма 5.3.** Пусть функция  $u \in V_2(Q_T) \cap C([0, T]; L^1(G))$  удовлетворяет интегральному тождеству

$$- \int_0^T (c_p u(t), v)_G \frac{d}{dt} \eta(t) dt = \int_0^T (F(t), \nabla v)_G \eta(t) dt + \int_0^T (g(t), v)_G \eta(t) dt \quad \forall v \in V, \quad \forall \eta \in C_0^\infty[0, T], \quad (5.5)$$

в котором  $F \in L^2(0, T; (L^2(G))^3)$ ,  $g \in L^1(Q_T)$ . Пусть  $w \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $w' \geq 0$ ,  $w(0) = 0$  и  $W^{(M)}(u) = \int_0^u w(s_+^{[M]}) ds$ , где  $M > 0$ . Тогда для всех  $t \in [0, T]$  справедливы равенства

$$\begin{aligned} \|c_p W^{(M)}(u_+(t))\|_{L^1(G)} &= \|c_p W^{(M)}(u_+(0))\|_{L^1(G)} + (F, \nabla w(u_+^{[M]}))_{Q_t} + (g, w(u_+^{[M]}))_{Q_t}, \\ \|c_p W^{(M)}(u_-(t))\|_{L^1(G)} &= \|c_p W^{(M)}(u_-(0))\|_{L^1(G)} - (F, \nabla w(u_-^{[M]}))_{Q_t} - (g, w(u_-^{[M]}))_{Q_t}. \end{aligned}$$

Доказательство этой леммы содержится в [10].

**Лемма 5.4.** Пусть  $u$  — слабое решение задачи  $\mathcal{P}_d$  или слабое решение задачи  $\mathcal{P}_d^{[n]}$ . Пусть  $U \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $U' \geq 0$ ,  $w(u) = \int_0^u (U'(s))^2 ds$ ,  $W(u) = \int_0^u w(s) ds$ .

Тогда для всех  $t \in [0, T]$  справедливы неравенства

$$\|c_p W(u_+^{[M]}(t))\|_{L^1(G)} + \lambda_{\min} \|\nabla U(u_+^{[M]})\|_{L^2(Q_t)}^2 \leq \|c_p W(u_+^0)\|_{L^1(G)} + (f_+, w(u_+^{[M]}))_{Q_t}, \quad (5.6)$$

$$\|c_p W(u_-^{[M]}(t))\|_{L^1(G)} + \lambda_{\min} \|\nabla U(u_-^{[M]})\|_{L^2(Q_t)}^2 \leq \|c_p W(u_-^0)\|_{L^1(G)} + (f_-, w(u_-^{[M]}))_{Q_t}. \quad (5.7)$$

*Доказательство.* В силу определения слабого решения задачи  $\mathcal{P}_d$  функция  $u$  удовлетворяет тождеству (5.5) с  $F(t) = -\lambda(\cdot, u(t))\nabla u(t)$ ,  $g(t) = -H(\cdot, u(t)) + \mathcal{H}_d[u(t)] + f(t)$ .

Положим  $W^{(M)}(u) = \int_0^u w(s_+^{[M]}) ds$ . Пользуясь неравенствами

$$W(u_+^{[M]}) \leq W^{(M)}(u_+) \leq W(u_+), \quad W(u_-^{[M]}) \leq W^{(M)}(u_-) \leq W(u_-)$$

и леммой 5.3, приходим к справедливым для всех  $t \in [0, T]$  неравенствам

$$\begin{aligned} \|c_p W(u_+^{[M]}(t))\|_{L^1(G)} + (\lambda(\cdot, u)\nabla u, \nabla w(u_+^{[M]}))_{Q_t} + (H(\cdot, u) - \mathcal{H}_d[u], w(u_+^{[M]}))_{Q_t} \leq \\ \leq \|c_p W^{(M)}(u_+^0)\|_{L^1(G)} + (f, w(u_+^{[M]}))_{Q_t} \leq \|c_p W(u_+^0)\|_{L^1(G)} + (f_+, w(u_+^{[M]}))_{Q_t}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \|c_p W(u_-^{[M]}(t))\|_{L^1(G)} + (\lambda(\cdot, u)\nabla u, \nabla w(u_-^{[M]}))_{Q_t} - (H(\cdot, u) - \mathcal{H}_d[u], w(u_-^{[M]}))_{Q_t} \leq \\ \leq \|c_p W^{(M)}(u_-^0)\|_{L^1(G)} + (f, w(u_-^{[M]}))_{Q_t} \leq \|c_p W(u_-^0)\|_{L^1(G)} + (f_-, w(u_-^{[M]}))_{Q_t}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} (\lambda(\cdot, u)\nabla u, \nabla w(u_+^{[M]}))_{Q_t} &= (\lambda(\cdot, u)\nabla u, (U'(u))^2 \nabla u_+^{[M]})_{Q_t} = \\ &= (\lambda(\cdot, u)\nabla U(u_+^{[M]}), \nabla U(u_+^{[M]}))_{Q_t} \geq \lambda_{\min} \|\nabla U(u_+^{[M]})\|_{L^2(Q_t)}^2. \end{aligned}$$

Аналогично

$$(\lambda(\cdot, u)\nabla u, \nabla w(u_-^{[M]}))_{Q_t} \geq \lambda_{\min} \|\nabla U(u_-^{[M]})\|_{L^2(Q_t)}^2.$$

Кроме того, в силу следствия 5.1 справедливы неравенства

$$\begin{aligned} (H(\cdot, u) - \mathcal{H}_d[u], w(u_+^{[M]}))_{Q_t} &= \int_0^t b(u(t'), w(u_+^{[M]}(t'))) dt' \geq 0, \\ -(H(\cdot, u) - \mathcal{H}_d[u], w(u_-^{[M]}))_{Q_t} &= \int_0^t b(-u(t'), w((-u)^{[0, M]}(t'))) dt' \geq 0. \end{aligned}$$

Поэтому из неравенств (5.8) и (5.9) следуют неравенства (5.6) и (5.7).

Совершенно аналогично устанавливаются неравенства (5.6) и (5.7) для слабого решения задачи  $\mathcal{P}_d^{[n]}$ . Единственное отличие состоит в том, что в неравенствах (5.8), (5.9) следует заменить  $H(\cdot, u) - \mathcal{H}_d[u]$  на  $H(\cdot, u^{[n]}) - \mathcal{H}_d[u^{[n]}]$  и воспользоваться справедливыми в силу следствия 5.1 неравенствами

$$\begin{aligned} (H(\cdot, u^{[n]}) - \mathcal{H}_d[u^{[n]}], w(u_+^{[M]}))_{Q_t} &= \int_0^t b(u^{[n]}(t'), w(u_+^{[M]}(t'))) dt' \geq 0, \\ -(H(\cdot, u^{[n]}) - \mathcal{H}_d[u^{[n]}], w(u_-^{[M]}))_{Q_t} &= \int_0^t b((-u)^{[n]}(t'), w((-u)^{[0, M]}(t'))) dt' \geq 0. \end{aligned}$$

□

**Следствие 5.2.** Пусть выполнены условия леммы 5.4 и функция  $U$  нечетна. Тогда для всех  $t \in [0, T]$  справедливо неравенство

$$\|c_p W(u^{[M]}(t))\|_{L^1(G)} + \lambda_{\min} \|\nabla U(u^{[M]})\|_{L^2(Q_t)}^2 \leq \|c_p W(u^0)\|_{L^1(G)} + (|f|, w(|u^{[M]}|))_{Q_t}. \quad (5.10)$$

**Теорема 5.1.** Пусть  $u$  — слабое решение задачи  $\mathcal{P}_d$  или слабое решение задачи  $\mathcal{P}_d^{[n]}$ .

Если  $u^0 \geq 0$  и  $f \geq 0$ , то  $u \geq 0$ . Если  $u^0 \leq 0$  и  $f \leq 0$ , то  $u \leq 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $u^0 \geq 0$  и  $f \geq 0$ . Тогда  $u_-^0 = 0$  и  $f_- = 0$ . Воспользуемся неравенством (5.7) с  $U(u) = u$ ,  $w(u) = u$ ,  $W(u) = \frac{1}{2}u^2$  и получим неравенство

$$\frac{1}{2} \|c_p^{1/2} u_-^{[M]}(t)\|_{L^2(G)}^2 + \lambda_{\min} \|\nabla u_-^{[M]}\|_{L^2(Q_t)}^2 \leq 0 \quad \forall t \in [0, T],$$

из которого следует, что  $u_-^{[M]} = 0$  для всех  $M > 0$ . Следовательно  $u_- = 0$ , т. е.  $u \geq 0$ .

Пусть  $u^0 \leq 0$  и  $f \leq 0$ . Тогда  $u_+^0 = 0$  и  $f_+ = 0$ . Воспользовавшись неравенством (5.6), приходим к неравенству

$$\frac{1}{2} \|c_p^{1/2} u_+^{[M]}(t)\|_{L^2(G)}^2 + \lambda_{\min} \|\nabla u_+^{[M]}\|_{L^2(Q_t)}^2 \leq 0 \quad \forall t \in [0, T],$$

из которого следует, что  $u_+ = 0$ , т. е.  $u \leq 0$ .  $\square$

**Следствие 5.3.** *Справедлива теорема 4.3.*

**Следствие 5.4.** *Если  $u^0 = 0$  и  $f = 0$ , то  $u = 0$ .*

**Теорема 5.2.** *Пусть для показателей  $p, r_0, q_0, r_*, q_*$ , входящих в условия  $(A_7)$ ,  $(A_8)$ , выполнены предположения (4.15) и пусть  $u$  — слабое решение задачи  $\mathcal{P}_d$  или слабое решение задачи  $\mathcal{P}_d^{[n]}$ . Тогда  $|u|^{\gamma-1}u \in V_2(Q_T)$  для всех  $\gamma \in [1, p/2]$ , причем справедлива оценка (4.16).*

*Доказательство.* Пусть  $\gamma \in [1, p/2]$ . Положим

$$U_\gamma(u) = |u|^{\gamma-1}u, \quad w_\gamma(u) = \int_0^u (U'_\gamma(s))^2 ds = \frac{\gamma^2}{2\gamma-1} |u|^{2\gamma-2}u,$$

$$W_\gamma(u) = \int_0^u w_\gamma(s) ds = \frac{\gamma}{2(2\gamma-1)} |u|^{2\gamma}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{4} (U_\gamma(u))^2 \leq W_\gamma(u) \leq \frac{1}{2} (U_\gamma(u))^2, \quad |w_\gamma(u)| \leq \gamma |U_\gamma(u)|^{2-1/\gamma},$$

то из неравенства (5.10) с учетом оценки (4.10) следует неравенство

$$\|U_\gamma(u^{[M]})\|_{V_2(Q_T)}^2 \leq C (\|u^0\|_{L^{2\gamma}(G)}^{2\gamma} + \gamma \|f_0\|_{L^{r_0, q_0}(Q_T)} \|U_\gamma(u^{[M]})\|_{L^{\bar{r}_0, \bar{q}_0}(Q_T)}^{2-1/\gamma} + \gamma \|J_*\|_{r_*, q_*} \|U_\gamma(u^{[M]})\|_{L^{\bar{r}_*, \bar{q}_*}(Q_T)}^{2-1/\gamma}). \quad (5.11)$$

Здесь  $\bar{r}_0 = (2-1/\gamma)r'_0$ ,  $\bar{q}_0 = (2-1/\gamma)q'_0$ ,  $\bar{r}_* = (2-1/\gamma)r'_*$ ,  $\bar{q}_* = (2-1/\gamma)q'_*$ . Несложно проверить, что эти показатели в роли  $r, q$  удовлетворяют условиям (2.2). Используя неравенство (2.3), выводим из (5.11) равномерную по  $M > 0$  оценку

$$\| |u^{[M]}|^{\gamma-1} u^{[M]} \|_{V_2(Q_T)}^{1/\gamma} \leq C (\|u^0\|_{L^p(G)} + \|f_0\|_{L^{r_0, q_0}(Q_T)} + \|J_*\|_{r_*, q_*}). \quad (5.12)$$

Поскольку  $u^{[M]} \rightarrow u$  в  $L^2(0, T; W^{1,2}(G))$  при  $M \rightarrow \infty$ , то из (5.12) следует, что  $|u|^{\gamma-1}u \in V_2(Q_T)$  и справедлива оценка (4.16).  $\square$

**Следствие 5.5.** *Справедлива теорема 4.1.*

**Теорема 5.3.** *Пусть для показателей  $p, r_0, q_0, r_*, q_*$ , входящих в условия  $(A_7)$ ,  $(A_8)$ , выполнены предположения (4.17) и пусть  $u$  — слабое решение задачи  $\mathcal{P}_d$  или слабое решение задачи  $\mathcal{P}_d^{[n]}$ . Тогда  $u \in L^\infty(Q)$  и справедлива оценка (4.18)*

*Доказательство.* Положим  $A = \|u^0\|_{L^\infty(G)} + \|f_0\|_{L^{r_0, q_0}(Q_T)} + \|J_*\|_{r_*, q_*}$ .

Если  $A = 0$ , то  $u = 0$  в силу следствия 5.4 и доказываемое утверждение очевидно.

Пусть  $A > 0$ . Поделим на  $A^{2\gamma}$  обе части неравенства (5.11), полученного при доказательстве теоремы 5.2, и получим неравенство

$$\|U_\gamma(\bar{u}^{[n]})\|_{V_2(Q_T)}^2 \leq C \|\bar{u}^0\|_{L^{2\gamma}(G)}^{2\gamma} + C\gamma (\|\bar{f}_0\|_{L^{r_0, q_0}(Q_T)} \|U_\gamma(\bar{u}^{[n]})\|_{L^{\bar{r}_0, \bar{q}_0}(Q_T)}^{2-1/\gamma} + \|\bar{J}_*\|_{r_*, q_*} \|U_\gamma(\bar{u}^{[n]})\|_{L^{\bar{r}_*, \bar{q}_*}(Q_T)}^{2-1/\gamma}), \quad (5.13)$$

в котором  $\bar{u} = u/A$ ,  $\bar{u}^0 = u^0/A$ ,  $\bar{f}_0 = f_0/A$ ,  $\bar{J}_* = J_*/A$ ,  $n = M/A$ .

Учитывая, что

$$\|\bar{u}^0\|_{L^\infty(G)} + \|\bar{f}_0\|_{L^{r_0, q_0}(Q_T)} + \|\bar{J}_*\|_{r_*, q_*} = 1,$$

и загрубляя неравенство (5.13), приходим к оценке

$$\|U_\gamma(\bar{u}^{[n]})\|_{V_2(Q_T)}^2 \leq C_{1\gamma} \left[ \|U_\gamma(\bar{u}^{[n]})\|_{L^{2r'_0, 2q'_0}(Q_T)}^2 + \|U_\gamma(\bar{u}^{[n]})\|_{L^{2r'_*, 2q'_*}(Q_T)}^2 + 1 \right].$$

В силу предположения (4.17) без ограничения общности можно считать, что с некоторым  $\delta \in (0, 1)$  выполнены неравенства  $2/r_0 + 3/q_0 \leq 2 - 3\delta$ ,  $2/r_* + 3/q_* \leq 2 - 3\delta$ .

Положим  $\gamma = \gamma_k = (1 + \delta)^k$ ,  $k \geq 0$  и получим неравенство

$$\|U_{\gamma_k}(\bar{u}^{[n]})\|_{V_2(Q_T)}^2 \leq C_1 \gamma_k \left[ \|U_{\gamma_{k-1}}(\bar{u}^{[n]})\|_{L^{\tilde{r}_0, \tilde{q}_0}(Q_T)}^{2(1+\delta)} + \|U_{\gamma_{k-1}}(\bar{u}^{[n]})\|_{L^{\tilde{r}_*, \tilde{q}_*}(Q_T)}^{2(1+\delta)} + 1 \right], \quad k \geq 1,$$

в котором  $\tilde{r}_0 = 2(1 + \delta)r'_0$ ,  $\tilde{q}_0 = 2(1 + \delta)q'_0$ ,  $\tilde{r}_* = 2(1 + \delta)r'_*$ ,  $\tilde{q}_* = 2(1 + \delta)q'_*$ .

Несложно проверить, что эти показатели в роли  $r$ ,  $q$  удовлетворяют условиям (2.2). Используя оценку (2.3), приходим к неравенству

$$\| |\bar{u}^{[n]}|^{\gamma_k-1} \bar{u}^{[n]} \|_{V_2(Q_T)}^2 \leq C_2 \gamma_k \left[ \| |\bar{u}^{[n]}|^{\gamma_k-2} \bar{u}^{[n]} \|_{V_2(Q_T)}^{2(1+\delta)} + 1 \right], \quad k \geq 1,$$

из которого для  $y_k = \| |\bar{u}^{[n]}|^{\gamma_k-1} \bar{u}^{[n]} \|_{V_2(Q_T)}^{2/\gamma_k} + 1$  следует неравенство

$$y_k \leq C_3^{1/\gamma_k} (1 + \delta)^{k/\gamma_k} y_{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Итерируя это неравенство, имеем

$$y_k \leq C_4 y_0 = C_3^\mu (1 + \delta)^\rho y_0, \quad k \geq 1,$$

где

$$\mu = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\ell} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \delta)^\ell}, \quad \rho = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\ell}{\gamma_\ell} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\ell}{(1 + \delta)^\ell},$$

$$y_0 = \| |\bar{u}^{[n]} \|_{V_2(Q_T)}^2 + 1 \leq \bar{y}_0 = \| \bar{u} \|_{V_2(Q_T)}^2 + 1.$$

Таким образом,

$$\| \bar{u}^{[n]} \|_{L^{2\gamma_k}(Q_T)} \leq \sqrt{T} \| |\bar{u}^{[n]}|^{\gamma_k-1} \bar{u}^{[n]} \|_{V_2(Q_T)}^{1/\gamma_k} \leq \sqrt{T} y_k \leq C_5 (\| \bar{u} \|_{V_2(Q_T)} + 1), \quad k \geq 1.$$

Предельный переход при  $k \rightarrow \infty$  дает оценку

$$\| \bar{u}^{[n]} \|_{L^\infty(Q_T)} \leq C_5 (\| \bar{u} \|_{V_2(Q_T)} + 1) \quad \forall n \geq 1.$$

Из нее следует, что  $u \in L^\infty(Q_T)$  и верна оценка

$$\| u \|_{L^\infty(Q_T)} \leq C_5 (\| u \|_{V_2(Q_T)} + A).$$

Принимая во внимание оценку (4.16) с  $\gamma = 1$ , приходим к неравенству (4.18).  $\square$

**Следствие 5.6.** *Справедлива теорема 4.2.*

## 6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.4

Приведенное в этом разделе доказательство использует некоторые идеи предложенного в [25] метода доказательства теорем сравнения для квазилинейных эллиптических уравнений. Для задач радиационно-кондуктивного теплообмена специальные варианты этого метода были использованы в [9, 10].

Положим

$$\begin{aligned} \Delta u &= u^1 - u^2, & \Delta u^0 &= u^{0,1} - u^{0,2}, & \Delta f &= f^1 - f^2, \\ \Delta u_+ &= \max\{\Delta u, 0\}, & \Delta u_+^0 &= \max\{\Delta u^0, 0\}, & \Delta f_+ &= \max\{\Delta f, 0\}, \\ \Delta u_- &= \max\{-\Delta u, 0\}, & \Delta u_-^0 &= \max\{-\Delta u^0, 0\}, & \Delta f_- &= \max\{-\Delta f, 0\} \end{aligned}$$

и введем множества

$$\begin{aligned} Q_T^{(+)} &= \{(x, t) \in Q_T \mid \Delta u(x, t) > 0\}, & Q_T^{(-)} &= \{(x, t) \in Q_T \mid \Delta u(x, t) \leq 0\}, \\ Q_T^\delta &= \{(x, t) \in Q_T \mid \Delta u(x, t) \geq \delta\}, \end{aligned}$$

где  $0 < \delta < 1$ ,  $\delta$  — параметр. Введем функцию  $v^\delta = \delta^{-1} \Delta u_+^{[\delta]} = \min\{\delta^{-1} \Delta u_+, 1\}$ . Заметим, что  $0 \leq v^\delta \leq 1$ , причем  $v^\delta(x, t) = 0$  для  $(x, t) \in Q_T^{(-)}$ ,  $v^\delta(x, t) = 1$  для  $x \in Q_T^\delta$  и  $\lim_{\delta \rightarrow 0} v^\delta(x, t) = 1$  для  $(x, t) \in Q_T^{(+)}$ .



Вычитая из тождества (4.14), отвечающего определению решения  $u^1$ , аналогичное тождество, отвечающее определению решения  $u^2$ , замечаем, что функция  $\Delta u$  в роли  $u$  удовлетворяет тождеству (5.5) с

$$F = \lambda(\cdot, u^2)\nabla u^2 - \lambda(\cdot, u^1)\nabla u^1, \quad g = -H(\cdot, u^1) + H(\cdot, u^2) + \mathcal{H}_d[u^1] - \mathcal{H}_d[u^2] + \Delta f.$$

Воспользуемся леммой 5.3 с  $w(u) = \delta^{-1}u$ ,  $M = \delta$ ,  $W^{(\delta)}(u) = \delta^{-1} \int_0^u s_+^{[\delta]} ds$ .

Из неравенства (5.6) с учетом неравенств

$$W^{(\delta)}(\Delta u_+^0) \leq \Delta u_+^0, \quad 0 \leq w(\Delta u_+^{[\delta]}) = v^\delta \leq 1$$

следует, что

$$\begin{aligned} & \|c_p W^{(\delta)}(\Delta u_+(t))\|_{L^1(G)} + (\lambda(\cdot, u^1)\nabla u^1 - \lambda(\cdot, u^2)\nabla u^2, \nabla v^\delta)_{Q_t} + I_t[b(u^1, v^\delta) - b(u^2, v^\delta)] \leq \\ & \leq \|c_p W^{(\delta)}(\Delta u_+^0)\|_{L^1(G)} + (\Delta f_+, v^\delta)_{Q_t} \leq \|c_p \Delta u_+^0\|_{L^1(G)} + \|\Delta f_+\|_{L^1(Q_t)} \quad \forall t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Воспользуемся тем, что  $\nabla v^\delta = \delta^{-1}\nabla(u^1 - u^2)$  почти всюду на  $Q_T^{(+)} \setminus Q_T^\delta$  и  $\nabla v^\delta = 0$  почти всюду на  $Q_T^{(-)} \cup Q_T^\delta$ . Используя предположения  $(A_5)$ ,  $(A_9)$ , имеем:

$$\begin{aligned} & (\lambda(\cdot, u^1)\nabla u^1 - \lambda(\cdot, u^2)\nabla u^2, \nabla v^\delta)_{Q_t} = \\ & = \delta(\lambda(\cdot, u^1)\nabla v^\delta, \nabla v^\delta)_{Q_t} + ([\lambda(\cdot, u^1) - \lambda(\cdot, u^2)]\nabla u^2, \nabla v^\delta)_{Q_t^{(+)} \setminus Q_t^\delta} \geq \\ & \geq \delta \lambda_{\min} \|\nabla v^\delta\|_{L^2(Q_t)}^2 - L\delta^{1/2} \|\nabla u^2\|_{L^2(Q_t^{(+)} \setminus Q_t^\delta)} \|\nabla v^\delta\|_{L^2(Q_t)} \geq -\frac{L^2}{4\lambda_{\min}} \|\nabla u^2\|_{L^2(Q_t^{(+)} \setminus Q_t^\delta)}^2. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Введем функции

$$\Delta h_\nu(x, t) = h_\nu(u^1(x, t)) - h_\nu(u^2(x, t)), \quad \Delta H(x, t) = H(x, u^1(x, t)) - H(x, u^2(x, t)).$$

Учитывая, что  $\Delta h_\nu > 0$  на  $Q_t^{(+)}$ ,  $\Delta h_\nu \leq 0$  на  $Q_t^{(-)}$ , верно равенство

$$b_\nu(u^1, v^\delta) - b_\nu(u^2, v^\delta) = (\varkappa_\nu k_\nu^2 \Delta h_\nu - \varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega (\Delta h_\nu), v^\delta)_G = (\varkappa_\nu k_\nu^2 \Delta h_\nu, v^\delta - k_\nu^{-2} \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega (v^\delta))_G$$

(мы воспользовались свойством (3.15) самосопряженности оператора  $\varkappa_\nu \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega$ ) и справедливы неравенства

$$0 \leq k_\nu^{-2} \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega (v^\delta) \leq k_\nu^{-2} \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega (1) \leq 1,$$

имеем

$$\begin{aligned} & I_t[b_\nu(u^1, v^\delta) - b_\nu(u^2, v^\delta)] = (\varkappa_\nu k_\nu^2 \Delta h_\nu, v^\delta - k_\nu^{-2} \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega (v^\delta))_{Q_t} = \\ & = (\varkappa_\nu k_\nu^2 \Delta h_\nu, v^\delta - k_\nu^{-2} \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega (v^\delta))_{Q_t^{(+)}} - (\varkappa_\nu \Delta h_\nu, \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega (v^\delta))_{Q_t^{(-)}} \geq \\ & \geq (\varkappa_\nu k_\nu^2 \Delta h_\nu, v^\delta - k_\nu^{-2} \langle \mathcal{A}_{d,\nu} \rangle_\Omega (1))_{Q_t^{(+)}} \geq (\varkappa_\nu k_\nu^2 \Delta h_\nu, v^\delta - 1)_{Q_t^{(+)}} = \\ & = (\varkappa_\nu k_\nu^2 \Delta h_\nu, v^\delta - 1)_{Q_t^{(+)} \setminus Q_t^\delta} \geq -\|\varkappa_\nu k_\nu^2 \Delta h_\nu\|_{L^1(Q_t^{(+)} \setminus Q_t^\delta)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & I_t[b(u^1, v^\delta) - b(u^2, v^\delta)] = 4\pi \int_{\mathcal{N}} I_t[b_\nu(u^1, v^\delta) - b_\nu(u^2, v^\delta)] d\nu + 4\pi \sum_\ell I_t[b_{\nu_\ell}(u^1, v^\delta) - b_{\nu_\ell}(u^2, v^\delta)] \Delta \nu_\ell \geq \\ & \geq -4\pi \int_{\mathcal{N}} \|\varkappa_\nu k_\nu^2 \Delta h_\nu\|_{L^1(Q_t^{(+)} \setminus Q_t^\delta)} d\nu - 4\pi \sum_\ell \|\varkappa_{\nu_\ell} k_{\nu_\ell}^2 \Delta h_{\nu_\ell}\|_{L^1(Q_t^{(+)} \setminus Q_t^\delta)} \Delta \nu_\ell = \\ & = -\left\| 4\pi \int_{\mathcal{N}} \varkappa_\nu k_\nu^2 \Delta h_\nu d\nu + 4\pi \sum_\ell \varkappa_{\nu_\ell} k_{\nu_\ell}^2 \Delta h_{\nu_\ell} \Delta \nu_\ell \right\|_{L^1(Q_t^{(+)} \setminus Q_t^\delta)} = -\|\Delta H\|_{L^1(Q_t^{(+)} \setminus Q_t^\delta)}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Из неравенства (6.1) с учетом оценок (6.2), (6.3) следует, что

$$\begin{aligned} \|c_p W^{(\delta)}(\Delta u_+(t))\|_{L^1(G)} - \frac{L^2}{4\lambda_{\min}} \|\nabla u^2\|_{L^2(Q_t^{(+)} \setminus Q_t^\delta)}^2 - \|\Delta H\|_{L^1(Q_t^{(+)} \setminus Q_t^\delta)} &\leq \\ &\leq \|c_p \Delta u_+^0\|_{L^1(G)} + \|\Delta f_+\|_{L^1(Q_t)} \quad \forall t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Поскольку  $\Delta u_+ - \delta \leq W^{(\delta)}(\Delta u_+) \leq \Delta u_+$ , то  $\|c_p W^{(\delta)}(\Delta u_+(t))\|_{L^1(G)} \rightarrow \|c_p \Delta u_+(t)\|_{L^1(G)}$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Второе и третье слагаемые в левой части (6.4) стремятся к нулю при  $\delta \rightarrow 0$ , так как  $\text{meas}(Q_t^{(+)} \setminus Q_t^\delta) \rightarrow 0$ .

Переходя к пределу в (6.4), выводим неравенство

$$\|c_p \Delta u_+(t)\|_{L^1(G)} \leq \|c_p \Delta u_+^0\|_{L^1(G)} + \|\Delta f_+\|_{L^1(Q_t)} \quad \forall t \in (0, T]. \quad (6.5)$$

Совершенно аналогично доказывается неравенство

$$\|c_p \Delta u_-(t)\|_{L^1(G)} \leq \|c_p \Delta u_-^0\|_{L^1(G)} + \|\Delta f_-\|_{L^1(Q_t)} \quad \forall t \in (0, T]. \quad (6.6)$$

Складывая (6.5) и (6.6), приходим к неравенству

$$\|c_p \Delta u(t)\|_{L^1(G)} \leq \|c_p \Delta u^0\|_{L^1(G)} + \|\Delta f\|_{L^1(Q_t)} \quad \forall t \in (0, T]. \quad (6.7)$$

Из неравенств (6.5)–(6.7) следуют оценки (4.19)–(4.21).

## 7. РАЗРЕШИМОСТЬ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ $\mathcal{P}_d^{[n]}$

**Теорема 7.1.** Пусть выполнены условия  $(A_1)$ – $(A_8)$ . Пусть показатели  $p, q_0, r_0, p_*, q_*$ , входящие в условия  $(A_7)$ ,  $(A_8)$ , таковы, что:

$$p = 2, \quad r_0, r_* \in [1, 2], \quad q_0, q_* \in [6/5, 2], \quad 2/r_0 + 3/q_0 = 7/2, \quad 2/r_* + 3/q_* = 7/2. \quad (7.1)$$

Тогда у задачи  $\mathcal{P}_d^{[n]}$  существует слабое решение  $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$ .

*Доказательство.* Возьмем в  $W^{1,2}(G)$  базис  $\{e_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ , ортонормированный в  $L^2(G)$  с весом  $c_p$ . Как нетрудно видеть, можно считать, что  $e_\ell \in V = W^{1,2}(G) \cap L^\infty(G)$  для всех  $\ell \geq 1$ . Положим  $V_k = \text{span} \{e_1, \dots, e_k\}$ ,  $k \geq 1$ . Будем искать приближенное решение задачи  $\mathcal{P}_d^{[n]}$  в виде  $u^{(k)}(t) = \sum_{\ell=1}^k d_\ell^{(k)}(t) e_\ell$ , определяя коэффициенты  $d_\ell^{(k)}$  из системы уравнений метода Галеркина:

$$\begin{aligned} \left( c_p \frac{d}{dt} u^{(k)}(t), v \right)_G + a(u^{(k)}(t), v) + b((u^{(k)})^{[n]}(t), v) &= (f(t), v)_G \quad \forall v \in V_k, \\ u^{(k)}(0) = u^{0,k} &= \sum_{\ell=1}^k (c_p u^0, e_\ell)_G e_\ell. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Заметим, что  $u^{0,k} \rightarrow u^0$  в  $L^2(G)$  при  $k \rightarrow \infty$ , причем  $\|c_p^{1/2} u^{0,k}\|_{L^2(G)} \leq \|c_p^{1/2} u^0\|_{L^2(G)}$ .

Существование локального по  $t$  решения  $u^{(k)}$  следует из теоремы Каратеодори. То, что решение  $u^{(k)}$  определено на всем интервале  $(0, T)$ , следует из глобальной по времени априорной оценки

$$\|u^{(k)}\|_{V_2(Q_T)} \leq C_1 (\|u^0\|_{L^2(G)} + \|f_0\|_{L^{r_0, q_0}(Q_T)} + \|f_*\|_{L^{r_*, q_*}(Q_T)}). \quad (7.3)$$

Для того, чтобы получить эту оценку, подставим в (7.2)  $v = u^{(k)}(t)$ , воспользуемся условием  $(A_5)$ , справедливым в силу следствия 5.1 неравенством  $0 \leq b((u^{(k)})^{[n]}, u^{(k)})$  и получим неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|c_p^{1/2} u^{(k)}(t)\|_{L^2(G)}^2 + \lambda_{\min} \|\nabla u^{(k)}(t)\|_{L^2(G)}^2 \leq (f_0(t), u^{(k)}(t))_G + (f_*(t), u^{(k)}(t))_G.$$

Интегрируя его и используя неравенство Гельдера, выводим на  $(0, T)$  неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|c_p^{1/2} u^{(k)}(t)\|_{L^2(G)}^2 + \lambda_{\min} \|\nabla u^{(k)}\|_{L^2(Q_t)}^2 &\leq \frac{1}{2} \|c_p^{1/2} u^0\|_{L^2(G)}^2 + \\ &+ \|f_0\|_{L^{r_0, q_0}(Q_T)} \|u^{(k)}\|_{L^{r'_0, q'_0}(Q_T)} + \|f_*\|_{L^{r_*, q_*}(Q_T)} \|u^{(k)}\|_{L^{r'_*, q'_*}(Q_T)} \end{aligned} \quad (7.4)$$

с показателями  $r'_0, r'_* \in [2, \infty]$ ,  $q'_0, q'_* \in [2, 6]$ , которые в силу предположения (7.1) удовлетворяют равенствам  $2/r'_0 + 3/q'_0 = 3/2$ ,  $2/r'_* + 3/q'_* = 3/2$ . Применяя неравенство (2.3), приходим от (7.4) к оценке (7.3).

Выведем еще одну оценку. Применяя к (7.2) оператор  $\Delta^{(\tau)} I_t$  и учитывая оценку (2.1) и следующую из леммы 4.2 оценку

$$\begin{aligned} |b((u^{(k)})^{[n]}, v)| &\leq (\|H(\cdot, (u^{(k)})^{[n]})\|_{L^\infty(G)} + \|\mathcal{H}[(u^{(k)})^{[n]}]\|_{L^\infty(G)}) \|v\|_{L^1(G)} \leq \\ &\leq 2\|H(\cdot, n)\|_{L^\infty(G)} \|v\|_{L^1(G)} \leq 2c_H(n^s + 1) \|v\|_{L^1(G)}, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} (c_p \Delta^{(\tau)} u^{(k)}(t), v)_G &= \Delta^{(\tau)} I_t \left[ -a(u^{(k)}, v) - b((u^{(k)})^{[n]}, v) + (f, v)_G \right] \leq \\ &\leq \lambda_{\max} \Delta^{(\tau)} I_t \|\nabla u^{(k)}\|_{L^2(G)} \|\nabla v\|_{L^2(G)} + 2\tau c_H(n^s + 1) \|v\|_{L^1(G)} + \\ &\quad + \Delta^{(\tau)} I_t \|f_0\|_{L^{q_0}(G)} \|v\|_{L^{q'_0}(G)} + \Delta^{(\tau)} I_t \|f_*\|_{L^{q_*}(G)} \|v\|_{L^{q'_*}(G)}. \end{aligned}$$

Взяв  $v = \Delta^{(\tau)} u^{(k)}(t)$ , проинтегрировав полученное неравенство по  $t$  от 0 до  $T - \tau$  и воспользовавшись неравенством (2.1), получим

$$\begin{aligned} c_p \|\Delta^{(\tau)} u^{(k)}\|_{L^2(Q_{T-\tau})}^2 &\leq 2\tau \lambda_{\max} \|\nabla u^{(k)}\|_{L^2(Q_T)}^2 + 4\tau c_H(n^s + 1) \|u^{(k)}\|_{L^1(Q_T)} + \\ &\quad + 2\tau \|f_0\|_{L^{r_0, q_0}(Q_T)} \|u^{(k)}\|_{L^{r'_0, q'_0}(Q_T)} + 2\tau \|f_*\|_{L^{r_*, q_*}(Q_T)} \|u^{(k)}\|_{L^{r'_*, q'_*}(Q_T)}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание оценку (7.3), приходим к неравенству

$$\|\Delta^{(\tau)} u^{(k)}\|_{L^2(Q_{T-\tau})} \leq C_2 \tau^{1/2} (\|u^0\|_{L^2(G)} + \|f_0\|_{L^{r_0, q_0}(Q_T)} + \|f_*\|_{L^{r_*, q_*}(Q_T)} + n^s + 1). \quad (7.5)$$

В силу оценки (7.3) существуют функция  $u \in V_2(Q_T)$  и подпоследовательность  $\{u^{(k_\ell)}\}_{\ell=1}^\infty$  такие, что  $u^{(k_\ell)} \rightarrow u$  слабо в  $L^2(0, T; W^{1,2}(G))$  и  $*$ -слабо в  $L^\infty(0, T; L^2(G))$ .

Оценки (7.3), (7.5) в силу критерия Рисса предкомпактности в  $L^2(Q_T)$  позволяют выделить подпоследовательность такую, что  $u^{(k_\ell)} \rightarrow u$  сильно в  $L^2(Q_T)$  и п.в. в  $Q_T$ .

Заметим, что  $\lambda(\cdot, u^{(k_\ell)}) \nabla u^{(k_\ell)} \rightarrow \lambda(\cdot, u) \nabla u$  слабо в  $L^2(Q_T)$  и поэтому  $a(u^{(k_\ell)}, v) \rightarrow a(u, v)$  слабо в  $L^1(0, T)$  для всех  $v \in W^{1,2}(G)$ .

Как нетрудно видеть,  $(u^{(k_\ell)})^{[n]} \rightarrow u^{[n]}$  в  $L^s(Q_T)$ . Как следствие,  $H(\cdot, (u^{(k_\ell)})^{[n]}) \rightarrow H(\cdot, u^{[n]})$  и  $\mathcal{H}_d[(u^{(k_\ell)})^{[n]}] \rightarrow \mathcal{H}_d[u^{[n]}]$  в  $L^1(Q_T)$ . Поэтому  $b((u^{(k_\ell)})^{[n]}, v) \rightarrow b(u^{[n]}, v)$  сильно в  $L^1(0, T)$  для всех  $v \in L^\infty(G)$ .

Возьмем произвольную функцию  $\eta \in C_*^\infty[0, T]$ . Умножим (7.2) на  $\eta(t)$  и проинтегрируем результат по  $t$  от 0 до  $T$ :

$$\begin{aligned} - \int_0^T (c_p u^{(k)}(t), v)_G \frac{d}{dt} \eta(t) dt + \int_0^T a(u^{(k)}(t), v) \eta(t) dt + \int_0^T b((u^{(k)})^{[n]}(t), v) \eta(t) dt = \\ = (c_p u^{0,k}, v)_G \cdot \eta(0) + \int_0^T (f(t), v)_G \eta(t) dt. \end{aligned}$$

Переходя в этом тождестве к пределу при  $k = k_\ell \rightarrow \infty$ , устанавливаем справедливость тождества (5.1) для произвольной функции  $v \in \bigcup_{k=1}^\infty V_k$ . Поскольку множество  $\bigcup_{k=1}^\infty V_k$  всюду плотно в  $W^{1,2}(G)$ , то справедливо тождество (5.1).

Как нетрудно видеть, функция  $u$  удовлетворяет тождеству (5.4) с

$$\begin{aligned} F(t) &= -\lambda(\cdot, u(t)) \nabla u(t) \in L^2(0, T; [L^2(G)]^3), \quad f_1(t) = f_0(t) \in L^{r_0, q_0}(Q_T), \\ f_2(t) &= f_*(t) \in L^{r_*, q_*}(Q_T), \quad f_3(t) = \mathcal{H}_d[u^{[n]}(t)] - H(\cdot, u^{[n]}(t)) \in L^\infty(Q_T) \subset L^{1,2}(Q_T) \text{ и } K = 3. \end{aligned}$$

Поэтому в силу леммы 5.2 справедливо свойство  $u \in C([0, T]; L^2(G))$ . Таким образом,  $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$ .  $\square$

8. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ  $\mathcal{P}_d$ 

Приведем доказательство теорем 4.7 и 4.8 о разрешимости задачи  $\mathcal{P}_d$ .

*Доказательство теоремы 4.7.* В силу теорем 7.1 и 5.3 для всякого  $n > 0$  существует функция  $u \in V_2^{1,0}(Q_T) \cap L^\infty(Q_T)$ , являющаяся слабым решением задачи  $\mathcal{P}_d^{[n]}$  и удовлетворяющая оценке (4.18). Возьмем  $n > M_\infty$ . Ясно, что  $u \in \mathcal{V}(Q_T)$  и  $u^{[n]} = u$ . Поэтому слабое решение задачи  $\mathcal{P}_d^{[n]}$  одновременно является и слабым решением задачи  $\mathcal{P}_d$ .

Теорема доказана.  $\square$

*Доказательство теоремы 4.8.* Пусть  $L < 0 < M$  — целые числа. Поскольку  $(u^0)^{[L,M]} \in L^\infty(G)$ ,  $f_0^{[L,M]}, f_*^{[L,M]} \in L^\infty(Q_T) \subset L^{\infty,2}(Q_T)$ , то в силу теоремы 4.7 задача  $\mathcal{P}_d$  с  $(u^0)^{[L,M]}$ ,  $f_0^{[L,M]}$  и  $f_*^{[L,M]}$  в роли  $u^0$ ,  $f_0$  и  $f_*$  имеет слабое решение  $u^{(L,M)}$ , удовлетворяющее тождеству

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (c_p u^{(L,M)}(t), v)_G \frac{d}{dt} \eta(t) dt + \int_0^T a(u^{(L,M)}(t), v) \eta(t) dt + \int_0^T b(u^{(L,M)}(t), v) \eta(t) dt = \\ & = (c_p (u^0)^{[L,M]}, v)_G \cdot \eta(0) + \int_0^T (f_0^{[L,M]}(t) + f_*^{[L,M]}(t), v)_G \eta(t) dt \quad \forall v \in V, \quad \forall \eta \in C_*^\infty[0, T]. \end{aligned} \quad (8.1)$$

В силу теоремы 4.1 для всех  $\gamma \in [1, p/2]$  справедлива равномерная по параметрам  $L$  и  $M$  оценка

$$\| |u^{(L,M)}|^{\gamma-1} u^{(L,M)} \|_{V_2(Q_T)}^{1/\gamma} \leq C (\|u^0\|_{L^p(G)} + \|f_0\|_{L^{r_0, q_0}(Q_T)} + \| |J_*| \|_{r_*, q_*}). \quad (8.2)$$

Поскольку по условию  $p \geq 3s/5$ , то следствием этой оценки с  $\gamma = p/2$  и неравенства (2.4) является оценка

$$\|u^{(L,M)}\|_{L^s(Q_T)} \leq C (\|u^0\|_{L^p(G)} + \|f_0\|_{L^{r_0, q_0}(Q_T)} + \| |J_*| \|_{r_*, q_*}). \quad (8.3)$$

Поскольку  $(u^0)^{[L,M]} \leq (u^0)^{[L, M+1]}$ ,  $f_0^{[L,M]} \leq f_0^{[L, M+1]}$  и  $f_*^{[L,M]} \leq f_*^{[L, M+1]}$  для всех  $M \geq 1$ , то в силу теоремы 4.6 справедливо неравенство  $u^{(L,M)} \leq u^{(L, M+1)}$ .

Из оценки (8.3) в силу теоремы Фату следует, что существует функция  $u^{(L)} \in L^s(Q_T)$  такая, что  $u^{(L,M)} \rightarrow u^{(L)}$  п.в. на  $Q_T$  и сильно в  $L^s(Q_T)$  при  $M \rightarrow \infty$ .

Из оценки (8.2) с  $\gamma = 1$  следует, что  $u^{(L)} \in V_2(Q_T)$  и  $u^{(L,M)} \rightarrow u^{(L)}$  слабо в  $L^2(0, T; W^{1,2}(G))$  и \*-слабо в  $L^\infty(0, T; L^2(G))$ .

Предельный переход при  $M \rightarrow \infty$  в оценках (8.2) с  $\gamma = 1$  и (8.3) приводит к неравенствам

$$\|u^{(L)}\|_{V_2(Q_T)} \leq C (\|u^0\|_{L^p(G)} + \|f_0\|_{L^{r_0, q_0}(Q_T)} + \| |J_*| \|_{r_*, q_*}), \quad (8.4)$$

$$\|u^{(L)}\|_{L^s(Q_T)} \leq C (\|u^0\|_{L^p(G)} + \|f_0\|_{L^{r_0, q_0}(Q_T)} + \| |J_*| \|_{r_*, q_*}). \quad (8.5)$$

Так как  $\nabla u^{(L,M)} \rightarrow \nabla u^{(L)}$  слабо в  $L^2(Q_T)$ ,  $\lambda(\cdot, u^{(L,M)}) \rightarrow \lambda(\cdot, u^{(L)})$  п.в. на  $Q_T$  и \*-слабо в  $L^\infty(Q_T)$ , то  $a(u^{(L,M)}, v) \rightarrow a(u^{(L)}, v)$  слабо в  $L^1(0, T)$  при  $M \rightarrow \infty$  для всех  $v \in W^{1,2}(G)$ .

Поскольку  $u^{(L,M)} \rightarrow u^{(L)}$  в  $L^s(Q_T)$ , то  $H(\cdot, u^{(L,M)}) \rightarrow H(\cdot, u^{(L)})$  и  $\mathcal{H}_d[u^{(L,M)}] \rightarrow \mathcal{H}_d[u^{(L)}]$  в  $L^1(Q_T)$ . Как следствие,  $b(u^{(L,M)}, v) \rightarrow b(u^{(L)}, v)$  в  $L^1(0, T)$  для всех  $v \in L^\infty(Q_T)$ .

Переходя к пределу при  $M \rightarrow \infty$  в тождестве (8.1) и учитывая, что  $(u^0)^{[L,M]} \rightarrow (u^0)^{[L, \infty]}$  в  $L^1(G)$ ,  $f_0^{[L,M]} \rightarrow f_0^{[L, \infty]}$  и  $f_*^{[L,M]} \rightarrow f_*^{[L, \infty]}$  в  $L^1(Q_T)$ , приходим к тождеству

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (c_p u^{(L)}(t), v)_G \frac{d}{dt} \eta(t) dt + \int_0^T a(u^{(L)}(t), v) \eta(t) dt + \int_0^T b(u^{(L)}(t), v) \eta(t) dt = \\ & = (c_p (u^0)^{[L, \infty]}, v)_G \cdot \eta(0) + \int_0^T (f_0^{[L, \infty]}(t) + f_*^{[L, \infty]}(t), v)_G \eta(t) dt \quad \forall v \in V, \quad \forall \eta \in C_*^\infty[0, T]. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Из теоремы 4.4 для всех  $M, N \geq 1$  следует оценка

$$\|c_p(u^{(L,M)} - u^{(L,N)})\|_{C([0,T];L^1(G))} \leq \|c_p((u^0)^{(L,M)} - (u^0)^{(L,N)})\|_{L^1(G)} + \\ + \|f_0^{[L,M]} - f_0^{[L,N]}\|_{L^1(Q_T)} + \|f_*^{[L,M]} - f_*^{[L,N]}\|_{L^1(Q_T)}, \quad (8.7)$$

говорящая о фундаментальности последовательности  $\{u^{(L,M)}\}_{M=1}^\infty$  в  $C([0,T];L^1(G))$ . Значит,  $u^{(L)} \in C([0,T];L^1(G))$ . Таким образом, функция  $u^{(L)}$  является слабым решением задачи  $\mathcal{P}_d$ , отвечающим данным  $(u^0)^{[L,\infty]}$ ,  $f_0^{[L,\infty]}$  и  $f_*^{[L,\infty]}$  в роли  $u^0$ ,  $f_0$  и  $f_*$ .

Из неравенств  $(u^0)^{[L-1,\infty]} \leq (u^0)^{[L,\infty]}$ ,  $f_0^{[L-1,\infty]} \leq f_0^{[L,\infty]}$ ,  $f_*^{[L-1,\infty]} \leq f_*^{[L,\infty]}$  в силу теоремы 4.6 следует, что  $u^{(L-1)} \leq u^{(L)}$ . Сходимость при  $L \rightarrow -\infty$  снова носит монотонный характер, причем из оценок (8.4), (8.5) следует, что существует функция  $u \in V_2(Q_T) \cap L^s(Q_T)$  такая, что  $u^{(L)} \rightarrow u$  слабо в  $L^2(0,T;W^{1,2}(G))$ , \*-слабо в  $L^\infty(0,T;L^2(G))$ , сильно в  $L^s(Q_T)$  и п.в. на  $Q_T$  при  $L \rightarrow -\infty$ . Как следствие,  $a(u^{(L)}, v) \rightarrow a(u, v)$  слабо в  $L^1(0,T)$  и  $b(u^{(L)}, v) \rightarrow b(u, v)$  сильно в  $L^1(0,T)$  для всех  $v \in V$ .

Предельный переход при  $L \rightarrow -\infty$  в тождестве (8.6) дает тождество (4.14).

Из теоремы 4.4 для всех  $L, N \leq -1$  следует, что

$$\|c_p(u^{(L)} - u^{(N)})\|_{C([0,T];L^1(G))} \leq \|c_p((u^0)^{[L,\infty]} - (u^0)^{[N,\infty]})\|_{L^1(G)} + \\ + \|f_0^{[L,\infty]} - f_0^{[N,\infty]}\|_{L^1(Q_T)} + \|f_*^{[L,\infty]} - f_*^{[N,\infty]}\|_{L^1(Q_T)}.$$

Таким образом, последовательность  $\{u^{(L)}\}_{L=-1}^{-\infty}$  фундаментальна в  $C([0,T];L^1(G))$ . Поэтому  $u \in C([0,T];L^1(G))$ .

Существование слабого решения доказано. Единственность следует из теоремы 4.5.  $\square$

## 9. РЕГУЛЯРНОСТЬ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ

*Доказательство теоремы 4.9.* Пусть  $u$  — слабое решение задачи  $\mathcal{P}_d$ , а  $u_j$  — сужение  $u$  на  $Q_{jT} = G_j \times (0, T)$ . Положим  $F = \mathcal{H}_d(u) - H(\cdot, u_j) + f_0 + f_*$ . Из теоремы 4.2 следует, что  $u \in L^\infty(Q_T)$  и верна оценка (4.18). Как следствие,  $F \in L^2(Q_{jT})$ , причем

$$\|F\|_{L^2(Q_{jT})} \leq C \left( \|u^0\|_{L^\infty(G)}^s + \|f_0\|_{L^{q_0, r_0}(Q_T)}^s + \|J_*\|_{q_*, r_*}^s + 1 \right). \quad (9.1)$$

Заметим, что функция  $u_j$  удовлетворяет интегральному тождеству

$$- \int_0^T (c_p u_j, v)_{G_j} \frac{d}{dt} \eta(t) dt + \int_0^T (\nabla \Lambda_j(u_j(t)), \nabla v)_{G_j} \eta(t) dt = \\ = (c_p u^0, v)_{G_j} \eta(0) + \int_0^T (F(t), v)_{G_j} \eta(t) dt \quad \forall v \in W^{1,2}(G_j), \quad \forall \eta \in C_*^\infty[0, T], \quad (9.2)$$

т. е. является слабым решением задачи

$$c_p D_t u_j - \Delta \Lambda_j(u_j) = F, \quad (x, t) \in Q_{jT}, \quad (9.3)$$

$$\nabla \Lambda_j(u_j) \cdot n_j = 0, \quad (x, t) \in \partial G_j \times (0, T), \quad (9.4)$$

$$u_j|_{t=0} = u^0, \quad x \in G_j. \quad (9.5)$$

Заметим, что слабое решение этой задачи единственно. Это следует из теоремы 4.5 в частном случае, когда  $G = G_j$  и  $H(x, u) = 0$ ,  $\mathcal{H}_d[u] = 0$ , т. е.  $\mathfrak{N} = \emptyset$ .

Выведем дополнительные оценки решения задачи (9.3)–(9.5), используя нелинейный вариант метода Галеркина. Возьмем в  $W^{1,2}(G_j)$  ортонормированный базис  $\{e_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ . Положим  $V_k = \text{span} \{e_1, \dots, e_k\}$ ,  $k \geq 1$ . Будем искать приближенное решение  $u^{(k)}$  задачи такое, что  $U^{(k)}(t) =$

$$\Lambda_j(u^{(k)}(t)) = \sum_{\ell=1}^k d_\ell^{(k)}(t)e_\ell, \text{ определяя коэффициенты } d_\ell^{(k)} \text{ из системы уравнений метода Галеркина:}$$

$$(c_p D_t u^{(k)}(t), v)_{G_j} + (\nabla U^{(k)}(t), \nabla v)_{G_j} = (F(t), v)_{G_j} \quad \forall v \in V_k, \quad (9.6)$$

$$U^{(k)}(0) = \sum_{\ell=1}^k (\Lambda_j(u^0), e_\ell)_{W^{1,2}(G_j)} e_\ell. \quad (9.7)$$

Заметим, что  $U^{(k)}(0) \rightarrow \Lambda_j(u^0)$  в  $W^{1,2}(G_j)$ ,  $u^{(k)}(0) \rightarrow u^0$  в  $W^{1,2}(G_j)$  при  $k \rightarrow \infty$ , причем  $\|U^{(k)}(0)\|_{W^{1,2}(G_j)} \leq \|\Lambda_j(u^0)\|_{W^{1,2}(G_j)} \leq \lambda_{\max} \|u^0\|_{W^{1,2}(G_j)}$ .

Как нетрудно видеть,  $c_p(x) D_t u^{(n)} = \alpha(x, U^{(n)}) D_t U^{(n)}$ , где

$$\alpha(x, U) = c_p(x) / \lambda(\Lambda_j^{-1}(U)) \geq \alpha_{\min} = c_p / \lambda_{\max}.$$

Система уравнений (9.6) может быть записана в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{d}^{(k)}(t)) \frac{d}{dt} \mathbf{d}^{(k)}(t) + \mathbf{B} \mathbf{d}^{(k)}(t) = \mathbf{F}(t),$$

где  $\mathbf{d}^{(k)} = (d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \dots, d_k^{(k)})^T$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{d})$  — самосопряженная матрица с непрерывными по  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_k)^T$  элементами  $a_{i\ell}(\mathbf{d}) = \left( \alpha(\cdot, \sum_{s=1}^k d_s e_s) e_i, e_\ell \right)_{G_j}$ ,  $\mathbf{B}$  — матрица с элементами  $b_{i\ell} = (\nabla e_i, \nabla e_\ell)_G$ , а  $\mathbf{F}(t) = ((F(t), e_1)_{G_j}, (F(t), e_2)_{G_j}, \dots, (F(t), e_k)_{G_j})^T$ .

Матрица  $\mathbf{A}(\mathbf{d})$  невырождена, так как

$$\sum_{i=1}^k \sum_{\ell=1}^k a_{i\ell}(\mathbf{d}^{(k)}) \xi_i \xi_\ell = \left( \alpha\left(\cdot, \sum_{s=1}^k d_s^{(k)} e_s\right) \sum_{i=1}^k \xi_i e_i, \sum_{\ell=1}^k \xi_\ell e_\ell \right)_{G_j} \geq \alpha_{\min} \left\| \sum_{i=1}^k \xi_i e_i \right\|_{L^2(G_j)}^2.$$

Поэтому существование локального по времени решения задачи (9.6), (9.7) следует из теоремы Каратеодори. Разрешимость на всем интервале  $(0, T)$  следует из априорной оценки

$$\|D_t U^{(k)}\|_{L^2(Q_{jT})} + \|\nabla U^{(k)}\|_{C([0, T]; (L^2(G_j))^3)} \leq C \left( \|u^0\|_{W^{1,2}(G_j)} + \|F\|_{L^2(Q_{jT})} \right). \quad (9.8)$$

Докажем справедливость этой оценки. Взяв  $v = D_t U^{(k)}$  в (9.6), получим

$$(\alpha(\cdot, U^{(k)}) D_t U^{(k)}, D_t U^{(k)})_{G_j} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla U^{(k)}\|_{L^2(G_j)}^2 = (F, D_t U^{(k)})_{G_j}.$$

Интегрируя это равенство по  $t$ , имеем:

$$\begin{aligned} \alpha_{\min} \|D_t U^{(k)}\|_{L^2(Q_{jt})}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla U^{(k)}(t)\|_{L^2(G_j)}^2 &\leq \frac{1}{2} \|\nabla U^{(k)}(0)\|_{L^2(G_j)}^2 + (F, D_t U^{(k)})_{Q_{jt}} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \lambda_{\max} \|\nabla u^0\|_{L^2(G_j)}^2 + \|F\|_{L^2(Q_{jt})} \|D_t U^{(k)}\|_{L^2(Q_{jt})} \quad \forall t \in (0, T). \end{aligned}$$

Из полученного неравенства следуют оценка (9.8) и оценка

$$\|D_t u^{(k)}\|_{L^2(Q_{jT})} + \|\nabla u^{(k)}\|_{C([0, T]; (L^2(G_j))^3)} \leq C \left( \|\nabla u^0\|_{L^2(G_j)} + \|F\|_{L^2(Q_{jT})} \right).$$

Из доказанных оценок следует, что существуют функция  $\tilde{u} \in W^{1,2}(Q_{jT})$  и подпоследовательность  $\{u^{(k_m)}\}_{m=1}^\infty$  такие, что  $\Lambda_j(\tilde{u}) \in L^\infty(0, T; W^{1,2}(G_j))$ ,  $u^{(k_m)} \rightarrow \tilde{u}$  сильно в  $L^2(Q_{jT})$ ,  $\Lambda_j(u^{(k_m)}) \rightarrow \Lambda_j(\tilde{u})$  \*-слабо в  $L^\infty(0, T; W^{1,2}(G_j))$  и  $D_t u^{(k_m)} \rightarrow D_t \tilde{u}$  слабо в  $L^2(Q_{jT})$  при  $m \rightarrow \infty$ . Кроме того, справедлива оценка

$$\|D_t \tilde{u}\|_{L^2(Q_{jT})} \leq C \left( \|\nabla u^0\|_{L^2(G_j)} + \|F\|_{L^2(Q_{jT})} \right). \quad (9.9)$$

Умножив (9.6) скалярно в  $L^2(0, T)$  на произвольную функцию  $\eta \in C_*^\infty[0, T]$  и перейдя к пределу при  $k = k_m \rightarrow \infty$ , получим тождество

$$\int_0^T (c_p D_t \tilde{u}(t), v)_{G_j} \eta(t) dt + \int_0^T (\nabla \Lambda_j(\tilde{u}(t)), \nabla v)_{G_j} \eta(t) dt = \int_0^T (F(t), v)_{G_j} \eta(t) dt \quad \forall \eta \in C_*^\infty[0, T], \quad (9.10)$$

справедливое для всех  $v \in \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$ , а следовательно — и для всех  $v \in W^{1,2}(G_j)$ . Как следствие, функция  $\tilde{u}$  в роли  $u_j$  удовлетворяет тождеству (9.2). Поскольку слабое решение задачи (9.3)–(9.5) единственно, функция  $\tilde{u}$  совпадает с  $u_j$ .

Из (9.10) теперь следует, что для п.в.  $t \in (0, T)$  справедливо тождество

$$(\nabla \Lambda_j(u_j(t)), \nabla v)_{G_j} = (F(t) - c_p D_t u_j(t), v)_{G_j} \quad \forall v \in W^{1,2}(G_j),$$

т. е. для п.в.  $t \in (0, T)$  функция  $\Lambda_j(u_j(t))$  является слабым решением задачи Неймана

$$-\Delta \Lambda_j(u_j(t)) = F(t) - c_p D_t u_j(t), \quad x \in G_j, \tag{9.11}$$

$$\nabla \Lambda_j(u_j(t)) \cdot n_j = 0, \quad x \in \partial G_j. \tag{9.12}$$

Поскольку  $F(t) - c_p D_t u_j(t) \in L^2(G_j)$ , то в силу известных результатов теории эллиптических уравнений [5] справедливо свойство  $\Lambda_j(u_j(t)) \in W^{2,2}(G_j)$ , уравнение (9.11) выполнено в  $L^2(G_j)$ , краевое условие (9.12) выполнено в  $W^{1/2,2}(\partial G_j)$  и верна оценка

$$\left\| \Lambda_j(u_j(t)) - \frac{1}{\text{meas } G_j} \int_{G_j} \Lambda_j(u_j(t)) dx \right\|_{W^{2,2}(G_j)} \leq C(G_j) \|F(t) - c_p D_t u_j(t)\|_{L^2(G_j)}.$$

Таким образом,  $\Lambda_j(u_j) \in L^2(0, T; W^{2,2}(G_j))$  и справедлива оценка

$$\|\Lambda_j(u_j)\|_{L^2(0, T; W^{2,2}(G_j))} \leq C(\|F\|_{L^2(Q_{jT})} + \|D_t u_j\|_{L^2(Q_{jT})} + \|u_j\|_{L^2(Q_{jT})}). \tag{9.13}$$

Для завершения доказательства теоремы осталось соединить оценки (9.9), (9.13) и (9.1) и учесть, что  $\Delta \Lambda_j(u_j) = \text{div}(\nabla \Lambda_j(u_j)) = \text{div}(\lambda_j(u) \nabla u)$ . □

Результаты работы были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (задание №1.756.2014/К) и при частичной финансовой поддержке Совета по грантам при Президенте РФ (проект НШ-2081.2014.1).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гренкин Г. В., Чеботарев А. Ю. Нестационарная задача сложного теплообмена// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2014. — 54, № 11. — С. 1806–1816.
2. Ковтанюк А. Е., Чеботарев А. Ю. Стационарная задача сложного теплообмена// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2014. — 54, № 4. — С. 711–719.
3. Ковтанюк А. Е., Чеботарев А. Ю. Стационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом// Дифф. уравн. — 2014. — 50, № 12. — С. 1590.
4. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралъцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
5. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
6. Agoshkov V. I. Boundary value problems for transport equations: functional spaces, variational statements, regularity of solutions. — Boston—Basel—Berlin: Birkhauser, 1998.
7. Amosov A. A. The solvability of a problem of radiation heat transfer// Soviet Phys. Dokl. — 1979. — 24, № 4. — С. 261–262.
8. Amosov A. A. The limit connection between two problems of radiation heat transfer// Soviet Phys. Dokl. — 1979. — 24, № 6. — С. 439–441.
9. Amosov A. A. Stationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on radiation frequency// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2010. — 164, № 3. — С. 309–344.
10. Amosov A. A. Nonstationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2010. — 165, № 1. — С. 1–41.
11. Amosov A. A. Boundary value problem for the radiation transfer equation with reflection and refraction conditions// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2013. — 191, № 2. — С. 101–149.
12. Amosov A. A. Boundary value problem for the radiation transfer equation with diffuse reflection and refraction conditions// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2013. — 193, № 2. — С. 151–176.
13. Amosov A. A. Some properties of boundary value problem for radiative transfer equation with diffuse reflection and refraction conditions// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2015. — 207, № 2. — С. 118–141.

14. *Cessenat M.* Théorèmes de trace  $L^p$  pour des espaces de fonctions de la neutronique// C. R. Acad. Sci., Paris Sér. I — 1984. — 299. — C. 831–834.
15. *Cessenat M.* Théorèmes de trace pour des espaces de fonctions de la neutronique// C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. — 1985. — 300. — C. 89–92.
16. *Dautray R., Lions J.-L.* Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 6: Evolution problems II. — Berlin: Springer, 2000.
17. *Druet P.-E.* Weak solutions to a stationary heat equation with nonlocal radiation boundary condition and right-hand side in  $L_p$  ( $p \geq 1$ )// Math. Methods Appl. Sci. — 2009. — 32, № 32. — C. 135–166.
18. *Druet P.-E.* Existence for the stationary MHD equations coupled to heat transfer with nonlocal radiation effects// Czechoslovak Math. J. — 2009. — 59. — C. 791–825.
19. *Druet P.-E.* Existence of weak solution to time-dependent MHD equations coupled to heat transfer with nonlocal radiation boundary conditions// Nonlinear Anal. Real World Appl. — 2009. — 10. — C. 2914–2936.
20. *Druet P.-E.* Weak solutions to a time-dependent heat equation with nonlocal radiation boundary condition and arbitrary p-summable right-hand side// Appl. Math. — 2010. — 55, № 2. — C. 111–149.
21. *Gilbarg D., Trudinger N.* Elliptic partial differential equations of second order. — Berlin: Springer, 1983.
22. *Kelley C. T.* Existence and uniqueness of solutions of nonlinear systems of conductive-radiative heat transfer equations// Transport Theory Statist. Phys. — 1996. — 25, № 2. — C. 249–260.
23. *Kovtanyuk A. E., Chebotarev A. Yu., Botkin N. D.* Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model// Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. — 2015. — 20, № 3. — C. 776–784.
24. *Kovtanyuk A. E., Chebotarev A. Yu., Botkin N. D., Hoffmann K.-H.* The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem// J. Math. Anal. Appl. — 2014. — 409. — C. 808–815.
25. *Křížek M., Liu L.* On a comparison principle for a quasilinear elliptic boundary value problem of a nonmonotone type// Appl. Math. — 1996. — 24, № 1. — C. 97–107.
26. *Laitinen M. T.* Asymptotic analysis of conductive-radiative heat transfer// Asymptot. Anal. — 2002. — 29. — C. 323–342.
27. *Laitinen M. T., Tiihonen T.* Integro-differential equation modelling heat transfer in conducting, radiating and semitransparent materials// Math. Methods Appl. Sci. — 1998. — 21. — C. 375–392.
28. *Laitinen M., Tiihonen T.* Conductive-radiative heat transfer in grey materials// Quart. Appl. Math. — 2001. — 59. — C. 737–768.
29. *Modest F. M.* Radiative heat transfer. — Amsterdam, etc.: Academic Press, 2003.
30. *Necati Özişik M.* Radiative transfer and interactions with conduction and convection. — New York, etc.: Willey & Sons, 1973.
31. *Pinnau R.* Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modelled by  $SP_1$  system// Commun. Math. Sci. — 2007. — 5, № 4. — C. 951–969.
32. *Siegel R., Howell J. R.* Thermal radiation heat transfer. — New York—London: CRC Press, 2001.
33. *Sparrow E. M., Cess R. D.* Radiation heat transfer. — New York: Hemisphere Pub. Corp., 1978.

A. A. Амосов

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»

111250, Москва, ул. Красноказарменная, д. 14

E-mail: AmosovAA@mpei.ru

UDC 517.9

## Nonstationary Problem of Complex Heat Transfer in a System of Semitransparent Bodies with Radiation Diffuse Reflection and Refraction Boundary-Value Conditions

© 2016 A. A. Amosov

©2016 PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA



**Abstract.** We consider a nonstationary initial-boundary value problem describing complex (radiative-conductive) heat transfer in a system of semitransparent bodies. To describe radiation propagation, we use the transport equation with radiation diffuse reflection and refraction boundary-value conditions. We take into account that the radiation intensity and optical properties of bodies depend on the radiation frequency. The unique solvability of a weak solution is established. The comparison theorem is proved. A priori estimates of a weak solution are obtained as well as its regularity.

## REFERENCES

1. G. V. Grenkin and A. Yu. Chebotarev, “Nestatsionarnaya zadacha slozhnogo teploobmena” [A nonstationary problem of complex heat transfer], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2014, **54**, No. 11, 1806–1816 (in Russian).
2. A. E. Kovtanyuk and A. Yu. Chebotarev, “Statsionarnaya zadacha slozhnogo teploobmena” [Steady-state problem of complex heat transfer], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2014, **54**, No. 4, 711–719 (in Russian).
3. A. E. Kovtanyuk and A. Yu. Chebotarev, “Statsionarnaya zadacha svobodnoy konveksii s radiatsionnym teploobmenom” [Steady-state problem of free convection with radiative heat transfer], *Diff. Uravn.* [Diff. Equ.], 2014, **50**, No. 12, 1590 (in Russian).
4. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'tseva, *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
5. V. P. Mikhajlov, *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial Differential Equations], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
6. V. I. Agoshkov, *Boundary Value Problems for Transport Equations: Functional Spaces, Variational Statements, Regularity of Solutions*, Birkhauser, Boston—Basel—Berlin, 1998.
7. A. A. Amosov, “The solvability of a problem of radiation heat transfer,” *Soviet Phys. Dokl.*, 1979, **24**, No. 4, 261–262.
8. A. A. Amosov, “The limit connection between two problems of radiation heat transfer,” *Soviet Phys. Dokl.*, 1979, **24**, No. 6, 439–441.
9. A. A. Amosov, “Stationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on radiation frequency,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2010, **164**, No. 3, 309–344.
10. A. A. Amosov, “Nonstationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2010, **165**, No. 1, 1–41.
11. A. A. Amosov, “Boundary value problem for the radiation transfer equation with reflection and refraction conditions,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2013, **191**, No. 2, 101–149.
12. A. A. Amosov, “Boundary value problem for the radiation transfer equation with diffuse reflection and refraction conditions,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2013, **193**, No. 2, 151–176.
13. A. A. Amosov, “Some properties of boundary value problem for radiative transfer equation with diffuse reflection and refraction conditions,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2015, **207**, No. 2, 118–141.
14. M. Cessenat, “Théorèmes de trace  $L^p$  pour des espaces de fonctions de la neutronique,” *C. R. Acad. Sci., Paris Sér. I*, 1984, **299**, 831–834.
15. M. Cessenat, “Théorèmes de trace pour des espaces de fonctions de la neutronique,” *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I*, 1985, **300**, 89–92.
16. R. Dautray and J.-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol. 6: Evolution Problems II*, Springer, Berlin, 2000.
17. P.-E. Druet, “Weak solutions to a stationary heat equation with nonlocal radiation boundary condition and right-hand side in  $L_p$  ( $p \geq 1$ ),” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2009, **32**, No. 32, 135–166.
18. P.-E. Druet, “Existence for the stationary MHD equations coupled to heat transfer with nonlocal radiation effects,” *Czechoslovak Math. J.*, 2009, **59**, 791–825.
19. P.-E. Druet, “Existence of weak solution to time-dependent MHD equations coupled to heat transfer with nonlocal radiation boundary conditions,” *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2009, **10**, 2914–2936.
20. P.-E. Druet, “Weak solutions to a time-dependent heat equation with nonlocal radiation boundary condition and arbitrary  $p$ -summable right-hand side,” *Appl. Math.*, 2010, **55**, No. 2, 111–149.

21. D. Gilbarg and N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, Berlin, 1983.
22. C. T. Kelley, “Existence and uniqueness of solutions of nonlinear systems of conductive-radiative heat transfer equations,” *Transport Theory Statist. Phys.*, 1996, **25**, No. 2, 249–260.
23. A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, and N. D. Botkin, “Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model,” *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2015, **20**, No. 3, 776–784.
24. A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, and K.-H. Hoffmann, “The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2014, **409**, 808–815.
25. M. Křížek and L. Liu, “On a comparison principle for a quasilinear elliptic boundary value problem of a nonmonotone type,” *Appl. Math.*, 1996, **24**, No. 1, 97–107.
26. M. T. Laitinen, “Asymptotic analysis of conductive-radiative heat transfer,” *Asymptot. Anal.*, 2002, **29**, 323–342.
27. M. T. Laitinen and T. Tiihonen, “Integro-differential equation modelling heat transfer in conducting, radiating and semitransparent materials,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 1998, **21**, 375–392.
28. M. Laitinen and T. Tiihonen, “Conductive-radiative heat transfer in grey materials,” *Quart. Appl. Math.*, 2001, **59**, 737–768.
29. F. M. Modest, *Radiative Heat Transfer*, Academic Press, Amsterdam, etc., 2003.
30. M. Necati Özişik, *Radiative Transfer and Interactions with Conduction and Convection*. — New York, etc.: Willey & Sons, 1973.
31. R. Pinnau, “Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modelled by  $SP_1$  system,” *Commun. Math. Sci.*, 2007, **5**, No. 4, 951–969.
32. R. Siegel and J. R. Howell, *Thermal Radiation Heat Transfer*, CRC Press, New York—London, 2001.
33. E. M. Sparrow and R. D. Cess, *Radiation Heat Transfer*, Hemisphere Pub. Corp., New York, 1978.

A. A. Amosov

National Research University “Moscow Power Engineering Institute,”

14, Krasnokazarmennaya st., 111250 Moscow, Russia

E-mail: AmosovAA@mpei.ru

## УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ АЭРОГИДРОУПРУГОСТИ

© 2016 г. П. А. ВЕЛЬМИСОВ, А. В. АНКИЛОВ

Аннотация. При разработке устройств и деталей, взаимодействующих с потоком газа или жидкости, необходимо решать задачи, связанные с исследованием устойчивости, необходимой для их надежной работы. Определение устойчивости упругого тела, принятое в данной работе, соответствует идее устойчивости динамических систем Ляпунова. На основе предложенной нелинейной математической модели исследована динамическая устойчивость упругого элерона крыла, учитывая случайный дозвуковой поток газа или жидкости (в идеальной модели несжимаемой среды). Также рассмотрена нелинейная математическая модель устройства вибрационной техники, которое предназначено для ускорения технологических процессов, например, процесса перемешивания. Работа этих устройств основана на колебаниях упругих элементов в течении газа или жидкости. Рассмотрена динамическая устойчивость упругого элемента, расположенного на одной из стенок канала с дозвуковым потоком газа или жидкости (в модели идеальной сжимаемой среды). Обе модели описываются двумя нелинейными системами дифференциальных уравнений для неизвестных функций — потенциала скорости газа и деформации упругого элемента. Из конструкции функционала получаются достаточные условия устойчивости, накладывающие ограничения на скорость свободного потока воздуха, изгибную жесткость упругого элемента и другие параметры механической системы. Приведены примеры построения областей устойчивости для конкретных параметров механических систем.

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	35
2. Математическая модель крыла с упругим элероном . . . . .	36
3. Исследование устойчивости упругого элерона . . . . .	38
4. Пример крыла . . . . .	43
5. Математическая модель колеблющегося устройства . . . . .	44
6. Исследование устойчивости колеблющегося упругого элемента . . . . .	45
7. Пример колеблющегося элемента . . . . .	48
8. Заключение . . . . .	48
Список литературы . . . . .	49

### 1. ВВЕДЕНИЕ

При разработке и эксплуатации конструкций, устройств и механизмов различного назначения, взаимодействующих с воздушным потоком или жидкостью, важной задачей является обеспечение надежности их функционирования и долговечности. Аналогичные задачи характерны для различных инженерных отраслей. В частности, эти задачи возникают в ракетостроении, самолетостроении, инструментарии, в разработке антенных систем, высотных конструкций с большой поверхностью и т. д. Важным значением для расчета конструкций, взаимодействующих с воздушным потоком, является устойчивость деформируемых элементов, так как при воздействии потока оно может нарушаться. Примерами потери динамической устойчивости являются: вибрация крыла самолета; вибрация пластин и полок в потоке, например вибрация обшивки самолета или ракеты; вибрация лопастей турбины и винтов; отклонения проводов, труб, подвесных мостов и т. д.

С другой стороны, явления вибрации при аэрогидродинамическом воздействии, являющиеся нежелательными для одних устройств, для других устройств необходимы. Примерами таких устройств в технике являются устройства для ускорения технологических процессов, например,

приготовления однородных смесей, в частности для подвода смазочно-охлаждающей жидкости в рабочую зону [6].

Таким образом, при разработке конструкций и устройств, взаимодействующих с воздушным потоком, необходимо решать задачи, связанные с исследованием устойчивости, требуемой для их надежной работы и долговечности.

Устойчивость упругих тел, взаимодействующих с воздушным потоком, рассматривалась в последнее десятилетие во многих теоретических и экспериментальных работах. Среди последних работ о динамике, устойчивости и вибрации частей самолета, включая профиль крыла, следует отметить работы российских ученых [5, 13, 14, 19, 23] и др., а также зарубежных [17, 18, 20, 21, 24, 26] и т. д. Большая часть этих работ посвящена аналитическому и численному исследованию аэроупругих колебаний профиля крыла в сверхзвуковом потоке воздуха. Для случая дозвукового потока в основном использовались численные методы. Среди недавних работ по динамике и устойчивости длинных трубопроводов и их частей во время протекания в них жидкости или газа следует отметить работы [9–11, 15, 16, 22, 25] и многие другие. Среди работ авторов настоящей статьи, посвященных динамике и устойчивости упругих элементов, взаимодействующих с воздушным потоком, отметим монографии [1–4, 7, 8].

Определение устойчивости упругого тела, принятое в данной работе, соответствует идее устойчивости динамических систем Ляпунова. Задача может быть сформулирована следующим образом: для всевозможных значений параметров, характеризующих систему «жидкость — твердое тело» (основными параметрами являются скорость потока, прочность и инерционные характеристики тела, сжимающее и растягивающее усилие, сила трения) малые деформации тел в начальный момент времени  $t = 0$  (т. е. малые отклонения от положения равновесия) будут соответствовать малым деформациям в любой момент времени  $t > 0$ .

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КРЫЛА С УПРУГИМ ЭЛЕРОНОМ

Пусть в плоскости, в которой происходят совместные колебания упругого элерона и дозвукового потока идеального газа (жидкости), отрезок  $[a, b]$  оси  $Ox$  соответствует крылу, а отрезок  $[b, c]$  — элерону (рис. 2.1).

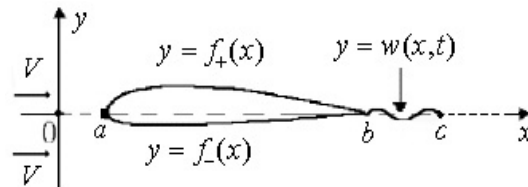


Рис. 2.1. Профиль крыла.

В бесконечно удаленной точке скорость газа равна  $V$  и направлена вдоль оси  $Ox$ . Предположим также, что отклонение (напряжение) упругого элерона и возмущение однородного набегающего потока малы.

Введем обозначения  $u(x, t)$  и  $w(x, t)$  для деформаций упругого элерона в направлении осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно;  $\phi(x, y, t)$  — потенциал скорости возмущенного потока.

Предложенная математическая модель задается следующими уравнениями и краевыми условиями: потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\phi \equiv \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G = \mathbb{R}^2 \setminus [a, c], \quad (2.1)$$

линеаризованные граничные условия

$$\phi_y^\pm(x, 0, t) = \lim_{y \rightarrow \pm 0} \phi_y(x, y, t) = Vf'_\pm(x), \quad x \in (a, b), \quad (2.2)$$

$$\phi_y^\pm(x, 0, t) = \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t), \quad x \in (b, c), \quad (2.3)$$

условие отсутствия возмущений в бесконечно удаленной точке

$$|\nabla\phi|_\infty^2 \equiv (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_t^2)_\infty = 0. \quad (2.4)$$

Уравнение колебаний упругого элерона имеет вид

$$\begin{cases} -EF \left( u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right)' + M\ddot{u}(x, t) = 0, \\ -EF \left[ w'(x, t) \left( u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right) \right]' + EJw''''(x, t) + M\ddot{w}(x, t) + \beta_0 w(x, t - \tau) + \\ + \beta_1 \dot{w}(x, t) + \beta_2 \dot{w}''''(x, t) = \rho(\phi_t^+(x, 0, t) - \phi_t^-(x, 0, t)) + \rho V(\phi_x^+(x, 0, t) - \phi_x^-(x, 0, t)), \\ x \in (b, c). \end{cases} \quad (2.5)$$

Нижние индексы  $x, y, t$  означают частные производные по  $x, y, t$ ; штрих и точка — частные производные по  $x$  и  $t$  соответственно;  $\rho$  — плотность газа;  $EJ = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$  — изгибная жесткость элерона;  $h$  — толщина элерона;  $M = h\rho_{pl}$  — линейная масса элерона;  $F = h/(1 - \nu^2)$ ;  $E, \rho_{pl}$  — модуль упругости и линейная плотность элерона;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\beta_2, \beta_1$  — коэффициенты внутреннего и внешнего торможения;  $\beta_0$  — коэффициент жесткости основы (сжимаемого слоя);  $\tau$  — время задержки реакции основы;  $f_{\pm}(x)$  — функции, описывающие форму верхней (+) и нижней (−) недеформируемой части поверхности профиля.

Используя методы теории функции комплексной переменной [4], решение задачи (2.1)–(2.5) можно свести к изучению системы уравнений для неизвестной функции смещения ( $u, w$ ) элерона:

$$\begin{cases} -EF \left( u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right)' + M\ddot{u}(x, t) = 0, \\ -EF \left[ w'(x, t) \left( u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right) \right]' + EJw''''(x, t) + M\ddot{w}(x, t) + \beta_0 w(x, t - \tau) + \\ + \beta_1 \dot{w}(x, t) + \beta_2 \dot{w}''''(x, t) = -\frac{\rho}{\pi} \int_b^c [\ddot{w}(x_1, t) + V\dot{w}'(x_1, t)] K(x_1, x) dx_1 - \\ - \frac{V\rho}{\pi} \int_b^c [\dot{w}(x_1, t) + Vw'(x_1, t)] \frac{\partial K(x_1, x)}{\partial x} dx_1 + \frac{V^2\rho}{\pi} \int_a^b [f'_+(x_1) + f'_-(x_1)] G(x_1, x) dx_1, \\ x \in (b, c), \end{cases} \quad (2.6)$$

где

$$K(x_1, x) = 2 \ln \left| \frac{\sqrt{(x-a)(c-x_1)} + \sqrt{(x_1-a)(c-x)}}{\sqrt{(x-a)(c-x_1)} - \sqrt{(x_1-a)(c-x)}} \right|,$$

$$G(x_1, x) = \frac{\sqrt{(x-a)(c-x)} + \sqrt{(x_1-a)(c-x_1)}}{\sqrt{(x-a)(c-x)}(x-x_1)}, \quad x_1 \neq x.$$

Пусть профиль крыла симметричный, т. е.  $f_+(x) = -f_-(x)$  (это имеет место для кия самолета с эластичным рулем (рис. 2.2)).

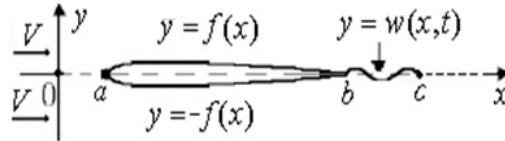


Рис. 2.2. Профиль кия самолета.

В этом случае система (2.6) будет однородной:

$$\begin{cases} -EF \left( u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right)' + M\ddot{u}(x, t) = 0, \\ -EF \left[ w'(x, t) \left( u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right) \right]' + EJw''''(x, t) + M\ddot{w}(x, t) + \beta_0 w(x, t - \tau) + \\ + \beta_1 \dot{w}(x, t) + \beta_2 \dot{w}''''(x, t) = -\frac{\rho}{\pi} \int_b^c [\ddot{w}(x_1, t) + V\dot{w}'(x_1, t)] K(x_1, x) dx_1 - \\ - \frac{V\rho}{\pi} \int_b^c [\dot{w}(x_1, t) + Vw'(x_1, t)] \frac{\partial K(x_1, x)}{\partial x} dx_1, \quad x \in (b, c). \end{cases} \quad (2.7)$$

Краевые условия на концах элерона при  $x = b$  и  $x = c$  имеют вид:

$$\begin{aligned} w(b, t) = 0, \quad w''(b, t) = \alpha w'(b, t), \quad u(b, t) = 0, \\ w''(c, t) = 0, \quad w'''(c, t) = 0, \quad u'(c, t) + \frac{1}{2}w'^2(c, t) = 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

что соответствует упругому соединению левого конца и свободному правому концу. Число  $\alpha$  — коэффициент жесткости упругого соединения между крылом и элероном.

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОГО ЭЛЕРОНА

Получим достаточные условия устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений (2.7) по отношению к возмущению начальных условий.

Введем функционал

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \int_b^c \left\{ M(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + EJw''^2 + EF \left( u' + \frac{1}{2}w'^2 \right)^2 + \beta_0 w^2 + \right. \\ & \left. + \beta_0 \int_{t-\tau}^t dt_1 \int_{t_1}^t \dot{w}^2(x, s) ds \right\} dx + \alpha EJw'^2(b, t) + I(t) + J(t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{\rho}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x, t) \dot{w}(x_1, t) K(x_1, x) dx_1, \\ J(t) &= -\frac{\rho V^2}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c w'(x, t) w'(x_1, t) K(x_1, x) dx_1. \end{aligned}$$

Найдем производную  $\Phi$  по  $t$ . В силу равенства  $w(x, t - \tau) = w(x, t) - \int_{t-\tau}^t \dot{w}(x, s) ds$  для функций  $w(x, t)$  и  $u(x, t)$ , удовлетворяющих уравнениям (2.7), выражение для  $\dot{\Phi}(t)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = & 2 \int_b^c \left\{ EF \dot{u} \left( u' + \frac{1}{2}w'^2 \right)' + EF \dot{w} \left[ w' \left( u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) \right]' - EJ \dot{w} w'''' - \beta_0 \dot{w} w + \right. \\ & + \beta_0 \dot{w} \int_{t-\tau}^t \dot{w}(x, s) ds - \beta_1 \dot{w}^2 - \beta_2 \dot{w} w'''' - \frac{\rho}{\pi} \dot{w}(x, t) \int_b^c (\ddot{w}(x_1, t) + V \dot{w}'(x_1, t)) K(x_1, x) dx_1 - \\ & - \frac{V\rho}{\pi} \dot{w}(x, t) \int_b^c (\dot{w}(x_1, t) + V w'(x_1, t)) \frac{\partial K(x_1, x)}{\partial x} dx_1 + EJ w'' \dot{w} + EF \dot{u}' \left( u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) + \\ & \left. + EF w' \dot{w}' \left( u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) + \beta_0 w \dot{w} + \frac{\beta_0 \tau}{2} \dot{w}^2(x, t) - \frac{\beta_0}{2} \int_{t-\tau}^t \dot{w}^2(x, s) ds \right\} dx + \\ & + 2\alpha EJ w'(b, t) \dot{w}'(b, t) + \dot{I}(t) + \dot{J}(t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Интегрируя по частям и учитывая (2.8), получим

$$\begin{aligned} \int_b^c \dot{w} w'''' dx &= \dot{w} w''''|_b^c - \int_b^c \dot{w}' w'''' dx = -\dot{w}' w''''|_b^c + \int_b^c \dot{w}'' w'' dx = \alpha \dot{w}'(b, t) w'(b, t) + \int_b^c \dot{w}'' w'' dx, \\ \int_b^c \dot{w} w'''' dx &= \alpha \dot{w}'^2(b, t) + \int_b^c \dot{w}''^2 dx, \\ \int_b^c \dot{u} \left( u' + \frac{1}{2}w'^2 \right)' dx &= \dot{u} \left( u' + \frac{1}{2}w'^2 \right)|_b^c - \int_b^c \dot{u}' \left( u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) dx = - \int_b^c \dot{u}' \left( u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) dx, \end{aligned}$$

$$\int_b^c \dot{w} \left[ w' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) \right]' dx = \dot{w} w' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) \Big|_b^c - \int_b^c \dot{w}' w' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) dx = - \int_b^c \dot{w}' w' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) dx.$$

Меняя порядок интегрирования, снова интегрируем по частям:

$$\begin{aligned} \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x, t) \dot{w}(x_1, t) \frac{\partial K(x_1, x)}{\partial x} dx_1 &= \int_b^c dx_1 \int_b^c \dot{w}(x, t) \dot{w}(x_1, t) \frac{\partial K(x_1, x)}{\partial x} dx = \\ &= \int_b^c \dot{w}(x, t) \dot{w}(x_1, t) K(x_1, x) \Big|_b^c dx_1 - \int_b^c dx_1 \int_b^c \dot{w}'(x, t) \dot{w}(x_1, t) K(x_1, x) dx = \\ &= - \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}'(x_1, t) \dot{w}(x, t) K(x_1, x) dx_1, \end{aligned}$$

где в последнем равенстве переменные интегрирования  $x$  и  $x_1$  переставлены друг с другом, так как  $K(x_1, x) = K(x, x_1)$ .

Аналогично получаем

$$\int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x, t) w'(x_1, t) \frac{\partial K(x_1, x)}{\partial x} dx_1 = - \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}'(x, t) w'(x_1, t) K(x_1, x) dx_1.$$

Подставляя данные соотношения в (3.2), имеем

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &= \int_b^c \left\{ 2\beta_0 \dot{w} \int_{t-\tau}^t \dot{w}(x, s) ds + \beta_0 \tau \dot{w}^2(x, t) - \beta_0 \int_{t-\tau}^t \dot{w}^2(x, s) ds - 2\beta_1 \dot{w}^2 - 2\beta_2 \dot{w}''^2 \right\} dx - \\ &\quad - \frac{2\rho}{\pi} \int_b^c \left\{ \dot{w}(x, t) \int_b^c \ddot{w}(x_1, t) K(x_1, x) dx_1 \right\} dx + \\ &\quad + \frac{2\rho V^2}{\pi} \int_b^c \left\{ \dot{w}'(x, t) \int_b^c w'(x_1, t) K(x_1, x) dx_1 \right\} dx - \\ &\quad - 2\beta_2 \alpha \dot{w}''^2(b, t) + \dot{I} + \dot{J}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Используя неравенство  $2ab \leq a^2 + b^2$ , получаем, что  $2\dot{w}(x, t) \dot{w}(x, s) \leq \dot{w}^2(x, t) + \dot{w}^2(x, s)$ . Подставляя эту оценку в (3.3), окончательно находим

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &\leq \int_b^c \left\{ 2\beta_0 \tau \dot{w}^2(x, t) - 2\beta_1 \dot{w}^2 - 2\beta_2 \dot{w}''^2 \right\} dx - 2\beta_2 \alpha \dot{w}''^2(b, t) - \\ &\quad - \frac{2\rho}{\pi} \int_b^c \left\{ \dot{w}(x, t) \int_b^c \ddot{w}(x_1, t) K(x_1, x) dx_1 \right\} dx + \\ &\quad + \frac{2\rho V^2}{\pi} \int_b^c \left\{ \dot{w}'(x, t) \int_b^c w'(x_1, t) K(x_1, x) dx_1 \right\} dx + \dot{I} + \dot{J}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Преобразуем интеграл  $\dot{I}(t)$ :

$$\dot{I}(t) = \frac{d}{dt} \frac{\rho}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x, t) \dot{w}(x_1, t) K(x_1, x) dx_1 = \frac{\rho}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c \ddot{w}(x, t) \dot{w}(x_1, t) K(x_1, x) dx_1 +$$

$$+ \frac{\rho}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x, t) \ddot{w}(x_1, t) K(x_1, x) dx_1.$$

Так как  $K(x_1, x) = K(x, x_1)$ , то, меняя сначала порядок интегрирования, а затем переменные  $x_1$  и  $x$ , получаем:

$$\frac{\rho}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x_1, t) \ddot{w}(x, t) K(x_1, x) dx_1 = \frac{\rho}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x, t) \ddot{w}(x_1, t) K(x_1, x) dx_1.$$

Для  $\dot{I}(t)$  получается следующее выражение:

$$\dot{I}(t) = \frac{2\rho}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x, t) \ddot{w}(x_1, t) K(x_1, x) dx_1. \quad (3.5)$$

Аналогично преобразованиям  $\dot{I}(t)$  получаем выражение для  $\dot{J}(t)$

$$\dot{J}(t) = -\frac{2\rho V^2}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}'(x, t) w'(x_1, t) K(x_1, x) dx_1. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.5) и (3.6) в правую часть (3.4), получаем

$$\dot{\Phi}(t) \leq 2 \int_b^c \{ \beta_0 \tau \dot{w}^2(x, t) - \beta_1 \dot{w}^2 - \beta_2 \dot{w}''^2 \} dx - 2\beta_2 \alpha \dot{w}''^2(b, t). \quad (3.7)$$

Рассмотрим краевую задачу для уравнения  $\psi^{IV}(x) = \mu\psi(x)$ ,  $x \in [b, c]$  с краевыми условиями (2.8). Эта задача самосопряженная и полностью определена при условии

$$\alpha \geq 0. \quad (3.8)$$

Действительно, интегрируя по частям, легко убеждаемся, что

$$\int_b^c u(x) v^{IV}(x) dx = \int_b^c v(x) u^{IV}(x) dx, \quad \int_b^c u(x) u^{IV}(x) dx > 0,$$

для произвольных функций  $u(x)$  и  $v(x)$ , которые удовлетворяют рассматриваемым краевым условиям и имеют на  $[b, c]$  непрерывные производные четвертого порядка. Для функции  $\dot{w}(x, t)$  запишем неравенство Рэлея [12]:

$$\int_b^c \dot{w}(x, t) \dot{w}^{IV}(x, t) dx \geq \mu_1 \int_b^c \dot{w}(x, t) \dot{w}(x, t) dx,$$

где  $\mu_1$  — наименьшее собственное значение рассматриваемой краевой задачи. Интегрируя по частям, перепишем это неравенство в виде

$$\int_b^c \dot{w}''^2(x, t) dx + \alpha \dot{w}''^2(b, t) \geq \mu_1 \int_b^c \dot{w}^2(x, t) dx. \quad (3.9)$$

Таким образом, учитывая (3.9), неравенство (3.7) примет вид

$$\dot{\Phi}(t) \leq -\frac{2}{\mu_1} \int_b^c (\beta_1 + \mu_1 \beta_2 - \beta_0 \tau) \dot{w}''^2 dx. \quad (3.10)$$

Пусть выполнено условие

$$\beta_0 \tau - \beta_1 - \mu_1 \beta_2 \leq 0, \quad (3.11)$$

тогда  $\dot{\Phi}(t) \leq 0$ . Интегрируя от 0 до  $t$ , получим:

$$\Phi(t) \leq \Phi(0). \quad (3.12)$$



В [3] доказана следующая теорема.

**Теорема 3.1.** *Предположим, что:*

1. функция  $f(x)$  непрерывна при  $x \in [a, c]$ ;
2. функция  $K(x_1, x, c)$  определена и непрерывна по  $x$  и  $x_1$  при  $x \in [a, c]$ ,  $x_1 \in [a, c]$  (за исключением, может быть, линии  $x = x_1$ ) и интегрируема на этом множестве;
3. функция  $K(x_1, x, c)$  непрерывно дифференцируема по  $c$  и выполняется равенство  $\frac{\partial K}{\partial d} = \phi(x, d) \cdot \phi(\tau, d)$ ;
4. для всех  $\alpha \in (c, d]$ ,  $x, \tau \in (c, \alpha)$  выполняется равенство  $K(\alpha, x, \alpha) = K(x_1, \alpha, \alpha) = 0$ ;
5.  $\lim_{c \rightarrow a} \int_a^c dx \int_a^c K(x_1, x, c) dx_1 = 0$ .

Тогда повторный (собственный или несобственный) интеграл неотрицателен:

$$\int_a^c dx \int_a^c f(x)f(x_1)K(x_1, x, c)dx_1 \geq 0,$$

а также

$$\int_a^c dx \int_a^c f(x)f(x_1)K(x_1, x, c)d\tau = \int_a^c \left( \int_a^\alpha f(x)\phi(x, \alpha)dx \right)^2 d\alpha.$$

Теорема 3.1 будет применена к функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, b]; \\ \dot{w}(x, t_0), & x \in [b, c]. \end{cases}$$

Ядро  $K(x_1, x, c) = \ln \left| \frac{\sqrt{(x-a)(c-x_1)} + \sqrt{(x_1-a)(c-x)}}{\sqrt{(x-a)(c-x_1)} - \sqrt{(x_1-a)(c-x)}} \right|$ , где в качестве параметра берется  $c$ , удовлетворяет условиям теоремы 3.1:

1.  $\frac{\partial K}{\partial c} = \frac{\sqrt{(x-a)(x_1-a)}}{(c-a)\sqrt{(c-x)(c-x_1)}} = \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{(c-a)(c-x)}} \frac{\sqrt{x_1-a}}{\sqrt{(c-a)(c-x_1)}} = \phi(x, c) \cdot \phi(x_1, c)$ ;
2.  $K(c, x, c) = \ln \left| \frac{\sqrt{c-x}}{\sqrt{c-x}} \right| = 0$ ,  $K(x_1, c, c) = \ln \left| \frac{\sqrt{c-x_1}}{\sqrt{c-x_1}} \right| = 0 \quad \forall x, x_1 \in (a, c)$ ;
3. так как ядро  $K(x_1, x, c) \in [0, +\infty)$  при  $x \in [b, c]$ ,  $x_1 \in [b, c]$  и оно интегрируемо на этом множестве, то по теореме о среднем существуют числа  $\theta_1 \neq \theta_2$ ,  $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ , такие что

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow a} \int_a^c dx \int_a^c \ln \left| \frac{\sqrt{(x-a)(c-x_1)} + \sqrt{(x_1-a)(c-x)}}{\sqrt{(x-a)(c-x_1)} - \sqrt{(x_1-a)(c-x)}} \right| dx_1 = \\ = \lim_{c \rightarrow a} (c-a)^2 \ln \left| \frac{\sqrt{\theta_2(1-\theta_1)} + \sqrt{\theta_1(1-\theta_2)}}{\sqrt{\theta_2(1-\theta_1)} - \sqrt{\theta_1(1-\theta_2)}} \right| = 0. \end{aligned}$$

Тогда в силу теоремы 3.1 несобственный интеграл неотрицателен:

$$\int_a^c dx \int_a^c f(x)f(x_1)K(x_1, x, c)dx_1 = \int_a^c \left( \int_a^\alpha \frac{\sqrt{x-a}f(x)}{\sqrt{(\alpha-a)(\alpha-x)}} dx \right)^2 d\alpha \geq 0.$$

Подставляя функцию  $f(x)$ , получаем

$$\int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x, t_0)\dot{w}(x_1, t_0)K(x_1, x)dx_1 \geq 0.$$

В силу неотрицательности интеграла при любом  $t = t_0$

$$\int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x, t)\dot{w}(x_1, t)K(x_1, x)dx_1 \geq 0. \quad (3.13)$$

Аналогично

$$\int_b^c dx \int_b^c w'(x, t) w'(x_1, t) K(x_1, x) dx_1 \geq 0. \quad (3.14)$$

Продолжим исследование функционала. Принимая во внимание выражение (3.1) и неравенства (3.13), (3.14), правую и левую части в (3.12) оценим следующим образом:

$$\Phi(t) \geq \int_b^c EJw''^2 dx - \frac{\rho V^2}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c w'(x, t) w'(x_1, t) K(x_1, x) dx_1 + \alpha EJw'^2(b, t), \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \Phi(0) \leq & \int_b^c \left\{ M(\dot{u}_0^2 + \dot{w}_0^2) + EJw_0''^2 + EF \left( u_0' + \frac{1}{2} w_0'^2 \right)^2 + \beta_0 w_0^2 \right\} dx + \\ & + \frac{\rho}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x, 0) \dot{w}(x_1, 0) K(x_1, x) dx_1 + \alpha EJw'^2(b, 0), \end{aligned} \quad (3.16)$$

где использованы следующие обозначения:  $\dot{w}_0 = \dot{w}(x, 0)$ ,  $u_0' = u'(x, 0)$ ,  $w_0 = w(x, 0)$ ,  $\dot{u}_0 = \dot{u}(x, 0)$ ,  $w_0' = w'(x, 0)$ ,  $w_0'' = w''(x, 0)$ .

Используя неравенства  $2ab \leq a^2 + b^2$ ,  $-2ab \geq -(a^2 + b^2)$ , симметричность и неотрицательность ядра  $K(x_1, x)$ , и краевые условия (2.8), получим:

$$\int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x, 0) \dot{w}(x_1, 0) K(x_1, x) dx_1 \leq \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}^2(x, 0) K(x_1, x) dx_1 \leq \int_b^c K_0 \dot{w}^2(x, 0) dx,$$

$$K_0 = \sup_{x \in (b, c)} \int_b^c K(x_1, x) dx_1.$$

Аналогично

$$\int_b^c dx \int_b^c w'(x, t) w'(x_1, t) K(x_1, x) dx_1 \leq \int_b^c K_0 w'^2(x, t) dx.$$

Учитывая эту оценку, неравенства (3.15) и (3.16) принимают вид

$$\Phi(t) \geq \int_b^c \left\{ EJw''^2 - \frac{\rho V^2 K_0}{\pi} w'^2 \right\} dx + \alpha EJw'^2(b, t), \quad (3.17)$$

$$\Phi(0) \leq \int_b^c \left\{ \left( M + \frac{\rho K_0}{\pi} \right) \dot{w}_0^2 + M \dot{u}_0^2 + EJw_0''^2 + EF \left( u_0' + \frac{1}{2} w_0'^2 \right)^2 + \beta_0 w_0^2 \right\} dx + \alpha EJw'^2(b, 0). \quad (3.18)$$

В силу неравенства Коши—Буняковского

$$\int_b^c w''^2(x, t) dx \geq \frac{2}{(c-b)^2} \int_b^c (w'(x, t) - w'(b, t))^2 dx, \quad (3.19)$$

$$w^2(x, t) \leq (c-b) \int_b^c w'^2(x, t) dx. \quad (3.20)$$

Используя (3.19), из (3.17) получаем

$$\Phi(t) \geq \int_b^c \left\{ \frac{2\pi EJ - \rho K_0 V^2 (c-b)^2}{\pi(c-b)^2} w^2(x,t) - \frac{4EJ}{(c-b)^2} w'(x,t)w'(b,t) + \frac{(2 + \alpha(c-b))EJ}{(c-b)^2} w'^2(b,t) \right\} dx. \quad (3.21)$$

В силу критерия Сильвестра квадратичная форма от  $w'(x,t)$ ,  $w'(b,t)$  положительно определена, если выполнено следующее условие:

$$V^2 < \frac{2\pi\alpha EJ}{(c-b)\rho K_0(2 + \alpha(c-b))}. \quad (3.22)$$

Тогда в силу (3.20), (3.21) получаем

$$\Phi(t) \geq \frac{(2EJ\pi - \rho K_0 V^2 (c-b)^2)(2 + \alpha(c-b)) - 4EJ\pi}{\pi(c-b)^3(2 + \alpha(c-b))} w^2(x,t). \quad (3.23)$$

Таким образом, из (3.12), (3.18) и (3.23) получаем неравенство

$$w^2(x,t) \leq \frac{\pi(c-b)^3(2 + \alpha(c-b))}{(2EJ\pi - \rho K_0 V^2 (c-b)^2)(2 + \alpha(c-b)) - 4EJ\pi} \times \left( \int_b^c \left\{ \left( M + \frac{\rho K_0}{\pi} \right) \dot{w}_0^2 + M \dot{u}_0^2 + EJ w_0''^2 + EF \left( u_0' + \frac{1}{2} w_0'^2 \right)^2 + \beta_0 w_0^2 \right\} dx + \alpha EJ w'^2(b,0) \right),$$

из которого вытекает следующая теорема.

**Теорема 3.2.** Пусть выполнены условия (3.8), (3.11), (3.22). Тогда решение  $w(x,t)$  системы уравнений (2.7) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных  $\dot{w}_0$ ,  $w_0$ ,  $w_0'$ ,  $w_0''$ ,  $\dot{u}_0$ ,  $u_0'$ , если функция  $w(x,t)$  удовлетворяет краевым условиям (2.8).

#### 4. ПРИМЕР КРЫЛА

Приведем пример механической системы. Предположим, что крыло находится в воздушном потоке ( $\rho = 1$ ), и элерон сделан из алюминия ( $E = 7 \cdot 10^{10}$ ,  $\rho_{pl} = 8480$ ). Другие параметры механической системы:  $a = 0$ ;  $b = 3$ ;  $c = 4$ ;  $\nu = 0,31$ ;  $\beta_0 = 4$ ;  $\beta_1 = 0,4$ ;  $\beta_2 = 0,4$ ;  $\alpha = 0,1$  (все значения приводятся в системе СИ).

Для неравенства (3.22) построена область устойчивости (выделена серым цветом) в плоскости «толщина элерона  $h$  — скорость потока  $V$ » (рис. 4.1).

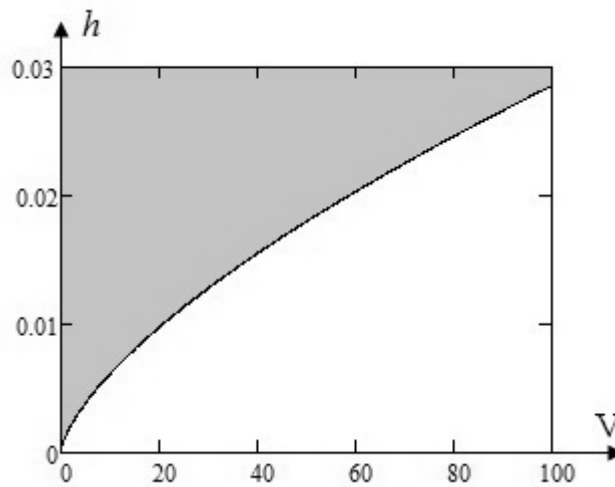


Рис. 4.1. Область устойчивости в плоскости  $(h, V)$ .

## 5. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ УСТРОЙСТВА

Рассмотрим плоский поток в прямоугольном канале  $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}$ . Скорость невозмущенного равномерного потока равна  $V$  и направлена вдоль оси  $Ox$ . Часть стенки  $y = y_0$  при  $x \in [b, c]$  упругая (рис. 5.1).

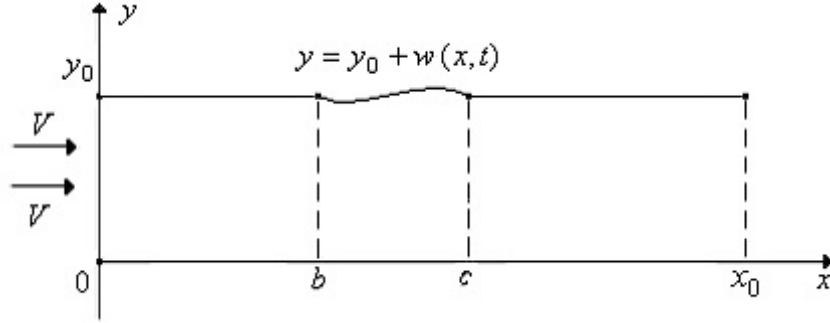


Рис. 5.1. Стенка канала, содержащая деформируемый элемент.

Введем обозначения:  $u(x, t)$  and  $w(x, t)$  — деформация упругого элемента стенки канала в направлении осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно;  $\phi(x, y, t)$  — потенциал скорости возмущенного потока.

Сформулируем математическую постановку задачи. Потенциал скорости удовлетворяет уравнению

$$\phi_{tt}(x, y, t) + 2V\phi_{xt}(x, y, t) + V^2\phi_{xx}(x, y, t) = a^2(\phi_{xx}(x, y, t) + \phi_{yy}(x, y, t)), \quad (x, y) \in J, \quad t \geq 0 \quad (5.1)$$

(что соответствует модели идеально сжимаемой среды), условия непротекания стенок канала

$$\phi_y(x, y_0, t) = \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (5.2)$$

$$\phi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, b] \cup [c, x_0), \quad t \geq 0, \quad (5.3)$$

$$\phi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0 \quad (5.4)$$

и условия на входе и выходе канала

$$\phi(0, y, t) = \phi_1(y, t), \quad \phi(x_0, y, t) = \phi_2(y, t), \quad y \in (0, y_0).$$

так как уравнение (5.1) линейное, для исследования устойчивости без ограничения общности можно считать, что  $\phi_1 = \phi_2 = 0$ . Тогда эти условия примут вид

$$\phi(0, y, t) = 0, \quad \phi(x_0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0), \quad t \geq 0. \quad (5.5)$$

Условия (5.5) выполнены для достаточно длинного канала, это условия отсутствия возмущений в граничных областях.

Аэродинамическое воздействие на упругий элемент имеет вид

$$P(x, t) = -\rho(\phi_t(x, y_0, t) + V\phi_x(x, y_0, t)), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0. \quad (5.6)$$

Нелинейная модель колебаний упругого тела с продольной и поперечной компонентами деформации элемента приближается упругой пластиной с учетом влияния действия силы  $P$ :

$$\begin{cases} -EF \left( u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right)' + M\ddot{u}(x, t) = 0, \\ -EF \left[ w'(x, t) \left( u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right) \right]' + EJw''''(x, t) + M\ddot{w}(x, t) + \\ + N(t)w''(x, t) + \beta_2w''''(x, t) + \beta_1\dot{w}(x, t) + \beta_0w(x, t) = P(x, t). \end{cases} \quad (5.7)$$

Здесь  $N(t)$  — сжимающая ( $N > 0$ ) или растягивающая ( $N < 0$ ) силы элемента;  $a$  — скорость звука в невозмущенном потоке газа ( $a > V$ ).

Сжимающая (растягивающая) сила элемента  $N(t)$  может зависеть от времени. Например, при нестационарном нагреве элемента  $N(t)$  имеет следующий вид:

$$N(t) = N_0 + N_T, \quad N_T = -\frac{T_0}{1-\nu}, \quad T_0 = E\alpha_T \int_{-h/2}^{h/2} T(z, t) dz,$$

где  $\alpha_T$  — коэффициент линейного температурного роста,  $T(z, t)$  — закон изменения температуры в зависимости от толщины элемента,  $N_0$  — константа силы, возникающей при фиксации элемента.

Краевые условия на концах элемента в точках  $x = b$  и  $x = c$  можно записать в виде:

1. жесткое защемление (рис. 5.2(a)):

$$w(x, t) = w'(x, t) = u(x, t) = 0; \quad (5.8)$$

2. шарнирное закрепление (рис. 5.2(b)):

$$w(x, t) = w''(x, t) = u(x, t) = 0; \quad (5.9)$$

3. жесткое подвижное защемление (рис. 5.2(c)):

$$w(x, t) = w'(x, t) = u'(x, t) = 0; \quad (5.10)$$

4. шарнирное подвижное закрепление (рис. 5.2(d)):

$$w(x, t) = w''(x, t) = u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) = 0. \quad (5.11)$$

(a)                      (b)                      (c)                      (d)

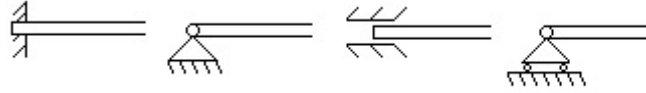


Рис. 5.2. Способы фиксации.

Таким образом, соответствующая задача (5.1)–(5.11) содержит три неизвестные функции — деформации упругого элемента и стенки канала  $u(x, t)$  и  $w(x, t)$  и потенциал скорости жидкости (газа)  $\phi(x, y, t)$ .

## 6. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ УПРУГОГО ЭЛЕМЕНТА

Исследуем устойчивость по Ляпунову нулевого решения  $\phi(x, y, t) \equiv 0$ ,  $w(x, t) \equiv 0$ ,  $u(x, t) \equiv 0$  системы (5.1)–(5.11).

Введем функционал

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \iint_J (\phi_t^2(x, y, t) + (a^2 - V^2)\phi_x^2(x, y, t) + a^2\phi_y^2(x, y, t)) dx dy - 2a^2V \int_b^c \phi(x, y_0, t) w'(x, t) dx \\ & + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c \left( EF \left( u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right)^2 + M (\dot{u}^2(x, t) + \dot{w}^2(x, t)) + EJw''^2(x, t) \right. \\ & \left. - N(t)w'^2(x, t) + \beta_0w^2(x, t) \right) dx. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Для функций  $\phi(x, y, t)$ ,  $u(x, t)$ ,  $w(x, t)$ , удовлетворяющих уравнениям (5.1) и (5.6), (5.7) и условиям (5.2)–(5.5), (5.8)–(5.11), производная  $\Phi$  по  $t$  имеет вид

$$\dot{\Phi}(t) = -\frac{2a^2}{\rho} \int_b^c \left( \beta_2 \dot{w}''^2(x, t) + \beta_1 \dot{w}^2(x, t) - \frac{1}{2} \dot{N}(t) w'^2(x, t) \right) dx. \quad (6.2)$$

Рассмотрим краевую задачу для уравнений  $\psi'''' = -\lambda\psi''$ ,  $\psi'''' = \mu\psi$ ,  $x \in (b, c)$  с краевыми условиями (5.8)–(5.11) относительно функции  $w(x, t)$ . Эти задачи самосопряженные и полностью определены. Используя неравенство Рэлея [12] для  $w(x, t)$ , получим оценку

$$\int_b^c \dot{w}''^2(x, t) dx \geq \mu_1 \int_b^c \dot{w}^2(x, t) dx, \int_b^c w''^2(x, t) dx \geq \lambda_1 \int_b^c w'^2(x, t) dx, \int_b^c w''^2(x, t) dx \geq \mu_1 \int_b^c w^2(x, t) dx, \quad (6.3)$$

где  $\lambda_1, \mu_1$  — наименьшие собственные значения соответствующих краевых задач.

Используя первое неравенство в (6.3), получаем

$$\dot{\Phi}(t) \leq -\frac{2a^2}{\rho} \int_b^c \left( (\beta_2\mu_1 + \beta_1)\dot{w}^2(x, t) - \frac{1}{2}\dot{N}(t)w'^2(x, t) \right) dx. \quad (6.4)$$

Пусть выполнены условия

$$\beta_2\mu_1 + \beta_1 \geq 0, \quad \dot{N}(t) > 0, \quad (6.5)$$

тогда из (6.4) следует, что  $\dot{\Phi}(t) \leq 0$ . Интегрируя от 0 до  $t$ , получаем неравенство

$$\Phi(t) \leq \Phi(0). \quad (6.6)$$

Оценим функционал с краевыми условиями (5.8)–(5.11).

Оценим  $\Phi(0)$  сверху, используя неравенства (6.3) и очевидное неравенство  $-2ab \leq a^2 + b^2$ :

$$\begin{aligned} \Phi(0) &\leq \iint_J (\phi_{t0}^2 + (a^2 - V^2)\phi_{x0}^2 + a^2\phi_{y0}^2) dx dy + a^2 \int_b^c \phi^2(x, y_0, 0) dx + \\ &+ \frac{a^2}{\rho} \int_b^c \left( M(\dot{u}_0^2 + \dot{w}_0^2) + EF \left( u'_0 + \frac{1}{2}w'_0{}^2 \right)^2 + \left( EJ + \frac{|N(0)| + \rho V^2}{\lambda_1} + \frac{\beta_0}{\mu_1} \right) w''_0{}^2 \right) dx = \Omega. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Здесь использованы следующие обозначения:  $\phi_{t0} = \phi_t(x, y, 0)$ ,  $\phi_{x0} = \phi_x(x, y, 0)$ ,  $\phi_{y0} = \phi_y(x, y, 0)$ ,  $\dot{u}_0 = \dot{u}(x, 0)$ ,  $u'_0 = u'(x, 0)$ ,  $\dot{w}_0 = \dot{w}(x, 0)$ ,  $w_0 = w(x, 0)$ ,  $w'_0 = w'(x, 0)$ ,  $w''_0 = w''(x, 0)$ .

Оценим  $\Phi(t)$  снизу:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\geq \iint_J (\phi_t^2(x, y, t) + (a^2 - V^2)\phi_x^2(x, y, t) + a^2\phi_y^2(x, y, t)) dx dy - \\ &- 2a^2V \int_b^c \phi(x, y_0, t)w'(x, t) dx + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c (\lambda_1 EJ - N)w'^2(x, t) dx. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Рассмотрим краевую задачу  $\psi'' = -\eta\psi$ ,  $x \in (0, x_0)$ , с условиями  $\psi(0) = 0$ ,  $\psi(x_0) = 0$ . Используя неравенство Рэлея для функции  $\phi(x, y, t)$ , получим

$$\iint_J \phi_x^2(x, y, t) dx dy \geq \frac{\pi^2}{x_0^2} \iint_J \phi^2(x, y, t) dx dy. \quad (6.9)$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского, имеем

$$\iint_J \phi_y^2(x, y, t) dx dy \geq \frac{2}{y_0^2} \iint_J (\phi(x, y_0, t) - \phi(x, y, t))^2 dx dy. \quad (6.10)$$

Применяя (6.9) и (6.10) к (6.8), получаем неравенство

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\geq \iint_J \left( \frac{2a^2}{y_0^2} (\phi(x, y_0, t) - \phi(x, y, t))^2 + \phi_t^2(x, y, t) + (a^2 - V^2) \frac{\pi^2}{x_0^2} \phi^2(x, y, t) \right) dx dy - \\ &- 2a^2V \int_b^c \phi(x, y_0, t)w'(x, t) dx + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c (\lambda_1 EJ - N(t))w'^2(x, t) dx. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Рассмотрим функцию  $f(x, t) = \begin{cases} 0, & x \in (0, b), \\ w'(x, t), & x \in (b, c), \\ 0, & x \in (c, x_0), \end{cases}$  тогда из (6.11) получаем неравенство

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq \iint_J \left[ \phi_t^2(x, y, t) + \left( (a^2 - V^2) \frac{\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2} \right) \phi^2(x, y, t) - \frac{4a^2}{y_0^2} \phi(x, y_0, t) \phi(x, y, t) + \right. \\ \left. + \frac{2a^2}{y_0^2} \phi^2(x, y_0, t) - \frac{2a^2 V}{y_0} \phi(x, y_0, t) f(x, t) + \frac{a^2 (\lambda_1 E J - N(t))}{\rho y_0} f^2(x, t) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Введем следующие обозначения:

$$d_{11} = \frac{(a^2 - V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2}, \quad d_{22} = d_{12} = \frac{2a^2}{y_0^2}, \quad d_{23} = \frac{V}{y_0^2}, \quad d_{33}(t) = \frac{a^2 (\lambda_1 E J - N(t))}{\rho y_0}. \quad (6.13)$$

Рассмотрим квадратичную форму относительно  $\phi(x, y, t)$ ,  $\phi(x, y_0, t)$ ,  $f(x, t)$  в (6.12), с матрицей

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ 0 & d_{21} & d_{33}(t) \end{pmatrix}.$$

По критерию Сильвестра мы можем написать условие положительной определенности этой формы

$$N(t) < \lambda_1 E J - \frac{V^2 x_0^2 \rho y_0}{2(a^2 - V^2)\pi^2} \left( \frac{(a^2 - V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2} \right). \quad (6.14)$$

Используя метод Лагранжа, приведем квадратичную форму в (6.12) к каноническому виду:

$$\Phi(t) \geq \frac{\Delta_3 y_0}{\Delta_2} \int_b^c w'^2(x, t) dx, \quad \Phi(t) \geq \frac{\Delta_3}{d_{22} d_{33} - d_{23}^2} \iint_J \phi^2(x, y, t) dx dy. \quad (6.15)$$

Используя неравенство Коши—Буняковского, получим оценку

$$w^2(x, t) \leq (c - b) \int_b^c w'^2(x, t) dx,$$

и тогда первое неравенство в (6.15) примет вид

$$\Phi(t) \geq \frac{\Delta_3 y_0}{\Delta_2 (c - b)} w^2(x, t). \quad (6.16)$$

Учитывая (6.6), (6.7), (6.15), (6.16), получаем неравенства

$$w^2(x, t) \leq \frac{\Delta_2 (c - b)}{\Delta_3 y_0} \Omega, \quad \iint_J \phi^2(x, y, t) dx dy \leq \frac{d_{22} d_{33} - d_{23}^2}{\Delta_3} \Omega. \quad (6.17)$$

Из (6.17) вытекает следующая теорема.

**Теорема 6.1.** Пусть выполнены условия (6.5), (6.14). Тогда решение  $w(x, t)$  задачи (5.1)–(5.11) устойчиво, и решение  $\phi(x, y, t)$  системы уравнений (5.1)–(5.11) устойчиво в среднем (в интегральном смысле) по отношению к возмущениям начальных данных  $\phi_{t0}$ ,  $\phi_{x0}$ ,  $\phi_{y0}$ ,  $\phi(x, y_0, 0)$ ,  $\dot{u}_0$ ,  $u'_0$ ,  $\dot{w}_0$ ,  $w'_0$ ,  $w''_0$ .

**Замечание 6.1.** Если ввести функцию  $\Phi_1(t) = e^{-\gamma t} \Phi(t)$ , где  $\gamma$  — положительный числовой параметр, то можно ослабить второе условие (6.5) на убывание функции  $N(t)$ .

**Замечание 6.2.** Рассмотренная задача может быть обобщена на случай переменной толщины элемента или неоднородного материала, т. е. когда коэффициенты системы (5.7) являются функциями от  $x$ .

**Замечание 6.3.** Предложенный метод исследования устойчивости допускает наличие нелинейных членов во втором уравнении (5.7)

$$f(x, t, w) + g(x, t, w, \dot{w}) - w'' \left( \mu \int_b^c w'^2 dx + \nu \frac{\partial}{\partial t} \int_b^c w'^2 dx \right),$$

где  $f, g$  — нелинейные компоненты реакции основы (или иных внешних воздействий); нелинейные интегральные слагаемые учитывают влияние нелинейной продольной силы ( $\mu, \nu$  — постоянные). В этом случае условия устойчивости должны быть дополнены следующим:

$$\int_0^w f(x, t, z) dz \geq 0, \quad \int_0^w \frac{\partial f(x, t, z)}{\partial t} dz \leq 0, \quad \dot{w}g(x, t, w, \dot{w}) \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad \nu \geq 0.$$

Кроме того, система уравнений (5.7) должна быть однородной. Это выполнено в частности, если

$$f(x, t, 0) + g(x, t, 0, 0) = 0.$$

**Замечание 6.4.** На основе построения функционалов вида (6.1) можно получить условия динамической устойчивости для произвольного числа упругих элементов, расположенных на верхней и нижней стенках.

## 7. ПРИМЕР КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ ЭЛЕМЕНТА

Рассмотрим пример механической системы. Рабочая среда — воздух ( $\rho = 1$ ), пластина изготовлена из алюминия ( $E = 7 \cdot 10^{10}$ ,  $\rho_{pl} = 8480$ ). Другие параметры механической системы:  $a = 331$ ,  $x_0 = 5$ ,  $y_0 = 0,1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 3$ ,  $h = 0,005$ ,  $\nu = 0,31$ ,  $EJ = Eh^3/(12(1 - \nu^2)) = 806,7$ . Пусть концы упругой пластины закреплены шарнирно, тогда при этих параметрах  $\lambda_1 = \pi^2$ . Все значения приведены в системе СИ.

Для неравенства (6.14) построены области устойчивости (серый регион) на плоскости «сила  $N$  — скорость потока  $V$ » (рис. 7.1).

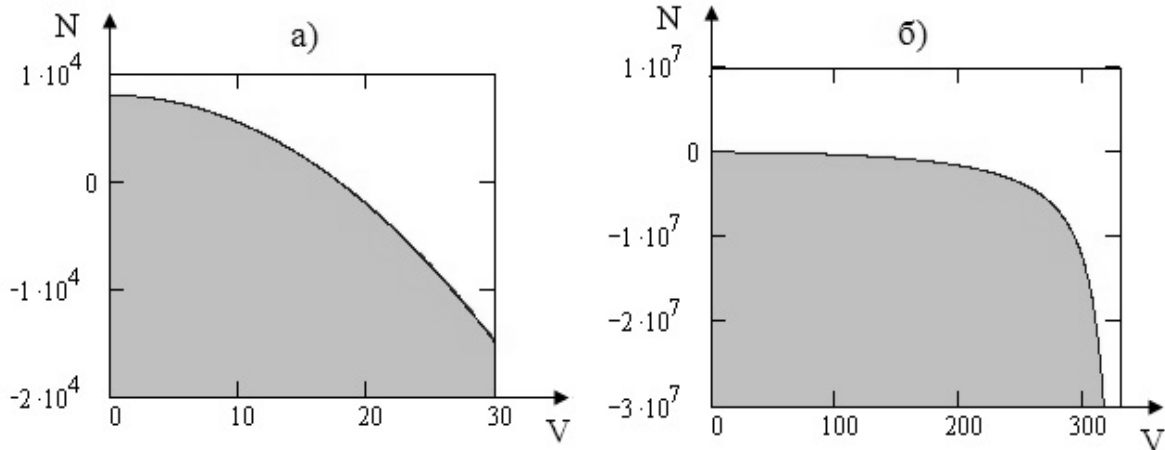


Рис. 7.1. Области устойчивости на плоскости  $(N, V)$ .

На рис. 7.1(a) скорость  $V \in [0, 30]$ , на рис. 7.1(b) —  $V \in [0, a]$ . Из неравенства (6.14) следует, что линия  $V = a$  является асимптотой границы области устойчивости. Это видно на рис. 7.1(b).

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основываясь на предложенной математической модели потока вокруг крыла с упругим элероном в дозвуковом течении жидкости или газа (в модели идеальной несжимаемой среды), получены достаточные условия динамической устойчивости элерона. Эти условия накладывают ограничения на скорость потока воздуха, изгибную жесткость упругого элерона и другие параметры механической системы. Рассмотрен случай упругого закрепления на одном конце и свободного второго



конца упругого элерона. Для конкретных примеров механических систем построена область устойчивости на плоскости двух параметров ( $h, V$ ).

На примере предложенной математической модели колеблющегося устройства в виде канала с упругим элементом получены достаточные условия динамической устойчивости упругого элемента канала с дозвуковой скоростью потока жидкости или газа (в модели идеальной сжимаемой среды). Условия накладывают ограничения на скорость газа, сжимающую (растягивающую) силу элемента, изгибную жесткость упругого элемента и другие параметры механической системы. Приведены примеры построения области устойчивости для конкретных параметров механической системы. Для конкретных примеров механических систем построены области устойчивости на плоскости параметров ( $N, V$ ).

Работа выполнена в рамках программы Министерства науки и образования РФ № 2014/232.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Устойчивость вязкоупругих элементов стенок проточных каналов. — Ульяновск: УлГТУ, 2000.
2. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Покладова Ю. В. Математическое моделирование механической системы «трубопровод — датчик давления». — Ульяновск: УлГТУ, 2008.
3. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии. — Ульяновск: УлГТУ, 2009.
4. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. — Ульяновск: УлГТУ, 2013.
5. Ванько В. И., Марчевский И. К., Щеглов И. К. Численно-аналитический метод исследования устойчивости положений равновесия профиля в потоке// Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. — 2011. — 5. — С. 3–10.
6. Вельмисов П. А., Горшков Г. М., Рябов Г. К. Гидродинамический излучатель. — Патент РФ 2062662, В06В1/18, В06В1/20. — Заявка № 5038746/28, подана 20.07.1992, опубл. 27.06.1996. — Ульяновский гос. техн. ун-т, 1996.
7. Вельмисов П. А., Киреев С. В. Математическое моделирование в задачах статически неустойчивых упругих элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. — Ульяновск: УлГТУ, 2011.
8. Вельмисов П. А., Молгачев А. А. Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости вязкоупругих элементов проточных каналов. — Ульяновск: УлГТУ, 2012.
9. Дободейч И. А., Барметов Ю. П. К расчету нестационарных течений сжимаемой жидкости в трубопроводе// Изв. вузов. Авиационная техника. — 2006. — 1. — С. 18–21.
10. Звягин А. В. Движение вязкой жидкости в канале с упругими стенками// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2005. — 1. — С. 50–54.
11. Ершов Б. А., Кутеева Г. А. Колебания идеальной жидкости в прямоугольном сосуде с упругой вставкой на стенке. Учет внутреннего трения в материале вставки// Вестн. СПбУ. Сер. 1. — 2005. — 2. — С. 86–94.
12. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. — М.: Наука, 1968.
13. Наумова Н. В., Ершов Б. А., Иванов Д. Н. Деформация упругой сферической оболочки, закрепленной по экватору, в потоке вязкой несжимаемой жидкости// Вестн. СПбУ. Сер. 3. — 2011. — 3. — С. 124–130.
14. Овчинников В. В., Попов В. М., Филимонов С. В. Применение расширенной гипотезы гармоничности для расчета флаттерных характеристик самолета// Научн. вестн. Моск. гос. техн. ун-та гражд. авиации. — 2013. — 195. — С. 93–100.
15. Соколов В. Г., Березнев А. В. Уравнения движения криволинейного участка трубопровода с потоком жидкости// Изв. вузов. Нефть и газ. — 2004. — 6. — С. 76–80.
16. Соколов В. Г., Разов И. О. Параметрические колебания и динамическая устойчивость магистральных газопроводов при наземной прокладке// Вестн. гражд. инженеров. — 2014. — 2. — С. 65–68.
17. Balakrishnan A. V. Toward a mathematical theory of aeroelasticity// В сб.: System modeling and optimization, Proc. 21st IFIP TC7 Conf., Sophia Antipolis, France, July 21–25, 2003. — Boston: Kluwer Academic Publishers, 2005. — С. 1–24.
18. Bendiksen O. O., Seber G. Fluid-structure interactions with both structural and fluid nonlinearities// J. Sound Vibr. — 2008. — 315, № 3. — С. 664–684.

19. *Dimitrienko Yu. I., Koryakov M. N., Zakharov A. A., Stroganov A. S.* Computational modeling of conjugated gasdynamic and thermomechanical processes in composite structures of high speed aircraft// *Math. Model. Num. Methods.* — 2014. — 2, № 3-3 (3). — С. 3–24.
20. *Florea R., Hall K. C., Dowell E. H.* Analysis of eigenvalues and reduced order model of nonstationary transonic potential flow of profiles to define the boundaries of flutter// *J. Aircraft.* — 2000. — 3 (37). — С. 454–462.
21. *Masahide Ya., Koji I., Takejumi U., Itsuma Yu.* Shock-stall-flutter of a two-dimensional airfoil// *AIAA Journal.* — 2004. — 2 (42). — С. 215–219.
22. *Mogilevich L. I., Popova A. A., Popov V. A.* On the dynamic interaction of an elastic cylindrical shell with a fluid laminar stream inside in application to pipeline transportation// *Sci. Tech. Transport.* — 2007. — 2. — С. 69–72.
23. *Plyusnin A. V.* Boundary-element method modelling of inside and outside nonstationary interaction of aircraft body and liquid// *Math. Model. Num. Methods.* — 2014. — 2, № 2-2 (2). — С. 77–100.
24. *Soltani N., Esfahanian V., Haddadpour H.* Analytical prediction of panel flutter using unsteady potential flow// *J. Aircraft.* — 2003. — 40, № 4. — С. 805–807.
25. *Paidoussis M. P.* The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across applied mechanics// *J. Sound Vibr.* — 2008. — 3 (310). — С. 462–492.
26. *Wu X.-Sh., Wu J.-Sh.* Numerical method for the calculation of the swept wing flutter// *Trans. Beijing Inst. Tech.* — 2007. — 5 (27). — С. 385–389.

П. А. Вельмисов

Ульяновский государственный технический университет

432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32

E-mail: [velmisov@ulstu.ru](mailto:velmisov@ulstu.ru)

А. В. Анкилов

Ульяновский государственный технический университет

432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32

E-mail: [ankil@ulstu.ru](mailto:ankil@ulstu.ru)

UDC 533.6.013.42

## Stability of Solutions of Initial Boundary Value Problems of Aerohydroelasticity

© 2016 П. А. Velmisov, A. V. Ankilov

**Abstract.** At designing structures and devices interacting with the flow of gas or liquid, it is necessary to solve the problems associated with the investigation of the stability required for their functioning and operational reliability. The definition of stability of an elastic body, taken in the article, corresponds to the Lyapunov's concept of stability of dynamical system. On the base of a proposed nonlinear mathematical model the dynamic stability of the elastic aileron of the wing taking into account the incident subsonic flow of gas or liquid (in an ideal model of a incompressible environment) is investigated. Also a nonlinear mathematical model of the device relating to the vibration technique, which is intended for intensification of technological processes, for example, the process of mixing is considered. The action of these devices is based on the oscillations of elastic elements at the flowing around a of gas or liquid flow. The dynamic stability of the elastic element, located on one wall of the flow channel with the subsonic flow of gas or liquid (in an ideal model of a compressible environment) is investigated. The both models is described by coupled nonlinear system of differential equations for the unknown functions — the potential of the gas velocity and deformation of the elastic element. On the basis of the construction of functionals, the sufficient conditions of the stability, impose restrictions on the free-stream velocity of the gas, the flexural stiffness of the elastic element, and other parameters of the mechanical system is obtained. The examples of construction of the stability regions for particular parameters of the mechanical system are presented.

## REFERENCES

1. A. V. Ankilov and P. A. Velmisov, *Ustoychivost' vyazkouprugikh elementov stenok protochnykh kanalov* (Stability of Viscoelastic Elements of Walls of Flowing Channels), UIGTU [Ul'yanovsk State Tech. Univ.], Ul'yanovsk, 2000 (in Russian).
2. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, V. D. Gorbokonenko, and Yu. V. Pokladova, *Matematicheskoe modelirovanie mekhanicheskoy sistemy "truboprovod-datchik davleniya"* [Mathematical Modeling of Mechanical System "Pipeline-Pressure Sensor"], UIGTU [Ul'yanovsk State Tech. Univ.], Ul'yanovsk, 2008 (in Russian).
3. A. V. Ankilov and P. A. Velmisov, *Dinamika i ustoychivost' uprugikh plastin pri aerogidrodinamicheskom vozdeystvii* [Dynamics and Stability of Elastic Plates at Aerohydrodynamic Influence], UIGTU [Ul'yanovsk State Tech. Univ.], Ul'yanovsk, 2009 (in Russian).
4. A. V. Ankilov and P. A. Velmisov, *Matematicheskoe modelirovanie v zadachakh dinamicheskoy ustoychivosti deformiruemyykh elementov konstruksiy pri aerogidrodinamicheskom vozdeystvii* [Mathematical Modelling in Problems of Dynamic Stability of Deformable Elements of Constructions at Aerohydrodynamic Influence], UIGTU [Ul'yanovsk State Tech. Univ.], Ul'yanovsk, 2013 (in Russian).
5. V. I. Van'ko, I. K. Marchevskii, and G. A. Shcheglov, "Chislenno-analiticheskiy metod issledovaniya ustoychivosti polozheniy ravnovesiya profilya v potoke" [Numerical and analytical method for studying the stability of airfoil equilibrium positions in flow] *Vestn. MGTU im. N. E. Baumana. Ser. Estestv. Nauki* [Bull. Bauman Moscow State Tech. Univ. Ser. Nat. Sci.], 2011, **5**, 3–10 (in Russian).
6. P. A. Velmisov, G. M. Gorshkov, and G. K. Ryabov, "Gidrodinamicheskiy izluchatel" [Hydrodynamic radiator] *Patent* 2062662, Russian Federation, MPK6 V 06 V 1/18, 1/20, Applicant and patentee: Ulyanovsk State Tech. Univ., No. 5038746/28, claimed 20.07.92, published 27.06.96, bulletin No. 18, 1996 (in Russian).
7. P. A. Velmisov and S. V. Kireev, *Matematicheskoe modelirovanie v zadachakh staticheskoy neustoychivyykh uprugikh elementov konstruksiy pri aerogidrodinamicheskom vozdeystvii* [Mathematical Modeling in Problems of Static Instability of Elastic Elements of Constructions at Aerohydrodynamic Influence], UIGTU [Ul'yanovsk State Tech. Univ.], Ul'yanovsk, 2011 (in Russian).
8. P. A. Velmisov and A. A. Molgachev, *Matematicheskoe modelirovanie v zadachakh dinamicheskoy ustoychivosti vyazkouprugikh elementov protochnykh kanalov* [Mathematical Modeling in Problems of Dynamic Stability of Viscoelastic Elements of Flowing Channels], UIGTU [Ul'yanovsk State Tech. Univ.], Ul'yanovsk, 2012 (in Russian).
9. Yu. P. Barmetov and I. A. Dobrodeich, "K raschetu nestatsionarnyykh techeniy szhimaemoy zhidkosti v truboprovode" [To calculation of nonstationary currents of the compressed liquid in the pipeline] *Izv. vuzov. Aviatsionnaya tekhnika* [Bull. Higher Schools. Aviation Tech.], 2006, **1**, 18–21 (in Russian).
10. A. V. Zvyagin, "Dvizhenie vyazkoy zhidkosti v kanale s uprugimi stenkami" [The movement of viscous liquid in the channel with elastic boundaries] *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Bull. Moscow State Univ. Ser. 1], 2005, **1**, 50–54 (in Russian).
11. B. A. Ershov and G. A. Kuteeva, "Kolebaniya ideal'noy zhidkosti v pryamougol'nom sosude s uprugoy vstavkoy na stenke. Uchet vnutrennego treniya v materiale vstavki" [Fluctuations of ideal liquid in a rectangular vessel with an elastic insert on a wall. The accounting of internal friction in insert material] *Vestn. SPbU. Ser. 1* [Bull. St. Petersburg Univ. Ser. 1], 2005, **2**, 86–94 (in Russian).
12. L. Kollatc, *Zadachi na sobstvennyye znacheniya* [Problems on Eigenvalues], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
13. N. V. Naumova, V. A. Ershov, and D. N. Ivanov, "Deformatsiya uprugoy sfericheskoy obolochki, zakreplennoy po ekvatoru, v potoke vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti" [Deformation of elastic spherical shell, fixed at the equator, in the flow of a viscous incompressible fluid] *Vestn. SPbU. Ser. 3* [Bull. St. Petersburg Univ. Ser. 3], 2011, **3**, 124–130 (in Russian).
14. V. V. Ovchinnicov, V. M. Popov, and S. V. Filimonov, "Primenenie rasshirennoy gipotezy garmonichnosti dlya rascheta flatternykh kharakteristik samoleta" [Application of the extended hypothesis of harmonicity for the calculation of flutter characteristics of the aircraft] *Nauchn. vestn. Mosk. gos. tekhn. un-ta grazhd. aviatsii* [Sci. Bull. Moscow State Tech. Univ. Civil Aviation], 2013, **195**, 93–100 (in Russian).
15. V. G. Sokolov and A. V. Bereznev, "Uravneniya dvizheniya krivolinyenogo uchastka truboprovoda s potokom zhidkosti" [The equations of the movement of a curvilinear site of the pipeline with a liquid stream] *Izv. vuzov. Neft' i gaz* [Bull. Higher Schools. Oil and Gas], 2004, **6**, 76–80 (in Russian).
16. V. G. Sokolov and I. O. Razov, "Parametricheskie kolebaniya i dinamicheskaya ustoychivost' magistral'nykh gazoprovodov pri nazemnoy prokladke" [Parametrical vibrations and dynamic stability of long-distance gas

- pipelines at above-ground laying] *Vestn. grazhd. inzhenerov* [Bull. Civil Engineers], 2014, **2** (43), 65–68 (in Russian).
17. A. V. Balakrishnan, "Toward a mathematical theory of aeroelasticity," In: *System modeling and optimization*, Proc. 21st IFIP TC7 Conf., Sophia Antipolis, France, July 21–25, 2003, 1–24, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2005.
  18. O. O. Bendiksen and G. Seber, "Fluid-structure interactions with both structural and fluid nonlinearities," *J. Sound Vibr.*, 2008, **315**, No. 3, 664–684.
  19. Yu. I. Dimitrienko, M. N. Koryakov, A. A. Zakharov, and A. S. Stroganov, "Computational modeling of conjugated gasdynamic and thermomechanical processes in composite structures of high speed aircraft," *Math. Model. Num. Methods*, 2014, **2**, No. 3-3 (3), 3–24.
  20. R. Florea, K. C. Hall, and E. H. Dowell, "Analysis of eigenvalues and reduced order model of nonstationary transonic potential flow of profiles to define the boundaries of flutter," *J. Aircraft*, 2000, **3** (37), 454–462.
  21. Ya. Masahide, I. Koji, U. Takefumi, and Yu. Itsuma, "Shock-stall-flutter of a two-dimensional airfoil," *AIAA Journal*, 2004, **2** (42), 215–219.
  22. L. I. Mogilevich, A. A. Popova, and V. A. Popov, "On the dynamic interaction of an elastic cylindrical shell with a fluid laminar stream inside in application to pipeline transportation," *Sci. Tech. Transport*, 2007, **2**, 69–72.
  23. A. V. Plyusnin, "Boundary-element method modelling of inside and outside nonstationary interaction of aircraft body and liquid," *Math. Model. Num. Methods*, 2014, **2**, No. 2-2 (2), 77–100.
  24. N. Soltani, V. Esfahanian, and H. Haddadpour, "Analytical prediction of panel flutter using unsteady potential flow," *J. Aircraft*, 2003, **40**, No. 4, 805–807.
  25. M. P. Paidoussis, "The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across applied mechanics," *J. Sound Vibr.*, 2008, **3** (310), 462–492.
  26. X.-Sh. Wu and J.-Sh. Wu, "Numerical method for the calculation of the swept wing flutter," *Trans. Beijing Inst. Tech.*, 2007, **5** (27), 385–389.

P. A. Velmisov  
Ulyanovsk State Technical University,  
32 Severny Venets str., 432027 Ulyanovsk, Russia  
E-mail: velmisov@ulstu.ru

A. V. Ankilov  
Ulyanovsk State Technical University,  
32 Severny Venets str., 432027 Ulyanovsk, Russia  
E-mail: ankil@ulstu.ru

## О СКОРОСТИ СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МЛАДШИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2016 г. **В. Н. ДЕНИСОВ**

Аннотация. Для параболического уравнения в полупространстве  $\bar{D} = \mathbb{R}^N \times [0, \infty)$ ,  $N \geq 3$ , рассматривается задача Коши

$$L_1 u \equiv Lu + c(x, t)u - u_t = 0, \quad (x, t) \in D,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

В зависимости от оценок на коэффициент  $c(x, t)$  уравнения доказана степенная либо экспоненциальная скорость стабилизации к нулю решения задачи Коши равномерно по  $x$  на каждом компакте  $K$  в  $\mathbb{R}^N$  для произвольной ограниченной непрерывной в  $\mathbb{R}^N$  начальной функции  $u_0(x)$ .

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	53
2. Формулировка результатов . . . . .	55
3. Вспомогательные утверждения . . . . .	57
4. Доказательство теоремы 1.1 . . . . .	60
5. Доказательство вспомогательных утверждений для теоремы 2.2 . . . . .	64
6. Доказательство теоремы 2.2 . . . . .	68
Список литературы . . . . .	71

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе будут изучены два случая близких к окончательным достаточных условий, налагаемых на младший коэффициент  $c(x, t)$  параболического уравнения, которые гарантируют стабилизацию к нулю с определенной скоростью решения соответствующей задачи Коши равномерно относительно  $x$  на каждом компакте  $K$  в  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ , при любой ограниченной и непрерывной начальной функции.

В первом случае, когда

$$c(x, t) \leq -\frac{\alpha^2}{r^2}$$

при больших  $r$ , мы получим степенную скорость стабилизации к нулю решения задачи Коши.

Во втором случае, когда

$$c(x, t) \leq -\frac{\alpha^2}{r^{2k}}, \quad 0 < k < \frac{1}{2}$$

при больших  $r$ , мы получим экспоненциальную скорость стабилизации к нулю соответствующей задачи Коши.

В полупространстве  $\bar{D} = \mathbb{R}^N \times [0, \infty)$  рассмотрим задачу Коши при  $N \geq 3$ :

$$L_1 u \equiv Lu + c(x, t)u - u_t = 0, \quad (x, t) \in D, \tag{1.1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.2}$$

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 15-01-00471.

где

$$Lu = \sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x, t) u_{x_i x_k}. \quad (1.3)$$

Предполагается, что:

1. Коэффициенты уравнения (1.1) действительны,  $a_{ik} = a_{ki}$ , ( $i, k = 1, \dots, N$ ), и существуют положительные постоянные  $\lambda_0, \lambda_1$ , такие, что

$$\lambda_0^2 = \inf_{D, |\xi|=1} \sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x, t) \xi_i \xi_k, \lambda_1^2 = \sup_{D, |\xi|=1} \sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x, t) \xi_i \xi_k, \quad (1.4)$$

где

$$|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_N^2}, \forall (x, t) \in D.$$

2. Коэффициенты уравнения (1.1) непрерывны, ограничены и удовлетворяют условию Гельдера (см. [11, с. 92, неравенства (4.14), (4.15)]).
3. Коэффициент  $c(x, t)$  неположителен в  $D$  и удовлетворяет условию (C), т. е. найдется постоянная  $\alpha > 0$  такая, что

$$c(x, t) \leq a_\alpha(r) = -\alpha^2 \min(1, r^{-2}), \quad (1.5)$$

где  $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$ .

4. Начальная функция  $u_0(x)$  непрерывна и ограничена в  $\mathbb{R}^N$ :

$$|u_0(x)| \leq M, \quad (1.6)$$

Задача Коши (1.1), (1.2) изучалась во многих работах (см. например [8, 11, 15]).

При сделанных здесь предположениях существует и единственно классическое ограниченное решение задачи (1.1), (1.2) (см. [11, с. 78, теорема 4]).

Изучению скорости стабилизации решения параболических уравнений посвящено значительное число работ [4–6, 8, 11, 15]. В работе [11, с. 181] методом барьеров, основанным на принципе максимума, установлено, что для ограниченной начальной функции  $u_0(x)$  решение задачи Коши (1.1), (1.2) с ограниченными коэффициентами удовлетворяет неравенству

$$|u(x, t)| \leq M \exp(-at), \quad a > 0, t > 0, \quad (1.7)$$

равномерно по  $x$  во всем  $\mathbb{R}^N$ , если младший коэффициент уравнения (1.1) удовлетворяет неравенству

$$c(x, t) \leq -\alpha^2. \quad (1.8)$$

Отметим, что в работах [4–6] были получены другие оценки стремления к нулю при  $t \rightarrow \infty$  решения задачи Коши и краевых задач, однако при этом от начальной функции  $u_0(x)$  требовалось, чтобы  $u_0(x)$  была достаточно гладкой и финитной [4, с. 5], или чтобы  $u_0(x)$  была ограниченной и непрерывной и существовал интеграл [6, с. 44]:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) dx < \infty.$$

Целью настоящей работы является существенное ослабление условия (1.8) на коэффициент  $c(x, t)$  уравнения и установление степенной либо экспоненциальной скорости стабилизации к нулю решения задачи Коши (1.1), (1.2), равномерно по  $x$  на каждом компакте  $K$  в  $\mathbb{R}^N$  для произвольной ограниченной непрерывной в  $\mathbb{R}^N$  начальной функции  $u_0(x)$ . Методы доказательства основаны на построении антибарьеров [18] с точной оценкой на бесконечности с учетом поведения коэффициентов при больших  $|x|$  и не использует оценок фундаментального решения задачи Коши.

Будем говорить, что решение задачи Коши (1.1), (1.2) стабилизируется к нулю в точке  $x \in \mathbb{R}^N$  (равномерно относительно  $x$  на каждом компакте  $K$  в  $\mathbb{R}^N$ ), если существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \quad (1.9)$$

в точке  $x \in \mathbb{R}^N$  (равномерно относительно  $x$  на каждом компакте  $K$  в  $\mathbb{R}^N$ ).

Стабилизация решения задачи Коши для параболических уравнений второго порядка для различных классов начальных функций изучалась в работах [7, 9, 10].

С обзором работ по стабилизации решений параболических уравнений можно ознакомиться в работе [8]. Много интересной информации по параболическим уравнениям содержится в [2].

Из теоремы 3, доказанной в работе [10], следует справедливость утверждения:

**Теорема 1.1.** *Если при некотором  $\alpha > 0$  выполнены условия (C) на коэффициент  $c(x, t)$ , то для любой ограниченной непрерывной начальной функции  $u_0(x)$  решение задачи (1.1), (1.2) стабилизируется к нулю равномерно относительно  $x$  на каждом компакте  $K$  в  $\mathbb{R}^N$ .*

Как показано в работе [7], это утверждение является точным, т. е. нельзя заменить компакт  $K$  в этой теореме на все пространство  $\mathbb{R}^N$ .

## 2. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Если при

$$\alpha^2 > \lambda_1^2(S - 1), S = \frac{(N - 1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2}{\lambda_0^2}, \quad (2.1)$$

для коэффициента  $c(x, t)$  выполнено условие (C), то для любой ограниченной непрерывной в  $\mathbb{R}^N$  начальной функции  $u_0(x)$  для решения задачи Коши (1.1), (1.2) справедливо неравенство

$$|u(x, t)| \leq Mt^{-\frac{\lambda_1(\alpha)}{3}}, M > 0, t > t_1 > 0, \quad (2.2)$$

равномерно относительно  $x$  на каждом компакте  $K$  в  $\mathbb{R}^N$ , где

$$\lambda_1(\alpha) = \frac{2 - S + \sqrt{D_1}}{2}, D_1 = (2 - S)^2 + 4\bar{\alpha}^2 \quad (2.3)$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda_1}, M = M(K, \alpha, \lambda_0, \lambda_1)$$

Рассмотрим задачу Коши (1.1), (1.2), когда  $Lu = \Delta u$  — оператор Лапласа, т. е.

$$\Delta u + c(x, t)u - u_t = 0 \text{ в } D, \quad (2.4)$$

$$u(x, t) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^N, \quad (2.5)$$

где для  $c(x, t)$  выполнены те же условия (C), что в задаче (1.1), (1.2),  $u_0(x)$  — произвольная непрерывная ограниченная функция.

Имеет место следующий результат.

**Теорема 2.1.** *Если при*

$$\alpha^2 > (N - 1)$$

для коэффициента  $c(x, t)$  выполнено условие (C), то для любой ограниченной непрерывной в  $\mathbb{R}^N$  начальной функции  $u_0(x)$  для решения задачи Коши (2.4), (2.5) справедливо неравенство

$$|u(x, t)| \leq Mt^{-\frac{\lambda_1(\alpha)}{3}}, t > t_1 > 0,$$

равномерно относительно  $x$  на каждом компакте  $K$  в  $\mathbb{R}^N$ , где

$$\lambda_1(\alpha) = \frac{2 - N + \sqrt{D_1}}{2}, D_1 = (2 - N)^2 + 4\alpha^2,$$

$$M = M(K, \alpha).$$

Доказательство теоремы 2.1 аналогично доказательству теоремы 1.1, ибо в случае  $L = \Delta$  имеем  $\lambda_1^2 = \lambda_0^2 = 1$  и тогда  $S = N$ .

**Замечание 2.1.** Теорема 1.1 уточняет теорему 3 из нашей работы [10].

**Замечание 2.2.** Нельзя усилить утверждение теоремы 1.1, заменив компакт  $K$  на все пространство  $\mathbb{R}^N$ .

**Замечание 2.3.** Из формулы (2.3) следует

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \lambda_1(\alpha) = +\infty. \quad (2.6)$$

Поэтому из оценки (2.2) в теореме 1.1 и (2.6) вытекает, что решение задачи Коши (1.1), (1.2) стабилизируется к нулю с произвольно большой степенной скоростью при  $\alpha \rightarrow \infty$  равномерно относительно  $x$  на каждом компакте  $K$  в  $\mathbb{R}^N$  и при любой непрерывной ограниченной функции  $u_0(x)$ .

В полупространстве  $\bar{D} = \mathbb{R}^N \times [0, \infty)$ ,  $N \geq 3$  рассмотрим задачу Коши

$$L_1 u = \Delta u + (b, \nabla u) + c(x, t)u - u_t = 0, \quad (x, t) \in D, \quad (2.7)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (2.8)$$

где

$$(b, \nabla u) = \sum_{i=1}^N b_i(x, t) u_{x_i}.$$

Мы предполагаем, что

1. Коэффициенты уравнения (2.7) действительны, непрерывны и ограничены в  $\mathbb{R}^N$  и удовлетворяют условию Гельдера, и в частности:

$$\sum_{i=1}^N |b_i(x, t)| \leq B, B > 0, (x, t) \in D. \quad (2.9)$$

2. Коэффициенты  $b_i(x, t)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) удовлетворяют условию (B): существует постоянная  $B > 0$  такая, что

$$\left| \sum_{i=1}^N b_i(x, t) x_i \right| \leq B, |x| > 1, t > 0. \quad (2.10)$$

3. Коэффициент  $c(x, t)$  удовлетворяет условию (C<sub>1</sub>), существуют  $\alpha > 0$  и  $k$ :  $0 < k < 1/2$  такие, что

$$c(x, t) \leq b_\alpha(r) = -\alpha^2 \min(1, r^{-2k}). \quad (2.11)$$

4. Начальная функция  $u_0(x)$  непрерывна и ограничена в  $\mathbb{R}^N$ , т. е. выполняется неравенство (1.6).

**Теорема 2.2.** Если  $u(x, t)$  — решение задачи Коши (2.7), (2.8) с произвольной непрерывной и ограниченной начальной функцией  $u_0(x)$ , удовлетворяющей неравенству (1.6), коэффициенты  $b_i(x, t)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) удовлетворяют условию (B)(2.10) при  $B_1 < N$ , коэффициент  $c(x, t)$  удовлетворяет условию (C<sub>1</sub>) при  $0 < k < 1/2$  и любом  $\alpha > 0$ , то для решения задачи Коши (2.7), (2.8) справедливо неравенство

$$|u(x, t)| \leq M_1 \exp(-bt^{\frac{1}{n}}), t \geq t_1 > 0, \quad (2.12)$$

равномерно по  $x$  на каждом компакте  $K$ , где

$$M_1 = M_1(K), b = b(k, K, \lambda_0, \lambda_1, \alpha)$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1 - 2k}{3 - 2k}.$$

Теорема 2.2 является точной в том смысле, что в утверждении нельзя заменить компакт  $K$  на все  $\mathbb{R}^N$ .



## 3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Вначале построим в области  $D$  стационарное решение  $\Gamma_\alpha(r)$  неравенства

$$L_2\Gamma_\alpha(r) \equiv \sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x,t)\Gamma_{\alpha x_i x_k} + a_\alpha(r)\Gamma_\alpha \leq 0 \text{ в } D, \quad (3.1)$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2},$$

в котором коэффициент  $a_\alpha(r)$  определен по формуле (1.5)

Отметим, что коэффициент  $a_\alpha(r)$  непрерывен в  $\mathbb{R}^N$  и удовлетворяет условию Гельдера.

**Лемма 3.1.** Пусть выполняются условия (C) на  $c(x,t)$ , тогда существует функция  $\Gamma = \Gamma_\alpha(r)$  такая, что

$$\Gamma_\alpha(r) > 0, \quad r \geq 0, \quad \Gamma'_\alpha(r) \geq 0, \quad L_2\Gamma_\alpha(r) \leq 0 \text{ в } D$$

и справедливо неравенство

$$\Gamma(r) > \frac{C_1}{2} r^{\lambda_1(\alpha)}, \quad r \geq r_1 > 1, \quad (3.2)$$

где

$$\lambda_1(\alpha) = \frac{2 - S + \sqrt{D}}{2}, \quad D = (2 - S)^2 + 4\bar{\alpha}^2, \\ S = \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2}{\lambda_0^2}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda_1}, \quad C_1 > 0.$$

*Доказательство.* Применяя формулы

$$\Gamma'_{x_i} = \frac{x_i}{r} \Gamma', \quad \Gamma''_{x_i x_k} = \frac{x_i x_k}{r^2} \left[ \Gamma'' - \frac{\Gamma'}{r} \right], \\ \Gamma''_{x_i x_i} = \frac{x_i^2}{r^2} \left[ \Gamma'' - \frac{\Gamma'}{r} \right] + \frac{\Gamma'}{r},$$

получим равенство (см. (3.1)):

$$L_2\Gamma_\alpha = Q \left\{ \left[ \Gamma''_\alpha - \frac{\Gamma'_\alpha}{r} \right] + \frac{\Gamma'_\alpha}{r} \frac{\sum_{i=1}^N a_{ii}}{Q} + \frac{a_\alpha(r)\Gamma_\alpha}{Q} \right\}, \quad (3.3)$$

где

$$Q = Q(x,t) = \sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x,t) \frac{x_i x_k}{r^2}.$$

Из определения постоянных  $\lambda_0^2, \lambda_1^2$  в (1.4) следует, что

$$\lambda_0^2 \leq Q(x,t) \leq \lambda_1^2 \text{ в } D, \quad \frac{\sum_{i=1}^N a_{ii}}{Q} \leq \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2}{\lambda_0^2} \text{ в } D. \quad (3.4)$$

При  $r \leq 1$  и  $t > 0$  из (3.3) и (3.4) получим

$$L_2\Gamma_\alpha \leq \lambda_1^2 \left[ \Gamma''_\alpha + \frac{(S-1)}{r} \Gamma'_\alpha - \bar{\alpha}^2 \Gamma_\alpha \right],$$

где

$$S = \frac{(N-1)\lambda_0^2 + \lambda_1^2}{\lambda_0^2}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda_1}.$$

Полагая в последнем неравенстве  $\Gamma_\alpha = Z_\alpha(r)$ , где  $Z_\alpha(r)$  — решение следующей задачи:

$$Z''_\alpha(r) + \frac{(S-1)}{r} Z'_\alpha(r) - \bar{\alpha}^2 Z_\alpha(r) = 0, \quad 0 < r \leq 1, \quad (3.5)$$

$$Z_\alpha(0) = 1, \quad Z'_\alpha(0) = 0, \quad (3.6)$$

получим неравенство:

$$L_2\Gamma_\alpha(r) \leq 0, \quad 0 < r \leq 1, \quad t > 0. \quad (3.7)$$

Из теории функций Бесселя [3, с. 91] следует, что решение задачи (3.5), (3.6) существует, единственно и представимо в виде:

$$Z_\alpha(r) = q_1(S) \frac{I_{\frac{S-2}{2}}(r\bar{\alpha})}{(r\bar{\alpha})^{\frac{S-2}{2}}}, \quad q_1(S) = 2^{\frac{S-2}{2}} \Gamma\left(\frac{S}{2}\right), \quad (3.8)$$

где  $\Gamma(S)$  — функция Эйлера,  $I_\nu(r)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода. Из представления (3.8) и формул [3, п. 3.71] следует, что  $Z_\alpha(r) > 0$ ,  $Z'_\alpha(r) > 0$ , при  $r > 0$

$$\begin{aligned} b_0(\bar{\alpha}) &= Z_\alpha(1) = q(S) \alpha^{\frac{2-S}{2}} I_{\frac{S-2}{2}}(\bar{\alpha} > 0), \\ b_1(\bar{\alpha}) &= Z'_\alpha(1) = q(S) \bar{\alpha}^{2-\frac{S}{2}} I_{\frac{S}{2}}(\bar{\alpha}) > 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Так как

$$a_\alpha(r) = \frac{-\bar{\alpha}^2}{r^2}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda_1}$$

при  $r \geq 1$ , то, применяя в (3.3) все неравенства (3.4), будем иметь при  $r > 1$

$$L_2 \Gamma_\alpha(r) \leq \lambda_1^2 \left[ \Gamma''_\alpha + \frac{(S-1)}{r} \Gamma'_\alpha - \frac{\bar{\alpha}^2}{r^2} \Gamma_\alpha \right]. \quad (3.10)$$

где

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda_1}.$$

Из неравенств (3.4) очевидно следует, что коэффициенты в правой части неравенства (3.10) не зависят от  $t$ .

Рассмотрим для функции  $Y_\alpha(r)$  задачу:

$$Y''_\alpha(r) + \frac{(S-1)}{r} Y'_\alpha(r) - \frac{\bar{\alpha}^2}{r^2} Y_\alpha(r) = 0, \quad r > 1, \quad (3.11)$$

$$Y_\alpha(1) = b_0(\bar{\alpha}), \quad Y'_\alpha(1) = b_1(\bar{\alpha}), \quad (3.12)$$

где были использованы обозначения (3.9) для  $b_0(\bar{\alpha})$  и  $b_1(\bar{\alpha})$ . Уравнение (3.11) является уравнением Эйлера [1], поэтому будем искать его решение в виде  $Z_\alpha(r) = r^\lambda$ . Дважды дифференцируя  $r^\lambda$  по  $r$  и вставляя в уравнение (3.11), получим определяющее уравнение:

$$\lambda^2 + (S-2) - \bar{\alpha}^2 = 0,$$

которое имеет корни:

$$\lambda_1 = \frac{2-S+\sqrt{D_1}}{2} > 0, \quad \lambda_2 = \frac{2-S-\sqrt{D_1}}{2} < 0, \quad D_1 = (2-S)^2 + 4\bar{\alpha}^2.$$

Решение уравнения (3.11) представляет собой сумму линейно независимых решений  $r^{\lambda_1}$  и  $r^{\lambda_2}$  с коэффициентами  $C_1$  и  $C_2$ , т. е.

$$Y_\alpha(r) = C_1 r^{\lambda_1(\alpha)} + C_2 r^{\lambda_2(\alpha)}, \quad r \geq 1. \quad (3.13)$$

Коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  в (3.13) определяются из системы уравнений:

$$\begin{aligned} b_0(\bar{\alpha}) &= Z_\alpha(1) = C_1 + C_2, \\ b_1(\bar{\alpha}) &= Z'_\alpha(1) = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2, \end{aligned}$$

которая имеет решение

$$C_1 = \frac{b_0(\bar{\alpha})\lambda_2 - b_1(\bar{\alpha})}{\lambda_2 - \lambda_1} > 0, \quad C_2 = \frac{b_1(\bar{\alpha}) - b_0(\bar{\alpha})\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (3.14)$$

Таким образом, полагая в (3.10)

$$\Gamma_\alpha(r) = \begin{cases} Y_\alpha(r) & \text{при } r \geq 1, \\ Z_\alpha(r), & 0 \leq r \leq 1, \end{cases} \quad (3.15)$$

мы получим в силу (3.7), (3.10) неравенство

$$L_2 \Gamma_\alpha(r) \leq 0 \text{ в } D. \quad (3.16)$$

Очевидно, что функция (3.15) непрерывна и имеет непрерывные первые и вторые производные. В самом деле, непрерывность функции и указанных производных при  $r \neq 1$  очевидна, а при  $r = 1$  по построению справедливы «условия склейки» (3.12). Поэтому из непрерывности коэффициентов уравнений (3.5) и (3.11) при  $r = 1$  и условий (3.12) следует, что

$$Z''_{\alpha}(1) = Y''_{\alpha}(1) = \bar{\alpha}^2,$$

т. е. следует непрерывность и вторых производных у функции (3.15).

Учитывая неравенство  $C_1 > 0$  из представления (3.13) и отрицательность  $\lambda_2 < 0$ , получим, что найдется постоянная  $r_1 > 1$  такая, что справедливо неравенство

$$\Gamma_{\alpha}(r) > \frac{C_1}{2} r^{\lambda_1(\alpha)} \text{ при } r \geq r_1, \quad (3.17)$$

из которого и (3.16) следует, что функция (3.15) является антибарьером [18], т. е. справедливо неравенство (3.16) и справедливы соотношения:

$$\Gamma > 0, \Gamma \rightarrow +\infty, r \rightarrow +\infty.$$

□

Рассмотрим функцию

$$p(r) = \left( \frac{r^2}{4h^2} - 1 \right) \text{ при } r \leq h. \quad (3.18)$$

**Лемма 3.2.** *Функция (3.18) обладает следующими свойствами:*

1.  $-1 \leq p(r) \leq$  при  $r \leq 2h$  ( $h > 0$ ),
2.  $-1 \leq p(r) \leq -\frac{3}{4}$  при  $r \leq h$ ,
3.  $Lp(r) + \lambda p(r) \geq 0$  при  $r \leq h$ , где  $\lambda = \frac{N\lambda_0^2}{2h^2}$ .

*Доказательство.* Докажем свойство 3. Учитывая формулы

$$p_{x_i}(r) = \frac{x_i}{2h^2}, p_{x_i x_k}(r) = 0, p_{x_i x_k}(r) = \frac{1}{2h^2}$$

и неравенства (3.4)

$$Lp(r) + \lambda p(r) = \frac{\sum_{i=1}^N a_{ii}(x, t)}{2h^2} + \lambda \left( \frac{r^2}{4h^2} - 1 \right) \geq \frac{N\lambda_0^2}{2h^2} - \lambda = 0,$$

получаем доказательство свойства 3.

Свойства 1 и 2 очевидны. Лемма 3.2 доказана. □

Вводим функцию

$$P_1(x, t) = p(r)e^{-\lambda t}, \quad (3.19)$$

где  $r \leq h$ ,  $t > 0$ ,  $\lambda = \frac{N\lambda_0^2}{2h^2}$ ,  $p(r)$  — функция (3.18).

**Лемма 3.3.** *Функция (3.17) обладает следующими свойствами:*

$$LP_1(x, t) \geq \frac{\partial P_1(x, t)}{\partial t} \text{ при } r \leq h, t > 0, \quad (3.20)$$

$$P_1(x, 0) = p(r), \text{ при } r \leq h,$$

существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_1(x, t) = 0$$

равномерно относительно  $x$  в шаре  $r \leq h$ .

*Доказательство.* В силу формулы (3.19) существование предела очевидно. Докажем справедливость неравенства (3.20).

Применяя свойства функции (3.18) из леммы 3.2, будем иметь:

$$LP_1(x, t) - \frac{\partial P_1(x, t)}{\partial t} \geq e^{-\lambda t}(-\lambda p(r) + \lambda p(r)) = 0,$$

где

$$\lambda = \frac{N\lambda_0^2}{2h^2},$$

$p(r)$  — функция (3.18). Лемма 3.3 доказана. □

Так как функция  $u_0(x)$  ограничена:

$$|u_0(x)| \leq M,$$

то, заменяя в уравнении (1.1) решение  $u(x, t)$ , отвечающее функции  $u_0(x)$ , по формуле

$$u_1(x, t) = \frac{u(x, t)}{M},$$

мы приходим к задаче Коши

$$Lu_1(x, t) + c(x, t)u_1(x, t) = \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, t) \text{ в } D,$$

$$u_1(x, t) = u_1(x), x \in \mathbb{R}^N,$$

где для начальной функции  $u_1(x) = \frac{u_0(x)}{M}$  справедливо неравенство:

$$|u_1(x)| = \left| \frac{u_0(x)}{M} \right| \leq 1.$$

Используя этот простой факт и принцип максимума [11, с. 24], получаем, что для доказательства теоремы 1.1 достаточно установить для решения задачи Коши

$$LV + a_\alpha(r)V - V_t = 0 \text{ в } D, \tag{3.21}$$

$$V(x, t) = 1, x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.22}$$

оценку вида (2.2), (2.3), т. е. оценку

$$|V(x, t)| \leq M_1 t^{-\frac{\lambda_1(\alpha)}{3}},$$

где

$$\lambda_1(\alpha) = \frac{2 - S + \sqrt{D_1}}{2},$$

$$D_1 = (2 - S)^2 + 4\bar{\alpha}^2, \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda_1}.$$

#### 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

Фиксируем произвольный компакт  $K$  в  $\mathbb{R}^N$  и выберем число  $l > 1$  так, чтобы компакт  $K$  содержался в замкнутом шаре:

$$\bar{B}_l = \{|x| \leq l\}.$$

В шаре  $\bar{B}_l$  функция  $\Gamma_\alpha(r)$  из леммы 3.1 в силу известной теоремы Вейерштрасса [1, с. 90] достигает максимального значения  $\Gamma(l)$ .

Так как  $\Gamma_\alpha(r) > 0$ , то эту функцию можно нормировать:

$$\bar{\Gamma}_\alpha(r) = \frac{\Gamma_\alpha(r)}{\Gamma_\alpha(l)}.$$

Ясно, что  $\bar{\Gamma}_\alpha(r) \leq 1$  при  $r \leq l$ .

Для выбранного  $l > 0$  фиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$  из неравенства

$$0 < \varepsilon < \Gamma(l). \tag{4.1}$$

Затем для фиксированного  $\varepsilon > 0$  выберем  $\delta > 0$ , полагая  $\delta = \varepsilon$ , тогда

$$\delta \bar{\Gamma}(r) \leq \varepsilon \text{ при } r \leq l. \tag{4.2}$$

Введем функцию

$$W(x, t) = \delta\bar{\Gamma}(r) - V(x, t), \quad (4.3)$$

где

$$\bar{\Gamma}(r) = \frac{\Gamma_\alpha(r)}{\Gamma_\alpha(l)},$$

$\Gamma_\alpha(r)$  определена по формуле (3.15), а функция  $V(x, t)$  — решение задачи (3.21), (3.22).

При выбранном  $l > 1$  выберем  $h > r_1 > l$ , где  $r_1$  из (3.17), так, чтобы выполнялось неравенство:

$$W(x, t)|_{|x|=h} > 0, \quad \text{для всех } t > 0. \quad (4.4)$$

Такой выбор  $h > r_1 > l$  всегда возможен, ибо функция  $V(x, t)$  очевидно ограничена:  $V(x, t) \leq 1$ , а функция  $\bar{\Gamma}(r)$  в силу (3.17) является неограниченно растущей функцией при  $r \rightarrow +\infty$ .

Так как в силу неравенства (3.17)

$$\delta\bar{\Gamma}(h) > \frac{C_1}{2} h^{\lambda_1(\alpha)} \frac{\varepsilon}{\Gamma_\alpha(l)},$$

то для обеспечения неравенства (4.4) при всех  $t > 0$  достаточно выбрать  $h$  из условия

$$\frac{C_1 \varepsilon h^{\lambda_1(\alpha)}}{2 \Gamma_\alpha(l)} = 1, \quad (4.5)$$

ибо тогда  $V(x, t) \leq 1$ , а  $\delta\bar{\Gamma}(h) > 1$  и (4.4) заведомо выполняется.

Для фиксированного  $\varepsilon > 0$  решим уравнение (4.5) относительно  $h$ , при этом получим

$$h = \left( \frac{2\Gamma_\alpha(l)}{C_1} \right)^{\frac{1}{\lambda_1}} \varepsilon^{-\frac{1}{\lambda_1}}. \quad (4.6)$$

Отметим, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} h(\varepsilon) = +\infty.$$

Очевидно, что функция  $W(x, t)$  удовлетворяет соотношениям

$$LW + a_\alpha(r)W - \frac{\partial W}{\partial t} \leq 0, \quad |x| < h, \quad t > 0, \quad (4.7)$$

$$W|_{|x|=h} > 0 \quad \text{для всех } t > 0, \quad (4.8)$$

$$W(x, 0) = \delta\bar{\Gamma}(r) - 1, \quad r < h. \quad (4.9)$$

Введем функцию

$$\varphi(r) = \delta\bar{\Gamma}(r) - 1, \quad \bar{\Gamma}(r) = \frac{\Gamma_\alpha(r)}{\Gamma_\alpha(l)}. \quad (4.10)$$

Из неравенств (4.1) и (4.2) следует, что функция  $\varphi(r)$  является отрицательной при  $r \leq l$  и что при  $r = h$  в силу выбора  $h > 0$  из условия (4.5) следует, что  $\varphi(h) > 0$ .

В силу непрерывности функции (4.10) имеет смысл следующее представление для этой функции:

$$\varphi(r) = \varphi^-(r) + \varphi^+(r) \quad \text{при } r \leq h,$$

где

$$\varphi^-(r) = \frac{\varphi(r) - |\varphi(r)|}{2} = \min(0, \varphi(r)) \leq 0,$$

$$\varphi^+(r) = \frac{\varphi(r) + |\varphi(r)|}{2} = \max(0, \varphi(r)) \geq 0.$$

Рассмотрим функцию  $q(x, t)$ , которая удовлетворяет соотношениям

$$Lq(x, t) + a_\alpha(r)q(x, t) - q_t(x, t) = 0, \quad r < h, \quad t > 0, \quad (4.11)$$

$$q(x, t)|_{|x|=h} = 0, \quad t > 0, \quad (4.12)$$

$$q(x, 0) = \varphi^-(r) = \min(0, \varphi(r)), \quad (4.13)$$

где  $\varphi(r)$  — функция (4.10).

**Лемма 4.1.** Для функций  $W(x, t)$  из (4.3) и  $q(x, t)$  из (4.11)–(4.13) справедливо неравенство

$$W(x, t) \geq q(x, t) \quad \text{при } |x| \leq h, \quad t > 0. \quad (4.14)$$

*Доказательство.* Рассмотрим функцию

$$k(x, t) = W(x, t) - q(x, t). \quad (4.15)$$

Учитывая соотношения (4.7)–(4.9) для функции  $W(x, t)$  и соотношения (4.11)–(4.13) для функции  $q(x, t)$ , будем иметь

$$Lk(x, t) + a_\alpha(r)k(x, t) - \frac{\partial k}{\partial t}(x, t) \leq 0, \quad r < h, \quad t > 0, \quad (4.16)$$

$$k(x, t)|_{|x|=h} > 0, \quad t > 0, \quad (4.17)$$

$$k(x, 0) = \varphi(r) - \varphi^-(r) = \varphi^+(r) = \max(0, \varphi(r)) > 0. \quad (4.18)$$

Из (4.16)–(4.18) и принципа максимума [11, теорема 1, с. 15] вытекает, что  $k(x, t) \geq 0$  при  $r < h$  и  $t > 0$ . Лемма 4.1 доказана.  $\square$

**Лемма 4.2.** *Существует постоянная  $A > 0$  такая, что функция  $q(x, t)$  из (4.11)–(4.13) и функция*

$$P_2(x, t) = AP_1(x, t), \quad (4.19)$$

где  $P_1(x, t)$  — функция (3.19), удовлетворяет неравенству

$$q(x, t) \geq P_2(x, t) \text{ при } r < h, t > 0. \quad (4.20)$$

*Доказательство.* Рассмотрим функцию

$$m(x, t) = q(x, t) - P_2(x, t). \quad (4.21)$$

Выберем число  $A > 0$  так, чтобы выполнялось неравенство

$$m(x, 0) = \varphi^-(r) - Ap(r) \geq 0 \text{ при } r < h.$$

Такой выбор числа  $A > 0$  возможен, так как функция  $p(r)$  из (3.18) удовлетворяет свойству 2 из леммы 3.2, а функция  $\varphi^-(r)$  (4.13) ограничена снизу на множестве  $r < h$  числом  $\nu < 0$ :

$$0 \geq \varphi^-(r) \geq \min_{|x| \leq h} \varphi^-(r) = \nu = \left( \frac{\varepsilon}{\Gamma_\alpha(l)} - 1 \right). \quad (4.22)$$

В самом деле, полагая  $A = -\frac{4}{3}\nu$ , где  $\nu = \left( \frac{\varepsilon}{\Gamma(l)} - 1 \right)$  и учитывая неравенство (4.22) и свойство 2 из леммы 3.2  $-1 \leq p(r) \leq -\frac{3}{4}$ , будем иметь

$$Ap(r) = -\frac{4}{3}\nu p(r) \leq -\frac{4}{3}\nu \left( -\frac{3}{4} \right) = \nu \leq \varphi^-(r) \leq 0 \quad (4.23)$$

при  $r \leq h$ .

Из леммы 3.3 и леммы 4.2 вытекает, что функция (4.19) удовлетворяет соотношениям

$$\Delta P_2(x, t) - \frac{\partial P_2(x, t)}{\partial t} > 0 \text{ при } r < h, t > 0, \quad (4.24)$$

$$P_2(x, t)|_{|x|=h} < 0, t > 0, \quad (4.25)$$

$$P_2(x, 0) = Ap(r) \text{ при } r < h, A = \frac{-4}{3} \left( \frac{\varepsilon}{\Gamma_\alpha(l)} - 1 \right). \quad (4.26)$$

где  $p(r)$  — функция (3.18). Из (4.11) и (4.24) следует, что функция (4.21) удовлетворяет неравенству

$$L(q(x, t) - P_2(x, t)) + a_\alpha(r)(q(x, t) - P_2(x, t)) + a_\alpha(r)P_2(x, t) - \frac{\partial}{\partial t}(q(x, t) - P_2(x, t)) \leq 0 \text{ при } r < h, t > 0.$$

Используя введенное нами обозначение (4.21), перепишем последнее неравенство в виде:

$$Lm(x, t) + a_\alpha(r)m(x, t) - \frac{\partial m(x, t)}{\partial t} \leq -a_\alpha(r)P_2(x, t) \leq 0, \quad (4.27)$$

при  $|x| < h, t > 0$ .

В силу (4.12) и (4.25) при  $|x| = h$  справедливо неравенство

$$m(x, t)|_{|x|=h} > 0, t > 0, \quad (4.28)$$

и в силу (4.23) при  $t = 0$  справедливо неравенство

$$m(x, 0) = \varphi^-(r) - Ap(r) \geq 0, r < h. \quad (4.29)$$

Из (4.27)–(4.29) и принципа максимума [11, теорема 1, с. 15] следует, что

$$m(x, t) \geq 0 \text{ при } r < h, t > 0.$$

Лемма 4.2 доказана.  $\square$

Из неравенств (4.14) и (4.20) следует, что

$$P_2(x, t) \leq q(x, t) \leq W(x, t) \text{ при } r < h, t > 0, \quad (4.30)$$

где  $W(x, t)$  — функция (4.3),  $q(x, t)$  — функция из (4.11)–(4.13),

$$P_2(x, t) = Ap(r)e^{-\frac{N\lambda_0^2}{2h^2}t},$$

$p(r)$  — функция (3.18),

$$A = -\frac{4}{3}\nu > 0.$$

Учитывая (4.3), перепишем неравенство (4.30) в следующем виде:

$$V(x, t) \leq \delta\bar{\Gamma}(r) - P_2(x, t) \text{ при } r < h, t > 0. \quad (4.31)$$

Рассмотрим неравенство (4.31) при  $r \leq l$ , тогда в силу (4.2) имеем неравенство

$$\delta\bar{\Gamma}(r) < \varepsilon, r \leq l. \quad (4.32)$$

Поэтому из (4.31) и (4.32) следует

$$V(x, t) < \varepsilon - Ap(r)e^{-\frac{N\lambda_0^2}{2h^2}t}, r \leq l. \quad (4.33)$$

Учитывая в (4.33) очевидное неравенство

$$0 < -Ap(r) \leq \frac{4}{3}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\Gamma(l)}\right) \leq \frac{4}{3},$$

для фиксированного  $\varepsilon > 0$  выберем  $t_1$  из условия

$$\frac{4}{3}e^{-\frac{N\lambda_0^2}{2h^2}t_1} = \varepsilon.$$

Тогда при  $\forall t > t_1$  неравенство

$$\frac{4}{3}e^{-\frac{N\lambda_0^2}{2h^2}t} < \varepsilon. \quad (4.34)$$

будет тем более справедливым, и кроме того:

$$\frac{N\lambda_0^2}{2h^2}t_1 = \ln \frac{4}{3\varepsilon}. \quad (4.35)$$

Следовательно,

$$t_1 = \frac{2h^2}{N\lambda_0^2} \ln \frac{4}{3\varepsilon}. \quad (4.36)$$

Далее учитываем, что в силу (4.6) для  $h$  справедливо равенство

$$h^2 = \left(\frac{2\Gamma_\alpha(l)}{C_1}\right)^{\frac{2}{\lambda_1}} \varepsilon^{-\frac{2}{\lambda_1}}. \quad (4.37)$$

Из (4.36) и (4.37) вытекает, что

$$t_1 = F\varepsilon^{-\frac{2}{\lambda_1}} \ln \frac{4}{3\varepsilon},$$

где

$$F = \left(\frac{2\Gamma_\alpha(l)}{C_1}\right)^{\frac{2}{\lambda_1}} \frac{2}{N\lambda_0^2}. \quad (4.38)$$

Из правила Лопиталья [12, с. 168] очевидно вытекает, что для любого фиксированного  $s_1$  из интервала  $0 < s_1 < 1$  существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon^{s_1} \ln \frac{4}{3\varepsilon} = 0.$$

Поэтому, очевидно, справедливо неравенство

$$\ln \frac{4}{3\varepsilon} < \frac{1}{\varepsilon^{s_1}} \quad (4.39)$$

при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  и  $S_1$  из интервала  $0 < S_1 < 1$ .

При этом из (4.36)–(4.39) получим

$$t_1 \varepsilon^{+\frac{2}{\lambda_1(\alpha)} + s_1} \leq F. \quad (4.40)$$

Пусть  $\alpha$  удовлетворяет неравенству (2.1), тогда легко проверить, что выполняется неравенство

$$\lambda_1(\alpha) > 1.$$

Полагая в (4.40)

$$s_1 = \frac{1}{\lambda_1(\alpha)},$$

где  $\alpha$  — из неравенства (2.1), получим неравенство

$$t_1 \varepsilon^{\frac{3}{\lambda_1(\alpha)}} \leq F. \quad (4.41)$$

Из неравенства (4.41) следует, что

$$\varepsilon < t_1^{-\frac{\lambda_1(\alpha)}{3}} F_1, \quad (4.42)$$

где

$$F_1 = F^{\frac{\lambda_1(\alpha)}{3}}.$$

Из (4.33), (4.34) и (4.42) вытекает, что

$$V(x, t) < 2\varepsilon < M_1 t^{-\frac{\lambda_1(\alpha)}{3}}, \quad M_1 = 2F_1$$

при

$$\alpha^2 > \lambda_1^2(S-1) \quad \forall t > t_1,$$

равномерно относительно  $x$  на каждом компакте  $K$  в  $\mathbb{R}^N$ . Теорема 1.1 доказана.

## 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ ДЛЯ ТЕОРЕМЫ 2.2

В области  $D$  мы построим стационарное решение  $\Gamma = \Gamma_\alpha(r)$  неравенства

$$L_1 \Gamma_\alpha = \Delta \Gamma_\alpha + \sum_{i=1}^N b_i(x, t) \Gamma_{\alpha x_i} + b_\alpha(r) \Gamma_\alpha \leq 0, \quad (5.1)$$

где  $b_\alpha(r)$  — функция (2.11), такое, что

$$\Gamma_\alpha(r) > 0, \Gamma'_\alpha(r) \geq 0, \Gamma''_\alpha(r) \geq 0$$

и

$$\Gamma_\alpha(r) \sim C \exp \left\{ \frac{\alpha^2}{B(1-2k)} (r^{1-2k} - 1) \right\} \quad (5.2)$$

при  $r \rightarrow \infty$ , где  $C > 0, 0 < k < 1/2$ .

Применяя формулы

$$\begin{aligned} \Gamma'_{x_i} &= \frac{x_i}{r} \Gamma', \\ \Gamma''_{x_i x_i} &= \frac{x_i^2}{r^2} \left[ \Gamma'' - \frac{\Gamma'}{r} \right] + \frac{\Gamma'}{r}, \end{aligned}$$

мы получим

$$L_1 \Gamma_\alpha = \Gamma''_\alpha + \frac{N-1}{r} \Gamma'_\alpha + \sum_{i=1}^N (b_i x_i) \frac{\Gamma'_\alpha}{r} + b_\alpha(r) \Gamma_\alpha. \quad (5.3)$$



При  $r \leq 1$  и  $t > 0$  из (5.3) и (2.9) следует неравенство

$$L_1 \Gamma_\alpha \leq \Gamma_\alpha'' + \frac{N-1+B}{r} \Gamma_\alpha' - \alpha^2 \Gamma,$$

где  $L_1$  — оператор в (5.1).

Если ввести обозначение

$$S = N + B \quad (5.4)$$

и положить затем  $\Gamma_\alpha(r) = Z_\alpha(r)$ , где  $Z_\alpha(r)$  — решение задачи

$$Z_\alpha''(r) + \frac{(S-1)}{r} Z_\alpha'(r) - \alpha^2 Z_\alpha(r) = 0, \quad r \leq 1, \quad (5.5)$$

$$Z_\alpha(0) = 1, \quad Z_\alpha'(0) = 0, \quad (5.6)$$

то мы получим из последнего неравенства и (5.5), что

$$L_1 \Gamma_\alpha(r) \leq 0, \quad r \leq 1, \quad t > 0, \quad (5.7)$$

где оператор  $L_1$  — из (5.1).

Отметим, что с точностью до переобозначения (5.4) и замены  $\bar{\alpha}$  на  $\alpha$  задача (5.5), (5.6) совпадает с задачей (3.5), (3.6). Поэтому для решения задачи (5.5), (5.6) справедливы те же формулы (3.8), (3.9) с заменой  $\bar{\alpha}$  на  $\alpha$ , так как  $\lambda_1 = 1$ .

Так как при  $r \geq 1$  имеем  $b_\alpha(r) = -\alpha^2(r^{-2k})$ , то учитывая, что в силу условия (2.9)

$$\sup_D \sum_{i=1}^N |b_i(x, t)| \left| \frac{x_i}{r} \right| \leq B,$$

мы получим неравенство

$$L_1 \Gamma_\alpha \leq [\Gamma_\alpha'' + \frac{N-1}{r} \Gamma_\alpha' + B \Gamma_\alpha' - \alpha^2 r^{-2k} \Gamma_\alpha], \quad (5.8)$$

где  $L_1$  — из (5.1).

Для функции  $y_\alpha(r)$  при  $r \geq 1$  рассмотрим задачу

$$y_\alpha''(r) + \frac{N-1}{r} y_\alpha'(r) + B y_\alpha'(r) - \alpha^2 y_\alpha(r) r^{-2k} = 0, \quad r > 1, \quad (5.9)$$

$$y_\alpha(1) = b_0(\alpha), \quad y_\alpha'(1) = b_1(\alpha). \quad (5.10)$$

Ясно из [1], что задача (5.9), (5.10) имеет единственное решение.

Полагая в (5.8)  $\Gamma_\alpha(r) = y_\alpha(r)$ , где  $y_\alpha(r)$  — решение задачи (5.9), (5.10), мы получим из (5.9) и (5.7) неравенство

$$L_1 \Gamma_\alpha(r) \leq 0 \text{ в } D, \quad (5.11)$$

где

$$\Gamma = \Gamma_\alpha(r) = \begin{cases} z_\alpha(r) & \text{при } 0 \leq r \leq 1, \\ y_\alpha(r) & \text{при } r \geq 1. \end{cases} \quad (5.12)$$

**Замечание 5.1.** Очевидно, что функция (5.12) непрерывна и имеет непрерывные первые и вторые производные. В самом деле, непрерывность функций и указанных производных при  $r \neq 1$  очевидна, а при  $r = 1$  по построению справедливы «условия склейки» (5.10). Поэтому из непрерывности коэффициентов уравнений (5.5) и (5.9) при  $r = 1$  условия (5.10) получим, что

$$z_\alpha''(1) = y_\alpha''(1) = \alpha^2,$$

т. е. следует непрерывность и вторых производных у функции (5.12).

**Лемма 5.1.** Решение  $y_\alpha(r)$  задачи (5.9), (5.10) обладает при  $r > 1$  следующими свойствами:

1.  $y_\alpha(r) > 0$ ,
2.  $y_\alpha'(r) > 0$ ,
3.  $y_\alpha(r) \rightarrow +\infty, r \rightarrow \infty$ ,

4. выполнено равенство

$$y_\alpha(r) = C_1 \exp\left(\frac{\alpha^2}{B(1-2k)}(r^{1-2k} - 1) + \frac{(N-1)(N-3)}{4B}\left(1 - \frac{1}{r}\right)\right) [1 + \varepsilon(r)], \quad (5.13)$$

где  $C_1 > 0$ ,  $\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon(r) = 0$ ,

5.  $L_1 \Gamma_\alpha(r) \leq 0$ .

*Доказательство.* Из уравнения (5.9) и условий (5.10) получаем

$$y_\alpha''(1) = \alpha^2 y_\alpha(1) = \alpha^2 > 0.$$

В силу непрерывности  $y_\alpha(r)$  при  $r > 1$  отсюда следует, что  $y_\alpha'(r) > 0$  в некоторой правой окрестности точки  $r = 1$ . Тогда  $y_\alpha(r) > 1$  при всех  $r > 1$ . Пусть это не так, тогда  $y_\alpha(r) < 1$  в некоторой точке  $r_2 > 1$  и функция  $y_\alpha(r)$  достигает максимума в некоторой точке  $r_1$  из интервала  $(1, r_2)$ . Поэтому в этой точке справедливо следующее:

$$y_\alpha(r_1) > 0, \quad y_\alpha'(r_1) = 0, \quad y_\alpha''(r_1) \leq 0.$$

Но тогда в точке  $r = r_1$ , очевидно, не выполняется уравнение (5.9). Полученное противоречие доказывает, что  $y_\alpha(r) > 1 > 0$  при  $r > 1$ . Так как  $y_\alpha'(r) > 0$  в некоторой точке  $r_3 > 1$  и  $y_\alpha(r_3) > 0$ , то  $y_\alpha(r)y_\alpha'(r) > 0$  при  $r > r_3$  в силу известного свойства решений уравнения (5.6) с отрицательным младшим коэффициентом [13, с. 165]. Свойства 1 и 2 леммы 5.1 доказаны.

Докажем свойство 3. Легко видеть из (5.9), что  $\Gamma_\alpha''(r) \geq 0$  при  $r \geq r_0 > 1$ .

Так как  $\Gamma_\alpha''(r) = y_\alpha''(r) \geq 0$  при  $r \geq r_0 > 1$ , то  $y_\alpha'(r)$  не убывает по  $r$ . Отсюда легко получаем справедливость свойства 3 в лемме 5.1, ибо

$$y_\alpha(r) \geq y_\alpha(r_0) + y_\alpha'(r_0)(r - r_0) \rightarrow +\infty, \quad \text{при } r \rightarrow +\infty$$

Докажем асимптотическую формулу (5.13). Сделав замену в (5.9)

$$y_\alpha(r) = V(r)r^{\frac{1-N}{2}}e^{-\frac{B(r-1)}{2}},$$

мы получим, что функция  $V(r)$  является решением задачи

$$V'' - V\left(\alpha^2 r^{-2k} + \frac{B^2}{4} + \frac{P}{r^2} + \frac{Q}{r}\right) = 0, \quad r > 1, \quad (5.14)$$

$$V(1) = b_0(\alpha), \quad V'(1) = b_1(\alpha) + b_0(\alpha)\frac{N-1+B}{2} = b_2, \quad (5.15)$$

где

$$P = \frac{(N-1)(N-3)}{4}, \quad Q = \frac{B(N-1)}{2},$$

постоянные  $b_0(\alpha)$  и  $b_1(\alpha)$  — из (3.9) с заменой  $\bar{\alpha}$  на  $\alpha$ . Пусть

$$q(r) = \frac{B^2}{4} + \alpha^2 r^{-2k} + \frac{P}{r^2} + \frac{Q}{r}, \quad r > 1, \quad (5.16)$$

тогда задачу (5.14), (5.15) можно записать в виде

$$V''(r) - q(r)V(r) = 0, \quad r > 1, \quad (5.17)$$

$$V(1) = b_0(\alpha), \quad V'(1) = b_2 = \frac{N-1+B}{2}b_0(\alpha) + b_1(\alpha). \quad (5.18)$$

Ясно, что  $q(r) > 0$  для  $r > 1$ ,  $q'(r)$  — непрерывная функция при  $r \geq 1$ , и легко видеть, что

$$\int_1^\infty |\beta(r)| dr < \infty,$$

где

$$\beta(r) = \frac{1}{8} \frac{q''(r)}{q^{\frac{3}{2}}(r)} - \frac{5}{32} \frac{(q'(r))^2}{q^{\frac{5}{2}}(r)},$$

и существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{q'(r)}{q^{\frac{3}{2}}(r)} = 0.$$

Поэтому мы можем применить известные формулы Грина—Лиувилля для решений уравнения (5.17) (см. [13, 14, 16]). Согласно этим формулам уравнение (5.17) имеет фундаментальную систему решений  $t_1(r)$ ,  $t_2(r)$  таких, что

$$t_{1,2}(r) = q^{\frac{-1}{4}}(r) \exp \{ \pm S(r) \} [1 + \varepsilon_{1,2}(r)], \quad (5.19)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2}(r) &\rightarrow 0, r \rightarrow \infty, \\ S(r) &= \int_1^r \sqrt{q(\tau)} d\tau, \end{aligned}$$

и эту асимптотику можно дифференцировать

$$t'_{1,2}(r) = \pm q^{\frac{1}{4}}(r) \exp \{ \pm S(r) \} [1 + \varepsilon_{3,4}(r)], \quad (5.20)$$

$$\varepsilon_{3,4}(r) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty,$$

Применяя формулу Остроградского—Лиувилля и формулы (5.19), (5.20), мы получаем

$$t_1(r)t'_2(r) - t_2(r)t'_1(r) = -2. \quad (5.21)$$

Поэтому решения  $t_1(r)$  и  $t_2(r)$  являются независимыми.

Так как  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_1^r \sqrt{q(\tau)} d\tau = +\infty$ , то решение  $t_1(r)$  монотонно возрастает и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} t_1(r) = +\infty, \quad (5.22)$$

в то время как  $t_2(r)$  является монотонно убывающим и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} t_2(r) = 0. \quad (5.23)$$

Мы ищем решение задачи (5.17), (5.18) в виде:

$$V(r) = C_1 t_1(r) + C_2 t_2(r), \quad (5.24)$$

при  $r \geq 1$ , где постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из системы

$$b_0(\alpha) = C_1 t_1(1) + C_2 t_2(1),$$

$$b_2 = C_1 t'_1(1) + C_2 t'_2(1),$$

с ненулевым детерминантом Вронского (5.21).

Очевидно, что

$$C_1 > 0. \quad (5.25)$$

В противном случае  $C_1 < 0$ , и мы получили бы тогда, что

$$\Gamma_\alpha(r) = y_\alpha(r) = V(r) r^{\frac{1-N}{2}} \exp \left\{ \frac{-B}{2}(r-1) \right\} \rightarrow -\infty \text{ при } r \rightarrow \infty,$$

что противоречит свойству 4 в лемме 5.1.

Таким образом, из (5.24), (5.25), (5.23), (5.22) вытекает, что  $V(r) \sim C_1 t_1(r)$  при  $r \rightarrow +\infty$ .

Подставляя (5.16) в (5.19), мы получим из (5.24) искомую формулу (5.13).

Свойство 5 доказано в (5.11). Лемма 5.1 доказана.  $\square$

Рассмотрим функцию

$$d(r) = \left(1 - \frac{r^2}{4h^2}\right) \text{ при } r \leq h, h > 0. \quad (5.26)$$

**Лемма 5.2.** Если постоянная  $B$  в условии (B)(2.10) удовлетворяет неравенству

$$B < N, \quad (5.27)$$

то функция (5.26) удовлетворяет неравенству

$$Ld(r) = \Delta d(r) + \sum_{i=1}^N b_i(x, t) d_{x_i}(r) + b_\alpha(r) d(r) + \lambda d(r) \leq 0, r \leq h, \quad (5.28)$$

где

$$\lambda = \frac{N - B}{2h^2},$$

$$\frac{3}{4} \leq d(r) \leq 1 \text{ при } r \leq h.$$

*Доказательство.* Учитывая формулы

$$(d(r))'_{x_i} = -\frac{x_i}{2h^2}, \quad (d(r))''_{x_i x_i} = -\frac{1}{2h^2},$$

и условия (B), получим:

$$Ld(r) = -\frac{N}{2h^2} - \frac{\sum_{i=1}^N b_i x_i}{2h^2} + b_\alpha(r)d(r) + \lambda d(r) \leq -\frac{N - B}{2h^2} + \lambda = 0.$$

Мы здесь учли, что в  $b_\alpha(r)d(r) \leq 0, d(r) \leq 1$ .

Неравенство (5.28) доказано. Неравенства  $\frac{3}{4} \leq d(r) \leq 1$  очевидны.

Лемма 5.2 доказана.  $\square$

Рассмотрим функцию

$$G_1(x, t) = d(r)e^{-\lambda t}, \quad (5.29)$$

где  $r \leq h, t > 0, \lambda_1$  — из (5.29),  $d(r)$  — функция (5.26).

**Лемма 5.3.** *Если постоянная B в условии (B)(2.10) удовлетворяет неравенству (5.27), то функция (5.29) удовлетворяет соотношениям*

$$\Delta G_1 + \sum_{i=1}^N b_i(x, t)G_{1x_i} + b_\alpha(r)G_1 \leq \frac{\partial G_1}{\partial t}, \quad r \leq h, t > 0, \quad (5.30)$$

$$G_1(x, 0) = d(r), \quad r \leq h, \quad (5.31)$$

где  $d(r)$  — функция (5.26).

*Доказательство.* Докажем (5.30), так как (5.31) очевидно. Применяя неравенство (5.28) и формулу (5.29), получим

$$\Delta G_1 + \sum_{i=1}^N b_i(x, t)G_{1x_i} + b_\alpha(r)G_1 \leq -\lambda G_1 = \frac{\partial G_1}{\partial t}, \quad r \leq h, t > 0.$$

Лемма 5.3 доказана.  $\square$

## 6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2

Фиксируем произвольный компакт  $K$  в  $\mathbb{R}^N$ , выберем  $l > 1$  так, чтобы замкнутый шар  $\overline{B_l} = \{|x| \leq l\}$  содержал компакт внутри. По теореме Вейерштрасса [12, с. 90] функция  $\Gamma_\alpha(r)$ (5.12) достигает максимума  $\Gamma(l)$  в шаре  $\overline{B_l}$ . Так как  $\Gamma_\alpha(r) > 0$ , то нормируем эту функцию, полагая:

$$\overline{\Gamma}(r) = \frac{\Gamma_\alpha(r)}{\Gamma_\alpha(l)}. \quad (6.1)$$

Ясно, что  $\overline{\Gamma}(r) \leq 1$  при  $r \leq l$ . Для фиксированного  $l > 1$  фиксируем произвольное  $\varepsilon$  из интервала  $0 < \varepsilon < \Gamma(l)$ .

Для фиксированного выше  $\varepsilon > 0$  выберем  $\delta > 0$ , полагая

$$\delta = \varepsilon. \quad (6.2)$$

Тогда очевидно

$$\delta \overline{\Gamma}(r) \leq \varepsilon \text{ при } r \leq l. \quad (6.3)$$

Рассмотрим задачу Коши

$$L_2 V \equiv \Delta V + \sum_{i=1}^N b_i(x, t)V_{x_i} + b_\alpha(r)V - V_t = 0, \quad (6.4)$$

где  $b_\alpha(r)$  — функция (2.11),

$$V(x, 0) = 1, x \in \mathbb{R}^N. \quad (6.5)$$

Из принципа максимума [11, с. 28] и однородности линейных уравнений (1.1) и (6.4) вытекает, что для доказательства теоремы 2.2 достаточно установить для решения задачи Коши (6.4), (6.5) оценки вида (2.12), т. е.

$$|V(x, t)| \leq M_1 \exp(-bt^{\frac{1}{n}}), \quad (6.6)$$

$$t \geq t_1, b = b(k, K, \lambda_0, \lambda_1, \alpha), M_1 = M(K), \frac{1}{n} = \frac{1-2k}{3-2k}, \quad (6.7)$$

равномерно относительно  $x$  на компакте  $K$  в  $\mathbb{R}^N$ .

Рассмотрим функцию

$$W(x, t) = \delta\bar{\Gamma}_\alpha(r) - V(x, t), \quad (6.8)$$

где  $\bar{\Gamma}_\alpha(r)$  — функция (6.1),  $V(x, t)$  — решение задачи (6.4), (6.5).

Из оценки (5.13) и формулы (5.12) следует, что при некотором  $r_l \geq l$  справедлива при  $r \geq r_l$  оценка

$$\delta\bar{\Gamma}_\alpha(r) \geq \frac{\varepsilon}{2} \frac{C_1}{\Gamma(l)} \exp(ar^S), \quad (6.9)$$

где

$$a = \frac{\alpha^2}{(1-2k)B}, \quad S = 1 - 2k.$$

Для  $\varepsilon > 0$  выберем  $h > r_l > l$  так, чтобы

$$W(x, t)|_{|x|=h} > 0, \text{ для всех } t > 0. \quad (6.10)$$

Такой выбор  $h$  возможен, так как функция  $V(x, t)$  является ограниченной:  $V(x, t) \leq 1$ , а функция  $\delta\bar{\Gamma}_\alpha(r)$  является неограниченно возрастающей при  $r \rightarrow \infty$ . В силу (6.9) достаточно выбрать  $h = h(\varepsilon)$  из условия

$$\frac{C_1\varepsilon}{2\Gamma(l)} \exp(ah^S) = 1. \quad (6.11)$$

Из (6.11) получим

$$ah^S = \ln \frac{B_2}{\varepsilon}, \quad (6.12)$$

где

$$B_2 = \frac{2\Gamma(l)}{C_1} > 0, a = \frac{\alpha^2}{(1-2k)B}, S = 1 - 2k.$$

Из (6.12) получим

$$h^2(\varepsilon) = a^{-\frac{2}{S}} \left( \ln \frac{B_2}{\varepsilon} \right)^{\frac{2}{S}}. \quad (6.13)$$

Очевидно, что при этом функция (6.8) удовлетворяет соотношениям

$$L_2W(x, t) \leq 0, |x| < h, t > 0, \quad (6.14)$$

$$W(x, t)|_{|x|=h} > 0, t > 0, \quad (6.15)$$

$$W(x, 0) = \delta\bar{\Gamma}_\alpha(r) - 1, |x| < h, \quad (6.16)$$

где  $L_2$  — оператор, определенный в (6.4).

Рассмотрим функцию

$$G_2(x, t) = AG_1(x, t), |x| < h, t > 0, \quad (6.17)$$

где  $A < 0$  мы выберем ниже,  $G_1(x, t)$  — функция (5.29) из леммы 5.2. Докажем, что если выбрать достаточно большое отрицательное  $A$ , то мы получим неравенство

$$W(x, t) \geq G_2(x, t), |x| \leq h, t > 0. \quad (6.18)$$

Для доказательства (6.18) введем функцию

$$g(x, t) = W(x, t) - G_2(x, t), \quad (6.19)$$

где  $W(x, t)$  — функция (6.8),  $G_2(x, t)$  — функция (6.17). Из (5.30), (6.14) и (6.17) следует неравенство

$$L_2g(x, t) \leq 0, \text{ при } |x| < h, t > 0. \quad (6.20)$$

При  $|x| < h$  из (6.10), (5.29) и того, что  $A < 0$ , следует неравенство

$$g(x, t)|_{|x|=h} > 0, \text{ для всех } t > 0. \quad (6.21)$$

При  $t = 0$  из (6.16) и (6.19) получаем

$$g(x, 0) = \delta\bar{\Gamma}_\alpha(r) - 1 - Ad(r), \quad (6.22)$$

где  $d(r)$  — функция (5.26).

Функция  $\bar{\Gamma}_\alpha(r)$  возрастает в силу леммы 5.1 и удовлетворяет неравенству

$$\delta\bar{\Gamma}_\alpha(r) - 1 > \delta\bar{\Gamma}_\alpha(0) - 1 = \frac{\varepsilon}{\Gamma\alpha(l)} - 1.$$

Выберем  $A < 0$  из условия

$$q(x, 0) \geq 0, \text{ при } |x| < h. \quad (6.23)$$

Учитывая неравенство  $1 \geq d(r) \geq \frac{3}{4}$ , получим

$$-Ad(r) \geq -\frac{3}{4}A.$$

Отсюда следует

$$\delta\bar{\Gamma}_\alpha(r) - 1 - Ad(r) > \left( \frac{\varepsilon}{\Gamma\alpha(l)} - 1 \right) - \frac{3}{4}A = 0.$$

Поэтому при  $A = -\frac{4}{3} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\Gamma(l)} \right) < 0$  получим неравенство (6.23). Из (6.20), (6.21), (6.23) и принципа максимума [11, с. 15] следует справедливость неравенства (6.18).

Запишем неравенство (6.18) в следующем виде:

$$V(x, t) \leq \delta\bar{\Gamma}(r) - G_2(x, t), \quad |x| < h, \quad t > 0. \quad (6.24)$$

Пусть  $|x| \leq l$ , тогда первое слагаемое в (6.24) удовлетворяет неравенству (6.3). Для оценки второго слагаемого в (6.24) используем неравенства

$$-A = \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\Gamma\alpha(l)} \right) < \frac{4}{3}, \quad d(r) \leq 1.$$

Для фиксированного  $\varepsilon > 0$  найдем  $t_1 = t_1(\varepsilon) > 0$  из условия

$$\frac{4}{3} \exp(-\lambda_1 t_1) = \frac{4}{3} \frac{\varepsilon}{B_2}, \quad (6.25)$$

где  $\lambda = \frac{N - B}{2h^2} > 0$ ,  $B_2 > 0$  — постоянная из (6.12).

Тогда при любом  $t > t_1$  тем более выполняется неравенство

$$-G_2 < \frac{4}{3} \exp(-\lambda t) < \frac{4}{3B_2} \varepsilon. \quad (6.26)$$

Решая уравнение (6.25) относительно  $t_1$ , получим

$$t_1 = \frac{2h^2}{N - B} \ln \frac{B_2}{\varepsilon}. \quad (6.27)$$

Учитывая равенство (6.13) в (6.27), получаем:

$$t_1 = \frac{2}{N - B} \ln \left( \frac{B_2}{\varepsilon} \right)^{1 + \frac{2}{S}} a^{-\frac{2}{S}}, \quad (6.28)$$

где

$$S = 1 - 2k, \quad a = \frac{\alpha^2}{(1 - 2k)B}, \quad B_2 \text{ — постоянная в (6.12).}$$

Вводя обозначения:

$$m_1 = 1 + \frac{2}{S}, \quad B_3 = \frac{N - B}{2} a^{\frac{2}{S}},$$

запишем (6.28) в виде:

$$B_3^{\frac{1}{m_1}} t_1^{\frac{1}{m_1}} = \ln \frac{B_2}{\varepsilon}, \quad \frac{1}{m_1} = \frac{1 - 2k}{3 - 2k}.$$

Отсюда из тождества  $\ln(\exp(B_3^{\frac{1}{m_1}} t_3^{\frac{1}{m_1}})) = \ln \frac{B_2}{\varepsilon}$  получим

$$\varepsilon = B_2 \exp(-B_3^{\frac{1}{m_1}} t_1^{\frac{1}{m_1}}). \quad (6.29)$$

Из неравенств (6.3) и (6.26), (6.24) получим

$$|V(x, t)| < \varepsilon(1 + \frac{4}{3B_2}) \text{ при } t > t_1.$$

Поэтому из (6.29) и последнего неравенства получаем

$$|V(x, t)| \leq M_1 \exp(-bt^{\frac{1-2k}{3-2k}}), \quad t > t_1,$$

где

$$M_1 = B_2(1 + \frac{4}{3B_2}), \quad b = B_3^{\frac{1}{m_1}}.$$

Теорема 2.2 доказана.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айнс Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Факториал Пресс, 2005.
2. Богачев В. И., Крылов Н. В., Рекнер М., Шапошников С. В. Уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова. — М.—Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2013.
3. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. Т. 1. — М.: Иностранная литература, 1949.
4. Гуцин А. К. Некоторые оценки решений краевых задач для уравнения теплопроводности в неограниченной области// Тр. МИАН, — 1967. — 91, С. 5–18.
5. Гуцин А. К. О стабилизации решения параболического уравнения// Тр. МИАН. — 1968. — 103. — С. 51–57.
6. Гуцин А. К. О скорости стабилизации решения краевой задачи для параболического уравнения// Сиб. мат. ж. — 1969. — 10, № 1. — С. 43–57.
7. Денисов В. Н. О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с младшим коэффициентом// Дифф. уравн. — 2003. — 39, № 4. — С. 506–515.
8. Денисов В. Н. О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени// Усп. мат. наук — 2005. — 60, № 4. — С. 145–212.
9. Денисов В. Н. Достаточные условия стабилизации решения задачи Коши для недивергентного параболического уравнения с младшими коэффициентами// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — 36. — С. 61–71.
10. Денисов В. Н. Стабилизация решения задачи Коши для недивергентного параболического уравнения// Соврем. мат. и ее прилож. — 2012. — 78. — С. 17–49.
11. Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2001. — 17. — С. 9–193.
12. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. Т. 1. — М.: Высшая школа, 1970.
13. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1. — М.: Иностранная литература, 1953.
14. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1985.
15. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968.
16. Marić V. Regular variation and differential equations. — Berlin: Springer, 2000.
17. Marić V., Tomić M. On Liouville Green (WKB) approximation for second order linear differential equations// Differ. Integral Equ. — 1988. — 1, № 3. — С. 299–304.
18. Meyers N., Serrin J. The exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations// J. Math. Mech. — 1960. — 9, № 4. — С. 513–538.

Василий Николаевич Денисов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: vdenisov2008@yandex.ru

## On the Stabilization Rate of Solutions of the Cauchy Problem for a Parabolic Equation with Lower-Order Terms

© 2016 V. N. Denisov

**Abstract.** For a parabolic equation in the half-space  $\bar{D} = \mathbb{R}^N \times [0, \infty)$ ,  $N \geq 3$ , we consider the Cauchy problem

$$\begin{aligned} L_1 u &\equiv Lu + c(x, t)u - u_t = 0, & (x, t) \in D, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Depending on estimates on the coefficient  $c(x, t)$ , we establish power or exponential rate of stabilization of solutions of the Cauchy problem равномерно по  $x$  на каждом компакте  $K$  в  $\mathbb{R}^N$  для произвольной ограниченной непрерывной в  $\mathbb{R}^N$  начальной функции  $u_0(x)$ .

### REFERENCES

1. E. Ayns, *Obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Faktorial Press, Moscow, 2005 (in Russian).
2. V.I. Bogachev, N.V. Krylov, M. Rekner, and S.V. Shaposhnikov, *Uravneniya Fokkera–Planka–Kolmogorova* [Fokker–Planck–Kolmogorov Equations], NITs Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika, Moscow–Izhevsk, 2013 (in Russian).
3. G. Watson, *Teoriya besselevykh funktsiy. T. 1* [Bessel Functions Theory. V. 1], Inostrannaya literatura, Moscow, 1949 (in Russian).
4. A.K. Gushchin, “Nekotorye otsenki resheniy kraevykh zadach dlya uravneniya teploprovodnosti v neogranichennoy oblasti” [Some estimates of solutions of boundary-value problems for the heat conduction equation in unbounded domain], *Tr. MIAN* [Proc. Steklov Math. Inst.], 1967, **91**, 5–18 (in Russian).
5. A.K. Gushchin, “O stabilizatsii resheniya parabolicheskogo uravneniya” [On stabilization of solutions of a parabolic equation] *Tr. MIAN* [Proc. Steklov Math. Inst.], 1968, **103**, 51–57 (in Russian).
6. A.K. Gushchin, “O skorosti stabilizatsii resheniya kraevoy zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya” [On the stabilization rate of solutions of the boundary-value problem for a parabolic equation], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1969, **10**, № 1, 43–57 (in Russian).
7. V.N. Denisov, “O stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya parabolicheskogo uravneniya s mladshim koeffitsientom” [On the stabilization of solutions of the Cauchy problem for a parabolic equation with a lower-order term], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2003, **39**, № 4, 506–515 (in Russian).
8. V.N. Denisov, “O povedenii resheniy parabolicheskikh uravneniy pri bol'shikh znacheniyakh vremeni” [On the behavior of solutions of parabolic equations at large time values], *Usp. mat. nauk* [Progress Math. Sci.], 2005, **60**, № 4, 145–212 (in Russian).
9. V.N. Denisov, “Dostatochnyye usloviya stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya nedivergentnogo parabolicheskogo uravneniya s mladshimi koeffitsientami” [Sufficient conditions for stabilization of solutions of the Cauchy problem for a nondivergent parabolic equation with lower-order terms], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemporary Math. Fundam. Directions], 2010, **36**, 61–71 (in Russian).
10. V.N. Denisov, “Stabilizatsiya resheniya zadachi Koshi dlya nedivergentnogo parabolicheskogo uravneniya” [Stabilization of solutions of the Cauchy problem for a nondivergent parabolic equation], *Sovrem. mat. i ee prilozh.* [Contemporary Math. Appl.], 2012, **78**, 17–49 (in Russian).
11. A.M. Il'in, A.S. Kalashnikov, and O.A. Oleynik, “Lineynyye uravneniya vtorogo poryadka parabolicheskogo tipa” [Linear second-order equations of parabolic type], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. I. G. Petrovskii Semin.], 2001, **17**, 9–193 (in Russian).
12. L.D. Kudryavtsev, *Matematicheskiiy analiz. T. 1* [Mathematical Analysis. V. 1], Vysshaya shkola, Moscow, 1970 (in Russian).
13. Dzh. Sansone, *Obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya. T. 1* [Ordinary Differential Equations. V. 1], Inostrannaya literatura, Moscow, 1953 (in Russian).
14. M.V. Fedoryuk, *Obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Nauka, Moscow, 1985 (in Russian).



15. A. Fridman, *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa* [Partial Derivative Equations of Parabolic Type], Mir, Moscow, 1968 (in Russian).
16. V. Marić, *Regular variation and differential equations*, Springer, Berlin, 2000.
17. V. Marić and M. Tomić, "On Liouville Green (WKB) approximation for second order linear differential equations," *Differ. Integral Equ.*, 1988, **1**, № 3, 299–304.
18. N. Meyers and J. Serrin, "The exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations," *J. Math. Mech.*, 1960, **9**, № 4, 513–538.

Vasiliy N. Denisov

M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: vdenisov2008@yandex.ru

## НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТ СДВИГОВ АРГУМЕНТА

© 2016 г. **Е. П. ИВАНОВА**

Аннотация. Изучаются краевые задачи для дифференциально-разностных операторов при наличии возмущений в сдвигах аргумента. Получены условия равномерной относительно сдвига аргумента положительной определенности семейства дифференциально-разностных операторов и непрерывной зависимости решений таких задач от сдвигов. Исследуется также проблема коэрцитивности дифференциально-разностных операторов с несоизмеримыми сдвигами аргументов и возможность аппроксимации этих операторов рациональными операторами.

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .		74
2. Возмущенные разностные операторы . . . . .		76
3. Разрешимость семейства возмущенных краевых задач и условия сходимости решений . . . . .		83
4. Разностные операторы с несоизмеримыми сдвигами . . . . .		89
5. Дифференциально-разностные уравнения с несоизмеримыми сдвигами . . . . .		91
Список литературы . . . . .		95

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматриваются краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений

$$-(R^\varepsilon u'(x))' = f(x), \quad x \in Q, \tag{1.1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \notin Q, \tag{1.2}$$

где  $Q = (0, a)$ ,  $R^\varepsilon : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$  — семейство симметричных разностных операторов

$$(R^\varepsilon u)(x) = (Au)(x) + (Bu)(x), \tag{1.3}$$

$B : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$  — разностный оператор с целыми (соизмеримыми) сдвигами

$$(Bu)(x) = b_0 u(x) + \sum_{k=1}^N b_k (u(x+k) + u(x-k)), \tag{1.4}$$

$b_i \in \mathbb{R}$ ;  $A : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$  — семейство разностных операторов, зависящих от малого параметра  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ ).

Рассматривается случай, когда  $A = A^\varepsilon$  — разностные операторы вида:

$$(A^\varepsilon u)(x) = a_0 u(x) + \sum_{i=1}^p a_i (u(x+i\varepsilon) + u(x-i\varepsilon)), \tag{1.5}$$

и случай, когда  $A = A^\varepsilon$  — семейство разностных операторов, возмущенных относительно  $j$ — целого сдвига аргумента:

$$(A^\varepsilon u)(x) = a_0 u(x) + a_j^\varepsilon (u(x+j+\varepsilon) + u(x-j-\varepsilon)), \tag{1.6}$$

$a_i$  — вещественные постоянные.

---

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 14-01-00265.

Рассмотрен также случай, когда  $A = A^\tau$  — разностные операторы:

$$(A^\tau u)(x) = a_0 u(x) + a_\tau (u(x + \tau) + u(x - \tau)),$$

где  $\tau$  — иррациональный сдвиг аргумента (несоизмеримый с остальными сдвигами в операторе  $B$ ).

В статье изучаются условия равномерной по  $\varepsilon$  положительной определенности возмущенных разностных операторов вида (1.3), (1.5) и (1.3), (1.6), разрешимости семейства краевых задач (1.1)-(1.2), непрерывной зависимости решений  $u_\varepsilon$  от малого параметра  $\varepsilon$  и возможности предельного перехода  $u_\varepsilon \rightarrow u_{\text{lim}}$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  к решению  $u_{\text{lim}}$  предельной задачи с разностным оператором

$$R^{\text{lim}} = A^{\text{lim}} + B,$$

где  $A^{\text{lim}} = a_{\text{lim}} I$ ,  $a_{\text{lim}} = a_0 + 2 \sum_{i=1}^p a_i$  или  $a_{\text{lim}} = a_0 + 2a_j$ , и  $I$  — тождественный оператор.

Краевые задачи вида (1.1)-(1.2) с дифференциально-разностными операторами, содержащими сдвиги аргумента в старших членах, впервые исследовались в работах [1, 2]. Интерес к этим задачам связан с различными приложениями [6]. Наиболее глубоко были изучены краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений с целочисленными или соизмеримыми сдвигами пространственных переменных (оператор  $R^\varepsilon = B$ ,  $A = 0$ ). Общая теория таких задач построена в монографии А. Л. Скубачевского [5].

Вопрос непрерывной зависимости решений эллиптических краевых задач для дифференциально-разностных уравнений от сдвигов аргумента и возможности предельного перехода при  $\varepsilon \rightarrow 0$  впервые исследовался Л. Е. Россовским. В работе [3] им изучается краевая задача для уравнений в частных производных, в которой дифференциально-разностный оператор содержит только возмущенную составляющую. В одномерном случае это разностные операторы вида (1.5) ( $R^\varepsilon = A$ ,  $B = 0$ ). Им получен критерий равномерной сильной эллиптичности последовательности дифференциально-разностных операторов и возможности предельного перехода при  $\varepsilon \rightarrow 0$  к стационарной задаче в терминах скалярного символа, зависящего от коэффициентов разностного оператора. Предельное уравнение в этом случае не содержит сдвигов аргумента и является чисто дифференциальным (уравнением в частных производных). Л. Е. Россовским также исследовалась непрерывная зависимость решений функционально-дифференциальных уравнений от коэффициента сжатия аргумента.

А. Л. Скубачевским была высказана идея использовать эти результаты для исследования краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с иррациональными (несоизмеримыми) сдвигами. Изучение таких задач осложняется рядом особенностей. Во-первых, это нарушение гладкости решений. Если решения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с соизмеримыми сдвигами (назовем их *рациональными* задачами) сохраняют гладкость в некоторых подобластях [5], то решения краевых задач с несоизмеримыми сдвигами (*иррациональных* задач) могут иметь всюду плотное множество точек разрыва производной (см. [5, пример 3.10]). Во-вторых, если решения задач для дифференциально-разностных уравнений с рациональными сдвигами могут быть получены с помощью сведения их к нелокальным задачам (см. [5]), то такой метод к иррациональным задачам напрямую не применим. В-третьих, трудности связаны с проверкой условий положительной определенности иррациональных разностных операторов, действующих на ограниченных областях. Если для рациональных операторов с постоянными коэффициентами получен критерий их положительной определенности [5], то для иррациональных операторов известны только достаточные условия, выраженные в виде положительности скалярного символа, зависящего от коэффициентов разностного оператора. Поскольку в этом символе не учитываются свойства и размер области, на которой действует разностный оператор, то для небольших областей эти условия являются избыточными и далекими от необходимых. В данной статье исследуются условия положительной определенности дифференциально-разностных операторов с несоизмеримыми сдвигами и возможность аппроксимации этих операторов рациональными.

Работа состоит из 5 разделов.

В разделе 2 исследуются возмущенные разностные операторы вида (1.3), (1.5) и их поведение при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Получен критерий равномерной положительной определенности семейства возмущенных операторов, действующих на ограниченных областях, в терминах коэффициентов этих операторов. В этом критерии совмещается оценка возмущенной части оператора с помощью символа,

аналогичного символу Л. Е. Россовского, и оценка стационарной части в терминах положительной определенности некоторых контрольных матриц.

В разделе 3 статьи исследуется возможность предельного перехода в семействе возмущенных краевых задач (1.1)-(1.2) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  к невозмущенной задаче. Получены достаточные условия такого перехода и сходимости семейства обобщенных решений возмущенных задач к решению предельной задачи. Рассматриваются примеры, в которых нарушение этих условий приводит к нарушению сходимости.

В разделе 4 изучаются разностные операторы с несоизмеримыми сдвигами (иррациональные операторы). Строится аппроксимация иррационального оператора с помощью операторов с соизмеримыми сдвигами. Получены достаточные условия равномерной положительной определенности семейства таких операторов, выраженные в терминах положительной определенности некоторых контрольных матриц, и условия положительной определенности предельного иррационального оператора. Эти условия, в отличие от известных ранее символьных условий, учитывают свойства области действия оператора и близки к необходимым.

В разделе 5 работы исследуются краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами. Доказана теорема об аппроксимации таких задач рациональными задачами, получены достаточные условия сходимости решений рациональных задач к решению иррациональной задачи. Предложенные алгоритмы аппроксимации реализованы в программной среде Maple, полученные в статье теоретические результаты проиллюстрированы примерами.

## 2. ВОЗМУЩЕННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Рассмотрим семейство симметричных разностных операторов  $R^\varepsilon, A^\varepsilon, B : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$

$$(R^\varepsilon u)(x) = (A^\varepsilon u)(x) + (Bu)(x), \quad (2.1)$$

$$(A^\varepsilon u)(x) = a_0 u(x) + \sum_{i=1}^p a_i (u(x+i\varepsilon) + u(x-i\varepsilon)) \quad (2.2)$$

$$(Bu)(x) = \sum_{k=1}^{N-1} b_k (u(x+k) + u(x-k)), \quad (2.3)$$

$a_i, b_k$  — вещественные постоянные,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$  — малый параметр.

Введем также разностный оператор  $R^C : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ :

$$(R^C u)(x) = \tilde{a}u(x) + \sum_{k=1}^{N-1} b_k (u(x+k) + u(x-k)) = \tilde{a}u(x) + (Bu)(x). \quad (2.4)$$

Операторы  $R^\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) назовем *возмущенными* операторами,  $R^C$  — *контрольным*.

Будем рассматривать действия операторов  $R^C, \{R^\varepsilon\}_\varepsilon$  на функциях  $u \in L_2(\mathbb{R})$ , для которых

$$u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \notin Q = (0, N), \quad (2.5)$$

$N$  — натуральное. Более общий случай, когда  $Q = (0, a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , привносит некоторые технические осложнения, не являющиеся, однако принципиальными для рассматриваемой задачи.

Для учета однородных краевых условий (2.5) введем операторы  $I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$  — оператор продолжения функции из  $L_2(Q)$  нулем вне  $Q$ ;  $P_Q : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(Q)$  — оператор сужения функции из  $L_2(\mathbb{R})$  на  $Q$ .

Введем также операторы  $R_Q^C = P_Q R^C I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ ,  $R_Q^\varepsilon = P_Q R^\varepsilon I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ ,  $A_Q^\varepsilon = P_Q A^\varepsilon I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ .

**Определение 2.1.** Самосопряженный оператор  $R_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$  будем называть *положительно определенным*, если найдется  $c > 0$ , что для всех  $u \in L_2(Q)$ ,  $u \neq 0$  выполнено неравенство

$$(R_Q u, u)_{L_2(Q)} > c(u, u)_{L_2(Q)}.$$

Здесь  $(u, u)_{L_2(Q)}$  — скалярное произведение в пространстве  $L_2(Q)$ .

Получим условия равномерной по  $\varepsilon \geq 0$  положительной определенности семейства самосопряженных разностных операторов  $R_Q^\varepsilon$ . Равномерная положительная определенность позволит в дальнейшем осуществить предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Будем оценивать спектр  $\sigma(R_Q^\varepsilon)$  семейства возмущенных операторов  $\{R_Q^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  через спектр контрольного оператора  $R_Q^C$ , подобрав соответствующим образом коэффициент  $\tilde{a}$  ( $\tilde{a} < a_0$ ).

Для оценки спектра разностных операторов воспользуемся методом, разработанным в [5].

Рассмотрим разностный оператор  $R : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$

$$(Ru)(x) = b_0 u(x) + \sum_{i=1}^k b_k (u(x+ih) + u(x-ih)),$$

$b_k, h \in \mathbb{R}$ ,  $h > 0$  и оператор  $R_Q = P_Q R I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ ,  $Q = (0, d)$ .

Пусть  $d = kh + \theta$ , где  $0 < \theta \leq h$ ,  $k$  — натуральное. Если  $0 < \theta < h$ , обозначим  $Q_{1i} = ((i-1)h, (i-1)h + \theta)$  ( $i = 1, \dots, k+1$ ) и  $Q_{2i} = ((i-1)h + \theta, ih)$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Если  $\theta = h$ , обозначим  $Q_{1i} = ((i-1)h, ih)$  ( $i = 1, \dots, k+1$ ). Если  $0 < \theta < h$ , то существует два класса интервалов  $Q_{1i}$  и  $Q_{2i}$ , если  $\theta = h$ , то один класс интервалов  $Q_{1i}$ . Для любого интервала  $Q_{si}$  и целого  $j$  либо найдется интервал  $Q_{sm}$  из того же класса  $s$ , такой что  $Q_{si} + jh = Q_{sm}$ , либо  $Q_{si} + jh \subset \mathbb{R} \setminus Q$ . Совокупность интервалов  $Q_{sk}$  называется разбиением области  $Q$ .

Пусть  $P_s : L_2(Q) \rightarrow L_2(\bigcup_k Q_{sk})$  — оператор ортогонального проектирования на подпространство  $L_2(\bigcup_k Q_{sk})$ , где  $L_2(\bigcup_k Q_{sk}) = \{u \in L_2(Q) \mid u(x) = 0, x \notin \bigcup_k Q_{sk}\}$ . Если  $\theta = h$ , то оператор  $P_s$  — тождественный оператор. В силу [5, лемма 2.5]  $L_2(Q) = \bigoplus_s L_2(\bigcup_i Q_{si})$  и  $L_2(\bigcup_i Q_{si})$  является инвариантным подпространством оператора  $R_Q$ .

Введем изоморфизм гильбертовых пространств  $U_s : L_2(\bigcup_i Q_{si}) \rightarrow L_2^M(Q_{s1})$  по формуле

$$(U_s u)_i(x) = u(x + (i-1)h) \quad (x \in Q_{s1}, i = 1, \dots, M), \text{ где } L_2^M(Q_{s1}) = \prod_{i=1}^M L_2(Q_{s1}), M = k+1, \text{ если } s=1 \text{ и } M=k, \text{ если } s=2.$$

Обозначим  $R_1$  матрицу размерности  $(k+1) \times (k+1)$  с элементами

$$r_{ij} = b_{j-i} \quad (j, i = 1, \dots, k+1), \quad r_{ji} = r_{ij}. \quad (2.6)$$

Эта матрица имеет вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_k \\ b_1 & b_0 & \cdots & b_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_k & b_{k-1} & \cdots & b_0 \end{pmatrix}$$

и является симметричной теплицевой матрицей (см. [4]). Обозначим  $R_2$  матрицу размерности  $k \times k$ , полученную из матрицы  $R_1$  вычеркиванием последней строки и столбца.

Введем оператор  $R_{Q_s} = U_s R_Q U_s^{-1} : L_2^M(Q_{s1}) \rightarrow L_2^M(Q_{s1})$ ,  $s = 1, 2$ , если  $\theta < h$  и  $s = 1$ , если  $\theta = h$ . В силу [5, лемма 2.6] оператор  $R_{Q_s}$  есть оператор умножения на матрицу  $R_s$ . В силу [5, лемма 2.7] спектр  $\sigma(R_Q) = \sigma(R_1) \cup \sigma(R_2)$ ,  $\theta < h$ ;  $\sigma(R_Q) = \sigma(R_1)$ ,  $\theta = h$ .

Для удобства дальнейшего изложения сформулируем следующую лемму.

**Лемма 2.1** ([5, леммы 2.6–2.8]). *Оператору  $R_Q$  соответствует оператор умножения на матрицы  $R_1, R_2$ , спектр оператора  $R_Q$  является объединением спектров этих матриц; оператор  $R_Q$  является положительно определенным тогда и только тогда, когда матрица  $R_1$  положительно определена.*

Для оценки спектра оператора  $R_Q^C$  построим соответствующее ему разбиение области  $Q = (0, N)$  и матрицу  $R_M^C$ . В операторе  $R_Q^C$  минимальный сдвиг аргумента  $h = 1$ , при этом  $\theta = h = 1$ . Разбиение области  $Q$  в этом случае состоит из одного класса подобластей:  $Q_{1i} = (i-1, i)$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Действию оператора  $R_Q^C$  соответствует умножение на матрицу  $R_M^C = \|r_{ij}\|_{i,j=1}^N$ , построенную по формуле (2.6)

$$r_{ij} = \begin{cases} \tilde{a}, & i = j, \\ b_{j-i}, & i \neq j, \end{cases} \quad r_{ij} = r_{ji}. \quad (2.7)$$

В силу леммы 2.1 оператор  $R_Q^C$  положительно определен тогда и только тогда, когда матрица  $R_Q^C$  положительно определена. Матрицу  $R_M^C$  назовем *контрольной*.

Оценим теперь спектр возмущенных операторов  $A_Q^\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ). Для фиксированного  $\varepsilon > 0$  представим  $N$  в виде:  $N = \varepsilon K + \theta$ ,  $K$  — натуральное,  $0 < \theta \leq \varepsilon$ . Для оператора  $A_Q^\varepsilon$  разбиение области  $Q = (0, N)$  состоит в общем случае из двух классов областей:  $Q_{11} = (0, \theta)$ ,  $Q_{12} = (\varepsilon, \varepsilon + \theta), \dots, Q_{1m} = (m\varepsilon, m\varepsilon + \theta), \dots, Q_{1P+1} = (K\varepsilon, N)$ ;  $Q_{21} = (\theta, \varepsilon)$ ,  $Q_{22} = (\varepsilon + \theta, 2\varepsilon), \dots, Q_{2m} = ((m-1)\varepsilon + \theta, m\varepsilon), \dots, Q_{2K} = ((K-1)\varepsilon + \theta, K\varepsilon)$ .

В силу леммы 2.1 действие оператора  $A_Q^\varepsilon$  сводится к умножению на матрицы  $A_{1M}^\varepsilon = \|\alpha_{ij}\|_{i,j=1}^{K+1}$ ,  $A_{2M}^\varepsilon$ :

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} a_0, & i = j, \\ a_{j-i}, & 0 < j - i \leq p, \\ 0, & j - i > p, \end{cases} \quad \alpha_{ji} = \alpha_{ij}. \quad (2.8)$$

Матрица  $A_{2M}^\varepsilon$  размерности  $K \times K$  — это матрица  $A_{1M}^\varepsilon$  без последней строки и столбца. Спектр оператора  $A_Q^\varepsilon$  в силу леммы 2.1 совпадает со спектром матрицы  $A_{1M}^\varepsilon$ . В силу формулы (2.8) все матрицы  $\{A_{1M}^\varepsilon\}$  при различных  $\varepsilon > 0$  принадлежат к одному классу теплицевых матриц (см. [4]), изменяется только их размерность  $K(\varepsilon) + 1$ . Обозначим этот класс  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $n = K(\varepsilon) + 1$  — размерность матрицы  $A_n$ .

Введем в рассмотрение символ  $f(\lambda)$  класса  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  теплицевых матриц (см. [4]):

$$f(\lambda) := a_0 + 2 \sum_{i=1}^p a_i \cos(\lambda i). \quad (2.9)$$

**Замечание 2.1.** Символ  $a_R(\lambda)$ , используемый в [3] для исследования коэрцитивности возмущенных дифференциально-разностных операторов, для семейства операторов вида  $A^\varepsilon$  из формулы (2.2) принимает этот же вид:  $f(\lambda) = a_R(\lambda)$ .

Обозначим

$$M := \sup_{\lambda} f(\lambda), \quad m := \inf_{\lambda} f(\lambda). \quad (2.10)$$

Из теории теплицевых матриц известна [4, лемма 4.1] равномерная по размерности  $n$  оценка спектра  $\sigma(A_n) = \{\tau_{nk}\}$  класса симметричных теплицевых матриц  $A_n$  ( $\tau_{nk}$  — собственные числа матрицы  $A_n$ ,  $k$  — номер собственного числа):

$$m \leq \tau_{nk} \leq M. \quad (2.11)$$

Введем в рассмотрение предельный разностный оператор  $R^{\lim} : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$

$$(R^{\lim} u)(x) = a_{\lim} u(x) + \sum_{k=1}^{N-1} b_k (u(x+k) + u(x-k)) = a_{\lim} u(x) + (Bu)(x), \quad (2.12)$$

где

$$a_{\lim} = a_0 + 2 \sum_{i=1}^p a_i. \quad (2.13)$$

Рассмотрим также оператор  $R_Q^{\lim} : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ ,  $R_Q^{\lim} = P_Q R^{\lim} I_Q$ . Предельный оператор  $R_Q^{\lim}$  получается из оператора  $R_Q^\varepsilon$  подстановкой  $\varepsilon = 0$ , то есть  $R_Q^{\lim} = R_Q^0$ .

**Замечание 2.2.** В силу формул (2.4), (2.12) операторы  $R^{\lim}$ ,  $R^C$  отличаются только коэффициентами  $a_{\lim}$ ,  $\tilde{a}$ . Если в операторе  $R_Q^C$  положить  $\tilde{a} := m = \inf_{\lambda} f(\lambda)$ , то коэффициент  $a_{\lim}$  предельного оператора  $R_Q^{\lim}$  и коэффициент  $\tilde{a}$  оператора  $R_Q^C$  связаны неравенством

$$a_{\lim} = a_0 + 2 \sum_{i=1}^p a_i \geq \tilde{a} := \inf_{\lambda} (a_0 + 2 \sum_{i=1}^p a_i \cos(\lambda i)).$$

В силу этого неравенства и из положительной определенности оператора  $R_Q^C$  следует положительная определенность оператора  $R_Q^{\lim}$ .

**Лемма 2.2.** *Если при  $\tilde{a} := m = \inf_{\lambda} f(\lambda)$  контрольный оператор  $R_Q^C$  является положительно определенным (контрольная матрица  $R_M^C$  является положительно определенной), то семейство возмущенных разностных операторов  $R_Q^\varepsilon$  равномерно относительно малого параметра  $\varepsilon \geq 0$  положительно определено.*

*Доказательство.* Пусть оператор  $R_Q^C$  положительно определен, т. е. существует  $\alpha > 0$ :

$$(R_Q^C u, u)_{L_2(Q)} \geq \alpha(u, u)_{L_2(Q)} \quad (2.14)$$

для всех  $u \in L_2(Q)$ . Преобразуем оператор  $R_Q^\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} (R_Q^\varepsilon u, u)_{L_2(Q)} &= (A_Q^\varepsilon u, u)_{L_2(Q)} + (B_Q u, u)_{L_2(Q)} = ((A_Q^\varepsilon - mI)u, u)_{L_2(Q)} + ((B_Q + mI)u, u)_{L_2(Q)} = \\ &= (\tilde{A}_Q^\varepsilon u, u)_{L_2(Q)} + (R_Q^C u, u)_{L_2(Q)}. \end{aligned}$$

Здесь  $I : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$  — тождественный оператор. В операторе  $R_Q^C$  положим  $\tilde{a} = m$ . Семейству операторов  $\tilde{A}_Q^\varepsilon : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ ,  $\tilde{A}_Q^\varepsilon = A_Q^\varepsilon - mI$  ( $\varepsilon > 0$ ) соответствуют теплицевы матрицы  $\tilde{A}_M^\varepsilon = A_M^\varepsilon - \tilde{a}E^{N(\varepsilon)}$  ( $\varepsilon > 0$ ) одного класса с символом  $\tilde{f}(\lambda) := f(\lambda) - m$ . Здесь  $E^{N(\varepsilon)}$  — единичные матрицы размерности  $N(\varepsilon)$ . Следовательно, в силу формул (2.9), (2.11) для их собственных чисел  $\tilde{\tau}_{nk}$  справедлива оценка  $\tilde{\tau}_{nk} \geq \inf_{\lambda} \tilde{f}(\lambda) = \inf_{\lambda} f(\lambda) - \tilde{a} = 0$ . Отсюда  $(\tilde{A}_Q^\varepsilon u, u)_{L_2(Q)} \geq 0$  для всех  $u \in L_2(Q)$  и, следовательно в силу (2.14)

$$(R_Q^\varepsilon u, u)_{L_2(Q)} = (\tilde{A}_Q^\varepsilon u, u)_{L_2(Q)} + (R_Q^C u, u)_{L_2(Q)} \geq \alpha(u, u)_{L_2(Q)}.$$

Для  $\varepsilon = 0$  утверждение леммы следует из замечания 2.2.  $\square$

Равномерная по  $\varepsilon$  положительная определенность операторов  $R_Q^\varepsilon$  понадобится в дальнейшем для осуществления предельного перехода при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Аналогично лемме 2.2 доказывается следующая лемма.

**Лемма 2.3.** *Если при  $\tilde{a} := m = \inf_{\lambda} f(\lambda)$  контрольный оператор  $R_Q^C$  является неотрицательно определенным (контрольная матрица  $R_M^C$  является неотрицательно определенной) то семейство возмущенных разностных операторов  $R_Q^\varepsilon$  равномерно относительно малого параметра  $\varepsilon \geq 0$  неотрицательно определено.*

Рассмотрим частный случай, когда в операторе  $A^\varepsilon$  из формулы (2.2)  $\varepsilon(n) = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Этот случай будет важен для доказательства леммы 2.6 и построения алгоритма решения краевых задач для возмущенных дифференциально-разностных операторов в разделе 3.

Возмущенные разностные операторы  $A^\varepsilon$  примут вид

$$(A^{\varepsilon(n)} u)(x) = a_0 u(x) + \sum_{i=1}^p a_i \left( u\left(x + \frac{i}{n}\right) + u\left(x - \frac{i}{n}\right) \right). \quad (2.15)$$

Операторы  $R_Q^\varepsilon = R_Q^{\frac{1}{n}}$  будем в этом случае обозначать для упрощения обозначений  $R_Q^n$ . При каждом фиксированном  $n \in \mathbb{N}$  для оператора  $R_Q^n$  можно сформировать соответствующую матрицу  $R_M^n$ . В этом случае минимальный сдвиг аргумента  $h = \frac{1}{n}$ , разбиение области  $Q = (0, N)$  состоит из одного класса  $Nn$  подобластей  $Q_i = \left( \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right)$ ,  $i = 1, \dots, nN$  и матрица  $R_M^n$  является блочной матрицей размерности  $Nn \times Nn$ :

$$R_M^n = A^{Nn} + B^{Nn}. \quad (2.16)$$

Матрица  $B^{Nn} = \|B_{ij}\|_{i,j=1}^{Nn}$  состоит из клеток  $B_{ij} = E^n r_{ij}$ ,  $E^n$  — единичные матрицы размерности  $n$ ,  $r_{ij}$  — элементы матрицы  $R_M^C$ , заданные формулой (2.7). Матрица  $A^{Nn} = \|\alpha_{ij}\|_{i,j=1}^{Nn}$ , где  $\alpha_{ij}$  определяются формулой (2.8).

В силу леммы 2.1 оператор  $R_Q^n$  положительно определен тогда и только тогда, когда матрица  $R_M^n$  положительно определена. Таким образом, задача оценки спектра семейства операторов  $\{R_Q^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  сводится к оценке спектра семейства матриц  $\{R_M^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  через спектр контрольной матрицы  $R_M^C$ .

Из леммы 2.2 получим

**Следствие 2.1.** Если при  $\tilde{a} := m = \inf_{\lambda} f(\lambda)$ , контрольная матрица  $R_M^C$  является положительно определенной, то матрицы  $R_M^n$  равномерно по  $n \in \mathbb{N}$  положительно определены, т. е. для любого  $n \in \mathbb{N}$  и всех  $x \in \mathbb{R}^{nN}$

$$(R_M^n x, x)_{nN} \geq \alpha (x, x)_{nN}, \quad (2.17)$$

где  $\alpha > 0$  — минимальное собственное значение матрицы  $R_M^C$ .

(Здесь  $(\cdot, \cdot)_{nN}$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^{nN}$ .)

Аналогично доказывается следующая лемма.

**Лемма 2.4.** Если при  $\tilde{a} := m = \inf_{\lambda} f(\lambda)$ , контрольная матрица  $R_M^C$  неотрицательно определена, то матрицы  $R_M^n$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  неотрицательно определены.

Равномерная по  $n \in \mathbb{N}$  положительная определенности матриц  $R_M^n$  понадобится в дальнейшем для осуществления предельного перехода при  $n \rightarrow \infty$ .

Обозначим  $\tilde{B}^{Nn} = B^{Nn} + \tilde{a}E^{nN}$ ,  $\tilde{A}^{Nn} = A^{Nn} - \tilde{a}E^{nN}$ . Тогда матрицу  $R_M^n$  можно представить в виде

$$R_M^n = A^{Nn} + B^{Nn} = A^{Nn} - \tilde{a}E^{nN} + B^{Nn} + \tilde{a}E^{nN} = \tilde{A}^{Nn} + \tilde{B}^{Nn}. \quad (2.18)$$

**Лемма 2.5.** Спектр  $\sigma(\tilde{B}^{Nn})$  блочных матриц  $\tilde{B}^{Nn}$  совпадает со спектром  $\sigma(R_M^C)$  матрицы  $R_M^C$ :  $\sigma(\tilde{B}^{Nn}) = \sigma(R_M^C)$ .

*Доказательство.* Утверждение леммы следует непосредственно из способа формирования матрицы  $\tilde{B}^{Nn}$  на основе матрицы  $R_M^C$ : на место каждого элемента  $r_{ij}$  матрицы  $R_M^C$  в матрице  $\tilde{B}^{Nn}$  подставляется диагональная матрица  $B_{ij} = \text{diag}(r_{ij})$  размерности  $n$ . При этом размерность инвариантного подпространства, соответствующего собственному числу матрицы  $R_M^C$  при переходе к  $\tilde{B}^{Nn}$  возрастает в  $n$  раз.  $\square$

**Замечание 2.3.** Из [3, теорема 2.13] следует, что критерием равномерной положительной определенности семейства операторов  $A_Q^n = P_Q A^{\varepsilon(n)} I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ , где разностный оператор определен формулой (2.21), является условие  $a_R(\lambda) > 0 \forall \lambda \in \mathbb{R}$ , а в силу замечания 2.1 и  $f(\lambda) > 0$ . И если  $m = \inf_{\lambda} f(\lambda) = 0$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  найдется номер  $n$  и функция  $u \in L_2(Q)$  такие, что

$$(A_Q^n u, u)_{L_2(Q)} < \varepsilon (u, u)_{L_2(Q)}.$$

**Лемма 2.6.** Если совокупность матриц  $\{R_M^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  равномерно по  $n \in \mathbb{N}$  положительно определена, т. е. существует  $\alpha > 0$ , для которой выполнена формула (2.12), то контрольная матрица  $R_M^C$  также положительно определена.

*Доказательство.* Предположим противное: пусть матрица  $R_M^C$  имеет собственное значение  $\lambda_b \leq 0$  и собственный вектор  $h = (h_1, \dots, h_N)^T$ :  $R_M^C h = \lambda_b h$ . Тогда в силу леммы 2.5 матрица  $\tilde{B}^{Nn}$  также имеет собственное значение  $\lambda_b \leq 0$ , с  $n$ -мерным подпространством собственных векторов

$$\begin{aligned} H_1 &= (h_1, 0, \dots, 0; h_2, 0, \dots, 0; \dots; h_N, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{nN}, \\ H_2 &= (0, h_1, 0, \dots, 0; 0, h_2, 0, \dots, 0; \dots; 0, h_N, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{nN}, \\ &\dots \\ H_n &= (0, \dots, 0, h_1; 0, \dots, 0, h_2; \dots; 0, \dots, 0, h_N)^T \in \mathbb{R}^{nN}, \end{aligned}$$

где у вектора  $H_k$  ненулевые элементы расположены на месте  $k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Следовательно, для любого  $u \in \mathbb{R}^n$  ( $u \neq 0_n$ ) вектор вида  $V = (h_1 u, h_2 u, \dots, h_N u)^T \in \mathbb{R}^{nN}$  является линейной комбинацией собственных векторов  $H_k$  и также будет собственным вектором матрицы  $\tilde{B}^{Nn}$ :  $\tilde{B}^{Nn} V = \lambda_b V$ . То есть

$$(\tilde{B}^{Nn} V, V)_{nN} = (\lambda_b V, V)_{nN}. \quad (2.19)$$



Подберем вектор  $u \in \mathbb{R}^n$  таким образом, чтобы  $V$  был собственным вектором также и для матрицы  $\tilde{A}^{nN}$ . Пусть  $n$  достаточно велико, так что  $\frac{p}{n} < 1 - \frac{p}{n}$ , и все сдвиги оператора  $A^{\varepsilon(n)}$  при  $x \in \left(\frac{p}{n}, 1 - \frac{p}{n}\right)$  происходят внутри интервала  $(0, 1)$ . Если взять вектор  $u = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$  с координатами  $u_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $i = n - p + 1, \dots, n$ , то  $(\tilde{A}^n u, u)_n = (\tilde{A}_0^n u, u)_n$ , где матрица  $\tilde{A}_0^n$  — это матрица, полученная из  $\tilde{A}^n$  наложением на нее «рамки» нулей ширины  $p$ . Матрица  $\tilde{A}_0^n$  — это матрица  $\tilde{A}^{n-2p}$ , т. е. принадлежит к тому же классу теплицевых матриц, что и матрица  $\tilde{A}^n$ . В силу замечания 2.2, если  $\inf_{\lambda} \tilde{f}(\lambda) = 0$ , то для любого сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  найдется  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $\lambda_{\min}^a < \varepsilon$ , где  $\lambda_{\min}^a$  — минимальное собственное значение матрицы  $\tilde{A}_0^n$  и собственный вектор  $u \in \mathbb{R}^n$ :  $(\tilde{A}_0^n u, u)_n = \lambda_{\min}^a (u, u)_n$ . (Вектор  $u$  имеет нулевые координаты по краям.)

Если взять  $V = (h_1 u, h_2 u, \dots, h_N u)^T \in \mathbb{R}^{nN}$ ,  $h_i$  — координаты собственного вектора  $h$  матрицы  $R_M^C$ , то  $(\tilde{A}^{nN} V, V)_{nN} = (A_{\text{block}} V, V)_{nN}$ , где матрица  $A_{\text{block}}$  — блочная матрица, она состоит из матриц  $\tilde{A}_0^n$ , т. е. это прореженная нулями исходная матрица  $\tilde{A}^{nN}$ . Используя соотношение

$$(V, V)_{nN} = \sum_{i=1}^N (h_i u, h_i u)_n = (u, u)_n \sum_{i=1}^N h_i^2,$$

получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{A}^{nN} V, V)_{nN} &= (A_{\text{block}} V, V)_{nN} = \sum_{i=1}^N h_i^2 (\tilde{A}_0^n u, u)_n = \sum_{i=1}^N h_i^2 \lambda_{\min}^a (u, u)_n = \\ &= \lambda_{\min}^a (u, u)_n \sum_{i=1}^N h_i^2 = \lambda_{\min}^a (V, V)_{nN}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

То есть вектор  $V$  является собственным вектором матрицы  $\tilde{A}^{nN}$ . Подставляя в (2.13) соотношения (2.19), (2.20), получим

$$(R_M^n V, V)_{nN} = (\tilde{B}^{nN} V, V)_{nN} + (\tilde{A}^{nN} V, V)_{nN} = \lambda_b (V, V)_{nN} + \lambda_{\min}^a (V, V)_{nN} \leq (0 + \varepsilon) (V, V)_{nN}.$$

Таким образом, для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $n \in \mathbb{N}$  и вектор  $V$ :  $(R_M^n V, V)_{nN} < \varepsilon (V, V)_{nN}$ , что противоречит условию (2.12) равномерной положительной определенности матричного семейства  $\{R_M^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .  $\square$

**Лемма 2.7.** Если совокупность матриц  $\{R_M^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  неотрицательно определена, то контрольная матрица  $R_M^C$  также неотрицательно определена.

Доказательство аналогично.

Таким образом, из лемм 2.3, 2.6 следует

**Теорема 2.1.** Совокупность операторов  $\{R_Q^\varepsilon\}$  равномерно по  $\varepsilon \geq 0$  положительно определена тогда и только тогда, когда контрольный оператор  $R_Q^C$  является положительно определенным (контрольная матрица  $R_M^C$  является положительно определенной).

Из лемм 2.4, 2.7 следует

**Теорема 2.2.** Совокупность операторов  $\{R_Q^\varepsilon\}$  равномерно по  $\varepsilon \geq 0$  неотрицательно определена тогда и только тогда, когда контрольный оператор  $R_Q^C$  (контрольная матрица  $R_M^C$ ) является неотрицательно определенным.

Рассмотрим далее семейство симметричных разностных операторов  $R^\varepsilon : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$

$$(R^\varepsilon u)(x) = (A^\varepsilon u)(x) + (Bu)(x), \quad (2.21)$$

где разностные операторы  $B : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$  определены формулой (2.3);  $A^\varepsilon : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$  — семейство возмущенных (относительно  $j$  — целого сдвига аргумента) разностных операторов:

$$(A^\varepsilon u)(x) = a_0 u(x) + a_j^\varepsilon (u(x + j + \varepsilon) + u(x - j - \varepsilon)), \quad (2.22)$$

где  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$  — малый параметр.

Для интервала  $Q = (0, N)$  введем операторы:

$$R_Q^\varepsilon = P_Q R^\varepsilon I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q), \quad A_Q^\varepsilon = P_Q A^\varepsilon I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q).$$

Исследуем вопрос равномерной по  $\varepsilon$  положительной определенности семейства разностных операторов  $R_Q^\varepsilon$  и в дальнейшем возможности предельного перехода при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Используем метод оценки спектра операторов  $R_Q^\varepsilon$ , описанный выше.

Для фиксированного  $\varepsilon$  обозначим  $j_\varepsilon := j + \varepsilon$  и представим  $N$  в виде:  $N = j_\varepsilon k + \theta$ ,  $k = k(\varepsilon)$  — натуральное,  $0 < \theta \leq j_\varepsilon$ . Для оператора  $A_Q^\varepsilon$  разбиение области  $Q = (0, N)$  состоит из двух классов. Первый класс состоит из областей:

$$Q_{11} = (0, \theta), \quad Q_{12} = (j_\varepsilon, j_\varepsilon + \theta), \quad \dots, \quad Q_{1m} = (mj_\varepsilon, mj_\varepsilon + \theta), \quad \dots, \quad Q_{1k} = (kj_\varepsilon, N).$$

Второй класс областей:

$$Q_{21} = (\theta, j_\varepsilon), \quad Q_{22} = (j_\varepsilon + \theta, 2j_\varepsilon), \quad \dots, \quad Q_{2m} = ((m-1)j_\varepsilon + \theta, mj_\varepsilon), \quad \dots, \quad Q_{2k} = ((k-1)j_\varepsilon + \theta, kj_\varepsilon).$$

В силу леммы 2.1 действие оператора  $A_Q^\varepsilon$  сводится к умножению на матрицы  $R_1^\varepsilon$  и  $R_2^\varepsilon$  где  $R_1^\varepsilon = \| |r_{ij}| \|_{i,j=1}^{k+1}$ ,  $r_{ii} = a_0$ ,  $r_{i,i+1} = r_{i+1,i} = a_j^\varepsilon$ ,  $i = 1, \dots, k$ , остальные элементы матрицы равны нулю. Матрица  $R_2^\varepsilon$  размерности  $k \times k$  — это матрица  $R_1^\varepsilon$  без последней строки и столбца. Спектр оператора  $A_Q^\varepsilon$  совпадает со спектром матрицы  $R_1^\varepsilon$ .

Для  $0 \leq \varepsilon < 1$  матрицы  $R_1^\varepsilon$  могут отличаться только размерностью  $k(\varepsilon)$ :  $\min_{\varepsilon} k(\varepsilon) = k(1) \leq k(\varepsilon) \leq \max_{\varepsilon} k(\varepsilon) = k(0)$ , следовательно, число таких матриц конечно. Обозначим  $\lambda_{\min}$  — минимальное собственное значение матриц  $R_1^\varepsilon$  для всех  $0 \leq \varepsilon < 1$ . Тогда для любого  $u \in L_2(Q)$  и любого  $0 \leq \varepsilon < 1$

$$(A_Q^\varepsilon u, u)_{L_2(Q)} \geq \lambda_{\min}(u, u)_{L_2(Q)},$$

следовательно,

$$((A_Q^\varepsilon - \lambda_{\min} I)u, u)_{L_2(Q)} \geq 0, \tag{2.23}$$

где  $I$  — тождественный оператор.

Введем контрольный разностный оператор  $R_Q^C = P_Q R^C I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ , где  $R^C : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$  разностный оператор

$$(R^C u)(x) = \tilde{a}u(x) + (Bu)(x),$$

$\tilde{a} = \lambda_{\min}$ . Действию оператора  $R_Q^C$ , как и в разделе 2, соответствует умножение на матрицу  $R_M^C$ , определенную формулой (2.7).

**Теорема 2.3.** Если оператор  $R_Q^C$  (матрица  $R_M^C$ ) положительно определен, то семейство разностных операторов  $R_Q^\varepsilon$  равномерно относительно малого параметра  $\varepsilon \geq 0$  положительно определено.

*Доказательство.* Пусть оператор  $R_Q^C$  положительно определен, т. е. для некоторого  $c > 0$

$$(R_Q^C u, u)_{L_2(Q)} \geq c(u, u)_{L_2(Q)}$$

для всех  $u \in L_2(Q)$ . В силу формулы (2.23) для всех  $\varepsilon \geq 0$  и  $u \in L_2(Q)$

$$\begin{aligned} (R_Q^\varepsilon u, u)_{L_2(Q)} &= (A_Q^\varepsilon u, u)_{L_2(Q)} + (B_Q u, u)_{L_2(Q)} = \\ &= ((A_Q^\varepsilon - \lambda_{\min} I)u, u)_{L_2(Q)} + ((B_Q + \lambda_{\min} I)u, u)_{L_2(Q)} \geq \\ &\geq (R_Q^C u, u)_{L_2(Q)} \geq c(u, u)_{L_2(Q)}. \end{aligned}$$

□

## 3. РАЗРЕШИМОСТЬ СЕМЕЙСТВА ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим семейство краевых задач для дифференциально-разностных уравнений

$$-(R_Q^\varepsilon u'_\varepsilon(x))' = f(x), \quad x \in Q, \quad (3.1)$$

где  $Q = (0, N)$ ,  $\varepsilon \geq 0$ ,  $R_Q^\varepsilon = P_Q R^\varepsilon I_Q$ ,  $R^\varepsilon$  — разностные операторы, определенные формулой (2.1), и  $f \in L_2(Q)$ .

Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений вида (3.1), вообще говоря, не имеют гладких классических решений, и естественно определить решение в обобщенном смысле (см. [5]).

Для  $Q = (0, a)$  введем в рассмотрение  $\dot{H}^1(Q)$  — пространство Соболева функций, у которых существует и принадлежит пространству  $L_2(Q)$  обобщенная производная,  $\dot{H}^1(Q) = \{u \in H^1(Q) | u(0) = u(a) = 0\}$ . Эквивалентная норма  $\|u\|_{\dot{H}^1(Q)}$  в  $\dot{H}^1(Q)$  определяется формулой  $\|u\|_{\dot{H}^1(Q)}^2 = \int_0^a (u'(x))^2 dx$ .

**Определение 3.1.** Обобщенным решением краевой задачи (3.1) будем называть функцию  $u_\varepsilon \in \dot{H}^1(Q)$ , если для любой  $v \in \dot{H}^1(Q)$  выполнено интегральное тождество

$$(R_Q^\varepsilon u'_\varepsilon, v')_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}. \quad (3.2)$$

Введем в рассмотрение предельную задачу

$$-(R_Q^{\text{lim}} u'_{\text{lim}}(x))' = f(x), \quad x \in Q, \quad (3.3)$$

где  $R_Q^{\text{lim}} : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ ,  $R_Q^{\text{lim}} = P_Q R^{\text{lim}} I_Q$ , где оператор  $R_Q^{\text{lim}} : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$  определен формулой (2.12)

Решение задачи (3.3) также определяется интегральным тождеством

$$(R_Q^{\text{lim}} u'_{\text{lim}}, v')_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}, \quad (3.4)$$

выполненным для любой функции  $v \in \dot{H}^1(Q)$ .

**Замечание 3.1.** Поскольку в силу замечания 2.2 из положительной определенности оператора  $R_Q^C$  следует положительная определенность оператора  $R_Q^{\text{lim}}$ , условия существования решения предельной задачи являются более слабыми, чем условия возможности предельного перехода к ней. Это свойство впервые было обнаружено Л. Е. Россовским в [3] для эллиптических задач со сжатием и растяжением аргумента и задач для дифференциально-разностных уравнений в случае, когда все отклонения аргумента пропорционально стремятся к нулю.

Доказательство следующей теоремы аналогично доказательству [3, лемма 2.11 и следствие 2.4].

**Теорема 3.1.** Пусть оператор  $R_Q^C$  является положительно определенным (матрица  $R_M^C$  является положительно определенной). Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует единственное решение  $u_\varepsilon \in \dot{H}^1(Q)$  задачи (3.2) и существует единственное решение  $u_{\text{lim}} \in \dot{H}^1(Q)$  предельной задачи (3.4). При этом  $u_\varepsilon \rightarrow u_{\text{lim}}$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) в норме пространства  $\dot{H}^1(Q)$ .

*Доказательство.* Из теоремы 2.1 следует, что все операторы  $R_Q^\varepsilon$  равномерно по  $\varepsilon \geq 0$  положительно определены и для некоторого  $c > 0$  для всех  $u \in L_2(Q)$  выполнено соотношение

$$(R_Q^\varepsilon u, u)_{L_2(Q)} \geq c(u, u)_{L_2(Q)}, \quad (3.5)$$

где  $c$  не зависит от  $\varepsilon \geq 0$  и  $u \in L_2(Q)$ . Из положительной определенности операторов  $R_Q^{\varepsilon n}$  для всех  $\varepsilon > 0$  следует существование и единственность решений  $u_\varepsilon \in \dot{H}^1(Q)$  задач (3.2) (см. [5]). В силу замечания 2.2 оператор  $R_Q^{\text{lim}}$  также является положительно определенным и задача (3.4) имеет единственное решение  $u_{\text{lim}} \in \dot{H}^1(Q)$ . Из непрерывности производной  $u' \in L_2(Q)$  в среднеквадратичном получим, что

$$\begin{aligned} & |(R_Q^\varepsilon u', v')_{L_2(Q)} - (R_Q^{\text{lim}} u', v')_{L_2(Q)}| = \\ & |((R_Q^\varepsilon - R_Q^{\text{lim}})u', v')_{L_2(Q)}| \leq \| (R_Q^\varepsilon - R_Q^{\text{lim}})u' \|_{L_2(Q)} \|v'\|_{L_2(Q)} \leq h_\varepsilon(u) \|v\|_{\dot{H}^1(Q)}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $h_\varepsilon(u) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  для любой фиксированной функции  $u \in \mathring{H}^1(Q)$ . Из интегральных тождеств (3.2), (3.4) следует

$$(R_Q^\varepsilon u'_\varepsilon, v')_{L_2(Q)} = (R_Q^{\text{lim}} u'_{\text{lim}}, v')_{L_2(Q)}.$$

Отсюда для любого  $v \in \mathring{H}^1(Q)$

$$(R_Q^\varepsilon u'_\varepsilon - R_Q^\varepsilon u'_{\text{lim}}, v')_{L_2(Q)} = (R_Q^{\text{lim}} u'_{\text{lim}} - R_Q^\varepsilon u'_{\text{lim}}, v')_{L_2(Q)}.$$

Полагая  $v = u_\varepsilon - u_{\text{lim}}$ , из равномерной положительной определенности операторов  $R_Q^\varepsilon$  и неравенства (3.6) получим

$$\begin{aligned} c \|u'_\varepsilon - u'_{\text{lim}}\|_{L_2(Q)}^2 &\leq (R_Q^\varepsilon(u'_\varepsilon - u'_{\text{lim}}), u'_\varepsilon - u'_{\text{lim}})_{L_2(Q)} = \\ &= (R_Q^{\text{lim}} u'_{\text{lim}}, u'_\varepsilon - u'_{\text{lim}})_{L_2(Q)} - (R_Q^\varepsilon u'_{\text{lim}}, u'_\varepsilon - u'_{\text{lim}})_{L_2(Q)} \leq h_\varepsilon(u_{\text{lim}}) \|u'_\varepsilon - u'_{\text{lim}}\|_{L_2(Q)}, \end{aligned}$$

где  $c > 0$ ,  $h_\varepsilon(u_{\text{lim}}) \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Отсюда

$$\|u'_\varepsilon - u'_{\text{lim}}\|_{L_2(Q)}^2 \leq \frac{h_\varepsilon(u_{\text{lim}})}{c} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

и, значит,  $\|u_\varepsilon - u_{\text{lim}}\|_{\mathring{H}^1(Q)} \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . □

**Пример 3.1.** Рассмотрим семейство краевых задач для дифференциально-разностных уравнений

$$-(R_Q^n u'_n(x))' = f(x), \quad x \in Q = (0, 2), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.7)$$

где  $R_Q^n : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ ,  $R_Q^n = P_Q R^n I_Q$ ,  $R^n$  – разностные операторы:

$$(R^n u)(x) = a_0 u(x) + a_\varepsilon (u(x + 1/n) + u(x - 1/n)) + b_1 (u(x + 1) + u(x - 1)). \quad (3.8)$$

Это задача вида (3.2) при  $\varepsilon = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Везде ниже в примерах будем рассматривать этот случай. Получим условия на коэффициенты разностного оператора  $a_0$ ,  $a_\varepsilon$ ,  $b_1$ , при которых существует последовательность  $u_n \in \mathring{H}^1(Q)$  обобщенных решений краевых задач (3.7), сходящаяся при  $n \rightarrow \infty$  в пространстве  $\mathring{H}^1(Q)$  к обобщенному решению  $u_{\text{lim}} \in \mathring{H}^1(Q)$  предельной задачи:

$$-(R_Q^{\text{lim}} u'_{\text{lim}}(x))' = f(x), \quad x \in Q, \quad (3.9)$$

где  $R_Q^{\text{lim}} : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ ,  $R_Q^{\text{lim}} = P_Q R^{\text{lim}} I_Q$ ,  $R^{\text{lim}}$  – предельный разностный оператор:

$$(R^{\text{lim}} u)(x) = (a_0 + 2a_\varepsilon)u(x) + b_1(u(x + 1) + u(x - 1)).$$

Введем контрольный оператор

$$(R^C u)(x) = \tilde{a}u(x) + b_1(u(x + 1) + u(x - 1)).$$

Символ теплицевых матриц возмущенных операторов:  $f(\lambda) = a_0 + 2a_\varepsilon \cos(\lambda)$ ,  $\tilde{a} := m = \inf_\lambda f(\lambda) = a_0 - 2|a_\varepsilon|$ . Контрольная матрица:

$$R_M^C = \begin{pmatrix} \tilde{a} & b_1 \\ b_1 & \tilde{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - 2|a_\varepsilon| & b_1 \\ b_1 & a_0 - 2|a_\varepsilon| \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Условие положительной определенности матрицы  $R_M^C$ :

$$a_0 - 2|a_\varepsilon| - |b_1| > 0. \quad (3.11)$$

В силу теоремы 2.1 условия (3.11) являются необходимыми и достаточными для положительной определенности семейства возмущенных операторов. Если использовать стандартный символ дифференциально-разностных операторов (см. [5]), достаточным условием положительной определенности будет условие  $g(\lambda) = a_0 + 2a_\varepsilon \cos\left(\frac{\lambda}{n}\right) + 2b_1 \cos(\lambda) > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$  или

$$a_0 - 2|a_\varepsilon| - 2|b_1| > 0. \quad (3.12)$$

Для решения задач используется программная среда Maple. Решения строятся аналитически, методом сведения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений к нелокальным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений, см. [5].

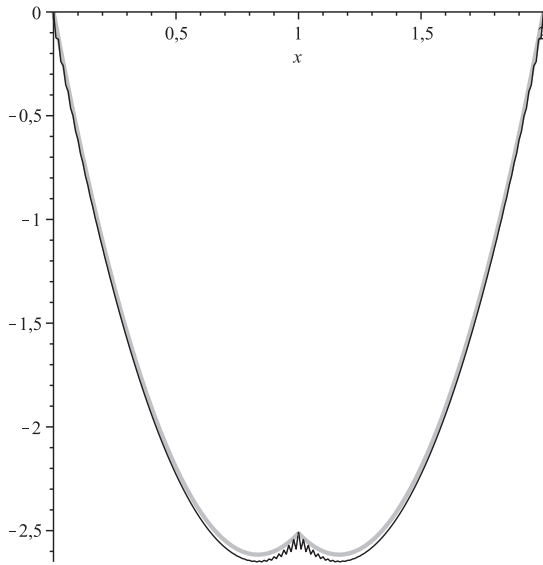


Рис. 1. Графики решений  $u_{\text{lim}}(x)$  и  $u_{100}(x)$  из примера 3.1. Сходимость возмущенных решений к  $u_{\text{lim}}(x)$ .

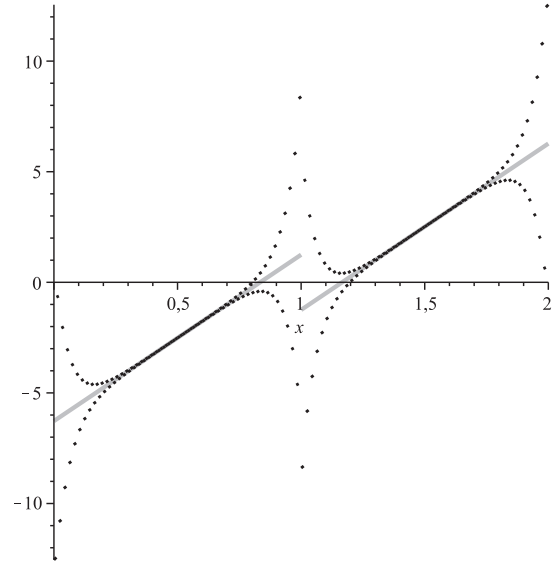


Рис. 2. Графики обобщенных производных  $u'_{100}(x)$  и  $u'_{\text{lim}}(x)$  решений из примера 3.1.

Значения коэффициентов разностных операторов, удовлетворяющих равенству

$$a_0 - 2|a_\varepsilon| - |b_1| = 0, \tag{3.13}$$

назовем *критическими*. Рассмотрим поведение семейства решений краевых задач в окрестности критических значений коэффициентов.

Пусть коэффициенты  $a_0 = 1$ ,  $a_\varepsilon = 0,33$ ,  $b_1 = -0,33$ . Последовательность разностных операторов:

$$(R^n u)(x) = u(x) + 0,33(u(x + 1/n) + u(x - 1/n)) - 0,33(u(x + 1) + u(x - 1)).$$

Неравенство (3.11) выполнено:  $1 - 0,99 = 0,01 > 0$ , и в силу теоремы 3.1 при  $n \rightarrow \infty$  решения возмущенных задач (3.7) сходятся в пространстве  $\dot{H}^1(Q)$  к  $u_{\text{lim}}$  — решению предельной задачи (3.9) с разностным оператором

$$(R_{\text{lim}} u)(x) = 1,66u(x) - 0,33(u(x + 1) + u(x - 1)).$$

Минимальное собственное значение  $\lambda_{\text{min}}^C$  матрицы  $R_M^C$ :  $\lambda_{\text{min}}^C = 0,01 > 0$ . При этом условие (3.12) не выполняется и мы находимся за рамками традиционных достаточных условий положительной определенности разностных (и соответствующих дифференциально-разностных операторов).

Для  $f(x) = -10$  получено решение  $u_{\text{lim}} \in \dot{H}^1(0, 2)$  предельной задачи (3.9):

$$u_{\text{lim}}(x) = \begin{cases} 3,76x^2 - 6,27x, & 0 < x \leq 1, \\ 3,76x^2 - 8,77x + 2,49, & 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Обобщенная производная предельной задачи  $u'_{\text{lim}} \in L_2(0, 2)$ :

$$u'_{\text{lim}}(x) = \begin{cases} 7,52x - 6,27, & 0 < x \leq 1, \\ 7,52x - 8,77, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Минимальное собственное значение  $\lambda_{\text{min}}^{100}$  ( $n = 100$ ) матрицы  $R_M^n$ :  $\lambda_{\text{min}}^{100} = 0,0103 > \lambda_{\text{min}}^C > 0$ .

На рис. 1 представлены графики решений  $u_{\text{lim}}(x)$  и  $u_{100}(x)$ . На рис. 2 даны графики обобщенных производных решений. Два отрезка параллельных прямых — график функции  $u'_{\text{lim}}(x)$ , кривые в форме  $XX$  — график обобщенной производной  $u'_{100}(x)$ .

**Пример 3.2.** Рассмотрим задачу из примера 3.1 с коэффициентами разностного оператора:  $a_0 = 1$ ,  $a_\varepsilon = 1/3$ ,  $b_1 = -1/3$ . Это критический случай: коэффициенты удовлетворяют равенству (3.13). Условие теоремы 2.1 не выполнено. Однако предельный разностный оператор

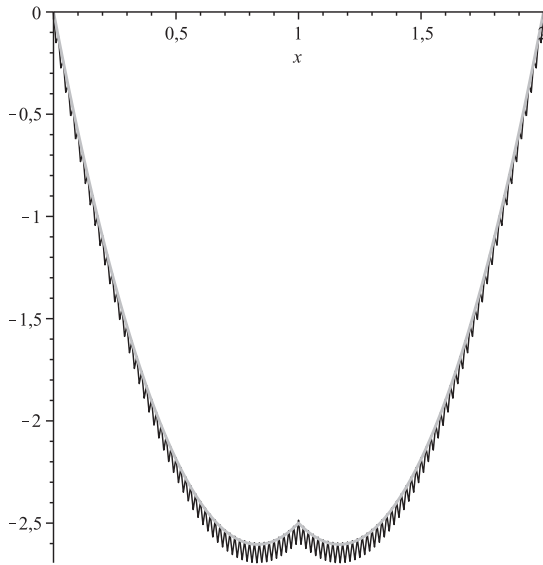


Рис. 3. Графики решений  $u_{\text{lim}}(x)$  и  $u_{100}(x)$  из примера 3.2. Критический случай: сходимость возмущенных решений к  $u_{\text{lim}}(x)$  только в  $L_2(Q)$ .

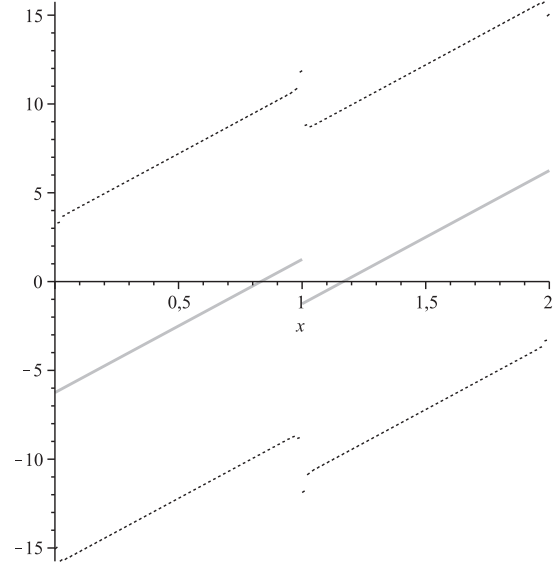


Рис. 4. Графики обобщенных производных  $u'_{\text{lim}}(x)$  и  $u'_{100}(x)$  решений из примера 3.2.

$R_Q^{\text{lim}} = P_Q R^{\text{lim}} I_Q$ ,  $(R^{\text{lim}} u)(x) = \frac{5}{3}u(x) - \frac{1}{3}(u(x+1) + u(x-1))$  остается положительно определенным и решение  $u_{\text{lim}} \in \dot{H}^1(0, 2)$  задачи (3.9) существует и единственно:

$$u_{\text{lim}}(x) = \begin{cases} 3,75x^2 - 6,25x, & 0 < x \leq 1, \\ 3,75x^2 - 8,75x + 2,50, & 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Возмущенные разностные операторы также положительно определены (результат компьютерного моделирования) и существуют и единственны решения  $u_n \in \dot{H}^1(0, 2)$  соответствующих задач (3.7). Совокупность матриц  $R_M^n$  в силу леммы 2.3 является неотрицательно определенной. Однако в силу теоремы 2.1 равномерная по  $n$  положительная определенность матриц  $R_M^n$  отсутствует:  $\inf_n \lambda_{\min}^n = 0$  ( $\lambda_{\min}^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ).

На рис. 3 приведены графики решений  $u_{\text{lim}}(x)$  и  $u_{100}(x)$  для  $n = 100$ , при этом  $\lambda_{\min}^{100} = 3 \cdot 10^{-4} > 0$ . На рис. 4 приведен график функции  $u'_{\text{lim}}(x)$ :

$$u'_{\text{lim}}(x) = \begin{cases} 7,5x - 6,25, & 0 < x \leq 1, \\ 7,5x - 8,75, & 1 < x < 2, \end{cases}$$

и график функции  $u'_{100}(x)$  — штрих-пунктирные линии («реплика» функции Дирихле).

На рис. 5 приведены графики решений  $u_{\text{lim}}(x)$  и  $u_{200}(x)$ . Минимальное собственное значение матрицы  $R_M^{200}$ :  $\lambda_{\min}^{200} = 8 \cdot 10^{-5} > 0$ , и  $\lambda_{\min}^n \rightarrow 0$  с ростом  $n$ .

Условия теоремы 3.1 не выполнены, решения возмущенных задач  $u_n$  при  $n \rightarrow \infty$  не сходятся в норме  $\dot{H}^1(0, 2)$  к решению предельной задачи  $u_{\text{lim}}$ , однако, как показывает компьютерное моделирование, в норме  $L_2(0, 2)$  сходимость сохраняется.

**Пример 3.3.** В задаче из примера 3.1 положим значения коэффициентов разностного оператора  $a_0 = 1$ ,  $a_\varepsilon = 0,35$ ,  $b_1 = -0,33$ . Условие (3.11) нарушается:  $1 - 0,7 - 0,33 = -0,03 < 0$ . При достаточно больших  $n$  появляются отрицательные собственные значения матриц  $R_M^n$  разностных операторов. Так,  $\lambda_{\min}^{200} = -0,03 < 0$ . На рис. 6 представлены графики решений  $u_{\text{lim}}(x)$  и  $u_{200}(x)$  — пилообразный.

На рис. 7 приведены графики обобщенных производных решений. График функции  $u'_{200}(x) \in L_2(0, 2)$  — «облако» точек.

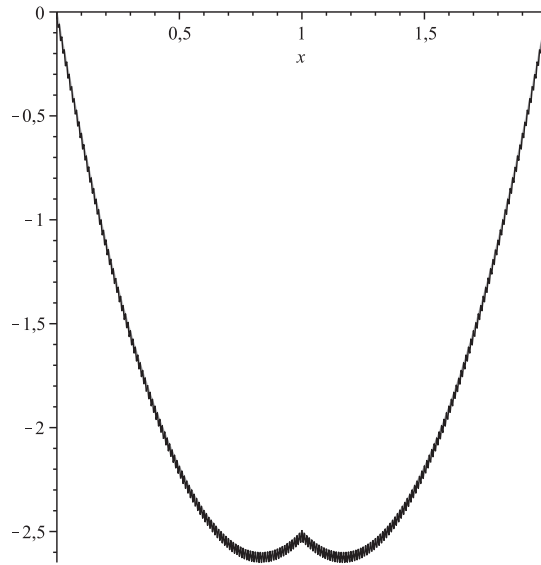


Рис. 5. Графики решений  $u_{\text{lim}}(x)$  и  $u_{200}(x)$  из примера 3.2. Критический случай: сходимость в  $L_2(Q)$ .

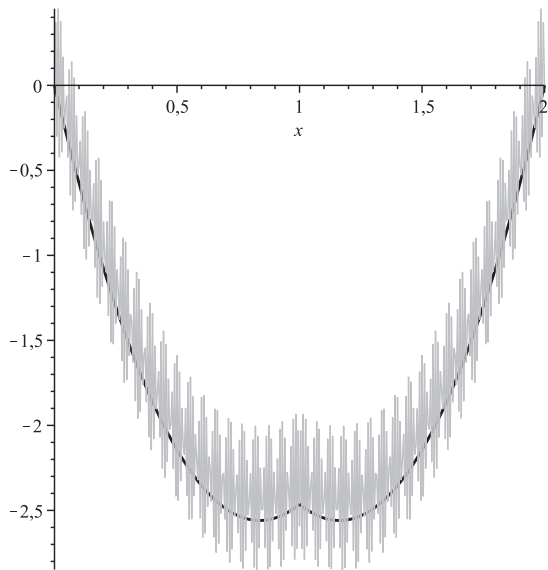


Рис. 6. Графики решений  $u_{\text{lim}}(x)$  и  $u_{200}(x)$  из примера 3.3. Возмущенные решения расходятся.

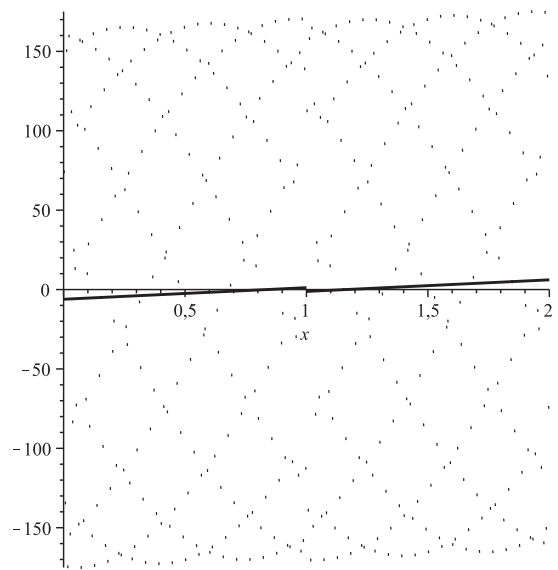


Рис. 7. Графики обобщенных производных  $u'_{\text{lim}}(x)$  и  $u'_{200}(x)$  решений из примера 3.3.

Последовательность решений  $u_n(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  расходится как в пространстве  $\dot{H}^1(0, 2)$ , так и в  $L_2(0, 2)$ .

Рассмотрим далее семейство краевых задач для дифференциально-разностных уравнений

$$-(R_Q^\varepsilon u'_\varepsilon(x))' = f(x), \quad x \in Q, \tag{3.14}$$

где  $\varepsilon > 0$  — малый параметр (возмущение относительно сдвига аргумента),  $Q = (0, N)$ ,  $R_Q^\varepsilon = P_Q R^\varepsilon I_Q$ ,  $R^\varepsilon$  — разностные операторы, определенные формулой (2.21),  $f \in L_2(Q)$ .

Решения  $u_\varepsilon \in \dot{H}^1(Q)$  краевой задачи (3.14) будем понимать в смысле определения 3.1: если для любой  $v \in \dot{H}^1(Q)$  выполнено интегральное тождество

$$(R_Q^\varepsilon u'_\varepsilon, v')_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}. \quad (3.15)$$

Введем в рассмотрение предельную задачу

$$-(R_Q^{\text{lim}} u'_{\text{lim}}(x))' = f(x), \quad x \in Q, \quad (3.16)$$

где  $R_Q^{\text{lim}} : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ ,  $R_Q^{\text{lim}} = P_Q R^{\text{lim}} I_Q$ ,

$$(R^{\text{lim}} u)(x) = a_0 u(x) + a_\varepsilon (u(x+j) + u(x-j)) + \sum_{k=1}^N b_k (u(x+k) + u(x-k)).$$

Решение  $u_{\text{lim}} \in \dot{H}^1(Q)$  уравнения (3.16) также определяется интегральным тождеством

$$(R_Q^{\text{lim}} u'_{\text{lim}}, v')_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}, \quad (3.17)$$

выполненным для любой функции  $v \in \dot{H}^1(Q)$ . Аналогично теореме 1.4 доказывается следующая теорема.

**Теорема 3.2.** Пусть матрица  $R_M^C$  положительно определена. Тогда при любых достаточно малых  $\varepsilon > 0$  существуют единственные решения  $u_\varepsilon \in \dot{H}^1(Q)$  задач (3.14) и существует единственное решение  $u_{\text{lim}} \in \dot{H}^1(Q)$  предельной задачи (3.16). При этом  $u_\varepsilon \rightarrow u_{\text{lim}}$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) в норме пространства  $\dot{H}^1(Q)$ .

**Пример 3.4.** Рассмотрим семейство возмущенных краевых задач для дифференциально-разностных уравнений

$$-(R_Q^n u'_n(x))' = f(x), \quad x \in Q = (0, 2), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.18)$$

где  $R_Q^n : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ ,  $R_Q^n = P_Q R^n I_Q$ ,  $R^n$  — разностные операторы:

$$(R^n u)(x) = a_0 u(x) + a_\varepsilon (u(x+1+1/n) + u(x-1-1/n)) + b_1 (u(x+1) + u(x-1)).$$

Это краевые задачи вида (3.14), где  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Получим условия на коэффициенты разностного оператора  $a_\varepsilon$ ,  $b_1$ , при которых последовательность  $u_n \in \dot{H}^1(Q)$  обобщенных решений краевых задач (3.18), сходится при  $n \rightarrow \infty$  в  $\dot{H}^1(Q)$  к решению  $u_{\text{lim}} \in \dot{H}^1(Q)$  предельной задачи:

$$-(R_Q^{\text{lim}} u'_{\text{lim}}(x))' = f(x), \quad x \in Q, \quad (3.19)$$

где  $R_Q^{\text{lim}} : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ ,  $R_Q^{\text{lim}} = P_Q R^{\text{lim}} I_Q$ ,  $R^{\text{lim}}$  — предельный разностный оператор:

$$(R^{\text{lim}} u)(x) = a_0 u(x) + (b_1 + a_\varepsilon)(u(x+1) + u(x-1)).$$

Для разностных операторов  $A_Q^n = P_Q A^n I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ ,

$$(A^n u)(x) = a_0 u(x) + a_\varepsilon (u(x+1+1/n) + u(x-1-1/n)), \quad n \in \mathbb{N},$$

построим разбиение области  $Q = (0, 2)$  на два класса подобластей:  $Q_{11} = (0, 1 - \frac{1}{n})$ ,  $Q_{12} = (1 + \frac{1}{n}, 2)$ ,  $Q_{21} = (1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ . В силу леммы 2.1 первому классу областей соответствуют умножение на матрицу

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_\varepsilon \\ a_\varepsilon & a_0 \end{pmatrix}.$$

Второму классу областей (одной области  $Q_{21}$ ) соответствуют умножение на константу  $a_0$ . Минимальное собственное значение  $\lambda_{\text{min}}$  матрицы  $R_1$ :  $\lambda_{\text{min}} = a_0 - |a_\varepsilon|$ . Положим  $\tilde{a} = \lambda_{\text{min}} = a_0 - |a_\varepsilon|$ .

Контрольная матрица:

$$R_M^C = \begin{pmatrix} \tilde{a} & b_1 \\ b_1 & \tilde{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - |a_\varepsilon| & b_1 \\ b_1 & a_0 - |a_\varepsilon| \end{pmatrix}.$$

Условие положительной определенности матрицы  $R_M^C$ :

$$a_0 - |a_\varepsilon| - |b_1| > 0. \quad (3.20)$$



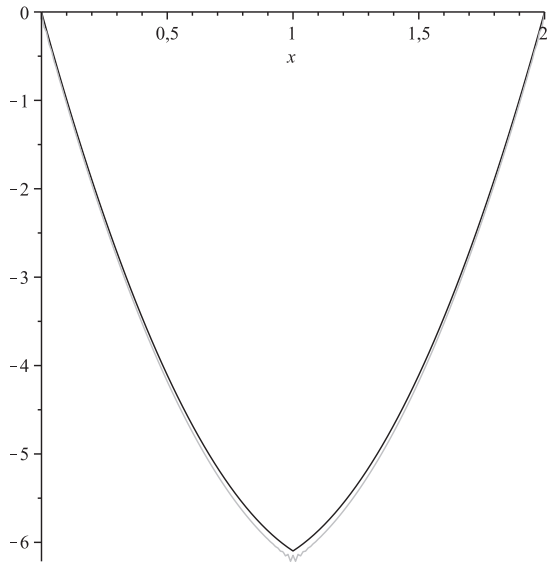


Рис. 8. Графики решений  $u_{\text{lim}}(x)$  и  $u_{100}(x)$  из примера 3.4. Случай сходимости возмущенных решений  $u_n$  к  $u_{\text{lim}}(x)$ .

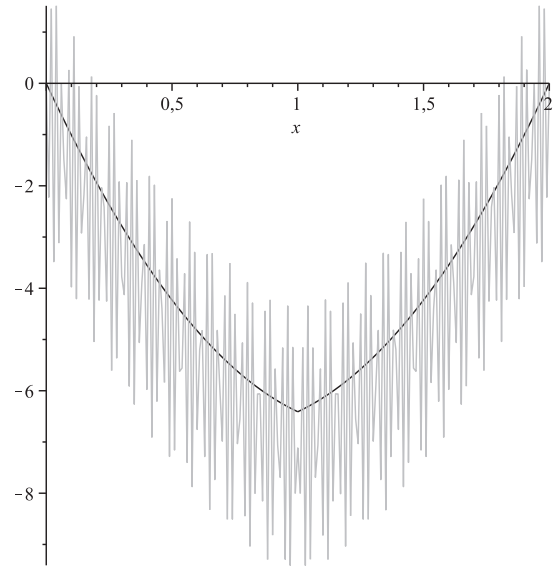


Рис. 9. Графики решений  $u_{\text{lim}}(x)$  и  $u_{100}(x)$  из примера 3.4. Случай расходимости возмущенных решений.

В силу теоремы 2.3 условие (3.20) является достаточным для равномерной положительной определенности семейства возмущенных операторов.

1. Пусть коэффициенты  $a_0 = 1$ ,  $a_\varepsilon = 0,58$ ,  $b_1 = -0,4$ ,  $f(x) = -10$ . Последовательность разностных операторов примет вид:

$$(R^n u)(x) = u(x) + 0,58(u(x+1+1/n) + u(x-1-1/n)) - 0,4(u(x+1) + u(x-1)).$$

Неравенство (3.20) выполнено:  $1 - 0,4 - 0,58 = 0,02 > 0$ , и в силу теоремы 3.2 при  $n \rightarrow \infty$  решения возмущенных задач (3.18) сходятся в  $\dot{H}^1(Q)$  к  $u_{\text{lim}}$  — решению предельной задачи (3.19) с разностным оператором  $(R_{\text{lim}} u)(x) = u(x) + 0,18(u(x+1) + u(x-1))$ .

Минимальное собственное значение  $\lambda_{\min}^{100}$  ( $n = 100$ ) матрицы  $R_M^n$ :  $\lambda_{\min}^{100} = 0,02 > 0$ . На рис. 8 представлены графики решений  $u_{\text{lim}}(x)$  и  $u_{100}(x)$ ,  $f(x) = -10$ .

2. Пусть коэффициенты  $a_0 = 1$ ,  $a_\varepsilon = 0,62$ ,  $b_1 = -0,4$ . Последовательность разностных операторов примет вид:

$$(R^n u)(x) = u(x) + 0,62(u(x+1+1/n) + u(x-1-1/n)) - 0,4(u(x+1) + u(x-1)).$$

Неравенство (3.20) не выполнено:  $1 - 0,4 - 0,62 = -0,02 < 0$ . При достаточно больших  $n$  появляются отрицательные собственные значения матриц  $R_M^n$  разностных операторов. Так,  $\lambda_{\min}^{100} = -0,2 < 0$ . При этом существует  $u_{\text{lim}} \in \dot{H}^1(Q)$  — решение предельной задачи (3.19) с разностным оператором

$$(R_{\text{lim}} u)(x) = u(x) + 0,22(u(x+1) + u(x-1)).$$

На рис. 9 представлены графики решений  $u_{\text{lim}}(x)$  и  $u_{100}(x)$ . Последовательность решений  $u_n(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  расходится в пространстве  $\dot{H}^1(0, 2)$ .

Приведенные примеры иллюстрируют резкое изменение характера поведения семейства решений краевых задач при небольших изменениях коэффициентов разностных операторов в окрестности критических значений. Это говорит о том, что полученные в статье условия равномерной положительной определенности семейства возмущенных дифференциально-разностных операторов и условия возможности осуществления предельного перехода являются точными.

#### 4. РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ СДВИГАМИ

Рассмотрим разностный оператор  $R^\tau : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$

$$(R^\tau u)(x) = a_0 u(x) + a_\tau (u(x+\tau) + u(x-\tau)) + (Bu)(x), \quad (4.1)$$

где  $B : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$  — разностный оператор

$$(Bu)(x) = \sum_{k=1}^{N-1} b_k(u(x+k) + u(x-k)),$$

$a_0, a_\tau, b_k$  — вещественные постоянные,  $\tau$  — иррациональное,  $0 < \tau < N$ . В общем случае это означает наличие в разностном операторе  $R^\tau$  несоизмеримых сдвигов. Назовем оператор  $R^\tau$  *иррациональным*. Введем оператор  $R_Q^\tau : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ ,  $R_Q^\tau = P_Q R^\tau I_Q$ , где  $Q = (0, N)$ .

Получим условия положительной определенности оператора  $R_Q^\tau$ . Исследуем также вопрос аппроксимации этого оператора последовательностью операторов с соизмеримыми сдвигами (*рациональными* операторами).

Рассмотрим сначала случай малых  $\tau \in (0; 0,5)$ . Зададим  $\tau$  с помощью дихотомии отрезка  $[0, 1]$  (опираясь на лемму Кантора о вложенных отрезках). Поставим  $\tau$  в соответствие последовательность  $T = (T_1, T_2, T_3, \dots, T_n, \dots)$ ,  $T_i = 0$  или 1. Если на  $n$ -м шаге при делении отрезка пополам  $\tau$  попадает в левую половину, полагаем  $T(n) := 0$ , если в правую, то  $T(n) := 1$ . Получаем число  $\tau$  в двоичной системе:  $\tau = 0, T_1 T_2 \dots T_n \dots$ . Обозначим  $\tau(0) := 0$ ,  $\tau(n) := \tau(n-1) + T(n)/2^n$ . Так как  $\tau \in (0; 0,5)$ , то  $T(1) = 0$ . Последовательность  $\tau(n) \in \mathbb{Q}$  фундаментальна и  $\tau(n) \rightarrow \tau, n \rightarrow \infty$ . Изменению  $\tau(n)$  соответствует номер  $k(n) := 2k(n-1) + T(n)$ ,  $k(0) := 0$ . При этом  $\tau(n) = k(n)/2^n$ .

Рассмотрим последовательность рациональных разностных операторов  $R^n : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} (R^n u)(x) &= a_0 u(x) + a_\tau (u(x + \tau(n)) + u(x - \tau(n))) + (Bu)(x) = \\ &= a_0 u(x) + a_\tau \left( u\left(x + \frac{k(n)}{2^n}\right) + u\left(x - \frac{k(n)}{2^n}\right) \right) + (Bu)(x). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Введем соответствующие операторы  $R_Q^n : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ ,  $R_Q^n = P_Q R^n I_Q$ .

Получим достаточные условия равномерной по  $n \in \mathbb{N}$  положительной определенности всей совокупности рациональных разностных операторов  $\{R_Q^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  (и соответствующих им дифференциально-разностных операторов), а, следовательно, и возможности перехода к пределу при  $n \rightarrow \infty$ .

Для оценки введем контрольный разностный оператор  $R^C : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ ,

$$(R^C u)(x) = \tilde{a} u(x) + (Bu)(x).$$

Рассмотрим также оператор  $R_Q^C : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ ,  $R_Q^C = P_Q R^C I_Q$ . Так же как и в разделе 2, оценим спектр последовательности операторов  $\{R_Q^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  через спектр контрольного оператора  $R_Q^C$ , подобрав соответствующий коэффициент  $\tilde{a}$ .

Контрольная матрица  $R_M^C$  определена как в разделе 2 по формуле (2.7). Оператору  $R_Q^n$  соответствует умножение на матрицу  $R_M^n$  размерности  $N2^n \times N2^n$ :

$$R_M^n = A^{n, k(n)} + B^{2^n}.$$

Матрицы  $B^{2^n} = \|B_{ij}\|_{i,j=1,\dots,N}$  состоят из клеток  $B_{ij} = E^{2^n} r_{ij}$ , где  $E^{2^n}$  — единичные матрицы размерности  $2^n$ ,  $r_{ij}$  — элементы матрицы  $R_M^C$ . Матрицы  $A^{n, k(n)} = \|\alpha_{ij}\|_{i,j=1,\dots,N2^n}$  таковы, что  $a_{ii} = a_0$ ,  $a_{i, i+k(n)} = a_\tau$ ,  $a_{ij} = a_{ji}$ , остальные  $a_{ij} = 0$ .

Доказательство следующей леммы 4.1 аналогично доказательству леммы 2.2. Отличие в том, что размерность матриц на каждом шаге удваивается, и класс теплицевых матриц  $A^{n, k(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , меняется от шага к шагу. Однако если  $T(n) = 0$ , то при переходе от  $n-1$  к  $n$  класс не меняется.

**Лемма 4.1.** *Если при  $\tilde{a} := a_0 - 2|a_\tau|$  контрольная матрица  $R_M^C$  положительно определена, то матрицы  $\{R_M^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  равномерно по  $n$  положительно определены, т. е., если  $c$  — минимальное собственное значение матрицы  $R_M^C$  и  $c > 0$ , то для всех  $x \in \mathbb{R}^{N2^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$(R_M^n x, x)_{N2^n} \geq c(x, x)_{N2^n}.$$

*Доказательство.* Матрицы  $A^{n, k(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , принадлежат, вообще говоря, к разным классам теплицевых матриц за счет «плывающей» побочной диагонали, состоящей из элементов  $a_\tau$ . Однако при этом для всех этих матриц символы  $f_n(\lambda) = a_0 + 2a_\tau \cos(\lambda k(n))$  имеет одну и ту же нижнюю грань  $\tilde{a} = m := \inf_{\lambda} f_n(\lambda) = a_0 - 2|a_\tau|$ . Следовательно, все собственные значения  $\tau_{np}$  множества матриц  $\{A^{n, k(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  удовлетворяют неравенству  $\tau_{np} \geq m$ . Далее доказательство повторяет доказательство леммы 2.2.  $\square$

**Замечание 4.1.** В отличие от случая леммы 2.2 это условие не является необходимым. Оно тем ближе к необходимому, чем меньше  $\tau$ .

Получим теперь условия положительной определенности иррациональных разностных операторов  $R_Q^\tau$  для произвольного  $\tau: 0 < \tau < N$ . Разделим  $N$  с остатком на  $\tau: N = \tau k + \theta, k$  — натуральное,  $0 < \theta \leq \tau$ .

Так же как в разделе 2, построим разбиение области  $Q = (0, N)$  на два класса непересекающихся подобластей. Первый класс состоит из областей:  $Q_{11} = (0, \theta), Q_{12} = (\tau, \tau + \theta), \dots, Q_{1i} = (i\tau, i\tau + \theta), \dots, Q_{1k} = (ik, N)$ . Второй класс областей:  $Q_{21} = (\theta, \tau), Q_{22} = (\tau + \theta, 2\tau), \dots, Q_{2i} = ((i-1)\tau + \theta, i\tau), \dots, Q_{2k} = ((k-1)\tau + \theta, k\tau)$ .

Введем вспомогательный разностный оператор  $R^a: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ ,

$$(R^a u)(x) = a_0 u(x) + a_\tau (u(x + \tau) + u(x - \tau)).$$

В силу леммы 2.1 действие оператора  $R_Q^a: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ ,  $R_Q^a = P_Q R^a I_Q$  сводится к умножению на матрицы  $R_1, R_2$ :  $R_1 = \|r_{ij}\|_{i,j=1}^{k+1}$ ,  $r_{ii} = a_0$ ,  $r_{i,i+1} = r_{i+1,i} = a_\tau$ ,  $i = 1, \dots, k$ , остальные элементы матрицы равны нулю. Матрица  $R_2$  размерности  $k \times k$  — это матрица  $R_1$  без последней строки и столбца. Спектр оператора  $R_Q^a$  также в силу леммы 2.1 совпадает со спектром матрицы  $R_1$ . Обозначим  $\lambda_{\min}$  — минимальное собственное значение матрицы  $R_1$ . Тогда для любого  $u \in L_2(Q)$

$$(R_Q^a u, u)_{L_2(Q)} \geq \lambda_{\min} (u, u)_{L_2(Q)}. \quad (4.3)$$

Введем контрольный разностный оператор  $R_Q^C = P_Q R^C I_Q: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ , где  $R^C: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$  разностный оператор

$$(R^C u)(x) = \tilde{a} u(x) + (Bu)(x), \quad \tilde{a} = \lambda_{\min}. \quad (4.4)$$

Действию оператора  $R_Q^C$ , как и в разделе 2, соответствует умножение на матрицу  $R_M^C$ , определенную формулой (2.7). Доказательство следующей теоремы аналогично доказательству теоремы 2.3.

**Теорема 4.1.** Если оператор  $R_Q^C$  (матрица  $R_M^C$ ) является положительно определенным, то оператор  $R_Q^\tau$  также положительно определен.

**Замечание 4.2.** Для оператора  $R^\tau$  с произвольным иррациональным  $\tau$  можно методом, изложенным ранее, построить аппроксимирующую последовательность рациональных операторов

$$(R^n u)(x) = a_0 u(x) + a_\tau (u(x + \tau_n) + u(x - \tau_n)) + (Bu)(x), \quad (4.5)$$

где  $\tau_n \in \mathbb{Q}$ ,  $\tau_n \rightarrow \tau$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Начиная с некоторого номера  $N_\tau$ , матрицы соответствующих операторов  $R_Q^n = P_Q R^n I_Q$  совпадают с матрицами  $R_1, R_2$ , следовательно, условия положительной определенности иррационального и аппроксимирующих рациональных операторов совпадают.

**Замечание 4.3.** Теорема 4.1 верна также и для малых  $\tau$ . Но в этом случае размерности матриц  $R_1, R_2$  велики и вычисление их собственных значений трудоемкая задача, удобнее применять для оценки положительной определенности лемму 4.1.

## 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ СДВИГАМИ

Рассмотрим краевую задачу для дифференциально-разностного уравнения

$$-(R_Q^\tau u'(x))' = f(x), \quad x \in Q, \quad (5.1)$$

где  $R_Q^\tau = P_Q R^\tau I_Q: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ ,  $R^\tau$  — иррациональный разностный оператор, определенный формулой (4.1),  $f \in L_2(Q)$ .

Обобщенное решение  $u_\tau \in \dot{H}^1(Q)$  краевой задачи (5.1) будем понимать в смысле определения 3.1: если для любого  $v \in \dot{H}^1(Q)$  выполнено интегральное тождество

$$(R_Q^\tau u'_\tau, v')_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}. \quad (5.2)$$

Рассмотрим также последовательность рациональных краевых задач

$$-(R_Q^n u'_n(x))' = f(x), \quad x \in Q, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.3)$$

где  $R_Q^n = P_Q R^n I_Q$ , а разностные операторы  $R^n$  определяются формулой (4.5).

Решения  $u_n \in \dot{H}^1(Q)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  задач (5.3) также определяется интегральными тождествами

$$(R_Q^n u'_n, v')_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}, \quad \forall v \in \dot{H}^1(Q) \quad (5.4)$$

**Теорема 5.1.** Пусть контрольный оператор  $R_Q^C$  (контрольная матрица  $R_M^C$ ) положительно определен. Тогда существует единственное решение  $u_\tau \in \dot{H}^1(Q)$  задачи (5.1) и начиная с некоторого  $N_\tau \in \mathbb{N}$  при  $n > N_\tau$  решения  $u_n \in \dot{H}^1(Q)$  рациональных задач (5.3). При этом последовательность решений  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  фундаментальна в  $\dot{H}^1(Q)$  и  $u_n \rightarrow u_\tau \in \dot{H}^1(Q)$  при  $n \rightarrow \infty$  в пространстве  $\dot{H}^1(Q)$ .

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1 и опирается на лемму 4.1 и теорему 4.1.

**Пример 5.1.** Рассмотрим краевую задачу (5.1) с разностным оператором

$$(R^\tau u)(x) = a_0 u(x) + a_\tau (u(x + \tau) + u(x - \tau)) + b_1 (u(x + 1) + u(x - 1)), \quad (5.5)$$

где  $0 < \tau < 0,5$ ,  $\tau$  — иррациональное,  $Q = (0, 2)$ ,  $f(x) = -10$ .

Матрица  $R_M^C$ , как и в примере 3.1, задается формулой (3.10), а условие ее положительной определенности

$$a_0 - 2|a_\tau| - |b_1| > 0. \quad (5.6)$$

В силу леммы 4.1 это достаточное условие финальной (при  $n \rightarrow \infty$ ) равномерной положительной определенности семейства рациональных операторов  $R_Q^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R_Q^n = P_Q R^n I_Q$ ,

$$(R^n u)(x) = a_0 u(x) + a_\tau (u(x + \tau(n)) + u(x - \tau(n))) + b_1 (u(x + 1) + u(x - 1)),$$

где  $\tau(n) \rightarrow \tau$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $\tau(n) \in \mathbb{Q}$ .

1. Пусть  $\tau = \sqrt{2}/16$ . В двоичной системе  $\tau = 0,00001011\dots$ ,  $\tau(7) = 5/128$ ,  $\tau(8) = 11/256 = 11/2^8$ . Для коэффициентов  $a_0 = 1$ ,  $a_\tau = 0,1$ ,  $b_1 = 0,79$  условие теоремы 4.1 ( $2a_\tau + b_1 = 0,99 < a_0 = 1$ ) выполнено. Минимальное собственное значение  $\lambda_{\min}^C$  матрицы  $R_M^C$ :  $\lambda_{\min}^C = 0,01 > 0$ .

Последовательность рациональных разностных операторов положительно определена, последовательность решений рациональных краевых задач существует, фундаментальна в  $\dot{H}^1(Q)$  и сходится к решению предельной задачи  $u_\tau \in \dot{H}^1(Q)$ . В программной среде Maple реализован алгоритм, изложенный в разделе 4, рациональные задачи решаются аналитически, методом сведения их к нелокальным задачам [5].

На рис. 10 приведены графики решений  $u_7, u_8$  краевых задач (5.4). На рис. 11 приведены графики соответствующих обобщенных производных этих решений. Минимальное собственное значение  $\lambda_{\min}^8$  матрицы  $R_M^8$ :  $\lambda_{\min}^8 = 0,0105 > \lambda_{\min}^C = 0,01$ .

2. Пусть  $a_0 = 1$ ,  $a_\tau = 0,33$ ,  $b_1 = 0,34$ . Достаточное условие (5.6) положительной определенности рациональных операторов нарушается ( $2a_\tau + b_1 = 1,01 > a_0 = 1$ ); при этом оказывается, что оно близко к необходимому: у разностных операторов появляются отрицательные собственные значения:  $\lambda_{\min}^8 = -0,08 < 0$ . В этом случае последовательность решений  $u_n$ ,  $n \rightarrow \infty$ , расходится как в пространстве  $\dot{H}^1(0, 2)$ , так и в  $L_2(0, 2)$ .

На рис. 12 приведены графики решений  $u_7, u_8$  краевых задач (5.3), на рис. 13 графики  $u'_7, u'_8$ .

**Пример 5.2.** Пусть теперь в разностном операторе  $R^\tau$  из примера 5.1 иррациональный сдвиг  $\tau$  таков, что  $0,7 < \tau < 1$ . Обозначим  $\theta := 2 - 2\tau$ . Для оператора  $R_Q^a = P_Q R^a I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ ,  $(R^a u)(x) = a_0 u(x) + a_\tau (u(x + \tau) + u(x - \tau))$  по алгоритму, описанному в разделе 4, построим разбиение области  $Q$  на два класса подобластей:  $Q_{11} = (0, \theta)$ ,  $Q_{12} = (\tau, \tau + \theta)$ ,  $Q_{13} = (2\tau, 2\tau + \theta)$ ;  $Q_{21} = (\theta, \tau)$ ,  $Q_{22} = (\tau + \theta, 2\tau)$ . В силу леммы 2.1 первому классу областей соответствуют умножение на матрицу

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_\tau & 0 \\ a_\tau & a_0 & a_\tau \\ 0 & a_\tau & a_0 \end{pmatrix}.$$

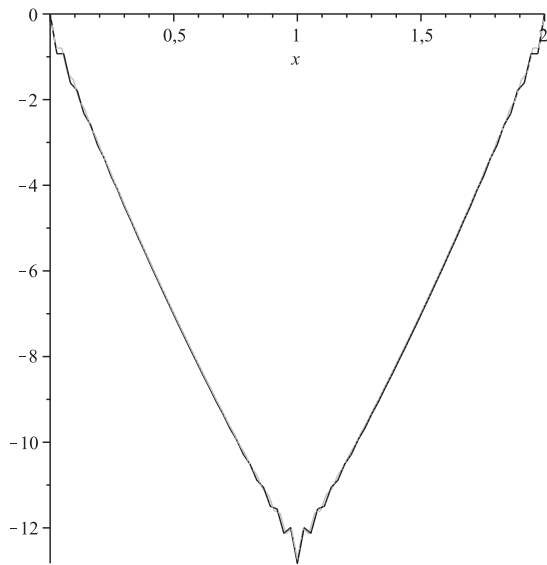


Рис. 10. Графики решений  $u_7, u_8$  рациональных задач из примера 5.1. Последовательность решений сходится в  $\dot{H}^1(Q)$ .

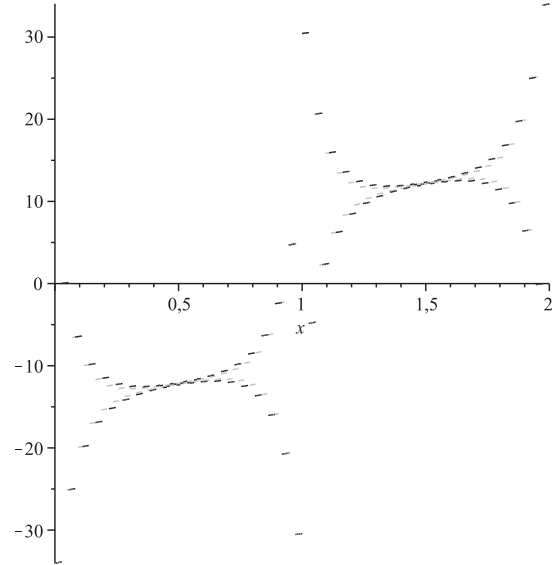


Рис. 11. Графики обобщенных производных  $u'_7, u'_8$  решений из примера 5.1. Сходимость в  $\dot{H}^1(Q)$ .

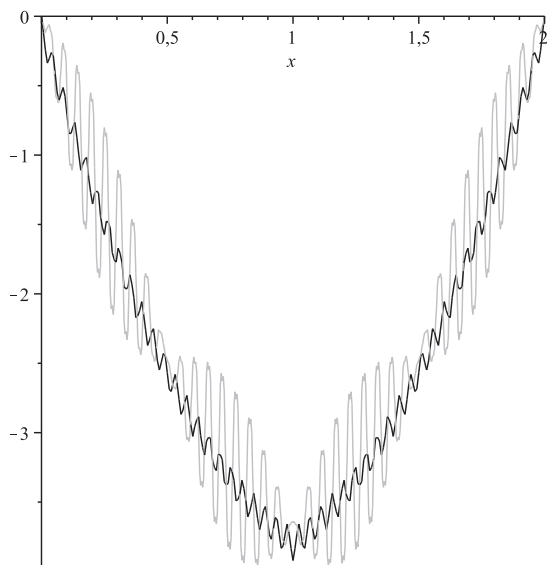


Рис. 12. Графики решений  $u_7, u_8$  рациональных задач из примера 5.1. Случай расходимости решений.

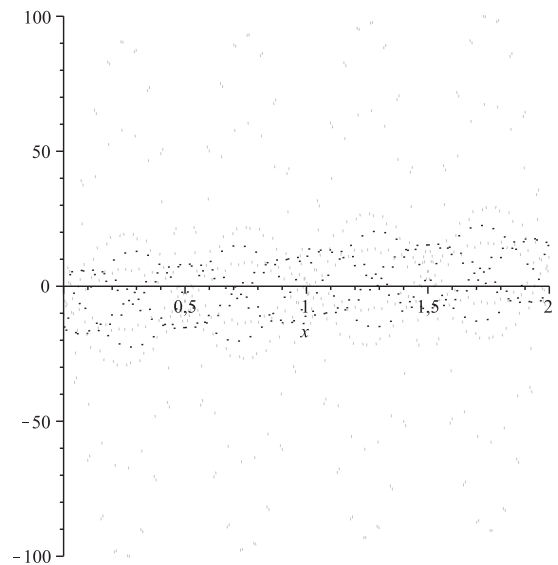


Рис. 13. Графики обобщенных производных  $u'_7, u'_8$  решений из примера 5.1. Случай расходимости решений.

Ее собственные значения  $\lambda_1 = a_0, \lambda_2 = a_0 + \sqrt{2}|a_\tau|, \lambda_3 = a_0 - \sqrt{2}|a_\tau|$ . Второму классу областей соответствует умножение на матрицу

$$R_2 = \begin{pmatrix} a_0 & a_\tau \\ a_\tau & a_0 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения  $\lambda_4 = a_0 + |a_\tau|, \lambda_5 = a_0 - |a_\tau|$ . Минимальное собственное значение  $\lambda_{\min} := \min_{1 \leq i \leq 5} \lambda_i = \lambda_3 = a_0 - \sqrt{2}|a_\tau|$ . Оператор  $R^C$  примет вид

$$(R^C u)(x) = (a_0 - \sqrt{2}|a_\tau|)u(x) + b_1(u(x+1) + u(x-1)).$$

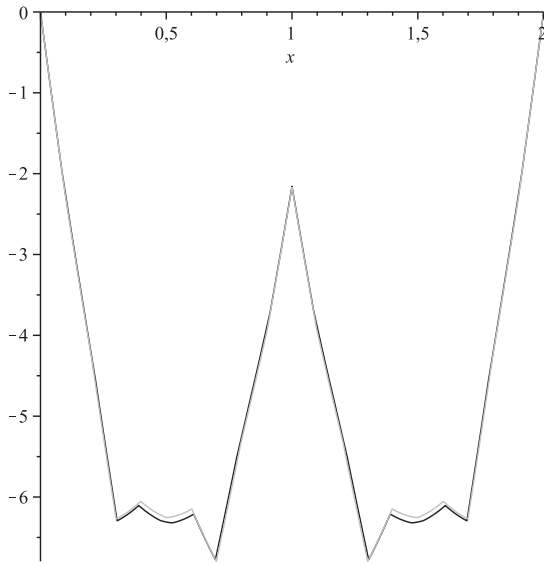


Рис. 14. Графики решений  $u_7, u_8$  рациональных задач из примера 5.2. Последовательность решений сходится в  $\dot{H}^1(Q)$ .

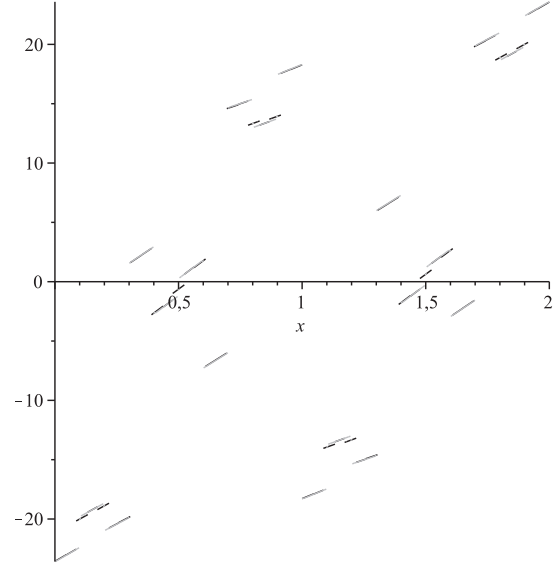


Рис. 15. Графики обобщенных производных  $u'_7, u'_8$  решений рациональных задач из примера 5.2. Сходимость решений в  $\dot{H}^1(Q)$ .

Действию оператора  $R_Q^C = P_Q R^C I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$  соответствует умножение на матрицу

$$R_M^C = \begin{pmatrix} a_0 - \sqrt{2}|a_\tau| & b_1 \\ b_1 & a_0 - \sqrt{2}|a_\tau| \end{pmatrix}.$$

Критерий ее положительной определенности:

$$a_0 - \sqrt{2}|a_\tau| - |b_1| > 0. \tag{5.7}$$

Следовательно, в силу теоремы 4.1 это достаточное условие положительной определенности оператора  $R_Q^T$ .

Если для оценки оператора  $R_Q^T$  использовать стандартный символ, основанный на преобразовании Фурье, то достаточным условием положительной определенности  $R_Q^T$  будет:

$$a_0 - 2|a_\tau| - 2|b_1| > 0.$$

Значения параметров  $a_0 = 1, a_\tau = \frac{1}{2\sqrt{2}}, b_1 = -\frac{1}{2}$  в данной задаче являются критическими:

$$a_0 - \sqrt{2}|a_\tau| - |b_1| = 0.$$

1. Пусть  $\tau = \sqrt{2}/2$ . В двоичной системе  $\tau = 0,10110101\dots$ . Тогда  $\tau(7) = 45/64, \tau(8) = 181/256 = 181/2^8$ . Мелкость разбиения  $1/256$ . Для коэффициентов разностного оператора:  $a_0 = 1, a_\tau = \frac{1}{2\sqrt{2}}, b_1 = -\frac{1}{2} + 0,05$  условие (5.7) теоремы 5.1 выполнено:  $\sqrt{2}|a_\tau| + |b_1| = 0,95 < a_0 = 1$ . Следовательно, последовательность рациональных разностных операторов положительно определена, последовательность решений  $u_n$  рациональных краевых задач фундаментальна в  $\dot{H}^1(Q)$  и сходится при  $n \rightarrow \infty$  к решению  $u_\tau \in \dot{H}^1(Q)$  предельной задачи (5.1).

На рис. 14 приведены графики решений  $u_7, u_8$  рациональных краевых задач. На рис. 15 приведены графики обобщенных производных этих решений.

2. Пусть в операторе  $R^T$  коэффициенты  $a_0 = 1, a_\tau = \frac{1}{2\sqrt{2}}, b_1 = -\frac{1}{2} - 0,02$ . В этом случае  $\sqrt{2}|a_\tau| + |b_1| = 1,02 > a_0 = 1$  и условие (4.2) не выполнено. Оператор  $R_Q^C$  имеет отрицательные собственные значения. У операторов  $R_Q^n$  также появляются отрицательные собственные значения. Последовательность решений  $u_n$  рациональных краевых задач расходится в  $\dot{H}^1(Q)$ . На рис. 16 приведены графики решений  $u_7, u_8$  краевых задач (5.4), на рис. 17 приведены графики  $u'_7, u'_8$ .

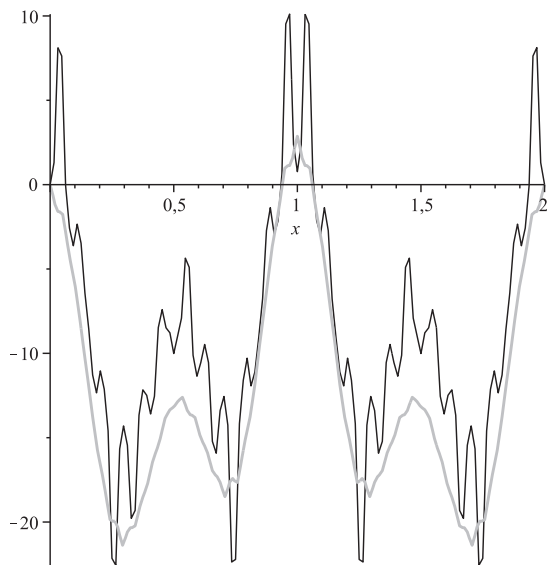


Рис. 16. Графики решений  $u_7$ ,  $u_8$  рациональных задач из примера 5.2. Случай расходимости решений.

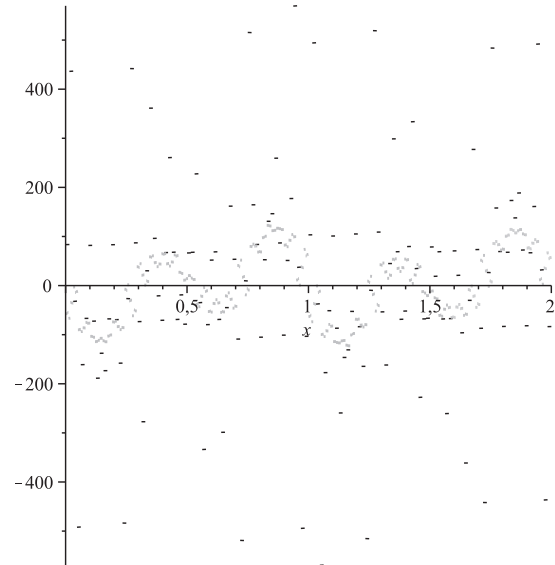


Рис. 17. Графики обобщенных производных  $u'_7$ ,  $u'_8$  решений рациональных задач из примера 5.2. Случай расходимости решений.

**Замечание 5.1.** Результаты компьютерного моделирования демонстрируют, что даже при небольших изменениях коэффициентов, приводящих к нарушению выполнения полученного в статье условия положительной определенности, могут появляться отрицательные собственные значения рациональных операторов и последовательность рациональных решений расходятся. Полученные в статье достаточные условия положительной определенности операторов с несоизмеримыми сдвигами близки к необходимым.

**Замечание 5.2.** Теоремы 4.1, 5.1 можно обобщить на случай нескольких несоизмеримых отклонений. Результаты статьи также обобщаются на случай дифференциально-разностных уравнений для функций многих переменных.

Автор выражает благодарность Л. Е. Россовскому и А. Л. Скубачевскому за постановку задачи, полезные обсуждения результатов работы и ряд ценных советов, способствующих ее развитию.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каменский А. Г. Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально-разностными операторами// Дифф. уравн. — 1976. — 12, № 5. — С. 815–824.
2. Каменский Г. А., Мышкис А. Д. К постановке краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и несколькими старшими членами// Дифф. уравн. — 1974. — 12, № 3. — С. 409–418.
3. Россовский Л. Е. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — 54. — С. 3–138.
4. Gray R. M. Toeplitz and circulant matrices: A review// Found. Trends Commun. Inf. Theory — 2006. — 12, № 3. — С. 155–239.
5. Skubachevskii A. L. Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 1997.
6. Skubachevskii A. L. Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics// Nonlinear Anal. — 1998. — 32, № 2. — С. 261–278.

Е. П. Иванова

Российский университет дружбы народов, кафедра прикладной математики

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), кафедра дифференциальных уравнений

E-mail: elpaliv@yandex.ru

## Continuous Dependence of Solutions of Boundary-Value Problems for Differential-Difference Equations on Shifts of the Argument

© 2016 E. P. Ivanova

**Abstract.** We consider boundary-value problems for differential-difference operators with perturbations in shifts of the argument. We prove that the family of differential-difference operators is positive definite uniformly with respect to the shifts of the argument. Solutions of such problems depend continuously on these shifts. We consider the coercivity problem for differential-difference operators  $c$  with incommensurable shifts of the argument and study the approximation of such operators by rational operators.

### REFERENCES

1. A. G. Kamenskiy, “Kraevye zadachi dlya uravneniy s formal’no simmetrichnymi differentsial’no-raznostnymi operatorami” [Boundary-value problems for equations with formally symmetric differential-difference operators], *Diff. uravn.* [Diff. Equations], 1976, **12**, No. 5, 815–824 (in Russian).
2. G. A. Kamenskiy and A. D. Myshkis, “K postanovke kraevykh zadach dlya differentsial’nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom i neskol’kimi starshimi chlenami” [On posing of boundary-value problems with delayed argument and several higher-order terms], *Diff. uravn.* [Diff. Equations], 1974, **12**, No. 3, 409–418 (in Russian).
3. L. E. Rossovskiy, “Ellipticheskie funktsional’no-differentsial’nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii” [Elliptic functional differential equations with contraction and dilatation of arguments of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 3–138 (in Russian).
4. R. M. Gray, “Toeplitz and circulant matrices: A review,” *Found. Trends Commun. Inf. Theory*, 2006, **12**, No. 3, 155–239.
5. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhauser, Basel—Boston—Berlin, 1997.
6. A. L. Skubachevskii, “Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics,” *Nonlinear Anal.*, 1998, **32**, No. 2, 261–278.

E. P. Ivanova

Department of Applied Mathematics, Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, Russia

Department of Differential Equations, Moscow Aviation Institute (National Research University),  
Moscow, Russia

E-mail: elpaliv@yandex.ru



## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВОЗМУЩЕННЫХ ПОЛУГРУПП В ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2016 г. **М. И. КАМЕНСКИЙ, И. М. ГУДОШНИКОВ**

Аннотация. В статье доказываются необходимые и достаточные условия устойчивости возмущенных полугрупп линейных операторов в банаховых пространствах с конусами и приводятся примеры использования этих теорем. В частности, рассматривается пример с возмущением краевой задачи линейным оператором с запаздыванием и формулируется условие устойчивости полученной возмущенной полугруппы.

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	97
2. Предварительные сведения . . . . .	98
2.1. Конуса в банаховом пространстве . . . . .	98
2.2. Теория полугрупп . . . . .	98
2.3. Комплексификация пространств и операторов . . . . .	100
3. Необходимое условие устойчивости . . . . .	101
4. Позитивирующее многозначное отображение . . . . .	102
5. Теорема о сохранении устойчивости . . . . .	103
6. Пример: бесконечные матрицы . . . . .	108
7. Пример: возмущение краевой задачи операторами с запаздыванием . . . . .	109
7.1. Исходный оператор . . . . .	109
7.2. Функция Грина и резольвента . . . . .	110
7.3. Секториальность оператора . . . . .	112
7.4. Обратимый оператор и полугруппа . . . . .	113
7.5. Примеры возмущений с запаздыванием . . . . .	114
Список литературы . . . . .	116

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим возмущенную задачу Коши в банаховом пространстве

$$\begin{cases} y' = -(\Gamma + M)y, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

где  $\Gamma$  — замкнутый, но (вообще говоря) неограниченный оператор, а  $M$  — ограниченный оператор, считающийся возмущением. Как будет показано в данной статье, наличие инвариантного относительно  $\Gamma$  и  $M$  конуса позволяет доказать связь устойчивости полугруппы, порожденной этой задачей (другими словами, диссипативности оператора  $-\Gamma + M$ ), и свойством оператора  $\Gamma^{-1}M$  быть сжимающим. Точные формулировки выглядят следующим образом:

**Теорема 3.1.** Пусть  $F$  — вещественное банахово пространство,  $K \subset F$  — воспроизводящий конус и норма пространства  $F$  монотонна. Пусть заданы линейные операторы:

- $\Gamma : D(\Gamma) \subset F \rightarrow F$  такой, что  $-\Gamma$  — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы, причем  $e^{-\Gamma t} \geq 0$  в смысле  $K$  для всех  $t \geq 0$ ,
- $M : F \rightarrow F$ , ограниченный и  $M \geq 0$  в смысле  $K$ ,

и пусть композиция  $\Gamma^{-1}M$  вполне непрерывна.

Тогда при любом  $t > 0$

$$\rho(e^{(-\Gamma+M)t}) < 1 \implies \rho(\Gamma^{-1}M) < 1.$$

**Теорема 5.1.** Пусть  $F$  — вещественное банахово пространство, а  $K \subset F$  — воспроизводящий конус. Пусть заданы линейные операторы:

- $\Gamma : D(\Gamma) \subset F \rightarrow F$ , такой, что  $\Gamma^{-1}$  вполне непрерывен,  $-\Gamma_C$  является производящим оператором аналитической и равномерно экспоненциально устойчивой полугруппы, а  $e^{-\Gamma t}$  положительны в смысле  $K$  для всех  $t \geq 0$ ;
- $M : F \rightarrow F$  — ограничен и  $M \geq 0$  в смысле  $K$ .

Тогда для любого  $t > 0$

$$\rho(\Gamma^{-1}M) < 1 \implies \rho(e^{(-\Gamma+M)t}) < 1.$$

Разделы 3, 4, 5 содержат доказательства этих теорем.

В статье также рассмотрены два примера использования теоремы 5.1. Первый пример, описываемый в разделе 6, касается операторов, действующих в пространстве последовательностей  $l_1$  (бесконечных матриц, их теорию можно найти в [11, 14, 15]). Как будет показано, теорема 5.1 позволяет получить условие устойчивости возмущенной полугруппы, порожденной такими операторами, отличающееся от обычной локализации собственных значений кругами Гершгорина [15].

Вторым примером, который описывается в разделе 7, является задача Коши с производящим оператором  $(-\Gamma)(f) = f'' - af$  с краевыми условиями Неймана. Все условия теоремы 5.1 проверяются явно через вычисление функции Грина и проверку положительности и аналитичности получаемой полугруппы. В качестве возмущения рассматриваются операторы с запаздыванием, что стало возможным благодаря характеру условий, наложенных на оператор  $M$  в теореме 5.1 (инвариантность конуса и оценка на спектральный радиус/норму).

Для удобства читателя в разделе 2, перед изложением основных результатов, приведены используемые сведения о конусах, полугруппах и комплексификации пространства.

## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

**2.1. Конуса в банаховом пространстве.** В данном разделе приведены основные определения, относящиеся к конусам в банаховом пространстве, которые будут использованы в статье. Источниками по данной теме могут являться [5, 8].

**Определение 2.1.** Замкнутое подмножество  $K$  вещественного банахова пространства  $X$  называется *конусом*, если:

1.  $\alpha \geq 0, x \in K \implies \alpha x \in K$ ,
2.  $x, y \in K \implies x + y \in K$ ,
3.  $K \cap (-K) = 0$ .

Конус  $K$  задает *отношение полуупорядоченности* в пространстве  $X$ . Если  $x, y \in X$  и  $x - y \in K$ , то пишут, что  $x \geq y$ .

**Определение 2.2.** Конус  $K$  называется *воспроизводящим*, если

$$\forall(x \in X) \exists(u, v \in K)[x = u - v].$$

**Определение 2.3.** Норма в пространстве  $X$  с конусом  $K$  называется *монотонной*, если

$$0 \leq x \leq y \implies \|x\| \leq \|y\|.$$

**Определение 2.4.** Оператор  $A : X \rightarrow X$  называется *положительным* (обозначается  $A \geq 0$ ), если  $A(K) \subset K$ .

**2.2. Теория полугрупп.** Данный раздел, содержащий основные общеизвестные понятия и факты из теории полугрупп, основан на [12]. Также этот материал содержится (в той или иной степени) в [1, 6, 7, 10, 13].

**Определение 2.5.** Семейство  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  ограниченных линейных операторов на банаховом пространстве  $X$  называется (однопараметрической) *полугруппой* на  $X$ , если оно удовлетворяет

$$\begin{cases} T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall (t, s \geq 0), \\ T(0) = I. \end{cases}$$

**Определение 2.6.** Полугруппа  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  называется *сильно непрерывной*, или  $C_0$ -*полугруппой*, если функции

$$\begin{aligned} \xi_x &: \mathbb{R}_+ \rightarrow X, \\ \xi_x &: t \mapsto \xi_x(t) := T(t)x \end{aligned}$$

непрерывны при любом  $x \in X$ .

**Определение 2.7.** Производящим оператором сильно непрерывной полугруппы  $T(t)$  называется оператор, определенный на множестве

$$D(A) = \{x | \xi_x \text{ дифференцируема}\}$$

и действующий по правилу

$$A : x \mapsto \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}.$$

Мы часто будем обозначать полугруппу  $T(t)$  как  $e^{At}$ .

**Свойство 2.1.** Производящий оператор сильно непрерывной полугруппы всегда является линейным замкнутым плотно определенным оператором.

**Свойство 2.2.** Если  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  — сильно непрерывная полугруппа, то существуют такие  $\omega \in \mathbb{R}$  и  $M \geq 1$ , что для всех  $t \geq 0$

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}.$$

**Определение 2.8.** Пусть дана сильно непрерывная полугруппа  $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t \geq 0}$ . Тогда ее *порядком роста* называется число

$$\omega_0(\mathcal{T}) = \inf \{ \omega \in \mathbb{R} : \exists (M_\omega) \forall (t \geq 0) [\|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}] \}.$$

**Свойство 2.3.** Если  $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t \geq 0}$  — сильно непрерывная полугруппа, то при любом  $t \geq 0$

$$\rho(T(t)) = e^{\omega_0(\mathcal{T})t},$$

где  $\rho$  — спектральный радиус.

**Определение 2.9.** Полугруппа  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  называется *равномерно экспоненциально устойчивой*, если

$$\exists (\varepsilon > 0) \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\varepsilon t} \|T(t)\| = 0 \right].$$

**Свойство 2.4.** Сильно непрерывная полугруппа  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  равномерно экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда ее порядок роста  $\omega_0(\mathcal{T}) < 0$ .

**Определение 2.10.** Пусть  $X$  — банахово пространство, а  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  — замкнутый оператор. Тогда

$$s(A) := \sup \{ \operatorname{Re} \lambda \in \sigma(A) \}$$

называется *спектральной границей*.

**Определение 2.11.** Существенным порядком роста полугруппы  $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t \geq 0}$ , порожденной производящим оператором  $A$ , называется число

$$\omega_{ess}(\mathcal{T}) = \omega_{ess}(A) := \inf_{t > 0} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\|_{ess},$$

где

$$\|D\|_{ess} = \inf \{ \|D - K\| : K \text{ — компактный} \}$$

для произвольного оператора  $D$ .

**Свойство 2.5.** Пусть  $A$  является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы  $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t \geq 0}$ . Тогда

$$\omega_0(\mathcal{T}) = \max\{\omega_{ess}(\mathcal{T}), s(A)\}.$$

**Свойство 2.6.** Пусть  $A$  является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы  $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t \geq 0}$ . Тогда при любом  $t_0 > 0$

$$-\infty \leq s(A) \leq \omega_0(\mathcal{T}) = \inf_{t > 0} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\| = \frac{1}{t_0} \ln \rho(T(t_0)) < +\infty.$$

**Свойство 2.7.** Пусть  $A$  является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы  $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t \geq 0}$ . Если  $K$  — компактный оператор, то

$$\omega_{ess}(A) = \omega_{ess}(A + K).$$

Также нам потребуется понятие аналитической полугруппы и некоторые общеизвестные факты:

**Определение 2.12.** Пусть

$$\Sigma_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \delta\} \setminus \{0\}.$$

Семейство ограниченных линейных операторов  $\{T(z)\}_{z \in \Sigma_\delta \cup \{0\}}$ , действующих в банаховом пространстве  $X$ , называется *аналитической полугруппой* (угла  $\delta \in (0, \pi/2]$ ), если:

1.  $T(0) = I$  и для всех  $z_1, z_2 \in \Sigma_\delta$  выполнено  $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ .
2. Отображение  $z \mapsto T(z)$  аналитично в  $\Sigma_\delta$ .
3. Для всех  $x \in X$  и  $\delta' \in (0, \delta)$  выполнено  $\lim_{\Sigma_{\delta'} \rightarrow 0} T(z)x = x$ .

**Лемма 2.1.** Пусть  $A : D(A) \subset F \rightarrow F$  — линейный оператор в комплексном банаховом пространстве  $F$ . Если  $\vartheta \in \mathbb{R}$ , то

$$e^{-i\vartheta} \sigma(A) = \sigma(e^{i\vartheta} A).$$

**Лемма 2.2.** Пусть  $A$  — производящий оператор аналитической полугруппы угла  $\alpha$ . Возьмем  $\vartheta \in (-\alpha, \alpha)$ . Тогда  $e^{A(e^{i\vartheta}t)}$  — сильно непрерывная полугруппа, и ее производящий оператор  $A_\vartheta$  совпадает с  $e^{i\vartheta}A$ .

**2.3. Комплексификация пространств и операторов.** Нам понадобится понятие комплексификации пространства и оператора, описанное в [2, §II.XIII.2].

По произвольному линейному оператору  $A : F \rightarrow F$ , где  $F$  — вещественное банахово пространство, может быть построен оператор  $A_C : F_C \rightarrow F_C$ , где  $F_C = F \times F$  — комплексное банахово пространство с нормой

$$\|(x, y)\| = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \|x \cos \theta + y \sin \theta\|,$$

$A_C : (x, y) \mapsto (Ax, Ay)$ . Легко проверить, что:

**Свойство 2.8.**  $A_C B_C = (AB)_C, (A^{-1})_C = (A_C)^{-1}$ .

**Свойство 2.9.** Для вещественных  $\alpha, \beta$  выполнено  $(\alpha A + \beta B)_C = \alpha A_C + \beta B_C$ .

**Свойство 2.10.**  $A_C$  — компактный оператор тогда и только тогда, когда  $A$  — компактный оператор.

**Свойство 2.11.**  $\|A_C\| = \|A\|$  благодаря формуле Гельфанда:  $\rho(A_C) = \rho(A)$ .

**Свойство 2.12.**  $e^{At}$  — сильно непрерывная полугруппа тогда и только тогда, когда  $(e^{At})_C$  — сильно непрерывная полугруппа, при этом производящий оператор  $(e^{At})_C$  совпадает с  $A_C$ , т. е.

$$e^{A_C t} = (e^{At})_C.$$

Кроме того, благодаря свойству 2.11

$$\omega(e^{A_C t}) = \omega(e^{At}).$$

Под спектром, спектральным радиусом и собственным значением оператора  $A$ , определенного над вещественным банаховым пространством, понимаются таковые оператора  $A_C$ .

## 3. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

**Теорема 3.1.** Пусть  $F$  — вещественное банахово пространство,  $K \subset F$  — воспроизводящий конус и норма пространства  $F$  монотонна. Пусть заданы линейные операторы:

- $\Gamma : D(\Gamma) \subset F \rightarrow F$  такой, что  $-\Gamma$  — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы, причем  $e^{-\Gamma t} \geq 0$  в смысле  $K$  для всех  $t \geq 0$ ,
- $M : F \rightarrow F$ , ограниченный и  $M \geq 0$  в смысле  $K$ ,

и композиция  $\Gamma^{-1}M$  вполне непрерывна. Тогда при любом  $t > 0$

$$\rho(e^{(-\Gamma+M)t}) < 1 \implies \rho(\Gamma^{-1}M) < 1.$$

*Доказательство.* В силу компактности спектр  $\Gamma^{-1}M$  состоит из изолированных собственных значений конечной кратности [3, III.6.7]. Если  $\Gamma^{-1}M$  не имеет собственных значений, отличных от нуля, то  $\rho(\Gamma^{-1}M) < 1$  и на этом доказательство завершено. В случае, если  $\Gamma^{-1}M$  имеет ненулевые собственные значения, предположим противное заключению теоремы,  $\rho(\Gamma^{-1}M) \geq 1$ , и заметим, что

$$\Gamma^{-1} = R(0, \Gamma) = -R(0, -\Gamma) = \int_0^{+\infty} e^{-\Gamma t} dt \geq 0,$$

поэтому оператор  $\Gamma^{-1}M$  положителен как композиция положительных операторов и компактен по условию. Поскольку конус  $K$  — воспроизводящий, в силу [8, Теорема 6.1, §6] существует собственный вектор  $x_0 \in K$ , отвечающий собственному значению  $\lambda = \rho(\Gamma^{-1}M)$ , т. е.

$$\Gamma^{-1}Mx_0 = \lambda x_0,$$

иначе

$$x_0 = \frac{1}{\lambda} \Gamma^{-1}Mx_0,$$

$$\Gamma x_0 = \Gamma \frac{1}{\lambda} \Gamma^{-1}Mx_0 = \frac{1}{\lambda} \Gamma \Gamma^{-1}Mx_0 = \frac{1}{\lambda} Mx_0 \in K.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (-\Gamma + M)x_0 &= Mx_0 - \Gamma x_0 = \Gamma \Gamma^{-1}Mx_0 - \Gamma x_0 = \\ &= \Gamma \lambda x_0 - \Gamma x_0 = \lambda \Gamma x_0 - \Gamma x_0 = (\lambda - 1)\Gamma x_0 \in K. \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y' = (-\Gamma + M)y, \\ y(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

и ее решение  $y(t) = e^{(-\Gamma+M)t}x_0$ . Для  $t, \Delta t > 0$  имеем

$$\begin{aligned} y(t + \Delta t) - y(t) &= e^{(-\Gamma+M)t}e^{(-\Gamma+M)\Delta t}x_0 - e^{(-\Gamma+M)t}x_0 = \\ &= e^{(-\Gamma+M)t}(e^{(-\Gamma+M)\Delta t}x_0 - x_0) = e^{(-\Gamma+M)t} \int_0^{\Delta t} e^{(-\Gamma+M)s}(-\Gamma + M)x_0 ds = \\ &= e^{(-\Gamma+M)t} \int_0^{\Delta t} e^{(-\Gamma+M)s}(\lambda - 1)\Gamma x_0 ds. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Заметим, что при любом  $t \geq 0$  оператор  $e^{(-\Gamma+M)t}$  положителен, поскольку к нему сходится итеративная схема  $v_0 = I; v_{i+1} = Qv_i$  со следующим положительным оператором:

$$(Qv)(t) = e^{-\Gamma t} + \int_0^t e^{(-\Gamma)(t-s)}Mv(s)ds.$$

По предположению противного,  $\lambda = \rho(\Gamma^{-1}M) \geq 1$ . Поэтому из (3.2) имеем

$$y(t + \Delta t) - y(t) \geq 0,$$

т. е.

$$y(t + \Delta t) \geq y(t)$$

в смысле  $K$ . В силу положительности  $y(t + \Delta t)$  и  $y(t)$  и монотонности нормы из этого следует

$$\|y(t + \Delta t)\| \geq \|y(t)\|,$$

что противоречит устойчивости полугруппы, следующей из посылки  $\rho(e^{(-\Gamma+M)t}) < 1$ , а значит, наше предположение неверно и  $\rho(\Gamma^{-1}M) < 1$ .  $\square$

#### 4. ПОЗИТИВИРУЮЩЕЕ МНОГОЗНАЧНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Пусть  $F$  — вещественное банахово пространство, а  $K \subset F$  — воспроизводящий конус. Тогда на  $F$  можно следующим образом задать многозначное отображение:

$$P : F \longrightarrow 2^K,$$

$$P : x \longmapsto \{u + v \mid u, v \in K; u - v = x\},$$

где  $2^K$  — множество всех подмножеств конуса  $K$ . Поскольку конус воспроизводящий, то  $P(x)$  содержит хотя бы один элемент для каждого  $x \in F$ .

Выведем некоторые свойства отображения  $P$ .

**Свойство 4.1.**  $\forall(x \in F)[P(x) \subset K]$ .

Очевидно, так как каждый  $y \in P(x)$  является суммой двух элементов  $K$ .

**Свойство 4.2.**  $\forall(x \in F)[P(x) = P(-x)]$ .

Пусть  $y \in P(x)$ . Значит,  $\exists(u, v \in K)[(u + v = y) \wedge (u - v = x)]$ . Тогда  $v - u = -x \Rightarrow y = u + v \in P(-x)$ , т. е.  $P(x) \subset P(-x)$ . Взяв в качестве  $x$  вектор  $-x$ , убедимся в верности обратного вложения.

**Свойство 4.3.**  $\forall(x \in F, y \in P(x))[(y + x \in K) \wedge (y - x \in K)]$ .

$y \in P(x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists(u, v \in K)[(u + v = y) \wedge (u - v = x)]$ . Тогда  $y + x = u + v + u - v = 2u \in K$  и  $y - x = u + v - (u - v) = u + v - u + v = 2v \in K$ .

**Свойство 4.4.**  $y \geq x, y \geq -x \Rightarrow y \in P(x)$ .

Требуемое разложение:  $u = \frac{1}{2}(y + x) \in K, v = \frac{1}{2}(y - x) \in K, u + v = y, u - v = x$ .

**Свойство 4.5.**  $P(0) = K$ .

По свойству 4.1  $P(0) \subset K$ . Докажем обратное вложение. Пусть  $y \in K$ . Тогда  $u = v = \frac{y}{2}$  будет требуемым разложением вектора 0.

**Свойство 4.6.**  $\forall(x \in F)[b \in P(x), a \geq b \Rightarrow a \in P(x)]$

$b \in P(x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists(u, v \in K)[(u + v = b) \wedge (u - v = x)],$

$a \geq b \Rightarrow a - b \in K.$

Пусть  $u_1 = u + \frac{a-b}{2} \in K, v_1 = v + \frac{a-b}{2} \in K$ . Тогда  $u_1 + v_1 = u + \frac{a-b}{2} + v + \frac{a-b}{2} = b + a - b = a,$   
 $u_1 - v_1 = u + \frac{a-b}{2} - \left(v + \frac{a-b}{2}\right) = u - v = x$ . Следовательно,  $a \in P(x)$ .

**Свойство 4.7.**  $\forall(x \in F)[P(x) \text{— замкнутое множество}]$ .

Пусть дана произвольная последовательность  $\{y_i\}$  такая, что  $\{y_i\} \subset P(x), y_i \rightarrow y$ . Тогда  $\frac{1}{2}(y_i + x) \rightarrow \frac{1}{2}(y + x), \frac{1}{2}(y_i - x) \rightarrow \frac{1}{2}(y - x)$ . В силу замкнутости конуса и свойства 4.3 имеем:  $u = \frac{1}{2}(y + x) \in K, v = \frac{1}{2}(y - x) \in K, u + v = y, u - v = x$ , следовательно,  $y \in P(x)$  и  $P(x)$  замкнуто.

**Свойство 4.8.**  $\forall(x \in F, \alpha \in \mathbb{R})[|\alpha|P(x) \subset P(\alpha x)]$

При  $\alpha = 0$ :  $|\alpha|P(x) = 0 \subset P(\alpha x) = P(0) = K$ .

При  $\alpha > 0$ :  $|\alpha|P(x) = \alpha P(x)$ . Пусть  $y \in P(x)$ , т. е.  $\exists(u, v \in K)[(u + v = y) \wedge (u - v = x)]$ . Тогда  $\alpha y = \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ ,  $\alpha u \in K, \alpha v \in K$ .  $\alpha u - \alpha v = \alpha(u - v) = \alpha x$ , следовательно,  $\alpha y \in P(\alpha x)$ .

При  $\alpha < 0$ :  $|\alpha|P(x) = -\alpha P(x)$ . Пусть  $y \in P(x)$ , т. е.  $\exists(u, v \in K)[(u + v = y) \wedge (u - v = x)]$ . Тогда  $-\alpha y = -\alpha(u + v) = (-\alpha u) + (-\alpha v)$ ,  $-\alpha u \in K, -\alpha v \in K$ . Поскольку  $(-\alpha v) - (-\alpha u) = \alpha(u - v) = \alpha x$ , следовательно,  $-\alpha y \in P(\alpha x)$ .

**Свойство 4.9.**  $\forall(x_1, x_2 \in F)[P(x_1) + P(x_2) \subset P(x_1 + x_2)]$ .

Пусть  $y_1 \in P(x_1), y_2 \in P(x_2)$ , т. е.  $\exists(u_1, v_1 \in K)[(u_1 + v_1 = y_1) \wedge (u_1 - v_1 = x_1)], \exists(u_2, v_2 \in K)[(u_2 + v_2 = y_2) \wedge (u_2 - v_2 = x_2)]$ . Тогда  $y_1 + y_2 = u_1 + v_1 + u_2 + v_2 = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2)$  и  $(u_1 + u_2) - (v_1 + v_2) = u_1 - v_1 + u_2 - v_2 = x_1 + x_2$ , следовательно,  $y_1 + y_2 \in P(x_1 + x_2)$ . Значит,  $P(x_1) + P(x_2) \subset P(x_1 + x_2)$ .

**Свойство 4.10.** Пусть  $S : F \rightarrow F$  — линейный положительный оператор. Тогда  $\forall(x \in F)[SPx \subset PSx]$

$$\begin{aligned} P(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \{u + v | u, v \in K; u - v = x\}, \\ SP(x) &= S\{u + v | u, v \in K; u - v = x\} = \\ &= \{Su + Sv | u, v \in K; u - v = x\} \subset P(Su - Sv) = PS(u - v) = PS(x). \end{aligned}$$

## 5. ТЕОРЕМА О СОХРАНЕНИИ УСТОЙЧИВОСТИ

**Лемма 5.1.** Пусть  $F$  — комплексное банахово пространство, и заданы линейные операторы:

- $\Gamma : D(\Gamma) \subset F \rightarrow F$  такой, что  $\Gamma^{-1}$  компактен,
- $M : F \rightarrow F$  — ограниченный оператор.

Пусть также  $\rho(\Gamma^{-1}M) < 1$ . Тогда оператор  $-\alpha\Gamma + M$  при всех  $\alpha : \alpha' \leq \alpha < +\infty$ , где  $0 < \alpha' < 1$ , является оператором с компактной резольвентой.

*Доказательство.* Возьмем  $\varepsilon : 0 < \varepsilon < 1 - \rho(\Gamma^{-1}M)$ . Мы можем ввести (см. [5, гл. 2, § 5, п. 2]) в  $F$  такую норму  $\|\cdot\|_\varepsilon$ , эквивалентную текущей, что норма операторов, построенная по ней, такова:

$$\|\Gamma^{-1}M\|_\varepsilon \leq \rho(\Gamma^{-1}M) + \varepsilon < \rho(\Gamma^{-1}M) + 1 - \rho(\Gamma^{-1}M) = 1.$$

Теперь выберем  $\alpha' : \|\Gamma^{-1}M\|_\varepsilon < \alpha' < 1$ . Можно видеть, что для произвольного  $\alpha : \alpha' \leq \alpha < +\infty$  верна оценка  $\left\| \frac{1}{\alpha} \Gamma^{-1}M \right\|_\varepsilon < 1$ . Далее зафиксируем  $\lambda$  такое, что

$$0 < \lambda < \frac{1 - \left\| \frac{1}{\alpha} \Gamma^{-1}M \right\|_\varepsilon}{\left\| \frac{1}{\alpha} \Gamma^{-1}M \right\|_\varepsilon}.$$

Тогда

$$\left\| \frac{1}{\alpha} \Gamma^{-1}M \right\|_\varepsilon + \left\| \frac{\lambda}{\alpha} \Gamma^{-1} \right\|_\varepsilon < 1.$$

А это означает, что

$$\rho \left( \frac{1}{\alpha} \Gamma^{-1}M + \frac{\lambda}{\alpha} \Gamma^{-1} \right) \leq \left\| \frac{1}{\alpha} \Gamma^{-1}M + \frac{\lambda}{\alpha} \Gamma^{-1} \right\|_\varepsilon \leq \left\| \frac{1}{\alpha} \Gamma^{-1}M \right\|_\varepsilon + \left\| \frac{\lambda}{\alpha} \Gamma^{-1} \right\|_\varepsilon < 1.$$

Поэтому можно разложить в ряд Неймана резольвенту:

$$\begin{aligned} R_\lambda(-\alpha\Gamma + M) &= (-\alpha\Gamma + M - \lambda I)^{-1} = \left( -\alpha\Gamma \left( I - \frac{1}{\alpha} \Gamma^{-1}M - \frac{\lambda}{\alpha} \Gamma^{-1} \right) \right)^{-1} = \\ &= \left( I - \frac{1}{\alpha} \Gamma^{-1}M - \frac{\lambda}{\alpha} \Gamma^{-1} \right)^{-1} \left( -\frac{1}{\alpha} \Gamma^{-1} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\alpha} \Gamma^{-1}M + \frac{\lambda}{\alpha} \Gamma^{-1} \right)^k \left( -\frac{1}{\alpha} \Gamma^{-1} \right). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Из (5.1) видно, что  $R_\lambda(-\alpha\Gamma + M)$  компактна, т. е. оператор  $-\alpha\Gamma + M$  является оператором с компактной резольвентой (см. [3, гл. III, § 6, п. 8]) при всех  $\alpha : \alpha' \leq \alpha < +\infty$ , где  $\alpha' < 1$ .  $\square$

**Лемма 5.2.** Пусть  $F$  — вещественное банахово пространство, а  $K \subset F$  — воспроизводящий конус. Пусть заданы линейные операторы:

- $\Gamma : D(\Gamma) \subset F \rightarrow F$ , такой, что  $-\Gamma$  является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы и эта полугруппа положительна в смысле  $K$  при каждом значении параметра,
- $M : F \rightarrow F$  — ограничен и положителен в смысле  $K$ .

Пусть  $\rho(\Gamma^{-1}M) < 1$ . Тогда операторы вида  $-\alpha\Gamma + M$  имеют собственное значение с нулевой вещественной частью только при  $\alpha < 1$ .

*Доказательство.* Предположим противное, что оператор  $\alpha_0\Gamma + M$  имеет собственное значение  $i\omega$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ , ему отвечает собственный вектор  $x_0 + iy_0$  и при этом  $\alpha_0 \geq 1$ .

Частным решением уравнения

$$y' = (-\alpha_0\Gamma + M)y$$

при начальном условии  $y(0) = x_0 + iy_0$  является функция

$$y_1(t) = (x_0 + iy_0)(\cos \omega t + i \sin \omega t) = (x_0 \cos \omega t - y_0 \sin \omega t) + i(x_0 \sin \omega t + y_0 \cos \omega t),$$

при начальном условии  $y(0) = x_0 - iy_0$  — функция

$$y_2(t) = (x_0 - iy_0)(\cos \omega t - i \sin \omega t) = (x_0 \cos \omega t - y_0 \sin \omega t) - i(x_0 \sin \omega t + y_0 \cos \omega t),$$

а значит и их сумма (при начальном условии  $y(0) = 2x_0$ )

$$y^*(t) = 2x_0 \cos \omega t - 2y_0 \sin \omega t.$$

Решение  $y^*$  — периодическое (с периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ) и невырожденное (так как собственный вектор  $x_0 + iy_0 \neq 0 + i0$ ). При этом данное решение лежит в вещественной компоненте  $F_C$ , и мы можем в доказательстве этой леммы работать далее с операторами, действующими в  $F$ , а не в  $F_C$ .

Поскольку  $y^*$  является решением неоднородной системы

$$\begin{cases} y' = -\alpha_0\Gamma y + M y^*, \\ y(0) = 2x_0, \end{cases}$$

то

$$y^*(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\alpha_0\Gamma(t-s)} M y^*(s) ds.$$

Рассмотрим семейство линейных операторов

$$Q_t : F \rightarrow F,$$

$$Q_t : x \mapsto \int_{-\infty}^t e^{-\alpha_0\Gamma(t-s)} M x ds.$$

Покажем, что все  $Q_t$  совпадают с одним оператором  $Q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\alpha_0} \Gamma^{-1} M$ . Для любого  $x \in F$  верно:

$$\begin{aligned} Q_t x &= \int_{-\infty}^t e^{-\alpha_0\Gamma(t-s)} M x ds = \int_{-\infty}^t e^{-\alpha_0\Gamma(t-s)} (-\alpha_0\Gamma) (-\alpha_0\Gamma)^{-1} M x ds = \\ &\stackrel{s=t-q}{=} -\frac{1}{\alpha_0} \left( \int_{+\infty}^0 (-1)(-\alpha_0)\Gamma e^{-\alpha_0\Gamma q} dq \right) \Gamma^{-1} M x = -\frac{1}{\alpha_0} \left( \int_0^{+\infty} -\alpha_0\Gamma e^{-\alpha_0\Gamma q} dq \right) \Gamma^{-1} M x = \\ &= -\frac{1}{\alpha_0} e^{-\alpha_0\Gamma q} \Big|_{q=0}^{+\infty} \Gamma^{-1} M x = -\frac{1}{\alpha_0} (0 - I) \Gamma^{-1} M x = \frac{1}{\alpha_0} \Gamma^{-1} M x, \end{aligned}$$

т. е.

$$Q_t = \frac{1}{\alpha_0} \Gamma^{-1} M = Q.$$



Заметим, что  $\alpha_0 \geq 1$  по предположению, а  $\rho(\Gamma^{-1}M) < 1$ , значит, в  $F$  можно ввести (см. [5, гл. 2, § 5, п. 2]) такую норму  $\|\cdot\|_L$ , эквивалентную заданной в  $F$ , что

$$\|\Gamma^{-1}M\|_L \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in F, x \neq 0} \frac{\|\Gamma^{-1}Mx\|_L}{\|x\|_L} < 1.$$

Тогда  $\forall x, y \in F$  верно:

$$\|Q_t x - Q_t y\|_L = \|Q_t(x - y)\|_L = \left\| \frac{1}{\alpha_0} \Gamma^{-1}M(x - y) \right\|_L \leq \frac{1}{\alpha_0} \|\Gamma^{-1}M\|_L \|x - y\|_L$$

Значит,  $Q_t$  — сжимающее отображение, имеющее единственную неподвижную точку в  $F$ . Поскольку  $Q_t$  — линейный оператор, то этой неподвижной точкой является ноль.

Поскольку  $K$  — воспроизводящий конус, то на  $F$  можно задать отображение  $P$ . Рассмотрим множество

$$\tilde{P} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{s \in \mathbb{R}} P(y^*(s)).$$

Каждое из множеств  $P(y^*(s))$  замкнуто, поэтому  $\tilde{P}$  также замкнуто (пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто).

Покажем, что множество  $\tilde{P}$  непусто. Обозначим

$$a_1 = 2x_0 + 2y_0,$$

$$a_2 = 2x_0 - 2y_0.$$

Тогда

$$2x_0 = \frac{a_1 + a_2}{2},$$

$$2y_0 = \frac{a_1 - a_2}{2}.$$

Благодаря тому, что конус  $K$  воспроизводящий, существуют его элементы  $u_1, v_1, u_2, v_2$  такие, что

$$a_1 = u_1 - v_1,$$

$$a_2 = u_2 - v_2.$$

Обозначим  $\xi = u_1 + v_1 + u_2 + v_2$ . Очевидно,  $\xi \in K$  и при этом

$$\begin{aligned} \xi - y^*(t) &= u_1 + v_1 + u_2 + v_2 - 2x_0 \cos \omega t + 2y_0 \sin \omega t = \\ &= u_1 + v_1 + u_2 + v_2 - \frac{a_1 + a_2}{2} \cos \omega t + \frac{a_1 - a_2}{2} \sin \omega t = \\ &= u_1 + v_1 + u_2 + v_2 - \frac{u_1 - v_1 + u_2 - v_2}{2} \cos \omega t + \frac{u_1 - v_1 - u_2 + v_1}{2} \sin \omega t = \\ &= u_1 \left( 1 - \frac{\cos \omega t}{2} + \frac{\sin \omega t}{2} \right) + v_1 \left( 1 + \frac{\cos \omega t}{2} - \frac{\sin \omega t}{2} \right) + u_2 \left( 1 - \frac{\cos \omega t}{2} - \frac{\sin \omega t}{2} \right) + \\ &\quad + v_2 \left( 1 + \frac{\cos \omega t}{2} + \frac{\sin \omega t}{2} \right). \end{aligned}$$

Можно видеть, что множитель перед каждым вектором не может быть меньше нуля, поэтому  $\xi - y^*(t) \in K$ , т. е.  $\xi \geq y^*(t)$  при всех  $t$ . Так как  $-y^*(t) = y^*\left(t + \frac{\pi}{\omega}\right)$ , то по свойству 4.4 имеем  $\xi \in P(y^*(t))$ , т. е.  $\xi \in \tilde{P}$ .

Продолжим исследование операторов  $Q_t$ . Для всех  $t \in \mathbb{R}$  и  $\tilde{y} \in \tilde{P}$  имеем:

$$\begin{aligned} Q_t \tilde{y} &= \int_{-\infty}^t e^{-\alpha_0 \Gamma(t-s)} M \tilde{y} ds = \int_{-\infty}^t e^{-\alpha_0 \Gamma(t-s)} M \left( \frac{\tilde{y} + y^*(s)}{2} + \frac{\tilde{y} - y^*(s)}{2} \right) ds = \\ &= \int_{-\infty}^t e^{-\alpha_0 \Gamma(t-s)} M \frac{\tilde{y} + y^*(s)}{2} ds + \int_{-\infty}^t e^{-\alpha_0 \Gamma(t-s)} M \frac{\tilde{y} - y^*(s)}{2} ds \in (\text{так как интегралы неотрицательны}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\in P \left( \int_{-\infty}^t e^{-\alpha_0 \Gamma(t-s)} M \frac{\tilde{y} + y^*(s)}{2} ds - \int_{-\infty}^t e^{-\alpha_0 \Gamma(t-s)} M \frac{\tilde{y} - y^*(s)}{2} ds \right) = \\
&= P \left( \int_{-\infty}^t e^{-\alpha_0 \Gamma(t-s)} M \left( \frac{\tilde{y} + y^*(s)}{2} - \frac{\tilde{y} - y^*(s)}{2} \right) ds \right) = \\
&= P \left( \int_{-\infty}^t e^{-\alpha_0 \Gamma(t-s)} M y^*(s) ds \right) = P(y^*(t)).
\end{aligned}$$

Поскольку при любом  $t$  оператор  $Q_t = Q$ , то  $\forall (t \in \mathbb{R}) [Q\tilde{y} \in P(y^*(t))]$ , т. е.  $Q\tilde{y} \in \bigcap_{t \in \mathbb{R}} P(y^*(t)) = \tilde{P}$ .

Значит, отображение

$$\begin{aligned}
\tilde{Q} : \tilde{P} &\longrightarrow \tilde{P}, \\
\tilde{Q} : x &\longmapsto \frac{1}{\alpha_0} \Gamma^{-1} M x
\end{aligned}$$

задано корректно. Поскольку множество  $\tilde{P}$  замкнуто, то его можно рассматривать как метрическое пространство с метрикой, порожденной нормой пространства  $F$ . Отображение  $\tilde{Q}$  является сжимающим, так же как и  $Q$ , поэтому оно имеет неподвижную точку  $y_f \in \tilde{P}$ . Тогда  $y_f$  также является неподвижной точкой отображения  $Q$ , имеющей единственную неподвижную точку — ноль. Следовательно,  $y_f = 0 \in \tilde{P}$ .

Заметим, что  $\tilde{P} \subset P(y^*(0))$ , поэтому  $0 \in P(y^*(0))$ . То есть,  $\exists (u_x, v_x \in K : u_x + v_x = 0) [u_x - v_x = y^*(0)]$ .

$$u_x - v_x = y^*(0) = 2x_0 \cos(\omega 0) - 2y_0 \sin(\omega 0) = 2x_0.$$

Но  $K$  — конус, поэтому  $(u_x, v_x \in K) \wedge (u_x + v_x = 0) \implies (u_x = 0) \wedge (v_x = 0)$ , значит,  $u_x - v_x = 0 - 0 = 0 = 2x_0 = x_0$ .

Аналогично,  $\tilde{P} \subset P\left(y^*\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)\right) \implies 0 \in P\left(y^*\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)\right) \implies \exists (u_y, v_y \in K : u_y + v_y = 0) [u_y - v_y = y^*\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = -2y_0] \implies (u_y = 0) \wedge (v_y = 0) \implies u_y - v_y = 0 = -2y_0 = y_0$ .

То есть  $x_0$  и  $y_0$  одновременно равны нулю. Но такого не может быть, так как  $x_0 + iy_0$  — собственный вектор, который не может быть нулевым.

Имеем противоречие, значит, наше предположение неверно и  $\alpha_0 < 1$ .  $\square$

**Теорема 5.1.** Пусть  $F$  — вещественное банахово пространство, а  $K \subset F$  — воспроизводящий конус. Пусть заданы линейные операторы:

- $\Gamma : D(\Gamma) \subset F \rightarrow F$ , такой, что  $\Gamma^{-1}$  вполне непрерывен,  $-\Gamma_C$  является производящим оператором аналитической и равномерно экспоненциально устойчивой полугруппы, а  $e^{-\Gamma t}$  положительны в смысле  $K$  для всех  $t \geq 0$ .
- $M : F \rightarrow F$  — ограничен и  $M \geq 0$  в смысле  $K$ .

Тогда для любого  $t > 0$

$$\rho(\Gamma^{-1}M) < 1 \implies \rho(e^{(-\Gamma+M)t}) < 1.$$

*Доказательство.* Поскольку полугруппа  $e^{-\Gamma t}$  является сильно непрерывной, то найдутся такие  $c$  и  $\omega_1$ , что  $\|e^{-\Gamma t}\| \leq ce^{\omega_1 t}$ , и, в силу ее устойчивости,  $\omega_1 < 0$ .

Пусть  $\alpha \geq 0$ . Тогда  $D(-\alpha\Gamma) = D(-\Gamma)$  и  $e^{(-\alpha\Gamma)t} = e^{-\Gamma(\alpha t)}$  — сильно непрерывная полугруппа, причем  $\|e^{(-\alpha\Gamma)t}\| \leq ce^{\omega_1 \alpha t}$ .

Из леммы 5.1 следует, что существует такое  $\alpha' : 0 < \alpha' < 1$ , что  $-\alpha\Gamma_C + M_C$ , а значит, и  $-\alpha\Gamma + M$  является оператором с компактной резольвентой при всех  $\alpha \geq \alpha'$ .

Рассмотрим подробнее семейство операторов

$$\{-\alpha\Gamma + M\}_{\alpha \geq \alpha'}. \quad (5.2)$$

Сразу можно сказать, что, поскольку  $M$  — ограниченный оператор, то согласно [12, теорема III.1.3, с. 158]  $e^{(-\alpha\Gamma+M)t}$  — сильно непрерывная полугруппа и

$$\|e^{(-\alpha\Gamma+M)t}\| \leq ce^{(\alpha\omega_1+c\|M\|)t}.$$

Так как  $\omega_1 < 0$ , то при  $\alpha > -\frac{c\|M\|}{\omega_1}$  мы получим, что  $\alpha\omega_1 + c\|M\| < 0$ , т. е. весь спектр  $\sigma(-\alpha\Gamma + M)$  лежит в левой полуплоскости.

Поскольку  $-\Gamma_C$  — производящий оператор аналитической полугруппы, то существует такое  $\vartheta \in (0, \pi/2)$ , что сужения  $e^{-\Gamma_C z}$  на  $\{e^{i\vartheta}t \mid t \geq 0\}$  и  $\{e^{-i\vartheta}t \mid t \geq 0\}$  являются сильно непрерывными полугруппами. По лемме 2.2 их производящими операторами являются соответственно  $-e^{i\vartheta}\Gamma_C$  и  $-e^{-i\vartheta}\Gamma_C$ . Тогда существуют такие  $M_i, M_{-i}, \omega_i, \omega_{-i}$ , что

$$\begin{aligned} \|e^{(-e^{i\vartheta}\Gamma_C)t}\| &\leq M_i e^{\omega_i t}, \\ \|e^{(-e^{-i\vartheta}\Gamma_C)t}\| &\leq M_{-i} e^{\omega_{-i} t}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|e^{(e^{i\vartheta}(-\alpha\Gamma_C+M))t}\| &\leq M_i e^{(\alpha\omega_i+M_i\|M\|)t}, \\ \|e^{(e^{-i\vartheta}(-\alpha\Gamma_C+M_C))t}\| &\leq M_{-i} e^{(\alpha\omega_{-i}+M_{-i}\|M\|)t}, \end{aligned}$$

значит,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sigma(e^{i\vartheta}(-\alpha\Gamma_C + M_C)) &\leq \alpha\omega_i + M_i\|M\|, \\ \operatorname{Re} \sigma(e^{-i\vartheta}(-\alpha\Gamma_C + M_C)) &\leq \alpha\omega_{-i} + M_{-i}\|M\|, \end{aligned}$$

и по лемме 2.1

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} e^{-i\vartheta} \sigma(-\alpha\Gamma + M) &\leq \alpha\omega_i + M_i\|M\|, \\ \operatorname{Re} e^{i\vartheta} \sigma(-\alpha\Gamma + M) &\leq \alpha\omega_{-i} + M_{-i}\|M\|, \end{aligned}$$

т. е. если  $\lambda \in \sigma(-\alpha\Gamma + M)$ , то

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda \cos \vartheta + \operatorname{Im} \lambda \sin \vartheta &\leq \alpha\omega_i + M_i\|M\|, \\ \operatorname{Re} \lambda \cos \vartheta - \operatorname{Im} \lambda \sin \vartheta &\leq \alpha\omega_{-i} + M_{-i}\|M\|, \end{aligned}$$

и наконец

$$\operatorname{Im} \lambda \leq -\operatorname{ctg} \vartheta \operatorname{Re} \lambda + \frac{\alpha\omega_i + M_i\|M\|}{\sin \vartheta}, \quad (5.3)$$

$$\operatorname{Im} \lambda \geq \operatorname{ctg} \vartheta \operatorname{Re} \lambda - \frac{\alpha\omega_{-i} + M_{-i}\|M\|}{\sin \vartheta}. \quad (5.4)$$

Таким образом, спектр  $-\alpha\Gamma + M$  находится внутри сектора комплексной плоскости, обращенного расширяющейся частью в сторону убывания вещественной оси.

С другой стороны, как было сказано выше, при  $\alpha \geq \alpha'$  оператор  $-\alpha\Gamma + M$  — оператор с компактной резольвентой, поэтому его спектр при каждом фиксированном  $\alpha$  состоит из изолированных собственных значений конечной кратности, а при изменении  $\alpha$  собственные значения образуют непрерывные, возможно пересекающиеся, ветви  $\mu(\alpha)$ . При этом возможна ситуация, когда  $|\mu(\alpha)| \rightarrow \infty$  при  $\alpha$ , стремящемся к конечной величине. (Детальное обоснование см. в [3], в частности, теорема IV.3.16. Можно даже заметить, что семейство (5.2) является голоморфным типа (A) и ветви его собственных значений аналитичны.)

Пусть функция  $\mu(\alpha)$ , действующая из  $(a, b)$  или  $[a, b)$  в  $\mathbb{C}$  — любая ветвь собственного значения такая, что  $\alpha' \leq a < 1$ , а  $1 < b \leq +\infty$ . Рассмотрим несколько возможных случаев.

Если  $b = +\infty$ , то при  $\alpha > -\frac{c\|M\|}{\omega_1}$ , как было показано выше,  $\operatorname{Re} \mu(\alpha) < 0$ . Поэтому, если ветвь  $\mu(\alpha)$  не пересекает мнимую ось, то она целиком лежит в левой полуплоскости, если же она пересекает ее, то в силу леммы 5.2 — только при значениях  $\alpha < 1$ , поэтому при  $\alpha = 1$   $\operatorname{Re} \mu(\alpha) < 0$ .

Если  $b < \infty$ , а при  $\alpha \geq b$  функция  $\mu(\alpha)$  не определена, то  $|\mu(\alpha)| \rightarrow \infty$  при  $\alpha \rightarrow b$  слева. Однако, из оценок (5.3), (5.4) видно, что неограниченный рост  $|\mu(\alpha)|$  при ограниченных  $\alpha$  возможен, только если  $\operatorname{Re} \mu(\alpha) \rightarrow -\infty$ . Очевидно, что тогда существует такое  $\alpha \in (1, b)$ , что  $\operatorname{Re} \mu(\alpha) < 0$ . Поэтому, как и в предыдущем случае,  $\mu(1)$  лежит в левой полуплоскости. Таким образом, мы показали, что весь спектр оператора  $-\Gamma + M$  лежит в левой полуплоскости, т. е.

$$s(-\Gamma + M) \leq 0.$$

Так как  $-\Gamma + M$  — оператор с компактной резольвентой, то единственной предельной точкой его спектра может быть  $\infty$ . С другой стороны, весь его спектр находится в секторе, определяемом (5.3), (5.3) при  $\alpha = 1$ . Поэтому ситуация, когда  $\exists \{\lambda_i\} \subset \sigma(-\Gamma + M) : \operatorname{Re} \lambda_i \rightarrow 0$  невозможна, а это значит, что

$$s(-\Gamma + M) < 0.$$

Поскольку  $e^{(-\Gamma + M)t}$  — аналитическая полугруппа, то она непрерывна по норме при  $t > 0$ , а поскольку ее производящий оператор имеет компактную резольвенту, то данная полугруппа компактна при  $t > 0$  (см. теорему 2.4.29 и последующую диаграмму в [12]). Существенный спектр отсутствует при  $t > 0$ , поэтому

$$\omega_0(e^{(-\Gamma + M)t}) = s(-\Gamma + M) < 0,$$

т. е.  $e^{(-\Gamma + M)t}$  равномерно экспоненциально устойчива.  $\square$

## 6. ПРИМЕР: БЕСКОНЕЧНЫЕ МАТРИЦЫ

Рассмотрим пространство последовательностей  $l_1$  с конусом

$$K = \{\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in l_1 : \forall (k \in \mathbb{N}) [x_k \geq 0]\}.$$

Пусть  $\{\gamma_k\}$  — последовательность положительных чисел такая, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = +\infty$ . Тогда согласно [15, теорема 2] следующие операторы корректно определены, область определения  $D(\Gamma)$  плотна в  $l_1$ , и  $\Gamma^{-1}$  компактен:

$$\Gamma : D(\Gamma) \subset l_1 \rightarrow l_1,$$

$$\Gamma x = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_k & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 x_1 \\ \gamma_2 x_2 \\ \vdots \\ \gamma_k x_k \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{-1} x = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma_1} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{\gamma_2} & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\gamma_k} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\gamma_1} \\ \frac{x_2}{\gamma_2} \\ \vdots \\ \frac{x_k}{\gamma_k} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Оператор  $-\Gamma$  порождает сильно непрерывную, устойчивую, положительную в смысле конуса  $K$  полугруппу сжатий

$$e^{-\Gamma t} = \begin{pmatrix} e^{-\gamma_1 t} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & e^{-\gamma_2 t} & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-\gamma_k t} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Пусть  $r > 0, s \neq 0$ , тогда

$$\|R(r + is, -\Gamma)\| = \|(-\Gamma - (r + is)I)\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{-\gamma_1 - r - is} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{-\gamma_2 - r - is} & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{-\gamma_k - r - is} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{|s|} \left\| \begin{pmatrix} \frac{|s|}{\gamma_1 + r + is} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{|s|}{\gamma_2 + r + is} & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{|s|}{\gamma_k + r + is} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \right\| \leq \frac{1}{|s|} \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{|s|}{|\gamma_k + r + is|} \right\} < \frac{1}{|s|},$$

что в силу [12, теорема II.4.6.d] влечет аналитичность полугруппы  $e^{-\Gamma t}$ .

Таким образом, оператор  $\Gamma$  удовлетворяет всем условиям теоремы 5.1 и для любого  $M$  — положительного ограниченного линейного оператора такого, что  $\rho(\Gamma^{-1}M) < 1$ , сильно непрерывная полугруппа  $e^{(-\Gamma+M)t}$  устойчива. Заметим, что

$$\Gamma^{-1}M = \begin{pmatrix} \frac{m_{11}}{\gamma_1} & \frac{m_{12}}{\gamma_1} & \dots & \frac{m_{1q}}{\gamma_1} & \dots \\ \frac{m_{21}}{\gamma_2} & \frac{m_{22}}{\gamma_2} & \dots & \frac{m_{2q}}{\gamma_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{m_{p1}}{\gamma_p} & \frac{m_{p2}}{\gamma_p} & \dots & \frac{m_{pq}}{\gamma_p} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

и для операторной  $l_1$ -нормы верно следующее:

$$\rho(\Gamma^{-1}M) \leq \|\Gamma^{-1}M\| = \sup_{q \in \mathbb{N}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{m_{pq}}{\gamma_p}.$$

Таким образом, используя теорему 5.1, можно получить следующий факт:

**Теорема 6.1.** Для определенного выше оператора  $\Gamma$  и оператора  $M : l_1 \rightarrow l_1$ , определенного как  $M = \{m_{pq}\}_{p,q \in \mathbb{N}}$ ,  $K$ -положительного (т. е.  $m_{pq} \geq 0$ ) и ограниченного (т. е.  $\sup_{q \in \mathbb{N}} \sum_{p \in \mathbb{N}} m_{pq} < +\infty$ ) условие

$$\sup_{q \in \mathbb{N}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{m_{pq}}{\gamma_p} < 1 \quad (6.1)$$

влечет устойчивость полугруппы  $e^{(-\Gamma+M)t}$ .

Заметим, что, используя локализацию собственных значений кругами Гершгорина (для случая бесконечных матриц см., например, [15]), можно получить следующие неравенства в качестве различных достаточных условий устойчивости  $e^{(-\Gamma+M)t}$ :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \frac{\sum_{q \in \mathbb{N}} m_{pq}}{\gamma_p} < 1, \quad (6.2)$$

$$\forall q \in \mathbb{N} \quad \frac{\sum_{p \in \mathbb{N}} m_{pq}}{\gamma_q} < 1. \quad (6.3)$$

Но, к примеру, для матриц

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 20 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 30 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 5 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 5 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

выполнено только (6.1), но не (6.2) и (6.3). Также отметим, что для случая операторов, действующих в пространстве  $l_\infty$ , из теоремы 5.1 аналогичным образом можно получить условие на возмущение, однако в этом случае оно не дает преимуществ по сравнению с методом кругов Гершгорина.

## 7. ПРИМЕР: ВОЗМУЩЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ОПЕРАТОРАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

**7.1. Исходный оператор.** Пусть пространство  $F=C[0,1]$ , а оператор  $L$  задан дифференциальным выражением

$$l(f) = f''$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} f'(0) &= 0, \\ f'(1) &= 0, \end{aligned} \quad (7.1)$$

т. е.

$$L : D(L) = \{f \in C^2[0,1] : f'(0) = f'(1) = 0\} \subset F \rightarrow F,$$

$$L : f \mapsto f''.$$

Оператор  $L$  имеет собственное значение  $\lambda_0 = 0$  с собственными векторами  $f_0(t) \equiv c$  и собственные значения  $\lambda_k = -\pi^2 k^2, k \in \mathbb{N}$  с собственными векторами  $f_k(t) = c \cos \pi k t$ . Этим его спектр исчерпывается.

**7.2. Функция Грина и резольвента.** Найдем резольвенту оператора  $L$  для регулярных  $\lambda$ , т. е. оператор  $(L - \lambda I)^{-1}$ . Для этого построим функцию Грина краевой задачи

$$\begin{cases} f'' - \lambda f = g, \\ U_1(f) := f'(0) = 0, \\ U_2(f) := f'(1) = 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

Нам известна фундаментальная система решений однородного уравнения:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= e^{\sqrt{\lambda}t}, \\ f_2(t) &= e^{-\sqrt{\lambda}t} \end{aligned}$$

и производные ее членов:

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= \sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}t}, \\ f_2'(t) &= -\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}t}. \end{aligned}$$

Построим функцию Грина, следуя доказательству теоремы 1 из [9, I.§3.3]. Известно, что

$$G_\lambda(x, \xi) = \begin{cases} 0 \leq x < \xi \leq 1 : a_1(\xi)f_1(x) + a_2(\xi)f_2(x), \\ 0 \leq \xi < x \leq 1 : b_1(\xi)f_1(x) + b_2(\xi)f_2(x). \end{cases} \quad (7.3)$$

где  $a$  и  $b$  удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} a_1(\xi)f_1(\xi) + a_2(\xi)f_2(\xi) - (b_1(\xi)f_1(\xi) + b_2(\xi)f_2(\xi)) = 0, \\ a_1(\xi)f_1'(\xi) + a_2(\xi)f_2'(\xi) - (b_1(\xi)f_1'(\xi) + b_2(\xi)f_2'(\xi)) = -1. \end{cases}$$

Обозначив

$$\begin{aligned} c_1 &= b_1 - a_1, \\ c_2 &= b_2 - a_2, \end{aligned} \quad (7.4)$$

получим систему:

$$\begin{cases} c_1(\xi)e^{\sqrt{\lambda}\xi} + c_2(\xi)e^{-\sqrt{\lambda}\xi} = 0, \\ c_1(\xi)\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}\xi} - \sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}\xi} = 1. \end{cases}$$

Решаем:

$$W(\xi) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{\lambda}\xi} & e^{-\sqrt{\lambda}\xi} \\ \sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}\xi} & -\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}\xi} \end{vmatrix} = -\sqrt{\lambda}e^{(\sqrt{\lambda}\xi - \sqrt{\lambda}\xi)} - \sqrt{\lambda}e^{(\sqrt{\lambda}\xi - \sqrt{\lambda}\xi)} = -2\sqrt{\lambda},$$

$$W_1(\xi) = \begin{vmatrix} 0 & e^{-\sqrt{\lambda}\xi} \\ 1 & -\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}\xi} \end{vmatrix} = -e^{-\sqrt{\lambda}\xi},$$

$$W_2(\xi) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{\lambda}\xi} & 0 \\ \sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}\xi} & 1 \end{vmatrix} = e^{\sqrt{\lambda}\xi},$$

$$c_1(\xi) = \frac{W_1(\xi)}{W(\xi)} = \frac{-e^{-\sqrt{\lambda}\xi}}{-2\sqrt{\lambda}} = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}},$$

$$c_2(\xi) = \frac{W_2(\xi)}{W(\xi)} = \frac{e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{-2\sqrt{\lambda}} = -\frac{e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}}.$$

Краевые условия дают систему

$$\begin{cases} U_1(G_\lambda) = 0, \\ U_2(G_\lambda) = 0, \end{cases}$$

из которой с учетом (7.3) и (7.4) (см. [9, I.§3.3]) получаем систему

$$\begin{cases} b_1(\xi)\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}\cdot 0} - b_2(\xi)\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}\cdot 0} = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}}\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}\cdot 0} + \frac{e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}}\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}\cdot 0}, \\ b_1(\xi)\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}\cdot 1} - b_2(\xi)\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}\cdot 1} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1(\xi)\sqrt{\lambda} - b_2(\xi)\sqrt{\lambda} = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi}}{2} + \frac{e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2}, \\ b_1(\xi)e^{\sqrt{\lambda}} = b_2(\xi)e^{-\sqrt{\lambda}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}(b_1(\xi) - b_2(\xi)) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2}, \\ b_1(\xi) = b_2(\xi)e^{-2\sqrt{\lambda}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}b_2(\xi)(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2}, \\ b_1(\xi) = b_2(\xi)e^{-2\sqrt{\lambda}}. \end{cases}$$

Заметим, что  $\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1) = 0 \Rightarrow \{-\pi^2 k^2 : k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ . Продолжим:

$$\begin{cases} b_2(\xi) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)}, \\ b_1(\xi) = \frac{(e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi})e^{-2\sqrt{\lambda}}}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)}. \end{cases}$$

Тогда

$$a_1(\xi) = b_1(\xi) - c_1(\xi) = \frac{(e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi})e^{-2\sqrt{\lambda}}}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)} - \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}},$$

$$a_2(\xi) = b_2(\xi) - c_2(\xi) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)} + \frac{e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}}.$$

Итого:

$$G_\lambda(x, \xi) = \begin{cases} 0 \leq x < \xi \leq 1 : G_{1,\lambda}(x, \xi), \\ 0 \leq \xi < x \leq 1 : G_{2,\lambda}(x, \xi); \end{cases}$$

$$G_{1,\lambda}(x, \xi) = \left( \frac{(e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi})e^{-2\sqrt{\lambda}}}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)} - \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}} \right) e^{\sqrt{\lambda}x} + \left( \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)} + \frac{e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}} \right) e^{-\sqrt{\lambda}x},$$

$$G_{2,\lambda}(x, \xi) = \frac{(e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi})e^{-2\sqrt{\lambda}}}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)} e^{\sqrt{\lambda}x} + \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)} e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Упростим:

$$G_{1,\lambda}(x, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)} \left( e^{-\sqrt{\lambda}\xi - 2\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}x} + e^{\sqrt{\lambda}\xi - 2\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}x} - e^{-2\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\xi + \sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}\xi + \sqrt{\lambda}x} + \right.$$

$$\left. + e^{-\sqrt{\lambda}\xi - \sqrt{\lambda}x} + e^{\sqrt{\lambda}\xi - \sqrt{\lambda}x} + e^{-2\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}\xi - \sqrt{\lambda}x} - e^{\sqrt{\lambda}\xi - \sqrt{\lambda}x} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)} \left( e^{\sqrt{\lambda}\xi - 2\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}\xi + \sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}\xi - \sqrt{\lambda}x} + e^{-2\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}\xi - \sqrt{\lambda}x} \right) =$$

$$= \frac{(e^{-2\sqrt{\lambda}} e^{\sqrt{\lambda}\xi} + e^{-\sqrt{\lambda}\xi}) (e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x})}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)}$$

$$G_{2,\lambda}(x, \xi) = \frac{(e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi})(e^{-2\sqrt{\lambda}} e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x})}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)}.$$

Получив функцию Грина, мы можем выписать резольвенту оператора  $L$ :

$$R(\lambda, L)(f) = \int_0^1 G_\lambda(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

где  $f \in C[0, 1]$ .

**7.3. Секториальность оператора.** Покажем теперь, что  $L$  — секториальный оператор (см. [12, П.4.а]). Для этого достаточно, чтобы для некоторого  $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  сектор  $\Sigma_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \theta\} \setminus \{0\}$  состоял из одних только регулярных точек и найдется такое  $M$ , что для всех этих точек

$$\|R(\lambda, L)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}. \quad (7.5)$$

Зафиксируем  $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ . Весь спектр  $L$  лежит на мнимой оси в левой полуплоскости, так что он не лежит в  $\Sigma_\theta$ . Докажем теперь оценку (7.5).

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, L)\| &= \sup_{f \in C[0,1], \|f\|=1} \|R(\lambda, L)f\| = \sup_{f \in C[0,1], \|f\|=1} \max_{x \in [0,1]} \left| \int_0^1 G_\lambda(x, \xi) f(\xi) d\xi \right| \leq \\ &\leq \sup_{f \in C[0,1], \|f\|=1} \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |G_\lambda(x, \xi) f(\xi)| d\xi \leq \sup_{f \in C[0,1], \|f\|=1} \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |G_\lambda(x, \xi)| \max_{y \in [0,1]} |f(y)| d\xi = \\ &= \sup_{f \in C[0,1], \|f\|=1} \max_{x \in [0,1]} \left( \int_0^1 |G_\lambda(x, \xi)| d\xi \|f\| \right) = \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |G_\lambda(x, \xi)| d\xi = \\ &= \max_{x \in [0,1]} \left( \int_0^x |G_{2,\lambda}(x, \xi)| d\xi + \int_x^1 |G_{1,\lambda}(x, \xi)| d\xi \right) = \\ &= \max_{x \in [0,1]} \left( \int_0^x \left| \frac{(e^{-\sqrt{\lambda}\xi} + e^{\sqrt{\lambda}\xi})(e^{-2\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}x}} + e^{-\sqrt{\lambda}x})}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)} \right| d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \int_x^1 \left| \frac{(e^{-2\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}\xi}} + e^{-\sqrt{\lambda}\xi})(e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x})}{2\sqrt{\lambda}(e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1)} \right| d\xi \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2|\sqrt{\lambda}||e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1|} \max_{x \in [0,1]} \left( \left| e^{-2\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}x}} + e^{-\sqrt{\lambda}x} \right| \int_0^x (|e^{-\sqrt{\lambda}\xi}| + |e^{\sqrt{\lambda}\xi}|) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \left| e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x} \right| \int_x^1 (|e^{-\sqrt{\lambda}\xi}| + |e^{-2\sqrt{\lambda}}||e^{\sqrt{\lambda}\xi}|) d\xi \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2|\sqrt{\lambda}||e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1|} \max_{x \in [0,1]} \left( (e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} + e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}) \left( \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} - 1}{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} + \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} - 1}{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} \right) + \right. \\ &+ (e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} + e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}) \left( \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} - e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}}{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} + e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} - e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}}{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} \right) \Big) = \frac{1}{2|\sqrt{\lambda}||e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1|} \times \\ &\times \max_{x \in [0,1]} \left( \frac{1}{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} (e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} - e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} + e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} - e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}) + \right. \\ &\quad + \frac{1}{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} (e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} - e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} + e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} - e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}) + \\ &\quad + \frac{1}{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} (e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} - e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} + e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} - e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}) + \\ &\quad + \frac{1}{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} (e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} - e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} + e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} - \\ &\quad \left. - e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x}) \right) = \frac{1}{2|\sqrt{\lambda}||e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1||\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}|} \max_{x \in [0,1]} \left( -e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} + e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} + \right. \\ &\quad \left. - e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} + e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} + e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} - e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} + 1 - e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} - e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}x} + 1 - \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & -e^{-\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}} e^{-\operatorname{Re} \sqrt{\lambda} x} + e^{-2\operatorname{Re} \sqrt{\lambda} x} + e^{-\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}} e^{\operatorname{Re} \sqrt{\lambda} x} - e^{-2\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}} e^{2\operatorname{Re} \sqrt{\lambda} x} + e^{-\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}} e^{-\operatorname{Re} \sqrt{\lambda} x} - e^{-2\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}} = \\
 & = \frac{|e^{-2\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}} - 1|}{|\sqrt{\lambda}| |\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}| |e^{-2\sqrt{\lambda}} - 1|}. \tag{7.6}
 \end{aligned}$$

Здесь следует сделать два замечания. Во-первых, поскольку  $|\arg \lambda| < \theta < \pi$ , то можно выбирать в качестве  $\sqrt{\lambda}$  тот из корней, который лежит в правой полуплоскости, и без ограничения общности можно считать, что  $0 \leq |\arg \sqrt{\lambda}| < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ . Тогда  $|\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}| = |\sqrt{\lambda}| \cos |\arg \sqrt{\lambda}| > |\sqrt{\lambda}| \cos \frac{\theta}{2}$ .

Во-вторых, для произвольных  $a, b > 0$ ,  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ , будет верно:

$$\begin{aligned}
 & |a(\cos \varphi + i \sin \varphi) - b| = \sqrt{(a \cos \varphi - b)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} = \\
 & = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi - 2a \cos \varphi \cdot b + b^2 + a^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{a^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - 2ab \cos \varphi + b^2} = \\
 & = \sqrt{a^2 - 2ab \cos \varphi + b^2} \geq \sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \sqrt{(a - b)^2} = a - b.
 \end{aligned}$$

В нашем случае  $a = e^{-2\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}}$ ,  $b = 1$ ,  $\varphi = \arg \sqrt{\lambda}$ . Поэтому из (7.6) следует, что

$$R(\lambda, L) \leq \frac{1}{|\lambda| \cos \frac{\theta}{2}}.$$

Мы доказали, что  $L$  — секториальный оператор.

**7.4. Обратимый оператор и полугруппа.** В [12, II.2.12] показано, что оператор  $L$  порождает сильно непрерывную полугруппу на пространстве  $F = C[0, 1]$ , заданную формулой

$$(e^{Lt} f)(s) = \int_0^1 k_t(s, r) f(r) dr,$$

$$k_t(s, r) = 1 + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-\pi^2 n^2 t} \cos(\pi n s) \cos(\pi n r),$$

причем  $k_t$  — положительные функции, определенные на  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Поскольку  $0 \in \sigma(L)$ , то оператор  $L$  необратим. Построим масштабированную полугруппу, выбрав число  $a \in (0, \infty)$  и обозначив

$$\Gamma = -L + aI.$$

Тогда согласно [12, II.2.2]

$$\begin{aligned}
 \sigma(-\Gamma) &= \sigma(L - aI) = \{-\pi^2 k^2 - a : k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}, \\
 e^{-\Gamma} &= e^{-at} e^{Lt}. \tag{7.7}
 \end{aligned}$$

Поскольку  $L$  является секториальным оператором, он порождает аналитическую полугруппу [12, Theorem II.4.6], а значит и  $-\Gamma = L - aI$  порождает аналитическую полугруппу, так как  $-aI$  — ограниченный оператор (см. [12, Proposition III.1.12]). Так как

$$R(\lambda, \Gamma) = (\Gamma - \lambda I)^{-1} = (-(-\Gamma - (-\lambda)I))^{-1} = -(-\Gamma - (-\lambda)I)^{-1} = -R(-\Gamma, -\lambda),$$

то

$$\sigma(\Gamma) = -\sigma(-\Gamma) = \{\pi^2 k^2 + a : k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$$

при тех же собственных подпространствах, отвечающих соответствующим собственным значениям.

Как можно видеть,  $0$  является регулярной точкой оператора  $\Gamma$ , поэтому он обратим. Согласно [3, теорема 6.15, III.6.3] имеем расширенный спектр (который может отличаться от спектра оператора только точками  $0$  и  $\infty$ ):

$$\tilde{\sigma}(\Gamma^{-1}) = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{\pi^2 k^2 + a} : k \in \{0\} \cup \mathbb{N} \right\},$$

и получаем спектральный радиус

$$\sigma(\Gamma^{-1}) \ni \frac{1}{a} = \rho(\Gamma^{-1}).$$

Заметим, что

$$(\Gamma^{-1}f)(x) = ((-L + aI)^{-1}f)(x) = ((-(L - aI))^{-1}f)(x) = -(L - aI)^{-1}f(x) = -\int_0^1 G_a(x, \xi)f(\xi)d\xi. \quad (7.8)$$

Как показано в [4, IV.§6.1.4], в этом случае оператор  $\Gamma^{-1}$  компактен, а значит, компактна и резольвента  $\Gamma$  и  $-\Gamma$ . Поскольку полугруппа  $e^{-\Gamma t}$  аналитична, то она непрерывна по норме при  $t > 0$ , и благодаря компактности резольвенты генератора мы имеем компактность полугруппы (см. [12, Theorem II.4.29]). Значит, у нее отсутствует существенный спектр и  $\omega_0(e^{-\Gamma t}) = s(-\Gamma) = \sup \operatorname{Re} \sigma(-\Gamma) = -a < 0$ , т. е. полугруппа устойчива.

Рассмотрим конус

$$K = \{f \in C[0, 1] : \forall(x \in [0, 1])[f(x) \geq 0]\}.$$

Если рассматривать операторы только над вещественнозначными функциями, мы получаем, что полугруппа  $e^{-\Gamma t}$  положительна в смысле  $K$  благодаря положительности ядер  $k_t$  (что дает положительность  $e^{Lt}$ ) и соотношению (7.7).

**7.5. Примеры возмущений с запаздыванием.** Таким образом, для оператора  $-\Gamma$  выполнены все условия теоремы 5.1. В качестве ее следствия мы можем сформулировать следующую теорему:

**Теорема 7.1.** Пусть  $M : F \rightarrow F$  — ограниченный линейный оператор, положительный относительно конуса  $K$  и такой, что  $\rho(\Gamma^{-1}M) < 1$ . Тогда полугруппа  $e^{(-\Gamma+M)t}$  равномерно экспоненциально устойчива.

**Пример 7.1.** Зафиксируем  $0 < p < 1$ . Рассмотрим функцию  $q_1 \in K$  и оператор

$$(M_1f)(t) = \begin{cases} t \in [0, p] : q_1(t)f(0), \\ t \in [p, 1] : q_1(t)f(t-p). \end{cases}$$

$M_1$  положителен и ограничен. Выясним, когда полугруппа  $e^{(-\Gamma+M_1)t}$  равномерно экспоненциально устойчива.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \rho(\Gamma^{-1}M_1) &\leq \|\Gamma^{-1}M_1\| = \sup_{f \in C[0,1], \|f\|=1} \max_{x \in [0,1]} |(\Gamma^{-1}M_1f)(x)| = \\ &= \sup_{f \in C[0,1], \|f\|=1} \max_{x \in [0,1]} \left| -\int_0^1 G_a(x, \xi)M_1f(\xi)d\xi \right| \leq \\ &\leq \sup_{f \in C[0,1], \|f\|=1} \max_{x \in [0,1]} \left( \int_0^p |G_a(x, \xi)| |q_1(\xi)| |f(0)| d\xi + \int_p^1 |G_a(x, \xi)| |q_1(\xi)| |f(\xi-p)| d\xi \right) \leq \\ &\leq \sup_{f \in C[0,1], \|f\|=1} \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |G_a(x, \xi)| |q_1(\xi)| d\xi \|f\| = \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |G_a(x, \xi)| |q_1(\xi)| d\xi. \end{aligned}$$

Таким образом,  $e^{(-\Gamma+M_1)t}$  устойчива, если

$$\max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |G_a(x, \xi)| |q_1(\xi)| d\xi < 1.$$

Если для всех  $x \in [1-p, 1]$

$$\left[ \int_0^p |G_a(x, \xi)| |q_1(\xi)| d\xi \int_p^1 |G_a(x, \xi)| |q_1(\xi)| d\xi \neq 0 \right], \quad (7.9)$$

то мы можем несколько улучшить оценку.

Выберем непрерывную на  $[0, 1]$  функцию  $\nu(t) : \forall(t \in [0, 1])[\nu(t) \neq 0]$ . Введем норму на  $C[0, 1]$ :

$$\|x\|_\nu = \|\nu x\|.$$

Она эквивалентна стандартной:

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \frac{\nu}{\nu} x \right\| = \max_{t \in [0, 1]} \left| \frac{\nu(t)}{\nu(t)} x(t) \right| \leq \max_{t \in [0, 1]} \left| \frac{1}{\nu(t)} \right| \max_{t \in [0, 1]} |\nu(t)x(t)| = \left\| \frac{1}{\nu} \right\| \|x\|_\nu, \\ \|x\|_\nu &= \|x\nu\| = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)\nu(t)| \leq \max_{t \in [0, 1]} |x(t)| \max_{t \in [0, 1]} |\nu(t)| = \|x\| \|\nu\|. \end{aligned}$$

Тогда, подобно случаю со стандартной нормой,

$$\begin{aligned} \rho(\Gamma^{-1}M_1) &\leq \|\Gamma^{-1}M_1\|_\nu = \sup_{f \in C[0, 1], \|f\|_\nu=1} \max_{x \in [0, 1]} \left| - \int_0^1 G_a(x, \xi) M_1 f(\xi) d\xi \nu(x) \right| \leq \\ &\leq \sup_{f \in C[0, 1], \|f\|_\nu=1} \max_{x \in [0, 1]} \left( \int_0^p |G_a(x, \xi)| q_1(\xi) \left| f(0) \frac{\nu(0)}{\nu(0)} \right| d\xi |\nu(x)| + \right. \\ &\quad \left. + \int_p^1 |G_a(x, \xi)| q_1(\xi) \left| f(\xi - p) \frac{\nu(\xi - p)}{\nu(\xi - p)} \right| d\xi |\nu(x)| \right) \leq \\ &\leq \sup_{f \in C[0, 1], \|f\|_\nu=1} \max_{x \in [0, 1]} \left( \int_0^p |G_a(x, \xi)| q_1(\xi) d\xi \|f\|_\nu \left| \frac{\nu(x)}{\nu(0)} \right| + \right. \\ &\quad \left. + \int_p^1 |G_a(x, \xi)| q_1(\xi) d\xi \|f\|_\nu \max_{\xi \in [p, 1]} \left| \frac{\nu(x)}{\nu(\xi - p)} \right| \right) = \\ &= \max_{x \in [0, 1]} \left( \int_0^p |G_a(x, \xi)| q_1(\xi) d\xi \left| \frac{\nu(x)}{\nu(0)} \right| + \int_p^1 |G_a(x, \xi)| q_1(\xi) d\xi \max_{\xi \in [p, 1]} \left| \frac{\nu(x)}{\nu(\xi - p)} \right| \right). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Выберем  $\nu(x)$  следующим образом:

$$\nu(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1 - p, \\ \min \left( 1, \frac{\int_0^p |G_a(1-p, \xi)| q_1(\xi) d\xi}{\int_0^p |G_a(x, \xi)| q_1(\xi) d\xi} \right) \min \left( 1, \frac{\int_0^1 |G_a(1-p, \xi)| q_1(\xi) d\xi}{\int_p^1 |G_a(x, \xi)| q_1(\xi) d\xi} \right), & 1 - p < x. \end{cases}$$

Функция  $\nu(x)$  определена, непрерывна и положительна на  $[0, 1]$  благодаря (7.9). Далее для  $x > 1 - p$

$$\begin{aligned} &\int_0^p |G_a(x, \xi)| q_1(\xi) d\xi \left| \frac{\nu(x)}{\nu(0)} \right| + \int_p^1 |G_a(x, \xi)| q_1(\xi) d\xi \max_{\xi \in [p, 1]} \left| \frac{\nu(x)}{\nu(\xi - p)} \right| \leq \\ &\leq \int_0^p |G_a(1 - p, \xi)| q_1(\xi) d\xi \nu(1 - p) + \int_p^1 |G_a(1 - p, \xi)| q_1(\xi) d\xi \nu(1 - p). \end{aligned}$$

Значит, максимум по  $x$  в (7.10) достигается при  $x \in [0, 1 - p]$ , и при выполненном (7.9) условием устойчивости будет неравенство

$$\max_{x \in [0, 1-p]} \int_0^1 |G_a(x, \xi)| q_1(\xi) d\xi < 1.$$

**Пример 7.2.** Пусть  $q_2 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  — непрерывная функция такая, что  $\forall x, s \in [0, 1] q_2(x, s) \geq 0$ . Рассмотрим оператор

$$(M_2 f)(s) = \int_0^p q_2(t, s) f(0) ds + \int_p^1 q_2(t, s) f(s-p) ds.$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} \rho(\Gamma^{-1} M_1) &\leq \sup_{f \in C[0,1], \|f\|=1} \max_{x \in [0,1]} \left| - \int_0^1 G_a(x, \xi) \left( \int_0^p q_2(\xi, s) f(0) ds + \int_p^1 q_2(\xi, s) f(s-p) ds \right) d\xi \right| \leq \\ &\leq \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |G_a(x, \xi)| \int_0^1 q_2(\xi, s) ds d\xi \end{aligned}$$

имеем условие устойчивости полугруппы  $e^{(-\Gamma + M_2)t}$ :

$$\max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |G_a(x, \xi)| \int_0^1 q_2(\xi, s) ds d\xi < 1.$$

Аналогично примеру 7.1, если для всех  $x \in [1-p, 1]$

$$\int_0^1 \int_0^p |G_a(x, \xi)| q_2(\xi, s) ds d\xi \int_0^1 \int_p^1 |G_a(x, \xi)| q_2(\xi, s) ds d\xi \neq 0,$$

то верна оценка

$$\begin{aligned} \rho(\Gamma^{-1} M_2) &\leq \|\Gamma^{-1} M_2\|_\nu \leq \\ &\leq \max_{x \in [0,1]} \left( \int_0^1 \int_0^p |G_a(x, \xi)| q_2(\xi, s) ds d\xi \left| \frac{\nu(x)}{\nu(0)} \right| + \int_0^1 \int_p^1 |G_a(x, \xi)| q_2(\xi, s) ds d\xi \max_{s \in [p,1]} \left| \frac{\nu(x)}{\nu(s-p)} \right| \right) \end{aligned}$$

и, выбрав

$$\nu(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1-p, \\ \min \left( 1, \frac{\int_0^p \int_0^p |G_a(1-p, \xi)| q_2(\xi, s) ds d\xi}{\int_0^p \int_0^p |G_a(x, \xi)| q_2(\xi, s) ds d\xi} \right) \min \left( 1, \frac{\int_0^p \int_p^1 |G_a(1-p, \xi)| q_2(\xi, s) ds d\xi}{\int_0^p \int_p^1 |G_a(x, \xi)| q_2(\xi, s) ds d\xi} \right), & 1-p < x, \end{cases}$$

получаем улучшенное условие устойчивости

$$\max_{x \in [0, 1-p]} \int_0^1 |G_a(x, \xi)| \int_0^1 q_2(\xi, s) ds d\xi < 1.$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Далецкий Ю. Л., Крейн С. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.
3. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. — М.: Физматлит, 2004.
5. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. — М.: ГИФМЛ, 1962.
6. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.
7. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971.
8. Крейн М. Г., Рутман М. А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Усп. мат. наук. — 1948. — 3, вып. 1 (23). — С. 3–95.
9. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. 2-е изд. — М.: Наука, 1969.

10. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Иностранная литература, 1962.
11. Cooke R. Infinite matrices and sequence spaces. — London: McMillan and Co. Ltd., 1950.
12. Engel K.-J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. — New York: Springer, 2000.
13. Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. — New York: Springer, 1983.
14. Shivakumar P. N., Sivakumar K. C. A review of infinite matrices and their applications// Linear Algebra Appl. — 2009. — 430. — С. 976–998.
15. Shivakumar P. N., Williams J. J., Rudraiah N. Eigenvalues for infinite matrices// Linear Algebra Appl. — 1987. — 96. — С. 35–63.

М. И. Каменский  
Воронежский государственный университет  
E-mail: mikhailkamenski@mail.ru

И. М. Гудошников  
Воронежский государственный университет  
E-mail: gudoshnikov@yandex.ru

UDC 517.9

## On Stability of Perturbed Semigroups in Partially Ordered Banach Spaces

© 2016 M. I. Kamenskii, I. M. Gudoshnikov

**Abstract.** We prove necessary and sufficient conditions for stability of perturbed semigroups of linear operators in Banach spaces with cones and consider some examples of using these conditions. In particular, we consider an example where the boundary-value problem is perturbed by a linear operator with delayed argument and establish conditions of stability for such a perturbed semigroup.

### REFERENCES

1. Yu. L. Daletskij and S. G. Krejn, *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
2. L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
3. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (in Russian).
4. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza. 7-e izd.* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. 7th ed.], Fizmatlit, Moscow, 2004 (in Russian).
5. M. A. Krasnosel'skij, *Polozhitel'nye resheniya operatornykh uravneniy* [Positive Solutions of Operator Equations], GIFML, Moscow, 1962 (in Russian).
6. M. A. Krasnosel'skij, P. P. Zabreyko, E. I. Pustyl'nik, and P. E. Sobolevskij, *Integral'nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsiy* [Integral Operators in Spaces of Summable Functions], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
7. S. G. Krejn, *Lineynye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
8. M. G. Krejn and M. A. Rutman, "Lineynye operatory, ostavlyayushchie invariantnym konus v prostranstve Banakha" [Linear operators preserving an invariant cone in a Banach space], *Usp. mat. nauk.* [Progr. Math. Sci.], 1948, **3**, No. 1 (23), 3–95 (in Russian).
9. M. A. Naymark, *Lineynye differentsial'nye operatory. 2-e izd.* [Linear Differential Operators], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).

10. E. Hille and R. Phillips, *Funktsional'nyy analiz i polugruppy* [Functional Analysis and Semigroups], Inostrannaya literatura, Moscow, 1962 (in Russian).
11. R. Cooke, *Infinite Matrices and Sequence Spaces*, McMillan and Co. Ltd., London, 1950.
12. K.-J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer, New York, 2000.
13. A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, New York, 1983.
14. P.N. Shivakumar and K.C. Sivakumar, "A review of infinite matrices and their applications," *Linear Algebra Appl.*, 2009, **430**, 976–998.
15. P.N. Shivakumar, J.J. Williams, and N. Rudraiah, "Eigenvalues for infinite matrices," *Linear Algebra Appl.*, 1987, **96**, 35–63.

M. I. Kamenskii  
Voronezh State University, Voronezh, Russia  
E-mail: [mikhailkamenski@mail.ru](mailto:mikhailkamenski@mail.ru)

I. M. Gudoshnikov  
Voronezh State University, Voronezh, Russia  
E-mail: [gudoshnikov@yandex.ru](mailto:gudoshnikov@yandex.ru)

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕННЫМ ЗАВИСЯЩИМ ОТ НЕИЗВЕСТНОГО ОПЕРАТОРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ

© 2016 г.    **Б. В. ЛОГИНОВ, Ю. Б. РУСАК, Л. Р. КИМ-ТЯН**

Аннотация. Развита теория обобщенных жордановых цепочек многопараметрических оператор-функций  $A(\lambda) : E_1 \rightarrow E_2$ ,  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\dim \Lambda = k$ ,  $\dim E_1 = \dim E_2 = n$ , где  $A_0 = A(0)$  — необратимый оператор. Для упрощения изложения в разделах 1–3 геометрическая кратность  $\lambda_0$  равна единице, т. е.  $\dim N(A_0) = 1$ ,  $N(A_0) = \text{span}\{\varphi\}$ ,  $\dim N^*(A_0^*) = 1$ ,  $N^*(A_0^*) = \text{span}\{\psi\}$  и оператор-функция  $A(\lambda)$  предполагается линейной по  $\lambda$ . Для полиномиальной зависимости  $A(\lambda)$  в разделе 4 выполнена линеаризация. Однако результаты теорем существования бифуркации получены при наличии нескольких жордановых цепочек.

Даны приложения к вырожденным дифференциальным уравнениям вида  $[A_0 + R(\cdot, x)]x' = Bx$ .

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	119
2. Жордановы цепочки многопараметрической оператор-функции . . . . .	120
3. Жордановы цепочки по направлениям . . . . .	123
4. Жордановы цепочки полиномиальных оператор-функций. Линеаризация . . . . .	125
5. Вырожденные дифференциальные уравнения . . . . .	132
6. Особые точки вырожденных систем дифференциальных уравнений . . . . .	138
7. Заключение . . . . .	144
Список литературы . . . . .	145

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются дифференциальные уравнения (ДУ) вида

$$A(x)x' = G(x). \tag{1.1}$$

Если не оговорено противоположное  $A(x), G(\cdot) : E_1 \rightarrow E_2$ ,  $\dim E_1 = \dim E_2 = n$ ,  $A(0) = A_0$  — вырожденный оператор  $\dim \text{Ker } A_0 = \dim \text{Ker } A_0^* = 1$ ;  $\text{Ker } A_0 = N(A_0) = \text{span}\{\varphi\}$ ;  $\text{Ker } A_0^* = N(A_0^*) = \text{span}\{\psi\}$ . Оператор  $G(x)$  — достаточно гладкий,  $G(0) = 0$ ;  $G(x) = Bx - H(x)$ ,  $H(0) = 0$ ;  $H'(0) = 0$ . Прежде всего следует выяснить, при каких условиях оператор  $A(x)$  будет невырожденным в проколотовой окрестности точки  $x = 0$  или вырожденным в некотором подмногообразии окрестности точки  $x = 0$ . В этом направлении при использовании результатов [2] в разделах 2 и 3 предложена теория *обобщенных жордановых цепочек* (ОЖЦ) с приложениями к ДУ вида (1.1). В определении жордановых цепочек будет исследован более общий случай линейной оператор-функции по параметру  $\lambda$ , принадлежащему  $k$ -мерному линейному пространству, отличному от  $E_1$ :

$$A(\lambda) = A_0 + DA(0)\lambda : E_1 \rightarrow E_2, \lambda \in \Lambda, \dim \Lambda = k, \tag{1.2}$$

Полиномиальные оператор-функции  $A(\lambda)$  рассматриваются с помощью процесса линеаризации. В примерах разделов 2 и 3 иногда  $\Lambda = E_1$ . Часть полученных результатов была доложена на 9-м Международном Конгрессе ISAAC в Кракове в августе 2013 г. [21] и на Международной Конференции DIFF-2014 в Суздале, август 2014 г. [9].

Уравнение вида (1.1) возникает при математическом моделировании динамики и устойчивости деформируемых элементов конструкций при их трансзвуковом обтекании потоком газа [24].

Данная работа выполнена в рамках государственного задания № 2014/232 Минобрнауки России, тема НИР: «Разработка математических методов исследования динамики и устойчивости деформируемых элементов конструкций, установок, приборов, устройств при аэрогидродинамическом, тепловом и ударных воздействиях».

## 2. ЖОРДАНОВЫ ЦЕПОЧКИ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ

Пусть оператор  $A(\lambda)$  линеен по  $\lambda$ , т. е.  $A(\lambda) = A_0 + DA(0)\lambda$ , где  $DA(0)$  отображает некоторую окрестность  $\lambda = 0$  в пространство квадратных матриц порядка  $n$ . Излагаемые далее построения определяют жордановы цепочки оператор-функции (1.2) и сопряженной к ней. Исходным положением развиваемой далее теории является следующее

**Утверждение.** *Для того чтобы отображение (1.2) было необратимым в некоторой окрестности точки  $\lambda = 0$ , необходимо и достаточно существование функции  $h(\lambda) : U(0) \rightarrow E_1$ , определенной в некоторой окрестности  $\lambda = 0$  или на некотором ее подмногообразии, такой, что  $[A_0 + DA(0)]h(\lambda) = 0$ .*

Считая функцию  $h(\lambda)$  достаточно гладкой, разложим ее в ряд Тейлора  $h(\lambda) = \varphi + Dh(0)\lambda + D^2h(0)\lambda^2 + \dots + D^s h(0)\lambda^s + \dots$ . Здесь  $D^s h(0)$  —  $s$ -линейный, симметричный оператор или линейный оператор, действующий из  $\Lambda \otimes \dots \otimes \Lambda = \otimes_s \Lambda$  в  $E_1$ . Получаем разложение

$$0 = A_0\varphi + [A_0Dh(0)\lambda + (DA(0)\lambda)(\varphi)] + \dots + [A_0D^s h(0)\lambda^s + (DA(0)\lambda)(D^{s-1}h(0)\lambda^{s-1})] + \dots$$

Здесь  $DA(0)$  можно рассматривать как билинейный оператор от двух переменных и так как его вторая переменная имеет постоянное значение  $\varphi$ , он представляет собой некоторый известный оператор  $B_1$ , действующий на  $\lambda$ , т. е.  $A_0Dh(0)\lambda + (DA(0)\lambda)(\varphi) = [A_0Dh(0) + B_1]\lambda$ . Таким образом, так как  $Dh(0) \in L\{\Lambda \rightarrow E_1\}$ , оператор  $A_0$  порождает оператор  $B_1 : L\{\Lambda \rightarrow E_1\} \rightarrow L\{\Lambda \rightarrow E_2\}$  согласно правилу: если  $S \in L\{\Lambda \rightarrow E_1\}$ , то  $B_1S = -A_0S$ . Для того чтобы  $S \in \text{Ker } B_1$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\text{Im } S = \{\varphi\}$  и так как  $\dim \Lambda = k$ , то существует ровно  $k$  линейно независимых операторов  $S$  таких, что  $\text{Im } S = \{\varphi\}$ , т. е.  $\dim \text{Ker } B_1 = k$ .

Пусть векторы  $\xi_1, \dots, \xi_k$  (соответственно  $\xi_1^*, \dots, \xi_k^*$ ) образуют базис пространства  $\Lambda$  (биортогональный ему базис  $\Lambda^*$ ). Тогда, поскольку  $L\{\Lambda \rightarrow E_1\}$  изоморфно пространству  $\Lambda^* \otimes E_1$ :  $L\{\Lambda \rightarrow E_1\} \approx \Lambda^* \otimes E_1$ , базис  $\text{Ker } B_1$  составляют операторы  $\Phi_i = \xi_i^* \otimes \varphi$ , такие что  $B\Phi_i = -A_0\Phi_i = -\xi_i^* \otimes A_0\varphi = 0$  или  $\Phi_i \xi_s = \delta_{is}\varphi$ . Из равенства  $\dim L\{\Lambda \rightarrow E_1\} = \dim L\{\Lambda \rightarrow E_2\}$  следует, что  $\dim \text{coKer } B_1 = \dim N(B_1^*) = k$ , и так как  $L\{\Lambda \rightarrow E_1\} \approx \Lambda^* \otimes E_1$ , то  $L\{\Lambda \rightarrow E_2\}^* \approx \Lambda \otimes E_2^*$  и операторы  $\Psi_i = \xi_i \otimes \psi$  в пространстве  $L\{\Lambda \rightarrow E_2\}^*$  образуют базис  $\text{Ker } B_1^*$ .

Таким образом, для разрешимости уравнения  $A_0Dh(0) = -B_1$  необходимо и достаточно выполнение равенства  $\langle\langle B_1S, \Psi_i \rangle\rangle = -\langle\langle A_0S, \Psi_i \rangle\rangle = -\sum_{j=1}^s a_{j1} \langle\langle \xi_{j1}^* \otimes A_0e_j, \xi_i \otimes \psi \rangle\rangle = 0$ . Здесь  $\{e_j\}$  (соответственно  $\{u_j\}$ ) — базис в  $E_1(E_2)$  и действие функционалов из пространств  $\Lambda^*$ ,  $E_1^*$  и  $E_2^*$  на элементах пространств  $\Lambda$ ,  $E_1$  и  $E_2$  обозначено  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , а через  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  — действие функционалов из пространств  $L\{\otimes_s \Lambda \rightarrow E_1\}^*$  и  $L\{\otimes_s \Lambda \rightarrow E_2\}^*$  на элементы пространств  $L\{\otimes_s \Lambda \rightarrow E_1\}$  и  $L\{\otimes_s \Lambda \rightarrow E_2\}$ . Оператор  $Dh(0)$  определяется с точностью до линейной комбинации операторов  $\Phi_i$ .

Предположим теперь по индукции, что оператор  $D^{s-1}h(0)$  определен, и рассмотрим уравнение

$$A_0D^s h(0)\lambda^s + (DA(0)\lambda)(D^{s-1}h(0)\lambda^{s-1}) = [A_0D^s h(0) + B_s]\lambda^s = 0. \quad (2.1)$$

Оператор  $A_0$  порождает оператор  $B_s$ , действующий из пространства  $L\{\otimes_s \Lambda \rightarrow E_1\}$  в пространство  $L\{\otimes_s \Lambda \rightarrow E_2\}$  по правилу: если  $S \in \{\otimes_s \Lambda \rightarrow E_1\}$ , то  $B_sS = -A_0S$ . Так как пространство  $L\{\otimes_s \Lambda \rightarrow E_1\} \approx \otimes_s \Lambda^* \otimes E_1$  (представляется его элементами), то  $\dim \text{Ker } B_s = k^s$  и базис в  $\text{Ker } B_s$  составляют операторы  $\Phi_{i_1 \dots i_s} = \{\xi_{i_1}^* \otimes \dots \otimes \xi_{i_s}^* \otimes \varphi, i_1, \dots, i_s = \overline{1, k}, B_s\Phi_{i_1 \dots i_s} = -A_0\Phi_{i_1 \dots i_s} = -\xi_{i_1}^* \otimes \dots \otimes \xi_{i_s}^* \otimes A_0\varphi$ . Аналогично определяется базис в  $\text{coKer } B_s \subset [L\{\otimes_s \Lambda \rightarrow E_2\}]^* \approx \otimes_s \Lambda \otimes E_2^*$  как линейно независимые элементы  $\Psi_{j_1 \dots j_s} = \xi_{j_1} \otimes \dots \otimes \xi_{j_s} \otimes \psi, j_1, j_2, \dots, j_s = \overline{1, k}$  и  $\dim \text{coKer } B_s = k^s$ . Действительно, так как  $S \in L\{\otimes_s \Lambda \rightarrow E_1\} \approx \otimes_s \Lambda^* \otimes E_1$ , то оператор  $S$  представляется в виде



$S = \sum a_{j_1 \dots j_s} \bigotimes_{k=1}^s \xi_{j_k}^* \otimes e_j$  и поэтому  $B_s S = - \sum a_{j_1 \dots j_s} \bigotimes_{k=1}^s \xi_{j_k}^* \otimes A_0 e_j$ . Поскольку  $\langle \langle B_s S, \Psi_{i_1 \dots i_s} \rangle \rangle = - \sum a_{j_1 \dots j_s} \left\langle \bigotimes_{k=1}^s \xi_{j_k}^* \otimes A_0 e_j, \bigotimes_{i=1}^s \xi_i \otimes \psi \right\rangle = - \sum a_{j_1 \dots j_s} \langle \xi_{j_1}^*, \xi_{j_1} \rangle \dots \langle A_0 e_j, \psi \rangle = 0$ , то  $\Psi_{j_1 \dots j_s}$  образуют базис  $\text{coKer } B_s$ . Таким образом, для разрешимости уравнения (2.1) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\langle \langle B_s, \Psi_{i_1 \dots i_s} \rangle \rangle = 0, \quad i_1, \dots, i_s = \overline{1, k}. \quad (2.2)$$

**Определение 2.1.** Элементы  $\varphi, Dh(0), D^2h(0), \dots, D^p h(0)$ , до тех пор пока они определяются, образуют жорданову цепочку (ЖЦ) элемента  $\varphi$  оператор-функции  $A_0 + DA(0)\lambda$ .

**Лемма 2.1.** Для того чтобы оператор-функция  $A_0 + DA(0)\lambda$  была необратима всюду в окрестности точки  $\lambda = 0$ , необходимо и достаточно существование жордановой цепочки бесконечной длины.

*Доказательство. Достаточность.* Пусть существует цепочка бесконечной длины. Для упрощения рассуждений введем на каждом шаге регуляризаторы Шмидта [2]. Тогда в принятых в [2] обозначениях оператор  $\tilde{A}_0 = A_0 + \langle \cdot, e_1^* \rangle u_1$ , где  $\{e_j^*\}_1^n$  — биортогональная система к  $\{e_i\}_1^n, e_1 = \varphi$  и  $u_1$  — базисный элемент дополнения к  $\text{Im } A(0)$  в  $E_2$ , непрерывно обратим и  $\tilde{A}_0^{-1} = \Gamma$ . Аналогично  $\tilde{B}_1 = B_1 + \sum_{i=1}^k \langle \cdot, \xi_i \otimes e_1^* \rangle \xi_i^* \otimes u_1$  и  $\tilde{B}_1^{-1} = \Gamma_1$ . Для  $L\{\Lambda \rightarrow E_1\} \ni S = \sum_m a_{lm} \xi_m^* \otimes e_l$  имеем  $\tilde{B}_1 S = B_1 S + \sum_{i=1}^k \langle \sum_m a_{lm} \xi_m^* \otimes e_l, \xi_i \otimes e_1^* \rangle \xi_i^* \otimes u_1 = B_1 S + \sum_{i=1}^k a_{1i} \xi_i^* \otimes u_1$ , и так как  $\langle S \lambda, e_1^* \rangle = \langle \sum_m a_{l,m} \lambda_m e_l, e_1^* \rangle = \sum_m a_{1m} \lambda_m = \sum_m a_{1m} \xi_m^*(\lambda)$  то  $\tilde{B}_1 S = A_0 S + \langle S, e_1^* \rangle u_1 = \tilde{A}_0 S$ . Отсюда следует соотношение  $\Gamma_1 T = \tilde{A}_0 \Gamma T = T$  для  $T \in L\{\Lambda_1 \rightarrow E_2\}$ , для доказательства которого достаточно положить  $S = \Gamma T : \tilde{B}_1 \Gamma T = \tilde{A}_0 \Gamma T = T$  или, обращая оператор  $\tilde{B}_1 \Rightarrow \Gamma T = \Gamma_1 T$ . Аналогично доказывается, что если  $B_s : L\{\otimes_s \Lambda \rightarrow E_1\} \rightarrow L\{\otimes_s \Lambda \rightarrow E_2\}$ , то  $\tilde{B}_s S = \tilde{A}_0 S$  для  $S \in L\{\otimes_s \Lambda \rightarrow E_1\}$ . Действительно,  $\tilde{B}_s S = B_s S + \sum \langle S, \xi_{j_1} \otimes \dots \otimes \xi_{j_s} \otimes e_1^* \rangle \xi_{j_1}^* \otimes \dots \otimes \xi_{j_s}^* \otimes u_1$  при  $S = \sum a_{i_1 \dots i_s, i} \xi_{i_1}^* \otimes \dots \otimes \xi_{i_s}^* \otimes e_i$  дает  $\Rightarrow \tilde{B}_s S = A_s S + \sum \langle \sum a_{i_1 \dots i_s, i} \xi_{i_1}^* \otimes \dots \otimes \xi_{i_s}^* \otimes e_i, \xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_s} \otimes e_1^* \rangle \xi_{i_1}^* \otimes \dots \otimes \xi_{i_s}^* \otimes u_1 = A_0 S + \sum a_{i_1 \dots i_s, i} \xi_{i_1}^* \otimes \dots \otimes \xi_{i_s}^* \otimes u_1 = A_0 S + \langle S, e_1^* \rangle u_1 = \tilde{A}_0 S$ , так как  $\langle S \lambda, e_1^* \rangle = \langle \sum a_{i_1 \dots i_s, i} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_s} e_i, e_1^* \rangle = \sum a_{i_1 \dots i_s, 1} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_s} = \sum a_{i_1 \dots i_s, 1} e_{i_1}^*(\lambda) \otimes \dots \otimes e_{i_s}^*(\lambda)$ . Если теперь  $\Gamma_k = (\tilde{B}_k)^{-1}$ , то полагая  $S = \Gamma T$ , как и выше, находим  $\tilde{B}_s \Gamma T = \tilde{A}_0 \Gamma T = T$  или, обращая  $\tilde{B}_s, \Gamma T = \Gamma_k T, k = 1, 2, \dots, s, \dots$ , откуда следуют неравенства  $\|\Gamma_k\| \leq \|\Gamma\| \forall k$ .

Аналогичным образом свяжем с билинейным оператором  $DA(0)\lambda = R(\cdot, \lambda) \in L\{E_1 \rightarrow E_2\}$  оператор  $D_s$ , действующий из  $L\{\otimes_{s-1} \Lambda \rightarrow E_1\}$  в  $L\{\otimes_{s-1} \Lambda \rightarrow E_1\}$  по правилу  $D_s S \lambda = R(S \lambda, \lambda)$ , для  $S \in L\{\otimes_s \Lambda \rightarrow E_1\}$ , отметив, что  $D_0 : E_1 \rightarrow L\{\Lambda \rightarrow E_2\}$ . При этом, очевидно,  $\|D_s\| \leq \|R\|, \forall s$ . Используя введенные обозначения, приходим к следующим формулам для элементов жордановой цепочки:

$$J^s = (\Gamma_s D_{s-1}) \dots (\Gamma_1 D_0) \varphi, \quad s = 1, 2, \dots, J^1 = \varphi. \quad (2.3)$$

Оценка  $\|J^s\| \leq (\|R\| \|\Gamma\|)^s \|\varphi\|$  дает сходимость ряда  $h(\lambda)$  в некоторой окрестности  $\lambda = 0$ , в которой оператор-функция  $A_0 + DA(0)\lambda$  не будет обратима.

*Необходимость.* Пусть в некоторой окрестности  $\lambda = 0$  оператор-функция  $A(\lambda)$  необратима, т. е. существует функция  $X(\lambda) : D_\varepsilon(0) \rightarrow E_1$ , такая что

$$A(\lambda)X(\lambda) = 0, \quad X(\lambda) \neq 0, \quad (2.4)$$

где можно считать  $\|X(\lambda)\| = 1$  в силу линейности уравнения (2.4), или  $A_0 X(\lambda) + R(X(\lambda), \lambda) = 0$ . Вводя регуляризатор Шмидта и учитывая, что  $\Gamma u_1 = e_1$ , получаем цепочку импликаций  $\tilde{A}_0 X(\lambda) + R(X(\lambda), \lambda) = \langle X(\lambda), e_1^* \rangle u_1 \Rightarrow [I + \Gamma R(\cdot, \lambda)] X(\lambda) = \langle X(\lambda), e_1^* \rangle e_1 \Rightarrow X(\lambda) = \langle X(\lambda), e_1^* \rangle (I + \Gamma R(\cdot, \lambda))^{-1} e_1$ , или, применяя к обеим частям последнего равенства функционал  $e_1^*$  и учитывая, что  $\langle X(\lambda), e_1^* \rangle \neq 0$ , приходим к соотношениям  $1 = \langle [I + \Gamma R(\cdot, \lambda)]^{-1} e_1, e_1^* \rangle \Rightarrow$

$\langle \Gamma R(\cdot, \lambda)[I + \Gamma R(\cdot, \lambda)]^{-1} e_1, e_1^* \rangle = 0$  для любого достаточно малого  $\lambda$ . Поскольку  $\Gamma^* e_1^* = u_1^*$ , отсюда следует

$$\begin{aligned} \langle R(e_1, \lambda), u_1^* \rangle = 0, \quad \langle R(\Gamma R(e_1, \lambda), \lambda), u_1^* \rangle = 0, \\ \dots, \quad \langle R(\dots(\Gamma R(e_1, \lambda)), \lambda), u_1^* \rangle = 0, \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из первого соотношения (2.5) следует, что оператор  $D_0\varphi = R(e_1, \cdot)$  ортогонален операторам  $\Psi_i = \xi_i \otimes u_1^*, i = \overline{1, k}$ , так как согласно (2.5)  $R(e_1, \cdot) = \sum r_{\sigma\rho} \xi_\sigma^* \otimes u_\rho, \rho > 1$ . Это означает существование элемента  $J^1$  цепочки (2.3). Аналогично условие  $\langle R(\dots(\Gamma R(e_1, \lambda)), \lambda), u_1^* \rangle = 0$  означает, что полилинейная функция  $R(\dots(\Gamma R(e_1, \lambda)), \lambda)$  имеет вид  $\sum r_{\sigma_1, \dots, \sigma_s, \rho} \xi_{\sigma_1}^* \otimes \dots \otimes \xi_{\sigma_s}^* \otimes u_\rho, \rho > 1$  и поэтому ортогональна всем  $\Psi_{\sigma_1, \dots, \sigma_s, 1} = \xi_{\sigma_1} \otimes \dots \otimes \xi_{\sigma_s} \otimes u_1$ . Таким образом, выполняются условия существования любого элемента цепочки (2.3).  $\square$

**Лемма 2.2.** *Если  $\lambda = 0$  является простым собственным значением оператор-функции (1.2), т. е. ЖЦ состоит только из первого элемента  $\varphi = J^1$ , то в малой окрестности нуля она обратима всюду за исключением некоторой гиперповерхности, проходящей через ноль.*

*Доказательство.* Требуется найти, для каких  $\lambda$  существует решение уравнения (2.4), которое, как и выше, переписывается в виде  $\widetilde{A}_0 X(\lambda) + R(X(\lambda), \lambda) = \langle X(\lambda), e_1^* \rangle u_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow \langle (I + \Gamma R(\cdot, \lambda))^{-1} e_1, e_1^* \rangle = 1$ . Однако по условию леммы нарушается уже первое равенство (2.5), т. е.  $\langle \langle R(e_1, \cdot), \Psi_i \rangle \rangle \neq 0$ , или одно из чисел  $\langle R(e_1, \xi_i), u_1^* \rangle \neq 0$ . Согласно теореме о неявной функции отличные от нуля решения (2.4) существуют только на гиперповерхности  $\lambda_i = F(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_k)$ .  $\square$

Далее рассматривается оператор-функция  $A_0^* x + R^*(x, \lambda)$ , где  $R^*(x, \lambda)$  — сопряженная к  $R(\lambda)$  матрица с учетом действия  $R(y, \lambda) = R(\lambda)y$ .

**Лемма 2.3.** *Если оператор-функция  $A(\lambda) = A_0 + R(\cdot, \lambda)$  имеет в нуле простое собственное значение, то и оператор-функция  $A^*(\lambda) = A_0^* + R^*(\cdot, \lambda)$  также имеет ноль простым собственным значением. Она необратима на той же самой гиперповерхности, что и  $A(\lambda)$ . Ноль-элемент  $A^*(\lambda)$  определяется формулой  $\Psi(\lambda) = (I + \Gamma^* R^*(\cdot, \lambda))^{-1} u_1^*$ .*

*Доказательство.* Если оператор-функция  $A(\lambda) = A_0 + R(\cdot, \lambda)$  имеет в нуле простое собственное значение, то  $\langle \langle R(e_1, \cdot), \Psi_i \rangle \rangle \neq 0$  для некоторого  $\Psi_i = \xi_i \otimes \psi$ , для чего необходимо и достаточно существование элемента  $\xi_i$  такого, что  $\langle R(\xi_i) e_1, \psi \rangle \neq 0$ . Действительно, если  $R(e_1, \lambda) \in L\{\Lambda \rightarrow E_2\}$ , то для некоторого  $i$   $r_{i1} \neq 0$ , откуда следует  $R(\xi_i) e_1 = r_{i1} u_1$  и потому  $R(e_1, \lambda) = \sum r_{s\sigma} \xi_s^* \otimes u_\sigma$ . Если  $\langle \langle R(e_1, \cdot), \Psi_i \rangle \rangle \neq 0$ , то  $r_{i1} \neq 0$  и  $R(\xi_i) e_1 = r_{i1} u_1$ , поэтому  $\langle R(\xi_i) e_1, \psi \rangle \neq 0$ . Обратно, если  $\langle \langle R(e_1, \cdot), \Psi_i \rangle \rangle = 0$  для каждого  $\Psi_i$ , то  $r_{i1} = 0$ , для каждого  $i$  и поэтому  $\langle R(\xi_i) e_1, \psi \rangle = 0$  для всех  $i$ .

Аналогичным образом справедливо утверждение:  $\langle \langle \Phi_i, R^*(u_1^*, \cdot) \rangle \rangle \neq 0$  тогда и только тогда, когда существует элемент  $\xi_i$  такой, что  $\langle e_1, R^*(\xi_i) \psi \rangle \neq 0$ . Так как  $\langle R(\xi_i) e_1, \psi \rangle = \langle e_1, R^*(\xi_i) \psi \rangle$ , то из того, что оператор-функция  $A(\lambda) = A_0 + R(\cdot, \lambda)$  имеет простым собственным значением  $\lambda = 0$ , следует, что сопряженная оператор-функция  $A^*(\lambda) = A_0^* + R^*(\cdot, \lambda)$  также имеет  $\lambda = 0$  простым собственным значением.

Так как определители матриц  $A(\lambda)$  и  $A^*(\lambda)$  совпадают, то и многообразие вырождения для этих оператор-функций одно и то же. Ноль-элемент оператор-функции  $A_0^* + R^*(\cdot, \lambda)$  определяется так же, как это было сделано в лемме 2.2 для  $A_0 + R(\cdot, \lambda)$ .  $\square$

**Лемма 2.4.** *Если оператор-функция  $A(\lambda) = A_0 + R(\cdot, \lambda)$  имеет ОЖЦ длины  $p$ , т. е.  $J^1 = \varphi, J^2(\lambda), \dots, J^p(\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$ , то оператор-функция  $A^*(\lambda) = A_0^* + R^*(\cdot, \lambda)$  также имеет ОЖЦ длины  $p$ :  $J^1 = \psi, J^2(\lambda), \dots, J^p(\lambda, \dots, \lambda)$ . Здесь  $J^s(\lambda, \dots, \lambda) \in L\{\otimes_{s-1} \Lambda \rightarrow E_2^*\} \approx \otimes_{s-1} \Lambda^* \otimes E_2^*$ .*

*При этом образы элементов жордановых цепочек при одном и том же значении параметра  $\lambda$  удовлетворяют следующим условиям ортогональности: для любых значений  $\lambda$ , если  $s < k, k, s = \overline{1, p}$ ,*

$$\langle R(J^{p-k}(\lambda, \dots, \lambda), \lambda), J^s(\lambda, \dots, \lambda) \rangle = 0, \quad (2.6)$$

*и если  $k = s$ , то найдутся такие значения  $\lambda$ , для которых*

$$\langle R(J^{p-s}(\lambda, \dots, \lambda), \lambda), J^s(\lambda, \dots, \lambda) \rangle \neq 0. \quad (2.7)$$

*Доказательство.* Запишем оператор-функцию  $A(\lambda) = A_0 + R(\cdot, \lambda)$  в виде  $A(\lambda)x = [A_0 + Q(\lambda)]x$ . Тогда сопряженная оператор-функция примет вид  $A^*(\lambda)w = [A_0^* + Q^*(\lambda)]w$ . В этих обозначениях формула для элементов ОЖЦ  $J^{s+1} = (\Gamma_s D_{s-1}) \dots (\Gamma_1 D_0)\varphi$  может быть записана в виде суперпозиции  $s$  операторов  $\Gamma Q(\lambda)$ :  $J^{s+1} = (\Gamma Q(\lambda) \dots (\Gamma Q(\lambda))\varphi$ . Покажем, что ОЖЦ сопряженной оператор-функции, отвечающая элементу  $\psi$ , также имеет длину  $p$  и ее элементы выражаются аналогичным образом. Действительно, так как при  $p > 1$   $\langle \varphi, Q^*(\lambda)\psi \rangle = \langle Q(\lambda)\varphi, \psi \rangle = 0$ , то элемент  $\mathcal{J}^{(2)}(\lambda)$  существует и определяется уравнением  $A_0 \mathcal{J}^{(1)}(\lambda) = Q^*(\lambda)\psi$ . Если ввести регуляризатор Шмидта для  $A_0^*$  по формуле  $\widetilde{A}_0^* = A_0^* + \langle u_1, \cdot \rangle e_1^*$ , то он совпадет с  $(\widetilde{A}_0)^*$ , и поэтому обратный к нему равен  $\Gamma^*$ . Таким образом, элемент  $\mathcal{J}^{(2)}$  можно определить по формуле  $\mathcal{J}^{(2)}(\lambda) = \Gamma^* Q^*(\lambda)\psi$ . Предположим по индукции, что для  $s < p-1$  элемент  $\mathcal{J}^{(s)}(\lambda, \dots, \lambda)$  существует и определяется суперпозицией  $s-1$  операторов  $\Gamma^* Q^*(\lambda)$  по формуле  $\mathcal{J}^{(s)}(\lambda, \dots, \lambda) = \Gamma^*(Q^*(\lambda)) \dots (\Gamma^*(Q^*(\lambda)))\psi$ . Покажем, что следующий элемент ОЖЦ также существует и выражается аналогично. Действительно, для любого  $\lambda$  функция  $\mathcal{J}^{(s)}(\lambda, \dots, \lambda)$  удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \langle \varphi, Q^*(\lambda)\mathcal{J}^{(s)}(\lambda, \dots, \lambda) \rangle &= \langle \varphi, Q^*(\lambda)(\Gamma^* Q^*(\lambda) \dots (\Gamma^*(Q^*(\lambda))))\psi \rangle = \\ &= \langle Q(\lambda)J^{(p-k+s)}(\lambda, \dots, \lambda), \psi \rangle = \langle Q(\lambda)\mathcal{J}^s(\lambda, \dots, \lambda), \psi \rangle = 0. \end{aligned}$$

Это означает, что выполняются равенства  $\langle \langle \Phi_{i_1 \dots i_s}, Q^*(\lambda)\mathcal{J}^{(s)}(\lambda, \dots, \lambda) \rangle \rangle = 0$ , т. е. уравнение  $A_0^* \mathcal{J}^{(s+1)}(\lambda, \dots, \lambda) = Q^*(\lambda)\mathcal{J}^{(s)}(\lambda, \dots, \lambda)$  разрешимо и  $\mathcal{J}^{(s+1)}(\lambda, \dots, \lambda)$  представляется  $s+1$  суперпозицией операторов  $\Gamma^*(Q^*(\lambda))$ . Теперь ясно, что при  $s < k$  и любом  $\lambda$

$$\begin{aligned} \langle R(J^{(p-k)}(\lambda, \dots, \lambda), \lambda), \mathcal{J}^{(s)}(\lambda, \dots, \lambda) \rangle &= \\ &= \langle Q(\lambda)(\Gamma Q(\lambda)) \dots (\Gamma Q(\lambda))\varphi, (\Gamma^* Q^*(\lambda)) \dots (\Gamma^*(Q^*(\lambda)))\psi \rangle = \langle Q(\lambda)J^{(p-k+s)}(\lambda, \dots, \lambda), \psi \rangle = 0, \end{aligned}$$

так как в левой части внутреннего произведения  $p-k$  суперпозиций, а в правой  $s$  и  $p-k+s < p-1$ . Если же  $k=s$ , то  $\langle R(J^{(p-s)}(\lambda, \dots, \lambda), \lambda), \mathcal{J}^{(s)}(\lambda, \dots, \lambda) \rangle = \langle Q(\lambda)J^{(p)}(\lambda, \dots, \lambda), \psi \rangle$ . Последнее выражение не обращается в ноль хотя бы для некоторых  $\lambda$ , поскольку длина ОЖЦ равна  $p$ .  $\square$

**Замечание 2.1.** Формулы (2.6) и (2.7) согласуются с соотношениями биортогональности триканонических жордановых наборов оператор-функций одного спектрального параметра, установленными в [7, 12] и неоднократно использовавшимися во многих последующих наших работах, например, [19, 20].

### 3. ЖОРДАНОВЫ ЦЕПОЧКИ ПО НАПРАВЛЕНИЯМ

Для каждой точки  $0 \neq \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \Lambda$  сферы  $\|e_\lambda\| = 1$ ,  $e_\lambda = \frac{\lambda}{\|\lambda\|}$  — единичный вектор в направлении  $\lambda$ . Сужение оператор-функции  $A(\cdot, \lambda) = A_0 + R(\cdot, \lambda)$  на прямую  $\lambda = \varepsilon e_\lambda$  зависит только от одномерного параметра  $\varepsilon$ :  $A_\lambda(x, \varepsilon) = [A_0 + \varepsilon R(\cdot, e_\lambda)]x$ . В предположении  $R(\cdot, e_\lambda) \neq 0$  определяются жордановы цепочки оператор-функции  $A(x, \lambda)$  вдоль направления  $\lambda$ . Длина цепочки по направлению  $\lambda$  обозначается  $p(\lambda) = p(e_\lambda)$ .

**Лемма 3.1.** Пусть  $p$  — длина ОЖЦ многопараметрической оператор-функции  $A(x, \lambda)$ . Тогда для любого направления  $\lambda$  выполнено  $p \leq p(\lambda)$  и для почти всех направлений  $\lambda$  за исключением алгебраического множества выполнено  $p = p(\lambda)$ .

*Доказательство.* Элементы ЖЦ в направлении  $\lambda$  определяются формулой

$$\varphi^{(s+1)}(\lambda) = \Gamma R(\dots (\Gamma R(\varphi, \lambda), \lambda)) \quad (s \text{ суперпозиций}). \quad (3.1)$$

Если  $s \leq p$ , где  $p$  — длина ОЖЦ оператор-функции  $A_0 + R(\cdot, \lambda)$ , то  $\langle R(\dots (\Gamma R(\varphi, \lambda), \lambda)), \psi \rangle = 0$ , иначе не будут выполняться формулы типа (2.2). Поэтому при  $s \leq p$  все элементы ЖЦ по направлению  $e_\lambda$  определены. Направления  $\lambda^0$ , для которых длина ЖЦ превышает  $p$ , определяются уравнением

$$\langle R(\dots (\Gamma R(\varphi, \lambda^0), \dots, \lambda^0)), \psi \rangle = 0 \quad (p+1 \text{ суперпозиция}).$$

$\square$

**Определение 3.1.** Направление  $\lambda^0$ , вдоль которого  $p(\lambda^0) > p$  называется *особым*, все остальные — *неособые*. Особое направление  $e_\lambda$ , вдоль которого оператор-функция  $A_0 + \varepsilon R(\cdot, \lambda^0)$  необратима, называется *вырожденным*.

**Замечание 3.1.** Пусть  $p < \infty$ . Согласно [2, теорема 30.1] на множестве всех неособых направлений  $e_\lambda$  оператор-функция  $A_0 + R(\cdot, \lambda^0)$  обратима в шаре  $0 < |\varepsilon| < \rho(e_\lambda)$  для некоторого  $\rho(e_\lambda)$ .

**Замечание 3.2.** Следующий пример показывает, что  $\rho(\lambda)$  нельзя выбрать не зависящим от  $\lambda$ :

$$A(\lambda)x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \det A(\lambda) = \lambda_1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2,$$

$A(\lambda)$  необратима на кривой  $\left(\lambda_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \lambda_2 = \frac{1}{4}$ . Здесь любое направление  $e_\lambda \neq (0, 1)$ , кроме вертикального, является неособым, и  $\rho(e_\lambda)$  равно расстоянию от нуля до точки пересечения  $e_\lambda$  с кривой  $\lambda_1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = 0$ . Очевидно, что  $\rho(e_\lambda) \rightarrow 0$  при  $e_\lambda \rightarrow (0, 1)$ . Вдоль особого направления  $(0, 1)$   $A(\lambda)$  обратима везде, кроме  $\lambda = 0$ .

**Замечание 3.3.** Если вдоль некоторого направления  $e_\lambda$  оператор-функция  $A(\lambda)$  имеет максимальную ОЖЦ, то вдоль этого направления она обратима всюду, кроме  $\lambda = 0$ . Это следует из того факта, что в паре базисов  $\{\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(n)}\}$  и  $\{R(\varphi^{(1)}, \lambda^0), R(\varphi^{(2)}, \lambda^0), \dots, R(\varphi^{(n)}, \lambda^0)\}$  матрица оператор-функции  $A(\lambda)$  вдоль направления  $e_\lambda$  имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\varepsilon \end{pmatrix}.$$

**Следствие.** Длина ОЖЦ либо равна бесконечности, либо не превышает размерности пространства.

**Лемма 3.2.** Если у оператор-функции  $A(\lambda) = A_0 + R(\cdot, \lambda)$  длина жордановой цепочки равна  $p$ , то для любого достаточно малого значения  $\lambda \neq 0$  такого, что направление  $\lambda^0 = \frac{\lambda}{\|\lambda\|}$  не вырождено, образы элементов жордановой цепочки в точке  $\lambda$  линейно независимы.

*Доказательство.* Действительно, ОЖЦ оператор-функции  $A(\lambda) = A_0 + R(\cdot, \lambda)$  определяются формулой

$$J^{s+1}(\lambda, \dots, \lambda) = \Gamma_s R(\dots, \Gamma R(\varphi, \lambda), \dots, \lambda),$$

тогда как цепочки по направлению  $e_\lambda$  вычисляются согласно формуле (3.1) леммы 3.1

$$\varphi^{(s+1)}(e_\lambda) = \Gamma R(\dots, \Gamma R(\varphi, e_\lambda), \dots, e_\lambda).$$

Если направление  $e_\lambda$  не вырождено, то элементы ОЖЦ линейно независимы. Но тогда и элементы  $J^{s+1}(\lambda)$  также линейно независимы как отличающиеся от  $\varphi^{(s+1)}(e_\lambda)$  лишь ненулевым скалярным множителем.  $\square$

**Замечание 3.4.** Следующий пример показывает, что если направление  $e_\lambda$  вырождено, то образы элементов ОЖЦ в точке  $\lambda$  могут быть линейно зависимы.

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Эта оператор-функция имеет жорданову цепочку, состоящую из двух элементов  $J^1 = \varphi = (1, 0, 0)^T$  и  $J^2(\lambda) = (0, \lambda_1, 0)^T$ . Дальше эта цепочка не продолжается, так как  $R(J^2(\lambda), \lambda) = (\lambda_1^2, \lambda_1 \lambda_2, 0)^T$ , и поэтому если  $\Psi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \psi$ , то  $\langle\langle R(J^2(\lambda), \lambda), \Psi \rangle\rangle \neq 0$ . При этом на прямой, соответствующей вырожденному направлению  $(0, 1)$  (или  $(0, 1, 0)$ ), если считать, что  $\dim \Lambda = 3$ ), образы элементов ОЖЦ линейно зависимы, так как на этой прямой  $J^2(\lambda) = 0$ .

**Лемма 3.3.** Если  $n \leq k$  и для оператор-функции  $A(\lambda) = A_0 + R(\cdot, \lambda)$  длина ОЖЦ  $p > 1$ , то для нее всегда найдется направление  $e_\lambda$ , вдоль которого оператор-функция вырождена.

*Доказательство.* Действительно, рассмотрим оператор-функции, соответствующие базисным направлениям  $A_i(x) = A_0x + \varepsilon R(x, \xi_i)$ . По условию длина ОЖЦ каждой из этих оператор-функций больше единицы, т. е.  $\langle R(e_1, \xi_i), \Psi \rangle = 0$ , и  $k$  векторов  $R(e_1, \xi_1), \dots, R(e_1, \xi_k)$  принадлежат  $(n-1)$ -мерному пространству и поэтому линейно зависимы. Это означает, что существуют числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  такие, что  $\lambda_1 R(e_1, \xi_1) + \dots + \lambda_k R(e_1, \xi_k) = 0$  или  $R(e_1, \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_k \xi_k) = 0$ . Отсюда следует, что вдоль направления  $\lambda^* = \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_k \xi_k$  оператор-функция  $A_0 + R(\cdot, \lambda^*)$  вырождена.  $\square$

**Замечание 3.5.** В случае  $n > k$  вырожденное направление может отсутствовать:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ОЖЦ этой оператор-функции состоит из двух элементов  $(1, 0, 0)$  и  $(0, \lambda_1, \lambda_2)$ . Очевидно, что квадратичная вектор-функция  $(\lambda_1^2 + \lambda_2^2, 0, 0)$  удовлетворяет одному из условий (2.2):  $\lambda_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \neq 0$  или  $\lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \neq 0$ . Вдоль направлений  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$   $A(\lambda)$  не вырождается, так как  $\det[A(\lambda_1, 0)] = -\lambda_1^2 \neq 0$  и  $\det[A(0, \lambda_2)] = -\lambda_2^2 \neq 0$ , а для «промежуточного» направления  $(1, a)$  выполнено  $\det[A(\varepsilon, \varepsilon a)] = -\varepsilon^2 - \varepsilon^2 a^2 \neq 0$ , т. е. и здесь  $A(\lambda)$  не вырождена.

**Замечание 3.6.** Однако для нелинейной оператор-функции (1.2) утверждение леммы 3.2 может не выполняться:

$$A(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda_1^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

не имеет вырожденных направлений, поскольку  $\det A(\lambda) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$  при  $\lambda \neq 0$ .

**Замечание 3.7.** Если оператор-функция (1.2) имеет  $\lambda = 0$  простым собственным значением, то она может иметь вырожденные направления:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$R(e_1, \lambda) = \xi_1^* \otimes u_1 \Rightarrow \langle \langle R(e_1, \cdot), \Psi_1 \rangle \rangle = \langle \langle R(e_1, \cdot), \xi_1 \otimes \psi \rangle \rangle = 1,$$

т. е.  $p = 1$ ; при этом направление  $(0, 1)$  вырождено.

#### 4. ЖОРДАНОВЫ ЦЕПОЧКИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

Пусть оператор-функция  $A(\lambda)$  имеет вид

$$A(\lambda)x = A_0x - R_1(\lambda)x - R_2(\lambda, \lambda)x \dots - R_m(\lambda, \dots, \lambda)x, \quad (4.1)$$

где  $R_s(\lambda, \dots, \lambda)$  —  $s$ -линейная функция  $\lambda$  со значениями в  $L\{E_1 \rightarrow E_2\}$  или  $R_s(\lambda, \dots, \lambda)x \in L\{\Lambda \otimes \dots \otimes \Lambda \otimes E_1 \rightarrow E_2\} \approx \Lambda^* \otimes \dots \otimes \Lambda^* \otimes E_1^* \otimes E_2$ .

Рассмотрим элементы жордановой цепочки  $J^1 = \varphi, J^2, \dots, J^p$ , где  $J^s$  принадлежит пространству  $L\{\overset{s}{\otimes} \Lambda \rightarrow E_1\}$ . При  $m > p$  они последовательно определяются формулами  $J^2 = \Gamma_1 R_1(\lambda) J^1$ , если уравнение  $B_1 J^2 = R_1(\lambda) J^1$  разрешимо;  $J^3 = \Gamma_2 (R_1(\lambda) J^2 + R_2(\lambda, \lambda) J^1)$ , если уравнение  $B_2 J^3 = R_1(\lambda) J^2 + R_2(\lambda, \lambda) J^1$  разрешимо;  $\dots$ ,  $J^p = \Gamma_{p-1} (R_1(\lambda) J^{p-1} + R_2(\lambda, \lambda) J^{p-2} + \dots + R_{p-1}(\lambda, \dots, \lambda) J^1)$ , если уравнение  $B_{p-1} J^p = R_1(\lambda) J^{p-1} + R_2(\lambda, \lambda) J^{p-2} + \dots + R_{p-1}(\lambda, \dots, \lambda) J^1$  разрешимо. При  $s > m$  цепочки определяются по формуле  $J^s = \Gamma_s (R_1(\lambda) J^{s-1} + R_2(\lambda, \lambda) J^{s-2} + \dots + R_m(\lambda, \dots, \lambda) J^{s-m})$ , если уравнение  $B_s J^s = R_1(\lambda) J^{s-1} + R_2(\lambda, \lambda) J^{s-2} + \dots + R_m(\lambda, \dots, \lambda) J^{s-m}$  разрешимо.

**Определение 4.1.** Пусть длина ОЖЦ равна  $p$ , т. е. уравнение

$$B_p J^{p+1} = R_1(\lambda) J^p + R_2(\lambda, \lambda) J^{p-1} + \dots + R_m(\lambda, \dots, \lambda) J^{p-m+1}$$

неразрешимо, так как  $\langle R_1(\lambda) J^p + R_2(\lambda, \lambda) J^{p-1} + \dots + R_m(\lambda, \dots, \lambda) J^{p-m+1}, \psi \rangle \neq 0$ . Тогда выражение

$$\langle R_1(\lambda) J^p + R_2(\lambda, \lambda) J^{p-1} + \dots + R_m(\lambda, \dots, \lambda) J^{p-m+1}, \psi \rangle$$

назовем *хвостом* жордановой цепочки. Хвост жордановой цепочки является  $p$ -линейной формой. При  $\dim \text{Ker } A_0 = m$  существует  $m$  хвостов по числу ЖЦ.  $R$ -образ элемента ЖЦ  $J^{s-1}$  определяется выражением

$$\mathfrak{R}J^{s-1} = \begin{cases} R_1(\lambda)J^{s-1} + R_2(\lambda, \lambda)J^{s-2} + \dots + R_m(\lambda, \dots, \lambda)J^{s-m}, & \text{если } s > m; \\ R_1(\lambda)J^{s-1} + R_2(\lambda, \lambda)J^{s-2} + \dots + R_{s-1}(\lambda, \dots, \lambda)J^1, & \text{если } s \leq m. \end{cases}$$

Очевидно, что когда элемент ЖЦ  $J^s$  существует при  $s < p$ ,  $J^s = \Gamma_s(\mathfrak{R}J^{s-1})$ .

Для простоты изложения рассмотрим процесс линеаризации на примере квадратичной оператор-функции с двумерным пространством параметров,  $\dim \Lambda = 2$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ .

Пусть

$$A(\lambda)x = A_0x - R_1(\lambda)x - R_2(\lambda, \lambda)x = A_0x - (\lambda_1 R_1^1 + \lambda_2 R_2^1)x - (\lambda_1^2 R_{11}^2 + \lambda_2^2 R_{22}^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 R_{12}^2)x. \quad (4.2)$$

Элементы жордановой цепочки этой оператор-функции определяются по формулам:  $J^1 = \varphi$ ,  $J^s = \Gamma((\lambda_1 R_1^1 + \lambda_2 R_2^1)J^{s-1} - (\lambda_1^2 R_{11}^2 + \lambda_2^2 R_{22}^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 R_{12}^2)J^{s-2})$ . Для линеаризованной оператор-функции  $\alpha(\lambda) = \alpha_0 - \rho(\lambda)\chi$ ,  $\alpha(\lambda) : E_1 \times E_1 \times E_1 \rightarrow E_2 \times E_1 \times E_1$ ,  $\lambda \in \Lambda$

$$\alpha(\lambda) = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} R_1^1 & R_{11}^2 & R_{12}^2 \\ E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} R_2^1 & R_{12}^2 & R_{22}^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$$

Единственным нулем оператора  $\alpha_0$  является  $\Phi^{(1)} = (\varphi, 0, 0)$ . Так как  $\rho(\lambda)\Phi^{(1)} = ((\lambda_1 R_1^1 + \lambda_2 R_2^1)\varphi, \lambda_1 \varphi, \lambda_2 \varphi)$  и функционал  $\Psi$  для оператора  $\alpha_0$  имеет вид  $(\psi, 0, 0)$ , то в силу существования элемента  $J^2$  уравнение  $\alpha_0 \Phi^{(2)} = \rho(\lambda)\Phi^{(1)}$  разрешимо и  $\Phi^{(2)} = (J^2(\lambda), \lambda_1 \varphi, \lambda_2 \varphi)$ .

**Лемма 4.1.** *Если  $p$  — длина жордановой цепочки оператор-функции (4.2), то длина жордановой цепочки ее линеаризации  $\alpha_0 \chi$  также равна  $p$  и элементы ее жордановой цепочки имеют вид:*

$$\Phi^{(s)} = (J^s(\lambda), \lambda_1 J^{s-1}, \lambda_2 J^{s-1}). \quad (4.3)$$

*Доказательство.* (По индукции.) Начальный шаг индукции проверен. Предположим, что формула (4.3) справедлива и  $s < p$ . Тогда

$$\begin{aligned} \rho(\lambda)\Phi^{(s)} &= ((\lambda_1 R_1^1 + \lambda_2 R_2^1)J^s(\lambda) + \lambda_1 R_{11}^2(\lambda_1 J^{s-1}(\lambda)) + \\ &+ (\lambda_1 R_{12}^2(\lambda_2 J^{s-1}(\lambda)) + (\lambda_2 R_{22}^2(\lambda_2 J^{s-1}(\lambda)), \lambda_1 J^s(\lambda), \lambda_2 J^s(\lambda)) = \\ &= ((\lambda_1 R_1^1 + \lambda_2 R_2^1)J^s(\lambda) + (\lambda_1^2 R_{11}^2 + \lambda_2^2 R_{22}^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 R_{12}^2)J^{s-1}, \lambda_1 J^s(\lambda), \lambda_2 J^s(\lambda)), \end{aligned}$$

отсюда следует тот же самый вид  $s+1$  элемента ЖЦ. Для оператор-функции  $A(\lambda)$  от двух параметров третьей степени  $A(\lambda)x = A_0x - R_1(\lambda)x - R_2(\lambda, \lambda)x - R_3(\lambda, \lambda, \lambda)x$  вводится обозначение

$$R_3(\lambda, \lambda, \lambda)x = (\lambda_1^3 R_{111}^3 + 2\lambda_1^2 \lambda_2 R_{112}^3 + 2\lambda_1 \lambda_2^2 R_{122}^3 + \lambda_2^3 R_{222}^3)x,$$

поскольку

$$\begin{aligned} R_3(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2, \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2, \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2) &= \lambda_1^3 R_3(\xi_1, \xi_1, \xi_1) + \lambda_1^2 \lambda_2 (R_3(\xi_1, \xi_1, \xi_2) + R_3(\xi_1, \xi_2, \xi_1) + \\ &+ R_3(\xi_2, \xi_1, \xi_1)) + \lambda_1 \lambda_2^2 (R_3(\xi_2, \xi_2, \xi_1) + R_3(\xi_2, \xi_1, \xi_2) + R_3(\xi_1, \xi_2, \xi_2)) + \lambda_2^3 R_3(\xi_2, \xi_2, \xi_2), \\ 2R_{112}^3 &= R_3(\xi_1, \xi_1, \xi_2) + R_3(\xi_1, \xi_2, \xi_1) + R_3(\xi_2, \xi_1, \xi_1), \\ 2R_{122}^3 &= R_3(\xi_2, \xi_2, \xi_1) + R_3(\xi_2, \xi_1, \xi_2) + R_3(\xi_1, \xi_2, \xi_2). \end{aligned}$$

В этих обозначениях линеаризация принимает вид:  $\alpha(\lambda) = \alpha_0 \chi - \rho(\lambda)\chi$ , где  $\alpha(\lambda) : E_1 \times E_1 \times E_1 \times E_1 \times E_1 \times E_1 \rightarrow E_2 \times E_1 \times E_1 \times E_1 \times E_1 \times E_1$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . Матрицы линеаризации имеют тот же вид, как и в случае второй степени, только их размеры  $6 \times 6$ . Здесь

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} R_1^1 & R_{11}^2 & R_{12}^2 & R_{111}^3 & R_{112}^3 & R_{122}^3 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} R_2^1 & R_{12}^2 & R_{22}^2 & R_{112}^3 & R_{122}^3 & R_{222}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Жорданова цепочка линеаризованной оператор-функции записывается в виде шестикомпонентного вектора  $\Phi^{(s)} = (J^s(\lambda), \lambda_1 J^{s-1}(\lambda), \lambda_2 J^{s-1}(\lambda), \lambda_1^2 J^{s-2}(\lambda), \lambda_1 \lambda_2 J^{s-2}(\lambda), \lambda_2^2 J^{s-2}(\lambda))$ .

Для построения линеаризации полиномиальной оператор-функции (4.1) степени  $m$ , как и прежде, вводятся обозначения:

$$R_m(\lambda, \lambda, \dots, \lambda)x = (\lambda_1^m R_{1\dots 11}^m + 2\lambda_1^{m-1}\lambda_2 R_{1\dots 12}^m + \dots + 2\lambda_1\lambda_2^{m-1} R_{12\dots 2}^m + \lambda_2^m R_{2\dots 22}^m)x.$$

Оператор-функция  $\alpha(\lambda) = \alpha_0\chi - \rho(\lambda)\chi$  действует из пространства  $E_1 \times E_1 \times \dots \times E_1$  в пространство  $E_2 \times E_1 \times \dots \times E_1$  (в каждом произведении  $m(m+1)/2$  сомножителей). Матрицы соответственно принимают вид:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} R_1^1 & R_{11}^2 & R_{12}^2 & \dots & R_{1\dots 1}^m & \dots & R_{1\dots 12}^m & R_{12\dots 2}^m \\ E & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0,5E & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5E & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5E & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} R_2^1 & R_{12}^2 & R_{22}^2 & \dots & R_{1\dots 12}^m & \dots & R_{12\dots 2}^m & R_{2\dots 2}^m \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0,5E & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5E & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5E & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

с жордановыми цепочками линеаризованной оператор-функции при  $s > m$

$$\Phi^{(s)} = (J^s(\lambda), \lambda_1 J^{s-1}(\lambda), \lambda_2 J^{s-1}(\lambda), \dots, \lambda_1^m J^{s-m}(\lambda), \lambda_1^{m-1}\lambda_2 J^{s-m}(\lambda), \dots, \lambda_1\lambda_2^{m-1} J^{s-m}(\lambda), \lambda_2^m J^{s-m}(\lambda)).$$

Линеаризованная оператор-функция в случае  $\dim \Lambda > 2$  строится аналогичным образом.  $\square$

**Замечание 4.1.** Если длина жордановой цепочки оператор-функции (4.1), равна 1, то в малой окрестности нуля оператор-функция (4.1) необратима на гиперповерхности, проходящей через ноль. Это аналог леммы 2.2, доказательство переносится без изменений.

**Определение 4.2.** Если оператор-функция  $A(\lambda)$  обратима в проколотой окрестности точки  $\lambda^0$ , то эту точку будем называть *особой точкой* соответствующего вырожденного дифференциального уравнения.

**Лемма 4.2** (достаточное условие обратимости оператор-функции  $A(\lambda)$  в проколоте круге). Пусть длина жордановой цепочки оператор-функции (4.1) равна двум и хвост жордановой

цепочки является строго знакоопределенной квадратичной формой. Тогда оператор-функция  $A(\lambda)$  обратима в некотором проколоте круге:  $0 < \|\lambda\| < \rho$ .

*Доказательство.* Как и раньше, будем искать, для каких  $\lambda$  существует решение уравнения  $A(\lambda)X(\lambda) = 0, X(\lambda) \neq 0$ . Перепишем его в виде:

$$\widetilde{A}_0 X(\lambda) - [R_1(\lambda) + R_2(\lambda, \lambda) + \dots + R_m(\lambda, \dots, \lambda)]X(\lambda) = \langle X(\lambda), e_1^* \rangle u_1$$

или

$$(I - \Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda, \lambda) + \dots + R_m(\lambda, \dots, \lambda)])X(\lambda) = \langle X(\lambda), e_1^* \rangle e_1,$$

где  $\Gamma = (\widetilde{A}_0)^{-1}$ . Так как оператор  $(I - \Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda, \lambda) + \dots + R_m(\lambda, \dots, \lambda)])$  обратим при малых  $\lambda$ , то  $X(\lambda) = \langle X(\lambda), e_1^* \rangle (I - \Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda, \lambda) + \dots + R_m(\lambda, \dots, \lambda)])^{-1} e_1$ . Из этого равенства следует, что ненулевое решение уравнения (2.4) существует только тогда, когда  $\langle X(\lambda), e_1^* \rangle \neq 0$  и поэтому

$$\langle (I - \Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda, \lambda) + \dots + R_m(\lambda, \dots, \lambda)])^{-1} e_1, e_1^* \rangle = 1. \quad (4.4)$$

Так как  $(I - S)^{-1} = I + S + S^2 + \dots$  при малом  $S$ , то уравнение (4.4) можно переписать в виде:

$$0 = \langle (\Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda, \lambda) + \dots + R_m(\lambda, \dots, \lambda)])^{-1} e_1, e_1^* \rangle + \\ + \langle (\Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda, \lambda) + \dots + R_m(\lambda, \dots, \lambda)]) \Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda, \lambda) + \dots + R_m(\lambda, \dots, \lambda)] e_1, e_1^* \rangle + \dots$$

Сгруппируем члены одинакового порядка по  $\lambda$ :

$$0 = \langle \Gamma R_1(\lambda) e_1, e_1^* \rangle + [\langle \Gamma R_2(\lambda, \lambda) e_1, e_1^* \rangle + \langle \Gamma R_1(\lambda) \Gamma R_1(\lambda) e_1, e_1^* \rangle] + \dots \quad (4.5)$$

Здесь первое слагаемое равно нулю, так как цепочка оператор-функции имеет длину, равную двум, а второе слагаемое является хвостом жордановой цепочки, т. е. невырожденной знакоопределенной квадратичной формой. В силу леммы Морса [11] функция, стоящая в правой части равенства (4.5), эквивалентна своей квадратичной части, которая в силу знакоопределенности обращается в ноль только при  $\lambda = 0$ .  $\square$

**Замечание 4.2.** В случае  $\dim E_1 = \dim E_2 = 2$  и  $\dim \Lambda = 2$ , используя критерий Сильвестра, можно получить уточненное достаточное условие для обратимости оператор-функции  $A(\lambda)$  в проколоте окрестности  $\lambda = 0$ .

Пусть, например,  $A(\lambda) = A_0 + \lambda_1 B + \lambda_2 C + \lambda_1^2 D + 2\lambda_1 \lambda_2 E + \lambda_2^2 F + \dots$ . Здесь  $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = (b_{ij})$  ( $\mathcal{B}_i$  — столбцы матрицы  $B$ ),  $C = (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = (c_{ij})$ ,  $D = (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = (d_{ij})$ ,  $E = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = (e_{ij})$ ,  $F = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = (f_{ij})$ . Тогда, выражая  $R_1(\lambda)J^1 + R_2(\lambda, \lambda)J^0$  через введенные выше матрицы, получим  $(\lambda_1 B + \lambda_2 C)(\lambda_1 \mathcal{B}_1 + \lambda_2 \mathcal{C}_1) + (\lambda_1^2 \mathcal{D}_1 + 2\lambda_1 \lambda_2 \mathcal{E}_1 + \lambda_2^2 \mathcal{F}_1) = \lambda_1^2 (B\mathcal{B}_1 + \mathcal{D}_1) + \lambda_1 \lambda_2 (B\mathcal{C}_1 + C\mathcal{B}_1 + 2\mathcal{E}_1) + \lambda_2^2 (C\mathcal{C}_1 + \mathcal{F}_1)$ . Хвост жордановой цепочки имеет вид  $\lambda_1^2 ((b_{11})^2 + b_{12}b_{21} + d_{11}) + \lambda_1 \lambda_2 (b_{12}c_{21} + 2c_{11}b_{11} + c_{12}b_{21} + 2e_{11}) + \lambda_2^2 ((c_{11})^2 + c_{12}c_{21} + f_{11})$ . Возможны два условия для знакоопределенности хвоста:

$1^0$  — положительно определенный хвост:

$$((b_{11})^2 + b_{12}b_{21} + d_{11}) > 0,$$

$$4((b_{11})^2 + b_{12}b_{21} + d_{11})((c_{11})^2 + c_{12}c_{21} + f_{11}) - (b_{12}c_{21} + 2c_{11}b_{11} + c_{12}b_{21} + 2e_{11})^2 > 0;$$

$2^0$  — отрицательно определенный хвост:

$$((b_{11})^2 + b_{12}b_{21} + d_{11}) < 0,$$

$$4((b_{11})^2 + b_{12}b_{21} + d_{11})((c_{11})^2 + c_{12}c_{21} + f_{11}) - (b_{12}c_{21} + 2c_{11}b_{11} + c_{12}b_{21} + 2e_{11})^2 > 0.$$

**Лемма 4.3.** (достаточное условие существования бифуркации рождения многообразия вырождения из особой точки). *Предположим, что полиномиальная по  $\lambda$  и  $x$  оператор-функция  $A(\lambda, x) : E_1 \rightarrow E_2$ ,  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\dim \Lambda = k$ ,  $x \in E_1$  удовлетворяет следующим условиям:*

1. точка  $x = 0$  является особой точкой оператор-функции  $A(0, x)$ ;
2.  $A(\lambda, 0) \equiv A_0$ , т. е. оператор-функцию  $A(\lambda, x)$  можно представить в виде  $A(\lambda, x) = A_0 + R_1(x) + \lambda_1 B_1(x) + \dots + \lambda_k B_k(x) + \dots$ ,  $B_i(0) = 0$ ;
3.  $\dim \text{Ker } A_0 = 1$ ;
4. хотя бы одна из оператор-функций  $A_0 + B_1(x), \dots, A_0 + B_k(x)$  имеет в нуле простое собственное значение.



Тогда при всех достаточно малых  $\lambda \neq 0$ , не принадлежащих некоторому аналитическому множеству, оператор-функция имеет гиперповерхность вырождения  $M(\lambda)$ .

*Доказательство.* Следуя доказательству леммы 2.2, будем искать решения уравнения

$$A(\lambda, x)X(\lambda, x) = 0, \quad X(\lambda, x) \neq 0, \quad \|X(\lambda, x)\| = 1.$$

Используя оператор Шмидта, это уравнение можно переписать в виде

$$[\tilde{A}_0 + R_1(x) + \lambda_1 B_1(x) + \dots + \lambda_k B_k(x) + \dots]X(\lambda, x) = \langle X(\lambda, x), e_1^* \rangle u_1,$$

откуда

$$X(\lambda, x) = \langle X(\lambda, x), e_1^* \rangle (I + \Gamma R_1(x) + \lambda_1 \Gamma B_1(x) + \dots + \lambda_k \Gamma B_k(x) + \dots)^{-1} e_1.$$

Последнее уравнение эквивалентно

$$\langle (I + \lambda R_1(x) + \lambda_1 \Gamma B_1(x) + \dots + \lambda_k \Gamma B_k(x) + \dots)^{-1} e_1, e_1^* \rangle = 1,$$

а это уравнение, в свою очередь, может быть представлено как

$$0 = \langle [R_1(x) + \lambda_1 B_1(x) + \dots + \lambda_k B_k(x) + \dots] e_1, u_1^* \rangle + \dots \quad (4.6)$$

В силу формулы  $(I + K)^{-1} = I - K + K^2(I + K)^{-1}$  все слагаемые правее выписанных имеют степень  $\geq 2$  по переменной  $x$  (здесь  $K = R_1(x) + \lambda_1 B_1(x) + \dots + \lambda_k B_k(x) + \dots$  так, что каждое его слагаемое содержит  $x$  как минимум в первой степени). С другой стороны, уравнение (4.6) можно представить в виде  $x_1 a_{10\dots 0}(\lambda) + \dots + x_n a_{00\dots 1}(\lambda) + x_1^2 a_{20\dots 0}(\lambda) + \dots = 0$ , где  $a_{ij\dots s}(\lambda)$  — аналитические функции от  $\lambda$ . Заметим, что так как  $x = 0$  является особой точкой невозмущенной оператор-функции, то слагаемое  $\langle R_1(x) e_1, u_1^* \rangle$  также имеет минимальную степень  $\geq 2$  по переменной  $x$ . Для определенности будем считать, что оператор-функция  $A_0 + B_1(x)$  имеет простое собственное значение, причем жорданова цепочка обрывается вдоль главного направления (см. определение 5.1), т. е.  $\langle B_1(e_1) e_1, u_1^* \rangle \neq 0$ . Так как коэффициент при  $\lambda_1$  у оператор-функции  $a_{10\dots 0}(\lambda)$  равен  $\langle B_1(e_1) e_1, u_1^* \rangle$ , то  $a_{10\dots 0}(\lambda)$  тождественно не равно нулю. Обозначим через  $S \in \Lambda$  множество нулей аналитической функции  $a_{10\dots 0}(\lambda)$ . Тогда для  $\lambda \in S \setminus \Lambda$  множество решений уравнения по теореме о неявной функции представляет собой гиперповерхность  $M(\lambda) : X_1 = F(X_2, \dots, X_n, \lambda)$ .  $\square$

**Теорема 4.1** (о существовании точек бифуркации). *Если оператор-функция (4.1) имеет жорданову цепочку нечетной длины, то в малой окрестности нуля оператор-функция обратима всюду, за исключением множества  $M$ , которое является либо гиперповерхностью, проходящей через ноль, либо объединением нескольких таких гиперповерхностей.*

*Доказательство.* Повторяя рассуждения из доказательства леммы 2.2, можно прийти к заключению, что точки  $\lambda$ , в которых оператор-функция  $A_0 x - R_1(\lambda) x - R_2(\lambda, \lambda) x - \dots - R_m(\lambda, \dots, \lambda) x$  необратима, являются решениями уравнения

$$\langle (I - \Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda, \lambda) + \dots + R_m(\lambda, \dots, \lambda)])^{-1} e_1, e_1^* \rangle = 1$$

или

$$\langle \Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda, \lambda) + \dots + R_m(\lambda, \dots, \lambda)](I - \Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda, \lambda) + \dots + R_m(\lambda, \dots, \lambda)])^{-1} e_1, e_1^* \rangle = 0. \quad (4.7)$$

Имеет место формула

$$(I - \Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda, \lambda) + \dots + R_m(\lambda, \dots, \lambda)])^{-1} e_1 = J^1 + J^2(\lambda) + \dots + J^p(\lambda, \dots, \lambda) + \dots \quad (4.8)$$

Действительно, очевидно, что

$$(I - \Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda, \lambda) + \dots + R_m(\lambda, \dots, \lambda)])^{-1} e_1 = S^0 + S^1(\lambda) + \dots + S^{p-1}(\lambda, \dots, \lambda) + \dots,$$

где  $S^i(\lambda, \dots, \lambda)$  — полилинейная функция со значениями в  $E_1$ . Применяя к обеим частям оператор  $(I - \Gamma[R_1(\lambda) + R_2(\lambda, \lambda) + \dots + R_m(\lambda, \dots, \lambda)])$ , получим (если, например,  $p < m$ ):

$$e_1 = S^0 + [S^1(\lambda) - \Gamma R_1(\lambda) S^0] + \dots + [S^{p-1} - \Gamma R_1(\lambda) S^{p-2} - \Gamma R_2(\lambda, \lambda) S^{p-3} - \dots - \Gamma R^{p-1}(\lambda, \dots, \lambda) S^0] + \dots$$

Откуда следует, что  $S^0 = e_1$ ,  $S^1(\lambda) = J^2(\lambda)$ ,  $\dots$ ,  $S^{p-1}(\lambda, \dots, \lambda) = J^p(\lambda, \dots, \lambda)$ . В силу формулы (4.6) все слагаемые в (4.7) степени меньше  $p$  обратятся в ноль и, по крайней мере, одно из слагаемых степени  $p$  в ноль не обратится. Сделав линейную замену переменных в пространстве  $\Lambda$ ,

можно получить, что отличен от нуля коэффициент при мономе  $\lambda_1^p$ . В силу теоремы деления Мальгранжа [3] существует необратимая в окрестности нуля функция  $H(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  такая, что после умножения на уравнение (4.7) примет вид

$$\lambda_1^p + u_1(\lambda_2, \dots, \lambda_k)\lambda_1^{p-1} + \dots + u_{p-1}(\lambda_2, \dots, \lambda_k)\lambda_1 + u_p(\lambda_2, \dots, \lambda_k) = 0.$$

Так как  $p$  нечетно, то множество вещественных решений этого уравнения состоит из одной или нескольких гиперповерхностей.  $\square$

**Замечание 4.3.** Следующий пример иллюстрирует множество (уже не являющееся многообразием) вырождения в случае, когда оператор-функция  $A_0 + R(\cdot, \lambda)$  имеет цепочку нечетной длины. Рассмотрим оператор-функцию

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Жорданова цепочка состоит из трех вектор-функций:  $J^1 = (1, 0, 0)$ ,  $J^2(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda_2)(0, 1, 0)$  и  $J^3(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(0, 0, 1)$ , а уравнение (4.7) примет вид  $(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3) = 0$ .

Таким образом, множество вырождения состоит из трех плоскостей  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $\lambda_3 = \lambda_2$ ,  $\lambda_1 = \lambda_3$ , пересекающихся по прямой  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ .

Рассмотрим теперь оператор-функцию вида  $A_0x - R_1(\lambda)x - R_2(\lambda, \lambda)x - \dots - R_m(\lambda, \dots, \lambda)x$ , у которой  $\dim \text{Ker } A_0 = \dim \text{coKer } A_0 = r$  и  $\text{Ker } A_0 = \{\varphi_i\}_1^r$ ,  $\text{Ker } A_0^* = \{\psi_i\}_1^r$ . Предположим сначала, что все жордановы цепочки элементов  $\varphi_i$  имеют единичную длину. В этом случае будем говорить, что элементы  $\{\varphi_i\}_1^r$  образуют полный жорданов набор, если

$$D_r(\lambda) = \det \|\langle R_1(\lambda)\varphi_i, \psi_j \rangle\| \neq 0. \quad (4.9)$$

Здесь  $D_r(\lambda)$  в формуле (4.9) является однородным полиномом от  $\lambda$  степени  $r$ .

**Замечание 4.4.** Если  $\det \|\langle R_1(\lambda)\varphi_i, \psi_j \rangle\| \neq 0$ , то элементы пространства  $L\{\Lambda \rightarrow E_2\} : \{R_1(\lambda)\varphi_1, \dots, R_1(\lambda)\varphi_r\}$  линейно независимы над подпространством  $\text{Im } A_1$ .

Действительно, пусть существуют не равные одновременно нулю константы  $s_1, \dots, s_r$  такие, что  $s_1R_1(\lambda)\varphi_1 + \dots + s_rR_1(\lambda)\varphi_r = K(\lambda) \in \text{Im } A_1$ , или  $\langle \langle K(\lambda), \Psi_{ij} \rangle \rangle = 0$ ,  $i = 1, \dots, r$ ,  $j = 1, \dots, k$ , где  $\Psi_{ij} = \xi_j \otimes \psi_i$ . Значит,  $\langle K(\xi_j), \psi_i \rangle = 0$  для любых  $j = 1, \dots, k$ ,  $i = 1, \dots, r$ , т. е. для любого  $\lambda$  имеем  $\langle K(\lambda), \psi_i \rangle = 0$ . Отсюда следует, что для любого  $\lambda$  выполнено  $s_1\langle R_1(\lambda)\varphi_1, \psi_i \rangle + \dots + s_r\langle R_1(\lambda)\varphi_r, \psi_i \rangle = 0$  и поэтому  $\det \|\langle R_1(\lambda)\varphi_i, \psi_j \rangle\| \equiv 0$ .

Обратное неверно, что легко видеть из следующего примера. Пусть  $\dim E_1 = \dim E_2 = 2$ ,  $A_0 = 0$ , т. е.  $\dim \text{Ker } A_0 = 2$  и  $\text{Ker } A_0 = \{e_1, e_2\}$ ,  $\text{Ker } A_0^* = \{u_1^*, u_2^*\}$ ,  $\dim \Lambda = 2$ . Пусть  $A_0 - R_1(\lambda)$  имеет вид

$$[A_0 - R_1(\lambda)](x)(\lambda) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

т. е.  $R_1(\lambda)e_1 = \lambda_1 u_1$  и  $R_1(\lambda)e_2 = \lambda_2 u_1$ . Эти функции линейно независимы над подпространством  $\text{Im } A_1 = \{0\}$ , но  $\det \|\langle R_1(\lambda)e_i, u_j^* \rangle\| \equiv 0$ .

**Теорема 4.2** (о точках бифуркации). *Если оператор-функция (4.1) имеет  $r$  жордановых цепочек единичной длины, образующих полный жорданов набор, и  $r$  нечетно, то в малой окрестности нуля оператор-функция обратима всюду, за исключением множества  $M$ , которое является либо гиперповерхностью, проходящей через ноль, либо объединением нескольких таких гиперповерхностей.*

*Доказательство.* Как в лемме 2.2 и теореме 4.1, будем искать, при каких значениях  $\lambda$  разрешимо уравнение

$$[A_0 - R_1(\lambda) - R_2(\lambda, \lambda) - \dots - R_m(\lambda, \dots, \lambda)]X(\lambda) = [A_0 - R(\lambda)]X(\lambda) = 0. \quad (4.10)$$

Для простоты будем считать, что  $\varphi_i = e_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  и  $\psi_i = u_i^*$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Введем оператор Шмидта по формуле ( $\Gamma = (\tilde{A}_0)^{-1}$ ):  $\tilde{A}_0 = A_0 + \sum_{i=1}^r \langle \cdot, e_i^* \rangle u_i$ . Тогда формула (4.10) переписется в

виде  $\tilde{A}_0 X(\lambda) = R(\lambda)X(\lambda) + \sum_{i=1}^r \langle X(\lambda), e_i^* \rangle u_i \Rightarrow X(\lambda) = \Gamma R(\lambda)X(\lambda) + \sum_{i=1}^r \langle X(\lambda), e_i^* \rangle e_i$ . Таким образом, решение уравнения (4.10) имеет вид

$$X(\lambda) = \sum_{i=1}^r \langle X(\lambda), e_i^* \rangle (I - \Gamma R(\lambda))^{-1} e_i.$$

Применение функционалов  $e_j^*, j = 1, \dots, r$ , дает систему  $\langle X(\lambda), e_j^* \rangle = \langle \sum_{i=1}^r \langle X(\lambda), e_i^* \rangle (I - \Gamma R(\lambda))^{-1} e_i, e_j^* \rangle$ . Для того чтобы эта система имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы  $\det \|\langle (I - \Gamma R(\lambda))^{-1} e_i, e_j^* \rangle - \delta_{ij}\| = 0 \Rightarrow$

$$\det \|\langle \Gamma R(\lambda)(I - \Gamma R(\lambda))^{-1} e_i, e_j^* \rangle\| = 0. \quad (4.11)$$

Раскрывая определитель, уравнение можно переписать в виде

$$D_r(\lambda) + \dots = 0. \quad (4.12)$$

Здесь члены, входящие в «многоточие», имеют степени, бóльшие  $r$  по  $\lambda$ . Сделав линейную замену переменных в пространстве  $\Lambda$ , можно получить, что отличен от нуля коэффициент при мономе  $\lambda_1^r$ . В силу теоремы деления Мальгранжа [3] существует необратимая в окрестности нуля функция  $H(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  такая, что после умножения на нее уравнение (4.12) примет вид

$$\lambda_1^r + u_1(\lambda_2, \dots, \lambda_k) \lambda_1^{r-1} + \dots + u_{p-1}(\lambda_2, \dots, \lambda_k) \lambda_1 + u_p(\lambda_2, \dots, \lambda_k) = 0.$$

В силу нечетности  $r$  множество вещественных решений этого уравнения состоит из одной или нескольких гиперповерхностей.  $\square$

**Замечание 4.5.** Следующий пример показывает, что при четных  $r$  оператор-функция может быть невырожденной в проколотой окрестности точки  $\lambda = 0$ . Пусть  $n = k = 2$  и  $A_0 = 0$ , т. е.  $e_1$  и  $e_2$  — элементы, составляющие жорданов набор. Оператор-функция  $A_0 - R(\lambda)$  задается матрицей

$$[A_0 - R_1(\lambda)](x)(\lambda) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$D_2(\lambda) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$  — т. е. жорданов набор полный.

**Замечание 4.6.** Аналогичным образом можно определить понятие полного жорданового набора в случае нескольких цепочек произвольной длины. Пусть оператор-функции  $A_0 x - R_1(\lambda)x - R_2(\lambda, \lambda)x - \dots - R_m(\lambda, \dots, \lambda)x$ , у которой  $\dim \text{Ker } A_0 = \dim \text{coKer } A_0 = r$ ,  $\text{Ker } A_0 = \{\varphi_i\}_1^r$  и  $\text{Ker } A_0^* = \{\psi_i\}_1^r$  имеет  $r$  жордановых цепочек:  $J_i^1, J_i^2(\lambda), \dots, J_i^{p_i}(\lambda, \dots, \lambda), i = 1, \dots, r$ . Будем говорить, что они образуют *полный жорданов набор*, если (считая для простоты  $m > p_i$ )

$$\det \|\langle R_1(\lambda) J_i^{p_i} + R_2(\lambda, \lambda) J_i^{p_i-1} + \dots + R_{p_i}(\lambda, \dots, \lambda) J_i^1, \psi_j \rangle\| \neq 0$$

или, используя понятие  $R$ -образа элемента жордановой цепочки,

$$D_k(\lambda) = \det \|\langle R J_i^{p_i}, \psi_j \rangle\| \neq 0 \quad (k = p_1 + \dots + p_r).$$

**Теорема 4.3** (о точках бифуркации). *Если оператор-функция (4.1) имеет  $r$  жордановых цепочек, образующих полный жорданов набор, и сумма их длин нечетна, то в малой окрестности нуля оператор-функция обратима всюду, за исключением множества  $M$ , которое является либо гиперповерхностью, проходящей через ноль, либо объединением нескольких таких гиперповерхностей.*

*Доказательство.* Доказательство практически содержится в доказательствах теорем 4.1 и 4.2. Так же, как в теореме 4.2, решение уравнения (4.10) сводится к (4.11). Для вычисления определителя в (4.11) используется формула (4.8).

$$\begin{aligned} R(\lambda)(I - \Gamma R(\lambda))^{-1} e_i &= \\ &= (R_1(\lambda) + R_2(\lambda, \lambda) + \dots + R_m(\lambda, \dots, \lambda)) [J_i^1 + J_i^2(\lambda) + \dots + J_i^{p_i}(\lambda, \dots, \lambda) + \dots] = \\ &= R J_i^1 + R J_i^2(\lambda) + \dots + R J_i^{p_i}(\lambda, \dots, \lambda) + \dots \end{aligned}$$

Так как при  $s < p_i$   $\langle RJ_i^s, \psi_j \rangle = 0$ , то  $\langle \Gamma R(\lambda)(I - \Gamma R(\lambda))^{-1} e_i, e_j^* \rangle = \langle RJ_i^{p_i}, \psi_j \rangle + \dots$ . Здесь  $\langle RJ_i^{p_i}, \psi_j \rangle$  является  $p_i$ -линейной формой по  $\lambda$ , а остальные члены имеют более высокие порядки по  $\lambda$ . Поэтому

$$\det \|\langle R(\lambda)(I - \Gamma R(\lambda))^{-1} e_i, e_j^* \rangle\| = D_k(\lambda) + \dots$$

Дальнейшая часть доказательства повторяет окончание доказательства теоремы 4.2.  $\square$

Следующий пример показывает наличие бифуркации рождения многообразия вырождения из особой точки в случае существования нескольких цепочек единичной длины. Пусть оператор-функция  $A(\lambda, x)$  имеет вид ( $n = r = k = 2$  и  $A_0 = 0$ ):

$$A(\lambda, x) = \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 - \lambda_1 & x_2 + \lambda_2 \\ -x_2 + \lambda_2 & x_1 + \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Точка  $(0, 0)$  является особой для оператор-функции  $A(0, x)$ , так как оператор-функция  $A(0, x)$  обратима при  $0 < \|x\| < \lambda$ , в то время как оператор-функция  $A(\lambda, x)$  имеет многообразие вырождения  $x_1^2 + x_2^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$ .

### 5. ВЫРОЖДЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этом разделе результаты разделов 2, 3 применяются к вопросам существования и единственности вырожденных ДУ вида

$$[A_0 + R(\cdot, x)]x' = Bx. \quad (5.1)$$

Предположим, что оператор-функция  $A_0 + R(\cdot, x)$  имеет в нуле простое собственное значение, т. е. жорданова цепочка состоит только из одного элемента  $N(A_0) = \text{Ker } A_0$ . Тогда в силу леммы 2.2 в окрестности нуля существует гиперповерхность  $M$ , на которой оператор-функция  $A_0 + R(\cdot, x)$  вырождается, т. е. имеет нуль  $\Phi(x) = (I + \Gamma R(\cdot, x))^{-1} e_1$ , удовлетворяющий условию  $\langle \Phi(x), e_1^* \rangle = 1$ . Гиперповерхность  $M$  определяется уравнением

$$\langle R(\cdot, x)(I + \Gamma R(\cdot, x))^{-1} e_1, u_1^* \rangle = 0,$$

а касательное пространство к ней в точке  $x \neq 0$  — уравнением

$$x_1 \langle R(e_1, e_1), \psi \rangle + \dots + x_n \langle R(e_1, e_n), \psi \rangle = 0.$$

Вне гиперповерхности  $M$  задача Коши для уравнения (5.1) имеет единственное решение, в то время как система (5.1) на  $M$  может не иметь решений нигде (кроме точки 0), может иметь решения всюду и может иметь решения на подмногообразии  $M_1 \subset M$ .

Рассмотрим следующие уравнения вида (5.1).

1<sup>0</sup>.

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь гиперповерхность  $M$  определяется уравнением  $x_1 = 0$ , система на гиперповерхности примет вид  $x_2' = x_2$ . Таким образом, через любую точку на  $M$  проходит решение, лежащее на гиперповерхности  $M$ .

2<sup>0</sup>.

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $M$  по-прежнему определяется уравнением  $x_1 = 0$ , но система на гиперповерхности следующая:  $x_2 = 0$ ,  $x_2' = 0$ . На гиперповерхности  $M$  решение существует только в точке  $(0, 0)$ .

3<sup>0</sup>.

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Гиперповерхность  $M$  определяется уравнением  $x_1 = 0$ , а система на ней имеет вид  $x_1 = 0$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_2' = x_2$ . Таким образом, на гиперповерхности  $M$  решения существуют только на прямой  $(0, x_2, 0)$ .

**Определение 5.1.** ОЖЦ оператор-функции  $A_0 + R(\cdot, x)$  обрывается вдоль главного направления  $e_1$ , если  $\langle R(e_1, e_1), \psi \rangle \neq 0$ .

**Определение 5.2.** Оператор-функция  $A_0 + R(\cdot, x)$  не вырождена вдоль гиперповерхности  $M$ , если она не имеет нулей на касательном расслоении к  $M$ .

**Лемма 5.1.** Если у оператор-функции  $A(x) = A_0 + R(\cdot, x)$  жорданова цепочка обрывается вдоль главного направления, то  $A(x)$  не вырождена вдоль гиперповерхности  $M$  в окрестности точки  $0$ .

*Доказательство.* Оператор-функция  $A(x)$  имеет нуль  $e_1$  в точке  $x = 0$ , а касательное пространство к  $M$  имеет нормаль  $(\langle R(e_1, e_1), \psi \rangle, \dots, \langle R(e_1, e_n), \psi \rangle)$ . Отсюда следует, что в достаточно малой окрестности точки  $x = 0$  нуль оператор-функции  $A(x)$  не будет принадлежать касательному пространству к  $M$ , т. е.  $A(x)$  не вырождена вдоль гиперповерхности  $M$ .  $\square$

Однако, если жорданова цепочка оператор-функции  $A(x)$  обрывается вдоль неглавного направления  $(\langle R(e_1, e_1), \psi \rangle = 0)$ , то  $A(x)$  может быть вырождена вдоль гиперповерхности  $M$ . Если, например,

$$A(x) = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то гиперповерхность  $M$  определяется уравнением  $x_2 = 0$  и ноль  $e_1$  принадлежит касательному пространству к  $M$  в любой точке окрестности  $x = 0$ .

В то же время, если ОЖЦ  $A(x)$  обрывается вдоль неглавного направления  $\langle R(e_1, e_1), \psi \rangle = 0$ , то  $A(x)$  может вырождаться вдоль гиперповерхности  $M$ :

$$A(x) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $M$  определена уравнением  $x_2 = 0$  и ноль-элемент  $e_1$  принадлежит касательному пространству к  $M$  в любой точке окрестности точки  $x = 0$ .

#### А. Решения системы (5.1), принадлежащие гиперповерхности вырождения $M$ .

**Теорема 5.1.** Пусть оператор-функция  $A(x)$  имеет в нуле простое собственное значение, причем ее жорданова цепочка обрывается вдоль главного направления. Если к тому же для любого  $x \in M$  выполнено  $\forall x \in \text{Im } A(x)$ , то через любую точку окрестности  $x = 0$  на  $M$  проходит единственное решение (5.1), принадлежащее  $M$ .

*Доказательство.* Если у оператор-функции  $A(x) = A_0 + R(\cdot, x)$  жорданова цепочка обрывается вдоль главного направления, то в окрестности  $x = 0$  уравнение гиперповерхности  $M$  можно записать в виде  $x_1 = F(x_2, \dots, x_n)$ , т. е. в координатной форме гиперповерхность  $M$  принимает вид  $(F(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$ . Поэтому уравнение (4.1) можно переписать в виде следующей системы:

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_2} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_2 \\ x'_3 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(x) \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

При достаточно малых  $x$  отображение (\*)

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_2} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

определяемое левой частью системы (5.1), не имеет нулей, так как выражение (\*\*)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_2} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_2 \\ x'_3 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix},$$

совпадающее с левой частью системы (5.1) без первой матрицы, представляет собой касательный вектор к гиперповерхности  $M$  в точке  $x$ , в то время как оператор-функция  $A(x)$  не обращается в ноль на касательном расслоении  $TM$ . Поэтому отображение (\*) при любом достаточно малом

$x$  взаимно однозначно отображает касательное многообразие к  $(n - 1)$ -мерному подпространству  $(x_2, \dots, x_n)$  на образ оператора  $A(x)$ , который тоже имеет размерность  $n - 1$ . Вводя соответствующий обратный оператор  $T(x)$ , получаем систему

$$\begin{pmatrix} x'_2 \\ x'_3 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = T(x) \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(x) \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

которая имеет единственное решение, проходящее через каждую точку окрестности нуля пространства  $(x_2, \dots, x_n)$ .  $\square$

**Замечание 5.1.** В случае, когда ОЖЦ оператор-функции  $A(x)$  обрывается вдоль неглавного направления, система (5.1) на гиперповерхности  $M$  может не иметь ненулевых решений.

Например, система

$$\begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

эквивалентная  $x_2 x'_1 = x_1$ ;  $x'_2 = x_2$  на гиперповерхности  $M$ , определяемой уравнением  $x_2 = 0$ , имеет решение  $(0, 0)$ .

Однако возможен случай, когда решение, и не единственное, проходит через любую точку  $M$ : система

$$\begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \sim x_2 x'_1 = x_2; \quad x'_2 = x_2$$

для любой дифференцируемой функции  $f(t)$ ,  $f(0) = 0$ , проходящей через любую точку  $(x_1^0, 0)$ , гиперповерхности  $M$  имеет лежащее в  $M$  решение  $(x_1^0 + f(t), 0)$ .

Если жорданова цепочка оператор-функции  $A(x)$  обрывается вдоль неглавного направления, справедлив следующий аналог теоремы 5.1.

**Теорема 5.2.** Пусть оператор-функция  $A(x)$  имеет в нуле простое собственное значение, причем ее жорданова цепочка обрывается вдоль неглавного направления, но при этом  $A(x)$  не вырождена вдоль гиперповерхности  $M$  в некоторой проколотой окрестности нуля. Если к тому же для любого  $x \in M$  выполнено  $Vx \in \text{Im}(A(x))$ , то через любую точку окрестности  $x = 0$  в  $M$  проходит единственное решение (5.1), принадлежащее  $M$ .

Доказательство теоремы 5.2 практически не отличается от доказательства теоремы 5.1.

В следующем примере

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ x_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

гиперповерхность  $M$  определяется уравнением  $x_2 = (x_1)^2$  и в проколотой окрестности нуля на  $M$  оператор-функция  $A(x) = \begin{pmatrix} (x_1)^2 & x_1 \\ x_1 & 1 \end{pmatrix}$  имеет ноль-элемент  $(-1, x_1)$ , не принадлежащий касательному подпространству  $M$  в точке  $(x_1, (x_1)^2)$ .

Эта система на гиперповерхности  $M$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} (x_1)^2 & x_1 \\ x_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ (x_1)^2 \end{pmatrix}$$

и при  $x_1 \neq 0$  сводится к однозначно разрешимому уравнению  $(x_1 + 2)x'_1 = x_1$ .

**Теорема 5.3.** Пусть оператор-функция  $A(x)$  имеет в нуле простое собственное значение, причем ее жорданова цепочка обрывается вдоль неглавного направления и в некоторой окрестности  $x = 0$  ноль-элемент  $\Phi(x)$  оператор-функции  $A(x)$  принадлежит касательному расслоению  $TM$ . Если к тому же для любого  $x \in M$ ,  $Vx \in \text{Im}(A(x)|_{TM(x)})$ , то в окрестности  $x = 0$  существует  $(n - 2)$ -мерное подмногообразие  $N$  гиперповерхности  $M$ , на котором уравнение (5.1) однозначно разрешимо, т. е. через любую точку  $N$  проходит единственное решение (5.1), принадлежащее  $N$ .

*Доказательство.* Не ограничивая общности, можно считать, что у оператор-функции  $A(x) = A_0 + R(\cdot, x)$  жорданова цепочка обрывается вдоль направления  $x_n$ , т. е. в окрестности  $x = 0$  уравнение гиперповерхности  $M$  можно записать в виде  $x_n = F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  или в координатной форме  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}))$ . В достаточно малой окрестности  $x = 0$  определим подмногообразие  $N$  гиперповерхности  $M$ , отнеся к нему точки:

$$N = \{x | x = (0, x_2, \dots, x_{n-1}, F(0, x_2, \dots, x_{n-1}))\}.$$

Перепишем систему (5.1) в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ \dots \\ x'_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \dots \\ F(x) \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

так как при малых  $x$  векторы в левой части имеют вид

$$(0, x'_2, \dots, x'_{n-1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} x'_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} x'_{n-1}).$$

Нуль-элементы  $\Phi(x)$  оператор-функции  $A(x)$  не могут принадлежать  $TN$ , поскольку они мало отличаются от  $e_1$  и их первая координата не обращается в ноль. Поэтому оператор  $A(x)$  взаимно однозначно отображает  $TN(x)$  на  $\text{Im}(A(x)|_{TM(x)})$ , оба пространства имеют размерность  $(n-2)$ , так как  $Bx \in \text{Im}(A(x)|_{TM(x)})$  для  $\forall x \in M$ . Тогда введение обратного оператора  $T(x)$  дает однозначно разрешимую систему  $(x'_2, \dots, x'_{n-1})^T = T(x)\tilde{b}(x_2, \dots, F(x))$ , где в матрице  $\tilde{b}$  первая строка состоит из нулей, поскольку  $Bx \in \text{Im}(A(x)|_{TM(x)})$  для любого  $x \in M$ .  $\square$

**Замечание 5.2.** Следующий пример показывает, что условие  $Bx \in \text{Im}(A(x)|_{TM(x)})$  нельзя заменить на условие  $Bx \in \text{Im}(A(x))$ :

$$\begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Гиперповерхность  $M$  определяется уравнением  $x_2=0$ , система на ней имеет решение  $x_1 = 0$ ,  $x_3 = 0$ .

**Замечание 5.3.** Доказательства теорем 5.1–5.3 без изменения переносятся на системы вида  $(A_0 + R(\cdot, x))x' = H(x)$ , где  $H(x)$  — гладкая нелинейная функция.

**В. Решения системы (5.1), начинающиеся на гиперповерхности вырождения  $M$ , но целиком ей не принадлежащие.** Следующий пример показывает, что решения системы (5.1), начинающиеся на гиперповерхности  $M$ , могут покидать ее. При этом может нарушаться единственность решения с заданной начальной точкой:

$$\text{diag}(x_1, 1, 1)(x'_1, x'_2, x'_3)^T = \text{diag}(1, 1, 1)(x_1, x_2, x_3)^T \sim x_1 x'_1 = x_1, x'_2 = x_2, x'_3 = x_3. \quad (5.4)$$

Здесь гиперповерхность  $M$  определяется уравнением  $x_1 = 0$ . Через любую точку  $(0, x_2^0, x_3^0) \in M$  проходят два решения:  $(0, x_2^0 \exp(t), x_3^0 \exp(t))$  — принадлежащее  $M$  и  $(t, x_2^0 \exp(t), x_3^0 \exp(t))$  — не принадлежащее  $M$ .

Для оператор-функции  $A(x)$ , имеющей в нуле простое собственное значение с жордановой цепочкой, обрывающейся вдоль неглавного направления, тоже можно построить пример решений, не принадлежащих гиперповерхности вырождения: система  $(x_2 x'_1, x'_2, x'_3)^T = (0, 1, 0)^T$  имеет решение  $(0, t, 0)$ , ортогональное к гиперповерхности  $(x_1, 0, x_3)$ . Отметим, что в этом примере не выполнены условия теоремы 5.3. Возникает следующая

**Задача.** Пусть выполнены условия теоремы 5.1. Найти уравнения, определяющие решения, начинающиеся на многообразии вырождения  $M$  и не принадлежащие этому многообразию.

Применив регуляризатор Шмидта  $\tilde{A}_0, \tilde{A}_0^{-1} = \Gamma$ , перепишем уравнение (5.1) в виде:  $[\tilde{A}_0 + R(\cdot, x)]x' = Bx + \langle x', e_1^* \rangle u_1 \Rightarrow$

$$x' = [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx + \langle x', e_1^* \rangle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, \quad (5.5)$$

так как  $[\tilde{A}_0 + R(\cdot, x)]^{-1} = [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma$ . Заметим, что если  $x \in M$ , то в силу леммы 2.2 имеем  $\langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_1^* \rangle = 1$ , если же  $x$  не принадлежит  $M$ , то уравнение (5.5) может не выполняться.

В окрестности  $x = 0$  с каждой точкой  $x = (x_1, \dots, x_n)$  ассоциируем точку  $x^F$ , лежащую на многообразии вырождения  $M: x^F = (F(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$ . Ясно, что  $x = x^F + (x_1 - x_1^F)e_1$ . Запишем равенство (5.5) в координатной форме:

$$x'_1 = \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e_1^* \rangle + x'_1 \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_1^* \rangle, \dots \dots \dots x'_n = \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e_n^* \rangle + x'_1 \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_n^* \rangle. \tag{5.6}$$

Из первого уравнения (5.6) следует

$$x'_1 (1 - \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_1^* \rangle) = \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e_1^* \rangle. \tag{5.7}$$

Преобразуем левую часть равенства (5.7):

$$x'_1 (1 - \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_1^* \rangle) = x'_1 (\langle [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} e_1, e_1^* \rangle - \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_1^* \rangle) = x'_1 (\langle [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} e_1 - [I + \Gamma R(\cdot, x^F + (x_1 - x_1^F)e_1)]^{-1} e_1, e_1^* \rangle) = x'_1 (x_1 - x_1^F) (\langle [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma R(\cdot, e_1) [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_1^* \rangle). \tag{5.8}$$

Так как при малых  $A$  и  $B$  верно  $[I + A]^{-1} - [I + B]^{-1} = [I + A]^{-1}(B - A)[I + B]^{-1}$  (см., например, [14]), то левая часть равенства (5.7) приводится к виду  $\langle x', e_1^* \rangle (x_1 - x_1^F) a(x)$ , где функция  $a(x)$  при малых  $x$  близка к  $\langle \Gamma R(e_1, e_1), e_1^* \rangle = 1$ . Перейдем теперь к правой части равенства (5.7). Заметим, что  $\langle [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma Bx^F, e_1^* \rangle = 0$ . Действительно,  $\langle Bx^F, ([I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma)^* e_1^* \rangle = 0$ , согласно равенству  $[I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma^* = \Gamma^* [I + R^*(\cdot, x^F) \Gamma^*]^{-1} = [I + \Gamma^* R^*(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma$  и в силу условий теоремы 5.1 и леммы 2.4. При использовании этого равенства правую часть (5.7) можно записать в следующем виде:

$$\langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx - [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma Bx^F, e_1^* \rangle = \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx^F - [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma Bx^F, e_1^* \rangle + (x_1 - x_1^F) \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma B e_1, e_1^* \rangle. \tag{5.9}$$

Далее,

$$[I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} - [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} = [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \{ [I + \Gamma R(\cdot, x^F)] - I - \Gamma R(\cdot, x) \} [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} = (x_1 - x_1^F) [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma R(\cdot, e_1) [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1}$$

и таким образом, все члены равенства (5.7) имеют множитель  $(x_1 - x_1^F)$ . Система (5.6) распадается на две. Первая система в качестве первого уравнения будет иметь  $x_1 = x_1^F$ , откуда соответственно:

$$x'_1 = \frac{\partial F}{\partial x_2} x'_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} x'_{n-1}, x'_2 = \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e_2^* \rangle + x'_1 \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_2^* \rangle, \dots \dots \dots x'_n = \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e_n^* \rangle + x'_1 \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_n^* \rangle. \tag{5.10}$$

Решения этой системы принадлежат многообразию вырождения  $M$ . Вторая система имеет вид:

$$a(x) x'_1 = \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma B e_1, e_1^* \rangle + \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma R(\cdot, e_1) [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma Bx^F, e_1^* \rangle, x'_2 = \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e_2^* \rangle + x'_1 \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_2^* \rangle, \dots \dots \dots x'_n = \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e_n^* \rangle + x'_1 \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_n^* \rangle, \tag{5.11}$$

и ее решения могут многообразию  $M$  не принадлежать.

**Замечание 5.4.** Может случиться, что решения второй системы тоже принадлежат многообразию  $M$ : система  $[\text{diag}(x_1, 1, 1)](x'_1, x'_2, x'_3)^T = 0 \sim x_1 x'_1 = 0, x'_2 = 0, x'_3 = 0$  имеет в качестве решений начинающиеся на гиперповерхности  $M$ , т. е. на плоскости  $(x_2, x_3)$ .



**Теорема 5.4.** Пусть оператор-функция  $A(x)$  имеет в нуле простое собственное значение, причем ее жорданова цепочка обрывается вдоль главного направления. Если к тому же для любого  $x \in M$ ,  $Vx \in \text{Im}(A(x))$  и  $\langle \Gamma V e_1, e_1^* \rangle \neq 0$ , то через любую точку окрестности  $x = 0$  в  $M$  проходит единственное решение (5.1), не принадлежащее  $M$ .

Для того чтобы решение, начинающееся на гиперповерхности  $M$ , определяемое второй системой, покидало гиперповерхность  $M$ , достаточно, чтобы в некоторой точке гиперповерхности  $M$  касательный вектор к решению не принадлежал касательной плоскости к гиперповерхности, определяемой формулой

$$x_1 - x_1^F = \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_2 - x_2^F) + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}(x_n - x_n^F). \quad (5.12)$$

Ясно, что при  $x^F = 0, x'_1 = \langle \Gamma V e_1, e_1^* \rangle, x'_2 = 0, \dots, x'_n = 0$ . Таким образом, если  $\langle \Gamma V e_1, e_1^* \rangle \neq 0$ , то касательный вектор к решению не принадлежит касательной плоскости к гиперповерхности  $M$ . В силу непрерывности то же самое справедливо для  $x^F$ , близких к нулю. Для точек  $x^F$ , принадлежащих гиперповерхности  $M$ , обозначим через  $N_x$  нормаль к  $M$  в этой точке.  $N_x$  можно рассматривать как элемент пространства  $E_1^*$ , обращаящийся в ноль на подпространстве  $TM(x)$ .

**Теорема 5.5.** Пусть выполнены условия теоремы 5.3 и нормаль  $N_x$  к  $M$  является собственным вектором оператора  $A^*(x)\Gamma^*$ , т. е.  $A^*(x)\Gamma^* N_x = \lambda(x)N_x$ . Тогда решения, начинающиеся на гиперповерхности  $M$ , остаются на ней.

*Доказательство.* Повторим выкладки, предшествующие теореме 5.4, с той разницей, что гиперповерхность  $M$  определяется уравнением:

$$x_n = F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

Поэтому каждой точке  $x$ , близкой к нулю, сопоставим точку  $x^F = (x_1, x_2, \dots, F(x_1, \dots, x_{n-1}))$ , лежащую на многообразии вырождения  $M$ , так что  $x = x^F + (x_n - x_n^F)e_n$ .

Как и выше, преобразуем уравнение (5.7). Левая часть приводится к виду  $\langle x', e_1^* \rangle (x_n - x_n^F)b(x)$ , где функция

$$b(x) = (\langle [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma R(\cdot, e_n) [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_1^* \rangle)$$

при малых  $x$  близка к  $\langle \Gamma R(e_1, e_n), e_1^* \rangle = 1$ . Аналогичным образом правая часть уравнения (5.7) приводится к виду

$$(x_n - x_n^F)(\langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma V e_n, e_1^* \rangle + \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma R(\cdot, e_n) [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma B x^F, e_1^* \rangle).$$

Таким образом, как и в теореме 5.4, система (5.6) распадается на две. В первой из получившихся систем первое уравнение имеет вид  $x_n = x_n^F$  и поэтому все решения этой системы, если они существуют, принадлежат гиперповерхности  $M$ .

Выпишем вторую систему:

$$x'_1 = (\langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma V e_n, e_1^* \rangle + \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma R(\cdot, e_n) [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma B x^F, e_1^* \rangle) / b(x),$$

$$x'_2 = \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma B x, e_2^* \rangle + x'_1 [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_2^*,$$

.....

$$x'_n = \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma B x, e_n^* \rangle + x'_1 [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_n^*.$$

(5.13)

Обозначение

$$G(x) = (\langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma V e_n, e_1^* \rangle + \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma R(\cdot, e_n) [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma B x^F, e_1^* \rangle) / b(x)$$

дает систему

$$x'_1 = G(x),$$

$$x'_2 = \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma B x, e_2^* \rangle + G(x) [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_2^*,$$

.....

$$x'_n = \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma B x, e_n^* \rangle + G(x) [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_n^*.$$

(5.14)

Нужно показать, что правая часть этой системы в точках гиперповерхности  $M$  принадлежит касательному пространству к  $M$ , т. е. ортогональна вектору  $N_x = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}, -1 \right)$ .

Покажем сначала, что вектор  $G(x) = (1, \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_2^* \rangle, \dots, \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_n^* \rangle)$  принадлежит касательному пространству к  $M$ , если  $x$  принадлежит  $M$ . Так как в силу леммы 2.3  $\langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_2^* \rangle = 1$ , то этот вектор пропорционален  $\Phi(x)$ , который по условиям теоремы 4.3 принадлежит касательному пространству к  $M$ . Остается показать, что вектор  $(0, \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e_2^* \rangle, \dots, \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e_n^* \rangle)$  ортогонален  $N_x$ . В силу формулы  $\langle [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma Bx^F, e_1^* \rangle = 0$  его можно переписать в виде

$$(\langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e_1^* \rangle, \dots, \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e_n^* \rangle). \quad (5.15)$$

Так как при малых  $x$  оператор  $([I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1})^*$  близок к единичному, функционалы  $([I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1})^* e_1^*, \dots, ([I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1})^* e_n^*$  образуют базис пространства  $E_1^*$ . Поэтому (5.15) являются координатами вектора  $\Gamma Bx$  в некотором базисе пространства  $E_1$ . По условиям теоремы 5.3 при  $x \in M$ ,  $Bx \in \text{Im}(A(x)|_{TM(x)})$ , т. е. можно считать, что  $Bx = A(x)\omega$ , где  $\omega \in TM(x)$ . Тогда  $\langle \Gamma Bx, N_x \rangle = \langle \Gamma A(x)\omega, N_x \rangle = \langle \omega A^*(x)\Gamma^*, N_x \rangle = \lambda(x)\langle \omega, N_x \rangle = 0$  и доказательство закончено.  $\square$

**Замечание 5.5.** В условиях теоремы 5.3 единственность решений также может нарушаться, хотя все ответвляющиеся решения остаются на гиперповерхности вырождения  $M$ :

$$\begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Здесь подмногообразие  $N$  из теоремы 5.3 — это ось  $x_3$ . Но через каждую точку этого подмногообразия проходит множество других решений системы, лежащих на гиперповерхности  $M$ :  $(f(t), 0, x_3^0 e^t)$ .

## 6. ОСОБЫЕ ТОЧКИ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**А. Разрешение особенностей.** Пусть  $N(x) \in L\{E_1 \rightarrow E_2\}$  — полиномиальная функция  $x$  обратима в проколотой окрестности точки  $x_0$ . В лемме 4.2 были приведены достаточные условия, при выполнении которых оператор-функция  $A_0 + N(x)$  обратима в проколотой окрестности точки  $x_0$ . В этом случае точка  $x_0$  — особая точка системы (5.1). Ниже, используя процедуру разрешения особенностей [1, 17], исследуется поведение решений системы (5.1) в окрестности особой точки в случае малых размерностей. При  $n = 2$  система (5.1) записывается в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

где

$$a_{11}(0) = a_{12}(0) = a_{21}(0) = 0, \quad a_{22}(0) = 1. \quad (6.2)$$

**Лемма 6.1.** Если в системе (6.1)  $b_{11} \neq 0$ , т. е. оператор-функция  $A_0 - B$  имеет в нуле простое собственное значение, то особая точка  $x = 0$  может быть «разрешена» в один шаг. Если  $b_{12} \neq 0$ , она сводится к двум гиперболическим особым точкам, а при  $b_{12} = 0$  — к одной гиперболической особой точке.

*Доказательство.* В силу определения особой точки определитель матрицы оператор-функции  $A(x)$ ,  $\Delta(x) = a_{11}(x)a_{22}(x) - a_{12}(x)a_{21}(x) \neq 0$  при  $0 < \|x\| < \rho$ . Поэтому в этом проколоте круге оператор-функция  $A(x)$  обратима, матрица обратной оператор-функции имеет вид

$$\Delta^{-1} \begin{pmatrix} a_{22}(x) & -a_{12}(x) \\ -a_{21}(x) & a_{11}(x) \end{pmatrix}$$

и система записывается в виде (6.3):

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} a_{22}(x) & -a_{12}(x) \\ -a_{21}(x) & a_{11}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Эта система имеет те же траектории, что и система (6.4):

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22}(x) & -a_{12}(x) \\ -a_{21}(x) & a_{11}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

В этом можно убедиться, поделив одно уравнение на другое, т. е. подсчитав  $dx_1/dx_2$ . Учитывая формулы (6.2), систему (6.4) можно записать в виде

$$x'_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + R_1(x_1, x_2), \quad x'_2 = R_2(x_1, x_2).$$

Здесь  $R_1(x_1, x_2)$  и  $R_2(x_1, x_2)$  — полиномы, у которых все мономы имеют степень выше одного. Замена  $x_1 = u, x_2 = uv$  дает

$$u' = b_{11}u + b_{12}uv + R_1(u, uv); \quad uv' = R_2(u, uv) - v(b_{11}u + b_{12}uv + R_1(u, uv)),$$

где  $R_1(u, uv) = u^2P_1(u, v)$  и  $R_2(u, uv) = u^2P_2(u, v)$ . Поэтому второе уравнение можно сократить на  $u$ :

$$u' = b_{11}u + b_{12}uv + R_1(u, uv); \quad v' = -b_{11}v - b_{12}v^2 + R_3(u, v). \quad (6.5)$$

Заметим, что  $R_1(0, 0) = 0$  и  $R_3(0, v) = 0$  при  $u = 0$ . Поэтому на прямой  $(0, v)$  (прообраз точки  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ ) система (6.5) при  $b_{11} \neq 0$  и  $b_{12} \neq 0$  имеет две гиперболические особые точки  $(0, 0)$  и  $(0, -b_{11}/b_{12})$ . В этих точках линейная часть системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & -b_{11} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ * & -b_{11} \end{pmatrix}.$$

Если же  $b_{12} = 0$ , то система (6.4) имеет только одну гиперболическую особую точку  $(0, 0)$  с линейной частью  $\begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & -b_{11} \end{pmatrix}$ .  $\square$

Рассмотрим теперь случай  $b_{11} = 0$ . Тогда система (6.4) записывается в виде

$$x'_1 = b_{12}x_2 + R_1(x_1, x_2); \quad x'_2 = R_2(x_1, x_2).$$

Замена  $x_1 = uv, x_2 = v$  приведет ее к виду

$$v' = R_2(uv, v); \quad uv' = -uR_2(v, uv) + b_{12}v + R_1(uv, v).$$

Как и выше,  $R_1(uv, v) = v^2P_1(u, v)$ , а  $R_2(uv, v) = v^2P_2(u, v)$ , поэтому

$$v' = R_2(uv, v); \quad u' = b_{12} - uvP_2(u, v) + vP_1(u, v). \quad (6.6)$$

На прямой  $(u, 0)$ , т. е. прообразе точки  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ , система (6.6) не имеет особых точек, если  $b_{12} \neq 0$ . Далее рассматривается вырожденное дифференциальное уравнение вида

$$(A_0 + N(x))x' = P \quad (6.7)$$

с постоянным вектором  $P \in E_2$  как частный случай вырожденного дифференциального уравнения

$$(A_0 + N(x))x' = F(x), \quad (6.8)$$

для которого точка  $x = 0$  является особой точкой.

**Определение 6.1.** Особая точка уравнения (6.7) называется *устранимой*, если вектор  $P$  не принадлежит  $\text{Im } A_0$ .

Введенное определение объясняет следующая лемма.

**Лемма 6.2.** Если точка  $x = 0$  является *устранимой* особой точкой вырожденного дифференциального уравнения (6.7), то в проколотой окрестности точки  $x = 0$  его решения эквивалентны решениям уравнения  $x' = Q$ .

*Доказательство.* Так как оператор  $A_0 + N(x)$  обратим в проколотой окрестности точки  $x = 0$ , то уравнение (6.7) имеет единственное решение, начинающееся в любой точке этой проколотой окрестности. Уравнение (6.7) можно переписать в виде

$$[\tilde{A}_0 + N(x)]x' = P + \langle x', e_1^* \rangle u_1. \quad (6.9)$$

Применяя регуляризатор Шмидта  $\tilde{A}_0, \tilde{A}_0^{-1} = \Gamma$ , и отмечая обратимость оператора  $\tilde{A}_0 + N(x)$  при малых  $x$ , введем обозначение  $[\tilde{A}_0 + N(x)]^{-1} = \Gamma(x), \Gamma(0) = \Gamma$ . Тогда уравнение переписется в виде

$$x' = \Gamma(x)P + \langle x', e_1^* \rangle \Gamma(x)u_1.$$

Применение функционала  $e_1^*$  дает

$$\langle x', e_1^* \rangle = \langle \Gamma(x)P, e_1^* \rangle + \langle x', e_1^* \rangle \langle \Gamma(x)u_1, e_1^* \rangle \Rightarrow \langle x', e_1^* \rangle = \langle \Gamma(x)P, e_1^* \rangle (1 - \langle \Gamma(x)u_1, e_1^* \rangle)^{-1}$$

Таким образом, (6.7) эквивалентно уравнению

$$x' = \Gamma(x)P + \langle \Gamma(x)P, e_1^* \rangle (1 - \langle \Gamma(x)u_1, e_1^* \rangle)^{-1} \Gamma(x)u_1.$$

Выражение  $1 - \langle \Gamma(x)u_1, e_1^* \rangle$  в проколотой окрестности точки  $x = 0$  не обращается в ноль и поэтому сохраняет знак. Действительно,  $\Gamma(x)u_1 = [A_0 + \langle \cdot, e_1^* \rangle u_1 + N(x)]^{-1} u_1 \Rightarrow u_1 = [A_0 + \langle \cdot, e_1^* \rangle u_1 + N(x)] \Gamma(x)u_1 = [A_0 + N(x)] \Gamma(x)u_1 + \langle \Gamma(x)u_1, e_1^* \rangle u_1$ . Таким образом,  $(1 - \langle \Gamma(x)u_1, e_1^* \rangle) u_1 = [A_0 + N(x)] \Gamma(x)u_1$ . Оба оператора  $[A_0 + N(x)]$  и  $\Gamma(x)$  обратимы при малых  $x$ , следовательно,  $(1 - \langle \Gamma(x)u_1, e_1^* \rangle) \neq 0$  в проколотой окрестности точки  $x = 0$ . Пусть для определенности  $1 - \langle \Gamma(x)u_1, e_1^* \rangle > 0$ . Поскольку умножение на положительную скалярную функцию качественно не изменяет поведение решений системы, система (6.7) эквивалентна системе

$$x' = (1 - \langle \Gamma(x)u_1, e_1^* \rangle) \Gamma(x)P + \langle \Gamma(x)P, e_1^* \rangle \Gamma(x)u_1, \quad (6.10)$$

правая часть которой в точке  $x = 0$  равна  $\langle \Gamma P, e_1^* \rangle e_1 = \langle P, \Gamma^* e_1^* \rangle e_1 = \langle P, u_1^* \rangle e_1 \neq 0$ . Таким образом, решения системы (6.7) в малой окрестности эквивалентны решениям системы  $x' = e_1$ .  $\square$

**Замечание 6.1.** Аналогичный результат справедлив для уравнения (6.9), если  $F(0)$  не принадлежит  $\text{Im } A_0$ .

Теперь надо исследовать решения уравнения (6.7) в окрестности точки  $x = 0$  в случае, когда  $P \in \text{Im } A_0$ . Было доказано, что решения уравнения (6.7) в окрестности точки  $x = 0$  качественно эквивалентны решениям уравнения (6.10). При  $P \in \text{Im } A_0$  точка  $x = 0$  является особой точкой уравнения (6.10), так как  $\langle P, u_1^* \rangle = 0$  и  $\langle \Gamma u_1, e_1^* \rangle = 1$ . Вычислим линейную часть  $L(v)$  векторного поля, задаваемого уравнением (6.10) в точке  $x = 0$ :

$$L(v) = \left( \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \langle \Gamma(x)u_1, e_1^* \rangle}{\partial x_i} \right) \Gamma P + \left( \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \langle \Gamma(x)P, e_1^* \rangle}{\partial x_i} \right) \Gamma u_1.$$

Заметим, что, так как  $\Gamma(x) = [\tilde{A}_0 + N(x)]^{-1}$ , то  $\frac{\partial \Gamma(0)}{\partial x_i} = -\Gamma \frac{\partial N(0)}{\partial x_i} \Gamma = -\Gamma D_i N(0) \Gamma$  и, следовательно,  $L(v) = \left( \sum_{i=1}^n v_i \langle D_i N(0) e_1, u_1^* \rangle \right) \Gamma P + \left( \sum_{i=1}^n v_i \langle D_i N(0) \Gamma P, u_1^* \rangle \right) \Gamma u_1$ . Точка  $x = 0$  не может быть простым собственным значением оператор-функции  $A_0 + N(x)$  так как, в противном случае, она не будет особой точкой — оператор-функция будет необратима на гиперповерхности. Поэтому в силу замечания 4.1  $\langle D_i N(0) e_1, u_1^* \rangle = 0$  и  $L(v) = \left( \sum_{i=1}^n v_i \langle D_i N(0) \Gamma P, u_1^* \rangle \right) e_1$ . Таким образом,  $\text{Im } L \leq 1$ , и поэтому при  $n > 1$  точка  $x = 0$  заведомо не является гиперболической для векторного поля (6.10). Если же  $\langle D_1 N(0) \Gamma P, u_1^* \rangle \neq 0$ , то оператор  $L(v)$  имеет собственный вектор  $e_1$  соответствующий ненулевому собственному значению, т. е. «гиперболическая часть» оператора  $L(v)$  ненулевая. Поэтому уравнение (6.10) можно упростить, используя редукцию на центральное многообразие [18]. Это видно на примере

$$\begin{pmatrix} x_2^2 & -x_1 \\ x_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Как было показано, эта система эквивалентна следующей:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ -x_1 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $D_1 N(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  и  $\Gamma P = (0 \ 1)$ . Таким образом,  $e_1$  является собственным вектором оператора  $L(v)$  и система преобразуется к виду:  $x_1' = x_1$ ;  $x_2' = x_2^2$ .

Если же уравнение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & -x_2 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$

то система эквивалентна следующей:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ -x_2 & x_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и поэтому  $D_1N(0) = 0$ . Гиперболическая часть уравнения полностью отсутствует, и центральное многообразие совпадает со всем пространством  $x'_1 = x_2$ ;  $x'_2 = x_1^2$ .

**Замечание 6.2.** Аналогично случаю «неустранимой» особенности можно рассмотреть уравнение

$$(A_0 + N(x))x' = F(0) + Bx + M(x). \quad (6.12)$$

Предполагая, что  $F(0) \in \text{Im } A_0$ , при повторении вычислений леммы 6.2 вместо формулы (6.10) возникает формула

$$x' = (1 - \langle \Gamma(x)u_1, e_1^* \rangle) \Gamma(x)[F(0) + Bx + M(x)] + \langle \Gamma(x)[F(0) + Bx + M(x)], e_1^* \rangle \Gamma(x)u_1. \quad (6.13)$$

Для уточнения поведения решений уравнения (6.12) в окрестности нуля вычислим линейную часть векторного поля  $\mathcal{L}$  (6.13). Так как

$$\Gamma(x) = \Gamma - \Gamma N(x)\Gamma + \dots,$$

$$1 - \langle \Gamma(x)u_1, e_1^* \rangle = \langle \Gamma N(x)\Gamma u_1, e_1^* \rangle + \dots,$$

то нулевая по  $x$  степень в этом выражении отсутствует и

$$\mathcal{L}(x) = \langle \Gamma[DN(0)x]\Gamma u_1, e_1^* \rangle \Gamma F(0) + \langle \Gamma Bx, e_1^* \rangle \Gamma u_1 + \langle \Gamma[DN(0)x]\Gamma F(0), e_1^* \rangle \Gamma u_1.$$

Как и выше,  $\langle \Gamma[DN(0)x]\Gamma u_1, e_1^* \rangle = 0$ , потому что  $x = 0$  является особой точкой вырожденного дифференциального уравнения (6.11).

Следовательно,  $\mathcal{L}(x) = \langle Bx - [DN(0)x]\Gamma F(0), u_1^* \rangle e_1$ . Опять для оператора  $\mathcal{L}$  выполнено условие  $\text{Im } \mathcal{L} \leq 1$  и уравнение (6.12) может быть упрощено, если  $\langle Be_1 - [DN(0)e_1]\Gamma F(0), u_1^* \rangle \neq 0$ .

Проиллюстрируем это на примере. Выше было показано, что система (6.11) имеет двумерное центральное многообразие. При добавлении в правой части линейного оператора эта ситуация может измениться. Действительно, пусть

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & -x_2 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Как и ранее, эта система эквивалентна следующей:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ -x_2 & x_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

или

$$x_1' = x_2 - x_1; \quad x_2' = x_1^2 + x_1x_2. \quad (6.14)$$

Это полугиперболическая система с одномерным центральным многообразием. Следуя предложенной в [18] методике, можно вычислить приближенное уравнение для центрального многообразия  $x_1 = x_2 - 2x_2^2 + 14x_2^3 + \dots$ . Замена  $x_1 = v + x_2$  приводит систему к виду  $v' = -v + 2x_2^2 + 3x_2v + v^2$ ;  $x_2' = 2x_2^2 + 3x_2v + v^2$ . Далее используется [18, формула (1.3.6)] для нахождения центрального многообразия  $\varphi(x)$ :  $\varphi'(x)[\varphi^2(x) + 3x\varphi(x) + 2x^2] + \varphi(x) - \varphi^2(x) - 3x\varphi(x) - 2x^2 = 0$ . При поиске  $\varphi(x)$  в виде  $c x^2 + 0(x^3)$  определяется  $c = 2$  и последующие слагаемые. Так же определяется приближенное значение векторного поля на многообразии  $\varphi(x)$ :  $x_2' = 2x_2^2 - 6x_2^3 + \dots$ , а из [18, формулы (1.3.4)] следует  $x_2' = \varphi^2(x) + 3x\varphi(x) + 2x^2$ .

Однако, систему (6.12) можно исследовать в окрестности нуля методом раздувания особенности [1]. При замене  $x_2 = ux_1$  система примет вид:

$$x_1' = ux_1 - x_1; \quad u' = u + ux_1 + x_1 - u^2. \quad (6.15)$$

Эта система имеет на прямой  $(0, u)$  две особые точки  $(0, 0)$  и  $(0, 1)$ . Точка  $(0, 0)$  — гиперболическая, а в окрестности точки  $(0, 1)$  замена  $u - 1 = v$  приводит систему (6.16) к виду:

$$x_1' = vx_1; \quad v' = -v + vx_1 - 2x_1 - v^2. \quad (6.16)$$

Повторное использование метода раздувания особенности  $x_1 = vw$  приводит систему (6.16) к виду

$$w' = w + 2vw - vw^2 - 2w^2; \quad v' = -v - 2vw - v^2w - v^2. \quad (6.17)$$

Система (6.17) снова имеет две особые точки на прямой  $(0, w)$ :  $(0, 0)$  и  $(0, 1/2)$ .

Точка  $(0, 0)$ , очевидно, — гиперболическая.

Для исследования поведения системы (6.17) в окрестности точки  $(0, 2)$  вводится замена:  $s + 1/2 = w$ . Тогда  $s' = -s + (3/4)v + vs - vs^2 - 2s^2$ ;  $v' = -2v - 2vs - v^2s - (3/2)v^2$ . Таким образом, точка  $(0, 2)$  — также гиперболическая.

**В. Бифуркация возникновения многообразия вырождения из особой точки.** Следующий пример иллюстрирует бифуркацию возникновения многообразия вырождения из особой точки:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 - 2\lambda x_1 - 2\mu x_2 & -x_2 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_2^3 - \lambda x_2 - \mu x_2^2 - x_1 x_2 \\ x_2^2 + x_1 + \mu x_2 - \lambda \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

Нетрудно проверить, что многообразие вырождения:  $(x_1 - \lambda)^2 + (x_2 - \mu)^2 = \lambda^2 + \mu^2$  является фазовой кривой, соответствующей периодическому решению уравнения (6.18):  $x_1 - \lambda = \mu \sin 2t + \lambda \cos 2t$ ;  $x_2 - \mu = \lambda \sin 2t - \mu \cos 2t$ . Также можно проверить, что невозмущенная система

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & -x_2 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_2^3 - x_1 x_2 \\ x_2^2 + x_1 \end{pmatrix}.$$

не имеет периодических решений. Действительно, поскольку матрица вырождена только в точке  $(0, 0)$ , то всюду, кроме этой точки, она имеет обратную:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & -x_2 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (x_2^2 + x_1^2)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ -x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Поэтому вырожденная система ДУ имеет те же траектории, что и невырожденная:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^3 \\ -x_2^4 + x_1^3 + x_2^2 x_1^2 + x_2^2 x_1 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что эта система не может иметь периодических решений. Прежде всего заметим, что она имеет только одну особую точку —  $(0, 0)$ . Значит, периодическое решение, если оно существует, должно обходить вокруг  $(0, 0)$  [6, теорема 13.1]. Из вида векторного поля следует, что в верхней полуплоскости ( $x_2 > 0$ )  $x_1$  возрастает, а в нижней полуплоскости — убывает, т. е. периодическое решение должно обходить точку  $(0, 0)$  по часовой стрелке. Но это невозможно, потому что на левой полуоси ( $x_2 = 0$ ,  $x_1 < 0$ ) векторное поле имеет вид  $(0, x_1^3)$ , т. е. направлено вниз. Таким образом, в построенном примере осуществляется бифуркация возникновения периодического решения из особой точки.

Также нетрудно построить пример векторного поля, для которого решения, начинающиеся на ответвляющемся многообразии вырождения, будут покидать это многообразие:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 - 2\lambda x_1 - 2\mu x_2 & -x_2 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 - 2\lambda x_1 - 2\mu x_2 + x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если точка  $(x_1^0, x_2^0)$  принадлежит поверхности вырождения, соответствующей значениям параметров  $(\lambda, \mu)$ , то функция  $x_1(t) = x_1^0 + t$ ,  $x_2(t) = x_2^0 \exp(-t)$  будет решением системы, выходящим из этой точки. Наконец, у системы

$$\begin{pmatrix} x_1^2 - 2\lambda x_1 - 2\mu x_2 & -x_2 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

нет решений, начинающихся на многообразии вырождения. Действительно, эта система эквивалентна системе

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = (x_1^2 - 2\lambda x_1 - 2\mu x_2 + x_2^2)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

и  $x_1' \rightarrow \infty$ , когда точка приближается к многообразию вырождения.

**С. Периодические решения вырожденных дифференциальных уравнений с особой точкой.** Следующий пример показывает, что вырожденные дифференциальные уравнения с особой точкой могут иметь периодические решения:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2^3 + x_2^5 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

Решениями этого вырожденного дифференциального уравнения являются линии уровня функции  $G(x_1, x_2) = x_1^2/2 + x_2^4/4$ .

Приведем теперь некоторые достаточные условия, когда вырожденное дифференциальное уравнение с особой точкой вида

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

не имеет периодических решений. Предполагается, что система определена в односвязной области  $\mathcal{D}$ , содержащей 0, и при  $x \neq 0$  определитель  $\Delta(x) = a_{11}(x)a_{22}(x) - a_{12}(x)a_{21}(x) \neq 0$ .

Если  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$  — периодическое решение системы, лежащее в области  $\mathcal{D}$ , то оно будет также периодическим решением системы

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22}(x) & -a_{12}(x) \\ -a_{21}(x) & a_{11}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}. \quad (6.20)$$

Ранее было доказано, что если  $(P, Q)$  не принадлежит  $\text{Im } A_0$ , то  $(0, 0)$  не является особой точкой системы (6.20). Так как определитель системы (6.20) не обращается в ноль в остальных точках области  $\mathcal{D}$ , то столбцы матрицы  $A(t)$  линейно независимы и, следовательно, система (6.20) не имеет особых точек в области  $\mathcal{D}$ . Значит, она не может иметь там и периодических решений.

Рассмотрим теперь случай, когда  $(P, Q)$  принадлежит  $\text{Im } A_0$ . Тогда линейной заменой переменных систему (6.19) можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} 1 + a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.21)$$

где  $a_{11}(0) = a_{12}(0) = a_{21}(0) = a_{22}(0) = 0$ .

**Лемма 6.3.** *Вырожденное дифференциальное уравнение (6.19) не имеет периодических орбит в окрестности нуля.*

*Доказательство.* В случае, когда  $(P, Q)$  принадлежит  $\text{Im } A_0$ , система (6.20) имеет вид

$$x'_1 = Pa_{22}(x); x'_2 = -Pa_{21}(x). \quad (6.22)$$

Предположим, что  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$  — периодическая орбита уравнения (6.21), а значит, и уравнения (6.22). Рассмотрим криволинейный интеграл по  $\gamma(t)$ :  $\oint (1 + a_{11}(x))dx_1 + a_{12}(x)dx_2$ . Так как  $\gamma(t)$  — решение системы (6.21), этот интеграл равен

$$\int_0^T [(1 + a_{11}(\gamma(t)))x'_1(t) + a_{12}(\gamma(t))x'_2(t)]dt = \int_0^T Pdt = PT.$$

С другой стороны, так как  $\gamma(t)$  — решение системы (6.22), то

$$\int_0^T [(1 + a_{11}(\gamma(t)))Pa_{22}(\gamma(t)) + a_{12}(\gamma(t))Pa_{21}(\gamma(t))]dt = \int_0^T P\Delta(t)dt,$$

где  $\Delta(t)$  — определитель матрицы  $A(\gamma(t))$ . Отсюда следует, что  $\int_0^T \Delta(t)dt = T$ . Однако, это равенство не может выполняться, так как  $\gamma(t)$ , очевидно, также является решением системы

$$\begin{pmatrix} 1 + a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ ma_{21}(x) & ma_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix},$$

определитель которой равен  $m\Delta(t)$ . □

**Лемма 6.4** (Пуанкаре—Бендиксон—Дюлак). *Пусть в некоторой односвязной окрестности нуля  $\mathcal{D}$  ноль является единственной особой точкой вырожденных дифференциальных уравнений (6.22), (6.24).*

1. *Если существует непрерывно дифференцируемая, сохраняющая знак функция  $S(x)$  такая, что*

$$\frac{\partial[S(x)(1 + a_{11}(x))]}{\partial x_2} = \frac{\partial[S(x)a_{12}(x)]}{\partial x_1},$$

то система

$$\begin{pmatrix} 1 + a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q(x) \end{pmatrix}, \quad (6.23)$$

$Q(0) = 0$ , не имеет в области  $\mathcal{D}$  периодических решений.

2. Если существует непрерывно дифференцируемая функция  $U(x)$  такая, что

$$\frac{\partial[U(x)a_{21}(x)]}{\partial x_2} - \frac{\partial[U(x)a_{22}(x)]}{\partial x_1}$$

сохраняет знак в области  $\mathcal{D}$ , то система

$$\begin{pmatrix} 1 + a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

не имеет в области  $\mathcal{D}$  периодических решений.

*Доказательство.* Пусть выполнено условие 1. Тогда в односвязной области  $\mathcal{D}$  существует непрерывно дифференцируемая функция  $F(x)$  такая, что  $\frac{\partial F(x)}{\partial x_1} = S(x)(1 + a_{11}(x))$  и  $\frac{\partial F(x)}{\partial x_2} = S(x)a_{12}(x)$ . Интегрирование по  $\gamma(t)$  дает

$$\oint [S(x)(1 + a_{11}(x))]dx_1 + S(x)a_{12}(x)dx_2 = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 0.$$

С другой стороны, в силу первого уравнения (6.23) этот интеграл отличен от нуля:

$$P \oint S(\gamma(t))dt \neq 0,$$

поскольку функция  $S(x)$  сохраняет знак.

В случае, когда выполнено условие 2 в силу второго уравнения (6.24), можно записать

$$0 = \oint U(x)a_{21}(x)dx_1 + U(x)a_{22}(x)dx_2,$$

откуда при использовании формулы Грина следует

$$0 = \iint \left\{ \frac{\partial[U(x)a_{21}(x)]}{\partial x_2} - \frac{\partial[U(x)a_{22}(x)]}{\partial x_1} \right\} dx_1 dx_2,$$

что невозможно, поскольку в области  $\mathcal{D}$  подынтегральная функция сохраняет знак.  $\square$

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа, как и предыдущая [8], выполнена с целью установления связей между методологическими принципами В. А. Треногина и В. М. Арнольда для исследования бифуркационных явлений в качественной теории дифференциальных уравнений [1, 2].

В теоремах существования точек и поверхностей бифуркации раздела 4 укажем наиболее значительные работы, предшествовавшие нашим результатам. Это, в первую очередь, исследования М. А. Красносельского [4, 5], в которых применялась теория степени отображения в бесконечномерных пространствах. В труднодоступной работе [15], по недоразумению не опубликованной кратко в Докладах АН СССР, впервые теория степени отображения (вращения векторного поля) была применена непосредственно к уравнениям разветвления согласно «принципу конечномерности» В. А. Треногина. Результатом явилась наиболее общая теорема существования точки бифуркации от собственного значения нечетной алгебраической кратности. Более доступные публикации [13, 16, 25]. К сожалению, редактор перевода книги Л. Ниренберга «Нелинейный функциональный анализ» [10] Н. Д. Введенская, не зная о работе [15], отметила, что первый результат применения степени отображения к уравнению разветвления был получен Дж. Изе, однако это был очень частный результат. Среди многих более поздних работ этого направления можно указать исследования Р. Дж. Магнуса [23]. Совсем недавно были опубликованы исследования Т. Ма [22] о существовании бифуркации при четно кратном корневом числе при линеаризации.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: МЦНМО, 2002.
2. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969.
3. Голубицкий М., Гийемен В. Устойчивые отображения и их особенности. — М.: Мир, 1977.
4. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1956.
5. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа и его приложения. — М.: Наука, 1975.
6. Красносельский М. А., Перов А. И., Поволоцкий А. И., Забрейко П. П. Векторные поля на плоскости. — М.: Физматлит, 1963.
7. Логинов Б. В., Русак Ю. Б. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления// В сб.: Прямые и обратные задачи для уравнений с частными производными и их приложения. — Ташкент: ФАН, 1978. — С. 113–148.
8. Логинов Б. В., Русак Ю. Б., Ким-Тян Л. Р. Нормальные формы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производной при существовании жордановой цепочки максимальной длины// В сб.: Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы научной конференции «Герценовские чтения», СПб., 15–20 апреля 2013. — LXVI. — С. 93–109.
9. Логинов Б. В., Русак Ю. Б., Ким-Тян Л. Р. Дифференциальные уравнения с вырожденным, линейно зависящим от неизвестного, оператором при производной// В сб.: Международная конференция (DIFF-2014) по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль 2014. Тезисы докладов. — М.: МИАН, 2014. — С. 106–107.
10. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1977.
11. Постников М. М. Введение в теорию Морса. — М.: Наука, 1971.
12. Русак Ю. Б. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления// Дисс. к.ф.-м.н. — Ин-т мат. им. В. И. Романовского АН УзССР, 1979.
13. Сидоров Н. А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1982.
14. Треногин В. А. Функциональный анализ. — М.: Физматлит, 2002.
15. Треногин В. А., Сидоров Н. А. Исследование точек бифуркации и непрерывных ветвей решений нелинейных уравнений// В сб.: Дифференциальные и интегральные уравнения. — Иркутск, 1972. — 1. — С. 216–248.
16. Треногин В. А., Филиппов А. Ф. (ред.) Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. — М.: Физматлит, 2003.
17. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.
18. Carr J. Application of centra manifold theory// Appl. Math. Sci. — 1981. — 35.
19. Loginov B. V. Branching equation in the root subspaces// Nonlinear Anal. — 1998. — 32, № 3. — С. 439–448.
20. Loginov B. V., Rousak Yu. B. Generalized Jordan structure in the problem of stability of bifurcation equations// Nonlinear Anal. — 1991. — 17, № 3. — С. 219–231.
21. Loginov B. V., Rousak Yu. B., Kim-Tyan L. R. Differential equations with degenerated variable operator at the derivative// В сб.: Current Trends in Analysis and Its Applications. Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Kraków 2013. — Basel: Birkhäuser, 2015. — С. 101–108.
22. Ma T., Wang Sh. Bifurcation theory and applications. — Hackensack: World Scientific, 2005.
23. Magnus R. J. A generalization of multiplicity and the problem of bifurcation// Proc. Lond. Math. Soc. (3). — 1976. — 32. — С. 251–278.
24. Marszalek W. Fold points and singularity induced bifurcation in inviscid transonic flow// Phys. Lett. A. — 2012. — 376, № 28–29. — С. 2032–2037 (doi:10.1016/j.physleta.2012.05.003).
25. Sidorov N., Loginov B., Synitsin H. V., Falaleev M. V. Lyapunov—Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. — Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 2012.

Б. В. Логинов

Ульяновский гос. технический университет (УлГТУ), Ульяновск, Россия

E-mail: panbob1@yandex.ru

Ю. Б. Русак

Департамент социального сервиса, Канберра, Австралия

E-mail: irousak@gmail.com

Л. Р. КИМ-ТЯН  
 НИТУ МИСиС, Москва, Россия  
 E-mail: kim-tyan@yandex.ru

UDC 517.9.

## Differential Equations with Degenerate, Depending on the Unknown Function Operator at the Derivative

© 2016 B. V. Loginov, Yu. B. Rousak, L. R. Kim-Tyan

**Abstract.** We develop the theory of generalized Jordan chains of multiparameter operator functions  $A(\lambda) : E_1 \rightarrow E_2$ ,  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\dim \Lambda = k$ ,  $\dim E_1 = \dim E_2 = n$ , where  $A_0 = A(0)$  is a noninvertible operator. To simplify the notation, in Secs. 1–3 the geometric multiplicity  $\lambda_0$  is set to 1, i. e.  $\dim N(A_0) = 1$ ,  $N(A_0) = \text{span}\{\varphi\}$ ,  $\dim N^*(A_0^*) = 1$ ,  $N^*(A_0^*) = \text{span}\{\psi\}$ , and the operator function  $A(\lambda)$  is supposed to be linear with respect to  $\lambda$ . For the polynomial dependence of  $A(\lambda)$ , in Sec. 4 we consider a linearization. However, the bifurcation existence theorems hold in the case of several Jordan chains as well.

We consider applications to degenerate differential equations of the form  $[A_0 + R(\cdot, x)]x' = Bx$ .

### REFERENCES

1. V. I. Arnol'd, *Geometricheskie metody v teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Geometric Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations], MTsNMO, Moscow, 2002 (in Russian).
2. M. M. Vaynberg and V. A. Trenogin, *Teoriya vetvleniya resheniy nelineynykh uravneniy* [Branching Theory of Solutions to Nonlinear Equations], Nauka, Moscow 1969 (in Russian).
3. M. Golubitskiy and V. Giyemen, *Ustoychivye otobrazheniya i ikh osobennosti* [Stable Mappings and Their Singularities], Mir, Moscow, 1977 (in Russian).
4. M. A. Krasnosel'skiy, *Topologicheskie metody v teorii nelineynykh integral'nykh uravneniy* [Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations], GITTL, Moscow, 1956 (in Russian).
5. M. A. Krasnosel'skiy, and P. P. Zabreyko, *Geometricheskie metody nelineynogo analiza i ego prilozheniya* [Geometric Methods of Nonlinear Analysis and Its Applications], Nauka, Moscow, 1975 (in Russian).
6. M. A. Krasnosel'skiy, A. I. Perov, A. I. Povolotskiy, and P. P. Zabreyko, *Vektornye polya na ploskosti* [Vector Fields in a Plane], Fizmatlit, Moscow, 1963 (in Russian).
7. B. V. Loginov and Yu. B. Rusak, "Obobshchennaya zhordanova struktura v teorii vetvleniya" [Generalized Jordan structure in the branching theory], In: *Pryamyie i obratnye zadachi dlya uravneniy s chastnymi proizvodnymi i ikh prilozheniya* [Direct and Inverse Problems for Partial Differential Equations and Their Applications], FAN, Tashkent, 1978, 113–148 (in Russian).
8. B. V. Loginov, Yu. B. Rusak, and L. R. Kim-Tyan, "Normal'nye formy differentsial'nykh uravneniy s vyrozhdennoy matritsey pri proizvodnoy pri sushchestvovanii zhordanovoy tsepochki maksimal'noy dliny" [Normal forms of differential equations with degenerate matrix at the derivative when the Jordan chain of maximal length exists], In: "Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoy matematiki i matematicheskogo obrazovaniya. Materialy nauchnoy konferentsii "Gertsenovskie chteniya"" [Some actual problems of contemporary mathematics and mathematical education. Proceedings of scientific conference "Hertsen readings"], Saint-Petersburg, April 15–20, 2013, **LXVI**, 93–109 (in Russian).
9. B. V. Loginov, Yu. B. Rusak, and L. R. Kim-Tyan, "Differentsial'nye uravneniya s vyrozhdennym, lineyno zavisyashchim ot neizvestnogo, operatorom pri proizvodnoy" [Differential Equations with Degenerate, Depending on the Unknown Function Operator at the Derivative], In: *Mezhdunarodnaya konferentsiya (DIFF-2014) po differentsial'nykh uravneniyam i dinamicheskim sistemam. Tezisy dokladov* [Int. Conf. on Differential Equations and Dynamic Systems. Abstracts], Suzdal', 2014, MIAN, Moscow, 2014, 106–107 (in Russian).
10. L. Nirenberg, *Lektsii po nelineynomu funktsional'nomu analizu* [Topics in Nonlinear Functional Analysis], Mir, Moscow, 1977 (in Russian).

11. M. M. Postnikov, *Vvedenie v teoriyu Morsa* [Introduction to the Morse Theory], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
12. Yu. B. Rusak, *Obobshchennaya zhordanova struktura v teorii vetoleniya* [Generalized Jordan Structure in the Branching Theory], PhD Thesis, In-t mat. im. V. I. Romanovskogo AN UzSSR [V. I. Romanovskiy Math. Inst.], Tashkent, 1979 (in Russian).
13. N. A. Sidorov, *Obshchie voprosy regularizatsii v zadachakh teorii vetoleniya* [General Issues of Regularization in Problems of the Branching Theory], Izd-vo Irkut. un-ta, Irkutsk, 1982 (in Russian).
14. V. A. Trenogin, *Funktsional'nyj analiz* [Functional Analysis], Fizmatlit, Moscow, 2002 (in Russian).
15. V. A. Trenogin and N. A. Sidorov, "Issledovanie tochek bifurkatsii i nepreryvnykh vetvey resheniy nelineynykh uravneniy" [Study of bifurcation points and continuous branches of solutions to nonlinear equations]// In: *Differentsial'nye i integral'nye uravneniya* [Differential and Integral Equations], Irkutsk, 1972, **1**, 216–248 (in Russian).
16. V. A. Trenogin and A. F. Filippov (eds.), *Nelineynyj analiz i nelineynye differentsial'nye uravneniya* [Nonlinear Analysis and Nonlinear Differential Equations], Fizmatlit, Moscow, 2003 (in Russian).
17. F. Khartman, *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Mir, Moscow, 1970 (in Russian).
18. J. Carr, "Application of centre manifold theory," *Appl. Math. Sci.*, 1981, **35**.
19. B. V. Loginov, "Branching equation in the root subspaces," *Nonlinear Anal.*, 1998, **32**, No. 3, 439–448.
20. B. V. Loginov and Yu. B. Rousak, "Generalized Jordan structure in the problem of stability of bifurcation equations," *Nonlinear Anal.*, 1991, **17**, No. 3, 219–231.
21. B. V. Loginov, Yu. B. Rousak, and L. R. Kim-Tyan, "Differential equations with degenerated variable operator at the derivative," In: *Current Trends in Analysis and Its Applications*, Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Kraków 2013, Birkhäuser, Basel, 2015, 101–108.
22. T. Ma and Sh. Wang, *Bifurcation Theory and Applications*, World Scientific, Hackensack, 2005.
23. R. J. Magnus, "A generalization of multiplicity and the problem of bifurcation," *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*., 1976, **32**, 251–278.
24. W. Marszalek, "Fold points and singularity induced bifurcation in inviscid transonic flow," *Phys. Lett. A.*, 2012, **376**, No. 28-29, 2032–2037 (doi:10.1016/j.physleta.2012.05.003).
25. N. Sidorov, B. Loginov, H. V. Synitsin, and M. V. Falaleev, *Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 2012.

B. V. Loginov  
Ul'yanovsk State Technical University, Ul'yanovsk, Russia  
E-mail: panbobl@yandex.ru

Yu. B. Rousak  
Department of Social Service, Canberra, Australia  
E-mail: irousak@gmail.com

L. R. Kim-Tyan  
National University of Science and Technology «MISIS», Moscow, Russia  
E-mail: kim-tyan@yandex.ru

## КВАДРАТИЧНАЯ ОЦЕНКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ: ОБЗОР

© 2016 г. С. МОДЕНА

Аннотация. В совместной работе с С. Бьянкини [8] (см. также [6, 7]), нами доказана квадратичная оценка взаимодействия для системы законов сохранения

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \\ u(t=0) = u_0(x), \end{cases}$$

где  $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — строго гиперболическая,  $\text{Tot.Var.}(u_0) \ll 1$ . Для решения типа волнового фронта, в котором одновременно взаимодействуют только два фронта волны, эта оценка может быть записана в виде

$$\sum_{\text{время взаимодействия } t_j} \frac{|\sigma(\alpha_j) - \sigma(\alpha'_j)| |\alpha_j| |\alpha'_j|}{|\alpha_j| + |\alpha'_j|} \leq C(f) \text{Tot.Var.}(u_0)^2,$$

где  $\alpha_j, \alpha'_j$  — волновые фронты, взаимодействующие в момент времени  $t_j$ ,  $\sigma(\cdot)$  — их скорость,  $|\cdot|$  обозначает их интенсивность, а  $C(f)$  — константа, зависящая только от  $f$  (см. [8, теорема 1.1] или, в более общем виде, в теореме 3.1 в настоящей работе).

Целью этой работы является привести доказательство этой квадратичной оценки в упрощенной постановке, в которой, тем не менее

- присутствуют все основные идеи;
- отсутствуют все технические трудности, возникающие в общем случае в [8].

### 1. ВВЕДЕНИЕ

**1.1. Системы законов сохранения.** В одномерном случае система законов сохранения (см. [9]) является системой уравнений с частными производными вида

$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{1.1}$$

где  $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  — неизвестная функция, а  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — заданное гладкое ( $C^3$ ) отображение, называемое *поток*, которое удовлетворяет условию строгой гиперболичности, т. е. его матрица Якоби  $Df(u)$  имеет  $n$  различных собственных чисел

$$\lambda_1(u) < \dots < \lambda_n(u)$$

в каждой точке  $u \in \mathbb{R}^n$  своей области определения. Как принято, обозначим через  $r_1(u), \dots, r_n(u)$  *правильные* собственные векторы (нормированные к 1), соответствующие  $\lambda_1(u), \dots, \lambda_n(u)$ :

$$Df(u)r_k(u) = \lambda_k(u)r_k(u) \quad \text{для всех } k = 1, \dots, n \text{ и всех } u \in \mathbb{R}^n.$$

Уравнение (1.1) обычно рассматривается вместе с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0, \tag{1.2}$$

где  $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  — заданное отображение, полная вариация которого предполагается достаточно малой.

Системы законов сохранения очень важны для приложений. Например, они широко используются в механике сплошной среды для выражения фундаментальных законов равновесия (см. [11]), когда пренебрегают малой вязкостью или диссипацией. Так, уравнение Эйлера для сжимаемого безвязкостного газа в лагранжевых координатах принимает вид системы трех законов сохранения,

---

Автор благодарен профессору Стефано Бьянкини, который внимательно прочитал рукопись и сделал много полезных замечаний.

где неизвестными являются объем газа, его скорость и давление. Законы сохранения используются также во многих других областях, например, в биологии, а также для описания транспортных потоков. В последнем случае неизвестной  $u(t, x) \in \mathbb{R}$  является плотность автомобилей в момент времени  $t$  в точке  $x$ , а отображение  $f = f(u)$  представляет поток автомобилей как функцию их плотности  $u$ .

Хорошо известно, что классические (гладкие) решения задачи Коши (1.1)-(1.2) в общем случае не определены на всем интервале времени  $[0, \infty)$  даже при гладких начальных данных, поскольку достигают точек разрыва за конечное время. С другой стороны, решение в смысле распределений не гарантирует единственности. Поэтому решение обычно понимается в следующем смысле.

**Определение 1.1.** Отображение  $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , принадлежащее  $L^1_{\text{loc}}$ , называется *слабым решением* задачи Коши (1.1)-(1.2), если

1.  $u$  удовлетворяет уравнению (1.1) в смысле распределений;
2.  $u$  непрерывно как отображение  $[0, \infty) \rightarrow L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ ;
3.  $u(0, x) = u_0(x)$  при  $t = 0$ ;
4.  $u$  удовлетворяет дополнительным критериям допустимости, которые следуют из физических соображений либо из требования устойчивости и гарантируют единственность решения.

В литературе были предложены многие критерии допустимости, вот некоторые из них: условие ударов Лакса—Лю (см. [13, 15, 16]), условие энтропии (см. [14]), критерий исчезающей вязкости (см. [5]). Здесь мы не будем вдаваться в подробности.

Первый результат о существовании решения задачи Коши (1.1)-(1.2) был опубликован в известной работе Глимма [12] в 1965 году, где существование решения доказано при условии, что каждое характеристическое поле либо *истинно нелинейно*, т. е.  $\nabla \lambda_k(u) \cdot r_k(u) \neq 0$  для всех  $u$ , либо *линейно вырождено*, т. е.  $\nabla \lambda_k(u) \cdot r_k(u) = 0$  для всех  $u$ . В работе [12] для любого  $\varepsilon > 0$  построено приближенное решение  $u_\varepsilon(t, x)$ , начинающееся с приближения  $u_{0,\varepsilon}$  начального условия  $u_0$  и используя итерационный процесс в каждый момент  $t = i\varepsilon$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Предполагая, что  $\text{Tot.Var.}(u_0)$  достаточно мало и используя убывающий функционал  $t \mapsto Q^{\text{Glimm}}(t)$ , Глимм доказывает, что отображение  $t \mapsto \text{Tot.Var.}(u_\varepsilon(t))$  равномерно ограничено; как следствие, семейство  $\{u_\varepsilon\}$  содержит сходящуюся подпоследовательность, которая (с вероятностью 1) является слабым решением (1.1)-(1.2).

Наиболее общий результат о существовании, единственности и  $L^1$  устойчивости решений (1.1)-(1.2) без каких-либо предположений относительно  $f$ , за исключением строгой гиперболичности, получен Бьянкини и Брессини в 2005 г. в [5]. Ими доказано существование непрерывной по Липшицу полугруппы  $\{S_t \mid t \geq 0\}$  решений с исчезающей вязкостью с малой полной вариацией, получающейся как (единственный) предел решений вязкостных параболических аппроксимаций

$$u_t + f(u)_x = \mu u_{xx}, \tag{1.3}$$

с убывающей вязкостью  $\mu \rightarrow 0$ .

**1.2. Квадратичная оценка взаимодействия.** Долгое время обсуждался вопрос скорости сходимости приближенных решений  $\{u_\varepsilon\}$ , построенных по схеме Глимма, к точному слабому решению  $u$ . Первый шаг в этом направлении был сделан Брессаном и Марсоном в 1998 г. в [10]. В предположении истинной нелинейности или линейной вырожденности было доказано, что  $L^1$ -расстояние между приближенным решением  $u_\varepsilon(t, \cdot)$ , построенным по схеме Глимма, и точным слабым решением  $u(t, \cdot)$  в любой момент времени  $t$  стремится к 0 быстрее, чем  $|\ln \varepsilon| \sqrt{\varepsilon}$ , т. е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|u_\varepsilon(t, \cdot) - u(t, \cdot)\|_{L^1}}{|\ln \varepsilon| \sqrt{\varepsilon}} = 0,$$

если итерационная процедура в моменты времени  $t = i\varepsilon$ ,  $i \in \mathbb{N}$  выбрана подходящим образом.

Подход работы [10] может быть распространен на общий случай без дополнительных предположений относительно потока  $f$ , за исключением строгой гиперболичности, если удастся доказать,

что для любого приближенного решения  $u_\varepsilon$  выполняется следующая квадратичная оценка взаимодействия (см. [1]):

$$\sum_{\text{время взаимодействия } t_j} \frac{|\sigma(\alpha_j) - \sigma(\alpha'_j)| |\alpha_j| |\alpha'_j|}{|\alpha_j| + |\alpha'_j|} \leq C(f) \text{Tot.Var.}(u_0)^2, \quad (1.4)$$

где  $\alpha_j, \alpha'_j$  — волновые фронты, взаимодействующие в момент времени  $t_j$ ,  $\sigma(\cdot)$  — их скорость,  $|\cdot|$  обозначает их интенсивность, а  $C(f)$  — константа, зависящая от  $f$ , и не зависящая от  $\varepsilon$ . Термин *квадратичная* указывает на то, что в правой части (1.4) полная вариация  $u_0$  стоит в степени 2. Оценка (1.4) для простоты написана в случае одновременного взаимодействия только двух волновых фронтов. Общая формулировка может быть найдена в [8, теорема 1.1] или в теореме 3.1 настоящей работы.

В случае истинной нелинейности или вырожденной линейности оценка (1.4) была доказана Лю в [17] с помощью квадратичного функционала взаимодействия  $Q^{\text{Glimm}}$ , введенного Глиммом в [12], и алгоритма разбиения волн, в котором каждый волновой фронт приближенного решения раскладывается на волны, чьи интенсивности и скорости могут быть трассированы.

К сожалению, функционал Глимма  $Q^{\text{Glimm}}$  не работает в общем случае, т. к. два волновых фронта, взаимодействующие в момент времени  $t_j$ , могут взаимодействовать и в момент времени  $t_{j'} > t_j$  из-за разбиений в силу невыпуклости потока  $f$ .

В серии совместных работ с Бьянкини [6–8] мы доказали оценку (1.4). Целью настоящей статьи является формулировка результатов, полученных в этих трех работах, и доказательство (1.4) в упрощенной постановке, при которой

- присутствуют все основные идеи;
- отсутствуют технические трудности, возникающие в общем случае в [8].

Приведем краткий обзор работ [6–8].

1. В работе [6] рассмотрен скалярный случай, т. е.  $n = 1$ . В ней было доказано, что оценка (1.4) выполнена для приближенного решения скалярного закона сохранения, построенного как с помощью так называемого алгоритма *трассировки волнового фронта* (ТВФ) (см. [9]), так и при помощи схемы Глимма. Было решено начать анализ с наиболее простого случая: приближенных решений скалярного уравнения, полученных методом ТВФ, — чтобы избежать по возможности технических сложностей; затем доказательство было обобщено на приближенные решения скалярного уравнения, полученные по схеме Глимма, поскольку одно из применений оценки (1.4) связано со скоростью сходимости схемы Глимма.
2. В работе [7] рассмотрено первое обобщение скалярного случая: треугольная система

$$\begin{cases} u_t + \tilde{f}(u, v)_x = 0, \\ v_t - v_x = 0, \end{cases} \quad u, v : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(0, 0) > -1, \quad (1.5)$$

где скалярное уравнение дополнено линейным. Здесь оценка (1.4) доказана для приближенного решения (1.5), полученного с помощью алгоритма ТВФ и безэнтропийного метода Римана, который «эквивалентен» энтропийному методу Римана. Это было сделано, чтобы избежать трудностей, возникающих в схеме Глимма при использовании энтропийного метода Римана.

3. В третьей работе [8] оценка (1.4) доказана для общей системы законов сохранения (1.1) без дополнительных предположений относительно  $f$ , за исключением строгой гиперболичности. В [8] рассмотрена только схема Глимма: во-первых, потому что, как было ранее сказано, одним из приложений оценки (1.4) является оценка скорости сходимости схемы Глимма; во-вторых, так как в этом случае оценка (1.4) и ее доказательство принимают простой вид, т. к. в каждом узле сетки  $(i\varepsilon, m\varepsilon)$  возникает точное (не приближенное) решение задачи Римана, в то время как в методе ТВФ приходится иметь дело с несколькими различными приближениями Римана.

Во всех трех работах [6–8] доказательство оценки (1.4) основано на двух основных приемах:

- (а) новый алгоритм трассировки волн, расщепляющий каждый волновой фронт в приближенном решении на бесконечно малые волны (для приближений по Глимму) или на конечное число дискретных волн (для приближений методом ТВФ), см. пункт 2.3;

(b) новый функционал взаимодействия

$$t \mapsto \mathfrak{Q}(t) := \iint_{\{(s,s') \text{ волны}\}} \mathfrak{q}(t, s, s') ds ds', \quad (1.6)$$

где  $\mathfrak{q}(t, s, s')$  — величина, называемая *весом пары волн*  $(s, s')$  в момент времени  $t$ . Основные свойства  $\mathfrak{Q}$  заключаются в том, что он имеет ограниченную вариацию и его убывание в каждый момент взаимодействия  $t_j$  связано с величиной

$$\frac{|\sigma(\alpha_j) - \sigma(\alpha'_j)| |\alpha_j| |\alpha'_j|}{|\alpha_j| + |\alpha'_j|}, \quad (1.7)$$

которая входит в сумму в левой части (1.4) (см. пункт 3.3).

Доказательства, изложенные в работах [6–8], не являются простыми последовательными обобщениями друг друга. Здесь следует сделать два замечания.

1. Во-первых, определения веса  $\mathfrak{q}(t, s, s')$  различны во всех трех статьях:

- определение, использованное в [6] (см. [6, пункты 3.4.1 и 4.4.1]), дает более точную константу  $C(f)$  в (1.4), но его обобщение на случай системы привело бы к большим техническим трудностям; поэтому в следующих работах [7, 8] использовалось более простое определение для  $\mathfrak{q}$ ;
- в [7, пункт 4.2] определение веса  $\mathfrak{q}$  используется только при нахождении волнового фронта решения треугольной системы (1.5) с использованием безэнтропийного метода Римана. Определение в [7] не может быть использовано в общем случае, т. к. веса  $\mathfrak{q}$  не ограничены равномерно: другими словами, при фиксированном  $t$  отображение  $(s, s') \rightarrow \mathfrak{q}(t, s, s')$  принадлежит  $L^1$  (и тогда  $\mathfrak{Q}$  в (1.6) однозначно определено), но не принадлежит  $L^\infty$ ;
- наконец, определение для  $\mathfrak{q}$  в [8, раздел 6.1] корректно в том смысле, что оно делает  $\mathfrak{q}$  отображением в  $L^\infty$  и оно применимо к системам в общем случае.

2. Вторым отличием работ [6–8] друг от друга является то, как убывание  $\mathfrak{Q}$  при взаимодействиях влияет на величину (1.7):

- в статье [6], рассматривающей одномерный случай, доказательство свойства убывания  $\mathfrak{Q}$  использует тот факт, что две волны  $s, s'$ , которые уже взаимодействовали и имеют различное положение в момент времени  $t$ , могут взаимодействовать снова, если только сильный удар, не взаимодействовавший ни с  $s$ , ни с  $s'$ , взаимодействует с одной из них и меняет ее скорость;
- в многомерном случае при  $n > 1$  в решении представлены волновые фронты многих семейств (см. [7, 8]), поэтому свойство, описанное в предыдущем пункте, уже не будет верным. Действительно, две волны  $s, s'$ , которые уже взаимодействовали и имеют различные положения в момент времени  $t$ , могут взаимодействовать снова из-за волнового фронта другого семейства, взаимодействующего с  $s, s'$  и меняющего их скорости. Поэтому в общем случае приходится изменить доказательство свойства убывания  $\mathfrak{Q}$ , введя сложный анализ предыстории каждой пары волн  $(s, s')$ .

В настоящей работе мы представим доказательство оценки (1.4) при предположениях работы [7] (решение типа волнового фронта треугольной системы вида (1.5) и безэнтропийный методом Римана, см. пункт 2.2), но с использованием корректно определенных весов  $\mathfrak{q}(t, s, s')$ , т. е. применяя обозначения статьи [8], посвященной общему случаю. Цель настоящей работы — предъявить доказательство оценки (1.4) в достаточно общей постановке, чтобы читатель мог понять основные идеи, но избегая технических трудностей, которые можно найти в [8] для наиболее общих систем. В ходе доказательства для треугольной системы (1.5) мы будем указывать на трудности, возникающие в общем случае систем (1.1).

**1.3. Обозначения.** Введем обозначения, используемые в настоящей работе.

- Для непрерывного отображения  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  определим *выпуклую оболочку*  $g$  на интервале  $[a, b]$  как

$$\text{conv}_{[a,b]} g(u) := \sup \left\{ h(u) \mid h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ выпукла и } h \leq g \right\};$$

аналогично определяется *вогнутая оболочка*  $g$  на  $[a, b]$ , обозначаемая через  $\text{conc}_{[a,b]} g$ .

- Для упорядоченного множества  $(A, \preceq)$  и заданных  $a \in A$ ,  $B \subseteq A$ , мы используем запись  $a \prec B$ , если для любого  $b \in B$  выполнено  $a \prec b$ ; аналогично вводится отношение  $a \succ B$ .

## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В этом разделе мы построим решение типа волнового фронта для задачи Коши для треугольной системы (1.5) и определим алгоритм трассировки волнового фронта для построения этого решения. Затем мы построим скалярную функцию потока  $\mathbf{f}^{\text{eff}}$ , т. н. *эффективную функцию потока*, которая получается из функции  $f$  удалением скачков ее первой производной, вызванных волнами первого семейства  $v$ . В завершении этого раздела мы напомним определение *трансверсального потенциала Глимма* и свойств его убывания.

**2.1. Треугольные системы законов сохранения: модельный пример.** Мы рассматриваем систему законов сохранения следующего вида:

$$\begin{cases} u_t + \tilde{f}(u, v)_x = 0, \\ v_t - v_x = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Функция  $\tilde{f}$  удовлетворяет условию

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(0, 0) > -1,$$

таким образом, эта система равномерно гиперболическая в некоторой компактной окрестности начала координат.

Легко проверить, что система (2.1) принадлежит классу Темпла [18], в частности, это позволяет ввести координаты Римана  $(w, v)$ , такие что ее квазилинейная форма имеет вид

$$\begin{cases} w_t + \frac{\partial \tilde{f}(u, v)}{\partial u} w_x = 0, \\ v_t - v_x = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

где  $u = u(w, v)$  — риманова замена координат.

**2.2. Решение типа волнового фронта.** Определим  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  равенством

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u(w, v), v) = \frac{\partial f}{\partial w}(w, v).$$

Так как замена координат Римана сохраняет регулярность  $D\tilde{f}$ , можем считать, что  $f$  — функция класса  $C^3$ , удовлетворяющая условиям

1.  $\|D^\alpha f\|_{L^\infty} < \infty$  для всех мультииндексов  $\alpha$ ,  $|\alpha| \leq 3$ ;
2.  $\frac{\partial f}{\partial w}(w, v) > -1$  в окрестности  $(0, 0)$ .

Мы построим решение волнового фронта в координатах  $(w, v)$ , определив (неконсервативный) метод Римана решения задачи.

**Замечание 2.1.** Решение, которое будет получено, вообще говоря, не соответствует стандартному (энтропийному) решению типа волнового фронта (2.1). Однако, как было сказано во введении, целью настоящей работы является избежать технических трудностей, этой цели служит выбор координат  $(w, v)$  и использование (неконсервативного) метода Римана решения задачи.

Для произвольного  $\varepsilon > 0$  обозначим через  $f_\varepsilon(\cdot, v)$  кусочно-постоянную аффинную интерполяцию  $f(\cdot, v)$  как функции от  $w$  на сетке с шагом  $\varepsilon$ .

Определим *аппроксимацию Римана*, связанную с  $f$ , следующим образом: решение задачи Римана

$$((w^-, v^-), (w^+, v^+)) \in (\mathbb{Z}\varepsilon)^2 \times (\mathbb{Z}\varepsilon)^2 \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

дается функцией  $(t, x) \mapsto (w(t, x), v(t, x))$ , где

$$v(t, x) = \begin{cases} v^- & \text{при } x < -t, \\ v^+ & \text{при } x \geq -t, \end{cases}$$



а  $w(t, x)$  — кусочно-постоянное непрерывное справа решение скалярной задачи Римана  $(w^-, w^+)$  с функцией потока  $f_\varepsilon(\cdot, v^+)$  (см. [9]).

Пусть  $(w_0, v_0)$  — начальные данные задачи Коши для системы (2.2). Пусть  $(w_{0,\varepsilon}, v_{0,\varepsilon})$  — аппроксимация  $(w_0, v_0)$  (в том смысле, что  $(w_{0,\varepsilon}, v_{0,\varepsilon}) \rightarrow (w_0, v_0)$  в  $L^1$ -норме при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), такая что  $w_{0,\varepsilon}, v_{0,\varepsilon}$  имеет компактный носитель, принимает значение в дискретном множестве  $\mathbb{Z}_\varepsilon$ , и

$$\text{Tot.Var.}(w_{0,\varepsilon}) \leq \text{Tot.Var.}(w_0), \quad \text{Tot.Var.}(v_{0,\varepsilon}) \leq \text{Tot.Var.}(v_0). \quad (2.3)$$

Используя стандартный алгоритм трассировки волнового фронта, строим функцию

$$(t, x) \mapsto (w_\varepsilon(t, x), v_\varepsilon(t, x)),$$

определенную при всех  $t \geq 0$  и  $x \in \mathbb{R}$  (см., например, [2, 3]). Легко заметить, что  $(w_\varepsilon(t, \cdot), v_\varepsilon(t, \cdot))$  непрерывна справа, имеет компактный носитель, кусочно-постоянна и принимает значения на множестве  $\mathbb{Z}_\varepsilon \times \mathbb{Z}_\varepsilon$ .

*Волновым фронтом* мы будем называть кусочно-аффинную разрывную кривую  $(t, x) \mapsto (w_\varepsilon(t, x), v_\varepsilon(t, x))$ . В частности, разрывную кривую  $v$  будем называть *волновым фронтом первого семейства* (положительным или отрицательным в зависимости от знака скачка), кривую  $w$  будем называть *волновым фронтом второго семейства*. Это стандартная терминология, используемая в гиперболических законах сохранения.

Пусть  $\{(t_j, x_j)\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, J\}$ , будут точками на  $(t, x)$ -плоскости, в которых сталкиваются два (или более) волновых фронта. Будем считать без ограничения общности, что  $t_j < t_{j+1}$  и для каждого  $j$  ровно два волновых фронта встречаются в точке  $(t_j, x_j)$ . Это стандартное предположение, достигаемое малым возмущением скорости волнового фронта. Также положим  $t_0 := 0$ .

**Определение 2.1.** Для каждого  $j = 1, \dots, J$  мы будем говорить, что  $(t_j, x_j)$  — *точка взаимодействия* (или *точка нетрансверсального взаимодействия*), если волновые фронты, встречающиеся в точке  $(t_j, x_j)$ , принадлежат второму семейству и имеют одинаковый знак. Точка взаимодействия называется *положительной* (соответственно, *отрицательной*), если волновые фронты, встречающиеся в точке  $(t_j, x_j)$ , положительны (соответственно, отрицательны).

Кроме того, мы будем называть точку  $(t_j, x_j)$  *точкой уничтожения*, если волновые фронты, встречающиеся в точке  $(t_j, x_j)$ , принадлежат второму семейству и имеют разные знаки.

Точку  $(t_j, x_j)$  будем называть *точкой трансверсального взаимодействия*, если один из фронтов, встречающихся в точке  $(t_j, x_j)$ , принадлежит первому семейству, а другой — второму.

Так как по определению аппроксимации Римана волновые фронты второго семейства возникают в момент времени  $t = 0$  и распространяются с постоянной скоростью  $-1$ , три перечисленных выше случая являются единственно возможными.

Обозначим через  $\{v_h\}_{1 \leq h \leq H}$  волновые фронты первого семейства, возникающие в момент времени  $t = 0$ . Для каждого  $h$  обозначим через  $v_h^-, v_h^+$  соответственно левое и правое состояние волнового фронта  $v_h$ , а через  $|v_h| := |v_h^+ - v_h^-|$  — его интенсивность. Пусть  $\mathbf{x}(t, v_h)$  обозначает положение волнового фронта  $v_h$  в момент времени  $t$ ; очевидно, что  $\mathbf{x}(t, v_h) = \mathbf{x}(0, v_h) - t$ . Будем считать, что  $\mathbf{x}(0, v_h) < \mathbf{x}(0, v_{h+1})$  при всех  $h$ . Если  $(t_j, x_j)$  — точка трансверсального взаимодействия, обозначим через  $h(j)$  индекс волнового фронта второго семейства  $v_{h(j)}$ , участвующего в трансверсальном взаимодействии.

**2.3. Алгоритм трассировки волнового фронта.** Опишем алгоритм трассировки волнового фронта для приближенного решения, построенного в пункте 2.2.

Для начала определим дискретное множество  $\mathcal{W}$ , называемое *множеством волн*, следующим образом:

$$\mathcal{W} := \left\{ 1, 2, \dots, \frac{1}{\varepsilon} \text{Tot.Var.}(w_{0,\varepsilon}) \right\} \subseteq \mathbb{N}.$$

Теперь опишем рекурсивный алгоритм, для любой волны  $s \in \mathcal{W}$  определяющий

- знак  $\mathcal{S}(s)$  волны  $s$ ,
- правое состояние  $\hat{w}(s)$  волны  $s$ ,
- время уничтожения  $\mathfrak{t}^{\text{canc}}(s)$  волны  $s$ ,

а также отображение

$$\mathbf{x} : \left\{ (t, s) \mid s \in \mathcal{W}, t \in [0, \mathfrak{t}^{\text{canc}}(s)] \right\} \rightarrow \mathbb{R},$$

называемое *отображением положений*, которое дает положение любой волны  $s \in \mathcal{W}$  в любой момент времени  $t \in [0, \mathfrak{t}^{\text{canc}}(s)]$ .

Определим  $\mathbf{x}(0, \cdot)$  в момент времени  $t = 0$ . Для произвольного  $s \in \mathcal{W}$  положим:

$$\mathbf{x}(0, s) := \inf \left\{ x \in (-\infty, +\infty) \mid \varepsilon s \leq \text{Tot.Var.}(w_{0,\varepsilon}; (-\infty; x]) \right\}.$$

Теперь определим знак волны  $s \in \mathcal{W}$ :

$$\mathcal{S}(s) := \text{sign} \left[ w_{0,\varepsilon}(\mathbf{x}(0, s)) - w_{0,\varepsilon}(\mathbf{x}(0, s)-) \right]$$

и правое состояние волны  $s \in \mathcal{W}$ :

$$\hat{w}(s) := \sum_{s' \leq s} \mathcal{S}(s') \varepsilon.$$

Множество

$$\mathcal{W}(t) := \{s \in \mathcal{W} \mid \mathfrak{t}^{\text{canc}}(s) > t\}, \quad t \geq 0$$

(которое является неявным описанием отображения  $\mathfrak{t}^{\text{canc}} : \mathcal{W} \rightarrow (0, +\infty]$ ), и положение  $\mathbf{x}$  при  $t > 0$  определяются рекурсивно, с разбиением интервала  $[0, +\infty)$  следующим образом:

$$[0, +\infty) = \{0\} \cup (0, t_1] \cup \dots \cup (t_j, t_{j+1}] \cup \dots \cup (t_{J-1}, t_J] \cup (t_J, +\infty),$$

в предположении, что  $\mathcal{W}(t)$  и  $\mathbf{x}(t, \cdot)$  определены для произвольного  $t \leq t_j$  и определяя  $\mathcal{W}(t)$  и  $\mathbf{x}(t, \cdot)$  на интервале времени  $(t_j, t_{j+1}]$  со свойством постоянства  $\mathcal{S}$  на

$$\mathcal{W}(t, x) := \{s \in \mathcal{W} \mid s \in \mathcal{W}(t) \text{ и } \mathbf{x}(t, s) = x\}.$$

Мы определили  $\mathbf{x}(0, \cdot)$  в момент времени  $t = 0$ ; более того, т. к. областью значений  $\mathfrak{t}^{\text{canc}}$  является  $(0, \infty]$ , получаем  $\mathcal{W}(0) = \mathcal{W}$ .

Предположим, что  $\mathcal{W}(t)$  и  $\mathbf{x}(t, \cdot)$  определены при всех  $t \leq t_j$ , и определим их при  $t \in (t_j, t_{j+1}]$  (или  $t \in (t_J, +\infty)$ ). Для любого  $t \leq t_j$  положим

$$\sigma(t, s) := \begin{cases} \frac{d}{du} \text{conv}_{\mathcal{W}(t, \mathbf{x}(t, s))} f_\varepsilon \left( (\hat{w}(s) - \varepsilon, \hat{w}(s)), v(\mathbf{x}(t, s)) \right) & \text{если } \mathcal{S}(s) = +1, \\ \frac{d}{du} \text{conc}_{\mathcal{W}(t, \mathbf{x}(t, s))} f_\varepsilon \left( (\hat{w}(s), \hat{w}(s) + \varepsilon), v(\mathbf{x}(t, s)) \right) & \text{если } \mathcal{S}(s) = -1, \end{cases} \quad (2.4)$$

где

$$W(t, x) := \begin{cases} \bigcup_{s \in \mathcal{W}(t, x)} (\hat{w}(s) - \varepsilon, \hat{w}(s)] & \text{если } \mathcal{S}(s) = +1, \\ \bigcup_{s \in \mathcal{W}(t, x)} [\hat{w}(s), \hat{w}(s) + \varepsilon] & \text{если } \mathcal{S}(s) = -1, \end{cases}$$

и  $\text{conv}/\text{conc}$  определены в разделе 1.3.

Заметим, что  $\sigma(t, s)$  — это скорость Ранкина—Гюгонио волнового фронта, содержащего  $s$  в момент времени  $t$ . Для  $t < t_{j+1}$  (или  $t_J < t < +\infty$ ) положим

$$\mathcal{W}(t) = \mathcal{W}(t_j) \quad \text{и} \quad \mathbf{x}(t, s) := \mathbf{x}(t_j, s) + \sigma(t_j, s)(t - t_j) \quad \text{для всех } s \in \mathcal{W}(t).$$

При  $t = t_{j+1}$  положим

$$\mathbf{x}(t_{j+1}, s) := \mathbf{x}(t_j, s) + \sigma(t_j, s)(t_{j+1} - t_j),$$

если  $\mathbf{x}(t_j, s) + \sigma(t_j, s)(t_{j+1} - t_j)$  не является точкой взаимодействия/уничтожения/трансверсального взаимодействия  $x_{j+1}$ ; в противном случае для волн  $s$ , таких что  $\mathbf{x}(t_j, s) + \sigma(t_j, s)(t_{j+1} - t_j) = x_{j+1}$  и

$$\mathcal{S}(s)w_\varepsilon(t_{j+1}, x_{j+1}-) \leq \mathcal{S}(s)\hat{w}(s) - \varepsilon \leq \mathcal{S}(s)\hat{w}(s) \leq \mathcal{S}(s)w_\varepsilon(t_{j+1}, x_{j+1}) \quad (2.5)$$

(т. е. уничтожение возможно только в  $(t_{j+1}, x_{j+1})$ ), положим

$$\mathbf{x}(t_{j+1}, s) := \mathbf{x}(t_j, s) + \sigma(t_j, s)(t_{j+1} - t_j) = x_{j+1}.$$

Для всех остальных волн  $s \in \mathcal{W}(t_j)$ , таких что  $\mathbf{x}(t_j, s) + \sigma(t_j, s)(t_{j+1} - t_j) = x_{j+1}$ , но не удовлетворяющих (2.5) (т. е. их возможное уничтожение происходит в  $(t_{j+1}, x_{j+1})$ ), положим  $\mathfrak{t}^{\text{canc}}(s) := t_{j+1}$ , таким образом определив  $\mathcal{W}(t_{j+1})$ .

Следующее утверждение дает некоторые полезные свойства определенных выше объектов. Их доказательства достаточно просты и могут быть найдены в [7].

**Утверждение 2.1.** *Справедливы следующие свойства:*

1. отображение положений  $\mathbf{x}$  возрастает на  $\mathcal{W}(t)$  при любом фиксированном  $t \geq 0$  и является липшицевым при  $t \in [0, \tau^{\text{canc}}(s))$  для любой фиксированной волны  $s \in \mathcal{W}$ ;
2. при всех  $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$ :
  - (a) если  $w_\varepsilon(t, x-) < w_\varepsilon(t, x)$ , то  $W(t, x) = (w(t, x-), w(t, x)]$  и  $\hat{w}|_{\mathcal{W}(t, x)} : \mathcal{W}(t, x) \rightarrow W(t, x) \cap \mathbb{Z}\varepsilon$  — строго возрастающее и биективное отображение;
  - (b) если  $w(t, x-) > w(t, x)$ , то  $W(t, x) = [w(t, x), w(t, x-))$  и  $\hat{w}|_{\mathcal{W}(t, x)} : \mathcal{W}(t, x) \rightarrow W(t, x) \cap \mathbb{Z}\varepsilon$  — строго убывающее и биективное отображение;
  - (c) если  $w(t, x-) = w(t, x)$ , то  $\mathcal{W}(t, x) = W(t, x) = \emptyset$ .

Будем использовать обозначение  $|s| := \varepsilon$  для интенсивности волны  $s \in \mathcal{W}$ .

В завершение данного раздела введем понятие *интервала волн* в момент времени  $t$ , которое будет часто использоваться в следующих разделах.

**Определение 2.2.** Пусть  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{W}(t)$ . Будем говорить, что  $\mathcal{I}$  — *интервал волн* в момент времени  $t$ , если для любых заданных  $s_1, s_2 \in \mathcal{I}$ , таких что  $s_1 \leq s_2$ , и для любого  $p \in \mathcal{W}(t)$

$$s_1 \leq p \leq s_2 \implies p \in \mathcal{I}.$$

Будем говорить, что интервал волн  $\mathcal{I}$  *однородный* в момент времени  $t$ , если для всех  $s, s' \in \mathcal{I}$ ,  $\mathcal{S}(s) = \mathcal{S}(s')$ . Если волны в  $\mathcal{I}$  положительны (отрицательны), будем говорить, что  $\mathcal{I}$  — *положительный (отрицательный)* интервал волн.

Для заданного (непустого) однородного интервала волн  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{W}(t)$  в момент времени  $t$  легко видеть, что множество

$$I := \begin{cases} \bigcup_{s \in \mathcal{I}} (\hat{w}(s) - \varepsilon, \hat{w}(s)] & \text{если } \mathcal{S}(\mathcal{I}) = +1, \\ \bigcup_{s \in \mathcal{I}} [\hat{w}(s), \hat{w}(s) + \varepsilon) & \text{если } \mathcal{S}(\mathcal{I}) = -1, \end{cases}$$

является вещественным интервалом. Таким образом, можно определить

- *интенсивность*  $\mathcal{I}$  как

$$|\mathcal{I}| := \sum_{s \in \mathcal{I}} |s| = \text{card}(\mathcal{I})\varepsilon = \mathcal{L}^1(I);$$

- *скорость Ранкина — Гюгонио*, определяемую непрерывной функцией  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  для однородного интервала волн  $\mathcal{I}$  следующим образом:

$$\sigma^{\text{rh}}(g, \mathcal{I}) := \frac{g(\sup(I)) - g(\inf(I))}{\sup(I) - \inf(I)};$$

- *энтропийную скорость*, определенную для волны  $s \in \mathcal{I}$  задачей Римана  $\mathcal{I}$  и функцией потока  $g$  как

$$\sigma^{\text{ent}}(g, \mathcal{I}, s) := \begin{cases} \frac{d}{du} \text{conv}_I g_\varepsilon \left( (\hat{w}(s) - \varepsilon, \hat{w}(s)) \right) & \text{если } \mathcal{S}(\mathcal{I}) = +1, \\ \frac{d}{du} \text{conc}_I g_\varepsilon \left( (\hat{w}(s), \hat{w}(s) - \varepsilon) \right) & \text{если } \mathcal{S}(\mathcal{I}) = -1, \end{cases}$$

где  $g_\varepsilon$  обозначает кусочно-непрерывную аффинную интерполяцию  $g$  на сетке  $\varepsilon$ ; будем также говорить, что две волны  $s, s' \in \mathcal{I}$  разделены задачей Римана  $\mathcal{I}$  с потоком  $g$ , если  $\sigma^{\text{ent}}(g, \mathcal{I}, s) \neq \sigma^{\text{ent}}(g, \mathcal{I}, s')$ .

**Замечание 2.2.** Для аппроксимации Глимма решения общей системы (1.1)-(1.2) по прежнему можно определить алгоритм трассировки волн, вводя  $n$  множеств волн (по одному для каждого семейства), которые должны быть подмножествами вещественной оси, поэтому для схемы Глимма лучше иметь бесконечно много бесконечно малых волн вместо конечного числа дискретных волн. Более того, можно определить отображение положений  $\mathbf{x}(t, s)$  и отображение скорости  $\sigma(t, s)$ , решая задачу Римана в каждой точке сетки  $(i\varepsilon, m\varepsilon)$  и используя сэмплирующую последовательность

для возобновления процедуры в моменты времени  $t = i\varepsilon$ ,  $i \in \mathbb{N}$  (см. [8, раздел 4], где алгоритм трассировки волн называется *представлением Лагранжа*).

**2.4. Эффективная функция потока  $f_t^{\text{eff}}$ .** Зафиксируем произвольное время  $\bar{t}$ . Разбивая  $\mathcal{W}(\bar{t})$  относительно отношения эквивалентности

$$s \sim s' \iff \{p \in \mathcal{W} \mid s \leq p \leq s'\} \cap \mathcal{W}(\bar{t}) \text{ — однородный интервал волн,}$$

можно записать  $\mathcal{W}(\bar{t})$  как конечное объединение непересекающихся максимальных (относительно вложения) однородных интервалов волн  $\mathcal{M}_l$ :

$$\mathcal{W}(\bar{t}) = \bigcup_{l=1}^L \mathcal{M}_l.$$

Заметим, что данное разбиение может меняться только в моменты уничтожения.

Зафиксируем  $\bar{t}$  и максимальный однородный положительный (соответственно, отрицательный) интервал волн  $\mathcal{M}_l$ . Определим *эффективную функцию потока*  $f_t^{\text{eff}} : \bigcup_{s \in \mathcal{M}_l} (\hat{w}(s) - \varepsilon, \hat{w}(s)) \rightarrow \mathbb{R}$  (соответственно,  $f_t^{\text{eff}} : \bigcup_{s \in \mathcal{M}_l} [\hat{w}(s), \hat{w}(s) + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ ) как произвольную  $C^{1,1}$ -функцию, удовлетворяющую следующему условию:

$$\frac{d^2 f_t^{\text{eff}}}{dw^2}(w) := \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}(w, v) \quad \text{для почти всех } w, \quad (2.6)$$

где  $v = v(\bar{t}, \mathbf{x}(\bar{t}, s))$  для всех  $s$ , таких что  $w \in (\hat{w}(s) - \varepsilon, \hat{w}(s))$  (соответственно,  $w \in [\hat{w}(s), \hat{w}(s) + \varepsilon)$ ).

### Замечание 2.3.

1. Для упрощения обозначений мы не указываем явно зависимость  $f_t^{\text{eff}}$  от однородного интервала  $\mathcal{M}_l$ . В дальнейшем это не вызовет недоразумений.
2. Эффективная функция потока  $f_t^{\text{eff}}$  определена с точностью до аффинных функций.
3. Пусть  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}_l$  — положительный (соответственно, отрицательный) интервал волн в момент времени  $\bar{t}$ . Предположим, что  $\mathcal{I} \ni s \mapsto v(\bar{t}, \mathbf{x}(\bar{t}, s))$  тождественно равно некоторому  $\bar{v}$  на  $\mathcal{I}$ . Тогда  $f_t^{\text{eff}}$  совпадает с  $f(\cdot, \bar{v})$  на  $\bigcup_{s \in \mathcal{I}} (\hat{w}(s) - \varepsilon, \hat{w}(s))$  (соответственно,  $\bigcup_{s \in \mathcal{I}} [\hat{w}(s), \hat{w}(s) + \varepsilon)$ ) с точностью до аффинных функций. Таким образом,  $s, s' \in \mathcal{I}$  разделены задачей Римана  $\mathcal{I}$  с функцией потока  $f_t^{\text{eff}}$  тогда и только тогда, когда они разделены той же задачей Римана с функцией потока  $f(\cdot, \bar{v})$ . Более точно,

$$\sigma^{\text{ent}}(f_t^{\text{eff}}, \mathcal{I}, s') - \sigma^{\text{ent}}(f_t^{\text{eff}}, \mathcal{I}, s) = \sigma^{\text{ent}}(f(\cdot, \bar{v}), \mathcal{I}, s') - \sigma^{\text{ent}}(f(\cdot, \bar{v}), \mathcal{I}, s).$$

Аналогично, если  $\mathcal{I}, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{M}_l$  — интервалы волн во время  $\bar{t}$ , такие что  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{I}$  и  $\mathcal{I} \ni s \mapsto v(\bar{t}, \mathbf{x}(\bar{t}, s))$  тождественно равны некоторому  $\bar{v}$ , то

$$\sigma^{\text{rh}}(f_t^{\text{eff}}, \mathcal{I}_2) - \sigma^{\text{rh}}(f_t^{\text{eff}}, \mathcal{I}_1) = \sigma^{\text{rh}}(f(\cdot, \bar{v}), \mathcal{I}_2) - \sigma^{\text{rh}}(f(\cdot, \bar{v}), \mathcal{I}_1).$$

**Замечание 2.4.** Определение эффективной функции потока для аппроксимации Глимма решения общей системы (1.1)-(1.2) полностью аналогично (2.6) (см. [8, определение 4.8]).

**2.5. Функционал трансверсального взаимодействия  $Q^{\text{trans}}$ .** Определим стандартный функционал трансверсального взаимодействия Глимма  $Q^{\text{trans}}$ , который будет часто использоваться в дальнейшем:

$$Q^{\text{trans}}(t) := \sum_{h=1}^H \sum_{\substack{s \in \mathcal{W}(t) \\ \mathbf{x}(t, s) < \mathbf{x}(t, v_h)}} |v_h| |s|.$$

Напомним, что  $|v_h|$  — интенсивность волнового фронта  $v_h$ , а  $|s| = \varepsilon$  — интенсивность волнового фронта  $s$ . Следующее утверждение является классическим, см., например, [9].

### Утверждение 2.2.

1.  $Q^{\text{trans}}(0) \leq \text{Tot.Var.}(v(0, \cdot)) \text{Tot.Var.}(w(0, \cdot));$

2. функционал  $Q^{\text{trans}}$  — положительный, кусочно-постоянный, непрерывный справа и невозрастающий; более того, в момент  $t_j$  каждого трансверсального взаимодействия

$$Q^{\text{trans}}(t_j) - Q^{\text{trans}}(t_{j-1}) = -|v_{h(j)}| |\mathcal{W}(t_j, x_j)|,$$

где  $v_{h(j)}$  — волновой фронт первого семейства, участвующий в трансверсальном взаимодействии в момент времени  $t_j$ .

### 3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Оставшаяся часть работы посвящена доказательству оценки (1.4). Точнее, мы докажем ниже теорему 3.1 об изменении скорости каждой волны в каждый момент взаимодействия, уничтожения или трансверсального взаимодействия. Уравнение (3.23) показывает, что теорема 3.1 эквивалентна (1.4) (или даже сильнее, т. к. она учитывает также уничтожения и трансверсальные взаимодействия).

Как и в предыдущем разделе,  $(t, x) \mapsto (w_\varepsilon(t, x), v_\varepsilon(t, x))$  — решение задачи Коши (1.1)-(1.2) типа  $\varepsilon$ -волнового фронта. Рассмотрим алгоритм трассировки волнового фронта и соответствующие функцию положений  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, s)$  и функцию скоростей  $\sigma = \sigma(t, s)$ , построенные в предыдущем разделе. Фиксируем волну  $s \in \mathcal{W}(0)$  и рассмотрим функцию  $t \mapsto \sigma(t, s)$ . По построению она определена до момента времени  $t^{\text{canc}}(s)$ , когда  $s$  уничтожается; кроме того, она кусочно-постоянна и непрерывна справа с возможными скачками при  $t = t_j, j \in 1, \dots, J$ .

**3.1. Формулировка основной теоремы и идея доказательства.** Мы докажем следующий результат.

**Теорема 3.1.** Верно следующее неравенство:

$$\sum_{j=1}^J \sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)| |s| \leq \mathcal{O}(1) \left[ \text{Tot.Var.}(w(0, \cdot))^2 + \text{Tot.Var.}(v(0, \cdot))^2 \right], \quad (3.1)$$

где  $|s| := \varepsilon$  — интенсивность волны  $s$ , а символ Ландау  $\mathcal{O}(1)$  означает константу, которая может зависеть только от функции потока  $f$ .

**Замечание 3.1.** Аналогом теоремы 3.1 для приближенного решения Глимма общей системы (1.1)-(1.2) является [8, теорема 1.1].

Для доказательства теоремы 3.1 сначала разобьем слагаемые левой части (3.1) на моменты взаимодействий, уничтожений и трансверсальных взаимодействий:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J \sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)| |s| &= \sum_{\substack{(t_j, x_j) \\ \text{взаимодействия}}} \sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)| |s| + \\ &+ \sum_{\substack{(t_j, x_j) \\ \text{уничтожения}}} \sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)| |s| + \\ &+ \sum_{\substack{(t_j, x_j) \\ \text{трансверсальные} \\ \text{взаимодействия}}} \sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)| |s|. \end{aligned}$$

Стандартные вычисления, основанные на свойствах выпуклых и вогнутых оболочек (см. [7, утверждения 4.1 и 4.3]), показывают, что:

- в любой трансверсальной точке взаимодействия  $(t_j, x_j)$

$$\sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)| |s| \leq \|D_{wv}^2 f\|_{L^\infty} |v_{h(j)}| |\mathcal{W}(t_j, x_j)| \leq \mathcal{O}(1) \left[ Q^{\text{trans}}(t_{j-1}) - Q^{\text{trans}}(t_j) \right];$$

- в любой точке уничтожения  $(t_j, x_j)$

$$\sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)| |s| \leq \|D_{wv}^2 f\|_{L^\infty} \text{Tot.Var.}(w(0, \cdot)) \left[ \text{Tot.Var.}(w_\varepsilon(t_{j-1}, \cdot)) - \text{Tot.Var.}(w_\varepsilon(t_j, \cdot)) \right].$$

Так как  $t \mapsto Q^{\text{trans}}(t)$  и  $t \mapsto \text{Tot.Var.}(w_\varepsilon(t))$  — убывающие функционалы, ограниченные при  $t = 0$ , используя утверждение 2.2, получим, что

$$\sum_{\substack{(t_j, x_j) \\ \text{уничтожения} \\ \text{или} \\ \text{трансверсальные} \\ \text{взаимодействия}}} \sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)| |s| \leq \mathcal{O}(1) \left[ \text{Tot.Var.}(w(0, \cdot))^2 + \text{Tot.Var.}(v(0, \cdot))^2 \right]. \quad (3.2)$$

**Замечание 3.2.** В общем гиперболическом случае размерности  $n \times n$  функционалы  $t \mapsto Q^{\text{trans}}(t)$  и  $t \mapsto \text{Tot.Var.}(w_\varepsilon(t))$  не будут убывающими, но их рост ограничен убывающим кубическим функционалом, введенным Бьянкини в [4]:

$$Q^{\text{cubic}}(t) := \sum_{\substack{s < s' \\ s, s' \in \mathcal{W}(t)}} |\sigma(t, s) - \sigma(t, s')| |s| |s'|. \quad (3.3)$$

Таким образом, оценка, аналогичная (3.2), справедлива в общем случае.

Нетривиальная часть оценки относится к моментам взаимодействия (моментам, в которые взаимодействуют два волновых фронта из одного семейства и одного знака), т. е. часть оценки (3.1), эквивалентная (1.4). Опишем технику, используемую для оценки членов, соответствующих взаимодействиям. Введем функционал  $t \mapsto \Omega(t)$  со следующими свойствами:

1. при  $t = 0$  имеем  $\Omega(0) \leq \mathcal{O}(1) \text{Tot.Var.}(w_0)^2$ ;
2.  $\Omega$  равен константе, когда нет взаимодействий, уничтожений или трансверсальных взаимодействий;
3. в момент уничтожения  $\Omega$  убывает;
4. в момент трансверсального взаимодействия  $\Omega$  может увеличиться не более чем на величину

$$\Omega(t_j) - \Omega(t_{j-1}) \leq \mathcal{O}(1) |v_{h(j)}| |\mathcal{W}(t_j, x_j)| \leq \mathcal{O}(1) \left[ Q^{\text{trans}}(t_{j-1}) - Q^{\text{trans}}(t_j) \right]; \quad (3.4)$$

5. в момент взаимодействия  $\Omega$  может убывать минимум на

$$\sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)| |s| \leq 2 \left[ \Omega(t_{j-1}) - \Omega(t_j) \right]. \quad (3.5)$$

Используя (3.4)-(3.5) и тот факт, что  $Q^{\text{trans}}$  — ограниченный убывающий функционал, стандартное вычисление показывает, что

$$\sum_{\substack{(t_j, x_j) \\ \text{взаимодействия}}} \sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)| |s| \leq \mathcal{O}(1) \left[ \text{Tot.Var.}(w(0, \cdot))^2 + \text{Tot.Var.}(v(0, \cdot))^2 \right],$$

и тем самым завершается доказательство теоремы 3.1.

**Замечание 3.3.** В общем случае доказательство не столь просто, как в рассматриваемой ситуации. Однако возникающие трудности носят в основном технический характер. Мы их отметим в замечании после явного определения  $\Omega$ .

В оставшейся части работы мы докажем оценки (3.4) и (3.5).

**3.2. Анализ взаимодействия волн.** В этом пункте мы введем обозначение пары волн, которые *не взаимодействовали до момента времени  $t$* , пары волн, которые *уже взаимодействовали*, и пары волн, которые *будут взаимодействовать снова*. Для каждой пары волн, которые уже взаимодействовали, мы определим интервал волн и разбиение этого интервала, которое в некотором смысле содержит их предшествующую историю.

**Замечание 3.4.** Этот раздел аналогичен [8, раздел 5], где рассмотрены взаимодействия волн для решения Глимма общей задачи Коши (1.1)-(1.2). Основные отличия нашего модельного случая и общего случая заключаются в том, что в последнем могут возникать волны при  $t > 0$ .

**Определение 3.1.** Пусть  $\bar{t}$  — фиксированный момент времени и  $s, s' \in \mathcal{W}(\bar{t})$ . Будем говорить, что

- $s, s'$  взаимодействуют в момент времени  $\bar{t}$ , если  $\mathbf{x}(\bar{t}, s) = \mathbf{x}(\bar{t}, s')$ ;
- $s, s'$  уже взаимодействовали к моменту времени  $\bar{t}$ , если существует  $t \leq \bar{t}$ , такое что  $s, s'$  взаимодействуют в момент времени  $t$ ;
- $s, s'$  не взаимодействовали к моменту времени  $\bar{t}$ , если для любого  $t \leq \bar{t}$  они не взаимодействовали в момент времени  $t$ ;
- $s, s'$  будут взаимодействовать снова после момента времени  $\bar{t}$ , если существует  $t > \bar{t}$ , такое что  $s, s'$  взаимодействуют в момент времени  $t$ .

Заметим, что

- если две волны  $s, s' \in \mathcal{W}(t)$  уже взаимодействовали к моменту времени  $\bar{t}$ , то у них одинаковый знак;
- если  $s \leq p \leq p' \leq s'$  — волны из  $\mathcal{W}(t)$  и  $s, s'$  уже взаимодействовали к моменту времени  $\bar{t}$ , то  $p, p'$  уже взаимодействовали к моменту времени  $\bar{t}$  (т. к.  $r \mapsto \mathbf{x}(t, r)$  возрастает).

**Определение 3.2.** Пусть  $s, s' \in \mathcal{W}(\bar{t})$  — две волны, уже взаимодействовавшие к моменту времени  $\bar{t}$ . Будем говорить, что  $s, s'$  разделены в вещественном решении в момент времени  $\bar{t}$ , если

$$(\mathbf{x}(\bar{t}, s), \sigma(\bar{t}, s)) \neq (\mathbf{x}(\bar{t}, s'), \sigma(\bar{t}, s')),$$

т. е. если в момент времени  $\bar{t}$  у них либо различные положения, либо одинаковые положения, но различные скорости. Если они не разделены в вещественном решении, мы будем говорить, что они объединены в вещественном решении.

**Замечание 3.5.** Если  $\bar{t} \neq t_j$  при каждом  $j$ , то две волны разделены в вещественном решении тогда и только тогда, когда у них различные положения. Условие наличия различных скоростей нужно только в моменты времени уничтожения и трансверсального взаимодействия.

**Определение 3.3.** Фиксируем время  $\bar{t}$  и две волны  $s, s' \in \mathcal{W}(\bar{t})$ ,  $s < s'$ . Предположим, что  $s, s'$  разделены в вещественном решении в момент времени  $\bar{t}$ . Определим момент последнего разделения  $\mathfrak{t}^{\text{split}}(\bar{t}, s, s')$  (если  $s, s'$  уже взаимодействовали к моменту  $\bar{t}$ ) и момент взаимодействия  $\mathfrak{t}^{\text{int}}(\bar{t}, s, s')$  (если  $s, s'$  будут взаимодействовать после момента  $\bar{t}$ ) по формулам

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}^{\text{split}}(\bar{t}, s, s') &:= \max \{t \leq \bar{t} \mid \mathbf{x}(t, s) = \mathbf{x}(t, s')\}, \\ \mathfrak{t}^{\text{int}}(\bar{t}, s, s') &:= \min \{t > \bar{t} \mid \mathbf{x}(t, s) = \mathbf{x}(t, s')\}. \end{aligned}$$

Кроме того, положим

$$\mathbf{x}^{\text{sp}}(\bar{t}, s, s') := \mathbf{x}(\mathfrak{t}^{\text{split}}(\bar{t}, s, s'), s) = \mathbf{x}(\mathfrak{t}^{\text{split}}(\bar{t}, s, s'), s')$$

и

$$\mathbf{x}^{\text{int}}(\bar{t}, s, s') := \mathbf{x}(\mathfrak{t}^{\text{int}}(\bar{t}, s, s'), s) = \mathbf{x}(\mathfrak{t}^{\text{int}}(\bar{t}, s, s'), s').$$

**Определение 3.4.** Зафиксируем время  $\bar{t} \geq 0$ . Для пары волн  $s, s'$ , которые уже взаимодействовали и разделены при  $\bar{t}$ , определим характеристический интервал  $s, s'$  в момент  $\bar{t}$  как

$$\mathcal{I}(\bar{t}, s, s') := \mathcal{W}(\mathfrak{t}^{\text{split}}(\bar{t}, s, s'), \mathbf{x}^{\text{sp}}(\bar{t}, s, s')) \cap \mathcal{W}(\bar{t}). \quad (3.7)$$

Несложно заметить, что  $\mathcal{I}(\bar{t}, s, s')$  — волновой интервал в момент  $\bar{t}$ . Заметим также, что он изменяется только в момент взаимодействия, уничтожения или трансверсального взаимодействия.

Определим теперь разбиение  $\mathcal{P}(\bar{t}, s, s')$  волнового интервала  $\mathcal{I}(\bar{t}, s, s')$  рекурсивно по  $\bar{t} = t_0, \dots, t_J$ ,  $\bar{t} \geq \mathfrak{t}^{\text{split}}(\bar{t}, s, s')$ , для волн  $s, s'$ , разделенных в вещественном решении в момент  $\bar{t}$ , следующим образом. Если  $\bar{t} = \mathfrak{t}^{\text{split}}(\bar{t}, s, s') = t_{\bar{j}}$  при некотором  $\bar{j} \in \{0, \dots, J\}$ , то  $\mathcal{P}(t_{\bar{j}}, s, s')$  задается отношением эквивалентности

$$p \sim p' \iff p, p' \text{ не разделены в вещественном решении при } t_{\bar{j}} \text{ или, что эквивалентно, они не разделены задачей Римана } \mathcal{W}(t_{\bar{j}}, \mathbf{x}(t_{\bar{j}}, s)) \text{ с функцией потока } \mathbf{f}_{t_{\bar{j}}}^{\text{eff}}.$$

С другой стороны, если  $\bar{t} = t_{\bar{j}} > \mathfrak{t}^{\text{split}}(\bar{t}, s, s')$  при некотором  $\bar{j} \in \{1, \dots, J\}$  (т. е.  $s, s'$  разделены в вещественном решении при  $t_{\bar{j}-1}$ ), то  $\mathcal{P}(t_{\bar{j}}, s, s')$  задается отношением эквивалентности

$$p \sim p' \iff p, p' \text{ принадлежат одному классу эквивалентности } \mathcal{J} \in \mathcal{P}(t_{\bar{j}-1}, s, s') \text{ при } t_{\bar{j}-1}$$

и задача Римана  $\mathcal{J} \cap \mathcal{W}(t_j)$  с функцией потока  $\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}$  их не разделяет.

Наконец, при  $t \in [t_j, t_{j+1})$  положим  $\mathcal{P}(t, s, s') = \mathcal{P}(t_j, s, s')$ .

Следующие два утверждения совместно с определением 3.5 описывают некоторые свойства  $\mathcal{P}(\bar{t}, s, s')$ . Их детальные (но несложные) доказательства по индукции см. в [7, определение 4.12 и утверждения 4.11, 4.13].

**Утверждение 3.1.** Пусть  $t \geq 0$  и  $s, s' \in \mathcal{W}(t)$ . Предположим, что  $s, s'$  разделены при  $t$  в вещественном решении и уже взаимодействовали. Если  $p, p' \in \mathcal{I}(t, s, s')$  не разделены разбиением  $\mathcal{P}(t, s, s')$ , то они не разделены в вещественном решении при  $t$ .

**Определение 3.5.** Пусть даны два множества  $A, B$ ,  $A \subseteq B$ . Пусть  $\mathcal{P}$  — разбиение  $B$ . Будем говорить, что  $\mathcal{P}$  может быть сужено на  $A$ , если для любого  $C \in \mathcal{P}$  выполнено либо  $C \subseteq A$ , либо  $C \subseteq B \setminus A$ . Также будем писать

$$\mathcal{P}|_A := \{C \in \mathcal{P} \mid C \subseteq A\}.$$

Очевидно, что  $\mathcal{P}$  может быть сужено на  $A$  тогда и только тогда, когда оно может быть сужено на  $B \setminus A$ .

**Утверждение 3.2.** Пусть  $t \geq 0$  и  $s, s', p, p' \in \mathcal{W}(t)$ ,  $p \leq s < s' \leq p'$ . Предположим, что  $p, p'$  уже взаимодействовали в момент времени  $t$ , а  $s, s'$  разделены в вещественном решении в момент времени  $t$ . Тогда  $\mathcal{P}(t, p, p')$  может быть сужено на  $\mathcal{I}(t, p, p') \cap \mathcal{I}(t, s, s')$  и на  $\mathcal{I}(t, p, p') \setminus \mathcal{I}(t, s, s')$ .

Более того, если  $p, p' \in \mathcal{I}(t, s, s')$ , то  $\mathcal{I}(t, p, p') = \mathcal{I}(t, s, s')$  и  $\mathcal{P}(t, p, p') = \mathcal{P}(t, s, s')$ .

**3.3. Определение  $\mathfrak{Q}$ .** Теперь мы можем определить функционал  $\mathfrak{Q}$  и доказать, что он удовлетворяет неравенствам (3.4)-(3.5). Начнем с определения веса  $\mathfrak{q}(t, s, s')$  для пары волн  $(s, s')$ , таких что  $s < s'$  в момент времени  $t$ :

- если  $(s, s')$  никогда не взаимодействовали к моменту  $t$ , то

$$\mathfrak{q}(t, s, s') = \|D_{ww}^2 f\|_{\infty};$$

- если  $(s, s')$  уже взаимодействовали, но они не разделены в момент  $t$ , то

$$\mathfrak{q}(t, s, s') = 0;$$

- если  $(s, s')$  уже взаимодействовали и они разделены в момент  $t$ , но они не будут взаимодействовать после момента  $t$ , то

$$\mathfrak{q}(t, s, s') = 0;$$

- если  $(s, s')$  уже взаимодействовали и разделены в момент  $t$  и они будут взаимодействовать после момента  $t$ , то

$$\mathfrak{q}(t, s, s') = \frac{\pi(t, s, s')}{d(t, s, s')}, \quad (3.8)$$

где  $\pi(t, s, s')$  и  $d(t, s, s')$  определены ниже.

Так как  $s, s'$  будут взаимодействовать после момента  $t$ , то  $t < \mathfrak{t}^{\text{int}}(t, s, s')$ . Пусть элементы разбиения

$$\mathcal{J}, \mathcal{J}' \in \mathcal{P}(t, s, s'), \text{ такие что } s \in \mathcal{J}, s' \in \mathcal{J}',$$

$$\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathcal{P}(\mathfrak{t}^{\text{int}}(t, s, s')-, s, s'), \text{ такие что } s \in \mathcal{K}, s' \in \mathcal{K}'.$$

содержат  $s, s'$  в момент времени  $t$  и в левой окрестности момента  $\mathfrak{t}^{\text{int}}(t, s, s')$  соответственно. Заметим, что мы должны рассматривать разбиение при  $\mathfrak{t}^{\text{int}}(t, s, s')-$ , т. е. в левой окрестности  $\mathfrak{t}^{\text{int}}(t, s, s')$ , потому что в силу определения  $\mathcal{P}(t, s, s')$  непрерывно справа. Очевидно, что  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{J}$  и  $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{J}'$ . Положим

$$\mathcal{G} := \mathcal{K} \cup \{p \in \mathcal{J} \mid p > \mathcal{K}\}, \quad \mathcal{G}' := \{p \in \mathcal{J}' \mid p < \mathcal{K}'\} \cup \mathcal{K}', \quad \mathcal{B} := \mathcal{K} \cup \{p \in \mathcal{W}(t) \mid \mathcal{K} < p < \mathcal{K}'\} \cup \mathcal{K}'. \quad (3.9)$$

Нетрудно видеть, что  $\mathcal{G}, \mathcal{G}', \mathcal{B}$  — интервалы волн в момент времени  $t$ . Теперь мы можем определить

$$\pi(t, s, s') := \left[ \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_t^{\text{eff}}, \mathcal{G}) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_t^{\text{eff}}, \mathcal{G}') \right]^+, \quad d(t, s, s') := |\mathcal{B}| = \text{card}(\mathcal{B})\varepsilon. \quad (3.10)$$



В силу гладкости отображения  $w \mapsto \mathbf{f}_t^{\text{eff}}(w)$ , в любой момент времени  $t$  и для любой пары  $(s, s') \in \mathcal{W}(t)$ , такой что  $s < s'$ , имеем

$$0 \leq \mathbf{q}(t, s, s') \leq \|D_{ww}^2 f\|_{\infty}. \quad (3.11)$$

Введем функционал

$$\mathfrak{Q}(t) := \sum_{\substack{s, s' \in \mathcal{W}(t) \\ s < s'}} \mathbf{q}(t, s, s') |s| |s'|. \quad (3.12)$$

Напомним, что  $|s| = |s'| = \varepsilon$  — это интенсивность волн  $s$  и  $s'$  соответственно. Сразу видно, что:

1.  $\mathfrak{Q}(0) \leq \|D_{ww}^2 f\|_{L^\infty} \text{Tot.Var.}(w(0, \cdot))^2$  (свойство (1) на стр. 158);
2. если нет взаимодействий, уничтожений или трансверсальных взаимодействий, то  $\mathfrak{Q}$  постоянен, т. к.  $\mathcal{I}, \mathcal{P}, \mathbf{f}_t^{\text{eff}}$  постоянны (свойство (2) на с. 158).

**Утверждение 3.3.** Если  $t_j$  — точка уничтожения, то  $\mathfrak{Q}(t_j) \leq \mathfrak{Q}(t_{j-1})$  (свойство (3) на с. 158).

*Доказательство.* Для вычисления изменения  $\mathbf{q}(t, s, s')$  при уничтожениях достаточно рассмотреть только два следующих интересных случая.

Сначала предположим, что  $s, s'$  не разделены в вещественном решении при  $t_{j-1}$ , но разделены при  $t_j$ . В этом случае по определению  $\pi$  и в силу свойств выпуклых функций будем иметь  $\pi(t_j, s, s') = 0$  и, следовательно,  $\mathbf{q}(t_j, s, s') = \mathbf{q}(t_{j-1}, s, s') = 0$ .

Теперь предположим, что  $s, s'$  разделены в вещественном решении как в момент времени  $t_{j-1}$ , так и в момент времени  $t_j$ , что они уже взаимодействовали к моменту  $t_{j-1}$  и будут взаимодействовать после  $t_j$ . Без ограничения общности предположим, что волны  $s, s'$  положительны, а волны, которые уничтожились, отрицательны. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{j-1}, \mathcal{J}'_{j-1} &\in \mathcal{P}(t_{j-1}, s, s'), \text{ где } s \in \mathcal{J}_{j-1}, s' \in \mathcal{J}'_{j-1}, \\ \mathcal{J}_j, \mathcal{J}'_j &\in \mathcal{P}(t_j, s, s'), \text{ где } s \in \mathcal{J}_j, s' \in \mathcal{J}'_j, \\ \mathcal{K}, \mathcal{K}' &\in \mathcal{P}(\mathfrak{t}^{\text{int}}(t, s, s')-, s, s'), \text{ где } s \in \mathcal{K}, s' \in \mathcal{K}', \end{aligned} \quad (3.13)$$

и определим

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{j-1} &:= \mathcal{K} \cup \{z \in \mathcal{J}_{j-1} \mid z > \mathcal{K}\}, & \mathcal{G}_j &:= \mathcal{K} \cup \{z \in \mathcal{J}_j \mid z > \mathcal{K}\}, \\ \mathcal{G}'_{j-1} &:= \{z \in \mathcal{J}'_{j-1} \mid z < \mathcal{K}'\} \cup \mathcal{K}', & \mathcal{G}'_j &:= \{z \in \mathcal{J}'_j \mid z < \mathcal{K}'\} \cup \mathcal{K}', \\ \mathcal{B}_{j-1} &:= \mathcal{K} \cup \{p \in \mathcal{W}(t_{j-1}) \mid \mathcal{K} < p < \mathcal{K}'\} \cup \mathcal{K}', & \mathcal{B}_j &:= \mathcal{K} \cup \{p \in \mathcal{W}(t_j) \mid \mathcal{K} < p < \mathcal{K}'\} \cup \mathcal{K}'. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Из свойств выпуклых функций следует, что (см. рис. 1)

$$\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}_j) \leq \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}_{j-1}), \quad \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}'_j) \geq \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}'_{j-1}). \quad (3.15)$$

В силу того, что  $\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}} = \mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}$  (т. к. нет трансверсальных взаимодействий при  $t_j$ ), имеем  $\pi(t_j, s, s') \leq \pi(t_{j-1}, s, s')$ .

Более того, заметим, что  $\mathcal{B}_{j-1} = \mathcal{B}_j$ , т. к. волны в  $\mathcal{B}_{j-1}$  не могут быть уничтожены. Таким образом,  $\mathbf{q}(t_j, s, s') \leq \mathbf{q}(t_{j-1}, s, s')$ , что влечет уменьшение  $\mathfrak{Q}$  в момент времени уничтожения.  $\square$

Для завершения доказательства теоремы 3.1 осталось показать, что  $\mathfrak{Q}$  удовлетворяет свойствам 4 и 5 на с. 158, т. е. неравенствам (3.4)-(3.5).

**Замечание 3.6.** Определение  $\mathbf{q}(t, s, s')$  (формулы (3.8)–(3.10)) — это определение из [8], введенное здесь с некоторым упрощением в силу рассматриваемого нами модельного случая. В работах [6, 7] использовались другие определения.

Определение из [6] работает в скалярном случае, но не может быть перенесено на общий случай.

С другой стороны, определение из [7] обладает тем недостатком, что оценка (3.11) не выполняется. Функционал  $\mathfrak{Q}(t) = \sum_{s < s'} \mathbf{q}(t, s, s') |s| |s'|$  по-прежнему равномерно ограничен величиной  $\|D_{ww}^2\|_{\infty} \text{Tot.Var.}(w(0, \cdot))^2$  (свойство (1) на с. 158) и доказательство теоремы 3.1 справедливо при предположениях, сделанных в работе [7] (совпадающих с предположениями в настоящей работе,

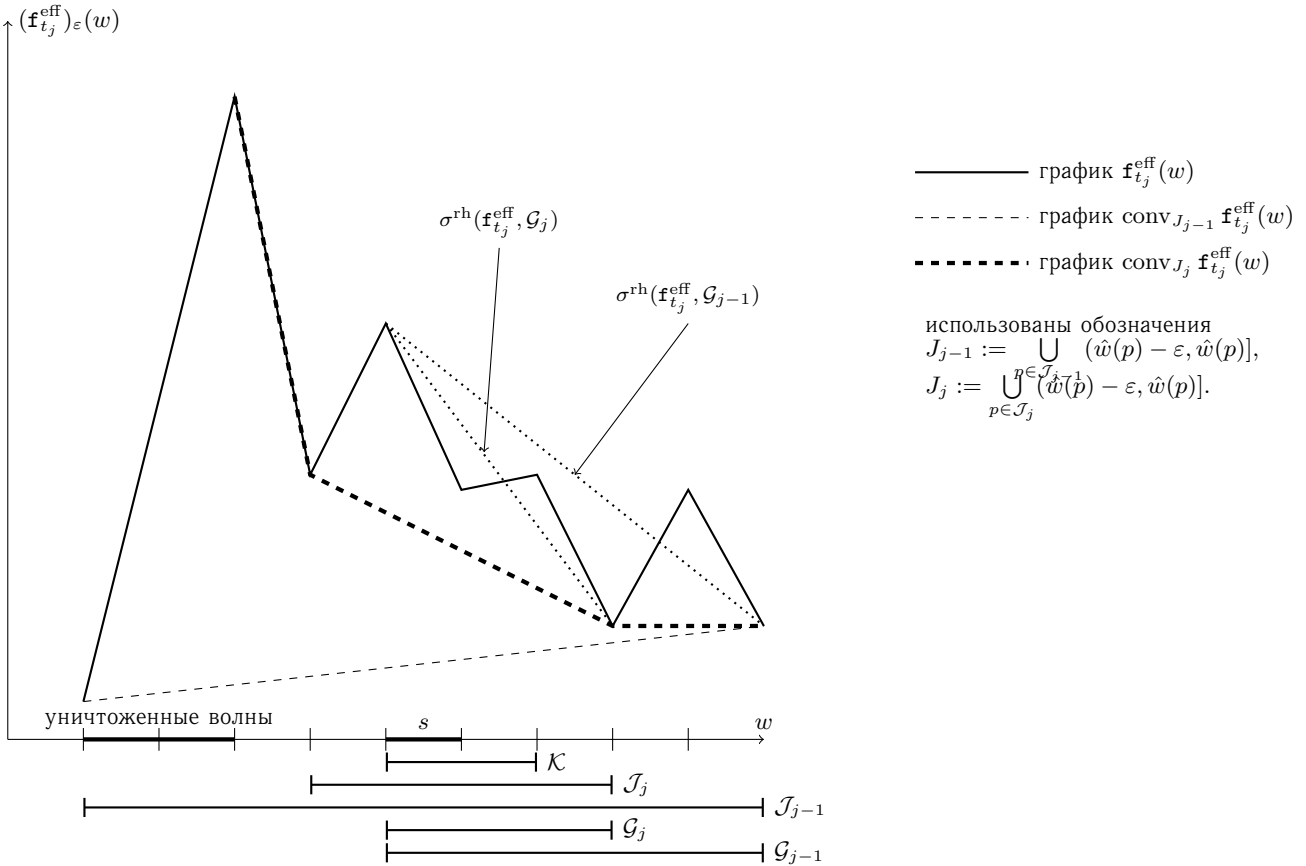


Рис. 1. Графическое доказательство (3.15).

т. е. ищется решение волнового фронта для треугольной системы (2.2)). Однако определение  $\mathfrak{q}$ , данное в [7], не работает в общем случае, т. к. не выполняется (3.11).

В настоящей работе мы используем корректное определение весов, которые надо приписать каждой паре волн  $(s, s')$ , чтобы доказать теорему 3.1 и в общем случае.

**Замечание 3.7.** В общем случае [8] (приближенное решение (1.1)-(1.2) по схеме Глимма) нужно учитывать тот факт, что некоторые волны могут создаваться при  $t > 0$ . При этом возникают следующие две трудности:

1. функционал  $\Omega$  может возрасти в момент времени  $t$ , соответствующий возникновению волны, потому что:
  - веса для новых волн должны быть вычислены и суммированы;
  - веса  $\mathfrak{q}(t, s, s')$  для пар  $(s, s')$ , существовавших до момента времени  $t$ , могут увеличиться;
 в обоих случаях приращение  $\Omega$  ограничено убывающим кубическим функционалом  $Q^{\text{cubic}}$ , определенным в (3.3);
2. могут произойти уничтожения внутри интервалов  $\mathcal{I}(t, s, s')$  (и не только на границах этих интервалов), а тогда веса  $\mathfrak{q}(t, s, s')$  могут увеличиться; однако в этом случае увеличение  $\mathfrak{q}(t, s, s')$  ограничено убыванием полной вариации приближенного решения.

**3.4. Возрастающая часть  $\Omega$ .** Этот раздел посвящен доказательству неравенства (3.4). А именно, мы докажем следующую теорему.

**Теорема 3.2.** Если  $(t_j, x_j)$  — точка трансверсального взаимодействия, то

$$\Omega(t_j) - \Omega(t_{j-1}) \leq \mathcal{O}(1) |v_{h(j)}| |\mathcal{W}(t_j, x_j)|,$$

где  $|v_{h(j)}|$  — интенсивность волнового фронта первого семейства, участвующего в трансверсальном взаимодействии в момент времени  $t_j$ .

Исследование возрастания  $\Omega$  для приближенного решения общей системы (1.1)-(1.2) по схеме Глимма, осуществлено в [8, теорема 6.5] и похоже на приведенное ниже, за исключением (многочисленных) технических деталей.

*Доказательство.* Доказательство разбито на четыре этапа.

*Шаг 1.* Прежде всего, заметим, что для любых волн  $s, s' \in \mathcal{W}(t_j) = \mathcal{W}(t_{j-1})$  выполнено  $\mathfrak{q}(t_j, s, s') \neq \mathfrak{q}(t_{j-1}, s, s')$ , только если

- (а) по крайней мере одна из волн из  $s, s'$  принадлежит  $\mathcal{W}(t_j, x_j)$ ;
- (б) волны  $s, s'$  уже взаимодействовали к моменту времени  $t_{j-1}$ ;
- (с) волны  $s, s'$  будут взаимодействовать снова после  $t_j$ ;

Пусть  $s, s'$  — пара волн, удовлетворяющая (а), (б), или (с).

*Шаг 2.* Заметим, что если  $s, s'$  удовлетворяют (а), (б), (с) выше, то  $\mathfrak{t}^{\text{int}}(t_j, s, s') = \mathfrak{t}^{\text{int}}(t_{j-1}, s, s')$ . Так как  $d(t_j, s, s')$  и  $d(t_{j-1}, s, s')$  вычисляются с учетом разбиения

$$\mathcal{P}(\mathfrak{t}^{\text{int}}(t_j, s, s')-, s, s') = \mathcal{P}(\mathfrak{t}^{\text{int}}(t_{j-1}, s, s')-, s, s')$$

левой окрестности времени взаимодействия  $\mathfrak{t}^{\text{int}}(t_j, s, s') = \mathfrak{t}^{\text{int}}(t_{j-1}, s, s')$ , то из (3.10) следует, что

$$d(t_j, s, s') = d(t_{j-1}, s, s'). \quad (3.16)$$

*Шаг 3.* Вычислим теперь вариацию  $\pi$ , т. е.  $\pi(t_j, s, s') - \pi(t_{j-1}, s, s')$ . Определим

$$\mathcal{J}_{j-1}, \mathcal{J}'_{j-1}, \quad \mathcal{J}_j, \mathcal{J}'_j, \quad \mathcal{K}, \mathcal{K}', \quad \mathcal{G}_{j-1}, \mathcal{G}'_{j-1}, \quad \mathcal{G}_j, \mathcal{G}'_j,$$

как в (3.13)-(3.14) при доказательстве утверждения 3.3. Также в этом случае выполняются неравенства (3.15), т. е.

$$\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}_j) \leq \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}_{j-1}), \quad \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}'_j) \geq \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}'_{j-1}). \quad (3.17)$$

Считая без ограничения общности, что  $s, s'$  — положительные волны, введем

$$G_{j-1} := \bigcup_{p \in \mathcal{G}_{j-1}} (\hat{w}(p) - \varepsilon, \hat{w}(p)], \quad G'_{j-1} := \bigcup_{p \in \mathcal{G}'_{j-1}} (\hat{w}(p) - \varepsilon, \hat{w}(p)].$$

Теперь мы можем сделать следующие преобразования:

$$\begin{aligned} & \pi(t_j, s, s') - \pi(t_{j-1}, s, s') = \\ & = \left[ \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}_j) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}'_j) \right]^+ - \left[ \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{G}_{j-1}) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{G}'_{j-1}) \right]^+ \leq \\ & \text{(согласно (3.17))} \leq \left[ \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}_{j-1}) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}'_{j-1}) \right]^+ - \left[ \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{G}_{j-1}) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{G}'_{j-1}) \right]^+ \leq \\ & \leq \left| \left[ \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}_{j-1}) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}, \mathcal{G}'_{j-1}) \right] - \left[ \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{G}_{j-1}) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{G}'_{j-1}) \right] \right| = \\ & = \left| \left( \frac{\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}(\max G_{j-1}) - \mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}(\min G_{j-1})}{\max G_{j-1} - \min G_{j-1}} - \frac{\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}(\max G'_{j-1}) - \mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}(\min G'_{j-1})}{\max G'_{j-1} - \min G'_{j-1}} \right) - \right. \\ & \left. - \left( \frac{\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}(\max G_{j-1}) - \mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}(\min G_{j-1})}{\max G_{j-1} - \min G_{j-1}} - \frac{\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}(\max G'_{j-1}) - \mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}(\min G'_{j-1})}{\max G'_{j-1} - \min G'_{j-1}} \right) \right| = \\ & = \frac{1}{\mathcal{L}^1(G_{j-1})\mathcal{L}^1(G'_{j-1})} \left| \int_{\min G_{j-1}}^{\max G_{j-1}} \int_{\min G'_{j-1}}^{\max G'_{j-1}} \left[ \left( \frac{d\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}(\tau)}{dw} - \frac{d\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}(\tau')}{dw} \right) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \left( \frac{d\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}(\tau)}{dw} - \frac{d\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}(\tau')}{dw} \right) \right] d\tau' d\tau \right| = \\ & = \frac{1}{\mathcal{L}^1(G_{j-1})\mathcal{L}^1(G'_{j-1})} \left| \int_{\min G_{j-1}}^{\max G_{j-1}} \int_{\min G'_{j-1}}^{\max G'_{j-1}} \int_{\tau'}^{\tau} \left( \frac{d^2\mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}(\xi)}{dw^2} - \frac{d^2\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}(\xi)}{dw^2} \right) d\xi d\tau' d\tau \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\mathcal{L}^1(G_{j-1})\mathcal{L}^1(G'_{j-1})} \int_{\min G_{j-1}}^{\max G_{j-1}} \int_{\min G'_{j-1}}^{\max G'_{j-1}} \int_{\tau'}^{\tau} \left| \frac{d^2 \mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}(\xi)}{dw^2} - \frac{d^2 \mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}(\xi)}{dw^2} \right| d\xi d\tau' d\tau. \quad (3.18)$$

Заметим, что если

$$\left| \frac{d^2 \mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}(\xi)}{dw^2} - \frac{d^2 \mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}(\xi)}{dw^2} \right| \neq 0,$$

то

$$\xi \in E := \left[ \min \left\{ w_\varepsilon(t_j, x_j -), w_\varepsilon(t_j, x_j) \right\}, \max \left\{ w_\varepsilon(t_j, x_j -), w_\varepsilon(t_j, x_j) \right\} \right],$$

и в этом случае

$$\frac{d^2 \mathbf{f}_{t_j}^{\text{eff}}(\xi)}{dw^2} - \frac{d^2 \mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}(\xi)}{dw^2} = \frac{\partial^2}{\partial w^2} f(\xi, v(t_j, x_j)) - \frac{\partial^2}{\partial w^2} f(\xi, v(t_j, x_j -)) = \int_{v_{h(j)}^-}^{v_{h(j)}^+} \frac{\partial^3}{\partial w^2 \partial v}(\xi, v) dv.$$

Тогда можно продолжить цепочку неравенств в (3.18):

$$\begin{aligned} \dots &\leq \frac{1}{\mathcal{L}^1(G_{j-1})\mathcal{L}^1(G'_{j-1})} \int_{\min G_{j-1}}^{\max G_{j-1}} \int_{\min G'_{j-1}}^{\max G'_{j-1}} \int_{[\tau, \tau'] \cap E} \int_{v_{h(j)}^-}^{v_{h(j)}^+} \left| \frac{\partial^3}{\partial w^2 \partial v}(\xi, v) \right| dv d\xi d\tau' d\tau \leq \\ &\leq \|D_{wv}^3\|_\infty |v_{h(j)}| |\mathcal{W}(t_j, x_j)|. \end{aligned} \quad (3.19)$$

*Шаг 4.* Вычислим теперь вариацию  $\mathfrak{Q}$ , используя (3.16) и (3.19):

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}(t_j) - \mathfrak{Q}(t_{j-1}) &= \\ &= \sum_{\substack{s, s' \in \mathcal{W}(t_j) \\ s < s' \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(a), (b), (c)}}} \left[ \mathfrak{q}(t_j, s, s') - \mathfrak{q}(t_{j-1}, s, s') \right] |s| |s'| = \\ &= \left( \sum_{\substack{s < \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s' \in \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(b), (c)}}} + \sum_{\substack{s < \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s' > \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(b), (c)}}} + \sum_{\substack{s \in \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s' > \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(b), (c)}}} \right) \left[ \mathfrak{q}(t_j, s, s') - \mathfrak{q}(t_{j-1}, s, s') \right] |s| |s'| = \\ &= \left( \sum_{\substack{s < \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s' \in \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(b), (c)}}} + \sum_{\substack{s < \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s' > \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(b), (c)}}} + \sum_{\substack{s \in \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s' > \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(b), (c)}}} \right) \frac{1}{d(t_j, s, s')} \left[ \pi(t_j, s, s') - \pi(t_{j-1}, s, s') \right] |s| |s'| \leq \\ &\quad \text{(в силу (3.19))} \\ &\leq \mathcal{O}(1) |v_{h(j)}| |\mathcal{W}(t_j, x_j)| \left( \sum_{\substack{s < \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s' \in \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(b), (c)}}} + \sum_{\substack{s < \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s' > \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(b), (c)}}} + \sum_{\substack{s \in \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s' > \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(b), (c)}}} \right) \frac{|s| |s'|}{d(t_j, s, s')} \leq \\ &\leq \mathcal{O}(1) |v_{h(j)}| |\mathcal{W}(t_j, x_j)| \left( \sum_{\substack{s < \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s' \in \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(b), (c)}}} + \sum_{\substack{s < \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s' > \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(b), (c)}}} + \sum_{\substack{s \in \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s' > \mathcal{W}(t_j, x_j) \\ s, s' \text{ удовлетворяют} \\ \text{(b), (c)}}} \right) \frac{|s| |s'|}{|\hat{w}(s') - (\hat{w}(s) - \varepsilon)|}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Положим

$$\begin{aligned} p_1 &:= \min \{p \in \mathcal{W}(t_j) \mid p \text{ уже взаимодействовала хотя бы с одной из волн в } \mathcal{W}(t_j, x_j) \text{ при } t_j\}, \\ p_2 &:= \max \{p \in \mathcal{W}(t_j) \mid p \text{ уже взаимодействовала хотя бы с одной из волн в } \mathcal{W}(t_j, x_j) \text{ при } t_j\}, \\ r_1 &:= \min \mathcal{W}(t_j, x_j), \\ r_2 &:= \max \mathcal{W}(t_j, x_j). \end{aligned}$$

Продолжим преобразования (3.20) следующим образом:

$$\begin{aligned} \dots &\leq \mathcal{O}(1) |v_{h(j)}| |\mathcal{W}(t_j, x_j)| \left( \int_{\hat{w}(p_1)-\varepsilon}^{\hat{w}(r_1)-\varepsilon} \int_{\hat{w}(r_1)-\varepsilon}^{\hat{w}(r_2)} + \int_{\hat{w}(p_1)-\varepsilon}^{\hat{w}(p_2)} \int_{\hat{w}(r_1)-\varepsilon}^{\hat{w}(r_2)} + \int_{\hat{w}(r_1)-\varepsilon}^{\hat{w}(r_2)} \int_{\hat{w}(r_2)}^{\hat{w}(p_2)} \right) \left( \frac{dw' dw}{w' - w} \right) \leq \\ & \text{(используем то, что для любых } a \leq \xi \leq b \text{ имеем } \int_a^\xi \int_\xi^b \frac{dw' dw}{w' - w} \leq \ln(2)(b - a)) \\ & \leq \mathcal{O}(1) |v_{h(j)}| |\mathcal{W}(t_j, x_j)| \left( \hat{w}(p_2) - (\hat{w}(p_1) - \varepsilon) \right) \leq \\ & \leq \mathcal{O}(1) |v_{h(j)}| |\mathcal{W}(t_j, x_j)| \text{Tot.Var.}(w_\varepsilon(0, \cdot)) \leq \\ & \leq \mathcal{O}(1) |v_{h(j)}| |\mathcal{W}(t_j, x_j)|, \end{aligned}$$

что завершает доказательство теоремы.  $\square$

**3.5. Убывающая часть  $\Omega$ .** Этот раздел посвящен доказательству неравенства (3.5). Мы докажем его только для точек положительного взаимодействия, случай точек отрицательного взаимодействия полностью аналогичен.

Исследование убывания  $\Omega$  для приближенного решения общей системы (1.1)-(1.2) по методу Глимма проведено в [8, теорема 6.7], и оно полностью совпадают с приведенным ниже за исключением (многочисленных) технических трудностей.

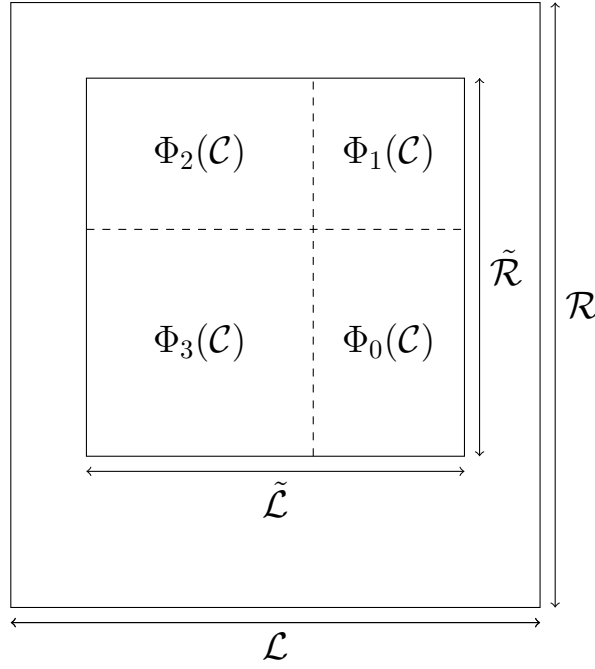
Для начала мы докажем следующее утверждение.

**Утверждение 3.4.** Пусть  $(t_j, x_j)$  — точка положительного взаимодействия. Пусть  $\mathcal{L}, \mathcal{R}$  — два волновых фронта (рассматриваемые как множества волн), взаимодействующие при  $(t_j, x_j)$ ,  $\mathcal{L} < \mathcal{R}$ . Тогда выполнено следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{L}) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{R}) |\mathcal{L}| |\mathcal{R}| &\leq \\ &\leq \sum_{\substack{(s, s') \in \mathcal{L} \times \mathcal{R} \\ (s, s') \text{ уже} \\ \text{взаимодействовали}}} \pi(t_{j-1}, s, s') |s| |s'| + \sum_{\substack{(s, s') \in \mathcal{L} \times \mathcal{R} \\ (s, s') \text{ никогда} \\ \text{не взаимодействовали}}} \|D_{ww}^2 f\|_{L^\infty} (|\mathcal{L}| + |\mathcal{R}|) |s| |s'|. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Введем вспомогательные обозначения. Для произвольного прямоугольника  $\mathcal{C} := \tilde{\mathcal{L}} \times \tilde{\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{L} \times \mathcal{R}$  положим (см. рис. 2):

$$\begin{aligned} \Phi_0(\mathcal{C}) &:= \begin{cases} \emptyset, & \mathcal{C} = \emptyset, \\ \left[ \tilde{\mathcal{L}} \cap \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}}) \right] \times \left[ \tilde{\mathcal{R}} \cap \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}}) \right], & \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}} \\ & \text{взаимодействовали,} \\ \{(\max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}})\}, & \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}} \\ & \text{не взаимодействовали,} \end{cases} \\ \Phi_1(\mathcal{C}) &:= \begin{cases} \emptyset, & \mathcal{C} = \emptyset, \\ \left[ \tilde{\mathcal{L}} \cap \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}}) \right] \times \left[ \tilde{\mathcal{R}} \setminus \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}}) \right], & \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}} \\ & \text{взаимодействовали,} \\ \{\max \tilde{\mathcal{L}}\} \times \left[ \tilde{\mathcal{R}} \setminus \{\min \tilde{\mathcal{R}}\} \right], & \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}} \\ & \text{не взаимодействовали,} \end{cases} \end{aligned}$$

Рис. 2. Разбиение  $C := \mathcal{L} \times \mathcal{R}$ .

$$\Phi_2(\mathcal{C}) := \begin{cases} \emptyset, & \mathcal{C} = \emptyset, \\ [\tilde{\mathcal{L}} \setminus \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}})] \times [\tilde{\mathcal{R}} \setminus \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}})], & \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}} \\ & \text{взаимодействовали,} \\ [\tilde{\mathcal{L}} \setminus \{\max \tilde{\mathcal{L}}\}] \times [\tilde{\mathcal{R}} \setminus \{\min \tilde{\mathcal{R}}\}], & \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}} \\ & \text{не взаимодействовали,} \end{cases}$$

$$\Phi_3(\mathcal{C}) := \begin{cases} \emptyset, & \mathcal{C} = \emptyset, \\ [\tilde{\mathcal{L}} \setminus \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}})] \times [\tilde{\mathcal{R}} \cap \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}})], & \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}} \\ & \text{взаимодействовали,} \\ [\tilde{\mathcal{L}} \setminus \{\max \tilde{\mathcal{L}}\}] \times \{\min \tilde{\mathcal{R}}\}, & \max \tilde{\mathcal{L}}, \min \tilde{\mathcal{R}} \\ & \text{не взаимодействовали.} \end{cases}$$

Очевидно, что  $\{\Phi_0(\mathcal{C}), \Phi_1(\mathcal{C}), \Phi_2(\mathcal{C}), \Phi_3(\mathcal{C})\}$  — непересекающееся разбиение  $\mathcal{C}$ .

Обозначим через  $\Delta\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{C}) := \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \tilde{\mathcal{L}}) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \tilde{\mathcal{R}})$  разность скоростей, поставленную в соответствие эффективной функцией потока первому и второму краям  $\mathcal{C}$  в момент времени  $t_{j-1}$ . Положим  $|\mathcal{C}| := |\mathcal{L}||\mathcal{R}| = \text{card}(\mathcal{C})\varepsilon^2$ . В силу сохранения  $\Delta\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{C})|\mathcal{C}| = \sum_{a=0}^3 \Delta\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \Phi_a(\mathcal{C}))|\Phi_a(\mathcal{C})|$ .

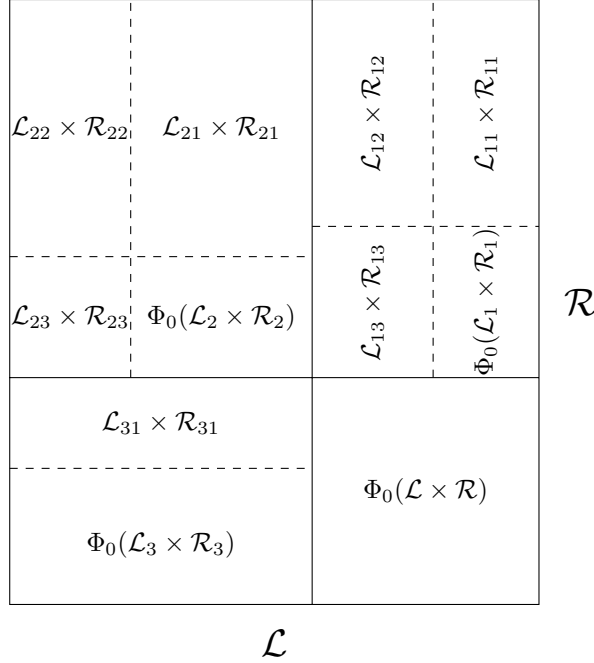
Для произвольного множества  $A$  обозначим через  $A^{<\mathbb{N}}$  множество всех конечных последовательностей, принимающих значения в  $A$ . Будем предполагать, что  $\emptyset \in A^{<\mathbb{N}}$  и называть  $\emptyset$  *пустой последовательностью*. Существует естественный порядок  $\preceq$  на  $A^{<\mathbb{N}}$ : для  $\alpha, \beta \in A^{<\mathbb{N}}$ ,

$$\alpha \preceq \beta \iff \beta \text{ получается из } \alpha \text{ добавлением конечной последовательности.}$$

Подмножество  $D \subseteq A^{<\mathbb{N}}$  называется *деревом*, если для произвольных  $\alpha, \beta \in A^{<\mathbb{N}}$ , таких что  $\alpha \preceq \beta$ , из включения  $\beta \in D$  следует  $\alpha \in D$ .

Введем отображение  $\Psi : \{1, 2, 3\}^{<\mathbb{N}} \rightarrow 2^{\mathcal{L} \times \mathcal{R}}$  по формуле

$$\Psi_\alpha = \begin{cases} \mathcal{L} \times \mathcal{R}, & \text{если } \alpha = \emptyset, \\ \Phi_{a_n} \circ \dots \circ \Phi_{a_1}(\mathcal{L} \times \mathcal{R}), & \text{если } \alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \{1, 2, 3\}^{<\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\}. \end{cases}$$


 Рис. 3. Пример разбиения  $\mathcal{L} \times \mathcal{R}$  с использованием дерева  $D$ .

Пусть для  $\alpha \in \{1, 2, 3\}^{<\mathbb{N}}$   $\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{R}_\alpha$  определяются соотношениями  $\Psi_\alpha = \mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{R}_\alpha$ . Определим дерево в  $\{1, 2, 3\}^{<\mathbb{N}}$ , полагая  $\alpha \in D \iff \Psi_\alpha \neq \emptyset$  (см. рис. 3).

Идея доказательства заключается в том, чтобы показать, что для каждого  $\alpha \in D$  в прямоугольнике  $\Psi_\alpha$  выполняется неравенство

$$\Delta\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \Psi_\alpha) |\Psi_\alpha| \leq \sum_{\substack{(s, s') \in \Psi_\alpha \\ (s, s') \text{ уже} \\ \text{взаимодействовали}}} \pi(t_{j-1}, s, s') |s| |s'| + \sum_{\substack{(s, s') \in \Psi_\alpha \\ (s, s') \text{ никогда не} \\ \text{взаимодействовали}}} \|D_{ww}^2 f\|_{L^\infty} (|\mathcal{L}| + |\mathcal{R}|) |s| |s'|.$$

Заключение будет следовать из того, что  $\emptyset \in D$  и  $\Psi_\emptyset = \mathcal{L} \times \mathcal{R}$ . Нам понадобятся следующие две леммы.

**Лемма 3.1.** Для произвольного  $\alpha \in D$ , если  $\max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha$  уже взаимодействовали к моменту времени  $t_{j-1}$ , разбиение  $\mathcal{P}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha)$  интервала  $\mathcal{I}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha)$  может быть сужено на

$$\mathcal{L}_\alpha \cap \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha)$$

и на

$$\mathcal{R}_\alpha \cap \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha).$$

*Идея доказательства.* По индукции с помощью утверждений 3.1 и 3.2 доказывается более сильное утверждение: для каждого  $\beta \preceq \alpha$  разбиение  $\mathcal{P}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha)$  интервала  $\mathcal{I}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha)$  может быть сужено на  $\mathcal{L}_\beta \cap \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha)$  и на  $\mathcal{R}_\beta \cap \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha)$ . Детальное доказательство см. в [7, лемма 4.17].  $\square$

**Лемма 3.2.** Для каждого  $\alpha \in D$ , если  $\max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha$  уже взаимодействовали к моменту времени  $t_{j-1}$ , для  $\Phi_0(\Psi_\alpha)$  выполнено неравенство

$$\Delta\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \Phi_0(\Psi_\alpha)) |\Phi_0(\Psi_\alpha)| \leq \sum_{(s, s') \in \Phi_0(\Psi_\alpha)} \pi(t_{j-1}, s, s') |s| |s'|.$$

*Доказательство.* По определению  $\Phi_0$

$$\Phi_0(\Psi_\alpha) = \left[ \mathcal{L}_\alpha \cap \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha) \right] \times \left[ \mathcal{R}_\alpha \cap \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha) \right].$$

В силу предыдущей леммы

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha)|_{\mathcal{L}_\alpha \cap \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha)} &= \{\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_L\}, \\ \mathcal{P}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha)|_{\mathcal{R}_\alpha \cap \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha)} &= \{\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_N\}.\end{aligned}$$

Заметим, что для любых  $(s, s') \in \mathcal{J}_l \times \mathcal{K}_n \subseteq \Phi_0(\Psi_\alpha)$

$$\pi(t_{j-1}, s, s') = \left[ \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{J}_l) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{K}_n) \right]^+. \quad (3.21)$$

Действительно, в силу утверждения 3.2

$$\mathcal{I}(t_{j-1}, s, s') = \mathcal{I}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha), \quad \mathcal{P}(t_{j-1}, s, s') = \mathcal{P}(t_{j-1}, \max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha),$$

откуда с учетом равенства  $\mathfrak{t}^{\text{int}}(t_{j-1}, s, s') = t_j$  следует (3.21). Таким образом,

$$\begin{aligned}\Delta \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \Phi_0(\Psi_\alpha))|_{\Phi_0(\Psi_\alpha)} &= \\ (\text{в силу сохранения}) &= \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N \Delta \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{J}_l \times \mathcal{K}_n)|_{\mathcal{J}_l \times \mathcal{K}_n} = \\ &= \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N \Delta \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{J}_l \times \mathcal{K}_n) \sum_{(s, s') \in \mathcal{J}_l \times \mathcal{K}_n} |s||s'| \leq \\ &\leq \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N \left[ \Delta \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{J}_l \times \mathcal{K}_n) \right]^+ \sum_{(s, s') \in \mathcal{J}_l \times \mathcal{K}_n} |s||s'| = \\ (\text{в силу (3.21)}) &= \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N \sum_{(s, s') \in \mathcal{J}_l \times \mathcal{K}_n} \pi(t_{j-1}, s, s') |s||s'| = \\ &= \sum_{(s, s') \in \Phi_0(\Psi_\alpha)} \pi(t_{j-1}, s, s') |s||s'|.\end{aligned}$$

□

*Завершение доказательства утверждения 3.4.* Как было сказано ранее, для завершения доказательства достаточно показать, что для каждого  $\alpha \in D$  для  $\Psi_\alpha$  справедлива оценка

$$\Delta \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \Psi_\alpha)|_{\Psi_\alpha} \leq \sum_{\substack{(s, s') \in \Psi_\alpha \\ (s, s') \text{ уже} \\ \text{взаимодействовали}}} \pi(t_{j-1}, s, s') |s||s'| + \sum_{\substack{(s, s') \in \Psi_\alpha \\ (s, s') \text{ никогда не} \\ \text{взаимодействовали}}} \|D_{ww}^2 f\|_{L^\infty} (|\mathcal{L}| + |\mathcal{R}|) |s||s'|. \quad (3.22)$$

Это доказывается (обратной) индукцией по дереву  $D$ . Если  $\alpha \in D$  — лист дерева (т. е.  $\alpha a \notin D$  для некоторого  $a \in \{1, 2, 3\}$ ), то  $\Psi_\alpha = \Phi_0(\Psi_\alpha)$ . Если  $\max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha$  никогда не взаимодействовали к моменту времени  $t_{j-1}$ , то  $\Psi_\alpha = \Phi_0(\Psi_\alpha) = \{(\max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha)\}$  и неравенство (3.22) следует из теоремы о среднем. Если  $\max \mathcal{L}_\alpha, \min \mathcal{R}_\alpha$  уже взаимодействовали в момент времени  $t_{j-1}$ , то каждая волна в  $\mathcal{L}_\alpha$  взаимодействовала с любой волной из  $\mathcal{R}_\alpha$ , и тогда неравенство (3.22) следует из леммы 3.2.



Теперь возьмем  $\alpha \in D$ , такое что  $\alpha$  не является листом. Тогда  $\Phi_1(\Psi_\alpha) = \Psi_{\alpha 1}$ ,  $\Phi_2(\Psi_\alpha) = \Psi_{\alpha 2}$ ,  $\Phi_3(\Psi_\alpha) = \Psi_{\alpha 3}$  и

$$\begin{aligned}
 & \Delta\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \Psi_\alpha)|\Psi_\alpha| = \\
 (\text{в силу сохранения}) &= \Delta\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \Phi_0(\Psi_\alpha))|\Phi_0(\Psi_\alpha)| + \sum_{a=1}^3 \Delta\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \Phi_a(\Psi_\alpha))|\Phi_a(\Psi_\alpha)| = \\
 &= \Delta\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \Phi_0(\Psi_\alpha))|\Phi_0(\Psi_\alpha)| + \sum_{a=1}^3 \Delta\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \Psi_{\alpha a})|\Psi_{\alpha a}| \leq \\
 (\text{в силу леммы 3.2}) &\leq \sum_{(s,s') \in \Phi_0(\Psi_\alpha)} \pi(t_{j-1}, s, s')|s||s'| + \sum_{a=1}^3 \Delta\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \Psi_{\alpha a})|\Psi_{\alpha a}| \leq \\
 (\text{в силу индуктивного предположения}) & \\
 &\leq \sum_{(s,s') \in \Phi_0(\Psi_\alpha)} \pi(t_{j-1}, s, s')|s||s'| + \\
 &+ \sum_{a=1}^3 \left( \sum_{\substack{(s,s') \in \Psi_{\alpha a} \\ (s,s') \text{ уже} \\ \text{взаимодействовали}}} \pi(t_{j-1}, s, s')|s||s'| + \right. \\
 &+ \left. \sum_{\substack{(s,s') \in \Psi_{\alpha a} \\ (s,s') \text{ никогда не} \\ \text{взаимодействовали}}} \|D_{ww}^2 f\|_{L^\infty} (|\mathcal{L}| + |\mathcal{R}|)|s||s'| \right) = \\
 &= \sum_{\substack{(s,s') \in \Psi_\alpha \\ (s,s') \text{ уже} \\ \text{взаимодействовали}}} \pi(t_{j-1}, s, s')|s||s'| + \sum_{\substack{(s,s') \in \Psi_\alpha \\ (s,s') \text{ никогда не} \\ \text{взаимодействовали}}} \|D_{ww}^2 f\|_{L^\infty} (|\mathcal{L}| + |\mathcal{R}|)|s||s'|,
 \end{aligned}$$

что завершает доказательство утверждения.  $\square$

**Теорема 3.3.** В каждой точке взаимодействия  $(t_j, x_j)$  выполнено

$$\sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)||s| \leq 2[\Omega(t_{j-1}) - \Omega(t_j)].$$

*Доказательство.* Как было сказано в начале этого раздела, мы предполагаем без ограничения общности, что все волны в  $\mathcal{W}(t_j, x_j)$  положительные. Пусть  $\mathcal{L}, \mathcal{R}$  — два волновых фронта (рассматриваемые, как множества волн), взаимодействующие в  $(t_j, x_j)$ ,  $\mathcal{L} < \mathcal{R}$ . Стандартным образом, замечая, что волны, меняющие скорость после взаимодействия, принадлежат  $\mathcal{L} \cup \mathcal{R}$ , получаем

$$\begin{aligned}
 \sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)||s| &= 2 \frac{|\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{L}) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{R})||\mathcal{L}||\mathcal{R}|}{|\mathcal{L}| + |\mathcal{R}|} = \\
 &= 2 \frac{(\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{L}) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{R}))|\mathcal{L}||\mathcal{R}|}{|\mathcal{L}| + |\mathcal{R}|},
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

где последнее равенство следует из того, что  $\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{L}) > \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{R})$ , поскольку  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{R}$  взаимодействуют и  $\mathcal{L} < \mathcal{R}$ . Более того, заметим, что в силу утверждения 3.1, для любых  $(s, s') \in \mathcal{L} \times \mathcal{R}$

$$|\mathcal{L}| + |\mathcal{R}| \geq d(t_{j-1}, s, s').$$

Тогда, пользуясь утверждением 3.4, получаем

$$\sum_{s \in \mathcal{W}(t_j)} |\sigma(t_j, s) - \sigma(t_{j-1}, s)||s| = 2 \frac{(\sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{L}) - \sigma^{\text{rh}}(\mathbf{f}_{t_{j-1}}^{\text{eff}}, \mathcal{R}))|\mathcal{L}||\mathcal{R}|}{|\mathcal{L}| + |\mathcal{R}|} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2}{|\mathcal{L}| + |\mathcal{R}|} \left[ \sum_{\substack{(s,s') \in \mathcal{L} \times \mathcal{R} \\ (s,s') \text{ уже} \\ \text{взаимодействовали}}} \pi(t_{j-1}, s, s') |s| |s'| + \sum_{\substack{(s,s') \in \mathcal{L} \times \mathcal{R} \\ (s,s') \text{ никогда не} \\ \text{взаимодействовали}}} \|D_{ww}^2 f\|_{L^\infty} (|\mathcal{L}| + |\mathcal{R}|) |s| |s'| \right] \leq \\
&\leq 2 \left[ \sum_{\substack{(s,s') \in \mathcal{L} \times \mathcal{R} \\ (s,s') \text{ уже} \\ \text{взаимодействовали}}} \frac{\pi(t_{j-1}, s, s') |s| |s'|}{d(t_{j-1}, s, s')} + \sum_{\substack{(s,s') \in \mathcal{L} \times \mathcal{R} \\ (s,s') \text{ никогда не} \\ \text{взаимодействовали}}} \|D_{ww}^2 f\|_{L^\infty} |s| |s'| \right] = \\
&= 2 \sum_{(s,s') \in \mathcal{L} \times \mathcal{R}} \mathfrak{q}(t_{j-1}, s, s') |s| |s'| = 2 [\mathfrak{Q}(t_{j-1}) - \mathfrak{Q}(t_j)],
\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.  $\square$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ancona F., Marson A.* Sharp convergence rate of the Glimm scheme for general nonlinear hyperbolic systems// Commun. Math. Phys. — 2011. — 302. — С. 581–630.
2. *Baiti P., Bressan A.* The semigroup generated by a Temple class system with large data// Differ. Integr. Equ. — 1997. — 10. — С. 401–418.
3. *Bianchini S.* The semigroup generated by a Temple class system with nonconvex flux function// Differ. Integr. Equ. — 2000. — 13 (10–12). — С. 1529–1550.
4. *Bianchini S.* Interaction estimates and Glimm functional for general hyperbolic systems// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2003. — 9. — С. 133–166.
5. *Bianchini S., Bressan A.* Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems// Ann. Math. (2). — 2005. — 161. — С. 223–342.
6. *Bianchini S., Modena S.* On a quadratic functional for scalar conservation laws// J. Hyperbolic Differ. Equ. — 2014. — 11 (2). — С. 355–435.
7. *Bianchini S., Modena S.* Quadratic interaction functional for systems of conservation laws: a case study// Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.). — 2014. — 9 (3). — С. 487–546.
8. *Bianchini S., Modena S.* Quadratic interaction functional for general systems of conservation laws// Commun. Math. Phys. — 2015. — 338, № 3. — С. 1075–1152.
9. *Bressan A.* Hyperbolic systems of conservation laws. The one dimensional Cauchy problem. — Oxford University Press, 2000.
10. *Bressan A., Marson A.* Error bounds for a deterministic version of the Glimm scheme// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1998. — 142. — С. 155–176.
11. *Daferrmos C.* Hyperbolic conservation laws in continuum physics. — Springer, 2005.
12. *Glimm J.* Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations// Commun. Pure Appl. Math. — 1965. — 18. — С. 697–715.
13. *Lax P.D.* Hyperbolic systems of conservation laws. II// Commun. Pure Appl. Math. — 1957. — 10. — С. 537–566.
14. *Lax P.D.* Shock waves and entropy// В сб.: Contribution to nonlinear functional analysis. — New York: Academic Press, 1971. — С. 603–634.
15. *Liu T.P.* The Riemann problem for general  $2 \times 2$  conservation laws// Trans. Am. Math. Soc. — 1974. — 199. — С. 89–112.
16. *Liu T.P.* The Riemann problem for general systems of conservation laws// J. Differ. Equ. — 1975. — 18. — С. 218–234.
17. *Liu T.P.* The deterministic version of the Glimm scheme// Commun. Math. Phys. — 1977. — 57. — С. 135–148.
18. *Temple B.* Systems of conservation laws with invariant submanifolds// Trans. Am. Math. Soc. — 1983. — 280. — С. 781–795.

Стефано Модена

S.I.S.S.A., Via Bonomea 265, 34136 Trieste, TS, Italy

E-mail: smodena@sissa.it

## Quadratic Interaction Estimate for Hyperbolic Conservation Laws: an Overview

© 2016 S. Modena

**Abstract.** In the joint work with S. Bianchini [8] (see also [6, 7]), we proved a quadratic interaction estimate for the system of conservation laws

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \\ u(t = 0) = u_0(x), \end{cases}$$

where  $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  is strictly hyperbolic, and  $\text{Tot.Var.}(u_0) \ll 1$ . For a wavefront solution in which only two wavefronts at a time interact, such estimate can be written in the form

$$\sum_{t_j \text{ interaction time}} \frac{|\sigma(\alpha_j) - \sigma(\alpha'_j)| |\alpha_j| |\alpha'_j|}{|\alpha_j| + |\alpha'_j|} \leq C(f) \text{Tot.Var.}(u_0)^2,$$

where  $\alpha_j$  and  $\alpha'_j$  are the wavefronts interacting at the interaction time  $t_j$ ,  $\sigma(\cdot)$  is the speed,  $|\cdot|$  denotes the strength, and  $C(f)$  is a constant depending only on  $f$  (see [8, Theorem 1.1] or Theorem 3.1 in the present paper for a more general form).

The aim of this paper is to provide the reader with a proof of such quadratic estimate in a simplified setting, in which:

- all the main ideas of the construction are presented;
- all the technicalities of the proof in the general setting [8] are avoided.

### REFERENCES

1. F. Ancona and A. Marson, “Sharp convergence rate of the Glimm scheme for general nonlinear hyperbolic systems,” *Commun. Math. Phys.*, 2011, **302**, 581–630.
2. P. Baiti and A. Bressan, “The semigroup generated by a Temple class system with large data,” *Differ. Integr. Equ.*, 1997, **10**, 401–418.
3. S. Bianchini, “The semigroup generated by a Temple class system with nonconvex flux function,” *Differ. Integr. Equ.*, 2000, **13** (10–12), 1529–1550.
4. S. Bianchini, “Interaction estimates and Glimm functional for general hyperbolic systems,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2003, **9**, 133–166.
5. S. Bianchini and A. Bressan, “Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems,” *Ann. Math. (2)*, 2005, **161**, 223–342.
6. S. Bianchini and S. Modena, “On a quadratic functional for scalar conservation laws,” *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 2014, **11** (2), 355–435.
7. S. Bianchini and S. Modena, “Quadratic interaction functional for systems of conservation laws: a case study,” *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)*, 2014, **9** (3), 487–546.
8. S. Bianchini and S. Modena, “Quadratic interaction functional for general systems of conservation laws,” *Commun. Math. Phys.*, 2015, **338**, No. 3, 1075–1152.
9. A. Bressan, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws. The One Dimensional Cauchy Problem*, Oxford University Press, 2000.
10. A. Bressan and A. Marson “Error bounds for a deterministic version of the Glimm scheme,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1998, **142**, 155–176.
11. C. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Springer, 2005.
12. J. Glimm, “Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1965, **18**, 697–715.
13. P. D. Lax, “Hyperbolic systems of conservation laws. II,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1957, **10**, 537–566.
14. P. D. Lax, “Shock waves and entropy,” In: *Contribution to Nonlinear Functional Analysis*, 603–634, Academic Press, New York, 1971.
15. T. P. Liu, “The Riemann problem for general  $2 \times 2$  conservation laws,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1974, **199**, 89–112.
16. T. P. Liu, “The Riemann problem for general systems of conservation laws,” *J. Differ. Equ.*, 1975, **18**, 218–234.

17. T. P. Liu, "The deterministic version of the Glimm scheme," *Commun. Math. Phys.*, 1977, **57**, 135–148.
18. B. Temple, "Systems of conservation laws with invariant submanifolds," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1983, **280**, 781–795.

Stefano Modena  
S.I.S.S.A., Via Bonomea 265, 34136 Trieste, TS, Italy  
E-mail: smodena@sissa.it

## ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ $G$ -ОПЕРАТОРЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ С ИЗОЛИРОВАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

© 2016 г.    **А. Ю. САВИН, Б. Ю. СТЕРНИН**

Аннотация. В работе изучаются эллиптические операторы на многообразиях с особенностями в ситуации, когда на многообразии действует дискретная группа  $G$ . Как обычно в эллиптической теории, фредгольмовость оператора определяется главным символом. Мы показываем, что в данной ситуации символ является парой, состоящей из символа на основном страте (внутренний символ) и символа в конической точке (конормальный символ). Установлена фредгольмовость эллиптических элементов.

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Постановка задачи . . . . .	174
2. Основные результаты . . . . .	175
3. Пример: $\mathbb{Z}$ -операторы на сфере . . . . .	178
4. Пример: $\mathbb{Z}^2$ -операторы на прямой . . . . .	181
5. Доказательства основных результатов ( $C^*$ -теория) . . . . .	183
6. Дополнение. Вычисление внутреннего символа . . . . .	188
Список литературы . . . . .	190

### ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена изучению эллиптических операторов на многообразиях с особенностями в ситуации, когда на многообразии задано действие дискретной группы  $G$  диффеоморфизмами. Более точно, рассматриваются операторы вида линейной комбинации произведений дифференциальных (псевдодифференциальных) операторов и операторов сдвига вдоль орбит действия группы. Такие операторы будем называть  $G$ -операторами, поскольку они ассоциированы с действием группы  $G$ . Отметим, что теория  $G$ -операторов на гладких многообразиях в настоящее время достаточно развита: исследованы фредгольмовость и родственные аналитические вопросы (см., например, [7, 8]), устанавливаются формулы индекса и решаются близкие топологические проблемы (см., например, [10, 13, 15]). В данной работе исследуются  $G$ -операторы на многообразиях с изолированными особенностями конического типа. Разумеется, все результаты работы могут быть перенесены и на случай операторов на многообразиях с более сложными особенностями: ребрами, углами и т.п. (см., например, [3, 9, 11]).

Как обычно, в эллиптической теории фредгольмовость оператора определяется свойствами его главного символа. Мы показываем, что главный символ  $G$ -оператора в данной ситуации является парой, состоящей из символа на основном страте (внутренний символ) и символа в конической точке (конормальный символ). При этом оказывается, что (в отличие от внутреннего символа) конормальный символ *не является* элементом скрещенного произведения, и поэтому для установления фредгольмовости стандартная техника, связанная со скрещенными произведениями (см. [7]), неприменима. Еще одной особенностью построения данной теории является то, что в качестве конормального символа в конической точке, которая по предположению является неподвижной точкой, мы получаем семейство операторов, экспоненциально зависящее от параметра (ср. с классической теорией семейств с параметром [1]). Наконец, отметим, что при доказательстве теоремы фредгольмовости мы систематически используем аппарат  $C^*$ -алгебр.

Опишем кратко содержание работы. Сначала мы даем постановку задачи (раздел 1), затем формулируем основной результат — теорему конечности. С этой целью мы вычисляем символ  $G$ -операторов, используя метод замораживания коэффициентов. При этом, поскольку мы имеем дело с нелокальными операторами (содержащими операторы сдвига), замораживать коэффициенты приходится не в точке, а сразу на целой орбите. Далее рассматриваются два примера: 1)  $\mathbb{Z}$ -операторы на сфере  $\mathbb{S}^2$  и 2)  $\mathbb{Z}^2$ -операторы на полупрямой  $\mathbb{R}_+$ , в которых условия фредгольмовости выписываются явно. Затем (раздел 5) с помощью теории  $C^*$ -алгебр приводится доказательство фредгольмовости. В качестве важного вспомогательного инструмента строится теория  $G$ -операторов с параметром. Работу завершает дополнение, в котором дается прямое вычисление внутреннего символа  $G$ -оператора методом замораживания коэффициентов.

Ранее задачи подобного типа изучались в школе А. Б. Антоневи́ча (см., например, [7] и цитированную там литературу), однако, все полученные результаты по данной тематике относились лишь к операторам в  $L^2$ -пространствах, в то время как мы будем рассматривать операторы в весовых пространствах Соболева  $H^{s,\gamma}$  (см. [2]).

Работа была частично поддержана РФФИ (проекты 12-01-00577, 15-01-08392 и 16-01-00373), DAAD и фондом Саймонса. Мы благодарны профессору Э. Шроэ и Институту анализа Ганноверского университета им. Г. В. Лейбница за гостеприимство.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В этом параграфе формулируется основная задача этой работы, которая относится к эллиптическим операторам, ассоциированным с действием дискретной группы на многообразии с коническими особенностями. Подробное изложение эллиптической теории на многообразиях с коническими особенностями (без действия группы) читатель найдет в [2], а также, например, в [9].

**$G$ -многообразие с конической точкой.** Пусть  $M$  — многообразие с конической точкой<sup>1</sup>, обозначаемой через  $pt$ . Это означает, что дополнение  $M \setminus pt$  — гладкое многообразие, и существует диффеоморфизм проколотой окрестности конической точки и декартова произведения

$$(0, 1) \times \Omega \quad \text{с координатами } (r, \omega).$$

Здесь  $\Omega$  — гладкое замкнутое многообразие (называемое базой конуса). При этом значение  $r = 0$  отвечает конической точке, и при этом значении многообразие  $\Omega$  стягивается в коническую точку.

*Диффеоморфизмом*  $g : M \rightarrow M$  многообразия с конической точкой будем называть такое отображение, что выполнены следующие свойства:

1.  $g : M \rightarrow M$  — гомеоморфизм, который сохраняет страты  $M \setminus pt$  и  $pt$  и индуцирует диффеоморфизмы этих стратов;
2. в некоторой окрестности конической точки диффеоморфизм имеет вид

$$g(r, \omega) = (re^{\beta_g}, g(\omega)), \tag{1.1}$$

где диффеоморфизм базы конуса  $\Omega$  также обозначается через  $g$ , а  $\beta_g$  — вещественное число.

Пусть теперь  $G$  — дискретная группа.

**Определение 1.1.** Многообразие  $M$  называется  $G$ -многообразием, если задано действие группы  $G$  на  $M$  диффеоморфизмами.

Далее для простоты обозначений элемент  $g \in G$  будем отождествлять с соответствующим диффеоморфизмом  $g : M \rightarrow M$ .

**Весовые пространства Соболева.** Напомним определение весового пространства Соболева  $H^{s,\gamma}(M)$  функций на многообразии с конической точкой. Элементы этого пространства вне окрестности конической точки представляют собой функции из пространства Соболева  $H^s$ , поэтому мы ниже определим норму только для функций с носителями в малой окрестности конической точки.

<sup>1</sup>Все результаты работы стандартным образом переносятся на случай многообразий с произвольным конечным числом конических точек.

Норма функции  $u(r, \omega)$  определяется выражением

$$\|u\|_{s,\gamma}^2 = \int_{\Omega \times \mathbb{R}_+} \left| \left( 1 + \left( ir \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \Delta_\Omega \right)^s (r^\gamma u(r, \omega)) \right|_{L^2(\Omega)}^2 d\omega \frac{dr}{r}, \quad (1.2)$$

где  $\Delta_\Omega$  — неотрицательный оператор Лапласа на  $\Omega$ , или, эквивалентно,

$$\|u\|_{s,\gamma}^2 = \int_{L_\gamma} \|(1 - p^2 + \Delta_\Omega)^s \tilde{u}(p, \omega)\|_{L^2(\Omega)}^2 dp, \quad (1.3)$$

где

$$\tilde{u}(p, \omega) = \mathcal{M}_{r \rightarrow p} u = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_0^\infty r^p u(r, \omega) \frac{dr}{r} \quad (1.4)$$

— преобразование Меллина функции  $u(\omega, r)$  по радиальной переменной  $r$ ;

$$L_\gamma = \{\operatorname{Re} p = \gamma\}$$

— весовая прямая.

**Замечание 1.1.** Пространство  $H^{0,\gamma}(M)$  обозначается также  $L^2(M, \mu_\gamma)$  и представляет собой пространство  $L^2$  относительно специальной меры

$$\mu_\gamma = r^{2\gamma} \mu \frac{dr}{r},$$

где  $\mu$  — мера на  $\Omega$ . Эквивалентность выражений (1.3) и (1.2) следует из свойств преобразования Меллина, в частности, из равенства Меллина—Парсеваля (см., например, [5]):

$$\int_{\operatorname{Re} p = \gamma} |\tilde{f}(p)|^2 dp = \int_0^\infty r^{2\gamma} |f(r)|^2 \frac{dr}{r}.$$

**$G$ -операторы на многообразии с коническими точками.** Пусть задано  $G$ -многообразие. Действие группы на многообразии индуцирует представление группы в весовых пространствах операторами сдвига:

$$T_g : H^{s,\gamma}(M) \longrightarrow H^{s,\gamma}(M), \text{ где } (T_g u)(x) = u(g^{-1}x).$$

**Определение 1.2.** *Коническим  $G$ -оператором* на многообразии  $M$  называется оператор вида

$$D = \sum_{h \in G} D_h T_h : H^{s,\gamma}(M) \longrightarrow H^{s-m,\gamma+m}(M), \quad (1.5)$$

где

$$D_h = r^{-m} D_h \left( r, -r \frac{\partial}{\partial r}, \omega, -i \frac{\partial}{\partial \omega} \right)$$

— конический дифференциальный оператор на  $M$  порядка  $m$  и только конечное число операторов  $D_h$  отлично от нуля, так что сумма в (1.5) конечна.

Цель работы состоит в том, чтобы исследовать условия эллиптичности, при выполнении которых оператор (1.5) фредгольмов.

## 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Как обычно в эллиптической теории, условия, при выполнении которых устанавливается фредгольмовость, формулируются в терминах главного символа оператора. Главный символ будем называть для краткости просто «символом». В данном случае символ представляет собой пару: символ на основном страте (внутренний символ) и символ в конической точке (конормальный символ<sup>1</sup>). Дадим определения указанных символов.

<sup>1</sup>Иногда в литературе используется термин индексное семейство.

**Внутренний символ.** Чтобы построить символ, продолжим сначала действие группы на кокасательное расслоение многообразия.

Через  $T^*M$  обозначим кокасательное расслоение многообразия  $M$  (см., например, [9]).

Напомним определение кокасательного расслоения  $T^*M$ . Через  $\overline{M} = (M \setminus pt) \cup \Omega$  обозначим раздутие многообразия  $M$  — многообразие с краем  $\Omega$ , отвечающим  $r = 0$ . Через  $TM$  обозначим векторное расслоение над  $\overline{M}$ , сечения которого порождены как  $C^\infty(\overline{M})$ -модуль векторными полями единичной длины в конической метрике вида  $dr^2 + r^2d\omega^2$ , т. е. полями вида

$$\frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \omega}.$$

Через  $T^*M \in \text{Vect}(\overline{M})$  обозначено двойственное расслоение (относительно естественного спаривания векторов и ковекторов). Имеет место изоморфизм расслоений:

$$\begin{aligned} T^*M|_{\partial\overline{M}} &\simeq T^*\Omega \times \mathbb{R}, \\ adr + brd\omega &\mapsto (bd\omega, a). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Диффеоморфизм  $g : M \rightarrow M$  основного многообразия индуцирует диффеоморфизм кокасательного расслоения

$$\partial g = ({}^t dg)^{-1} : T^*M \longrightarrow T^*M,$$

который называется *кодифференциалом* диффеоморфизма  $g$ . Здесь  $dg : T_x M \rightarrow T_{g(x)} M$  — дифференциал, а  ${}^t dg : T_{g(x)}^* M \rightarrow T_x^* M$  — двойственное отображение.

Определим символ оператора (1.5) в точке  $(x_0, \xi) \in T_0^* M$  кокасательного расслоения без нулевого сечения, используя метод замораживания коэффициентов. Отметим, что рассматриваемый оператор является существенно нелокальным. Более точно, соответствующее уравнение  $Du = f$  связывает значения неизвестной функции  $u$  и ее производных не в одной точке  $x_0 \in M$ , а на орбите  $Gx_0 \subset M$ . По этой причине, в отличие от классического (неособого) случая, будем производить замораживание коэффициентов оператора сразу на всей орбите точки  $x_0$ . Производя такое замораживание коэффициентов оператора на орбите точки  $x_0$  и применяя затем в каждой точке орбиты преобразование Фурье от  $x$  к  $\xi$ , можно определить символ как функцию на кокасательном расслоении без нулевого сечения, принимающую значения в операторах, действующих в пространстве функций на орбите. Прямое вычисление (которое мы для полноты изложения приводим в дополнении) дает следующее выражение для внутреннего символа (ср. [6]):

$$\sigma_0(D)(x_0, \xi) = \sum_{h \in G} \sigma(D_h)(g^{-1}(x_0), \partial g^{-1}(\xi)) \mathcal{T}_h : l^2(G, m_{s, \gamma}) \longrightarrow l^2(G, m_{s-m, \gamma+m}), \quad (2.2)$$

где

- символ действует на функциях на орбите  $Gx_0$ , которая отождествляется с группой  $G$  при помощи отображения  $g \mapsto g^{-1}(x_0)$ ;
- $(\mathcal{T}_h w)(g) = w(gh)$  — оператор правого сдвига функций на группе;
- внутренний символ оператора  $D_h$  в точке  $(x, \xi)$  обозначается  $\sigma_0(D_h)(x, \xi)$ , а выражение  $\sigma_0(D_h)(g^{-1}(x_0), \partial g^{-1}(\xi))$  действует как оператор умножения функций на группе;
- пространство  $l^2(G, m_{s, \gamma})$  состоит из функций  $w(g)$  квадратично суммируемых относительно весовой функции  $m_{s, \gamma}$  на группе  $G$ , которая определяется выражением

$$m_{s, \gamma}(g) = \frac{\partial g^{-1*} \mu_\gamma}{\mu_\gamma}(x_0, \xi) |\partial g^{-1} \xi|^{2s}. \quad (2.3)$$

Здесь и ниже мы для краткости обозначений опускаем зависимость весовой функции от  $(x_0, \xi)$ .

**Определение 2.1.** Оператор (2.2) будем называть *внутренним символом*  $G$ -оператора  $D$  в точке  $(x_0, \xi) \in T_0^* M$ .

**Замечание 2.1.** Выражение (2.2) имеет вполне естественный смысл. А именно, согласно этому выражению:

- символ оператора сдвига  $\mathcal{T}_h$  является оператором правого сдвига  $\mathcal{T}_h$  на группе;
- символ ПДО  $D_h$  является оператором умножения на значения символа  $\sigma(D_h)$  в соответствующей точке орбиты;



- наконец, символ оператора  $D = \sum D_h T_h$  является суммой произведений символов операторов  $D_h$  и  $T_h$ .

**Замечание 2.2.** В общем случае внутренний символ зависит от переменных  $x_0, \xi$  весьма сложным образом. Например, он часто не является даже непрерывным по переменным  $x_0, \xi$ . Это связано с тем, что структура орбиты действия группы может зависеть от начальной точки весьма сложным образом.

**Предложение 2.1.** Для двух  $G$ -операторов  $D_1, D_2$  имеет место равенство

$$\sigma_0(D_1 D_2) = \sigma_0(D_1) \sigma_0(D_2).$$

*Доказательство.* Утверждение непосредственно следует из того, что символ был получен методом замораживания коэффициентов. Впрочем, искомая формула может быть получена и непосредственно, пользуясь выражением (2.2).  $\square$

Вычислим сужение  $\sigma_0(D)|_{\partial T^*M}$  внутреннего символа на границу кокасательного расслоения, т. е. при  $r = 0$ . Напомним, что в окрестности конической точки мы используем координаты  $r, \omega$  и двойственные координаты  $\tau, \eta$ . Для оператора (1.5) при  $(x, \xi) = (\omega, 0, \eta, \tau) \in \partial T^*M$  имеем

$$\sigma_0(D)(\omega, 0, \eta, \tau) = \sum_{h \in G} \sigma_0(D_h) \left( g^{-1}(\omega), 0, \partial g^{-1}(\eta), \tau \right) \mathcal{T}_h : l^2(G, m_{s, \gamma}) \longrightarrow l^2(G, m_{s-m, \gamma+m}), \quad (2.4)$$

причем весовая функция равна

$$m_{s, \gamma}(g) = e^{-2\beta g \gamma} \frac{\partial g^{-1*} \mu}{\mu}(\omega) \left( \tau^2 + |\partial g^{-1} \eta|^2 \right)^s, \quad \text{где } \mu \text{ — некоторая мера на } \Omega. \quad (2.5)$$

Здесь мы воспользовались выражением (1.1) для диффеоморфизма в окрестности конической точки. В частности, если диффеоморфизм  $g : \Omega \rightarrow \Omega$  — изометрия, то из (2.5) получаем

$$m_{s, \gamma}(g) = e^{-2\beta g \gamma}.$$

**Конормальный символ.** Чтобы получить символ оператора (1.5) в конической точке, заметим, что по предположению коническая точка является неподвижной точкой для действия группы на многообразии. Поэтому для получения символа достаточно заморозить коэффициенты оператора в этой точке, т. е. положить в коэффициентах  $r = 0$ . В полученном операторе

$$\sum_{h \in G} r^{-m} D_h \left( 0, -r \frac{\partial}{\partial r}, \omega, -i \frac{\partial}{\partial \omega} \right) T_h : H^{s, \gamma}(\mathbb{R}_+ \times \Omega) \longrightarrow H^{s-m, \gamma-m}(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$$

отбросим множитель  $r^{-m}$  и применим преобразование Меллина  $\mathcal{M}_{r \rightarrow p}$  (см. (1.4)). В результате в координатах  $\omega, p$  получаем семейство операторов

$$\sum_{h \in G} D_h \left( 0, p, \omega, -i \frac{\partial}{\partial \omega} \right) T'_h e^{\beta h p} : H^s(\Omega) \longrightarrow H^{s-m}(\Omega), \quad (2.6)$$

где  $p \in L_\gamma$ , а

$$T'_h : H^s(\Omega) \longrightarrow H^s(\Omega), \quad (T'_h u)(\omega) = u(h^{-1}(\omega))$$

— оператор сдвига на базе конуса. При получении равенства (2.6) мы воспользовались тем, что при преобразовании Меллина оператор  $-r \partial / \partial r$  переходит в оператор умножения на  $p$ , оператор растяжения  $u(r) \mapsto u(re^{-\beta})$  переходит в оператор умножения на экспоненту  $e^{\beta p}$ , а пространство с нормой (1.3) переходит в пространство функций на прямой  $L_\gamma$ , принимающих значения в пространстве  $H^s(\Omega)$ .

**Определение 2.2.** Семейство операторов (2.6) называется *конормальным символом  $G$ -оператора  $D$*  и обозначается через  $\sigma_c(D)$ .

**Предложение 2.2.** Пусть даны два  $G$ -оператора

$$D_1 : H^{s, \gamma}(M) \longrightarrow H^{s-m_1, \gamma+m_1}(M), \quad D_2 : H^{s-m_1, \gamma+m_1}(M) \longrightarrow H^{s-m_1-m_2, \gamma+m_1+m_2}(M)$$

порядков  $m_1, m_2$ , соответственно. Тогда их композиция является  $G$ -оператором и справедливо равенство

$$\sigma_c(D_2 D_1)(p) = \sigma_c(D_2)(p + m_1) \sigma_c(D_1)(p).$$

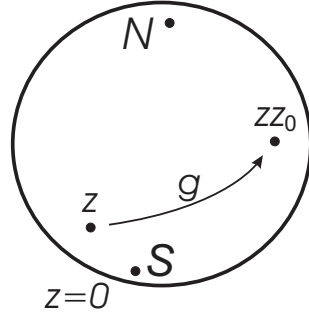


Рис. 1. Диффеоморфизм сферы  $\mathbb{S}^2$ .

Это утверждение доказывается непосредственно. Отметим только, что сдвиг аргумента конормального символа в последней формуле происходит из множителя  $r^{-m}$  в (1.5) (ср. с [9] в классической ситуации).

**Эллиптичность и фредгольмовость.**

**Определение 2.3.**  $G$ -оператор  $D$  на многообразии с коническими особенностями называется эллиптическим, если обратимы

1. внутренний символ  $\sigma_0(D)(x, \xi)$  при всех  $(x, \xi) \in T_0^*M$ ;
2. конормальный символ  $\sigma_c(D)(p)$  для всех  $p$  на весовой прямой  $L_\gamma = \{\text{Re } p = \gamma\}$ .

**Теорема 2.1.** Если  $G$ -оператор

$$D = \sum_{h \in G} D_h T_h : H^{s, \gamma}(M) \longrightarrow H^{s-m, \gamma+m}(M)$$

эллиптичен, то он фредгольмов.

Доказательство теоремы 2.1 существенно опирается на теорию  $C^*$ -алгебр и будет дано в параграфе 5.

**Замечание 2.3.** Конормальный символ  $\sigma_c(D)(p)$  является семейством  $G$ -операторов на  $\Omega$ , зависящим от параметра  $p$ . В параграфе 5 мы разовьем эллиптическую теорию таких семейств и покажем, что семейство  $\sigma_c(D)(p)$  обратимо при больших  $p \in L_\gamma$  при условии, что внутренний символ  $\sigma_0(D)$  является эллиптическим для веса  $\gamma$ .

**Замечание 2.4.** Все результаты настоящего параграфа переносятся на случай псевдодифференциальных операторов (ПДО), т. е. ситуацию, когда операторы  $D_g$ , входящие в определение  $G$ -оператора, являются псевдодифференциальными операторами на  $M$ . По поводу ПДО на многообразиях с коническими точками см., например, монографию [9] и цитированную в ней литературу.

3. ПРИМЕР:  $\mathbb{Z}$ -ОПЕРАТОРЫ НА СФЕРЕ

**Сфера как  $\mathbb{Z}$ -многообразие.** Рассмотрим сферу  $\mathbb{S}^2$  как расширенную комплексную плоскость с координатой  $z$ . Точки сферы  $z = 0$  и  $z = \infty$  будем рассматривать как конические и обозначим их через  $S, N$ . На сфере рассмотрим действие группы  $\mathbb{Z}$ , состоящее из итераций диффеоморфизма

$$g(z) = zz_0, \text{ где число } z_0 = e^{\beta+i\varphi_0} \text{ фиксировано}$$

(см. рис. 1). Пусть для определенности  $\beta > 0, \varphi_0 \in [0, 2\pi)$ .

От комплексной координаты  $z$  перейдем к координатам  $t, \varphi$  при помощи замены  $z = e^{-t+i\varphi}$ , которая определяет диффеоморфизм (раздутие)

$$\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\} \simeq \mathbb{S}_\varphi^1 \times \mathbb{R}_t \tag{3.1}$$

дополнения к коническим точкам и бесконечного цилиндра. При этом диффеоморфизме окрестности конических точек  $S, N$  соответствуют окрестностям значений  $t = \pm\infty$ , а диффеоморфизм  $g$  имеет вид

$$g(\varphi, t) = (\varphi + \varphi_0, t - \beta),$$

т. е. представляет винтовое движение цилиндра в (3.1).

**Символы  $G$ -операторов.** На сфере  $\mathbb{S}^2$  рассмотрим конический  $\mathbb{Z}$ -оператор

$$D = \sum_{0 \leq k \leq m, l \in \mathbb{Z}} D_{l,k} \left( -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left( -r \frac{\partial}{\partial r} \right)^k T^l : H^{s,\gamma}(\mathbb{S}^2) \longrightarrow H^{s-m,\gamma}(\mathbb{S}^2)$$

с постоянными коэффициентами по переменным  $\varphi, r$  (здесь мы сразу отбросили множитель  $r^{-m}$ ), а оператор сдвига равен

$$(Tu)(\varphi, r) = u(\varphi - \varphi_0, r e^{-\beta}).$$

Оператор  $D$  действует в пространствах с весом  $\gamma = (\gamma_+, \gamma_-)$ , где вес  $\gamma_+$  — в точке  $S$  а вес  $\gamma_-$  — в точке  $N$ . Отметим, что «коничность» оператора  $D$  при  $r = \infty$  несложно проверить, пользуясь инверсией:  $r' = 1/r$ .

Вычислим внутренний и конормальный символы оператора  $D$ .

Внутренний символ равен

$$\sigma_0(D)(\eta, \tau) = \sum_{0 \leq k \leq m, l \in \mathbb{Z}} D_{l,k}(\eta) (i\tau)^k T^l : l^2(\mathbb{Z}, m_{s,\gamma}) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z}, m_{s,\gamma}), \quad (3.2)$$

где  $\eta^2 + \tau^2 \neq 0$  и  $(\mathcal{T}w)(n) = w(n+1)$ .

Конормальные символы при  $r = 0$  и  $r = \infty$  равны

$$\sigma_c(D)(p) = \sum_{0 \leq k \leq m, l \in \mathbb{Z}} D_{l,k} \left( -i \frac{d}{d\varphi} \right) p^k T^{l,l} e^{-\beta l p} : H^s(\mathbb{S}^1) \longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{S}^1), \quad \operatorname{Re} p = \gamma_{\pm}.$$

Согласно теореме 2.1 оператор  $D$  фредгольмов, если внутренний символ  $\sigma_0(D)(\eta, \tau)$  обратим при  $\eta^2 + \tau^2 \neq 0$  и конормальный символ  $\sigma_c(D)(p)$  обратим на весовых прямых  $\operatorname{Re} p = \gamma_{\pm}$ . Чтобы непосредственно проверять эти условия обратимости, вычислим весовую функцию  $m_{s,\gamma}$  в (3.2).

**Вычисление весовой функции.** Вычисление показывает, что мера  $\mu_{\gamma}$  имеет вид

$$\mu_{\gamma} = \begin{cases} r^{2\gamma_+} d\varphi \frac{dr}{r}, & \text{если } r < 1, \\ r^{2\gamma_-} d\varphi \frac{dr}{r}, & \text{если } r > 2. \end{cases}$$

Метрика на цилиндре равна  $d\varphi^2 + r^{-2} dr^2$ .

**Предложение 3.1.** *Весовая функция*

$$m_{s,\gamma}(n) = \left( \frac{\partial g^{-n*}(\mu_{\gamma}(\eta^2 + \tau^2)^s)}{\mu_{\gamma}} \right) (t_0, \varphi_0, \eta, \tau) \quad (3.3)$$

(см. (2.3)) с точностью до эквивалентности не зависит от  $s$  и равна

1. в точке, лежащей во внутреннейности  $T_0^*M$ :

$$m_{s,\gamma}(n) \simeq \begin{cases} e^{2\gamma_- \beta n}, & \text{если } n \geq 0, \\ e^{2\gamma_+ \beta n}, & \text{если } n < 0; \end{cases} \quad (3.4)$$

2. в точке, лежащей на границе  $\partial T_0^*M = \{r = 0 \text{ и } r = \infty\}$ :

$$m_{s,\gamma}(n) \simeq \begin{cases} e^{2\gamma_+ \beta n}, & \text{если } r = 0, \\ e^{2\gamma_- \beta n}, & \text{если } r = \infty. \end{cases}$$

Доказательство состоит в прямом вычислении, пользуясь формулой (3.3).

**Числовые примеры.** Рассмотрим оператор

$$D = -r \frac{\partial}{\partial r} + (a + bT) \left( -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + (c + dT) : H^{s,\gamma}(\mathbb{S}^2) \longrightarrow H^{s-1,\gamma}(\mathbb{S}^2). \quad (3.5)$$

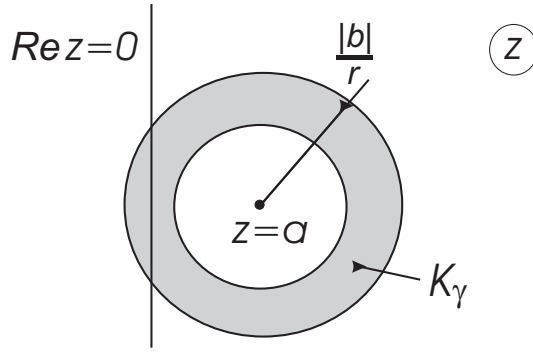


Рис. 2. Кольцо  $K_\gamma$  и прямая  $\text{Re } z = 0$

1. Внутренний символ оператора равен

$$\sigma_0(D)(\eta, \tau) = i\tau + (a + bT)\eta : l^2(\mathbb{Z}, m_{s,\gamma}) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z}, m_{s-1,\gamma}), \quad (Tw)(n) = w(n + 1), \quad (3.6)$$

где вес  $m_{s,\gamma}$  был определен в (3.4). Оператор (3.6) легко алгебраизовать. Сформулируем соответствующий результат.

**Лемма 3.1** (ср. [4]). При  $\gamma_+ > \gamma_-$  преобразование Фурье

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : l^2(\mathbb{Z}, m_{s,\gamma}) &\longrightarrow \mathcal{O}(K_\gamma) \\ \{w(n)\} &\longmapsto \sum_n w(n)\zeta^n \end{aligned} \quad (3.7)$$

переводит пространство  $l^2$  с весом  $m_{s,\gamma}$  в пространство голоморфных функций в кольце

$$K_\gamma = \{r < |\zeta| < R\}, \quad r = e^{-\gamma+\beta}, \quad R = e^{-\gamma-\beta}, \quad (3.8)$$

которые интегрируемы с квадратом на границе. Если же  $\gamma_- > \gamma_+$ , то образ преобразования Фурье состоит из пространства, двойственного к пространству голоморфных функций в кольце с внешним радиусом  $r$  и внутренним  $R$ .

*Доказательство.* Доказательство основано на том, что  $w \in l^2(\mathbb{Z}, m_{s,\gamma})$  тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n \geq 0} |w(n)|^2 e^{2\gamma-\beta n} < \infty, \quad \sum_{n \geq 0} |w(n)|^2 e^{2\gamma+\beta n} < \infty.$$

Эти условия означают, что преобразование Фурье этой функции, т. е. ряд Лорана

$$\sum_n w(n)\zeta^n$$

абсолютно сходится в указанном кольце. □

Применяя лемму 3.1, мы преобразуем символ в оператор умножения

$$\sigma_0(D)(\eta, \tau) = i\tau + (a + b\zeta^{-1})\eta : \mathcal{O}(K_\gamma) \longrightarrow \mathcal{O}(K_\gamma), \quad (3.9)$$

действующий в пространстве аналитических функций в кольце. Условие обратимости внутреннего символа состоит в требовании обратимости этой функции в кольце.

**Лемма 3.2.** Условие обратимости внутреннего символа (3.6) имеет вид

$$|\text{Re } a| > \frac{|b|}{r}, \quad (3.10)$$

где  $r = \min(e^{-\gamma+\beta}, e^{-\gamma-\beta})$ .

*Доказательство.* Символ обратим при всех  $\eta, \tau \neq 0$  тогда и только тогда, когда

$$\text{Re}(a + b\zeta^{-1}) \neq 0 \text{ при всех } \zeta \in K_\gamma.$$

Но числа  $a + b\zeta^{-1}$  пробегают кольцо с внешним радиусом  $|b|/r$  с центром в точке  $a$  (см. рис. 2). Условие пустоты пересечения этого кольца и прямой  $\text{Re } z = 0$  как раз имеет вид (3.10). □

В итоге получаем условие обратимости внутреннего символа в виде

$$\gamma_+, \gamma_- \leq \frac{\ln |\operatorname{Re} a| - \ln |b|}{\beta}.$$

2. Конормальный символ оператора (3.5) равен

$$\sigma_c(D)(p) = p + (a + be^{-\beta p} T') \left( -i \frac{d}{d\varphi} \right) + (c + de^{-\beta p} T') : H^s(\mathbb{S}^1) \longrightarrow H^{s-1}(\mathbb{S}^1),$$

где  $(T'u)(\varphi) = u(\varphi - \varphi_0)$  — оператор сдвига на окружности. При больших значениях  $p \in L_\gamma$  конормальный символ обратим (в предположении внутренней эллиптичности оператора).

Раскладывая функции на окружности в ряд Фурье, получаем условие эллиптичности конормального символа в виде требования: ни одно из уравнений

$$p + (a + be^{-\beta p - in\varphi_0})n + (c + de^{-\beta p - in\varphi_0}) = 0 \quad \text{при всех } n \in \mathbb{Z} \quad (3.11)$$

не имеет решений  $p$  таких, что  $\operatorname{Re} p = \gamma_\pm$ .

Решая трансцендентные уравнения (3.11), можно найти особые точки конормального символа, т. е. те значения весов, при которых задача перестает быть фредгольмовой.

**Замечание 3.1.** Отметим, что условие эллиптичности можно эффективно проверять численно: так как уравнение (3.11) в вертикальной полосе  $|\operatorname{Re} p| < N$  не имеет решений при достаточно больших  $|p|^2 + n^2$ , то все решения, лежащие в этой полосе, отвечают только конечному числу номеров  $n$  и конечной области изменения параметра  $p$ .

#### 4. ПРИМЕР: $\mathbb{Z}^2$ -ОПЕРАТОРЫ НА ПРЯМОЙ

Полупрямую  $\mathbb{R}_+$  будем рассматривать как многообразие с двумя коническими точками и рассмотрим оператор

$$A = 1 + aT_\alpha + bT_\beta : H^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+) \longrightarrow H^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \quad (T_\alpha u)(r) = u(re^\alpha), (T_\beta u)(r) = u(re^\beta). \quad (4.1)$$

Будем считать, что числа  $\alpha, \beta$  несоизмеримы и заданы веса  $\gamma = (\gamma_+, \gamma_-)$  при  $r = 0$  и  $r = \infty$  соответственно. Пусть для определенности  $\alpha, \beta > 0$ ,  $\gamma_+ > \gamma_-$ .

Исследуем оператор (4.1). Для простоты положим  $s = 0$  и применим к этому оператору преобразование Меллина (1.4). Получим оператор

$$\sigma_c(A)(p) = 1 + ae^{p\alpha} + be^{p\beta} : \mathcal{O}(S) \longrightarrow \mathcal{O}(S), \quad (4.2)$$

где  $S = \{\gamma_- < \operatorname{Re} p < \gamma_+\}$  — вертикальная полоса в комплексной плоскости, а  $\mathcal{O}(S)$  — образ пространства  $L^{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$  при преобразовании Меллина — пространство голоморфных функций в этой полосе (см. [4]).

Можно показать, что оператор (4.2) обратим в пространстве  $\mathcal{O}(S)$  тогда и только тогда, когда функция

$$1 + ae^{\gamma\alpha} e^{i\varphi} + be^{\gamma\beta} e^{i\psi} \quad (4.3)$$

отлична от нуля при всех  $\gamma \in [\gamma_-, \gamma_+]$ ,  $\varphi, \psi \in [0, 2\pi]$ . Условие обратимости последней функции несложно получить: при фиксированном значении  $\gamma$  сумма первого и второго слагаемого пробегает точки окружности на комплексной плоскости с координатой  $z$  с центром в точке  $z = 1$  и радиусом  $|a|e^{\gamma\alpha}$ , а третье слагаемое пробегает окружность с центром в точке  $z = 0$  и радиусом  $|b|e^{\gamma\beta}$ . Ясно, что функция (4.3) обратима тогда и только тогда, когда указанные окружности не пересекаются. Наконец, наличие пересечения двух окружностей с заданными радиусами и расстоянием между их центрами описывается неравенствами треугольника, связывающими его стороны (см. рис. 3):

$$|a|e^{\alpha\gamma} \leq 1 + |b|e^{\beta\gamma}, \quad |b|e^{\beta\gamma} \leq 1 + |a|e^{\alpha\gamma}, \quad 1 \leq |a|e^{\alpha\gamma} + |b|e^{\beta\gamma} \quad (4.4)$$

(окружности пересекаются, если выполнены все три неравенства). Итак, оператор эллиптический, если при всех  $\gamma \in [\gamma_-, \gamma_+]$  не выполнено хотя бы одно из указанных неравенств. При фиксированном значении  $\gamma$  область, в которой одно из неравенств не выполнено, обозначено на рис. 4 (области, в которых не выполнено первое, второе, третье неравенства, обозначены через I, II, III, соответственно). Далее, пересечение всех таких областей по всем  $\gamma \in [\gamma_-, \gamma_+]$  изображено на рис. 5 (соответствующие элементарные вычисления опускаются).

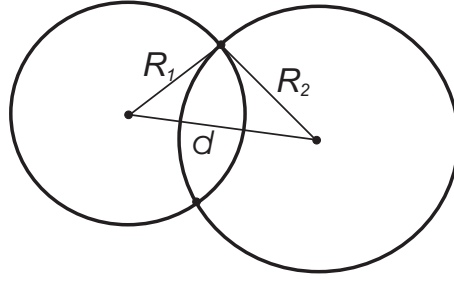


Рис. 3. Пересечение двух окружностей.

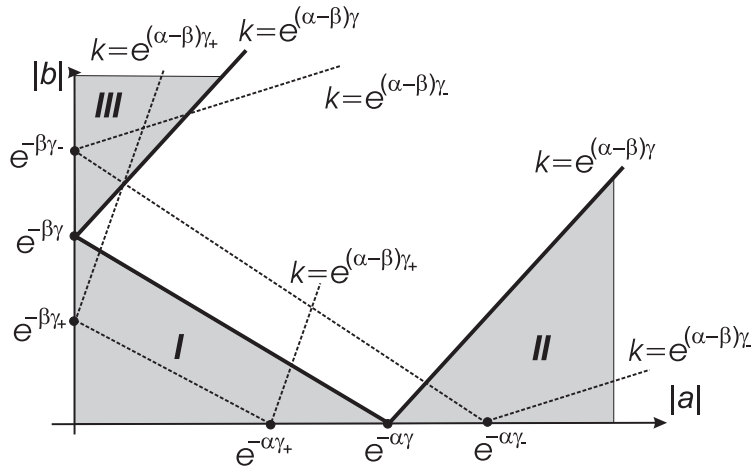


Рис. 4. Значения параметров  $a, b$ , для которых окружности  $|z| = |b|e^{\beta\gamma}$  и  $|z - 1| = |a|e^{\alpha\gamma}$  не пересекаются.

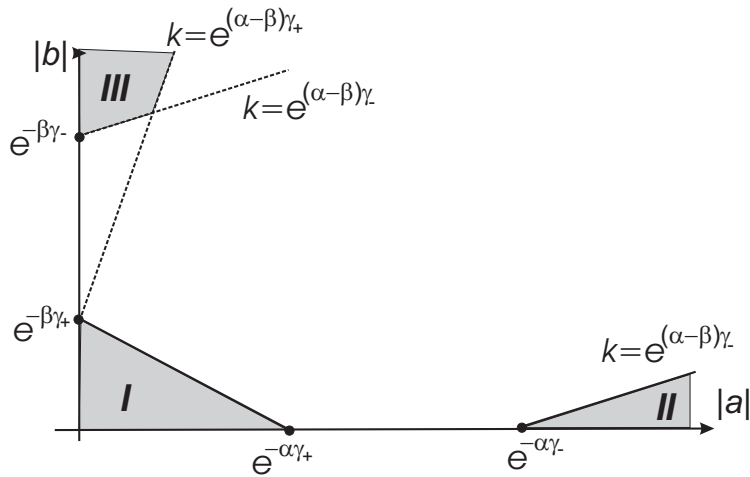


Рис. 5. Области значений параметров, при которых оператор (4.2) обратим.

Мы видим, что область значений параметров  $a, b$ , для которых оператор обратим, состоит из трех компонент. Смысл такого разбиения на три компоненты прост: оператор  $A$ , который состоит из трех слагаемых, обратим тогда и только тогда, когда одно из слагаемых является доминирующим (первое неравенство отвечает за доминирование единицы, второе — слагаемого  $aT_\alpha$ , третье — слагаемого  $bT_\beta$ ).

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ( $C^*$ -ТЕОРИЯ)

Цель настоящего параграфа — доказать теорему 2.1, т. е. установить фредгольмовость эллиптических  $G$ -операторов. Как и обычно, фредгольмовость доказывается построением почти обратного оператора, т. е. обратного с точностью до компактных операторов. Ясно, что для  $G$ -оператора вида (1.5) (в котором сумма фактически является конечной) аналогичная сумма в случае регуляризатора, как правило, является бесконечной, и по этой причине необходимо работать с  $G$ -операторами вида бесконечных сумм. К сожалению, непосредственное рассмотрение таких сумм в общей ситуации представляется весьма сложным. Однако, есть общий подход, позволяющий обойти трудности, связанные с рассмотрением бесконечных рядов. Этот подход основан на систематическом использовании языка  $C^*$ -алгебр и их скрещенных произведений (см. [8]; ниже мы следуем изложению в [14]).

**$C^*$ -алгебра ПДО  $\Psi(M)$ .** Сначала кратко напомним структуру  $C^*$ -алгебры

$$\Psi(M) \subset \mathcal{BL}^2(M),$$

составленной из ПДО нулевого порядка на многообразии  $M$  с коническими особенностями. Операторы действуют в пространстве  $L^2(M) \equiv H^{0,0}(M)$ , т. е. при  $s = \gamma = 0$ .

Эту алгебру можно получить (см., например, [3]) замыканием по норме операторов нулевого порядка с гладкими внутренними символами и гладкими конормальными символами. Для этой алгебры имеется символьное отображение

$$\sigma = (\sigma_0, \sigma_c) : \Psi(M) \longrightarrow C(S^*M) \oplus \Psi_p(\Omega),$$

при котором ПДО  $D$  сопоставляются его внутренний символ  $\sigma_0(D)$  (непрерывная функция на косферическом расслоении  $S^*M = T_0^*M/\mathbb{R}_+$ ) и конормальный символ  $\sigma_c(D)$  (семейство ПДО на базе конуса  $\Omega$ , непрерывно зависящее от параметра  $p \in L_\gamma$ ). При этом внутренний символ и конормальный символ согласованы: сужение внутреннего символа на границу  $\partial S^*M$  равно символу конормального символа, рассматриваемого как семейство с параметром. Таким образом, элементы алгебры  $\Psi(M)$  можно рассматривать как ПДО на  $M$  с непрерывным внутренним символом.

**$G$ -операторы и скрещенное произведение.** Действие группы  $G$  на многообразии  $M$  индуцирует унитарное представление этой группы в пространстве  $L^2$ :

$$\begin{aligned} \tilde{T}_g &: L^2(M) \longrightarrow L^2(M), \quad g \in G, \\ \tilde{T}_g &= \mu^{-1/2} T_g \mu^{1/2} \equiv \left( \frac{g^{-1*} \mu}{\mu} \right)^{1/2} T_g, \end{aligned}$$

где  $\mu = \mu_0$  — мера, входящая в определение пространства  $L^2(M)$ .

Группа  $G$  действует на алгебре  $\Psi(M)$  слева по правилу

$$A \in \Psi(M), g \in G \longmapsto \tilde{T}_g A \tilde{T}_g^{-1} \in \Psi(M)$$

и определено максимальное  $C^*$ -скрещенное произведение  $\Psi(M) \rtimes G$  (о теории скрещенных произведений см., например, [12]). Элементы этого произведения являются семействами  $\{D_g\}$  ПДО на  $M$ , параметризованных группой. Семейство будем называть конечным, если в нем только конечное число элементов отлично от нуля. Множество конечных семейств обозначается через  $\Psi(M) \rtimes_{alg} G$  и называется *алгебраическим* скрещенным произведением. Ниже будем использовать следующее универсальное свойство максимального скрещенного произведения  $A \rtimes G$  алгебры  $A$  и группы  $G$ , действующей на  $A$  автоморфизмами: любое ковариантное представление, т. е. пара представлений

$$\rho_0 : A \rightarrow \mathcal{BH}, \rho_1 : G \rightarrow \mathcal{BH} \text{ таких, что } \rho_0 g(a) = \rho_1(g) \rho_0(a) \rho_1(g)^{-1},$$

(представление  $\rho_1$  предполагается унитарным) индуцирует гомоморфизм скрещенного произведения:

$$\rho : A \rtimes G \longrightarrow \mathcal{BH},$$

который на элементах алгебраического скрещенного произведения имеет вид

$$\rho\{a_h\} = \sum_{h \in G} \rho_0(a_h) \rho_1(h).$$

Тогда сопоставление конечному семейству  $\{D_h\}$  соответствующего  $G$ -оператора

$$\sum_h D_h \tilde{T}_h : L^2(M) \longrightarrow L^2(M)$$

продолжается до гомоморфизма  $C^*$ -алгебр:

$$\begin{aligned} \pi : \Psi(M) \rtimes G &\longrightarrow \mathcal{B}/\mathcal{K}, \\ \{D_h\} &\longmapsto \sum_h D_h \tilde{T}_h. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathcal{B}$  ( $\mathcal{K}$ ) — алгебра ограниченных (компактных) операторов в пространстве  $L^2(M)$ , и мы воспользовались универсальным свойством максимального скрещенного произведения.

Наша цель в этом параграфе — исследовать фредгольмовость  $G$ -операторов. Очевидно, фредгольмовость оператора со сдвигами эквивалента обратимости соответствующего элемента алгебры Калкина  $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ , т. е. обратимости элемента  $\pi(a)$  для  $a \in \Psi(M) \rtimes G$ . Для исследования проблемы обратимости мы введем понятие символа  $G$ -оператора и соответствующее квантование.

Так как конормальный символ  $G$ -оператора является семейством  $G$ -операторов с параметром (см. (2.6)), то опишем  $C^*$ -вариант этого понятия.

**$G$ -операторы с параметром.** Группа  $G$  действует на косферическом расслоении  $S^*M = T_0^*M/\mathbb{R}_+$ , при этом граница расслоения, обозначаемая через  $\partial S^*M$ , является инвариантной относительно этого действия. Следовательно, определено скрещенное произведение  $C(\partial S^*M) \rtimes G$ . Так как окрестность конической точки диффеоморфна произведению  $\Omega \times \mathbb{R}_+$ , то имеет место диффеоморфизм  $\partial S^*M \simeq S(T^*\Omega \times \mathbb{R}_p)$ .

Через

$$\Psi_p(\Omega) \subset C(L, \mathcal{B}L^2(\Omega)), \quad \text{где } L = \{\operatorname{Re} p = 0\},$$

обозначим замыкание по норме алгебры классических ПДО нулевого порядка на  $\Omega$  с параметром  $p \in L$  (см., например, [3]). Здесь  $C(L, \mathcal{B}L^2(\Omega))$  — алгебра непрерывных ограниченных функций на весовой прямой  $L$  со значениями в ограниченных операторах в пространстве  $L^2(\Omega)$ .

**Определение 5.1.**  $G$ -символом с параметром  $p$  называется элемент

$$a \in C(S(T^*\Omega \times \mathbb{R}_p)) \rtimes G.$$

Определим отображение квантования  $G$ -символов с параметром формулой

$$\operatorname{Op}(a) = \sum_h \operatorname{Op}(a_h)(p) \tilde{T}_h' e^{p\beta_h} : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega), \quad \text{где } a = \{a_g\}, \quad p \in L, \quad (5.1)$$

а  $\tilde{T}_h'$  — унитарное представление группы  $G$  в пространстве  $L^2(\Omega)$  операторами сдвига на  $\Omega$ . Формула (5.1) определяет отображение квантования на алгебраическом скрещенном произведении. Оно продолжается в силу универсального свойства на  $C^*$ -скрещенное произведение до гомоморфизма  $C^*$ -алгебр:

$$\operatorname{Op} : C(S(T^*M \times \mathbb{R}_p)) \rtimes G \longrightarrow C(L, \mathcal{B})/C_0(L, \mathcal{K}).$$

Здесь  $C_0(L, \mathcal{K})$  — идеал непрерывных компактнозначных функций на прямой, стремящихся к нулю на бесконечности.

**Определение 5.2.** Семейством  $G$ -операторов с параметром называется семейство операторов

$$A(p) \in C(L, \mathcal{B})$$

такое, что  $A(p) - \operatorname{Op}(a) \in C_0(L, \mathcal{B}/\mathcal{K})$  для некоторого символа  $a \in C(S(T^*M \times \mathbb{R}_p)) \rtimes G$ .

Элемент  $a$  будем называть *символом семейства с параметром* и обозначать через  $\sigma(A(p))$ .

**Определение 5.3.** Алгебра семейств  $G$ -операторов с параметром  $p$  определяется формулой

$$\Psi_p^G(\Omega) = \left\{ (a, A(p)) \in C(\partial S^*M) \rtimes G \oplus C(L, \mathcal{B}L^2(\Omega)) \mid \operatorname{Op}(a) - A(p) \in C_0(L, \mathcal{K}) \right\}. \quad (5.2)$$



По построению имеет место короткая точная последовательность  $C^*$ -алгебр

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow C_0(L, \mathcal{K}) \longrightarrow \Psi_p^G(\Omega) \longrightarrow C(\partial S^*M) \rtimes G \longrightarrow 0 \\ A(p) \longmapsto (0, A(p)) \\ (a, A(p)) \longmapsto a. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Из точности последовательности (5.3) стандартными методами получаем следствие.

**Следствие 5.1.** *Если семейство с параметром  $A(p)$  является эллиптическим, т. е. символ  $\sigma(A(p)) \in C(\partial S^*M) \rtimes G$  обратим, то это семейство фредгольмово при всех  $p \in L$  и обратимо на бесконечности.*

**Символ  $G$ -операторов на многообразии  $M$ .** Рассмотрим  $G$ -оператор вида конечной суммы

$$D = \sum_h D_h \tilde{T}_h : L^2(M) \longrightarrow L^2(M) \quad (5.4)$$

на  $M$ . Определим его символ  $\sigma(D) = (\sigma_0(D), \sigma_c(D))$  как пару

$$\left( \{\sigma_0(D_g)\}, \sum_h \sigma_c(D_h) \tilde{T}_h' e^{p\beta_h} \right) \in C(S^*M) \rtimes G \oplus \Psi_p^G(\Omega), \quad (5.5)$$

состоящую из внутреннего символа  $\sigma_0(D)$  и конормального символа  $\sigma_c(D)$ .

Алгебру символов на  $G$ -многообразии  $M$  с конической точкой определим как подалгебру в прямой сумме алгебр

$$\Sigma \subset C(S^*M) \rtimes G \bigoplus \Psi_p^G(\Omega),$$

определяемую условием согласования:

$$\Sigma = \left\{ (a_0, a_c) \mid a_0|_{\partial S^*M} = \sigma(a_c) \right\}.$$

Здесь  $a_0|_{\partial S^*M} \in C(\partial S^*M) \rtimes G$  — сужение внутреннего символа на границу, а  $\sigma(a_c) \in C(\partial S^*M) \rtimes G$  — символ семейства с параметром (см. выше).

Теперь мы можем определить символ  $G$ -операторов на многообразии  $M$  как гомоморфизм алгебр:

$$\sigma : \Psi(M) \rtimes G \longrightarrow \Sigma,$$

продолжающий отображение (5.5). Символьное отображение корректно определено в силу универсального свойства скрещенного произведения.

**Квантование символов.** Построим отображение квантования

$$Op : \Sigma \longrightarrow \mathcal{B}/\mathcal{K}, \quad (5.6)$$

сопоставляющее символу некоторый оператор.

Чтобы построить отображение (5.6), рассмотрим элемент  $a = (a_0, a_c) \in \Sigma$ , первая компонента которого лежит в алгебраическом скрещенном произведении. Так как элементы  $(a_0)_g$  отличны от нуля только для конечного числа диффеоморфизмов  $g \in G$ , то существуют такие окрестности  $U, V$  конической точки, что  $g(U) \subset V$  и в  $U$  все такие диффеоморфизмы имеют вид (1.1). Пусть  $\varphi, \psi$  — такие гладкие функции на  $M$ , тождественно равные нулю вне окрестностей  $U$  и  $V$  соответственно и равные единице в несколько меньшей окрестности конической точки.

Квантование символа строится в два этапа.

Во-первых, определим оператор (здесь  $\mathcal{M}_{r \rightarrow p}$  — преобразование Меллина)

$$\hat{a}_c = \psi a_c \left( -r \frac{\partial}{\partial r} \right) \varphi \equiv \psi \mathcal{M}_{p \rightarrow r}^{-1} a_c(p) \mathcal{M}_{r \rightarrow p} \varphi,$$

конормальный символ которого равен  $a_c$  (что проверяется прямым вычислением).

Во-вторых, в силу условия согласования внутренний символ  $a_0$  и внутренний символ  $\sigma_0(\hat{a}_c)$  оператора  $\hat{a}_c$  совпадают над  $\partial S^*M$ . Поэтому имеем:

$$a_0 - \sigma_0(\hat{a}_c) \in C_0(S^*M \setminus \partial S^*M) \rtimes G, \quad (5.7)$$

т. е. эта разность является символом, обращающимся в нуль над  $\partial S^*M$ . Поэтому внутреннему символу (5.7) естественно сопоставить оператор над  $M$ , имеющий нулевой конормальный символ. Обозначим этот оператор через  $Op(a_0 - \sigma_0(\widehat{a}_c))$ . Окончательно положим:

$$Op(a) = Op(a_0 - \sigma_0(\widehat{a}_c)) + \widehat{a}_c \in \mathcal{B}/\mathcal{K}. \quad (5.8)$$

Несложно проверить, что оператор  $Op(a)$  с точностью до компактных слагаемых не зависит от выбора срезающих функций  $\varphi$  и  $\psi$ .

### Основная теорема.

#### Теорема 5.1.

1. *Отображение  $Op$  (см. (5.8)) продолжается по непрерывности до гомоморфизма  $C^*$ -алгебр, и имеет место коммутативная диаграмма  $C^*$ -алгебр и их гомоморфизмов*

$$\begin{array}{ccc} \Psi(M) \rtimes G & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{B}/\mathcal{K} \\ & \searrow \sigma & \nearrow Op \\ & \Sigma & \end{array} \quad (5.9)$$

2. *(Фредгольмовость.) Пусть для элемента  $A = \{A_g\} \in \Psi(M) \rtimes G$  символ  $\sigma(A) \in \Sigma$  обратим. Тогда соответствующий  $G$ -оператор*

$$\sum_{h \in G} A_h \widetilde{T}_h : L^2(M) \rightarrow L^2(M)$$

*фредгольмов.*

*Доказательство.*

1. Сначала установим коммутативность диаграммы (5.9) в алгебраическом случае, т. е. для элемента  $A = \{A_g\} \in \Psi(M) \rtimes_{alg} G$  с символом  $\sigma(A)$  установим равенство  $\pi(A) = Op(\sigma(A))$ .

С одной стороны, имеем

$$\pi(A) = \sum_h A_h \widetilde{T}_h. \quad (5.10)$$

С другой стороны, символ имеет вид

$$\sigma(A) = \left( \{\sigma_0(A_h)\}, \sum_h \sigma_c(A_h)(p) \widetilde{T}'_h e^{p\beta_h} \right),$$

где  $\sigma_0(A_g)$  и  $\sigma_c(A_g)$  — внутренний и конормальный символы оператора  $A_g$ . Далее квантование этого символа дает оператор:

$$\begin{aligned} Op(\sigma(A)) &= \sum_h Op \left( \sigma_0(A_h) - \sigma_0 \left( \psi \sigma_c(A_h) \left( -r \frac{\partial}{\partial r} \right) h^* \varphi \right) \right) \widetilde{T}_h + \sum_h \psi \sigma_c(A_h) \left( -r \frac{\partial}{\partial r} \right) \widetilde{T}_h \varphi = \\ &= \sum_h \left[ Op \left( \sigma_0(A_h) - \sigma_0 \left( \psi \sigma_c(A_h) \left( -r \frac{\partial}{\partial r} \right) h^* \varphi \right) \right) + \psi \sigma_c(A_h) \left( -r \frac{\partial}{\partial r} \right) h^* \varphi \right] \widetilde{T}_h = \\ &= \sum_h A_h \widetilde{T}_h. \quad (5.11) \end{aligned}$$

Здесь последнее равенство с точностью до компактных операторов следует из того, что оператор в квадратных скобках в (5.11) и оператор  $A_g$  имеют равные внутренний и конормальный символы (проверяется прямым вычислением) и, следовательно, совпадают с точностью до компактных операторов.

2. Теперь установим, что  $Op$  — гомоморфизм на подалгебре  $\Sigma_{alg}$ , состоящей из символов  $a = (a_0, a_c)$ , где  $a_0$  лежит в алгебраическом скрещенном произведении. Пусть  $a, b \in \Sigma_{alg}$ . Так как символьное отображение  $\sigma$  сюръективно, то имеем  $a = \sigma(A)$ ,  $b = \sigma(B)$  для некоторых элементов  $A, B \in \Psi(M) \rtimes_{alg} G$ . Имеем

$$Op(ab) = Op(\sigma(A)\sigma(B)) = Op(\sigma(AB)) = \pi(AB) = \pi(A)\pi(B) = Op(a)Op(b).$$

Искомое свойство установлено.

3. Из раздела 2 следует, что отображение  $Op$  продолжается в силу универсального свойства скрещенного произведения с плотной подалгебры  $\Sigma_{alg} \subset \Sigma$  на всю алгебру  $\Sigma$ . При этом продолжении диаграмма (5.9) корректно определена и является коммутативной.

4. Для доказательства фредгольмовости достаточно показать, что элемент  $\pi(A)$  обратим. Утверждается, что обратный элемент равен  $Op(\sigma(A)^{-1})$ . В самом деле, имеем

$$\pi(A) Op(\sigma(A)^{-1}) = Op(\sigma(A)) Op(\sigma(A)^{-1}) = Op(1) = 1.$$

Здесь первое равенство следует из коммутативности диаграммы (5.9), а второе вытекает из того факта, что отображение  $Op$  является гомоморфизмом алгебр.

Аналогично устанавливается равенство

$$Op(\sigma(A)^{-1}) \pi(A) = 1.$$

Теорема доказана.  $\square$

**Критерий обратимости символа.** Согласно теореме 5.1  $G$ -оператор фредгольмов, если его символ обратим как элемент специальной  $C^*$ -алгебры. Как проверять эту обратимость? В следующем предложении показывается, что условие обратимости символа из предыдущей теоремы может быть эквивалентно записано в явном виде как обратимость некоторых конкретных операторов. Чтобы выписать это условие, определим набор представлений скрещенного произведения. Зафиксируем точку  $(x, \xi) \in S^*M$ . Тогда определено представление

$$\begin{aligned} \pi_{x,\xi} : C(S^*M) \rtimes G &\longrightarrow \mathcal{B}l^2(G), \\ f &\longmapsto \sum_h f(g^{-1}(x), \partial g^{-1}(\xi), h) \mathcal{T}_h \end{aligned}$$

скрещенного произведения в алгебре ограниченных операторов, действующих в стандартном пространстве  $l^2(G)$  на группе (ср. (2.2)). Смысл этого представления состоит в том, что элементу скрещенного произведения сопоставляется сужение этого элемента на орбиту точки  $(x, \xi)$ .

**Предложение 5.1.** *Символ*

$$\sigma(A) = (\sigma_0(A), \sigma_c(A)) \in C(S^*M) \rtimes G \bigoplus \Psi_p^G(\Omega)$$

обратим тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

1. сужение  $\pi_{x,\xi}(\sigma(A)) : l^2(G) \rightarrow l^2(G)$  внутреннего символа на орбиту любой точки  $(x, \xi) \in S^*M$  обратимо;
2. кономальный символ  $\sigma_c(A)(p) : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  обратим при всех  $p \in L$ .

*Доказательство.* Так как символ  $\sigma(A)$  является парой, то достаточно установить обратимость каждой компоненты.

1. Внутренний символ  $\sigma_0(A)$  является элементом скрещенного произведения. Хорошо известно [8], что элемент скрещенного произведения обратим тогда и только тогда, когда обратимы его сужения  $\pi_{x,\xi}(\sigma(A))$  на орбиты всех точек  $(x, \xi) \in S^*M$ . Следовательно, при наших условиях внутренний символ обратим как элемент скрещенного произведения.

2. Установим обратимость кономального символа  $\sigma_c(A) \in C(L, \mathcal{B}l^2(\Omega))$ . По предположению этот символ обратим при каждом фиксированном значении  $p$ . Надо доказать, что норма обратного семейства равномерно ограничена (непрерывность обратного семейства очевидна). Эта ограниченность на произвольном конечном интервале значений параметра  $p$  следует по непрерывности, а при больших значениях параметра вытекает из того, что символ  $\sigma(\sigma_c(A)) \in C(\partial S^*M) \rtimes G$  обратим, т. е. семейство с параметром  $\sigma_c(A)(p)$  является эллиптическим, и в силу следствия 5.1 обратное семейство равномерно ограничено при больших  $p$ .

Предложение доказано.  $\square$

**Доказательство теоремы 2.1 (фредгольмовость в весовых пространствах Соболева  $H^{s,\gamma}$ ).** Пусть

$$D : H^{s,\gamma}(M) \rightarrow H^{s-m,\gamma+m}(M)$$

— эллиптический  $G$ -оператор порядка  $m$  на многообразии  $M$ . Надо доказать, что этот оператор фредгольмов.

1. (Редукция к оператору в пространстве  $L^2$ .) Во-первых, сведем оператор  $D$  к некоторому оператору нулевого порядка, действующему в пространстве  $L^2(M)$ . Для этого рассмотрим композицию

$$L^2(M) \xrightarrow{D_1} H^{s,\gamma}(M) \xrightarrow{D} H^{s-m,\gamma+m}(M) \xrightarrow{D_2} L^2(M),$$

где через  $D_1, D_2$  обозначены некоторые эллиптические псевдодифференциальные операторы на  $M$ , действующие в соответствующих весовых пространствах. Композицию этих операторов обозначим через

$$D' = D_2 D D_1.$$

Эта композиция является  $G$ -оператором. Так как ПДО  $D_{1,2}$  — эллиптические и, в силу классической конической теории, фредгольмовы, то  $G$ -операторы  $D$  и  $D'$  — фредгольмовы или нефредгольмовы одновременно. Далее, из мультипликативного свойства символов

$$\sigma(D') = \sigma(D_2)\sigma(D)\sigma(D_1)$$

и эллиптичности операторов  $D_2$  и  $D_1$  следует также, что из эллиптичности  $G$ -оператора  $D$  следует эллиптичность  $G$ -оператора  $D'$ .

2. Покажем, что из эллиптичности оператора  $D'$  в смысле определения 2.3 следует обратимость его символа как элемента алгебры символов

$$\sigma(D') \in C(S^*M) \times G \bigoplus C(L, \mathcal{BL}^2(\Omega)), \quad L = \{\operatorname{Re} p = 0\}.$$

Действительно, критерий обратимости этого элемента был получен в предложении 5.1. Покажем, что условия этого предложения выполнены. В самом деле, конормальный символ  $\sigma_c(D)(p)$  обратим по предположению при всех  $p \in L$ . Осталось установить обратимость сужения  $\pi_{x,\xi}(\sigma(D))$  внутреннего символа на орбиту произвольной точки  $(x, \xi) \in S^*M$ . Заметим, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} l^2(G, m_{x,\xi}) & \xrightarrow{\sigma(D')(x,\xi)} & l^2(G, m_{x,\xi}) \\ \sqrt{m_{x,\xi}} \downarrow \simeq & & \sqrt{m_{x,\xi}} \downarrow \simeq \\ l^2(G) & \xrightarrow{\pi_{x,\xi}(\sigma(D'))} & l^2(G), \end{array} \quad (5.12)$$

в которой вертикальные отображения — изоморфизмы, определяемые умножением на квадратный корень из весовой функции  $m_{x,\xi}(g)$  из (2.3), отвечающей значениям  $s = \gamma = 0$ . Коммутативность диаграммы (5.12) устанавливается прямым вычислением, если оператор  $D'$  записывать в виде (5.4). Из эллиптичности оператора  $D'$  в смысле определения 2.3 следует, что в верхней строке диаграммы (5.12) находится изоморфизм. Из коммутативности диаграммы следует, что и в нижней строке тоже стоит изоморфизм, т. е. сужение  $\pi_{x,\xi}(\sigma(D'))$  символа на орбиту точки  $x, \xi$  обратимо, что и требовалось доказать.

Теорема 2.1 доказана.

## 6. ДОПОЛНЕНИЕ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВНУТРЕННЕГО СИМВОЛА

Дадим детали вычисления символа (2.2) и веса (2.3) методом замораживания коэффициентов.

Сначала рассмотрим дифференциальный оператор  $D$  на  $M$  и точку  $x_0 \in M \setminus pt$ . Замораживая его коэффициенты в точках орбиты  $Gx_0 \subset M$  и отбрасывая младшие члены, получим оператор с постоянными коэффициентами в пространстве функций на орбите<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \bigoplus_{g \in G} \sigma_0(D) \left( g^{-1}(x_0), -i \frac{\partial}{\partial x_g} \right) : \bigoplus_g H^s \left( T_{g^{-1}(x_0)} M, |\cdot|_{g^{-1}(x_0)}, \mu_\gamma(g^{-1}(x_0)) \right) &\longrightarrow \\ &\longrightarrow \bigoplus_g H^{s-m} \left( T_{g^{-1}(x_0)} M, |\cdot|_{g^{-1}(x_0)}, \mu_{\gamma+m}(g^{-1}(x_0)) \right). \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Напомним, что норма в пространстве Соболева  $H^s(V, |\cdot|, d\xi)$ , где  $V$  — векторное пространство, определяется в терминах нормы  $|\cdot|$  и меры  $d\xi$  на  $V^*$  по формуле:

$$\|f\|_s^2 = \int_V (1 + |\xi|^2)^s |\tilde{f}(\xi)|^2 d\xi, \text{ где } \tilde{f}(\xi) \text{ — преобразование Фурье функции } f(x).$$

Преобразованием Фурье  $x_g \rightarrow \xi_g$  в каждой точке орбиты этот оператор переводится в изоморфный оператор<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \bigoplus_{g \in G} \sigma_0(D)(g^{-1}(x_0), \xi_g) : \bigoplus_g L^2\left(T_{g^{-1}(x_0)}^* M, (1 + |\xi_g|^2)^s \mu_\gamma(g^{-1}(x_0))\right) &\longrightarrow \\ &\longrightarrow \bigoplus_g L^2\left(T_{g^{-1}(x_0)}^* M, (1 + |\xi_g|^2)^{s-m} \mu_{\gamma+m}(g^{-1}(x_0))\right). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Как обычно в эллиптической теории, символ (6.1) надо рассматривать вне нулевого сечения, т. е. от оператора (6.1) мы перейдем к оператору

$$\begin{aligned} \bigoplus_{g \in G} \sigma_0(D)(g^{-1}(x_0), \xi_g) : \bigoplus_g L^2\left(T_{g^{-1}(x_0)}^* M, |\xi_g|^{2s} \mu_\gamma(g^{-1}(x_0))\right) &\longrightarrow \\ &\longrightarrow \bigoplus_{g \in G} L^2\left(T_{g^{-1}(x_0)}^* M, |\xi_g|^{2(s-m)} \mu_{\gamma+m}(g^{-1}(x_0))\right). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Полученный оператор (6.2) действует в прямой сумме пространств, отвечающих разным точкам многообразия  $M$ . Это не вполне удобно с вычислительной точки зрения. Чтобы избавиться от этого неудобства, перепишем оператор (6.2) так, чтобы он действовал в пространстве функций, отвечающем точке  $x_0$ . С этой целью мы заметим, что для любого  $g \in G$  кодифференциал соответствующего диффеоморфизма  $g : M \rightarrow M$  определяет изоморфизм кокасательных пространств:

$$\partial g : T_{g^{-1}(x_0)}^* M \longrightarrow T_{x_0}^* M.$$

Следовательно, соответствующий оператор сдвига обратим и является изометрическим изоморфизмом  $L^2$ -пространств<sup>2</sup>:

$$T_{\partial g}^{-1} = (\partial g)^* : L^2\left(T_{x_0}^* M, |\xi|^{2s} \mu_\gamma(x_0) m_{s,\gamma}(g)\right) \longrightarrow L^2\left(T_{g^{-1}(x_0)}^* M, |\xi_g|^{2s} \mu_\gamma(g^{-1}(x_0))\right), \quad (6.3)$$

где весовая функция  $m_{s,\gamma}(g)$  на пространстве  $T_{x_0}^* M$  определяется соотношением

$$m_{s,\gamma}(g) = \frac{(\partial g^{-1})^*(\mu_\gamma |\xi|^{2s})(x_0, \xi)}{\mu_\gamma(x_0) |\xi|^{2s}},$$

которое совпадает с (2.3) с точностью до умножения на обратимую функцию  $|\xi|^{2s}$ . Пользуясь изометрическими изоморфизмами (6.3), пространства в (6.2) можно заменить на изоморфные пространства вида:

$$\begin{aligned} \bigoplus_{g \in G} T_{\partial g} : \bigoplus_g L^2\left(T_{g^{-1}(x_0)}^* M, |\xi|^{2s} \mu_\gamma(g^{-1}(x_0))\right) &\xrightarrow{\cong} L^2\left(T_{x_0}^* M, |\xi|^{2s} \mu_\gamma(x_0); l^2(G, m_{s,\gamma})\right), \\ \{w(\xi_g)\} &\longmapsto \{w(\partial g^{-1}(\xi))\}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

где в образе отображения находится пространство функций на  $T_{x_0}^* M$  со значениями в пространстве  $l^2(G, m_{s,\gamma})$  функций на группе.

Итак, с учетом формул (6.2) и (6.4) мы видим, что символ оператора  $D$ , получаемый замораживанием коэффициентов оператора на орбите и переходом к преобразованию Фурье, можно представлять как семейство операторов умножения

$$\begin{aligned} \sigma_0(D)(x_0, \xi) : l^2(G, m_{s,\gamma}) &\longrightarrow l^2(G, m_{s-m,\gamma-m}), \\ w(g) &\longmapsto \sigma_0(D)(g^{-1}(x_0), \partial g^{-1}(\xi)) w(g) \end{aligned} \quad (6.5)$$

на значения внутреннего символа оператора в соответствующих точках орбиты точки  $(x_0, \xi) \in T_{x_0}^* M$ .

<sup>1</sup>Здесь и ниже  $L^2(X, \mu_X)$  — пространство  $L^2$  функций на пространстве  $X$ , интегрируемых с квадратом относительно меры  $\mu_X$ .

<sup>2</sup>Здесь мы пользуемся следующим простым утверждением: если  $\varphi : X \rightarrow Y$  — диффеоморфизм, то отображение  $\varphi^* : L^2(Y, \mu_Y) \rightarrow L^2(X, \mu_X)$  будет изометрическим изоморфизмом, если имеет место равенство мер  $\mu_X = \varphi^* \mu_Y$ .

Аналогичное вычисление (которое мы для краткости опустим) показывает, что символ оператора сдвига  $T_h$  равен оператору правого сдвига функций на группе:

$$\begin{aligned} \sigma_0(T_h)(x_0, \xi) = \mathcal{T}_h : l^2(G, m_{s,\gamma}) &\longrightarrow l^2(G, m_{s,\gamma}), \\ w(g) &\longmapsto w(gh). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Из формул (6.5) и (6.6) следует искомая формула для символа (2.2), а также формула (2.3) для веса.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида// Усп. мат. наук. — 1964. — 19, № 3. — С. 53–161.
2. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками// Тр. Моск. Мат. об-ва. — 1967. — 16. — С. 209–292.
3. Назайкинский В. Е., Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Псевдодифференциальные операторы на стратифицированных многообразиях. II// Дифф. уравн. — 2007. — 43, № 5. — С. 685–696.
4. Стернин Б. Ю. Квазиэллиптические операторы на бесконечном цилиндре. — М.: МИЭМ, 1972.
5. Стернин Б. Ю. Эллиптическая теория на компактных многообразиях с особенностями. — М.: МИЭМ, 1974.
6. Савин А. Ю. О символе нелокальных операторов в пространствах Соболева// Дифф. уравн. — 2011. — 47, № 6. — С. 890–893.
7. Antonevich A., Belousov M., Lebedev A. Functional differential equations. II.  $C^*$ -applications. Ч. 1, 2. — Harlow: Longman, 1998.
8. Antonevich A., Lebedev A. Functional differential equations. I.  $C^*$ -theory. — Harlow: Longman, 1994.
9. Nazaikinskii V. E., Savin A. Yu., Schulze B.-W., Sternin B. Yu. Elliptic theory on singular manifolds. — Boca Raton: CRC-Press, 2005.
10. Nazaikinskii V. E., Savin A. Yu., Sternin B. Yu. Elliptic theory and noncommutative geometry. — Basel: Birkhäuser, 2008.
11. Nazaikinskii V., Savin A., Sternin B. Elliptic theory on manifolds with corners. I. Dual manifolds and pseudodifferential operators// В сб.:  $C^*$ -algebras and elliptic theory. II. — Basel: Birkhäuser, 2008. — С. 183–206.
12. Pedersen G. K.  $C^*$ -Algebras and their automorphism groups. — London—New York: Academic Press, 1979.
13. Savin A. Yu., Sternin B. Yu. Uniformization of nonlocal elliptic operators and  $KK$ -theory// Russ. J. Math. Phys. — 2013. — 20, № 3. — С. 345–359.
14. Savin A. Yu., Sternin B. Yu. Elliptic theory for operators associated with diffeomorphisms of smooth manifolds// В сб.: Pseudo-differential operators, generalized functions and asymptotics. Selected papers of the 8th ISAAC congress, Moscow, Russia, August 22–27, 2011. — Basel: Birkhäuser, 2013. — С. 1–26.
15. Savin A. Yu., Sternin B. Yu. Index of elliptic operators for diffeomorphisms of manifolds// J. Noncommut. Geom. — 2014. — 8, № 3. — С. 695–734.

А. Ю. Савин

Российский университет дружбы народов, кафедра прикладной математики  
Ганноверский университет имени Готфрида Вильгельма Лейбница  
E-mail: antonsavin@mail.ru

Б. Ю. Стернин

Российский университет дружбы народов, кафедра прикладной математики  
Ганноверский университет имени Готфрида Вильгельма Лейбница  
E-mail: sternin@mail.ru

UDC 517.9

### Elliptic $G$ -Operators on Manifolds with Isolated Singularities

**Abstract.** We study elliptic operators on manifolds with singularities such that a discrete group  $G$  acts on the manifold. Following the standard elliptic theory approach, we define the Fredholm property of an operator by its principal symbol. For this problem, we prove that the symbol is a pair consisting of the symbol on the principal stratum (the inner symbol) and the symbol at the conical point (the conormal symbol). We establish the Fredholm property of elliptic elements.

## REFERENCES

1. M.S. Agranovich and M.I. Vishik, “Ellipticheskie zadachi s parametrom i parabolicheskie zadachi obshchego vida” [Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1964, **19**, No. 3, 53–161 (in Russian).
2. V. A. Kondratiev, “Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy v oblastiakh s konicheskimi i uglovymi tochkami” [Boundary-value problems for elliptic equations in domains with conical and angle points], *Tr. Mosk. Mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1967, **16**, 209–292 (in Russian).
3. V. E. Nazaykinskiy, A. Yu. Savin, and B. Yu. Sternin, “Psevdodifferentsial’nye operatory na stratifitsirovannykh mnogoobraziyakh. II” [Pseudodifferential operators on stratified manifolds], *Diff. uravn.* [Differ. Equations], 2007, **43**, No. 5, 685–696 (in Russian).
4. B. Yu. Sternin, *Kvaziellipticheskie operatory na beskonechnom tsilindre* [Quasi-Elliptic Operators on an Infinite Cylinder], MIEM, Moscow, 1972 (in Russian).
5. B. Yu. Sternin, *Ellipticheskaya teoriya na kompaktnykh mnogoobraziyakh s osobennostyami* [Elliptic Theory on Compact Manifolds with Singularities], MIEM, Moscow, 1974 (in Russian).
6. A. Yu. Savin, “O simvole nelokal’nykh operatorov v prostranstvakh Soboleva” [On the symbol of nonlocal operators in Sobolev spaces], *Diff. uravn.* [Differ. Equations], 2011, **47**, No. 6, 890–893 (in Russian).
7. A. Antonevich, M. Belousov, and A. Lebedev, *Functional Differential Equations. II.  $C^*$ -Applications. Part 1, 2*, Longman, Harlow, 1998.
8. A. Antonevich and A. Lebedev, *Functional Differential Equations. I.  $C^*$ -Theory*, Longman, Harlow, 1994.
9. V. E. Nazaikinskii, A. Yu. Savin, B.-W. Schulze, and B. Yu. Sternin, *Elliptic Theory on Singular Manifolds*, CRC-Press, Boca Raton, 2005.
10. V. E. Nazaikinskii, A. Yu. Savin, and B. Yu. Sternin, *Elliptic Theory and Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Basel, 2008.
11. V. Nazaikinskii, A. Savin, and B. Sternin, “Elliptic theory on manifolds with corners. I. Dual manifolds and pseudodifferential operators,” In:  *$C^*$ -Algebras and Elliptic Theory. II*, Birkhäuser, Basel, 2008, 183–206.
12. G. K. Pedersen,  *$C^*$ -Algebras and Their Automorphism Groups*, Academic Press, London–New York, 1979.
13. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, “Uniformization of nonlocal elliptic operators and  $KK$ -theory,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2013, **20**, No. 3, 345–359.
14. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, “Elliptic theory for operators associated with diffeomorphisms of smooth manifolds,” In: *Pseudo-differential operators, generalized functions and asymptotics*, Selected papers of the 8th ISAAC congress, Moscow, Russia, August 22–27, 2011, Birkhäuser, Basel, 2013, 1–26.
15. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, “Index of elliptic operators for diffeomorphisms of manifolds,” *J. Noncommut. Geom.*, 2014, **8**, No. 3, 695–734.

A. Yu. Savin

Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, Russia

Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, Hannover, Germany

E-mail: antonsavin@mail.ru

B. Yu. Sternin

Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, Russia

Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, Hannover, Germany

E-mail: sternin@mail.ru

## МАГНИТНЫЙ ОПЕРАТОР ШРЕДИНГЕРА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ НЕКОММУТАТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

© 2016 г. А. Г. СЕРГЕЕВ

Аннотация. Мы приводим интерпретацию магнитного оператора Шредингера в терминах некоммутативной геометрии. В частности, спектральные свойства оператора переформулируются в терминах  $C^*$ -алгебры. Используя эту переформулировку, можно применять такую технику некоммутативной геометрии, как кохомология Хохшильда, к изучению свойств магнитного оператора Шредингера. Показано, что эта идея может быть применена к целочисленному квантовому эффекту Холла.

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Кратко о некоммутативной геометрии . . . . .	193
2. Классическая теория Блоха (периодический случай) . . . . .	195
3. Магнитная теория Блоха . . . . .	196
4. $C^*$ -алгебры наблюдаемых . . . . .	196
5. Когомология Хохшильда . . . . .	198
6. Интерпретация квантового эффекта Холла . . . . .	199
Список литературы . . . . .	200

В этой статье мы даем интерпретацию магнитного оператора Шредингер в терминах некоммутативной геометрии (см., например, [3]). Другими словами, мы переформулируем некоторые основные свойства этого оператора в терминах  $C^*$ -алгебры линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Данную переформулировку можно рассматривать как вариант некоммутативной теории Блоха. Попытки построить такое обобщение классической теории Блоха уже предпринимались (см., например, [4]). В нашем подходе мы в основном следуем Шубину и др. [6].

Используя эту переформулировку, можно применять такую технику некоммутативной геометрии, как кохомология Хохшильда, к изучению свойств магнитного оператора Шредингера. В качестве приложения рассматривается целочисленный квантовый эффект Холла, демонстрирующий квантование проводимости Холла при очень низких температурах (около абсолютного нуля). В терминах некоммутативной геометрии квантование проводимости Холла означает целочисленность некоторого циклического коцикла Хохшильда.

Приведем краткое описание работы. В разделе 2 мы кратко опишем классическую теорию Блоха для периодического оператора Шредингера (см. более полное изложение в [2]). В разделе 3 мы вводим магнитный оператор Шредингера, инвариантный относительно магнитных сдвигов. Эти сдвиги порождают проективное представление дискретной группы симметрий. В разделе 4 дается интерпретация этого оператора в терминах  $C^*$ -алгебры наблюдаемых. В разделе 5 мы вводим циклическую кохомологию Хохшильда и строим замкнутые коциклы Хохшильда на алгебре наблюдаемых. В заключительном разделе 6 мы показываем, как предложенная конструкция может быть применена к дискретному квантовому эффекту Холла.

Данная работа частично поддержана грантом РФФИ 13-01-00622, программой ведущих научных школ (НШ-2928.2012.1), а также научной программой Президиума РАН «Нелинейная динамика».



1. КРАТКО О НЕКОММУТАТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Основы некоммутативной геометрии лежат в коммутативных банаховых алгебрах и их связях с топологией, определенной Гельфандом, Наймарком, Шиловым, Мазуром и другими математиками в середине XX в. Центральной идеей их подхода была переформулировка основных топологических свойств компактов в терминах банаховых алгебр непрерывных функций над такими пространствами.

Более строго, предположим, что  $X$  — компактное хаусдорфово топологическое пространство и  $A = C(X)$  — алгебра непрерывных функций над  $X$  с естественной топологией, задаваемой суп-нормой. Это коммутативная банахова алгебра, которая также является алгеброй с единицей, т. е. содержит единичный элемент. Более того, это  $C^*$ -алгебра, что означает, что она является алгеброй с инволюцией, т. е. имеет инволюцию (задаваемую комплексным сопряжением) и удовлетворяет следующему свойству:

$$\|a^2\| = \|a^*a\|$$

для всех  $a \in A$ .

Обозначим через  $M(A)$  спектр (множество характеров) алгебры  $A$ , т. е. гомоморфизмов алгебры  $\mu : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Другими словами, любой характер  $\mu$  — это ненулевой линейный функционал над  $A$ , удовлетворяющий свойству мультипликативности:  $\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$  для любых  $a, b \in A$  и переводящий единицу  $1_A$  в  $1 \in \mathbb{C}$ .

Обычным примером характера над алгеброй  $A = C(X)$  является отображение  $\varepsilon_x : f \mapsto f(x)$ , где  $f \in A$  и  $x$  — фиксированная точка в  $X$ .

Снабдим  $M(A) \subset A^*$  слабой\* топологией сопряженного пространства  $A^*$ , т. е. топологией поточечной сходимости на элементах  $A$ . В случае  $A = C(X)$  пространство  $A^*$  состоит из комплексных мер над  $X$  со стандартной топологией. Из теоремы Банаха—Алаоглу следует, что во введенной топологии спектр  $M(A)$  компактен.

Для любой банаховой алгебры  $A$  с единицей мы можем рассмотреть преобразование Гельфанда

$$\mathcal{G} : A \rightarrow C(M(A)),$$

задаваемое формулой

$$A \ni a \mapsto \hat{a} : M(A) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{где } \hat{a}(\mu) := \mu(a).$$

Это отображение непрерывно и \*-гомоморфно, если алгебра  $A$  инволютивна. Последнее означает, что оно коммутирует с инволюциями в  $A$  и  $C(M(A))$ . Более того, теорема Гельфанда—Наймарка гарантирует, что это изометрический \*-изоморфизм  $A$  на  $C(M(A))$ .

Непрерывное отображение  $f : X \rightarrow Y$  компактных топологических пространств порождает гомоморфизм  $Cf : C(Y) \rightarrow C(X)$  их алгебр непрерывных функций, действующий по формуле:  $\varphi \mapsto \varphi \circ f$ . Это унитарный (т. е. сохраняющий единицу) \*-гомоморфизм, имеющий следующее функториальное свойство: если существует другое непрерывное отображение  $g : Y \rightarrow Z$  компактных топологических пространств, то  $C(g \circ f) = Cf \circ Cg$ .

Соответствие

$$F : X \mapsto C(X), \quad f \mapsto Cf$$

определяет контравариантный функтор из категории компактных хаусдорфовых топологических пространств (с морфизмами, задаваемые непрерывными отображениями) в категорию коммутативных  $C^*$ -алгебр с единицей (с морфизмами, задаваемыми унитарными \*-гомоморфизмами).

Обратный функтор  $\Phi$  определяется следующим образом. Пусть  $\varphi : A \rightarrow B$  — унитарный \*-гомоморфизм коммутативных  $C^*$ -алгебр с единицей. Обозначим через  $M\varphi : M(B) \rightarrow M(A)$  отображение, задаваемое формулой  $\mu \mapsto \mu \circ \varphi$ . Оно непрерывно и имеет функториальное свойство: если  $\psi : B \rightarrow C$  — другой унитарный \*-гомоморфизм коммутативных  $C^*$ -алгебр с единицей, то  $M(\psi \circ \varphi) = M\varphi \circ M\psi$ .

Другими словами, построенные функторы дают эквивалентность построенных категорий

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{компактные топологические} \\ \text{пространства} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{коммутативные } C^*\text{-алгебры} \\ \text{с единицей} \end{array} \right\}.$$

Более того, две коммутативные  $C^*$ -алгебры с единицей изоморфны тогда и только тогда, когда их спектры гомеоморфны. Отсюда следует, что группа автоморфизмов  $\text{Aut } A$  коммутативной  $C^*$ -алгебры с единицей  $A$  изоморфна группе  $\text{Homeo}(M(A))$  гомеоморфизмов ее спектра.

Построенная эквивалентность позволяет установить словарь соответствия топологических терминов алгебраическим:

<u>топология</u>	$\longleftrightarrow$	<u>алгебра</u>
гомеоморфизм	$\longleftrightarrow$	автоморфизм
компактность	$\longleftrightarrow$	унитальность
компактификация	$\longleftrightarrow$	добавление единицы
открытое подмножество	$\longleftrightarrow$	идеал
замкнутое подмножество	$\longleftrightarrow$	фактор-алгебра
метризуемость	$\longleftrightarrow$	сепарабельность
связность	$\longleftrightarrow$	отсутствие нетривиальных идемпотентов

Еще один пример, демонстрирующий, как топологические понятия преобразуются в алгебраические. Покажем алгебраическую интерпретацию комплексного векторного расслоения над компактным многообразием, задаваемое теоремой Серра—Суона.

Пусть  $E \rightarrow M$  — комплексное векторное расслоение над компактным топологическим многообразием  $M$ . Тогда  $\Gamma(M, E) \equiv \Gamma(E)$  — множество его непрерывных сечений, — является правым модулем над коммутативной банаховой алгеброй  $C(M)$  с действием

$$(sa)(x) := s(x)a(x) \quad \text{при } s \in \Gamma(E), a \in C(M).$$

Это контравариантный функтор из категории комплексных векторных расслоений над  $M$  в категорию правых модулей над алгеброй  $C(M)$ . Действительно, каждому морфизму расслоения  $\tau : E \rightarrow E'$  можно сопоставить гомоморфизм  $C(M)$ -модулей

$$\Gamma\tau : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E'),$$

определяемый по формуле  $(\Gamma\tau)s = \tau \circ s$ . Этот гомоморфизм линеен, т. е.  $(\Gamma\tau)(sa) = (\Gamma\tau)(s)a$  при  $a \in C(M)$ . Более того, функтор  $\Gamma$  переводит операции сопряжения, прямой суммы и тензорного произведения на расслоениях в соответствующие операции на  $C(M)$ -модулях.

Опишем, какие модули соответствуют комплексным векторным расслоениям над  $M$  при этом соответствии.

Правый  $A$ -модуль  $\mathcal{P}$  над алгеброй  $A$  называется *проективным*, если он является прямым слагаемым в свободном  $A$ -модуле. Покажем, что  $C(M)$ -модуль  $\Gamma(M, E) \equiv \Gamma(E)$  — проективный. В самом деле, в силу хорошо известного результата из теории векторных расслоений (см., например, [5]), для заданного расслоения  $E \rightarrow M$  можно найти дополнительное векторное расслоение  $E' \rightarrow M$  со свойством  $E \oplus E' \cong M \times \mathbb{C}^N$ . Так как

$$\Gamma(E) \oplus \Gamma(E') = \Gamma(M \times \mathbb{C}^N) = C(M)^N,$$

то  $C(M)$ -модуль  $\Gamma(E)$  является прямым слагаемым в свободном  $C(M)$ -модуле  $C(M)^N$ .

Из этого построения также очевидно, что  $C(M)$ -модуль  $\Gamma(E)$  — конечно порожденный. В соответствии с теоремой Серра—Суона эти два свойства полностью определяют модули, соответствующие комплексным векторным расслоениям над  $M$ . Более точно, справедлива

**Теорема 1.1** (Серр—Суон). *Функтор  $\Gamma$  устанавливает эквивалентность следующих категорий:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{комплексные векторные} \\ \text{расслоения над компакт-} \\ \text{ным многообразием } M \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{конечно порожденные} \\ \text{проективные модули} \\ \text{над алгеброй } C(M) \end{array} \right\}.$$

Основная задача некоммутативной геометрии — обобщить описанное соответствие между топологией и коммутативными банаховыми алгебрами на анализ и дифференциальную геометрию. Другими словами, мы хотим перевести основные понятия топологии, анализа и дифференциальной геометрии на алгебраический язык. Однако, чтобы достичь этой цели, мы не можем, как раньше,

ограничиться случаем коммутативных банаховых алгебр, — мы должны использовать некоммутативные банаховы алгебры, более точно, операторные  $C^*$ -алгебры.

Возникает естественный вопрос: зачем нам нужен такой перевод? Вот один из возможных ответов. Квантовая теория поля, и теория струн в частности, до сих пор остаются в значительной мере разделами физики без надежного математического основания. В отличие от квантовой механики, которая может рассматриваться (с небольшими оговорками) как строго математическая теория, многие результаты теории квантового поля и теории струн основываются только на «физическом уровне» строгости и не имеют корректного математического доказательства. Мы считаем, что это связано с отсутствием подходящего математического языка для описания задач, возникающих в этих теориях. В частности, этот язык должен служить рабочим аппаратом в дифференциальной геометрии гладких бесконечномерных многообразий. Классические понятия дифференциальной геометрии, такие как связность, кривизна и т. д., не переносятся на бесконечные размерности. Например, различные определения связности, которые эквивалентны в конечномерном случае, имеют различные значения для бесконечномерных многообразий. Это еще более заметно в случае кривизны, которая вообще не может быть корректно определена в бесконечномерных многообразиях по аналогии с конечномерным случаем.

В этой ситуации кажется естественным выбрать наиболее «грубый» язык для описания основных понятий анализа и дифференциальной геометрии, а именно алгебраический. Этот язык имеет наибольшую возможность выдержать перенос на конечномерный случай. Одной из целей некоммутативной геометрии является создание «словаря», переводящего основные понятия топологии, анализа и геометрии в алгебраические термины, используемые в конечномерном случае.

В этой работе мы пытаемся сделать это для оператора Шредингера, переводя его спектральные свойства на язык некоммутативной геометрии. В качестве примера применения такого перевода мы приводим интерпретацию целочисленного квантового эффекта Холла в терминах когомологии Хохшильда.

## 2. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ БЛОХА (ПЕРИОДИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ)

Физические корни теории Блоха лежат в теории кристаллов. Симметрии кристалла описываются его *решеткой Браве*, которая является решеткой  $\Gamma$  в пространстве  $\mathbb{R}^d$  с  $d = 3$ . Математически  $\Gamma$  — это дискретная абелева группа, изоморфная  $\mathbb{Z}^d$ , действующая в  $\mathbb{R}^d$  как группа переносов.

Поведение свободных электронов в кристалле описывается оператором Шредингера

$$H = -\Delta + V$$

с потенциалом  $V$ , задаваемым ограниченной функцией, инвариантной относительно  $\Gamma$ .

Операторы сдвига  $T_\gamma$ ,  $\gamma \in \Gamma$ , определяют унитарное представление группы  $\Gamma$  в пространстве  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , а оператор Шредингера  $H$  коммутирует со всеми операторами  $T_\gamma$ .

Обозначим через  $\Gamma'$  сопряженную поверхность в сопряженном пространстве  $(\mathbb{R}^d)'$ , а именно:

$$\Gamma' = \{k \in (\mathbb{R}^d)' : (k, \gamma) \in 2\pi\mathbb{Z} \text{ для некоторого } \gamma \in \Gamma\}.$$

Ее фундаментальная область называется *зоной Бриллюэна*.

*Собственные функции Блоха* оператора  $H$  — это функции вида

$$\psi_{jk}(x) = e^{i(k,x)} \varphi_{jk}(x),$$

где  $k$  принадлежат зоне Бриллюэна и  $\varphi_{jk}$  — собственные функции оператора  $H_k$ , определенного соотношением

$$H(e^{i(k,x)} \varphi(x)) = e^{i(k,x)} H_k \varphi(x).$$

Область определения оператора  $H_k$  совпадает с подпространством

$$D(H_k) = \left\{ \varphi(x) = \sum_{\gamma' \in \Gamma'} c_{\gamma'} e^{i(\gamma', x)} : \sum_{\gamma' \in \Gamma'} (1 + |\gamma'|^2) |c_{\gamma'}|^2 < \infty \right\}.$$

Оператор  $H_k$  имеет дискретный спектр, а его собственные функции  $\varphi_{jk}$  образуют полную ортогональную систему в пространстве  $\mathcal{H}_0 = L^2(\mathbb{R}^d/\Gamma)$ .

Спектр оператора Шредингера  $H$  состоит из конечного числа непересекающихся интервалов

$$\sigma(H) = [c_1, d_1] \cup [c_2, d_2] \cup \dots \cup [c_l, d_l] \cup [c_{l+1}, +\infty),$$

и собственные функции Блоха образуют полную ортогональную систему обобщенных собственных функций оператора  $H$ .

### 3. МАГНИТНАЯ ТЕОРИЯ БЛОХА

Предположим, что задана вещественная замкнутая 2-форма  $B$  в  $\mathbb{R}^d$ , инвариантная относительно группы  $\Gamma$ . Эта форма будет играть роль магнитного поля. Тогда

$$B = dA$$

для некоторой вещественной 1-формы  $A$ , играющей роль электромагнитного векторного потенциала.

*Магнитный оператор Шредингера* — это оператор вида

$$H = -(d + iA)^*(d + iA) + V.$$

Как и в периодическом случае, мы можем построить операторы, называемые магнитными операторами сдвига, которые коммутируют с магнитным оператором Шредингера. А именно, т. к. магнитная форма  $B$  инвариантна относительно  $\Gamma$ , имеем:

$$0 = B - \gamma \cdot B = d(A - \gamma \cdot A)$$

для некоторого  $\gamma \in \Gamma$ . Иначе говоря, 1-форма  $A - \gamma \cdot A$  замкнута, откуда следует, что она может быть представлена в виде

$$A - \gamma \cdot A = dh_\gamma,$$

где  $h_\gamma$  — гладкие вещественные функции, определенные с точностью до константы.

Магнитный оператор Шредингера  $H$  инвариантен относительно *магнитных сдвигов* вида

$$T_\gamma : f \longmapsto T_\gamma f = e^{ih_\gamma} \gamma \cdot f.$$

В отличие от периодического случая, магнитные сдвиги  $T_\gamma$  удовлетворяют соотношениям

$$T_{\gamma_1} T_{\gamma_2} = \sigma(\gamma_1, \gamma_2) T_{\gamma_1 \gamma_2}, \text{ где } \sigma(\gamma_1, \gamma_2) \in U(1).$$

Иначе говоря, они определяют унитарное проективное представление группы  $\Gamma$  в пространстве  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Если форма  $A$  периодична относительно  $\Gamma$ , то это проективное представление переходит в прямое представление.

### 4. $C^*$ -АЛГЕБРЫ НАБЛЮДАЕМЫХ

При обычных предположениях о потенциале  $V$  (например,  $V = |df|^2$ , где  $f$  — функция Морса в  $\mathbb{R}^d$ , инвариантная относительно  $\Gamma$ ) магнитный оператор Шредингера  $H$  является самосопряженным эллиптическим оператором второго порядка в  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Его спектральные проекторы — это ограниченные операторы в  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , коммутирующие с магнитными сдвигами  $T_\gamma$ .

Это наблюдение мотивирует введение следующей операторной алгебры, связанной с  $H$ :

$$\mathcal{A}(\sigma) = \{A \text{ — ограниченный оператор в } L^2(\mathbb{R}^d), \text{ коммутирующий с } T_\gamma \text{ для любого } \gamma \in \Gamma\}.$$

Мы дадим интерпретацию этой алгебры, которая полностью определяет оператор  $H$ , в терминах группового кольца фон Неймана.

Имея проективное представление  $T$  группы  $\Gamma$ , можно построить естественное левое проективное представление  $T^L$  этой группы в пространстве  $\ell^2(\Gamma)$ , действующее по правилу:

$$T_\gamma^L f(\gamma') = f(\gamma^{-1}\gamma') \bar{\sigma}(\gamma, \gamma^{-1}\gamma'), \quad \gamma, \gamma' \in \Gamma.$$

Это представление порождает *правое групповое кольцо фон Неймана*  $\mathfrak{a}^R(\sigma)$ :

$$\mathfrak{a}^R(\sigma) = \{A \text{ — ограниченный оператор в } \ell^2(\Gamma), \text{ коммутирующий с } T_\gamma^L \text{ при всех } \gamma \in \Gamma\}.$$

Аналогичным образом можно построить *левое групповое кольцо фон Неймана*  $\mathfrak{a}^L(\bar{\sigma})$ , связанную с правым проективным представлением  $T^R$  группы  $\Gamma$  в пространстве  $\ell^2(\Gamma)$ . Это представление задается формулой

$$T_\gamma^R f(\gamma') = f(\gamma'\gamma)\sigma(\gamma, \gamma'), \quad \gamma, \gamma' \in \Gamma,$$

и *левое групповое кольцо фон Неймана*, определенное этим представлением, задается как

$$\mathfrak{a}^L(\bar{\sigma}) = \{A \text{ — ограниченный оператор в } \ell^2(\Gamma), \text{ коммутирующий с } T_\gamma^R \text{ при всех } \gamma \in \Gamma\}.$$

Алгебра  $\mathfrak{a}^R(\sigma)$  порождена операторами  $\{T_\gamma^R : \gamma \in \Gamma\}$ , а алгебра  $\mathfrak{a}^L(\bar{\sigma})$  порождена операторами  $\{T_\gamma^L : \gamma \in \Gamma\}$ .

В пространстве  $\ell^2(\Gamma)$  существует естественный ортонормальный базис  $\{\delta_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ , задаваемый дельта-функцией Кронекера

$$\delta_\gamma(\gamma') = \begin{cases} 1 & \text{при } \gamma' = \gamma, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определим *след* на введенных групповых кольцах по формуле

$$\text{tr}_\mathfrak{a} A := (A\delta_e, \delta_e),$$

где  $e$  — единичный элемент  $\Gamma$ .

Функции  $\{\delta_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  порождают *групповое кольцо*  $\mathcal{C}_0(\sigma)$ , состоящее из комплекснозначных финитных функций на  $\Gamma$ , снабженное операцией свертки в виде

$$(f * g)(\gamma) = \sum_{\gamma_1 \gamma_2 = \gamma} \sigma(\gamma_1, \gamma_2) f(\gamma_1) g(\gamma_2).$$

Отображения  $\gamma \mapsto T_\gamma^L$ ,  $\gamma \mapsto T_\gamma^R$  определяет представление групповых колец  $\mathcal{C}_0(\bar{\sigma})$  и  $\mathcal{C}_0(\sigma)$  соответственно в пространстве  $\ell^2(\Gamma)$ . Слабое пополнение образов этих отображений в пространстве  $\mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$  ограниченных операторов в  $\ell^2(\Gamma)$  совпадает соответственно с алгебрами фон Неймана  $\mathfrak{a}^L(\bar{\sigma})$  и  $\mathfrak{a}^R(\sigma)$ , введенными выше. Пополнение этих образов в равномерной операторной топологии совпадает с  $C^*$ -алгебрами, обозначаемыми соответственно  $\mathcal{C}(\bar{\sigma})$  и  $\mathcal{C}(\sigma)$ .

Можно также определить *групповые кольца фон Неймана с коэффициентами в произвольном комплексном гильбертовом пространстве*  $\mathcal{H}$ . Для этого мы просто продолжим проективные представления  $T^L$  and  $T^R$ , действующие в пространстве  $\ell^2(\Gamma)$ , до тензорного произведения  $\ell^2(\Gamma) \otimes \mathcal{H}$ , так что

$$\mathfrak{a}_{\mathcal{H}}^L(\bar{\sigma}) = \mathfrak{a}^L(\bar{\sigma}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad \mathfrak{a}_{\mathcal{H}}^R(\sigma) = \mathfrak{a}^R(\sigma) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Произвольный оператор  $A \in \mathfrak{a}_{\mathcal{H}}^L(\bar{\sigma})$  представляется в виде (см. [6]):

$$A = \sum_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma^L \otimes A(\gamma),$$

где  $A(\gamma)$  — ограниченный оператор в  $\mathcal{H}$  и ряд с правой стороны сходится в сильной операторной топологии.

Определим *след* на введенных алгебрах  $\mathfrak{a}_{\mathcal{H}}^L(\bar{\sigma})$  и  $\mathfrak{a}_{\mathcal{H}}^R(\sigma)$ , положив

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}} := \text{tr}_\mathfrak{a} \otimes \text{Tr},$$

где  $\text{Tr}$  обозначает обычный след на алгебре  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  всех ограниченных операторов, принимающий конечные значения на ядерных операторах.

Мы готовы дать интерпретацию алгебры  $\mathcal{A}(\sigma)$  ограниченных операторов в пространстве  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , коммутирующих с магнитными сдвигами, в терминах групповых колец фон Неймана.

Для этого обозначим через  $F$  фундаментальную область группы  $\Gamma$  и рассмотрим гильбертово пространство

$$\mathcal{H} := L^2(F)$$

квадратично интегрируемых функций на этой области. Тогда отображение

$$W : f \mapsto W(f) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_\gamma \otimes i^*(T_\gamma f),$$

где  $i : F \hookrightarrow \mathbb{R}^d$  — естественное включение, определяет изометрию пространства  $L^2(\mathbb{R}^d)$  на пространство  $\ell^2(\Gamma) \otimes \mathcal{H}$ . Эта изометрия порождает изоморфизм алгебры  $\mathcal{A}(\sigma)$  с алгеброй  $\mathfrak{a}_{\mathcal{H}}^L(\bar{\sigma})$ .

Используя построенное отображение, мы можем перенести след  $\text{Tr}_{\mathcal{H}}$  из алгебры  $\mathfrak{a}_{\mathcal{H}}^L(\bar{\sigma})$  в алгебру  $\mathcal{A}(\sigma)$ . При таком определении спектральные проекторы  $E(\lambda)$  магнитного оператора Шредингера  $H$  будут иметь конечный след, а тогда *спектральная плотность*

$$N_H(\lambda) = \text{Tr}_{\mathcal{H}} E(\lambda)$$

корректно определена. Спектр оператора Шредингера  $H$  состоит из точек роста этой функции.

Выберем в качестве *алгебры наблюдаемых*  $C^*$ -алгебру

$$\mathcal{C}(\bar{\sigma}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}),$$

где  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  — алгебра всех компактных операторов, действующих в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ . Эта алгебра совпадает с пополнением по равномерной норме алгебраического тензорного произведения алгебры  $\mathcal{C}_0(\bar{\sigma})$ , определенной выше, и алгебры  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ . В частности, она содержит все операторы  $A \in \mathfrak{a}_{\mathcal{H}}^L(\bar{\sigma})$  вида

$$A = \sum_{\gamma \in \Gamma} T_{\gamma}^L \otimes A(\gamma)$$

с коэффициентами  $A(\gamma) \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ , для которых ряд  $\sum_{\gamma} \|A(\gamma)\| < \infty$  сходится.

## 5. Когомология Хохшильда

Пространство  $C^k(\mathfrak{a})$  — *цепной  $k$ -комплекс Хохшильда* алгебры  $\mathfrak{a}$  — состоит из  $(k+1)$ -линейных функционалов на этой алгебре. Определим *кограничный оператор*

$$b_k : C^k(\mathfrak{a}) \longrightarrow C^{k+1}(\mathfrak{a})$$

формулой

$$b_k \phi(a_0, \dots, a_{k+1}) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \phi(a_0, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_{k+1}) + (-1)^{k+1} \phi(a_{k+1} a_0, \dots, a_k).$$

Коцепь Хохшильда  $\phi \in C^k(\mathfrak{a})$  называется *циклической*, если

$$\phi(a_0, \dots, a_k) = (-1)^k \phi(a_k, a_0, \dots, a_{k-1}).$$

*Когомологии Хохшильда* алгебры  $\mathfrak{a}$  определяются как

$$H^k(\mathfrak{a}) = \text{Ker } b_k / \text{Im } b_{k-1}.$$

Приведем конструкцию циклических коциклов алгебры наблюдаемых. Эти коциклы могут быть построены из любого коцикла  $\varphi$  группы  $\Gamma$ , удовлетворяющего следующему условию нормализации:  $\varphi(\gamma_1, \dots, \gamma_k) = 0$ , если хотя бы один элемент  $\gamma_i$  или произведение  $\gamma_1 \dots \gamma_k$  равны единице.

Из такого коцикла  $\varphi$  можно получить циклический коцикл  $\tau_{\varphi}$  на алгебре  $\mathcal{C}_0(\bar{\sigma})$ , заданный на базисных функциях формулами

$$\tau_{\varphi}(\delta_{\gamma_0}, \dots, \delta_{\gamma_k}) = \begin{cases} \varphi(\gamma_1, \dots, \gamma_k) \text{tr}_{\mathfrak{a}}(\delta_{\gamma_0} * \dots * \delta_{\gamma_k}), & \text{если } \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_k = e, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Построенный коцикл  $\tau_{\varphi}$  может быть продолжен до циклического коцикла  $\tau_{\varphi} \otimes \text{Tr}$ , определенного на гладкой подалгебре  $\mathcal{C}_0(\bar{\sigma}) \otimes \mathcal{S}$  алгебры наблюдаемых  $\mathcal{C}(\bar{\sigma}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$  (см., например, [6]), полагая

$$\tau_{\varphi} \otimes \text{Tr}(a_0, \dots, a_k) = \sum_{\gamma_0 \dots \gamma_k = e} \text{Tr}(a_0(\gamma_0) \dots a_k(\gamma_k)) \tau_{\varphi}(\delta_{\gamma_0}, \dots, \delta_{\gamma_k}),$$

где  $a_i = \sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_{\gamma} \otimes a_i(\gamma) \in \mathcal{C}_0(\bar{\sigma}) \otimes \mathcal{S}$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ .

## 6. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КВАНТОВОГО ЭФФЕКТА ХОЛЛА

*Классический эффект Холла* описывает следующее физическое явление. Поместим тонкую прямоугольную металлическую пластину (лежащую в плоскости  $(xy)$ ) в постоянное однородное магнитное поле  $\vec{B}$ , направленное вдоль оси  $(z)$ . Если пустить электрический ток  $J_x$  в направлении оси  $(x)$ , то в направлении оси  $(y)$  возникнет разность потенциалов  $V_y$  в соответствии с выражением

$$V_y = \frac{J_x}{\sigma_H},$$

где величина

$$\sigma_H = \frac{ne\delta}{B}$$

называется *проводимостью Холла* (здесь  $n$  — плотность электронов,  $\delta$  — толщина пластины).

Проводимость Холла обычно описывается следующим безразмерным выражением:

$$\nu = \frac{n\delta h}{eB},$$

называемым *степенью наполнения*, таким, что

$$\sigma_H = \frac{\nu}{R_H},$$

где  $R_H = h/e^2$  — *сопротивление Холла*.

В соответствии с последней формулой график зависимости проводимости Холла  $\sigma_H$  в зависимости от степени наполнения  $\nu$  — прямая. Однако в квантовом случае (который реализуется при очень низких температурах порядка  $1^\circ K$ ) на этом графике наблюдаются горизонтальные «плато», соответствующие целым значениям  $\sigma_H$  (в единицах  $e^2/h$ ), что означает, иными словами, что проводимость Холла «квантуется».

Начиная с первых теоретических работ по квантовому эффекту Холла [7, 8], стало ясно, что этот эффект имеет топологическую природу. Его объяснение в духе некоммутативной геометрии было предложено в работах Беллссара и др. [1] и Ксиа [9]. Основная идея заключалась в том, что при введении магнитного поля нужно заменить классическую теорию Блоха некоммутативным аналогом, который может быть исследован в некоммутативной геометрии.

Чтобы применить разработанные методы некоммутативной геометрии к математическому описанию квантового эффекта Холла, мы выбрали базис в пространстве  $L^2(F)$ , состоящий из собственных функций Блоха  $\{\psi_j\}$ , и зафиксировали унитарный изоморфизм  $L^2(F) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ , сопоставляя функциям  $\psi_j$  функции  $\delta_j$ . С другой стороны, у нас есть унитарный изоморфизм  $L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow \ell^2(\Gamma) \otimes L^2(F)$ , построенный выше.

Композиция двух унитарных изоморфизмов дает унитарный изоморфизм

$$U : L^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \ell^2(\Gamma) \otimes \ell^2(\mathbb{N}),$$

порождая изоморфизм алгебры  $\mathcal{A}(\sigma)$  и алгебры  $\mathfrak{a}_{\mathcal{H}}^L(\bar{\sigma})$ , где  $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ .

Обозначим через  $\partial_1 = \partial_x$  (соответственно  $\partial_2 = \partial_y$ ) оператор дифференцирования алгебры наблюдаемых  $\mathcal{C}(\bar{\sigma}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$ . Тогда для произвольного оператора  $T_0, T_1, T_2 \in \mathcal{C}(\bar{\sigma}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$  мы можем определить следующий циклический 2-коцикл

$$c(T_0, T_1, T_2) = \text{Tr}_{\mathcal{H}}(T_0[\partial_1 T_1, \partial_2 T_2]),$$

называемый *коциклом Холла*.

Он будет совпадать с циклическим коциклом  $\tau_\varphi \otimes \text{Tr}$ , введенным ранее, если мы возьмем в качестве 2-коцикла  $\varphi : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  на группе  $\Gamma$  коцикл

$$\varphi(\gamma_1, \gamma_2) = \text{площадь треугольника } \Delta(\gamma_1, \gamma_2) \text{ с вершинами в точках } O, \gamma_1 \cdot O, \gamma_2 \cdot O.$$

Чтобы из этой формулы получить выражение проводимости Холла, нужно заменить операторы дифференцирования  $\partial_j$  ковариантными производными  $\partial_{A,j}$ , и взять в качестве операторов  $T_0 = T_1 = T_2 = P_F$  спектральный проектор на *уровень Ферми*. Тогда мы получим следующую *формулу Кубо—Черна* для проводимости Холла:

$$\sigma_H = \frac{e^2}{h} \frac{1}{2\pi i} \text{Tr}_{\mathcal{H}}(P_F[\partial_{A,1} P_F, \partial_{A,2} P_F]),$$

где величина

$$\text{Ch}(P_F) = \frac{1}{2\pi i} \text{Tr}_{\mathcal{H}} (P_F [\partial_{A,1} P_F, \partial_{A,2} P_F])$$

называется *характеристикой Черна* проектора  $P_F$ . Это целочисленный топологический инвариант, отвечающий за явление квантового эффекта Холла.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bellissard J., van Elst A., Schulz-Baldes H. The noncommutative geometry of the quantum Hall effect// *J. Math. Phys.* — 1994. — 35. — С. 5373–5451.
2. Berezin F. A., Shubin V. A. The Schrödinger equation. — Boston: Kluwer, 1991.
3. Connes A. Noncommutative geometry. — San Diego: Academic Press, 1994.
4. Gruber M. Noncommutative Bloch theory// *J. Math. Phys.* — 2001. — 42. — С. 2438–2465.
5. Husemoller D. Fibre bundles. — New York: Springer, 1994.
6. Kordyukov Yu., Mathai V., Shubin M. A. Equivalence of spectral properties in semiclassical limit and a vanishing theorem for higher traces in K-theory// *J. Reine Angew. Math.* — 2005. — 581. — С. 193–236.
7. Laughlin B. Quantized Hall conductivity in two dimensions// *Phys. Rev.* — 1981. — B23. — С. 5232.
8. Thouless D. J., Kohmono M., Nightingale M. P., den Nijs M. Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential// *Phys. Rev. Lett.* — 1982. — 49. — С. 405–408.
9. Xia J. Geometric invariants of the quantum Hall effect// *Commun. Math. Phys.* — 1988. — 119. — С. 29–50.

А. Г. Сергеев

Математический институт им. В. А. Стеклова, Москва, Россия

E-mail: sergeev@mi.ras.ru

UDC 517.984.5

## Magnetic Schrödinger Operator from the Point of View of Noncommutative Geometry

© 2016 A. G. Sergeev

**Abstract.** We give an interpretation of magnetic Schrödinger operator in terms of noncommutative geometry. In particular, spectral properties of this operator are reformulated in terms of  $C^*$ -algebras. Using this reformulation, one can employ the machinery of noncommutative geometry, such as Hochschild cohomology, to study the properties of magnetic Schrödinger operator. We show how this idea can be applied to the integer quantum Hall effect.

### REFERENCES

1. J. Bellissard, A. van Elst, and H. Schulz-Baldes, “The noncommutative geometry of the quantum Hall effect,” *J. Math. Phys.*, 1994, **35**, 5373–5451.
2. F. A. Berezin and V. A. Shubin, *The Schrödinger Equation*, Kluwer, Boston, 1991.
3. A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, San Diego, 1994.
4. M. Gruber, “Noncommutative Bloch theory,” *J. Math. Phys.*, 2001, **42**, 2438–2465.
5. D. Husemoller, *Fibre Bundles*, Springer, New York, 1994.
6. Yu. Kordyukov, V. Mathai, and M. A. Shubin, “Equivalence of spectral properties in semiclassical limit and a vanishing theorem for higher traces in K-theory,” *J. Reine Angew. Math.*, 2005, **581**, 193–236.
7. B. Laughlin, “Quantized Hall conductivity in two dimensions,” *Phys. Rev.*, 1981, **B23**, 5232.
8. D. J. Thouless, M. Kohmono, M. P. Nightingale, and M. den Nijs, “Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential,” *Phys. Rev. Lett.*, 1982, **49**, 405–408.
9. J. Xia, “Geometric invariants of the quantum Hall effect,” *Commun. Math. Phys.*, 1988, **119**, 29–50.

A. G. Sergeev

Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia

E-mail: sergeev@mi.ras.ru