

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ



СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ  
НАПРАВЛЕНИЯ

Том 68, № 3, 2022

Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-3

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Научный журнал  
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)  
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.  
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

---

**Главный редактор**

*Р. В. Гамкрелидзе,*

д.ф.-м.н., профессор,  
академик РАН,

Математический институт им.  
В. А. Стеклова РАН (Москва,  
Россия)

**E-mail:** gam@mi.ras.ru

**Зам. главного редактора**

*А. Л. Скубачевский,*

д.ф.-м.н., профессор,  
Российский университет

дружбы народов (Москва,  
Россия)

**E-mail:** skubachevskii-al@rudn.ru

**Ответственный секретарь**

*Е. М. Варфоломеев,*

к.ф.-м.н.,

Российский университет  
дружбы народов (Москва,  
Россия)

**E-mail:** varfolomeev-em@rudn.ru

**Члены редакционной коллегии**

*А. А. Азгачев,* д.ф.-м.н., профессор, Международная школа передовых исследований (SISSA) (Триест, Италия), Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (Москва, Россия)

*П. С. Красильников,* д.ф.-м.н., профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (Москва, Россия)

*А. Б. Муравник,* д.ф.-м.н., Российский университет дружбы народов (Москва, Россия); ОАО «Концерн «Созвездие» (Воронеж, Россия)

*А. В. Овчинников,* к.ф.-м.н., доцент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (Москва, Россия); Всероссийский институт научной и технической информации РАН (Москва, Россия)

*В. Л. Попов,* д.ф.-м.н., профессор, член-корр. РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (Москва, Россия)

*А. В. Сарычев,* д.ф.-м.н., профессор, Флорентийский университет (Флоренция, Италия)

## Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print)

4 выпуска в год

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.

Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.

Индексируется в международных базах данных научных публикаций *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.

Полный текст журнала размещен в базах данных компании *EBSCO Publishing* на платформе *EBSCOhost*.

Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences (New York)*.

### Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты. Объем статьи, занимающий целый том, должен составлять 140–190 страниц в стиле нашего журнала.

Правила оформления статей, архив публикаций и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала: <http://journals.rudn.ru/cmfd>, <http://www.mathnet.ru/cmfd>.

---

**Редактор: Е. М. Варфоломеев**

**Компьютерная верстка: Е. М. Варфоломеев**

**Адрес редакции:**

115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3  
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: [cmfdj@rudn.ru](mailto:cmfdj@rudn.ru)

Подписано в печать 04.07.2022. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.

Усл. печ. л. 19,53. Тираж 110 экз. Заказ 843.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Российский университет дружбы народов» (РУДН)

117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

**Отпечатано в типографии ИПК РУДН**

115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3

тел. +7 495 952-04-41; e-mail: [publishing@rudn.ru](mailto:publishing@rudn.ru)

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)



CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 68, No. 3, 2022

Proceedings of the Crimean Autumn Mathematical School-Symposium

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-3

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Founded in 2003

Founder: PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA

---

**EDITOR-IN-CHIEF**

*Revaz Gamkrelidze*,  
Steklov Mathematical Institute of  
Russian Academy of Sciences  
(Moscow, Russia)  
**E-mail:** gam@mi.ras.ru

**DEPUTY EDITOR**

*Alexander Skubachevskii*,  
RUDN University  
(Moscow, Russia)  
**E-mail:** skubachevskii-al@rudn.ru

**EXECUTIVE SECRETARY**

*Evgeniy Varfolomeev*,  
RUDN University  
(Moscow, Russia)  
**E-mail:** varfolomeev-em@rudn.ru

**EDITORIAL BOARD**

*Andrei Agrachev*, International School for Advanced Studies (SISSA) (Trieste, Italy), Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia)

*Pavel Krasil'nikov*, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

*Andrey Muravnik*, RUDN University (Moscow, Russia); JSC "Concern "Sozvezdie" (Voronezh, Russia)

*Alexey Ovchinnikov*, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russia); Russian Institute for Scientific and Technical Information of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia)

*Vladimir Popov*, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia)

*Andrei Sarychev*, University of Florence (Florence, Italy)

**CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS**  
Published by the Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University),  
Moscow, Russian Federation

**ISSN 2413-3639 (print)**

4 issues per year

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Reviewed in *MathSciNet* and *Zentralblatt Math*.

The full texts can be found in the *EBSCOhost* databases by *EBSCO Publishing*.

Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences (New York)*.

**Aims and Scope**

*Contemporary Mathematics. Fundamental Directions* is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results. Occupying the whole volume, an article should make up 140–190 pages in the format of the journal.

Guidelines for authors, archive of issues, and other information can be found at the journal's website: <http://journals.rudn.ru/cmfd>, <http://www.mathnet.ru/eng/cmfd>.

---

**Editor: E. M. Varfolomeev**  
**Computer design: E. M. Varfolomeev**

**Address of the Editorial Office:**  
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia  
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: [cmfdj@rudn.ru](mailto:cmfdj@rudn.ru)

Print run 110 copies.

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia  
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

**Printed at RUDN Publishing House:**  
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia  
Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: [publishing@rudn.ru](mailto:publishing@rudn.ru)

## СОДЕРЖАНИЕ

О пространствах вектор-функций, голоморфных в угловой области ( <i>В. В. Власов, Н. А. Раутиан</i> ) . . . . .	393
Порядковое проектирование в $\mathcal{O}A_r(E, F)$ ( <i>Н. А. Джусоева, С. Ю. Итарова, М. А. Плиев</i> ) . . . . .	407
Хаос в топологических слоениях ( <i>Н. И. Жукова, Г. С. Левин, Н. С. Тоньшева</i> ) . . . . .	424
Асимптотическое поведение решений полного интегро-дифференциального уравнения второго порядка ( <i>Д. А. Загора</i> ) . . . . .	451
Топологическая сопряженность градиентно-подобных потоков на поверхностях и эффективные алгоритмы ее различения ( <i>В. Е. Круглов, О. В. Починка</i> ) . . . . .	467
Оптимальное управление поведением решений начально-краевой задачи, возникающей в механике дискретно-континуальных систем ( <i>Е. П. Кубышкин</i> ) . . . . .	488
Мультистабильность для математической модели динамики хищников и жертв на неоднородном ареале ( <i>Т. Д. Ха, В. Г. Цибулин</i> ) . . . . .	509
Модели самосопряженных и унитарных операторов в пространствах Понтрягина ( <i>В. А. Штраус</i> ) . . . . .	522

## CONTENTS

On Spaces of Vector Functions that Are Holomorphic in an Angular Domain ( <i>V. V. Vlasov, N. A. Rautian</i> ) . . . . .	393
Order Projection in $\mathcal{O}\mathcal{A}_r(E, F)$ ( <i>N. A. Dzhusoeva, S. Yu. Itarova, M. A. Pliev</i> ) . . . . .	407
Chaos in Topological Foliations ( <i>N. I. Zhukova, G. S. Levin, N. S. Tonysheva</i> ) . . . . .	424
Asymptotic Behavior of Solutions of a Complete Second-Order Integro-Differential Equation ( <i>D. A. Zakora</i> ) . . . . .	451
Topological Conjugacy of Gradient-Like Flows on Surfaces and Efficient Algorithms for Its Distinguition ( <i>V. E. Kruglov, O. V. Pochinka</i> ) . . . . .	467
Optimal Control of the Behavior of Solutions to an Initial-Boundary Value Problem Arising in the Mechanics of Discrete-Continuum Systems ( <i>E. P. Kubyshkin</i> ) . . . . .	488
Multistability for a Mathematical Model of the Dynamics of Predators and Preys in a Heterogeneous Area ( <i>T. D. Ha, V. G. Tsybulin</i> ) . . . . .	509
Models of Self-Adjoint and Unitary Operators in Pontryagin Spaces ( <i>V. A. Strauss</i> ) . . . . .	522

## О ПРОСТРАНСТВАХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ

© 2022 г. В. В. ВЛАСОВ, Н. А. РАУТИАН

Аннотация. Изучаются пространства вектор-функций, голоморфных в угловой области комплексной плоскости, со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве. Показано, что, снабженные соответствующими нормами, указанные пространства являются гильбертовыми пространствами.

### ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение . . . . .		393
2. Функциональные пространства и их основные свойства . . . . .		393
3. Доказательства некоторых сформулированных утверждений о свойствах функциональных пространств $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ и $W_2^n(S_\theta, A^n)$ . . . . .		397
Список литературы . . . . .		405

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В статье изучаются пространства вектор-функций со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве, голоморфные в угловой области комплексной плоскости.

### 2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

**2.1. Определения, обозначения и формулировка результатов.** В работе М. М. Джрбашяна и В. М. Мартиросяна [5], а также в монографии М. М. Джрбашяна [4] изучен класс функций  $\mathfrak{R}_2(S_\theta)$ , голоморфных в угловой области

$$S_\theta = \{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta\}$$

и таких, что

$$\sup_{\varphi: |\varphi| < \theta} \left\{ \int_0^\infty |f(te^{i\varphi})|^2 dt \right\} < \infty.$$

В [4, 5] установлено, что, снабженное соответствующей нормой,  $\mathfrak{R}_2[\theta]$  является гильбертовым пространством, и для него доказана теорема типа Пэли–Винера.

В предлагаемой работе исследуются классы  $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$  и  $W_2^n(S_\theta, A^n)$  функций со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$ , голоморфных в области  $S_\theta$ .

---

Работа выполнена в рамках Программы развития Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Математические методы анализа сложных систем» при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований РФФИ (проект № 20-01-00288 А).



В предлагаемой работе исследуются классы  $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$  и  $W_2^n(S_\theta, A^n)$  функций со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$ , голоморфных в области  $S_\theta$ . При этом класс  $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$  состоит из вектор-функций, для которых конечна величина

$$\sup_{\varphi: |\varphi| < \theta} \int_0^\infty \|f(te^{i\varphi})\|^2 dt < \infty,$$

а класс  $W_2^n(S_\theta, A^n)$  — из вектор-функций, для которых

$$u(\tau) \in \text{Dom}(A^n), \quad \frac{d^n u}{d\tau^n} \in \mathfrak{R}_2(S_\theta, H), \quad A^n u(\tau) \in \mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$$

и конечна величина

$$\sup_{\varphi: |\varphi| < \theta} \int_0^\infty \left( \left\| \frac{d^n}{d\tau^n} u(te^{i\varphi}) \right\|^2 + \|A^n u(te^{i\varphi})\|^2 \right) dt < \infty,$$

где  $A$  — самосопряженный положительный оператор в пространстве  $H$ , имеющий компактный обратный, при этом  $\frac{d^n u(\tau)}{d\tau^n}$  — производная в смысле комплексного анализа. Здесь и в дальнейшем через  $\|\cdot\|$  обозначается норма в пространстве  $H$ .

В работе доказано, что класс  $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ , снабженный соответствующей нормой, образует гильбертово пространство, а также установлен аналог теоремы Пэли—Винера для пространства  $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ . Показано, что класс функций  $W_2^n(S_\theta, A^n)$ , снабженный соответствующей нормой, является гильбертовым пространством, установлен аналог теоремы о промежуточных производных и теоремы о следах.

Условимся в дальнейшем называть *функцией* (без добавления слова «вектор») функцию со значениями в пространстве  $H$ , а функцию со значениями в  $\mathbb{C}$  называть *скалярной*, или *числовой*, функцией.

Обозначим через  $L_2(\mathbb{R}_+, H)$  пространство (классов) функций со значениями в  $H$ , измеримых относительно меры Лебега  $dt$  на полуоси  $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$  и таких, что

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}, H)} = \left( \int_0^{+\infty} \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2} < +\infty.$$

Пусть  $A$  — самосопряженный положительный оператор  $A^* = A \geq \kappa I$  ( $\kappa > 0$ ), действующий в пространстве  $H$ , имеющий компактный обратный. Превратим область определения  $\text{Dom}(A^\beta)$  оператора  $A^\beta$ ,  $\beta > 0$ , в гильбертово пространство  $H_\beta$ , введя на  $\text{Dom}(A^\beta)$  норму  $\|\cdot\|_\beta = \|A^\beta \cdot\|$ , эквивалентную норме графика оператора  $A^\beta$ .

Через  $W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$  обозначим пространство Соболева функций на полуоси  $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$  со значениями в пространстве  $H$ , снабженное нормой

$$\|u\|_{W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)} \equiv \left( \int_0^{+\infty} \left( \|u^{(n)}(t)\|_H^2 + \|A^n u(t)\|_H^2 \right) dt \right)^{1/2}.$$

Подробнее о пространствах  $W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$  см. монографию [6, гл. 1]. Для  $n = 0$  полагаем  $W_2^0(\mathbb{R}_+, A^0) \equiv L_2(\mathbb{R}_+, H)$ . Будем также полагать в дальнейшем, что  $\mathfrak{R}_2(S_0, H) = L_2(\mathbb{R}_+, H)$ ,  $W_2^n(S_0, A^n) = W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ .

Укажем основные свойства пространства  $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ .

**Предложение 2.1.** Для функции  $f(\tau) \in \mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$  существуют такие граничные значения  $f(te^{\pm\theta}) \in L_2(\mathbb{R}_+, H)$ , что

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm\theta} \|f(te^{i\varphi}) - f(te^{\pm i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)} = 0. \tag{2.1}$$

**Предложение 2.2.** Пусть функция  $f(\tau) \in \mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ . Тогда для функции  $f(\tau)$  справедлива интегральная формула Коши

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{f(\zeta e^{-i\theta})}{\zeta e^{-i\theta} - \tau} e^{-i\theta} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{f(\zeta e^{i\theta})}{\zeta e^{i\theta} - \tau} e^{i\theta} d\zeta, \tau \in S_\theta. \quad (2.2)$$

**Предложение 2.3.** Пусть функции  $f_{\pm\theta} \in L_2(\mathbb{R}_+, H)$ . Тогда функция  $f(\tau)$ , представимая в виде

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} e^{-i\theta} \frac{f_{-\theta}(\zeta)}{\zeta e^{-i\theta} - \tau} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} e^{i\theta} \frac{f_\theta(\zeta)}{\zeta e^{i\theta} - \tau} d\zeta, \tau \in S_\theta, \quad (2.3)$$

принадлежит классу  $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ .

На основании предложений 2.1–2.3 может быть установлена следующая теорема.

**Теорема 2.1.**

1<sup>0</sup>. Класс функций  $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$  с нормой

$$\|f\|_{2,\theta}^* = \sup_{\varphi: |\varphi| < \theta} \left\{ \int_0^{+\infty} \|f(te^{i\varphi})\|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.4)$$

является банаховым пространством.

2<sup>0</sup>. Класс функций  $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$  со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle_{2,\theta} = \int_0^{+\infty} (f(te^{-i\theta}), g(te^{-i\theta})) dt + \int_0^{+\infty} (f(te^{i\theta}), g(te^{i\theta})) dt \quad (2.5)$$

является гильбертовым пространством.

3<sup>0</sup>. Если  $f(\tau)$  — произвольная функция из класса  $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$  и

$$\|f\|_{2,\theta} = \langle f(\tau), f(\tau) \rangle_{2,\theta}, \quad (2.6)$$

то справедливы неравенства

$$\|f\|_{2,\theta}^* \leq \sqrt{2} \|f\|_{2,\theta} \leq 2 \|f\|_{2,\theta}^*. \quad (2.7)$$

Приведем теорему, являющуюся аналогом теоремы Пэли–Винера для классов функций  $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ .

**Теорема 2.2.** Пусть  $\theta \in (0, \pi/2)$ . Справедливы следующие утверждения:

1<sup>0</sup>. Класс функций  $\mathfrak{R}_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$  совпадает с множеством функций, допускающих представление

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\varphi} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t e^{-i\varphi}} f(te^{-i\varphi}) dt, |\arg \lambda - \varphi| < \frac{\pi}{2}, \varphi \in (-\theta, \theta), \quad (2.8)$$

$f(\tau) \in \mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ .

2<sup>0</sup>. В представлении (2.8) для каждой фиксированной функции  $F(\lambda) \in \mathfrak{R}_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$  функция  $f(\tau) \in \mathfrak{R}_{2,\theta}(\mathbb{R}_+, H)$  единственна, и справедлива формула обращения

$$f(te^{i\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\varphi} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ity} - 1}{iy} F\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2} \text{sign } y - \varphi\right)} |y|\right) dy. \quad (2.9)$$

3<sup>0</sup>. Если функция  $F(\lambda) \in \mathfrak{R}_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$  представима функцией  $f(\tau) \in \mathfrak{R}_{2,\theta}(\mathbb{R}_+, H)$  по формуле (2.8), то справедливы неравенства

$$\|F\|_{2,\theta+\pi/2} \leq 2 \|f\|_{2,\theta} \leq 2\sqrt{2} \|F\|_{2,\theta+\pi/2}. \quad (2.10)$$

Уместно отметить, что при  $\theta = 0$  теорема 2.2 переходит в хорошо известную теорему Пэли–Винера для пространства  $L_2(\mathbb{R}_+, H)$  и пространства Харди в правой полуплоскости  $\mathfrak{R}_2(\operatorname{Re} \lambda > 0; H)$ . Соответствующий комментарий по этому поводу в скалярном случае приведен в статье [5].

Перейдем к рассмотрению и изучению аналогов пространств Соболева  $W_2^n(S_\theta, A^n)$  вектор-функций, голоморфных в угле  $S_\theta$ . Условимся в дальнейшем обозначать через  $\frac{du}{d\tau}(\tau)$  производную функции  $u(\tau)$  в смысле комплексного анализа. Поскольку

$$\frac{d^k}{d\tau^k} u(\tau) = e^{-ik\varphi} \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(te^{i\varphi}), \quad |e^{ik\varphi}| = 1, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.11}$$

то класс функций  $W_2^n(S_\theta, A^n)$  совпадает с классом функций, голоморфных в угле  $S_\theta$  и таких, что конечна величина

$$\|u\|_{W_{n,\theta}}^* \equiv \sup_{\varphi: |\varphi| < \theta} \left\{ \int_0^{+\infty} \left( \left\| \frac{\partial^n}{\partial t^n} u(te^{i\varphi}) \right\|^2 + \|A^n u(te^{i\varphi})\|^2 \right) dt \right\}^{1/2} < +\infty. \tag{2.12}$$

В нижеследующей лемме установлен аналог теоремы о промежуточных производных, широко известной для пространств  $W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$  (см. [6, с. 29]).

**Лемма 2.1.** Пусть  $u(\tau) \in W_2^n(S_\theta, A^n)$ . Тогда  $A^{n-j} \frac{d^j u(\tau)}{d\tau^j} \in \mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , и справедливы неравенства

$$\left\| A^{n-j} u^{(j)} \right\|_{\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)} \leq K_j \|u\|_{W_{n,\theta}}^* \tag{2.13}$$

с положительными постоянными  $K_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ .

**Предложение 2.4.** Для функции  $u(\tau) \in W_2^n(S_\theta, A^n)$  существуют граничные значения  $u_{\pm\theta}(t) = u(te^{\pm i\theta})$  из класса  $W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$  такие, что

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm\theta} \int_0^{+\infty} \left[ \left\| \frac{\partial^n}{\partial t^n} u(te^{i\varphi}) - \frac{\partial^n}{\partial t^n} u(te^{\pm i\theta}) \right\|^2 + \left\| A^n (u(te^{i\varphi}) - u(te^{\pm i\theta})) \right\|^2 \right] dt = 0. \tag{2.14}$$

**Теорема 2.3.**

1<sup>0</sup>. Класс функций  $W_2^n(S_\theta, A^n)$  с нормой

$$\|u\|_{W_2^n(S_\theta, A^n)}^* = \sup_{\varphi: |\varphi| < \theta} \left\{ \int_0^{+\infty} \left( \left\| \frac{d^n}{d\tau^n} u(te^{i\varphi}) \right\|^2 + \|A^n u(te^{i\varphi})\|^2 \right) dt \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.15}$$

является банаховым пространством.

2<sup>0</sup>. Класс функций  $W_2^n(S_\theta, A^n)$  со скалярным произведением

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{W_2^n(S_\theta, A^n)} = & \int_0^{+\infty} \left\{ \left( \frac{d^n}{d\tau^n} u(te^{-i\theta}), \frac{d^n}{d\tau^n} v(te^{-i\theta}) \right) + \left( A^n u(te^{-i\theta}), A^n v(te^{-i\theta}) \right) + \right. \\ & \left. + \left( \frac{d^n}{d\tau^n} u(te^{i\theta}), \frac{d^n}{d\tau^n} v(te^{i\theta}) \right) + \left( A^n u(te^{i\theta}), A^n v(te^{i\theta}) \right) \right\} dt \end{aligned} \tag{2.16}$$

является гильбертовым пространством.

3<sup>0</sup>. Для произвольной функции  $u(\tau) \in W_2^n(S_\theta, A^n)$  справедливы неравенства

$$\|u\|_{W_2^n(S_\theta, A^n)}^* \leq \sqrt{2} \|u\|_{W_2^n(S_\theta, A^n)} \leq 2 \|u\|_{W_2^n(S_\theta, A^n)}^*, \tag{2.17}$$

где

$$\|u\|_{W_2^n(S_\theta, A^n)} = \langle u, u \rangle_{W_2^n(S_\theta, A^n)}^{1/2}.$$

Приведем вариант теоремы о следах для пространства  $W_2^n(S_\theta, A^n)$ .

**Теорема 2.4.** Пусть  $u(\tau) \in W_2^n(S_\theta, A^n)$ . Тогда в смысле нормы  $\|\cdot\|$  пространства  $H$  равномерно относительно  $\arg \tau$ , где  $|\arg \tau| < \theta$ , существуют пределы

$$\lim_{\substack{\tau \in S_\theta, \\ |\tau| \rightarrow 0}} A^{n-p-1/2} \frac{d^p u(\tau)}{d\tau^p}, \quad p = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.18)$$

Уместно отметить, что теоремы 2.3 и 2.4, а также предложение 2.4 приведены в статье [2]; полные подробные доказательства сформулированных утверждений о пространствах  $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ ,  $W_2^n(S_\theta, A^n)$  приведены в депонированной работе [1].

### 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕКОТОРЫХ СФОРМУЛИРОВАННЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ О СВОЙСТВАХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ И $W_2^n(S_\theta, A^n)$

*Доказательство предложения 2.1.* Пусть  $\{e_j\}_{j=1}^\infty$  — ортонормированный базис пространства  $H$ . Для функции  $f(\tau) \in \mathfrak{R}_{2,\theta}(\mathbb{R}_+, H)$  положим  $f_j(\tau) = (f(\tau), e_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ,  $\tau \in S_\theta$ . Тогда справедливо представление

$$f(\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(\tau) e_j$$

и следующая цепочка равенств:

$$\|f(te^{i\varphi})\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)}^2 = \int_0^{+\infty} \|f(te^{i\varphi})\|^2 dt = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} |f_j(te^{i\varphi})|^2 dt = \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j(te^{i\varphi})\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2. \quad (3.1)$$

Согласно [5, лемма А, с. 871] числовая функция  $f_j(\tau)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , имеет граничные значения  $f_j(te^{\pm i\theta}) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ , т. е. существуют такие функции  $f_j(te^{\pm i\theta})$ , для которых

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm\theta} \int_0^{+\infty} |f_j(te^{i\varphi}) - f_j(te^{\pm i\theta})|^2 dt = 0. \quad (3.2)$$

Положим  $f(te^{\pm i\theta}) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(te^{\pm i\theta}) e_j$  и покажем, что  $f(te^{\pm i\theta}) \in L_2(\mathbb{R}_+, H)$ , т. е.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j(te^{\pm i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 < \infty. \quad (3.3)$$

Доказательство проведем для  $+\theta$ , рассуждения для  $-\theta$  совершенно аналогичны. Обозначим через  $M$  величину

$$M = \sup_{|\varphi| > \theta} \|f(te^{i\varphi})\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)}^2 = \sup_{|\varphi| > \theta} \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j(te^{i\varphi})\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2. \quad (3.4)$$

Предположим противное. Тогда найдется такое  $N \in \mathbb{N}$ , что

$$\sum_{j=1}^N \|f_j(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 > 4M.$$

В силу (3.2) для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\varphi_0 < \theta$ , что для любого  $\varphi$ , удовлетворяющего неравенству  $\varphi_0 < \varphi < \theta$ , будет выполнено неравенство

$$\sum_{j=1}^N \|f_j(te^{i\varphi})\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 < 2 \sum_{j=1}^N \|f_j(te^{i\varphi_0})\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 + \varepsilon \leq 2 \sup_{|\varphi| > \theta} \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j(te^{i\varphi})\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 \leq 2M + \varepsilon.$$

Следовательно, мы пришли к противоречию с равенством (3.3).

Отсюда в силу (3.1) существует такое  $\varphi_0 < \theta$ , при котором

$$\sum_{j=1}^N \|f_j(te^{i\varphi_0})\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 > \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \|f(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 > M, \quad (3.5)$$

что, очевидно, противоречит неравенству

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \|f(te^{i\varphi})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)}^2 = \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j(te^{i\varphi})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)}^2 < M < \infty \quad (3.6)$$

в силу произвольности  $M_1 > 4M$ . Таким образом, неравенство установлено. Согласно [5, лемма 1.1, с. 873]), для числовых функций  $f_j(\tau)$  справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \|f_j(te^{i\varphi})\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 \leq \left( \|f_j(te^{-i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|f_j(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 \right). \quad (3.7)$$

Отсюда из (3.2) вытекает, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \|f_j(te^{i\varphi})\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 \leq 2 \sum_{j=1}^{\infty} \left( \|f_j(te^{-i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|f_j(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 \right). \quad (3.8)$$

Установим теперь справедливость соотношения (2.1). Рассмотрим случай  $\varphi \rightarrow +\theta$ , а случай  $\varphi \rightarrow -\theta$  рассматривается совершенно аналогично. Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . По  $\varepsilon$  выберем такое  $N \in \mathbb{N}$ , чтобы выполнялись неравенства

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \|f_j(te^{i\varphi})\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 < \frac{\varepsilon}{8}, \quad \sum_{j=N+1}^{\infty} \|f(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 < \frac{\varepsilon}{8}. \quad (3.9)$$

В силу (3.3), (3.8) такой выбор  $N$  возможен.

По  $N$  выберем такое  $\delta > 0$ , чтобы для  $\varphi: \theta - \varphi < \delta$  выполнялись неравенства

$$\|f_j(te^{i\varphi}) - f_j(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 < \frac{\varepsilon}{2N}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.10)$$

Существование такого  $\delta$  вытекает из (3.2). Тогда

$$\sum_{j=1}^N \|f_j(te^{i\varphi}) - f_j(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \theta - \varphi < \delta. \quad (3.11)$$

Наконец, из (3.9), (3.11) получаем, что

$$\begin{aligned} \|f(te^{i\varphi}) - f(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)}^2 &\leq \sum_{j=1}^N \|f_j(te^{i\varphi}) - f_j(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 + \\ &+ 2 \sum_{j=N+1}^{\infty} \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \|f_j(te^{i\varphi})\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 + 2 \sum_{j=N+1}^{\infty} \|f_j(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (2.1) установлено и предложение 2.1 доказано.  $\square$

*Доказательство предложения 2.2.* Сходимость интегралов в правой части (2.2) при  $\tau \in S_\theta$  вытекает из оценок

$$\left\| \int_0^{+\infty} \frac{f(\zeta e^{\pm i\theta})}{\zeta e^{\pm i\theta} - \tau} e^{\pm i\theta} d\zeta \right\| \leq \int_0^{+\infty} \frac{\|f(\zeta e^{\pm i\theta})\|}{|\zeta e^{\pm i\theta} - \tau|} d\zeta \leq \left( \int_0^{+\infty} \|f(\zeta e^{\pm i\theta})\|^2 d\zeta \right)^{1/2} \left( \int_0^{+\infty} |\zeta e^{\pm i\theta} - \tau|^{-2} d\zeta \right)^{1/2} < \infty.$$

Чтобы обнаружить, что

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{f(\zeta e^{-i\theta})}{\zeta e^{-i\theta} - \tau} e^{-i\theta} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{f(\zeta e^{i\theta})}{\zeta e^{i\theta} - \tau} e^{i\theta} d\zeta,$$

достаточно проверить последнее равенство по координатам:

$$(f(\tau), e_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{(f(\zeta e^{-i\theta}), e_j)}{\zeta e^{-i\theta} - \tau} e^{-i\theta} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{(f(\zeta e^{i\theta}), e_j)}{\zeta e^{i\theta} - \tau} e^{i\theta} d\zeta,$$

где  $\{e_j\}_{j=1}^\infty$  — ортонормированный базис пространства  $H$ . Интегральная формула Коши справедлива для числовых функций  $(f(\tau), e_j)$  (см. [4, теорема 7.5, с. 414]), откуда и вытекает справедливость интегральной Формулы Коши для  $f(\tau) \in \mathfrak{R}_{2,\theta}(\mathbb{R}_+, H)$ .  $\square$

*Доказательство предложения 2.3.* Пусть  $h_{\pm\theta}(\varsigma) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ . Тогда для функции  $h(\tau)$ , представимой в виде

$$h(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{h_{-\theta}(\varsigma)}{\varsigma e^{-i\theta} - \tau} e^{-i\theta} d\varsigma - \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{h_\theta(\varsigma)}{\varsigma e^{i\theta} - \tau} e^{i\theta} d\varsigma,$$

справедливо неравенство

$$\sup_{\varphi: |\varphi| < \theta} \int_0^\infty |h(te^{i\varphi})|^2 dt \leq \text{const} \left\{ \int_0^\infty |h_{-\theta}(\varsigma)|^2 d\varsigma + \int_0^\infty |h_\theta(\varsigma)|^2 d\varsigma \right\},$$

где постоянная  $\text{const}$  не зависит от функций  $h_{-\theta}(\varsigma)$  и  $h_\theta(\varsigma)$ , а кроме того, функция  $h(\tau)$  голоморфна в секторе  $S_\theta$ .

Используя разложение функции  $f(\tau)$  по ортонормированному базису  $\{e_j\}_{j=1}^\infty$

$$f(\tau) = \sum_{j=1}^\infty (f(\tau), e_j) e_j,$$

а также то, что

$$\|f(te^{i\varphi})\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)}^2 = \int_0^\infty \|f(te^{i\varphi})\|^2 dt = \sum_{j=1}^\infty \|(f(te^{i\varphi}), e_j)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2,$$

получим векторный аналог приведенного утверждения. В самом деле, для любого  $\varphi \in (-\theta, \theta)$  справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|f(te^{i\varphi})\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)}^2 &= \sum_{j=1}^\infty \|(f(te^{i\varphi}), e_j)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 \leq \\ &\leq \text{const} \sum_{j=1}^\infty \left( \|(f_{-\theta}(t), e_j)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|(f_\theta(t), e_j)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 \right) = \\ &= \text{const} \left( \|f_{-\theta}(t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)}^2 + \|f_{+\theta}(t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)}^2 \right), \end{aligned}$$

откуда вытекает, что

$$\sup_{\varphi: |\varphi| < \theta} \|f(te^{i\varphi})\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)}^2 \leq \text{const} \int_0^\infty \left( \|f_{-\theta}(t)\|^2 + \|f_{+\theta}(t)\|^2 \right) dt. \tag{3.12}$$

Голоморфность функции  $f(\tau)$  при  $\tau \in S_\theta$  очевидным образом следует из свойств интегралов типа Коши.  $\square$

*Доказательство теоремы 2.1.* Вначале докажем пункт 3<sup>0</sup>. Установим неравенство (2.7). Неравенство

$$\|f\|_{2,\theta}^* \leq \sqrt{2} \|f\|_{2,\theta}$$

вытекает из более сильного неравенства (3.7). Перейдем к доказательству второго неравенства. Для этого воспользуемся соотношением (2.1) из предложения 2.1, согласно которому для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta > 0$ , что для  $\varphi: \theta - \varphi < \delta$

$$\|f(te^{i\varphi}) - f(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)} < \varepsilon.$$

Отсюда из неравенства

$$\left| \|f(te^{i\varphi})\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)} - \|f(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)} \right| \leq \|f(te^{i\varphi}) - f(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)},$$

в частности, следует, что

$$\|f(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)} \leq \|f(te^{i\varphi})\| + \varepsilon,$$

и, тем более,

$$\|f(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)} \leq \sup_{\varphi: |\varphi| < \theta} \|f(te^{i\varphi})\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)} + \varepsilon.$$

Отсюда, в силу произвольности  $\varepsilon$ , получаем

$$\|f(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)} \leq \sup_{\varphi: |\varphi| < \theta} \|f(te^{i\varphi})\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)} = \|f(\tau)\|_{2, \theta}^*.$$

Дословно повторяя проведенные рассуждения для  $-\theta$ , получим

$$\|f(te^{-i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)} \leq \|f(\tau)\|_{2, \theta}^*.$$

Из последних двух неравенств и следует, что

$$\|f(\tau)\|_{2, \theta} \leq \sqrt{2} \|f(\tau)\|_{2, \theta}^*.$$

Докажем пункт 1<sup>0</sup>. В доказательстве нуждается лишь доказательство утверждения о полноте, т. к. проверка того, что  $\|\cdot\|_{2, \theta}^*$  обладает свойствами нормы, вытекает из соответствующих свойств нормы  $\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)}$ . Итак, пусть имеется фундаментальная по норме  $\|\cdot\|_{2, \theta}^*$  последовательность функций  $\{f_k(\tau)\}_{k=1}^\infty$ , т. е.

$$\|f_k(\tau) - f_l(\tau)\|_{2, \theta}^* \rightarrow 0, \quad k, l \rightarrow \infty.$$

Покажем, что существует функция  $f(\tau) \in \mathfrak{R}_{2, \theta}(\mathbb{R}_+, H)$  такая, что

$$\|f_k(\tau) - f(\tau)\|_{2, \theta}^* \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Согласно предложению 2.1, каждая из функций  $f_k(\tau)$  имеет граничные значения  $f_k(te^{\pm i\theta}) \in L_2(\mathbb{R}_+, H)$ , и в соответствии с неравенством (2.7) из сходимости последовательности функций  $\{f_k(\tau)\}_{k=1}^\infty$  по норме  $\|\cdot\|_{2, \theta}^*$  вытекает сходимость последовательностей  $\{f_k(te^{\pm i\theta})\}_{k=1}^\infty$  по норме пространства  $L_2(\mathbb{R}_+, H)$ . Но пространство  $L_2(\mathbb{R}_+, H)$  является полным. Следовательно, существуют функции  $f_{\pm\theta}(t) \in L_2(\mathbb{R}_+, H)$  такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k(te^{\pm i\theta}) - f_{\pm\theta}(t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)} = 0.$$

По функциям  $f_{\pm\theta}(t)$  образуем интеграл типа Коши

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-i\theta} \frac{f_{-\theta}(t)}{te^{-i\theta} - \tau} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{i\theta} \frac{f_\theta(t)}{te^{i\theta} - \tau} dt.$$

Тогда в соответствии с предложением 2.3 имеем  $f(\tau) \in \mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ , и последовательность  $\{f_k(\tau)\}_{k=1}^\infty$  сходится к функции  $f(\tau)$  по норме  $\|\cdot\|_{2, \theta}^*$ .

2<sup>0</sup>. Полнота пространства  $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$  с нормой  $\|\cdot\|_{2, \theta}$ , порождаемой скалярным произведением (2.6), вытекает из неравенства (2.7) и утверждения пункта 1<sup>0</sup>. Проверка остальных аксиом гильбертова пространства со скалярным произведением (2.7) проводится непосредственно. Теорема 2.1 доказана.  $\square$

*Доказательство теоремы 2.2.*

1<sup>0</sup>. Пусть  $F(\lambda) \in \mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ . Положим  $F_j(\lambda) = (F(\lambda), e_j)$ , где  $\{e_j\}_{j=1}^\infty$  — ортонормированный базис пространства  $H$ . Тогда  $F_j(\lambda) \in \mathfrak{R}_2(S_{\theta+\pi/2})$  и, согласно [5, теорема 1], существует скалярная функция  $f_j(\tau) \in \mathfrak{R}_2(S_\theta)$  такая, что

$$F_j(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\varphi} \int_0^\infty e^{-\lambda te^{-i\varphi}} f_j(te^{-i\varphi}) dt.$$

При этом функция  $f_j(\tau)$  определяется единственным образом по функции  $F_j(\lambda)$ , и согласно теореме Пэли—Винера (см. [5]) имеют место неравенства

$$|F_j(\lambda)|_{2,\theta+\pi/2} \leq 2|f_j(\tau)|_{2,\theta} \leq 2\sqrt{2}|F_j(\lambda)|_{2,\theta+\pi/2}, \quad (3.13)$$

где (здесь и в дальнейшем)

$$|f|_{2,\kappa}^2 = \int_0^{+\infty} |f(te^{-i\kappa})|^2 dt + \int_0^{+\infty} |f(te^{+i\kappa})|^2 dt,$$

$$|f|_{2,\kappa}^* = \sup_{\varphi:|\varphi|<\kappa} \left( \int_0^{+\infty} |f(te^{i\varphi})|^2 dt \right)^{1/2}, \quad 0 \leq \kappa < \pi.$$

По набору скалярных функций  $\{f_j(\tau)\}_{j=1}^\infty$  образуем вектор-функцию  $f(\tau) = \sum_{j=1}^\infty f_j(\tau)e_j$ . Покажем, что  $f(\tau) \in \mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ . Поскольку для числовых функций  $f_j(\tau)$  справедлива оценка

$$\frac{1}{2}|f_j(\tau)|_{2,\theta}^2 \leq \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int_0^{+\infty} |f_j(te^{i\varphi})|^2 dt \leq 2|f_j(\tau)|_{2,\theta}^2, \quad (3.14)$$

то из неравенств (3.13), (3.14) получаем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \|F(\lambda)\|_{2,\theta+\pi/2}^2 &= \sum_{j=1}^\infty |F_j(\lambda)|_{2,\theta+\pi/2}^2 \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^\infty |f_j(\tau)|_{2,\theta}^2 \geq \frac{1}{4} \sum_{j=1}^\infty \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int_0^{+\infty} |f_j(te^{i\varphi})|^2 dt \geq \\ &\geq \frac{1}{4} \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^\infty |f_j(te^{i\varphi})|^2 dt = \frac{1}{4} \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \|f(te^{i\varphi})\|^2 dt. \end{aligned}$$

Искомое утверждение вытекает теперь из того, что слабая голоморфность в банаховых пространствах влечет за собой сильную голоморфность (см. [7, теорема 3.10.1]), и значит из голоморфности скалярных функций  $f_j(\tau)$  следует голоморфность вектор-функции  $f(\tau)$ .

2<sup>0</sup>. Так как интеграл в правой части (2.9) существует при  $\varphi: |\varphi| < \theta$ , то достаточно установить равенство (2.9) покоординатно. Но покоординатное равенство справедливо в силу [5, теорема 1] (см. пункт 2<sup>0</sup>).

3<sup>0</sup>. Неравенство (2.10) вытекает из того, что для числовых функций  $F_j(\lambda)$  и  $f_j(\tau)$  согласно [5, теорема 1, пункт 3<sup>0</sup>] справедливы оценки

$$|F_j(\lambda)|_{2,\theta+\pi/2}^2 \leq 4|f_j(\tau)|_{2,\theta}^2 \leq 8|F_j(\lambda)|_{2,\theta+\pi/2}^2,$$

и, кроме того, имеют место очевидные равенства

$$\|F(\lambda)\|_{2,\theta+\pi/2}^2 = \sum_{j=1}^\infty |F_j(\lambda)|_{2,\theta+\pi/2}^2, \quad \|f(\tau)\|_{2,\theta}^2 = \sum_{j=1}^\infty |f_j(\tau)|_{2,\theta}^2.$$

Теорема 2.2 доказана. □

*Доказательство леммы 2.1.* Опираясь на теорему о промежуточных производных для пространства  $W_2^1(\mathbb{R}_+, A)$  (см. [6, с. 29]), получаем неравенства

$$\begin{aligned} \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \left\| A^{n-j} \frac{d^n}{d\tau^n} u(te^{i\varphi}) \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)}^2 &= \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int_0^{+\infty} \left\| A^{n-j} \frac{\partial^j}{\partial t^j} u(te^{i\varphi}) \right\|^2 dt \leq \\ &\leq K_j^2 \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int_0^{+\infty} \left( \left\| \frac{\partial^n}{\partial t^n} u(te^{i\varphi}) \right\|^2 + \|A^n u(te^{i\varphi})\|^2 \right) dt. \quad (3.15) \end{aligned}$$

Принимая во внимание то, что

$$\frac{d^k}{d\tau^k} u(\tau) = e^{-ik\varphi} \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(te^{i\varphi}), \quad |e^{ik\varphi}| = 1, \quad k \in \mathbb{N},$$

из неравенства (3.15) получим неравенство (2.13).  $\square$

В свою очередь доказательство предложения 2.4 опирается на лемму 2.1, а также на предложение 2.1 применительно к функциям  $A^{n-j} \frac{d^j u(\tau)}{d\tau^j} \in \mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ .

*Доказательство предложения 2.4.* Согласно лемме 2.1, из принадлежности функции  $u(\tau)$  пространству  $W_2^n(S_\theta, A^n)$  вытекает, что

$$A^{n-j} \frac{d^j}{d\tau^j} u(\tau) \in \mathfrak{R}_2(S_\theta, H), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

В соответствии с предложением 2.1 функции  $u(\tau)$ ,  $\frac{d^j u}{d\tau^j}(\tau)$  имеют граничные значения  $u_{\pm\theta}(t) = u(te^{\pm i\theta})$  и  $y_{\pm\theta, j}(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , такие, что

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm\theta} \left\| u(te^{i\varphi}) - u(te^{\pm i\theta}) \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)} = 0, \quad (3.16)$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm\theta} \left\| \frac{d^j}{d\tau^j} u(te^{i\varphi}) - y_{\pm\theta, j}(t) \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.17)$$

Покажем вначале, что

$$\frac{\partial}{\partial t} u(te^{\pm\theta}) = e^{\pm\theta} y_{\pm\theta, 1}(t)$$

почти всюду на полуоси  $\mathbb{R}_+$ .

Из соотношения (3.17) и неравенства Коши–Буняковского следует, что

$$\int_0^{+\infty} \left\| \frac{d}{d\tau} u(te^{i\varphi}) - y_{\pm\theta, 1}(t) \right\|^2 dt \geq \frac{1}{r} \left( \int_0^r \left\| \frac{d}{d\tau} u(te^{i\varphi}) - y_{\pm\theta, 1}(t) \right\|^2 dt \right) \rightarrow 0$$

при  $\varphi \rightarrow \pm\theta$ . Таким образом, функция  $\frac{d}{d\tau} u(te^{i\varphi})$  сходится к функции  $y_{\pm\theta, 1}(t)$  по норме  $L_1((0, r), H)$ . Следовательно, функция  $\frac{\partial}{\partial t} u(te^{i\varphi})$  сходится к функции  $e^{\pm i\theta} y_{\pm\theta}(t)$  в пространстве  $L_1((0, r), H)$  при  $\varphi \rightarrow \pm\theta$ . В самом деле, это вытекает из того, что

$$\frac{\partial}{\partial t} u(te^{i\varphi}) = e^{i\varphi} \frac{d}{d\tau} u(te^{i\varphi}), \quad \int_0^r \left\| \frac{d}{d\tau} u(te^{i\varphi}) - y_{\pm\theta, 1}(t) \right\|^2 dt = \int_0^r \left\| \frac{\partial}{\partial t} u(te^{i\varphi}) - e^{i\varphi} y_{\pm\theta, 1}(t) \right\|^2 dt,$$

а также того, что

$$\int_0^{+\infty} \left\| e^{i\varphi} y_{\pm\theta, 1}(t) - e^{\pm i\theta} y_{\pm\theta, 1}(t) \right\|^2 dt \rightarrow 0$$

при  $\varphi \rightarrow \pm\theta$ . Таким образом, из сказанного следует, что

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm\theta} \sup_{t \in (0, r)} \left\| \int_0^r \frac{\partial}{\partial \varsigma} u(\varsigma e^{i\varphi}) d\varsigma - e^{\pm i\theta} \int_0^r y_{\pm\theta, 1}(\varsigma) d\varsigma \right\| = 0. \quad (3.18)$$

Но

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial \varsigma} u(\varsigma e^{i\varphi}) d\varsigma = u(te^{i\varphi}) - \lim_{t \rightarrow 0} u(te^{i\varphi}), \quad (3.19)$$

и, как будет показано в конце этого предложения, для любых  $\varphi_1, \varphi_2 \in (-\theta, \theta)$

$$\lim_{t \rightarrow 0} u^{(j)}(te^{i\varphi_1}) = \lim_{t \rightarrow 0} u^{(j)}(te^{i\varphi_2}) = a \in H, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.20)$$

Отсюда и из соотношений (3.18), (3.19) вытекает, что

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm\theta} \sup_{t \in (0,r)} \left\| u(te^{i\varphi}) - e^{\pm i\theta} \int_0^t y_{\pm\theta,1}(\varsigma) d\varsigma - a \right\| = 0.$$

Таким образом,  $u(te^{\pm i\theta}) = \int_0^t e^{\pm i\theta} y_{\pm\theta,1}(\varsigma) d\varsigma + a$ . Отметим, что в силу произвольности  $r \in \mathbb{R}_+$  приведенное равенство справедливо на полуоси  $\mathbb{R}_+$ . Отсюда получаем, что функция  $u(te^{\pm i\theta})$  дифференцируема почти всюду на полуоси  $\mathbb{R}_+$ , и

$$\frac{\partial}{\partial t} u(te^{\pm i\theta}) = e^{\pm i\theta} y_{\pm\theta,1}(t),$$

и, кроме того, согласно (3.17)

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm\theta} \left\| \frac{\partial}{\partial t} u(te^{i\varphi}) - \frac{\partial}{\partial t} u(te^{\pm i\theta}) \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)} = 0.$$

Повторяя рассуждения, приведенные для функций  $\frac{d^j}{d\tau^j} u(te^{i\varphi})$ ,  $j = 2, 3, \dots, n$ , приходим к тому, что функция  $u(te^{\pm i\theta})$   $n$  раз дифференцируема по  $t$ , и

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm\theta} \left\| \frac{\partial^n}{\partial t^n} u(te^{i\varphi}) - \frac{\partial^n}{\partial t^n} u(te^{\pm i\theta}) \right\|_{L_2(\mathbb{R}, H)} = 0.$$

Согласно определению пространства  $W_2^n(S_\theta, A^n)$ , функции  $A^j u(\tau)$  имеют граничные значения  $z_{\pm\theta, j}(t) \in L_2(\mathbb{R}_+, H)$ :

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm\theta} \|A^j u(te^{i\varphi}) - z_{\pm\theta, j}(t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)} = 0. \quad (3.21)$$

Откуда, в силу того, что оператор  $A^{-1}$  компактен и, стало быть, ограничен, следует соотношение

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm\theta} \|u(te^{i\varphi}) - A^{-j} z_{\pm\theta}(t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)} = 0. \quad (3.22)$$

Сравнивая (3.21) и (3.22), приходим к равенствам

$$u(te^{\pm i\theta}) = A^{-j} z_{\pm\theta, j}(t), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Следовательно,

$$A^j u(te^{\pm i\theta}) = z_{\pm\theta, j}(t), \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

и на основании (3.21) получаем

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm\theta} \|A^j (u(te^{i\varphi}) - u(te^{\pm i\theta}))\|_{L_2(\mathbb{R}_+, H)} = 0. \quad (3.23)$$

Для завершения доказательства осталось показать, что для любых  $\varphi_1, \varphi_2 \in (-\theta, \theta)$ ,  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ ,

$$\lim_{\varsigma \rightarrow 0} u^{(j)}(\varsigma e^{i\varphi_1}) = \lim_{\varsigma \rightarrow 0} u^{(j)}(\varsigma e^{i\varphi_2}), \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Пусть  $\{t_k\}_{k=1}^\infty$  — сходящаяся к нулю последовательность положительных вещественных чисел такая, что  $\frac{t_{k+1}}{t_k} < \frac{1}{2}$ . Рассмотрим последовательность  $\{\gamma_{k,j}(\varphi)\}_{k=1}^\infty$ :

$$\gamma_{k,j}(\varphi) = \int_0^{t_k} \|u^{(j+1)}(se^{i\varphi})\| ds, \quad \varphi \in (-\theta, \theta), \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Из неравенства Коши—Буняковского, теоремы о промежуточных (см. [6, с. 29]), а также положительной определенности оператора  $A$  вытекает, что

$$\begin{aligned} \gamma_{k,j}(\varphi) &= \int_0^{t_k} \|u^{(j+1)}(se^{i\varphi})\| ds \leq t_k \left( \int_0^{t_k} \|u^{(j+1)}(se^{i\varphi})\|^2 ds \right)^{1/2} \leq \\ &\leq ct_k^{1/2} \sup_{\varphi: |\varphi| < \theta} \left( \int_0^{+\infty} \left( \left\| \frac{\partial^n}{\partial t^n} u(te^{i\varphi}) \right\|^2 + \|A^n u(te^{i\varphi})\|^2 \right) dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

с положительной постоянной  $c$ , не зависящей от функции  $u(\tau)$ , индексов  $k$  и  $j$ . Отсюда получаем

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \gamma_{k,j}(\varphi) d\varphi \leq c2\theta t_k^{1/2} \sup_{\varphi: |\varphi| < \theta} \left( \int_0^{+\infty} \left( \left\| \frac{\partial^n}{\partial t^n} u(te^{i\varphi}) \right\|^2 + \|Au(te^{i\varphi})\|^2 \right) dt \right)^{1/2}.$$

Следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $N \in \mathbb{N}$ , что для  $k > N$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \gamma_{k,j}(\varphi) d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^{t_k} \|u^{(j+1)}(se^{i\varphi})\| ds d\varphi < \varepsilon.$$

Согласно теореме Фубини

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^{t_k} \|u^{(j+1)}(se^{i\varphi})\| ds d\varphi = \int_0^{t_k} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \|u^{(j+1)}(se^{i\varphi})\| d\varphi ds,$$

и значит,

$$\int_{\frac{t_k}{2}}^{t_k} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \|u^{(j+1)}(se^{i\varphi})\| d\varphi ds \leq \int_0^{t_k} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \|u^{(j+1)}(se^{i\varphi})\| d\varphi ds < \varepsilon. \quad (3.24)$$

Из (3.24), в силу непрерывности функции

$$l_j(s) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \|u^{(j+1)}(se^{i\varphi})\| d\varphi,$$

вытекает существование  $s_k \in \left(\frac{t_k}{2}, t_k\right)$  такого, что

$$l_j(s_k) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \|u^{(j+1)}(s_k e^{i\varphi})\| d\varphi < \frac{2\varepsilon}{t_k} \quad (3.25)$$

(ибо в противном случае выполнялось бы неравенство

$$\int_{t_k/2}^{t_k} l_j(s) ds \geq \frac{2\varepsilon t_k}{t_k} = \varepsilon,$$

противоречащее неравенству (3.24)). Следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $N \in \mathbb{N}$ , начиная с которого

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \|u^{(j+1)}(s_k e^{i\varphi})\| d\varphi < \frac{2\varepsilon}{t_k}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда

$$s_k \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left\| u^{(j+1)}(s_k e^{i\varphi}) \right\| d\varphi < \frac{2\varepsilon}{t_k} s_k < 2\varepsilon.$$

Обозначив через  $\delta_k$  дугу  $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = s_k, \varphi_1 \leq \arg \lambda \leq \varphi_2\}$ , можно записать

$$u^{(j)}(s_k e^{i\varphi_2}) - u^{(j)}(s_k e^{i\varphi_1}) = \int_{\delta_k} u^{(j+1)}(\lambda) d\lambda.$$

Далее, из неравенства (3.25) получаем

$$\left\| u^{(j)}(s_k e^{i\varphi_2}) - u^{(j)}(s_k e^{i\varphi_1}) \right\| \leq \int_{\delta_k} \left\| u^{(j+1)}(\lambda) \right\| |d\lambda| < s_k \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left\| u^{(j+1)}(s_k e^{i\varphi}) \right\| d\varphi < 2\varepsilon,$$

$j = 0, 1, \dots, n-1$ . Таким образом, для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $N \in \mathbb{N}$ , начиная с которого

$$\left\| u^{(j)}(s_k e^{i\varphi_1}) - u^{(j)}(s_k e^{i\varphi_2}) \right\| < \varepsilon \quad \forall k > N.$$

Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u^{(j)}(s_k e^{i\varphi_1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} u^{(j)}(s_k e^{i\varphi_2}) = a \in H.$$

Но по уже упоминавшейся теореме о следах (см. [6, с. 33]) существуют пределы

$$\lim_{\varsigma \rightarrow +0} u^{(j)}(\varsigma e^{i\varphi_1}), \quad \lim_{\varsigma \rightarrow +0} u^{(j)}(\varsigma e^{i\varphi_2}),$$

и значит,

$$\lim_{\varsigma \rightarrow +0} u^{(j)}(\varsigma e^{i\varphi_1}) = \lim_{\varsigma \rightarrow +0} u^{(j)}(\varsigma e^{i\varphi_2}) = a \in H, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Предложение 2.4 доказано.  $\square$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов В. В. О некоторых пространствах вектор-функций, голоморфных в угле // ВИНТИ. — 1981. — № 4177-81.
2. Власов В. В. Кратная минимальность части системы корневых векторов пучка М. В. Келдыша // Докл. АН СССР. — 1982. — 263, № 6. — С. 1289–1293.
3. Григорян Ш. А. О базисности неполных систем рациональных функций в угловых областях // Изв. АН АрмССР. Мат. — 1978. — 13, № 5-6. — С. 461–489.
4. Джэрбашиян М. М. Интегральные преобразования и представление функций в комплексной области. — М.: Наука, 1966.
5. Джэрбашиян М. М., Мартиросян В. М. Теоремы Винера—Пэли и Мюнца—Саса // Изв. АН СССР. — 1977. — 41, № 4. — С. 868–894.
6. Лионс Ж. Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
7. Хильле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Иностранная литература, 1962.

В. В. Власов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Россия, Москва  
E-mail: vicvvasov@rambler.ru

Н. А. Раутиан

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Россия, Москва  
E-mail: nrautian@mail.ru

## On Spaces of Vector Functions that Are Holomorphic in an Angular Domain

© 2022 V. V. Vlasov, N. A. Rautian

**Abstract.** In this paper, we study spaces of vector functions that are holomorphic in the angular domain of the complex plane and with values in a separable Hilbert space. We show that, equipped with the appropriate norms, these spaces are Hilbert spaces.

### REFERENCES

1. V. V. Vlasov, “O nekotorykh prostranstvakh vektor-funktsiy, golomorfnykh v ugle” [On some spaces of vector functions that are holomorphic in an angle], *VINITI* [VINITI], 1981, No. 4177-81 (in Russian).
2. V. V. Vlasov, “Kratnaya minimal’nost’ chasti sistemy kornevykh vektorov puchka M. V. Keldysha” [Multiple minimality of a part of the system of root vectors of the Keldysh pencil], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1982, **263**, No. 6, 1289–1293 (in Russian).
3. Sh. A. Grigoryan, “O bazisnosti nepolnykh sistem ratsional’nykh funktsiy v uglovykh oblastyakh” [On the basis property of incomplete systems of rational functions in corner domains], *Izv. AN ArmSSR. Mat.* [Bull. Acad. Sci. Armenian SSR. Ser. Math.], 1978, **13**, No. 5-6, 461–489 (in Russian).
4. M. M. Dzhrbashyan, *Integral’nye preobrazovaniya i predstavlenie funktsiy v kompleksnoy oblasti* [Integral Transformations and Representation of Functions in the Complex Domain], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
5. M. M. Dzhrbashyan and V. M. Martirosyan, “Teoremy Vinera—Peli i Myuntsa—Sasa” [Wiener–Paley and Müntz–Szász theorems], *Izv. AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1977, **41**, No. 4, 868–894 (in Russian).
6. J.-L. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Non-Homogeneous Boundary-Value Problems and Their Applications], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
7. E. Hille and R. S. Phillips, *Funktsional’nyy analiz i polugruppy* [Functional Analysis and Semi-Groups], Inostr. lit., Moscow, 1962 (Russian translation).

V. V. Vlasov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: vicvvasov@rambler.ru

N. A. Rautian

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: nrautian@mail.ru

## ПОРЯДКОВОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ В $\mathcal{O}\mathcal{A}_r(E, F)$

© 2022 г. Н. А. ДЖУСОЕВА, С. Ю. ИТАРОВА, М. А. ПЛИЕВ

Аннотация. В работе изучаются операторы порядкового проектирования на различные полосы в пространстве регулярных ортогонально аддитивных операторов. Указаны формулы проектирования на полосу, порожденную направленным семейством положительных ортогонально аддитивных операторов, а также на полосу латерально непрерывных операторов.

### ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение . . . . .	407
2. Предварительные сведения . . . . .	408
3. Векторная решетка регулярных ортогонально аддитивных операторов . . . . .	409
4. Проектирование на полосу, порожденную семейством операторов . . . . .	411
5. Проектирование на полосу латерально непрерывных операторов . . . . .	416
Список литературы . . . . .	420

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Порядковое проектирование является полезным и важным инструментом для исследования различных классов операторов, действующих в упорядоченных векторных пространствах. Если упорядоченное векторное пространство  $E$  является порядково полной векторной решеткой, то для каждой полосы  $\mathcal{B}$  в  $E$  существует линейный оператор  $\pi_{\mathcal{B}}: E \rightarrow \mathcal{B}$  порядкового проектирования на  $\mathcal{B}$ . Выяснением точного вида проекционных операторов на различные полосы в векторной решетке линейных регулярных операторов на протяжении десятилетий занимались многие математики (см. [2–4, 8, 14, 15, 22, 26]). В конце прошлого столетия ряд исследователей занялся исследованием порядковой структуры нелинейных операторов. Порядково ограниченные ортогонально аддитивные операторы (абстрактные операторы Урысона в другой терминологии) изучались в работе [23]. Вопросы порядкового проектирования в пространстве абстрактных операторов Урысона рассматривались в работах [18, 31]. Более общий класс регулярных ортогонально аддитивных операторов (ОАО) был введен [30]. Там же было установлено, что порядковая полнота пространства образов операторов обеспечивает существование решеточной структуры пространства регулярных ортогонально аддитивных операторов. Регулярные и близкие к ним ортогонально аддитивные операторы изучались в работах [1, 9, 10, 13, 20, 21, 25, 28, 29]. Отметим публикации [11, 12], затрагивающие вопросы порядкового проектирования в пространствах регулярных ОАО. В настоящей работе мы продолжим исследования в данном направлении и получим формулы порядкового проектирования на полосы, порожденные направленными семействами положительных ОАО, а также на полосу латерально непрерывных ортогонально аддитивных операторов.

Н. А. Джусоева была поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение 075-02-2022-890).



## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В настоящем разделе мы приведем некоторые предварительные сведения, необходимые для дальнейшего чтения, а также зафиксируем терминологию и обозначения. В качестве стандартного источника для ссылок по теории векторных решеток используются монографии [6, 16]. Все встречающиеся ниже в тексте векторные решетки являются архимедовыми.

Сеть  $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$  элементов векторной решетки  $E$  *порядково сходится* к элементу  $x \in E$ , если существует убывающая сеть  $(e_\beta)_{\beta \in B}$  положительных элементов решетки  $E$  такая, что  $\inf_{\beta \in B} e_\beta = 0$

и для любого  $e_\beta$  найдется индекс  $\alpha(\beta)$  такой, что неравенство  $|x - x_\alpha| \leq e_\beta$  выполняется для всех  $x_\alpha$  где  $\alpha \geq \alpha(\beta)$ . В этом случае пишут, что  $x = o\text{-}\lim_{\alpha \in A} x_\alpha$ . Подмножество  $D$  векторной решетки  $E$  называется *порядковым замкнутым*, если оно содержит пределы всех порядковых сетей, составленных из элементов  $D$ . Векторное подпространство  $J$  векторной решетки  $E$  называется *порядковым идеалом*  $E$ , если для любых  $x \in E$ ,  $y \in J$  неравенство  $|x| \leq |y|$  влечет включение  $x \in J$ . Будем говорить, что элементы  $x, y$  векторной решетки  $E$  являются *дизъюнктными*, и писать  $x \perp y$ , если  $|x| \wedge |y| = 0$ . Для произвольного подмножества  $D \subset E$  будем использовать следующие обозначения:

$$D^\perp := \{x \in E : x \perp y \ \forall y \in D\};$$

$$D^{\perp\perp} := (D^\perp)^\perp.$$

Множество  $\mathcal{B}$  такое, что  $\mathcal{B} = D^\perp$  для некоторого множества  $D$ , называется *полосой* в  $E$ . Заметим, что любая полоса в  $E$  является порядково замкнутым порядковым идеалом  $E$ . Будем говорить что полоса  $\mathcal{B}$  *порождена* множеством  $D$ , если  $\mathcal{B} = D^{\perp\perp}$ . Для суммы  $x = \sum_{i=1}^n x_i$  по-

парно дизъюнктивных элементов  $x_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  будем использовать обозначение  $x = \bigsqcup_{i=1}^n x_i$ . В

частном случае  $n = 2$  используем обозначение  $x = x_1 \sqcup x_2$ . Элемент  $y$  векторной решетки  $E$  называется *осколком* элемента  $x \in E$ , если  $y \perp (x - y)$ . Запись  $y \sqsubseteq x$  выражает тот факт, что  $y$  — осколок  $x$ . Множество всех осколков элемента  $x$  обозначается через  $\mathcal{F}_x$ . Бинарное отношение  $\sqsubseteq$  на векторной решетке  $E$  является отношением частичного порядка на  $E$ , который называется *латеральным порядком*. Латеральный порядок важен для изучения ортогонально аддитивных операторов [19, 25]. Следующая латеральная версия леммы Рисса часто будет использоваться в тексте.

**Лемма 2.1** (см. [27, Proposition 3.1]). Пусть  $E$  — векторная решетка и  $\bigsqcup_{i=1}^n x_i = \bigsqcup_{k=1}^m y_k$  для некоторых  $(x_i)_{i=1}^n$  и  $(y_k)_{k=1}^m \subset E$ . Тогда существует семейство попарно дизъюнктивных элементов  $(z_{ik}) \subset E$ , где  $i \in \{1, \dots, n\}$  и  $k \in \{1, \dots, m\}$ , таких, что

1.  $x_i = \bigsqcup_{k=1}^m z_{ik}$  для любого  $i \in \{1, \dots, n\}$ ;
2.  $y_k = \bigsqcup_{i=1}^n z_{ik}$  для любого  $k \in \{1, \dots, m\}$ ;
3.  $\bigsqcup_{i=1}^n \bigsqcup_{k=1}^m z_{ik} = \bigsqcup_{i=1}^n x_i = \bigsqcup_{k=1}^m y_k$ .

Пусть  $\Lambda$  — некоторое индексное множество и  $\Theta$  — множество всех конечных подмножеств  $\Lambda$ , упорядоченное по включению. Семейство  $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  элементов векторной решетки  $E$  называется *порядково суммируемым*, если сеть  $(u_\theta)_{\theta \in \Theta}$  порядково сходится и  $u = o\text{-}\lim u_\theta$ . Здесь  $u_\theta = \sum_{\lambda \in \theta} u_\lambda$ .

При этом элемент  $u$  обозначается  $o\text{-}\sum_{\lambda} u_\lambda$ . Характеристическая функция множества  $D$  обозначается  $1_D$ .

Напомним, что с каждой полосой  $\mathcal{B}$  в порядково полной векторной решетке  $E$  ассоциирован порядковой проектор  $\pi_{\mathcal{B}}: E \rightarrow \mathcal{B}$  на эту полосу, действующий по следующему правилу:

$$\pi_{\mathcal{B}}(x) = x_1, \quad x = x_1 \sqcup x_2, \quad x_1 \in \mathcal{B}, \quad x_2 \in \mathcal{B}^\perp.$$

В этом случае  $x_1 \in \mathcal{B}$  и  $x_2 \in \mathcal{B}^\perp$  называются *проекциями* элемента  $x$  на полосы  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{B}^\perp$  соответственно. Через  $\pi_x$  обозначим проектор на главную полосу  $\{x\}^{\perp\perp}$ , порожденную элементом  $x$ , и через  $\pi_x^\perp$  обозначим порядковый проектор на дополнительную полосу  $\{x\}^\perp$ . Отметим, что  $\pi_x^{\perp\perp} = \pi_x$ . Приведем полезные для дальнейшего общие формулы порядкового проектирования, справедливые для произвольной порядково полной векторной решетки. Будем полагать, что  $0 \leq x \in E$  и  $\mathcal{B}$  — полоса в  $E$ .

$$\pi_{\mathcal{B}}(x) = \sup\{y \in \mathcal{B}: 0 \leq y \leq x\} \quad \text{и} \quad \pi_x(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}}\{u \wedge (nx)\}, \quad u \in E_+.$$

Множество всех порядковых проекторов в  $E$  обозначается  $\mathfrak{P}(E)$ . Известно, что в случае порядково полной векторной решетки  $E$  множество  $\mathfrak{P}(E)$  является полной булевой алгеброй, где частичный порядок и булевы операции вводятся следующим образом:

$$\pi' \leq \pi'' \Leftrightarrow \pi' \circ \pi'' = \pi', \tag{2.1}$$

$$\pi' \wedge \pi'' = \pi' \circ \pi'', \quad \pi' \vee \pi'' = \pi' + \pi'' - \pi' \circ \pi'', \quad \pi^* = I_E - \pi, \tag{2.2}$$

$$\pi, \pi', \pi'' \in \mathfrak{P}(E), \quad I_E \text{ — тождественный оператор на } E. \tag{2.3}$$

Отметим, что равенства  $\pi \circ \pi' = \pi' \circ \pi$  и  $\pi \circ \pi = \pi$  выполняются для любых порядковых проекторов  $\pi, \pi' \in \mathfrak{P}(E)$ . Ниже мы будем пользоваться следующими полезными формулами:

$$\pi_x \wedge \pi_y = \pi_{x \wedge y}, \quad \pi_x \circ \pi_x^\perp = 0, \quad \pi_x x = x, \quad \pi_x(x \wedge y) = x \wedge y, \quad \pi_x(v) + \pi_x^\perp(v) = v.$$

В качестве иллюстрации докажем первую из них. Пусть  $v \in E_+$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} (\pi_x \wedge \pi_y)v &= (\pi_x \circ \pi_y)v = \pi_x(\pi_y v) = \pi_x\left(\sup_n\{v \wedge ny\}\right) = \\ &= \sup_{m \in \mathbb{N}}\left\{\sup_{n \in \mathbb{N}}\{v \wedge ny\} \wedge mx\right\} = \sup_m \sup_n\{v \wedge \inf\{m, n\}y \wedge x\} = \\ &= \sup_k\{v \wedge k(x \wedge y)\} = \pi_{x \wedge y}(v). \end{aligned}$$

Ниже для обозначения порядковых проекторов мы будем использовать буквы греческого алфавита:  $\pi, \rho, \sigma$  и т. д. Семейство  $(\rho_\xi)_{\xi \in \Xi} \subset \mathfrak{P}(F)$  попарно дизъюнктивных порядковых проекторов таких, что  $\sup_{\xi \in \Xi} \rho_\xi = I_E$ , будем называть *разбиением единицы* в  $E$ . Положительный элемент  $u$  векторной решетки  $E$  называется *слабой порядковой единицей*, если  $\{u\}^{\perp\perp} = E$ .

### 3. ВЕКТОРНАЯ РЕШЕТКА РЕГУЛЯРНЫХ ОРТОГОНАЛЬНО АДДИТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В данном разделе мы рассмотрим порядковую структуру пространства регулярных ортогонально аддитивных операторов и приведем некоторые важные для приложений примеры таких операторов.

**Определение 3.1.** Пусть  $E$  — векторная решетка и  $X$  — действительное векторное пространство. Оператор  $T : E \rightarrow X$  называется *ортогонально аддитивным* (ОАО для краткости), если  $T(x + y) = Tx + Ty$  для любых дизъюнктивных  $x, y \in E$ .

**Определение 3.2.** Пусть  $E, F$  — векторные решетки. Ортогонально аддитивный оператор  $T : E \rightarrow F$  называется:

1. *положительным*, если  $T(E) \subset F_+$ ;
2. *регулярным*, если  $T = S_1 - S_2$ , где  $S_1, S_2$  — положительные ОАО из  $E$  в  $F$ ;
3. *порядково ограниченным*, или *абстрактным оператором Урысона*, если  $T$  отображает порядково ограниченные подмножества  $E$  в порядково ограниченные подмножества векторной решетки  $F$ ;
4. *осколочно ограниченным*, или *оператором Попова*, если любого элемента  $x \in E$  множество  $T(\mathcal{F}_x)$  порядково ограничено в  $F$ .

Векторные пространства всех регулярных, порядково ограниченных и осколочно ограниченных ОАО из  $E$  в  $F$  обозначаются через  $\mathcal{O}\mathcal{A}_r(E, F)$ ,  $\mathcal{O}\mathcal{A}_b(E, F)$  и  $\mathcal{P}(E, F)$  соответственно. Кокус всех положительных ОАО из  $E$  в  $F$  обозначается  $\mathcal{O}\mathcal{A}_+(E, F)$ . В пространстве  $\mathcal{O}\mathcal{A}_r(E, F)$  существует естественный частичный порядок, задаваемый следующим образом:  $S \leq T$ , если

$(T - S) \in \mathcal{O}A_+(E, F)$ . В случае порядковой полноты векторной решетки  $F$  упорядоченное векторное пространство  $\mathcal{O}A_r(E, F)$  является порядково полной операторной векторной решеткой.

**Лемма 3.1** (см. [30, Theorem 3.6]). Пусть  $E$  и  $F$  — векторные решетки, причем решетка  $F$  порядково полна. Тогда  $\mathcal{O}A_r(E, F) = \mathcal{P}(E, F)$  и  $\mathcal{O}A_r(E, F)$  является порядково полной векторной решеткой. При этом для любых  $S, T \in \mathcal{O}A_r(E, F)$  и  $x \in E$  решеточные операции имеют следующий вид:

1.  $(T \vee S)x = \sup\{Ty + Sz : x = y \sqcup z\}$ ;
2.  $(T \wedge S)x = \inf\{Ty + Sz : x = y \sqcup z\}$ ;
3.  $T^+x = \sup\{Ty : y \sqsubseteq x\}$ ;
4.  $T^-x = -\inf\{Ty : y \sqsubseteq x\}$ ;
5.  $|Tx| \leq |T|x$ .

Рассмотрим несколько примеров ортогонально аддитивных операторов. Нам потребуются некоторые предварительные сведения.

**Определение 3.3.** Пусть  $(A, \Sigma, \mu)$  и  $(B, \Xi, \nu)$  — пространства с конечными мерами. Через  $(A \times B, \mu \otimes \nu)$  обозначим пополненное произведение пространств с мерами. отображение  $K : A \times B \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  называется *функцией Каратеодори*, если выполняются следующие условия:

- (C<sub>1</sub>) функция  $K(\cdot, \cdot, r)$  является  $\mu \otimes \nu$ -измеримой для любого  $r \in \mathbb{R}$ ;
- (C<sub>2</sub>) функция  $K(s, t, \cdot)$  является непрерывной на  $\mathbb{R}$  для  $\mu \otimes \nu$ -почти всех  $(s, t) \in A \times B$ .

Будем говорить, что функция Каратеодори  $K$  *нормализована*, если  $K(s, t, 0) = 0$  для  $\mu \otimes \nu$ -почти всех  $(s, t) \in A \times B$ .

**Пример 3.1.** Пусть  $E$  — порядковый идеал в  $L_0(\nu)$ ,  $K : A \times B \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — нормализованная функция Каратеодори, и для любого элемента  $f \in E$  неравенство

$$\int_B |K(s, t, f(t))| d\nu(t) < \infty$$

выполняется для почти всех  $s \in A$ . Тогда формула 3.1

$$Tf(s) = \int_B K(s, t, f(t)) d\nu(t) \quad (3.1)$$

задает регулярный ортогонально аддитивный оператор  $T : E \rightarrow L_0(\mu)$ .

Заметим, вышеприведенный интегральный оператор  $T$  известен в литературе как *интегральный оператор Урысона*. Нормализованная функция Каратеодори  $K$  называется *ядром* интегрального оператора (см. [5]).

Частным случаем интегрального оператора Урысона является оператор Гаммерштейна, заданный формулой

$$(Tf)(s) := \int_B K(s, t)N(t, f(t)) d\nu(t),$$

где  $K(\cdot, \cdot)$  — это  $\mu \times \nu$ -измеримая функция на  $A \times B$ , а  $N : B \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — такая функция, что  $u(t, \cdot)$  непрерывна на  $\mathbb{R}$  для  $\nu$ -почти всех  $t \in B$ ,  $N(\cdot, r)$   $\nu$ -измерима для любого  $r \in \mathbb{R}$  и  $N(t, 0) = 0$  для  $\nu$ -почти всех  $t \in B$  (для соблюдения условия C<sub>0</sub>).

Рассмотрим следующий типичный пример ортогонально аддитивного оператора.

**Пример 3.2.** Пусть  $(A, \Sigma, \mu)$  — пространство с конечной мерой. Будем говорить, что функция  $N : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  *суперпозиционно измерима* (*супер-измерима* для краткости), если функция  $N(\cdot, f(\cdot))$   $\mu$ -измерима для любой измеримой функции  $f \in L_0(\mu)$ . Супер-измеримая функция называется *нормализованной*, если  $N(s, 0) = 0$  для  $\mu$ -почти всех  $s \in A$ .

С каждой нормализованной супер-измеримой функцией  $N$  связан ортогонально аддитивный оператор  $\mathcal{N} : L_0(\mu) \rightarrow L_0(\mu)$ , заданный по следующему правилу:

$$\mathcal{N}(f)(s) = N(s, f(s)), \quad f \in L_0(\mu).$$

Ортогональная аддитивность оператора  $\mathcal{N}$  выводится из включения

$$\mathcal{N}(f) \in \{f\}^{\perp\perp}, \quad f \in L_0(\mu).$$

Действительно, для почти всех  $s \in A$  справедливо равенство

$$\mathcal{N}(f)(s) = N(s, f(s)) = N(s, f1_{\text{supp } f}(s)) = N(s, f(s))1_{\text{supp } f}(s).$$

Отсюда выводим, что  $\text{supp } \mathcal{N}(f) \subset \text{supp } f$ , в силу чего  $\mathcal{N}(f) \in \{f\}^{\perp\perp}$ . Операторы, обладающие данным свойством, называются *нерастягивающими*.

Оператор  $\mathcal{N}$  известен в литературе как *нелинейный оператор суперпозиции*, или *оператор Немыцкого* (см. [17]).

#### 4. ПРОЕКТИРОВАНИЕ НА ПОЛОСУ, ПОРОЖДЕННУЮ СЕМЕЙСТВОМ ОПЕРАТОРОВ

В данном разделе мы исследуем операторы порядкового проектирования в векторной решетке  $\mathcal{O}\mathcal{A}_r(E, F)$  на полосы, порожденные направленными вверх семействами положительных ОАО.

Для дальнейшего нам потребуется одно вспомогательное утверждение, доказанное методами булевозначного анализа.

**Лемма 4.1** (см. [7, теорема 10.4.8]). *Пусть  $F$  — порядково полная векторная решетка со слабой порядковой единицей  $u$ , а  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  — порядково ограниченная сеть в  $F$ . Тогда сеть  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  порядково сходится к элементу  $x \in F$  тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  найдется разбиение единицы  $(\rho_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  такое, что*

$$\rho_\lambda |x_\beta - x| \leq \varepsilon u, \quad \beta \geq \lambda.$$

**Лемма 4.2.** *Пусть  $E, F$  — векторные решетки, причем решетка  $F$  порядково полна, и  $\mathcal{A}$  — множество слабых порядковых единиц в  $F$ . Если операторы  $T, S \in \mathcal{O}\mathcal{A}_+(E, F)$  дизъюнкты, тогда для любых  $x \in E$ ,  $u \in \mathcal{A}$  и  $\varepsilon > 0$  найдется разбиение единицы  $(\pi_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$  в  $\mathfrak{P}(F)$  и семейство осколков  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$  элемента  $x$  такие, что*

$$\pi_\alpha(Tx_\alpha + S(x - x_\alpha)) \leq \varepsilon u \text{ для любого } \alpha \in \Delta.$$

*Доказательство.* Возьмем произвольный элемент  $x \in E$ . Через  $\Delta$  обозначим множество всех пар  $\alpha = (y, z) \in \mathcal{F}_x \times \mathcal{F}_x$  попарно дизъюнктных осколков элемента  $x$  таких, что  $y \sqcup z = x$ . Для любого  $\alpha = (y, x - y) \in \Delta$  положим  $f_\alpha = Ty + S(x - y)$ . Согласно формуле 2 леммы 3.1 дизъюнктность операторов  $S$  и  $T$  влечет равенство  $\inf_{\alpha \in \Delta} \{f_\alpha\} = 0$ . Обозначим через  $\Xi$  набор всех конечных подмножеств  $\Delta$ , упорядоченный по включению, т. е.  $\xi \leq \xi'$ , если  $\xi \subset \xi'$ . Рассмотрим множество  $(y_\xi)_{\xi \in \Xi}$  инфимумов всех конечных подмножеств множества  $\{f_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ , т. е. если  $\xi \in \Xi$  — конечное множество  $\xi = \{\alpha_{\xi_1}, \dots, \alpha_{\xi_n}\}$ , где  $\alpha_{\xi_k} \in \Delta$  для любого  $k = 1, \dots, n$ , тогда

$$y_\xi = \bigwedge_{i=1}^n f_{\alpha_{\xi_i}}.$$

Отметим, что множество  $(y_\xi)_{\xi \in \Xi}$  является убывающей сетью и  $\sigma\text{-}\lim_{\xi \in \Xi} y_\xi = 0$ . Согласно лемме 4.1, для любого  $\varepsilon > 0$  и  $u \in \mathcal{A}$  существует разбиение единицы  $(\rho_\xi)_{\xi \in \Xi}$  в  $F$  такое, что

$$\rho_\xi(y_\xi) \leq \varepsilon u \text{ для любого } \xi \in \Xi.$$

Отсюда легко вывести, что  $\rho_\xi(f_\alpha) < \varepsilon u$ , если  $\xi = \alpha$ . отождествим  $F$  с векторной подрешеткой порядково полной векторной решетки  $C_\infty(Q)$  всех непрерывных функций, заданных на экстремальном компакте  $Q$ , принимающих бесконечные значения на нигде не плотных множества. При этом в качестве слабой порядковой единицы выбираем характеристическую функцию  $1_Q$  множества  $Q$ . Тогда порядковые проекторы  $(\rho_\xi)_{\xi \in \Xi}$  — это операторы умножения на характеристические функции  $1_{Q_\xi}$  открыто-замкнутых множеств. Супремум  $\sup_{\xi \in \Xi} \rho_\xi$  является тождественным оператором  $I_F$  на  $F$ . Для  $\xi \in \Xi$  и  $\alpha \in \Delta$  введем следующее множество:

$$A_\alpha^\xi = \{t \in Q_\xi : f_\alpha(t) < f_\beta(t), \beta \in \xi, \beta \neq \alpha\}$$

и обозначим через  $\overline{A_\alpha^\xi}$  его замыкание в  $Q_\xi$  и соответственно  $Q$ . Отметим, что  $\overline{A_\alpha^\xi}$  являются открыто-замкнутыми подмножествами  $Q$  для любого  $\xi \in \Xi$  и  $\alpha \in \Delta$ . Также отметим, что подмножества  $\overline{A_\alpha^\xi}$  попарно дизъюнкты в случае, когда  $\alpha \neq \alpha'$  либо  $\xi \neq \xi'$ . Через  $\rho_\alpha^\xi$  обозначим оператор умножения на характеристическую функцию  $1_{\overline{A_\alpha^\xi}}$ , т. е.  $\rho_\alpha^\xi(f) = f \cdot 1_{\overline{A_\alpha^\xi}}$  для любого элемента  $f \in C_\infty(Q)$ . Оператор  $\rho_\alpha^\xi$  является порядковым проектором в  $C_\infty(Q)$ , и включение  $\overline{A_\alpha^\xi} \subset Q_\xi$  влечет  $\rho_\alpha^\xi \leq \rho_\xi$ . Таким образом,  $\rho_\alpha^\xi(f_\alpha) \leq \varepsilon u$  для любого  $\alpha \in \Delta$  и  $\xi \in \Xi$ . Отсюда выводим, что порядковые проекторы  $\rho_\alpha^\xi$  попарно дизъюнкты в случае, когда  $\alpha \neq \alpha'$  или  $\xi \neq \xi'$ . Таким образом, порядковые проекторы  $\pi_\alpha = \sup_{\xi \in \Xi} \rho_\alpha^\xi$  и  $\pi_{\alpha'} = \sup_{\xi \in \Xi} \rho_{\alpha'}^\xi$  также дизъюнкты. Покажем, что  $\bigvee_\alpha \pi_\alpha = I_F$ . Предположим, что верно обратное утверждение. Тогда найдется порядковый проектор  $\varrho$ , который дизъюнктен всем порядковым проекторам  $\pi_\alpha$ , в силу чего  $\varrho$  дизъюнктен каждому проектору  $\rho_\xi$ . Это противоречит тому, что семейство  $(\rho_\xi)_{\xi \in \Xi}$  является разбиением единицы. Таким образом, семейство  $(\pi_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$  является разбиением единицы и

$$\pi_\alpha(Tx_\alpha + S(x - x_\alpha)) \leq \varepsilon u \text{ для любого } \alpha \in \Delta.$$

□

Следующая лемма представляет необходимые и достаточные условия дизъюнктности положительных ортогонально аддитивных операторов.

**Лемма 4.3.** Пусть  $E, F$  — векторные решетки, причем решетка  $F$  порядково полна. Операторы  $S, T \in \mathcal{O}A_+(E, F)$  являются дизъюнктными тогда и только тогда, когда для произвольных  $x \in E$  и  $\varepsilon > 0$  найдется разбиение единицы  $(\rho_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$  в  $F$  и семейство осколков  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \subset \mathfrak{F}_x$  такие, что неравенства

$$\rho_\alpha Tx_\alpha \leq \varepsilon Tx \quad \text{и} \quad \rho_\alpha S(x - x_\alpha) \leq \varepsilon Sx$$

выполняются для любых  $\alpha \in \Delta$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $S \wedge T = 0$ . Пусть  $u := Sx \wedge Tx + \rho_{Sx \wedge Tx}^\perp(Sx + Tx)$ . Тогда для  $v_1 = \rho_{Sx \wedge Tx}(Sx \vee Tx)$ ,  $v_2 = \rho_{Sx \wedge Tx}^\perp(Sx \vee Tx)$  и дизъюнкты  $v_1$  и  $v_2$  можем написать

$$\begin{aligned} Sx + Tx &= Sx \wedge Tx + Sx \vee Tx, \\ Sx \vee Tx &= v_1 + v_2. \end{aligned}$$

Отметим, что  $v_1 \in (Sx \wedge Tx)^{\perp\perp}$ . Если  $w \in F$  дизъюнктен  $u$ , то

$$w \perp (Sx \wedge Tx) \quad \text{и} \quad w \perp \rho_{Sx \wedge Tx}^\perp(Sx + Tx).$$

Отсюда выводим, что  $w \perp (Sx \wedge Tx)^{\perp\perp}$  и  $w \perp v_1$ . В силу  $Sx \vee Tx = \rho_{Sx \wedge Tx}(Sx \vee Tx) + \rho_{Sx \wedge Tx}^\perp(Sx \vee Tx)$  получаем, что  $w \perp \rho_{Sx \wedge Tx}^\perp(Sx \vee Tx)$ , т. е.  $w \perp v_2$ . Так как  $w \perp (v_1 + v_2)$  и  $w \perp (Sx \wedge Tx)^{\perp\perp}$ , то  $w \perp (Sx + Tx)$ . Таким образом,  $Sx + Tx \in \{u\}^{\perp\perp}$  и  $u$  — слабая порядковая единица в  $\{Sx + Tx\}^{\perp\perp}$ . Покажем, что

$$\rho_{Sx}u \leq Sx \quad \text{и} \quad \rho_{Tx}u \leq Tx.$$

Для этого сначала установим два вспомогательных равенства

$$(a) \quad \rho_{Sx} \circ \rho_{Sx \wedge Tx}^\perp Tx = 0 \quad \text{и} \quad (b) \quad \rho_{Sx} \circ \rho_{Sx \wedge Tx}^\perp(Sx + Tx) = \rho_{Sx \wedge Tx}^\perp Sx.$$

Тогда

$$\rho_{Sx} \circ \rho_{Sx \wedge Tx}^\perp Tx = \rho_{Sx \wedge Tx}^\perp \circ \rho_{Sx} Tx = \rho_{Sx \wedge Tx}^\perp \circ \rho_{Sx} \circ \rho_{Tx} Tx = \rho_{Sx \wedge Tx}^\perp \circ \rho_{Sx \wedge Tx} Tx = 0$$

и равенство (a) установлено. Равенство (b) следует из следующей цепочки формул:

$$\begin{aligned} \rho_{Sx} \circ \rho_{Sx \wedge Tx}^\perp(Sx + Tx) &= \\ &= \rho_{Sx} \circ \rho_{Sx \wedge Tx}^\perp Sx + \rho_{Sx} \circ \rho_{Sx \wedge Tx}^\perp Tx = \\ &= \rho_{Sx \wedge Tx}^\perp \circ \rho_{Sx} Sx + \rho_{Sx} \circ \rho_{Sx \wedge Tx}^\perp Tx = \rho_{Sx \wedge Tx}^\perp Sx + \rho_{Sx} \circ \rho_{Sx \wedge Tx}^\perp Tx = \\ &= \rho_{Sx \wedge Tx}^\perp Sx. \end{aligned}$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} \rho_{Sx}u &= \rho_{Sx}(Sx \wedge Tx + \rho_{Sx \wedge Tx}^\perp(Sx + Tx)) = \\ &= \rho_{Sx}(Sx \wedge Tx) + \rho_{Sx} \circ \rho_{Sx \wedge Tx}^\perp(Sx + Tx) = \\ &= \rho_{Sx \wedge Tx}(Sx \wedge Tx) + \rho_{Sx \wedge Tx}^\perp Sx = \\ &\leq \rho_{Sx \wedge Tx} Sx + \rho_{Sx \wedge Tx}^\perp Sx = Sx. \end{aligned}$$

Те же аргументы имеют место для  $\rho_{Tx}u$ .

Отметим, что элемент  $u+v$  будет слабой порядковой единицей в  $F$ , так как  $u$  — слабая порядковая единица в  $\{Sx+Tx\}^{\perp\perp}$ , а  $v$  — слабая порядковая единица в  $\{Sx+Tx\}^\perp$ . В силу дизъюнктивности  $T$  и  $S$ , применяя лемму 4.3, для любого  $\varepsilon > 0$  найдем разбиение единицы  $(\rho_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$  в  $F$  и семейство осколков  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$  элемента  $x$  такие, что

$$\rho_\alpha(Tx_\alpha + S(x - x_\alpha)) \leq \varepsilon u \text{ для любых } \alpha \in \Delta.$$

Таким образом, для любого  $\alpha \in \Delta$  имеем

$$\begin{aligned} \rho_\alpha Tx_\alpha &= \rho_{Tx} \circ \rho_\alpha Tx_\alpha \leq \rho_{Tx} \varepsilon u \leq \varepsilon Tx \text{ и} \\ \rho_\alpha S(x - x_\alpha) &= \rho_{Sx} \circ \rho_\alpha S(x - x_\alpha) \leq \rho_{Sx} \varepsilon u \leq \varepsilon Sx. \end{aligned}$$

Докажем теперь обратное утверждение. Возьмем произвольный элемент  $x \in E$ . Требуется установить, что

$$(T \wedge S)x = \inf\{Ty + Sz : x = y \sqcup z\} = 0.$$

Согласно предположению, для любого  $\varepsilon > 0$  найдется разбиение единицы  $(\rho_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$  в  $F$  и семейство осколков  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \subset \mathcal{F}_x$  элемента  $x$ , удовлетворяющие необходимым вышеуказанным условиям. Тогда можем написать

$$\begin{aligned} (T \wedge S)x &= \inf_{y \in \mathcal{F}_x} \{Ty + Sz : x = y \sqcup (x - y)\} \leq \\ &\leq \inf_{\alpha \in \Delta} \{Tx_\alpha + S(x - x_\alpha)\} = \\ &= \sup_{\alpha \in \Delta} \rho_\alpha \left( \inf_{\alpha \in \Delta} \{Tx_\alpha + S(x - x_\alpha)\} \right) = \\ &= \sup_{\alpha \in \Delta} \rho_\alpha (Tx_\alpha + S(x - x_\alpha)) \leq \varepsilon (Tx + Sx). \end{aligned}$$

В силу произвольности  $\varepsilon > 0$  окончательно получаем  $(T \wedge S)x = 0$ . □

Для множества  $A \subset \mathcal{O}\mathcal{A}_r(E, F)$  через  $\pi_A$  обозначим порядковый проектор в  $\mathcal{O}\mathcal{A}_r(E, F)$  на полосу  $A^{\perp\perp}$ , порожденную  $A$ , а через  $\pi_A^\perp = (\pi_A)^\perp$  обозначим проектор на дополнительную полосу  $A^\perp$ .

Множество  $A \subset \mathcal{O}\mathcal{A}_+(E, F)$  называется *направленным вверх*, если для любых  $R, T \in A$  найдется оператор  $G \in A$  такой, что  $R, T \leq G$ . Следующая теорема устанавливает правило вычисления проекции на полосу, порожденную направленным вверх множеством положительных ортогонально аддитивных операторов.

**Теорема 4.1.** Пусть  $E, F$  — векторные решетки, причем решетка  $F$  порядково полна,  $A \subset \mathcal{O}\mathcal{A}_+(E, F)$  — направленное вверх множество. Тогда для произвольных  $T \in \mathcal{O}\mathcal{A}_+(E, F)$   $x \in E$  имеют место формулы:

$$(\pi_A T)(x) = \sup_{\substack{\varepsilon > 0 \\ S \in A}} \inf_{\substack{y \in \mathcal{F}_x \\ \rho \in \mathfrak{P}(F)}} \{\rho Ty + \rho^\perp Tx : \rho S(x - y) \leq \varepsilon Sx\}, \quad (4.1)$$

$$(\pi_A^\perp T)(x) = \inf_{\substack{\varepsilon > 0 \\ S \in A}} \sup_{\substack{y \in \mathcal{F}_x \\ \rho \in \mathfrak{P}(F)}} \{\rho Ty : \rho S y \leq \varepsilon Sx\}. \quad (4.2)$$

*Доказательство.* Достаточно доказать вторую формулу. Для произвольного  $x \in E$  обозначим правую часть равенства (4.2) через  $\eta(T)(x)$ . Покажем, что  $\eta(T) \in \mathcal{O}\mathcal{A}_+(E, F)$ . Пусть  $x = x_1 \sqcup x_2$ . Используя лемму 2.1, выводим, что каждый осколок  $y \in \mathcal{F}_x$  представляется в виде  $y = y_1 \sqcup y_2$ , где  $y_i \in \mathcal{F}_{x_i}$ ,  $i = 1, 2$ . Отметим, что  $\eta(T)(z) \geq 0$  для любого  $z \in E$  в силу положительности  $T : E \rightarrow F$ . Отсюда получаем, что  $\eta(T) : E \rightarrow F$  — положительный ортогонально аддитивный оператор. Для

$T \in \mathcal{OA}_+(E, F)$  положим  $\kappa(T) = T - \eta(T)$ . Теперь покажем, что  $\kappa(T) = \pi_A T$ . Действительно, так как для любых  $y \in \mathcal{F}_x$  и  $\rho \in \mathfrak{P}(F)$

$$Tx = \rho T y + \rho^\perp T y + T(x - y) = \rho T y + \rho^\perp T y + \rho^\perp T(x - y) + \rho T(x - y),$$

в силу чего

$$Tx - \rho T y = \rho^\perp T x + \rho T(x - y),$$

то выводим

$$\begin{aligned} \kappa(T)(x) &= Tx - \eta(T)(x) = \\ &= \sup_{\substack{\varepsilon > 0 \\ S \in A}} \inf_{\substack{y \in \mathcal{F}_x \\ \rho \in \mathfrak{P}(F)}} \{Tx - \rho T y : \rho S y \leq \varepsilon S x\} = \\ &= \sup_{\substack{\varepsilon > 0 \\ S \in A}} \inf_{\substack{y \in \mathcal{F}_x \\ \rho \in \mathfrak{P}(F)}} \{\rho^\perp T x + \rho T(x - y) : \rho S y \leq \varepsilon S x\}, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\kappa(T)(x) = \sup_{\substack{\varepsilon > 0 \\ S \in A}} \inf_{\substack{y \in \mathcal{F}_x \\ \rho \in \mathfrak{P}(F)}} \{\rho^\perp T x + \rho T y : \rho S(x - y) \leq \varepsilon S x\}.$$

Порядковый идеал, порожденный множеством  $A$ , порядково плотен в векторной решетке  $A^{\perp\perp}$ , в силу чего найдется операторная сеть  $(T_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \subset \mathcal{OA}_+(E, F)$ , где

$$T_\gamma = \sum_{i=1}^{n(\gamma)} \lambda_i S_i, \quad \text{где } S_i \in A, \quad n(\gamma) \in \mathbb{N}, \quad \gamma \in \Gamma, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}_+$$

и  $T_\gamma \uparrow \pi_A T$ . Используя тот факт, что множество  $A$  направлено вверх, получаем

$$(T_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \subset \bigcup_{\substack{S \in A \\ n \in \mathbb{N}}} [0, nS].$$

Зафиксируем некоторый индекс  $\gamma_0 \in \Gamma$ . Тогда  $T_{\gamma_0} \leq nS_0$  для некоторого  $S_0 \in A$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Для произвольного  $\varepsilon > 0$  найдется проектор  $\rho \in \mathfrak{P}(F)$  и осколок  $y \in \mathcal{F}_x$  такие, что  $\rho S_0(x - y) \leq \varepsilon S_0 x$ . Заметим, что множество таких проекторов и осколков непусто. Действительно, достаточно взять  $y = x$  и произвольный проектор  $\rho \in \mathfrak{P}(F)$ . Следовательно, для  $y$  и  $\rho$  в силу  $T_{\gamma_0} \leq \pi_A T \leq T$  выводим

$$T_{\gamma_0} x \leq \rho T_{\gamma_0}(x - y) + \rho T y + \rho^\perp T x \leq \rho n S_0(x - y) + \rho T y + \rho^\perp T x \leq \varepsilon n S_0 x + \rho T y + \rho^\perp T x.$$

Переходя к сначала инфимуму относительно  $y \in \mathcal{F}_x$  и  $\rho \in \mathfrak{P}(F)$ , а затем к супремуму относительно  $\varepsilon > 0$  и  $S \in A$  в правой части вышеприведенного неравенства, получаем следующую цепочку формул:

$$\begin{aligned} T_{\gamma_0} x &\leq \varepsilon n S_0 x + \inf_{\substack{y \in \mathcal{F}_x \\ \rho \in \mathfrak{P}(F)}} \{\rho T y + \rho^\perp T x : \rho S_0(x - y) \leq \varepsilon S_0 x\} \leq \\ &\leq \varepsilon n S_0 x + \sup_{\substack{\varepsilon > 0 \\ S \in A}} \inf_{\substack{y \in \mathcal{F}_x \\ \rho \in \mathfrak{P}(F)}} \{\rho T y + \rho^\perp T x : \rho S(x - y) \leq \varepsilon S x\} \leq \\ &\leq \varepsilon n S_0 x + \kappa(T)(x). \end{aligned}$$

В силу произвольности  $\varepsilon$  получаем, что  $T_{\gamma_0} x \leq \kappa(T)(x)$ . Тогда  $\sup_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma x \leq \kappa(T)(x)$  и

$$(\pi_A T)x = \sup_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma x \leq \kappa(T)(x) \Rightarrow \eta(T)(x) \leq (\pi_A^\perp T)x.$$

В силу произвольности  $x \in E$  получаем  $\eta(T) \leq \pi_A^\perp T$ .

Докажем теперь обратное неравенство. Для произвольного  $T \in \mathcal{OA}_+(E, F)$  можем написать

$$\eta(\pi_A^\perp T) \leq \eta(T) = \eta(\pi_A^\perp T) + \eta(\pi_A T).$$

С другой стороны, имеем

$$\eta(\pi_A T) \leq \pi_A^\perp \pi_A T = 0.$$

Тогда  $\eta(T) = \eta(\pi_A^\perp T)$  и  $\kappa T = T - \eta T = \pi_A T + \pi_A^\perp T - \eta(\pi_A^\perp T)$ . В завершение осталось показать, что  $\eta(\pi_A^\perp T) = \pi_A^\perp T$ . Пусть  $C = \pi_A^\perp T$  и  $S \in A$ . Тогда  $C \geq 0$  и  $C \wedge S = 0$ . Если  $\kappa(C) = 0$ , то равенство  $\kappa(\pi_A^\perp T) = \pi_A^\perp T - \eta(\pi_A^\perp T)$  влечет  $\pi_A^\perp T = \eta(\pi_A^\perp T)$ .

Согласно лемме 4.3 для любого  $\varepsilon > 0$  и  $x \in E$  найдется разбиение единицы  $(\rho_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$  в  $F$  и семейство осколков  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$  элемента  $x$  такие, что

$$\rho_\alpha C x_\alpha \leq \varepsilon C x \text{ и } \rho_\alpha S(x - x_\alpha) \leq \varepsilon S x.$$

Тогда

$$\varepsilon C x \geq \rho_\alpha C x_\alpha = \rho_\alpha (\rho_\alpha C x_\alpha + \rho_\alpha^\perp C x) \geq \rho_\alpha \inf_{\substack{y \in \mathcal{F}_x \\ \rho \in \mathfrak{P}(F)}} \{ \rho C y + \rho^\perp C x : \rho S(x - y) \leq \varepsilon S x \},$$

откуда выводим, что

$$\varepsilon C x \geq \sup_{\alpha \in \Delta} \rho_\alpha \inf_{\substack{y \in \mathcal{F}_x \\ \rho \in \mathfrak{P}(F)}} \{ \rho C y + \rho^\perp C x : \rho S(x - y) \leq \varepsilon S x \} = \inf_{\substack{y \in \mathcal{F}_x \\ \rho \in \mathfrak{P}(F)}} \{ \rho C y + \rho^\perp C x : \rho S(x - y) \leq \varepsilon S x \}.$$

Левая часть вышеприведенного неравенства не зависит от  $S$ . Кроме того, выражение в правой части возрастает при убывании  $\varepsilon$ . Для фиксированного  $\varepsilon_0 > 0$  получаем

$$\varepsilon_0 C x \geq \inf_{\substack{y \in \mathcal{F}_x \\ \rho \in \mathfrak{P}(F)}} \{ \rho C y + \rho^\perp C x : \rho S(x - y) \leq \varepsilon_0 S x \}$$

и для  $0 < \varepsilon' < \varepsilon_0$  имеем

$$\varepsilon_0 C x \geq \varepsilon' C x \geq \inf_{\substack{y \in \mathcal{F}_x \\ \rho \in \mathfrak{P}(F)}} \{ \rho C y + \rho^\perp C x : \rho S(x - y) \leq \varepsilon' S x \} \geq \inf_{\substack{y \in \mathcal{F}_x \\ \rho \in \mathfrak{P}(F)}} \{ \rho C y + \rho^\perp C x : \rho S(x - y) \leq \varepsilon_0 S x \}.$$

Отсюда выводим

$$\varepsilon_0 C x \geq \sup_{\substack{\varepsilon' > 0 \\ S \in A}} \inf_{\substack{y \in \mathcal{F}_x \\ \rho \in \mathfrak{P}(F)}} \{ \rho C y + \rho^\perp C x : \rho S(x - y) \leq \varepsilon' S x \}.$$

Таким образом,  $\varepsilon_0 C x \geq \kappa(C)$  для произвольного  $\varepsilon_0 > 0$  и следовательно  $\kappa(C) = 0$ .  $\square$

Для проектора на главную полосу в  $\mathcal{O}\mathcal{A}_+(E, F)$  формулы (4.1) и (4.2) упрощаются. Для  $S \in \mathcal{O}\mathcal{A}_+(E, F)$  порядковые проекторы на полосы  $\{S\}^{\perp\perp}$  и  $\{S\}^\perp$  обозначим через  $\pi_S$  и  $\pi_S^\perp$  соответственно.

**Замечание 4.1.** Пусть  $E, F$  — такие же, как в теореме 4.1. Тогда для произвольных  $S, T \in \mathcal{O}\mathcal{A}_+(E, F)$  и  $x \in E$  имеют место формулы:

$$\begin{aligned} (\pi_S T)x &= \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{\substack{y \in \mathcal{F}_x \\ \rho \in \mathfrak{P}(F)}} \{ \rho T y + \rho^\perp T x : \rho S(x - y) \leq \varepsilon S x \}, \\ (\pi_S^\perp T)x &= \inf_{\varepsilon > 0} \sup_{\substack{y \in \mathcal{F}_x \\ \rho \in \mathfrak{P}(F)}} \{ \rho T y : \rho S y \leq \varepsilon S x \}. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Формула для  $(\pi_S^\perp T)x$  получается следующим образом. Во-первых, отметим, что имеет место равенство  $\rho_{Sx}^\perp((\pi_S^\perp T)x) = \rho_{Sx}^\perp(Tx)$ . Действительно, элемент  $\rho_{Sx}^\perp$  лежит в полосе  $\mathfrak{P}(F)$ , в силу чего неравенство  $\rho_{Sx}^\perp S(x - 0) \leq \varepsilon S x$  выполняется для любого  $\varepsilon > 0$ . Отсюда выводим

$$\begin{aligned} \rho_{Sx}^\perp(\pi_S T)x &= \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{\substack{y \in \mathcal{F}_x \\ \rho \in \mathfrak{P}(F)}} \{ \rho_{Sx}^\perp(\rho T y + \rho^\perp T x) : \rho S(x - y) \leq \varepsilon S x \} \leq \\ &\leq \sup_{\varepsilon > 0} \{ \rho_{Sx}^\perp \circ (\rho_{Sx}^\perp(T0) + \rho_{Sx}^\perp(Tx)) : \rho_{Sx}^\perp S(x) \leq \varepsilon S x \} = \\ &= \rho_{Sx}^\perp \circ (\rho_{Sx}^\perp(T0) + \rho_{Sx}^\perp(Tx)) = \rho_{Sx}^\perp \circ \rho_{Sx}(Tx) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\rho_{Sx}^\perp(\pi_S T)x = 0$ . Во-вторых, для любого элемента  $\rho'(Ty)$  такого, что  $\rho' \in \mathfrak{P}(F)$  и  $y \in \mathcal{F}_x$ , справедливы формулы

$$(\rho_{Sx} \circ \rho')Ty = (\rho_{Sx} \wedge \rho')Ty = \rho(Ty),$$

где  $\rho \in [0, \rho_{Sx}]$ . Тогда можем написать

$$(\pi_S^\perp T)x = (\rho_{Sx}^\perp + \rho_{Sx})(\pi_S^\perp T)x = \rho_{Sx}^\perp(Tx) + \inf_{\varepsilon > 0} \sup_{\substack{y \in \mathfrak{F}_x \\ \rho \in [0, \rho_{Sx}]}} \{ \rho(Ty) : \rho(Sy) \leq \varepsilon S x \}.$$

□

Пусть  $E, F$  — векторные решетки. Зафиксируем  $\varphi \in \mathcal{O}\mathcal{A}_r(E, \mathbb{R})$ , и пусть  $u \in F$ . Тогда одномерный ортогонально аддитивный оператор  $\varphi \otimes u: E \rightarrow F$  задается формулой  $(\varphi \otimes u)x = \varphi(x)u$ . В качестве приложения мы найдем формулу проекции на полосу  $\{\varphi \otimes u\}^{\perp\perp}$  и полосу, дополнительную ей.

**Лемма 4.4.** Пусть  $E, F$  — такие же, как и в теореме 4.1,  $\varphi \otimes u$  — положительный ортогонально аддитивный оператор ранга 1, где  $\varphi \in \mathcal{O}\mathcal{A}_+(E, \mathbb{R})$ ,  $u \in F_+$  и  $T \in \mathcal{O}\mathcal{A}_+(E, F)$ . Тогда для любого  $x \in E$  справедливы следующие формулы:

$$(\pi_{\varphi \otimes u} T)x = \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{y \in \tilde{\mathcal{F}}_x} \{\rho_u(Ty) : \varphi(x - y) \leq \varepsilon \varphi(x)\}, \quad (4.3)$$

$$(\pi_{\varphi \otimes u}^\perp T)x = \rho_u^\perp(Tx) + \inf_{\varepsilon > 0} \sup_{y \in \tilde{\mathcal{F}}_x} \{\rho_u(Ty) : \varphi(y) \leq \varepsilon \varphi(x)\}. \quad (4.4)$$

*Доказательство.* Достаточно доказать формулу (4.4). Для  $\rho \in [0, \rho_u]$  выражение в правой части (4.3) может быть записано как  $\varphi(y)\rho u \leq \varepsilon \varphi(x)u$ . Согласно формуле

$$\sup_{0 \leq \rho \leq \rho_u} \varphi(y)\rho u = \varphi(y)\rho_u u = \varphi(y)u,$$

последнее неравенство равносильно неравенству  $\varphi(y) \leq \varepsilon \varphi(x)$ . Заметим, что для произвольного  $x \in E$  такого, что  $\varphi(x) > 0$ , справедлива формула

$$\varphi_{(\varphi \otimes u)x}(y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{y \wedge n\varphi(x)u\} = \rho_u(y), \quad y \in F.$$

Отсюда выводим  $\rho_{(\varphi \otimes u)x} = \rho_u$ . Таким образом,

$$\rho((\varphi \otimes u)y) = \varphi(y)\rho u \leq \varepsilon \varphi(x)u = \varepsilon(\varphi \otimes u)x,$$

т. е.  $\rho((\varphi \otimes u)x) \leq \varepsilon(\varphi \otimes u)x$ . Отсюда выводим, что супремум в правой части формулы (4.3) достигается, когда  $\rho = \rho_u$ . □

**Замечание 4.2.** Для любых  $S, T \in \mathcal{O}\mathcal{A}_+(E, F)$ ,  $e \in E$ , справедливы формулы:

$$\begin{aligned} \pi_S T e &= \sup_{\varepsilon > 0} \inf \{ \pi T f + \pi^\perp T e : f \in \mathcal{F}_e, \pi S(e - f) \leq \varepsilon S e \}, \\ r_S T e &= \inf_{\varepsilon > 0} \sup \{ \pi T f : f \in \mathcal{F}_e, \pi S f \leq \varepsilon S e \}. \end{aligned}$$

**Замечание 4.3.**

$$\begin{aligned} \pi_{\psi \otimes f} T e &= \sup_{\varepsilon > 0} \inf \{ \pi_f T e : \psi(e - g) \leq \varepsilon \psi(e), g \in \mathcal{F}_e \}; \\ r_{\psi \otimes f} T e &= \inf_{\varepsilon > 0} \sup \{ \pi_f T g : \psi(g) \leq \varepsilon \psi(e), g \in \mathcal{F}_e \}. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Достаточно доказать вторую формулу. Пусть  $\pi \in [0, \pi_f]$ . Если  $\pi S g \leq \varepsilon S e$ , то справедлива формула  $\psi(g)\pi f \leq \varepsilon \psi(e)f$ . Отсюда следует, что  $\psi(g) \leq \varepsilon \psi(e)$ . Кроме того, если  $e \in E$  и  $\psi(e) \neq 0$ , то  $\pi_{S e} = \pi_f$ . Условие  $\pi S g \leq \varepsilon S e$  не зависит от  $\pi$ . Поэтому верхняя грань достигается при  $\pi = \pi_f$ . Отсюда получаем

$$r_S T e = \inf_{\varepsilon > 0} \sup \{ \pi_f T g : \psi(g) \leq \varepsilon \psi(e), g \in \mathcal{F}_e \}.$$

□

## 5. ПРОЕКТИРОВАНИЕ НА ПОЛОСУ ЛАТЕРАЛЬНО НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В настоящем разделе мы продолжим начатое в работе [30] исследование порядковых проекторов на полосу латерально непрерывных операторов в  $\mathcal{O}\mathcal{A}_r(E, F)$ . Если для линейного регулярного оператора в векторной решетке естественной областью определения является порядковый идеал, то для ортогонально аддитивного оператора такой областью является в общем случае нелинейное множество, обладающее некоторой специфической структурой. Дадим точное определение.

Подмножество  $D$  векторной решетки  $E$  называется *латеральным идеалом*, если выполняются следующие условия:

- если  $x \in D$ , то  $y \in D$  для любого  $y \in \mathcal{F}_x$ ;
- если  $x, y \in D$ ,  $x \perp y$ , то  $x + y \in D$ .

Приведем некоторые примеры.

**Пример 5.1.** Пусть  $E$  — векторная решетка. Каждый порядковый идеал в  $E$  является латеральным идеалом.

**Пример 5.2.** Пусть  $E$  — векторная решетка и  $x \in V$ . Тогда  $\mathcal{F}_x$  — это латеральный идеал.

**Пример 5.3.** Пусть  $E, F$  — векторные решетки и  $T \in \mathcal{O}A_+(E, F)$ . Тогда  $\mathcal{K}_T := \{x \in E: Tx = 0\}$  является латеральным идеалом в  $E$ .

Говорят, что сеть  $(v_\alpha)_{(\alpha \in A)} \subset V$  латерально сходится к элементу  $v$ , если  $v = o\text{-}\lim_\alpha v_\alpha$  и  $(v_\alpha - v_\beta) \perp v_\beta$  для любых  $\alpha, \beta \in A, \beta \leq \alpha$ . При этом пишут  $v = l\text{-}\lim_\alpha v_\alpha$ . Ортогонально аддитивный оператор  $T$  называется латерально непрерывным (латерально  $\sigma$ -непрерывным), если для всякой латерально сходящейся сети  $(f_\alpha)$  (последовательности  $(f_n)$ ) такой, что  $f = l\text{-}\lim_\alpha f_\alpha$  ( $f = l\text{-}\lim_n f_n$ ), выполняется  $Tf = o\text{-}\lim_\alpha Tf_\alpha$  (соответственно  $Tf = o\text{-}\lim_n Tf_n$ ).

Если  $T$  — ортогонально аддитивный оператор, то следующие условия эквивалентны:

1.  $T$  — латерально  $\sigma$ -непрерывный оператор;
2. для каждой последовательности  $(f_n)_{n=1}^\infty$  попарно дизъюнктивных элементов справедлива импликация  $\sum_{k=1}^\infty f_k = f \Rightarrow \sum_{k=1}^\infty Tf_k = Tf$ .

Множество всех латерально непрерывных (латерально  $\sigma$ -непрерывных) ортогонально аддитивных операторов обозначается через  $\mathcal{O}A_c(E, F)$  ( $\mathcal{O}A_{\sigma,c}(E, F)$ ). Если  $E$  и  $F$  — векторные решетки и решетка  $F$  порядково полна, то пространства  $\mathcal{O}A_c(E, F)$  ( $\mathcal{O}A_{\sigma,c}(E, F)$ ) являются полосами в  $\mathcal{O}A_r(E, F)$  (см. [30, Theorem 3.13]). Для векторной решетки  $E$  множество  $M \subset E$  называется латерально замкнутым ( $\sigma$ -латерально замкнутым), если оно содержит пределы всех латерально сходящихся сетей (последовательностей), составленных из элементов  $M$ .

**Пример 5.4.** Нелинейный оператор суперпозиции  $\mathcal{N}: L_0(\mu) \rightarrow L_0(\mu)$  из примера 3.2 является латерально непрерывным (см. [19, Proposition 3.2]).

**Пример 5.5.** Каждый интегральный оператор Урысона  $T: E \rightarrow F$  является  $\sigma$ -латерально непрерывным (см. [24, Proposition 2.9]).

В [30] был установлен следующий критерий латеральной непрерывности. Пусть  $T: E \rightarrow F$  — положительный ортогонально аддитивный оператор,  $E$  — произвольная векторная решетка и  $F$  — порядково полная векторная решетка. Множество векторов, на которых оператор  $T$  обращается в нуль, называется ядром оператора и обозначается  $\ker(T)$ . Оператор  $T$  латерально непрерывен (латерально  $\sigma$ -непрерывен) тогда и только тогда, когда ядро любого оператора  $S \in \mathcal{O}A_+(E, F)$ ,  $0 \leq S \leq T$ , латерально замкнуто (латерально  $\sigma$ -замкнуто). В [30] также были указаны формулы проекции положительного ортогонально аддитивного оператора на полосы латерально непрерывных и латерально  $\sigma$ -непрерывных операторов. С каждым положительным ортогонально аддитивным оператором  $T: E \rightarrow F$  свяжем операторы  $T_c$  и  $T_{\sigma c}$ , определяемые по формулам:

$$T_c u := \inf \left\{ \sup_\alpha T u_\alpha : u = l\text{-}\lim_\alpha u_\alpha \right\};$$

$$T_{\sigma c} u := \inf \left\{ \sup_n T u_n : u = l\text{-}\lim_n u_n \right\}.$$

Инфимум берется по всем сетям  $u_\alpha$ , латерально сходящимся к  $u$ . Аналогично и в отношении последовательностей. Операторы  $T_c$  и  $T_{\sigma c}$  являются проекциями положительного оператора  $T$  на полосы латерально непрерывных и латерально  $\sigma$ -непрерывных операторов соответственно и называются латерально непрерывной и латерально  $\sigma$ -непрерывной составляющей оператора  $T$ .

Ниже мы рассмотрим проблему вычисления латерально непрерывной составляющей ортогонально аддитивного оператора с более общих позиций, используя порядковое проектирование в векторной решетке  $\mathcal{O}A_r(E, F)$ . Отметим также, что интерес вызывает изучение полосы  $\mathcal{O}A_c^\perp(E, F)$ , дизъюнктивной полосы латерально непрерывных операторов. Пусть  $E$  — векторная решетка. Латеральный идеал  $I \subset E$  называется латерально плотным ( $\sigma$ -латерально плотным), если для любого  $e \in E$  найдется сеть  $(e_\alpha)$  в  $I$  (найдется последовательность  $(e_n)$  в  $I$ ) такая, что  $e_\alpha$  латерально сходится к  $e$  ( $e_n$  латерально сходится к  $e$ ). Для дальнейшего важно отметить, что для

любого латерально плотного латерального идеала ( $\sigma$ -латерально плотного латерального идеала) его латеральное замыкание (латеральное  $\sigma$ -замыкание) совпадает с  $E$ .

Всюду ниже будем полагать, что  $E$  — это векторная решетка с проекциями на главные полосы,  $F$  — порядково полная векторная решетка. Оператор  $T \in \mathcal{O}\mathcal{A}_r(E, F)$  называется *сингулярным* ( $\sigma$ -сингулярным), если он равен нулю на некотором латерально плотном латеральном идеале ( $\sigma$ -латерально плотном латеральном идеале). Множество всех сингулярных ( $\sigma$ -сингулярных) операторов обозначим через  $\mathcal{O}\mathcal{A}_s(E, F)$  ( $\mathcal{O}\mathcal{A}_{\sigma s}(E, F)$ ).

**Теорема 5.1.**  $\mathcal{O}\mathcal{A}_c(E, F) = \mathcal{O}\mathcal{A}_s^\perp(E, F)$ , т. е. классы латерально непрерывных операторов и операторов, дизъюнктивных сингулярным, совпадают.

*Доказательство.* Рассуждения достаточно провести для положительных операторов. Пусть положительный ортогонально аддитивный оператор  $T$  латерально непрерывен. Допустим, что  $T \notin \mathcal{O}\mathcal{A}_s^\perp(E, F)$ . Тогда существует регулярный ортогонально аддитивный оператор  $S \in \mathcal{O}\mathcal{A}_c(E, F)$ ,  $S > 0$ , для которого  $G := T \wedge S > 0$ . Так как  $0 \leq G \leq S$ , то  $G$  равен нулю на некотором латерально плотном латеральном идеале. Но, с другой стороны,  $G \in \mathcal{O}\mathcal{A}_c(E, F)$ . Следовательно, оператор  $G$  тождественно равен нулю. Обратно, пусть  $T \in \mathcal{O}\mathcal{A}_s^\perp(E, F)$  и  $T \geq 0$ . Покажем, что  $T$  — латерально непрерывный оператор. Предположим, что существует сеть  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ , латерально сходящаяся к  $x$  и удовлетворяющая неравенству  $y = o\text{-}\lim_\alpha T x_\alpha < T x$ . Через  $\pi_\alpha$  обозначим проектор на полосу  $\{x - x_\alpha\}^{\perp\perp}$ . Для каждого элемента  $e \in E$  положим

$$G e := o\text{-}\lim_\alpha T \pi_\alpha e.$$

Ясно, что соответствующие пределы существуют для всех  $e \in E$ . Таким образом, определен положительный ортогонально аддитивный оператор  $0 \leq G \leq T$  и, кроме того,  $G \in \mathcal{O}\mathcal{A}_s^\perp(E, F)$ . Оператор  $G$  ненулевой, так как

$$G x = o\text{-}\lim_\alpha T \pi_\alpha x = o\text{-}\lim_\alpha T(x - x_\alpha) = T x - o\text{-}\lim_\alpha T x_\alpha > 0.$$

Теперь покажем, что оператор  $G$  одновременно и сингулярный. Обозначим через  $E'$  множество всех  $e \in E$ , которые дизъюнктивны с некоторым  $x - x_{\alpha_0}$ . Если  $e \in E'$ , то  $G e = 0$ . Ясно, что  $E'$  — латеральный идеал в  $E$ . Докажем, что латеральный идеал  $E'$  латерально плотен в  $E$ . Если бы это было не так, то нашелся бы элемент  $e' > 0$ , который бы принадлежал всем полосам  $\{x - x_\alpha\}^{\perp\perp}$ . Пусть  $\pi_{e'}$  — проектор на полосу  $\{e'\}^{\perp\perp}$ . Тогда для любого индекса  $\alpha_0$  мы бы имели

$$0 < e' \wedge (x - x_{\alpha_0}) \leq \pi_{e'}(x - x_{\alpha_0}) \leq \pi_{\alpha_0}(x - x_{\alpha_0}).$$

Но последняя формула противоречит условию, что  $o\text{-}\lim_\alpha (x - x_\alpha) = 0$ . Таким образом,  $E'$  — латерально плотный латеральный идеал и оператор  $G$  сингулярен. Однако из определений следует, что оператор  $G$  нулевой. Полученное противоречие доказывает, что оператор  $T$  латерально непрерывен.  $\square$

С каждым латерально плотным латеральным идеалом  $I \subset E$  свяжем множество операторов  $\mathcal{N}_I := \{T \in \mathcal{O}\mathcal{A}_r(E, F) : I \subset \ker(T)\}$ .

**Лемма 5.1.** Множество  $\mathcal{N}_I$  является полосой в пространстве  $\mathcal{O}\mathcal{A}_r(E, F)$ . Проектор на полосу  $\mathcal{N}_I^\perp$  задается формулой

$$\pi_I T e = \sup\{T e' : e' \in I, e' \in \mathcal{F}_e\}.$$

*Доказательство.* Ясно, что для любых положительных  $T_1, T_2 \in \mathcal{N}_I$  их произвольная линейная комбинация также принадлежит  $\mathcal{N}_I$ . Кроме того, для операторов  $S, T \in \mathcal{O}\mathcal{A}_r(E, F)$  можно написать  $|S| \leq |T|$ ,  $T \in \mathcal{N}_I \Rightarrow S \in \mathcal{N}_I$ . Рассмотрим возрастающую сеть  $(T_\alpha \in \mathcal{N}_I)_{\alpha \in \Lambda}$ ,  $T = o\text{-}\lim_\alpha T_\alpha$ , и возьмем  $e \in I$ . Очевидно, что

$$T e = o\text{-}\lim_\alpha T_\alpha e = 0 \Rightarrow T \in \mathcal{N}_I.$$

Таким образом, множество  $\mathcal{N}_I$  является полосой в пространстве  $\mathcal{O}\mathcal{A}_r(E, F)$ . Чтобы установить, что оператор  $\pi_I$  является проектором на полосу  $\mathcal{N}_I$ , достаточно доказать, что для любого  $T \in \mathcal{O}\mathcal{A}_+(E, F)$  оператор  $\pi_I T$  ортогонально аддитивен и, кроме того, выполняются следующие соотношения:

1.  $0 \leq \pi_I T \leq T$ ;
2.  $\pi_I(\pi_I T) = \pi_I T$ ;
3.  $\pi_I T = T \Leftrightarrow T \in \mathcal{N}_I^\perp$ ;
4.  $\pi_I$  — линейный оператор.

Ортогональная аддитивность легко выводится, если принять во внимание, что для дизъюнктивных  $e, f \in E^+$  любой элемент  $0 \leq c \leq e + f$  допускает представление  $c = e' + f'$ , где  $0 \leq e' \leq e$  и  $0 \leq f' \leq f$ . Пусть  $e \in E$  и  $e' \in \mathcal{F}(e)$ . Тогда можем написать:

$$e = (e - e') + e'; Te = T((e - e') + e') = T(e - e') + Te' \geq Te' \Rightarrow \pi_I Te \leq Te.$$

Для оператора  $T \in \mathcal{O}\mathcal{A}_+(E, F)$  справедливы формулы:

$$\pi_I(\pi_I T)(e) = \sup\{\pi_I Te' : e' \in \mathcal{F}_e, e' \in I\} = \sup\{Te' : e' \in \mathcal{F}_e, e' \in I\} = \pi_I T.$$

Для доказательства пункта 3 установим следующее соотношение:

$$T \in \mathcal{I}_I^\perp \Leftrightarrow \forall e \in E, Te = \sup\{Te' : e' \in \mathcal{F}_e, e' \in I\}.$$

Действительно, пусть  $\forall e \in E, Te = \sup\{Te' : e' \in \mathcal{F}_e, e' \in I\}$  и существует оператор  $S \in \mathcal{N}_I, G := S \wedge T > 0$ . Теперь можем написать:

$$Ge - Ge' = G(e - e' + e') - Ge'G(e - e') \leq T(e - e') = Te - Te'.$$

Переходя к супремуму по всем  $e' \in \mathcal{F}_e, e' \in I$ , получим, что  $Ge = \sup\{Ge' : e' \in \mathcal{F}_e, e' \in I\}$ . Но так как  $\mathcal{N}_I$  является полосой и  $0 \leq G \leq S$ , то  $G \in \mathcal{N}_I$  и  $G = 0$ . Обратно, пусть  $T \in \mathcal{N}_I^\perp$  и найдется такой  $e \in E, e \notin M$ , что  $Te - \sup\{Te' : e' \in \mathcal{F}_e, e' \in I\} > 0$ . В этом случае можно полагать, что неравенство

$$Te > \sup\{Te' : e' \in \mathcal{F}_e\}$$

имеет место. В противном случае заменим оператор  $T$  на оператор  $T'$ , определяемый формулой

$$T'(v) = \sup\{T(v'), v' \in \mathcal{F}_v, v' \in I\}.$$

Пусть  $Te - \sup\{Te' : e' \in \mathcal{F}_e\} = v > 0$ . Определим положительный ортогонально аддитивный оператор  $G$  формулой  $G := T - \pi_I T$ . Ясно, что  $Gf = 0$  для всех  $f \in I$ . Оператор  $G$  ненулевой, так как

$$Ge = Te - \sup\{Te' : e' \in I, e' \in \mathcal{F}_e\} > 0.$$

Итак, оператор  $G$  определен корректно,  $G \in \mathcal{N}_I$  и  $Ge > 0$ . Далее, по условию  $T \perp G$ . Отсюда получаем

$$\begin{aligned} T(e) &< T(e) + G(e) = (T + G)(e) = (T \vee G)(e) = \\ &= \sup\{T(e_1) + G(e_2) : e_1 + e_2 = e, e_1 \perp e_2\} = \\ &= \sup\{T(e) - \pi_I T(e_2) : e_2 \in \mathcal{F}_e\} \leq T(e). \end{aligned}$$

Получили противоречие, доказывающее пункт 3. Далее для  $T, S \in \mathcal{O}\mathcal{A}_+(E, F)$  очевидно, что  $\pi_I(T + S) \leq \pi_I(S) + \pi_I(T)$ . Докажем противоположное неравенство. Для этого возьмем  $e_1, e_2 \in \mathcal{F}_e$  и положим  $e_0 = e_1 \cap e_2$ , где  $e_1 \cap e_2$  — латеральный инфимум  $e_1$  и  $e_2$  (см. [25]). Латеральный супремум элементов  $e_1$  и  $e_2$  обозначим через  $e_1 \cup e_2$ . Далее положим  $e' := e_1 - e_0$  и  $e'' := e_2 - e_0$ . Тогда

$$\begin{aligned} e_0, e', e'' \in \mathcal{F}_e, e' \perp e'', e' \perp e_0, e'' \perp e_0, \\ e_1 \cup e_2 = e' \sqcup e'' \sqcup e_0 \in \mathcal{F}_e. \end{aligned}$$

Теперь можем написать

$$\begin{aligned} Se_1 + Te_2 &= S(e' \sqcup e_0) + T(e'' \sqcup e_0) \leq \\ &\leq S(e' \sqcup e_0 \sqcup e'') + T(e' \sqcup e_0 \sqcup e'') = \\ &= (S + T)(e_1 \cup e_2) = \pi_I(T + S)(e). \end{aligned}$$

Переходя в этом неравенстве к супремуму сначала по  $e_1 \in \mathcal{F}_e$ , а затем по  $e_2 \in \mathcal{F}_e$ , получим

$$\pi_I S + \pi_I T \leq \pi_I(S + T) = \pi_I S + \pi_I T,$$

что доказывает аддитивность  $\pi_I$ . Однородность оператора  $\pi_I$  очевидна.  $\square$

Напомним, что семейство множеств  $\mathfrak{A}$  называется *насыщенным вверх*, если  $\forall A \in \mathfrak{A}, B \supset A \Rightarrow B \in \mathfrak{A}$ .

**Лемма 5.2.** Пусть  $\mathfrak{A}$  — насыщенное вверх семейство латерально плотных латеральных идеалов. Тогда оператор  $\pi_{\mathfrak{A}} := \inf\{\pi_I : I \in \mathfrak{A}\}$  является проектором на полосу  $\mathcal{O}\mathfrak{A}_{\mathfrak{A}}(E, F)^{\perp}$ , где  $\mathcal{O}\mathfrak{A}_{\mathfrak{A}}(E, F) = \{T \in \mathcal{O}\mathfrak{A}_r(E, F) : \forall I \in \mathfrak{A}, I \subset \ker(T)\}$ .

*Доказательство.* Оператор  $\pi_{\mathfrak{A}}$  является проектором на некоторую полосу в пространстве  $\mathcal{O}\mathfrak{A}_r(E, F)$ . Обозначим через  $\sigma$  проектор на полосу  $\mathcal{O}\mathfrak{A}_{\mathfrak{A}}(E, F)^{\perp}$  и покажем, что  $\pi_{\mathfrak{A}} = \sigma$ . Если  $T \in \mathcal{O}\mathfrak{A}_+(E, F)$ , то  $\pi_{\mathfrak{A}}T \leq \pi_{\ker(T)}T = 0$ . Значит,  $\pi_{\mathfrak{A}} \leq \sigma$ . Пусть теперь  $T \in \mathcal{O}\mathfrak{A}_{\mathfrak{A}}(E, F)^{\perp}$ . Для любого латерально плотного латерального идеала  $I \in \mathfrak{A}$  оператор  $T - \pi_I T$  равен нулю на  $I$ . Так как

$$T - \pi_I T = (I - \pi_I T) \geq (I - \pi_{\mathfrak{A}} T),$$

то оператор  $T - \pi_{\mathfrak{A}} T$  равен нулю на любом латерально плотном латеральном идеале  $I \in \mathfrak{A}$ . Отсюда следует, что  $T - \pi_{\mathfrak{A}} T \in \mathcal{O}\mathfrak{A}_{\mathfrak{A}}(E, F) \cap \mathcal{O}\mathfrak{A}_{\mathfrak{A}}(E, F)^{\perp} = \{0\}$ . Таким образом, получаем, что  $T = \pi_{\mathfrak{A}} T$  и  $\pi_{\mathfrak{A}} = \sigma$ .  $\square$

**Замечание 5.1.** Пусть  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{A}_{\sigma}$  обозначают множества латерально плотных латеральных идеалов и  $\sigma$ -латерально плотных латеральных идеалов соответственно. Тогда проекторы

$$\pi_c = \inf\{\pi_A : A \in \mathfrak{A}\}, \quad \pi_{\sigma c} := \inf\{\pi_A : A \in \mathfrak{A}_{\sigma}\}$$

являются проекторами в пространстве  $\mathcal{O}\mathfrak{A}_r(E, F)$  на полосы  $\mathcal{O}\mathfrak{A}_s(E, F)^{\perp}$  и  $\mathcal{O}\mathfrak{A}_{s\sigma}(E, F)^{\perp}$  соответственно.

Из теоремы 5.1 следует, что  $\pi_c$  и  $\pi_{\sigma c}$  являются проекторами на полосы  $\mathcal{O}\mathfrak{A}_c(E, F)$  и  $\mathcal{O}\mathfrak{A}_{c\sigma}(E, F)$ .

**Замечание 5.2.** Для любого оператора  $T \in \mathcal{O}\mathfrak{A}_+(E, F)$  справедливы следующие формулы (см. [30]):

$$T_c v = \inf\{\sup_{\alpha} T v_{\alpha} : v = l\text{-}\lim_{\alpha} v_{\alpha}\}, \quad T_{\sigma c} v = \inf\{\sup_n T v_n : v = l\text{-}\lim_n v_n\}.$$

*Доказательство.* Докажем первую формулу, вторая доказывается аналогично. С оператором  $T$  и элементом  $v$  свяжем выражение

$$G(T, v) = \inf\{\sup_{\alpha} T v_{\alpha} : v = l\text{-}\lim_{\alpha} v_{\alpha}\}.$$

Для каждой сети  $(v_{\alpha}), v = l\text{-}\lim_{\alpha} v_{\alpha}$  рассмотрим семейство латерально плотных латеральных идеалов  $\mathfrak{C}(v)$ , содержащих сеть  $(v_{\alpha})$ . Ясно, что  $\sup T v_{\alpha} \leq \pi_I T v$ , где  $I \in \mathfrak{C}(v)$ . В то же время каждый латерально плотный латеральный идеал  $I$  содержит некоторую сеть  $(v_{\alpha}), v = l\text{-}\lim_{\alpha} v_{\alpha}$ . Таким образом,  $G(T, v) \leq \pi_c T v$  и  $G(T - \pi_c T, v) \leq \pi_c (T - \pi_c T) v = 0$ . Оператор  $\pi_c T$  — латерально непрерывный. Ясно, что  $G(\pi_c T, v) = \pi_c T v$ . Далее можем написать

$$G(T, v) = G(\pi_c T, v) + G(T - \pi_c T, v),$$

в силу чего выводим, что  $G(T, v) = \pi_c T v$ .  $\square$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абасов Н. М. О сумме узких ортогонально аддитивных операторов // Изв. вузов. Сер. Мат. — 2020. — 64, № 7. — С. 3–9.
2. Колесников Е. В. Разложение положительного оператора // Сиб. мат. ж. — 1989. — 30, № 5. — С. 77–79.
3. Колесников Е. В. Несколько порядковых проекторов, поржденных идеалами векторной решетки // Сиб. мат. ж. — 1995. — 36, № 6. — С. 1342–1349.
4. Колесников Е. В. В тени положительного оператора // Сиб. мат. ж. — 1996. — 37, № 3. — С. 592–598.
5. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльников Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.
6. Курсаев А. Г. Мажорируемые операторы. — М.: Наука, 2003.
7. Курсаев А. Г., Кутателадзе С. С. Введение в булевозначный анализ. — М.: Наука, 2005.
8. Кутателадзе С. С. Об осколках положительных операторов // Сиб. мат. ж. — 1989. — 30, № 5. — С. 111–119.
9. Плиев М. А., Попов М. М. О продолжении абстрактных операторов Урысона // Сиб. мат. ж. — 2016. — 57, № 3. — С. 700–708.

10. *Abasov N.* Completely additive and  $C$ -compact operators in lattice-normed spaces// *Ann. Funct. Anal.* — 2020. — 11, № 4. — С. 914–928.
11. *Abasov N.* On band preserving orthogonally additive operators// *Sib. Èlektron. Mat. Izv.* — 2021. — 18, № 1. — С. 495–510.
12. *Abasov N.* On a band generated by a disjointness dreserving orthogonally additive operator// *Lobachevskii J. Math.* — 2021. — 42, № 5. — С. 851–856.
13. *Abasov N., Pliev M.* On extensions of some nonlinear maps in vector lattices// *J. Math. Anal. Appl.* — 2017. — 455, № 1. — С. 516–527.
14. *Aliprantis C., Burkinshaw O.* The components of the positive operator// *Math. Z.* — 1983. — 185. — С. 245–257.
15. *Aliprantis C., Burkinshaw O.* Projecting onto the band of kernel operators// *Houston J. Math.* — 1985. — 11, № 1. — С. 7–13.
16. *Aliprantis C., Burkinshaw O.* Positive Operators. — Dordrecht: Springer, 2006.
17. *Appell J., Zabrejko P. P.* Nonlinear superposition operators. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
18. *Ben Amor M., Pliev M.* Laterally continuous part of an abstract Uryson operator// *Int. J. Math. Anal.* — 2013. — 7, № 58. — С. 2853–2860.
19. *Erkursun Ozcan N., Pliev M.* On orthogonally additive operators in  $C$ -complete vector lattices// *Banach J. Math. Anal.* — 2022. — 16, № 1. — Article No. 6.
20. *Feldman W. A.* A factorization for orthogonally additive operators on Banach lattices// *J. Math. Anal. Appl.* — 2019. — 472, № 1. — С. 238–245.
21. *Fotiy O., Gumenchuk A., Krasikova I., Popov M.* On sums of narrow and compact operators// *Positivity.* — 2012. — 24, № 1. — С. 69–80.
22. *Huijsmans C. B., de Pagter B.* Disjointness preserving and diffuse operators// *Compos. Math.* — 1991. — 79. — С. 351–374.
23. *Mazón J. M., Segura de León S.* Order bounded ortogonally additive operators// *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* — 1990. — 35, № 4. — С. 329–353.
24. *Mazón J. M., Segura de León S.* Uryson operators// *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* — 1990. — 35, № 5. — С. 441–449.
25. *Mykhaylyuk V., Pliev M., Popov M.* The lateral order on Riesz spaces and orthogonally additive operators// *Positivity.* — 2021. — 25, № 2. — С. 291–327.
26. *de Pagter B.* The components of a positive operator// *Indag. Math.* — 1983. — 48. — С. 229–241.
27. *Pliev M.* On  $C$ -compact orthogonally additive operators// *J. Math. Anal. Appl.* — 2021. — 494. — Article No. 124594.
28. *Pliev M., Polat F., Weber M. R.* Narrow and  $C$ -compact orthogonally additive operators in lattice-normed spaces// *Results Math.* — 2019. — 74, № 4. — Article No. 157.
29. *Pliev M., Popov M.* Dominated Uryson operators// *Int. J. Math. Anal.* — 2014. — 8, № 22. — С. 1051–1059.
30. *Pliev M., Ramdane K.* Order unbounded orthogonally additive operators in vector lattices// *Mediterr. J. Math.* — 2018. — 15, № 2. — Article No. 55.
31. *Pliev M., Weber M. R.* Disjointness and order projections in the vector lattices of abstract Uryson operators// *Positivity.* — 2016. — 20, № 3. — С. 695–707.

Н. А. Джусоева

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ, Россия  
E-mail: [dhusoevanonna@rambler.ru](mailto:dhusoevanonna@rambler.ru)

С. Ю. Итарова

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ, Россия  
E-mail: [svetlana.itarova1991@gmail.com](mailto:svetlana.itarova1991@gmail.com)

М. А. Плиев

Южный математический институт ВНИЦ РАН, Владикавказ, Россия  
E-mail: [plimarat@yandex.ru](mailto:plimarat@yandex.ru)

## Order Projection in $\mathcal{O}\mathcal{A}_r(E, F)$

© 2022 N. A. Dzhusoeva, S. Yu. Itarova, M. A. Pliev

**Abstract.** We investigate order projections onto different bands in the space of all regular orthogonally additive operators. In particular, we obtain formulas for calculation of the order projections onto the band generated by a directed set of positive orthogonally additive operators and onto the band of all laterally continuous operators.

### REFERENCES

1. N. M. Abasov, “O summe uzkih ortogonal’no additivnykh operatorov” [On the sum of narrow orthogonally additive operators], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2020, **64**, No. 7, 3–9 (in Russian).
2. E. V. Kolesnikov, “Razlozhenie polozhitel’nogo operatora” [Expansion of a positive operator], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1989, **30**, No. 5, 77–79 (in Russian).
3. E. V. Kolesnikov, “Neskol’ko poryadkovykh proektorov, porzhdennykh idealami vektornoy reshetki” [Several order projectors generated by vector lattice ideals], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1995, **36**, No. 6, 1342–1349 (in Russian).
4. E. V. Kolesnikov, “V teni polozhitel’nogo operatora” [In the shadow of a positive operator], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1996, **37**, No. 3, 592–598 (in Russian).
5. M. A. Krasnosel’skii, P. P. Zabreyko, E. I. Pustyl’nik, and P. E. Sobolevskii, *Integral’nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsiy* [Integral Operators in Spaces of Summable Functions], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
6. A. G. Kusraev, *Mazhoriruemye operatory* [Majorized Operators], Nauka, Moscow, 2003 (in Russian).
7. A. G. Kusraev and S. S. Kutateladze, *Vvedenie v bulevoznachnyy analiz* [Introduction to Boolean-Valued Analysis], Nauka, Moscow, 2005 (in Russian).
8. S. S. Kutateladze, “Ob oskol’kakh polozhitel’nykh operatorov” [On fragments of positive operators], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1989, **30**, No. 5, 111–119 (in Russian).
9. M. A. Pliev and M. M. Popov, “O prodolzhenii abstraktnykh operatorov Urysona” [On the extension of abstract Urysohn operators], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 2016, **57**, No. 3, 700–708 (in Russian).
10. N. Abasov, “Completely additive and C-compact operators in lattice-normed spaces,” *Ann. Funct. Anal.*, 2020, **11**, No. 4, 914–928.
11. N. Abasov, “On band preserving orthogonally additive operators,” *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2021, **18**, No. 1, 495–510.
12. N. Abasov, “On a band generated by a disjointness dreserving orthogonally additive operator,” *Lobachevskii J. Math.*, 2021, **42**, No. 5, 851–856.
13. N. Abasov and M. Pliev, “On extensions of some nonlinear maps in vector lattices,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2017, **455**, No. 1, 516–527.
14. C. Aliprantis and O. Burkinshaw, “The components of the positive operator,” *Math. Z.*, 1983, **185**, 245–257.
15. C. Aliprantis and O. Burkinshaw, “Projecting onto the band of kernel operators,” *Houston J. Math.*, 1985, **11**, No. 1, 7–13.
16. C. Aliprantis and O. Burkinshaw, *Positive Operators*, Springer, Dordrecht, 2006.
17. J. Appell and P. P. Zabrejko, *Nonlinear superposition operators*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
18. Ben M. Amor and M. Pliev, “Laterally continuous part of an abstract Uryson operator,” *Int. J. Math. Anal.*, 2013, **7**, No. 58, 2853–2860.

19. N. Erkursun Ozcan and M. Pliev, “On orthogonally additive operators in  $C$ -complete vector lattices,” *Banach J. Math. Anal.*, 2022, **16**, No. 1, Article No. 6.
20. W. A. Feldman, “A factorization for orthogonally additive operators on Banach lattices,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2019, **472**, No. 1, 238–245.
21. O. Fotiy, A. Gumenchuk, I. Krasikova, M. Popov, “On sums of narrow and compact operators,” *Positivity*, 2012, **24**, No. 1, 69–80.
22. C. B. Huijsmans and B. de Pagter, “Disjointness preserving and diffuse operators,” *Compos. Math.*, 1991, **79**, 351–374.
23. J. M. Mazón and S. Segura de León, “Order bounded orthogonally additive operators,” *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 1990, **35**, No. 4, 329–353.
24. J. M. Mazón and S. Segura de León, “Uryson operators,” *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 1990, **35**, No. 5, 441–449.
25. V. Mykhaylyuk, M. Pliev, and M. Popov, “The lateral order on Riesz spaces and orthogonally additive operators,” *Positivity*, 2021, **25**, No. 2, 291–327.
26. B. de Pagter, “The components of a positive operator,” *Indag. Math.*, 1983, **48**, 229–241.
27. M. Pliev, “On  $C$ -compact orthogonally additive operators,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2021, **494**, Article No. 124594.
28. M. Pliev, F. Polat, and M. R. Weber, “Narrow and  $C$ -compact orthogonally additive operators in lattice-normed spaces,” *Results Math.*, 2019, **74**, No. 4, Article No. 157.
29. M. Pliev and M. Popov, “Dominated Uryson operators,” *Int. J. Math. Anal.*, 2014, **8**, No. 22, 1051–1059.
30. M. Pliev and K. Ramdane, “Order unbounded orthogonally additive operators in vector lattices,” *Mediterr. J. Math.*, 2018, **15**, No. 2, Article No. 55.
31. M. Pliev and M. R. Weber, “Disjointness and order projections in the vector lattices of abstract Uryson operators,” *Positivity*, 2016, **20**, No. 3, 695–707.

N. A. Dzhusoeva

North Ossetian State University named after K. L. Khetagurov, Vladikavkaz, Russia

E-mail: [dhusoevanonna@rambler.ru](mailto:dhusoevanonna@rambler.ru)

S. Yu. Itarova

North Ossetian State University named after K. L. Khetagurov, Vladikavkaz, Russia

E-mail: [svetlana.itarova1991@gmail.com](mailto:svetlana.itarova1991@gmail.com)

M. A. Pliev

Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia

E-mail: [plimarat@yandex.ru](mailto:plimarat@yandex.ru)

## ХАОС В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СЛОЕНИЯХ

© 2022 г. **Н. И. ЖУКОВА, Г. С. ЛЕВИН, Н. С. ТОНЫШЕВА**

Аннотация. Мы называем слоение  $(M, F)$  на топологическом многообразии  $M$  хаотическим, если оно топологически транзитивно и объединение всех замкнутых слоев всюду плотно в  $M$ . При этом компактность слоеного многообразия не предполагается. Исследуемые нами топологические слоения можно рассматривать как многомерные обобщения хаотических динамических систем в смысле Дивани. Для топологических слоений  $(M, F)$ , накрытых расслоениями, мы доказываем, что существование хаоса в  $(M, F)$  эквивалентно хаотичности его глобальной группы голономии. Мы вводим понятие интегрируемой связности Эресмана для топологических слоений как естественное обобщение интегрируемой связности Эресмана для гладких слоений. Получены описание глобальной структуры топологических слоений с интегрируемой связностью Эресмана и критерий хаотичности таких слоений. Применяя метод надстройки, нами построено новое счетное семейство хаотических, попарно не изоморфных топологических слоений коразмерности два на 3-мерных замкнутых и незамкнутых многообразиях.

### ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение . . . . .	424
2. Категория топологических слоений . . . . .	426
3. Хаотичность топологических слоений . . . . .	429
4. Топологическая транзитивность слоений . . . . .	432
5. Слоения, накрытые расслоениями . . . . .	433
6. Интегрируемая связность Эресмана для топологических слоений . . . . .	436
7. Топологические надстроечные слоения . . . . .	439
8. Хаотические надстроечные слоения на 3-многообразиях . . . . .	442
Список литературы . . . . .	447

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Целью данной работы является исследование хаотического поведения топологических слоений. Обращение к топологическим слоениям мотивировано тем, что, как теперь известно, при всех  $n \geq 4$  существуют  $n$ -мерные топологические многообразия, не допускающие гладкой структуры. Первый пример такого топологического многообразия был построен М. А. Кервером при  $n = 10$  (см. [19]). Для  $n \leq 3$  на всех  $n$ -мерных топологических многообразиях существуют гладкие структуры, причем все гладкие структуры эквивалентны. С. К. Дональдсон и М. Х. Фридман показали, что многие односвязные компактные 4-мерные многообразия не допускают гладкой структуры. Обсуждение фундаментальных результатов С. К. Дональдсона и М. Х. Фридмана ведется в [21].

Отметим, что топологические слоения могут существовать и на гладких многообразиях. Кроме того, для топологических слоений возможны такие явления, которые недопустимы для гладких слоений.

Р. Черчилль дал определение гладкого хаотического слоения в статье [15] «Об определении хаоса в отсутствии времени» (подробности см. в разделе 3.2). Я. В. Базайкин, А. С. Галаев и



Н. И. Жукова в работе [10] «Хаос в картановых слоениях» предложили более общее определение хаотических слоений, которое совпадает с определением Р. Черчилля на компактных многообразиях. В данной работе мы следуем этому определению и называем топологическое слоение  $(M, F)$  *хаотическим*, если оно топологически транзитивно и объединение всех замкнутых слоев всюду плотно в  $M$ . При таком подходе исследуемые нами топологические слоения можно рассматривать как многомерные обобщения хаотических динамических систем в смысле Дивани [16].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы напоминаем понятия, относящиеся к категории топологических слоений  $\mathfrak{fol}$ , изоморфизмами в которой являются гомеоморфизмы, переводящие слои в слои.

В разделе 3.2 мы приводим определение Дивани хаотичности динамической системы и, следуя [10], даем определение хаотичности топологического слоения. Свойство слоения (или группы гомеоморфизмов) называется *трансверсальным*, если оно выражается в терминах пространства слоев (соответственно, пространства орбит). Цель раздела 3 — доказательство трансверсальности свойства хаотичности топологических слоений и групп гомеоморфизмов (теоремы 3.2 и 3.3), что обобщает аналогичные утверждения для гладких слоений из [10]. Оба эти критерия применяются при доказательстве критерия хаотичности топологических слоений, накрытых расслоениями (теоремы 5.2), что значительно упрощает и сокращает это доказательство.

Раздел 4 посвящен топологической транзитивности слоений. Здесь мы доказываем аналог теоремы Биркгофа об эквивалентности существования всюду плотного слоя топологического слоения  $(M, F)$  следующему условию: для любых открытых подмножеств  $U$  и  $V$  в  $M$  найдется слой, пересекающий оба этих подмножества (теорема 4.1).

Топологические слоения  $(M, F)$ , которые, будучи подняты на универсальное накрывающее многообразие, образованы слоями локально тривиального расслоения, называются слоениями, *накрытыми расслоением*, и исследуются нами в разделе 5. К таким слоениям относятся гладкие  $(G, X)$ -слоения со связностью Эресмана (см. [1, теорема 2]), полные картановы слоения постоянной трансверсальной кривизны [10], полные конформные слоения коразмерности  $q \geq 3$  (см. [1]), полные лоренцевы слоения коразмерности два на замкнутых многообразиях, не являющиеся римановыми слоениями [3], слоения с интегрируемой связностью Эресмана (точное определение приведено в разделе 6.1), параллельные слоения на полных римановых многообразиях [5, 6], надстроечные слоения, исследуемые в разделах 7-8, а также многие другие классы слоений.

Для слоений, накрытых расслоением, определяется глобальная группа голономии, индуцированная группой накрывающих преобразований на базе упомянутого расслоения. Основным результатом раздела 5 является доказательство критерия хаотичности для топологических слоений, накрытых расслоением (теорема 5.2), утверждающего, что  $(M, F)$  хаотично тогда и только тогда, когда хаотична его глобальная группа голономии. В разделе 5 доказана также теорема 5.3 о необходимых условиях изоморфности слоений, накрытых расслоением, в категории  $\mathfrak{fol}$ .

В разделе 6 мы обобщаем понятие интегрируемой связности Эресмана, введенное для гладких слоений Р. А. Блюменталем и Дж. Хебдой [11], на топологические слоения. Следуя работам Я. Л. Шапиро [5, 6] и Н. И. Жуковой, К. И. Шеиной [4], вводится понятие канонического слоения с интегрируемой связностью Эресмана и доказывается, что любое слоение  $(M, F)$  с интегрируемой связностью Эресмана изоморфно в категории  $\mathfrak{fol}$  некоторому каноническому слоению (теорема 6.2). Определяется понятие структурной группы слоения  $(M, F)$  и доказывается, что хаотичность  $(M, F)$  эквивалентна хаотичности ассоциированного действия его структурной группы (теорема 6.3). Следует отметить пример 7.1, показывающий, что структурная группа слоения  $(M, F)$  не является инвариантом в категории слоений  $\mathfrak{fol}$ , однако ее применение оказывается полезным, как показано в разделах 7-8.

В разделе 7 мы распространяем понятие надстроечного слоения, принадлежащее А. Хефлигеру, на топологические слоения. Надстроечные слоения являются обобщением на слоения надстройки Смейла, хорошо известной конструкции в теории динамических систем. Слоения, полученные надстройкой гомоморфизма  $\rho : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Homeo}(T)$ , обозначаются через  $(M, F) = \text{Sus}(B, T, \rho)$ . Аналогично гладким надстроечным слоениям [29] установлено, что топологическое слоение  $(M, F)$  является надстроечным тогда и только тогда, когда существует локально тривиальное расслоение  $p : M \rightarrow B$ , слои которого образуют интегрируемую связность Эресмана для  $(M, F)$  (теорема 7.3). Выясняется специфика канонического надстроечного слоения

(теорема 7.2). Поскольку надстроечные слоения образуют подкласс слоений, накрытых расслоениями, применяя указанные выше результаты, мы получаем, что для хаотичности слоения  $(M, F)$  необходимо и достаточно хаотичности группы гомеоморфизмов  $\rho(\pi_1(B, b_0))$  топологического многообразия  $T$  (теорема 7.1). Мы доказываем, что надстроечные слоения  $(M, F) = \text{Sus}(B, T, \rho)$  и  $(M', F') = \text{Sus}(B, T', \rho')$  с односвязными многообразиями  $T$  и  $T'$ , соответственно, изоморфны в категории слоений  $\mathfrak{Fol}$  тогда и только тогда, когда топологически сопряжены группы гомеоморфизмов  $\rho(\pi_1(B, b_0))$  и  $\rho'(\pi_1(B, b'_0))$  (теорема 7.4).

Раздел 8 посвящен исследованию хаотичности топологических надстроечных слоений на трехмерных многообразиях. Теорема 8.1 описывает структуру таких слоений и указывает способ их построения. Применение метода настройки и теоремы 7.4 позволило нам построить новое счетное семейство хаотических, попарно не изоморфных слоений на замкнутых трехмерных топологических многообразиях (теорема 8.2) и на незамкнутых трехмерных топологических многообразиях (теорема 8.3).

**Обозначения.** Символом  $\cong$  обозначаются изоморфные объекты в соответствующей категории. Орбита подмножества  $A \subset X$  относительно группы гомеоморфизмов  $G$  топологического пространства  $X$  обозначается через  $G.A$ , а образ точки  $x$  относительно  $g \in G$  обозначается через  $g.x$ . Слоение обозначается как одной буквой  $F$ , так и парой  $(M, F)$ , где  $M$  — объемлющее многообразие.

**Предположения.** Все окрестности предполагаются открытыми. Мы считаем, что включение  $A \subset B$  не исключает и равенство. Конечное множество мы относим к счетным.

## 2. КАТЕГОРИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СЛОЕНИЙ

**2.1. Определение топологического слоения.** Напомним, что хаусдорфово топологическое пространство  $M$  со счетной базой называется  $n$ -мерным топологическим многообразием, если в каждой точке  $x \in M$  существует окрестность  $U$  и гомеоморфизм  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  на  $n$ -мерное арифметическое пространство  $\mathbb{R}^n$  с обычной топологией. Мы отождествляем  $\mathbb{R}^n$  с произведением  $\mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q$ , где  $1 \leq q \leq n$ . Напомним, что разбиение  $F_{st} = \{\mathbb{R}^{n-q} \times \{c\} \mid c \in \mathbb{R}^q\}$  называется стандартным слоением коразмерности  $q$  в  $\mathbb{R}^n$ , а  $\mathbb{R}^{n-q} \times \{c\}$  называются его *слоями* (см. рис. 1).

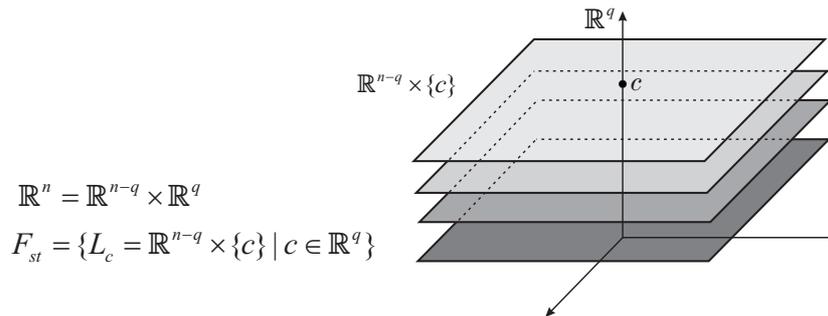


Рис. 1. Стандартное слоение коразмерности  $q$  в  $\mathbb{R}^n$ .

FIG. 1. Standard foliation of codimension  $q$  in  $\mathbb{R}^n$ .

**Определение 2.1.** Пусть  $M$  —  $n$ -мерное топологическое многообразие. Разбиение

$$F = \{L_\alpha \mid \alpha \in J\}$$

многообразия  $M$  на линейно связные подмножества  $L_\alpha$  называется топологическим слоением коразмерности  $q$ ,  $1 \leq q \leq n$ , если в каждой точке  $x \in M$  существует такая карта  $(U, \varphi)$  многообразия  $M$ , что гомеоморфизм  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  отображает каждую компоненту связности пересечения  $L_\alpha \cap U$ , называемую *локальным слоем*, на соответствующий слой  $\mathbb{R}^{n-q} \times \{c\}$ ,  $c \in \mathbb{R}^q$ , стандартного слоения коразмерности  $q$  в  $\mathbb{R}^n$  (см. рис. 2).

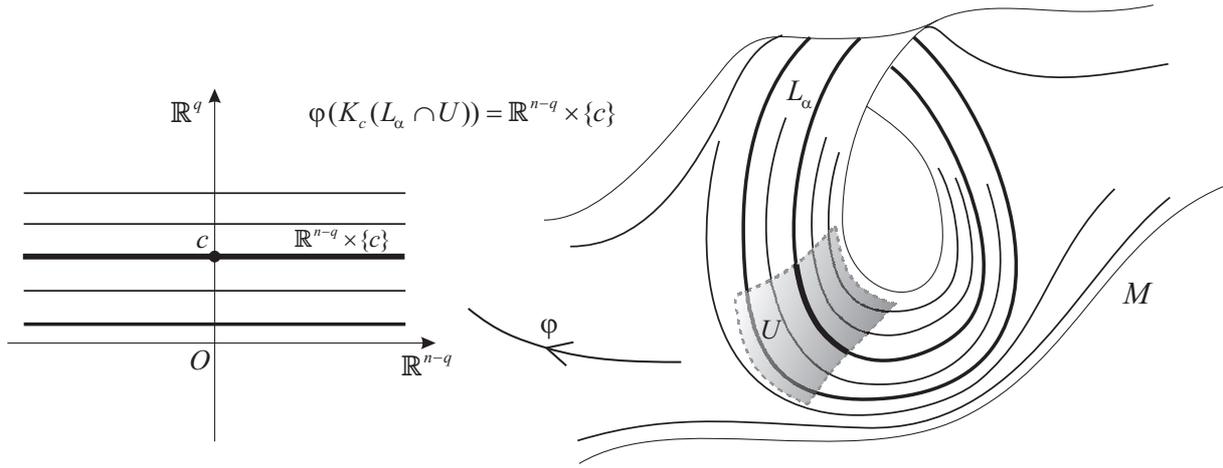


Рис. 2. Расслоенная карта  $(U, \varphi)$  многообразия  $M$ .  
 FIG. 2. Foliated chart  $(U, \varphi)$  of manifold  $M$ .

Слоение обозначается парой  $(M, F)$ , а для краткости  $F$ . Подмножества  $L_\alpha \subset M$  называются *слоями* слоения  $(M, F)$ . Карта  $(U, \varphi)$ , удовлетворяющая определению 2.1, называется *расслоенной картой*, а  $U$  называется *зоной* этой карты.

Таким образом, топологическое слоение  $(M, F)$  на  $n$ -мерном многообразии  $M$  определяется как разбиение  $F$  многообразия  $M$  на линейно связные подмножества, локально (с точностью до координатного гомеоморфизма) устроенное как стандартное слоение в  $\mathbb{R}^n$ . Семейство расслоенных карт  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in J\}$  называется *атласом*, если  $\xi = \{U_i \mid i \in J\}$  — покрытие многообразия  $M$ . Атлас  $\mathcal{A}$  называется *ассоциированным* со слоением  $(M, F)$ . Атлас  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in J\}$  называется *максимальным*, если он максимален по включению, т. е. совпадает с каждым атласом, его содержащим.

**Предложение 2.1.** Пусть  $(M, F)$  — топологическое слоение. Тогда:

- (1) семейство всех его локальных слоев в картах максимального атласа  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in J\}$  образует базу некоторой новой топологии  $\tau_F$  на множестве  $M$ ;
- (2) относительно топологии, индуцированной  $\tau_F$ , каждый слой  $L_\alpha, \alpha \in J$ , является  $(n - q)$ -мерным подмногообразием в  $M$ .

*Доказательство.*

(1) Обозначим через  $\tau_o$  обычную топологию в  $\mathbb{R}^{n-q}$ , а через  $\tau_D$  — дискретную топологию в  $\mathbb{R}^q$ . Рассмотрим произведение топологических пространств  $(\mathbb{R}^{n-q}, \tau_o) \times (\mathbb{R}^q, \tau_D)$ . Пусть  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in J\}$  — максимальный атлас из расслоенных карт. Требуем, чтобы  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q$  было гомеоморфизмом на произведение  $(\mathbb{R}^{n-q}, \tau_o) \times (\mathbb{R}^q, \tau_D)$ , мы определяем новую топологию  $\tau_F$  на  $U_i$ , относительно которой локальные слои в окрестности  $U_i$  открыты. Пусть  $L_i, L_j$  — локальные слои в картах  $(U_i, \varphi_i)$  и  $(U_j, \varphi_j)$ , соответственно, и  $x \in L_i \cap L_j$ . Так как  $\mathcal{A}$  — максимальный атлас, то существует карта  $(U_k, \varphi_k) \in \mathcal{A}$  такая, что  $x \in U_k \subset U_i \cap U_j$ . Следовательно, локальный слой  $L_k$  в карте  $(U_k, \varphi_k)$ , проходящий через  $x$ , удовлетворяет включению  $x \in L_k \subset L_i \cap L_j$ . Отсюда вытекает, что семейство всех локальных слоев в картах из  $\mathcal{A}$  образует базу новой топологии  $\tau_F$  на  $M$ . Таким образом, утверждение (1) доказано.

(2) Пусть  $L_\alpha$  — любой слой слоения  $(M, F)$ . В каждой точке  $x \in L_\alpha$  существует расслоенная карта  $(U_i, \varphi_i), x \in U_i$ . Следовательно, через  $x$  проходит локальный слой  $L_x$  этой карты. Положим  $\varphi_x := \varphi_i|_{L_x}$ . Тогда  $\varphi_x : (L_x, \tau_F) \rightarrow (\mathbb{R}^{n-q}, \tau_o)$  — гомеоморфизм, поэтому  $L_\alpha$  —  $(n - q)$ -мерное топологическое многообразие.  $\square$

Координаты в расслоенных картах называются *расслоенными*.

**Предложение 2.2.** Пусть  $(M, F)$  — топологическое слоение и  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in \mathcal{J}\}$  — максимальный атлас из расслоенных карт. Предположим, что  $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j) \in \mathcal{A}$ , причем пересечение  $U_i \cap U_j$  непусто и связно. Тогда определены преобразования расслоенных координат

$$\psi_{ij} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j),$$

причем  $\varphi_i = \psi_{ij} \circ \varphi_j$  на пересечении  $U_i \cap U_j$ .

Если  $\varphi_j(z) = (x, y)$ ,  $\varphi_i(z) = (x', y')$ , где  $z \in U_i \cap U_j$ ,  $x, x' \in \mathbb{R}^{n-q}$ ,  $y, y' \in \mathbb{R}^q$ , то формулы преобразования координат имеют вид:

$$(x', y') = \psi_{ij}(x, y) = (\lambda_{ij}(x, y), \gamma_{ij}(y)).$$

*Доказательство.* Пусть  $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$  — расслоенные карты, причем пересечение  $U_i \cap U_j$  связно и существует  $z \in U_i \cap U_j$ . Обозначим через  $L_i, L_j$  локальные слои в указанных картах, проходящие через  $z$ . Пусть при фиксированном  $y$  точка  $z$  движется по пересечению  $L_i \cap L_j$ . Заметим, что при этом изменяются  $x$  и  $x'$ , а точка  $y'$  остается неподвижной. Следовательно,  $y'$  зависит только от  $y$ , что отражено в формулах преобразования расслоенных координат.  $\square$

**Замечание 2.1.** Топологические слоения образуют подкласс обобщенных слоений, введенных Ж. Рибом [23].

**2.2. Задание топологического слоения атласом.** Как известно, топологическое слоение можно определить с помощью слоеного атласа, не предполагая априори существование разбиения на линейно связные подмножества  $F = \{L_\alpha \mid \alpha \in I\}$  на линейно связные подмножества  $L_\alpha$  многообразия  $M$ . Пусть  $M$  —  $n$ -мерное топологическое многообразие. Рассмотрим карты  $(U_i, \varphi_i)$  и  $(U_j, \varphi_j)$  многообразия  $M$ , где  $\varphi_i(U_i) = \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q = \varphi_j(U_j)$ . Подмножества  $\varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^{n-q} \times \{c\})$ ,  $c \in \mathbb{R}^q$ , называются *локальными слоями* в карте  $(U_i, \varphi_i)$ , которая называется *расслоенной картой* коразмерности  $q$ . Предположим  $\tau_o$  — обычная топология на  $\mathbb{R}^{n-q}$ ,  $\tau_D$  — дискретная топология на  $\mathbb{R}^q$ . Потребуем, чтобы  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q$  и  $\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q$  являлись гомеоморфизмами на произведение топологических пространств  $(\mathbb{R}^{n-q}, \tau_o) \times (\mathbb{R}^q, \tau_D)$ . Тогда на  $U_i$  и  $U_j$  индуцируются новые топологии  $\omega_i$  и  $\omega_j$ , относительно которых  $\varphi_i$  и  $\varphi_j$  являются указанными гомеоморфизмами. Подчеркнем, что все локальные слои в  $(U_i, \varphi_i)$  открыты в топологии  $\omega_i$ , а локальные слои в  $(U_j, \varphi_j)$  принадлежат топологии  $\omega_j$ . Карты  $(U_i, \varphi_i)$  и  $(U_j, \varphi_j)$  называются  *$q$ -согласованными*, если на пересечении  $U_i \cap U_j$  топологии, индуцированные  $\omega_i$  и  $\omega_j$ , совпадают. Это условие эквивалентно тому, что для любых локальных слоев  $L_i, L_j$  в картах  $(U_i, \varphi_i)$  и  $(U_j, \varphi_j)$ , соответственно, пересечение  $L_i \cap L_j$  открыто как в  $L_i$ , так и в  $L_j$ .

**Определение 2.2.** Семейство расслоенных карт  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in J\}$   $n$ -мерного топологического многообразия  $M$  называется  *$q$ -атласом из расслоенных карт*, если выполняются следующие два условия:

- (1)  $\{U_i \mid i \in J\}$  — открытое покрытие  $M$ , т. е.  $M = \bigcup_{i \in J} U_i$ ;
- (2) любые две карты из  $\mathcal{A}$  являются  $q$ -согласованными, где  $1 \leq q \leq n - 1$ .

Задание  $q$ -атласа  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in J\}$  из расслоенных карт на  $M$  эквивалентно заданию топологического слоения  $F$  коразмерности  $q$ . Действительно, из определения  $q$ -согласованности карт атласа вытекает, что на  $M$  определена новая топология  $\Omega$ , для которой  $\Omega|_{U_i} = \omega_i$ . Само слоение  $F$  представляет собой разбиение  $M$  на компоненты связности топологического пространства  $(M, \Omega)$ . Подчеркнем, что топология  $\Omega$  совпадает со слоевой топологией  $\tau_F$ , определенной в разделе 2.1, при этом атлас  $\mathcal{A}$  является ассоциированным атласом со слоением  $(M, F)$ .

**2.3. Регулярный атлас слоения.** Приведем определение регулярного атласа топологического слоения, известное из [14, определение 1.2.11]. Напомним, что семейство  $\xi = \{V_i \mid i \in J\}$  подмножеств топологического пространства  $M$  называется *локально конечным*, если для каждой точки  $x \in M$  существует окрестность  $V$ , которая пересекает лишь конечное число множеств из  $\xi$ .

**Определение 2.3.** Пусть  $(M, F)$  — топологическое слоение коразмерности  $q$ .  $q$ -Атлас  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$  из расслоенных карт этого слоения называется *регулярным*, если выполняются следующие условия:

- (1) для любой расслоенной карты  $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}$  существует расслоенная карта  $(W, \psi)$  (не обязательно из атласа  $\mathcal{A}$ ) такая, что замыкание  $\overline{U_i}$  является компактным подмножеством в  $W$  и  $\varphi_i = \psi|_{U_i}$ ;
- (2) покрытие  $\{U_i\}_{i \in J}$  является локально конечным;
- (3) для любых двух карт  $(U_i, \varphi_i)$  и  $(U_j, \varphi_j)$  внутренность любого замкнутого локального слоя  $L_i \subset \overline{U_i}$  пересекает не более одного локального слоя в  $\overline{U_j}$ .

**Определение 2.4.** Пусть  $(M, F)$  — топологическое слоение коразмерности  $q$  на  $n$ -мерном многообразии  $M$  и  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in J\}$  — атлас из расслоенных карт этого слоения. Карта  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$  называется *кубической с центром в точке  $x$* , если выполняются следующие условия:

- (1)  $\varphi(U) = (-1, 1)^k \times (-a, a)^q$ , где  $a > 0$ ,
- (2)  $\varphi(x) = (0, 0) \in (-1, 1)^k \times (-a, a)^q$ ;
- (3) существует карта  $(V, \psi) \in \mathcal{A}$  такая, что  $\overline{U} \subset V$  и  $\psi|_U = \varphi$ .

Из [14, раздел 1.2] вытекает следующее утверждение.

**Предложение 2.3.** *С любым топологическим слоением ассоциирован регулярный атлас из кубических карт.*

Таким образом, не нарушая общности, можно считать, что любое топологическое слоение  $(M, F)$  задано регулярным атласом.

**2.4. Категория топологических слоений.** Обозначим через  $\mathfrak{fol}$  категорию, объектами которой служат топологические слоения, а морфизмом слоений  $(M, F), (M', F') \in \text{Ob}(\mathfrak{fol})$  является непрерывное отображение  $f : M \rightarrow M'$ , переводящее слои в слои. Произведением  $(M, F) \times (M', F')$  является слоение  $(M \times M', F \times F')$  на произведении многообразий  $M \times M'$ , слои которого равны произведению слоев указанных слоений. Будем называть  $\mathfrak{fol}$  *категорией топологических слоений*, или просто *категорией слоений*.

### 3. ХАОТИЧНОСТЬ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СЛОЕНИЙ

**3.1. Свойства слоев топологических слоений.** Для полноты обоснования дальнейших наших теорем, в этом разделе для топологических слоений мы доказываем утверждения, которые хорошо известны в классе гладких слоений.

**Лемма 3.1.** *Пусть  $L$  — произвольный слой топологического слоения  $(M, F)$  и  $(U, \varphi)$  — кубическая карта с центром в точке  $x \in L$ . Тогда в любой точке  $y \in L$  существует кубическая карта  $(V, \psi)$  с центром в точке  $y$  такая, что любой слой слоения, пересекающий  $V$ , пересекает и  $U$ .*

*Доказательство.* Пусть  $h : [0, 1] \rightarrow L$  — путь в  $L$  такой, что  $h(0) = x$  и  $h(1) = y$ . В каждой точке  $h(t), t \in [0, 1]$ , существует кубическая расслоенная карта  $(U_t, \varphi_t)$  с центром в  $h(t)$ , принадлежащая регулярному атласу. В силу компактности и связности множества  $h([0, 1])$  из открытого покрытия  $\{U_t \mid t \in [0, 1]\}$  можно выделить такое конечное подпокрытие  $\{U_1, U_2, \dots, U_m\}$  множества  $h([0, 1])$ , что  $L \cap U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$  для каждого  $i \in \overline{1, m-1}$ . Обозначим через  $x_i$  центр кубической карты  $(U_i, \varphi_i)$ . Пусть  $\varphi_i(U_i) = (-1, 1)^k \times (-a_i, a_i)^q$ . Не уменьшая общности, считаем, что  $U = U_1$ , тогда  $(U_1, \varphi_1)$  — кубическая карта с центром в  $x = x_1$ . Обозначим через  $pr_2 : (-1, 1)^k \times (-a_2, a_2)^q \rightarrow (-a_2, a_2)^q$  проекцию на второй сомножитель.

Так как  $pr_2(\varphi_2(U_1 \cap U_2))$  — открытая окрестность нуля в  $\mathbb{R}^q$ , то существует число  $b_2, 0 < b_2 < a_2$ , такое, что  $(-b_2, b_2)^q \subset pr_2(\varphi_2(U_1 \cap U_2))$ . Положим  $V_2 := \varphi_2^{-1}((-1, 1)^k \times (-b_2, b_2)^q)$ ,  $\psi_2 := \varphi_2|_{V_2}$ . Заметим, что  $(V_2, \psi_2)$  — такая кубическая карта с центром в точке  $x_2$ , что любой слой слоения, пересекающий  $V_2$ , пересекает и  $U_1$ . Аналогичным образом мы определяем такую кубическую карту  $(V_3, \psi_3)$  с центром в точке  $x_3$ , что любой слой слоения, пересекающий  $V_3$ , пересекает и  $V_2$ . Подчеркнем, что любой слой слоения, пересекающий  $V_3$ , пересекает и  $U_1$ . Продолжая этот процесс, за конечное число шагов мы построим кубическую карту  $(V_m, \psi_m), V_m \subset U_m$ , с центром в точке  $y = x_m$  такую, что любой слой слоения, пересекающий  $V_m$ , пересекает и  $U_1$ . Напоминание о том, что  $U_1 = U$ , завершает доказательство леммы.  $\square$

Пусть  $(M, F)$  — топологическое слоение. Подмножество  $A$  многообразия  $M$  называется *насыщенным*, если оно является объединением слоев. Пусть  $F = \{L_\alpha \mid \alpha \in J\}$  — слоение многообразия  $M$ . Для подмножества  $A \subset M$  множество  $\mathcal{N}(A) := \bigcup_{L_\alpha \cap A \neq \emptyset} L_\alpha$  называется *насыщением* подмножества  $A$  относительно слоения  $(M, F)$ .

**Лемма 3.2.** Пусть  $(M, F)$  — произвольное топологическое слоение. Тогда насыщение  $\mathcal{N}(U)$  любого открытого подмножества  $U$  в  $M$  является открытым подмножеством в  $M$ .

*Доказательство.* Пусть  $x \in \mathcal{N}(U)$ . Тогда  $x \in L$ , где  $L \cap U \neq \emptyset$ , поэтому существует  $y \in L \cap U$ . Поскольку координатные окрестности кубических карт с центром в  $y$  образуют базу окрестностей в точке  $y$ , найдется кубическая карта  $(U_y, \varphi_y)$  такая, что  $U_y \subset U$ . Согласно лемме 3.1, существует кубическая карта  $(U_x, \varphi_x)$  с центром в точке  $x$  такая, что все слои, пересекающие  $U_x$ , пересекают и  $U_y$ , поэтому пересекают  $U$ . Следовательно,  $U_x \subset \mathcal{N}(U)$ . Таким образом, каждая точка  $x$  содержится в  $\mathcal{N}(U)$  вместе с окрестностью  $U_x$ , следовательно,  $\mathcal{N}(U)$  открыто в  $M$ .  $\square$

Напомним, что отображение топологических пространств называется *открытым*, если образ любого открытого множества открыт.

**Теорема 3.1.** Проекция  $\pi : M \rightarrow M/F$  на пространство слоев  $M/F$  топологического слоения  $(M, F)$  является открытым отображением.

*Доказательство.* Пусть  $U$  — любое открытое подмножество в  $M$ . Покажем, что  $W = \pi(U)$  открыто в  $M/F$ . Для любой точки  $y \in M/F$  множество  $\pi^{-1}(y)$  является слоем слоения  $(M, F)$ , поэтому  $\pi^{-1}(W)$  — объединение всех слоев, пересекающих  $U$ , т. е.  $\pi^{-1}(W) = \mathcal{N}(U)$ . Согласно лемме 3.2, насыщение  $\mathcal{N}(U)$  любого открытого подмножества  $U$  в  $M$  открыто, следовательно,  $\pi^{-1}(W)$  открыто в  $M$ . По определению фактор-топологии,  $W$  открыто в  $M/F$ . Таким образом, отображение  $\pi : M \rightarrow M/F$  — открытое.  $\square$

**3.2. Определение хаотического слоения.** Пусть  $T : X \rightarrow X$  — непрерывное отображение метрического пространства  $X$  в себя. Семейство итераций  $\{T^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  обозначается через  $(X, T)$  и называется *динамической системой*. Дивани [16] ввел следующее понятие хаоса, который теперь называется хаосом Дивани.

**Определение 3.1.** Динамическая система  $(X, T)$  называется *хаотической*, если она обладает следующими тремя свойствами:

- (1) топологически транзитивна;
- (2) множество периодических точек всюду плотно в  $X$ ;
- (3) чувствительна к начальным условиям.

В работе [9] было доказано, что в определении хаоса Дивани чувствительность динамической системы к начальным условиям следует из транзитивности и всюду плотности периодических точек. В [8] было обнаружено, что ни транзитивность, ни всюду плотность периодических точек не выводятся из оставшихся двух условий.

Следуя [10], мы используем следующее определение хаотического топологического слоения, которое можно рассматривать как обобщение хаоса в смысле Дивани на многомерные интегрируемые системы.

Напомним, что слой  $L$  слоения  $(M, F)$  называется *замкнутым*, если  $L$  — замкнутое подмножество в  $M$ .

**Определение 3.2.** Топологическое слоение  $(M, F)$  называется *хаотическим*, если:

- (1) существует всюду плотный слой (топологическая транзитивность);
- (2) объединение замкнутых слоев всюду плотно в  $M$  (плотность замкнутых слоев).

Это определение хаотического слоения более общее, чем определение Р. Черчилля [15], в котором первое условие совпадает с (1), а вторым является следующее условие:

- (2\*) объединение компактных слоев всюду плотно в  $M$ .

В случае компактного многообразия  $M$  наше определение совпадает с определением Р. Черчилля.

Нам понадобится понятие хаотической группы гомеоморфизмов топологического многообразия. По аналогии с [10] в данной работе мы используем следующее определение, которое также можно рассматривать как обобщение хаоса Дивани.

**Определение 3.3.** Группа гомеоморфизмов  $G$  топологического многообразия  $M$  называется *хаотической*, если:

- (1) существует всюду плотная орбита;
- (2) объединение всех замкнутых орбит всюду плотно в  $M$ .

При этом также будем говорить, что группа  $G$  имеет *хаотическое поведение*. Если абстрактная группа действует на  $M$  как группа гомеоморфизмов, удовлетворяющая условиям (1) и (2), то будем называть это действие *хаотическим*.

В данной работе мы рассматриваем только эффективные действия групп, т. е. такие действия, при которых только нейтральный элемент группы оставляет каждую точку неподвижной.

Определение 3.3 отличается от определения хаотической группы гомеоморфизмов в [12, 22] условием (2). Вместо (2) в [12, 22] требуется выполнение более сильного условия:

(2\*\*) объединение конечных орбит всюду плотно в  $M$ .

Кроме того, в отличие от нашей работы в [22] предполагается компактность многообразия  $M$ .

### 3.3. Критерий хаотичности топологических слоений и групп гомеоморфизмов.

**Теорема 3.2.** Для хаотичности топологического слоения  $(M, F)$  необходимо и достаточно выполнения следующих двух условий для его пространства слоев  $M/F$ :

- (1) существует всюду плотное одноточечное подмножество в  $M/F$ ;
- (2) множество замкнутых одноточечных подмножеств всюду плотно в  $M/F$ .

*Доказательство.* Обозначим через  $\pi : M \rightarrow M/F$  проекцию на пространство слоев слоения  $(M, F)$ . Предположим, что топологическое слоение  $(M, F)$  имеет всюду плотный слой  $L$ , т. е.  $\bar{L} = M$ . Пусть  $[L] = \pi(L)$ . По определению фактор-топологии в  $M/F$ , для любого открытого подмножества  $W \subset M/F$  прообраз  $\pi^{-1}(W)$  открыт в  $M$ . Подчеркнем, что  $\pi^{-1}(W)$  — насыщенное подмножество в  $M$ . Так как  $\bar{L} = M$ , то  $\pi^{-1}(W) \cap L \neq \emptyset$ , следовательно,  $L \subset \pi^{-1}(W)$ . Отсюда вытекает, что  $[L] \in W$  для любого открытого подмножества  $W$  в  $M/F$ , т. е. одноточечное подмножество  $[L]$  всюду плотно в  $M/F$ , поэтому выполняется условие (i).

Пусть теперь выполняется условие (i), т. е. существует всюду плотное одноточечное подмножество  $[L]$  в  $M/F$ . Рассмотрим любое открытое подмножество  $U$  в  $M$ . По теореме 3.1, проекция  $\pi : M \rightarrow M/F$  — непрерывное и открытое отображение, поэтому  $V := \pi(U)$  открыто в  $M/F$ . Согласно предположению,  $[L]$  всюду плотно в  $M/F$ , поэтому  $[L] \cap V \neq \emptyset$ , что эквивалентно выполнению неравенства  $\pi^{-1}(V) \cap L \neq \emptyset$ , следовательно,  $L \subset \pi^{-1}(V)$ . Заметим, что

$$\pi^{-1}(V) = \bigcup_{L_\alpha \cap U \neq \emptyset} L_\alpha,$$

где  $L_\alpha \in F$ . Таким образом, включение  $L \subset \pi^{-1}(V)$  влечет неравенство  $L \cap U \neq \emptyset$ . Так как  $U$  — любое открытое подмножество в  $M$ , то слой  $L$  всюду плотен в  $M$ .

Таким образом, топологическая транзитивность слоения  $(M, F)$  эквивалентна выполнению условия (i).

Пусть  $L_\alpha$  — любой замкнутый слой и  $[L_\alpha] = \pi(L_\alpha)$ . Так как  $\pi^{-1}(M/F \setminus [L_\alpha]) = M \setminus L_\alpha$  открыто в  $M$  как дополнение к замкнутому множеству, то  $M/F \setminus [L_\alpha] = \pi(M \setminus L_\alpha)$  — открытое подмножество в  $M/F$  как образ открытого подмножества  $M \setminus L_\alpha$  при открытом отображении  $\pi : M \rightarrow M/F$ . Следовательно, одноточечное подмножество  $[L_\alpha]$  замкнуто в  $M/F$ . Верно и обратное, в силу непрерывности  $\pi : M \rightarrow M/F$ , если одноточечное подмножество  $[L_\alpha]$  замкнуто, то его прообраз  $L_\alpha = \pi^{-1}([L_\alpha])$  — замкнутый слой.

Аналогично предыдущему доказывается, что всюду плотность объединения замкнутых слоев слоения  $(M, F)$  эквивалентна условию (ii) всюду плотности объединения замкнутых одноточечных подмножеств в  $M/F$ .

Таким образом, выполнение условий (1) и (2) в определении 3.2 хаотичности слоения  $(M, F)$  эквивалентно выполнению условий (i) и (ii) теоремы 3.2.  $\square$

**Лемма 3.3.** *Проекция  $\mu : B \rightarrow B/\Psi$  на пространство орбит произвольной группы гомеоморфизмов топологического пространства  $B$  является непрерывным и открытым отображением.*

*Доказательство.* Отображение  $\mu$  непрерывно как фактор-отображение. Пусть  $U \subset B$  — любое открытое подмножество. Покажем, что  $W = \mu(U)$  открыто в фактор-топологии пространства орбит  $B/\Psi$ . Имеют место равенства  $\mu^{-1}(W) = \bigcup_{x \in U} \Psi \cdot x = \bigcup_{\psi \in \Psi} \psi(U)$ , где  $\Psi \cdot x$  — орбита точки  $x \in B$ .

Поскольку  $\Psi$  — группа гомеоморфизмов, то множество  $\psi(U)$  является открытым. Множество  $\mu^{-1}(W)$  открыто в  $B$  как объединение открытых множеств. По определению фактор-топологии  $W$  открыто в  $B/\Psi$ . Следовательно, отображение  $\mu : B \rightarrow B/\Psi$  является открытым.  $\square$

Применяя лемму 3.3, аналогично теореме 3.2 доказывается следующее утверждение.

**Теорема 3.3.** *Для хаотичности группы гомеоморфизмов  $\Psi$  топологического пространства  $B$  необходимо и достаточно выполнения следующих двух условий для пространства орбит слоев  $B/\Psi$  этой группы:*

- (1) *существует всюду плотное одноточечное подмножество в  $B/\Psi$ ;*
- (2) *множество замкнутых одноточечных подмножеств всюду плотно в  $B/\Psi$ .*

**Определение 3.4.** Свойство топологического слоения  $(M, F)$  называется *трансверсальным*, если оно может быть выражено в терминах пространства слоев  $M/F$  этого слоения.

**Определение 3.5.** Свойство группы гомеоморфизмов  $\Psi$  топологического пространства  $B$  называется *трансверсальным*, если оно может быть выражено в терминах пространства орбит  $B/\Psi$  этой группы.

Из теорем 3.2 и 3.3 вытекает следующее утверждение.

**Следствие 3.1.** *Хаотичность топологических слоений и хаотичность групп гомеоморфизмов топологических пространств являются трансверсальными свойствами.*

#### 4. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ТРАНЗИТИВНОСТЬ СЛОЕНИЙ

По аналогии с динамическими системами мы даем следующее определение топологической транзитивности непрерывных слоений.

**Определение 4.1.** Слоение  $(M, F)$  называется *топологически транзитивным*, если для непустых открытых подмножеств  $U$  и  $V$  в  $M$  существует слой  $L$  такой, что  $L \cap U \neq \emptyset$  и  $L \cap V \neq \emptyset$ .

В [10] топологическая транзитивность слоения определена следующим образом.

**Определение 4.2.** Если существует всюду плотный слой слоения  $(M, F)$ , то  $(M, F)$  называется *топологически транзитивным*.

Напомним, что  $G_\delta$ -множество есть счетное пересечение открытых подмножеств топологического пространства.

Следующая теорема является аналогом теоремы Биркгофа, доказанной в 1920 году в случае дискретной динамической системы на компактном подмножестве  $\mathbb{R}^n$ .

**Теорема 4.1.** *Пусть  $(M, F)$  — топологическое слоение. Тогда:*

- (1) *определения 4.1 и 4.2 топологической транзитивности слоения  $(M, F)$  эквивалентны;*
- (2) *если слоение  $(M, F)$  топологически транзитивно, то объединение всюду плотных слоев является всюду плотным  $G_\delta$ -подмножеством в  $M$ .*

*Доказательство.* Предположим, что  $(M, F)$  удовлетворяет определению 4.1. Через  $D(F)$  обозначим объединение всех всюду плотных слоев  $(M, F)$ . Пусть  $\tau$  — топология многообразия  $M$ . Подчеркнем, что подмножество  $A$  всюду плотно в  $M$  тогда и только тогда, когда  $A \cap U \neq \emptyset$  для любого непустого открытого подмножества  $U \subset M$ . Это значит, что

$$L \in D(F) \Leftrightarrow L \subset \mathcal{N}(U) \quad \forall U \in \tau. \quad (4.1)$$

По условию теоремы,  $M$  — топологическое многообразие, следовательно, топологическое пространство  $(M, \tau)$  имеет счетную базу  $\Sigma = \{W_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ . Согласно определению базы, каждое открытое подмножество  $U$  является объединением подмножеств из  $\Sigma$ , поэтому, с учетом (4.1), мы получаем:

$$L \in D(F) \Leftrightarrow L \subset \mathcal{N}(W_m) \quad \forall m \in \mathbb{N} \Leftrightarrow L \subset \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{N}(W_m). \quad (4.2)$$

Из (4.2) вытекает включение  $D(F) \subset \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{N}(W_m)$ . Если слой  $L_\alpha$  принадлежит пересечению  $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{N}(W_m)$ , то  $L_\alpha \subset \mathcal{N}(W_m)$  для любого  $m \in \mathbb{N}$ , поэтому  $L_\alpha$  пересекает любое подмножество из базы  $\Sigma$  топологии  $\tau$ . Следовательно,  $L_\alpha$  — всюду плотный слой, т. е.  $L_\alpha \subset D(F)$ . Таким образом, выполняется равенство:

$$D(F) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{N}(W_m). \quad (4.3)$$

По лемме 3.2, насыщение  $\mathcal{N}(U)$  открытого подмножества  $U$  открыто в  $M$ . Следовательно, согласно (4.3),  $D(F)$  является  $G_\delta$ -подмножеством в  $M$ . Поскольку каждое топологическое многообразие локально компактно и имеет счетную базу, оно является польским пространством и, следовательно, пространством Бэра. Так как всюду плотный слой  $L$  удовлетворяет включению  $L \subset \mathcal{N}(W_m) \quad \forall m \in \mathbb{N}$ , то каждое подмножество  $\mathcal{N}(W_m)$  всюду плотно в  $M$ . По теореме Бэра, в полном метрическом пространстве пересечение счетного числа открытых всюду плотных подмножеств всюду плотно. Следовательно,  $D(F)$  всюду плотно в  $M$ . В частности,  $D(F) \neq \emptyset$ , т. е. существует всюду плотный слой слоения  $(M, F)$ . Таким образом, из определения 4.1 вытекает определение 4.2. Допустим теперь, что  $(M, F)$  удовлетворяет определению 4.2, и существует всюду плотный слой  $L$ , т. е.  $\overline{L} = M$ . Тогда  $L$  пересекает любое непустое открытое подмножество в  $M$ . Таким образом,  $\overline{L} = M$  влечет  $L \cap U \neq \emptyset$  и  $L \cap V \neq \emptyset$  для любых непустых открытых подмножеств  $U, V$  в  $M$ . Следовательно,  $(M, F)$  удовлетворяет определению 4.1.  $\square$

**Замечание 4.1.** Далее топологическое слоение называется *транзитивным*, если оно удовлетворяет одному из эквивалентных определений 4.1 или 4.2.

**Замечание 4.2.** Утверждение, аналогичное теореме 4.1, известно для динамических систем  $(X, T)$  (см. [17, Theorem 1.16]) и для групп гомеоморфизмов компактных пространств [13].

## 5. СЛОЕНИЯ, НАКРЫТЫЕ РАССЛОЕНИЯМИ

**5.1. Глобальная группа голономии слоений, накрытых расслоениями.** Предположим, что  $\theta : \tilde{B} \rightarrow B$  — накрывающее отображение топологических пространств. Напомним, что группа гомеоморфизмов  $G$  называется *группой накрывающих преобразований*, если каждый гомеоморфизм  $g \in G$  удовлетворяет коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B} & \xrightarrow{g} & \tilde{B} \\ & \searrow \theta & \swarrow \theta \\ & B & \end{array}$$

Имеет место следующая легко доказываемая лемма.

**Лемма 5.1.** Пусть  $\kappa : \tilde{M} \rightarrow M$  — универсальное накрывающее отображение для  $n$ -мерного топологического многообразия  $M$ . Если  $(M, F)$  — топологическое слоение, то  $\tilde{M}$  — также  $n$ -мерное топологическое многообразие, на котором индуцируется топологическое слоение  $(\tilde{M}, \tilde{F})$ , слои которого накрывают соответствующие слои слоения  $(M, F)$ .

Будем обозначать индуцированное слоение  $\tilde{F}$ , удовлетворяющее лемме 5.1, также через  $\kappa^*F$  и называть *поднятием слоения  $(M, F)$  на  $\tilde{M}$* .

**Определение 5.1.** Топологическое слоение  $(M, F)$  коразмерности  $q$  называется *накрытым расслоением*, если слоение  $(\tilde{M}, \tilde{F})$ , индуцированное универсальным накрывающим отображением  $\kappa : \tilde{M} \rightarrow M$ , образовано слоями некоторого локально тривиального расслоения  $r : \tilde{M} \rightarrow \tilde{T}$  над  $q$ -мерным топологическим многообразием  $\tilde{T}$ .

**Теорема 5.1.** Пусть слоение  $(M, F)$  накрыто расслоением  $r : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{T}$ , где  $\widetilde{M}$  — пространство универсального накрывающего отображения  $\kappa : \widetilde{M} \rightarrow M$ . Зафиксируем  $x \in M$  и  $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ . Обозначим через  $\pi : M \rightarrow M/F$  фактор-отображение на пространство слоев. Тогда определены:

- (1) группа накрывающих преобразований  $G \cong \pi_1(M, x)$ , гомоморфизм групп  $\chi : G \rightarrow \text{Homeo}(\widetilde{T})$  и группа  $\Psi_0 := \chi(G)$ ;
- (2) гомеоморфизм  $d : M/F \rightarrow \widetilde{T}/\Psi_0$  на пространство орбит  $\widetilde{T}/\Psi_0$  группы  $\Psi_0$ , удовлетворяющий коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc}
 & \widetilde{M} & \\
 \kappa \swarrow & & \searrow r \\
 M & & \widetilde{T} \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \mu \\
 M/F & \xrightarrow{d} & \widetilde{T}/\Psi_0,
 \end{array} \tag{5.1}$$

где  $\mu : \widetilde{T} \rightarrow \widetilde{T}/\Psi_0$  — проекция на пространство орбит группы  $\Psi_0$ .

*Доказательство.* Пусть  $\kappa : \widetilde{M} \rightarrow M$  — универсальное накрывающее отображение. При фиксированных точках  $x \in M$  и  $\tilde{x} \in \widetilde{M}$  существует изоморфизм фундаментальной группы  $\pi_1(M, x)$  на группу накрывающих преобразований  $G$  накрытия  $\kappa : \widetilde{M} \rightarrow M$ . отождествим эти группы по указанному изоморфизму. По условию, индуцированное слоение  $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$ ,  $\widetilde{F} = \kappa^*F$ , образовано слоями локально тривиального расслоения с проекцией  $r : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{T}$ , поэтому  $B = \widetilde{M}/\widetilde{F}$  — многообразие слоев поднятого слоения. Так как каждое преобразование  $g \in G$  — изоморфизм индуцированного слоения  $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$  в категории  $\mathfrak{fol}$ , то  $g$  индуцирует биекцию  $\psi(g) : \widetilde{T} \rightarrow \widetilde{T}$ , удовлетворяющую коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc}
 \widetilde{M} & \xrightarrow{r} & \widetilde{T} \\
 g \downarrow & & \downarrow \psi(g) \\
 \widetilde{M} & \xrightarrow{r} & \widetilde{T}.
 \end{array} \tag{5.2}$$

Поскольку  $r$  и  $g$  — одновременно непрерывные и открытые отображения, биекция  $\psi(g)$  также непрерывна и открыта, следовательно,  $\psi(g)$  — гомеоморфизм многообразия  $B$ . Из 5.2 вытекает, что отображение

$$\chi : G \rightarrow \text{Homeo}(B), \quad \chi(g) := \psi(g) \quad \forall g \in G$$

— гомоморфизм на группу  $\Psi_0 := \chi(G)$ .

Обозначим через  $\mu : \widetilde{T} \rightarrow \widetilde{T}/\Psi_0$  проекцию на пространство орбит группы  $\Psi_0$ . Согласно лемме 5.1, для любого слоя  $L$  слоения  $(M, F)$  произвольный слой  $\widetilde{L}$  индуцированного слоения из прообраза  $\kappa^{-1}(L)$  накрывает  $L$ . Следовательно, прообраз  $\kappa^{-1}(L)$  равен  $G \cdot \widetilde{L} = \bigcup_{z \in \widetilde{L}} G \cdot z$ . Так как  $\mu(G \cdot \widetilde{L}) = \mu(\widetilde{L})$  — точка в  $B$  и, по определению  $\Psi_0$ ,  $\mu(G \cdot \widetilde{L}) = \Psi_0 \cdot [\widetilde{L}]$ , то равенство  $d([L]) := \Psi_0 \cdot [\widetilde{L}]$  определяет биективное отображение  $d : M/F \rightarrow \widetilde{T}/\Psi_0$ , удовлетворяющее коммутативной диаграмме 5.1. Поскольку отображения  $\kappa$ ,  $\pi$ ,  $r$  и  $\mu$  непрерывны и открыты,  $d$  также непрерывно и открыто, следовательно,  $d$  — гомеоморфизм.  $\square$

**Определение 5.2.** Группа гомеоморфизмов  $\Psi_0$  многообразия  $\widetilde{T}$ , определенная в теореме 5.1, называется *глобальной группой голономии* слоения  $(M, F)$ , накрытого расслоением  $r : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{T}$ .

**5.2. Критерий хаотичности топологических слоений, накрытых расслоениями.** Следующий критерий сводит существование хаоса в топологическом слоении, накрытом расслоением, к существованию хаотического поведения его глобальной группы голономии.

**Теорема 5.2.** Пусть  $(M, F)$  — топологическое слоение, накрытое расслоением  $r : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{T}$ , и  $\Psi_0 \subset \text{Homeo}(\widetilde{T})$  — его глобальная группа голономии. Тогда для того, чтобы слоение  $(M, F)$  было хаотическим, необходимо и достаточно хаотичности группы  $\Psi_0$ .

*Доказательство.* Согласно следствию 3.1, хаотичность слоения  $(M, F)$  и хаотичность группы гомеоморфизмов  $\Psi_0$  является трансверсальными свойствами, т. е. выражаются в одних и тех же терминах топологического пространства слоев  $M/F$  и топологического пространства орбит  $\tilde{T}/\Psi_0$ , соответственно. Как доказано в теореме 5.1, топологические пространства  $M/F$  и  $\tilde{T}/\Psi_0$  гомеоморфны. Следовательно, слоение  $(M, F)$  имеет хаотическое поведение тогда и только тогда, когда его глобальная группа голономии  $\Psi_0$  хаотична на  $\tilde{T}$ .  $\square$

**5.3. Необходимые условия изоморфности топологических слоений, накрытых расслоениями.** Напомним понятие топологической сопряженности. Предположим, что на топологических пространствах  $X$  и  $X'$  заданы группы гомеоморфизмов  $G$  и  $G'$ , соответственно. Говорят, что группы  $G$  и  $G'$  *топологически сопряжены*, если существуют изоморфизм групп  $\tau : G \rightarrow G'$  и гомеоморфизм топологических пространств  $f : X \rightarrow X'$  такие, что для любого элемента  $g \in G$  диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ g \downarrow & & \downarrow \tau(g) \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array} \quad (5.3)$$

коммутативна. Будем говорить, что указанная пара  $(\tau, f)$  реализует *сопряжение групп*  $G$  и  $G'$ .

**Теорема 5.3.** Пусть  $(M, F), (M', F')$  – топологические слоения, накрытые расслоениями  $r : \tilde{M} \rightarrow \tilde{T}$  и  $r' : \tilde{M}' \rightarrow \tilde{T}'$ , соответственно, а  $\Psi_0 \subset \text{Нотео}(\tilde{T})$  и  $\Psi'_0 \subset \text{Нотео}(\tilde{T}')$  – их глобальные группы голономии. Тогда для того, чтобы слоения  $(M, F)$  и  $(M', F')$  были изоморфны в категории слоений  $\mathfrak{fol}$ , необходимо, чтобы их глобальные группы голономии были топологически сопряжены.

*Доказательство.* Предположим, что существует гомеоморфизм  $f : M \rightarrow M'$ , являющийся изоморфизмом слоений  $(M, F)$  и  $(M', F')$  в категории слоений  $\mathfrak{fol}$ . Обозначим через  $\kappa : \tilde{M} \rightarrow M$  и  $\kappa' : \tilde{M}' \rightarrow M'$  универсальные накрывающие отображения. Тогда  $f \circ \kappa : \tilde{M} \rightarrow M'$  и  $\kappa' : \tilde{M}' \rightarrow M'$  – два универсальных накрывающих отображения для  $M'$ . Следовательно, существует гомеоморфизм  $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}'$ , удовлетворяющий коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{M}' \\ \kappa \downarrow & & \downarrow \kappa' \\ M & \xrightarrow{f} & M'. \end{array} \quad (5.4)$$

Зафиксируем точки  $\tilde{x} \in \tilde{M}$  и  $\tilde{x}' = \tilde{f}(\tilde{x}) \in \tilde{M}'$ . Пусть  $x = \kappa(\tilde{x}) \in M$  и  $x' = \kappa'(\tilde{x}') \in M'$ , тогда  $x' = f(x)$ . При этом фундаментальная группа  $\pi_1(M, x)$  свободно и собственно разрывно действует на  $\tilde{M}$  как группа накрывающих преобразований универсального накрытия  $\kappa$ , а фундаментальная группа  $\pi_1(M', x')$  – на  $\tilde{M}'$  как группа накрывающих преобразований универсального накрытия  $\kappa'$ . Определен индуцированный гомеоморфизмом  $f : M \rightarrow M'$  изоморфизм групп  $f_* : \pi_1(M, x) \cong G \rightarrow \pi_1(M', x') \cong G'$ . Подчеркнем, что пара  $(f_*, \tilde{f})$  реализует топологическую сопряженность групп гомеоморфизмов  $G$  и  $G'$ . Так как  $\kappa, \kappa', f$  – морфизмы в категории  $\mathfrak{fol}$ , то из коммутативности диаграммы (5.4), учитывая, что  $\tilde{f}$  – гомеоморфизм, мы получаем, что  $\tilde{f}$  – изоморфизм поднятых слоений  $\kappa^*F$  и  $\kappa'^*F'$ . Следовательно, существует гомеоморфизм пространств слоев этих слоений  $\delta : \tilde{T} \rightarrow \tilde{T}'$ , удовлетворяющий коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{r} & \tilde{T} \\ \tilde{f} \downarrow & & \downarrow \delta \\ \tilde{M}' & \xrightarrow{r'} & \tilde{T}'. \end{array} \quad (5.5)$$

Поскольку слоения  $(M, F)$  и  $(M', F')$  накрыты расслоениями, определены их глобальные группы голономии  $\Psi_0$  и  $\Psi'_0$ , соответственно, и эпиморфизмы групп  $\chi : G \rightarrow \Psi_0, \chi' : G' \rightarrow \Psi'_0$ . Заметим,

что изоморфизм  $\tilde{f}$  в категории  $\mathfrak{Sol}$  и определение групп голономии влекут существование такой биекции  $\nu : \Psi_0 \rightarrow \Psi'_0$ , что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{x} & \Psi_0 \\ \tau \downarrow & & \downarrow \nu \\ G' & \xrightarrow{x'} & \Psi'_0. \end{array} \quad (5.6)$$

Из коммутативности диаграммы (5.6) вытекает, что  $\nu : \Psi_0 \rightarrow \Psi'_0$  — изоморфизм групп. Суммируя доказанное, мы видим, что пара  $(\nu, \delta)$  реализует топологическую сопряженность глобальных групп голономии  $\Psi_0$  и  $\Psi'_0$  изоморфных слоений  $(M, F)$  и  $(M', F')$ , что завершает доказательство теоремы.  $\square$

## 6. ИНТЕГРИРУЕМАЯ СВЯЗНОСТЬ ЭРЕСМАНА ДЛЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СЛОЕНИЙ

**6.1. Понятие интегрируемой связности Эресмана для топологических слоений.** Понятие связности Эресмана для гладких слоений введено Р. А. Блюменталем и Дж. Хебдой [11] как естественное обобщение связности Эресмана в расслоениях.

Напомним, что гладкое  $q$ -мерное распределение  $\mathfrak{M}$  на  $n$ -мерном многообразии  $M$  называется *интегрируемым*, если через каждую точку  $x \in M$  проходит  $q$ -мерное интегральное многообразие этого распределения. Как известно, распределение  $\mathfrak{M}$  интегрируемо тогда и только тогда, когда оно образовано касательными векторными пространствами к некоторому слоению  $(M, F^t)$ , т. е.  $\mathfrak{M}_x = T_x F^t$  для любой точки  $x \in M$ , где  $T_x F^t$  — касательное пространство к слою слоения  $(M, F^t)$ , а  $\mathfrak{M}_x$  — значение распределения  $\mathfrak{M}$  в точке  $x$ .

Пусть  $(M, F)$  — слоение коразмерности  $q$  и  $\mathfrak{M}$  — гладкое  $q$ -мерное интегрируемое распределение на  $n$ -мерном гладком многообразии  $M$ , трансверсальное к слоению  $(M, F)$ . Это означает, что в любой точке  $x \in M$  касательное векторное пространство  $T_x M$  к  $M$  раскладывается в прямую сумму векторных подпространств  $T_x M = T_x F \oplus \mathfrak{M}_x$ . Кусочно гладкие интегральные кривые в слоях слоения  $(M, F^t)$  называются *горизонтальными*, а кусочно гладкие кривые в слоях слоения  $(M, F)$  называются *вертикальными*. Пусть  $I_1 = I_2 = I = [0, 1]$ . Кусочно гладкое отображение  $H$  квадрата  $I_1 \times I_2$  в  $M$  называется *вертикально-горизонтальной гомотопией*, если кривая  $H|_{\{s\} \times I_2}$  является вертикальной для любого  $s \in I_1$  и кривая  $H|_{I_1 \times \{t\}}$  является горизонтальной для любого  $t \in I_2$ . В этом случае, пара путей  $(H|_{I_1 \times \{0\}}, H|_{\{0\} \times I_2})$  называется *базой*  $H$ . Известно, что существует не более одной вертикально-горизонтальной гомотопии с данной базой.

Пара путей  $(\sigma, h)$  в  $M$  с общей начальной точкой  $\sigma(0) = h(0)$  называется *допустимой*, если  $\sigma$  — горизонтальная кривая, а  $h$  — вертикальная кривая.

Отождествляя интегрируемое распределение с определяемым им слоением, мы получаем следующее определение.

**Определение 6.1.** Гладкое слоение  $(M, F^t)$  называется *интегрируемой связностью Эресмана* для слоения  $(M, F)$ , если для любой допустимой пары путей  $(\sigma, h)$  в  $M$  существует вертикально-горизонтальная гомотопия  $H$  с базой  $(\sigma, h)$ .

Следующую теорему можно рассматривать как критерий существования интегрируемой связности Эресмана для гладкого слоения.

**Теорема 6.1.** Пусть  $(M, F)$  — гладкое слоение произвольной коразмерности  $q$  на  $n$ -мерном многообразии  $M$  и  $\kappa : \tilde{M} \rightarrow M$  — универсальное накрывающее отображение. Тогда для существования интегрируемой связности Эресмана  $(M, F^t)$  для  $(M, F)$  необходимо и достаточно выполнения следующих двух условий:

- (1) универсальное накрывающее многообразие  $\tilde{M}$  диффеоморфно произведению гладких многообразий  $\tilde{L} \times \tilde{T}$ ;
- (2) индуцированные слоения  $\kappa^* F$  и  $\kappa^* F^t$  на  $\tilde{M}$  совпадают с тривиальными слоениями произведения  $\tilde{L} \times \tilde{T}$ .

*Доказательство.* Предположим, что существует интегрируемая связность Эресмана  $(M, F^t)$  для слоения  $(M, F)$ . Пусть  $\tilde{F} = \kappa^* F$  и  $\tilde{F}^t = \kappa^* F^t$  — индуцированные слоения на универсальном накрывающем многообразии  $\tilde{M}$ . Покажем, что  $\tilde{F}^t$  — интегрируемая связность Эресмана для слоения  $(\tilde{M}, \tilde{F})$ . Пусть  $(\tilde{\sigma}, \tilde{h})$  — произвольная допустимая пара путей с началом в  $\tilde{x} \in \tilde{M}$ . Здесь  $\tilde{\sigma} : I_1 \rightarrow \tilde{M}$  — путь в слое слоения  $\tilde{F}$ , а  $\tilde{h} : I_2 \rightarrow \tilde{M}$  — путь в слое слоения  $\tilde{F}^t$ . Положим  $\sigma := \kappa \circ \tilde{\sigma}$  и  $h := \kappa \circ \tilde{h}$ , тогда  $(\sigma, h)$  — допустимая пара путей с началом в  $x = \kappa(\tilde{x})$  в  $M$ . Согласно определению интегрируемой связности Эресмана  $F^t$  для слоения  $(M, F)$ , существует вертикально-горизонтальная гомотопия  $H$  с базой  $(\sigma, h)$ . При любом фиксированном  $t \in I_2$  сужение  $\sigma_t := H|_{I_1 \times \{t\}}$  есть путь в слое  $L = L(h(t))$  слоения  $(M, F)$  с началом  $\sigma_t(0) = h(t)$ . Так как  $\kappa(\tilde{h}(t)) = h(t)$ , то существует единственный путь  $\tilde{\sigma}_t$  с началом в точке  $\tilde{h}(t)$ , накрывающий путь  $\sigma_t$ . Положим по определению

$$\tilde{H} : I_1 \times I_2 \rightarrow \tilde{M}, \quad \tilde{H}(s, t) := \tilde{\sigma}_t(s) \quad \forall (s, t) \in I_1 \times I_2,$$

тогда  $\kappa \circ \tilde{H} = H$ . Следовательно,  $\tilde{H}$  — кусочно гладкое отображение. Так как при любом фиксированном  $s \in I_1$  сужение  $\tilde{H}|_{\{s\} \times I_2}$  — путь в слое слоения  $(\tilde{M}, \tilde{F})$ , то  $\tilde{H}$  — вертикально-горизонтальная гомотопия с базой  $(\tilde{\sigma}, \tilde{h})$ . Это означает, что  $\tilde{F}^t$  — интегрируемая связность Эресмана для слоения  $(\tilde{M}, \tilde{F})$ . Так как многообразие  $\tilde{M}$  односвязно, то по теореме о разложении, доказанной Ш. Касивабарой [18] и переоткрытой Р. А. Блюменталем и Дж. Хейдой [11], существует диффеоморфизм  $\theta : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2$  на произведение многообразий  $\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2$ , который является изоморфизмом в категории слоений  $\mathfrak{Sol}$  каждой пары слоений  $\tilde{F}$  и  $\tilde{F}_1$ ,  $\tilde{F}^t$  и  $\tilde{F}_2$ , где  $\tilde{F}_1 := \{\tilde{M}_1 \times \{b\} \mid b \in \tilde{M}_2\}$ ,  $\tilde{F}_2 := \{\{a\} \times \tilde{M}_2 \mid a \in \tilde{M}_1\}$  — тривиальные слоения произведения  $\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2$ . Это означает, что для  $(M, F)$  выполняются оба условия (1) и (2).

Обратно, предположим, что гладкое слоение  $(M, F)$  удовлетворяет условиям (1) и (2). Введем обозначения:  $\tilde{F}_1 = \kappa^* F$  и  $\tilde{F}_2 = \kappa^* F^t$ . Из (2) вытекает, что  $\kappa^* F^t$  — интегрируемая связность Эресмана для слоения  $\tilde{F}_1$ . Рассмотрим произвольную пару путей  $(\sigma, h)$  с общим началом в  $x \in M$ . Пусть  $\tilde{x} \in \kappa^{-1}(x)$ . Существуют пути  $\tilde{\sigma}$  и  $\tilde{h}$  в  $\tilde{M}$  с общим началом в  $\tilde{x}$ , накрывающие пути  $\sigma$  и  $h$ , соответственно. Из условий (1) и (2) вытекает, что  $(\tilde{\sigma}, \tilde{h})$  — допустимая пара путей, поэтому существует вертикально-горизонтальная гомотопия  $\tilde{H}$  с базой  $(\tilde{\sigma}, \tilde{h})$ . Тогда  $H := \kappa \circ \tilde{H}$  — вертикально-горизонтальная гомотопия с базой  $(\sigma, h)$ , т. е.,  $F^t$  — интегрируемая связность Эресмана для слоения  $(M, F)$ .  $\square$

Теорема 6.1 позволяет нам следующим образом ввести понятие интегрируемой связности Эресмана для топологических слоений.

**Определение 6.2.** Предположим, что универсальное накрывающее отображение  $\kappa : \tilde{M} \rightarrow M$  для топологического многообразия  $M$  обладает тем свойством, что  $\tilde{M} = \tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2$  — произведение топологических многообразий  $\tilde{M}_1$  и  $\tilde{M}_2$ . Пусть  $\tilde{F}_1$  и  $\tilde{F}_2$  — тривиальные слоения произведения  $\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2$ . Если на  $M$  заданы два слоения  $F_1$  и  $F_2$ , слои которых являются образами слоев соответствующих слоений  $\tilde{M}_1$  и  $\tilde{M}_2$  при накрытии  $\kappa : \tilde{M} \rightarrow M$ , то будем говорить, что тройка  $(M, F_1, F_2)$  — *топологическое двуслоение, накрытое произведением*.

**Определение 6.3.** Пусть  $(M, F)$  — топологическое слоение. Топологическое слоение  $(M, F^t)$  такое, что тройка  $(M, F, F^t)$  образует топологическое двуслоение, накрытое произведением, называется *интегрируемой связностью Эресмана* для слоения  $(M, F)$ .

Далее топологическое слоение  $(M, F)$  с интегрируемой связностью Эресмана  $(M, F^t)$  будем обозначать тройкой  $(M, F, F^t)$ .

**Замечание 6.1.** Топологизация, включающая классификационные теоремы, простых трансверсальных двурасслоений, образующих класс двуслоений, накрытых произведением, получена Я. Л. Шаширо и Н. И. Жуковой в [7]. В [7] гладкие локально тривиальные расслоения заменены расслоениями Гуревича. Общий подход к топологизации гладких двуслоений, накрытых произведением, предложен И. Вайсманом [27]. В отличие от нас И. Вайсман рассматривает не топологические многообразия, а допустимые топологические пространства  $M$ , накрытые произведением.

## 6.2. Структура топологических слоений с интегрируемой связностью Эресмана.

Пусть  $\Psi$  — некоторая группа гомеоморфизмов топологического многообразия  $M$ . Говорят, что  $\Psi$  действует на  $M$  *свободно*, если  $\psi.x = x$  для некоторой точки  $x \in M$  влечет  $\psi = id_M$ .

Действие группы  $\Psi$  называется *собственно разрывным*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

- (1) если для любых двух точек  $x$  и  $x'$  из  $M$  и любого  $\psi \in \Psi$  выполняется неравенство  $\psi(x) \neq x'$ , то существуют окрестности  $U$  и  $U'$  точек  $x$  и  $x'$ , соответственно, такие, что  $\psi(U) \cap U' = \emptyset$ ;
- (2) для всех  $x \in M$  группа  $\Psi_x = \{\psi \in \Psi \mid \psi(x) = x\}$  конечна;
- (3) каждая точка  $x \in M$  имеет окрестность  $U$  такую, что  $\psi_x(U) = U$  для любого  $\psi_x \in \Psi_x$  и такую, что  $U \cap \psi(U) = \emptyset$  для всех  $\psi \notin \Psi_x$ .

Группа  $\Psi$ ,  $\psi \in \Psi$ , действует *эффективно* на многообразии  $M$ , если  $\psi.x = x$  для всех  $x \in M$  влечет  $\psi = id_M$ .

Обозначим через  $\mathfrak{Bif}$  категорию, объектами которой служат двуслоения  $(M, F_1, F_2)$ , накрытые произведением. Морфизмом двух объектов  $(M, F_1, F_2)$  и  $(M', F'_1, F'_2)$  будем называть непрерывное отображение  $f: M \rightarrow M'$ , являющееся морфизмом каждой пары слоений  $F_1$  и  $F'_1$ ,  $F_2$  и  $F'_2$  в категории слоений  $\mathfrak{fol}$ .

Пусть  $X_1$  и  $X_2$  — топологические многообразия размерности  $n_1$  и  $n_2$ , соответственно. Пусть заданы

$$\Phi_1: \Psi \times X_1 \rightarrow X_1 \quad \text{и} \quad \Phi_2: \Psi \times X_2 \rightarrow X_2$$

— непрерывные эффективные действия группы  $\Psi$ , обладающие тем свойством, что индуцированное диагональное эффективное действие группы  $\Psi$

$$\Phi: \Psi \times X_1 \times X_2 \rightarrow X_1 \times X_2: (\psi.(x_1, x_2)) \mapsto (\psi.x_1, \psi.x_2) \quad \forall \psi \in \Psi$$

является свободным и собственно разрывным. Следовательно, проекция

$$\kappa: X_1 \times X_2 \rightarrow (X_1 \times X_2)/\Psi$$

на пространство орбит является регулярным накрывающим отображением. При этом группа  $\Psi$  действует посредством  $\Phi$  на произведении топологических многообразий  $X_1 \times X_2$  как группа накрывающих преобразований. Поэтому на фактор-пространстве  $(X_1 \times X_2)/\Psi$  индуцируется структура топологического многообразия. Поскольку действие  $\Phi$  группы  $\Psi$  на  $X_1 \times X_2$  сохраняет структуру произведения, то на  $(X_1 \times X_2)/\Psi$  индуцируется двуслоение  $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ , накрытое произведением  $X_1 \times X_2$ .

**Определение 6.4.** Топологическое фактор-многообразие  $(X_1 \times X_2)/\Psi$  называется *каноническим*, а тройка  $((X_1 \times X_2)/\Psi, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ , полученная указанным выше образом, называется *каноническим топологическим двуслоением*. Слоение  $((X_1 \times X_2)/\Psi, \mathcal{F}_1)$  называется *каноническим топологическим слоением с интегрируемой связностью Эресмана*.

В [4] исследуются гладкие слоения  $(M, F)$  коразмерности  $q$  на  $n$ -мерных многообразиях  $M$  с интегрируемой связностью Эресмана. Доказана теорема о глобальной структуре таких слоений [4, теорема 1.1]. Доказательство указанной теоремы опирается на упомянутую выше теорему Касивабары [18] о разложении односвязного многообразия в произведение и результаты работ Я. Л. Шапиро [5, 6]. Согласно теореме 6.1, универсальное накрывающее многообразие  $\widetilde{M}$  для  $M$  представляет собой произведение  $\widetilde{M}_1 \times \widetilde{M}_2$ , слои которого накрывают соответствующие слои слоений  $(M, F)$  и  $(M, F^t)$  посредством универсального накрывающего отображения  $\kappa: \widetilde{M} \rightarrow M$ . Таким образом, тройка  $(M, F, F^t)$  — двуслоение, накрытое произведением. Поэтому схема доказательства предложения 2 и следствия 3 из [4] применима и к топологическим многообразиям. Используя ее, мы доказываем следующую теорему о структуре топологических двуслоений, накрытых произведением.

**Теорема 6.2.** Пусть  $(M, F_1, F_2)$  — топологическое двуслоение, накрытое произведением. Тогда:

- (1) существует каноническое топологическое двуслоение  $((X_1 \times X_2)/\Psi, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  и гомеоморфизм  $\Theta: M \rightarrow (X_1 \times X_2)/\Psi$ , являющийся изоморфизмом двуслоений  $(M, F_1, F_2)$  и  $((X_1 \times X_2)/\Psi, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  в категории  $\mathfrak{Bif}$ ;

- (2) группа  $\Psi$  изоморфна факторгруппе  $\pi_1(M)/(G_{11} \times G_{22})$  фундаментальной группы  $\pi_1(M)$  многообразия  $M$  по нормальной подгруппе  $G_{11} \times G_{22}$ , где группа  $G_{ii}$ ,  $i = 1, 2$ , изоморфна фундаментальной группе  $\pi_1(X_i)$  многообразия  $X_i$ .

**Следствие 6.1.** Для топологического слоения  $(M, F)$  с интегрируемой связностью Эресмана  $F^t$  существует гомеоморфизм  $\Theta : M \rightarrow (X \times T)/\Psi$  многообразия  $M$  на некоторое каноническое фактор-многообразие  $(X \times T)/\Psi$ , являющийся изоморфизмом слоений  $(M, F)$  и  $((X \times T)/\Psi, \mathcal{F})$  в категории слоений  $\mathfrak{Fol}$ .

**Определение 6.5.** Изоморфизм  $\Theta : (M, F) \rightarrow ((X \times T)/\Psi, \mathcal{F})$ , указанный в следствии 6.1, называется *представлением* топологического слоения  $(M, F)$  с интегрируемой связностью Эресмана  $F^t$  каноническим слоением, а абстрактная группа  $\Psi$ , удовлетворяющая теореме 6.2, называется *структурной группой* как этого слоения  $(M, F)$ , так и двуслоения  $(M, F, F^t)$ .

**Замечание 6.2.** Для слоения с интегрируемой связностью Эресмана каноническое двуслоение, удовлетворяющее теореме 6.2, — единственное (с точностью до изоморфизма) в категории двуслоений  $\mathfrak{Bif}$ , а представление не является единственным в категории слоений  $\mathfrak{Fol}$ , как показывает пример 7.1.

**6.3. Хаотичность топологических слоений с интегрируемой связностью Эресмана.** Докажем критерий, сводящий существование хаоса в топологическом слоении коразмерности  $q$  с интегрируемой связностью Эресмана к хаотичности действия его структурной группы  $\Psi$  на ассоциированном  $q$ -мерном многообразии  $T$ .

**Теорема 6.3.** Пусть  $(M, F)$  — топологическое слоение с интегрируемой связностью Эресмана  $F^t$ , а  $\Theta : (M, F) \rightarrow ((X \times T)/\Psi, \mathcal{F})$  — некоторое его представление. Тогда для хаотичности слоения  $(M, F)$  необходимо и достаточно хаотичности действия группы  $\Psi$  на топологическом многообразии  $T$ .

*Доказательство.* Поскольку  $(M, F)$  — топологическое слоение с интегрируемой связностью Эресмана  $F^t$ , согласно теореме 6.1, для универсального накрывающего отображения  $\kappa : \tilde{M} \rightarrow M$  выполняются следующие два условия:

- (1) универсальное накрывающее многообразие  $\tilde{M}$  диффеоморфно произведению гладких многообразий  $\tilde{L} \times \tilde{T}$ ;
- (2) индуцированные слоения  $\kappa^*F$  и  $\kappa^*F^t$  на  $\tilde{M}$  совпадают с тривиальными слоениями произведения  $\tilde{L} \times \tilde{T}$ .

Следовательно, слоение  $(M, F)$  покрыто посредством  $\kappa$  тривиальным расслоением, образованным слоями проекции на второй сомножитель  $r : \tilde{L} \times \tilde{T} \rightarrow \tilde{T}$ . Зафиксируем точки  $\tilde{x} = (\tilde{y}, \tilde{z}) \in \tilde{L} \times \tilde{T}$  и  $x = \kappa(\tilde{x}) \in M$ . Тогда определена группа накрывающих преобразований  $G \cong \pi_1(M, x)$  универсального накрытия  $\kappa : \tilde{M} \rightarrow M$ . Так как  $G$  сохраняет структуру произведения  $\tilde{L} \times \tilde{T}$ , то на  $\tilde{T}$  индуцируется группа гомеоморфизмов  $\Psi_0$ . Из конструкции канонического многообразия следует, что  $\Psi_0$  совпадает с группой всех гомеоморфизмов односвязного многообразия  $\tilde{T}$ , лежащих над гомеоморфизмами из группы  $\Psi_2$ , образованной эффективным действием группы  $\Psi$  на  $T$ . Следовательно,  $\Psi_2 \cong \Psi_0/\Gamma$ , где  $\Gamma$  — группа накрывающих преобразований универсального накрытия  $\kappa_2 : \tilde{T} \rightarrow T$ . Отсюда вытекает гомеоморфность пространств орбит  $\tilde{T}/\Psi_0 \cong T/\Psi_2$ . При доказательстве теоремы 5.1 показано, что  $M/F \cong \tilde{T}/\Psi_0$ , следовательно,  $M/F \cong T/\Psi_2 = T/\Psi$ . Согласно теоремам 3.2 и 3.3, гомеоморфность пространства слоев  $M/F$  и пространства орбит  $T/\Psi$  влечет эквивалентность между существованием хаоса в топологическом слоении  $(M, F)$  и хаотичностью действия группы  $\Psi$  (посредством  $\Psi_2$ ) на топологическом многообразии  $T$ .  $\square$

## 7. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ НАДСТРОЕЧНЫЕ СЛОЕНИЯ

**7.1. Метод надстройки.** Мы обобщаем на топологические многообразия метод построения слоений с помощью надстройки гомоморфизма фундаментальной группы  $k$ -мерного многообразия  $B$  в группу гомеоморфизмов  $\text{Homeo}(T)$   $q$ -мерного топологического многообразия  $T$ , предложенный А. Хефлигером.

Пусть заданы топологические многообразия  $B$  и  $T$  размерностей  $\dim B = k$ ,  $\dim T = q$ . Предположим, что задан гомоморфизм  $\rho : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Homeo}(T)$  фундаментальной группы  $\pi_1(B, b_0)$  в точке  $b_0$  многообразия  $B$  в группу гомеоморфизмов  $\text{Homeo}(T)$  многообразия  $T$ . Обозначим через  $\theta : \tilde{B} \rightarrow B$  универсальное накрывающее отображение. Зафиксируем точку  $\tilde{b} \in \theta^{-1}(b_0) \subset \tilde{B}$ . При этом группа  $G := \pi_1(B, b_0)$  действует на  $\tilde{B}$  посредством группы накрывающих преобразований. Равенство

$$g.(x, t) := (g.x, \rho(g)(t)) \quad \forall (x, t) \in \tilde{B} \times T, g \in G \quad (7.1)$$

определяет левое свободное собственное разрывное действие группы  $G$  на произведении многообразий  $\tilde{B} \times T$ , поэтому определено топологическое фактор-многообразие  $M := (\tilde{B} \times T)/G$ . Пусть  $\lambda : \tilde{B} \times T \rightarrow M$  – фактор-отображение на пространство орбит  $(\tilde{B} \times T)/G$ . Подчеркнем, что  $\lambda : \tilde{B} \times T \rightarrow M$  – регулярное накрывающее отображение на  $M$ , поэтому размерность  $\dim M$  равна  $k + q$ . Так как

$$g.(\tilde{B} \times \{z\}) = \tilde{B} \times \{\rho(g)(z)\} \quad \forall g \in G, \quad \forall z \in T,$$

то каждое преобразование  $g \in G$  сохраняет тривиальное слоение  $F_{tr} = \{\tilde{B} \times \{z\} \mid z \in T\}$  произведения  $\tilde{B} \times T$ . Следовательно, на многообразии  $M$  индуцируется слоение  $F = \{\lambda(\tilde{B} \times \{t\}) \mid t \in T\}$  коразмерности  $q$ .

Топологическое слоение  $(M, F)$  называется *надстроечным*. Говорят также, что слоение  $(M, F)$  получено *надстройкой гомоморфизма*

$$\rho : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Homeo}(T).$$

Как и в гладком случае [28], для указанного надстроечного слоения будем использовать обозначение  $(M, F) := \text{Sus}(T, B, \rho)$ .

**Определение 7.1.** Абстрактная группа  $\Psi$ , изоморфная группе  $\rho(\pi_1(B, b_0))$ , называется *структурной группой* надстроечного слоения  $(M, F) := \text{Sus}(T, B, \rho)$ . Многообразие  $B$  называется *базой*, а  $T$  называется *трансверсальным* многообразием для надстроечного слоения  $(M, F)$ .

**7.2. Каноническое надстроечное слоение.** Используя те же аргументы, что и при доказательстве теоремы 3.1 в статье Н. И. Жуковой и Г. В. Чубарова [29], мы доказываем теорему 7.1, характеризующую топологические надстроечные слоения.

**Теорема 7.1.** *Слоение  $(M, F)$  является надстроечным тогда и только тогда, когда существует локально тривиальное расслоение  $p : M \rightarrow B$ , слои которого образуют интегрируемую связность Эресмана для  $(M, F)$ .*

Следующая теорема вытекает из теоремы 6.2 о существовании канонического слоения для топологического слоения с интегрируемой связностью Эресмана и доказательства теоремы 6.3. Она демонстрирует специфику канонического надстроечного слоения.

**Теорема 7.2.** *Пусть  $(M, F)$  – слоение, полученное надстройкой гомоморфизма групп*

$$\rho : \pi_1(B, b_0) = G \rightarrow \text{Homeo}(T).$$

*Тогда слоение  $(M, F)$  изоморфно в категории слоений  $\mathfrak{Sol}$  каноническому надстроечному слоению  $((\tilde{B} \times T)/\Psi, \mathcal{F})$ , где группа  $\Psi$  изоморфна фактор-группе  $G/\text{Ker}(\rho)$ , причем  $\Psi$  действует на топологическом многообразии  $\tilde{B}$  свободно и собственнo разрывно, а на топологическом многообразии  $T$  эффективно как группа гомеоморфизмов  $\rho(G)$ .*

Следующий пример [28, Example 5.5] показывает, что структурная группа надстроечного слоения не является его инвариантом в категории топологических слоений  $\mathfrak{Sol}$ .

**Пример 7.1.** отождествим окружность  $\mathbb{S}^1$  с подмножеством  $\{e^{2\pi it} \mid t \in \mathbb{R}\}$  множества комплексных чисел, а фундаментальную группу  $\pi(\mathbb{S}^1, x_0)$ ,  $x_0 \in \mathbb{S}^1$ , с группой  $\mathbb{Z}$ . Отображение  $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $\kappa(t) = e^{2\pi it}$ , является универсальным накрытием для окружности  $\mathbb{S}^1$ .

Пусть  $m \in \mathbb{N}$ . Определим слоение  $(M_m, F_m)$  следующим образом. Рассмотрим диффеоморфизм окружности  $g_m : e^{2\pi it} \rightarrow e^{2\pi i(t + \frac{1}{m})}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , тогда

$$\rho_m : \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) = \mathbb{Z} \rightarrow \text{Homeo}(\mathbb{S}^1), \rho_m(n) := (g_m)^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

— гомоморфизм групп. Следовательно, на двумерном торе  $\mathbb{T}^2 \cong M_m$  определено счетное семейство надстроечных слоений  $\{(M_m, F_m) := Sus(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1, \rho_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ . Группа  $\Psi_m = \rho_m(\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0))$  изоморфна конечной абелевой группе  $\mathbb{Z}_m$ . По определению,  $\mathbb{Z}_m$  — структурная группа надстроечного слоения  $(M_m, F_m)$ .

Как известно [28], слоения  $(M_m, F_m)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , изоморфны в категории гладких слоений, следовательно, слоения  $(M_m, F_m)$  изоморфны и в категории топологических слоений  $\mathfrak{Sol}$ . Отсюда вытекает, что структурная группа надстроечного слоения не является инвариантом в категории  $\mathfrak{Sol}$ . Кроме того, действия групп  $\Psi_m = \rho_m(\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)) \cong \mathbb{Z}_m$  на окружности  $\mathbb{S}^1$  при разных  $m \in \mathbb{N}$  не являются топологически сопряженными.

**7.3. Критерии хаотичности и изоморфности надстроечных слоений.** Согласно теореме 7.2, структурная группа  $\Psi$  действует на  $T$  посредством группы гомеоморфизмов  $\rho(\pi_1(B, b_0))$ , поэтому применение теоремы 6.2 позволило нам получить следующий критерий хаотичности для надстроечных слоений.

**Теорема 7.3.** *Слоение  $(M, F) = Sus(T, B, \rho)$ , заданное надстройкой гомоморфизма групп*

$$\rho : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Homeo}(T),$$

*является хаотическим тогда и только тогда, когда группа  $\rho(\pi_1(B, b_0))$  имеет хаотическое поведение на многообразии  $T$ .*

Используя теорему 5.3, мы доказываем следующий критерий изоморфности надстроечных слоений в категории  $\mathfrak{Sol}$ .

**Теорема 7.4.** *Пусть  $(M, F) = Sus(T, B, \rho)$ ,  $(M', F') = Sus(T', B, \rho')$  — топологические слоения, заданные надстройкой гомоморфизмов  $\rho : \pi_1(B, b) \rightarrow \text{Homeo}(T)$  и  $\rho' : \pi_1(B, b) \rightarrow \text{Homeo}(T')$ , соответственно. Если многообразия  $T$  и  $T'$  односвязны, то для того, чтобы слоения  $(M, F)$  и  $(M', F')$  были изоморфны в категории слоений  $\mathfrak{Sol}$ , необходимо и достаточно топологической сопряженности групп гомеоморфизмов  $\rho(\pi_1(B, b))$  и  $\rho'(\pi_1(B, b))$ .*

*Доказательство.* Предположим, что слоения  $(M, F)$  и  $(M', F')$  удовлетворяют условию теоремы. Пусть  $\Theta : M \rightarrow (\widehat{B} \times T)\Psi$  и  $\Theta' : M' \rightarrow (\widehat{B}' \times T')\Psi'$  — их представления. В силу односвязности многообразий  $T$  и  $T'$ , глобальные группы голономии слоений  $(M, F)$  и  $(M', F')$  равны  $\Psi_0 = \rho(\pi_1(B, b))$  и  $\Psi'_0 = \rho'(\pi_1(B, b))$ , соответственно.

*Необходимость.* Если слоения  $(M, F)$  и  $(M', F')$  изоморфны, то, согласно теореме 5.3, группы  $\Psi_0 = \rho(\pi_1(B, b))$  и  $\Psi'_0 = \rho'(\pi_1(B', b'))$  топологически сопряжены. Таким образом, необходимость доказана.

*Достаточность.* Предположим, что группы  $\Psi_0 = \rho(\pi_1(B, b))$  и  $\Psi'_0 = \rho'(\pi_1(B, b'))$  гомеоморфизмов топологических многообразий  $T$  и  $T'$  топологически сопряжены. Пусть пара  $(\nu, \delta)$  реализует эту топологическую сопряженность. Это означает, что  $\nu : \Psi_0 \rightarrow \Psi'_0$  — изоморфизм групп, а  $\delta : T \rightarrow T'$  — гомеоморфизм, причем для любого элемента  $\psi_0 \in \Psi_0$  диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\delta} & T \\ \psi_0 \downarrow & & \downarrow \nu(\psi_0) \\ T & \xrightarrow{\delta} & T \end{array} \tag{7.2}$$

коммутативна. Пусть  $\theta : \widetilde{B} \rightarrow B$  — универсальное накрывающее отображение. При фиксированной точке  $\tilde{b} \in \theta^{-1}(b) \subset \widetilde{B}$  можно отождествить фундаментальную группу  $\pi_1(B, b)$  с группой накрывающих преобразований  $G$  накрытия  $\theta$ . Заметим, что в данном случае гомоморфизмы групп  $\rho$  и  $\rho'$  удовлетворяют коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ \rho \swarrow & & \searrow \rho' \\ \Psi_0 & \xrightarrow{\nu} & \Psi'_0. \end{array}$$

Отсюда вытекает равенство  $Ker(\rho) = Ker(\rho')$ , поэтому  $\Psi = G/Ker(\rho)$  совпадает с  $\Psi' = G/Ker(\rho')$ . Следовательно, совпадают многообразия  $\widehat{B} = \widetilde{B}/Ker(\rho)$  и  $\widehat{B}' = \widetilde{B}'/Ker(\rho')$ , фигурирующие в представлениях слоений  $(M, F)$  и  $(M', F')$ . Гомеоморфизм  $(id_{\widehat{B}}, \delta) : \widehat{B} \times T \rightarrow \widehat{B}' \times T'$  сопрягает действия группы  $\Psi$ , соответствующие указанным представлениям, поэтому он индуцирует изоморфизм канонических слоений  $((\widehat{B} \times T)/\Psi, \mathcal{F})$  и  $((\widehat{B}' \times T')/\Psi', \mathcal{F}')$ . Это влечет изоморфность слоений  $(M, F)$  и  $(M', F')$  и завершает доказательство теоремы.  $\square$

## 8. ХАОТИЧЕСКИЕ НАДСТРОЕЧНЫЕ СЛОЕНИЯ НА 3-МНОГООБРАЗИЯХ

### 8.1. Структура хаотического надстроечного слоения на замкнутом 3-многообразии.

Применяя доказанные выше свойства надстроечных слоений, мы получаем следующую теорему, выясняющую специфику трехмерного случая.

**Теорема 8.1.** Пусть  $(M, F)$  — хаотическое надстроечное слоение на замкнутом 3-многообразии  $M$ , полученное надстройкой гомоморфизма групп  $\rho : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Homeo}(T)$ . Тогда:

- (1) база  $B$  гомеоморфна окружности  $\mathbb{S}^1$ , а трансверсальное многообразие  $T$  представляет собой произвольную замкнутую поверхность, т. е. одно из многообразий:  $\mathbb{S}^2$  (сфера),  $\mathbb{S}_k^2$  (сфера с  $k \geq 1$  ручками),  $N_s^2$  (сфера с  $s \geq 1$  пленками Мебиуса);
- (2) структурная группа  $\Psi$  изоморфна группе  $\mathbb{Z}$  и хаотически действует посредством  $\rho$  на  $T$ . Определено действие группы  $\Psi$  на произведении  $\mathbb{R}^1 \times T$ :

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^1 \times T \rightarrow \mathbb{R}^1 \times T, \quad n.(x, z) := (x + n, \rho(n)(z)) \quad \forall (x, z) \in \mathbb{R}^1 \times T, \quad \forall n \in \mathbb{Z}; \quad (8.1)$$

- (3) многообразие  $M$  гомеоморфно пространству орбит  $(\mathbb{R}^1 \times T)/\mathbb{Z}$ , а фактор-отображение  $f : \mathbb{R}^1 \times T \rightarrow (\mathbb{R}^1 \times T)/\mathbb{Z} \cong M$  индуцирует слоение  $(M, F)$  такое, что поднятое слоение  $f^*F$  образовано слоями канонической проекции произведения  $\mathbb{R}^1 \times T$  на второй сомножитель  $pr : \mathbb{R}^1 \times T \rightarrow T$ ;
- (4) определено локально тривиальное расслоение  $p : M \rightarrow \mathbb{S}^1$  над окружностью  $B = \mathbb{S}^1$  со стандартным слоем  $T$ , причем каждый слой расслоения  $p^{-1}(b)$ ,  $b \in B$ , пересекает все слои слоения  $(M, F)$ .

*Доказательство.* Пусть  $(M, F)$  — хаотическое топологическое слоение на замкнутом трехмерном многообразии  $M$ , полученное надстройкой гомоморфизма  $\rho : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Homeo}(T)$ . Тогда, согласно теореме 7.3, группа  $\rho(\pi_1(B, b_0))$  хаотически действует на многообразии  $T$ . Так как  $T$  гомеоморфно слою ассоциированного расслоения  $p : M \rightarrow B$ , то  $T$  либо одномерное, либо двумерное замкнутое топологическое многообразие.

*Случай 1:*  $\dim T = 1$ . Как известно из [12], на окружности не существует хаотических групп гомеоморфизмов, поэтому этот случай невозможен.

*Случай 2:*  $\dim T = 2$ , т. е.  $T$  — замкнутая поверхность. При этом  $B$  — замкнутое одномерное многообразие, т. е. окружность. Таким образом, утверждение (1) доказано. Отсюда вытекает, что  $G = \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \cong \mathbb{Z}$  и  $M = (\mathbb{R}^1 \times T)/\mathbb{Z}$ , причем структурная группа  $\Psi \cong \rho(\mathbb{Z})$  действует хаотически на замкнутой поверхности  $T$ . образом группы  $\mathbb{Z}$  при гомоморфизме  $\rho$  может быть либо группа  $\mathbb{Z}$ , либо конечная группа  $\mathbb{Z}_n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ . Поскольку хаотически может действовать только бесконечная группа, необходимо, чтобы  $\Psi$  была изоморфна группе  $\mathbb{Z}$ . Следовательно, действие группы  $\Psi$  на произведении  $\mathbb{R}^1 \times T$  определено равенством (8.1). Таким образом, выполняется утверждение (2).

Утверждения (3) и (4) вытекают из общих свойств надстроечных слоений при  $B = \mathbb{S}^1$  и  $\Psi \cong \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Замечание 8.1.** Для одномерных хаотических надстроечных слоений на некомпактных  $n$ -мерных многообразиях всегда  $B = \mathbb{S}^1$  и  $\Psi \cong \mathbb{Z}$ .

**8.2. Хаотические действия группы  $\mathbb{Z}$  на сфере и на плоскости.** Напомним понятие орбифолда, которое далее существенно используется.

**Определение 8.1.** Пусть  $\mathcal{X}$  — хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой,  $U$  — открытое подмножество в  $\mathcal{X}$ . Предположим, что  $V$  — связное открытое подмножество  $n$ -мерного арифметического пространства  $\mathbb{R}^n$  и  $\Gamma$  — конечная группа диффеоморфизмов  $V$ . Тройка  $(V, \Gamma, \varphi)$  называется *картой* на  $\mathcal{X}$ , если существует гомеоморфизм  $h : V/\Gamma \rightarrow U$  такой, что

$\varphi = h \circ q$ , где  $q : V \rightarrow V/\Gamma$  — фактор-отображение на пространство орбит группы  $\Gamma$ . Открытое подмножество  $U$  называется *зоной* карты  $(V, \Gamma, \varphi)$ .

Рассмотрим две карты  $(V, \Gamma, \varphi)$  и  $(\tilde{V}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\varphi})$  с зонами  $U$  и  $\tilde{U}$  такими, что  $U \subset \tilde{U}$ . Гладкое включение  $\psi_{\tilde{U}U} : V \rightarrow \tilde{V}$ , такое, что  $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \psi_{\tilde{U}U}$ , называется *включением* карты  $(V, \Gamma, \varphi)$  в карту  $(\tilde{V}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\varphi})$ .

**Определение 8.2.** Две карты  $(V, \Gamma, \varphi)$  и  $(\hat{V}, \hat{\Gamma}, \hat{\varphi})$  называются *согласованными*, если для каждой точки  $x \in U \cap \hat{U}$  существует карта  $(\tilde{V}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\varphi})$  с зоной  $W = \tilde{\varphi}(\tilde{V}) \subset U \cap \hat{U}$ , для которой существуют включения  $\psi_{UW} : \tilde{V} \rightarrow V$  и  $\psi_{\hat{U}W} : \tilde{V} \rightarrow \hat{V}$ .

**Определение 8.3.** Семейство карт  $\mathcal{A} = \{(V_\alpha, \Gamma_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in \mathfrak{J}\}$  называется *гладким атласом* на  $\mathcal{X}$ , если выполняются следующие условия:

- (1) семейство  $\{U_\alpha = \varphi_\alpha(V_\alpha) \mid \alpha \in \mathfrak{J}\}$  является открытым покрытием пространства  $\mathcal{X}$ ;
- (2) любые две карты из семейства  $\mathcal{A}$  согласованы.

Атлас  $\mathcal{A}$  называется *максимальным* по включению, если он совпадает с каждым атласом, его содержащим.

**Определение 8.4.** Пара  $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ , где  $\mathcal{A}$  — максимальный атлас, называется *гладким  $n$ -мерным орбифолдом* и также обозначается через  $\mathcal{X}$ . При этом атлас  $\mathcal{A}$  называется *структурой орбифолда*.

Если  $M$  — многообразие и  $\Gamma$  — конечная группа диффеоморфизмов  $M$ , то на пространстве орбит  $M/\Gamma$  естественным образом определена структура орбифолда, который называется *очень хорошим* и обозначается также через  $M/\Gamma$ . Эта терминология предложена У. Терстеном, применившим классификацию двумерных орбифолдов при классификации трехмерных замкнутых многообразий [26].

Топологическое пространство орбифолда называется *подстилающим*.

**Определение 8.5.** Пусть  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{X}'$  — два орбифолда с атласами  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}'$ , соответственно. Непрерывное отображение  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$  называется *гладким*, если для каждой точки  $x \in \mathcal{X}$  существуют карты  $(V, \Gamma, \varphi) \in \mathcal{A}$  и  $(V', \Gamma', \varphi') \in \mathcal{A}'$  такие, что  $x \in U = \varphi(V)$ ,  $f(U) \subset U' = \varphi'(V')$  и существует гладкое отображение  $f_{U'U} : V \rightarrow V'$ , удовлетворяющее равенству  $\varphi' \circ f_{U'U} = f|_U \circ \varphi$ .

**Определение 8.6.** Пусть  $f : X \rightarrow X$  и  $g : Y \rightarrow Y$  — непрерывные отображения топологических пространств. Говорят, что  $f$  *полусопряжено* с  $g$ , если существует непрерывное сюръективное отображение  $h : X \rightarrow Y$ , удовлетворяющее коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{h} & Y. \end{array} \tag{8.2}$$

**Лемма 8.1.** Пусть  $f : X \rightarrow X$  и  $g : Y \rightarrow Y$  — гомеоморфизмы топологических пространств, причем существует непрерывное открытое сюръективное отображение  $h : X \rightarrow Y$ , являющееся полусопряжением  $f$  с  $g$ . Если группа  $G = \langle f \rangle$ , порожденная  $f$ , действует хаотически на  $X$ , то группа  $H = \langle g \rangle$ , порожденная  $g$ , действует хаотически на  $Y$ .

*Доказательство.* Согласно определению полусопряжения  $h : X \rightarrow Y$  выполняется равенство  $g \circ h = h \circ f$ , откуда вытекает  $g^n \circ h = h \circ f^n$  для любого  $n \in \mathbb{Z}$ .

Заметим, что при непрерывном сюръективном отображении всюду плотное подмножество отображается в плотное подмножество. Орбита  $G.x$  произвольной точки  $x \in X$  удовлетворяет цепочке равенств:

$$h(G.x) = h\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(x)\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} h(f^n(x)) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} g^n(h(x)) = H.h(x).$$

Таким образом, полусопряжение  $h$  отображает орбиту  $G.x$  точки  $x \in X$  в орбиту  $H.h(x)$  точки  $h(x) \in Y$ . Поскольку  $h : X \rightarrow Y$  — непрерывное и сюръективное отображение, всюду плотная орбита группы  $G$  проектируется во всюду плотную орбиту группы  $H$ . Пусть  $G.y$  — замкнутая орбита

точки  $y$  в  $X$ , тогда  $X \setminus G.y$  — открытое подмножество в  $X$ , поэтому  $Y \setminus H.h(y) = h(X \setminus G.y)$  — открытое подмножество в  $Y$  как образ открытого множества при открытом отображении  $h : X \rightarrow Y$ . Следовательно, образ замкнутой орбиты при открытом полусопряжении является замкнутой орбитой.

Предположим, что группа  $G = \langle f \rangle$  является хаотической, т. е. существует всюду плотная орбита  $G.x$  группы  $G$  и объединение замкнутых орбит всюду плотно в  $X$ . Тогда  $H.h(x)$  — всюду плотная орбита группы  $H$  в  $Y$ . Пусть  $\bigcup_{i \in J} G.y_i$  — объединение замкнутых в  $X$  орбит группы  $G$ , тогда его образ есть объединение  $\bigcup_{i \in J} H.h(y_i)$  замкнутых в  $Y$  орбит, и он всюду плотен в  $Y$ . Это означает, что группа  $H = \langle g \rangle$  хаотична на  $Y$ . □

Пусть  $\mathbb{T}^2$  — стандартный двумерный тор. Представим  $\mathbb{T}^2$  как квадрат  $[-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$  в декартовой системе координат  $Oxy$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с отождествленными противоположными сторонами. Другими словами, на торе  $\mathbb{T}^2$  введены координаты  $(x, y) \pmod{1}$ , т. е.  $x$  и  $y$  являются периодическими с периодом 1. Определим диффеоморфизм  $\gamma : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , равенством  $\gamma(x, y) = (-x, -y)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ . Тогда  $\Gamma = \langle \gamma \rangle$  — группа диффеоморфизмов тора  $\mathbb{T}^2$ , изоморфная  $\mathbb{Z}_2$ , причем определен очень хороший гладкий орбиформ  $\mathcal{P} = \mathbb{T}^2/\Gamma$ , который называется «подушкой». В качестве фундаментального многоугольника  $\Sigma$  для «подушки»  $\mathcal{P}$  возьмем прямоугольник  $[-1/2, 1/2] \times [0, 1/2]$  в квадрате  $[-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$ , правило склейки сторон которого изображено на рис. 3, где одинаковыми буквами обозначены склеиваемые отрезки, а стрелки указывают направление склейки.

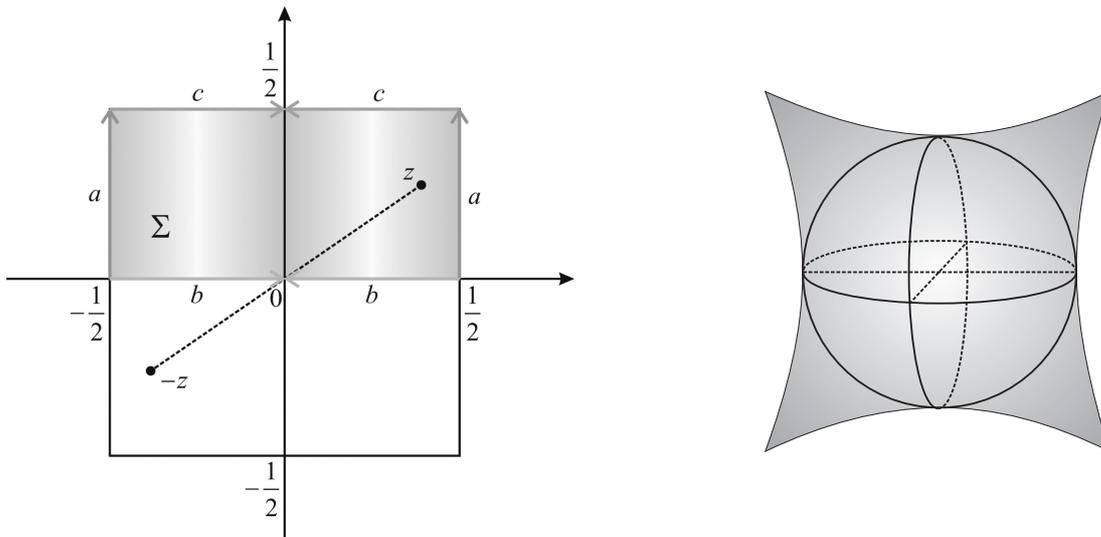


Рис. 3. Орбиформ «подушка».  
 FIG. 3. Orbifold “pillow.”

Аносовский автоморфизм тора  $\mathbb{T}^2$ , задаваемый матрицей  $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ , обозначается через  $f_A$ . Как известно, любая матрица

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{8.3}$$

удовлетворяющая условиям  $ad - bc = 1$  и  $a + d > 2$ , определяет аносовский автоморфизм  $f_A$  тора  $\mathbb{T}^2$ , сохраняющий ориентацию. Группа  $G = \langle f_A \rangle \cong \mathbb{Z}$ , порожденная автоморфизмом  $f_A$ , действует хаотически на торе  $\mathbb{T}^2$  (см. [2]). Так как  $f_A(-z) = -f_A(z) \forall z \in \mathbb{T}^2$ , то отображение  $f_A$  индуцирует на  $\mathcal{P}$  гомеоморфизм  $g_A$ . Поскольку проекция на пространство орбит  $\eta : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathcal{P} = \mathbb{T}^2/\Gamma$  непрерывна, открыта (по лемме 3.3) и сюръективна,  $\eta$  — полусопряжение гомеоморфизма  $f_A$  тора  $\mathbb{T}^2$  с гомеоморфизмом  $g_A$  «подушки»  $\mathcal{P}$ . Тогда, согласно лемме 8.1, любая матрица вида (8.3) определяет хаотический гомеоморфизм  $g_A$  «подушки».

Заметим, что подстилающее пространство «подушки»  $\mathcal{P}$  гомеоморфно стандартной сфере  $\mathbb{S}^2$ . Отождествим топологическое пространство «подушки»  $\mathcal{P}$  с  $\mathbb{S}^2$ . Таким образом, группа гомеоморфизмов  $\langle g_A \rangle \cong \mathbb{Z}$  хаотически действует на сфере  $\mathbb{S}^2$ .

Напомним, что точка  $x \in X$  называется *неподвижной точкой группы гомеоморфизмов*  $G$  топологического пространства  $X$ , если  $g(x) = x$  для любого  $g \in G$ . Множество всех неподвижных точек гомеоморфизма  $g$  и группы  $G$  обозначается, соответственно, через  $fix(g)$  и  $fix(G)$ . Заметим, что в случае, когда  $G = \langle g \rangle \cong \mathbb{Z}$ , выполняется равенство  $fix(G) = fix(g)$ .

**Лемма 8.2.** *При любом  $m \in \mathbb{N}$  матрица*

$$A_m = \begin{pmatrix} 2m & 2m - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{8.4}$$

*определяет хаотический гомеоморфизм  $g_{A_m}$  подстилающей сферы  $\mathbb{S}^2$  орбифолда «подушка», причём  $g_{A_m}$  имеет ровно  $m$  неподвижных точек, а группа  $G_m = \langle g_{A_m} \rangle$  имеет счетное всюду плотное множество периодических орбит.*

*Доказательство.* Как и выше, представим  $\mathbb{T}^2$  как квадрат  $[-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$  в декартовой системе координат  $Oxy$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с отождествленными противоположными сторонами, и представим «подушку»  $\mathcal{P}$  как прямоугольник  $\Sigma = [-1/2, 1/2] \times [0, 1/2]$  на той же плоскости  $\mathbb{R}^2$  с правилом склейки сторон, указанном стрелками на рис. 3. Пусть  $\eta : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathcal{P}$  — проекция тора  $\mathbb{T}^2$  на «подушку»  $\mathcal{P}$  как на пространство орбит. Матрица  $A_m$  вида (8.4) определяет ановский автоморфизм  $f_{A_m}$  тора  $\mathbb{T}^2$ . Следовательно, группа  $G = \langle f_{A_m} \rangle$  действует хаотически на торе  $\mathbb{T}^2$ . Как показано выше, ановский автоморфизм  $f_{A_m}$  тора индуцирует на фактор-пространстве  $\mathcal{P}$  хаотический гомеоморфизм  $g_{A_m}$ , удовлетворяющий равенству  $g_{A_m} \circ \eta = \eta \circ f_{A_m}$ .

Пусть  $w \in \mathcal{P}$  — произвольная неподвижная относительно  $g_{A_m}$  точка,  $g_{A_m}(w) = w$ . Так как  $\eta : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathcal{P}$  сюръективно, то существует такая точка  $z \in \mathbb{T}^2$  на торе, что  $\eta(z) = w$ . Возьмем в качестве  $z$  точку из прямоугольника  $\Sigma$ , с теми же координатами, что и точка  $w$ . Так как  $g_{A_m}(\eta(z)) = \eta(f_{A_m}(z))$ , то  $g_{A_m}(\eta(z)) = g_{A_m}(w) = w = \eta(z) = \eta(f_{A_m}(z))$ . Последнее равенство выполняется, только если либо  $f_{A_m}(z) = z$ , либо  $f_{A_m}(z) = -z$ . Из определения ановского автоморфизма  $f_{A_m}$  вытекает, что эти условия эквивалентны существованию чисел  $p, q \in \mathbb{Z}$  и точки  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \pmod{1} = z$ , удовлетворяющих равенству  $A_m \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ .

Пары точек из  $\Sigma$  с координатами  $(-x, 0)$  и  $(x, 0)$ ;  $(-x, 1/2)$  и  $(x, 1/2)$ ;  $(-1/2, y)$  и  $(1/2, y)$  отождествляются, поэтому можно считать, не уменьшая общности, что каждая неподвижная относительно  $g_{A_m}$  точка  $w \in \mathcal{P}$  принадлежит множеству:

$$W := (-1/2, 0) \times (0, 1/2) \sqcup [0, 1/2] \times [0, 1/2] \subset \Sigma.$$

Положим  $w = (x, y) \in W$ . Тогда

$$A_m \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m & 2m - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (2m - 1)x + (2m - 1)y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Следовательно,  $x = 0$  и  $y = \frac{p}{2m - 1}$ , где  $p = 0, 1, \dots, m - 2, m - 1$ . Так как подстилающее многообразие орбифолда «подушка»  $\mathcal{P}$  гомеоморфно  $\mathbb{S}^2$ , то гомеоморфизм  $g_{A_m}$  сферы  $\mathbb{S}^2$  имеет ровно  $m$  неподвижных точек.

Как известно, точка  $(x, y) \in [-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$  является периодической точкой произвольного ановского автоморфизма  $f_{A_m}$  тора  $\mathbb{T}^2$  тогда и только тогда, когда обе ее координаты  $x$  и  $y$  — рациональные числа. Следовательно, на торе  $\mathbb{T}^2$  существует счетное семейство периодических орбит, объединение которых всюду плотно в  $\mathbb{T}^2$ . Подчеркнем, что других замкнутых орбит нет. Так как проекция  $\eta : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathcal{P} \cong \mathbb{S}^2$  отображает периодическую орбиту в периодическую орбиту, то группа  $G_m = \langle g_{A_m} \rangle$  имеет счетное всюду плотное множество периодических орбит в  $\mathbb{S}^2$ .  $\square$

**Следствие 8.1.** *Пусть  $\eta : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathcal{P} \cong \mathbb{S}^2$  — проекция на пространство орбит.*

*Точка  $O := \eta((0, 0))$  является неподвижной относительно любого гомеоморфизма  $g_{A_m}$ , заданного матрицей (8.4), а для гомеоморфизма  $g_{A_1}$ , определенного матрицей*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8.5}$$

*$O$  — единственная неподвижная точка.*

**Лемма 8.3.** Если гомеоморфизмы  $f : X \rightarrow X$  и  $g : Y \rightarrow Y$  многообразий  $X$  и  $Y$  топологически сопряжены, то множества их неподвижных точек эквивалентны, т. е.  $|\text{fix}(f)| = |\text{fix}(g)|$ .

*Доказательство.* Пусть  $x \in \text{fix}(f)$ , т. е.  $f(x) = x$ . Пусть  $h : X \rightarrow Y$  реализует топологическую сопряженность  $f$  и  $g$ , т. е. удовлетворяет равенству  $g \circ h = h \circ f$ . Тогда  $g(h(x)) = h(f(x))$ , поэтому  $g(h(x)) = h(x)$ , т. е.  $h(x) \in \text{fix}(g)$ . Так как  $h$  — гомеоморфизм, то

$$\widehat{h} : \text{fix}(f) \rightarrow \text{fix}(g) : x \mapsto h(x) \quad \forall x \in \text{fix}(f)$$

— биекция, следовательно, множества  $\text{fix}(f)$  и  $\text{fix}(g)$  эквивалентны. Если число неподвижных точек гомеоморфизма  $f$  конечно, то оно равно числу неподвижных точек гомеоморфизма  $g$ .  $\square$

**Предложение 8.1.** Счетное семейство  $\{G_m = \langle g_{A_m} \rangle\}_{m \in \mathbb{N}}$ , где  $g_{A_m}$  — гомеоморфизм сферы  $\mathbb{S}^2$ , определенный указанным выше способом матрицей  $A_m$  (8.4), состоит из попарно топологически не сопряженных хаотических групп гомеоморфизмов  $G_m$  сферы  $\mathbb{S}^2$ .

*Доказательство.* Согласно лемме 8.2, гомеоморфизмы  $g_{A_m}, g_{A_n}$  сферы  $\mathbb{S}^2$  при различных  $m, n$  из  $\mathbb{N}$  имеют разное число неподвижных точек, поэтому, в силу леммы 8.3, группы  $G_m = \langle g_{A_m} \rangle$  и  $G_n = \langle g_{A_n} \rangle$  топологически не сопряжены. Таким образом,  $\{G_m = \langle g_{A_m} \rangle\}_{m \in \mathbb{N}}$  — счетное семейство попарно топологически не сопряженных хаотических групп гомеоморфизмов сферы  $\mathbb{S}^2$ .  $\square$

**Предложение 8.2.** Пусть, в обозначениях предложения 8.1,  $h_{A_m} := g_{A_m}|_{\mathbb{S}^2 \setminus \{O\}}$ . Тогда  $h_{A_m}$  — гомеоморфизм  $\mathbb{S}^2 \setminus \{O\} \cong \mathbb{R}^2$ , а  $\{H_m = \langle h_{A_m} \rangle\}_{m \in \mathbb{N}}$  — счетное семейство попарно топологически не сопряженных хаотических групп гомеоморфизмов  $H_m$  плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

*Доказательство.* Так как точка  $O$  неподвижна относительно любого гомеоморфизма  $g_{A_m}$ , заданного матрицей (8.4), то  $\mathbb{S}^2 \setminus \{O\}$  инвариантно относительно  $g_{A_m}$ . Подмногообразие сферы  $\mathbb{S}^2 \setminus \{O\}$  гомеоморфно плоскости  $\mathbb{R}^2$ , отождествим их. Тогда сужение  $h_{A_m} := g_{A_m}|_{\mathbb{R}^2}$  является гомеоморфизмом плоскости  $\mathbb{R}^2$  для любого  $m \in \mathbb{N}$ , причем группа  $H_m := \langle h_{A_m} \rangle \cong \mathbb{Z}$  имеет хаотическое поведение на  $\mathbb{R}^2$ . Из предложения 8.1 вытекает, что группы  $H_m$  и  $H_n$  не сопряжены при  $m \neq n$ . Таким образом,  $\{H_m = \langle h_{A_m} \rangle\}_{m \in \mathbb{N}}$  — счетное семейство, состоящее из попарно топологически не сопряженных хаотических групп гомеоморфизмов плоскости  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

**8.3. Построение хаотических надстроечных слоений на 3-многообразиях.** Следующие две теоремы доказаны нами конструктивным путем.

**Теорема 8.2.** Пусть  $g_{A_m}$  — гомеоморфизм сферы  $\mathbb{S}^2$ , индуцированный матрицей  $A_m$  вида (8.4), и  $(M_m, F_m)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , — слоение, полученное надстройкой гомоморфизма

$$\rho_m : \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \text{Homeo}(\mathbb{S}^2), \quad \rho_m(n) = (g_{A_m})^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда  $\{(M_m, F_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$  — счетное семейство хаотических топологических слоений, попарно не изоморфных в категории  $\mathfrak{Sol}$ .

*Доказательство.* Применим метод надстройки. В качестве базы  $B$  надстроечного слоения возьмем окружность  $\mathbb{S}^1$ , а в качестве трансверсального многообразия  $T$  — двумерную сферу  $\mathbb{S}^2$ . Определим гомоморфизм групп

$$\rho_m : \pi_1(\mathbb{S}^1, b) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \text{Homeo}(\mathbb{S}^2), \quad \rho_m(n) := (g_{A_m})^n \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

где  $g_{A_m}$  — гомеоморфизм сферы  $\mathbb{S}^2$ , заданный матрицей  $A_m$ , указанной в (8.4). При этом  $\rho_m(\mathbb{Z}) = G_m = \langle g_{A_m} \rangle$  — хаотическая группа гомеоморфизмов сферы  $\mathbb{S}^2$ , определенная при доказательстве предложения 8.1, причем  $G_m \cong \mathbb{Z}$ . По теореме 7.3, слоение  $(M_m, F_m) = \text{Sus}(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^1, \rho_m)$ , полученное надстройкой гомоморфизма  $\rho_m : \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \rightarrow \text{Homeo}(\mathbb{S}^2)$ , является хаотическим.

Согласно предложению 8.1 группы  $\rho_m(\mathbb{Z}) = G_m$  и  $\rho_k(\mathbb{Z}) = G_k$  топологически не сопряжены при  $m \neq k$ ,  $m, k \in \mathbb{N}$ . Следовательно, по теореме 7.4 слоения  $(M_m, F_m)$  и  $(M_k, F_k)$  не изоморфны в категории  $\mathfrak{Sol}$ . Таким образом,  $\{(M_m, F_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$  — счетное семейство хаотических топологических надстроечных слоений, попарно не изоморфных в категории топологических слоений  $\mathfrak{Sol}$ .  $\square$

Напомним, что топологическое пространство называется *пространством Эйленберга—Маклейна*, если все его гомотопические группы, кроме одной, равны нулю. Если  $\pi_n(X, x_0) = G \neq 0$ , то говорят, что  $X$  — пространство Эйленберга—Маклейна типа  $K(G, n)$ .

**Теорема 8.3.** Пусть  $h_{A_m}$  — гомеоморфизм плоскости  $\mathbb{R}^2$ , определенный в предложении 8.2, и  $(M_m, F_m)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , — слоение, полученное надстройкой гомоморфизма

$$\rho_m : \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \text{Homeo}(\mathbb{R}^2), \quad \rho_m(n) = (h_{A_m})^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда  $\{(M_m, F_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$  — счетное семейство хаотических топологических слоений, попарно не изоморфных в категории  $\mathfrak{Sol}$ , причем каждое многообразие  $M_m$  не компактно и является пространством Эйленберга–Маклейна типа  $K(\mathbb{Z}, 1)$ .

*Доказательство.* Применим метод надстройки. В качестве базы  $B$  возьмем окружность  $\mathbb{S}^1$ , а в качестве трансверсального многообразия  $T$  — плоскость  $\mathbb{R}^2$ . Определим гомоморфизм групп  $\rho_m : \pi_1(\mathbb{S}^1, b) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \text{Homeo}(\mathbb{R}^2)$  равенством  $\rho_m(n) \mapsto (h_{A_m})^n$  для любого  $n \in \mathbb{Z}$ , где  $h_{A_m}$  — гомеоморфизм плоскости  $\mathbb{R}^2$ , определенный при доказательстве предложения 8.2. Следовательно, группа  $\rho_m(\mathbb{Z}) = H_m$ , где  $H_m := \langle h_{A_m} \rangle \cong \mathbb{Z}$ , является хаотической. По теореме 7.3, слоение  $(M_m, F_m) = \text{Sus}(\mathbb{R}^2, \mathbb{S}^1, \rho_m)$ , полученное надстройкой гомоморфизма  $\rho_m : \pi_1(\mathbb{S}^1, b) \rightarrow \text{Homeo}(\mathbb{R}^2)$ , является хаотическим.

Согласно предложению 8.2, группы  $H_m = \rho_m(\mathbb{Z})$  и  $H_k = \rho_k(\mathbb{Z})$  гомеоморфизмов плоскости  $\mathbb{R}^2$  топологически не сопряжены при  $m \neq k$ ,  $m, k \in \mathbb{N}$ . Следовательно, по теореме 7.4, слоения  $(M_m, F_m)$  и  $(M_k, F_k)$  не изоморфны в категории топологических слоений  $\mathfrak{Sol}$ .

Многообразие  $M_m$ , на котором определено слоение  $(M_m, F_m)$ , гомеоморфно пространству орбит  $(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2)/\mathbb{Z}$  и является трехмерным многообразием. Определено локально тривиальное расслоение  $p : M_m \rightarrow \mathbb{S}^1$  со стандартным слоем  $\mathbb{R}^2$ . Некомпактность стандартного слоя влечет некомпактность пространства расслоения  $M_m$ . Из точной последовательности расслоения  $p : M_m \rightarrow \mathbb{S}^1$  вытекает изоморфность гомотопических групп:  $\pi_n(M_m, x_0) \cong \pi_n(\mathbb{R}^2, s_0) \cong 0 \quad \forall n \geq 2$  и  $\pi_1(M_m, x_0) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \cong \mathbb{Z}$ . Таким образом,  $M_m$  — пространство Эйленберга–Маклейна типа  $K(\mathbb{Z}, 1)$ .  $\square$

**Предложение 8.3.** Пусть  $(M_m, F_m)$  — любое из слоений, построенных при доказательстве теорем 8.2 и 8.3. Тогда множество замкнутых слоев слоения  $(M_m, F_m)$  счетно, а их объединение всюду плотно в  $M_m$ , причем каждый замкнутый слой гомеоморфен окружности.

*Доказательство.* В силу односвязности трансверсального многообразия  $T$ , глобальная группа голономии  $(\Psi_0)_m$  слоения  $(M_m, F_m)$  совпадает с группой  $\rho_m(\pi_1(\mathbb{S}^1, b_0)) = G_m$ . Обозначим через  $\kappa : \mathbb{R}^1 \times T \rightarrow (\mathbb{R}^1 \times T)/\mathbb{Z} = M_m$  универсальное накрывающее отображение. Обозначим через  $pr : \mathbb{R}^1 \times T \rightarrow T$  каноническую проекцию. Заметим, что слой  $L = L(x)$ ,  $x \in M$ , замкнут тогда и только тогда, когда замкнута орбита  $G_m \cdot z$  точки  $z \in pr(\kappa^{-1}(x)) \in T$ . Следовательно, существует биекция между множеством замкнутых слоев слоения  $(M_m, F_m)$  и множеством замкнутых орбит группы  $G_m$ , которое, согласно лемме 8.2, счетно. Поскольку слоение  $(M_m, F_m)$  хаотично, объединение замкнутых слоев всюду плотно в  $M_m$ . Предположим, что слой  $L = L(x)$  замкнут. По лемме 8.2, любая замкнутая орбита конечна, поэтому стационарная подгруппа  $G_m|_z$  в точке  $z$  изоморфна  $\mathbb{Z}$ . Так как сужение  $\kappa|_{\mathbb{R}^1 \times \{z\}} : \mathbb{R}^1 \times \{z\} \rightarrow L$  — универсальное накрывающее отображение с группой накрывающих преобразований, изоморфной группе  $G_m|_z \cong \mathbb{Z}$ , то слой  $L$  гомеоморфен окружности  $\mathbb{S}^1$ .  $\square$

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00304, <https://rscf.ru/project/22-21-00304>.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жукова Н. И. Глобальные аттракторы полных конформных слоений // Мат. сб. — 2012. — 203, № 3. — С. 79–106.
2. Жукова Н. И., Рогожина Е. А. Классификация компактных лоренцевых 2-орбифолдов с некомпактной полной группой изометрий // Сиб. мат. ж. — 2012. — 53, № 6. — С. 1292–1309.
3. Жукова Н. И., Чебочко Н. Г. Структура лоренцевых слоений коразмерности два // Изв. вузов. Сер. Мат. — 2020. — 64, № 11. — С. 87–92.
4. Жукова Н. И., Шелна К. И. Структура слоений с интегрируемой связностью Эресмана // Уфимск. мат. ж. — 2022. — 14, № 1. — С. 23–40.

5. Шапиро Я. Л. О приводимых римановых многообразиях в целом // Изв. вузов. Сер. Мат. — 1972. — № 6. — С. 78–85.
6. Шапиро Я. Л. О двулистной структуре на приводимом римановом многообразии // Изв. вузов. Сер. Мат. — 1972. — № 12. — С. 102–110.
7. Шапиро Я. Л., Жукова Н. И. О простых двуслоениях // Изв. вузов. Сер. Мат. — 1976. — № 4. — С. 95–104.
8. Assaf D. IV, Gadbois S. Definition of chaos // Am. Math. Monthly. — 1992. — 99, № 9. — С. 865.
9. Banks J., Brooks J., Cairns G., Davis G., Stacey P. On Devaney's definition of chaos // Am. Math. Monthly. — 1992. — 99, № 4. — С. 332–334.
10. Bazaikin Y. V., Galaev A. S., Zhukova N. I. Chaos in Cartan foliations // Chaos. — 2020. — 30, № 10. — С. 1–9.
11. Blumenthal R. A., Hebda J. J. Ehresmann connection for foliations // Indiana Univ. Math. J. — 1984. — 33, № 4. — С. 597–611.
12. Cairns G., Davis G., Elton E., Kolganova A., Perversi P. Chaotic group actions // Enseign. Math. — 1995. — 41. — С. 123–133.
13. Cairns G., Kolganova A., Nielsen A. Topological transitivity and mixing notions for group actions // Rocky Mountain J. Math. — 2007. — 37, № 2. — С. 371–397.
14. Candel A., Conlon L. Foliations I. — Providence: Amer. Math. Soc., 2000.
15. Churchill R. C. On defining chaos in absent of time // В сб.: «Deterministic Chaos in General Relativity». — 1994. — С. 107–112.
16. Devaney R. L. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. — Menlo Park, etc.: The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., 1986.
17. Grosse-Erdmann K.-G., Manguillot A. P. Linear Chaos. — London: Springer, 2011.
18. Kashiwabara S. The decomposition of differential manifolds and its applications // Tohoku Math. J. — 1959. — 11. — С. 43–53.
19. Kervaire M. A. A manifold which does not admit any differentiable structure // Comment. Math. Helv. — 1960. — 34, № 1. — С. 257–270.
20. Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of Differential Geometry. I. — New York–London: Interscience Publishers, 1963.
21. Manolescu C. Four-dimensional topology. — <https://web.stanford.edu/~cm5/4D.pdf>.
22. Polo F. Sensitive dependence on initial conditions and chaotic group actions // Proc. Am. Math. Soc. — 2010. — 138, № 8. — С. 2815–2826.
23. Reeb G. Sur la theorie generale des systemes dynamiques // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1955. — 6. — С. 89–115.
24. Suda T. Poincare maps and suspension flows: A categorical remarks // ArXive. — 2021. — 2107.06567 [math.DS].
25. Tamura I. Topology of Foliations: An Introduction. — Providence: AMS, 1992.
26. Thurston W. P. Three-Dimensional Geometry and Topology. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1997.
27. Vaisman I. On some spaces which are covered by a product space // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1977. — 27, № 1. — С. 107–134.
28. Zhukova N. I., Chubarov G. V. Aspects of the qualitative theory of suspended foliations // J. Differ. Equ. Appl. — 2003. — 9, № 3–4. — С. 393–405.
29. Zhukova N. I., Chubarov G. V. Structure of graphs of suspended foliations // J. Math. Sci. (N.Y.). — 2022. — 261, № 3. — С. 410–425.

Н. И. Жукова

НИУ ВШЭ, Международная лаборатория динамических систем и приложений, Нижний Новгород, Россия

E-mail: [nzhukova@hse.ru](mailto:nzhukova@hse.ru)

Г. С. Левин

НИУ ВШЭ, Факультет информатики, математики и компьютерных наук, Нижний Новгород, Россия

E-mail: [gslevin@edu.hse.ru](mailto:gslevin@edu.hse.ru)

Н. С. Тоньшева

НИУ ВШЭ, Факультет информатики, математики и компьютерных наук, Нижний Новгород, Россия

E-mail: [nstonysheva@edu.hse.ru](mailto:nstonysheva@edu.hse.ru)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-3-424-450

UDC 515.16

## Chaos in Topological Foliations

© 2022 N. I. Zhukova, G. S. Levin, N. S. Tonysheva

**Abstract.** We call a foliation  $(M, F)$  on a manifold  $M$  chaotic if it is topologically transitive and the union of closed leaves is dense in  $M$ . A foliated manifold  $M$  is not assumed to be compact. The chaotic foliations can be considered as multidimensional generalization of chaotic dynamical systems in the sense of Devaney. For foliations covered by fibrations we prove that a foliation is chaotic if and only if its global holonomy group is chaotic. We introduce the concept of the integrable Ehresmann connection for a foliation as a natural generalization of the integrable Ehresmann connection for smooth foliations. A description of the global structure of foliations with integrable Ehresmann connection and a criterion for the chaotic behavior of such foliations are obtained. Applying the method of suspension, a new countable family of pairwise nonisomorphic chaotic foliations of codimension two on 3-dimensional closed and nonclosed manifolds is constructed.

### REFERENCES

1. N. I. Zhukova, “Global’nye attraktory polnykh konformnykh sloeniy” [Global attractors of complete conformal foliations], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2012, **203**, No. 3, 79–106 (in Russian).
2. N. I. Zhukova and E. A. Rogozhina, “Klassifikatsiya kompaktnykh lorentseykh 2-orbifoldov s nekompaktnoy polnoy gruppoy izometriy” [Classification of compact Lorentzian 2-orbifolds with noncompact complete isometry group], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 2012, **53**, No. 6, 1292–1309 (in Russian).
3. N. I. Zhukova and N. G. Chebochko, “Struktura lorentseykh sloeniy korazmernosti dva” [The structure of Lorentzian foliations of codimension two], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2020, **64**, No. 11, 87–92 (in Russian).
4. N. I. Zhukova and K. I. Sheina, “Struktura sloeniy s integriruemoy svyaznost’yu Eresmana” [Structure of foliations with integrable Ehresmann connection], *Ufimsk. mat. zh.* [Ufa Math. J.], 2022, **14**, No. 1, 23–40 (in Russian).
5. Ya. L. Shapiro, “O privodimyykh rimanovykh mnogoobraziyakh v tselom” [On reducible Riemannian manifolds in the large], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1972, No. 6, 78–85 (in Russian).
6. Ya. L. Shapiro, “O dvulistnoy strukture na privodimom rimanovom mnogoobrazii” [On the two-sheeted structure on a reducible Riemannian manifold], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1972, No. 12, 102–110 (in Russian).
7. Ya. L. Shapiro and N. I. Zhukova, “O prostykh dvusloeniyakh” [On simple bifibrations], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1976, No. 4, 95–104 (in Russian).
8. D. Assaf IV and S. Gadbois, “Definition of chaos,” *Am. Math. Monthly*, 1992, **99**, No. 9, 865.
9. J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, and P. Stacey, “On Devaney’s definition of chaos,” *Am. Math. Monthly*, 1992, **99**, No. 4, 332–334.
10. Y. V. Bazaikin, A. S. Galaev, and N. I. Zhukova, “Chaos in Cartan foliations,” *Chaos*, 2020, **30**, No. 10, 1–9.
11. R. A. Blumenthal and J. J. Hebda, “Ehresmann connection for foliations,” *Indiana Univ. Math. J.*, 1984, **33**, No. 4, 597–611.
12. G. Cairns, G. Davis, E. Elton, A. Kolganova, and P. Perversi, “Chaotic group actions,” *Enseign. Math.*, 1995, **41**, 123–133.
13. G. Cairns, A. Kolganova, and A. Nielsen, “Topological transitivity and mixing notions for group actions,” *Rocky Mountain J. Math.*, 2007, **37**, No. 2, 371–397.
14. A. Candel and L. Conlon, *Foliations I*, Amer. Math. Soc., Providence, 2000.

15. R. C. Churchill, “On defining chaos in absent of time,” In: *Deterministic Chaos in General Relativity*, 1994, pp. 107–112.
16. R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, The Benjamin/Cummings Publishing Co., Menlo Park, etc., 1986.
17. K.-G. Grosse-Erdmann and A. P. Manguillot, *Linear Chaos*, Springer, London, 2011.
18. S. Kashiwabara, “The decomposition of differential manifolds and its applications,” *Tohoku Math. J.*, 1959, **11**, 43–53.
19. M. A. Kervaire, “A manifold which does not admit any differentiable structure,” *Comment. Math. Helv.*, 1960, **34**, No. 1, 257–270.
20. S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry. I*, Interscience Publishers, New York–London, 1963.
21. C. Manolescu, *Four-Dimensional Topology*, Stanford University, Stanford, <https://web.stanford.edu/~cm5/4D.pdf>.
22. F. Polo, “Sensitive dependence on initial conditions and chaotic group actions,” *Proc. Am. Math. Soc.*, 2010, **138**, No. 8, 2815–2826.
23. G. Reeb, “Sur la theorie generale des systemes dynamiques,” *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1955, **6**, 89–115.
24. T. Suda, “Poincare maps and suspension flows: A categorical remarks,” *ArXive*, 2021, 2107.06567 [math.DS].
25. I. Tamura, *Topology of Foliations: An Introduction*, AMS, Providence, 1992.
26. W. P. Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1997.
27. I. Vaisman, “On some spaces which are covered by a product space,” *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1977, **27**, No. 1, 107–134.
28. N. I. Zhukova and G. V. Chubarov, “Aspects of the qualitative theory of suspended foliations,” *J. Differ. Equ. Appl.*, 2003, **9**, No. 3-4, 393–405.
29. N. I. Zhukova and G. V. Chubarov, “Structure of graphs of suspended foliations,” *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2022, **261**, No. 3, 410–425.

N. I. Zhukova

HSE University, International Laboratory of Dynamical Systems and Applications, Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: [nzhukova@hse.ru](mailto:nzhukova@hse.ru)

G. S. Levin

HSE University, Faculty of Informatics, Mathematics, and Computer Science, Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: [gslevin@edu.hse.ru](mailto:gslevin@edu.hse.ru)

N. S. Tonysheva

HSE University, Faculty of Informatics, Mathematics, and Computer Science, Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: [nstonysheva@edu.hse.ru](mailto:nstonysheva@edu.hse.ru)

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ПОЛНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2022 г. Д. А. ЗАКОРА

Аннотация. В работе изучается полное интегро-дифференциальное операторное уравнение второго порядка в гильбертовом пространстве. Ядро разностного типа интегрального возмущения представляет собой голоморфную полугруппу, окаймленную неограниченными операторами. Исследуется асимптотическое поведение решений этого уравнения. Доказаны асимптотические формулы для решений в случае, когда правая часть близка к почти периодической функции. Полученные формулы применены к исследованию задачи о вынужденных продольных колебаниях вязкоупругого стержня с трением Кельвина—Фойгта.

### ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Постановка задачи и основная теорема . . . . .	451
2. Доказательство теоремы . . . . .	453
3. Приложения . . . . .	462
Список литературы . . . . .	464

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

**1.1. Введение.** В настоящее время имеется большое число работ, посвящённых изучению различных аспектов теории функционально-дифференциальных и, в частности, интегро-дифференциальных уравнений. Такие уравнения возникают в задачах динамики различных вязкоупругих систем, в задачах управления системами с распределёнными параметрами, задачах наследственной механики, задачах теории распространения тепла в средах с памятью и т. д. Различные вопросы по указанной теме обсуждаются в монографиях [6, 12, 17, 19, 25] (см. также указанную в них литературу). В монографии [1] к изучению функционально-дифференциальных уравнений систематически применяются методы спектральной теории операторов, а также приведён обширный список литературы по обсуждаемому вопросу.

Одним из аспектов изучения интегро-дифференциальных уравнений является вопрос устойчивости решений и их асимптотического поведения. В работах [13, 14] доказано, что решение однородного неполного интегро-дифференциального уравнения второго порядка с операторным ядром достаточно общего вида стремится к нулю с ростом времени, но без оценки скорости убывания. Это утверждение применено к исследованию движения вязкоупругого тела. Динамика вязкоупругих систем, а также подобные вопросы в других задачах, изучалась затем многими авторами. Например, в работах [11, 15, 18, 20, 21, 24] исследуются вопросы устойчивости одномерных систем, описывающих модели Тимошенко вязкоупругих стержней. Работы [2, 2, 9, 10, 22] (см. также указанную в них литературу) посвящены исследованию устойчивости абстрактных



интегро-дифференциальных уравнений. В работах [4, 5] исследуются вопросы, аналогичные изучаемым в настоящей статье. А именно, исследуется вопрос асимптотического поведения решений интегро-дифференциальных уравнений в случае «правой части» вида

$$f(t) = g(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} f_k(t), \quad \sigma_0 = 0, \quad 0 \neq \sigma_k \in \mathbb{R} \quad (k = \overline{1, n}),$$

где  $\|g(t)\| = o(1)$ ,  $\|f'_k(t)\| = o(1)$  ( $k = \overline{0, n}$ ) при  $t \rightarrow +\infty$ .

Цель работы — вывод асимптотических формул для решений полного интегро-дифференциального операторного уравнения второго порядка в описанном выше случае (см. теорему 1.1). Доказанное утверждение применяется к исследованию задачи о вынужденных продольных колебаниях вязкоупругого стержня с трением Кельвина—Фойгта (см. лемму 3.2).

**1.2. Постановка задачи.** Пусть  $H, H_0$  — гильбертовы пространства,  $\mathcal{L}(H, H_0)$  — банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из  $H$  в  $H_0$ ,  $\mathcal{L}(H) := \mathcal{L}(H, H)$ . Пусть  $A, B, C, G$  — плотно определённые замкнутые операторы:

$$A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H, \quad B : \mathcal{D}(B) \subset H \rightarrow H, \quad G : \mathcal{D}(G) \subset H_0 \rightarrow H_0, \quad C : \mathcal{D}(C) \subset H \rightarrow H_0,$$

причём  $A, B, G$  — самосопряжённые положительно определённые операторы. Будем считать, что введённые операторы удовлетворяют следующим гипотезам:

- 1)  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ ;
- 2) оператор-функция  $C^* \exp(-tG)CA^{-1}$  сильно непрерывна на  $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ .

Из этих предположений, неравенства Гайнца (см. [8, гл. 1, §7, теорема 7.1]) и полярного разложения замкнутого оператора (см. [7, гл. 6, §2, п. 7]) следует, в частности, что  $\mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{D}(B^{1/2}) \subset \mathcal{D}(C)$ . Обозначим через  $\omega_G := \inf\{\lambda \in \sigma(G)\}$ , где  $\sigma(G)$  — спектр оператора  $G$ , нижнюю грань оператора  $G$  и предположим, что выполнена третья гипотеза:

- 3) существует  $\gamma > 0$  такое, что

$$\|B^{1/2}u\|_H^2 - \omega_G^{-1}\|Cu\|_{H_0}^2 \geq \gamma\|A^{1/2}u\|_H^2 \quad \forall u \in \mathcal{D}(A^{1/2}). \quad (1.1)$$

По операторам  $A, B, C, G$  с учётом гипотез 1)–3) построим ограниченные операторы  $Q, Q_0, T$  и операторный пучок (оператор-функцию)  $L(\lambda)$  по следующим формулам:

$$\begin{aligned} Q &:= B^{1/2}A^{-1/2} \in \mathcal{L}(H), \quad Q_0 := CA^{-1/2} \in \mathcal{L}(H, H_0), \quad T := Q^*Q - Q_0^*G^{-1}Q_0, \\ L(\lambda) &:= I - \lambda A^{-1} - \frac{1}{\lambda}(Q^*Q - Q_0^*G^{-1}Q_0) + Q_0^*(G - \lambda)^{-1}G^{-1}Q_0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

**Замечание 1.1.** Отметим, что гипотеза 3) призвана обеспечить положительную определённость оператора  $T$  в (1.2) и в конкретной ситуации может быть ослаблена (см. (3.4)).

В гильбертовом пространстве  $H$  рассмотрим задачу Коши для полного интегро-дифференциального операторного уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -A\frac{du}{dt} - Bu + \int_0^t C^* \exp(-G(t-s))Cu(s) ds + f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \quad (1.3)$$

**Определение 1.1.** Решением задачи Коши (1.3) назовём функцию  $u \in C^2(\mathbb{R}_+; H)$  такую, что  $u(t) \in \mathcal{D}(B)$ ,  $u'(t) \in \mathcal{D}(A)$  при  $t \in \mathbb{R}_+$ ;  $Bu, Au' \in C(\mathbb{R}_+; H)$ ; выполнены начальные условия и уравнение из (1.3) для любого  $t \in \mathbb{R}_+$ .

**Теорема 1.1.**

- 1) Если  $u^0, u^1 \in \mathcal{D}(A)$ , а функция  $f$  локально гёльдерова, то задача Коши (1.3) имеет единственное решение (в смысле определения 1.1).
- 2) Будем считать дополнительно, что

$$f(t) = g(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} f_k(t), \quad \sigma_0 = 0, \quad 0 \neq \sigma_k \in \mathbb{R} \quad (k = \overline{1, n}).$$

Если  $f_k \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$ ,  $k = \overline{0, n}$ , а функция  $g$  локально гёльдерова, то существуют константы  $\omega > 0$ ,  $M_1 > 0$  и  $M_2 > 0$  такие, что для решения задачи Коши (1.3) выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \left( \left\| A^{1/2} \left( u(t) - A^{-1/2} T^{-1} A^{-1/2} f_0(t) + \sum_{k=1}^n \frac{e^{-i\sigma_k t}}{i\sigma_k} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right) \right\|^2 + \right. \\ & \quad \left. + \left\| u'(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right\|^2 \right)^{1/2} \leq \\ & \leq M_1 e^{-\omega t} \left( \|A^{1/2} u^0\| + \|u^1\| + \sum_{k=0}^n \|f_k(0)\| \right) + M_2 \int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left( \|g(s)\| + \sum_{k=0}^n \|f'_k(s)\| \right) ds. \end{aligned} \quad (1.4)$$

3) Если  $\|g(t)\| = o(1)$ ,  $\|f'_k(t)\| = o(1)$ ,  $k = \overline{0, n}$ , при  $t \rightarrow +\infty$ , то тогда и

$$\begin{aligned} & \left\| A^{1/2} \left( u(t) - A^{-1/2} T^{-1} A^{-1/2} f_0(t) + \sum_{k=1}^n \frac{e^{-i\sigma_k t}}{i\sigma_k} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right) \right\|^2 + \\ & \quad + \left\| u'(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right\|^2 = o(1). \end{aligned} \quad (1.5)$$

## 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Идея доказательства теоремы 1.1 заключается в установлении связи между решениями задачи Коши (1.3) и решениями задачи Коши для некоторого дифференциально-операторного уравнения первого порядка, использовании полугруппы, связанной с этим уравнением первого порядка. Всё доказательство разобьём на несколько шагов, сформулированных в виде лемм.

**2.1. Доказательство утверждения о разрешимости.** Начнём со следующей простой леммы о свойствах операторов  $Q$ ,  $Q_0$  и  $T$ .

**Лемма 2.1.** *Имеют место формулы  $Q^*|_{\mathcal{D}(B^{1/2})} = A^{-1/2} B^{1/2}$ ,  $Q_0^*|_{\mathcal{D}(C^*)} = A^{-1/2} C^*$ , оператор  $T$  положительно определён.*

*Доказательство.* Для любых  $u \in H$ ,  $v \in \mathcal{D}(B^{1/2})$  с учётом (1.2) имеем

$$(Qu, v)_H = (u, Q^*v)_H = (u, A^{-1/2} B^{1/2} v)_H.$$

Отсюда следует, что  $Q^*|_{\mathcal{D}(B^{1/2})} = A^{-1/2} B^{1/2}$ . Аналогично доказывается вторая формула.

Докажем, что оператор  $T \in \mathcal{L}(H)$  (см. (1.2)) положительно определён. Для любых  $u \in H$  с учётом гипотезы 3) (см. (1.1)) имеем

$$\begin{aligned} (Tu, u)_H &= ((Q^*Q - Q_0^*G^{-1}Q_0)u, u)_H = \|Qu\|_H^2 - (G^{-1}Q_0u, Q_0u)_{H_0} \geq \|Qu\|_H^2 - \omega_G^{-1} \|Q_0u\|_{H_0}^2 = \\ &= \|B^{1/2}(A^{-1/2}u)\|_H^2 - \omega_G^{-1} \|C(A^{-1/2}u)\|_{H_0}^2 \geq \gamma \|A^{1/2}(A^{-1/2}u)\|_H^2 = \gamma \|u\|_H^2. \end{aligned}$$

Лемма доказана.  $\square$

Пусть  $u^0, u^1 \in \mathcal{D}(A)$  и задача Коши (1.3) имеет решение  $u(t)$ . Перепишем уравнение из (1.3) в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} &= -A^{1/2} \left( A^{1/2} \frac{du}{dt} + (A^{-1/2} B^{1/2})(B^{1/2} A^{-1/2}) A^{1/2} u - \right. \\ & \quad \left. - \int_0^t (A^{-1/2} C^*) \exp(-G(t-s))(C A^{-1/2}) A^{1/2} u(s) ds \right) + f(t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Из (1.2) и леммы 2.1 следует, что функция  $u(t)$  будет также решением следующего уравнения:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -A^{1/2} \left( A^{1/2} \frac{du}{dt} + Q^*QA^{1/2}u - Q_0^* \int_0^t \exp(-G(t-s))Q_0A^{1/2}u(s) ds \right) + f(t). \quad (2.2)$$

По условию  $Bu' \in C(\mathbb{R}_+; H)$  (см. определение 1.1). Из гипотезы 1) и представления  $A^{1/2}u'(t) = (A^{1/2}B^{-1/2})B^{-1/2}Bu'(t)$  следует, что  $A^{1/2}u' \in C(\mathbb{R}_+; H)$ . Отсюда и из [3, гл. 1, §1, лемма 1.5] следует, что  $(A^{1/2}u(t))' = A^{1/2}u'(t)$ . Из этого соотношения и из  $u^0 \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2})$  теперь можно вывести следующую формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^t \exp(-G(t-s))Q_0A^{1/2}u(s) ds &= \\ &= G^{-1}Q_0A^{1/2}u(t) - \exp(-Gt)G^{-1}Q_0A^{1/2}u^0 - \int_0^t \exp(-G(t-s))G^{-1}Q_0A^{1/2}u'(s) ds. \end{aligned}$$

Преобразуем уравнение (2.2) с помощью полученной формулы. С учётом формулы для оператора  $T$  (см. (1.2)) из последнего соотношения получим, что (2.2) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} = -A^{1/2} \left( A^{1/2} \frac{du}{dt} + T^{1/2}(T^{1/2}A^{1/2}u) + Q_0^* \exp(-Gt)G^{-1}Q_0A^{1/2}u^0 + \right. \\ \left. + Q_0^*G^{-1/2} \int_0^t \exp(-G(t-s))G^{-1/2}Q_0A^{1/2}u'(s) ds \right) + f(t). \quad (2.3) \end{aligned}$$

Определим функции

$$z(t) := u'(t), \quad v(t) := T^{1/2}A^{1/2}u(t), \quad w(t) := \int_0^t \exp(-G(t-s))G^{-1/2}Q_0A^{1/2}u'(s) ds. \quad (2.4)$$

Функции  $z(t)$ ,  $v(t)$ ,  $w(t)$  непрерывно дифференцируемы на  $\mathbb{R}_+$ . Из (2.3) следует, что они удовлетворяют следующей системе уравнений и начальных условий:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = -A^{1/2}(A^{1/2}z + T^{1/2}v + Q_0^*G^{-1/2}w + Q_0^* \exp(-Gt)G^{-1}Q_0A^{1/2}u^0) + f(t), \\ \frac{dv}{dt} = -(-T^{1/2}A^{1/2}z), \\ \frac{dw}{dt} = -(-G^{-1/2}Q_0A^{1/2}z + Gw), \\ z(0) = u^1, \quad v(0) = T^{1/2}A^{1/2}u^0, \quad w(0) = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Систему (2.5) перепишем в виде задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H} := H \oplus H \oplus H_0$ :

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}(\xi + \xi(u^0, t)) + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0. \quad (2.6)$$

Здесь

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & T^{1/2} & Q_0^*G^{-1} \\ -T^{1/2} & 0 & 0 \\ -G^{-1}Q_0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \{ \xi = (z; v; w)^\tau \in \mathcal{H} : z + A^{-1/2}T^{1/2}v + A^{-1/2}Q_0^*G^{-1/2}w \in \mathcal{D}(A), \quad w \in \mathcal{D}(G) \},$$

$$\xi(u^0, t) := (0; T^{-1/2}Q_0^* \exp(-Gt)G^{-1}Q_0A^{1/2}u^0; 0)^\tau, \quad \xi^0 := (u^1; T^{1/2}A^{1/2}u^0; 0)^\tau, \quad \mathcal{F}(t) := (f(t); 0; 0)^\tau.$$

Осуществим в задаче (2.6) замену  $\zeta(t) := \xi(t) + \xi(u^0, t)$ . В результате получим следующую основную задачу Коши:

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\mathcal{A}\zeta + \xi'(u^0, t) + \mathcal{F}(t), \quad \zeta(0) = \xi^0 + \xi(u^0, 0). \quad (2.8)$$

**Определение 2.1.** Решением задачи Коши (2.8) назовём функцию  $\zeta \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$  такую, что  $\zeta(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  при  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mathcal{A}\zeta \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$ , выполнено начальное условие и уравнение из (2.8) для любого  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Таким образом, если  $u^0, u^1 \in \mathcal{D}(A)$  и задача Коши (1.3) имеет решение, то по этому решению однозначно строится решение задачи Коши (2.8).

**Замечание 2.1.** В дальнейших вычислениях понадобятся факторизации Шура–Фробениуса операторных блоков с ограниченными операторными коэффициентами и формулы обращения этих блоков. Пусть  $E_1, E_2$  банаховы пространства,  $A_{kl} \in \mathcal{L}(E_l, E_k)$  ( $k, l = 1, 2$ ),  $A_{22}^{-1} \in \mathcal{L}(E_2)$ ,  $D_1 := A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ . Если  $D_1^{-1} \in \mathcal{L}(E_1)$ , то существует

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} &= \left[ \begin{pmatrix} I & A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{pmatrix} \right]^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} D_1^{-1} & -D_1^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}D_1^{-1} & A_{22}^{-1}(A_{22} + A_{21}D_1^{-1}A_{12})A_{22}^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Пусть  $A_{11}^{-1} \in \mathcal{L}(E_1)$ ,  $D_2 := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ . Если  $D_2^{-1} \in \mathcal{L}(E_2)$ , то существует

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} &= \left[ \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} \right]^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1}(A_{11} + A_{12}D_2^{-1}A_{21})A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1} \\ -D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & D_2^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

В следующих двух леммах установим, что оператор  $-\mathcal{A}$  является генератором равномерно экспоненциально устойчивой голоморфной полугруппы.

**Лемма 2.2.** Оператор  $\mathcal{A}$  плотно определён, замкнут, непрерывно обратим, т. е. существует  $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , и справедливо представление

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & -T^{-1/2}Q_0^*G^{-1} \\ 0 & 0 & G^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -T^{-1/2} & 0 \\ T^{-1/2} & T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -G^{-1}Q_0T^{-1/2} & G^{-1/2} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

*Доказательство.* Докажем, что оператор  $\mathcal{A}$  непрерывно обратим, и выведем формулу (2.11). Отсюда будет следовать, что оператор  $\mathcal{A}$  замкнут на своей естественной области определения  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ . Плотная определённость оператора  $\mathcal{A}$  последует из включения  $(\mathcal{A}^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

Применим факторизацию (2.10) к обращению среднего операторного блока в разложении (2.3). С учётом леммы 2.1 найдём, что существует

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I & T^{1/2} & Q_0^*G^{-1} \\ -T^{1/2} & 0 & 0 \\ -G^{-1}Q_0 & 0 & I \end{pmatrix}^{-1} &= \\ &= \left[ \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & G^{-1}Q_0T^{-1/2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & T^{1/2} & 0 \\ -T^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & T^{-1/2}Q_0^*G^{-1} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \right]^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & -T^{-1/2}Q_0^*G^{-1} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -T^{-1/2} & 0 \\ T^{-1/2} & T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -G^{-1}Q_0T^{-1/2} & I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.3) следует (2.11).

Непосредственными вычислениями проверяется, что

$$\mathcal{A}^* = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -T^{1/2} & -Q_0^*G^{-1} \\ T^{1/2} & 0 & 0 \\ G^{-1}Q_0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^*) = \{\xi = (z; v; w)^\tau \in \mathcal{H} : z - A^{-1/2}T^{1/2}v - A^{-1/2}Q_0^*G^{-1/2}w \in \mathcal{D}(A), w \in \mathcal{D}(G)\}.$$

Как и для оператора  $\mathcal{A}$ , доказывается, что существует  $(\mathcal{A}^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ .  $\square$

**Лемма 2.3.** *Оператор  $-\mathcal{A}$  является генератором голоморфной полугруппы. Для числовой области значений  $\mathcal{W}(\mathcal{A})$  оператора  $\mathcal{A}$  выполнено включение:*

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \bigcap_{\alpha > 0} \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda + \alpha^2 \|(T^{1/2}, Q_0^*G^{-1/2})\|^2)| \leq \arctg \alpha^{-1}\}. \quad (2.12)$$

*Доказательство.* По лемме 2.2 оператор  $\mathcal{A}$  плотно определён и замкнут. Таким образом, остаётся доказать, что оператор  $\mathcal{A}$  — максимальный секториальный (см. [7, гл. 9, § 1, теорема 1.24]).

Итак, исследуем числовую область значений  $\mathcal{W}(\mathcal{A})$  оператора  $\mathcal{A}$ . Пусть  $\xi = (z; v; w)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ , тогда  $z \in \mathcal{D}(A^{1/2})$  и из факторизации (2.7) оператора  $\mathcal{A}$  в симметричной форме получим, что

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}\xi, \xi)_{\mathcal{H}} = \operatorname{Re} \left( \begin{pmatrix} I & T^{1/2} & Q_0^*G^{-1} \\ -T^{1/2} & 0 & 0 \\ -G^{-1}Q_0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2}z \\ v \\ G^{1/2}w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A^{1/2}z \\ v \\ G^{1/2}w \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}} = \|A^{1/2}z\|_H^2 + \|G^{1/2}w\|_{H_0}^2,$$

$$|\operatorname{Im}(\mathcal{A}\xi, \xi)_{\mathcal{H}}| = |\operatorname{Im}((T^{1/2}v + Q_0^*G^{-1}G^{1/2}w, A^{1/2}z)_H - (T^{1/2}A^{1/2}z, v)_H - (G^{-1}Q_0A^{1/2}z, G^{1/2}w)_{H_0})| = \\ = 2|\operatorname{Im}(T^{1/2}v + Q_0^*G^{-1/2}w, A^{1/2}z)_H| \leq 2\|T^{1/2}v + Q_0^*G^{-1/2}w\|_H \|A^{1/2}z\|_H.$$

Из этих оценок при любом  $\alpha > 0$  следует (см. [7, гл. 5, § 3, пример 3.34] и [26, лемма 2]), что

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}\xi, \xi)_{\mathcal{H}} - \alpha |\operatorname{Im}(\mathcal{A}\xi, \xi)_{\mathcal{H}}| \geq \|A^{1/2}z\|_H^2 + \|G^{1/2}w\|_{H_0}^2 - 2\alpha \|T^{1/2}v + Q_0^*G^{-1/2}w\|_H \|A^{1/2}z\|_H = \\ = (\|A^{1/2}z\|_H - \alpha \|T^{1/2}v + Q_0^*G^{-1/2}w\|_H)^2 + \|G^{1/2}w\|_{H_0}^2 - \alpha^2 \|T^{1/2}v + Q_0^*G^{-1/2}w\|_H^2 \geq \\ \geq \omega_G \|w\|_{H_0}^2 - \alpha^2 \|(T^{1/2}, Q_0^*G^{-1/2})\|^2 (\|v\|_H^2 + \|w\|_{H_0}^2) \geq -\alpha^2 \|(T^{1/2}, Q_0^*G^{-1/2})\|^2 \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Таким образом,

$$\operatorname{Re}((\mathcal{A} + \alpha^2 \|(T^{1/2}, Q_0^*G^{-1/2})\|^2)\xi, \xi)_{\mathcal{H}} - \alpha |\operatorname{Im}((\mathcal{A} + \alpha^2 \|(T^{1/2}, Q_0^*G^{-1/2})\|^2)\xi, \xi)_{\mathcal{H}}| \geq 0,$$

или

$$\frac{|\operatorname{Im}((\mathcal{A} + \alpha^2 \|(T^{1/2}, Q_0^*G^{-1/2})\|^2)\xi, \xi)_{\mathcal{H}}|}{\operatorname{Re}((\mathcal{A} + \alpha^2 \|(T^{1/2}, Q_0^*G^{-1/2})\|^2)\xi, \xi)_{\mathcal{H}}} \leq \frac{1}{\alpha} \quad \forall 0 \neq \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad \alpha > 0.$$

Отсюда следует включение (2.12) для числовой области значений  $\mathcal{W}(\mathcal{A})$  оператора  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \bigcap_{\alpha > 0} \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda + \alpha^2 \|(T^{1/2}, Q_0^*G^{-1/2})\|^2)| \leq \arctg \alpha^{-1}\}.$$

Таким образом, оператор  $\mathcal{A}$  секториальный с вершиной сектора в точке  $-\alpha^2 \|(T^{1/2}, Q_0^*G^{-1/2})\|^2$  и полураствором сектора  $\arctg \alpha^{-1}$  при любом  $\alpha > 0$ .

Для максимальности оператора  $\mathcal{A}$  достаточно установить, что  $\rho(\mathcal{A}) \cap \{\lambda < 0\} \neq \emptyset$ , где  $\rho(\mathcal{A})$  — резольвентное множество оператора  $\mathcal{A}$ . Из факторизации (2.7) оператора  $\mathcal{A}$  в симметричной форме имеем

$$\mathcal{A} - \lambda = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - \lambda A^{-1} & T^{1/2} & Q_0^*G^{-1} \\ -T^{1/2} & -\lambda & 0 \\ -G^{-1}Q_0 & 0 & I - \lambda G^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Применим факторизацию (2.9) к обращению среднего операторного блока в этом разложении. При  $\lambda \notin \sigma(G) \cup \{0\}$  с учётом обозначения (1.2) для операторного пучка  $L(\lambda)$  найдём, что

$$\mathcal{A} - \lambda = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\lambda^{-1}T^{1/2} & Q_0^*\mathcal{R}_\lambda(G) \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & I - \lambda G^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \lambda^{-1} T^{1/2} & I & 0 \\ -\mathcal{R}_\lambda(G)Q_0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Очевидно, что если  $\lambda < 0$ , то  $L(\lambda) \gg 0$  и, следовательно, существует  $L^{-1}(\lambda) \in \mathcal{L}(H)$ . Из (2.13) при  $\lambda < 0$  теперь найдём, что существует  $(\mathcal{A} - \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , а значит,  $\{\lambda < 0\} \subset \rho(\mathcal{A})$ .  $\square$

**Замечание 2.2.** Из (2.13) следует формула для резольвенты оператора  $\mathcal{A}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) &= \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ -\lambda^{-1} T^{1/2} & I & 0 \\ G^{-1/2} \mathcal{R}_\lambda(G)Q_0 & 0 & G^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{-1}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (I - \lambda G^{-1})^{-1} \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} A^{-1/2} & \lambda^{-1} T^{1/2} & -Q_0^* \mathcal{R}_\lambda(G)G^{-1/2} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad (2.14) \\ L(\lambda) &= I - \lambda A^{-1} - \lambda^{-1} T + Q_0^* \mathcal{R}_\lambda(G)G^{-1}Q_0, \end{aligned}$$

при всех  $\lambda \notin \sigma(L(\lambda)) \cup \sigma(G) \cup \{0\}$ , где  $\sigma(L(\lambda))$  — спектр операторного пучка  $L(\lambda)$ .

**Лемма 2.4.** *Голоморфная полугруппа  $\mathcal{U}(t)$ , генерируемая оператором  $-\mathcal{A}$ , является равномерно экспоненциально устойчивой, т. е. существуют  $\omega > 0$  и  $M \geq 1$  такие, что*

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M e^{-\omega t} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \quad (2.15)$$

*Доказательство.* Известно (см., например, [16, гл. 4, § 3, следствие 3.12]), что если  $\mathcal{U}(t)$  голоморфная полугруппа, то её тип совпадает со спектральной границей  $s(-\mathcal{A}) = \sup\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(-\mathcal{A})\}$  генератора  $-\mathcal{A}$ . Таким образом, существование чисел  $\omega > 0$ ,  $M \geq 1$  и оценки (2.15) будет следовать из неравенства  $s(-\mathcal{A}) < 0$  или, что эквивалентно, из неравенства  $\inf\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} > 0$ .

Из формулы (2.12), переписанной в виде

$$\mathcal{W}(\mathcal{A} + \alpha^2 \|(T^{1/2}, Q_0^* G^{-1/2})\|^2) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| \leq \operatorname{arctg} \alpha^{-1}\} \quad \forall \alpha > 0,$$

построением огибающих соответствующих семейств прямых найдём, что числовая область значений оператора  $\mathcal{A}$  содержится в параболической области:

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \lambda| \leq 2 \|(T^{1/2}, Q_0^* G^{-1/2})\| (\operatorname{Re} \lambda)^{1/2}\}. \quad (2.16)$$

Из  $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  (см. лемму 2.2) следует, что  $0 \in \rho(\mathcal{A})$ . Теперь, учитывая, что  $\rho(\mathcal{A})$  — открытое множество и  $\sigma(\mathcal{A}) \subset \overline{\mathcal{W}(\mathcal{A})}$ , из (2.16) найдём, что  $\inf\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} > 0$ .  $\square$

**Лемма 2.5.** *Если  $u^0, u^1 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ , а функция  $f$  локально гёльдерова, то задача Коши (1.3) имеет единственное решение (в смысле определения 1.1).*

*Доказательство.* Покажем, что из условий леммы следует однозначная разрешимость задачи Коши (2.8). Будем искать решение задачи Коши (2.8) в виде  $\zeta(t) = \zeta_1(t) + \zeta_2(t)$ , где  $\zeta_1(t)$ ,  $\zeta_2(t)$  — решения следующих начальных задач:

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = -\mathcal{A}\zeta_1 + \mathcal{F}(t), \quad \zeta_1(0) = \xi^0 + \xi(u^0, 0), \quad (2.17)$$

$$\frac{d\zeta_2}{dt} = -\mathcal{A}\zeta_2 + \xi'(u^0, t), \quad \zeta_2(0) = 0. \quad (2.18)$$

Проверим выполнение условий теоремы о разрешимости задачи Коши (2.17) (см. [3, гл. 2, § 1, теорема 1.4]). Из (2.7) и (1.2) найдём, что

$$\begin{aligned} \zeta_1(0) &= \xi^0 + \xi(u^0, 0) = (u^1; T^{1/2} A^{1/2} u^0; 0)^\tau + (0; T^{-1/2} Q_0^* G^{-1} Q_0 A^{1/2} u^0; 0)^\tau = \\ &= (u^1; T^{-1/2} Q^* Q A^{1/2} u^0; 0)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \end{aligned}$$

так как (см. определение области определения  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  в (2.7)), учитывая лемму 2.1,

$$\begin{aligned} u^1 + A^{-1/2} T^{1/2} (T^{-1/2} Q^* Q A^{1/2} u^0) &= u^1 + A^{-1/2} Q^* Q A^{1/2} u^0 = u^1 + A^{-1/2} Q^* B^{1/2} u^0 = \\ &= u^1 + A^{-1/2} Q^*|_{\mathcal{D}(B^{1/2})} B^{-1/2} (B A^{-1}) A u^0 = u^1 + A^{-1} (B A^{-1}) A u^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Далее, если функция  $f$  локально гёльдерова, т. е. для любого  $\tau \in \mathbb{R}_+$  существуют  $K = K(\tau) > 0$ ,  $k = k(\tau) \in (0, 1]$  такие, что

$$\|f(t) - f(s)\|_H \leq K|t - s|^k \quad \forall t, s \in [0, \tau],$$

то, очевидно, и функция  $\mathcal{F}$  (см. (2.7)) локально гёльдерова. Таким образом, задача Коши (2.17) имеет единственное решение в смысле определения 2.1.

Проверим теперь выполнение условий теоремы о разрешимости задачи Коши (2.18) (см. [3, гл. 2, § 1, теорема 1.3]). Очевидно, что  $\zeta_2(0) = 0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ . Покажем, что  $\xi'(u^0, t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  при всех  $t \in \mathbb{R}_+$  и  $\mathcal{A}\xi'(u^0, \cdot) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$ . Из (2.7) найдём, что

$$\xi'(u^0, t) = (0; T^{-1/2}Q_0^* \exp(-Gt)Q_0 A^{1/2}u^0; 0)^\tau.$$

Отсюда, учитывая гипотезу 2) и формулу для  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  (см. (2.7)), имеем при любом  $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} A^{-1/2}T^{1/2}(T^{-1/2}Q_0^* \exp(-Gt)Q_0 A^{1/2}u^0) &= A^{-1/2}Q_0^* \exp(-Gt)CA^{-1}(Au^0) = \\ &= A^{-1/2}Q_0^*|_{\mathcal{D}(C^*)} \exp(-Gt)CA^{-1}(Au^0) = A^{-1}C^* \exp(-Gt)CA^{-1}(Au^0) \in \mathcal{D}(A), \end{aligned}$$

т. е.  $\xi'(u^0, t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  при всех  $t \in \mathbb{R}_+$ . Теперь непосредственные вычисления показывают, что

$$\mathcal{A}\xi'(u^0, t) = (0; C^* \exp(-Gt)CA^{-1}(Au^0); 0)^\tau$$

— непрерывная на  $\mathbb{R}_+$  функция со значениями в  $\mathcal{H}$ . Таким образом, задача Коши (2.18), а значит, и задача Коши (2.8), имеет единственное решение в смысле определения 2.1.

Пусть  $\zeta(t)$  — (единственное) решение задачи Коши (2.8). Введём функцию  $\xi(t) := \zeta(t) - \xi(u^0, t)$ . Тогда  $\xi(t)$  есть решение задачи Коши (2.6) в том смысле, что  $\xi \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$ ,  $\xi(t) + \xi(u^0, t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  при всех  $t \in \mathbb{R}_+$  и  $\mathcal{A}(\xi + \xi(u^0, \cdot)) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$ , выполнено начальное условие и уравнение из (2.6). Последнее эквивалентно тому, что функции  $z(t)$ ,  $v(t)$ ,  $w(t)$ , являющиеся координатами функции  $\xi(t) = (z(t); v(t); w(t))^\tau$ , решают систему (2.5).

Введём функцию  $u(t) := A^{-1/2}T^{-1/2}v(t)$ , исходя из формул (2.4), и покажем, что эта функция и есть (единственное) решение исходной задачи Коши (1.3).

Из второго уравнения в (2.5) следует, что  $u'(t) = z(t)$ , а значит,  $u \in C^2(\mathbb{R}_+; H)$ . Из последнего равенства следует, что  $u'(0) = z(0) = u^1$ , а из определения функции  $u$  — что  $u(0) = A^{-1/2}T^{-1/2}v(0) = A^{-1/2}T^{-1/2}(T^{1/2}A^{1/2}u^0) = u^0$ , т. е. начальные условия в (1.3) выполнены.

Допустим, что удастся показать, что  $z(t) \in \mathcal{D}(A)$  при всех  $t \in \mathbb{R}_+$  и  $Az \in C(\mathbb{R}_+; H)$ . Отсюда будет следовать, что  $Au' \in C(\mathbb{R}_+; H)$ . Из  $Au' \in C(\mathbb{R}_+; H)$  и  $u(0) = u^0 \in \mathcal{D}(A)$  следует (см. [3, гл. 1, § 1, лемма 1.5]), что  $u(t) \in \mathcal{D}(A)$  при всех  $t \in \mathbb{R}_+$  и  $Au \in C(\mathbb{R}_+; H)$ . Отсюда тогда получим, что  $Bu \in C(\mathbb{R}_+; H)$ , так как  $Bu(t) = (BA^{-1})Au(t)$  и  $BA^{-1} \in \mathcal{L}(H)$  в силу гипотезы 1). Непосредственными вычислениями проверяется, что функция  $u$ , удовлетворяющая уравнению (2.2), будет также решением уравнения (2.1). Согласно определению 1.1 построенная функция  $u$  будет (единственным) решением задачи Коши (1.3).

Итак, найдём из второго и третьего соотношения в (2.5) функции  $v$  и  $w$ :

$$v(t) = \int_0^t T^{1/2}A^{1/2}z(s) ds + T^{1/2}A^{1/2}u^0, \quad w(t) = \int_0^t \exp(-G(t-s))G^{-1/2}Q_0A^{1/2}z(s) ds.$$

Отсюда и из первого соотношения в (2.5) получим, что на  $\mathbb{R}_+$  непрерывна функция

$$A(z(t) + \int_0^t R(t-s)z(s) ds + R(t)u^0), \quad \text{где } R(t) := A^{-1/2}(T + Q_0^* \exp(-Gt)G^{-1}Q_0)A^{1/2}. \quad (2.19)$$

Это утверждение перепишем в следующей эквивалентной форме:

$$z(t) + \int_0^t R(t-s)z(s) ds = g(t) - R(t)u^0, \quad Ag \in C(\mathbb{R}_+; H). \quad (2.20)$$

Определим на  $\mathcal{D}(A)$  норму  $\|u\|_{E(A)} := \|Au\|_H$ , эквивалентную норме графика, и превратим его таким образом в банахово пространство  $E(A)$ . Тогда (2.20) можно рассматривать как уравнение Вольтерра второго рода в  $E(A)$ , если только функция  $R(t)u^0$  принимает значения из  $E(A)$ .

Покажем, что оператор-функция  $R(t)$  сильно непрерывна на  $\mathbb{R}_+$  со значениями в  $E(A)$ . Отсюда и из  $u^0 \in \mathcal{D}(A)$  будет следовать, что  $g - R(\cdot)u^0 \in C(\mathbb{R}_+; E(A))$ . Отсюда, в свою очередь, получим, что уравнение (2.20) имеет единственное решение  $z \in C(\mathbb{R}_+; E(A))$ , что докажет лемму.

Для любого  $z \in E(A) = \mathcal{D}(A)$  и  $t_0 \in \mathbb{R}_+$  с учётом (1.2), (2.19) и гипотез 1)-2) имеем

$$\begin{aligned} \|R(t)z\|_{E(A)} &= \|A^{1/2}(T + Q_0^* \exp(-Gt)G^{-1}Q_0)A^{-1/2}(Az)\|_H = \\ &= \|A^{1/2}(Q^*Q - Q_0^*G^{-1}Q_0 + Q_0^* \exp(-Gt)G^{-1}Q_0)A^{-1/2}(Az)\|_H = \\ &= \|A^{1/2}(Q^*|_{\mathcal{D}(B^{1/2})}B^{1/2}A^{-1} - Q_0^*|_{\mathcal{D}(C^*)}G^{-1}CA^{-1} + Q_0^* \exp(-Gt)G^{-1}CA^{-1})(Az)\|_H = \\ &= \|(BA^{-1} - C^*G^{-1}CA^{-1} + C^* \exp(-Gt)G^{-1}CA^{-1})(Az)\|_H \leq \\ &\leq \|BA^{-1} - C^*G^{-1}CA^{-1} + C^* \exp(-Gt)G^{-1}CA^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \cdot \|z\|_{E(A)}, \end{aligned}$$

$$\|R(t)z - R(t_0)z\|_{E(A)} = \|(C^* \exp(-Gt)G^{-1}CA^{-1} - C^* \exp(-Gt_0)G^{-1}CA^{-1})(Az)\|_H \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0.$$

Лемма доказана.  $\square$

**2.2. Доказательство асимптотических формул.** Установим вспомогательную лемму об асимптотическом поведении решений дифференциально-операторного уравнения первого порядка в произвольном банаховом пространстве.

**Лемма 2.6.** Пусть  $-A$  — генератор сильно непрерывной равномерно экспоненциально устойчивой (см. (2.15)) полугруппы  $\mathcal{U}(t)$  на банаховом пространстве  $\mathcal{E}$ . Предположим, что в задаче Коши

$$\frac{d\zeta}{dt} = -A\zeta + \mathcal{G}(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{F}_k(t), \quad \zeta(0) = \zeta^0, \quad (2.21)$$

где  $\sigma_0 = 0$ ,  $0 \neq \sigma_k \in \mathbb{R}$ ,  $k = \overline{1, n}$ , выполнены условия:  $\zeta^0 \in \mathcal{D}(A)$ ,  $\mathcal{F}_k \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{E})$ ,  $k = \overline{0, n}$ ,  $\mathcal{G} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{E})$ , либо функция  $\mathcal{G}$  локально гёльдерова, если полугруппа  $\mathcal{U}(t)$  голоморфна. Тогда существует константа  $M_0 \geq 1$  такая, что для решения задачи (2.21) выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \left\| \zeta(t) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(A) \mathcal{F}_k(t) \right\|_{\mathcal{E}} &\leq M_0 e^{-\omega t} \left( \|\zeta^0\|_{\mathcal{E}} + \sum_{k=0}^n \|\mathcal{F}_k(0)\|_{\mathcal{E}} \right) + \\ &+ M_0 \int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left( \|\mathcal{G}(s)\|_{\mathcal{E}} + \sum_{k=0}^n \|\mathcal{F}'_k(s)\|_{\mathcal{E}} \right) ds. \end{aligned} \quad (2.22)$$

*Доказательство.* Из условий теоремы следует, что задача (2.21) имеет единственное решение (в смысле определения 2.1). Будем искать это решение в виде  $\zeta(t) = \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(A) \mathcal{F}_k(t) + \chi(t)$ .

Тогда функция  $\chi(t)$  должна быть решением задачи Коши

$$\frac{d\chi}{dt} = -A\chi + \mathcal{G}(t) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(A) \mathcal{F}'_k(t), \quad \chi(0) = \zeta^0 - \sum_{k=0}^n \mathcal{R}_{i\sigma_k}(A) \mathcal{F}_k(0) \in \mathcal{D}(A). \quad (2.23)$$

Заметим, что решение задачи (2.23) можно представить в виде суммы  $\chi(t) = \chi_1(t) + \chi_2(t)$ , где  $\chi_1(t)$ ,  $\chi_2(t)$  — решения задач Коши

$$\begin{aligned} \frac{d\chi_1}{dt} &= -A\chi_1 + \mathcal{G}(t), \quad \chi_1(0) = \zeta^0 - \sum_{k=0}^n \mathcal{R}_{i\sigma_k}(A) \mathcal{F}_k(0) \in \mathcal{D}(A), \\ \frac{d\chi_2}{dt} &= -A\chi_2 - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(A) \mathcal{F}'_k(t), \quad \chi_2(0) = 0 \in \mathcal{D}(A), \end{aligned}$$

но эти задачи однозначно разрешимы в смысле определения 2.1 (см. рассуждения, применённые к задачам (2.17) и (2.18)).

Итак, из (2.23) и представления  $\zeta(t) = \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k(t) + \chi(t)$  найдём, что

$$\begin{aligned} \zeta(t) = & \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k(t) + \mathcal{U}(t) \left( \zeta^0 - \sum_{k=0}^n \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k(0) \right) + \\ & + \int_0^t \mathcal{U}(t-s) \left( \mathcal{G}(s) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k s} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}'_k(s) \right) ds. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \left\| \zeta(t) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k(t) \right\|_{\mathcal{E}} = \\ & = \left\| \mathcal{U}(t) \left( \zeta^0 - \sum_{k=0}^n \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k(0) \right) + \int_0^t \mathcal{U}(t-s) \left( \mathcal{G}(s) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k s} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}'_k(s) \right) ds \right\|_{\mathcal{E}} \leq \\ & \leq M e^{-\omega t} \left( \|\zeta^0\|_{\mathcal{E}} + \sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_{\lambda}(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} \sum_{k=0}^n \|\mathcal{F}_k(0)\|_{\mathcal{E}} \right) + \\ & + M \int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left( \|\mathcal{G}(s)\|_{\mathcal{E}} + \sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_{\lambda}(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} \sum_{k=0}^n \|\mathcal{F}'_k(s)\|_{\mathcal{E}} \right) ds, \end{aligned}$$

т. е. оценка (2.22) выполнена с константой  $M_0 := M \max \{1, \sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_{\lambda}(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(E)}\}$ .  $\square$

**Лемма 2.7.** В условиях теоремы 1.1 имеют место формулы (1.4) и (1.5).

*Доказательство.* Пусть в задаче (1.3) выполнены условия  $u^0, u^1 \in \mathcal{D}(A)$  и

$$f(t) = g(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} f_k(t), \quad \sigma_0 = 0, \quad 0 \neq \sigma_k \in \mathbb{R} \quad (k = \overline{1, n}), \quad (2.24)$$

где  $f_k \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$  ( $k = \overline{0, n}$ ), а функция  $g$  локально гёльдерова. По (единственному) решению задачи Коши (1.3) построим решение задачи Коши (2.8). При выполнении условия (2.24) задача (2.8) примет вид задачи Коши (2.21) с

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t) & := (g(t); T^{-1/2} Q_0^* \exp(-Gt) Q_0 A^{1/2} u^0; 0)^\tau, \\ \mathcal{F}_k(t) & := (f_k(t); 0; 0)^\tau \quad (k = \overline{0, n}), \quad \zeta^0 = \xi^0 + \xi(u^0, 0). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Применим лемму 2.6 к сложившейся ситуации. Учитывая связь  $\zeta(t) = \xi(t) + \xi(u^0, t)$  между решениями задач Коши (2.8) и (2.6), формулы для  $\xi(u^0, t)$ ,  $\xi^0$ , обозначения (2.25), найдём, что

$$\begin{aligned} & \left\| \xi(t) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k(t) \right\|_{\mathcal{H}} \leq \left\| \zeta(t) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k(t) \right\|_{\mathcal{H}} + \|\xi(u^0, t)\|_{\mathcal{H}} \leq \\ & \leq M_0 e^{-\omega t} \left( \|\xi^0 + \xi(u^0, 0)\|_{\mathcal{H}} + \sum_{k=0}^n \|\mathcal{F}_k(0)\|_{\mathcal{H}} \right) + \|\xi(u^0, t)\|_{\mathcal{H}} + \\ & + M_0 \int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left( \|\mathcal{G}(s)\|_{\mathcal{H}} + \sum_{k=0}^n \|\mathcal{F}'_k(s)\|_{\mathcal{H}} \right) ds \leq \\ & \leq M_0 e^{-\omega t} \left( \|u^1\| + \left\{ \|T^{1/2}\| + \|T^{-1/2}\| \|G^{-1}\| \|Q_0\|^2 \right\} \|A^{1/2} u^0\| + \sum_{k=0}^n \|f_k(0)\| \right) + \\ & + e^{-\omega_G t} \|T^{-1/2}\| \|G^{-1}\| \|Q_0\|^2 \|A^{1/2} u^0\| + \frac{M_0 \|T^{-1/2}\| \|Q_0\|^2}{\omega_G - \omega} (1 - e^{-(\omega_G - \omega)t}) e^{-\omega t} \|A^{1/2} u^0\| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + M_0 \int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left( \|g(s)\| + \sum_{k=0}^n \|f'_k(s)\| \right) ds \leq \\
 & \leq e^{-\omega t} \left( \left\{ M_0 \|T^{1/2}\| + (M_0 + 1) \|T^{-1/2}\| \|G^{-1}\| \|Q_0\|^2 + \frac{M_0 \|T^{-1/2}\| \|Q_0\|^2}{\omega_G - \omega} \right\} \|A^{1/2} u^0\| + M_0 \|u^1\| + \right. \\
 & \left. + M_0 \sum_{k=0}^n \|f_k(0)\| \right) + M_0 \int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left( \|g(s)\| + \sum_{k=0}^n \|f'_k(s)\| \right) ds \leq \\
 & \leq \widetilde{M}_1 e^{-\omega t} \left( \|A^{1/2} u^0\| + \|u^1\| + \sum_{k=0}^n \|f_k(0)\| \right) + \widetilde{M}_2 \int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left( \|g(s)\| + \sum_{k=0}^n \|f'_k(s)\| \right) ds, \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

где

$$\widetilde{M}_1 := \max \left\{ M_0, M_0 \|T^{1/2}\| + (M_0 + 1) \|T^{-1/2}\| \|G^{-1}\| \|Q_0\|^2 + \frac{M_0 \|T^{-1/2}\| \|Q_0\|^2}{\omega_G - \omega} \right\}, \quad \widetilde{M}_2 := M_0.$$

Учитывая формулу (2.11) для оператора  $\mathcal{A}^{-1}$ , формулу (2.14) для резольвенты оператора  $\mathcal{A}$ , связи (2.4), найдём, что

$$\begin{aligned}
 & \left\| \xi(t) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k(t) \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\| \xi(t) - \mathcal{A}^{-1} \mathcal{F}_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k(t) \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \\
 & = \left\| \begin{pmatrix} z(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & -T^{-1/2} Q_0^* G^{-1} \\ 0 & 0 & G^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -T^{-1/2} & 0 \\ T^{-1/2} & T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2} f_0(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ -(i\sigma_k)^{-1} T^{1/2} & I & 0 \\ G^{-1/2} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(G) Q_0 & 0 & G^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \\
 & = \left\| \begin{pmatrix} z(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ T^{-1/2} A^{-1/2} f_0(t) \\ 0 \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \begin{pmatrix} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \\ -(i\sigma_k)^{-1} T^{1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \\ G^{-1/2} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(G) Q_0 L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \\
 & \geq \left\| u'(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right\|^2 + \\
 & \quad + \left\| T^{1/2} A^{1/2} u(t) - T^{-1/2} A^{-1/2} f_0(t) + \sum_{k=1}^n \frac{e^{-i\sigma_k t}}{i\sigma_k} T^{1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right\|^2 \geq \\
 & \geq \left\| u'(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right\|^2 + \\
 & \quad + \gamma \left\| A^{1/2} \left( u(t) - A^{-1/2} T^{-1} A^{-1/2} f_0(t) + \sum_{k=1}^n \frac{e^{-i\sigma_k t}}{i\sigma_k} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right) \right\|^2. \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

Из (2.26), (2.27) следует оценка (1.4) с константами  $M_l := \widetilde{M}_l \max\{1, \gamma^{-1/2}\}$  ( $l = 1, 2$ ).

Докажем формулу (1.5). Пусть  $\|g(t)\| = o(1)$ ,  $\|f'_k(t)\| = o(1)$  ( $k = \overline{0, n}$ ) при  $t \rightarrow +\infty$ . Достаточно доказать, что интегральное слагаемое в (1.4) стремится к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ . Обозначим  $h(t) := \|g(t)\| + \sum_{k=0}^n \|f'_k(t)\|$ . Фиксируем  $\varepsilon > 0$  и выберем последовательно числа  $t_{\varepsilon,1}$  и  $t_{\varepsilon,2}$  следующим образом:

$$t_{\varepsilon,1} > 0 : \sup_{t \geq t_{\varepsilon,1}} h(t) < \frac{\varepsilon \omega}{2}, \quad t_{\varepsilon,2} := \frac{1}{\omega} \ln \left( \frac{2}{\varepsilon \omega} (e^{\omega t_{\varepsilon,1}} - 1) \sup_{t \geq 0} h(t) \right).$$

Теперь для любого  $t \geq t(\varepsilon) := \max\{t_{\varepsilon,1}, t_{\varepsilon,2}\}$  найдём, что

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\omega(t-s)} h(s) ds &= \int_0^{t_{\varepsilon,1}} e^{-\omega(t-s)} h(s) ds + \int_{t_{\varepsilon,1}}^t e^{-\omega(t-s)} h(s) ds \leq \\ &\leq \frac{e^{-\omega t}}{\omega} (e^{\omega t_{\varepsilon,1}} - 1) \sup_{t \geq 0} h(t) + \frac{1}{\omega} \sup_{t \geq t_{\varepsilon,1}} h(t) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Лемма доказана.  $\square$

### 3. ПРИЛОЖЕНИЯ

**3.1. Операторные ядра экспоненциального типа.** Рассмотрим пример реализации операторного ядра в интегральном слагаемом из (1.3). Пусть  $H_{k0}$  ( $k = \overline{1, m}$ ) — гильбертовы пространства. Определим  $m$  гильбертовых пространств  $H_k$  со скалярными произведениями и нормами:

$$\begin{aligned} H_k &:= \bigoplus_{l \in \mathbb{N}} H_{k0} = \left\{ X_k = \{x_l\}_{l \in \mathbb{N}} : x_l \in H_{k0}, \sum_{l \in \mathbb{N}} \|x_l\|_{H_{k0}}^2 < +\infty \right\}, \\ (X_k, Y_k)_{H_k} &:= \sum_{l \in \mathbb{N}} (x_l, y_l)_{H_{k0}}, \quad \|X_k\|_{H_k}^2 = \sum_{l \in \mathbb{N}} \|x_l\|_{H_{k0}}^2, \quad k = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Определим гильбертово пространство  $H_0$  со скалярным произведением и нормой:

$$\begin{aligned} H_0 &:= \bigoplus_{k=1}^m H_k = \left\{ X = (X_1; X_2; \dots; X_m)^\tau : X_k \in H_k, k = \overline{1, m} \right\}, \\ (X^{(1)}, X^{(2)})_{H_0} &:= \sum_{k=1}^m (X_k^{(1)}, X_k^{(2)})_{H_k}, \quad \|X\|_{H_0}^2 = \sum_{k=1}^m \|X_k\|_{H_k}^2. \end{aligned}$$

Пусть  $C_{k0}$  ( $k = \overline{1, m}$ ) — плотно определённые замкнутые операторы, действующие из  $H$  в  $H_{k0}$ :  $C_{k0} : \mathcal{D}(C_{k0}) \subset H \rightarrow H_{k0}$ ,  $\{\alpha_{kl}\}_{l \in \mathbb{N}}$ ,  $\{\gamma_{kl}\}_{l \in \mathbb{N}}$  ( $k = \overline{1, m}$ ) — последовательности положительных чисел. Будем считать, что выполнены следующие условия:

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(C_{k0}^* C_{k0}), \quad \sum_{l \in \mathbb{N}} \alpha_{kl} < +\infty, \quad \inf_{l \in \mathbb{N}} \gamma_{kl} > 0, \quad k = \overline{1, m}. \quad (3.1)$$

Определим операторы  $C_k, G_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ) по следующим формулам:

$$\begin{aligned} C_k u &:= \left\{ \sqrt{\alpha_{kl}} C_{k0} u \right\}_{l \in \mathbb{N}}, \quad \mathcal{D}(C_k) = \mathcal{D}(C_{k0}), \quad C_k : \mathcal{D}(C_k) \subset H \rightarrow H_k, \\ G_k X_k &:= \left\{ \gamma_{kl} x_l \right\}_{l \in \mathbb{N}}, \quad \mathcal{D}(G_k) := \left\{ X_k \in H_k : \sum_{l \in \mathbb{N}} \|\gamma_{kl} x_l\|_{H_{k0}}^2 < +\infty \right\} \subset H_k. \end{aligned}$$

Несложно видеть, что оператор  $G_k$  самосопряжён и положительно определён в  $H_k$ , а плотно определённый оператор  $C_k$  замкнут на  $\mathcal{D}(C_k)$  и

$$C_k^* X_k = \sum_{l \in \mathbb{N}} \sqrt{\alpha_{kl}} C_{k0}^* x_l, \quad \mathcal{D}(C_k^*) = \left\{ X_k \in H_k : \left\| \sum_{l \in \mathbb{N}} \sqrt{\alpha_{kl}} C_{k0}^* x_l \right\|_H < +\infty \right\} \subset H_k.$$

Определим, наконец, операторы  $C$  и  $G$  по следующим формулам:

$$C := (C_1; C_2; \dots; C_m)^\tau, \quad G := \text{diag}(G_1, G_2, \dots, G_m),$$

тогда

$$C^* \exp(-Gt) C = \sum_{k=1}^m C_k^* \exp(-G_k t) C_k = \sum_{k=1}^m \sum_{l \in \mathbb{N}} \alpha_{kl} e^{-\gamma_{kl} t} C_{k0}^* C_{k0}. \quad (3.2)$$

**Лемма 3.1.** Оператор-функция  $C^* \exp(-tG) C A^{-1}$  сильно непрерывна на  $\mathbb{R}_+$ .

*Доказательство.* Из условия на области определения в (3.1) следует, что  $C_{k_0}^* C_{k_0} A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ . Таким образом, для любых  $t, t_0 \in \mathbb{R}_+$  и  $u \in H$  имеем

$$\begin{aligned} \|C^* \exp(-Gt)CA^{-1}u - C^* \exp(-Gt_0)CA^{-1}u\| &= \left\| \sum_{k=1}^m \sum_{l \in \mathbb{N}} \alpha_{kl} (e^{-\gamma_{kl}t} - e^{-\gamma_{kl}t_0}) C_{k_0}^* C_{k_0} A^{-1}u \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^m \|C_{k_0}^* C_{k_0} A^{-1}u\| \sum_{l \in \mathbb{N}} \alpha_{kl} |e^{-\gamma_{kl}t} - e^{-\gamma_{kl}t_0}|. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Фиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Из (3.1) получим, что

$$\begin{aligned} \exists N(\varepsilon, u) \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^m \|C_{k_0}^* C_{k_0} A^{-1}u\| \sum_{l=N(\varepsilon, u)+1}^{\infty} 2\alpha_{kl} &< \frac{\varepsilon}{2}, \\ \exists \delta(\varepsilon, u) > 0 : \sum_{k=1}^m \|C_{k_0}^* C_{k_0} A^{-1}u\| \sum_{l=1}^{N(\varepsilon, u)} \alpha_{kl} |e^{-\gamma_{kl}t} - e^{-\gamma_{kl}t_0}| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta). \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.3) следует, что

$$\|C^* \exp(-Gt)CA^{-1}u - C^* \exp(-Gt_0)CA^{-1}u\| < \varepsilon \quad \forall t \in (t_0 - \delta(\varepsilon, u), t_0 + \delta(\varepsilon, u)),$$

т. е. оператор-функция (3.2) сильно непрерывна в точке  $t_0$ .  $\square$

Таким образом, для оператор-функции (3.2) выполнена гипотеза 2).

Гипотеза 3) (см. (1.1)), связывающая введённые операторы и числовые коэффициенты и призванная обеспечить положительную определённую оператора  $T$  (см. (1.2)), принимает следующий вид:

3) существует  $\gamma > 0$  такое, что

$$\|B^{1/2}u\|_H^2 - \sum_{k=1}^m \sum_{l \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_{kl}}{\gamma_{kl}} \|C_{k_0}u\|_{H_{k_0}}^2 \geq \gamma \|A^{1/2}u\|_H^2 \quad \forall u \in \mathcal{D}(A^{1/2}). \quad (3.4)$$

Из проведённых рассуждений следует, что при выполнении гипотезы 1) и условий (3.1), (3.4) к задаче Коши (1.3) с операторным ядром (3.2) применима теорема 1.1.

**3.2. Задача о вынужденных продольных колебаниях вязкоупругого стержня с трением Кельвина—Фойгта.** В гильбертовом пространстве  $L_2(a, b)$  определим оператор  $A$ :

$$Au := -u'', \quad \mathcal{D}(A) := \{u \in L_2(a, b) : u \in W_2^2(a, b), u(a) = u(b) = 0\}.$$

Оператор  $A$  самосопряжён и положительно определён, спектр оператора  $A$  дискретен. Система собственных элементов и собственных значений оператора  $A$  имеет следующий вид:

$$u_j(A) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\left(\pi j \frac{x-a}{b-a}\right), \quad \lambda_j(A) = \left(\frac{\pi j}{b-a}\right)^2, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Задача о вынужденных продольных колебаниях вязкоупругого стержня, закреплённого на концах отрезка  $[a, b]$ , имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} &= -\alpha A \frac{du}{dt} - \beta Au + \int_0^t \sum_{l \in \mathbb{N}} \alpha_l e^{-\gamma_l(t-s)} Au(s) ds + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} f_k, \\ u(0) &= u^0, \quad u'(0) = u^1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$ , а  $\{\alpha_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ ,  $\{\gamma_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  — последовательности положительных чисел, удовлетворяющих следующим неравенствам (см. (3.1), (3.4)):

$$\sum_{l \in \mathbb{N}} \alpha_l < +\infty, \quad \inf_{l \in \mathbb{N}} \gamma_l > 0, \quad \frac{\beta}{\alpha} - \sum_{l \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_l}{\gamma_l} > 0. \quad (3.7)$$

Для простоты считаем в (3.6), что  $g(t) \equiv 0$ ,  $f_k \in L_2(a, b)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) не зависят от времени, а числа  $\sigma_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) те же, что и в теореме 1.1.

Непосредственно проверяется, что операторный пучок  $L(\lambda)$  из (1.2) в рассматриваемом случае имеет следующий вид:

$$L(\lambda) = \left\{ 1 - \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\beta}{\alpha} - \sum_{l \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_l}{\gamma_l} \right) + \sum_{l \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_l}{\gamma_l(\gamma_l - \lambda)} \right\} I - \lambda A^{-1}. \quad (3.8)$$

Применение теоремы 1.1 к задаче Коши (3.6) с учётом (3.5), (3.7), (3.8) приводит к следующему утверждению.

**Лемма 3.2.** Пусть  $u^0, u^1 \in \mathcal{D}(A)$ ,  $f_k \in L_2(a, b)$ ,  $k = \overline{0, n}$ . Тогда существуют константы  $\omega > 0$  и  $M_1 > 0$  такие, что для решения задачи Коши (3.6) выполнено неравенство

$$\left( \left\| A^{1/2} \left( u(t) - u_0 + \sum_{k=1}^n \frac{e^{-i\sigma_k t}}{i\sigma_k} u_k \right) \right\|_{L_2(a,b)}^2 + \left\| u'(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} u_k \right\|_{L_2(a,b)}^2 \right)^{1/2} \leq \\ \leq M_1 e^{-\omega t} \left( \|A^{1/2} u^0\|_{L_2(a,b)} + \|u^1\|_{L_2(a,b)} + \sum_{k=0}^n \|f_k\|_{L_2(a,b)} \right),$$

где (см. (3.5))

$$u_0 := \left( \frac{\beta}{\alpha} - \sum_{l \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_l}{\gamma_l} \right)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j(A)} (f_0, u_j(A))_{L_2(a,b)}, \\ u_k := \sum_{j=1}^{\infty} \left( \left\{ 1 - \frac{1}{i\sigma_k} \left( \frac{\beta}{\alpha} - \sum_{l \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_l}{\gamma_l} \right) + \sum_{l \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_l}{\gamma_l(\gamma_l - i\sigma_k)} \right\} \lambda_j(A) - i\sigma_k \right)^{-1} (f_k, u_j(A))_{L_2(a,b)}, \\ k = 1, 2, \dots, n.$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов В. В., Раутман Н. А. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.
2. Власов В. В., Раутман Н. А. Экспоненциальная устойчивость полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с сингулярными ядрами // Дифф. уравн. — 2021. — 57, № 10. — С. 1426–1430.
3. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Выща школа, 1989.
4. Загора Д. А. Экспоненциальная устойчивость одной полугруппы и приложения // Мат. заметки. — 2018. — 103, № 5. — С. 702–719.
5. Загора Д. А. Асимптотика решений в задаче о малых движениях сжимаемой жидкости Максвелла // Дифф. уравн. — 2019. — 55, № 9. — С. 1195–1208.
6. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязко-упругости. — М.: Наука, 1970.
7. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
8. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
9. Alabau-Boussouria F., Cannarsa P. A general method for proving sharp energy decay rates for memory-dissipative evolution equations // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. — 2009. — 347. — С. 867–872.
10. Alabau-Boussouria F., Cannarsa P., Sforza D. Decay estimates for second order evolution equations with memory // J. Funct. Anal. — 2008. — 254. — С. 1342–1372.
11. Ammar-Khodja F., Benabdallah A., Muñoz Rivera J. E., Racke R. Energy decay for Timoshenko systems of memory type // J. Differ. Equ. — 2003. — 194, № 1. — С. 82–115.
12. Amendola G., Fabrizio M., Golden J. M. Thermodynamics of Materials with Memory. — Boston: Springer, 2012.
13. Dafermos C. M. Asymptotic stability in viscoelasticity // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1970. — 37. — С. 297–308.
14. Dafermos C. M. An abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity // J. Differ. Equ. — 1970. — 7, № 3. — С. 554–569.
15. Dell’Oro F. Asymptotic stability of thermoelastic systems of Bresse type // J. Differ. Equ. — 2015. — 258, № 11. — С. 3902–3927.
16. Engel K. -J., Nagel R. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. — New York: Springer, 2000.

17. *Fabrizio M., Morro A.* Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity. — Philadelphia: SIAM, 1992.
18. *Fatori L. H., Monteiro R. N., Sare H. D. F.* The Timoshenko system with history and Cattaneo law// Appl. Math. Comput. — 2014. — 228, № 1. — С. 128–140.
19. *Liu Z., Zheng S.* Semigroups Associated with Dissipative Systems. — London: Chapman & Hall/CRC, 1999.
20. *Ma Z., Zhang L., Yang X.* Exponential stability for a Timoshenko-type system with history// J. Math. Anal. Appl. — 2011. — 380, № 1. — С. 299–312.
21. *Messaoudi S. A., Apalara T. A.* General stability result in a memory-type porous thermoelasticity system of type III// Arab J. Math. Sci. — 2014. — 20, № 2. — С. 213–232.
22. *Muñoz Rivera J. E., Naso M. G.* Asymptotic stability of semigroups associated with linear weak dissipative systems with memory// J. Math. Anal. Appl. — 2007. — 326. — С. 691–707.
23. *Pandolfi L.* Linear systems with persistent memory: An overview of the bibliography on controllability// ArXiv. — 2018. — 1804.01865 [math.OC].
24. *Racke R., Said-Houari B.* Global existence and decay property of the Timoshenko system in thermoelasticity with second sound// Nonlinear Anal. — 2012. — 75, № 13. — С. 4957–4973.
25. *Renardy M., Hrusa W. J., Nohel J. A.* Mathematical problems in viscoelasticity. — Harlow: Longman Scientific & Technical, 1987.
26. *Zakora D.* On the spectrum of rotating viscous relaxing fluid// Журн. мат. физ. анал. геом. — 2016. — 12, № 4. — С. 338–358.

Д. А. Загора

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия

E-mail: dmitry.zkr@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-3-451-466

UDC 517.968.72

## Asymptotic Behavior of Solutions of a Complete Second-Order Integro-Differential Equation

© 2022 D. A. Zakora

**Abstract.** In this paper, we study a complete second-order integro-differential operator equation in a Hilbert space. The difference-type kernel of an integral perturbation is a holomorphic semigroup bordered by unbounded operators. The asymptotic behavior of solutions of this equation is studied. Asymptotic formulas for solutions are proved in the case when the right-hand side is close to an almost periodic function. The obtained formulas are applied to the study of the problem of forced longitudinal vibrations of a viscoelastic rod with Kelvin–Voigt friction.

### REFERENCES

1. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral'nyy analiz funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equations], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).
2. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, “Eksponentsial'naya ustoychivost' polugrupp, porozhdaemykh vol'terrovymi integro-differentsial'nymi uravneniyami s singulyarnymi yadrami” [Exponential stability of semigroups generated by Volterra integro-differential equations with singular kernels], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2021, **57**, No. 10, 1426–1430 (in Russian).
3. J. Goldstein, *Polugruppy lineynykh operatorov i ikh prilozheniya* [Semigroups of Linear Operators and Applications], Vyscha shkola, Kiev, 1989 (Russian translation).

4. D. A. Zakora, “Eksponentsial’naya ustoychivost’ odnoy polugruppy i prilozheniya” [Exponential stability of one semigroup and applications], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2018, **103**, No. 5, 702–719 (in Russian).
5. D. A. Zakora, “Asimptotika resheniy v zadache o malykh dvizheniyakh szhimaemoy zhidkosti Maksvella” [Asymptotics of solutions in the problem of small motions of a Maxwell compressible fluid], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2019, **55**, No. 9, 1195–1208 (in Russian).
6. A. A. Il’yushin and B. E. Pobedrya, *Osnovy matematicheskoy teorii termovязko-uprugosti* [Fundamentals of Mathematical Theory of Thermovisco-Elasticity], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
7. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
8. C. G. Kreyn, *Lineynye differentsial’nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in a Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
9. F. Alabau-Boussouria and P. Cannarsa, “A general method for proving sharp energy decay rates for memory-dissipative evolution equations,” *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 2009, **347**, 867–872.
10. F. Alabau-Boussouria, P. Cannarsa, and D. Sforza, “Decay estimates for second order evolution equations with memory,” *J. Funct. Anal.*, 2008, **254**, 1342–1372.
11. F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, J. E. Muñoz Rivera, and R. Racke, “Energy decay for Timoshenko systems of memory type,” *J. Differ. Equ.*, 2003, **194**, No. 1, 82–115.
12. G. Amendola, M. Fabrizio, and J. M. Golden, *Thermodynamics of Materials with Memory*, Springer, Boston, 2012.
13. C. M. Dafermos, “Asymptotic stability in viscoelasticity,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1970, **37**, 297–308.
14. C. M. Dafermos, “An abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity,” *J. Differ. Equ.*, 1970, **7**, No. 3, 554–569.
15. F. Dell’Oro, “Asymptotic stability of thermoelastic systems of Bresse type,” *J. Differ. Equ.*, 2015, **258**, No. 11, 3902–3927.
16. K.-J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer, New York, 2000.
17. M. Fabrizio and A. Morro, *Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity*, SIAM, Philadelphia, 1992.
18. L. H. Fatori, R. N. Monteiro, and H. D. Sare, “The Timoshenko system with history and Cattaneo law,” *Appl. Math. Comput.*, 2014, **228**, No. 1, 128–140.
19. Z. Liu and S. Zheng, *Semigroups Associated with Dissipative Systems*, Chapman & Hall/CRC, London, 1999.
20. Z. Ma, L. Zhang, and X. Yang, “Exponential stability for a Timoshenko-type system with history,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2011, **380**, No. 1, 299–312.
21. S. A. Messaoudi and T. A. Apalara, “General stability result in a memory-type porous thermoelasticity system of type III,” *Arab J. Math. Sci.*, 2014, **20**, No. 2, 213–232.
22. J. E. Muñoz Rivera and M. G. Naso, “Asymptotic stability of semigroups associated with linear weak dissipative systems with memory,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, **326**, 691–707.
23. L. Pandolfi, “Linear systems with persistent memory: An overview of the bibliography on controllability,” *ArXiv*, 2018, 1804.01865 [math.OC].
24. R. Racke and B. Said-Houari, “Global existence and decay property of the Timoshenko system in thermoelasticity with second sound,” *Nonlinear Anal.*, 2012, **75**, No. 13, 4957–4973.
25. M. Renardy, W. J. Hrusa, and J. A. Nohel, *Mathematical problems in viscoelasticity*, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1987.
26. D. Zakora, “On the spectrum of rotating viscous relaxing fluid,” *Zhurn. mat. fiz. anal. geom.*, 2016, **12**, No. 4, 338–358.

D. A. Zakora

Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol’, Russia

E-mail: dmitry.zkr@gmail.com

## ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СОПРЯЖЕННОСТЬ ГРАДИЕНТНО-ПОДОБНЫХ ПОТОКОВ НА ПОВЕРХНОСТЯХ И ЭФФЕКТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ЕЕ РАЗЛИЧЕНИЯ

© 2022 г. В. Е. КРУГЛОВ, О. В. ПОЧИНКА

Аннотация. Градиентно-подобные потоки на поверхностях имеют простую динамику, что вдохновляло многих математиков на поиски инвариантов их топологической эквивалентности. В предположениях различной общности на рассматриваемый класс градиентно-подобных потоков, были получены такие классические инварианты, как схема Леонтович—Майера, граф Пейшото, оснащенный граф Пейшото, двуцветный граф Вонга, трехцветный граф Ошемкова—Шарко, круговая схема Флейтас и др. Таким образом, проблема классификации градиентно-подобных потоков на поверхностях с точки зрения топологической эквивалентности решена исчерпывающим образом. В недавних работах В. Е. Круглова, Д. С. Малышева, О. В. Починки доказано, что для градиентно-подобных потоков классы топологической эквивалентности совпадают с классами топологической сопряженности. Полученный результат позволяет использовать для топологической сопряженности градиентно-подобных потоков любые инварианты их эквивалентности. Настоящее исследование является обзором результатов по топологической сопряженности градиентно-подобных потоков на поверхностях и эффективным алгоритмам ее различения, т. е. алгоритмам, время работы которых ограничено некоторым полиномом от длины входной информации.

### ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	468
1. Необходимые сведения из теории потоков на многообразиях . . . . .	468
1.1. Общие понятия непрерывных динамических систем . . . . .	468
1.2. Гиперболические неподвижные точки . . . . .	469
1.3. Гиперболические периодические орбиты . . . . .	469
1.4. Структурно устойчивые и $\Omega$ -устойчивые потоки . . . . .	469
2. Топологическая сопряженность градиентно-подобных потоков на поверхностях . . . . .	470
2.1. Динамика градиентно-подобных потоков . . . . .	470
2.2. Отсутствие модулей топологической сопряженности . . . . .	471
3. Эффективные алгоритмы различения эквивалентности (сопряженности) градиентно-подобных потоков на поверхностях . . . . .	474
3.1. Необходимые сведения из теории графов и алгоритмов . . . . .	474
3.2. Граф Пейшото . . . . .	474
3.3. Модифицированный граф Пейшото . . . . .	478
3.4. Граф Вонга . . . . .	480
3.5. Круговая схема Флейтас . . . . .	481
3.6. Трехцветный граф Ошемкова—Шарко . . . . .	483
Список литературы . . . . .	485



## ВВЕДЕНИЕ

Напомним, что потоки  $f^t, f^{t'}: M \rightarrow M$  на многообразии  $M$  называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм  $h: M \rightarrow M$ , отображающий траектории потока  $f^t$  в траектории потока  $f^{t'}$  с сохранением направления движения по траекториям. Два потока называются *топологически сопряженными*, если выполняется условие  $hf^t = f^{t'}h, t \in \mathbb{R}$ ; это означает, что  $h$  отображает траектории в траектории, сохраняя не только направление, но и время движения по траекториям.

Первые результаты в этой области восходят к классической работе А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина [1] 1937 года. Они рассмотрели систему дифференциальных уравнений, заданных в компактной части плоскости, ограниченной кривой без контакта. Для таких систем ими было введено понятие грубости, получен критерий грубости и доказана всюду плотность грубых систем среди всех систем в компактной части плоскости. Согласно критерию Андронова—Понтрягина система является грубой тогда и только тогда, когда ее неблуждающее множество состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек, конечного числа гиперболических периодических орбит, и не имеет связок.

Основной трудностью в обобщении этого результата на случай произвольных ориентируемых поверхностей положительного рода является возможность нового типа движения — незамкнутая рекуррентная траектория. Отсутствие таких траекторий для грубых потоков без особенностей на 2-торе была доказана А. Г. Майером [4] в 1939 году. В работах [13, 14] М. Пейшото ввел эквивалентное грубости понятие структурной устойчивости, снимающее требование близости к тождественному гомеоморфизму, осуществляющего эквивалентность близких систем. Он доказал, что критерий грубости Андронова—Понтрягина дословно переносится на потоки, заданные на произвольных поверхностях. Выделенный класс векторных полей был назван классом *векторных полей Морса—Смейла* после того как в 1967 году С. Смейл [18] обобщил свойства грубых систем Андронова—Понтрягина на случай произвольной размерности.

Напомним, что поток Морса—Смейла называется *градиентно-подобным*, если его неблуждающее множество не содержит периодических орбит. Такие потоки имеют наиболее простую динамику, что вдохновляло многих математиков на поиски инвариантов их топологической эквивалентности. В предположениях различной общности на рассматриваемый класс градиентно-подобных потоков были получены следующие инварианты: схема Леонтович—Майера (Е. А. Леонтович, А. Г. Майер) [2, 3], граф Пейшото (М. Пейшото) [15], оснащенный граф Пейшото (В. З. Гринес, О. В. Починка) [8], двуцветный граф (К. Вонг) [19], трехцветный граф (А. Ошемков, В. Шарко) [5], круговая схема (Г. Флейтас) [7].

Таким образом, проблема классификации градиентно-подобных потоков на поверхностях с точки зрения топологической эквивалентности решена исчерпывающим образом. В работах [10, 11] доказано, что для градиентно-подобных потоков классы топологической эквивалентности совпадают с классами топологической сопряженности. Полученный результат позволяет использовать для топологической сопряженности градиентно-подобных потоков любые инварианты их эквивалентности. В работе [11] также построены эффективные алгоритмы различения для перечисленных комбинаторных инвариантов градиентно-подобных потоков на поверхностях, т. е. алгоритмы, ограниченные некоторым полиномом от длины входной информации.

Настоящее исследование является обзором результатов по топологической сопряженности градиентно-подобных потоков на поверхностях и эффективным алгоритмам ее различения.

## 1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПОТОКОВ НА МНОГООБРАЗИЯХ

**1.1. Общие понятия непрерывных динамических систем.** Пусть  $M$  — гладкое замкнутое  $n$ -многообразие с метрикой  $d$ . *Гладким потоком* на  $M$  называется гладкое отображение  $\phi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  с групповыми свойствами:

- 1)  $\phi(x, 0) = x \quad \forall x \in M$ ;
- 2)  $\phi(\phi(x, t), s) = \phi(x, t + s) \quad \forall x \in M, \forall s, t \in \mathbb{R}$ .

В дальнейшем будем использовать обозначение  $\phi^t(x) = \phi(x, t), x \in M, t \in \mathbb{R}$ . Заметим, что при фиксированном  $t \in \mathbb{R}$  отображение  $\phi^t: M \rightarrow M$  является диффеоморфизмом, поэтому поток еще называют однопараметрической группой диффеоморфизмов, действующих на многообразии  $M$ .

*Траекторией* или *орбитой* точки  $x \in M$  называется множество  $\mathcal{O}_x = \{\phi^t(x), t \in \mathbb{R}\}$ . Любая орбита потока либо состоит из одной точки, и в этом случае эта точка называется *неподвижной*, либо гомеоморфна окружности, и в этом случае любая точка орбиты называется *периодической*, либо является инъективно иммерсированной прямой. Полагают, что все траектории потока, отличные от неподвижной точки, ориентированы в соответствии с возрастанием параметра  $t$ . С каждым потоком  $\phi^t: M \rightarrow M$  связано касающееся траекторий потока векторное поле

$$\dot{x} = \left. \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x).$$

Два потока  $\phi^t: M \rightarrow M$  и  $\phi'^t: M' \rightarrow M'$  называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм  $h: M \rightarrow M'$ , переводящий траектории потока  $\phi^t$  в траектории потока  $\phi'^t$  с сохранением ориентации. Если при этом гомеоморфизм  $h$  обладает свойством  $h\phi^t = \phi'^t h$  для любого  $t \in \mathbb{R}$ , то потоки называются *топологически сопряженными*.

**1.2. Гиперболические неподвижные точки.** Пусть  $p \in M$  — неподвижная точка потока  $\phi^t: M \rightarrow M$ . *Устойчивым* и *неустойчивым*, соответственно, многообразием неподвижной точки  $p$  называются множества

$$W_p^s = \{x \in M : d(p, \phi^t(x)) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty\} \text{ и}$$

$$W_p^u = \{x \in M : d(p, \phi^t(x)) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty\}.$$

*Устойчивой* (*неустойчивой*) *сепаратрисой* неподвижной точки  $p$  называется компонента линейной связности множества  $W_p^s \setminus p$  ( $W_p^u \setminus p$ ).

С неподвижной точкой потока помимо касательного векторного поля  $\dot{x} = F(x)$  связано *линеаризованное векторное поле*

$$\dot{x} = A(x - p),$$

где  $A$  — матрица частных производных отображения  $F(x)$  в точке  $p$  (матрица Якоби). Неподвижная точка  $p$  потока  $\phi^t$  называется *гиперболической*, если собственные значения матрицы  $A$  не имеют нулевых действительных частей.

Напомним, что неподвижная точка  $p$  диффеоморфизма  $f: M \rightarrow M$  называется *гиперболической*, если матрица частных производных отображения  $f(x)$  в точке  $p$  (матрица Якоби) не имеет собственных значений по модулю равных единице.

**1.3. Гиперболические периодические орбиты.** Пусть  $\mathfrak{c}$  — замкнутая траектория потока  $\phi^t: M \rightarrow M$ . *Устойчивым* и *неустойчивым*, соответственно, многообразием замкнутой траектории  $\mathfrak{c}$  называются множества

$$W_{\mathfrak{c}}^s = \{x \in M : \min_{p \in \mathfrak{c}} d(p, \phi^t(x)) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty\} \text{ и}$$

$$W_{\mathfrak{c}}^u = \{x \in M : \min_{p \in \mathfrak{c}} d(p, \phi^t(x)) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty\}.$$

Пусть  $p \in \mathfrak{c}$  и  $\Sigma_p$  —  $(n-1)$ -мерный диск, трансверсальный в точке  $p$  вектору, касательному к периодической траектории, называемый *секущей Пуанкаре*. Тогда в некоторой окрестности  $V_p \subset \Sigma_p$  точки  $p$  для каждой точки  $x \in V_p$  существует значение  $\tau_x > 0$  такое, что  $\phi^{\tau_x}(x) \in \Sigma_p$  и  $\phi^t(x) \notin \Sigma_p$  для любого  $0 < t < \tau_x$ . Отображение  $f: V_p \rightarrow \Sigma_p$ , определенное формулой  $f(x) = \phi^{\tau_x}(x)$ ,  $x \in V_p$ , называется *отображением последования*, или *отображением Пуанкаре*.

Заметим, что точка  $p$  является неподвижной точкой отображения последования. Периодическая траектория  $\mathfrak{c}$  называется *гиперболической*, если точка  $p$  является гиперболической неподвижной точкой отображения Пуанкаре  $f: V_p \rightarrow F_p(V_p)$ .

**1.4. Структурно устойчивые и  $\Omega$ -устойчивые потоки.** Точка  $x \in M$  называется *блуждающей точкой* потока  $\phi^t: M \rightarrow M$ , если существует открытая окрестность  $U_x$  точки  $x$  такая, что  $\phi^t(U_x) \cap U_x = \emptyset$  для всех  $t > 1$ . В противном случае точка  $x$  называется *неблуждающей*. Множество всех неблуждающих точек потока  $\phi^t$  называется его *неблуждающим множеством* и обозначается  $\Omega_{\phi^t}$ .

Поток  $\phi^t: M \rightarrow M$  называется  *$\Omega$ -устойчивым*, если существует окрестность  $U(\phi^t)$  потока  $\phi^t$  в пространстве  $C^1(S \times \mathbb{R}, S)$  с  $C^1$ -топологией такая, что если  $\phi'^t \in U(\phi^t)$ , то потоки  $\phi^t|_{\Omega_{\phi^t}}$  и  $\phi'^t|_{\Omega_{\phi'^t}}$  топологически эквивалентны.

Поток  $\phi^t: M \rightarrow M$  называется *структурно устойчивым*, если существует окрестность  $U(\phi^t)$  потока  $\phi^t$  в пространстве  $C^1(S \times \mathbb{R}, S)$  с  $C^1$ -топологией такая, что если  $\phi^{t'} \in U(\phi^t)$ , то потоки  $\phi^t$  и  $\phi^{t'}$  топологически эквивалентны.

Поток называется *поток Морса—Смейла*, если его неблуждающее множество состоит конечного числа гиперболических неподвижных точек и конечного числа гиперболических периодических орбит, чьи устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются трансверсально. Поток Морса—Смейла без периодических орбит называется *градиентно-подобным* потоком.

В силу результатов [1, 13, 14] поток на поверхности является структурно устойчивым тогда и только тогда, когда он является потоком Морса—Смейла. Условие трансверсальности на поверхности означает, что у потока отсутствуют *связки* — траектории, соединяющие седловые точки.

Из критерия  $\Omega$ -устойчивости [16] следует, что неблуждающее множество  $\Omega$ -устойчивого потока на поверхности состоит из конечного числа гиперболических периодических орбит и неподвижных точек, при этом последние не образуют *циклов* (см. рис. 1), т. е. наборов неподвижных точек

$$p_1, \dots, p_k, p_{k+1} = p_1$$

со свойством

$$W_{p_i}^s \cap W_{p_{i+1}}^u \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, k.$$

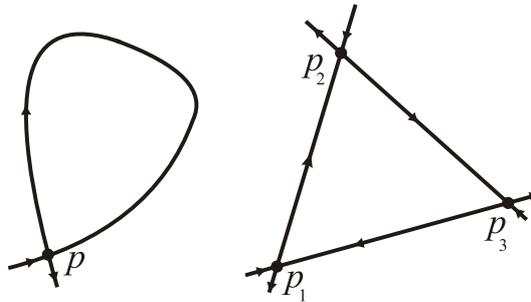


Рис. 1. Примеры циклов  
 FIG. 1. Examples of cycles

## 2. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СОПРЯЖЕННОСТЬ ГРАДИЕНТНО-ПОДОВНЫХ ПОТОКОВ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

**2.1. Динамика градиентно-подобных потоков.** Пусть  $f^t$  — градиентно-подобный поток, заданный на поверхности  $S$ . Следующее предложение является локальной классификацией гиперболических неподвижных точек потока на поверхности с точностью до топологической сопряженности.

**Предложение 2.1** (см. [6, теорема 5.1, гл. 2], [17, теорема 7.1, гл. 4] и [10, лемма 1]).

Пусть  $p$  — неподвижная гиперболическая точка потока  $f^t: S \rightarrow S$ . Тогда существует окрестность  $u_p \subset S$  точки  $p$  и гомеоморфизм на образ  $\psi_p: u_p \rightarrow \mathbb{R}^2$  такой, что поток  $f^t|_{u_p}$  топологически сопряжен с одним из следующих потоков:

$$\begin{aligned} a_0^t(x, y) &= (2^{-t}x, 2^{-t}y), \\ a_1^t(x, y) &= (2^{-t}x, 2^t y), \\ a_2^t(x, y) &= (2^t x, 2^t y), \end{aligned}$$

т. е.  $\psi_p \circ f^t|_{u_p} = a_i^t \circ \psi_p|_{u_p}$  для любого  $t$ , не выводящего точки за пределы  $u_p$ .

В случае сопряжения с потоком  $a_0^t, a_1^t, a_2^t$  неподвижная точка  $p$  называется *стоком, седлом, источником*, соответственно (см. рис. 2). Будем обозначать через  $\Omega_{f^t}^0, \Omega_{f^t}^1, \Omega_{f^t}^2$  множества всех стоков, седел, источников потока  $f^t$ , соответственно.

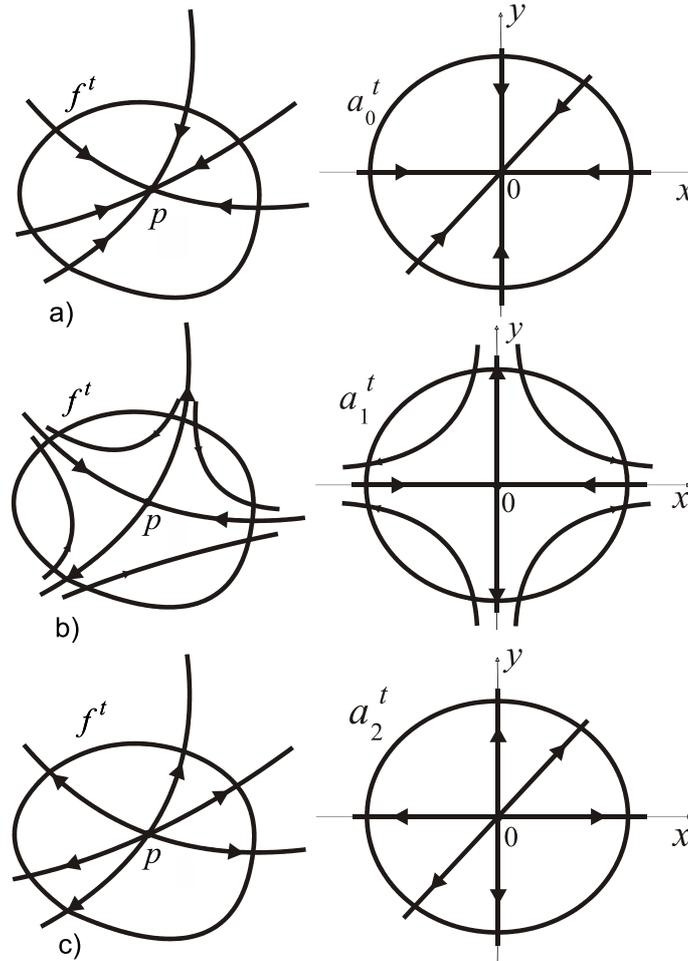


РИС. 2. Классификация в окрестности гиперболических неподвижных точек: а) сток, б) седло, в) источник

FIG. 2. Classification in the neighborhood of hyperbolic fixed points: a) sink, b) saddle, c) source

**Предложение 2.2** (см. [18, следствие 5.3]). Пусть  $f^t: S \rightarrow S$  — градиентно-подобный поток. Тогда:

- 1)  $S = \bigcup_{p \in \Omega_{ft}} W_p^u = \bigcup_{p \in \Omega_{ft}} W_p^s$ ;
- 2)  $W_p^u$  ( $W_p^s$ ) является гладким подмногообразием многообразия  $S$ , диффеоморфным  $\mathbb{R}^i$  ( $\mathbb{R}^{2-i}$ ) для любой неподвижной точки  $p \in \Omega_{ft}^i$ ;
- 3) для любой неустойчивой (устойчивой) сепаратрисы  $l_\sigma^u$  ( $l_\sigma^s$ ) седловой точки  $\sigma$  существует сток  $\omega$  (источник  $\alpha$ ) такой, что  $\text{cl}(l_\sigma^u) \setminus (l_\sigma^u) = \{\sigma, \omega\}$  ( $\text{cl}(l_\sigma^s) \setminus (l_\sigma^s) = \{\sigma, \alpha\}$ );
- 4) для любого стока  $\omega$  (источника  $\alpha$ ) существует хотя бы одна седловая точка  $\sigma$  с неустойчивой (устойчивой) сепаратрисой  $l_\sigma^u$  ( $l_\sigma^s$ ) такой, что  $\text{cl}(l_\sigma^u) \setminus (l_\sigma^u) = \{\sigma, \omega\}$  ( $\text{cl}(l_\sigma^s) \setminus (l_\sigma^s) = \{\sigma, \alpha\}$ ).

**2.2. Отсутствие модулей топологической сопряженности.** В этом разделе мы доказываем факт о совпадении классов эквивалентности и топологической сопряженности для градиентно-подобных потоков на поверхности.

**Теорема 2.1** (см. [11, теорема 7]). Градиентно-подобные потоки на замкнутой поверхности топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они топологически эквивалентны.

*Доказательство.* Необходимость условий теоремы очевидна, докажем их достаточность. Пусть  $S$  — замкнутая поверхность и  $f^t: S \rightarrow S$  — градиентно-подобный поток. Согласно пункту 1 предложения 2.2, замыкание любой блуждающей орбиты  $\ell$  потока  $f^t$  состоит из двух различных неподвижных точек  $p, q$ :

$$\text{cl}(\ell) \setminus \ell = \{p, q\}.$$

Поэтому обозначим эту траекторию через  $\ell_{p,q}$ , предполагая, что она направлена от  $p$  к  $q$ . Пусть  $f'^t$  — градиентно-подобный поток, топологически эквивалентный потоку  $f^t$ , т. е. существует гомеоморфизм  $h: S \rightarrow S$ , переводящий траектории потока  $f^t$  в траектории потока  $f'^t$  и сохраняющий ориентации траекторий. В том числе  $h$  переводит неподвижные точки потока  $f^t$  в неподвижные точки потока  $f'^t$ , поэтому будем обозначать  $p' = h(p)$  для  $p \in \Omega_{f^t}$ ,  $p' \in \Omega_{f'^t}$ . Тогда

$$h(\ell_{pq}) = \ell'_{p'q'}$$

для каждой блуждающей траектории  $\ell_{pq}$  потока  $f^t$ .

В силу предложения 2.1 потоки  $f^t, f'^t$  в некоторых окрестностях  $u_p, u_{p'}$  точек  $p, p'$ , соответственно, топологически сопряжены посредством некоторого гомеоморфизма  $h_p: u_p \rightarrow u_{p'}$ . Пусть

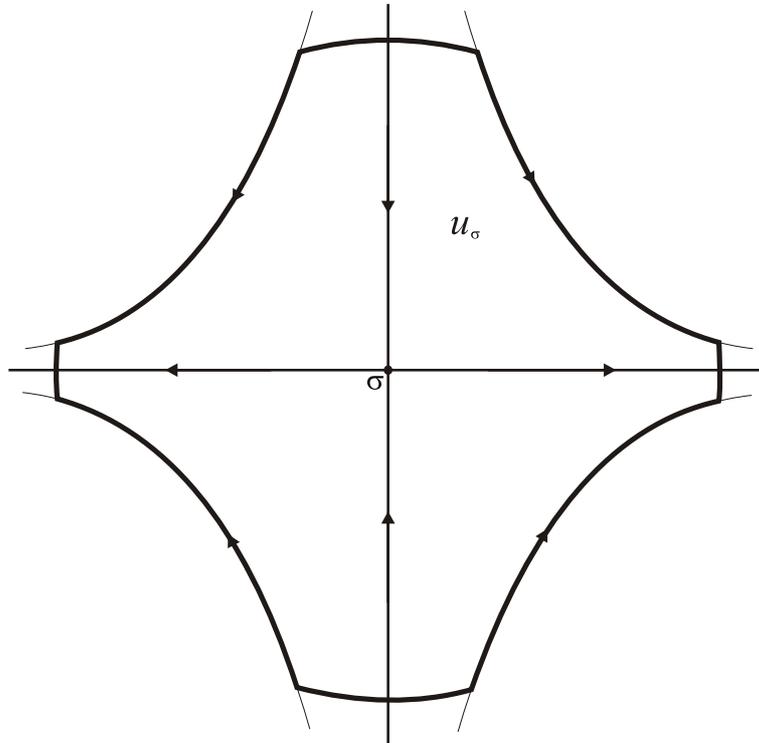


Рис. 3. Окрестность  $u_\sigma$  седла  $\sigma$   
 FIG. 3. Neighborhood  $u_\sigma$  of the saddle  $\sigma$

$\sigma$  — седловая точка потока  $f^t$ . Не уменьшая общности, будем полагать, что окрестность  $u_\sigma$  выбрана так, что ее граница состоит из четырех отрезков траекторий и четырех отрезков секущих (см. рис. 3), и отображение  $h^{-1}h_\sigma$  сохраняет сепаратрисы седла  $\sigma$ .

Для точки  $x \in S$  обозначим через  $\mathcal{O}_x$  ( $\mathcal{O}'_x$ ) траекторию потока  $f^t$  ( $f'^t$ ), проходящую через точку  $x$ . Положим

$$V_\sigma = \bigcup_{x \in \text{cl}(u_\sigma)} \mathcal{O}_x, \quad V_{\sigma'} = \bigcup_{x \in \text{cl}(u_{\sigma'})} \mathcal{O}'_x.$$

Продолжим  $h_\sigma$  до гомеоморфизма  $h_{V_\sigma}: V_\sigma \rightarrow V_{\sigma'}$  по следующему правилу (см. рис. 4). Во-первых,

$$h_{V_\sigma}|_{u_\sigma} = h_\sigma.$$

Во-вторых, для точки  $z \in (\text{int}V_\sigma \setminus \text{cl}(u_\sigma))$  положим  $\{z_0\} = \mathcal{O}_z \cap \partial u_\sigma$  и  $f^{t_z}(z_0) = z$ , для  $t_z \in \mathbb{R}$ ; для точки  $z \in \partial V_\sigma \setminus \partial u_\sigma$  положим  $t_z$  таким, что  $|t_z| = \min\{t \in \mathbb{R} \mid f^{-t}(z) \in \partial u_\sigma\}$  и  $z_0 = f^{-t_z}(z)$ ; тогда

$$h_{V_\sigma}(z) = f^{t_z}(h_\sigma(z_0)).$$

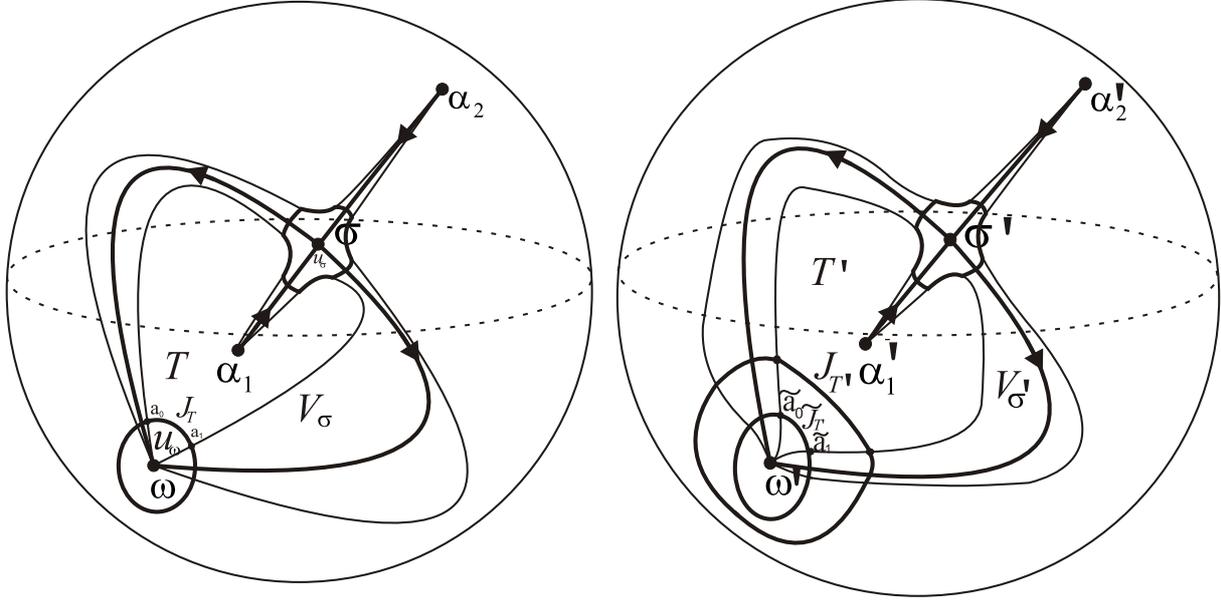


Рис. 4. Построение сопрягающего гомеоморфизма  
 FIG. 4. Construction of a conjugating homeomorphism

Пусть  $V$  ( $V'$ ) — объединение всех  $V_\sigma$  ( $V_{\sigma'}$ ) и  $h_V: V \rightarrow V'$  — гомеоморфизм, составленный из гомеоморфизмов  $h_{V_\sigma}$ . Продолжим гомеоморфизм  $h_V$  до объемлющего сопрягающего гомеоморфизма. Для этого заметим, что замыкание  $T$  любой компоненты связности множества  $S \setminus (V \cup \Omega_{f^t})$  принадлежит бассейну некоторого стока  $\omega$ . Поскольку гомеоморфизм  $h^{-1}h_\sigma$  сохраняет сепаратрисы седел, то существует замыкание  $T' \subset W_{\omega'}^s$ , единственной компоненты связности множества  $S \setminus (V' \cup \Omega_{f^{t'}}$ ) такой, что  $h(T) \cap T' \neq \emptyset$ . Продолжим  $h_V$  на  $T$  посредством сопрягающего гомеоморфизма  $h_T$ .

В силу предложения 2.1 потоки  $f^t$ ,  $f^{t'}$  в некоторых окрестностях  $u_\omega$ ,  $u_{\omega'}$  точек  $\omega$ ,  $\omega'$ , соответственно, топологически сопряжены посредством некоторого гомеоморфизма  $h_\omega: u_\omega \rightarrow u_{\omega'}$ . Пусть  $\gamma \subset u_\omega$  — кривая, ограничивающая на  $u_\omega$  диск, содержащий  $\omega$  и  $\gamma' = h_\omega(\gamma)$ . Пусть  $J_T = \gamma \cap T$  и  $a_0, a_1$  — концы дуги  $J_T$ . Тогда существуют седловые точки  $\sigma_0, \sigma_1$  (возможно,  $\sigma_0 = \sigma_1$ ) такие, что  $a_i \in (J_T \cap V_{\sigma_i})$ ,  $i = 0, 1$ . Аналогично, дуга  $\tilde{J}_{T'} = \gamma' \cap T'$  ограничена точками  $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1$ , принадлежащими  $V_{\sigma'_0}, V_{\sigma'_1}$ , соответственно. Пусть  $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$  так, что  $f^{t_i}(\tilde{a}_i) = h_V(a_i)$ ,  $i = 0, 1$ , и  $\rho: \tilde{J}_{T'} \rightarrow [0, 1]$  — гомеоморфизм такой, что  $\rho(\tilde{a}_i) = i$ ,  $i = 0, 1$ . Пусть

$$J_{T'} = \{f^{t_z}(\tilde{z}) \mid \tilde{z} \in \tilde{J}_{T'}, t_z = t_0 + (t_1 - t_0)\rho(\tilde{z})\}.$$

Определим произвольный гомеоморфизм  $h_J: J_T \rightarrow J_{T'}$  так, что  $h_J(a_i) = h_V(a_i)$ ,  $i = 0, 1$ . Тогда каждая точка  $z$  множества  $T$  единственным образом определена точкой  $z_0 = \mathcal{O}_z \cap J_T$  и значением  $t_z \in \mathbb{R}$  таким, что  $f^{t_z}(z_0) = z$ . Определим гомеоморфизм  $h_T: T \rightarrow T'$  по формуле

$$h_T(f^{t_z}(z_0)) = f^{t_z}(h_J(z_0)).$$

Наконец, определим сопрягающий гомеоморфизм  $H: S \rightarrow S$  так, что  $H|_V = h_V$ ,  $H|_T = h_T$ , и  $H|_{\Omega_{f^t}} = h|_{\Omega_{f^t}}$ .  $\square$

Таким образом, для градиентно-подобных потоков на поверхностях классы топологической эквивалентности совпадают с классами топологической сопряженности, что позволяет использовать

для топологической сопряженности градиентно-подобных потоков любые инварианты их эквивалентности.

### 3. ЭФФЕКТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ РАЗЛИЧЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ (СОПРЯЖЕННОСТИ) ГРАДИЕНТНО-ПОДОБНЫХ ПОТОКОВ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

**3.1. Необходимые сведения из теории графов и алгоритмов.** В данном разделе мы приводим общие сведения из теории графов и алгоритмов. Напомним, что *конечным графом*  $\Gamma$  называется упорядоченная пара  $(V, E)$ , где

- $V$  — непустое множество *вершин*;
- $E$  — множество пар вершин, называемых *ребрами*.

Каждую из вершин  $a, b$  ребра  $ab$  называют *инцидентной* ребру  $ab$  и говорят, что вершины  $a, b$  соединены ребром  $ab$ . *Валентностью* вершины называется число инцидентных ей ребер. Если ребра представляют из себя упорядоченные пары вершин, то граф называется *ориентированным*. Граф называется *связным*, если любые две его вершины  $b_0, b_k$  можно соединить *путем*, т. е. последовательностью  $b_0, b_0b_1, b_1, \dots, b_{k-1}, b_{k-1}b_k, b_k$ , при этом  $k$  — *длина пути*. Если начало и конец пути совпадают, то путь называют *циклом*. Если обе вершины ребра совпадают, то ребро называется *петлей*. *Подграфом* графа  $\Gamma$  называется пара  $(\tilde{V}, \tilde{E})$ , где  $\tilde{V} \subset V, \tilde{E} \subset E$ .

Назовем *k-подразбиением* ребра  $e = ab$  операцию, в ходе которой ребро  $e$  удаляется из графа, и на его место добавляются новые вершины  $c_1, c_2, \dots, c_k$  с ребрами  $ac_1, c_1c_2, \dots, c_{k-1}c_k, c_kb$ . Назовем *k\*-подразбиением* ребра  $e = ab$  операцию, в ходе которой ребро  $e$  удаляется из графа, и на его место добавляются новые вершины  $c_1, c_2, \dots, c_k, d$  с ребрами  $ac_1, c_1c_2, \dots, c_{k-1}c_k, c_kb, c_1d$ .

*Конечным мультиграфом*  $\Gamma$  называется граф, для которого множество ребер  $E$  допускает включение одного и того же элемента по несколько раз. Для краткости будем называть мультиграф также просто *графом*. Граф  $\Gamma$  называется *n-цветным*, если множество его ребер является объединением  $n$  подмножеств, каждое из которых состоит из ребер одного и того же определенного цвета.

Граф называется *простым*, если он не содержит петель и кратных ребер. Граф называется *планарным*, если существует его вложение в плоскость. Если существует вложение графа в поверхность, то граф называется *вложимым в поверхность*. Граф называется *двудольным* или *биграфом*, если множество его вершин можно разбить на две части таким образом, что не существует ребра, соединяющего две вершины из одной и той же части.

Два графа  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  называются *изоморфными*, если существует отображение, переводящее вершины и ребра графа  $\Gamma$  в вершины и ребра графа  $\Gamma'$ , соответственно, с сохранением, при наличии, цветов и направлений.

Алгоритмы, различающие изоморфность графов с помощью количества операций, полиномиально зависящего от числа входных данных, называются *эффективными*, или *полиномиальными*. Приведем несколько известных результатов о существовании эффективных алгоритмов проверки изоморфности графов.

**Предложение 3.1** (см. [9]). *Изоморфность двух n-вершинных планарных простых графов можно проверить за время  $O(n)$ .*

**Предложение 3.2** (см. [12]). *Изоморфность двух n-вершинных простых графов, вложимых в поверхность рода g, можно проверить за время  $O(n^{O(g)})$ .*

**3.2. Граф Пейшото.** Пусть  $f^t: S \rightarrow S$  — градиентно-подобный поток. В работе [15] для потока  $f^t$  построен ориентированный граф  $\Gamma_{f^t}$  (*граф Пейшото*). Вершины графа  $\Gamma_{f^t}$  соответствуют неподвижным точкам потока  $f^t$ , ребра соответствуют ориентированным седловым сепаратрисам (см. рис. 5).

На рис. 6 изображен пример неэквивалентных градиентно-подобных потоков с изоморфными ориентированными графами. Отсюда следует, что класс изоморфности графа не является полным инвариантом потока. По этой причине граф  $\Gamma_{f^t}$  оснащается так называемыми *различающими множествами*, в результате чего получается *граф Пейшото*  $\Gamma_{f^t}^P$ , который является полным топологическим инвариантом.

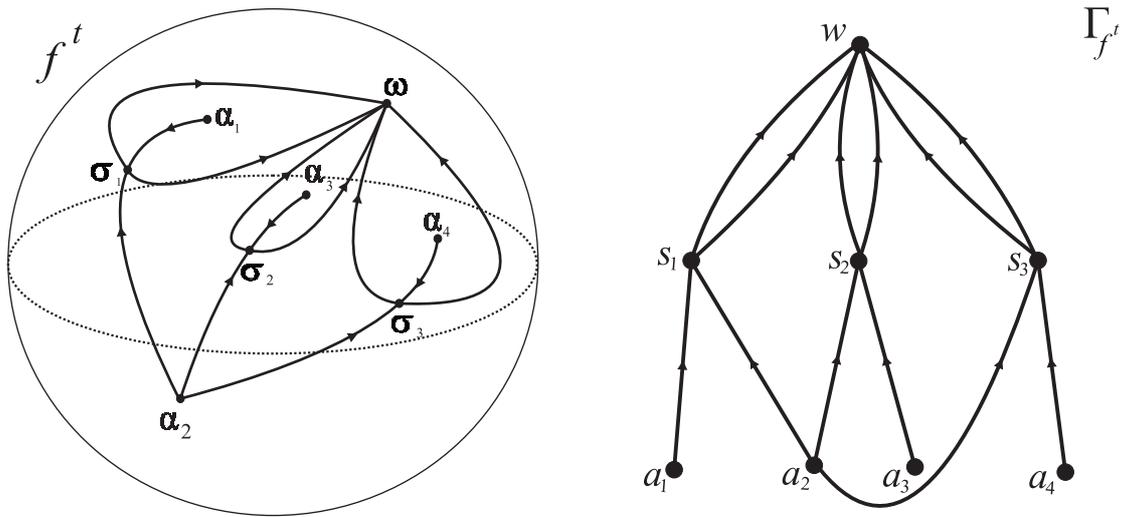


Рис. 5. Пример градиентно-подобного потока  $f^t$  и его графа Пейшото  $\Gamma_{f^t}$   
 FIG. 5. An example of a gradient-like  $f^t$  flow and its Peixoto graph  $\Gamma_{f^t}$

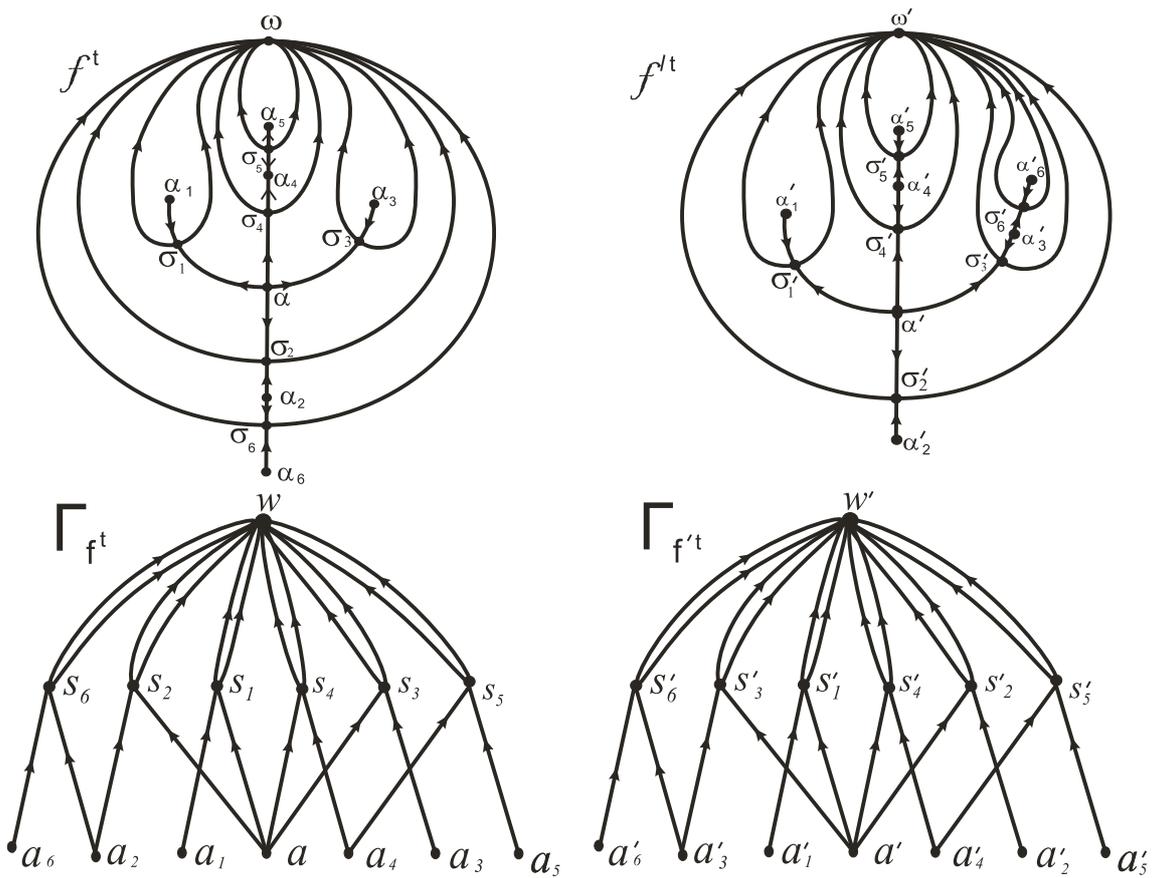


Рис. 6. Два потока  $f^t$  и  $f'^t$  с изоморфными ориентированными графами  $\Gamma_{f^t}$  и  $\Gamma_{f'^t}$   
 FIG. 6. Two flows  $f^t$  and  $f'^t$  with isomorphic directed graphs  $\Gamma_{f^t}$  and  $\Gamma_{f'^t}$

Именно, рассмотрим множество

$$\tilde{S} = S \setminus \bigcup_{\sigma \in \Omega_{f^t}^1} (cl(W_\sigma^u) \cup cl(W_\sigma^s)).$$

Замыкание любой его компоненты связности называется *ячейкой*. Согласно [15], все ячейки градиентно-подобных потоков могут быть только трех типов, изображенных на рис. 7.

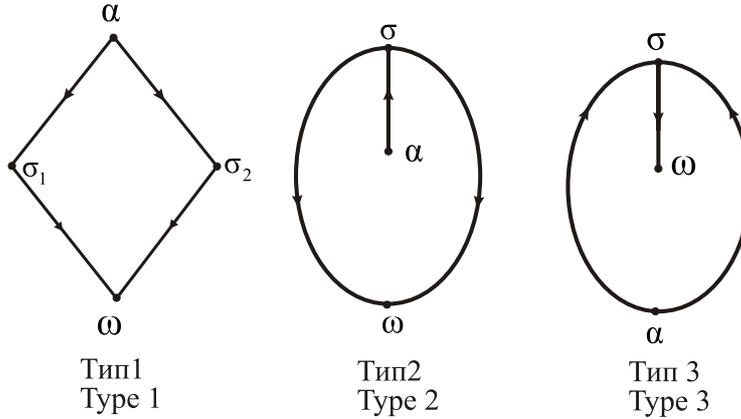


Рис. 7. Типы ячеек градиентно-подобного потока;  $\alpha$  — источник,  $\sigma$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  — седла,  $\omega$  — сток

FIG. 7. Cell types of gradient-like flow;  $\alpha$  is a source,  $\sigma$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  are saddles,  $\omega$  is a sink

*Различающим множеством* называется подграф, соответствующий границе ячейки. Следовательно, различающие множества могут быть трех типов, соответствующих типам ячеек (см. рис. 8).

Два графа Пейшото  $\Gamma_{ft}^P$ ,  $\Gamma_{f't}^P$  градиентно-подобных потоков  $f^t$  и  $f'^t$ , соответственно, называются *изоморфными*, если существует изоморфизм графов  $\Gamma_{ft}$  и  $\Gamma_{f't}$ , сохраняющий различающие множества.

**Предложение 3.3** (см. [15, предложение 4.4]). *Два градиентно-подобных потока  $f^t$ ,  $f'^t$  топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их графы Пейшото  $\Gamma_{ft}^P$ ,  $\Gamma_{f't}^P$  изоморфны.*

Основным результатом настоящего раздела является следующая теорема.

**Теорема 3.1** (см. [11, теорема 1]). *Пусть  $f^t$  и  $f'^t$  — градиентно-подобные потоки, заданные на поверхности  $S$  рода  $g$  и  $\Gamma_{ft}^P$ ,  $\Gamma_{f't}^P$  — их оснащенные  $n$ -вершинные графы Пейшото. Тогда изоморфность графов  $\Gamma_{ft}^P$  и  $\Gamma_{f't}^P$  можно проверить за время  $O(n^{O(g)})$  для  $g > 0$  и за время  $O(n)$  для  $g = 0$ .*

*Доказательство.* Идея построения алгоритма, устанавливающего изоморфность графов  $\Gamma_{ft}^P$ ,  $\Gamma_{f't}^P$ , состоит в сведении этих графов к простым, вложимым в поверхность  $S$ , графам  $\tilde{\Gamma}_{ft}$ ,  $\tilde{\Gamma}_{f't}$  таким, что  $\Gamma_{ft}^P$  и  $\Gamma_{f't}^P$  изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны  $\tilde{\Gamma}_{ft}$  и  $\tilde{\Gamma}_{f't}$ .

Более детально. Во-первых, добавим по две соседних вершины валентности один к каждой седловой вершине графа  $\Gamma_{ft}^P$ . Во-вторых, для каждого его подграфа типа 1 добавим по новой вершине и по четыре ребра, соединяющих новую вершину с остальными вершинами подграфа. В-третьих, применим  $2^*$ -подразбиение к каждому ребру графа  $\Gamma_{ft}^P$ , соединяющему седловую и стоковую вершины, и 1-подразбиение к ребру, соединяющему источниковую и седловую вершины. Получим граф  $\tilde{\Gamma}_{ft}$  (см. рис. 9).

Очевидно,  $\tilde{\Gamma}_{ft}$  единственным образом строится по  $\Gamma_{ft}^P$ . Покажем, что  $\Gamma_{ft}^P$  также может быть единственным образом восстановлен по  $\tilde{\Gamma}_{ft}$ .

Вершина графа  $\tilde{\Gamma}_{ft}$  является седловой в  $\Gamma_{ft}^P$  тогда и только тогда, когда она инцидентна двум вершинам валентности один. Следовательно, все седловые вершины могут быть определены единственным образом. Пусть  $s$  — седловая вершина графа  $\Gamma_{ft}^P$ . В графе  $\tilde{\Gamma}_{ft}$  она инцидентна единственной вершине  $x$  валентности 3 и единственной вершине  $y$  валентности 2. Вершина  $x$  инцидентна единственной вершине  $x'$  валентности 2, которая, в свою очередь, инцидентна отличной от  $x$  вершине  $w$ . Вершина  $w$  соответствует стоку, а  $sw$  — ребро графа  $\Gamma_{ft}^P$ , соответствующее

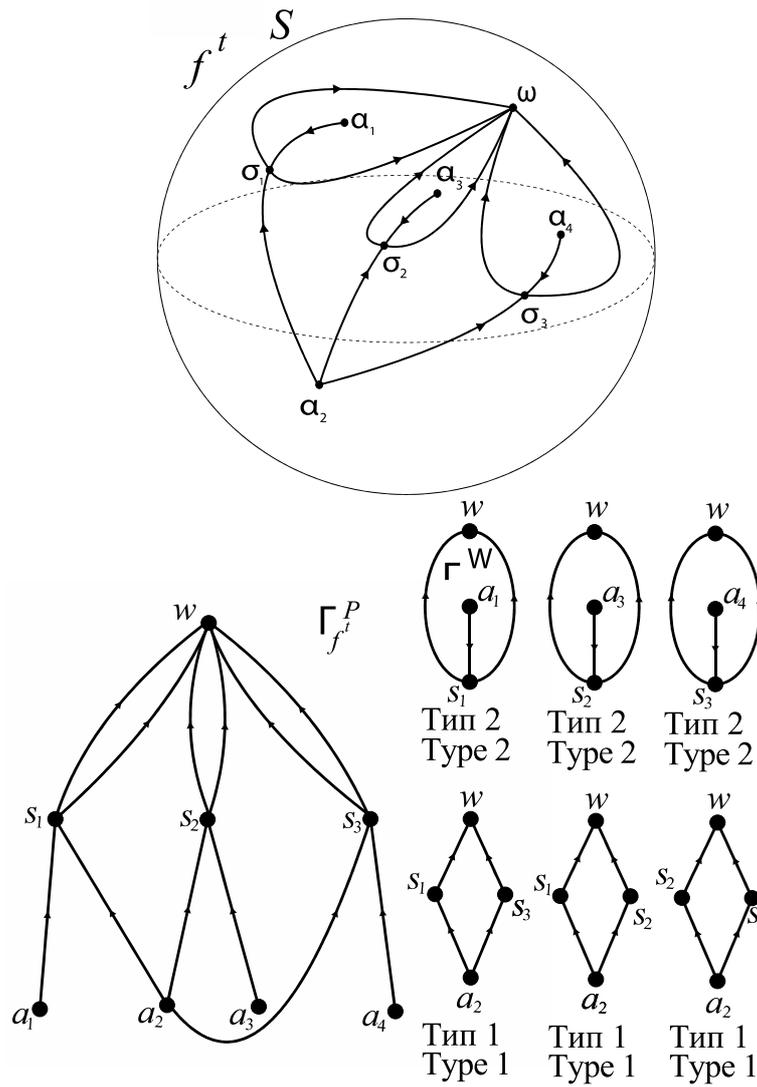


РИС. 8. Градиентно-подобный поток  $f^t$  на сфере  $S$  и его граф Пейшото  $\Gamma_{f^t}^P$  с подграфами  
 FIG. 8. Gradient-like flow  $f^t$  on the sphere  $S$  and its Peixoto graph  $\Gamma_{f^t}^P$  with subgraphs

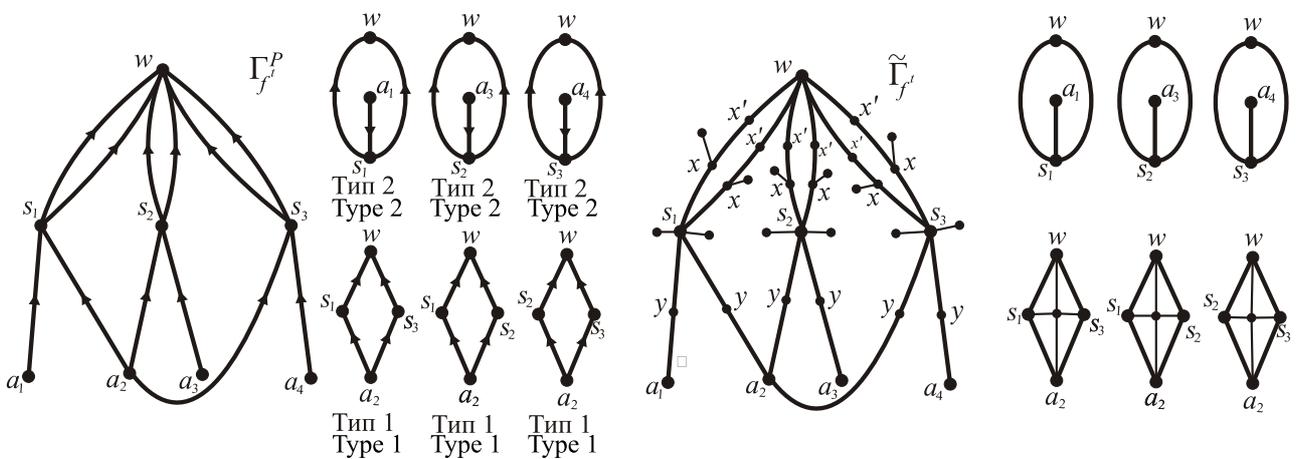


РИС. 9. Граф Пейшото  $\Gamma_{f^t}^P$  с подграфами и его простой граф  $\tilde{\Gamma}_{f^t}$   
 FIG. 9. The Peixoto graph  $\Gamma_{f^t}^P$  with subgraphs and its simple graph  $\tilde{\Gamma}_{f^t}$

неустойчивой сепаратрисе. Вершина  $y$  инцидентна вершине  $a$ , отличной от  $s$ . Вершина  $a$  соответствует источнику, а  $as$  — ребро графа  $\Gamma_{ft}^P$ , соответствующее устойчивой седловой сепаратрисе.

Отличив стоковую, седловую и источниковую вершины графа  $\Gamma_{ft}^P$ , а также седловые сепаратрисы, можно восстановить все вершины валентности 1, соответствующие источникам и стокам. Каждый подграф типа 2 или 3 полностью определяется такой вершиной. Следовательно, все подграфы этих типов могут быть найдены единственным образом. Подграфы типа 1 единственным образом восстанавливаются по вершинам валентности 4, инцидентным двум различным седловым вершинам.

Таким образом, графы  $\Gamma_{ft}^P$  и  $\Gamma_{f't}^P$  изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны графы  $\tilde{\Gamma}_{ft}$  и  $\tilde{\Gamma}_{f't}$ .

Построение графов  $\tilde{\Gamma}_{ft}$  и  $\tilde{\Gamma}_{f't}$  по графам  $\Gamma_{ft}^P$  и  $\Gamma_{f't}^P$  может быть осуществлено за время  $O(n)$ . Кроме того, графы  $\tilde{\Gamma}_{ft}$  и  $\tilde{\Gamma}_{f't}$  оба имеют  $O(n)$  вершин. Поскольку графы  $\Gamma_{ft}$  и  $\Gamma_{f't}$  вложимы в поверхность  $S$ , а добавление новых вершин и ребер не дает пересечений ребер во внутренних точках, то графы  $\tilde{\Gamma}_{ft}$  и  $\tilde{\Gamma}_{f't}$  также вложимы в поверхность  $S$ . Согласно предложениям 3.1 и 3.2, изоморфность графов  $\tilde{\Gamma}_{ft}$ ,  $\tilde{\Gamma}_{f't}$ , а следовательно, и  $\Gamma_{ft}^P$ ,  $\Gamma_{f't}^P$  можно проверить за время  $O(n^{O(g)})$  для  $g > 0$  и за время  $O(n)$  для  $g = 0$ .  $\square$

**3.3. Модифицированный граф Пейшото.** В 2011 году В. З. Гринес и О. В. Починка [8] модифицировали граф Пейшото<sup>1</sup>. Именно, вместо различающих множеств они оснастили ориентированный граф Пейшото  $\Gamma_{ft}$  порядками ребер, инцидентных вершинам, соответствующим стокам, и получили таким образом *модифицированный граф Пейшото*  $\Gamma_{ft}^{GP}$ , являющийся полным инвариантом.

Более детально. Пусть  $\omega$  — сток потока  $f^t$ , а  $L_\omega$  — множество сепаратрис, содержащих  $\omega$  в своем замыкании. Из предложения 2.1 следует, что существует 2-диск  $B_\omega \ni \omega$  такой, что каждая сепаратриса  $l \subset L_\omega$  пересекает  $\partial B_\omega$  в единственной точке. Для вершины  $w$ , соответствующей  $\omega$ , пусть  $E_w$  — множество ребер графа  $\Gamma_{ft}$ , инцидентных  $w$ . Пусть  $N_w$  — мощность множества  $E_w$ . Пронумеруем элементы  $E_w$  следующим образом. Возьмем 2-диск  $B_\omega$  в бассейне  $\omega$  и множество  $c_\omega = \partial B_\omega$ . Зададим ориентацию против часовой стрелки на  $c_\omega$  по отношению к  $B_\omega$ . Пронумеруем все ребра  $e_1, \dots, e_{N_w}$  из  $E_w$  в соответствии с порядком соответствующих сепаратрис на  $c_\omega$ , начиная с некоторой точки на  $c_\omega$ . Эта нумерация всех элементов  $E_w$  называется *согласованной* с вложением сепаратрис.

Два модифицированных графа Пейшото  $\Gamma_{ft}^{GP}$  и  $\Gamma_{f't}^{GP}$  потоков  $f^t$  и  $f'^t$  называются *изоморфными*, если существует изоморфизм  $\xi$  между  $\Gamma_{ft}$  и  $\Gamma_{f't}$  такой, что перестановка  $\Theta_{w,w'}$ , где  $w' = \xi(w)$ , индуцированная изоморфизмом  $\xi$ , является степенью циклической перестановки для каждой вершины  $w$ , соответствующей стоку.

Так, на рис. 6 вершина  $w$  ( $w'$ ) графа  $\Gamma_{ft}$  ( $\Gamma_{f't}$ ) соответствует стоку  $\omega$  ( $\omega'$ ) и вершина  $a$  ( $a'$ ) соответствует источнику  $\alpha$  ( $\alpha'$ ). Перенумеруем сепаратрисы  $l_1^u, l_2^u, l_3^u, l_4^u$  ( $l_1^u, l_2^u, l_3^u, l_4^u$ ) седловых точек, принадлежащих устойчивому многообразию точки  $\omega$  ( $\omega'$ ) в соответствии с положительной ориентацией замкнутой кривой вокруг  $\omega$  ( $\omega'$ ). Введем нумерацию на множестве  $E_w$  ( $E'_w$ ), согласованную с вложением сепаратрис. Как мы уже заметили, графы  $\Gamma_{ft}$  и  $\Gamma_{f't}$  изоморфны. Существует в точности два изоморфизма этих графов: изоморфизм  $\xi_1$  наложения  $\Gamma_{ft}$  на граф  $\Gamma_{f't}$  и изоморфизм  $\xi_2$ , являющийся композицией наложения и отражения относительно оси  $a'w'$ . Непосредственно проверяется, что изоморфизм  $\xi_1$  индуцирует перестановку  $\Theta_{w,w'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ , а изоморфизм  $\xi_2$  индуцирует перестановку  $\Theta_{w,w'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Ни одна из этих перестановок не является степенью циклической перестановки, в силу чего модифицированные графы  $\Gamma_{ft}^{GP}$  и  $\Gamma_{f't}^{GP}$  неизоморфны.

<sup>1</sup>Классификационные результаты в [8] получены для градиентно-подобных диффеоморфизмов, но они также применимы для потоков.

**Предложение 3.4** (см. [8, теорема 3.2.1]). *Градиентно-подобные потоки  $f^t, f^{t'}: S \rightarrow S$  топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их модифицированные графы  $\Gamma_{f^t}^{GP}$  и  $\Gamma_{f^{t'}}^{GP}$  изоморфны.*

**Теорема 3.2** (см. [11, теорема 2]). *Пусть  $f^t, f^{t'}$  — градиентно-подобные потоки на поверхности  $S$  рода  $g$  и  $\Gamma_{f^t}^{GP}, \Gamma_{f^{t'}}^{GP}$  — их модифицированные  $n$ -вершинные графы с  $t$  ребрами. Тогда изоморфизм графов  $\Gamma_{f^t}^{GP}$  и  $\Gamma_{f^{t'}}^{GP}$  может быть проверен за время  $O(n^{O(g)})$ , если  $g > 0$ , и за время  $O(n)$ , если  $g = 0$ .*

*Доказательство.* Для доказательства также будем использовать идею сведения модифицированного графа  $\Gamma_{f^t}^{GP}$  к простому  $\bar{\Gamma}_{f^t}$ . Для каждой стоковой вершины  $w$  графа  $\Gamma_{f^t}^{GP}$  рассмотрим циклически упорядоченное множество  $E_w$  всех ребер, инцидентных  $w$ . Удалим из графа  $\Gamma_{f^t}^{GP}$  вершину  $w$  и все ребра, инцидентные  $w$ , добавим циклы с  $N_w$  вершинами к получившемуся графу; их вершины пронумерованы  $1, \dots, N_w$ . Для каждого  $1 \leq i \leq N_w$  добавим неориентированное ребро между  $i$ -ой вершиной цикла и вершиной, отличной от  $w$  и инцидентной  $i$ -му ребру в  $E_w$ . Далее, добавим по две вершины валентности 1 к каждой седловой вершине графа  $\Gamma_{f^t}^{GP}$  и применим 1-подразбиение к каждому ориентированному ребру (см. рис. 10).

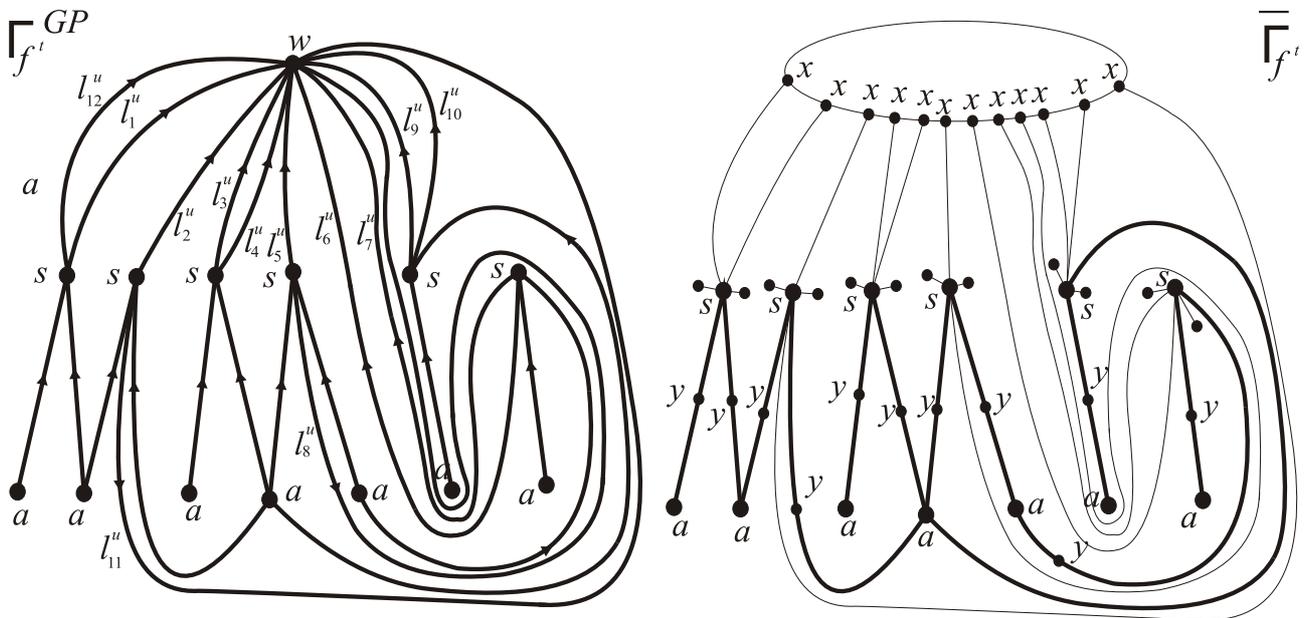


Рис. 10. Модифицированный граф Пейшото  $\Gamma_{f^t}^{GP}$  и его простой граф  $\bar{\Gamma}_{f^t}$

FIG. 10. Modified Peixoto graph  $\Gamma_{f^t}^{GP}$  and its simple graph  $\bar{\Gamma}_{f^t}$

Очевидно,  $\bar{\Gamma}_{f^t}$  единственным образом строится по  $\Gamma_{f^t}^{GP}$ . Покажем, что  $\Gamma_{f^t}^{GP}$  также может быть единственным образом восстановлен по  $\bar{\Gamma}_{f^t}$ .

Действительно, седловые вершины графа  $\Gamma_{f^t}^{GP}$  — это вершины, инцидентные двум вершинам валентности 1. Каждая седловая вершина  $s$  соединяется с единственной вершиной  $x$  валентности 3 и единственной вершиной  $y$  валентности 2. Вершина  $y$  инцидентна отличной от седловой вершине  $a$  — это источниковая вершина. Вершины типа  $x$  образуют циклы, соответствующие стоковым точкам. Циклический порядок множества  $E_w$  определяется при обходе циклов. Ребро  $sx$  графа  $\bar{\Gamma}_{f^t}^{GP}$  соответствует неустойчивой седловой сепаратрисе, а ребро  $sa$  — устойчивой. Следовательно, имея граф  $\bar{\Gamma}_{f^t}$ , можно единственным образом восстановить граф  $\Gamma_{f^t}^{GP}$ .

Таким образом, графы  $\Gamma_{f^t}^{GP}$  и  $\Gamma_{f^{t'}}^{GP}$  изоморфны тогда и только тогда, когда простые графы  $\bar{\Gamma}_{f^t}$  и  $\bar{\Gamma}_{f^{t'}}$  изоморфны.

Построение графов  $\bar{\Gamma}_{f^t}$  и  $\bar{\Gamma}_{f^{t'}}$  по графам  $\Gamma_{f^t}^{GP}$  и  $\Gamma_{f^{t'}}^{GP}$  осуществляется за время  $O(n)$ . Кроме того, каждый из графов  $\bar{\Gamma}_{f^t}$  и  $\bar{\Gamma}_{f^{t'}}$  имеет  $O(n)$  вершин. Поскольку добавление циклов к графам

$\Gamma_{f^t}^{GP}$  и  $\Gamma_{f^{t'}}^{GP}$  сохраняет их вложимость в поверхность  $S$ , то графы  $\bar{\Gamma}_{f^t}$  и  $\bar{\Gamma}_{f^{t'}}$  также вложимы в  $S$ . По предложениям 3.1 и 3.2, изоморфизм графов  $\bar{\Gamma}_{f^t}$  и  $\bar{\Gamma}_{f^{t'}}$ , а следовательно, и  $\Gamma_{f^t}^{GP}$  и  $\Gamma_{f^{t'}}^{GP}$ , может быть проверен за время  $O(n^{O(g)})$ , если  $g > 0$ , и за время  $O(n)$ , если  $g = 0$ .  $\square$

**3.4. Граф Вонга.** Пусть  $f^t$  — градиентно-подобный поток, заданный на ориентируемой поверхности  $S$ . *Граф Вонга* для такого потока — это граф, дуальный к графу Пейшото: вершины графа Вонга  $\Gamma_{f^t}^W$  соответствуют ячейкам потока  $f^t$ , его ребра соответствуют седловым сепаратрисам и соединяют вершины, соответствующие ячейкам, граничащим по соответствующим ребрам сепаратрисам. При этом, если какая-либо седловая сепаратриса лежит во внутренности замыкания некоторой ячейки, то этой ячейке и этой сепаратрисе соответствует вершина графа с петлей. То есть каждая вершина имеет валентность 4, если считать петлю за два условных ребра. Набор этих четырех ребер, включая условные, разбивается на пары, в каждую из которых входит одно ребро, соответствующее устойчивой сепаратрисе, и одно ребро, соответствующее неустойчивой сепаратрисе, примыкающие друг к другу на границе соответствующей вершине ячейки. Такие пары обозначаются дугой, пересекающей оба ребра пары (рис. 11).

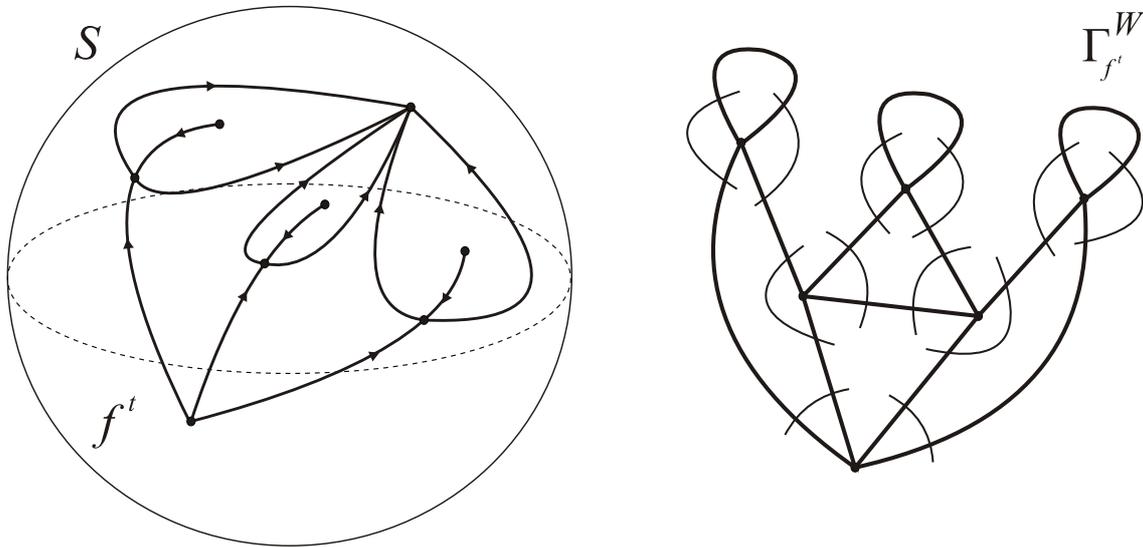


Рис. 11. Поток  $f^t$  из  $G$  на поверхности  $S$  и его граф Вонга  $\Gamma_{f^t}^W$   
 FIG. 11. The flow  $f^t$  from  $G$  onto a surface  $S$  and its Wong graph  $\Gamma_{f^t}^W$

Графы  $\Gamma_{f^t}^W, \Gamma_{f^{t'}}^W$  называются *изоморфными*, если существует изоморфизм между  $\Gamma_{f^t}^W$  и  $\Gamma_{f^{t'}}^W$ , сохраняющий парность ребер.

**Предложение 3.5** (см. [19]). *Градиентно-подобные потоки  $f^t, f^{t'}$  на ориентируемой поверхности  $S$  топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их графы Вонга  $\Gamma_{f^t}^W, \Gamma_{f^{t'}}^W$  изоморфны.*

**Теорема 3.3** (см. [11, теорема 3]). *Пусть  $f^t, f^{t'}$  — градиентно-подобные потоки на ориентируемой поверхности  $S$  рода  $g$  и  $\Gamma_{f^t}^W, \Gamma_{f^{t'}}^W$  — их  $n$ -вершинные графы Вонга. Тогда изоморфизм графов  $\Gamma_{f^t}^W$  и  $\Gamma_{f^{t'}}^W$  проверяется за время<sup>1</sup>  $O(n^{O(g)})$ , если  $g \neq 0$ , и за время  $O(n)$ , если  $g = 0$ .*

*Доказательство.* По графу  $\Gamma_{f^t}^W$  построим простой граф  $\check{\Gamma}_{f^t}$  следующим образом. Для этого применим 1-подразбиение к каждой петле; новая вершина соединена двумя ребрами с изначальной вершиной петли. Разбив таким образом петлю на два ребра, отнесем каждое из них к своей паре. Затем применим 1\*-подразбиение к каждому ребру и соединим ребрами добавленные этой операцией вершины, находящиеся на исходных ребрах, принадлежащих некоторой паре. Таким образом получим граф  $\check{\Gamma}_{f^t}$  (см. рис. 12).

<sup>1</sup>В настоящем обзоре использованы идеи доказательства из работы [11], однако оценки времени работы алгоритма существенно улучшены.

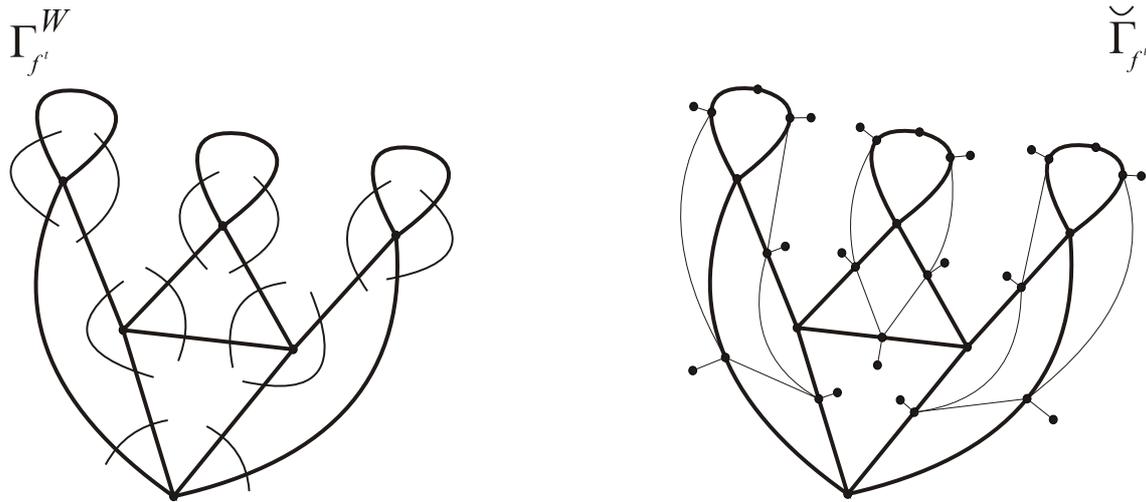


Рис. 12. Граф  $\Gamma_{f^t}^W$  и построенный по нему простой граф  $\check{\Gamma}_{f^t}$   
 FIG. 12. The graph  $\Gamma_{f^t}^W$  and the simple graph  $\check{\Gamma}_{f^t}$  constructed from it

Заметим, что граф  $\Gamma_{f^t}^W$  единственным образом восстанавливается по графу  $\check{\Gamma}_{f^t}$ . Действительно, все вершины графа  $\Gamma_{f^t}^W$  — это все вершины валентности 4 графа  $\check{\Gamma}_{f^t}$ . Петлям графа  $\Gamma_{f^t}^W$  взаимно однозначно соответствуют простые циклы, содержащие вершину валентности 2 графа  $\check{\Gamma}_{f^t}$ . Наконец, ребра, соединяющие вершины, инцидентные вершине валентности 1 на графе  $\check{\Gamma}_{f^t}$ , лежат на парных ребрах графа  $\Gamma_{f^t}^W$ .

Таким образом, графы  $\Gamma_{f^t}^W$  и  $\Gamma_{f^{t'}}^W$  изоморфны тогда и только тогда, когда графы  $\check{\Gamma}_{f^t}$  и  $\check{\Gamma}_{f^{t'}}$  изоморфны.

Поскольку вершины графа  $\Gamma_{f^t}^W$  соответствуют ячейкам, а ребра — седловым сепаратрисам, можно изобразить этот граф, просто расположив вершины внутри ячеек потока  $f^t$ , а ребра — соединив соответствующие вершины дугами, пересекающими соответствующие сепаратрисы. Поэтому граф  $\Gamma_{f^t}^W$  вкладывается в несущую поверхность потока  $f^t$ . В пары мы объединяем ребра, соответствующие соседствующим в границе сепаратрисам, поэтому дуги, символизирующие принадлежность ребер к паре, также вкладывается в поверхность. При построении графа  $\check{\Gamma}_{f^t}$  добавленные ребра либо представляют из себя именно эти дуги, либо ребра, не создающие новых замкнутых контуров, поэтому эти новые ребра не влияют на вложимость графа в поверхность  $S$ .

Построение графов  $\check{\Gamma}_{f^t}$  и  $\check{\Gamma}_{f^{t'}}$  по  $\Gamma_{f^t}^W$  и  $\Gamma_{f^{t'}}^W$  выполняется за линейное время от числа  $n$ . Тогда утверждение теоремы непосредственно следует из предложений 3.1, 3.2.  $\square$

**3.5. Круговая схема Флейтас.** Градиентно-подобный поток  $f^t: S \rightarrow S$  называется *полярным*, если в его неблуждающем множестве содержится ровно один источник и ровно один сток. Граф Флейтас  $\Gamma_{f^t}^F$  для такого потока  $f^t$  строится следующим образом. Выберем вокруг источника (единственного, в силу полярности потоков) окружность  $S$ , трансверсальную траекториям потока  $f^t$  в бассейне источника. Обозначим через  $D$  диск, который эта окружность ограничивает в бассейне источника. Присвоим всем пересечениям окружности  $S$  с седловыми сепаратрисами *метки* так, чтобы пересечения с сепаратрисами одного и того же седла были с одинаковыми метками. Каждой паре точек с одинаковыми метками присвоим *спин*, т. е. знак  $+(-)$ , если объединение диска  $D$  с трубчатой окрестностью устойчивого многообразия седловой точки, пересекающего окружность  $S$  по данной паре точек, является кольцом (пленкой Мебиуса) (см. рис. 13, 14).

Два инварианта Флейтас  $\Gamma_{f^t}^F$  и  $\Gamma_{f^{t'}}^F$  полярных потоков  $f^t, f^{t'}$ , соответственно, называются *изоморфными*, если существует изоморфизм, переводящий окружности инварианта  $\Gamma_{f^t}^F$  в окружности инварианта  $\Gamma_{f^{t'}}^F$  и сохраняющий метки и спины.

**Предложение 3.6** (см. [7]). *Два полярных потока  $f^t$  и  $f^{t'}$  топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их инварианты Флейтас  $\Gamma_{f^t}^F$  и  $\Gamma_{f^{t'}}^F$  изоморфны.*

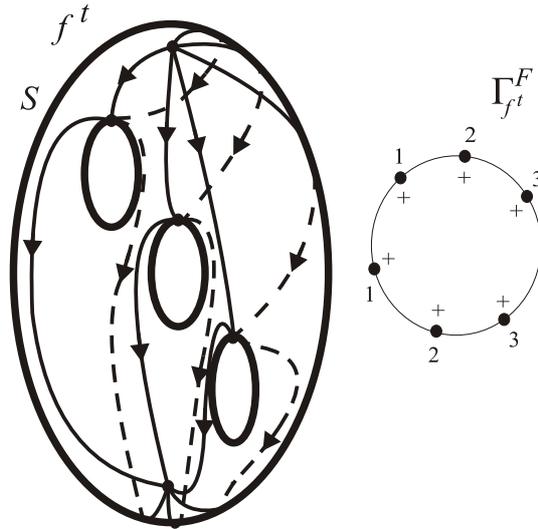


Рис. 13. Полярный поток  $f^t$  и его инвариант Флейтас  $\Gamma_{f^t}^F$   
 FIG. 13. Polar flow  $f^t$  and its Fleitas invariant  $\Gamma_{f^t}^F$

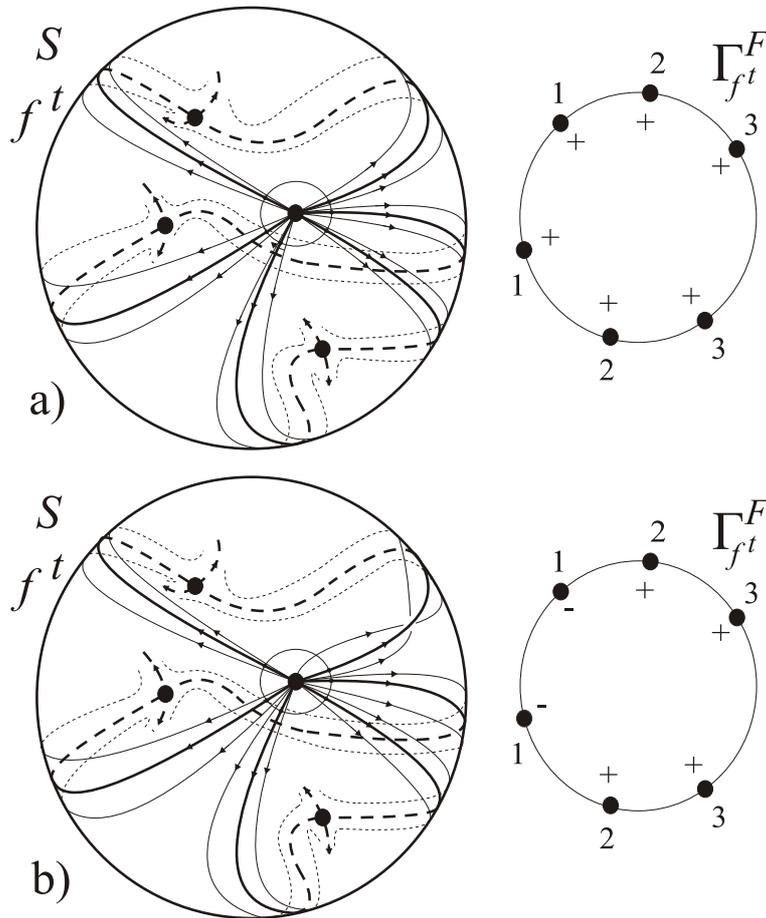


Рис. 14. а) Инвариант Флейтас потока на рис. 13; б) Полярный поток в окрестности источника на неориентируемой поверхности и его инвариант Флейтас  
 FIG. 14. a) Fleitas invariant of the flow in Fig. 13; b) Polar flow in the neighborhood of a source on a nonorientable surface and its Fleitas invariant

**Теорема 3.4** (см. [11, теорема 5]). Пусть  $f^t$  и  $f^{t'}$  — полярные потоки на поверхности  $S$  рода  $g$  и  $\Gamma_{f^t}^F, \Gamma_{f^{t'}}^F$  — их  $n$ -вершинные графы Флейтас. Тогда изоморфизм графов  $\Gamma_{f^t}^F$  и  $\Gamma_{f^{t'}}^F$  проверяется за время  $O(n^{O(g)})$ , если  $g > 0$ , и за время  $O(n)$ , если  $g = 0$ .

*Доказательство.* Для инварианта Флейтас  $\Gamma_{ft}^F$  построим простой граф  $\hat{\Gamma}_{ft}$  следующим образом. Метки инварианта будут вершинами графа, а дуги окружности — ребрами. Соединим одинаковые метки ребрами. Применим 1-подразбиение к каждому ребру, соединяющему одинаковые метки со спином +, и 1\*-подразбиение к каждому ребру, соединяющему метки со спином - (см. рис. 15). Заметим, что графы  $\hat{\Gamma}_{ft}$  и  $\hat{\Gamma}_{f't}$  единственным образом строятся по графам  $\Gamma_{ft}^F$  и  $\Gamma_{f't}^F$ . Покажем,

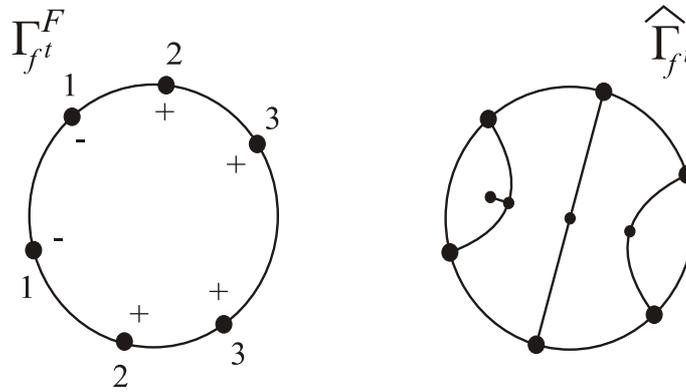


Рис. 15. Граф  $\Gamma_{ft}^F$  и простой граф  $\hat{\Gamma}_{ft}$   
 FIG. 15. Graph  $\Gamma_{ft}^F$  and simple graph  $\hat{\Gamma}_{ft}$

что обратное тоже верно.

Изначальные метки инварианта  $\Gamma_{ft}^F$  — это вершины графа  $\hat{\Gamma}_{ft}$  валентности 3, не имеющие соседних вершин валентности 1. Вершины графа  $\hat{\Gamma}_{ft}$  соответствуют одинаковым меткам, если их соединяет путь длины 2, не содержащий других вершин, соответствующих меткам. Если вершина в середине такого пути имеет валентность 2, то путь соединяет вершины, соответствующие меткам со спином +. Если вершина в середине пути имеет валентность 3 и соседнюю вершину валентности 1, то путь соединяет вершины, соответствующие меткам со спином -.

Таким образом, графы  $\hat{\Gamma}_{ft}$  и  $\hat{\Gamma}_{f't}$  изоморфны тогда и только тогда, когда  $\Gamma_{ft}^F$  и  $\Gamma_{f't}^F$  изоморфны. Более того, графы  $\hat{\Gamma}_{ft}$  и  $\hat{\Gamma}_{f't}$  строятся за линейное время от числа  $n$  и вложимы в поверхность  $S$ , на которой заданы  $f^t$  и  $f'^t$ . Следовательно, из предложений 3.1, 3.2 вытекает утверждение теоремы.  $\square$

**3.6. Трехцветный граф Ошемкова—Шарко.** Пусть  $f^t$  — градиентно-подобный поток, заданный на поверхности  $S$ . Назовем *ячейкой*  $J$  потока  $f^t$  компоненту связности множества  $\tilde{S} = S \setminus (W_{\Omega_{ft}^0 \cup \Omega_{ft}^1}^u \cup W_{\Omega_{ft}^1 \cup \Omega_{ft}^2}^s)$ . Обозначим через  $J_{ft}$  множество всех ячеек потока  $f^t$  и выберем по одной траектории  $\theta_J$  ( $t$ -кривой) в каждой ячейке  $J \in J_{ft}$ . Положим  $\mathcal{T} = \bigcup_{J \in \tilde{S}} \theta_J$ ,  $\bar{S} = \tilde{S} \setminus \mathcal{T}$ .

Назовем *u-кривыми* неустойчивые седловые сепаратрисы и *s-кривыми* — устойчивые седловые сепаратрисы.

Из работы [15] следует, что каждая компонента связности  $\Delta$  множества  $\bar{S}$  является криволинейным треугольником, ограниченным одной  $s$ -, одной  $u$ - и одной  $t$ -кривой, вследствие чего мы будем называть  $\Delta$  *треугольной областью*. Границу каждой треугольной области будем считать ориентированной соответственно движению по  $t$ -кривой от источника к стоку. Обозначим через  $\Delta_{ft}$  множество всех треугольных областей потока  $f^t$ .

*Трехцветный граф*  $\Gamma_{ft}^{OS}$  *Ошемкова—Шарко* из работы [5], соответствующий градиентно-подобному потоку  $f^t$ , строится следующим образом (см. рис. 16):

- 1) вершины графа  $\Gamma_{ft}^{OS}$  взаимно однозначно соответствуют треугольным областям потока;
- 2) две вершины графа инцидентны ребру цвета  $s, t, u$ , если соответствующие этим вершинам многоугольные области имеют общую  $s$ -,  $t$ -,  $u$ -кривую, а между этим ребром и  $s, t, u$ -кривой устанавливается взаимно однозначное соответствие.

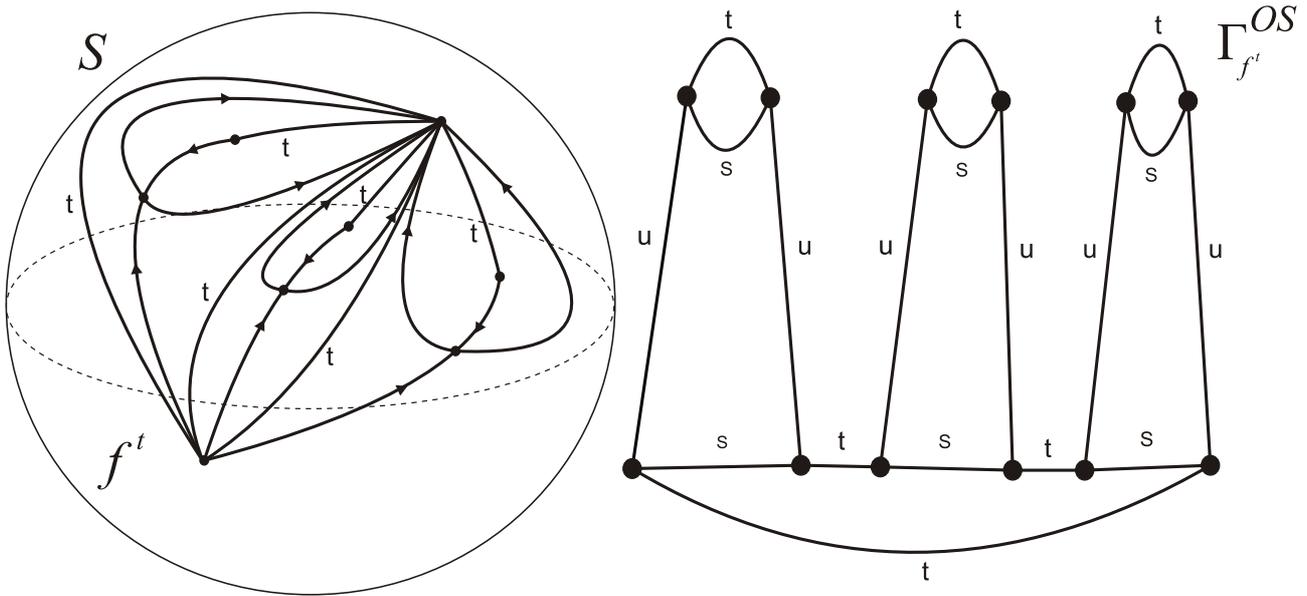


Рис. 16. Фазовый портрет некоторого градиентно-подобного потока и его трехцветный граф

FIG. 16. Phase portrait of some gradient-like flow and its three-color graph

Два трехцветных графа  $\Gamma_{f^t}^{OS}$  и  $\Gamma_{f^{t'}}^{OS}$  называются *изоморфными*, если существует изоморфизм графов, сохраняющий инцидентность и цветность.

В силу конструкции, трехцветные графы, полученные по различным разбиениям на треугольные области (в зависимости от выбора  $t$ -кривых), изоморфны.

**Предложение 3.7** (см. [5, теорема 1.10]). *Два градиентно-подобных потока  $f^t, f^{t'}$  топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их графы  $\Gamma_{f^t}^{OS}$  и  $\Gamma_{f^{t'}}^{OS}$  изоморфны.*

Следующая теорема полностью повторяет теорему из работы [11], но мы приводим ее доказательство для полноты изложения.

**Теорема 3.5** (см. [11, теорема 4]). *Пусть  $f^t, f^{t'}$  — градиентно-подобные потоки, заданные на поверхности рода  $g$ , и  $\Gamma_{f^t}^{OS}, \Gamma_{f^{t'}}^{OS}$  — их  $n$ -вершинные трехцветные графы. Тогда изоморфизм графов  $\Gamma_{f^t}^{OS}$  и  $\Gamma_{f^{t'}}^{OS}$  проверяется за время  $O(n^{O(g)})$ , если  $g \neq 0$ , и за время  $O(n)$ , если  $g = 0$ .*

*Доказательство.* В работе [5] авторы предлагают алгоритм различения изоморфизма. Однако он не полиномиальный, и ниже мы предлагаем полиномиальный алгоритм различения.

Построим граф  $\check{\Gamma}_{f^t}$  1-подразбиением  $s$ -ребер, 2-подразбиением  $t$ -ребер и 3-подразбиением  $u$ -ребер графа  $\Gamma_{f^t}^{OS}$  (см. рис. 17).

Заметим, что графы  $\check{\Gamma}_{f^t}$  и  $\check{\Gamma}_{f^{t'}}$  единственным образом строятся по графам  $\Gamma_{f^t}^{OS}$  и  $\Gamma_{f^{t'}}^{OS}$ . Покажем, что обратное тоже истинно. Вершины валентности 3 графа  $\check{\Gamma}_{f^t}$  — это в точности вершины валентности 3 графа  $\Gamma_{f^t}^{OS}$ . Цвет каждого ребра графа  $\check{\Gamma}_{f^t}$  определяется длиной пути между конечными вершинами ребра графа  $\check{\Gamma}_{f^t}$ .

Таким образом, графы  $\check{\Gamma}_{f^t}$  и  $\check{\Gamma}_{f^{t'}}$  изоморфны тогда и только тогда, когда  $\Gamma_{f^t}^{OS}$  и  $\Gamma_{f^{t'}}^{OS}$  изоморфны. Более того, графы  $\check{\Gamma}_{f^t}$  и  $\check{\Gamma}_{f^{t'}}$  строятся за линейное время от  $n$  и вложимы в поверхность  $S$ . Следовательно, по предложениям 3.1, 3.2, доказана настоящая теорема.  $\square$

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01041), за исключением теорем 3.1 и 3.2, которые выполнены при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ (грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2019-1931).

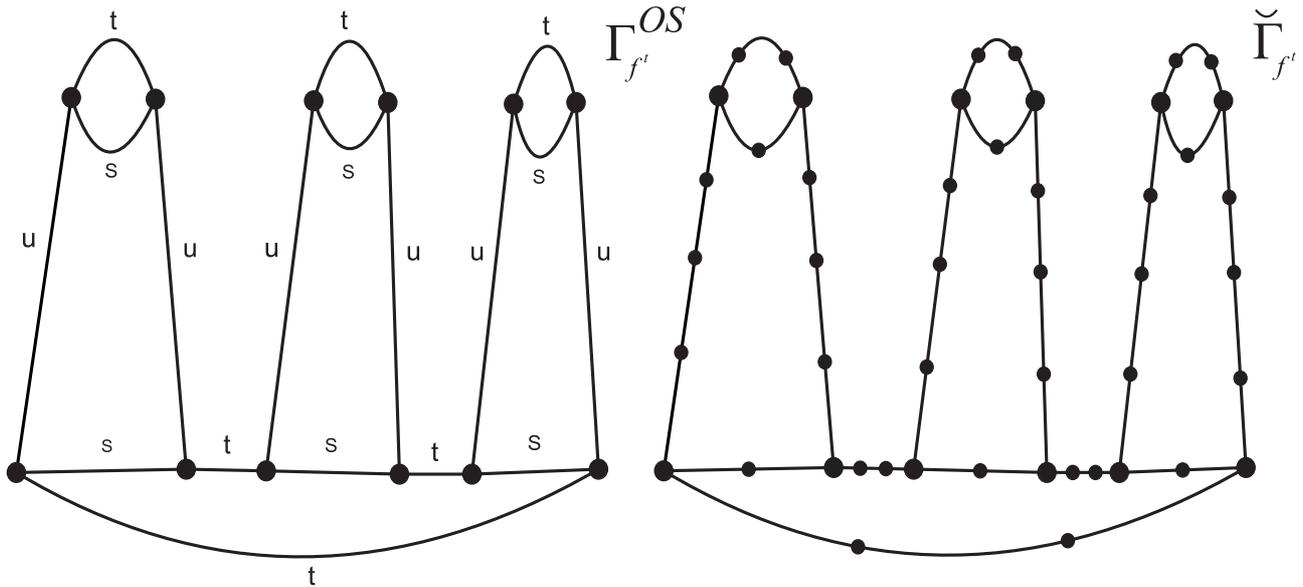


Рис. 17. Трехцветный граф  $\Gamma_{ft}^{OS}$  и его простой граф  $\check{\Gamma}_{ft}$   
 FIG. 17. The three-color graph  $\Gamma_{ft}^{OS}$  and its simple graph  $\check{\Gamma}_{ft}$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А. А., Поптягин Л. С. Грубые системы // Докл. АН СССР. — 1937. — 14, № 5. — С. 247–250.
2. Леонтович Е. А., Майер А. Г. О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории // Докл. АН СССР. — 1937. — 14, № 5. — С. 251–257.
3. Леонтович Е. А., Майер А. Г. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории // Докл. АН СССР. — 1955. — 103, № 4. — С. 557–560.
4. Майер А. Г. Грубые преобразования окружности // Уч. зап. ГГУ. — 1939. — 12. — С. 215–229.
5. Ошемков А. А., Шарко В. В. О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях // Мат. сб. — 1998. — 189, № 8. — С. 93–140.
6. Палис Ж., Ду Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. Введение. — М.: Мир, 1986.
7. Fleitas G. Classification of gradient-like flows on dimensions two and three // Bol. Soc. Bras. Mat. — 1975. — 6. — С. 155–183.
8. Grines V., Medvedev T., Pochinka O. Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. — Cham: Springer, 2016.
9. Hopcroft J. E., Wong J. K. Linear time algorithm for isomorphism of planar graphs: preliminary report // В сб.: «Proc. of the 6th Annual ACM Symposium on Theory of Computing». — Seattle, 1974. — С. 172–184.
10. Kruglov V. Topological conjugacy of gradient-like flows on surfaces // Динам. сист. — 2018. — 8, № 1. — С. 15–21.
11. Kruglov V., Malyshev D., Pochinka O. On algorithms that effectively distinguish gradient-like dynamics on surfaces // Arnold Math. J. — 2018. — 4, № 3-4. — С. 483–504.
12. Miller G. Isomorphism testing for graphs of bounded genus // В сб.: «Proceedings of the 12th Annual ACM Symposium on Theory of Computing». — New York: The Association for Computing Machinery, 1980. — С. 225–235.
13. Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds // Topology. — 1962. — 1, № 2. — С. 101–120.
14. Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds (a further remarks) // Topology. — 1963. — 2, № 2. — С. 179–180.
15. Peixoto M. M. On the classification of flows on 2-manifolds // В сб.: «Dynamical Syst., Proc. Sympos. Univ. Bahia, Salvador 1971». — 1973. — С. 389–419.
16. Pugh C., Shub M., The  $\Omega$ -stability theorem for flows // Invent. Math. — 1970. — 11, № 2. — С. 150–158.
17. Robinson C. Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos. — Boca Raton: CRC Press, 1999.
18. Smale S. Differentiable dynamical systems // Bull. Am. Math. Soc. — 1967. — 73. — С. 747–817.
19. Wang X. The  $C^*$ -algebras of Morse–Smale flows on two-manifolds // Ergodic Theory Dynam. Systems. — 1990. — 10. — С. 565–597.

В. Е. Круглов  
 НИУ ВШЭ, Нижний Новгород, Россия  
 E-mail: kruglovslava21@mail.ru

О. В. Починка  
 НИУ ВШЭ, Нижний Новгород, Россия  
 E-mail: olga-pochinka@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-3-467-487

UDC 517.938+519.173

## Topological Conjugacy of Gradient-Like Flows on Surfaces and Efficient Algorithms for Its Distinguition

© 2022 V. E. Kruglov, O. V. Pochinka

**Abstract.** Gradient-like flows on surfaces have simple dynamics, which inspired many mathematicians to search for invariants of their topological equivalence. Under assumptions of different generality on the class of gradient-like flows under consideration, such classical invariants as the Leontovich–Mayer scheme, the Peixoto graph, the equipped Peixoto graph, the two-color Wang graph, the three-color Oshemkov–Sharko graph, the Fleitas circular scheme, etc. were obtained. Thus, the problem of classifying gradient-like flows on surfaces from the point of view of topological equivalence has been solved in an exhaustive way. In recent works by Kruglov, Malyshev, and Pochinka, it was proved that for gradient-like flows the topological equivalence classes coincide with the topological conjugacy classes. The obtained result allows us to use any invariants of their equivalence for topological conjugacy of gradient-like flows. The present study is a review of the results on topological conjugacy of gradient-like flows on surfaces and efficient algorithms for its distinguishing, that is, algorithms whose running time is limited by some polynomial on the length of the input information.

### REFERENCES

1. A. A. Andronov and L. S. Pontryagin, “Grubye sistemy” [Rough systems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1937, **14**, No. 5, 247–250 (in Russian).
2. E. A. Leontovich and A. G. Mayer, “O traektoriyakh, opredelyayushchikh kachestvennyuyu strukturu razbieniya sfery na traektorii” [On trajectories that determine the qualitative structure of the partition of a sphere into trajectories], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1937, **14**, No. 5, 251–257 (in Russian).
3. E. A. Leontovich and A. G. Mayer, “O skheme, opredelyayushchey topologicheskuyu strukturu razbieniya na traektorii” [On the scheme that determines the topological structure of the partition into trajectories], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1955, **103**, No. 4, 557–560 (in Russian).
4. A. G. Mayer, “Grubye preobrazovaniya okruzhnosti” [Rough transformations of the circle], *Uch. zap. GGU* [Uch. zap. GGU], 1939, **12**, 215–229 (in Russian).
5. A. A. Oshemkov and V. V. Sharko, “O klassifikatsii potokov Morsa—Smeyla na dvumernykh mnogoobraziyakh” [O klassifikatsii potokov Morsa—Smeyla na dvumernykh mnogoobraziyakh], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1998, **189**, No. 8, 93–140 (in Russian).
6. J. Palis and W. De Melo, *Geometricheskaya teoriya dinamicheskikh sistem. Vvedenie* [Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction], Mir, Moscow, 1986 (Russian translation).
7. G. Fleitas, “Classification of gradiet-like flows on dimensions two and three,” *Bol. Soc. Bras. Mat.*, 1975, **6**, 155–183.
8. V. Grines, T. Medvedev, and O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, Springer, Cham, 2016.

9. J. E. Hopcroft and J. K. Wong, “Linear time algorithm for isomorphism of planar graphs: preliminary report,” In: *Proc. of the 6th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, Seattle, 1974, pp. 172–184.
10. V. Kruglov, “Topological conjugacy of gradient-like flows on surfaces,” *Dinam. sist.*, 2018, **8**, No. 1, 15–21.
11. V. Kruglov, D. Malyshev, and O. Pochinka, “On algorithms that effectively distinguish gradient-like dynamics on surfaces,” *Arnold Math. J.*, 2018, **4**, No. 3-4, 483–504.
12. G. Miller, “Isomorphism testing for graphs of bounded genus,” In: *Proceedings of the 12th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, The Association for Computing Machinery, New York, 1980, pp. 225–235.
13. M. Peixoto, “Structural stability on two-dimensional manifolds,” *Topology*, 1962, **1**, No. 2, 101–120.
14. M. Peixoto, “Structural stability on two-dimensional manifolds (a further remarks),” *Topology*, 1963, **2**, No. 2, 179–180.
15. M. M. Peixoto, “On the classification of flows on 2-manifolds,” In: *Dynamical Syst., Proc. Sympos. Univ. Bahia, Salvador, 1971*, 1973, pp. 389–419.
16. C. Pugh, M. Shub, “The  $\Omega$ -stability theorem for flows,” *Invent. Math.*, 1970, **11**, No. 2, 150–158.
17. C. Robinson, *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, CRC Press, Boca Raton, 1999.
18. S. Smale, “Differentiable dynamical systems,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1967, **73**, 747–817.
19. X. Wang, “The  $C^*$ -algebras of Morse–Smale flows on two-manifolds,” *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 1990, **10**, 565–597.

V. E. Kruglov

HSE University, Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: kruglovslava21@mail.ru

O. V. Pochinka

HSE University, Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: olga-pochinka@yandex.ru

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОВЕДЕНИЕМ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В МЕХАНИКЕ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫХ СИСТЕМ

© 2022 г. Е. П. КУБЫШКИН

Аннотация. Рассматривается начально-краевая задача для системы из двух дифференциальных уравнений, одно из которых является обыкновенным, а другое уравнением с частными производными, связь между которыми осуществляется через интегральный функционал. При этом краевые условия содержат старшие производные по времени от искомых функций. Начально-краевая задача моделирует поворот механической системы, состоящей из двух твердых тел, соединенных упругим стержнем, вокруг центра масс одного из твердых тел. Поворот осуществляется моментом внешних сил (моментом управления), приложенным к оси вращения твердого тела. Для начально-краевой задачи введено понятие обобщенного решения, доказана теорема существования и единственности обобщенного решения, корректности постановки задачи. Решены задачи оптимального управления поворотом механической системы из начального состояния в конечное в заданный момент времени, минимизируя значение управляющего момента и минимизируя функционал энергии от управляющего момента. В указанной постановке также решены задачи быстродействия при ограничениях на значение управляющего момента и на величину интеграла энергии от управляющего момента.

### ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение . . . . .		488
2. Математическая постановка задачи . . . . .		490
3. Построение решения начально-краевой задачи (2.1)–(2.4) . . . . .		491
4. Построение оптимальных управлений . . . . .		501
Список литературы . . . . .		506

### 1. ВВЕДЕНИЕ

*Дискретно-континуальными* принято называть механические системы, содержащие как твердые тела, так и упругие элементы. Такие системы являются механическими моделями манипуляционных роботов, руки которых обладают упругой податливостью, космических аппаратов, имеющих упругие элементы конструкций, гибких роторов турбин, несущих бандажные диски лопаток, центрифуг и др. конструкций. Математическими моделями таких систем являются, как правило, начально-краевые задачи для систем дифференциальных уравнений, содержащих как уравнения обыкновенные, так и уравнения с частными производными, связь между которыми осуществляется через функционалы и операторы. Начально-краевые задачи могут содержать старшие производные по времени в краевых условиях. В связи с этим встает задача математически корректной постановки начально-краевых задач для такого класса дифференциальных уравнений. Даже для математических моделей достаточно простых механических систем рассматриваемого вида эта задача зачастую не выглядит просто. Изучению таких систем посвящена



обширная литература, в основном прикладного характера. Рассматриваются задачи управления движением, устойчивости и стабилизации, колебаний таких систем. Активно такие системы стали изучаться в 80-х годах прошлого века, что было обусловлено интенсивным развитием робототехники, созданием больших космических станций и других сложных систем, имеющих упругоподатливые элементы конструкций. Отметим некоторые работы. Во-первых, монографию [21], в которой наряду со многими другими рассмотрена задача управления поворотом упругого стержня с точечным грузом на конце как механическая модель руки манипулятора. Для такой системы получены уравнения движения. Постановка задачи позволяет найти точное решение начально-краевой задачи, что дает возможность построить программное управление, обеспечивающее поворот системы с гашением колебаний. Близкие по постановке задачи изучались в монографии [3], где построены уравнения движения дискретно-континуальных систем, моделирующих роботов, манипуляторы, шагающие аппараты, а также рассмотрены различные проблемы динамики, управления и оптимизации таких систем. Основным методом исследования в монографии — это замена распределенной составляющей конечномерной по методу Галеркина. В качестве базисных функций берутся балочные функции. Для конечномерного аналога строятся оптимальные управления, которые и берутся в качестве управлений дискретно-континуальных систем. В работе [25], где рассматривается задача поворота гибкой руки манипулятора с полным гашением поперечной вибрации в конце процесса управления, также используется метод приближений Галеркина. В работах [22–24] изучается задача управления медленным вращением диска с балкой Тимошенко. Авторы используют представление решения распределенной части системы через собственные функции спектральной краевой задачи, соответствующей балке Тимошенко, закрепленной с одного конца, считая при этом угол поворота системы известной функцией. Такой подход потребовал ограничений на счетное число значений радиусов диска, при которых рассматриваемая система является неуправляемой (нестабилизируемой). Эта же модель при упомянутых ограничениях рассмотрена в работе [6] при решении задачи стабилизации поведения решений. Как следует из результатов [16], эти ограничения обусловлены методом исследования. Задачи стабилизации углового положения твердого тела с упругими стержнями рассматривались также в [1, 7, 8, 19].

В настоящей работе рассматривается начально-краевая задача, моделирующая поворот механической системы, состоящей из двух твердых тел, соединенных упругим стержнем, вокруг оси, проходящей через центр масс одного из твердых тел перпендикулярно средней линии недеформированного стержня. Упругий стержень рассматривается в рамках гипотез Эйлера–Бернулли малого изгиба стержней, имеет постоянное сечение и равномерно распределенную по длине массу. Точки заделки стержня в твердые тела и их центры масс находятся на одной прямой со средней линией недеформированного стержня. Поворот осуществляется моментом внешних сил, приложенным к оси вращения. Для начально-краевой задачи определено понятие обобщенного решения, доказана теорема существования и единственности обобщенного решения, непрерывной зависимости решения от начальных условий и параметров начально-краевой задачи. Решена задача оптимального перевода решения начально-краевой задачи из начального фазового состояния в конечное в заданный момент времени, минимизируя значение управляющего момента, и аналогичная задача с минимизацией функционала энергии от управляющего момента. В указанной постановке также решены задачи быстродействия при ограничениях на значение управляющего момента и на величину интеграла энергии от управляющего момента. Рассматриваемая система может служить механической моделью руки манипулятора, переносящей груз и обладающей упругой податливостью, или космической станции, состоящей из двух модулей, соединенных упругим переходом, осуществляющей поворот в плоскости орбиты вокруг центра масс одного из модулей. Вывод уравнений движения и краевых условий рассматриваемой механической системы приведен в работе автора [13]. Там же приведен алгоритм решения одной из сформулированных задач управления. При этом многие математические вопросы решения задач управления либо остались не изложенными, либо приведены без доказательств. Настоящая работа призвана восполнить этот пробел. В работе используется идеология работ [5, 12, 14, 15], в которых рассматриваются в различных постановках задачи оптимального управления поворотом твердого тела с упругим и наследственно вязкоупругим стержнем.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2022-886) и Программы развития ЯрГУ, проект № П2-К-1-Г-4/2021 П2-ГМ4-2021.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается начально-краевая задача

$$J\ddot{\theta} + \int_0^1 (x + a_1)y_{tt}(x, t)dx + m_2(1 + a_1 + a_2)y_{tt}(1, t) + [m_2a_2(1 + a_1 + a_2) + J_2]y_{xtt}(1, t) = M(t), \quad (2.1)$$

$$y_{tt} + y_{xxxx} = -(x + a_1)\ddot{\theta}, \quad (2.2)$$

$$y(0, t) = y_x(0, t) = 0,$$

$$y_{xx}(1, t) = -J_2(y_{xtt}(1, t) + \ddot{\theta}) - m_2a_2\{y_{tt}(1, t) + a_2y_{xtt}(1, t) + \ddot{\theta}(1 + a_1 + a_2)\},$$

$$y_{xxx}(1, t) = m_2\{y_{tt}(1, t) + a_2y_{xtt}(1, t) + \ddot{\theta}(1 + a_1 + a_2)\}, \quad (2.3)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, \quad y(x, 0) = y_0(x), \quad y_t(x, 0) = y_1(x), \quad (2.4)$$

относительно функций  $\theta(t), y(x, t)$  в области  $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ . В (2.1)–(2.4)  $J, J_1, J_2, a_1, a_2, m_2$  — положительные параметры,  $M(t)$  — известная функция, функциональные пространства для начальных условий  $y_0(x), y_1(x)$  и функции  $M(t)$  будут определены ниже. При этом

$$J = J_1 + \int_0^1 (x + a_1)^2 dx + m_2(1 + a_1 + a_2)^2 + J_2 = J_1 + 1/3 + a_1 + a_1^2 + m_2(1 + a_1 + a_2)^2 + J_2. \quad (2.5)$$

Начально-краевая задачи (2.1)–(2.5) приведена в безразмерных переменных. При этом функции  $\theta(t), y(x, t)$  определяют соответственно угол поворота системы относительно инерциального пространства и величину деформации стержня; параметры  $J_1$  и  $J_2$  определяют моменты инерции твердых тел относительно осей, проходящих через их центры масс перпендикулярно плоскости вращения системы;  $a_1$  и  $a_2$  определяют расстояния от центров масс твердых тел до точек заделки упругого стержня;  $m_2$  характеризует массу второго твердого тела. Функция  $M(t)$  определяет момент вращения (управления). Выражение (2.5) определяет момент инерции всей системы относительно оси вращения.

В дальнейшем, как обычно,  $L_2(0, T)$  — пространство определенных на  $(0, T)$  вещественнозначных интегрируемых по Лебегу функций  $u(t)$ , для которых

$$\|u(t)\|_{L_2(0, T)} = (u(t), u(t))_{L_2(0, T)}^{1/2} < \infty, \quad (u_1(t), u_2(t))_{L_2(0, T)} = \int_0^T u_1(t)u_2(t)dt,$$

$L_\infty(0, T)$  — подпространство функций из  $L_2(0, T)$ , для которых

$$\|u(t)\|_{L_\infty(0, T)} = \text{vrai sup}_{0 \leq t \leq T} |u(t)| < \infty$$

(существенный *supremum*).

Для начально-краевой задачи (2.1)–(2.4) рассмотрены следующие задачи оптимального управления.

**Задача 2.1.** *Определить функцию управления  $M(t) \in L_2(0, T)$ , переводящую решение начально-краевой задачи (2.1)–(2.4) из начального состояния (2.4) в конечное*

$$\theta(T) = \theta_{0T}, \quad \dot{\theta}(T) = \theta_{1T}, \quad y(x, T) = y_{0T}(x), \quad y_t(x, T) = y_{1T}(x) \quad (2.6)$$

в заданный момент времени  $T$  и минимизирующую функционал

$$\Phi_1(M) = \|M(t)\|_{L_2(0, T)}.$$

**Задача 2.2** (задача быстрогодействия). *Определить функцию управления  $M(t) \in L_2(0, T)$ ,  $\Phi_1(M) \leq L_1 < \infty$ , переводящую решение начально-краевой задачи (2.1)–(2.4) из начального состояния (2.4) в конечное (2.6) за минимальное время  $T$ .*

**Задача 2.3.** *Определить функцию управления  $M(t) \in L_\infty(0, T)$ , переводящую решение начально-краевой задачи (2.1)–(2.4) из начального состояния (2.4) в конечное (2.6) в заданный момент времени  $T$  и минимизирующую функционал*

$$\Phi_2(M) = \|M(t)\|_{L_\infty(0, T)}.$$

**Задача 2.4** (задача быстрогодействия). *Определить функцию управления  $M(t) \in L_\infty(0, T)$ ,  $\Phi_2(M) \leq L_2 < \infty$ , переводящую решение начально-краевой задачи (2.1)–(2.4) из начального состояния (2.4) в конечное (2.6) за минимальное время  $T$ .*

Ниже для начально-краевой задачи (2.1)–(2.4) сформулировано понятие обобщенного решения, определены функциональные пространства для начальных условий и решения, доказана теорема существования и единственности решения. Показана корректность поставленной начально-краевой задачи, получена аналитическая формула решения. Для оптимальных управлений сформулирован принцип максимума, предложены эффективные алгоритмы построения оптимальных управлений. В задачах 2.2 и 2.4 значения минимального времени определяются как корни некоторых нелинейных алгебраических уравнений.

### 3. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (2.1)–(2.4)

Выразим  $y_{tt}(x, t)$  из (2.2) и подставим в уравнение (2.1). В результате имеем

$$\left( J - \int_0^1 (x + a_1)^2 dx \right) \ddot{\theta} - \int_0^1 (x + a_1) y_{xxxx}(x, t) dx + m_2^* y_{tt}(1, t) + J_2^* y_{xtt}(1, t) = M(t), \quad (3.1)$$

где использованы обозначения  $m_2^* = m_2(1 + a_1 + a_2)$ ,  $J_2^* = m_2 a_2(1 + a_1 + a_2) + J_2$ . Вычислив в равенстве (3.1) второй интеграл по частям при учете краевых условий (2.3), получим для  $\theta$  дифференциальное уравнение

$$J_1 \ddot{\theta} + a_1 y_{xxx}(0, t) - y_{xx}(0, t) = M(t). \quad (3.2)$$

Это позволяет выписать для определения  $y(x, t)$  две эквивалентные начально-краевые задачи:

$$y_{tt} - J^{-1}(x + a_1) \left[ \int_0^1 (x_1 + a_1) y_{tt}(x_1, t) dx_1 + m_2^* y_{tt}(1, t) + J_2^* y_{xtt}(1, t) \right] + y_{xxxx} = -J^{-1}(x + a_1) M(t), \quad (3.3)$$

$$y(0, t) = y_x(0, t) = 0,$$

$$y_{xx}(1, t) = J^{-1} J_2^* \int_0^1 (x_1 + a_1) y_{tt}(x_1, t) dx_1 - (J_2 + m_2 a_2^2 - J^{-1} J_2^{*2}) y_{xtt}(1, t) - (m_2 a_2 - J^{-1} J_2^* m_2^*) y_{tt}(1, t) - J^{-1} J_2^* M(t),$$

$$y_{xxx}(1, t) = -J^{-1} m_2^* \int_0^1 (x_1 + a_1) y_{tt}(x_1, t) dx_1 + (m_2 - J^{-1} m_2^{*2}) y_{tt}(1, t) + (m_2 a_2 - J^{-1} J_2^* m_2^*) y_{xtt}(1, t) + J^{-1} m_2^* M(t), \quad (3.4)$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad y_t(x, 0) = \dot{y}_0(x) \quad (3.5)$$

и

$$y_{tt} + y_{xxxx} - J_1^{-1}(x + a_1)(a_1 y_{xxx}(0) - y_{xx}(0)) = -J_1^{-1}(x + a_1) M(t), \quad (3.6)$$

$$y(0, t) = y_x(0, t) = 0,$$

$$y_{xx}(1, t) - J_1^{-1} J_2^* (a_1 y_{xxx}(0, t) - y_{xx}(0, t)) = -(J_2 + m_2 a_2^2) y_{xtt}(1, t) - m_2 a_2 y_{tt}(1, t) - J_1^{-1} J_2^* M(t),$$

$$y_{xxx}(1, t) + J_1^{-1} m_2^* (a_1 y_{xxx}(0, t) - y_{xx}(0, t)) = m_2 y_{tt}(1, t) + m_2 a_2 y_{xtt}(1, t) + J_1^{-1} m_2^* M(t), \quad (3.7)$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad y_t(x, 0) = y_1(x). \quad (3.8)$$

Положим сначала  $M(t) \equiv 0$ . Определяя решение  $y(x, t)$  в виде  $y(x, t) = v(x)s(t)$ , подставим его в краевую задачу (3.6)–(3.8). В результате получим для определения  $v(x)$  спектральную краевую задачу

$$v^{\text{IV}}(x) - J_1^{-1}(x + a_1)(a_1 v'''(0) - v''(0)) = \lambda v(x), \quad (3.9)$$

$$v(0) = v'(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} v''(1) - J_1^{-1} J_2^*(a_1 v'''(0) - v''(0)) &= \lambda[(J_2 + a_2^2 m_2)v'(1) + a_2 m_2 v(1)], \\ v'''(1) + J_1^{-1} m_2^*(a_1 v'''(0) - v''(0)) &= -\lambda m_2(v(1) + a_2 v'(1)), \end{aligned} \quad (3.10)$$

а для  $s(t)$  — следующее уравнение:

$$\ddot{s}(t) + \lambda s(t) = 0.$$

Спектральная краевая задача (3.9)–(3.10) подробно рассмотрена в работе [4]. Ниже приведены основные результаты. Запишем спектральную краевую задачу (3.9)–(3.10) в матричной форме

$$\begin{pmatrix} v^{\text{IV}}(x) \\ -v'''(1) \\ v''(1) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & a_2 m_2 \\ 0 & a_2 m_2 & J_2 + a_2^2 m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(x) \\ v(1) \\ v'(1) \end{pmatrix} + J_1^{-1}(a_1 v'''(0) - v''(0)) \begin{pmatrix} x + a_1 \\ m_2^* \\ J_2^* \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

$$v(0) = v'(0) = 0. \quad (3.12)$$

Введем гильбертово пространство  $\mathcal{H} = L_2 \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  с элементами  $\hat{v} = \text{col}(v(x), v(1), v'(1)) \in \mathcal{H}$ . Здесь и в дальнейшем для сокращения записи используется обозначение  $L_2$  пространства  $L_2(0; 1)$ , а соответствующее скалярное произведение обозначено  $(\cdot, \cdot)$ . Введем в  $\mathcal{H}$  операторы

$$\mathcal{A}\hat{v} = \text{col}(v^{\text{IV}}, -v'''(1), v''(1)), \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\hat{v} \in \mathcal{H} : v(x) \in C^4[0; 1], v(0) = v'(0) = 0\},$$

$$\mathcal{B}\hat{v} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & a_2 m_2 \\ 0 & a_2 m_2 & J_2 + a_2^2 m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(x) \\ v(1) \\ v'(1) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{H}.$$

Скалярное произведение в  $\mathcal{H}$  определено равенством

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 u(x)v(x)dx + u(1)v(1) + u'(1)v'(1).$$

Интегрируя по частям, замечаем, что

$$a_1 v'''(0) - v''(0) = - \left( \int_0^1 (a_1 + x)v^{\text{IV}}(x)dx - (a_1 + 1)v'''(1) + v''(1) \right) = - \langle \hat{f}, \mathcal{A}\hat{v} \rangle_{\mathcal{H}},$$

где  $\hat{f} = \text{col}(a_1 + x, a_1 + 1, 1) \in \mathcal{H}$ . Кроме того,

$$\begin{pmatrix} x + a_1 \\ m_2^* \\ J_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & a_2 m_2 \\ 0 & a_2 m_2 & J_2 + a_2^2 m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 + x \\ a_1 + 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathcal{B}\hat{f}.$$

Таким образом, (3.11), (3.12) может быть записано в виде

$$\mathcal{A}\hat{v} + \frac{1}{J_1} \langle \hat{f}, \mathcal{A}\hat{v} \rangle_{\mathcal{H}} \mathcal{B}\hat{f} = \lambda \mathcal{B}\hat{v} \quad (\text{в } \mathcal{H}). \quad (3.13)$$

Покажем, что оператор  $\mathcal{A}$  является симметричным и положительно определенным. Действительно, для  $\hat{v}, \hat{u} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}\hat{v}, \hat{u} \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^1 v^{\text{IV}}(x)u(x)dx - v'''(1)u(1) + v''(1)u'(1) = \int_0^1 v''(x)u''(x)dx = \\ &= \int_0^1 v(x)u^{\text{IV}}(x)dx - u'''(1)v(1) + u''(1)v'(1) = \langle \hat{v}, \mathcal{A}\hat{u} \rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Кроме того, для  $\widehat{v} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$

$$\langle \mathcal{A}\widehat{v}, \widehat{v} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 v''(x)^2 dx, \quad \langle \mathcal{A}\widehat{v}, \widehat{v} \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \Rightarrow v(x) \equiv 0,$$

т. е. оператор  $\mathcal{A}$  положительный. Применяя теперь к (3.13) неравенство Фридрихса [18], получим положительную определенность оператора  $\mathcal{A}$ . Расширяя его (по Фридрихсу) до самосопряженного положительно определенного оператора, получаем

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\widehat{v} = \text{col}(v(x), v(1), v'(1)) \in \mathcal{H} : v(x) \in W^4(0; 1), v(0) = v'(0) = 0\},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}) = \mathcal{H}_{\mathcal{A}} = \{\widehat{v} = \text{col}(v(x), v(1), v'(1)) \in \mathcal{H} : v(x) \in W^2(0; 1), v(0) = v'(0) = 0\}.$$

Согласно теоремам вложения Соболева [17],  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$  компактно вложено в исходное пространство  $\mathcal{H}$ . Отсюда непосредственно следует, что оператор  $\mathcal{A}^{-1}$  существует и является компактным в  $\mathcal{H}$ .

Оператор  $\mathcal{B} = \mathcal{B}^* > 0$  является ограниченным и ограниченно обратимым оператором в  $\mathcal{H}$ . Таким образом, из (3.13) следует, что

$$\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\widehat{v} + J_1^{-1}\langle \widehat{f}, \mathcal{A}\widehat{v} \rangle_{\mathcal{H}}\widehat{f} = \lambda\widehat{v} \quad (\text{в } \mathcal{H}).$$

Обозначив  $\widehat{\eta} = \mathcal{A}\widehat{v} \in \mathcal{H}$ , перепишем последнее равенство следующим образом:

$$\mathcal{B}^{-1}\widehat{\eta} + J_1^{-1}\langle \widehat{f}, \widehat{\eta} \rangle_{\mathcal{H}}\widehat{f} = \lambda\mathcal{A}^{-1}\widehat{\eta} \quad (\text{в } \mathcal{H}).$$

Очевидно,  $\mathcal{P}_{\widehat{f}}\widehat{\eta} = \langle \widehat{f}, \widehat{\eta} \rangle_{\mathcal{H}}\widehat{f}$  является ортопроектором на одномерное подпространство  $\text{sp}\{\widehat{f}\}$ , поэтому  $\mathcal{P}_{\widehat{f}} = \mathcal{P}_{\widehat{f}}^* \geq 0$  ограничен в  $\mathcal{H}$ . Имеем задачу

$$\mathcal{C}\widehat{\eta} = \lambda\mathcal{A}^{-1}\widehat{\eta} \quad (\text{в } \mathcal{H}), \quad \mathcal{C} = \mathcal{B}^{-1} + J_1^{-1}\mathcal{P}_{\widehat{f}}. \quad (3.14)$$

Здесь, очевидно, оператор  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^* > 0$  ограничен и ограниченно обратим. На решениях задачи (3.14) имеем  $\mathcal{C}\widehat{\eta} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ , поэтому, сделав замену

$$\widehat{\vartheta} = \mathcal{A}^{-1/2}\widehat{\eta} = \mathcal{A}^{1/2}\widehat{v} \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{H},$$

получим уравнение

$$\mathcal{K}\widehat{\vartheta} = \mathcal{A}^{1/2}\mathcal{C}\mathcal{A}^{1/2}\widehat{\vartheta} = \lambda\widehat{\vartheta} \quad (\text{в } \mathcal{H}).$$

Оператор  $\mathcal{K}^{-1}$  является положительным компактным самосопряженным в  $\mathcal{H}$ . Согласно теореме Гильберта—Шмидта,  $\sigma(\mathcal{K}^{-1})$  состоит из изолированных конечнократных положительных собственных значений  $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$  с предельной точкой  $+0$ , а из соответствующих собственных элементов  $\{\widehat{\vartheta}_k\}_{k=1}^{\infty}$  можно составить ортонормированный базис в  $\mathcal{H}$ . Тогда спектр исходной спектральной задачи состоит из изолированных положительных собственных значений конечной кратности  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $\lambda_k \rightarrow +\infty$  ( $k \rightarrow \infty$ ), а система собственных элементов  $\{\widehat{v}_k = \mathcal{A}^{-1/2}\widehat{\vartheta}_k \in \mathcal{D}(\mathcal{A})\}_{k=1}^{\infty}$  является полной в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ . Она образует ортонормированный базис в энергетическом пространстве оператора  $\mathcal{A}$ , при этом справедливы формулы ортогональности

$$\langle \widehat{v}_k, \widehat{v}_l \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{A}}} = \langle \mathcal{A}^{1/2}\widehat{v}_k, \mathcal{A}^{1/2}\widehat{v}_l \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \widehat{\vartheta}_k, \widehat{\vartheta}_l \rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{kl}. \quad (3.15)$$

Перейдем к выводу конкретного вида скалярного произведения (3.15) в терминах собственных функций  $v_k(x)$  спектральной краевой задачи (3.9)–(3.10). Подставив теперь  $y(x, t) = v(x)s(t)$  в начально-краевую задачу (3.3)–(3.5), получим для определения  $v(x)$  следующую спектральную краевую задачу:

$$v^{\text{IV}}(x) = \lambda \left\{ v(x) - J^{-1}(x + a_1) \left[ \int_0^1 (x_1 + a_1)v(x_1)dx_1 + m_2^*v(1) + J_2^*v'(1) \right] \right\}, \quad (3.16)$$

$$v(0) = v'(0) = 0,$$

$$v''(1) = \lambda \left\{ (J_2 + a_2^2 m_2)v'(1) + m_2 a_2 v(1) - J^{-1} J_2^* \left[ \int_0^1 (x_1 + a_1)v(x_1)dx_1 + m_2^* a_2 v(1) + J_2^* v'(1) \right] \right\},$$

$$v'''(1) = \lambda \left\{ -m_2(v(1) + a_2v'(1)) - J^{-1}m_2^* \left[ \int_0^1 (x_1 + a_1)v(x_1)dx_1 + m_2^*v(1) + J_2^*v'(1) \right] \right\}, \quad (3.17)$$

эквивалентную (3.9)-(3.10).

Пусть  $v_k(x)$  и  $v_l(x)$  — собственные функции спектральной краевой задачи (3.16)-(3.17), отвечающие собственным значениям  $\lambda_k$  и  $\lambda_l$  соответственно. Подставим теперь  $v_k(x)$  и  $\lambda_k$  в (3.16). Полученное равенство умножим на  $v_l(x)$  и проинтегрируем по отрезку  $[0, 1]$ . В результате имеем

$$\int_0^1 v_k^{IV}(x)v_l(x)dx = \lambda_n \left\{ \int_0^1 v_k(x)v_l(x)dx - J^{-1} \int_0^1 (x + a_1)v_m(x)dx \left[ \int_0^1 (x_1 + a_1)v(x_1)dx_1 + m_2^*v(1) + J_2^*v'(1) \right] \right\}, \quad (3.18)$$

Вычисляя интеграл в левой части (3.18) по частям, с учетом краевых условий (3.17) будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^1 v_k''(x)v_l''(x)dx = (v_k''(x), v_l''(x)) = \lambda_k & \left[ (v_k(x), v_l(x)) + m_2v_k(1)v_l(1) + (J_2 + a_2^2m_2)v_k'(1)v_l'(1) + \right. \\ & + a_2m_2(v_k'(1)v_l(1) + v_k(1)v_l'(1)) - J^{-1} \left( (x + a_1, v_k)(x + a_1, v_l) + m_2^*((x + a_1, v_k)v_l(1) + \right. \\ & + (x + a_1, v_l)v_k(1)) + J_2^*((x + a_1, v_k)v_l'(1) + (x + a_1, v_l)v_k'(1)) + m_2^{*2}v_k(1)v_l(1) + J_2^{*2}v_k'(1)v_l'(1) + \\ & \left. \left. + m_2^*J_2^*(v_k(1)v_l'(1) + v_l(1)v_k'(1)) \right) \right] = \lambda_k (v_k(x), v_l(x)). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Поменяв  $v_k(x)$  и  $v_l(x)$  местами, получим

$$(v_l''(x), v_k''(x)) = \lambda_l (v_k(x), v_l(x)). \quad (3.20)$$

При  $\lambda_k \neq \lambda_l$ , вычтя из (3.19) выражение (3.20), имеем  $(v_k, v_l) = 0$ . Имеем также  $(v, v) \geq 0$ ,  $(v, v) = 0 \Rightarrow v(x) \equiv 0$ .

Перейдем теперь к выводу характеристического уравнения для определения  $\lambda_k$  и построению собственных функций  $v_k(x)$ . Положим в уравнении (3.9)  $\lambda = \beta^4$ , а выражение  $a_1v'''(0) - v''(0)$  будем рассматривать как параметр. Тогда общее решение (3.9) запишется в виде

$$v(x) = A \operatorname{ch}(\beta x) + B \operatorname{sh}(\beta x) + C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) - \frac{1}{J_1\beta^4}(x + a_1)(a_1v'''(0) - v''(0)), \quad (3.21)$$

где  $A, B, C, D$  — произвольные постоянные. Отсюда получаем

$$v''(0) = \beta^2(A - C), \quad v'''(0) = \beta^3(B - D),$$

что в результате дает

$$v(x) = A \operatorname{ch}(\beta x) + B \operatorname{sh}(\beta x) + C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) - \frac{1}{J_1\beta^2}(x + a_1)(a_1\beta(B - D) - A + C). \quad (3.22)$$

Подставляя теперь (3.22) в краевые условия (3.10), получаем следующую систему линейных уравнений для определения  $A, B, C, D$ :

$$\begin{cases} (1 + \frac{a_1}{J_1\beta^2})A - \frac{a_1^2}{J_1\beta}B + (1 - \frac{a_1}{J_1\beta^2})C + \frac{a_1^2}{J_1\beta}D = 0, \\ \frac{1}{J_1\beta^2}A + (\beta - \frac{a_1}{J_1\beta})B - \frac{1}{J_1\beta^2}C + (\beta + \frac{a_1}{J_1\beta})D = 0, \\ (\operatorname{ch} \beta(1 + \beta^2 a_2 m_2) + \beta^3 \operatorname{sh} \beta(J_2 + a_2^2 m_2))A + (\operatorname{sh} \beta(1 + \beta^2 a_2 m_2) + \beta^3 \operatorname{ch} \beta(J_2 + a_2^2 m_2))B + \\ + (\cos \beta(-1 + \beta^2 a_2 m_2) - \beta^3 \sin \beta(J_2 + a_2^2 m_2))C + (\sin \beta(-1 + \beta^2 a_2 m_2) + \beta^3 \cos \beta(J_2 + a_2^2 m_2))D = 0, \\ (\operatorname{sh} \beta(1 + \beta^2 a_2 m_2) + \beta m_2 \operatorname{ch} \beta)A + (\operatorname{ch} \beta(1 + \beta^2 a_2 m_2) + \beta m_2 \operatorname{sh} \beta)B + \\ + (\sin \beta(1 - \beta^2 a_2 m_2) + \beta m_2 \cos \beta)C + (\cos \beta(-1 + \beta^2 a_2 m_2) + \beta m_2 \sin \beta)D = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Этот факт и дает характеристическое уравнение

$$\begin{aligned}
p(\beta) \equiv & J_1 \beta^{-4} - J_1 J_2 m_2 + (((J_1 - 2(J_2 + (a_2^2 - a_1^2)m_2)))\beta^{-4} + J_1 J_2 m_2) \cos \beta + \\
& + (\beta^{-7} + 2a_1 m_2 \beta^{-5} + (m_2(J_2 - J_1) + a_1(a_1 + 2J_2 + 2a_2^2 m_2))\beta^{-3} + \\
& + (J_1 J_2 + m_2(a_2^2 J_1 + a_1^2 J_2))\beta^{-1}) \sin \beta) \operatorname{ch} \beta + \\
& + ((-\beta^{-7} + 2a_1 m_2 \beta^{-5} + (m_2(J_1 - J_2) + a_1(a_1 - 2J_2 - 2a_2^2 m_2))\beta^{-3} + \\
& + (J_1 J_2 + m_2(a_2^2 J_1 + a_1^2 J_2))\beta^{-1}) \cos \beta + \\
& + 2((a_1 + m_2)\beta^{-6} + a_1^2(J_2 + a_2^2 m_2)\beta^{-3} + a_1 J_2 m_2 \beta^{-2}) \sin \beta) \operatorname{sh} \beta = 0, \tag{3.23}
\end{aligned}$$

положительные корни которого  $\beta_n > 0$  однократны и определяют собственные значения  $\lambda_n = \beta_n^4$  спектральной краевой задачи (3.9)-(3.10).

При этом нормированные собственные функции будут иметь явный вид

$$v_n(x) = \frac{v_n^*(x)}{\langle v_n^*(x), v_n^*(x) \rangle^{1/2}}, \tag{3.24}$$

где

$$\begin{aligned}
v_n^*(x) = & A_n \operatorname{ch}(\beta_n x) + B_n \operatorname{sh}(\beta_n x) + C_n \cos(\beta_n x) + D_n \sin(\beta_n x) - \\
& - \frac{1}{J_1 \beta_n^2} (x + a_1)(a_1 \beta_n (B_n - D_n) - A_n + C_n),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n = & \beta_n ([2a_1 \beta_n (m_2 + a_1(1 - \beta_n^2 m_2 a_2)) - J_1 \beta_n^3 m_2] \sin \beta_n + J_1 \beta_n^3 m_2 \operatorname{sh} \beta_n + \\
& + [2a_1(-1 + \beta_n^2 m_2(a_1 + a_2)) - J_1 \beta_n^2(-1 + \beta_n^2 m_2 a_2)] \cos \beta_n + J_1 \beta_n^2(1 + \beta_n^2 m_2 a_2) \operatorname{ch} \beta_n), \\
B_n = & [2\beta_n m_2 + (1 + \beta_n^2 m_2 a_2)(2a_1 \beta_n + J_1 \beta_n^3)] \sin \beta_n - \beta_n^3 J_1(1 + a_2 \beta_n^2 m_2) \operatorname{sh} \beta_n + \\
& + [2\beta_n^2 m_2(a_1 + a_2) - 2 + \beta_n^4 J_1 m_2] \cos \beta_n - \beta_n^4 J_1 m_2 \operatorname{ch} \beta_n, \\
C_n = & -\beta_n (-J_1 \beta_n^3 m_2 \sin \beta_n + [2a_1 \beta_n (m_2 + a_1(1 + \beta_n^2 m_2 a_2)) + J_1 \beta_n^3 m_2] \operatorname{sh} \beta_n + \\
& + J_1 \beta_n^2(1 - \beta_n^2 m_2 a_2) \cos \beta_n + [2a_1(1 + \beta_n^2 m_2(a_1 + a_2)) + J_1 \beta_n^2(1 + \beta_n^2 m_2 a_2)] \operatorname{ch} \beta_n), \\
D_n = & -\beta_n^3 J_1(1 - a_2 \beta_n^2 m_2) \sin \beta_n - [2\beta_n m_2 + (1 + \beta_n^2 m_2 a_2)(2a_1 \beta_n - J_1 \beta_n^3)] \operatorname{sh} \beta_n - \\
& - \beta_n^4 J_1 m_2 \cos \beta_n - [2\beta_n^2 m_2(a_1 + a_2) + 2 - \beta_n^4 J_1 m_2] \operatorname{ch} \beta_n.
\end{aligned}$$

Между функциями  $v_n(x)$  выполнены условия ортогональности

$$\langle v_k, v_l \rangle = \delta_{kl}, \tag{3.25}$$

где  $\delta_{kl}$  — символ Кронекера.

Рассмотрим вопрос построения решения начально-краевой задачи (3.3)-(3.5). Введем некоторые функциональные пространства, необходимые для корректной постановки начально-краевой задачи.

Обозначим через  $H(0, 1)$  гильбертово пространство функций  $y(x)$ , полученное замыканием в норме

$$\|y(x)\|_H = \langle y(x), y(x) \rangle^{1/2} \tag{3.26}$$

линейной оболочки функций  $v_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), т. е.

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n v_n(x), \quad y_n = \langle y(x), v_n(x) \rangle, \quad \|y(x)\|_H = \left( \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 \right)^{1/2} < \infty. \tag{3.27}$$

Для  $y_1(x), y_2(x) \in H(0, 1)$  определено скалярное произведение  $\langle y_1(x), y_2(x) \rangle$  согласно (3.19). Из (3.26), (3.27) для  $y(x) \in H(0, 1)$  следует  $\|y(x)\|_H \geq 0$ ,  $\|y(x)\|_H = 0 \iff y(x) = 0$ , т. е. равенство (3.19) удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения. Очевидно, что  $H(0, 1) \subset L_2(0, 1)$ .

Через  $H^j(0, 1) \subset H(0, 1)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) обозначим пространства функций вида

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n v_n(x), \quad y_n = \langle y(x), v_n(x) \rangle, \quad \|y(x)\|_{H^j} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^j y_n^2 \right)^{1/2} < \infty, \quad \omega_n = \beta_n^2.$$

Отметим, что эти пространства являются соответственно замкнутыми подпространствами пространств Соболева  $W_2^j(0, 1)$  (см. [17]).

Через  $H(Q_T)$  обозначим гильбертово пространство функций  $y(x, t)$ , полученное замыканием множества функций  $y(x, t) \in C^{1,0}(\bar{Q}_T)$  в норме

$$\|y(x, t)\|_{H(Q_T)} = (y(x, t), y(x, t))_{H(Q_T)}^{1/2}, \quad (u(x, t), v(x, t))_{H(Q_T)} = \int_0^T \langle u(x, t), v(x, t) \rangle dt.$$

Очевидно, что  $H(Q_T) \subset L_2(Q_T)$ . Через  $H^2(Q_T)$  обозначим гильбертово пространство функций  $y(x, t)$ , полученное замыканием множества функций  $y(x, t) \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ ,  $y(0, t) = y_x(0, t) = 0$  в норме

$$\|y(x, t)\|_{H^2(Q_T)} = (y(x, t), y(x, t))_{H^2(Q_T)}^{1/2},$$

$$(u(x, t), v(x, t))_{H^2(Q_T)} = (u_{xx}(x, t), v_{xx}(x, t))_{L_2(Q_T)} + (u_t(x, t), v_t(x, t))_{H(Q_T)}.$$

Умножим обе части уравнение (3.3) на функцию

$$v(x, t) \in H^2(Q_T), \quad v(x, T) \equiv 0 \tag{3.28}$$

и проинтегрируем по  $(x, t) \in Q_T$ . В результате будем иметь равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 y_{tt}(x, t)v(x, t) dx dt - \frac{1}{J} \left\{ \int_0^T \int_0^1 (x + a_1)v(x, t) dx \int_0^1 (x_1 + a_1)y_{tt}(x_1, t) dx_1 dt + \right. \\ & \left. + m_2^* \int_0^T \int_0^1 (x + a_1)v(x, t)y_{tt}(1, t) dx dt + J_2^* \int_0^T \int_0^1 (x + a_1)v(x, t)y_{xtt}(1, t) dx dt \right\} + \\ & + \int_0^T \int_0^1 v(x, t)y_{xxxx}(x, t) dx dt = -\frac{1}{J} \int_0^T \int_0^1 (x + a_1)v(x, t)M(t) dx dt. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Вычисляя интегралы, входящие в (3.29), по частям с учетом краевых и начальных условий (3.4), (3.5), а также условия (3.28), получим выражения

$$\int_0^T \int_0^1 y_{tt}(x, t)v(x, t) dx dt = -(\dot{y}_0(x), v(x, 0)) - \int_0^T y_t(x, t)v_t(x, t) dx dt, \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 (x + a_1)v(x, t) dx \int_0^1 (x_1 + a_1)y_{tt}(x_1, t) dx_1 dt = -(x + a_1, \dot{y}_0(x))(x + a_1, v(x, 0)) - \\ & - \int_0^T (x + a_1, y_t(x, t))(x + a_1, v_t(x, t)) dt, \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 (x + a_1)v(x, t)y_{tt}(1, t) dx dt = -\dot{y}_0(1)(x + a_1, v(x, 0)) - \\ & - \int_0^T y_t(1, t)(x + a_1, v_t(x, t)) dt, \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\int_0^T \int_0^1 (x + a_1)v(x, t)y_{xtt}(1, t) dx dt = -\dot{y}'_0(1)(x + a_1, v(x, 0)) -$$

$$- \int_0^T y_{xt}(1, t)(x + a_1, v_t(x, t)) dt, \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 v(x, t) y_{xxxx}(x, t) dx dt = & -v(1, 0) \left\{ m_2 \dot{y}_0(1) + m_2 a_2 \dot{y}'_0(1) - \frac{1}{J} m_2^* [(x + a_1, \dot{y}_0(x)) + \right. \\ & \left. + m_2^* \dot{y}_0(1) + J_2^* \dot{y}'_0(1)] \right\} - \int_0^T v_t(1, t) \left\{ m_2 y_t(1, t) + m_2 a_2 y_{xt}(1, t) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{J} m_2^* [(x + a_1, y_t(x, t)) + m_2^* y_t(1, t) + J_2^* y_{xt}(1, t)] \right\} dt + v_x(1, 0) \times \\ & \times \left\{ - (J_2 + m_2 a_2^2) \dot{y}'_0(1) - m_2 a_2 \dot{y}_0(1) + \frac{1}{J} J_2^* [(x + a_1, \dot{y}_0(x)) + m_2^* \dot{y}_0(1) + J_2^* \dot{y}'_0(1)] \right\} + \\ & \left. + \frac{1}{J} m_2^* [(x + a_1, \dot{y}_0(x)) + m_2^* \dot{y}_0(1) + J_2^* \dot{y}'_0(1)] \right\} - \\ & - \int_0^T v_{xt}(1, t) \left\{ - (J_2 + m_2 a_2^2) y_{xt}(1, t) - m_2 a_2 y_t(1, t) + \frac{1}{J} J_2^* [(x + a_1, y_t(x, t)) + m_2^* y_t(1, t) + \right. \\ & \left. + J_2^* y_{xt}(1, t)] \right\} dt + \int_0^T (y_{xx}(x, t), v_{xx}(x, t)) dt + \frac{1}{J} \int_0^T M(t) \{ m_2^* v(1, t) + J_2^* v_x(1, t) \} dt. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Объединяя (3.30)–(3.34), получим выражение

$$\begin{aligned} (y_t(x, t), v_t(x, t))_{H(Q_T)} - (y_{xx}(x, t), v_{xx}(x, t))_{L_2(Q_T)} - J_1^{-1}((x + a_1)M(t), v(x, t))_{H(Q_T)} + \\ + \langle \dot{y}_0(x), v(x, 0) \rangle = 0. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Пусть

$$y_0(x) \in H^2(0, 1), \quad \dot{y}_0(x) \in H(0, 1). \tag{3.36}$$

Под обобщенным решением начально-краевой задачи (3.3)–(3.5), определенным в области  $Q(T)$  с начальными условиями (3.36), будем понимать функцию  $y(x, t) \in H^2(Q_T)$ ,  $y(x, 0) = y_0(x)$ , удовлетворяющую интегральному соотношению (3.35) для любой функции  $v(x, t)$  вида (3.28).

Покажем, что обобщенное решение начально-краевой задачи (3.3)–(3.5) существует, единственно, а также получим формулу, его определяющую.

Докажем сначала следующую теорему.

**Теорема 3.1.** *Решение начально-краевой задачи (3.3)–(3.5) единственно.*

*Доказательство.* Предположив существование двух решений  $y_1(x, t)$  и  $y_2(x, t)$ . Для их разности  $y(x, t)$  получим интегральное соотношение

$$(y_t(x, t), v_t(x, t))_{H(Q_T)} - (y_{xx}(x, t), v_{xx}(x, t))_{L_2(Q_T)} = 0. \tag{3.37}$$

Необходимо показать, что существует лишь одна, тождественно равная нулю в  $Q(T)$  функция  $y(x, t)$ , удовлетворяющая соотношению (3.37) для любой функции  $v(x, t)$  вида (3.28).

Выберем в качестве  $v(x, t)$  функцию

$$v(x, t) = \begin{cases} \int_t^\tau y(x, \xi) d\xi, & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau \leq t < T, \end{cases} \tag{3.38}$$

зависящую от параметра  $0 < \tau < T$ .

Отметим, что

$$v_t(x, t) = \begin{cases} -y(x, t), & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau \leq t < T. \end{cases}$$

Подставив (3.38) в (3.37), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle y_t(x, t), v_t(x, t) \rangle dt &= - \int_0^T \langle y_t(x, t), y(x, t) \rangle dt = -\frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} \langle y(x, t), y(x, t) \rangle dt = -\frac{1}{2} \langle y(x, \tau), y(x, \tau) \rangle, \\ &= \int_0^1 \int_0^T (y_{xx}(x, t), v_{xx}(x, t))_{L_2(0,1)} dt = \int_0^1 \int_0^{\tau} \int_t^{\tau} y_{xx}(x, t) y_{xx}(x, \xi) d\xi dt dx = \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{\tau} y_{xx}(x, t) dt \int_t^{\tau} y_{xx}(x, \xi) d\xi \right) dx = \int_0^1 \left( \int_0^{\tau} y_{xx}(x, \xi) d\xi \int_0^{\xi} y_{xx}(x, t) dt \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \int_0^{\tau} y_{xx}(x, t) dt \right)^2 dx. \end{aligned}$$

В итоге равенство (3.37) примет вид

$$\frac{1}{2} \langle y(x, \tau), y(x, \tau) \rangle + \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \int_0^{\tau} y_{xx}(x, t) dt \right)^2 dx = 0,$$

из которого в силу произвольности  $\tau$  следует, что  $y(x, t) \equiv 0$ . Отсюда следует единственность решения.  $\square$

Перейдем теперь к доказательству существования обобщенного решения начально-краевой задачи (3.3)–(3.5).

Представим

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{-1} a_{0n} v_n(x), \quad a_{0n} = \omega_n \langle y_0(x), v_n(x) \rangle, \quad \|y_0(x)\|_{H^2} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n}^2 \right)^{1/2} < \infty, \quad (3.39)$$

$$\dot{y}_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{0n} v_n(x), \quad b_{0n} = \langle \dot{y}_0(x), v_n(x) \rangle, \quad \|\dot{y}_0(x)\|_H = \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_{0n}^2 \right)^{1/2} < \infty. \quad (3.40)$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.2.** *Величины*

$$d_n = \langle x + a_1, v_n(x) \rangle \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad d_n = O(n^{-1}) \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (3.41)$$

*Доказательство.* Подставим  $v_n(x)$  и  $\lambda_n = \omega_n^2$  в (3.9)–(3.10), умножим уравнение (3.9) на  $x + a_1$  и проинтегрируем по отрезку  $[0, 1]$  с учетом краевых условий (3.10). В результате получим равенство

$$\omega_n^2 d_n = -(a_1 v_n'''(0) - v_n''(0)). \quad (3.42)$$

Предположим, что  $d_n = 0$  для некоторого  $n$ . Тогда из (3.42) следует равенство  $a_1 v_n'''(0) - v_n''(0) = 0$ . Учитывая это в (3.21) и используя первое краевое условие (3.10), получим равенства

$$A_n + C_n = 0, \quad B_n + D_n = 0. \quad (3.43)$$

Подставив найденные в (3.24) выражения для  $A_n$  и  $C_n$  в (3.43), имеем равенство

$$\begin{aligned} &2a_1(\operatorname{ch} \beta_n + \cos \beta_n) + 2a_1 \beta_n^2 m_2 (a_1 + a_2)(\operatorname{ch} \beta_n - \cos \beta_n) + \\ &+ 2a_1 \beta_n (m_2 + a_1)(\operatorname{sh} \beta_n - \sin \beta_n) + \beta_n^2 m_2 a_1 a_2 (\operatorname{sh} \beta_n + \sin \beta_n) = 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Так как при положительных  $\beta_n$  выполнены неравенства  $\operatorname{sh} \beta_n + \sin \beta_n > 0$ ,  $\operatorname{ch} \beta_n + \cos \beta_n > 0$ ,  $\operatorname{sh} \beta_n - \sin \beta_n > 0$  и  $\operatorname{ch} \beta_n - \cos \beta_n > 0$ , левая часть (3.44) строго больше нуля. Это означает ошибочность предположения  $d_n = 0$  для некоторого  $n$ . При  $\beta \rightarrow \infty$  левая часть уравнения (3.23) стремится к выражению  $p(\beta) \equiv \cos \beta + O(\beta^{-1})$ . В связи с этим  $\beta_n \sim \pi(2n+1)/2$  при  $n \rightarrow \infty$ , а функции  $v_n(x)$  стремятся к балочным функциям [20]

$$v_n^*(x) = (\sin \beta_n - \operatorname{sh} \beta_n)(\operatorname{ch}(\beta_n x) - \cos(\beta_n x)) + (\operatorname{ch} \beta_n - \cos \beta_n)(\operatorname{sh}(\beta_n x) - \sin(\beta_n x)) / (v_n^*(x), v_n^*(x))_{L_2}^{1/2},$$

соответствующим условиям заземления с обоих концов, в которых  $(v_n^*(x), v_n^*(x))_{L_2}^{1/2} = \exp(\beta_n)/2(1 + O(\beta_n^{-1}))$  при  $n \rightarrow \infty$ . С учетом этого имеем справедливость второго утверждения теоремы.  $\square$

В результате справедливо представление

$$x + a_1 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n v_n(x), \quad d_n = \langle x + a_1, v_n(x) \rangle, \quad \|x + a_1\|_H = \left( \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \right)^{1/2} < \infty. \quad (3.45)$$

Выберем в качестве  $y_0(x) = a_{0n} v_n(x) \omega_n^{-1}$ ,  $\dot{y}_0(x) = b_{0n} v_n(x)$ , и пусть в правой части уравнения (3.3) вместо функции  $x + a_1$  стоит функция  $d_n v_n(x)$ . Здесь  $a_{0n}, b_{0n}$  — некоторые постоянные. Полагаем также  $M(t) \in L_2(0, T)$ . Тогда функция

$$y_n(x, t) = v_n(x) (a_{0n} \omega_n^{-1} \cos(\omega_n t) + b_{0n} \omega_n^{-1} \sin(\omega_n t) - \frac{1}{J_1} d_n \int_0^t \omega_n^{-1} \sin(\omega_n(t - \tau)) M(\tau) d\tau) \quad (3.46)$$

является обобщенным решением начально-краевой задачи (3.3)–(3.5), удовлетворяющим выше-названным начальным условиям. Это проверяется непосредственной подстановкой (3.46) в (3.35) с учетом разложения

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{-1} f_n(t) v_n(x), \quad f_n(t) = \omega_n \langle v(x, t), v_n(x) \rangle, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(t) < \infty, \\ f_n(t) \in W_2^1(0, T), \quad f_n(T) = 0.$$

Аналогичное утверждение справедливо, если

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^N \omega_n^{-1} a_{0n} v_n(x), \quad \dot{y}_0(x) = \sum_{n=1}^N b_{0n} v_n(x)$$

и в правой части уравнения (3.3) вместо функции  $x + a_1$  стоит ряд  $\sum_{n=1}^N d_n v_n(x)$ . В этом случае обобщенное решение начально-краевой задачи (3.3)–(3.5) будет представлено суммой  $y_N(x, t) = \sum_{n=1}^N y_n(x, t)$ .

Покажем теперь, что ряд вида

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \omega_n^{-1} (a_{0n} \cos(\omega_n t) + b_{0n} \sin(\omega_n t) - \frac{1}{J_1} d_n \int_0^t \sin(\omega_n(t - \tau)) M(\tau) d\tau), \quad (3.47)$$

где  $a_{0n}, b_{0n}, d_n$  определен в (3.39), (3.40) и (3.45) и дает обобщенное решение начально-краевой задачи (3.3)–(3.5), принадлежащее  $H^2(Q_T)$  и удовлетворяющее начальным условиям  $y(x, 0) = y_0(x)$ ,  $y_t(x, 0) = \dot{y}_0(x)$ . Отметим, что согласно (3.39), (3.40) решение (3.47) удовлетворяет начальным условиям.

Любой конечный отрезок ряда (3.47) является обобщенным решением начально-краевой задачи (3.3)–(3.5), т. е. (3.47) является формальным обобщенным решением. Докажем сходимость (3.47) в норме пространства  $H^2(Q_T)$ . Формально дважды дифференцируя по  $x$ , имеем

$$y_{xx}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n''(x) \omega_n^{-1} (a_{0n} \cos(\omega_n t) + b_{0n} \sin(\omega_n t) - \frac{1}{J_1} d_n \int_0^t \sin(\omega_n(t - \tau)) M(\tau) d\tau).$$

С учетом равенств (3.20), (3.25) оценим

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{n=N}^{N+m} v_n''(x) \omega_n^{-1} \left( a_{0n} \cos(\omega_n t) + b_{0n} \sin(\omega_n t) - \frac{1}{J_1} d_n \int_0^t \sin(\omega_n(t-\tau)) M(\tau) d\tau \right) \right\|_{L_2(Q_T)}^2 = \\
& = \sum_{n=N}^{N+m} \int_0^T \left( a_{0n} \cos(\omega_n t) + b_{0n} \sin(\omega_n t) - \frac{1}{J_1} d_n \int_0^t \sin(\omega_n(t-\tau)) M(\tau) d\tau \right)^2 dt \leq \\
& \leq 3 \sum_{n=N}^{N+m} \int_0^T \left( a_{0n}^2 \cos^2(\omega_n t) + b_{0n}^2 \sin^2(\omega_n t) + \left( \frac{1}{J_1} d_n \right)^2 \left( \int_0^t \sin(\omega_n(t-\tau)) M(\tau) d\tau \right)^2 \right) dt \leq \\
& \leq 3T \sum_{n=N}^{N+m} \left( a_{0n}^2 + b_{0n}^2 + \left( \frac{1}{J_1} d_n \right)^2 \|M(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right). \tag{3.48}
\end{aligned}$$

В (3.48) использовано неравенство  $2ab \leq a^2 + b^2$ . Согласно (3.39), (3.40), (3.45) величина (3.48) может быть сделана за счет выбора  $N$  и  $m$  меньше любого заданного  $\varepsilon > 0$ . Аналогично для

$$y_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \left( -a_{0n} \sin(\omega_n t) + b_{0n} \cos(\omega_n t) - \frac{1}{J_1} d_n \int_0^t \cos(\omega_n(t-\tau)) M(\tau) d\tau \right)$$

имеем

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{n=N}^{N+m} v_n(x) \left( -a_{0n} \sin(\omega_n t) + b_{0n} \cos(\omega_n t) - \frac{1}{J_1} d_n \int_0^t \cos(\omega_n(t-\tau)) M(\tau) d\tau \right) \right\|_{H(Q_T)}^2 = \\
& = \sum_{n=N}^{N+m} \int_0^T \left( -a_{0n} \sin(\omega_n t) + b_{0n} \cos(\omega_n t) - \frac{1}{J_1} d_n \int_0^t \cos(\omega_n(t-\tau)) M(\tau) d\tau \right)^2 dt \leq \\
& \leq 3 \sum_{n=N}^{N+m} \int_0^T \left( a_{0n}^2 \sin^2(\omega_n t) + b_{0n}^2 \cos^2(\omega_n t) + \left( \frac{1}{J_1} d_n \right)^2 \left( \int_0^t \cos(\omega_n(t-\tau)) M(\tau) d\tau \right)^2 \right) dt \leq \\
& \leq 3T \sum_{n=N}^{N+m} \left( a_{0n}^2 + b_{0n}^2 + \left( \frac{1}{J_1} d_n \right)^2 \|M(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right). \tag{3.49}
\end{aligned}$$

Величина (3.49) также согласно (3.39), (3.40), (3.45) за счет выбора  $N$  и  $m$  может быть сделана меньше любого заданного  $\varepsilon > 0$ . Это означает, что последовательность частичных сумм ряда (3.47) фундаментальна в пространстве  $H^2(Q_T)$ . В силу полноты этого пространства ряд (3.47) сходится к функции  $y(x, t) \in H^2(Q_T)$ . Существование обобщенного решения начально-краевой задачи (3.3)–(3.5) доказано.

Из (3.39), (3.40), (3.45) и (3.48), (3.49) для решения (3.47) вытекает оценка

$$\|y(x, t)\|_{H^2(Q_T)} \leq C \left( \|y_0(x)\|_{H^2}^2 + \|\dot{y}_0(x)\|_H^2 + \|x + a_1\|_H^2 \|M(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right)^{1/2}, \tag{3.50}$$

где  $C > 0$  — некоторая постоянная. Неравенство (3.50) доказывает корректность поставленной задачи.

Построим теперь обобщенное решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям (2.4). Пусть функция

$$p(t) \in W_2^1(0, T), \quad p(T) = 0. \tag{3.51}$$

Умножим уравнение (2.1) на  $p(t)$  и проинтегрируем по  $t \in [0, T]$ :

$$J \int_0^T \ddot{\theta}(t) p(t) dt + \int_0^T \int_0^1 (x + a_1) y_{tt}(x, t) dx + m_2(1 + a_1 + a_2) y_{tt}(1, t) +$$

$$+[m_2 a_2(1+a_1+a_2)+J_2]y_{xtt}(1,t)]p(t)dt = \int_0^T M(t)p(t)dt, \quad (3.52)$$

Вычисляя интегралы, входящие в (3.52), по частям, будем иметь

$$\begin{aligned} -J \int_0^T \dot{\theta}(t)\dot{p}(t)dt - J\dot{\theta}_0 p(0) - p(0) \int_0^1 (x+a_1)\dot{y}_0(x)dx - \int_0^T \dot{p}(t) \int_0^1 (x+a_1)y_t(x,t)dxdt - \\ - m_2(1+a_1+a_2)[\dot{y}_0(1)p(0) + \int_0^T y_t(1,t)\dot{p}(t)dt] - \\ - [m_2 a_2(1+a_1+a_2)+J_2][\dot{y}_{0x}(1)p(0) + \int_0^T y_{tx}(1,t)\dot{p}(t)dt] = \int_0^T M(t)p(t)dt, \end{aligned}$$

что эквивалентно равенству

$$\int_0^T \left( J\dot{\theta}(t)\dot{p}(t) + \frac{J}{J_1} \langle x+a_1, y_t(x,t) \rangle \dot{p}(t) \right) dt + J\dot{\theta}_0 p(0) + \frac{J}{J_1} \langle x+a_1, \dot{y}_0(x) \rangle p(0) + \int_0^T M(t)p(t)dt = 0. \quad (3.53)$$

Под обобщенным решением уравнения (2.1) будем понимать функцию  $\theta(t) \in W_2^1(0,T)$ ,  $\theta(0) = \theta_0$ , удовлетворяющую интегральному равенству (3.53) для любой функции  $p(t)$  вида (3.51).

Легко видеть, что искомым решением уравнения (2.1) будет функция

$$\begin{aligned} \theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t + \frac{1}{J_1} (\langle x+a_1, \dot{y}_0(x) \rangle t - \int_0^t \langle x+a_1, y_{t_1}(x, t_1) \rangle dt_1) + \frac{1}{J} \int_0^t (t-t_1)M(t_1)dt_1 = \\ = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t + \frac{1}{J_1} (\langle x+a_1, \dot{y}_0(x) \rangle t - \langle x+a_1, y(x,t) \rangle + \langle x+a_1, y_0(x) \rangle) + \frac{1}{J} \int_0^t (t-t_1)M(t_1)dt_1. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Сформулируем сказанное в виде итоговой теоремы.

**Теорема 3.3.** *Обобщенное решение  $\theta(t), y(x,t)$  начально-краевой задачи (2.1)–(2.4) в области  $Q_T$  с начальными условиями  $\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, y_0(x) \in H^2(0,1), \dot{y}_0(x) \in H(0,1)$  существует, единственно и представимо в виде (3.47), (3.54). При этом  $\theta(t) \in W_2^1(0,T), y(x,t) \in H^2(Q_T)$ , и для решения справедлива оценка (3.50).*

#### 4. ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Выберем

$$y_0(x), y_T(x) \in H^3(0,1), \quad \dot{y}_0(x), \dot{y}_T(x) \in H^1(0,1) \quad (4.1)$$

и переформулируем задачу 2.1 с учетом (3.47), (3.54) следующим образом: найти минимум функционала (2.5) при ограничениях

$$\dot{\theta}_T = \dot{\theta}_0 + J_0^{-1} (\langle x+a, \dot{y}_0(x) \rangle - \langle x+a, \dot{y}_T(x) \rangle) + J^{-1} \int_0^T M(\tau)d\tau,$$

$$\theta_T = \theta_0 + \dot{\theta}_0 T + J_0^{-1} (\langle x+a, \dot{y}_0(x) \rangle T + \langle x+a, y_0(x) \rangle - \langle x+a, y_T(x) \rangle) + J^{-1} \int_0^T (T-\tau)M(\tau)d\tau,$$

$$a_{Tn} = a_{0n} \cos(\omega_n T) + b_{0n} \sin(\omega_n T) - J_1^{-1} d_n \int_0^T \sin(\omega_n(T-\tau))M(\tau)d\tau,$$

$$b_{Tn} = -a_{0n} \sin(\omega_n T) + b_{0n} \cos(\omega_n T) - J_1^{-1} d_n \int_0^T \cos(\omega_n(T - \tau)) M(\tau) d\tau, \quad (4.2)$$

$$a_{Tn} = \omega_n \langle y_T(x), v_n(x) \rangle, \quad b_{Tn} = \langle \dot{y}_T(x), v_n(x) \rangle \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Отметим, что первое условие (3.41) является необходимым условием управляемости поведением решений начально-краевой задачи (2.1)–(2.4).

Преобразуем равенства (4.2) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \int_0^T M(t) dt &= \alpha_1(T) = J(\dot{\theta}_T - \dot{\theta}_0) + J J_1^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} d_n (b_{Tn} - b_{0n}), \\ \int_0^T t dt &= \alpha_2(T) = J(\theta_0 - \theta_T - \dot{\theta}_T T) + J J_1^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} d_n (a_{0n} \omega_n^{-1} - a_{Tn} - b_{Tn} T), \\ \int_0^T \sin(\omega_n t) M(t) dt &= \alpha_{2n+1}(T) = J_1 d_n^{-1} (a_{Tn} \cos(\omega_n T) - b_{Tn} \sin(\omega_n T) - a_{0n}), \\ \int_0^T \cos(\omega_n t) M(t) dt &= \alpha_{2n+2}(T) = J_1 d_n^{-1} (-a_{Tn} \sin(\omega_n T) - b_{Tn} \cos(\omega_n T) + b_{0n}), \end{aligned} \quad (4.3)$$

$n = 1, 2, \dots$

Отметим, что согласно (3.41) и свойств функций (4.1) справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2(T) < \infty. \quad (4.4)$$

Обозначим через  $Q_2(0, T)$  подпространство  $L_2(0, T)$ , являющееся замкнутой (в норме этого пространства) линейной оболочкой функций

$$\varphi_1(t) = 1, \quad \varphi_2(t) = t, \quad \varphi_{2n+1}(t) = \sin(\omega_n t), \quad \varphi_{2n+2}(t) = \cos(\omega_n t) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4.5)$$

**Теорема 4.1.** *Функции (4.5) образуют базис Рисса в  $Q_2(0, T)$ .*

*Доказательство.* Покажем сначала, что для некоторого  $N$  функции

$$\varphi_{2(N+j)+1}(t), \quad \varphi_{2(N+j)+2}(t) \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (4.6)$$

образуют базис Рисса в подпространстве  $Q_2^N(0, T)$ , являющимся замкнутой линейной оболочкой в  $L_2(0, T)$  функций (4.6). Согласно [2, с. 48], для этого необходимо и достаточно, чтобы собственные значения матриц Грамма

$$G_m^N = \{g_{pq}\}, \quad g_{pq} = (\varphi_p(t), \varphi_q(t))_{L_2(0, T)}, \quad p, q = 2(N+j)+1, 2(N+j)+2, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (4.7)$$

были в совокупности отделены от нуля и бесконечности. Из вида функции (4.7) с учетом соотношения  $\omega_n \sim [\pi/2(2n+1)]^2$  при  $n \rightarrow \infty$  имеем

$$g_{2(N+j)+1, 2(N+j)+1}, g_{2(N+j)+2, 2(N+j)+2} = T/2 + O((N+j)^{-2}), \quad g_{2(N+j)+1, 2(N+j)+2} = O((N+j)^{-2})$$

при  $(N+j) \rightarrow \infty$ , и

$$g_{2(N+j)+1, 2(N+k)+1}, g_{2(N+j)+1, 2(N+k)+2} = O([(2N+j+k)(j-k)]^{-1})$$

при  $j \neq k$ ,  $j, k = 1, 2, \dots, m$ ,  $|(2N+j+k)(j-k)| \rightarrow \infty$ .

В связи с этим характеристическое уравнение матрицы  $G_m^N$  порядка  $2m$  будет иметь вид  $(T/2 - \lambda)^{2m} + O(N^{-1})$ . Отсюда следует совокупная отделенность от нуля и бесконечности собственных значений матриц  $G_m^N$ . Таким образом, функции (4.6) образуют базис Рисса в  $Q_2^N(0, T)$ .

Добавление к функциям (4.6) конечного числа линейно независимых функций не меняет свойства базиса. Следовательно, функции (4.5) образует базис Рисса в  $Q_2(0, T)$ . Это означает, что собственные значения  $\lambda_j > 0$  бесконечной матрицы Грамма  $G$ , построенной по системе функций (4.5), в совокупности отделены от нуля и бесконечности, т. е. существуют постоянные  $m_g, M_g > 0$ , для которых  $m_g < \lambda_j < M_g$  ( $j = 1, 2, \dots$ ). Таким образом, справедливо неравенство

$$m_g \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 < \sum_{j,k=1}^{\infty} g_{jk} \xi_j \xi_k < M_g \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 \tag{4.8}$$

для любого  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$ ,  $\|\xi\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 < \infty$ . □

Произвольный линейный непрерывный функционал в пространстве  $L_2(0, T)$  запишем в виде

$$F_2(u) = (u(t), M(t))_{L_2(0,T)}, \quad M(t) \in L_2(0, T), \quad \|F_2\| = \|M(t)\|_{L_2(0,T)}. \tag{4.9}$$

Задача 2.1 построения оптимального управления на основании (2.1), (4.3), (4.9) сводится к следующей проблеме моментов в пространстве  $L_2(0, T)$ .

**Задача.** Найти функционал вида (4.9), удовлетворяющий условиям

$$F_2(\varphi_j(t)) = \alpha_j(T), \quad j = 1, 2, \dots \tag{4.10}$$

и имеющий минимальную норму  $\|F_2\|_{min} = m_{2T}$ .

По системе функций  $\varphi_j(t)$  построим ортонормированную в  $L_2(0, T)$  систему функций  $\psi_j(t)$ , используя ортогонализацию Шмидта (см., например, [2, с. 26]). Для этого положим

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1(t) &= \varphi_1(t), & \psi_1(t) &= \bar{\psi}_1(t)/\eta_1, \\ \bar{\psi}_2(t) &= \varphi_2(t) - \alpha_{21}\psi_1(t), & \psi_2(t) &= \bar{\psi}_2(t)/\eta_2, \\ &\dots & & \\ \bar{\psi}_n(t) &= \varphi_n(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{nj}\psi_j(t), & \psi_n(t) &= \bar{\psi}_n(t)/\eta_n, \\ \alpha_{nj} &= (\varphi_n(t), \psi_j(t))_{L_2(0,T)}, & \eta_n &= \|\bar{\psi}_n(t)\|_{L_2(0,T)}. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение величины  $\beta_n(T)$  по следующей схеме:

$$\begin{aligned} \beta_1(T) &= \alpha_1(T)/\eta_1, \\ \beta_2(T) &= (\alpha_2(T) - \alpha_{21}\beta_1(T))/\eta_2, \\ &\dots \\ \beta_n(T) &= (\alpha_n(T) - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{nj}\beta_j(T))/\eta_n. \end{aligned}$$

Эти соотношения определяют бесконечномерную нижнюю треугольную матрицу  $B(T) = \{B_{ij}(T)\}_{i,j=1,\dots,\infty}$ , которая задает ограниченный и ограниченно обратимый в пространстве  $l_2$  оператор  $\beta(T) = B(T)\alpha(T)$ ,  $\beta(T) = (\beta_1(T), \beta_2(T), \dots)$ ,  $\alpha(T) = (\alpha_1(T), \alpha_2(T), \dots)$ . Непосредственно вычисляя, находим

$$\psi_1(t) = T^{-1/2}, \psi_2(t) = 3^{1/2}(-T^{-1/2} + 2 \cdot T^{-3/2}t), \dots$$

$$\beta_1(T) = T^{-1/2}\alpha_1(T), \beta_2(T) = 3^{1/2}(-T^{-1/2}\alpha_1(T) + 2T^{-3/2}\alpha_2(T)), \dots$$

Отметим, что остальные  $\beta_n(T)$  имеют аналогичную зависимость от  $T$ :  $\lim_{T \rightarrow 0} \beta_n(T) = \infty$ ,

$\lim_{T \rightarrow \infty} \beta_n(T) = 0$ . В связи с этим и (4.4)

$$m_2(T) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2(T)\right)^{1/2} < \infty, \quad \lim_{T \rightarrow 0} m_2(T) = \infty, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} m_2(T) = 0. \tag{4.11}$$

**Теорема 4.2.** *Существует единственная функция*

$$M^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(T) \psi_n(t), \quad \|M^*(t)\|_{L_2(0,T)} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^2(T) \right)^{1/2} = m_2(T), \quad (4.12)$$

дающая решение задачи 2.1.

*Доказательство.* Представим  $L_2(0, T) = Q_2(0, T) \oplus P_2(0, T)$ , где

$$P_2(0, T) = \{u(t) \in L_2(0, T), (u(t), \psi_j(t))_{L_2(0,T)} = 0, j = 1, 2, \dots\}.$$

Условия (4.10) эквивалентны условиям

$$F_2(\psi_j(t)) = \beta_j(T) \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (4.13)$$

Произвольная функция  $M(t) \in L_2(0, T)$ , определяющая функционал (4.9), удовлетворяющий условиям (4.13), имеет вид  $M(t) = M^*(t) + P(t)$ , где  $P(t) \in P_2(0, T)$ , но

$$\|M(t)\|_{L_2(0,T)}^2 = \|M^*(t)\|_{L_2(0,T)}^2 + \|P(t)\|_{L_2(0,T)}^2.$$

Отсюда  $\min \|M(t)\|_{L_2(0,T)} = \|M^*(t)\|_{L_2(0,T)} = m_2(T)$ .  $\square$

Обозначим через  $S(m_2(T))$  множество функционалов вида (4.9), имеющих норму  $m_2(T)$ , каждый из которых характеризуется функцией  $M(t)$ . Имеющий единичную норму элемент  $e_0(t) = M^*(t)/\|M^*(t)\|_{L_2(0,T)}$  назовем *экстремальным*. Обобщением функционального подхода к задачам оптимального управления, предложенного в монографии [10], на рассматриваемый бесконечномерный случай является следующее из вышесказанного утверждение.

**Теорема 4.3** (принцип максимума). *Оптимальный функционал  $F_2^*(u)$  вида (4.9), определяемый функцией  $M^*(t)$ , выделяется из всех функционалов вида (4.9), имеющих ту же норму  $m_2(T)$ , следующим свойством максимума на экстремальном элементе:*

$$F_2^*(e_0) = \max_{F(u) \in S(m_2(T))} F(e_0).$$

Обозначим через  $T^*$  первый положительный корень уравнения  $m(T) = L_1$ , существование которого следует из (4.11).

**Теорема 4.4.** *Решение задачи 2.2 дает пара  $(T^*, M^*(t))$ , где  $M^*(t)$  определяется формулой (4.12).*

Рассмотрим теперь решение задач 2.3 и 2.4. Запишем произвольный линейный непрерывный функционал в пространстве  $L_1(0, T)$  в виде

$$F_1(u) = \int_0^T u(t) M_1(t) dt, \quad \|F_1\| = \|M_1(t)\|_{L_\infty}. \quad (4.14)$$

С учетом (2.3), (4.3), (4.14) задача 2.3 может быть сформулирована как следующая проблема моментов в  $L_1(0, T)$ .

**Задача.** *Найти функционал вида (4.14), удовлетворяющий условиям*

$$F_1(\varphi_j(t)) = \alpha_j(T) \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (4.15)$$

*и имеющий минимальную норму  $\|F_1\|_{min} = m_1(T)$ .*

Отметим, что указанная проблема моментов при конечном числе ограничений (4.15) рассмотрена в [11]. Некоторые результаты [11] могут быть перенесены на рассматриваемый случай.

Обозначим через  $Q_1(0, T)$  подпространство  $L_1(0, T)$ , полученное замыканием в норме пространства  $L_1(0, T)$  множества функций вида  $u_N(t) = \sum_{j=1}^N \xi_j \varphi_j(t)$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$ . В силу соотношения  $\|u_N(t)\|_{L_1(0,T)} \leq T \|u_N(t)\|_{L_2(0,T)}^2$  и неравенства (4.8),  $Q_1(0, T)$  является замкнутым линейным подпространством  $L_1(0, T)$ .

Введем двойственную к проблеме моментов задачу.

**Задача.** *Найти*

$$\min_{\xi \in l_2} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0,T)} = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^* \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0,T)} = \|u^*(t)\|_{L_1(0,T)} = l_1(T)^{-1} \quad (4.16)$$

при условии  $\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \alpha_j(T) = 1$ .

**Теорема 4.5.**  $m_1(T) = l_1(T)$ .

*Доказательство.* Для любых  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$  и  $N > 0$  согласно (4.15)

$$\left| \sum_{j=1}^N \xi_j \alpha_j(T) \right| = \left| F_1 \left( \sum_{j=1}^N \xi_j \varphi_j(t) \right) \right| \leq \|F_1\| \left\| \sum_{j=1}^N \xi_j \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0,T)} \leq \|F_1\| \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0,T)}.$$

Отсюда

$$\|F_1\|^{-1} \leq \min_{\xi \in l_2} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0,T)} / \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \alpha_j(T) = \min_{\xi \in l_2, \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \alpha_j(T) = 1} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0,T)}.$$

Таким образом,  $\|F_1\| \geq l_1(T)$  и  $m_1(T) \geq l_1(T)$ .

Определим в  $Q_1(0, T)$  функционал

$$\Phi(u) = \Phi \left( \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \varphi_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \alpha_j(T) \quad (\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2).$$

Норма  $\Phi(u)$  в  $Q_1(0, T)$  равна

$$\|\Phi\| = \sup_{u \in Q_1(0,T)} \Phi(u) / \|u\|_{L_1(0,T)} = \sup_{\xi \in l_2} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \alpha_j(T) \right| / \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0,T)} = l_1(T). \quad (4.17)$$

Продолжим функционал  $\Phi(u)$  на все пространство  $L_1(0, T)$  с сохранением нормы (теорема Хана–Банаха, см., например, [9, с. 236]). Этот функционал обозначим  $F_1^*(u)$ . Соответственно имеем  $F_1^*(\varphi_j) = \alpha_j(T)$  ( $j = 1, 2, \dots$ ). Следовательно,  $m_1(T) = l_1(T)$ .  $\square$

Отсюда на основании (4.14), (4.16) имеем следующее утверждение.

**Теорема 4.6.** *Решение задачи 2.3 дается формулой*

$$M_1^*(t) = l_1(T) \operatorname{sign}(u^*(t)). \quad (4.18)$$

Отметим, что согласно (4.16)

$$|F_1^*(u^*)| = l(T) \|u^*(t)\|_{L_1(0,T)} = 1. \quad (4.19)$$

Очевидно, что справедливо и обратное. Если для некоторого элемента  $u^*(t) \in Q_1(0, T)$  выполнено (4.19), то для  $u^*(t)$  выполнено (4.17) и  $u^*(t)$  является решением двойственной задачи.

Пространство  $L_1(0, T)$  не является строго нормированным. Поэтому равенство (4.19) и соответственно решение двойственной задачи (4.16) справедливо не для единственного элемента.

Пусть  $u^*(t)$  и  $v^*(t)$  — решения задачи (4.16). Тогда для функционала  $F_1(u)$  вида (4.14), дающего решение проблемы моментов (4.15), в котором  $M^*(t)$  определяется согласно (4.18), справедливы на основании (4.17), (4.19) равенства  $|F_1(u^*)| = |F_1(v^*)| = 1$ . Но тогда на основании (4.14) почти всюду  $l(T) \operatorname{sign}(u^*(t)) = l(T) \operatorname{sign}(v^*(t))$ . Таким образом, решение задачи 2.3 единственно.

Обозначим через  $S(m_1(T))$  множество функционалов вида (4.14), имеющих норму  $m_1(T)$ , каждый из которых характеризуется функцией  $M_1(t)$ . Имеющий единичную норму элемент  $e_0(t) = u^*(t) / \|u^*(t)\|_{L_1(0,T)}$  назовем *экстремальным*.

**Теорема 4.7** (принцип максимума). *Оптимальный функционал  $F_1^*(u)$  вида (4.14), определяемый функцией  $M_1^*(t)$ , выделяется из всех функционалов вида (4.14), имеющих ту же норму  $m_1(T)$ , следующим свойством максимума на любом экстремальном элементе:*

$$F_1^*(e_0) = \max_{M_1(t) \in S(m_1(T))} F_1(e_0).$$

Из (4.16) следует

$$\lim_{T \rightarrow 0} m_1(T) = \infty, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} m_1(T) = 0. \quad (4.20)$$

Обозначим через  $T^*$  первый положительный корень уравнения  $m_1(T) = L_2$ .

**Теорема 4.8.** *Решение задачи 2.4 дает пара  $(T^*, M_1^*(t))$ , где  $M_1^*(t)$  определяется формулой (4.18).*

Остановимся на практическом вычислении элемента  $u^*(t)$ . Отметим, что  $Q_2(0, T) \subset Q_1(0, T)$ . Рассмотрим функцию

$$v^*(t) = M^*(t)/m_2^2(T), \quad (4.21)$$

где  $M^*(t), m_2(T)$  определены согласно (4.12). В результате имеем

$$F_1(v^*(t)) = F_1\left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j(T)\psi_j(t)\right)/m_2^2(T) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^2(T)/m_2^2(T) = 1.$$

Таким образом,  $v^*(t)$  является решением (4.14) и  $\|v^*(t)\|_{L_1(0, T)} = l^{-1}(T)$ . Следовательно,

$$M_1^*(t) = l^{-1}(T) \operatorname{sign}(v^*(t)). \quad (4.22)$$

Таким образом, выражения (4.21), (4.22) устанавливают взаимосвязь между решениями задач 2.1 и 2.3. Отметим, что в работе [14] приведены примеры использования изложенной схемы построения решений задачи 2.3. Показано, что функция  $M_1^*(t)$  может иметь большое число переключений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. К теории стабилизации спутников с упругими стержнями // Изв. РАН. Теор. и сист. управ. — 2004. — № 6. — С. 150–163.
2. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966.
3. Бербюк В. Е. Динамика и оптимизация робототехнических систем. — Киев: Наукова думка, 1989.
4. Войтицкий В. И., Злобина М. Ю., Кубышкин Е. П. О спектральной задаче, возникающей в механике манипуляционных роботов // Модел. и анализ инф. сист. — 2009. — 16, № 3. — С. 22–28.
5. Гарнизина М. Ю., Кубышкин Е. П. Оптимальное управление поворотом твердого тела с наследственно вязкоупругим стержнем // Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 2006. — № 5. — С. 29–41.
6. Зеликин М. И., Маньта Л. А. Накопление переключений управления в задачах с распределенными параметрами // Соврем. мат. Фундам. Направл. — 2006. — 19. — С. 78–113.
7. Злочевский С. И., Кубышкин Е. П. О влиянии колебаний упругих элементов с распределенными массами на ориентацию спутника // Косм. исслед. — 1987. — 25, № 4. — С. 537–544.
8. Злочевский С. И., Кубышкин Е. П. О стабилизации спутника с гибкими стержнями // Косм. исслед. — 1989. — 27, № 5. — С. 643–651.
9. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — СПб.: Нев. диалект, 2004.
10. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
11. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1973.
12. Кубышкин Е. П. Оптимальное управление поворотом твердого тела с гибким стержнем // Прикл. мат. мех. — 1992. — 56, № 2. — С. 240–249.
13. Кубышкин Е. П. Оптимальное управление поворотом системы двух тел, соединенных упругим стержнем // Прикл. мат. мех. — 2014. — 78, № 5. — С. 656–670.
14. Кубышкин Е. П., Солодовников П. А. Об одном алгоритме оптимального управления поворотом твердого диска с упругим стержнем // Динам. сист. — 2016. — 6, № 2. — С. 95–108.
15. Кубышкин Е. П., Тряхов М. С. Оптимальное управление поведением решений начально-краевой задачи, моделирующей вращение твердого тела с упругим стержнем // Модел. и анализ инф. сист. — 2014. — 21, № 5. — С. 72–92.
16. Кубышкин Е. П., Хребтюгова О. А. Обобщенное решение одной начально-краевой задачи, возникающей в механике дискретно-континуальных систем // Модел. и анализ инф. сист. — 2012. — № 1. — С. 84–96.
17. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
18. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970.

19. Русских С. В. Управляемый поворот космического аппарата с упругими панелями солнечных батарей // Изв. вузов. Сер. Машиностр. — 2016. — 12. — С. 97–105.
20. Челомей В. Н. (гл. ред.) и др. Вибрации в технике. Справочник. Т. 1. — М.: Машиностроение, 1978.
21. Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г. Манипуляционные роботы. — М.: Наука, 1989.
22. Gugat M. Controllability of a slowly rotating Timoshenko beam // ESAIM Control Optim. Calc. Var. — 2001. — 6. — С. 333–360.
23. Krabs W., Sklyar G. M. On the stabilizability of a slowly rotating Timoshenko beam // Z. Anal. Anwend. — 2000. — 19. № 1. — С. 131–145.
24. Krabs W., Sklyar G. M., Wozniak J. On the set of reachable states in the problem of controllability of rotating Timoshenko beams // J. Anal. Appl. — 2003. — 22, № 1. — С. 215–228.
25. Sakawa Y., Ito R., Fujii N. Optimal control of rotation of a flexible arm // В сб.: «Control Theory for Distributed Parameter Systems and Applications». — 1983. — С. 175–187.

Е. П. Кубышкин

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия

E-mail: kubysh.t@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-3-488-508

UDC 517.2+531.38

## Optimal Control of the Behavior of Solutions to an Initial-Boundary Value Problem Arising in the Mechanics of Discrete-Continuum Systems

© 2022 Е. П. Кубышкин

### REFERENCES

1. D. K. Andreychenko and K. P. Andreychenko, “K teorii stabilizatsii sputnikov s uprugimi sterzhnyami” [On the theory of stabilization of satellites with elastic rods], *Izv. RAN. Teor. i sist. uprav.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Theor. Control Syst.], 2004, No. 6, 150–163 (in Russian).
2. N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Teoriya lineynykh operatorov v gil’bertovom prostranstve* [Theory of Linear Operators in Hilbert Space], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
3. V. E. Berbyuk, *Dinamika i optimizatsiya robototekhnicheskikh sistem* [Dynamics and Optimization of Robotic Systems], Naukova dumka, Kiev, 1989 (in Russian).
4. V. I. Voytitsky, M. Yu. Zlobina, and E. P. Kubyshkin, “O spektral’noy zadache, vznikayushchey v mekhanike manipulyatsionnykh robotov” [On the spectral problem arising in the mechanics of manipulation robots], *Model. i analiz inf. sist.* [Model. Anal. Inform. Syst.], 2009, **16**, No. 3, 22–28 (in Russian).
5. M. Yu. Garnikhina and E. P. Kubyshkin, “Optimal’noe upravlenie povоротom tverdogo tela s nasledstvenno vyazkouprugim sterzhnem” [Optimal control of the rotation of a rigid body with a hereditarily viscoelastic rod], *Izv. RAN. Mekh. tv. tela* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Solid Mech.], 2006, No. 5, 29–41 (in Russian).
6. M. I. Zelikin and L. A. Manita, “Nakoplenie pereklyucheniy upravleniya v zadachakh s raspredelennymi parametrami” [Accumulation of switchings in distributed parameter problems], *Sovrem. mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2006, **19**, 78–113 (in Russian).
7. S. I. Zlochevskiy and E. P. Kubyshkin, “O vliyaniy kolebaniy uprugikh elementov s raspredelennymi massami na orientatsiyu sputnika” [On the influence of oscillations of elastic elements with distributed masses on satellite orientation], *Kosm. issled.* [Cosmic Research], 1987, **25**, No. 4, 537–544 (in Russian).
8. S. I. Zlochevskiy and E. P. Kubyshkin, “O stabilizatsii sputnika s gibkimi sterzhnyami” [On the stabilization of a satellite with flexible rods], *Kosm. issled.* [Cosmic Research], 1989, **27**, No. 5, 643–651 (in Russian).

9. L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Nev. dialekt, Saint Petersburg, 2004 (in Russian).
10. N. N. Krasovskii, *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Motion Control Theory], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
11. M. G. Kreyn and A. A. Nudel'man, *Problema momentov Markova i ekstremal'nye zadachi* [The Markov moment problem and extremal problems], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
12. E. P. Kubyshkin, "Optimal'noe upravlenie povorotom tverdogo tela s gibkim sterzhnem" [Optimal control of the rotation of a rigid body with a flexible rod], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1992, **56**, No. 2, 240–249 (in Russian).
13. E. P. Kubyshkin, "Optimal'noe upravlenie povorotom sistemy dvukh tel, soedinennykh uprugim sterzhnem" [Optimal control of the rotation of a system of two bodies connected by an elastic rod], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 2014, **78**, No. 5, 656–670 (in Russian).
14. E. P. Kubyshkin and P. A. Solodovnikov, "Ob odnom algoritme optimal'nogo upravleniya povorotom tverdogo diska s uprugim sterzhnem" [On one algorithm for optimal control of the rotation of a rigid disk with an elastic rod], *Dinam. sist.* [Dynam. Syst.], 2016, **6**, No. 2, 95–108 (in Russian).
15. E. P. Kubyshkin and M. S. Tryakhov, "Optimal'noe upravlenie povedeniem resheniy nachal'no-kraevoy zadachi, modeliruyushchey vrashchenie tverdogo tela s uprugim sterzhnem" [Optimal control of the behavior of solutions of the initial-boundary value problem modeling the rotation of a rigid body with an elastic rod], *Model. i analiz inf. sist.* [Model. Anal. Inform. Syst.], 2014, **21**, No. 5, 72–92 (in Russian).
16. E. P. Kubyshkin and O. A. Khrebtyugova, "Obobshchennoe reshenie odnoy nachal'no-kraevoy zadachi, vznikayushchey v mekhanike diskretno-kontinual'nykh sistem" [Generalized solution of one initial-boundary value problem arising in the mechanics of discrete-continuous systems], *Model. i analiz inf. sist.* [Model. Anal. Inform. Syst.], 2012, No. 1, 84–96 (in Russian).
17. O. A. Ladyzhenskaya, *Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki* [Boundary-Value Problems of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
18. S. G. Mikhlín, *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike* [Variational Methods in Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
19. S. V. Russkikh, "Upravlyaemyy povorot kosmicheskogo apparata s uprugimi panyami solnechnykh batarey" [Controlled rotation of a spacecraft with elastic solar panels], *Izv. vuzov. Ser. Mashinostr.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Engineering], 2016, **12**, 97–105 (in Russian).
20. V. N. Chelomey (gl. red.) i dr., *Vibratsii v tekhnike. Spravochnik. T. 1* [Vibrations in technology. Handbook. Vol. 1], Mashinostroenie, Moscow, 1978 (in Russian).
21. F. L. Chernous'ko, N. N. Bolotnik, and V. G. Gradetskiy, *Manipulyatsionnye roboty* [Manipulation Robots], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
22. M. Gugat, "Controllability of a slowly rotating Timoshenko beam," *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 2001, **6**, 333–360.
23. W. Krabs and G. M. Sklyar, "On the stabilizability of a slowly rotating Timoshenko beam," *Z. Anal. Anwend.*, 2000, **19**, No. 1, 131–145.
24. W. Krabs, G. M. Sklyar, and J. Wozniak, "On the set of reachable states in the problem of controllability of rotating Timoshenko beams," *J. Anal. Appl.*, 2003, **22**, No. 1, 215–228.
25. Y. Sakawa, R. Ito, and N. Fujii, "Optimal control of rotation of a flexible arm," In: *Control Theory for Distributed Parameter Systems and Applications*, 1983, pp. 175–187.

E. P. Kubyshkin  
Demidov Yaroslavl' State University, Yaroslavl', Russia  
E-mail: kubysh.t@yandex.ru

## МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ХИЩНИКОВ И ЖЕРТВ НА НЕОДНОРОДНОМ АРЕАЛЕ

© 2022 г. Т. Д. ХА, В. Г. ЦИБУЛИН

Аннотация. Рассматривается система уравнений реакции—диффузии—адвекции, описывающая эволюцию пространственных распределений двух популяций хищников и двух родственных популяций жертв с учетом направленной миграции, функционального отклика Холлинга второго рода и гиперболической функции роста жертв. Найдены условия на параметры, при которых существуют линейные по плотностям популяций косимметрии и реализуется мультистабильность — формирование одно- и двухпараметрических семейств стационарных решений. Для однородного ареала получены явные формулы для равновесий, а в случае неоднородного ареала стационарные решения вычислены при помощи метода прямых и схемы смещенных сеток. Представлены результаты по нарушению косимметрии и трансформации семейства в случае инвазии хищника.

### ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	509
1. Модель динамики популяций хищников и жертв . . . . .	510
2. Косимметрия . . . . .	510
3. Равновесия локальной системы . . . . .	512
4. Вычисление мультистабильности . . . . .	514
5. Разрушение семейства стационарных решений . . . . .	515
6. Заключение . . . . .	517
Приложение . . . . .	517
Список литературы . . . . .	518

### ВВЕДЕНИЕ

В нелинейных эволюционных задачах математической физики нередко наблюдается мультистабильность — реализация различных устойчивых решений (аттракторов) в зависимости от начальных данных [14]. Помимо изолированных аттракторов, возможно возникновение континуальных семейств решений вследствие непрерывных симметрий [11, 18] или косимметрий [9]. Теория косимметрии, развитая для объяснения существования однопараметрического семейства стационарных режимов в задаче фильтрационной конвекции [9], позволила исследовать ряд задач популяционной динамики. В [2, 12, 15, 16] были вычислены семейства равновесий (стационарных распределений) и установлена индивидуальность спектра устойчивости, что является характерным отличием косимметрии от симметрии [11, 22]. В [6] для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей динамику двух хищников и двух жертв на однородном ареале, было аналитически найдено двухпараметрическое семейство равновесий и показана связь этой мультистабильности с мультикосимметрией задачи [3].

В работах [7, 8] был проведен анализ уравнений реакции—диффузии—адвекции для моделирования динамики хищников и жертв в случае неоднородного ареала. Было показано, что функция

ресурса жертвы должна учитываться при формулировании соотношений функционального отклика, описывающих локальное взаимодействие хищника и жертвы.

В настоящей работе рассматривается случай неоднородного ареала, на котором взаимодействуют два хищника и два родственных вида жертв. Для уравнений с модифицированным функциональным откликом Холлинга второго рода [17] найдены условия на параметры системы, при которых у нее имеется мультикосимметрия. Выведены формулы для равновесий, составляющих двухпараметрическое семейство стационарных решений в бездиффузионном приближении. В численном эксперименте показано, что и в случае неоднородного ареала реализуется мультистабильность в виде двухпараметрического семейства стационарных распределений с индивидуальным спектром устойчивости. На основе полученных решений рассмотрена инвазия второго хищника в экологическую систему, состоящую из хищника и двух родственных видов жертв.

## 1. МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ ХИЩНИКОВ И ЖЕРТВ

Рассматривается модель динамики двух хищников и двух жертв в случае неоднородного ареала на основе системы уравнений [2, 12]. Распределение видов в момент времени  $t$  на одномерном ареале  $x \in [0, 1]$  дается функциями плотностей  $u_j(x, t)$  для жертв ( $j = 1, 2$ ) и  $v_j(x, t)$  для хищников ( $j = 1, 2$ ). Уравнения баланса видов записываются через миграционные потоки  $q_j$  и функции локального взаимодействия  $f_j$ :

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = -\frac{\partial q_j}{\partial x} + f_j, \quad q_j = -k_j \frac{\partial u_j}{\partial x} + u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} = -\frac{\partial q_{j+2}}{\partial x} + f_{j+2}, \quad q_{j+2} = -k_{j+2} \frac{\partial v_j}{\partial x} + v_j \frac{\partial \varphi_{j+2}}{\partial x}, \quad j = 1, 2, \quad (1.2)$$

где  $k_j$  — коэффициенты диффузии, а направленная миграция (таксис) для жертв и хищников определяется формулами

$$\begin{aligned} \varphi_j &= \alpha_j p(x) + \sum_{r=1}^2 (\beta_{j,r} u_r + \beta_{j,r+2} v_r), \\ \varphi_{j+2} &= \sum_{r=1}^2 (\beta_{j+2,r} u_r + \beta_{j+2,r+2} v_r). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь,  $\alpha_j, \beta_{ij}$  — миграционные коэффициенты,  $p(x)$  — функция ресурса.

Для реакций  $f_j$  используются представления на основе функционального отклика Холлинга второго рода [7, 8, 17]:

$$f_j = u_j \left[ \mu_j f(u_1 + u_2) - \frac{l_{j,3} v_1 + l_{j,4} v_2}{p(x) + c_1 u_1 + c_2 u_2} \right], \quad f(w) = w \left( 1 - \frac{w}{p(x)} \right); \quad (1.4)$$

$$f_{j+2} = v_j \left( -l_j + \frac{\mu_{j,1} u_1 + \mu_{j,2} u_2}{p(x) + c_1 u_1 + c_2 u_2} \right), \quad j = 1, 2. \quad (1.5)$$

Функция  $f$  определяет гиперболический закон роста жертв [5]. Локальное взаимодействие регулируется положительными коэффициентами  $\mu_j$  (прирост жертвы),  $l_{ij}$  (убыль жертвы из-за хищника),  $l_j$  (смертность хищника),  $\mu_{ij}$  (прирост хищника за счет жертв), а также  $c_j$ .

Рассматривается кольцевой ареал, система (1.1)–(1.3) дополняется условиями периодичности

$$\begin{aligned} u_j(0, t) &= u_j(1, t), \quad q_j(0, t) = q_j(1, t), \quad j = 1, 2, \\ v_j(0, t) &= v_j(1, t), \quad q_{j+2}(0, t) = q_{j+2}(1, t), \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (1.6)$$

и начальными распределениями плотностей популяций

$$u_j(x, 0) = u_j^0(x), \quad v_j(x, 0) = v_j^0(x), \quad j = 1, 2. \quad (1.7)$$

## 2. КОСИММЕТРИЯ

При дополнительных условиях на параметры система (1.1)–(1.7) относится к классу косимметричных динамических систем [9], для которых возможно возникновение непрерывных семейств решений. Согласно [9] для уравнения  $\dot{u} = F(u)$  косимметрия  $L$  представляет собой векторное

поле, ортогональное  $F$  в каждой точке фазового пространства. Следующая лемма устанавливает существование косимметрии для рассматриваемой системы при выполнении дополнительных соотношений между регулируемыми динамикой жертв параметрами.

**Лемма 2.1.** *Косимметрией системы (1.1)–(1.7) является векторное поле*

$$L_1 = (\zeta_1, \zeta_2, 0, 0), \quad \zeta_1 = -e^{-\frac{\varphi_1}{k_1}} \gamma_1 u_2, \quad \zeta_2 = e^{-\frac{\varphi_1}{k_1}} u_1, \quad (2.1)$$

если выполнены следующие условия на параметры модели:

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\beta_{2,r}}{\beta_{1,r}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{l_{2,s}}{l_{1,s}} = \gamma_1, \quad 1 \leq r \leq 4, \quad 3 \leq s \leq 4, \quad (2.2)$$

где  $\gamma_1$  — константа.

*Доказательство.* По определению косимметрии векторное поле  $L$  должно быть ортогонально правой части системы (1.1)–(1.7) для любых функций  $u_i(x, t)$ ,  $v_j(x, t)$ , т. е.

$$\int_0^1 (F, L) dx = \int_0^1 [(-q'_1 + f_1)\zeta_1 + (-q'_2 + f_2)\zeta_2] dx = I_1 + I_2 = 0,$$

где

$$I_1 = \int_0^1 (\zeta_1 f_1 + \zeta_2 f_2) dx, \quad I_2 = - \int_0^1 (\zeta_1 q'_1 + \zeta_2 q'_2) dx.$$

Подстановка (2.1) в  $I_1$  и перегруппировка слагаемых позволяет записать интеграл  $I_1$  следующим образом:

$$I_1 = \int_0^1 e^{-\frac{\varphi_1}{k_1}} (-\gamma_1 u_2 f_1 + u_1 f_2) dx.$$

Из условий (2.2) следует, что  $u_1 f_2 = \gamma_1 u_2 f_1$ , поэтому  $I_1 = 0$ . После интегрирования по частям интеграл  $I_2$  представляется в виде суммы

$$I_2 = -(\zeta_1 q_1 + \zeta_2 q_2) \Big|_0^1 + \int_0^1 (\zeta'_1 q_1 + \zeta'_2 q_2) dx.$$

Внеинтегральное слагаемое пропадает в силу условий периодичности (1.6). Из условий (2.2) получаем  $\varphi'_2 = \gamma_1 \varphi'_1$  и

$$\zeta'_1 q_1 = e^{-\frac{\varphi_1}{k_1}} \left( \frac{\varphi'_1}{k_1} \gamma_1 u_2 - \gamma_1 u'_2 \right) (k_1 u'_1 - u_1 \varphi'_1) = \frac{\gamma_1}{k_1} e^{-\frac{\varphi_1}{k_1}} (\varphi'_1 u_2 - k_1 u'_2) (k_1 u'_1 - u_1 \varphi'_1).$$

Аналогично выводится

$$\zeta'_2 q_2 = \frac{\gamma_1}{k_1} e^{-\frac{\varphi_1}{k_1}} (k_1 u'_1 - \varphi'_1 u_1) (k_1 u'_2 - u_2 \varphi'_1).$$

В результате  $\zeta'_1 q_1 + \zeta'_2 q_2 = 0$  и  $I_2 = 0$ .

Векторное поле  $L_1 = (\zeta_1, \zeta_2, 0, 0)$  из (2.1)–(2.2) ортогонально правой части системы (1.1)–(1.7) и является косимметрией системы (1.1)–(1.7).  $\square$

В следующей лемме формулируются условия существования косимметрии в системе (1.1)–(1.7) при дополнительных соотношениях на параметры, регулирующие динамику хищников.

**Лемма 2.2.** *Косимметрией системы (1.1)–(1.7) является векторное поле*

$$L_2 = (0, 0, \zeta_3, \zeta_4), \quad \zeta_3 = -e^{-\frac{\varphi_3}{k_3}} \gamma_2 v_2, \quad \zeta_4 = e^{-\frac{\varphi_3}{k_3}} v_1, \quad (2.3)$$

если выполнены условия на параметры модели:

$$\frac{k_4}{k_3} = \frac{\beta_{4,r}}{\beta_{3,r}} = \frac{\mu_{2,s}}{\mu_{1,s}} = \frac{l_2}{l_1} = \gamma_2, \quad 1 \leq r \leq 4, \quad 1 \leq s \leq 2, \quad (2.4)$$

где  $\gamma_2$  — константа.

*Доказательство.* Аналогично проведенному для леммы 2.1.  $\square$

Леммы 2.1 и 2.2 позволяют сформулировать теорему о мультикосимметрии системы (1.1)–(1.7).

**Теорема 2.1.** *При выполнении условий (2.4) и (2.2) система (1.1)–(1.7) имеет мультикосимметрию*

$$L = \kappa L_1 + (1 - \kappa)L_2, \quad \kappa \in [0, 1].$$

### 3. РАВНОВЕСИЯ ЛОКАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

В бездиффузионном приближении координата  $x$  является дополнительным параметром. В этом случае система (1.1)–(1.7) допускает однородные по  $x$  решения, которые находятся из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u}_j = u_j \left[ \mu_j f(u_1 + u_2) - \frac{l_{j,3}v_1 + l_{j,4}v_2}{p(x) + c_1u_1 + c_2u_2} \right], \quad f(w) = w - \frac{w^2}{p(x)}, \quad (3.1)$$

$$\dot{v}_j = v_j \left( -l_j + \frac{\mu_{j,1}u_1 + \mu_{j,2}u_2}{p(x) + c_1u_1 + c_2u_2} \right), \quad j = 1, 2. \quad (3.2)$$

Для любых значений параметров система (3.2) имеет неустойчивое нулевое равновесие

$$u_1 = u_2 = v_1 = v_2 = 0$$

и семейство равновесий для различных соотношений жертв (без хищников)

$$u_1 = p(x)(1 - \theta), \quad u_2 = p(x)\theta, \quad v_1 = v_2 = 0, \quad 0 \leq \theta \leq 1. \quad (3.3)$$

Для равновесия из семейства (3.3) характеристическое уравнение имеет вид

$$\sigma(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_4) = 0,$$

$$\sigma_2 = p(x)(\mu_1\theta - \theta\mu_2 - \mu_1),$$

$$\sigma_3 = -\frac{\theta(c_1l_2 - c_2l_2 - \mu_{21} + \mu_{22}) - c_1l_2 - l_2 + \mu_{21}}{c_1\theta - c_2\theta - c_1 - 1},$$

$$\sigma_4 = -\frac{\theta(c_1l_1 - c_2l_1 - \mu_{11} + \mu_{12}) - c_1l_1 - l_1 + \mu_{11}}{c_1\theta - c_2\theta - c_1 - 1}.$$

Нулевое значение отвечает нейтральному направлению вдоль семейства. Видно, что  $\sigma_2 < 0$  для всех  $\theta \in [0, 1]$  и любых  $x$ , семейство (3.3) устойчиво при условиях

$$\theta(c_1l_j - c_2l_j - \mu_{j1} + \mu_{j2}) - c_1l_j - l_j + \mu_{j1} < 0, \quad j = 1, 2. \quad (3.4)$$

При наличии дополнительных условий на параметры система может иметь равновесия, отвечающие сосуществованию одного хищника и одной жертвы:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{p(x)l_2}{\mu_{22} - c_2l_2}, \quad v_1 = 0, \quad v_2 = \frac{p(x)\mu_{22}\mu_2(\mu_{22} - c_2l_2 - l_2)}{l_{24}(\mu_{22} - c_2l_2)^2}, \quad \mu_{22} > c_2l_2 + l_2; \quad (3.5)$$

$$u_1 = \frac{p(x)l_2}{\mu_{21} - c_1l_2}, \quad u_2 = 0, \quad v_1 = 0, \quad v_2 = \frac{p(x)\mu_{21}\mu_1(\mu_{21} - c_1l_2 - l_2)}{l_{14}(\mu_{21} - c_1l_2)^2}, \quad \mu_{21} > c_1l_2 + l_2; \quad (3.6)$$

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{p(x)l_1}{\mu_{12} - c_2l_1}, \quad v_1 = \frac{p(x)\mu_2\mu_{12}(\mu_{12} - c_2l_1 - l_1)}{l_{23}(\mu_{12} - c_2l_1)^2}, \quad v_2 = 0, \quad \mu_{12} > c_2l_1 + l_1; \quad (3.7)$$

$$u_1 = \frac{p(x)l_1}{\mu_{11} - c_1l_1}, \quad u_2 = 0, \quad v_1 = \frac{p(x)\mu_{11}\mu_1(\mu_{11} - c_1l_1 - l_1)}{l_{13}(\mu_{11} - c_1l_1)^2}, \quad v_2 = 0, \quad \mu_{11} > c_1l_1 + l_1. \quad (3.8)$$

Равновесия, отвечающие сосуществованию всех видов, получаются из системы алгебраических уравнений

$$(\mu_{j,1} - l_jc_1)u_1 + (\mu_{j,2} - l_jc_2)u_2 = p(x)l_j, \quad (3.9)$$

$$l_{j,3}v_1 + l_{j,4}v_2 = \mu_j[p(x) + c_1u_1 + c_2u_2]f(u_1 + u_2). \quad (3.10)$$

Аналогично лемме 2.1 получается, что при выполнении условий на параметры

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{l_{23}}{l_{13}} = \frac{l_{24}}{l_{14}} = \gamma_1 > 0 \quad (3.11)$$

система (3.1)-(3.2) имеет косимметрию

$$L_1 = (\gamma_1 u_2, -u_1, 0, 0)^T.$$

При условиях

$$\frac{\mu_{21}}{\mu_{11}} = \frac{\mu_{22}}{\mu_{12}} = \frac{l_2}{l_1} = \gamma_2 > 0 \tag{3.12}$$

система (3.1)-(3.2) имеет косимметрию

$$L_2 = (0, 0, \gamma_2 v_2, -v_1)^T.$$

При совместном выполнении условий (3.11) и (3.12) векторное поле задачи (3.1) и (3.2) ортогонально линейной комбинации  $L_1$  и  $L_2$ :

$$L \equiv (1 - \kappa)L_1 + \kappa L_2, \quad \kappa \in [0, 1]. \tag{3.13}$$

Это соответствует мультикосимметрии.

С учетом (3.11) и (3.12) уравнения (3.9)–(3.10) примут вид

$$\begin{aligned} (\mu_{11} - l_1 c_1)u_1 + (\mu_{12} - l_1 c_2)u_2 &= p(x)l_1, \\ l_{13}v_1 + l_{14}v_2 &= \mu_1(p(x) + c_1 u_1 + c_2 u_2)f(u_1 + u_2). \end{aligned}$$

Двупараметрическое семейство равновесий получается в явной форме:

$$u_1 = \frac{p(x)(l_1 - \xi)}{\mu_{11} - c_1 l_1}, \quad u_2 = \frac{p(x)\xi}{\mu_{12} - c_2 l_1}, \quad v_1 = \frac{\psi_* - \psi}{l_{13}}p^2(x), \quad v_2 = \frac{p^2(x)\psi}{l_{14}}, \tag{3.14}$$

где

$$\psi_* = \mu_1 \frac{f(u_1 + u_2)}{p(x)} \left( 1 + \frac{c_1 u_1}{p(x)} + \frac{c_2 u_2}{p(x)} \right). \tag{3.15}$$

Для положительности решений параметры должны удовлетворять условиям

$$\mu_{11} > c_1 l_1, \quad \mu_{12} > c_2 l_1, \quad 0 < \xi < l_1, \quad 0 < \psi < \psi_*.$$

Характеристическое уравнение для равновесия с континуальным номером  $(\xi, \psi)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma^2 (\sigma^2 + A\sigma + B) &= 0, \\ A &= -\mu_1(\gamma_1 u_2 + u_1)f'(u_1 + u_2) - \frac{(l_{13}v_1 + l_{14}v_2)(c_2 \gamma_1 u_2 + c_1 u_1)}{[p(x) + c_1 u_1 + c_2 u_2]^2}, \\ B &= \frac{(\gamma_1 \mu_{12} u_2 + \mu_{11} u_1)p(x) + u_1 u_2 (\gamma_1 - 1)(c_1 \mu_{12} - c_2 \mu_{11})}{[p(x) + c_1 u_1 + c_2 u_2]^3}. \end{aligned}$$

**Лемма 3.1.** *Устойчивость равновесий двупараметрического семейства (3.14) не зависит от пространственной координаты  $x$ .*

*Доказательство.* Из (3.14) следует, что выражения для жертв и хищников соответственно пропорциональны  $p(x)$  и  $p^2(x)$ . Отсюда получается, что коэффициент  $A$  есть произведение  $p(x)$  и выражения, не содержащего  $x$ . Аналогично, коэффициент  $B$  обратно пропорционален  $p(x)$ . Следовательно, устойчивость равновесий семейства зависит от параметров системы и не зависит от координаты  $x$ .  $\square$

В [6] проанализирована устойчивость равновесий двупараметрического семейства при однородной функции ресурса  $p(x) = 1$  и  $c_j = 0$ . В случае  $c_1 = c_2 = c$ ,  $\gamma_1 < 1$  и при  $\mu_{11} > \mu_{12} > (c + 1)l_1$  получается следующее условие устойчивости равновесия из (3.14):

$$\frac{l_1 - \xi}{\mu_{11} - cl_1} + \frac{\xi}{\mu_{12} - cl_1} > \frac{c - 1 + \sqrt{c^2 + c + 1}}{3c}. \tag{3.16}$$

## 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТИ

В случае ненулевых коэффициентов диффузии и таксиса задача (1.1)–(1.7) решается численно. Используется метод прямых и схема смещенных сеток, см. приложение и [12]. Для функции ресурса  $p(x) = 1 + 0,4 \sin 2\pi x$  и фиксированных значений коэффициентов  $\mu_1 = l_{13} = l_{14} = 1$ ,  $\gamma_1 = 0,5$ ,  $\mu_{11} = 1,5$ ,  $\mu_{12} = 0,875$ ,  $l_1 = 0,5$ ,  $\gamma_2 = 1,5$ ,  $c = 0,2$  в бездиффузионном приближении получается двухпараметрическое семейство равновесий

$$W(\xi, \psi) = \left\{ u_1 = \frac{5p(x)}{7} \left( \frac{1}{2} - \xi \right), \quad u_2 = \frac{40p(x)}{31} \xi, \quad v_1 = p^2(x)(\psi_* - \psi), \quad v_2 = p^2(x)\psi \right\},$$

где

$$\psi \in [0, \psi_*], \quad \xi \in \left[ 0, \frac{1}{2} \right], \quad \psi_* = 25 \left( \frac{1}{14} + \frac{25}{217} \xi \right) \left( \frac{9}{14} - \frac{125}{217} \xi \right) \left( \frac{3}{14} + \frac{5}{31} \xi \right).$$

Здесь координата  $x$  играет роль дополнительного параметра. Семейство равновесий устойчиво при  $0,288 < \xi \leq 0,5$ . В численном эксперименте показано, что данное семейство трансформируется при ненулевых коэффициентах диффузии, которые удовлетворяют соотношениям (3.11)–(3.12). При этом происходит сглаживание распределений видов по координате  $x$ . На рис. 1 приведены результаты установления при  $k_1 = 0,005$ ,  $k_3 = 0,0025$  из начальных данных, отвечающих равновесию в бездиффузионном приближении.

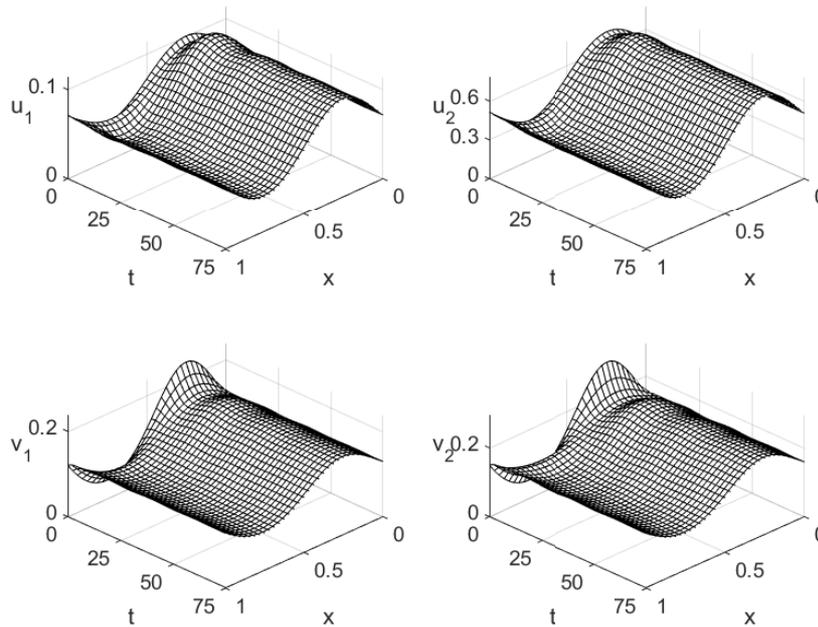


РИС. 1. Установление стационарного распределения жертв и хищников из равновесия  $W(0,4,0,15)$  (4),  $k_1 = 0,005$ ,  $k_3 = 0,0025$ .

FIG. 1. Establishment of a stationary distribution of prey and predators from the equilibrium  $W(0,4,0,15)$  (4),  $k_1 = 0,005$ ,  $k_3 = 0,0025$ .

Далее для полученных стационарных распределений численно определялся спектр устойчивости, см. табл. 1. Видно, что первые два значения практически нулевые ( $10^{-11}$ ,  $10^{-9}$ ). Это соответствует двум нейтральным направлениям для семейства стационарных распределений. Следующие отрицательные значения порядка единицы характеризуют устойчивость в трансверсальных к семейству направлениях. Эти числа различны для решений, что подтверждает косимметричный характер полученного семейства.

В эксперименте в качестве начальных данных брались равновесия при  $\xi = 0,35$ ,  $\psi = 0,1$  (I),  $\xi = 0,4$ ,  $\psi = 0,1$  (II),  $\xi = 0,4$ ,  $\psi = 0,15$  (III). Получившиеся стационарные профили распределений

жертв (верх) и хищников (низ) при  $k_1 = 0,005$ ,  $k_3 = 0,0025$  представлены на рис. 2. Видно, что плотности хищников и жертв соответствуют характеру изменения функция ресурса  $p(x)$ , но возможны различные комбинации видов. Имеются также неустойчивые стационарные решения, от которых ответвляются колебательные режимы (при  $0 < \xi < 0,288$ ).

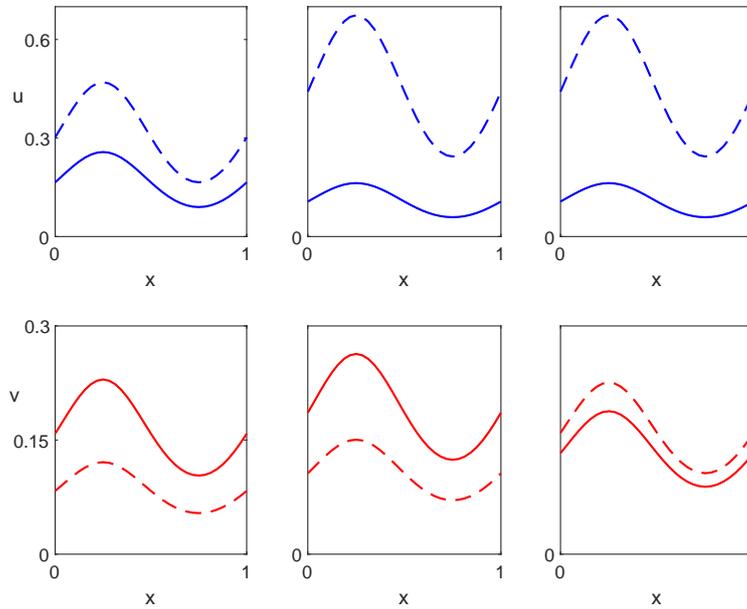


Рис. 2. Три стационарных распределения из двухпараметрического семейства.  
 FIG. 2. Three stationary distributions from a two-parameter family.

	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$
I	$1,1845 \times 10^{-11}$	$-1,4952 \times 10^{-9}$	$-0,13221$	$-0,13904$
II	$1,0963 \times 10^{-11}$	$-3,1301 \times 10^{-9}$	$-0,12512$	$-0,12911$
III	$4,0457 \times 10^{-12}$	$-3,2546 \times 10^{-9}$	$-0,11662$	$-0,12035$

ТАБЛИЦА 1. Спектр стационарных распределений видов, приведенных на рис. 2.  
 TABLE 1. The spectrum of stationary distributions of the species shown in Fig. 2.

### 5. РАЗРУШЕНИЕ СЕМЕЙСТВА СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ

Возникновение в системе двухпараметрического семейства равновесий является следствием дополнительных условий, которым должны удовлетворять параметры системы. При нарушении некоторых из этих соотношений теряется косимметрия и происходит разрушение семейства. В [10] развит метод исследования нарушения косимметрии, основанный на вычислении косимметричного дефекта и анализе селективной функции. Этот метод позволяет указать на реализующиеся в результате разрушения семейства решения. В [16] для задачи о кинетике трех видов с учетом диффузии и линейной адвекции численно были найдены случаи трансформации семейства в предельный цикл и распада семейства на изолированные равновесия. В [15] показано, что при помощи метода селективной функции можно анализировать задачи инвазии — внедрения нового вида в экологическую систему.

Далее рассматривается задача для системы (1.1)–(1.7) и считается, что вид  $v_2$  является инвазивным. Для локальной системы (3.1)–(3.2) при выполнении условий (3.11)–(3.12) имеется мультикосимметрия, и инвазия является успешной для ненулевых начальных распределений  $v_2$ . В результате установления формируется решение, соответствующее сосуществованию двух хищников и двух жертв. Систему (3.1)–(3.2) можно переписать, предусмотрев возмущение параметров

$\mu_{21}, \mu_{22}$ , которые вместе с  $l_{14}, l_{24}$  участвуют в описании взаимодействия хищника  $v_2$  с жертвами. В результате получается система с добавившимися параметрами  $\omega_1, \omega_2$ , изменения касаются двух уравнений из четырех

$$\dot{u}_1 = u_1 \left[ \mu_1 f(u_1 + u_2) - \frac{l_{13}v_1 + l_{14}v_2}{p(x) + cu_1 + cu_2} \right], \tag{5.1}$$

$$\dot{u}_2 = \gamma_1 u_2 \left[ \mu_1 f(u_1 + u_2) - \frac{l_{13}v_1 + l_{14}v_2}{p(x) + cu_1 + cu_2} \right], \tag{5.2}$$

$$\dot{v}_1 = v_1 \left[ -l_1 + \frac{\mu_{11}u_1 + \mu_{12}u_2}{p(x) + cu_1 + cu_2} \right], \tag{5.3}$$

$$\dot{v}_2 = \gamma_2 v_2 \left[ -l_1 + \frac{(\mu_{11} + \omega_1)u_1 + (\mu_{12} - \omega_2)u_2}{p(x) + cu_1 + cu_2} \right]. \tag{5.4}$$

Вычислим косимметрический дефект системы (5.1)–(5.4), следуя [10]:

$$\mathcal{D} = (F^*, L) = \kappa \gamma_2 v_1 v_2 \frac{\omega_2 u_2 - \omega_1 u_1}{cu_1 + cu_2 + p(x)}. \tag{5.5}$$

Здесь

$$F^* = F + K, \quad K = \left( 0, 0, 0, \gamma_2 v_2 \frac{\omega_1 u_1 - \omega_2 u_2}{cu_1 + cu_2 + p(x)} \right)^T.$$

Селективная функция  $\mathcal{S}$  получается подстановкой формул для равновесий семейства (3.14) в косимметрический дефект  $\mathcal{D}$ . Поскольку знаменатель в  $\mathcal{D}$  (см. (5.5)) положителен, то его можно опустить, имея в виду анализ нулей селективной функции. В результате получается следующая функция трех параметров

$$\mathcal{S}(\xi, \psi, \kappa) = p^5 \kappa \psi \gamma_2 \frac{\psi^*(\xi) - \psi}{l_{13}l_{14}} \left( \omega_2 \frac{\xi}{\mu_{12} - cl_1} - \omega_1 \frac{l_1 - \xi}{\mu_{11} - cl_1} \right),$$

где

$$\psi^*(\xi) = \frac{\mu_1}{p(x)} f \left( \frac{p(x)\xi}{\mu_{12} - cl_1} + \frac{p(x)(l_1 - \xi)}{\mu_{11} - cl_1} \right) \left( 1 + \frac{\xi}{\mu_{12} - cl_1} + \frac{l_1 - \xi}{\mu_{11} - cl_1} \right).$$

Нулями селективной функции, принадлежащими области определения, являются

$$\psi = 0, \tag{5.6}$$

$$\psi = \psi^*, \tag{5.7}$$

$$\omega_2 \frac{\xi}{\mu_{12} - cl_1} = \omega_1 \frac{l_1 - \xi}{\mu_{11} - cl_1}. \tag{5.8}$$

Случай  $\psi = 0$  отвечает решению исходной системы при  $v_2 = 0$ , это означает неуспех инвазии. Из (5.7) получается решение с одним хищником  $v_2$ , т. е. новый хищник «вытеснил» старого ( $v_1 = 0$ ). Для  $0 < \psi < \psi^*$  из (5.8) получается  $\xi = \xi_*$ ,

$$\xi_* = \frac{\omega_1 l_1 (\mu_{12} - cl_1)}{\omega_1 (\mu_{11} - cl_1) + \omega_2 (\mu_{12} - cl_1)}, \tag{5.9}$$

и однопараметрическое семейство равновесий  $W(\xi_*, \psi)$ .

$k_1 = 2k_3$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$
0,001	$-1,29 \times 10^{-9}$	$-2,60 \times 10^{-6}$	-0,0283	-0,0344
0,005	$-7,85 \times 10^{-9}$	$-2,70 \times 10^{-5}$	$-0,0323 \pm 0,298i$	
0,01	$-5,07 \times 10^{-9}$	$-2,06 \times 10^{-5}$	$-0,0344 \pm 0,298i$	

ТАБЛИЦА 2. Спектр стационарных распределений видов  $W(\xi_*, \psi)$ ,  $\omega_1 = 0,08$ ,  $\omega_2 = 0,01$ .

TABLE 2. Spectrum of stationary distributions of the species  $W(\xi_*, \psi)$ ,  $\omega_1 = 0,08$ ,  $\omega_2 = 0,01$ .

$k_1 = 2k_3$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$
0,001	$-3,04 \times 10^{-9}$	$-1,43 \times 10^{-5}$	-0,0286	-0,0330
0,005	$-1,18 \times 10^{-7}$	$-2,15 \times 10^{-4}$	$-0,0322 \pm 0,308i$	
0,01	$-7,28 \times 10^{-8}$	$-1,52 \times 10^{-4}$	$-0,0344 \pm 0,306i$	

ТАБЛИЦА 3. Спектр стационарных распределений видов  $W(\xi_*, \psi)$ ,  $\omega_1 = 0,45$ ,  $\omega_2 = 0,05$ .  
 TABLE 3. Spectrum of stationary distributions of the species  $W(\xi_*, \psi)$ ,  $\omega_1 = 0,45$ ,  $\omega_2 = 0,05$ .

В таблицах 2 и 3 представлены результаты вычисления спектра устойчивости для случаев  $\omega_1 = 0,08$ ,  $\omega_2 = 0,01$  и  $\omega_1 = 0,4$ ,  $\omega_2 = 0,05$  ( $\xi_* = 0,408$ ), соответственно. Для установления стационарных распределений расчеты проводились на промежутке времени  $t \in [0, 1000]$ . По сравнению с табл. 1, в каждой строке табл. 2 имеется только одно практически нулевое значение  $10^{-9}$  (нейтральный спектр). Это является следствием нарушения мультикосимметрии, в результате которого остается косимметрия  $L_1$  и однопараметрическое семейство решений. В эксперименте обнаружено, что установление при больших значениях  $\omega_j$  требует большего временного промежутка. Наличие в спектре устойчивости величин порядка  $10^{-4}$  может быть связано с «памятью» системы об исчезнувших равновесиях.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математические модели популяционной динамики являются необходимым инструментом при прогнозировании экологических и биологических процессов [4, 20]. Для описания пространственно-временных миграций видов применяются различные варианты уравнений реакции—диффузии—адвекции [13]. Возникающие при этом задачи содержат большое количество экспериментально определяемых и при необходимости назначаемых параметров [7, 21]. Подход на основе теории косимметрии [3, 9, 12, 15, 22] позволяет найти соотношения на параметры, при которых имеется мультистабильность, а затем анализировать возмущения, нарушающие косимметрию. Возникающая при этом динамика напоминает череду состояний исчезнувшего семейства. Представленный в настоящей работе пример двухпараметрического семейства стационарных распределений является основой для последующего анализа динамики системы при различных диапазонах значений параметров.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Для дискретизации системы (1.1)–(1.7) по переменной  $x$  вводится равномерная сетка:

$$x_r = rh, \quad r = 1, \dots, N, \quad h = \frac{1}{N}. \quad (6.1)$$

Плотность распределения популяций  $u_j$ ,  $v_j$  в узле  $x_r$  далее обозначается через  $u_{j,r}$ ,  $v_{j,r}$ . При вычислении потоков используется вспомогательная сетка:

$$x_{r+\frac{1}{2}} = rh + \frac{h}{2}, \quad r = 1, \dots, N.$$

Для аппроксимации системы уравнений (1.1)–(1.5) по пространственной координате применяется метод баланса: уравнение (1.1) интегрируется по отрезку  $[x_{r-\frac{1}{2}}, x_{r+\frac{1}{2}}]$ , а для потоков  $q_j$  интегрирование проводится по отрезку  $[x_r, x_{r+1}]$ . Далее используются операторы разностной производной и вычисления среднего

$$(dw)_r = \frac{w_{r+\frac{1}{2}} - w_{r-\frac{1}{2}}}{h}, \quad (\delta w)_r = \frac{w_{r+\frac{1}{2}} + w_{r-\frac{1}{2}}}{2}, \quad (6.2)$$

а также условия периодичности

$$w_{N+1} = w_1, \quad w_{\frac{1}{2}} = w_{N+\frac{1}{2}}. \quad (6.3)$$

В результате получается система обыкновенных дифференциальных уравнений для  $u_{j,r}$ ,  $v_{j,r}$ .

Из (1.1), (1.2) следует

$$\dot{u}_{j,r} = [-dq_j + f_j]_r, \quad j = 1, 2, \quad r = 1, \dots, N, \quad (6.4)$$

$$\dot{v}_{j,r} = [-dq_{j+2} + f_{j+2}]_r, \quad j = 1, 2, \quad r = 1, \dots, N. \quad (6.5)$$

Для локальных членов получается

$$f_{j,r} = u_{j,r} \left[ \mu_j f_r - \frac{l_{j,3}v_{1,r} + l_{j,4}v_{1,r}}{P_r + c_1u_{1,r} + c_2u_{2,r}} \right], \quad j = 1, 2, \quad (6.6)$$

$$f_{j+2,r} = v_{j,r} \left[ -l_j + \frac{\mu_{j,1}u_{1,r} + \mu_{j,2}u_{2,r}}{P_r + c_1u_{1,r} + c_2u_{2,r}} \right], \quad j = 1, 2, \quad (6.7)$$

$$f_r = (u_{1,r} + u_{2,r}) \left( 1 - \frac{u_{1,r} + u_{2,r}}{P_r} \right), \quad (6.8)$$

где дискретный аналог функции ресурса определяется следующей формулой:

$$P_r = \left[ \frac{1}{h} \int_{x_{r-\frac{1}{2}}}^{x_{r+\frac{1}{2}}} \frac{dx}{p(x)} \right]^{-1}, \quad r = 1, \dots, N. \quad (6.9)$$

Выражения для потоков жертв получаются из (1.1) и (1.4):

$$q_{j,r+\frac{1}{2}} = [-k_j du_j + \alpha_j dp \delta u_j + \delta u_j (\beta_{j,3} dv_1 + \beta_{j,4} dv_2)]_{r+\frac{1}{2}}, \quad j = 1, 2, \quad (6.10)$$

а из (1.2) и (1.4) находятся потоки для хищников:

$$q_{j+2,r+\frac{1}{2}} = [-k_{j+2} dv_j + \delta v_j (\beta_{j,1} du_1 + \beta_{j,2} du_2)]_{r+\frac{1}{2}}, \quad j = 1, 2. \quad (6.11)$$

Построенная конечномерная модель (6.4)–(6.11) дополняется дискретными аналогами условий периодичности

$$u_{j,N+1} = u_{j,1}, \quad q_{j,\frac{1}{2}} = q_{j,N+\frac{1}{2}}, \quad v_{j,N+1} = v_{j,1}, \quad q_{j+2,\frac{1}{2}} = q_{j+2,N+\frac{1}{2}}, \quad j = 1, 2, \quad (6.12)$$

и может быть записана в виде

$$\dot{W} = \Phi(W), \quad W(0) = W_0. \quad (6.13)$$

Здесь  $W$  — вектор значений переменных в узлах сетки:

$$W = (u_{1,1}, \dots, u_{1,N}, \dots, u_{2,N}, v_{1,1}, \dots, v_{1,N}, \dots, v_{2,N}).$$

Начальные данные для системы (6.3)–(6.12) получаются из (1.7):

$$W_0 = (u_{1,1}^0, \dots, u_{1,N}^0, \dots, u_{2,N}^0, v_{1,1}^0, \dots, v_{1,N}^0, \dots, v_{2,N}^0). \quad (6.14)$$

Для интегрирования системы (6.13) по времени используется метод Рунге–Кутты 4-го порядка.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. — Ижевск: Ин-т комп. иссл., 2003.
2. Епифанов А. В., Цибулин В. Г. О динамике косимметричных систем хищников и жертв // Комп. иссл. и модел. — 2017. — 9, № 5. — С. 799–813.
3. Куракин Л. Г., Юдович В. И. Применение метода Ляпунова–Шмидта в задаче ответвления цикла от семейства равновесий системы с мультикосимметрией // Сиб. мат. ж. — 2000. — 41, № 1. — С. 136–149.
4. Мюррей Дж. Математическая биология. Т. 1. — М.—Ижевск: Ин-т комп. иссл., 2011.
5. Свирежнев Ю. М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. — М.: Наука, 1987.
6. Ха Т. Д., Цибулин В. Г. Мультистабильные сценарии для дифференциальных уравнений, описывающих динамику системы хищников и жертв // Комп. иссл. и модел. — 2020. — 12, № 6. — С. 1451–1466.
7. Ха Т. Д., Цибулин В. Г. Уравнения диффузии–реакции–адвекции для системы хищник–жертва в гетерогенной среде // Комп. иссл. и модел. — 2021. — 13, № 6. — С. 1161–1176.
8. Цибулин В. Г., Ха Т. Д., Зеленчук П. А. Нелинейная динамика системы хищник–жертва на неоднородном ареале и сценарии локального взаимодействия видов // Изв. вузов. Прикл. нелинейн. динам. — 2021. — 29, № 5. — С. 751–764.

9. *Юдович В. И.* Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // *Мат. заметки.* — 1991. — 49, № 5. — С. 142–148.
10. *Юдович В. И.* О бифуркациях при возмущениях, нарушающих косимметрию // *Докл. РАН.* — 2004. — 398, № 1. — С. 57–61.
11. *Bluman G. W., Kumei S.* Symmetries and Differential Equations. — Berlin: Springer, 2013.
12. *Budyansky A. V., Frischmuth K., Tsybulin V. G.* Cosymmetry approach and mathematical modeling of species coexistence in a heterogeneous habitat // *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B.* — 2019. — 24. — С. 547–561.
13. *Cosner C., Cantrell R.* Spatial Ecology Via Reaction–Diffusion Equations. — Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2003.
14. *Feudel U.* Complex dynamics in multistable systems // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* — 2008. — 18, № 6. — С. 1607–1626.
15. *Frischmuth K., Budyansky A. V., Tsybulin V. G.* Modeling of invasion on a heterogeneous habitat: taxis and multistability // *Appl. Math. Comput.* — 2021. — 410. — 126456.
16. *Frischmuth K., Kovaleva E. S., Tsybulin V. G.* Family of equilibria in a population kinetics model and its collapse // *Nonlinear Anal.* — 2011. — 12. — С. 146–155.
17. *Holling C. S.* Some characteristics of simple types of predation and parasitism // *Can. Entomologist.* — 1959. — 91. — С. 385–398.
18. *Ibragimov N. H.* A Practical Course in Differential Equations and Mathematical Modelling: Classical and New Methods. — Singapore: World Scientific, 2010.
19. *Kim K., Choi W.* Local dynamics and coexistence of predator–prey model with directional dispersal of predator // *Math. Biosci. Eng.* — 2020. — 17. — С. 6737–6755.
20. *Rubin A., Riznichenko G.* Mathematical Biophysics. — New York: Springer, 2014.
21. *Tyutyunov Y. V., Zagrebneva A. D., Azovskiy A. I.* Spatiotemporal pattern formation in a prey–predator system: The case study of short-term interactions between diatom microalgae and microcrustaceans // *Mathematics.* — 2020. — 8, № 7. — С. 1065–1079.
22. *Yudovich V. I.* Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // *Chaos.* — 1995. — 5, № 2. — С. 402–411.

Т. Д. Ха

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия;  
Вьетнамско-Венгерский индустриальный университет, Ханой, Вьетнам  
E-mail: toanhd.viu@gmail.com, dha@sfedu.ru

В. Г. Цибулин

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия  
E-mail: vgcibulin@sfedu.ru

## Multistability for a Mathematical Model of the Dynamics of Predators and Preys in a Heterogeneous Area

© 2022 Т. Д. Ха, В. Г. Tsybulin

**Abstract.** We consider the system of reaction–diffusion–advection equations describing the evolution of the spatial distributions of two populations of predators and two prey populations. This model allows us to consider directed migration, the Holling functional response of the second kind, and the hyperbolic prey growth function. We obtain conditions on the parameters under which cosymmetries exist. As a result, multistability is realized, i.e., the one- and two-parameter families of stationary solutions appear. For a homogeneous environment, we analytically derive explicit formulas for equilibria. With a heterogeneous habitat, we computed distributions of species using the method of lines and the scheme of staggered grids. We present the results of violation of cosymmetry and transformation of the family in the case of invasion of a predator.

### REFERENCES

1. A. D. Bazykin, *Nelineynaya dinamika vzaimodeystvuyushchikh populyatsiy* [Nonlinear Dynamics of Interacting Populations], Inst. komp. issl., Izhevsk, 2003 (in Russian).
2. A. V. Epifanov and V. G. Tsybulin, “O dinamike kosimmetrichnykh sistem khishchnikov i zhertv” [On the dynamics of cosymmetric systems of predators and prey], *Komp. issl. i model.* [Comp. Research. Model.], 2017, **9**, No. 5, 799–813 (in Russian).
3. L. G. Kurakin and V. I. Yudovich, “Primenenie metoda Lyapunova—Shmidta v zadache otvetvleniya tsikla ot semeystva ravnovesiy sistemy s mul'tikosimmetriey” [Application of the Lyapunov—Schmidt method in the problem of branching a cycle from a family of equilibria of a system with multicosymmetry], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 2000, **41**, No. 1, 136–149 (in Russian).
4. J. D. Murray, *Matematicheskaya biologiya. T. 1* [Mathematical biology. I. An introduction], Inct. komp. issl., Moscow–Izhevsk, 2011 (Russian translation).
5. Yu. M. Svirezhev, *Nelineynye volny, dissipativnye struktury i katastrofy v ekologii* [Nonlinear Waves, Dissipative Structures and Catastrophes in Ecology], Nauka, Moscow, 1987 (in Russian).
6. T. D. Ha and V. G. Tsybulin, “Mul'tistabil'nye stsenarii dlya differentsial'nykh uravneniy, opisuyayushchikh dinamiku sistemy khishchnikov i zhertv” [Multistable scenarios for differential equations describing the dynamics of a system of predators and prey], *Komp. issl. i model.* [Comp. Research. Model.], 2020, **12**, No. 6, 1451–1466 (in Russian).
7. T. D. Ha and V. G. Tsybulin, “Uraveniya diffuzii—reaktsii—adveksii dlya sistemy khishchnik—zhertva v geterogennoy srede” [Diffusion–reaction–advection equations for a predator–prey system in a heterogeneous environment], *Komp. issl. i model.* [Comp. Research. Model.], 2021, **13**, No. 6, 1161–1176 (in Russian).
8. V. G. Tsybulin, T. D. Ha, and P. A. Zelenchuk, “Nelineynaya dinamika sistemy khishchnik—zhertva na neodnorodnom areale i stsenarii lokal'nogo vzaimodeystviya vidov” [Nonlinear dynamics of the predator–prey system in a heterogeneous range and scenarios of local interaction of species], *Izv. vuzov. Prikl. nelin. dinam.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Appl. Nonlinear Dynam.], 2021, **29**, No. 5, 751–764 (in Russian).
9. V. I. Yudovich, “Kosimmetriya, vyrozhdienie resheniy operatornykh uravneniy, vozniknovenie fil'tratsionnoy konveksii” [Cosymmetry, degeneracy of solutions of operator equations, and occurrence of filtration convection], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1991, **49**, No. 5, 142–148 (in Russian).
10. V. I. Yudovich, “O bifurkatsiyakh pri vozmushcheniyakh, narushayushchikh kosimmetriyu” [On bifurcations under perturbations violating cosymmetry], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2004, **398**, No. 1, 57–61 (in Russian).

11. G. W. Bluman and S. Kumei, *Symmetries and Differential Equations*, Springer, Berlin, 2013.
12. A. V. Budyansky, K. Frischmuth, and V. G. Tsybulin, “Cosymmetry approach and mathematical modeling of species coexistence in a heterogeneous habitat,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2019, **24**, 547–561.
13. C. Cosner and R. Cantrell, *Spatial Ecology Via Reaction–Diffusion Equations*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 2003.
14. U. Feudel, “Complex dynamics in multistable systems,” *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2008, **18**, No. 6, 1607–1626.
15. K. Frischmuth, A. V. Budyansky, and V. G. Tsybulin, “Modeling of invasion on a heterogeneous habitat: taxis and multistability,” *Appl. Math. Comput.*, 2021, **410**, 126456.
16. K. Frischmuth, E. S. Kovaleva, and V. G. Tsybulin, “Family of equilibria in a population kinetics model and its collapse,” *Nonlinear Anal.*, 2011, **12**, 146–155.
17. C. S. Holling, “Some characteristics of simple types of predation and parasitism,” *Can. Entomologist.*, 1959, **91**, 385–398.
18. N. H. Ibragimov, *A Practical Course in Differential Equations and Mathematical Modelling: Classical and New Methods*, World Scientific, Singapore, 2010.
19. K. Kim and W. Choi, “Local dynamics and coexistence of predator–prey model with directional dispersal of predator,” *Math. Biosci. Eng.*, 2020, **17**, 6737–6755.
20. A. Rubin and G. Riznichenko, *Mathematical Biophysics*, Springer, New York, 2014.
21. Y. V. Tyutyunov, A. D. Zagrebneva, and A. I. Azovsky, “Spatiotemporal pattern formation in a prey–predator system: The case study of short-term interactions between diatom microalgae and microcrustaceans,” *Mathematics*, 2020, **8**, No. 7, 1065–1079.
22. V. I. Yudovich, “Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it,” *Chaos*, 1995, **5**, No. 2, 402–411.

T. D. Ha

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia;  
Vietnam-Hungary Industrial University, Hanoi, Vietnam  
E-mail: toanhd.viu@gmail.com, dha@sfedu.ru

V. G. Tsybulin

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia  
E-mail: vgcibulin@sfedu.ru

## МОДЕЛИ САМОСОПРЯЖЁННЫХ И УНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОНТРЯГИНА

© 2022 г. В. А. ШТРАУС

Аннотация. Статья представляет собой переработанный текст лекций, прочитанных автором на КРОМШ-2019 и посвящённых сравнению различных подходов к построению модельного представления самосопряжённых и унитарных операторов, действующих в пространствах Понтрягина. Базой для двух из этих моделей служит регуляризованное интегральное представление Крейна—Лангера числовой последовательности, порождённой степенями самосопряжённого (в смысле пространств Понтрягина) оператора. Приводится схема вывода как этого представления, так и спектральной функции соответствующего оператора. В обеих моделях (одна из которых принадлежит автору настоящей работы) оператор реализуется как оператор умножения на независимую переменную, но пространство функций, в которых он действует, для каждой из моделей своё. Третья модель, принадлежащая В. С. Шульману, использует понятие квазивектора.

### ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	522
1. Некоторые базовые понятия и результаты . . . . .	523
2. Спектральное разложение $J$ -с.с. оператора в пространстве Понтрягина . . . . .	525
3. Модель $J$ -с.с. оператора на базе его спектрального разложения . . . . .	534
4. Модель $J$ -унитарного оператора, порождаемая его спектральным разложением . . . . .	538
5. Другие модели . . . . .	540
6. Заключительные замечания . . . . .	548
Список литературы . . . . .	548

### ВВЕДЕНИЕ

В хорошо известной монографии Коложоары и Фойаша (см. [31, гл. 5, следствие 5.7]) отмечается, что унитарные и самосопряжённые операторы в пространствах Понтрягина представляют собой примеры обобщённых спектральных операторов. С этой точки зрения теория операторов в пространствах Понтрягина и Крейна оказывается естественным полигоном, на котором могут быть проверены различные методы, используемые в общей теории линейных операторов. Одним из этих методов является метод модельного представления операторов как действующих в подходящем функциональном пространстве операторов умножения на скалярные функции. Построение таких моделей для произвольных самосопряжённых и унитарных операторов в пространствах Понтрягина — основная цель этих заметок.

## 1. НЕКОТОРЫЕ БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

В самой общей постановке (см. [2, 6]) пространство с индефинитной метрикой можно определить как (комплексное) линейное пространство  $\mathcal{L}$  с заданной на нём эрмитовой полуторалинейной формой (внутренним эрмитовым произведением)  $Q(x, y)$ , причём такой, что соответствующая квадратичная форма  $q(x) := Q(x, x)$  является знаконеопределённой (т. е.  $Q(x, x)$  принимает положительные, отрицательные и нулевые значения). В случае конечномерного пространства  $\mathcal{L}$  используется также (см. [17]) термин *псевдоунитарное пространство*. Вместе с тем возможна и такая ситуация, когда на  $\mathcal{L}$  задаётся вещественнозначная функция  $q(x)$ , прямо или даже косвенно (таковы, например, банаховы  $J_\nu$ -пространства — см. [2]) не связанная с какой-либо квадратичной формой. В этом контексте представляет интерес вопрос о том, какие вещественнозначные функции (не обязательно знакопеременные) порождаются полуторалинейными формами.

**Теорема 1.1.** Пусть  $q(x)$  — вещественнозначная функция, заданная на линейном пространстве  $\mathcal{L}$ . Функция  $q(x)$  тогда и только тогда порождается некоторой квадратичной формой, когда  $q(x)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а. } q(\alpha x) = |\alpha|^2 q(x), \quad x \in \mathcal{L}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \\ \text{б. для любых } x, y \in \mathcal{L} \text{ выражение } q(x + \lambda y) \text{ определяет} \\ \text{функцию, непрерывную по переменной } \lambda \in \mathbb{C}, \\ \text{в. для функции } q(\cdot) \text{ верно тождество параллелограмма} \\ q(x + y) + q(x - y) = 2(q(x) + q(y)). \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

*Доказательство.* Необходимость условий (1.1) очевидна, поэтому мы остановимся только на их достаточности. Положим (в теории полуторалинейных и квадратичных форм такое представление называют тождеством поляризации)

$$Q(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 i^m q(x + i^m y). \quad (1.2)$$

Проверим аддитивность введённой формы. В соответствии с (1.2) имеем

$$Q(x + y, z) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 i^m q(x + y + i^m z).$$

Применение тождества параллелограмма даёт два возможных представления

$$q(x + y + i^m z) = 2(q(x + i^m z) + q(y)) - q(x - y + i^m z)$$

и

$$q(x + y + i^m z) = 2(q(y + i^m z) + q(z)) - q(-x + y + i^m z),$$

первое из которых ведёт к  $Q(x, z)$ , а второе — к  $Q(y, z)$ . Итак,

$$\begin{aligned} Q(x + y, z) &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^3 i^m q(x + i^m z) - \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 i^m q(x - y + i^m z) = 2 \cdot Q(x, z) - \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 i^m q(x - y + i^m z), \\ Q(x + y, z) &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^3 i^m q(y + i^m z) - \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 i^m q(-x + y + i^m z) = \\ &= 2 \cdot Q(y, z) - \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 i^m q(-x + y + i^m z) = 2 \cdot Q(y, z) + \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 i^{(m+2)} q(x - y + i^{(m+2)} z). \end{aligned}$$

Тем самым аддитивность доказана.

Однородность введённой формы по первому аргументу в случае положительного рационального множителя следует из аддитивности, а для положительного вещественного множителя доказывается предельным переходом. Остальные пункты проверяются непосредственно.  $\square$

Обычно пространство с индефинитной метрикой снабжается той или иной топологией. В частности, пусть  $\mathcal{H}$  — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ . Пространство  $\mathcal{H}$  называется *гильбертовым пространством с индефинитной метрикой*, если оно

дополнительно оснащено непрерывной эрмитовой полуторалинейной формой  $[\cdot, \cdot]$  такой, что соответствующая квадратичная форма знакопеременна. Заметим, что именно внутреннее произведение  $[\cdot, \cdot]$  является для нас основным, а вот гильбертово скалярное произведение играет вспомогательную роль и может меняться на топологически ему эквивалентное. В силу непрерывности внутреннее произведение может быть представлено в форме  $[\cdot, \cdot] = (G\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ , где  $G$  — так называемый *оператор Грама*, который необходимо является ограниченным. Кроме того, эрмитовость внутреннего произведения влечёт за собой самосопряжённость  $G$  как оператора в гильбертовом пространстве. Такие пространства с индефинитной метрикой обычно называют гильбертовыми пространствами с  $G$ -метрикой (см. [1]). Теория операторов в них сравнительно бедна результатами и, возможно, ещё ждёт своих исследователей. Намного более развитой является теория операторов в гильбертовых пространствах с  $G$ -метрикой в случае ограниченно обратимого оператора Грама (т. е. в регулярных гильбертовых пространствах с  $G$ -метрикой [1]).

**Предложение 1.1.** *Гильбертово пространство  $\mathcal{H}$  с  $G$ -метрикой будет регулярным тогда и только тогда, когда для любого действующего на всём  $\mathcal{H}$  непрерывного линейного функционала  $f$  найдётся такой вектор  $y_f$ , что*

$$fx = [x, y_f], \quad x \in \mathcal{H}. \quad (1.3)$$

*Доказательство.* Если  $G$  ограниченно обратим, то представление (1.3) следует непосредственно из теоремы Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве (см., например, [20, гл. II, § 3, п. 30]). Обратно, пусть для любого  $f$  имеет место представление (1.3). Возьмём произвольный вектор  $z_f$  и положим  $fx = (x, z_f)$ , откуда в силу (1.3) найдётся такой  $y_f$ , что  $(x, Gy_f - z_f) = 0$  и, следовательно,  $Gy_f = z_f$ . Тогда в силу самосопряжённости  $G$  его ядро тривиально, а из теоремы о замкнутом графике следует, что оператор  $G^{-1}$  ограничен.  $\square$

Гильбертово скалярное произведение в регулярном гильбертовом пространстве с  $G$ -метрикой может быть заменено топологически эквивалентным ему произведением так, что  $[\cdot, \cdot] = (J\cdot, \cdot)$ , где  $J = P_+ - P_-$ ,  $P_+$  и  $P_-$  — (гильбертовы) ортопроекторы,  $P_+ + P_- = I$ . Последнее равенство влечёт равенство  $P_+(P_+ + P_-) = P_+$ , откуда следует

$$P_+P_- = 0 \quad \text{и} \quad P_-P_+ = 0. \quad (1.4)$$

Положим  $\mathcal{H}_+ = P_+\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}_- = P_-\mathcal{H}$ . В силу (1.4) подпространства  $\mathcal{H}_+$  и  $\mathcal{H}_-$  образуют прямую сумму и, кроме того, ортогональны в смысле внутреннего произведения  $[\cdot, \cdot]$ . Разложение  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \dot{+} \mathcal{H}_-$  называется *каноническим разложением*, а оператор  $J$  — *канонической симметрией*. Пространства с индефинитной метрикой, в которых оператор Грама является канонической симметрией, называется  *$J$ -пространством*, или *пространством Крейна*. В этих заметках мы будем предполагать, что  $\mathcal{H}$  является пространством Крейна или его частным случаем — пространством Понтрягина:  $J$ -пространство называется *пространством Понтрягина*, или *пространством  $\Pi_\kappa$* , если  $\dim \mathcal{H}_- = \kappa < \infty$  (возможен альтернативный вариант  $\dim \mathcal{H}_+ = \kappa < \infty$ , но мы его использовать не будем).

Вектор  $0 \neq x \in \mathcal{H}$  называется *положительным*, *неотрицательным* или *нейтральным*, если, соответственно,  $[x, x] > 0$ ,  $[x, x] \geq 0$  или  $[x, x] = 0$ . Аналогично определяются отрицательные и неположительные векторы. Два вектора  $x, y \in \mathcal{H}$  называются  *$J$ -ортогональными* ( $x \perp y$ ), если  $[x, y] = 0$ , аналогично вводятся определения  $J$ -ортогональных множеств,  $J$ -ортогонального дополнения и т. п.  $J$ -ортогональное дополнение к множеству  $X \subset \mathcal{H}$  обозначается  $X^{\perp}$ . Термин *подпространство* у нас всегда обозначает замкнутое линейное многообразие, а линейное многообразие, которое может быть незамкнутым, называется *линеалом*. Линеал называется *положительным*, если все его ненулевые векторы положительны, аналогично определяются отрицательные, неотрицательные и т. п. линеалы. Положительное подпространство называется *максимальным положительным*, если оно не является собственным подпространством другого положительного подпространства. Аналогично определяются максимальные отрицательные, максимальные неположительные и т. п. подпространства. Далее, подпространство  $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$  называется *невырожденным*, если  $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{\perp} = \{0\}$ , в противном случае подпространство  $\mathcal{L}$  называется вырожденным. Если  $\mathcal{L}$  является вырожденным подпространством, то подпространство  $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{\perp}$  называется *изотропной частью*  $\mathcal{L}$ . Если  $\mathcal{L}$  — невырожденное подпространство, то можно образовать  $J$ -ортогональную

прямую сумму  $\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{L}^{[\perp]}$ . В общем случае эта сумма плотна в  $J$ -пространстве, но не совпадает с ним, если же  $\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{L}^{[\perp]} = \mathcal{H}$ , то подпространство  $\mathcal{L}$  называется *проекционно полным*.

**Предложение 1.2.** *Подпространство  $\mathcal{L}$  является проекционно полным тогда и только тогда, когда оно является регулярным гильбертовым  $G$ -пространством, на котором внутреннее произведение — это  $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{L}}$ .*

*Доказательство.* Пусть подпространство  $\mathcal{L}$  проекционно полно, а  $f$  — заданный на  $\mathcal{L}$  произвольный непрерывный линейный функционал. В силу теоремы Хана—Банаха можно считать, что  $f$  доопределён на всём  $\mathcal{H}$ . Тогда в силу предложения 1.1 найдётся такой вектор  $y_f \in \mathcal{H}$ , что  $fx = [x, y_f]$ ,  $x \in \mathcal{H}$ . Вектор  $y_f$  можно представить в виде  $y_f = y_f^{(1)} + y_f^{(2)}$ , где  $y_f^{(1)} \in \mathcal{L}$ ,  $y_f^{(2)} \in \mathcal{L}^{[\perp]}$ . Тогда для  $x \in \mathcal{L}$  верно  $fx = [x, y_f^{(1)}]$ . Обратно, пусть  $\mathcal{L}$  регулярно как гильбертово  $G$ -пространство, а  $y$  — произвольный вектор. Тогда выражение  $fx = [x, y]$  задаёт на  $\mathcal{L}$  непрерывный линейный функционал, и в силу предложения 1.1 найдётся такой вектор  $y_{\mathcal{L}} \in \mathcal{L}$ , что  $fx = [x, y_{\mathcal{L}}]$  для любого  $x \in \mathcal{L}$ . Прямая проверка показывает, что  $(y - y_{\mathcal{L}}) \in \mathcal{L}^{[\perp]}$ .  $\square$

Заметим, что в пространстве  $\Pi_{\kappa}$  подпространство является проекционно полным тогда и только тогда, когда оно невырождено. Все определения, равно как и большинство упомянутых результатов и их доказательства, а также дальнейшее описание геометрии  $J$ -пространств можно найти в монографии [3] и лекциях [4, 5]. Мы будем придерживаться стандартных обозначений в случае понятий, связанных с гильбертовой структурой на  $\mathcal{H}$  (ортогональность, ортогональное дополнение, ортогональная сумма и т. п.).

Все операторы, упомянутые в этой работе, полагаются, если только прямо не оговорено противное, линейными и ограниченными, символами  $\sigma(A)$  и  $\rho(A)$  обозначаются, соответственно, спектр и множество регулярных точек (в другой терминологии — резольвентное множество) оператора  $A$ . Итак, пусть  $A: \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$  — некоторый оператор. Оператор  $A^c$  называется  *$J$ -сопряжённым ( $J$ -с.)* к оператору  $A$ , если  $[Ax, y] = [x, A^c y]$  для всех  $x, y \in \mathcal{H}$ . Отметим, что спектры операторов  $A$  и  $A^c$  расположены симметрично относительно вещественной оси (т. е.  $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A^c)$ ). Оператор  $A$  называется  *$J$ -самосопряжённым ( $J$ -с.с.)*, если  $A = A^c$ . Заметим, что часть спектра  $J$ -с.с. оператора может быть невещественной, а собственным значениям оператора могут соответствовать нетривиальные жордановы цепочки из собственных и присоединённых векторов, причём это верно не только для операторов в пространстве Крейна, но и в псевдоунитарном пространстве (см. [3–5, 17]).

**Замечание 1.1.** Структура пространства Крейна позволяет переформулировать в терминах внутреннего произведения  $[\cdot, \cdot]$  многие результаты, обычно формулируемые в терминах гильбертова скалярного произведения. Приведём два примера.

1. Пусть  $\langle x, y \rangle$  — дополнительная непрерывная полуторалинейная форма, заданная в пространстве Крейна  $\mathcal{H}$ . Тогда найдётся такой оператор  $D$ , что  $\langle x, y \rangle = [Dx, y]$ , если форма  $\langle x, y \rangle$  — эрмитова, то  $D$  —  $J$ -с.с. оператор, а если соответствующая квадратичная форма  $\langle x, x \rangle$  неотрицательна, то  $D$  —  $J$ -неотрицательный оператор.
2. Если  $C$  —  $J$ -неотрицательный оператор, то  $\|C\| = \sup_{x: \|x\|=1} \{[Cx, x]\}$ .

## 2. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ $J$ -С.С. ОПЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ ПОНТРЯГИНА

В этом разделе пространство с индефинитной метрикой — это пространство Понтрягина, и указанное условие дальше оговариваться не будет. Если  $J$ -с.с. оператор  $A$  имеет только вещественный спектр, то у него есть собственная спектральная функция (с.с.ф.)  $E_{\lambda}$  с конечным множеством критических точек  $\Lambda$ . Точные формулировки будут приведены ниже. Поскольку некоторые формулы, полученные в процессе доказательства существования с.с.ф., используются для построения модельного пространства по версии [33], то мы приведём его набросок по схеме, предложенной в [36] (класс операторов, охваченный в [36], шире, чем рассматриваемый нами). На первом этапе вещественность спектра оператора  $A$  предполагаться не будет. Итак, по известной теореме Понтрягина найдётся такое максимальное неположительное подпространство  $\mathcal{L}_-$ , что  $A\mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}_-$ . В силу определения пространства Понтрягина размерность подпространства  $\mathcal{L}_-$  равна  $\kappa$ , поэтому оператор  $A|_{\mathcal{L}_-}$  действует в конечномерном пространстве и его спектр — конечное множество.

Пусть  $N(t)$  — минимальный аннулирующий многочлен для  $A|_{\mathcal{L}_-}$  (т. е.  $N(A|_{\mathcal{L}_-}) = 0$  и  $N(t)$  имеет минимальную степень среди всех многочленов с таким свойством), коэффициент которого при старшей степени для определённости равен единице,  $\bar{N}(t)$  — многочлен, коэффициенты которого сопряжены к коэффициентам многочлена  $N(t)$ . Тогда

$$0 = [N(A)x, y] = [x, \bar{N}(A)y], \quad \text{где } x \in \mathcal{L}_-, \quad y \in \mathcal{H},$$

поэтому  $\bar{N}(A)\mathcal{H} \subset \mathcal{L}_+$ , где  $\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_-^{\perp}$  — максимальное неотрицательное подпространство. Введём на  $\mathcal{H}$  новую полуторалинейную форму  $\langle x, y \rangle := [N(A)x, N(A)y]$ . Тогда

$$\langle x, x \rangle = [\bar{N}(A)N(A)x, x] = [N(A)\bar{N}(A)x, x] = [\bar{N}(A)x, \bar{N}(A)x] \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}. \quad (2.1)$$

Рассмотрим последовательность степенных моментов

$$\{c_k = \langle A^k x, x \rangle\}_{k=0}^{+\infty}, \quad (2.2)$$

которая, очевидно, удовлетворяет следующему условию роста:

$$|c_k| \leq \|x\|^2 \|N(A)\|^2 \|A\|^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.3)$$

Так как квадратичная форма  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  неотрицательна, то по теореме Гамбургера (см., например, [7, теорема 2.1.1]) последовательность  $\{c_k\}_{k=0}^{+\infty}$  допускает представление

$$c_k = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k d\sigma^{(x)}(t), \quad (2.4)$$

где  $\sigma^{(x)}(t)$  — неубывающая функция,  $\sigma^{(x)}(-\infty) = 0$ ,  $\sigma^{(x)}(t-0) = \sigma^{(x)}(t)$  для любых  $t \in \mathbb{R}$ . В силу условия (2.3) функция  $\sigma^{(x)}(t)$  не имеет точек роста на полубесконечных интервалах  $(-\infty, -\|A\|)$  и  $(\|A\|, +\infty)$ , а именно

$$\sigma^{(x)}(t) = 0 \quad \text{при } t < -\|A\| \quad \text{и} \quad \sigma^{(x)}(t) = [N(A)x, N(A)x] \quad \text{при } t > \|A\|. \quad (2.5)$$

Благодаря (2.5) представление (2.4) может быть переписано в виде

$$c_k = \int_{-\|A\|}^{\|A\|+\epsilon} t^k d\sigma^{(x)}(t), \quad \epsilon = \text{const} > 0.$$

Из последнего равенства следует (см., например, [7, теорема 2.6.4]), что функция  $\sigma^{(x)}(t)$  определяется единственным образом (проблема моментов является определённой). Укажем также, что  $\sigma^{(x)}(t)$  может быть восстановлена по  $\{c_k\}_0^\infty$  с помощью аналитической функции  $f(\xi)$ , первоначально заданной в окрестности бесконечно удалённой точки рядом

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^{-(k+1)},$$

а затем аналитически продолженной на область  $\mathbb{C} \setminus [-\|A\|, \|A\|]$  формулой

$$f(\xi) = \int_{-\|A\|}^{\|A\|+\epsilon} \frac{1}{\xi - t} d\sigma^{(x)}(t), \quad \epsilon = \text{const} > 0. \quad (2.6)$$

Несложно показать, что

$$\frac{\sigma^{(x)}(t-0) + \sigma^{(x)}(t+0)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} f(\xi) d\xi, \quad (2.7)$$

где  $\Gamma_\delta^{(t)}$  положительно ориентированная граница прямоугольной области  $[-\|A\| - 1, t] \times i[-1, 1]$  без участка границы между точками  $(t, -i\delta)$  и  $(t, i\delta)$ . Чтобы не усложнять формулы, мы будем использовать дальше представление (2.4), но при этом иметь в виду, что соответствующие интегралы фактически берутся по конечному промежутку. Далее, для фиксированного  $t$  функция  $\sigma^{(x)}(t)$  определяет неотрицательную числовую функцию по отношению к  $x$ . Поскольку эта

функция порождена (как следует из (2.4)) эрмитовыми полуторалинейными формами  $\langle A^k x, x \rangle$ , для которых, очевидно, выполняются тождество параллелограмма и соотношение однородности из (1.1), то в силу единственности представления (2.4) и формулы восстановления (2.7) оба эти условия выполнены и для  $\sigma^{(x)}(t)$ . Кроме того,  $\sigma^{(x)}(t) \leq [N(A)x, N(A)x]$ , поэтому функция  $\sigma^{(x)}(t)$  непрерывна по  $x$  в нормированной топологии. Итак, для  $\sigma^{(x)}(t)$  выполнены условия теоремы 1.1. Последнее обстоятельство открывает возможность ввести эрмитову полуторалинейную форму

$$\prec x, y \succ^{(t)} := \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 i^m \cdot \sigma^{(x+im y)}(t).$$

Поскольку квадратичная форма  $\sigma^{(x)}(t)$  непрерывна по  $x$ , введённая полуторалинейная форма  $\prec x, y \succ^{(t)}$  непрерывна в гильбертовой нормированной топологии. В силу сказанного (см. также замечание 1.1) найдётся операторнозначная функция  $G_t$  такая, что

- $G_{-\infty} = 0$ ,  $G_t = \text{s-lim}_{\tau \rightarrow t-0} G_\tau$  для любого  $t \in \mathbb{R}$  (s-lim — предел в сильной операторной топологии);
- для любого  $t \in \mathbb{R}$  и  $\tau \in (-\infty, t)$  оператор  $(G_t - G_\tau)$  является  $J$ -неотрицательным;
- $N(A)\bar{N}(A)A^k x = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k dG_t x$  для любого  $x \in \mathcal{H}$  и  $k = 0, 1, 2, \dots$

Указанное интегральное представление степеней оператора  $A$  и стандартное разложение его резольвенты  $R_\xi(A)$  в окрестности бесконечно удалённой точки (см. [20, гл. XI, § 1, п. 148, формула 5]) приводит к следующему представлению:

$$N(A)\bar{N}(A)R_\xi(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t - \xi} dG_t, \quad (2.8)$$

где  $\xi \in \mathbb{C} \setminus [-\|A\|, \|A\|]$ . Далее, выражение  $M(t, \xi) = \frac{N(\xi)\bar{N}(\xi) - N(t)\bar{N}(t)}{t - \xi}$  превращается после его очевидного доопределения в исключительной подобласти  $t = z$  в полином от двух переменных, т. е. выражению  $M(A, \xi) = R_\xi(A)(N(\xi)\bar{N}(\xi)I - N(A)\bar{N}(A))$  можно придать корректный смысл. Последняя формула и представление (2.8) приводят к новому представлению

$$R_\xi(A) = \frac{1}{N(\xi)\bar{N}(\xi)} \left( M(A, \xi) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t - \xi} dG_t \right), \quad (2.9)$$

где сходимость интеграла можно понимать как в сильной, так и в равномерной операторной топологиях. Непосредственно из этого представления следует, что вне вещественной оси функция  $R_\xi(A)$  аналитична всюду за исключением, быть может, конечного числа полюсов. Последнее означает, что не вещественный спектр  $A$  состоит из конечного числа собственных значений с конечной длиной жордановых цепочек. Несложно показать, что инвариантное подпространство оператора  $A$ , состоящее из всех его собственных и присоединённых векторов, отвечающих ровно одному собственному значению, нейтрально, и потому в случае пространства Понтрягина конечномерно. Кроме того, спектр любого  $J$ -с.с. оператора (как в случае пространства Понтрягина, так и пространства Крейна) симметричен относительно вещественной оси. Всё сказанное позволяет разделить инвариантное подпространство оператора  $A$ , отвечающее его не вещественному спектру, от инвариантного подпространства, отвечающего его вещественному спектру. Эти подпространства оказываются  $J$ -ортогональными и проекционно полными, а первое подпространство — ещё и конечномерным. Соответствующие  $J$ -ортогональные проекторы могут быть построены как проекторы Рисса (по поводу последних см., например, [20, гл. XI, § 1, п. 148, теорема о разложении]).  $J$ -с.с. операторы в конечномерных  $J$ -пространствах полностью описываются методами линейной алгебры [17], поэтому в дальнейшем, если прямо не оговорено противное, мы будем предполагать, что

$$\sigma(A) \subset \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

При условии (2.10) все коэффициенты многочлена  $N(\xi)$  вещественны, поэтому формула (2.9) может быть заменена на формулу

$$R_\xi(A) = \frac{1}{N^2(\xi)} \left( M(A, \xi) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t - \xi} dG_t \right). \quad (2.11)$$

Положим

$$\Lambda := \{\lambda : N(\lambda) = 0\}. \quad (2.12)$$

Множество  $\Lambda$  в дальнейшем называется *множеством критических точек* для оператора  $A$  и для его спектральной функции, к определению которой мы переходим.

Обозначим  $\mathbb{R}_G$  множество тех  $t \in \mathbb{R}$ , для которых  $G_t$  непрерывна в сильной операторной топологии. Действуя так же, как и в (2.7), положим

$$E_t := \left( -\frac{1}{2\pi i} \right) \text{s-lim}_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} R_\xi(A) d\xi \quad (2.13)$$

для всех  $t \in \mathbb{R}_G \setminus \Lambda$  и доопределим  $E_t$  по формуле  $E_t := \text{s-lim}_{\tau \in \mathbb{R}_G, \tau \rightarrow t-0} E_\tau$  для остальных  $t \in \mathbb{R} \setminus \Lambda$ . Существование предела в (2.13) следует, грубо говоря, из теоремы о существовании сильного предела у монотонной ограниченной последовательности операторов в гильбертовом пространстве (см. [20, гл. VII, § 1, п. 104, теорема Вижье—С. Надя]) и формулы (2.11), однако соответствующее доказательство не вполне тривиально и требует определённой детализации. В её рамках отметим следующее. Из формул (2.11) и (2.13) мы имеем

$$E_t = \left( -\frac{1}{2\pi i} \right) \text{s-lim}_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{N^2(\xi)} \left( M(A, \xi) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau - \xi} dG_\tau \right) d\xi. \quad (2.14)$$

Выражение  $N^{-2}(\xi)M(A, \xi)$  является дробно-рациональной функцией с операторными коэффициентами, множество полюсов которой совпадает с  $\Lambda$ , поэтому

$$\text{s-lim}_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{N^2(\xi)} M(A, \xi) d\xi = \int_{\Gamma^{(t)}} \frac{1}{N^2(\xi)} M(A, \xi) d\xi, \quad (2.15)$$

где  $\Gamma^{(t)}$  — положительно ориентированная граница прямоугольной области  $[-\|A\| - 1, t] \times i[-1, 1]$  (см. (2.7)), а интеграл, стоящий в равенстве (2.15) справа, является интегралом от аналитической на контуре интегрирования функции, и сходимость к нему интеграла в левой части можно трактовать как в сильной, так и в равномерной операторных топологиях. Заметим также, что если  $\lambda_{n-1}$  и  $\lambda_n$  — соседние точки из  $\Lambda$  ( $\lambda_{n-1} < \lambda_n$ ), то интеграл справа не меняется при изменении  $t \in (\lambda_{n-1}, \lambda_n)$ .

Анализ поведения интеграла  $\int_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{N^2(\xi)} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau - \xi} dG_\tau \right) d\xi$  при  $\delta \rightarrow +0$  является, очевидно, бо-

лее трудной задачей. Зафиксируем произвольное  $t \in \mathbb{R}_G$ , для которого как внутри, так и вне контура  $\Gamma^{(t)}$  найдутся точки спектра оператора  $A$ . Далее, зафиксируем числа  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}_G, \quad \alpha < \beta, \quad [\alpha, \beta] \cap \Lambda = \emptyset, \quad t \in (\alpha, \beta). \quad (2.16)$$

Функция  $G_\tau$  не имеет точек роста при  $\tau < -\|A\|$  и при  $\tau > \|A\|$ , поэтому несобственные интегралы  $\int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\tau - \xi} dG_\tau$  и  $\int_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{\tau - \xi} dG_\tau$  задают функции, аналитичные на контуре  $\Gamma^{(t)}$ , так что

$$\begin{aligned} \text{u-lim}_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{N^2(\xi)} \left( \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\tau - \xi} dG_\tau + \int_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{\tau - \xi} dG_\tau \right) d\xi = \\ = \int_{\Gamma^{(t)}} \frac{1}{N^2(\xi)} \left( \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\tau - \xi} dG_\tau + \int_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{\tau - \xi} dG_\tau \right) d\xi \end{aligned}$$

(u-lim — предел в равномерной операторной топологии).

**Замечание 2.1.** Функции  $\frac{1}{N^2(\xi)} \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\tau - \xi} dG_\tau$  и  $\frac{1}{N^2(\xi)} \int_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{\tau - \xi} dG_\tau$  аналитичны на открытой полосе  $(\alpha, \beta) \times i\mathbb{R}$ , поэтому интегралы

$$\int_{\Gamma^{(t)}} \frac{1}{N^2(\xi)} \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\tau - \xi} dG_\tau d\xi \quad \text{и} \quad \int_{\Gamma^{(t)}} \frac{1}{N^2(\xi)} \int_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{\tau - \xi} dG_\tau d\xi$$

сохраняют постоянное значение при  $t \in (\alpha, \beta)$ .

Далее,

$$\int_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{N^2(\xi)} \left( \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\tau - \xi} dG_\tau \right) d\xi = \int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{N^2(\xi)(\tau - \xi)} d\xi \right) dG_\tau. \tag{2.17}$$

Дробь  $\frac{1}{N^2(\xi)(\tau - \xi)}$  разлагается в линейную комбинацию дробей вида  $\frac{1}{(\xi - \lambda_m)^l(\xi - \tau)}$ , где  $\lambda_m$  — произвольная точка из множества  $\Lambda$ , а степень  $l$  меняется от единицы до значения кратности  $\lambda_m$  как корня многочлена  $N^2(\xi)$ . Одновременно

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\xi - \lambda_m)^l(\xi - \tau)} &= \left( \frac{1}{(\xi - \lambda_m)^l(\xi - \tau)} - \frac{1}{(\tau - \lambda_m)^l(\xi - \tau)} \right) + \frac{1}{(\tau - \lambda_m)^l(\xi - \tau)} = \\ &= - \frac{\sum_{j=0}^{l-1} (\tau - \lambda_m)^{l-j-1} (\xi - \lambda_m)^j}{(\xi - \lambda_m)^l (\tau - \lambda_m)^l} + \frac{1}{(\tau - \lambda_m)^l (\xi - \tau)} = \\ &= \frac{1}{(\tau - \lambda_m)^l (\xi - \tau)} - \frac{1}{(\tau - \lambda_m)^l (\xi - \lambda_m)} - \sum_{j=0}^{l-2} (\tau - \lambda_m)^{-(j+1)} (\xi - \lambda_m)^{j-l}. \end{aligned}$$

Указанная цепочка преобразований предполагает, что  $l \geq 2$ ; если же  $l = 1$ , то в последней строчке преобразований третье слагаемое (т. е. сумма) должно быть опущено, что только упрощает дальнейшие рассуждения. Пусть  $l \geq 2$ , тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} \sum_{j=0}^{l-2} (\tau - \lambda_m)^{-(j+1)} (\xi - \lambda_m)^{j-l} d\xi = \\ = \sum_{j=0}^{l-2} \frac{1}{j - l + 1} (\tau - \lambda_m)^{-(j+1)} ((t - \delta i + 1)^{j-l+1} - (t + \delta i + 1)^{j-l+1}) \end{aligned}$$

и, следовательно, выражение  $\int_{\Gamma_\delta^{(t)}} \sum_{j=0}^{l-2} (\tau - \lambda_m)^{-(j+1)} (\xi - \lambda_m)^{j-l} d\xi$  равномерно по  $t$  стремится к нулю при  $\delta \rightarrow 0$  и  $t \in [\alpha, \beta]$ . Далее, значение интеграла  $\int_{\Gamma_\delta^{(t)}} (\xi - \lambda_m)^{-1} d\xi$  зависит от местоположения точки  $\lambda_m$ :

$$\int_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{(\xi - \lambda_m)} d\xi = \begin{cases} 2i \left( \pi - \operatorname{arctg} \left( \frac{\delta}{t - \lambda_m} \right) \right), & \text{если } \lambda_m < \alpha; \\ 2i \operatorname{arctg} \left( \frac{\delta}{\lambda_m - t} \right), & \text{если } \lambda_m > \beta; \end{cases}$$

поэтому

$$\operatorname{u-lim}_{\delta \rightarrow +0} \int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{(\tau - \lambda_m)^l (\xi - \lambda_m)} d\xi \right) dG_\tau = \begin{cases} 2\pi i \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{(\tau - \lambda_m)^l} dG_\tau, & \text{если } \lambda_m < \alpha; \\ 0, & \text{если } \lambda_m > \beta. \end{cases}$$

Похожим образом выглядит значение интеграла  $\int_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{(\xi - \tau)} d\xi$ :

$$\int_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{(\xi - \tau)} d\xi = \begin{cases} 2i \left( \pi - \operatorname{arctg} \left( \frac{\delta}{t - \tau} \right) \right), & \text{если } \tau < t; \\ \pi i, & \text{если } \tau = t; \\ 2i \operatorname{arctg} \left( \frac{\delta}{\tau - t} \right), & \text{если } \tau > t. \end{cases}$$

Этот случай, тем не менее, принципиально отличается от предыдущих, поскольку результат интегрирования зависит от  $\tau$  и при переходе к пределу при  $\delta \rightarrow +0$  мы получаем разрывную функцию:

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{(\xi - \tau)} d\xi = \begin{cases} 2\pi i, & \text{если } \tau < t; \\ \pi i, & \text{если } \tau = t; \\ 0, & \text{если } \tau > t. \end{cases}$$

В силу сказанного зависящий от  $\delta$  оператор  $\int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{(\tau - \lambda_m)^l (\xi - \tau)} d\xi \right) dG_\tau$  не имеет, вообще говоря, предела в равномерной операторной топологии при  $\delta \rightarrow +0$ , однако его поведение в сильной операторной топологии будет иным. Действительно, операторы

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^t \left( \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{(\tau - \lambda_m)^l (\xi - \tau)} d\xi \right) dG_\tau \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_t^{\beta} \left( \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{(\tau - \lambda_m)^l (\xi - \tau)} d\xi \right) dG_\tau$$

монотонно (хотя и разнонаправленно) зависят от  $\delta$  и ограничены, поэтому в силу упомянутой выше теоремы Вижье—С. Надя сходятся в сильной операторной топологии к некоторым пределам при  $\delta \rightarrow +0$ . Теорема Вижье—С. Надя — это теорема существования, не дающая ответ на вопрос, каковы эти пределы, но переход к слабому пределу даёт возможность применить теорему Б. Леви о монотонной сходимости. Обычно теорему Б. Леви формулируют для интеграла Лебега, но она очевидным образом переформулируется для интеграла Лебега—Стилтьеса (см., например, [11]). Итак,

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{(\tau - \lambda_m)^l (\xi - \tau)} d\xi \right) d(G_\tau x, x) = \int_{\alpha}^t \frac{1}{(\tau - \lambda_m)^l} d(G_\tau x, x).$$

Суммируя всё полученное выше, имеем (см. (2.13))

$$E_t = B^{\alpha, \beta} + \int_{\alpha}^t \frac{1}{N^2(\tau)} dG_{\tau}, \quad (2.18)$$

где  $J$ -с.с. оператор  $B^{\alpha, \beta}$  зависит от  $\alpha$  и  $\beta$ , но не зависит от  $t \in (\alpha, \beta)$ . Формула (2.18) малооперативна, поскольку действия оператора на векторы пространства  $\mathcal{H}$  не имеют явного описания, однако локальное приращение  $E(\Delta)$  для соответствующего приращения  $\Delta$  выглядит достаточно просто:

$$\text{если } \alpha < \mu < \nu < \beta, \text{ то } E(\Delta) = \int_{\mu}^{\nu} \frac{1}{N^2(t)} dG_t, \quad (2.19)$$

где  $\Delta = [\mu, \nu]$ ,  $E(\Delta) = E_{\nu} - E_{\mu}$ ,  $\mu, \nu \in \mathbb{R}_G$ . Последнее ограничение — временное, и в дальнейшем (после соответствующего обоснования) мы от него откажемся. Оператор  $E(\Delta)$  можно ввести не только через  $E_t$ , но и (учитывая механизм определения самого оператора  $E_t$ ) через контурный интеграл, трактуемый как интеграл в смысле главного значения

$$E(\Delta) = -\frac{1}{2\pi i} \operatorname{s-lim}_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Upsilon_{\delta}^{(\Delta)}} R_{\xi}(A) d\xi, \quad (2.20)$$

где  $\Upsilon_{\delta}^{(\Delta)}$  — часть положительно ориентированной границы  $\Upsilon^{(\Delta)}$  прямоугольника  $[\mu, \nu] \times i[-1, 1]$  без двух участков границы, заключённых, во-первых, между точками  $(\mu, -i\delta)$  и  $(\mu, i\delta)$  и, во-вторых, между точками  $(\nu, -i\delta)$  и  $(\nu, i\delta)$ ; т. е. состоящая из двух частей кривая интегрирования  $\Upsilon_{\delta}^{(\Delta)}$  получена из контура  $\Upsilon^{(\Delta)}$  удалением из последнего малых участков в соответствующих окрестностях его пересечения с вещественной прямой. Форма пути  $\Upsilon_{\delta}^{(\Delta)}$  не меняется при применении к нему операции сопряжения, однако ориентация пути при сопряжении меняется на противоположную, что, в свою очередь, компенсируется сменой знака у множителя  $(2\pi i)^{-1}$ , поэтому заданный формулой (2.20) оператор  $E(\Delta)$   $J$ -самосопряжён. Заметим, что высота прямоугольника  $[\mu, \nu] \times i[-1, 1]$  в формуле (2.20) существенной роли не играет, прямоугольник может быть заменён, скажем, прямоугольником  $[\mu, \nu] \times i[-1/2, 1/2]$ , полную границу которого мы обозначим через  $\tilde{\Upsilon}^{(\Delta)}$ , а с указанными выше изъятиями — через  $\tilde{\Upsilon}_{\delta}^{(\Delta)}$ . Наша ближайшая цель — показать, что оператор  $E(\Delta)$  является проектором, для чего достаточно показать, что  $E^2(\Delta) = E(\Delta)$ . В процессе этого доказательства мы будем следовать схеме [20, гл. XI, § 1, п. 148], но с учётом того, что в нашем случае соответствующие контурные интегралы являются интегралами в смысле главного значения и пересекаются со спектром оператора  $A$ . Пусть  $\mu < \mu_1 < \nu_1 < \nu$ ,  $\Delta_1 = [\mu_1, \nu_1]$ ,  $E(\Delta_1) = E_{\nu_1} - E_{\mu_1}$ , функция  $G_t$  непрерывна в точках  $\mu_1$  и  $\nu_1$ . Поскольку операторы  $E(\Delta)$  и  $E(\Delta_1)$  введены как интегралы от резольвенты оператора  $A$ , то они перестановочны как с оператором  $A$ , так и между собой. Кроме того, произведение операторов непрерывно в сильной операторной топологии, поэтому

$$E(\Delta)E(\Delta_1) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \operatorname{s-lim}_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Upsilon_{\delta}^{(\Delta)}} R_{\xi}(A) d\xi \cdot \operatorname{s-lim}_{\delta_1 \rightarrow +0} \int_{\tilde{\Upsilon}_{\delta_1}^{(\Delta_1)}} R_{\xi}(A) d\xi$$

или

$$E(\Delta)E(\Delta_1) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \operatorname{s-lim}_{\delta \rightarrow +0} \operatorname{s-lim}_{\delta_1 \rightarrow +0} \int_{\Upsilon_{\delta}^{(\Delta)}} \left( \int_{\tilde{\Upsilon}_{\delta_1}^{(\Delta_1)}} R_{\xi}(A) \cdot R_{\zeta}(A) d\zeta \right) d\xi. \quad (2.21)$$

Воспользуемся теперь следующим равенством (см. [20, гл. XI, § 1, п. 147, формула 8]), которое иногда называют тождеством Гильберта для резольвент:

$$R_{\xi}(A) - R_{\zeta}(A) = (\xi - \zeta)R_{\xi}(A) \cdot R_{\zeta}(A). \quad (2.22)$$

Тогда интеграл из правой части равенства (2.21) преобразуется следующим образом:

$$\int_{\Gamma_\delta^{(\Delta)}} \left( \int_{\tilde{\Gamma}_{\delta_1}^{(\Delta_1)}} R_\xi(A) \cdot R_\zeta(A) d\zeta \right) d\xi = \int_{\Gamma_\delta^{(\Delta)}} \left( \int_{\tilde{\Gamma}_{\delta_1}^{(\Delta_1)}} \frac{R_\xi(A) - R_\zeta(A)}{(\xi - \zeta)} d\zeta \right) d\xi.$$

Точка  $\xi$  является внешней по отношению к контуру  $\tilde{\Gamma}_{\delta_1}^{(\Delta_1)}$ , поэтому

$$\lim_{\delta_1 \rightarrow +0} R_\xi(A) \int_{\tilde{\Gamma}_{\delta_1}^{(\Delta_1)}} \frac{1}{(\xi - \zeta)} d\zeta = 0.$$

Далее, точка  $\zeta$  является внутренней по отношению к контуру  $\tilde{\Gamma}^{(\Delta)}$ , поэтому

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} R_\zeta(A) \int_{\Gamma_\delta^{(\Delta)}} \frac{1}{(\xi - \zeta)} d\xi = 2\pi i R_\zeta(A).$$

Указанные в (2.21) порядки вычисления как кратного предела, так и кратного интеграла могут быть изменены, поэтому из трёх последних равенств и (2.21) мы имеем, что

$$E(\Delta)E(\Delta_1) = E(\Delta_1). \quad (2.23)$$

Оператор  $E(\Delta_1)$  ведёт себя монотонно (хотя и разнонаправленно) как при  $\mu_1 \rightarrow \mu + 0$ , так и при  $\nu_1 \rightarrow \nu - 0$ , поэтому

$$E(\Delta) = \text{s-lim}_{\mu_1 \rightarrow \mu + 0} \text{s-lim}_{\nu_1 \rightarrow \nu - 0} E(\Delta_1)$$

и (2.23) влечёт требуемое равенство. Итак,  $E(\Delta)$  — проектор и к тому же, как отмечалось выше,  $J$ -с.с., поэтому он  $J$ -ортогонален. Кроме того, оператор  $A$  перестановочен с  $R_\xi(A)$ , поэтому он перестановочен с  $E(\Delta)$ , откуда  $E(\Delta)AE(\Delta) = AE(\Delta)$ , т. е. подпространства  $\mathcal{H}_\Delta = E(\Delta)\mathcal{H}$  и  $\mathcal{H}_\Delta^{[\perp]} = (I - E(\Delta))\mathcal{H}$  инвариантны относительно  $A$ . Практически так же доказывается, что  $J$ -с.с. проектором является оператор  $E_t$ : сначала при  $t_1 < t$  доказывается равенство  $E_{t_1}E_t = E_{t_1}$ , а затем равенство  $E_t^2 = E_t$  доказывается предельным переходом при  $t_1 \rightarrow t$ .

Наша следующая задача — определить локализацию спектра для сужений  $A|_{E_t\mathcal{H}}$  и  $A|_{(I-E_t)\mathcal{H}}$ . Для этого надо доказать, действуя по схеме [20], наличие предела  $\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{R_\xi(A)}{(\xi - \zeta)} d\xi$  (непосредственно в условиях [20] этот предел существует автоматически). Если оператор  $R_\zeta(A)$  определён, то существование нужного предела следует из представления

$$\int_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{R_\xi(A)}{(\xi - \zeta)} d\xi = \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{R_\xi(A) - R_\zeta(A)}{(\xi - \zeta)} d\xi + \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{R_\zeta(A)}{(\xi - \zeta)} d\xi,$$

которое благодаря (2.22) преобразуется в представление

$$\int_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{R_\xi(A)}{(\xi - \zeta)} d\xi = R_\zeta(A) \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} R_\xi(A) d\xi + R_\zeta(A) \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{d\xi}{(\xi - \zeta)}. \quad (2.24)$$

Отметим, что (2.24) имеет, в частности, место, если  $\zeta \notin \mathbb{R}$ . Если же  $\zeta \in \mathbb{R}$  и  $\zeta \notin \Lambda$ , то доказательство существования искомого предела реализуется по той же схеме, что и доказательство корректности определения (2.13), с единственным дополнительным условием, что  $\alpha$  и  $\beta$  выбираются так, что  $\zeta \notin [\alpha, \beta]$ . Далее, из очевидного равенства

$$(A - \zeta I)R_\xi(A) = (A - \xi I)R_\xi(A) + (\xi - \zeta)R_\xi(A) = (I + (\xi - \zeta)R_\xi(A))$$

следует

$$(A - \zeta I) \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{R_\xi(A)}{(\xi - \zeta)} d\xi = \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} \frac{1}{(\xi - \zeta)} d\xi \cdot I + \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} R_\xi(A) d\xi. \quad (2.25)$$

Интегралы, стоящие в левой части равенства (2.25), имеют пределы в сильной операторной топологии при  $\delta \rightarrow +0$ , поэтому

$$(A - \zeta I) \int_{\Gamma^{(t)}}' \frac{R_\xi(A)}{(\xi - \zeta)} d\xi = \begin{cases} 2\pi i(I - E_t), & \text{если } \zeta \in (-\|A\| - 1, t) \times i(-1, 1), \\ 2\pi iE_t, & \text{если } \zeta \notin [-\|A\| - 1, t] \times i[-1, 1], \end{cases}$$

где  $\int'$  — интеграл в смысле главного значения. Полученное равенство показывает, что для любой точки  $\zeta \in (-\|A\| - 1, t) \times i(-1, 1)$  оператор  $(A - \zeta I)|_{(I - E_t)\mathcal{H}}$  является (двусторонне ограничено) обратимым, т. е.

$$(-\|A\| - 1, t) \times i(-1, 1) \subset \rho(A|_{(I - E_t)\mathcal{H}});$$

по аналогичным причинам

$$\mathbb{C} \setminus ([-\|A\| - 1, t] \times i[-1, 1]) \subset \rho(A|_{E_t\mathcal{H}}).$$

Пусть вещественные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a < b$ ,  $a, b \notin \Lambda$ ,  $G_a = \text{s-lim}_{t \rightarrow a} G_t$ ,  $G_b = \text{s-lim}_{t \rightarrow b} G_t$ . Рассматривая  $A|_{E_a\mathcal{H}}$  как сужение оператора  $A|_{E_b\mathcal{H}}$  и повторяя приведённую выше схему, мы получим, что

- $(a, b) \times i(-1, 1) \subset \rho(A|_{(I - E(\Delta))\mathcal{H}})$ ,
- $\mathbb{C} \setminus ([a, b] \times i[-1, 1]) \subset \rho(A|_{E(\Delta)\mathcal{H}})$ ,

где  $\Delta = [a, b)$ ,  $E(\Delta) = E_b - E_a$ .

Наша следующая задача — найти интегральное представление оператора  $A|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ , где  $\Delta$  и  $E(\Delta)$  заданы условиями (2.19) и (2.20). Благодаря равенствам

$$AR_\xi(A) = I + \xi R_\xi(A), \quad \frac{\xi}{t - \xi} = -1 + \frac{t}{t - \xi}$$

и представлению (2.11) имеем

$$\begin{aligned} AR_\xi(A) &= I + \frac{\xi}{N^2(\xi)} \left( M(A, \xi) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t - \xi} dG_t \right) = \\ &= I + \frac{1}{N^2(\xi)} \left( \xi M(A, \xi) - N^2(A) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t - \xi} dG_t \right) = \\ &= I + \frac{1}{N^2(\xi)} \left( \xi M(A, \xi) - N^2(A) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t - \xi} dF_t \right), \end{aligned} \quad (2.26)$$

где  $F_t = \int_{-\infty}^t \eta dG_\eta$ . Представление (2.26) имеет тот же набор свойств, что и использованные при вычислении интеграла (2.20) свойства представления (2.11), с тем небольшим уточнением, что оператор-функция  $F_t$  не является, вообще говоря, монотонной на  $\mathbb{R}$ , однако она будет монотонной на положительной и отрицательной полупрямых и непрерывной в нуле. Сказанное означает, что

$$AE(\Delta) = -\frac{1}{2\pi i} \text{s-lim}_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(\Delta)}} AR_\xi(A) d\xi = \int_{\mu}^{\nu} \frac{1}{N^2(t)} dF_t = \int_{\mu}^{\nu} \frac{t}{N^2(t)} dG_t. \quad (2.27)$$

Нам осталось избавиться от условия  $t \in \mathbb{R}_G \setminus \Lambda$ , использованного при анализе представления (2.14) и выводе последующих формул. Для этого при  $t - \epsilon \in \mathbb{R} \setminus \Lambda$  и  $t \notin \mathbb{R}_G$  нам достаточно положить

$$E_t = \text{s-lim}_{t - \epsilon \in \mathbb{R}_G, \epsilon \rightarrow +0} E_{t - \epsilon}.$$

Итак, установлено, что  $J$ -с.с. оператор  $A$  с вещественным спектром обладает спектральной функцией  $E_t$  такой, что (здесь  $\Delta = [a, b)$ ,  $a, b \notin \Lambda$ )

$$\left. \begin{array}{l} \text{а. для любого } t \in \mathbb{R} \setminus \Lambda \text{ верно } AE_t = E_t A; \\ \text{б. если } E(\Delta)\mathcal{H} \neq \{0\}, \text{ то } \sigma(A|_{E(\Delta)\mathcal{H}}) \subset \bar{\Delta}; \\ \text{в. если } \Delta \cap \Lambda = \emptyset \text{ и } E(\Delta)\mathcal{H} \neq \{0\}, \text{ то подпространство} \\ \quad E(\Delta)\mathcal{H} \text{ положительно и } AE(\Delta) = \int_{\Delta} t dE_t; \\ \text{г. если } \Delta \cap \Lambda \neq \emptyset, \text{ то подпространство } E(\Delta)\mathcal{H} \text{ либо от-} \\ \quad \text{рицательно, либо индефинитно.} \end{array} \right\} \quad (2.28)$$

Поясним последний пункт. В условиях этого пункта подпространство  $E(\Delta)\mathcal{H}$  содержит либо отрицательный, либо нейтральный собственный вектор оператора  $A$ , вместе с тем оно проекционно полно. Проекционно полное подпространство не может быть семидефинитным (в данном случае — неположительным), поэтому оно либо отрицательно, либо (если найдётся нейтральный собственный вектор) индефинитно.

Продолжим тему. Пусть  $\lambda_0 \in \Lambda$ . Тогда возможны три взаимоисключающих варианта:

- для некоторого интервала  $\Delta = [a, b)$  такого, что  $(a, b) \cap \Lambda = \{\lambda_0\}$  и  $a, b \notin \Lambda$ , спектральная функция  $E_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$  ограничена, и после доопределения  $E_{\lambda_0} = \text{s-lim}_{t \rightarrow \lambda_0-0} E_t$  справедливо равенство  $AE(\Delta) = \int_{\Delta} t dE_t$ ;
- для некоторого интервала  $\Delta = [a, b)$  такого, что  $(a, b) \cap \Lambda = \{\lambda_0\}$  и  $a, b \notin \Lambda$ , спектральная функция  $E_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$  ограничена, но после доопределения  $E_{\lambda_0} = \text{s-lim}_{t \rightarrow \lambda_0-0} E_t$  имеем соотношение  $AE(\Delta) \neq \int_{\Delta} t dE_t$ ;
- для некоторого интервала  $\Delta = [a, b)$  такого, что  $(a, b) \cap \Lambda = \{\lambda_0\}$  и  $a, b \notin \Lambda$ , спектральная функция  $E_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$  неограничена.

Отметим, что ограниченность спектральной функции  $E_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$  имеет (или не имеет) место одновременно для всех интервалов  $\Delta = [a, b)$ , подчинённых условиям  $(a, b) \cap \Lambda = \{\lambda_0\}$  и  $a, b \notin \Lambda$  с фиксированным  $\lambda_0$ , а наличие предела  $\text{s-lim}_{t \rightarrow \lambda_0-0} E_t$  следует из теоремы Вижье—С. Надя (см. [20, гл. VII, § 1, п. 104]). Интерпретируем теперь каждую из этих опций в терминах теории спектральных операторов (см. [15]). Первый вариант означает, что оператор  $A|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$  подобен самосопряжённому оператору, т. е. является скалярным спектральным оператором с вещественным спектром. Второй вариант соответствует случаю, когда оператор  $\lambda_0 \in \Lambda$  является спектральным оператором, состоящим из суммы скалярного спектрального оператора и нетривиального конечномерного нильпотентного оператора. Итак, только третий вариант отвечает случаю обобщённых спектральных операторов, для которых нет развитой теории модельных представлений. Именно этим исключительным случаем мы и займёмся в следующем разделе.

### 3. Модель $J$ -с.с. оператора на базе его спектрального разложения

В этом разделе, как и выше,  $\mathcal{H}$  — пространство Понтрягина. Рассмотрим следующий пример.

**Пример 3.1.** Пусть система  $e, g, f, h_1, h_2, h_3, \dots$  образует ортонормированный базис в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ , и пусть полуторалинейная форма на  $\mathcal{H}$  задаётся формулой

$$[x, y] = (x, e)(g, y) + (x, g)(e, y) + (x, f)(f, y) + \sum_{j=1}^{\infty} (x, h_j)(h_j, y).$$

Тогда это пространство превращается в пространство Понтрягина с  $\kappa = 1$ . Зададим на  $\mathcal{H}$  оператор  $A$  с помощью следующих условий:

- $Ae = 0$ ,
- $Ah_j = \frac{1}{j} \cdot (h_j + e)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ,

- $Ag = -f + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \cdot h_j,$
- $Af = -e.$

Расширяя область определения оператора  $A$  по линейности и непрерывности на всё пространство  $\mathcal{H}$ , получим, что  $A$  — это компактный  $J$ -с.с. оператор,  $A(h_j + e) = \frac{1}{j} \cdot (h_j + e), j = 1, 2, \dots$  Спектральная функция оператора  $A$  может быть полностью описана следующим равенством:

$$E(\{j^{-1}\})x = [x, (h_j + e)] \cdot (h_j + e),$$

так что

$$E_t x = (I - E(\{j^{-1}\}_{j=1}^n))x = x - \sum_{j=1}^n [x, (h_j + e)] \cdot (h_j + e), \tag{3.1}$$

где  $n = [t^{-1}], [t^{-1}]$  — целая часть числа  $t^{-1}$ .

Положим  $x_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n h_j$ . Тогда

$$E(\{j^{-1}\}_{j=1}^n)x_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n (h_j + e) = e + x_n.$$

В то же самое время

$$\|x_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Итак, для оператора  $A$  и его спектральной функции  $E_\lambda$  имеют место следующие результаты ( $\text{Lin } X$  и  $\text{CLin } X$  это, соответственно, линейная оболочка и замкнутая линейная оболочка множества  $X$ ):

- |   |   |       |
|---|---|-------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>a. спектральная функция <math>E_\lambda</math> неограничена;</li> <li>b. ядро оператора <math>A _{\tilde{\mathcal{H}}}</math>, где <math>\tilde{\mathcal{H}} = \text{CLin}_{\Delta=[a,b], 0 &lt; a &lt; b} \{E(\Delta)\mathcal{H}\}</math>, нетривиально;</li> <li>c. подпространство <math>\tilde{\mathcal{H}}</math> вырождено.</li> </ul> | } | (3.2) |
|---|---|-------|

Поясним, что в условиях приведённого примера  $e \in \text{Ker } A|_{\tilde{\mathcal{H}}}$  и  $\tilde{\mathcal{H}} \cap \tilde{\mathcal{H}}^{[\perp]} = \{\mu e\}_{\mu \in \mathbb{C}}$ , при этом условия (3.2) сформулированы так, что их одновременное выполнение отражает общую ситуацию в следующем смысле.

**Предложение 3.1.** *Если  $A$  —  $J$ -с.с. оператор с неотрицательным спектром и  $t = 0$  — его единственная критическая точка, то три условия (3.2) эквивалентны.*

*Доказательство.* Линеал  $\text{Lin}_{\Delta=[a,b], 0 < a < b} \{E(\Delta)\mathcal{H}\}$  в условиях, наложенных на оператор  $A$ , является  $J$ -положительным, а подпространство  $\tilde{\mathcal{H}}$  либо  $J$ -положительно, либо  $J$ -неотрицательно. Если спектральная функция  $E_\lambda$  неограничена, то подпространство  $\tilde{\mathcal{H}}$  не является проекционно полным. Действительно, допустим противное, пусть  $\tilde{P}$  —  $J$ -ортопроектор на  $\tilde{\mathcal{H}}$ . По построению  $\tilde{P}E(\Delta) = E(\Delta)$ , откуда  $E(\Delta)\tilde{P} = (\tilde{P}E(\Delta))^c = E(\Delta)$  и для любого  $x \in \tilde{\mathcal{H}}$

$$[\tilde{P}x, x] = [\tilde{P}E(\Delta)x, E(\Delta)x] + [\tilde{P}(\tilde{P} - E(\Delta))x, (\tilde{P} - E(\Delta))x] \geq [E(\Delta)x, x].$$

Итак (см. замечание 1.1), семейство операторов  $\{E(\Delta)\}$  ограничено, что противоречит ограниченности оператор-функции  $E_t$ . Напомним следующий результат.

**Теорема** (см. [1, теорема I.9.6]). *Пусть подпространство  $\mathcal{L}$  пространства Понтрягина положительно. Тогда существует константа  $c > 1$  такая, что  $(x, x) \leq c[x, x]$  для любого  $x \in \mathcal{L}$ .*

По этой теореме подпространство  $\tilde{\mathcal{H}}$ , если оно не проекционно полно, не может быть  $J$ -положительным, поэтому оно вырождено, т. е. из (3.2a) следует (3.2c). Далее, подпространство  $\tilde{\mathcal{H}} \cap \tilde{\mathcal{H}}^{[\perp]}$  нейтрально и поэтому конечномерно, так что спектр оператора  $A|_{\tilde{\mathcal{H}} \cap \tilde{\mathcal{H}}^{[\perp]}}$  — точечный, но ненулевым он в силу (2.28c) быть не может, т. е.  $\sigma(A|_{\tilde{\mathcal{H}} \cap \tilde{\mathcal{H}}^{[\perp]}}) = \{0\}$ . Итак, из (3.2c) следует (3.2b). Наконец, если спектральная функция  $E_t$  ограничена, то  $\tilde{\mathcal{H}} = (I - E_{+0})\mathcal{H}$  и  $t = 0$  принадлежит разве что непрерывному спектру оператора  $A|_{\tilde{\mathcal{H}}}$ , т. е. из (3.2b) следует (3.2a). □

Для простоты ниже в рамках данного раздела рассмотрим такой  $J$ -с.с. оператор  $A$ , что

$$\left. \begin{array}{l} \text{a. } \Lambda = \{0\}; \\ \text{b. функция } E_t \text{ неограничена;} \\ \text{c. для любого полуинтервала } \Delta = [a, b) \text{ такого, что} \\ \quad 0 \notin [a, b], \text{ оператор } A|_{E(\Delta)\mathcal{H}} \text{ имеет простой спектр.} \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

С учётом (3.3) переопределим  $\tilde{\mathcal{H}}$ :  $\tilde{\mathcal{H}} = \text{CLin}_{\Delta=[a,b), 0 \notin [a,b]} \{E(\Delta)\mathcal{H}\}$ . В силу (3.3b) подпространство  $\tilde{\mathcal{H}}$  вырождено, т. е.  $\tilde{\mathcal{H}} \cap \tilde{\mathcal{H}}^{[\perp]} \neq \{0\}$ . Положим  $\mathcal{H}_1 := \tilde{\mathcal{H}} \cap \tilde{\mathcal{H}}^{[\perp]}$ . Отметим, что  $\mathcal{H}_1$  — конечномерное подпространство размерности  $k \leq \kappa$ . Поскольку подпространство  $\tilde{\mathcal{H}}$  неотрицательно, оно может быть представлено в виде

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_1 \dot{+} \mathcal{H}_2, \quad (3.4)$$

где  $\mathcal{H}_2$  — положительное подпространство.

**Лемма 3.1.** Пусть  $E_\lambda$  — спектральная функция  $J$ -с.с. оператора  $A$ , удовлетворяющего условиям (3.3). Тогда найдутся скалярная лебегова мера  $\mu_\sigma$ , ассоциированное с этой мерой гильбертово пространство  $L_\sigma^2$  и набор  $\mu_\sigma$ -измеримых скалярных функций  $\{\tilde{g}_j(t)\}_{j=1}^k$  такие, что если  $\Delta = [a, b)$ ,  $0 \notin [a, b]$ , то оператор  $E(\Delta)|_{\tilde{\mathcal{H}}}$  подобен оператору, действующему по формулам

$$\begin{aligned} f(t) &\mapsto \chi_\Delta(t)f(t) + \sum_{j=1}^k \int_{\Delta} f(t) \overline{\tilde{g}_j(t)} d\sigma(t) \cdot e_j, \\ e_j &\mapsto 0, \quad j = 1, 2, \dots, k, \end{aligned}$$

на формальной линейной оболочке  $L_\sigma^2$  и  $\{e_j\}_{j=1}^k$ , где  $\{e_j\}_{j=1}^k$  — базис в  $\mathcal{H}_1$ , а  $\chi_\Delta(t)$  — индикатор множества  $\Delta$ , причём  $\chi_\Delta(t)\tilde{g}_j(t) \in L_\sigma^2$  для  $j = 1, 2, \dots, k$  и

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j \tilde{g}_j(t) \in L_\sigma^2 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0. \quad (3.5)$$

*Доказательство.* В соответствии с равенством (3.4) сужение  $E(\Delta)|_{\tilde{\mathcal{H}}}$  имеет следующее матричное представление:

$$E(\Delta)|_{\tilde{\mathcal{H}}} = \begin{pmatrix} 0 & E_{12}(\Delta) \\ 0 & E_{22}(\Delta) \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Напомним, что гильбертово скалярное произведение играет для нас вспомогательную роль, поэтому его можно выбирать среди топологически эквивалентных произведений, обеспечивающих требуемую структуру фундаментальной симметрии  $J$ . Не нарушая общности можно допустить, что

$$(\cdot, \cdot) = [\cdot, \cdot] \text{ на } \mathcal{H}_2 \text{ и } \mathcal{H}_1 \perp \mathcal{H}_2. \quad (3.7)$$

Тогда оператор-функция  $F_t := E_{22}((-\infty, t))$  представляет собой (ортогональное) разложение единицы, действующее в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}_2$ . Согласно общей теории самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве найдётся гильбертово пространство  $L_\sigma^2$  скалярных (см. (3.3)) функций и оператор подобия  $W : L_\sigma^2 \mapsto \mathcal{H}_2$  такие, что для любого  $\Delta = [a, b)$

$$W^{-1}E_{22}(\Delta)Wf(t) = \chi_\Delta(t)f(t). \quad (3.8)$$

Далее, пусть  $\{e_j\}_1^k$  — ортонормированный базис в  $\mathcal{H}_1$ . Так как проектор  $E(\Delta)$  ограничен для любого  $\Delta = [a, b)$ ,  $0 \notin \Delta$ , то для произвольного  $j = 1, 2, \dots, k$  выражение  $\nu_j^\Delta Wf(t) := (E_{12}(\Delta)Wf(t), e_j)$  задаёт на  $L_\sigma^2$  непрерывный линейный функционал. Благодаря этому для любого  $j = 1, 2, \dots, k$  найдётся такая  $F$ -измеримая функция  $\tilde{g}_j(t)$ , что для любого  $\Delta = [a, b)$ ,  $0 \notin \Delta$  и  $f(t) \in L_\sigma^2$  имеет место представление

$$\nu_j^\Delta Wf(t) = \int_{\Delta} f(t) \overline{\tilde{g}_j(t)} d\sigma(t). \quad (3.9)$$

Тот факт, что функция  $\tilde{g}_j(t)$  не зависит от  $\Delta$ , вытекает из представления (3.9) для непересекающихся интервалов и того обстоятельства, что  $E(\Delta)$  — это проектор. Далее, так как оператор-функция  $E_t$  неограничена, то, как минимум,

$$\tilde{g}_j(t) \notin L_\sigma^2$$

для одного  $j = 1, 2, \dots, k$ . Нам осталось показать, что на самом деле верно более сильное утверждение (3.5).

Пространство  $\tilde{\mathcal{H}}$  благодаря своему определению и формуле (3.9) является замыканием векторов, имеющих форму

$$Wf(t) + \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\tilde{g}_j(t)} d\sigma(t) \cdot e_j, \quad (3.10)$$

где  $f(t)$  пробегает множество всех тех функций из  $L_\sigma^2$ , которые обращаются в нуль в некоторой окрестности нуля, своей для каждой функции; поскольку всякий вектор  $x \in \mathcal{H}_1$  допускает представление  $x = \sum_{j=1}^k (x, e_j) \cdot e_j$ , то найдётся такая последовательность  $\{f_m\}_{m=1}^\infty \subset L_\sigma^2$ , что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m\|_{L_\sigma^2} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}} f_m(t) \overline{\tilde{g}_j(t)} d\sigma(t) \cdot e_j = x.$$

Зафиксируем теперь  $x \in \mathcal{H}_1$ , соответствующую последовательность  $\{f_m\}_{m=1}^\infty \subset L_\sigma^2$  и допустим, что  $\sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot \tilde{g}_j(t) \in L_\sigma^2$ . Тогда линейный функционал ( $f \in L_\sigma^2$ )

$$\phi f := \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot \tilde{g}_j(t)} d\sigma(t)$$

будет непрерывен. Отсюда

$$\begin{aligned} (x, \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot e_j) &= \left( \lim_{m \rightarrow \infty} \left( Wf_m(t) + \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}} f_m(t) \overline{\tilde{g}_l(t)} d\sigma(t) \cdot e_l \right), \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot e_j \right) = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}} f_m(t) \overline{\alpha_j \tilde{g}_j(t)} d\sigma(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \phi f_m = 0. \end{aligned}$$

Так как  $x$  произволен, то  $\sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot e_j = 0$ , т. е.  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ . □

Лемма 3.1 открывает путь для построения частичного модельного представления оператора  $A$  в смысле, который будет объяснён ниже. Сохраним принятое при доказательстве леммы 3.1 соглашение (3.7) и положим (см. (3.4))

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{J}\mathcal{H}_1. \quad (3.11)$$

Тогда  $\mathcal{H}_0 \perp \tilde{\mathcal{H}}$ . Дополнительно предположим, что базис  $\{e_j\}_{j=1}^k$  в лемме 3.1 взят ортонормированным. Обозначим  $P_0, P_1$  и  $P_2$  ортопроекторы соответственно на подпространства  $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$  и  $\mathcal{H}_2$ .

**Теорема 3.1.** Пусть пространство  $L_\sigma^2$  и функции  $\{\tilde{g}_j\}_{j=1}^k$  связаны со спектральной функцией  $E_\lambda$   $J$ -с.с. оператора  $A$  так же, как в лемме 3.1 (см. (3.8)), а  $\tilde{L}_\sigma^2$  — гильбертово пространство, образованное как линейная оболочка  $L_\sigma^2$  и  $\{\tilde{g}_j\}_{j=1}^k$ , причём функции системы  $\{\tilde{g}_j\}_{j=1}^k$  полагаются по определению взаимно ортогональными, имеющими единичную норму и ортогональными к  $L_\sigma^2$ , а последнее сохраняет свою стандартную гильбертову структуру. Тогда функция  $t\tilde{g}_j$  принадлежит к  $\tilde{L}_\sigma^2$  для любого  $j = 1, 2, \dots, k$  и компрессия  $(P_0 + P_2)A|_{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_2}$  оператора  $A$  подобна оператору умножения на независимую переменную  $t$ , действующему в  $\tilde{L}_\sigma^2$ .

*Доказательство.* Благодаря равенству (2.28с), лемме 3.1 и описанию (3.10) векторов из линейала  $\text{Lin}_{\Delta=[a,b], 0 \notin [a,b]} \{E(\Delta)\mathcal{H}\}$  имеем

$$A\left(Wf(t) + \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\tilde{g}_j(t)} d\sigma(t) \cdot e_j\right) = Wtf(t) + \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}} tf(t)\overline{\tilde{g}_j(t)} d\sigma(t) \cdot e_j.$$

Кроме того,  $Ae_l = \sum_{j=1}^k \alpha_{jl}e_j$ , откуда

$$\begin{aligned} A(Wf(t)) &= A\left(Wf(t) + \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\tilde{g}_j(t)} d\sigma(t) \cdot e_j\right) - \sum_{l=1}^k \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\tilde{g}_l(t)} d\sigma(t) \cdot Ae_l = \\ &= Wtf(t) + \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}} tf(t)\overline{\tilde{g}_j(t)} d\sigma(t) \cdot e_j - \sum_{l=1}^k \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\tilde{g}_l(t)} d\sigma(t) \cdot \sum_{j=1}^k \alpha_{jl}e_j = \\ &= Wtf(t) + \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}} f(t)\left(\overline{t\tilde{g}_j(t)} - \sum_{l=1}^k \overline{\tilde{g}_l(t)}\alpha_{jl}\right) d\sigma(t) \cdot e_j. \end{aligned}$$

Последнее выражение задаёт в  $L^2_{\sigma}$  непрерывный оператор тогда и только тогда, когда  $(\overline{t\tilde{g}_j(t)} - \sum_{l=1}^k \overline{\tilde{g}_l(t)}\alpha_{jl}) \in L^2_{\sigma}$ . Теперь утверждение теоремы следует из равенств  $P_2A|_{\mathcal{H}_0} = J(P_1AP_2)^*J|_{\mathcal{H}_0}$  и  $P_0A|_{\mathcal{H}_0} = (JAJ)^*|_{\mathcal{H}_0}$ , обусловленных  $J$ -с.с. оператора  $A$ .  $\square$

**Замечание 3.1.** Доказанное выше равенство

$$A(Wf(t)) = Wtf(t) + \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}} f(t)\left(\overline{t\tilde{g}_j(t)} - \sum_{l=1}^k \overline{\tilde{g}_l(t)}\alpha_{jl}\right) d\sigma(t) \cdot e_j$$

описывает действие оператора  $A|_{\mathcal{H}_2}$ .

Условие (3.3с) является, с одной стороны, ограничительным, но, с другой стороны, не является неустранимым. В случае отказа от него пространство  $\tilde{L}^2_{\sigma}$  скалярных функций надо заменить на подходящее пространство векторзначных функций, что и будет сделано в следующем разделе.

#### 4. МОДЕЛЬ $J$ -УНИТАРНОГО ОПЕРАТОРА, ПОРОЖДАЕМАЯ ЕГО СПЕКТРАЛЬНЫМ РАЗЛОЖЕНИЕМ

Всюду в этом параграфе  $U$  обозначает  $J$ -унитарный оператор, действующий в пространстве Понтрягина  $\mathcal{H}$ , т. е.  $[Ux, Uy] = [x, y]$  для всех  $x, y \in \mathcal{H}$  и  $U\mathcal{H} = \mathcal{H}$ . Далее, символами  $\mathbb{D}$  и  $\mathbb{T}$  обозначены, соответственно, открытый единичный диск и его граница.

Спектральные свойства оператора  $U$  могут быть исследованы методами, аналогичными использованным в предыдущих параграфах, но с некоторой их модификацией. Так, например, вместо степенной последовательности моментов (2.2) берётся последовательность «тригонометрических» моментов  $\{c_k = \langle U^k x, x \rangle\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ . Решение этой проблемы моментов приводит к представлению резольвенты (ср. с (2.8))

$$N(U)\bar{N}(U^{-1})R_{\xi}(U) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it} - \xi} dG_t. \quad (4.1)$$

Действуя по той же схеме, что и в разделе 2, получим, что множество  $\sigma(U) \setminus \mathbb{T}$  конечно, а соответствующее ему инвариантное подпространство оператора  $U$  конечномерно и проекционно полно, поэтому в пределах данного параграфа по умолчанию предполагается, что  $\sigma(U) \subset \mathbb{T}$ . Тем же методом (с естественной адаптацией к особенностям  $J$ -унитарных операторов) устанавливается, что оператор  $U$  обладает  $J$ -ортогональной спектральной функцией  $E_t$  с множеством критических

точек  $\Lambda$  и условиями нормировки  $E_0 = 0$ ,  $E_{2\pi} = I$ ,  $s\text{-}\lim_{\tau \rightarrow t-0} E_\tau = E_t$ , где  $t, \tau \in [0, 2\pi] \setminus \Lambda$ , а связь между  $U$  и  $E_t$  описывается следующим образом (здесь  $\Delta = [a, b)$ ,  $0 \leq a < b \leq 2\pi$ ,  $a, b \notin \Lambda$ ):

$$\left. \begin{aligned} \text{a.} & \text{ для любого } t \in [0, 2\pi] \setminus \Lambda \text{ верно } UE_t = E_tU; \\ \text{b.} & \text{ если } E(\Delta)\mathcal{H} \neq \{0\}, \text{ то } \sigma(U|_{E(\Delta)\mathcal{H}}) \subset \{\xi: \xi = e^{it}, t \in \bar{\Delta}\}; \\ \text{c.} & \text{ если } \Delta \cap \Lambda = \emptyset \text{ и } E(\Delta)\mathcal{H} \neq \{0\}, \text{ то подпространство } E(\Delta)\mathcal{H} \\ & \text{положительно и } UE(\Delta) = \int_{\Delta} e^{it} dE_t; \\ \text{d.} & \text{ если } \Delta \cap \Lambda \neq \emptyset, \text{ то } E(\Delta) \neq 0 \text{ и подпространство } E(\Delta)\mathcal{H} \text{ либо} \\ & \text{отрицательно, либо индефинитно.} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Пусть  $\tilde{\mathcal{H}} := \text{CLin}\{E(\Delta)\mathcal{H}\}$ , где  $\Delta$  пробегает множество всех полуоткрытых интервалов вида (4.2с). Подпространство  $\tilde{\mathcal{H}}$  в силу (4.2с) является неположительным. Мы предположим, что (ср. с (3.3б))

$$\tilde{\mathcal{H}} \cap \tilde{\mathcal{H}}^{\perp} \neq \{0\}. \quad (4.3)$$

Напомним, что условие (4.3) выполняется тогда и только тогда, когда оператор-функция  $E_\lambda$  является неограниченной. Положим  $\mathfrak{G}_1 = \tilde{\mathcal{H}} \cap \tilde{\mathcal{H}}^{\perp}$ ,  $\mathfrak{G}_0 = J\mathfrak{G}_1$ ,  $\mathfrak{G}_2 = \tilde{\mathcal{H}} \cap \mathfrak{G}_1^{\perp}$ ,  $\mathfrak{G}_3 = (\tilde{\mathcal{H}} \oplus \mathfrak{G}_0)^{\perp}$ . Все последующие выкладки только упростятся, если подпространство  $\mathfrak{G}_3$  окажется тривиальным, поэтому в дальнейшем предполагается, что  $\mathfrak{G}_3 \neq \{0\}$ . Далее, без потери общности можно предположить, что  $\mathfrak{G}_3 = (\tilde{\mathcal{H}} \oplus \mathfrak{G}_0)^{\perp}$  и что на  $\mathfrak{G}_2$  гильбертово скалярное произведение совпадает с  $[\cdot, \cdot]$ . Итак,

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathfrak{G}_0 \oplus \mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2 \oplus \mathfrak{G}_3, \\ J &= \begin{pmatrix} 0 & V^{-1} & 0 & 0 \\ V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_{00} & 0 & 0 & 0 \\ U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{20} & 0 & U_{22} & 0 \\ U_{30} & 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

В этом представлении  $V$  является изометрией,  $I_2$  — единичным оператором в  $\mathfrak{G}_2$ ,  $J_3$  — фундаментальной симметрией в  $\mathfrak{G}_3$ , а элементы матричного представления  $U$  описываются следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} (U_{00})^{-1} &= V^{-1}(U_{11})^*V, \\ U_{10} &= -\frac{1}{2}U_{11}V((U_{20})^*U_{20} + (U_{30})^*J_3U_{30} + iA), \\ U_{20} &= -U_{22}(U_{12})^*VU_{00}, \\ U_{30} &= -U_{33}J_3(U_{13})^*VU_{00}, \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

где  $A$  — это самосопряжённый оператор. Кроме того,  $U_{22}$  и  $U_{33}$  являются, соответственно, унитарным и  $J_3$ -унитарным операторами в соответствующих подпространствах. Положим

$$\tilde{U} := \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{U}^\dagger := \begin{pmatrix} U_{00} & 0 \\ U_{20} & U_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Операторы  $\tilde{U}$  и  $\tilde{U}^\dagger$  действуют, соответственно, в пространствах  $\tilde{\mathcal{H}} = \mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2$  и  $\tilde{\mathcal{H}}^\dagger = \mathfrak{G}_0 \oplus \mathfrak{G}_2$ . Так как  $U_{22}$  является унитарным оператором, то его модель — это  $e^{iT}$ , т. е. оператор умножения на функцию  $e^{it}$ , действующий в подходящем пространстве вектор-функций  $L^2_{\vec{\sigma}}(\mathcal{E})$ , где  $\mathcal{E}$  — гильбертово (возможно, конечномерное) пространство, а векторнозначная мера  $\mu_{\vec{\sigma}}(\mathcal{E})$  определяется так, как это обычно делается в теории кратности для самосопряжённых операторов. Наше изложение этой конструкции ближе всего к принятому в [18, § 41], где, впрочем, используется термин «прямой интеграл гильбертовых пространств», а не «векторнозначная мера» (по этому поводу см. также [8, гл. VI, § 86], [10, гл. 7], [12, гл. 4.4] и [19, гл. VII]). Итак, пусть  $\sigma(t)$  — неубывающая (скалярная) функция, определённая на сегменте  $[0, 2\pi]$ , непрерывная слева во всех точках этого сегмента и имеющая бесконечное множество точек роста. Эта функция порождает на данном сегменте скалярную меру Лебега—Стилтьеса  $\mu_\sigma$ . Пусть  $t \mapsto \mathcal{E}_t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  является отображением со следующими свойствами:

- $\mathcal{E} = \text{CLin}\{\mathcal{E}_t\}$ ;  
 $t \in [0, 2\pi]$

- $\dim(\mathcal{E}_t)$  —  $\mu_\sigma$ -измеримая, но не обязательно почти всюду (п.в.) конечная функция;
- если  $\dim(\mathcal{E}_{t_1}) = \dim(\mathcal{E}_{t_2})$ , то  $\mathcal{E}_{t_1} = \mathcal{E}_{t_2}$ ;
- если  $\dim(\mathcal{E}_{t_1}) < \dim(\mathcal{E}_{t_2})$ , то  $\mathcal{E}_{t_1} \subset \mathcal{E}_{t_2}$ .

Обозначим как  $M_{\bar{\sigma}}(\mathcal{E})$  пространство векторнозначных функций  $f(t): t \mapsto \mathcal{E}_t$ ,  $\mu_\sigma$ -измеримых в слабом смысле, заданных п.в. и конечных п.в. на сегменте  $[0, 2\pi]$ ; символ  $L_{\bar{\sigma}}^2(\mathcal{E})$  будет обозначать здесь гильбертово пространство таких функций  $f(t) \in M_{\bar{\sigma}}(\mathcal{E})$ , что  $\int_0^{2\pi} \|f(t)\|_{\mathcal{E}}^2 d\sigma(t) < \infty$ , со скалярным произведением  $(f(t), g(t))_{L_{\bar{\sigma}}^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(t), g(t))_{\mathcal{E}} d\sigma(t)$ .

Пусть  $\{\tilde{g}_j(t)\}_{j=1}^k \subset M_{\bar{\sigma}}(\mathcal{E})$  — некоторая система функций со следующими свойствами:

- $$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a.} \text{ система } \{\tilde{g}_j(t)\}_{j=1}^k \text{ линейно независима по модулю } L_{\bar{\sigma}}^2(\mathcal{E}); \\ \mathbf{b.} \text{ для любого } j = 1, 2, \dots, k \text{ функция } e^{it}\tilde{g}_j(t) \text{ представима в виде} \\ \text{де } e^{it}\tilde{g}_j(t) = \eta_j(t) + \sum_{l=1}^k c_{jl}\tilde{g}_l(t), \text{ где } \eta_j(t) \in L_{\bar{\sigma}}^2(\mathcal{E}); \\ \mathbf{c.} \text{ модуль всех собственных значений матрицы } C = (c_{jl})_{k \times k} \text{ равен единице.} \end{array} \right\} \quad (4.7)$$

Обозначим через  $\tilde{L}_{\bar{\sigma}}^2(\mathcal{E})$  гильбертово пространство, образованное линейной оболочкой функций из  $L_{\bar{\sigma}}^2(\mathcal{E})$  и  $\{\tilde{g}_j(t)\}_{j=1}^k$ , причём функции из  $\{\tilde{g}_j(t)\}_{j=1}^k$  полагаются по определению взаимно ортогональными, имеющими единичную норму и ортогональными к  $L_{\bar{\sigma}}^2(\mathcal{E})$ , а последнее множество рассматривается как подпространство пространства  $\tilde{L}_{\bar{\sigma}}^2(\mathcal{E})$  и сохраняет свою обычную гильбертову структуру. Условие (4.7b) позволяет ввести на  $\tilde{L}_{\bar{\sigma}}^2(\mathcal{E})$  оператор умножения на функцию  $e^{it}$ :  $f(t) \mapsto e^{it}f(t)$ . Этот оператор будет обозначаться как  $e^{iT}$ . Условия (4.7) также однозначно определяют матрицу  $C = (c_{jl})_{k \times k}$  и гарантирует её обратимость, поэтому дают возможность ввести на  $\tilde{L}_{\bar{\sigma}}^2(\mathcal{E})$  оператор умножения на функцию  $e^{-it}$  (обозначаемый как  $e^{-iT}$ ). Легко проверить, что оператор  $e^{-iT}$  является обратным к  $e^{iT}$ .

**Теорема 4.1.** *Для введённого выше оператора  $U$  найдутся гильбертово пространство  $L_{\bar{\sigma}}^2(\mathcal{E})$ , набор функций  $\{\tilde{g}_j(t)\}_{j=1}^k$ , удовлетворяющих условиям (4.7), и изометрический оператор  $W: \tilde{L}_{\bar{\sigma}}^2(\mathcal{E}) \mapsto \tilde{\mathfrak{H}}$ ,  $WL_{\bar{\sigma}}^2(\mathcal{E}) = \mathfrak{G}_2$  такие, что (см. (4.4) и (4.6))*

$$\tilde{U} = W(e^{-iT})^*W^{-1}, \quad \tilde{U}^\dagger = W^\dagger e^{iT}(W^\dagger)^{-1}, \quad (4.8)$$

где  $W^\dagger = (I_2 \oplus V^{-1})W$ , функция  $\sigma(t)$  непрерывна в тех точках  $t$ , для которых  $e^{it} \in \sigma(U_{11}) \cup \sigma(U_{33})$ . Пространство  $L_{\bar{\sigma}}^2(\mathcal{E})$  и набор  $\{\tilde{g}_j(t)\}_{j=1}^k$  в (4.7) могут быть выбраны так, что для всех  $j = 1, 2, \dots, k$  и почти всех  $t \in [0, 2\pi]$  выполняется условие  $\tilde{g}_j(t) \in \Omega$ , где  $\Omega$  — некоторое подпространство пространства  $\mathcal{E}$ ,  $\dim \Omega \leq k$ .

Доказательство этой теоремы мы опускаем, поскольку оно проводится (с учётом сделанных выше замечаний) по той же схеме, что и доказательства леммы 3.1 и теоремы 3.1. Более детальную информацию можно найти в [40, теорема 1].

## 5. ДРУГИЕ МОДЕЛИ

**5.1. Подход Шульмана.** В. С. Шульман предложил в [27] (см. также [34]) модели, описывающие не индивидуальные операторы, а равномерно замкнутые  $J$ -симметричные алгебры операторов, действующих в пространстве Понтрягина единичного ранга (пространстве  $\Pi_1$ ). Заметим, что коммутативность такой алгебры не предполагалась, но в то же время и не исключалась. Понятно также, что автора интересовали прежде всего такие алгебры, которые имели некоторые особенности, порождённые индефинитной метрикой. Вся совокупность равномерно замкнутых  $J$ -симметричных алгебр с единицей может быть разбита на два непересекающихся типа. К первому типу относятся такие алгебры, все инвариантные подпространства которых невырождены (т. е. не имеют изотропной части). Такие алгебры называются *невырожденными*, их теория достаточно хорошо изучена (см. литературные ссылки в [27]) и не содержит каких-либо существенных

особенностей, которые отличали бы её от теории симметричных операторных алгебр в гильбертовых пространствах. Иная ситуация складывается с  $J$ -симметричными операторными алгебрами, среди инвариантных подпространств которых есть вырожденные. Такие алгебры названы Шульманом *общими*. Применительно к пространству типа  $\Pi_1$  это означает, что если  $\mathfrak{A}$  — общая алгебра, то найдётся нейтральный вектор  $e$ , который является собственным вектором для всех операторов из  $\mathfrak{A}$ . Зафиксируем этот вектор и соответствующее нейтральное подпространство  $\mathcal{L}$ . Далее, пусть  $\mathcal{K}$  — нейтральное подпространство, кососвязанное с  $\mathcal{L}$ . Последнее означает, что существует вектор  $g \in \mathcal{K}$  такой, что  $[e, g] = 1$ . Заметим, что  $\mathcal{K}$  определяется неоднозначно, и мы его при необходимости можем изменить. Пусть

$$\mathcal{G} = \mathcal{K}^{[\perp]} \cap \mathcal{L}^{[\perp]}.$$

Тогда

$$\mathcal{H} = \mathcal{K} \dot{+} \mathcal{G} \dot{+} \mathcal{L} \quad (5.1)$$

и любой оператор  $B \in \mathfrak{A}$  представим следующим образом:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

В частности,  $B_{11}g = \mu_B g$ ,  $B_{33}e = \lambda_B e$ . Отметим, что множество  $\tilde{\mathfrak{A}} = \{B_{22}\}$  образует  $*$ -алгебру, если  $B$  пробегает всю алгебру  $\mathfrak{A}$ . Отметим, что  $\mathcal{L}^{[\perp]} = \mathcal{G} \dot{+} \mathcal{L}$  является инвариантным подпространством для  $\mathfrak{A}$ .

**Определение 5.1.** Если для некоторого  $\mathcal{L}$  соотношение  $B\mathcal{L}^{[\perp]} \subset \mathcal{L}$  при  $B \in \mathfrak{A}$  влечёт  $B = 0$ , то  $\mathfrak{A}$  относится к *классу 0*. Если соотношение  $B\mathcal{L}^{[\perp]} \subset \mathcal{L}$  выполняется по крайней мере для одного  $B \neq 0$ ,  $B \in \mathfrak{A}$  и для всякого  $B$ :  $B \in \mathfrak{A}$  и  $B\mathcal{L}^{[\perp]} \subset \mathcal{L}$  выполняется  $\mu_B = \lambda_B = 0$ , то  $\mathfrak{A}$  по определению относится к *классу 1*. Если найдётся такой оператор  $B \in \mathfrak{A}$ , что  $B\mathcal{L}^{[\perp]} \subset \mathcal{L}$  и  $|\lambda_B| + |\mu_B| > 0$ , то  $\mathfrak{A}$  относится по определению либо к *классу 2*, либо к *классу 3*. Класс 2 объединяет такие общие алгебры, не принадлежащие к классам 0 и 1, для которых их  $J$ -с.с. операторы имеют только вещественный спектр, к классу же 3 относятся такие алгебры, в состав которых обязательно входят, среди прочих,  $J$ -с.с. операторы, спектр которых содержит не вещественные собственные значения.

Без ограничения общности можно считать, что разложение (5.1) пространства  $\mathcal{H}$  ортогонально в гильбертовом смысле, а скалярное произведение  $(\cdot, \cdot)$  на  $\mathcal{G}$  совпадает с  $[\cdot, \cdot]$ . Классификация Шульмана относится, как уже отмечалось, не к индивидуальным операторам, а к операторным алгебрам, поэтому для сопоставления моделей следует взять  $J$ -с.с. оператор  $A$ , действующий в пространстве Понтрягина ранга 1 и удовлетворяющий условиям теоремы 3.1, и положить  $\mathfrak{A} = \text{Alg}_u A$ , где  $\text{Alg}_u A$  обозначает замыкание в равномерной операторной топологии алгебры операторов, являющихся значениями полиномов от оператора  $A$ . Заметим, что, грубо говоря, классификация Шульмана связана со структурой идеала общей алгебры, задаваемого условием  $B_{22} = 0$  (см. (5.2)). В частности, если последнее условие влечёт равенство  $B = 0$  (т. е. введённый идеал тривиален), то соответствующая общая алгебра относится к классу 0, а если этот идеал нетривиален, но для него  $B_{11} = 0$  и  $B_{33} = 0$ , то общая алгебра относится к классу 1. Если вернуться к условиям теоремы 3.1, то необходимо отметить, что подпространства  $\mathcal{H}_1$  и  $\mathcal{H}_0$  из (3.4) в случае пространства  $\Pi_1$  совпадают соответственно с подпространствами  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{K}$  из (5.1), но подпространство  $\mathcal{H}_2$  из (3.4) уже, чем подпространство  $\mathcal{G}$  из (5.1), поскольку  $\mathcal{H}_2$  не включает ядро оператора  $(I - P_1)A|_{(\mathcal{H}_0 \dot{+} \mathcal{H}_1)^\perp}$ , где  $P_1$  — ортопроектор на подпространство  $\mathcal{H}_1$ . В обозначениях (5.2) оператор  $(I - P_1)A|_{(\mathcal{H}_0 \dot{+} \mathcal{H}_1)^\perp}$  — это оператор  $A_{22}$ , так что с учётом теоремы 3.1 подпространство  $\mathcal{G}$  представляется (см. (3.10)) в виде  $\mathcal{G} = \mathcal{N} \oplus WL_\sigma^2$ , где  $\mathcal{N}$  — ядро оператора  $A_{22}$ . Положим, допуская некоторую вольность в обозначениях,

$$\mathcal{G} = \mathcal{N} \oplus L_\sigma^2. \quad (5.3)$$

Если  $\tilde{L}_\sigma^2$  — модельное пространство оператора  $A$ , то  $\tilde{L}_\sigma^2$  в силу принадлежности пространства Понтрягина  $\mathcal{H}$  к типу  $\Pi_1$  является линейной оболочкой  $L_\sigma^2$  и функции  $\tilde{g}_1(t)$ :

$$\int_{\mathbb{R}} |\tilde{g}_1(t)|^2 d\sigma(t) = \infty, \quad \int_{\mathbb{R}} |t\tilde{g}_1(t)|^2 d\sigma(t) < \infty. \quad (5.4)$$

В символах (5.2), (5.3) и  $\tilde{L}_\sigma^2$  действие оператора  $A$  описывается формулами

$$\left. \begin{aligned} Ag &= y_A + t\tilde{g}_1(t) + \gamma_A \cdot e, & Az &= [z, y_A] \cdot e, \\ Af(t) &= tf + \int_{\mathbb{R}} tf(t)\overline{\tilde{g}(t)} d\sigma(t) \cdot e, & Ae &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

где  $y_A, z \in \mathcal{N}$ ,  $\gamma_A \in \mathbb{R}$  и  $f(t) \in L_\sigma^2$ . Из этого представления видно, что модельное пространство  $\tilde{L}_\sigma^2$  недостаточно для полного описания оператора  $A$  даже в случае пространства типа  $\Pi_1$ . Прямой подсчёт показывает, тем не менее, что для степеней оператора  $A$ , больших двух, их действие полностью задаётся модельным пространством  $\tilde{L}_\sigma^2$ :

$$\left. \begin{aligned} A^n g &= t^n \tilde{g}_1(t) + \int_{\mathbb{R}} t^n |\tilde{g}(t)|^2 d\sigma(t) \cdot e, & Az &= 0, \\ A^n f(t) &= t^n f(t) + \int_{\mathbb{R}} t^n f(t)\overline{\tilde{g}(t)} d\sigma(t) \cdot e, & Ae &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

где  $z \in \mathcal{N}$ ,  $f(t) \in L_\sigma^2$ ,  $n = 3, 4, \dots$ . Из комментария к формулам (5.5) следует, что в целом совокупность элементов матрицы (5.2) не может быть представлена в терминах модельного пространства  $\tilde{L}_\sigma^2$ , однако ключевые для классификации Шульмана операторы  $B_{11}$ ,  $B_{22}$  и  $B_{33}$  такое представление допускают: найдётся такая непрерывная на  $\sigma(A_{22})$  функция  $\phi_B(t)$ , что  $B_{11}g = \phi_B(0)g$ ,  $B_{22}(z + f(t)) = \phi_B(0)z + \phi_B(t) \cdot f(t)$  и  $B_{33}e = \phi_B(0)e$ . Из последних равенств следует, что если  $B_{22} = 0$ , то  $B_{11} = 0$  и  $B_{33} = 0$ , поэтому порождаемая оператором  $A$  алгебра  $\mathfrak{A}$  относится либо к классу 1, либо к классу 2. Покажем, что классу 1 она не принадлежит. Рассмотрим последовательность многочленов

$$Q_n(t) = \frac{t^4}{(\|A\| + 1)^4} \left( 1 + \left( 1 - \frac{t^4}{(\|A\| + 1)^4} \right) + \dots + \left( 1 - \frac{t^4}{(\|A\| + 1)^4} \right)^n \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Эта последовательность при любом  $t \in (- (\|A\| + 1), 0) \cup (0, (\|A\| + 1))$  обладает следующим набором свойств (см. (5.4)):

- $0 < Q_n(t) < 1$ ,  $\int_{\mathbb{R}} Q_n(t) |\tilde{g}_1(t)|^2 d\sigma(t) < \infty$ ;
- $Q_n(t) < Q_{n+1}(t)$ ;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(t) = 1$ .

Тогда в силу (2.5) и (5.4) верно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} Q_n(t) |\tilde{g}_1(t)|^2 d\sigma(t) = \infty. \quad (5.7)$$

Положим  $\alpha_n = \int_{\mathbb{R}} Q_n(t) |\tilde{g}_1(t)|^2 d\sigma(t)$ ,  $C_n = \frac{1}{\alpha_n} Q_n(A)$ . Тогда (см. (5.6))

$$\left. \begin{aligned} C_n g &= \frac{1}{\alpha_n} Q_n(t) \tilde{g}_1(t) + e, & C_n z &= 0, \\ C_n f(t) &= \frac{1}{\alpha_n} Q_n(t) f(t) + \frac{1}{\alpha_n} \int_{\mathbb{R}} Q_n(t) f(t) \overline{\tilde{g}(t)} d\sigma(t) \cdot e, & C_n e &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Отсюда и из оценок

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_n} \|Q_n(t)\tilde{g}_1(t)\|_{L^2_\sigma} &= \frac{1}{\alpha_n} \left( \int_{\mathbb{R}} |Q_n(t)\tilde{g}_1(t)|^2 d\sigma(t) \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\alpha_n} \left( \int_{\mathbb{R}} Q_n(t)|\tilde{g}_1(t)|^2 d\sigma(t) \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}, \\ \frac{1}{\alpha_n} \left| \int_{\mathbb{R}} Q_n(t)f(t)\overline{\tilde{g}(t)} d\sigma(t) \right| &\leq \frac{\|f(t)\|_{L^2_\sigma}}{\alpha_n} \left( \int_{\mathbb{R}} |Q_n(t)\tilde{g}_1(t)|^2 d\sigma(t) \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{\|f(t)\|_{L^2_\sigma}}{\alpha_n} \left( \int_{\mathbb{R}} Q_n(t)|\tilde{g}_1(t)|^2 d\sigma(t) \right)^{1/2} = \frac{\|f(t)\|_{L^2_\sigma}}{\sqrt{\alpha_n}} \end{aligned}$$

вытекает, что оператор  $C_n$  при  $n \rightarrow \infty$  стремится по операторной норме к оператору  $C_\infty$ , задаваемому соотношениями ( $z \in \mathcal{N}$ ,  $f(t) \in L^2_\sigma$ ):

$$C_\infty g = e, \quad C_\infty z = C_\infty f(t) = C_\infty e = 0.$$

По построению  $C_\infty \in \mathfrak{A}$ , поэтому алгебра  $\mathfrak{A}$  относится к классу 1.

**Определение 5.2** (см. [27, 34]). Пусть  $\mathfrak{A}$  — операторная \*-алгебра в гильбертовом пространстве  $\mathcal{G}$ . Линейное отображение  $q$  из  $\mathfrak{A}$  в  $\mathcal{G}$  называется *квазивектором*, если

$$q(AB) = Aq(B) \quad \text{для любых } A, B \in \mathfrak{A}.$$

Квазивектор  $q$  будет по определению *\*-замкнутым*, если пространство  $\mathfrak{A}$  будет полным по отношению к норме

$$\|A\|_q = \|A\| + \|q(A)\| + \|q(A^*)\|.$$

Квазивектор  $q$  является *ограниченным* тогда и только тогда, когда найдётся такая константа  $c > 0$ , что

$$\|q(A)\| \leq c\|A\| \quad \text{для любых } A \in \mathfrak{A}.$$

Перейдём теперь непосредственно к модели Шульмана. Пусть  $\mathfrak{A}$  — алгебра класса 1. Отметим, что любой оператор  $B \in \mathfrak{A}$  может быть представлен в виде  $B = B_0 + \lambda I$ , где  $B_0 \in \mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{A}_0$  — подалгебра без единицы. Это замечание относится и к алгебре  $\tilde{\mathfrak{A}} = \{B_{22}\}$  (см. (5.2)).

**Теорема 5.1** (см. [27, 34]). Пусть  $\mathfrak{A}$  является алгеброй класса 1. Тогда существует такой \*-замкнутый квазивектор  $q: \tilde{\mathfrak{A}}_0 \rightarrow \mathcal{G}$ , что для любых  $B \in \mathfrak{A}$  и  $z \in \mathcal{G}$

- $Bg = \lambda g + x_1 + y + q((B_0)_{22}) + \gamma e$ ,
- $Bz = B_{22}z + (z, x_2 + Vy + q((B_0^*)_{22}))e$ ,
- $Be = \lambda e$ ,

где  $x_1, x_2 \in \mathcal{G}_F$ ,  $y \in \mathcal{D} \subset \mathcal{G}_C$ ,  $\mathcal{G}_F \subset \mathcal{G}$  является подпространством, инвариантным по отношению к  $\tilde{\mathfrak{A}}_0$  и ортогональным к  $q$ ,  $\mathcal{G}_C \perp \mathcal{G}_F$  и  $\mathcal{G}_C \subset \text{Ker } \tilde{\mathfrak{A}}_0$ ,  $V$  является замкнутым инволютивным оператором с областью определения  $\mathcal{D}: \mathcal{D} \mapsto \mathcal{G}_C$ ,  $\lambda, \gamma \in \mathbb{C}$ .

Интерпретируем эту теорему на примере 3.1. Одномерные подпространства  $\mathcal{K}$  и  $\mathcal{L}$  порождаются, соответственно, векторами  $g$  и  $e$ . Подпространством  $\mathcal{G}$  в данном случае будет замкнутая линейная оболочка векторов  $f, h_1, h_2, \dots$ , квазивектор в терминах разложения (5.1) и представления (5.2) имеет вид  $q(A_{22}^k) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^k} h_j$ , т. е.  $q(A^k) \perp f$ , подпространство  $\mathcal{G}_F$  одномерно и натянуто на вектор  $f$ ,  $x_1 = x_2 = -f$ , подпространство  $\mathcal{G}_C$  тривиально. Отметим также, что квазивектор  $q$  неограничен. Последнее верно не только для данного примера, но и для любой алгебры  $\text{Alg}_u A$ , порождённой оператором  $A$ , подчинённым условию (3.3b). Укажем, что последнее условие не является необходимым для того, чтобы алгебра  $\text{Alg}_u A$  принадлежала классу 1.

**5.2. Подход Йонаса—Лангера—Тексториуса.** В работе [33] была предложена модель ограниченного циклического  $J$ -с.с. оператора в пространстве Понтрягина, базирующегося на интегральном представлении последовательности вида (2.2).

Напомним для начала определение циклического вектора и циклического оператора (см., например, [22, гл. 14, п. 126] и [19, гл. VII, п. 2]). Если  $B$  — некоторый оператор в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ , то *циклическим вектором* этого оператора называется любой вектор  $x \in \mathcal{H}$  такой, что система векторов  $\{B^n x\}_{n=0}^{\infty}$  полна в  $\mathcal{H}$ . Далеко не для всякого оператора существуют циклические векторы. В случае самосопряжённого оператора  $B$  в гильбертовом пространстве наличие циклического вектора эквивалентно простоте спектра у  $B$  (это соответствует условию (3.3с)), но для спектральных или обобщённых спектральных операторов картина усложняется. Если оператор  $B$  обладает циклическим вектором, то он называется *циклическим*. Циклическим, в частности, является оператор  $A$  из примера 3.1, а его циклическим вектором будет, скажем,  $g$ .

Далее, всякий ограниченный  $J$ -с.с. оператор  $A$ , действующий в пространстве Понтрягина  $\mathcal{H}$ , полиномиально дефинируем, т. е. для  $A$  найдётся такой (дефинирующий) полином  $\mathcal{P}(\cdot)$ , для которого оператор  $\mathcal{P}(A)$   $J$ -неотрицателен. В (2.1) показано, что можно положить  $\mathcal{P}(\cdot) = N(\cdot)\bar{N}(\cdot)$ , однако, вообще говоря, для одного и того же оператора существуют разные дефинирующие полиномы, и для дальнейшего конкретный вид  $\mathcal{P}(\cdot)$  неважен, дальше лишь предполагается, что коэффициенты у  $\mathcal{P}(\cdot)$  вещественны, а коэффициент при его старшей степени равен единице.

Итак, пусть  $A$  — фиксированный ограниченный  $J$ -с.с. оператор, действующий в пространстве Понтрягина  $\mathcal{H}$  и для него найдётся такой вектор  $h$ , что последовательность  $\{A^n h\}_0^{\infty}$  полна в  $\mathcal{H}$ . Выберем и зафиксируем полином  $\mathcal{P}(\xi) = \xi^m + \eta_{m-1}\xi^{m-1} + \eta_{m-2}\xi^{m-2} + \dots + \eta_0$ , который дефинирует  $A$ . Последовательность  $\{d_n = [\mathcal{P}(A)A^n h, h]\}_0^{\infty}$  является позитивной последовательностью моментов и поэтому допускает представление

$$d_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n d\sigma(t),$$

которое мы используем для регуляризованного интегрального представления последовательности моментов  $\{c_n = [A^n h, h]\}_0^{\infty}$ . Указанные последовательности моментов связаны соотношениями

$$d_n = c_{n+m} + \eta_{m-1}c_{n+m-1} + \eta_{m-2}c_{n+m-2} + \dots + \eta_0 c_n,$$

откуда

$$c_{n+m} = -(\eta_{m-1}c_{n+m-1} + \eta_{m-2}c_{n+m-2} + \dots + \eta_0 c_n) + \int_{-\infty}^{+\infty} t^n d\sigma(t),$$

в частности

$$\begin{aligned} c_m &= -(\eta_{m-1}c_{m-1} + \eta_{m-2}c_{m-2} + \dots + \eta_0 c_0) + \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(t), \\ c_{1+m} &= -(\eta_{m-1}c_m + \eta_{m-2}c_{m-1} + \dots + \eta_0 c_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} t d\sigma(t) = \\ &= -(\eta_{m-2}c_{m-1} + \dots + \eta_0 c_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} t d\sigma(t) + \\ &\quad + \eta_{m-1}(\eta_{m-1}c_{m-1} + \eta_{m-2}c_{m-2} + \dots + \eta_0 c_0) - \eta_{m-1} \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(t) = \\ &= -((\eta_{m-2} - \eta_{m-1}^2)c_{m-1} + \dots + (\eta_0 - \eta_{m-1}\eta_1)c_1 - \eta_{m-1}\eta_0 c_0) + \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \eta_{m-1})d\sigma(t). \end{aligned}$$

Отметим, что выражение  $-(\eta_{m-1}\xi^{m-1} + \eta_{m-2}\xi^{m-2} + \dots + \eta_0)$  представляет собой интерполяционный полином для  $\xi^m$  с узлами интерполяции, совпадающими с корнями (с учётом кратности) многочлена  $\mathcal{P}(\xi)$ . Аналогично, многочлен  $-((\eta_{m-2} - \eta_{m-1}^2)\xi^{m-1} + \dots + (\eta_0 - \eta_{m-1}\eta_1)\xi - \eta_{m-1}\eta_0)$  является интерполяционным для функции  $\xi^{m+1}$  с теми же узлами интерполяции. Используя приведённые соображения и метод полной математической индукции можно показать, что

$$c_n = \sum_{j=0}^m \alpha_j^{(n)} c_j + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^n - \sum_{j=0}^m \alpha_j^{(n)} t^j}{\mathcal{P}(t)} d\sigma(t), \tag{5.9}$$

где  $\sum_{j=0}^m \alpha_j^{(n)} t^j$  — интерполяционный многочлен для  $t^n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Поясним, что для  $n < m$  представление (5.9) сводится к тривиальному равенству  $c_n = c_n$ .

Перейдём теперь к формированию модельного пространства Понтрягина как некоторого пространства функций. Отождествим (циклический) вектор  $h$  с тождественной единицей, вектор  $Ah$  отождествим с  $t$ ,  $A^2h$  отождествим с  $t^2$  и т. д. Итак, стартовым линейным многообразием функций у нас будет множество полиномов  $\mathfrak{P}$ . Превратим множество  $\mathfrak{P}$  в линейное пространство с внутренним скалярным произведением  $[\cdot, \cdot]$ , полагая  $[t^j, t^l] = c_{j+l}$ ,  $j, l = 0, 1, \dots$ , где величины  $c_{l+j}$  заданы в (5.9). По построению линеал  $\mathfrak{P}$  изометричен плотному подмножеству пространства Понтрягина  $\mathcal{H}$ , поэтому он после пополнения превращается в пространство Понтрягина, которое мы обозначим  $\Pi(\Phi)$ , а исходный оператор будет подобен действующему в  $\Pi(\Phi)$  оператору умножения  $A_T$  на независимую переменную. Указанное пополнение можно реализовать разными способами, но все эти способы топологически эквивалентны. Один из вариантов — выделить в  $\mathfrak{P}$  максимальное отрицательное подпространство  $\mathcal{L}_-$  и найти в  $\mathfrak{P}$   $J$ -ортогональное дополнение  $\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_-^{[\perp]}$ . Линеал  $\mathcal{L}_+$  с внутренним эрмитовым произведением  $[\cdot, \cdot]$  — это предгильбертово пространство, пополнив которое, мы и получим (в прямой сумме с  $\mathcal{L}_-$ ) пространство Понтрягина  $\Pi(\Phi)$ . Формулы (5.9) показывают, что, вообще говоря, как гильбертова структура, так и структура пространства Понтрягина на функциональном пространстве  $\Pi(\Phi)$  может задаваться не обычной мерой Лебега—Стилтьеса, а некоторым распределением (обобщённой функцией)  $\Phi$ . Разберём эту возможность на конкретном примере.

Рассмотрим пример 3.1. Прямая проверка показывает, что минимальная натуральная степень  $n$ , при которой оператор  $A^n$  становится  $J$ -неотрицательным, равна двум, поэтому в рассматриваемом случае естественно положить  $d_n = [A^{2+n}g, g]$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Тогда

$$d_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n d\sigma(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\sigma(t) = 0$  при  $t \leq 0$ ,  $\sigma(t) = 1 + \sum_{j=[1/t]+1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$  при  $0 < t \leq 1$ ,  $\sigma(t) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$  при  $t > 1$ , откуда (коэффициенты  $c_0$  и  $c_1$  вычисляются непосредственно)

$$c_0 = c_1 = 0, \quad c_n = \int_0^{\infty} t^{n-2} d\sigma(t), \quad n = 2, 3, \dots \tag{5.10}$$

Дальнейшие пояснения мы будем делать в терминах элементов из  $\Pi(\Phi)$ . Если  $u(t), v(t)$  — многочлены из  $\Pi(\Phi)$ , то в силу (5.10)

$$[u(t), v(t)] = \int_0^{\infty} \frac{u(t)\overline{v(t)} - u(0)\overline{v(0)} - (u'(0)\overline{v(0)} + u(0)\overline{v'(0)})t}{t^2} d\sigma(t). \tag{5.11}$$

Поскольку функция  $\sigma(t)$  имеет скачок в нуле, поясним, что

$$\int_0^{\infty} \frac{u(t)\overline{v(t)} - u(0)\overline{v(0)} - (u(t)\overline{v(t)})'|_{t=0}t}{t^2} d\sigma(t) = \frac{(u(t)\overline{v(t)})''}{2} \Big|_{t=0} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}\right) + \\ + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{u(t)\overline{v(t)} - u(0)\overline{v(0)} - (u(t)\overline{v(t)})'|_{t=0}t - (u(t)\overline{v(t)})''|_{t=0}t^2}{t^2} d\sigma(t),$$

откуда

$$c_2 = [t^2, 1] = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}, \quad c_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^n}, \quad n = 3, 4, \dots \quad (5.12)$$

Прямой подсчёт даёт  $[1 - t^2, 1 - t^2] = [1 - 2t^2 + t^4, 1] = -2c_2 + c_4 < 0$ , так что в качестве подпространства  $\mathcal{L}_-$  можно взять одномерное подпространство, натянутое на полином  $1 - t^2$ . Далее, пусть  $u(t) = \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots + \gamma_l t^l$  — произвольный многочлен. Тогда  $\mathcal{L}_+$  — это множество многочленов вида

$$\widehat{u}(t) = u(t) - \omega[u(t), 1 - t^2](1 - t^2) = u(t) - \omega(1 - t^2) \int_0^{\infty} \frac{u(t)(1 - t^2) - u(0) - u'(0)t}{t^2} d\sigma(t),$$

где  $\omega = (-2c_2 + c_4)^{-1}$ . Тогда

$$(\widehat{u}(t), \widehat{v}(t)) = [\widehat{u}(t), \widehat{v}(t)] = [u(t), v(t)] - \omega[u(t), (1 - t^2)][(1 - t^2), v(t)].$$

$J$ -ортопроекция функций  $u(t)$  и  $v(t)$  на  $\mathcal{L}_-$  равна  $\check{u}(t) = \omega[u(t), (1 - t^2)](1 - t^2)$  и  $\check{v}(t) = \omega[v(t), (1 - t^2)](1 - t^2)$  соответственно, а гильбертово скалярное произведение этих проекций в рамках выбранной конструкции — это  $(\check{u}(t), \check{v}(t)) = -\omega[u(t), (1 - t^2)][(1 - t^2), v(t)]$ , так что (напомним, что константа  $\omega < 0$ )

$$(u(t), v(t)) = [u(t), v(t)] - 2\omega[u(t), (1 - t^2)][(1 - t^2), v(t)]. \quad (5.13)$$

Представление (5.13) показывает, что произвольная последовательность полиномов  $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$  будет последовательностью Коши в гильбертовой норме тогда и только тогда, когда она одновременно будет последовательностью Коши по отношению к индефинитной норме и породит числовую последовательность Коши  $\{[u_n(t), (1 - t^2)]\}_{n=1}^{\infty}$ . Описание пополнения  $\mathfrak{H}$  связано прежде всего с тем, что  $\sigma(t)$  — это функция скачков. Непосредственно проверяется, что последовательность функций  $t^n$ ,  $n = 2, 3, \dots$  является последовательностью Коши и сходится к функции  $\varphi_1(t)$ :  $\varphi_1(t) = 0$  при  $t \in [0, 1)$ ,  $\varphi_1(1) = 1$ , последовательность функций  $4^n t^n (1 - t)^n$  — к функции  $\varphi_2(t)$ :  $\varphi_2(t) = 0$  при  $t \in [0, 1/2) \cup (1/2, 1]$ ,  $\varphi_2(1/2) = 1$  и т. д. Функция  $\varphi_n(t)$  в этой схеме задаётся равенствами  $\varphi_n(t)$ :  $\varphi_n(t) = 0$  при  $t \in [0, 1/n) \cup (1/n, 1]$ ,  $\varphi_n(1/n) = 1$ . Подсчитывая с помощью предельного перехода значения внутреннего скалярного для этих функций, имеем  $[\varphi_n(t), v(t)] = \bar{v}(1/n)$  и, в частности,  $[\varphi_n(t), \varphi_l(t)] = \delta_{nl}$ , где  $\delta_{nl}$  — символ Кронекера. Одновременно

$$(\varphi_n(t), v(t)) = \bar{v}(1/n) - \frac{2\omega(n^2 - 1)}{n^2} [(1 - t^2), v(t)]$$

и

$$(\varphi_n(t), \varphi_l(t)) = \delta_{nl} - \frac{2\omega(n^2 - 1)(l^2 - 1)}{n^2 l^2}.$$

Рассмотрим теперь последовательность

$$\psi_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \varphi_l(t).$$

Внешне эта последовательность функций равномерно сходится к нулю, однако  $[\psi_n(t), 1] = 1$  для любого  $n = 1, 2, \dots$ ; с другой стороны, согласно методу средних арифметических для последовательностей (см. [16, теорема 4.1.П Сильвермана—Теплица]) для произвольного полинома  $u(t)$  верно  $\lim_{n \rightarrow \infty} [\psi_n(t), tu(t)] = 0$ . Итак, для любого полинома  $u(t)$  мы имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} [\psi_n(t), u(t)] = \overline{u(0)}$ ,

т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t)$  можно отождествить с дельта-функцией Дирака  $\delta(t)$ , причём  $[\delta(t), \delta(t)] = 0$ . Аналогичный подсчёт даёт  $(v(t) - \text{произвольный многочлен})$

$$(\delta(t), v(t)) = \bar{v}(0) - 2\omega[(1 - t^2), v(t)], \quad (\delta(t), \varphi_l(t)) = -2\omega \frac{l^2 - 1}{l^2}, \quad (\delta(t), \delta(t)) = -2\omega,$$

$$(\varphi_n(t) - \delta(t), \varphi_l(t) - \delta(t)) = \delta_{nl} - \frac{2\omega}{n^2 l^2}.$$

Последнее равенство означает, что система  $\{\varphi_l(t) - \delta(t)\}_{l=1}^{\infty}$  является системой Рисса (см. [9] или [13]), поэтому ряд  $\sum_{l=1}^{\infty} \nu_l(\varphi_l(t) - \delta(t))$  сходится тогда и только тогда, когда  $\sum_{l=1}^{\infty} |\nu_l|^2 < \infty$ .

Рассмотрим теперь последовательность

$$\vartheta_n(t) = \sum_{l=1}^n \frac{\varphi_l(t) - \delta(t)}{l}.$$

Наша цель — найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} [\vartheta_n(t), v(t)]$  для произвольного полинома  $v(t)$ , который, очевидно, может быть представлен в виде  $v(t) = v(0) + v'(0)t + t^2 w(t)$ . Итак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\vartheta_n(t), v(t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( v'(0) \sum_{l=1}^n \frac{1}{l^2} + \sum_{l=1}^n \frac{w(1/l)}{l^3} \right) = v'(0) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{w(1/l)}{l^3}.$$

С другой стороны,

$$[t, v(t)] = v'(0) \left( 1 + \sum_1^{\infty} \frac{1}{l^2} \right) + \sum_1^{\infty} \frac{w(1/l)}{l^3},$$

поэтому элемент  $t - \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n(t)$  из  $\Pi(\Phi)$  может быть отождествлён с обобщённой функцией  $-\delta'(t)$ . Резюмируя приведённые выше соображения можно утверждать, что все элементы пространства  $\Pi(\Phi)$  могут быть представлены в виде

$$\alpha + \beta \delta(t) + \gamma \delta'(t) + \sum_{l=1}^{\infty} \nu_l (\varphi_l(t) - \delta(t)),$$

где  $\sum_{l=1}^{\infty} |\nu_l|^2 < \infty$ . При этом надо иметь в виду, что  $\sigma(t)$  — функция скачков, поэтому значения

какой либо функции из  $\Pi(\Phi)$  на множестве  $\bigcup_{l=1}^{\infty} \left( \frac{1}{l+1}, \frac{1}{l} \right)$  несущественны и, скажем, функции

$$t \text{ и } -\delta'(t) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} (\varphi_l(t) - \delta(t))$$

представляют один и тот же элемент из  $\Pi(\Phi)$ ; аналогичное замечание верно для пары функций

$$t^2 \text{ и } \delta'(t) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} \varphi_l(t) - \delta(t)$$

и т. п. Оператор  $A_T$  после его замыкания задаётся равенствами

$$A_T \delta(t) = 0, \quad A_T \delta'(t) = -\delta(t), \quad A_T 1 = -\delta'(t) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} (\varphi_l(t) - \delta(t)), \quad A_T \varphi_l(t) = \frac{1}{l} \varphi_l(t),$$

где  $l = 1, 2, \dots$ , и этим завершается описание модели оператора  $A$  из примера 3.1.

## 6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В рамках данных заметок были приведены три модели, связанные с  $J$ -с.с. или  $J$ -унитарными операторами, действующими в пространстве Понтрягина. Модель Шульмана выходит далеко за рамки модели для индивидуального  $J$ -с.с. оператора или моногенной (порождаемой одним оператором) алгебры, она описывает действие операторной алгебры на всём пространстве Понтрягина и доказала свою полезность в исследовании, например, проблемы бикоммутанта [27, 30, 34, 39]. Вместе с тем модель Шульмана изначально строилась для пространства Понтрягина типа  $\Pi_1$ , и неясно, как её можно обобщить (сохраняя тот же уровень прозрачности) на более широкий класс пространств Понтрягина. Модель Йонаса—Лангера—Тексториуса описывает действие оператора  $A$  на всём пространстве Понтрягина при любом значении его ранга индефинитности — в этом заключается её достоинство; очевидное же ограничение рассматриваемой модели — она предполагает цикличность оператора  $A$ . Это ограничение не очень существенно для пространства типа  $\Pi_1$ , поскольку в этом случае найдётся такое проекционно полное, инвариантное относительно  $A$  подпространство  $\mathcal{H}_c$ , что оператор  $A|_{\mathcal{H}_c}$  — циклический, а подпространство  $\mathcal{H}_c^{\perp}$  положительно, по этому поводу см. [23]. При больших рангах индефинитности требование цикличности уже становится ограничительным. Если отказаться от цикличности  $A$  и сохранить подход к проблеме, предложенный в работе [33], то числовую степенную последовательность моментов придётся заменить её матричным аналогом, но это достаточно сложный и трудно контролируемый процесс. Более того, опыт классификации  $J$ -нормальных операторов в псевдоунитарных пространствах с рангом индефинитности, равным двум, наглядно показывает необозримость всех неприводимых конструкций коммутативных  $J$ -симметричных алгебр при ранге индефинитности, большем двух. Модели, описанные здесь в разделах 3 и 4, являются неполными в том смысле, что описывают действие  $J$ -с.с. или  $J$ -унитарного оператора (не накладывая при этом каких-либо ограничений на кратность спектра соответствующего оператора или ранг индефинитности пространства Понтрягина) не на всём пространстве, а на подпространстве, ответственном за их «обобщённую спектральную» компоненту. Этого, тем не менее, оказывается достаточно при построении максимально возможного в некотором естественном смысле функционального исчисления для  $J$ -с.с. и  $J$ -унитарных операторов в пространстве Понтрягина (см. [25, 37, 40]), а также для исследования спектральных свойств бикоммутанта  $J$ -с.с. оператора (см. [26, 39]). Этот же подход можно сравнительно легко распространить на коммутативные семейства  $J$ -с.с. операторов в пространстве Понтрягина и (при некоторых дополнительных ограничениях, определяющих так называемые классы  $H$  и  $K(H)$  — см. [3, 28, 29]) в пространстве Крейна.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Линейные операторы в гильбертовых пространствах с  $G$ -метрикой // Усп. мат. наук. — 1971. — 26, № 4. — С. 43–92.
2. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой и их приложения // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. — 1979. — 17. — С. 113–205.
3. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.
4. Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д. Введение в теорию пространств Понтрягина: специальный курс лекций. — Симферополь: ТНУ, 2008.
5. Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д. Введение в теорию пространств Крейна: специальный курс лекций. — Симферополь: ООО «ФОРМА», 2010.
6. Ароншайн Н. Квадратичные формы на векторных пространствах // Математика. — 1964. — 8, № 5. — С. 102–155.
7. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. — М.: Физматгиз, 1961.
8. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966.
9. Бари Н. К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Уч. зап. МГУ. — 1951. — 148. — С. 69–107.
10. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Спектральная теория самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
11. Богачёв В. И. Курс лекций по действительному анализу. — М.: МГУ, 2008.

12. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. — М.: Мир, 1982.
13. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
14. Гохман Э. Х. Интеграл Стилтгеса и его приложения. — М.: Физматгиз, 1958.
15. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т. 3. Спектральные операторы. — М.: Мир, 1974.
16. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. — М.: ФМЛ, 1960.
17. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. — СПб: Лань, 2009.
18. Наймарк М. А. Нормированные кольца. — М.: Физматлит, 2010.
19. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1: Функциональный анализ. — М.: Мир, 1977.
20. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979.
21. Севастьянов Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики. — М.: Наука, 1982.
22. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. — М.: Мир, 1970.
23. Штраус В. А. Некоторые особенности спектральной функции  $\pi$ -самосопряжённого оператора // В сб.: «Функциональный анализ. Теория операторов. 21». — Ульяновск: УГПИ, 1983. — С. 135–146.
24. Штраус В. А. Модельное представление простейшего  $\pi$ -самосопряжённого оператора // В сб.: «Функциональный анализ. Спектральная теория. 22». — Ульяновск: УГПИ, 1984. — С. 123–133.
25. Штраус В. А. Функциональное представление алгебры, порождённой самосопряжённым оператором в пространстве Понтрягина // Функциональный анализ и его прилож. — 1986. — 20, № 1. — С. 91–92.
26. Штраус В. А. Функциональное представление операторов, дважды перестановочных с самосопряжённым оператором в пространстве Понтрягина // Сиб. мат. ж. — 1988. — 29, № 6. — С. 176–184.
27. Шульман В. С. Банаховы симметричные алгебры операторов в пространстве типа  $\Pi_1$  // Мат. сб. — 1972. — 89, № 2. — С. 264–279.
28. Azizov T. Ya., Strauss V. A. Spectral decompositions for special classes of self-adjoint and normal operators on Krein spaces // В сб.: «Spectral Theory and Its Applications». — Theta, 2003. — С. 45–67.
29. Azizov T. Ya., Strauss V. A. On a spectral decomposition of a commutative operator family in spaces with indefinite metric // Methods Funct. Anal. Topol. — 2005. — 11, № 1. — С. 10–20.
30. Bendersky A. Y., Litvinov S. N., Chilin V. I. A description of commutative symmetric operator algebras in a Pontryagin space  $\pi_1$  // J. Operator Theory. — 1997. — 37. — С. 201–222.
31. Colojoară I., Foiaş C. Theory of Generalized Spectral Operators. — New York, etc: Gordon and Breach, 1968.
32. Holtz O., Strauss V. Classification of normal operators in spaces with indefinite scalar product of rank-2 // Linear Algebra Appl. — 1996. — 241–243. — С. 455–517.
33. Jonas P., Langer H., Textorius B. Models and unitary equivalence of cyclic selfadjoint operators in Pontryagin spaces // В сб.: «Workshop on Operator Theory and Complex Analysis», Sapporo, Japan, June 1991. — Basel: Birkhäuser, 1992. — С. 252–284.
34. Kissin E., Shulman V. Representations of Krein spaces and derivations of  $C^*$ -algebras. — US: Addison-Wesley Longman, 1997.
35. Langer H. Spectraltheorie linearer Operatoren in  $J$ -räumen und einige Anwendungen auf die Shar  $L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C$  // Habilitationsschrift. — Dresden: Dresden Tech. Univ., 1965.
36. Langer H. Spectral functions of definitizable operators in Krein space // Lecture Notes in Math. — 1982. — 948. — С. 1–46.
37. Strauss V. A functional description for the commutative  $WJ^*$ -algebras for the  $D_\kappa^+$ -class // В сб.: «Operator Theory and Indefinite Inner Product Spaces». — Basel: Birkhäuser, 2006. — С. 299–335.
38. Strauss V. Models of function type for commutative symmetric operator families in Krein spaces // Abstr. Appl. Anal. — 2008. — 2008. — 439781.
39. Strauss V. On a commutative  $WJ^*$ -algebra of  $D_1^+$ -class and its bicommutant // Oper. Matrices. — 2011. — 5, № 4. — С. 585–617.
40. Strauss V. On the weakly closed algebra generated by a unitary operator in a Pontryagin space // Oper. Matrices. — 2018. — 12, № 3. — С. 837–853.

В. А. Штраус

Ульяновский государственный педагогический университет им. И. Н. Ульянова, Ульяновск, Россия

E-mail: vstrauss@mail.ru

## Models of Self-Adjoint and Unitary Operators in Pontryagin Spaces

© 2022 V. A. Strauss

**Abstract.** This paper represents a revised version of the lectures, delivered by the author at KROMSH-2019. These lectures are devoted to describing a few different ways of constructing a model representation for self-adjoint and unitary operators acting in Pontryagin spaces, and a comparison between them. Two of these models are based on the regularized integral Krein–Langer representation of a numerical sequence generated by the powers of a self-adjoint (in the sense of Pontryagin spaces) operator. The steps to deduce both this representation and the spectral function of the corresponding operator are given. In both models (first of which belongs to the author of this paper), the operator is realized as an operator of multiplication by an independent variable, but the space of functions in which it acts is different for each of the models. The third model, introduced by V. S. Shulman, is based on his own concept of a quasi-vector.

### REFERENCES

1. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, “Lineynye operatory v gil’bertovykh prostranstvakh s  $G$ -metrikoy” [Linear operators in Hilbert spaces with  $G$ -metric], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1971, **26**, No. 4, 43–92 (in Russian).
2. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, “Lineynye operatory v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy i ikh prilozheniya” [Linear operators in spaces with an indefinite metric and their applications], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Mat. anal.* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1979, **17**, 113–205 (in Russian).
3. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Osnovy teorii lineynykh operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy* [Fundamentals of the Theory of Linear Operators in Spaces with Indefinite Metric], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
4. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevsky, *Vvedenie v teoriyu prostranstv Pontryagina: spetsial’nyy kurs lektsiy* [Introduction to the Theory of Pontryagin Spaces: Special Course], TNU, Simferopol’, 2008 (in Russian).
5. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevsky, *Vvedenie v teoriyu prostranstv Kreyna: spetsial’nyy kurs lektsiy* [Introduction to the Theory of Krein Spaces: Special Course], FORMA, Simferopol’, 2010 (in Russian).
6. N. Aronszajn, “Kvadratichnye formy na vektornykh prostranstvakh” [Quadratic forms on vector spaces], *Matematika* [Matematika], 1964, **8**, No. 5, 102–155 (in Russian).
7. N. I. Akhiezer, *Klassicheskaya problema momentov i nekotorye voprosy analiza, svyazannye s neyu* [The classical moment problem and some related questions in analysis], Fizmatgiz, Moscow, 1961 (in Russian).
8. N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Teoriya lineynykh operatorov v gil’bertovom prostranstve* [Theory of Linear Operators in Hilbert Space], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
9. N. K. Bari, “Biortogonal’nye sistemy i bazisy v gil’bertovom prostranstve” [Biorthogonal systems and bases in Hilbert space], *Uch. zap. MGU* [Uch. zap. MGU], 1951, **148**, 69–107 (in Russian).
10. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, *Spektral’naya teoriya samosopryazhennykh operatorov v gil’bertovom prostranstve* [Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space], Leningrad Univ., Leningrad, 1980 (in Russian).
11. V. I. Bogachev, *Kurs lektsiy po deystvitel’nomu analizu* [Lectures on Real Analysis], MSU, Moscow, 2008 (in Russian).
12. O. Bratteli and D. Robinson, *Operatornyye algebry i kvantovaya statisticheskaya mekhanika* [Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics], Mir, Moscow, 1982 (Russian translation).
13. I. C. Gohberg and M. G. Kreyn, *Vvedenie v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov v gil’bertovom prostranstve* [Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in a Hilbert Space], Nauka, Moscow, 1965 (in Russian).

14. E. Kh. Gokhman, *Integral Stilt'esa i ego prilozheniya* [Stieltjes Integral and Its Applications], Fizmatgiz, Moscow, 1958 (in Russian).
15. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Lineynye operatory. T. 3. Spektral'nye operatory* [Linear Operators. Part III. Spectral operators], Mir, Moscow, 1974 (Russian translation).
16. R. G. Cooke, *Beskonechnye matritsy i prostranstva posledovatel'nostey* [Infinite Matrices and Sequence Spaces], FML, Moscow, 1960 (Russian translation).
17. A. I. Mal'tsev, *Osnovy lineynoy algebry* [Fundamentals of Linear Algebra], Lan', Saint Petersburg, 2009 (in Russian).
18. M. A. Naimark, *Normirovannye kol'tsa* [Normed Rings], Fizmatlit, Moscow, 2010 (in Russian).
19. M. Reed and B. Simon, *Metody sovremennoy matematicheskoy fiziki. T. 1: Funktsional'nyy analiz* [Methods of Modern Mathematical Physics. V. 1: Functional Analysis], Mir, Moscow, 1977 (Russian translation).
20. F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Lektsii po funktsional'nomu analizu* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1979 (Russian translation).
21. B. A. Sevast'yanov, *Kurs teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistiki* [A Course of Probability Theory and Mathematical Statistics], Nauka, Moscow, 1982 (in Russian).
22. P. R. Halmos, *Gil'bertovo prostranstvo v zadachakh* [A Hilbert Space Problem Book], Mir, Moscow, 1970 (Russian translation).
23. V. A. Strauss, "Nekotorye osobennosti spektral'noy funktsii  $\pi$ -samosopryazhennogo operatora" [Some peculiarities of the spectral function of a  $\pi$ -self-adjoint operator], In: *Funktsional'nyy analiz. Teoriya operatorov. 21* [Functional Analysis. Operator Theory. 21], UGPI, Ul'yanovsk, 1983, pp. 135–146 (in Russian).
24. V. A. Strauss, "Model'noe predstavlenie prosteyshogo  $\pi$ -samosopryazhennogo operatora" [A model representation of the simplest  $\pi$ -self-adjoint operator], In: *Funktsional'nyy analiz. Spektral'naya teoriya. 22* [Functional Analysis. Operator Theory. 22], UGPI, Ul'yanovsk, 1984, pp. 123–133 (in Russian).
25. V. A. Strauss, "Funktsional'noe predstavlenie algebry, porozhdennoy samosopryazhennym operatorom v prostranstve Pontryagina" [Functional representation of the algebra, generated by a self-adjoint operator in the Pontryagin space], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1986, **20**, No. 1, 91–92 (in Russian).
26. V. A. Strauss, "Funktsional'noe predstavlenie operatorov, dvazhdy perestanovochnykh s samosopryazhennym operatorom v prostranstve Pontryagina" [Functional representation of operators, double permutable with a self-adjoint operator in the Pontryagin space], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1988, **29**, No. 6, 176–184 (in Russian).
27. V. S. Shul'man, "Banakhovy simmetrichnye algebry operatorov v prostranstve tipa  $\Pi_1$ " [Banach symmetric algebras of operators in a space of type  $\Pi_1$ ], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1972, **89**, No. 2, 264–279 (in Russian).
28. T. Ya. Azizov and V. A. Strauss, "Spectral decompositions for special classes of self-adjoint and normal operators on Krein spaces," In: *Spectral Theory and Its Applications*, Theta, 2003, pp. 45–67.
29. T. Ya. Azizov and V. A. Strauss, "On a spectral decomposition of a commutative operator family in spaces with indefinite metric," *Methods Funct. Anal. Topol.*, 2005, **11**, No. 1, 10–20.
30. A. Y. Bendersky, S. N. Litvinov, and V. I. Chilin, "A description of commutative symmetric operator algebras in a Pontryagin space  $\pi_1$ ," *J. Operator Theory*, 1997, **37**, 201–222.
31. I. Colojoară and C. Foiaş, *Theory of Generalized Spectral Operators*, Gordon and Breach, New York, etc., 1968.
32. O. Holtz and V. Strauss, "Classification of normal operators in spaces with indefinite scalar product of rank-2," *Linear Algebra Appl.*, 1996, **241–243**, 455–517.
33. P. Jonas, H. Langer, and B. Textorius, "Models and unitary equivalence of cyclic selfadjoint operators in Pontrjagin spaces," In: *Workshop on Operator Theory and Complex Analysis*, Sapporo, Japan, June 1991, Birkhäuser, Basel, 1992, pp. 252–284.
34. E. Kissin and V. Shulman, *Representations of Krein spaces and derivations of  $C^*$ -algebras*, Addison-Wesley Longman, US, 1997.
35. H. Langer, "Spectraltheorie linearer Operatoren in  $J$ -räumen und einige Anwendungen auf die Shar  $L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C$ ," *Habilitationsschrift*, Dresden: Dresden Tech. Univ., 1965.
36. H. Langer, "Spectral functions of definitizable operators in Krein space," *Lecture Notes in Math.*, 1982, **948**, 1–46.
37. V. Strauss, "A functional description for the commutative  $WJ^*$ -algebras for the  $D_\kappa^+$ -class," In: *Operator Theory and Indefinite Inner Product Spaces*, Birkhäuser, Basel, 2006, pp. 299–335.
38. V. Strauss, "Models of function type for commutative symmetric operator families in Krein spaces," *Abstr. Appl. Anal.*, 2008, **2008**, 439781.

39. V. Strauss, “On a commutative  $WJ^*$ -algebra of  $D_1^+$ -class and its bicommutant,” *Oper. Matrices*, 2011, **5**, No. 4, 585–617.
40. V. Strauss, “On the weakly closed algebra generated by a unitary operator in a Pontryagin space,” *Oper. Matrices*, 2018, **12**, No. 3, 837–853.

V. A. Strauss

Ul'yanovsk State Pedagogical University, Ul'yanovsk, Russia

E-mail: [vstrauss@mail.ru](mailto:vstrauss@mail.ru)