РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 68, № 1, 2022

Наука — технология — образование — математика — медицина

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1
http://journals.rudn.ru/cmfd

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print)
4 выпуска в год
http://journals.rudn.ru/cmfd
Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.
Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.
Индексируется в международных базах данных научных публикаций *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.
Полный текст журнала размещен в базах данных компании *EBSCO Publishing* на платформе *EBSCOhost*.
Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты. Объем статьи, занимающий целый том, должен составлять 140–190 страниц в стиле нашего журнала.

Правила оформления статей, архив публикаций и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала: http://journals.rudn.ru/cmfd, http://www.mathnet.ru/cmfd.

Редактор: *Е. М. Варфоломеев*
Компьютерная верстка: *Е. М. Варфоломеев*

Адрес редакции:
115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Подписано в печать 28.03.2022. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.
Усл. печ. л. 22,79. Тираж 110 экз. Заказ 26.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов» (РУДН)
117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН
115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 68, No. 1, 2022
Science — Technology — Education — Mathematics — Medicine

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1
http://journals.rudn.ru/cmfd

Founded in 2003
Founder: PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS
Published by the Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print)
4 issues per year
http://journals.rudn.ru/cmfd
Reviewed in *MathSciNet* and *Zentralblatt Math*.
The full texts can be found in the *EBSCOhost* databases by *EBSCO Publishing*.
Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results. Occupying the whole volume, an article should make up 140–190 pages in the format of the journal.

Guidelines for authors, archive of issues, and other information can be found at the journal's website: http://journals.rudn.ru/cmfd, http://www.mathnet.ru/eng/cmfd.

Editor: *E. M. Varfolomeev*
Computer design: *E. M. Varfolomeev*
Address of the Editorial Office:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru
Print run 110 copies.
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia
Printed at RUDN Publishing House:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). С. 1–13
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-1-13 УДК 519.2

ОБОБЩЕНИЕ СТЕПЕННОЙ ОЦЕНОЧНОЙ ФУНКЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РИСКА ПРИ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНО ЦЕНЗУРИРОВАННЫХ ДАННЫХ

© 2022 г. **А. А. АБДУШУКУРОВ**

Аннотация. В статье изучается задача оценки условной функции выживания по правой случайной модели цензурирования с учетом коварианта. Предложена новая оценочная функция условной функции выживания, которая является обобщением степенной оценочной функции относительного риска независимого цензурирования, и изучены ее свойства большой выборки. Доказана асимптотическая нормальность с тем же предельным гауссовским процессом, как и для копула-графической оценочной функции.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В таких прикладных областях, как биомедицина, инженерия, страхование и гуманитарные науки, исследователи заинтересованы в положительных величинах, которые выражаются как время до наступления определенного события. Например, время выживания индивида в биомедицине, а в промышленных испытаниях время работоспособности механизма удобно рассматривать как неотрицательные случайные величины (СВ). Но на практике в таких случаях данные могут быть неполными. Так, например, в медицине может рассматриваться событие смерти по заданной причине, а событие смерти по другой причине являться цензурирующим случаем. В промышленных исследованиях может получиться так, что часть оборудования будет отключена (то есть цензурирована) из-за наличия некоторых признаков скорой поломки. В анализе выживаемости рассматриваются неотрицательные СВ, обозначающие время смерти биологических организмов или отказа механического оборудования. Трудность в анализе выживаемости состоит в том, что время выживания может быть подвергнуто случайному цензурированию другими неотрицательными СВ, и в таком случае наблюдаемые данные будут неполными.

Существуют разные типы цензурирующих механизмов. Оценка функции распределения (ФР) времени жизни и ее функционалов по неполным данным является основной целью статистики в анализе выживаемости. В этой статье рассматривается только модель правого цензурирования. Для данных наблюдений известна только нижняя граница времени выживания, и поэтому такие данные называются цензурированными справа.

Оценка функции выживаемости с цензурированными данными активно изучается на протяжении последних десятилетий. Дополнительная трудность, с которой часто сталкиваются на практике и которая будет изучена в настоящей работе, состоит в том, что совместно с выживаемостью в каждом наблюдении также измеряется другая переменная. Тогда на изучаемую СВ (время жизни или время до поломки) и цензурированную СВ влияет другая величина, которая называется *прогностическим фактором*, или *ковариантом*. В медицине дозировка лекарства, а в инженерии какие-либо условия окружающей среды (температура, давление и др.) влияют на наблюдаемые величины. Главная задача состоит в оценке распределения времени жизни по таким зависимым цензурированным данным. Цель настоящей работы заключается в рассмотрении этой задачи в рамках модели правого случайного цензурирования с учетом ковarианта, предполагая, что зависимость описывается некоторой известной копулой. В случае независимого цензурирования мы рассматриваем задачу оценки функции выживаемости и *средней функции остаточной жизни* (СФОЖ). Для функции выживаемости мы используем степенную оценочную функцию относительного риска, полученную автором, и ее обобщение на случай зависимого цензурирования.

2. Оценка средней функции остаточной жизни и ее свойства

2.1. Случай независимого цензурирования. Пусть $\{(X_i, Y_i)\,,\ i \geqslant 1\}$ — последовательность независимых и одинаково распределенных пар положительных СВ, где X_i и Y_i предполагаются независимыми с общими абсолютно непрерывными ФР $F(t) = P(X_i \leqslant t)$ и $G(t) = P(Y_i \leqslant t)$, $F(0) = G(0) = 0,\ t \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Здесь X_i обозначает время жизни, а Y_i — время цензурирования справа. Полученные данные состоят из выборки пар

$$C^{(n)} = \{(Z_i, \delta_i)\,,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

таких, что $Z_i = \min(X_i, Y_i)$, $\delta_i = I(X_i \leqslant Y_i)$, где $I(A)$ — индикатор события A. Пусть $S^X(t) = 1 - F(t)$ — функция выживаемости. Задача состоит в оценке главного функционала S^X, т. е. СФОЖ тестируемого объекта в предложении $\mu = EX_1 < \infty$:

$$\mu(t) = (S^X(t))^{-1} \int\limits_t^{T_F} S^X(u)du,\ t \in [0, T_F). \tag{2.1}$$

Здесь $\mu(0) = \mu$ и $T_F = \inf\{t \in \mathbb{R}^+ :\ S^X(t) = 0\} \leqslant \infty$. В случае цензурирования многими авторами используется оценочная функция предела произведения Каплана—Мейера [9] для оценки S^X в (2.1). Мы же для функции выживаемости используем степенную оценочную функцию относительного риска, предложенную в [2, 3], которая имеет некоторые особенности по сравнению с оценочной функцией предела произведения Каплана—Мейера (см. также [1]).

Заметим, что СВ Z_i имеют общую абсолютно непрерывную ФР $H(t) = 1 - S^X(t)S^Y(t),\ t \in \mathbb{R}^+$, где $S^Y(t) = 1 - G(t)$. Автором в работах [2, 3] предложена следующая оценочная функция для $S^X(t)$ степенного вида:

$$1 - F_n(t) = S_n^X(t) = \begin{cases} 0, & t < Z_{(1)}, \\ \left(\dfrac{n-j}{n}\right)^{R_n(t)}, & Z_{(j)} \leqslant t < Z_{(j+1)},\quad 1 \leqslant j \leqslant n-1, \\ 1, & t \geqslant Z_{(n)}, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $Z_{(1)} \leqslant \ldots \leqslant Z_{(n)}$ — порядковые статистики $Z_i,\ i = \overline{1, n}$,

$$R_n(t) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\delta_{(j)} I(Z_{(j)} \leqslant t)}{n-j+1}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{I(Z_{(j)} \leqslant t)}{n-j+1}},$$

— оценочная функция относительного риска, а $\delta_{(j)}$ соответствует $Z_{(j)}$. Каплан и Мейер [9] были первыми, кто предложил оценочную функцию предела произведения F_n^{PL}, определенную как

$$F_n^{PL}(t) = \begin{cases} 1 - \prod\limits_{\{j: Z_{(j)} \leqslant t\}} (1 - \frac{\delta_{(j)}}{n-j+1}), & t \leqslant Z_{(n)}, \\ 1, & t > Z_{(n)},\ \delta_{(n)} = 1, \\ \text{не определено}, & t > Z_{(n)},\ \delta_{(n)} = 0. \end{cases}$$

Как видим, оценочная функция F_n^{PL} неопределена для любых порядковых статистик. Следовательно, если $G_n^{PL}(t)$, оценочная функция предела произведения для цензурирующей ФР $G(t)$ получается из $F_n^{PL}(t)$ заменой индикатора $\delta_{(j)}$ на $1-\delta_{(j)}$. Тогда

$$(1-G_n^{PL}(t))(1-F_n^{PL}(t)) = 1-H_n(t), \text{ если } t \leqslant Z_{(n-1)},$$

где $H_n(t)$ — эмпирическая оценочная функция ФР $H(t)$. Но для соответствующей степенной оценочной функции относительного риска $G_n(t) = 1-(1-H_n(t))^{1-R_n(t)}$ для ФР $G(t)$ мы имеем

$$(1-G_n(t))(1-F_n(t)) = 1-H_n(t) \text{ для всех } t \in \mathbb{R}^+,$$

т. е. оценочная функция относительного риска определима для модели правого случайного цензурирования. Таким образом, в этой статье мы рассмотрим только эту оценочную функцию и ее обобщения. В [1–3] для оценочной функции (2.2) автором были получены некоторые асимптотические результаты (при $n \to \infty$). Пусть

$$\left\{ U_n(t) = \frac{n^{1/2}(F_n(t)-F(t))}{1-F(t)},\ t \in [\alpha,\beta],\ n \geqslant 1 \right\}$$

— нормированная эмпирическая последовательность процессов, где

$$\alpha > \tau_H = \sup\{t \in \mathbb{R}^+ : H(t) = 0\},$$

$$\beta < \tau_H = \inf\{t \in \mathbb{R}^+ : H(t) = 1\}.$$

Ясно, что $\tau_H = \max(\tau_F, \tau_G) \geqslant 0$ и $T_H = \min(T_F, T_G) \leqslant \infty$. Пусть $D[\alpha,\beta]$ — пространство Скорохода кадлаг-функций.

Теорема 2.1 (см. [3]). *Предположим, что выполнены следующие условия*:

(C1) $0 < P(X_1 \leqslant Y_1) < 1$;

(C2) $\min(H(\alpha), 1-H(\beta)) \geqslant \gamma$ *для некоторого* $\gamma \in (0,1)$;

(C3) $\gamma(t) = \int\limits_0^t \frac{dF(u)}{(1-F(u))^2(1-G(u))} < \infty$ *при* $t < T_H$.

Тогда при $n \to \infty$

$$U_n(t) \overset{D}{\Rightarrow} w(t) \ \textit{в} \ D[\alpha,\beta], \tag{2.3}$$

где $w(t)$ *— центрированный гауссовский случайный процесс с функцией ковариации*

$$Ew(t)w(s) = \gamma(\min(t,s)), \quad t,s \in [\alpha,\beta].$$

В [1] автором были получены более сильные результаты о состоятельности и о гауссовской аппроксимации в слабой и сильной форме вплоть до статистики некоторого высокого порядка в выборке, со скоростью аппроксимации, зависящей от порядка статистики. Чтобы выбрать порядковые статистики, мы возьмем последовательность $\{k_n\}$ целых чисел таких, что $1 \leqslant k_n < n$.

Теорема 2.2 (см. [1]).

(A) *Если* $\sqrt{n} = o(k_n)$, *тогда при* $n \to \infty$

$$\sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} \frac{|F_n(t)-F(t)|}{1-F(t)} = \left\{ \begin{array}{l} O_p(k_n^{-1/2} + k_n^{-2}n) = o_p(1), \\ O((k_{2n}^{-1}\ln n) + k_n^{-2}n) = o(1) \ \textit{п.н.} \end{array} \right. \tag{2.4}$$

(B) *Пусть условие* (C3) *выполнено и* $n^{3/4} = o(k_n)$. *Тогда существует последовательность* $\{W_n(\cdot),\ n \geqslant 1\}$ *винеровских процессов такая, что*

$$\sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} |U_n(t) - W_n(\gamma(t))| = \left\{ \begin{array}{l} O_p(k_n^{-1}n^{1/2}\ln n + k_n^{-2}n^{3/2}) = o_p(1), \\ O((k_{2n}^{-1}\ln n) + k_n^{-2}n^{3/2}) = o(1) \ \textit{п.н.} \end{array} \right. \tag{2.5}$$

Заметим, что для $W_n(\gamma(t)) \stackrel{D}{=} w(t)$ любого n.

Используя теоремы 2.1 и 2.2, мы исследуем соответствующие свойства для следующей оценочный функции СФОЖ:

$$\mu_n(t) = (S_n^X(t))^{-1} \int_t^{\beta_n} S_n^X(u)du,$$

полагая, что

(C4) $\beta_n \to \infty,\ n^{1/2} \int\limits_{\beta_n}^{\infty} S^X(t)dt \to 0$ при $n \to \infty$.

Введем функцию $\chi(t) = \int\limits_t^{\infty} S^X(u)du$ и ее оценочную функцию $\chi_n(t) = \int\limits_t^{\infty} S_n^X(u)du$. Тогда

$$\mu_n(t) = (S_n^X(t))^{-1} \left(-\int_t^{\beta_n} d\chi_n(u) \right). \tag{2.6}$$

Слабая сходимость для СФОЖ доказана в следующей теореме.

Теорема 2.3. *Пусть выполняются условия* (C1)–(C4) *и*

(C5) $\int\limits_0^{\infty} \chi^2(t)d\gamma(t) < \infty$.

Тогда при $n \to \infty$

$$V_n(t) = n^{1/2} \left(\mu_n(t) - \mu(t)\right) \stackrel{D}{\Rightarrow} Q(t) \text{ в } D[\alpha, \beta], \tag{2.7}$$

где $Q(t)$ *— центрированный гауссовский процесс с функцией ковариации при* $t, s \in [\alpha, \beta]$:

$$EQ(t)Q(s) = (S^X(t)S^X(s))^{-1} \int_{\min(t,s)}^{\infty} \chi^2(u)d\gamma(u).$$

Доказательство. Нетрудно получить представление

$$V_n(t) = U_n(t)\mu_n(t) + (S^X(t))^{-1}A_n(t) + n^{1/2}(S^X(t))^{-1} \int_{\beta_n}^{\infty} S^X(u)du, \tag{2.8}$$

где $A_n(t) = \int\limits_t^{\beta_n} U_n(u)d\chi(u)$. Тогда асимптотическое распределение последовательности процесса (2.8) эквивалентно асимптотическому распределению последовательности

$$V_n^*(t) = U_n(t)\mu(t) + (S^X(t))^{-1}A_n(t)$$

при условии (C4). В силу теоремы 2.1 и теоремы Крамера—Вольда последовательность двумерных процессов $(U_n(t), A_n(t))$ слабо сходится при $n \to \infty$ в пространстве Скорохода $D([\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta])$ к процессу $(w(t), A(t))$, где

$$A(t) = \int_t^{\infty} w(u)d\chi(u).$$

Следовательно, но теореме Слуцкого мы получаем, что процесс $V_n^*(t)$ при условии (C5) слабо сходится в $D([\alpha, \beta])$ к процессу

$$Q(t) = w(t)\mu(t) + (S^X(t))^{-1} \int_t^{\infty} w(u)d\chi(u).$$

□

Теперь мы докажем состоятельность оценочной функции СФОЖ $\mu_n(t)$.

Теорема 2.4. *При* $\sqrt{n} = o(k_n)$ *и* $(n\beta_n)^{2/3} = o(k_n)$

$$\sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} |\mu_n(t) - \mu(t)| = O_p(1), \quad n \to \infty. \tag{2.9}$$

Доказательство. В силу представления (2.8)

$$\mu_n(t) - \mu(t) = \frac{|F_n(t) - F(t)|}{1 - F(t)} \cdot \frac{\int_t^{\beta_n} (1 - F_n(u))du}{1 - F_n(t)} + \frac{1}{1 - F(t)} \cdot \int_t^{\beta_n} \frac{(F_n(u) - F(u))}{1 - F(u)} d\chi(u) +$$
$$+ \frac{1}{1 - F(t)} \cdot \int_{\beta_n}^{\infty} (1 - F(u))du = M_{1n}(t) + M_{2n}(t) + M_{3n}(t). \tag{2.10}$$

Легко видеть, что $1 - F(t) \geqslant 1 - H(t)$, $1 - F_n(t) \geqslant 1 - H_n(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}^+$. В силу [7, неравенство (4.3)] для достаточно больших n существуют положительные константы $c_1 > 1$ и $c_2 < 1$ такие, что:

$$H^{-1}(1 - c_1 \frac{k_n}{n}) \leqslant Z_{(n-k_n)} = H^{-1}(1 - \frac{k_n}{n}) \leqslant H^{-1}(1 - c_2 \frac{k_n}{n}) \text{ п.н.}$$

Следовательно,

$$\sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} (1 - F(t))^{-1} \leqslant \sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} (1 - H(t))^{-1} = O_p(\frac{k_n}{n})$$

и

$$\sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} (1 - F_n(t))^{-1} \leqslant \sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} (1 - H_n(t))^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} (\frac{1 - H(t)}{1 - H_n(t)}) \cdot \sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} (1 - H_n(t))^{-1} = O_p(1) \cdot \frac{n}{k_n} = O_p\left(\frac{n}{k_n}\right). \tag{2.11}$$

С другой стороны, с вероятностью 1

$$0 \leqslant \int_t^{\beta_n} (1 - F_n(u))du \leqslant 2\beta_n, \tag{2.12}$$

а в силу (2.4) при $n \to \infty$

$$\sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} M_{1n}(t) \leqslant \sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} \frac{|F_n(t) - F(t)|}{1 - F(t)} 2\beta_n \sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} (1 - F_n(t))^{-1} = O_p\left(\frac{\beta_n n}{k_n^{3/2}} + \frac{n^2 \beta_n}{k_n^3}\right) = o_p(1),$$

$$\sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} M_{2n}(t) \leqslant \sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} (1 - F(t))^{-1} \sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} \int_t^{\beta_n} \frac{(F_n(u) - F(u))}{1 - F(u)} d\chi(u) = O_p\left(\frac{\beta_n n}{k_n^{3/2}} + \frac{n^2 \beta_n}{k_n^3}\right) = o_p(1),$$

$$\sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} M_{3n}(t) \leqslant \sup_{t \leqslant Z_{(n-k_n)}} (1 - F(t))^{-1} \int_{\beta_n}^{\infty} S^X(t)dt = O_p\left(\frac{n}{k_n} \int_{\beta_n}^{\infty} S^X(t)dt\right) = o_p(1). \tag{2.13}$$

Таким образом, (2.9) следует из (2.10)–(2.13). Доказательство завершено. □

Оценка СФОЖ при зависимых цензурированных справа данных представлена в следующем разделе.

2.2. Случай зависимого цензурирования. Теперь мы не требуем независимости от последовательностей $\{X_i,\ i \geqslant 1\}$ и $\{Y_i,\ i \geqslant 1\}$. Пусть $S(t,s) = P(X_i > t, Y_i > s),\ (t,s) \in \mathbb{R}^{+2} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ — совместная функция выживаемости для пар (X_i, Y_i). Тогда по теореме Скляра (см. [10]) $S(t,s)$ представляется выражением через копулы выживаемости $C(u,v),\ u,v \in [0,1]$:

$$S(t,s) = C(S^X(t), S^Y(s)),\ (t,s) \in \mathbb{R}^{+2},$$

где $S^X(t)$ и $S^Y(t)$ — маргинальные функции выживаемости для X_i и Y_i. В случае, когда $C(u,v)$ — архимедова копула, т. е.

$$C(u,v) = \varphi^{-1}[\varphi(u) + \varphi(v)],\ (u,v) \in [0,1]^2,$$

где $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ — сильная производящая функция ($\varphi(0) = \infty$) и φ^{-1} — обратная к ней, в работе [4] было предложено следующее обобщение оценочной функции (2.2) для $S^X(t)$ с зависимыми цензурированными данными $C^{(n)}$:

$$\widetilde{S}_n^X(t) = \varphi^{-1}\left[\varphi(S_n^Z(t))\frac{(-\int\limits_0^t I(J_n(u) > 0)\varphi'(\frac{J_n(u)}{n})d\overline{N}_n(u))}{(-\int\limits_0^t I(J_n(u) > 0)\varphi'(\frac{J_n(u)}{n})d\overline{N}_n^Z(u))}\right], \tag{2.14}$$

где

$$\varphi(S_n^Z(t)) = -\int\limits_0^t I(J_n(s) > 0)[\varphi(\frac{J_n(s)}{n}) - \varphi(\frac{J_n(s)}{n} - \frac{1}{n})]d\overline{N}_n^Z(s),$$

$$S_n^Z(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I(Z_i > t), \quad J_n(t) = nS_n^Z(t-),$$

$$\overline{N}_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I(Z_i \leqslant t, \delta_i = 1), \quad \overline{N}_n^Z(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I(Z_i \leqslant t).$$

В работе [4] показано, что оценочная функция (2.14) есть обобщение (2.2), что следует из (2.14) при $C(u,v) = uv,\ u,v \in [0,1]$, т. е. $\varphi(u) = -\ln u,\ u \in [0,1]$. Была доказана состоятельность оценочной функции (2.14) и предложена следующая оценочная функция для СФОЖ $\mu(t)$:

$$\widetilde{\mu}_n(t) = \begin{cases} 0, & t \geqslant Z_{(n)}, \\ \left(\widetilde{S}_n^X(t)\right)^{-1} \int\limits_t^\infty \widetilde{S}_n^X(u)du, & t \in [0, Z_{(n)}). \end{cases}$$

Рассмотрим следующие условия:

(C6) *Функция $\varphi(\cdot)$ строго убывает на $(0,1]$ и первые две производные $\varphi(t)$ и $\Psi(t) = -t\varphi'(t)$ ограничены при $t \in [\varepsilon, 1]$ для прозвольного $\varepsilon > 0$. Более того, первая производная φ' отделена от нуля на $[0,1]$;*

(C7) $0 < \int\limits_0^{T*} [\Psi(S^Z(t))]^m d\Lambda^*(t) < \infty$ *при* $m = 1,2$,
где

$$T^* = \sup\{t \in R^+ : S^Z(t) > 0\},$$

$\Lambda^*(t)$ *обозначает сразу* $\Lambda_H(t) = -\ln S^Z(t)$ *и*

$$\Lambda(t) = \int\limits_0^t \frac{dP(Z_i \leqslant s, \delta_i = 1)}{S^Z(s)};$$

(C8) $\int\limits_0^{T^*} \left|\Psi'(S^Z(t))\right| d\Lambda^*(t) < \infty.$

Чтобы сформулировать результаты о состоятельности $\widetilde{\mu}_n(t)$ с весовой функцией $q(\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}^+$, мы также предполагаем выполненными следующие условия:

(C9) *Функция* $q(\cdot): [0,1] \to [0,\infty]$ *измерима для всех* $\eta > 0$,

$$\sup_{u\in[0,1-\eta]} \{q(u)\} < \infty;$$

(C10) *Функция* $q(u)(1-u)^{-1}$ — *неубывающая в окрестности* $u = 1$;

(C11) $\int\limits_0^{T_F} \left\{ (S^X(t))^{-1} \int\limits_t^{T_F} q(F(s))ds \right\} dF(t) < \infty.$

Заметим, что условия (C6)–(C8) выполняются, например, для генераторов копулы Клейтона—Франка.

Теорема 2.5 (см. [4]). *Пусть* $\mu = EX_1 < \infty$ *и выполнены условия* (C6)–(C11). *Тогда при* $n \to \infty$

$$\varepsilon_n(F) = \sup_{t<T^*} q(F(t))\,|\widetilde{\mu}_n(t) - \mu(t)| \xrightarrow{p} 0.$$

(Подробное доказательство можно найти в [4].)

В случае зависимого цензурирования Зенг и Клейн [12], а также Ривест и Уэллс [11] исследовали копула-графические оценочные функции:

$$\hat{S}_n^X(t) = \varphi^{-1}[\int\limits_0^t I(J_n(u) > 0)(\varphi(\frac{J_n(u)-1}{n}) - \varphi(\frac{J_n(u)}{n}))]d\overline{N}_n(u),$$

$$\breve{S}_n^X(t) = \varphi^{-1}[-\frac{1}{n}\int\limits_0^t I(J_n(u) > 0)\varphi'(\frac{J_n(u)}{n})d\overline{N}_n(u).$$

Было доказано, что эти оценочные функции равномерно состоятельны и асимптотически нормальны. В случае независимого цензурирования эти копулы эквивалентны, соответственно, оценочной функции экспоненциальной опасности Альтшулера—Бреслоу и оценочной функции предела произведения Каплана—Мейера:

$$\hat{S}_n^X(t) = \exp\left\{ -\int\limits_0^t \frac{I(J_n(u) > 0)}{J_n(u)} d\overline{N}_n(u) \right\},$$

$$\breve{S}_n^X(t) = \prod_{1\leqslant x} \left\{ 1 - \frac{d\overline{N}_n(u)}{J_n(u)} \right\}.$$

Легко доказать, что из (2.14) мы получаем степенную оценочную функцию относительного риска Абдушукурова (см. (2.2)).

3. Зависимое цензурирование с ковариантом

Рассмотрим случай, когда носитель коварианта C есть интервал $[0,1]$, и сформулируем наши результаты о фиксированных точках проектирования $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant 1$, в которых мы рассматриваем отклики (время выживаемости или отказа) $X_1,\ldots,X_n$ и время цензурированния $Y_1,\ldots,Y_n$ идентичных объектов, которые являются объектами исследования. Эти отклики являются независимыми и неотрицательными СВ с условной ФР $F_{x_i}(t) = P(X_i \leqslant t/C_i = x_i)$ в точках x_i. Они подвергаются случайному цензурированию справа, т. е. для X_i существует цензурирующая переменная Y_i с условной ФР $G_{x_i}(t) = P(Y_i \leqslant t/C_i = x_i)$, и на n-м шаге эксперимента наблюдаемые данные

$$S^{(n)} = \{(Z_i, \delta_i, C_i), 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

где $Z_i = min(X_i, Y_i), \delta_i = I(X_i \leqslant Y_i)$, а $I(A)$ обозначает индикатор события A. Заметим, что в выборке $S^{(n)}$ СВ X_i наблюдается только при $\delta_i = 1$. Обычно в анализе выживаемости независимость СВ X_i и Y_i зависит от коварианта C_i. Но в некоторых случаях на практике это предположение не выполняется. В этой статье мы рассмотрим зависимость, которая описывается копулой. Итак, пусть

$$S_x(t_1,t_2) = P(X_x > t_1, Y_x > t_2), \quad (t_1,t_2) \in \mathbb{R}^{+2}$$

— совместная функция выживаемости для отклика X_x и цензурирующей величины Y_x в x. Тогда маргинальные функции выживаемости ${S_x}^X(t) = 1 - F_x(t) = S_x(t,0)$ и ${S_x}^Y(t) = 1 - G_x(t) = S_x(0,t), t \geqslant 0$. Предположим, что маргинальные ФР F_x и G_x абсолютно непрерывны. Тогда, в силу теоремы Скляра (см. [10]), совместная функция выживаемости $S_x(t_1,t_2)$ может быть записана как

$$S_x(t_1,t_2) = C_x(S_x^X(t_1), S_x^Y(t_2)), \quad (t_1,t_2) \in \mathbb{R}^{+2}, \tag{3.1}$$

где $C_x(u,v)$ — известная копула, зависящая от x, S_x^X и S_x^Y в общем случае. Необходимо отметить, что случай отсутствия ковarianта был рассмотрен М. Зенгом и Дж. П. Клейном [12], которые предложили копула-графическую оценочную функцию. Л. П. Ривест и М. Т. Уэллс [11] исследовали копула-графическую оценочную функцию и выделили замкнутую форму оценочной функции, где совместная функция выживаемости (3.1) была смоделирована как архимедова копула. Как было показано, копула-графическая оценочная функция является равномерно состоятельной и асимптотически нормальной. Р. Брейкерс и Н. Веравербеке [6] обобщили копула-графическую оценочную функцию для случая регрессии фиксированного проектирования и показали, что оценочная функция имеет асимптотическое представление и гауссов предел. Мы рассмотрим другую оценочную функцию ФР F_x, которая также является обобщением оценочной функции (2.14) и эквивалентна степенной оценочной функции относительного риска (2.2) автора [1–3] в случае независимого цензурирования. Мы изучим свойства большой выборки предложенной оценочной функции и покажем равномерную нормальность с тем же предельным гауссовым процессом, что и для копула-графической оценочной функции.

Предположим, что при значении фиксированного проектирования $x \in (0,1)$ функция C_x в (3.1) — архимедова копула, т. е.

$$S_x(t_1,t_2) = \varphi_x^{[-1]}(\varphi_x(S_x^X(t_1)) + \varphi_x(S_x^Y(t_2))),\ t_1,t_2 \in \mathbb{R}^{+2}, \tag{3.2}$$

где при каждом x известная функция $\varphi_x : [0,1] \to [0,+\infty]$ — непрерывная, выпуклая и строго убывающая, причем $\varphi_x(1) = 0$. Функция $\varphi_x^{[-1]}$ — псевдо-обратная к φ_x (см. [10]) и задается формулой

$$\varphi_x^{[-1]}(s) = \begin{cases} \varphi_x^{-1}(s), & 0 \leqslant s \leqslant \varphi_x(0), \\ 0, & \varphi_x(0) \leqslant s \leqslant \infty. \end{cases}$$

Мы предполагаем, что производящая функция копулы φ_x строгая, т. е. $\varphi_x(0) = \infty$, следовательно, $\varphi_x^{[-1]} = \varphi_x^{-1}$. Из (3.1) следует, что

$$P(Z_x > t) = 1 - H_x(t) = \overline{H_x(t)} = {S_x}^Z(t) = S_x(t,t) = \varphi_x^{-1}(\varphi_x(S_x^X(t)) + \varphi_x(S_x^Y(t))), \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{3.3}$$

Пусть $H_x^{(1)}(t) = P(Z_x \leqslant t, \delta_x = 1)$ — функция подраспределения $\Lambda_x(t)$ — сырая функция рисков СВ X_x, подвергнутая цензурированию величиной Y_x, тогда (см. [8]) мы имеем

$$\Lambda_x(dt) = \frac{P(X_x \in dt, X_x \leqslant Y_x)}{P(X_x \geqslant t, Y_x \geqslant t)} = \frac{H_x^{(1)}(dt)}{S_x^Z(t-)}. \tag{3.4}$$

Из (3.4) можно получить следующее выражение функции выживаемости S_x^X:

$$S_x^X(t) = \varphi_x^{-1}[-\int_0^t S_x^Z(u-)\varphi_x'(S_x^Z(u))d\Lambda_x(u)] = \varphi_x^{-1}[-\int_0^t \varphi_x'(S_x^Z(u))dH_x^{(1)}(u)],\ t \in \mathbb{R}^+. \tag{3.5}$$

Чтобы построить оценочную функцию для S_x^X согласно выражению (3.5), мы введем некоторые сглаженные оценочные функции для $S_x^Z, H_x^{(1)}$ и выпишем условия регулярности для них. Аналогично [6], мы используем веса Гассера—Мюллера

$$w_{ni}(x,h_n) = \frac{1}{q_n(x,h_n)} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_n}\pi(\frac{x-z}{h_n})dz,\ i = 1,\ldots,n, \tag{3.6}$$

где

$$q_n(x,h_n) = \int_0^{x_n} \frac{1}{h_n}\pi(\frac{x-z}{h_n})dz,$$

$x_0 = 0$, π — известная функция плотности вероятности (ядро), а $\{h_n, n \geqslant 1\}$ — последовательность положительных констант, сходящихся к нулю при $n \to \infty$, которая называется последовательностью пропускной способности. Введем взвешенные оценочные функции для H_x, S_x^Z и $H_x^{(1)}$, соответственно, в виде

$$\begin{aligned} H_{xh}(t) &= \sum_{i=1}^{n} w_{ni}(x, h_n) I(Z_i \leqslant t), \\ S_{xh}^Z(t) &= 1 - H_{xh}(t), \\ H_{xh}^{(1)}(t) &= \sum_{i=1}^{n} w_{ni}(x, h_n) I(Z_i \leqslant t, \delta_i = 1). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Тогда, подставляя в (3.5) оценочные функции (3.7), в работе [5] мы предложили следующую оценочную функцию для S_x^X:

$$S_{xh}^X(t) = 1 - F_{xh}(t) = \varphi_x^{-1}[-\int_0^t \varphi_x'(S_x^Z(u)) dH_x^{(1)}(u)], \quad t \in R^+. \tag{3.8}$$

В случае отсутствия ковариантa оценочная функция (3.8) сводится к оценочной функции (2.14), которая впервые была получена нами в [4], которая, в свою очередь, в случае независимой копулы $\varphi(y) = -\ln y$, сводится к оценочной функции экспоненциальной опасности. Также хорошо известно, что в случае независимого цензурирования оценочная функция предельного произведения Каплана—Мейера и оценочная функция экспоненциальной опасности асимптотически эквивалентны. Таким образом, в [5] мы показали, что оценочная функция (3.8) и копула-графическая оценочная функция Брейкерса и Веравербеке имеют одинаковое асимптотическое поведение.

В данной работе мы также предлагаем следующее обобщение степенной оценочной функции относительного риска, предложенное в [2,3]:

$$\widehat{S}_{xh}^Z(t) = \varphi_x^{-1}[\varphi_x(\widehat{S}_{xh}^Z(t)) \cdot \mu_{xh}(t)] = 1 - \widehat{F}_{xh}(t), \tag{3.9}$$

где

$$\mu_{xh}(t) = \varphi_x(S_{xh}^X(t)) / \varphi_x(\widetilde{S}_{xh}^Z(t)),$$

$$\varphi_x(S_{xh}^X(t)) = -\int_0^t \varphi_x'(S_{xh}^Z(u)) dH_{xh}^{(1)}(u),$$

$$\varphi_x\left(\hat{S}{}_{xh}^{Z}(t)\right) = -\int_0^t n\left[\varphi_x\left(S_{xh}^Z(u)\right) - \varphi_x\left(S_{xh}^Z(u) - \frac{1}{n}\right)\right] dH_{xh}^{(1)}(u),$$

и

$$\varphi_x(\widetilde{S}_{xh}^Z(t)) = -\int_0^t \varphi_x'(S_{xh}^Z(u)) dH_{xh}(u).$$

Чтобы исследовать оценку (3.9), введем некоторые условия. Для точек проектирования $x_1, \ldots, x_n$ обозначим

$$\underline{\Delta_n} = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_{i-1}), \quad \overline{\Delta_n} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_{i-1}).$$

Пусть для ядра π выполнено

$$\|\pi\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \pi^2(u) du, \ m_\nu(\pi) = \int_{-\infty}^{\infty} u^\nu \pi(u) du, \ \nu = 1, 2, \ \|\pi\|_\infty = \sup_{u \in \mathbb{R}} \pi(u).$$

Кроме того, мы используем следующие предположения для проектирования и для ядра:

(A1) *При* $n \to \infty$, $x_n \to 1$, $\underline{\Delta_n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $\overline{\Delta_n} - \underline{\Delta_n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$;

(A2) π — *функция плотности вероятности с компактным носителем* $[-M, M]$ *для некоторого* $M > 0$, *причем* $m_1(\pi) = 0$ *и* $|\pi(u) - \pi(u')| \leqslant C(\pi)|u - u'|$, *где* $C(\pi)$ — *некоторая константа.*

Пусть $T_{H_x} = inf\{t \geqslant 0 : H_x(t) = 1\}$. Тогда $T_{H_x} = min(T_{F_x}, T_{G_x})$. Для наших результатов нам понадобятся следующие условия гладкости функций $H_x(t)$ и $H_x^{(1)}(t)$. Мы сформулируем их для общей функции (под)распределения $N_x(t), 0 \leqslant x \leqslant 1, t \in \mathbb{R}$ при фиксированном $T > 0$:

(A3) $\dfrac{\partial}{\partial x} N_x(t) = \dot{N}_x(t)$ *существует и непрерывна на* $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$;

(A4) $\dfrac{\partial}{\partial t} N_x(t) = N_x'(t)$ *существует и непрерывна на* $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$;

(A5) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} N_x(t) = \ddot{N}_x(t)$ *существует и непрерывна на* $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$;

(A6) $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} N_x(t) = N_x''(t)$ *существует и непрерывна на* $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$;

(A7) $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial t} N_x(t) = \dot{N'}_x(t)$ *существует и непрерывна на* $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$;

(A8) $\dfrac{\partial \varphi_x(u)}{\partial u} = \varphi_x'(u)$ *и* $\dfrac{\partial^2 \varphi_x(u)}{\partial u^2} = \varphi_x''(u)$ *липшицева в направлении x с ограниченной константой Липшица и производная* $\dfrac{\partial^3 \varphi_x(u)}{\partial u^3} = \varphi_x'''(u)$ *существует и непрерывна на* $(x,u) \in [0,1] \times (0,1]$.

Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия (A1) и (A2), $H_x(t)$ и $H_x^{(1)}(t)$ удовлетворяют (A5)–(A7) на $[0,T]$ при $T < T_{H_x}$, φ_x удовлетворяет (A8), а также $h_n \to 0$, $\dfrac{\ln n}{nh_n} \to 0$, $\dfrac{nh_n^5}{\ln n} = O(1)$. Тогда при $n \to \infty$*

$$\widehat{F}_{xh}(t) - F_x(t) = \sum_{i=1}^{n} w_{ni}(x,h_n)\Psi_{tx}(Z_i,\delta_i) + r_n(t),$$

где

$$\Psi_{tx}(Z_i,\delta_i) = \frac{-1}{\varphi_x'(S_x^X(t))}[\int_0^t \varphi_x''(S_x^Z(u))(I(Z_i \leqslant u) - H_x(u))dH_x^{(1)}(u) -$$

$$- \varphi_x'(S_x^Z(t))(I(Z_i \leqslant t, \delta_i = 1) - H_x^{(1)}(t)) - \int_0^t \varphi_x''(S_x^Z(u))(I(Z_i \leqslant u, \delta_i = 1) - H_x^{(1)}(u))dH_x(u)],$$

и

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |r_n(t)| \overset{\text{п.н.}}{=} O\left(\left(\frac{\ln n}{nh_n}\right)^{3/4}\right).$$

Следующая теорема посвящена слабой сходимости эмпирического процесса $(nh_n)^{1/2}\{\widehat{F}_{xh}(\cdot) - F_x(\cdot)\}$ в пространстве $l^\infty[0,T]$ равномерно ограниченных функций на $[0,T]$, снабженная равномерной топологией.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* (A1) *и* (A2)*, $H_x(t)$ и $H_x^{(1)}(t)$ удовлетворяют* (A5)–(A7) *на $[0,T]$ при $T < T_{H_x}$, и φ_x удовлетворяет* (A8).

(I) *Если $nh_n^5 \to 0$ и $\dfrac{(\ln n)^3}{nh_n} \to 0$, тогда при $n \to \infty$*

$$(nh_n)^{1/2}\{\widehat{F}_{xh}(\cdot) - F_x(\cdot)\} \Rightarrow \boldsymbol{W}_x(\cdot) \text{ на } l^\infty[0,T].$$

(II) *Если $h_n = Cn^{-1/5}$ для некоторого $C > 0$, тогда при $n \to \infty$*

$$(nh_n)^{1/2}\{\widehat{F}_{xh}(\cdot) - F_x(\cdot)\} \Rightarrow \boldsymbol{W}_x^*(\cdot) \text{ на } l^\infty[0,T],$$

где $\boldsymbol{W}_x(\cdot)$ и $\boldsymbol{W}_x^*(\cdot)$ — гауссовы процессы со средними

$$E\boldsymbol{W}_x(t) = 0, \quad E\boldsymbol{W}_x^*(t) = a_x(t),$$

и одинаковой ковариацией

$$Cov(\boldsymbol{W}_x(t), \boldsymbol{W}^*_x(s)) = Cov(\boldsymbol{W}^*_x(t), \boldsymbol{W}^*_x(s)) = \Gamma_x(t,s),$$

причем

$$a_x(t) = \frac{-C^{5/2}m_2(\pi)}{2\varphi'_x(S^X_x(t))}\int\limits_0^t [\varphi''_x(S^Z_x(u))\ddot{H}_x(u)dH^{(1)}_x(u) - \varphi'_x(S^Z_x(u))d\ddot{H}^{(1)}_x(u)],$$

и

$$\Gamma_x(t,s) = \frac{\|\pi\|_2^2}{\varphi'_x(S^X_x(t))\varphi'_x(S^X_x(s))}\Bigg\{\int\limits_0^{\min(t,s)} \left(\varphi'_x(S^Z_x(z))\right)^2 dH^{(1)}_x(z) +$$

$$+\int\limits_0^{\min(t,s)} [\varphi''_x(S^Z_x(w))S^Z_x(w) + \varphi'_x(S^Z_x(w))]\int\limits_0^w \varphi''_x(S^Z_x(y))dH^{(1)}_x(y)dH^{(1)}_x(w) +$$

$$+\int\limits_0^{\min(t,s)} \varphi''_x(S^Z_x(w)) \int\limits_w^{\max(t,s)} (\varphi''_x(S^Z_x(y))S^Z_x(y) + \varphi'_x(S^Z_x(y)))dH^{(1)}_x(y)dH^{(1)}_x(w) -$$

$$-\int\limits_0^t [\varphi''_x(S^Z_x(y))S^Z_x(y) + \varphi'_x(S^Z_x(y))]dH^{(1)}_x(y)\int\limits_0^s [\varphi''_x(S^Z_x(w))S^Z_x(w) + \varphi'_x(S^Z_x(w))]dH^{(1)}_x(w)\Bigg\}.$$

Ясно, что для существования правой части выражения (3.5) мы должны потребовать выполнения условий (A4) для функций $H_x(t)$ и $H^{(1)}_x(t)$ на $[0,1]\times[0,T]$ при $T < T_{H_x}$ и существования $\varphi'_x(u)$ на $[0,1]\times(0,1]$.

В работе [5] нами доказаны аналоги теорем 3.1 и 3.2 для оценочной функции (3.8). Таким образом, нам достаточно доказать асимптотическую эквивалентность оценочных функций (3.8) и (3.9). Это сделано в следующей лемме.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия* (A1) *и* (A2)*,* $H_x(t)$ *и* $H^{(1)}_x(t)$ *удовлетворяют* (A5)–(A7) *на* $[0,T]$ *при* $T < T_x$*,* φ_x *удовлетворяет* (A8)*. Тогда при* $n\to\infty$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\hat{S}^X_{xh}(t) - S^X_{xh}(t)\right| \overset{п.н.}{=} O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.10}$$

Доказательство. При всех $(x;t)\in[0,1]\times(0,T]$ имеем

$$\hat{S}^X_{xh}(t) - S^X_{xh}(t) = \varphi_x^{-1}\left[\varphi_x\left(\hat{S}^Z_{xh}(t)\right)\mu_{xh}(t)\right] - \varphi_x^{-1}\left[-\int\limits_0^t \varphi'_x\left(S^Z_{xh}(u)\right)dH^{(1)}_{xh}(u)\right] =$$

$$= -\frac{1}{\varphi'_x(\zeta_{xh}(t))}\left[\varphi_x\left(\hat{S}^Z_{xh}(t)\mu_{xh}(t) - \varphi_x\left(S^X_{xh}(t)\right)\right)\right] = \frac{\mu_{xh}(t)}{\varphi'_x(\varsigma_{xh}(t))}\left[\varphi_x\left(\hat{S}^Z_{xh}(t)\right) - \varphi_x\left(\tilde{S}^Z_{xh}(t)\right)\right],$$

где $\varsigma_{xh}(t)\in\left(\min\left\{\varphi_x\left(\hat{S}^Z_{xh}(t)\right)\mu_{xh}(t), S^X_{xh}(t)\right\}, \max\left\{\varphi_x\left(\hat{S}^Z_{xh}(t)\right)\mu_{xh}(t), S^X_{xh}(t)\right\}\right)$. Нетрудно видеть, что для всех $(x,t)\in[0,1]\times(0,T]$ и $n\geqslant 1$

$$0\leqslant \mu_{xh}(t)\leqslant 1,$$

следовательно,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\hat{S}^X_{xh}(t) - S^X_{xh}(t)\right| \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\varphi'_x(\varsigma_{xh}(t))\right|^{-1}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\varphi_x\left(\hat{S}^Z_{xh}(t)\right) - \varphi_x\left(\tilde{S}^Z_{xh}(t)\right)\right|. \tag{3.11}$$

Но

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\varphi_x\left(\hat{S}^Z_{xh}(t)\right) - \varphi_x\left(\tilde{S}^Z_{xh}(t)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \int\limits_0^T \left| n \left[\varphi_x \left(S^{\,Z}_{xh}(u) \right) - \varphi_x \left(S^{\,Z}_{xh}(u) - \frac{1}{n} \right) - \varphi'_x \left(S^{Z}_{xh}(u) \right) \right] \right| dH_{xh}(u) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2n} \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \left| \varphi'_x \left(\theta_{xh}(t) \right) \right| \overset{\text{п.н.}}{=} O\left(\frac{1}{n} \right), \quad (3.12)$$

где

$$\theta_{xh}(t) \in \left(\min\left\{ S^Z_{xh}(t), S^Z_{xh}(t) - \frac{1}{n} \right\}, \max\left\{ S^Z_{xh}(t), S^Z_{xh}(t) - \frac{1}{n} \right\} \right).$$

Теперь из (3.11) и (3.12) следует (3.10). Лемма доказана. □

Таким образом, для всех $(x,t) \in [0,1] \times (0,T]$

$$\hat{F}_{xh}(t) - F_x(t) = F_{xh}(t) - F_x(t) + q_n(t), \quad (3.13)$$

где $q_n(t) = \hat{F}_{xh}(t) - F_{xh}(t)$ и в силу леммы $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} |q_n(t)| \overset{\text{п.н.}}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$. Более того, из [5, теорема 1.1] будем иметь

$$F_{xh}(t) - F_x(t) = \sum_{i=1}^{n} w_{ni}(x, h_n)\, \Psi_{tx}(Z_i, \delta_i) + r_n(t), \quad (3.14)$$

где слагаемые правой части определены так же, как в теореме 3.1. Следовательно, теорема 3.1 следует из соотношений (3.13)-(3.14).

Необходимо отметить, что выполненное почти наверное соотношение теоремы 3.1 играет ключевую роль в исследовании оценочной функции (3.9) и, в частности, является базовым инструментом для получения слабой сходимости в теореме 3.2. Но главные слагаемые Ψ_{tx} в этом выражении такие же, как и в случае копула-графической оценочной функции из [6] (см. (3.14)). Тогда доказательство теоремы 3.2 может быть получено аналогично доказательству [5, теорема 1.2] и потому здесь опущено. Таким образом, копула-графическая оценочная функция из [6] асимптотически эквивалентна оценочным функциям (3.8) и (3.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдушукуров А. А.* Статистика неполных наблюдений. — Ташкент: Университет, 2009.
2. *Abdushukurov A. A.* Nonparametric estimation of distribution function based on relative risk function// Commun. Statist. Theory Methods — 1998. — *27*, № 8. — С. 1991–2012.
3. *Abdushukurov A. A.* On nonparametric estimation of reliability indices by censored samples// Theory Probab. Appl. — 1999. — *43*, № 1. — С. 3–11.
4. *Abdushukurov A. A., R. Muradov S.* Estimation of survival and mean residual life functions from dependent random censored data// New Trends Math. Sci. — 2014. — *2*, № 1. — С. 35–48.
5. *Abdushukurov A. A., Muradov R. S.* On estimation of conditional distribution function under dependent random right censored data// Журн. СФУ. Сер. матем. и физ. — 2014. — *7*, № 4. — С. 409–416.
6. *Breakers R., Veraverbeke N.* A copula-graphic estimator for the conditional survival function under dependent censoring// Canad. J. Statist. — 2005. — *33*, № 3. — С. 429–447.
7. *Csörgő S.* Universal Gaussian approximations under random censorship// Ann. Statist. — 1996. — *24*, № 6. — С. 2744–2778.
8. *Fleming T. R., Harrington D. P.* Counting Processes and Survival Analysis. — New York: Wiley, 1991.
9. *Kaplan E. L., Meier P.* Nonparametric estimation from incomplete observations// J. Am. Statist. Assoc. — 1958. — *53*. — С. 457–481.
10. *Nelsen R. B.* An Introduction to Copulas. — New York: Springer, 1999.
11. *Rivest L. P., Wells M. T.* A martingall approach to the copula-graphic estimator for the survival function under dependent censoring// J. Multivariate Anal. — 2001. — *79*. — С. 138–155.
12. *Zeng M., Klein J. P.* Estimates of marginal survival for dependent competing risks based on an assumed copula// Biometrika — 1995. — *82*. — С. 127–138.

А. А. Абдушукуров

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ташкентский филиал, Ташкент, Узбекистан

E-mail: a_abdushukurov@rambler.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-1-13 UDC 519.2

Extension of Relative-Risk Power Estimator under Dependent Random Censored Data

© 2022 **A. A. Abdushukurov**

Abstract. In this paper, the considered problem consists in estimation of conditional survival function by right random censoring model in the presence of a covariate. We propose a new estimator of conditional survival function which is extension of relative-risk power estimator of independent censoring and study its large sample properties. We present result of asymptotic normality with the same limiting Gaussian process as for copula-graphic estimator.

REFERENCES

1. A. A. Abdushukurov, *Statistika nepolnykh nablyudeniy* [Statistics of Incomplete Observation], Universitet, Tashkent, 2009 (in Russian).
2. A. A. Abdushukurov, “Nonparametric estimation of distribution function based on relative risk function,” *Commun. Statist. Theory Methods*, **27**, No. 8, 1991–2012, 1998.
3. A. A. Abdushukurov, “On nonparametric estimation of reliability indices by censored samples,” *Theory Probab. Appl.*, **43**, No. 1, 3–11, 1999.
4. A. A. Abdushukurov and R. S. Muradov, “Estimation of survival and mean residual life functions from dependent random censored data,” *New Trends Math. Sci.*, **2**, No. 1, 35–48, 2014.
5. A. A. Abdushukurov and R. S. Muradov, “On estimation of conditional distribution function under dependent random right censored data,” *Zhurn. SFU. Ser. matem. i fiz.* [J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.], **7**, No. 4, 409–416, 2014.
6. R. Breakers and N. Veraverbeke, “A copula-graphic estimator for the conditional survival function under dependent censoring,” *Canad. J. Statist.*, **33**, No. 3, 429–447, 2005.
7. S. Csörgő, “Universal Gaussian approximations under random censorship,” *Ann. Statist.*, **24**, No. 6, 2744–2778, 1996.
8. T. R. Fleming and D. P. Harrington, *Counting Processes and Survival Analysis*, Wiley, New York, 1991.
9. E. L. Kaplan and P. Meier, “Nonparametric estimation from incomplete observations,” *J. Am. Statist. Assoc.*, **53**, 457–481, 1958.
10. R. B. Nelsen, *An Introduction to Copulas*, Springer, New York, 1999.
11. L. P. Rivest and M. T. Wells, “A martingale approach to the copula-graphic estimator for the survival function under dependent censoring,” *J. Multivariate Anal.*, **79**, 138–155, 2001.
12. M. Zeng and J. P. Klein, “Estimates of marginal survival for dependent competing risks based on an assumed copula,” *Biometrika*, **82**, 127–138, 1995.

A. A. Abdushukurov
Tashkent Branch of Lomonosov Moscow State University, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: a_abdushukurov@rambler.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). С. 14–24
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-14-24 УДК 517.929

ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ОБ УСПОКОЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

© 2022 г. **А. Ш. АДХАМОВА**

Аннотация. Рассматривается задача об успокоении нестационарной системы управления, описываемой системой дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа с гладкими матричными коэффициентами и несколькими запаздываниями. Эта задача эквивалентна краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка, которая имеет единственное обобщенное решение. Доказано, что гладкость этого решения может нарушаться на рассматриваемом интервале и сохраняется лишь на некоторых подынтервалах. Получены достаточные условия на начальную функцию, обеспечивающие гладкость обобщенного решения на всем интервале.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Впервые задача об успокоении системы управления с последействием рассматривалась Н. Н. Красовским [5]. Поведение системы управления описывалось системой линейных дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием. В работах [9,15] задача Н. Н. Красовского об успокоении системы управления с последействием была обобщена на случай, когда уравнение, описывающее управляемую систему, содержит также старшие члены с запаздыванием, т. е. имеет нейтральный тип. Многомерная система управления с постоянными матричными коэффициентами исследовалась в [7,12], а многомерная нестационарная система управления нейтрального типа рассматривалась в [1,2]. Системы управления с последействием запаздывающего типа изучались в [6, 8]. Отметим также работы, посвященные исследованию систем нейтрального типа с малыми коэффициентами при членах с запаздыванием [13,14].

Настоящая работа посвящена исследованию гладкости обобщенных решений краевых задач для систем дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа, к которым сводится задача об успокоении многомерных нестационарных систем управления нейтрального типа, рассмотренная в [1,2]. Гладкость обобщенных решений этих краевых задач может нарушаться внутри интервала при сколь угодно гладкой начальной функции. Однако, как показано в данной статье, гладкость решений сохраняется на некоторых подынтервалах.

Публикация подготовлена при поддержке гранта РФФИ № 20-31-90119.

Статья построена следующим образом. В первом разделе содержится введение, а второй раздел посвящен постановке задачи об успокоении многомерной системы управления с последействием. В третьем разделе излагается связь между вариационной задачей, описывающей модель успокоения системы управления с последействием нейтрального типа, и краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка. В том же разделе сформулирована теорема об однозначной разрешимости рассматриваемой краевой задачи. Доказательство результатов, изложенных в третьем разделе, можно найти в работе [1]. В четвертом разделе содержатся свойства разностных операторов на конечном интервале. В пятом разделе изучается гладкость обобщенных решений на подынтервале. Отметим, что вопросы гладкости обобщенных решений второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений рассматривались в работах [10, 11].

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему управления, описываемую системой дифференциально-разностных уравнений

$$\sum_{m=0}^{M} A_m(t)y'(t-m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t-m\tau) = u(t), \quad 0 < t < T. \tag{2.1}$$

Здесь $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$ — неизвестная вектор-функция, описывающая состояние системы, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$ — вектор-функция управления, $A_m(t) = \{a_{ij}^m(t)\}_{i,j=1,\dots,n}, B_m(t) = \{b_{ij}^m(t)\}_{i,j=1,\dots,n}$ — матрицы порядка $n \times n$ с элементами $a_{ij}^m(t)$, $b_{ij}^m(t)$, которые являются вещественными непрерывно дифференцируемыми функциями на $\mathbb{R}$, $\tau = const > 0$ — запаздывание.

Предыстория системы задается начальным условием

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-M\tau, 0]. \tag{2.2}$$

Здесь $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))^T$ — некоторая вектор-функция.

Рассмотрим задачу о приведении системы (2.1) с начальным условием (2.2) в положение равновесия при $t \geqslant T$. Для этого мы найдем такое управление $u(t)$, $0 < t < T$, что:

$$y(t) = 0, \quad t \in [T - M\tau, T], \tag{2.3}$$

где $T > (M+1)\tau$.

Будем искать управление, доставляющее минимум функционалу энергии

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \to min,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, в силу (2.1) мы получаем вариационную задачу о минимуме функционала

$$J(y) := \int_0^T \left| \sum_{m=0}^{M} A_m(t)y'(t-m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t-m\tau) \right|^2 dt \to min. \tag{2.4}$$

3. Вариационная и краевая задачи

В этом разделе мы приведем без доказательства ряд результатов из [1, 2], необходимых нам в дальнейшем для изучения гладкости обобщенных решений.

Для того, чтобы установить взаимосвязь между вариационной задачей (2.4), (2.2), (2.3) и соответствующей краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений, введем некоторые вспомогательные обозначения для различных вещественных функциональных пространств.

Обозначим через $C(\mathbb{R})$ пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций с нормой:

$$||x(t)||_{C(\mathbb{R})} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|.$$

Пусть $C^k(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N},$ — пространство непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, ограниченных на $\mathbb{R}$ вместе со всеми производными вплоть до k-го порядка, с нормой

$$||x(t)||_{C^k(\mathbb{R})} = \max_{0\leqslant i\leqslant k} \sup_{t\in\mathbb{R}} |x^{(i)}(t)|.$$

Обозначим через $W_2^k(a,b)$ пространство абсолютно непрерывных на $[a,b]$ функций, имеющих производную k-го порядка из $L_2(a,b)$ со скалярным произведением

$$(v,w)_{W_2^k(a,b)} = \sum_{i=0}^{k} \int_a^b v^{(i)}(t)w^{(i)}(t)dt.$$

Пусть $\mathring{W}_2^k(a,b) = \{w \in W_2^k(a,b) : w^{(i)}(a) = w^{(i)}(b) = 0, i = 0,\dots,k-1\}$.

Введем пространства вектор-функций

$$L_2^n(a,b) = \prod_{i=1}^{n} L_2(a,b), \quad W_2^{k,n}(a,b) = \prod_{i=1}^{n} W_2^k(a,b), \quad \mathring{W}_2^{k,n}(a,b) = \prod_{i=1}^{n} \mathring{W}_2^k(a,b),$$

со скалярными произведениями

$$(v,w)_{L_2^n(a,b)} = \sum_{i=1}^{n} (v_i,w_i)_{L_2(a,b)},$$

$$(v,w)_{W_2^{k,n}(a,b)} = \sum_{i=1}^{n} (v_i,w_i)_{W_2^k(a,b)},$$

где $v = (v_1,\dots,v_n)^T,\ w = (w_1,\dots,w_n)^T$.

Покажем, что вариационная задача (2.2)–(2.4) эквивалента краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка.

Пусть $y \in W_2^{1,n}(-M\tau,T)$ — решение вариационной задачи (2.2)–(2.4), где $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau,0)$. Введем пространства

$$\widetilde{L} = \{v \in L_2^n(-M\tau,T) : v(t) = 0,\ t \in (-M\tau,0) \cup (T-M\tau,T)\},$$

$$\widetilde{W} = \{v \in W_2^{1,n}(-M\tau,T) : v(t) = 0,\ t \in (-M\tau,0) \cup (T-M\tau,T)\}.$$

Мы будем часто отождествлять пространство $\widetilde{L}$ с $L_2^n(0,T-M\tau)$, а пространство $\widetilde{W}$ с $\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)$, не оговаривая этого специально.

Пусть $v \in \widetilde{W}$ — произвольная фиксированная функция. Тогда функция $y + sv \in W_2^{1,n}(-M\tau,T)$ и удовлетворяет краевым условиям (2.2), (2.3) для всех $s \in \mathbb{R}$.

Обозначим $J(y+sv) = F(s)$. Поскольку $J(y+sv) \geqslant J(y),\ s \in \mathbb{R}$, мы имеем

$$\left.\frac{dF}{ds}\right|_{s=0} = 0, \tag{3.1}$$

$$B(y,v) := \int_0^T \left(\sum_{m=0}^{M} A_m(t)y'(t-m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t-m\tau) \right)^T \times$$
$$\times \left(\sum_{l=0}^{M} A_l(t)v'(t-l\tau) + \sum_{l=0}^{M} B_l(t)v(t-l\tau) \right) dt. \tag{3.2}$$

Из равенства (3.1) следует, что

$$B(y,v) = 0, \quad v \in \widetilde{W}. \tag{3.3}$$

Обозначим

$$B_{m,l}(y,v) = \int_0^T \big(A_m(t)y'(t-m\tau) + B_m(t)y(t-m\tau)\big)^T \big(A_l(t)v'(t-l\tau) + B_l(t)v(t-l\tau)\big)\,dt. \tag{3.4}$$

Проведем преобразование слагаемых, полученных при раскрытии скобок в правой части (3.4). В слагаемых, содержащих $v(t-l\tau)$ или $v'(t-l\tau)$, сделаем замену переменной $\xi = t - l\tau$. Получим

$$B_{m,l}(y,v) = \int\limits_{-l\tau}^{T-l\tau} (A_m(\xi+l\tau)y'(\xi+(l-m)\tau) + B_m(\xi+l\tau) \times$$
$$\times\, y(\xi+(l-m)\tau))^T (A_l(\xi+l\tau)v'(\xi) + B_l(\xi+l\tau)v(\xi))d\xi.$$

Возвращаясь к старой переменной t, полагая $t=\xi$, и учитывая, что $v(t)=0$ при $t \in (-M\tau, 0) \cup (T-M\tau, T)$, имеем

$$B_{m,l}(y,v) = \int\limits_{0}^{T-M\tau} (A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau) + B_m(t+l\tau) \times$$
$$\times\, y(t+(l-m)\tau))^T (A_l(t+l\tau)v'(t) + B_l(t+l\tau)v(t))dt. \quad (3.5)$$

Из (3.2), (3.4) и (3.5) следует, что

$$B(y,v) = \int\limits_{0}^{T-M\tau} \sum_{l,m=0}^{M} \{(A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))^T (A_l(t+l\tau)v'(t)) +$$
$$+ [(A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))^T B_l(t+l\tau) - ((B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))^T A_l(t+l\tau))' +$$
$$+ (B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))^T B_l(t+l\tau)]v(t)\}dt. \quad (3.6)$$

Из (3.6) и определения обобщенной производной следует, что

$$\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau) \in W_2^{1,n}(0, T-M\tau). \quad (3.7)$$

Подставляя (3.6) в (3.3), в силу (3.7) мы можем произвести интегрирование по частям. Поскольку $v \in \mathring{W}_2^{1,n}(0, T-M\tau)$ — произвольная функция, мы получим

$$\mathcal{A}_R y := -(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))' +$$
$$+ \sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau) - (\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))' +$$
$$+ \sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau) = 0 \ (t \in (0, T-M\tau). \quad (3.8)$$

Таким образом, вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ удовлетворяет системе дифференциально-разностных уравнений (3.8) почти всюду на интервале $(0, T-M\tau)$.

Определение 3.1. Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ называется *обобщенным решением* задачи (3.8), (2.2), (2.3), если выполняется условие (3.7), $y(t)$ почти всюду на $(0, T-M\tau)$ удовлетворяет системе уравнений (3.8), а также краевым условиям (2.2), (2.3).

Очевидно, следующее определение обобщенного решения эквивалентно определению 3.1.

Определение 3.2. Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ называется *обобщенным решением* задачи (3.8), (2.2), (2.3), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$B(y,v) = \int\limits_{0}^{T-M\tau} \sum_{l,m=0}^{M} (A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))^T v'(t)dt +$$

$$+\int\limits_{0}^{T-M\tau}\sum_{l,m=0}^{M}\{(B_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))^T-$$
$$-((A_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))')^T+$$
$$+(B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))^T\}v(t)dt=0 \quad (3.9)$$

для всех $v\in \mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)$ и краевым условиям (2.2), (2.3).

Таким образом, мы доказали, что если вектор-функция $y\in W_2^{1,n}(-M\tau,T)$ является решением вариационной задачи (2.2)–(2.4), то она будет обобщенным решением краевой задачи (3.8), (2.2), (2.3).

Справедливо и обратное утверждение: если вектор-функция $y\in W_2^{1,n}(-M\tau,T)$ является обобщенным решением краевой задачи (3.8), (2.2), (2.3), то она будет решением вариационной задачи (2.2)–(2.4), см. [1]. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть $\varphi\in W_2^{1,n}(-M\tau,0)$. Функционал* (2.4) *с краевыми условиями* (2.2), (2.3) *достигает минимума на некоторой функции тогда и только тогда, когда она является обобщенным решением краевой задачи* (3.8), (2.2), (2.3).

Имеет место следующий результат, см. [1].

Лемма 3.1. *Пусть $det A_0(t)\neq 0,\ t\in\mathbb{R}$. Тогда для всех $w\in\widetilde{W}$*

$$J_0(w)\geqslant c_1||w||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}, \quad (3.10)$$

где $c_1>0$ — постоянная, не зависящая от w,

$$J_0(v):=\int\limits_0^T(\sum_{k=0}^{M}A_k(t)v'(t-k\tau))'dt. \quad (3.11)$$

Используя лемму 3.1, можно доказать следующее утверждение, см. [1].

Теорема 3.2. *Пусть $det A_0(t)\neq 0,\ t\in\mathbb{R}$. Тогда для любой вектор-функции $\varphi\in W_2^{1,n}(-M\tau,0)$ существует единственное обобщенное решение $y\in W_2^{1,n}(-M\tau,T)$ краевой задачи* (3.8), (2.2), (2.3)*, при этом*

$$||y||_{W_2^{1,n}(-M\tau,T)}\leqslant c||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}, \quad (3.12)$$

где $c>0$ — постоянная, не зависящая от φ.

4. Свойства разностных операторов

Положим $d:=T-M\tau$. Пусть $d=(N+\theta)\tau$, где $N\in\mathbb{N},\ 0<\theta\leqslant 1$.

Введем некоторые дополнительные обозначения. Если $0<\theta<1$, обозначим $Q_{1s}=((s-1)\tau,(s-1+\theta)\tau),\ s=1,\dots,N+1$ и $Q_{2s}=((s-1+\theta)\tau,s\tau),\ s=1,\dots,N$. Если $\theta=1$, обозначим $Q_{1s}=((s-1)\tau,s\tau),\ s=1,\dots,N+1$. Таким образом, мы имеем два семейства непересекающихся интервалов, если $0<\theta<1$, и одно семейство, если $\theta=1$; причем каждые два интервала одного семейства получаются друг из друга сдвигом на некоторое число.

Не ограничивая общности, будем предполагать $M=N$.

Введем оператор $R:L_2^n(0,d)\to L_2^n(0,d)$ по формуле

$$(Rx)(t)=\sum_{l,m=0}^{M}A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)x(t+(l-m)\tau). \quad (4.1)$$

Лемма 4.1. *Оператор $R:L_2^n(0,d)\to L_2^n(0,d)$ самосопряженный, т. е. для любых $x,y\in L_2(\mathbb{R})$ выполняется равенство*

$$(Rx,y)_{L_2^n(\mathbb{R})}=(x,Ry)_{L_2^n(\mathbb{R})}.$$

Доказательство. Действительно, при любых $x, y \in L_2^n(\mathbb{R})$, делая замену $t' = t + (l-m)\tau$, получим

$$(Rx, y)_{L_2^n(\mathbb{R})} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)x(t+(l-m)\tau))y(t)dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t')(\sum_{l,m=0}^{M} A_m^T(t'+m\tau)A_l(t'+m\tau)y(t'+(m-l)\tau))dt'.$$

Обозначая t' через t и меняя местами индексы l, m, имеем

$$(Rx, y)_{L_2^n(\mathbb{R})} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))dt = (x, Ry)_{L_2^n(\mathbb{R})}.$$

□

Запишем оператор R в виде

$$(Ry)(t) := \sum_{s=-M}^{M} C_s(t)y(t+s\tau), \tag{4.2}$$

где

$$C_s(t) := \sum_{l,m:l-m=s} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau) \tag{4.3}$$

— матрица порядка $n \times n$ с элементами $c_s^{ij}(t)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. По построению $c_s^{ij}(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции на $\mathbb{R}$.

Обозначим $Q := (0, d)$. Введем ограниченные операторы $I_Q : L_2^n(Q) \to L_2^n(\mathbb{R})$ и $P_Q : L_2^n(\mathbb{R}) \to L_2^n(Q)$ следующим образом: $(I_Q x)(t) = x(t)$, $(t \in (0,d))$, $(I_Q x)(t) = 0$ $(t \notin (0,d))$ и $(P_Q y)(t) = y(t), (t \in (0,d))$. Обозначим $R_Q = P_Q R I_Q$. Из леммы 4.1 вытекает следующий результат.

Лемма 4.2. *Оператор $R_Q : L_2^n(Q) \to L_2^n(Q)$ ограниченный и самосопряженный.*

Пусть $P_\alpha : L_2^n(Q) \to L_2^n(\bigcup\limits_s Q_{\alpha s})$ — оператор ортогонального проектирования $L_2^n(Q)$ на $L_2^n(\bigcup\limits_s Q_{\alpha s})$, где $L_2^n(\bigcup\limits_s Q_{\alpha s}) = \{y \in L_2^n(Q) : y(t) = 0, t \in (0,d) \setminus \bigcup\limits_s Q_{\alpha s}\}$, $\alpha = 1, 2$, если $\theta < 1$; $\alpha = 1$ и P_α — единичный оператор, если $\theta = 1$.

Очевидно следующее утверждение.

Лемма 4.3. $L_2^n(\bigcup\limits_s Q_{\alpha s})$ — *инвариантное подпространство оператора R_Q.*

Введем оператор $U_\alpha : L_2(\bigcup\limits_s Q_{\alpha s}) \to L_2^{N(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$ по формуле

$$(U_\alpha y)_k(t) = y(t+k-1), t \in Q_{\alpha 1}, \tag{4.4}$$

где $k = 1, \ldots, N(\alpha); N(\alpha) = M+1$, если $\alpha = 1; N(\alpha) = M$, если $\alpha = 2$.

Введем теперь изометрический изоморфизм гильбертовых пространств $\widetilde{U}_\alpha : L_2^n(\bigcup\limits_s Q_{\alpha s}) \to L_2^{nM}(Q_{\alpha 1})$ по формуле

$$(\widetilde{U}_\alpha y)(t) = ((U_\alpha y_1)^T, \ldots, (U_\alpha y_n)^T)^T(t), \tag{4.5}$$

где

$$y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in L_2^n(0,d), \quad (U_\alpha y_j)(t) = ((U_\alpha y_j)_1(t), \ldots, (U_\alpha y_j)_M(t))^T.$$

Для каждого $\alpha = 1, 2$ рассмотрим блочную матрицу

$$R_\alpha(t) = \{R_{\alpha ij}(t)\}_{i,j=1}^n. \tag{4.6}$$

Здесь R_{1ij} — квадратные матрицы порядка $(M+1) \times (M+1)$ с элементами

$$r_{kl}^{1ij} = c_{l-k}^{ij}(t+k-1), \; k, l = 1, \ldots, M+1, \tag{4.7}$$

R_{2ij} — квадратные матрицы порядка $M \times M$ с элементами

$$r_{kl}^{2ij} = c_{l-k}^{ij}(t+k-1), \ k,l = 1,\dots,M. \tag{4.8}$$

Лемма 4.4. *Оператор* $R_{Q\alpha} = \widetilde{U}_\alpha R_Q \widetilde{U}_\alpha^{-1} : L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1}) \to L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$ *является оператором умножения на симметричную матрицу* $R_\alpha(t)$.

Доказательство. Пусть $V \in L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$. Обозначим $v = \widetilde{U}_\alpha^{-1} V \in L_2^n(\bigcup\limits_l Q_{sl})$. В силу формулы (4.4) и определения оператора R_Q мы имеем

$$(R_{Q\alpha}V)_{(i-1)N(\alpha)+k}(t) = (\widetilde{U}_\alpha R_Q \widetilde{U}_\alpha^{-1} V)_{(i-1)N(\alpha)+k}(t) = (\widetilde{U}_\alpha R_Q v)_{(i-1)N(\alpha)+k}(t) =$$
$$= \sum_{j=1}^n \sum_s C_s^{ij}(t+k-1) v_j(t+k-1+s) \quad (t \in Q_{\alpha 1}). \tag{4.9}$$

Здесь мы суммируем по s таким, что $1 \leqslant k+s \leqslant N(\alpha)$.

Пусть $l := k+s$. Тогда из (4.9) и (4.8) следует, что

$$(R_{Q\alpha}V)_{(i-1)N(\alpha)+k}(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{N(\alpha)} C_{l-k}^{ij}(t+k-1) v_j(t+l-1) = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{N(\alpha)} r_{kl}^{\alpha ij}(t) V_{(j-1)N(\alpha)+l}(t).$$

Таким образом, мы доказали, что оператор $R_{Q\alpha}$ является умножением на матрицу R_α в пространстве $L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$. Отсюда из леммы 4.2 следует симметричность матрицы R_α. □

5. Гладкость обобщенных решений на подынтервалах

Как известно [3, 4, 15], гладкость обобщенных решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа может нарушаться внутри интервала, на котором определено решение. С другой стороны, гладкость обобщенных решений сохраняется на некоторых подынтервалах.

Теорема 5.1. *Пусть* $\det A_0(t) \neq 0, \ t \in \mathbb{R}$, *и пусть* $\varphi \in W_2^{2,n}(-M\tau, 0)$. *Тогда обобщенное решение задачи* (3.8), (2.2), (2.3) $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ *обладает следующей гладкостью на подынтервалах интервала* $(0,d)$:

- $y \in W_2^{2,n}((j-1)\tau, j\tau)$ $(j = 1,\dots,M+1)$, *если* $\theta = 1$;
- $y \in W_2^{2,n}((j-1)\tau, (j-1+\theta)\tau)$ $(j=1,\dots,M+1)$ *и* $y \in W_2^{2,n}((j-1+\theta)\tau, j\tau)$ $(j=1,\dots,M)$, *если* $\theta < 1$.

Доказательство.

1. По теореме о продолжении функций в пространстве Соболева для любой вектор-функции $\varphi \in W_2^{2,n}(-M\tau, 0)$ существует $\Phi \in W_2^{2,n}(-M\tau, T)$ такая, что $\Phi(t) = \varphi(t)$ при $t \in (-M\tau, 0)$, $\Phi(t) = 0$ при $t \in (T - M\tau, T)$ и

$$||\Phi||_{W_2^{2,n}(-M\tau,T)} \leqslant k_1 ||\varphi||_{W_2^{2,n}(-M\tau,0)}, \tag{5.1}$$

где константа $k_1 > 0$ не зависит от φ.

Введем вектор-функцию $x(t) = y(t) - \Phi(t) \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$. Поскольку $\Phi \in W_2^{2,n}(-M\tau, T)$, в силу (3.7) $x(t)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{l,m=0}^M A_l^T(t+l\tau) A_m(t+l\tau) x'(t+(l-m)\tau) \in W_2^{1,n}(0, T-M\tau). \tag{5.2}$$

Таким образом, вектор-функция $x(t)$ удовлетворяет почти всюду на интервале $(0, T-M\tau)$ системе дифференциально-разностных уравнений

$$\mathcal{A}_R^0 x := -\sum_{l,m=0} -(R_Q x')'(t) = F(t), \quad t \in (0, T-M\tau) \tag{5.3}$$

и краевым условиям

$$x(0) = x(T - M\tau) = 0. \tag{5.4}$$

Здесь

$$F(t) := -\mathcal{A}_R\Phi - \sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau) +$$
$$+ (\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))' -$$
$$- \sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau) \in L_2^n(0,T-M\tau).$$

2. Повторяя в обратном порядке выкладки раздела 3, сделанные при выводе системы дифференциально-разностных уравнений (3.8) из интегрального тождества (3.3), в силу леммы 3.1 мы получим неравенство

$$(\mathcal{A}_R^0 w, w)_{L_2^n(0,T-M\tau)} = J_0(w) \geqslant c_1||w||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \tag{5.5}$$

для любых $w \in C_0^{\infty,n}(0,T-M\tau) := \prod\limits_{j=1}^{n} C_0^{\infty}(0,T-M\tau)$.

Будем предполагать, что $supp\ w \subset \bigcup\limits_s Q_{\alpha s}$. Обозначим $W_\alpha = \bigcup\limits_s w$. Тогда из равенства (4.5) и лемм 4.2, 4.4 следует, что

$$-((R_\alpha W_\alpha')', W_\alpha)_{L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})} \geqslant c_1||W_\alpha||^2_{W_2^{1,nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})}. \tag{5.6}$$

Из (5.3) и формулы Лейбница следует, что вектор-функция $U_\alpha x \in W_2^{1,nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$ удовлетворяет почти всюду в $Q_{\alpha 1}$ системы дифференциальных уравнений

$$-R_\alpha(t)(U_\alpha x)''(t) = F_0(t) \quad (t \in Q_{\alpha 1}), \tag{5.7}$$

где $F_0(t) = F(t) - R_\alpha'(t)(U_\alpha x)'(t) \in L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$.

Таким образом, чтобы доказать утверждение теоремы, достаточно убедиться, что $detR_0(t) \neq 0$ для всех $t \in \overline{Q_{\alpha 1}}$, поскольку тогда из (5.7) мы получим $U_\alpha x \in W_2^{2,nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$, т. е. $y = x - \Phi \in W_2^{2,n}(Q_{\alpha 1})$, $s = 1,\dots,N(\alpha)$.

Для доказательства того, что $detR_0(t) \neq 0$ для всех $t \in \overline{Q_{\alpha 1}}$, мы используем неравенство (5.5).

3. Пусть $t^0 \in \overline{Q_{\alpha 1}}$ — произвольная точка. Выберем t^1 и r так, что $[t^1-r, t^1+r] \subset \overline{Q_{\alpha 1}} \cap (t^0-\delta, t^0+\delta)$, где $\delta > 0$ будет определено ниже. Предположим, что $W_\alpha \in C_0^{\infty,nN(\alpha)}(t^1-r, t^1+r)$. Из (5.6) следует, что

$$b_1 + b_2 \geqslant k_2||W_\alpha||^2_{W_2^{1,nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})}, \tag{5.8}$$

где

$$b_1 = (R_\alpha(t^0)W_\alpha', W_\alpha')_{L_2^{nN(\alpha)}(t^1-r,t^1+r)},$$
$$b_2 = ((R_\alpha(t) - R_\alpha(t^0))W_\alpha', W_\alpha')_{L_2^{nN(\alpha)}(t^1-r,t^1+r)}.$$

Поскольку коэффициенты матрицы $R_\alpha(t)$ равномерно непрерывны на $[0, T-M\tau]$, мы имеем

$$|b_2| \leqslant \varepsilon(\delta)||W_\alpha||_{W_2^{1,nN(\alpha)}(t^1-r,t^1+r)},$$

где $\varepsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Выберем $\delta > 0$ так, что $\varepsilon(\delta) < k_2/2$. Тогда из (5.8) мы получим

$$(R_\alpha(t^0)W_\alpha', W_\alpha')_{L_2^{nN(\alpha)}(t^1-r,t^1+r)} \geqslant \frac{k_2}{2}||W_\alpha||^2_{W_2^{1,nN(\alpha)}(t^1-r,t^1+r)}.$$

Получим теперь соответствующую оценку для функции $V_\alpha \in C_0^{\infty,nN(\alpha)}(-R,R)$, где $\varkappa = R/r > 1$. Сделаем замену переменной $\eta = \varkappa(t - t^1)$. Обозначим $V_\alpha(\eta) = W_\alpha(t(\eta))$. Тогда из последнего неравенства мы получим

$$(R_\alpha(t^0)V_\alpha'(\eta), V_\alpha'(\eta))_{L_2^{nN(\alpha)}(-R,R)} = \varkappa^{-1}(R_\alpha(t^0)W_\alpha'(t), W_\alpha'(t))_{L_2^{nN(\alpha)}(t^1-r,t^1+r)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{k_2}{2}\varkappa^{-1}||W'_\alpha(t)||^2_{L_2^{nN(\alpha)}(t^1-r,t^1+r)} = \frac{k_2}{2}||V'_\alpha(\eta)||^2_{L_2^{nN(\alpha)}(-R,R)}. \quad (5.9)$$

Предположим, что $V_\alpha = v_\alpha Y$, где $v_\alpha \in C_0^\infty(-R,R)$, $Y \in \mathbb{C}^{nN(\alpha)}$. Пусть функция v_α продолжена нулем в $\mathbb{R}\backslash(-R,R)$. Тогда, используя преобразование Фурье, из (5.9) в силу теоремы Планшереля мы получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}}(R_\alpha(t^0)\xi^2 Y, Y)|\hat{v}_\alpha(\xi)|^2 d\xi \geqslant \frac{k_2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^2|Y|^2|\hat{v}_\alpha(\xi)|^2 d\xi. \quad (5.10)$$

Здесь

$$\hat{v}_\alpha(\xi) = (2\pi)^{-1/2}\int\limits_{\mathbb{R}} v_\alpha(\eta)e^{-i\xi\eta}d\eta$$

— преобразование Фурье функции $v_\alpha(\eta)$.

Поскольку $C_0^\infty(\mathbb{R})$ всюду плотно в $L_2(\mathbb{R})$, из (5.10) следует, что

$$(R_\alpha(t^0)Y, Y) \geqslant \frac{k_2}{2}|Y|^2.$$

Таким образом, симметрическая матрица $R_\alpha(t^0)$ положительно определена для любого $t_0 \in \overline{Q_{\alpha 1}}$. Следовательно, $detR_0(t) \neq 0$ для всех $t \in \overline{Q_{\alpha 1}}$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л.* Об одной задаче успокоения нестационарной системы управления с последействием// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2019. — *65*, № 4. — С. 547–556.
2. *Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л.* Об успокоении системы управления с последействием нейтрального типа// Докл. РАН. — 2020. — *490*, № 1. — С. 81–84.
3. *Каменский А. Г.* Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально-разностными операторами// Дифф. уравн. — 1976. — *10*, № 5. — С. 815–824.
4. *Каменский Г. А., Мышкис А. Д.* К постановке краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и несколькими старшими членами// Дифф. уравн. — 1974. — *10*, № 3. — С. 409–418.
5. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
6. *Кряжимский А. В., Максимов В. И., Осипов Ю. С.* О позиционном моделировании в динамических системах// Прикл. мат. мех. — 1983. — *47*, № 6. — С. 883–890.
7. *Леонов Д. Д.* К задаче об успокоении системы управления с последействием// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *37*. — С. 28–37.
8. *Осипов Ю. С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием// Дифф. уравн. — 1965. — *1*, № 5. — С. 605–618.
9. *Скубачевский А. Л.* К задаче об успокоении системы управления с последействием// Докл. РАН. — 1994. — *335*, № 2. — С. 157–160.
10. *Скубачевский А. Л., Иванов Н. О.* Вторая краевая задача для дифференциально-разностных уравнений// Докл. РАН. — 2021. — *500*, № 1. — С. 74–77.
11. *Скубачевский А. Л., Иванов Н. О.* Об обобщенных решениях второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2021. — *67*, № 3. — С. 576–595.
12. *Adkhamova A. S., Skubachevskii A. L.* Damping Problem for Multidimensional Control System with Delays// Distrib. Comput. Commun. Networks. — 2016. — *678*. — С. 612–623.
13. *Banks H. T., Kent G. A.* Control of functional differential equations of retarded and neutral type to target sets in function space// SIAM J. Control. — 1972. — *10*, № 4. — С. 567–593.
14. *Kent G. A.* A maximum principle for optimal control problems with neutral functional differential systems// Bull. Am. Math. Soc. — 1971. — *77*, № 4. — С. 565–570.
15. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 1997.

А. Ш. Адхамова

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: `ami_adhamova@mail.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-14-24 UDC 517.929

Smoothness of Solutions to the Damping Problem for Nonstationary Control System with Delay

© 2022 **A. Sh. Adkhamova**

Abstract. We consider the damping problem for a nonstationary control system described by a system of differential-difference equations of neutral type with smooth matrix coefficients and several delays. This problem is equivalent to the boundary-value problem for a system of second-order differential-difference equations, which has a unique generalized solution. It is proved that the smoothness of this solution can be violated on the considered interval and is preserved only on some subintervals. Sufficient conditions for the initial function are obtained to ensure the smoothness of the generalized solution over the entire interval.

REFERENCES

1. A. Sh. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, “Ob odnoy zadache uspokoeniya nestatsionarnoy sistemy upravleniya s posledeystviem” [On one damping problem for a non-stationary control system with aftereffect], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2019, **65**, No. 4, 547–556 (in Russian).
2. A. Sh. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, “Ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem neytral’nogo tipa” [On damping of the control system with aftereffect of a neutral-type], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2020, **490**, No. 1, 81–84 (in Russian).
3. A. G. Kamenskii, “Kraevye zadachi dlya uravneniy s formal’no simmetrichnymi differentsial’no-raznostnymi operatorami” [Boundary-value problems for equations with formally symmetric differential-difference operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1976, **10**, No. 5, 815–824 (in Russian).
4. G. A. Kamenskii and A. D. Myshkis, “K postanovke kraevykh zadach dlya differentsial’nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom i neskol’kimi starshimi chlenami” [On the formulation of boundary-value problems for differential equations with deviating argument and several leading terms], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1974, **10**, No. 3, 409–418 (in Russian).
5. N. N. Krasovskii, *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of Motion Control], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
6. A. V. Kryazhimskii, V. I. Maksimov, and Yu. S. Osipov, “O pozitsionnom modelirovanii v dinamicheskikh sistemakh” [On positional modeling in dynamical systems], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1983, **47**, No. 6, 883–890 (in Russian).
7. D. D. Leonov, “K zadache ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem” [On a stabilization problem for a control system with aftereffect], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **37**, 28–37 (in Russian).
8. Yu. S. Osipov, “O stabilizatsii upravlyaemykh sistem s zapazdyvaniem” [On stabilization of control systems with delay], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1965, **1**, No. 5, 605–618 (in Russian).
9. A. L. Skubachevskii, “K zadache ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem” [On the problem of damping a control system with aftereffect], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1994, **335**, No. 2, 157–160 (in Russian).
10. A. L. Skubachevskii and N. O. Ivanov, “Vtoraya kraevaya zadacha dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy” [The second boundary-value problem for differential-difference equations], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2021, **500**, No. 1, 74–77 (in Russian).
11. A. L. Skubachevskii and N. O. Ivanov, “Ob obobshchennykh resheniyakh vtoroy kraevoy zadachi dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy s peremennymi koeffitsientami” [On generalized solutions of the

second boundary-value problem for differential-difference equations with variable coefficients], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2021, **67**, No. 3, 576–595 (in Russian).
12. A. S. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, "Damping Problem for Multidimensional Control System with Delays," *Distrib. Comput. Commun. Networks*, 2016, **678**, 612–623.
13. H. T. Banks and G. A. Kent, "Control of functional differential equations of retarded and neutral type to target sets in function space," *SIAM J. Control*, 1972, **10**, No. 4, 567–593.
14. G. A. Kent, "A maximum principle for optimal control problems with neutral functional differential systems," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1971, **77**, No. 4, 565–570.
15. A. L. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhauser, Basel—Boston—Berlin, 1997.

A. Sh. Adkhamova
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: ami_adhamova@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). С. 25–40
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-25-40 УДК 519.63

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОТИВОПОТОЧНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2022 г. **Р. Д. АЛАЕВ, Д. Е. НЕМАТОВА**

Аннотация. В работе исследуется вопрос о получении алгебраического условия экспоненциальной устойчивости численного решения противопоточной разностной схемы для смешанной задачи, поставленной для одномерных симметричных t-гиперболических систем с постоянными коэффициентами и с диссипативными граничными условиями. Получена априорная оценка численного решения краевой разностной задачи. Эта оценка позволяет установить экспоненциальную устойчивость численного решения. Доказана теорема об экспоненциальной устойчивости численного решения краевой разностной задачи. Даны легко проверяемые алгебраические условия экспоненциальной устойчивости численного решения. Доказана сходимость численного решения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В данной работе рассматривается смешанная задача для одномерной линейной гиперболической системы с диссипативными краевыми условиями в случае постоянных коэффициентов [3]. Устойчивость решений одномерных гиперболических систем изучалась в [10]. Основной идеей данной работы было исследование устойчивости решения гиперболических систем путем построения функции Ляпунова и получения для нее априорных оценок в различных функциональных пространствах.

В настоящей работе исследуются вопросы построения и исследования разностной схемы численного расчета устойчивых решений для одномерной линейной гиперболической системы с диссипативными краевыми условиями в случае постоянных коэффициентов. Следует отметить, что решению этой проблемы посвящено множество работ [2, 4, 6, 11]. Однако во всех этих работах техника построения интегралов диссипативной энергии использовалась для построения разностных схем и исследования их устойчивости. Полученные в этих работах априорные оценки численного решения начально-краевых задач для гиперболических систем не позволяют делать утверждения об экспоненциальной устойчивости численного решения.

В настоящей работе исследуется противопоточная разностная схема для численного расчета устойчивых решений одномерной линейной гиперболической системы с диссипативными граничными условиями в случае постоянных коэффициентов. Построен дискретный аналог функции Ляпунова и получена для него априорная оценка. Полученная априорная оценка позволяет установить экспоненциальную устойчивость численного решения. Следовательно, это дает нам возможность доказать сходимость численного решения. Получены легко проверяемые алгебраические условия экспоненциальной устойчивости численного решения разностной краевой задачи.

2. Экспоненциальная устойчивость решения дифференциальной задачи

Определение 2.1. Система
$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + C\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \tag{2.1}$$
состоящая из n уравнений для n неизвестных функций $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ с матрицами $\mathbf{C} = \|c_{ik}\|$, называется *гиперболической*, если все корни характеристического уравнения $\det\|\mathbf{C} - k\mathbf{E}\| = 0$ (здесь $\mathbf{E}$ — единичная матрица) вещественны и различны.

В работе [3] показано, что система (2.1) может быть приведена к специальному каноническому виду
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{K}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0, \tag{2.2}$$
где $\mathbf{K}$ — диагональная матрица, и при некоторой невырожденной матрице $\mathbf{Z}$ выполнено $\mathbf{v} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{u}$.

Предположим, что элементы матрицы $\mathbf{K}$ упорядочены следующим образом:
$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & -\mathbf{K}^- \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K}^+ = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}^- = \begin{pmatrix} a_{m+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{m+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix},$$
где $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим в области $0 < x < L$, $t > 0$ смешанную задачу для системы (2.2) с граничными условиями при $x = 0$:
$$\mathbf{v}^{\mathrm{I}} = \mathbf{s}\mathbf{v}^{\mathrm{II}}, \tag{2.3}$$
и при $x = l$:
$$\mathbf{v}^{\mathrm{II}} = \mathbf{r}\mathbf{v}^{\mathrm{I}}. \tag{2.4}$$
Начальные условия для этой задачи задаются в виде:
$$v_i(x, 0) = \varphi_i(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant L \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2.5}$$
Здесь $\mathbf{v}^{\mathrm{I}} = (v_1, v_2, \ldots, v_m)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{v}^{\mathrm{II}} = (v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_n)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{s}$ — прямоугольная матрица порядка $(n - m) \times m$, $\mathbf{r}$ — прямоугольная матрица порядка $m \times (n - m)$:
$$\mathbf{s} = \|s_{pq}\|, \quad p = 1, \ldots n - m, \ q = 1, \ldots m; \quad \mathbf{r} = \|r_{qp}\|, \quad p = 1, \ldots, n - m, \quad q = 1, \ldots, m.$$

Определение 2.2 (экспоненциальная устойчивость [10])**.** Система (2.2) с граничными условиями (2.3)-(2.4) *экспоненциально устойчива* по норме L^2, если существуют $\nu > 0$ и $C > 0$ такие, что для любого начального условия $\phi \in \mathrm{L}^2((0, l), \mathbb{R}^n)$ L^2-решение смешанной задачи (2.2)–(2.5) удовлетворяет неравенству
$$\|\mathbf{v}(t, \cdot)\|_{\mathrm{L}^2((0,L),\mathbb{R}^n)} \leqslant Ce^{-\nu t}\|\phi\|_{\mathrm{L}^2((0,L),\mathbb{R}^n)}, \quad t \geqslant 0. \tag{2.6}$$

Введем понятие слабого решения смешанной задачи (2.2)–(2.5) в $L^2((0, L); \mathbb{R}^n)$. Для этого умножим (2.2) слева на $\psi^T \in C^1([0, T] \times [0, L]; \mathbb{R}^n)$, где T — заданное положительное число. Тогда мы получаем уравнение
$$\psi^T\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \psi^T\mathbf{K}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0.$$
Проинтегрируем обе части этого тождества по области $(0, T) \times (0, L)$. Пока предположим, что решения $\mathbf{v}$ принадлежат классу C^1 относительно t и x. Используя формулы интегрирования по частям и начальные условия (2.5), имеем:

$$0=\int_0^L\int_0^T\left[\psi^T\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\psi^T\mathbf{K}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}\right]dtdx=\int_0^L\psi^T(T,x)\mathbf{v}(T,x)-\int_0^L\psi^T(0,x)\mathbf{v}(0,x)+$$
$$+\int_0^T\left[\left(\psi^{\mathrm{I}}(t,L)\right)^T\mathbf{K}^+\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,L)-\left(\psi^{\mathrm{II}}\right)^T(t,L)\mathbf{K}^-\mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,L)\right]dt-$$
$$-\int_0^T\left[\left(\psi^{\mathrm{I}}(t,0)\right)^T\mathbf{K}^+\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,0)-\left(\psi^{\mathrm{II}}\right)^T(t,0)\mathbf{K}^-\mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0)\right]dt-\int_0^L\int_0^T\left[\frac{\partial\psi^T}{\partial t}\mathbf{v}+\frac{\partial\psi^T}{\partial x}\mathbf{K}\mathbf{v}\right]dtdx.$$

Тогда, используя граничные условия (2.3)-(2.4) и начальные условия (2.5), мы получаем

$$0=\int_0^L\psi^T(T,x)\mathbf{v}(T,x)-\int_0^L\psi^T(0,x)\phi(x)+$$
$$+\int_0^T\left[\left(\psi^{\mathrm{I}}(t,L)\right)^T\mathbf{K}^+\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,L)-\left(\psi^{\mathrm{II}}\right)^T(t,L)\mathbf{K}^-\mathbf{s}\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,L)\right]dt-$$
$$-\int_0^T\left[\left(\psi^{\mathrm{I}}(t,0)\right)^T\mathbf{K}^+\mathbf{r}\mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0)-\left(\psi^{\mathrm{II}}\right)^T(t,0)\mathbf{K}^-\mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0)\right]dt-$$
$$-\int_0^L\int_0^T\left[\frac{\partial\psi^T}{\partial t}\mathbf{v}+\frac{\partial\psi^T}{\partial x}\mathbf{K}\mathbf{v}\right]dtdx=\int_0^L\psi^T(T,x)\mathbf{v}(T,x)-\int_0^L\psi^T(0,x)\phi(x)+$$
$$+\int_0^T\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,L),\left[\mathbf{K}^+\psi^{\mathrm{I}}(t,L)-\mathbf{s}^T\mathbf{K}^-\psi^{\mathrm{II}}(t,L)\right]\right)dt+$$
$$+\int_0^T\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0),\left[\mathbf{K}^-\psi^{\mathrm{II}}(t,0)-\mathbf{r}^T\mathbf{K}^+\psi^{\mathrm{I}}(t,0)\right]\right)dt-\int_0^L\int_0^T\left[\frac{\partial\psi^T}{\partial t}\mathbf{v}+\frac{\partial\psi^T}{\partial x}\mathbf{K}\mathbf{v}\right]dtdx.$$

Теперь, если функции ψ выбраны так, что

$$\begin{pmatrix}\psi^{\mathrm{I}}(t,L)\\ \psi^{\mathrm{II}}(t,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \left(\mathbf{K}^+\right)^{-1}\mathbf{s}^TK^-\\ \left(\mathbf{K}^-\right)^{-1}\mathbf{r}^T\mathbf{K}^+ & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi^{\mathrm{I}}(t,0)\\ \psi^{\mathrm{II}}(t,L)\end{pmatrix},\tag{2.7}$$

мы получили

$$0=\int_0^L\psi^T(T,x)\mathbf{v}(T,x)-\int_0^L\psi^T(0,x)\phi(x)-\int_0^L\int_0^T\left[\frac{\partial\psi^T}{\partial t}\mathbf{v}+\frac{\partial\psi^T}{\partial x}\mathbf{K}\mathbf{v}\right]dtdx.\tag{2.8}$$

Ключевым моментом здесь является то, что хотя последнее уравнение было выведено в предположении, что функции $\mathbf{v}$ принадлежат классу C^1 относительно t и x, по-видимому, оно остается верным, даже если функции $\mathbf{v}$ не являются дифференцируемыми, поэтому их можно рассматривать как «слабые» решения системы. Тогда L^2-решения определяются как функции $\mathbf{v}$, удовлетворяющие (2.8) для всех ψ, удовлетворяющих (2.7), когда начальные условия принадлежат L^2. Дадим определение L^2-решения в следующем виде.

Определение 2.3. Пусть $\phi\in\mathrm{L}^2((0,L);\mathbb{R}^n)$. Отображение $\mathbf{v}:[0,+\infty)\times(0,L)\to\mathbb{R}^n$ является L^2-*решением* смешанной задачи (2.2)–(2.5), если для любых $T\in[0,+\infty)$ и $\psi\in C^1([0,T]\times[0,L];\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условиям (2.7), функции $\mathbf{v}\in C^0([0,+\infty);\ \mathrm{L}^2((0,L);\mathbb{R}^n))$ удовлетворяют (2.8) (см. [10]).

В качестве функции Ляпунова рассмотрим функцию

$$V(t) \triangleq \int\limits_0^L \left\{ \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu_i}{a_i} \exp\left(-\frac{\nu x}{a_i}\right) [v_i(t,x)]^2 + \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\mu_i}{a_i} \exp\left(-\frac{\nu x}{a_i}\right) [v_i(t,x)]^2 \right\} dx =$$

$$= \int\limits_0^L \left[\left(\left[\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right]^T \left(\mathbf{K}^+\right)^{-1} \mu^+(\nu x)\, \mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right) + \left(\left[\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right]^T \left(\mathbf{K}^-\right)^{-1} \mu^-(\nu x)\, \mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right) \right] dx =$$

$$= \int\limits_0^L \left[\left(\mathbf{v}^T \left(|\mathbf{K}|\right)^{-1} \mu(\nu x)\, \mathbf{v} \right) \right] dx, \quad (2.9)$$

где

$$|\mathbf{K}| = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^- \end{pmatrix}, \quad \mu(\nu x) = \begin{pmatrix} \mu^+(\nu x) & 0 \\ 0 & \mu^-(\nu x) \end{pmatrix};$$

$$\mu^+(\nu x) = diag\left(\mu_1 \exp\left(-\frac{\nu x}{a_1}\right), \ldots, \mu_m \exp\left(-\frac{\nu x}{a_m}\right) \right), \qquad \mu_i > 0, \quad (2.10)$$

$$\mu^-(\nu x) = diag\left(\mu_{m+1} \exp\left(+\frac{\nu x}{a_{m+1}}\right), \ldots, \mu_n \exp\left(+\frac{\nu x}{a_n}\right) \right), \qquad \mu_i > 0. \quad (2.11)$$

Чтобы сформулировать условие устойчивости, сначала для любой вещественной квадратичной матрицы A порядка $n \times n$ введем функцию ρ_2 (см. [10]), определенную следующим образом:

$$\rho_2(A) \triangleq \inf \left\{ \left\| DAD^{-1} \right\|_2, \ D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n) \right\},$$

где $d_i > 0$ обозначает множество строго положительных действительных чисел, и

$$\|A\|_2 \triangleq \max_{\|\xi\|_2 = 1} \|A\zeta\|_2 \qquad \|\zeta\|_2 \triangleq \left[\sum_{i=1}^{n} |\zeta_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \zeta \triangleq (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 2.1 (экспоненциальная устойчивость, см. [10]). *Система* (2.2) *с граничными условиями* (2.3)-(2.4) *экспоненциально устойчива по норме* L^2, *если* $\rho_2(R) < 1$, *где* $R = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix}$.

3. Разностная схема

Построим в области $G = \{(t,x) : 0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant x \leqslant L\}$ разностную сетку с шагами Δt в направлении t и Δx в направлении x. Обозначим через (t^κ, x_j) узловые точки разностной сетки (имеется в виду пересечение прямых $t = t^\kappa \triangleq \kappa \Delta t$ и $x = x_j \triangleq j \Delta x$). Далее обозначим через G_h множество узловых точек разностной схемы, т. е.

$$G_h \triangleq \left\{ (t^\kappa, x_j) : \ \kappa = 0, \ldots, \mathrm{K}; \ j = 0, \ldots, J \right\},$$

а через

$$(v_i)_j^\kappa = v_i(t^\kappa, x_j), \ i = 1, \ldots, n, \ \kappa = 0, \ldots, \mathrm{K}, \ j = 0, \ldots, J,$$

обозначим значения численного решения в узловых точках.

Подберем шаги разностной сетки Δt, Δx так, чтобы выполнялись равенства $\mathrm{K}\Delta t = T$ и $J\Delta x = L$.

Для нахождения численного решения смешанной задачи (2.2)–(2.5) на разностной сетке G_h предлагается следующая противопоточная разностная схема:

$$\begin{cases} (v_i)_j^{\kappa+1} = (v_i)_j^\kappa - a_i \dfrac{\Delta t}{\Delta x} \left[(v_i)_j^\kappa - (v_i)_{j-1}^\kappa \right], \ \ i = 1, \ldots, m, \ \ j = 1, \ldots, J; \\ (v_i)_j^{\kappa+1} = (v_i)_j^\kappa - a_i \dfrac{\Delta t}{\Delta x} \left[(v_i)_j^\kappa - (v_i)_{j+1}^\kappa \right], \ \ i = m+1, \ldots, n, \ \ j = 0, \ldots, J-1; \end{cases} \quad \kappa = 0, \ldots, \mathrm{K}-1. \quad (3.1)$$

Начальные условия (2.5) аппроксимируются в виде

$$(v_i)_j^0 = (v_{i0})_j, \ \ i = 1, \ldots, n; \ j = 0, \ldots, J. \quad (3.2)$$

Граничные условия (2.3)-(2.4) аппроксимируются следующим образом:

$$\begin{cases} (v_i)_0^\kappa = \sum\limits_{l=m+1}^{n} s_{il}\,(v_l)_0^\kappa, \quad i=1,\ldots,m; \\ (v_i)_J^\kappa = \sum\limits_{l=1}^{m} r_{il}\,(v_l)_0^\kappa, \; i=m+1,\ldots,n; \end{cases} \qquad \kappa = 1,\ldots,\mathrm{K}. \tag{3.3}$$

Введем в рассмотрение матрицы:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_{1m+1} & s_{1m+2} & \cdots & s_{1n} \\ s_{2m+1} & s_{2m+2} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{mm+1} & s_{mm+2} & \cdots & s_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_{m+1,1} & r_{m+1,2} & \cdots & r_{m+1,m} \\ r_{m+2,1} & r_{m+2,2} & \cdots & r_{m+2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n,1} & r_{n,2} & \cdots & r_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Иногда для удобства расчетов будем использовать матричную форму записи разностной начально-краевой задачи (3.1)–(3.3):

$$\begin{cases} \left(\mathbf{v^I}\right)_j^{\kappa+1} = \left(\mathbf{v^I}\right)_j^{\kappa} - \dfrac{\Delta t}{\Delta x}\mathbf{K}^+\left[\left(\mathbf{v^I}\right)_j^{\kappa} - \left(\mathbf{v^I}\right)_{j-1}^{\kappa}\right], \quad j=1,\ldots,J, \\ \left(\mathbf{v^{II}}\right)_j^{\kappa+1} = \left(\mathbf{v^{II}}\right)_j^{\kappa} - \dfrac{\Delta t}{\Delta x}\mathbf{K}^-\left[\left(\mathbf{v^{II}}\right)_j^{\kappa} - \left(\mathbf{v^{II}}\right)_{j+1}^{\kappa}\right], \quad j=0,\ldots,J-1, \end{cases} \qquad \kappa=0,\ldots,\mathrm{K}-1; \tag{3.4}$$

$$(\mathbf{v})_j^0 = (v_0)_j\,, \quad j=0,\ldots,J; \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} \left(\mathbf{v}^I\right)_0^\kappa = \mathbf{s}\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa, \\ \left(\mathbf{v}^{II}\right)_J^\kappa = \mathbf{r}\left(\mathbf{v}^{II}\right)_J^\kappa, \end{cases} \qquad \kappa=1,\ldots,\mathrm{K}. \tag{3.6}$$

Предположим, что шаги разностной сетки удовлетворяют условию Куранта—Фридрихса—Леви (КФЛ):

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i| \leqslant 1.$$

Теперь исследуем вопрос об экспоненциальной устойчивости численного решения разностной задачи (3.1)–(3.3). Сначала определим это понятие.

Определение 3.1. Решение разностной схемы (3.1), удовлетворяющее граничным условиям (3.2)-(3.3), называется *экспоненциально устойчивым*, если существуют такие положительные константы $\eta > 0$ и $c > 0$, что для любой начальной функции $(v_0)_j \in \mathrm{L}^2\left(\{x_j\}\,,\ j=0,\ldots J;\mathbb{R}^n\right)$ решение разностной начально-краевой задачи (3.4)–(3.6) удовлетворяет неравенству:

$$\Delta x\sum_{j=1}^{J}\left(\left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa, \left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa\right) + \Delta x\sum_{j=0}^{J-1}\left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_j^\kappa, \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_j^\kappa\right) \leqslant$$
$$\leqslant ce^{-\eta t_\kappa}\left[\Delta x\sum_{j=1}^{J}\left(\left(\mathbf{v}_0^I\right)_j, \left(\mathbf{v}_0^I\right)_j\right) + \Delta x\sum_{j=0}^{J-1}\left(\left(\mathbf{v}_0^{II}\right)_j, \left(\mathbf{v}_0^{II}\right)_j\right)\right], \quad \kappa=1,\ldots,N.$$

Рассмотрим разностную начально-краевую задачу (3.4)–(3.6) со стационарным решением

$$v_j^\kappa = 0, \quad \kappa=0,\ldots,N; \quad j=0,\ldots,J.$$

Для доказательства экспоненциальной устойчивости разностной начально-краевой задачи (3.4)–(3.6) в качестве дискретной функции Ляпунова (2.9) возьмем следующую функцию:

$$V(\kappa\Delta) = V^\kappa = W_1^\kappa + W_2^\kappa,$$

где

$$W_1^\kappa = \sum_{i=1}^{m} V_i^\kappa, \quad W_2^\kappa = \sum_{i=m+1}^{n} V_i^\kappa,$$

$$V_i^\kappa \triangleq \Delta x\frac{\mu_i}{a_i}\sum_{j=1}^{J}\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right), \quad i=1,2,\ldots,m;$$

$$V_i^\kappa \triangleq \Delta x \frac{\mu_i}{a_i} \sum_{j=0}^{J-1} \left[(u_i)_j^\kappa\right]^2 \exp(\frac{\nu x_j}{a_i}), \quad i = m+1, m+2, \ldots, n;$$

$$V^\kappa = \Delta x \sum_{j=1}^{J} \left(\left(\mathbf{K}^+\right)^{-1} \mu^+ (\nu x_j) \left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa, \left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa\right) + \Delta x \sum_{j=0}^{J-1} \left(\left(\mathbf{K}^-\right)^{-1} \mu^- (\nu x_j) \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_j^\kappa, \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_j^\kappa\right) \quad (3.7)$$

Теорема 3.1. *Пусть $T > 0$ и дискретные функции определены с помощью* (3.7). *Если шаги разностной сетки удовлетворяют условию КФЛ*

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i| \leqslant 1$$

а параметры r, s граничных условий (3.3) *подчиняются неравенству $\rho_2(R) < 1$, то численное решение v_j^κ разностной начально-краевой задачи* (3.4)–(3.6) *экспоненциально устойчиво по L^2-норме.*

Для доказательства теоремы 3.1 нам понадобятся некоторые леммы.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Тогда имеет место неравенство*:

$$\frac{V_i^{\kappa+1} - V_i^\kappa}{\Delta t} \leqslant \mu_i \sum_{j=1}^{J} \exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right) \left\{\left[(u_i)_{j-1}^\kappa\right]^2 - \left[(u_i)_j^\kappa\right]^2\right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Доказательство. Обозначим через ρ_{ij} число Куранта $(a_i)_j \dfrac{\Delta t}{\Delta x}$ для i-го разностного уравнения системы (3.1). Тогда i-е разностное уравнение системы (3.1) принимает вид:

$$(u_i)_j^{\kappa+1} = (u_i)_j^\kappa - \rho_i \left[(u_i)_j^\kappa - (u_i)_{j-1}^\kappa\right].$$

Учитывая такую форму записи первого разностного уравнения системы (3.1), получаем следующее выражение для $\dfrac{V_i^{\kappa+1} - V_i^\kappa}{\Delta t}$:

$$\frac{V_i^{\kappa+1} - V_i^\kappa}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\mu_i}{a_i} \sum_{j=1}^{J} \exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right) \left\{\left[(u_i)_j^{\kappa+1}\right]^2 - \left[(u_i)_j^\kappa\right]^2\right\} =$$

$$= \frac{\mu_i}{\rho_i} \sum_{j=1}^{J} \exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right) \left\{\left[(u_i)_j^{\kappa+1}\right]^2 - \left[(u_i)_j^\kappa\right]^2\right\} =$$

$$= \frac{\mu_i}{\rho_i} \sum_{j=1}^{J} \exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right) \left\langle \left\{(u_i)_j^\kappa - \rho_i \left[(u_i)_j^\kappa - (u_i)_{j-1}^\kappa\right]\right\}^2 - \left\{(u_i)_j^\kappa\right\}^2 \right\rangle =$$

$$= \frac{\mu_i}{\rho_i} \sum_{j=1}^{J} \exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right) \left\{\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2 - \left[(u_i)_j^\kappa\right]^2 - 2\rho_i (u_i)_j^\kappa \left[(u_i)_j^\kappa - (u_i)_{j-1}^\kappa\right] + \rho_i^2 \left[(u_i)_j^\kappa - (u_i)_{j-1}^\kappa\right]^2\right\} =$$

$$= \frac{\mu_i}{\rho_i} \sum_{j=1}^{J} \exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right) \left\{ \begin{array}{l} -2\rho_i \left[(u_i)_j^\kappa\right]^2 + 2\rho_i (u_i)_j^\kappa (u_i)_{j-1}^\kappa + \\ +\rho_i^2 \left[(u_i)_j^\kappa\right]^2 + \rho_i^2 \left[(u_i)_{j-1}^\kappa\right]^2 - 2\rho_i^2 (u_i)_j^\kappa (u_i)_{j-1}^\kappa \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{\mu_i}{\rho_i} \sum_{j=1}^{J} \exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right) \left\{\left(\rho_i^2 - 2\rho_i\right) \left[(u_i)_j^\kappa\right]^2 + 2\rho_i (1 - \rho_i) (u_i)_j^\kappa (u_i)_{j-1}^\kappa + \rho_i^2 \left[(u_1)_{j-1}^\kappa\right]^2\right\}.$$

Согласно условию КФЛ в теореме 3.1, неравенство $1 - \rho_{ij} > 0$ выполняется. Следовательно, справедливо неравенство $\rho_{ij} (1 - \rho_{ij}) > 0$. Используя алгебраическое неравенство $2ab \leqslant a^2 + b^2$, имеем

$$2\rho_i (1 - \rho_i) (u_i)_j^\kappa (u_i)_{j-1}^\kappa \leqslant \rho_i (1 - \rho_i) \left[(u_i)_j^\kappa\right]^2 + \rho_i (1 - \rho_i) \left[(u_i)_{j-1}^\kappa\right]^2.$$

Применяя это неравенство к выражению $\dfrac{V_i^{\kappa+1}-V_i^{\kappa}}{\Delta t}$, получаем вместо равенства следующее неравенство:

$$\frac{V_i^{\kappa+1}-V_i^{\kappa}}{\Delta t}\leqslant\frac{\mu_i}{\rho_i}\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left\{\begin{array}{l}\left(\rho_i^2-2\rho_i\right)\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2+\rho_i\left(1-\rho_i\right)\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2+\\ \rho_i\left(1-\rho_i\right)\left[(u_i)_{j-1}^{\kappa}\right]^2+\rho_i^2\left[(u_i)_{j-1}^{\kappa}\right]^2\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{\mu_i}{\rho_i}\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left\{\rho_i\left[(u_i)_{j-1}^{\kappa}\right]^2-\rho_i\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2\right\}=\mu_i\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left\{\left[(u_i)_{j-1}^{\kappa}\right]^2-\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2\right\}.$$

Лемма 3.1 доказана. □

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Тогда имеет место неравенство*:

$$\frac{V_i^{\kappa+1}-V_i^{\kappa}}{\Delta t}\leqslant\mu_i\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left\{\left[(u_i)_{j+1}^{\kappa}\right]^2-\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2\right\},\quad i=m+1,m+2,\ldots,n.$$

Доказательство. Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательству леммы 3.1. □

Лемма 3.3. *Выполняются следующие тождества*:

$$\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left\{\left[(u_i)_{j-1}^{\kappa}\right]^2-\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2\right\}=$$

$$=\left[\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)-1\right]\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2+\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\left[(u_i)_0^{\kappa}\right]^2-$$

$$-\exp\left(-\frac{\nu\left(L+\Delta x\right)}{a_i}\right)\left[(u_i)_J^{\kappa}\right]^2,\quad i=1,2,\ldots,m;$$

$$\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_2}\right)\left\{\left[(u_2)_{j+1}^{\kappa}\right]^2-\left[(u_2)_j^{\kappa}\right]^2\right\}=$$

$$=\left[\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_2}\right)-1\right]\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_2}\right)\left[(u_2)_j^{\kappa}\right]^2-\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_2}\right)\left[(u_2)_0^{\kappa}\right]^2+\exp\left(\frac{\nu\left(L+\Delta x\right)}{a_2}\right)\left[(u_2)_J^{\kappa}\right]^2.$$

Доказательство. Начнем с доказательства первого тождества:

$$\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left\{\left[(u_i)_{j-1}^{\kappa}\right]^2-\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2\right\}=$$

$$=\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_{j-1}^{\kappa}\right]^2-\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2=$$

$$=\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\exp\left(-\frac{\nu\left(-\Delta x\right)}{a_i}\right)\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_{j-1}^{\kappa}\right]^2-\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2=$$

$$=\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_{j-1}}{a_i}\right)\left[(u_i)_{j-1}^{\kappa}\right]^2-\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2=$$

$$=\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2-\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2=$$

$$=\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2-\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2+$$

$$+\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\exp\left(-\frac{\nu x_0}{a_i}\right)[(u_i)_0^\kappa]^2-\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\exp\left(-\frac{\nu x_J}{a_i}\right)[(u_i)_J^\kappa]^2=$$

$$=\left[\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)-1\right]\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2+$$

$$+\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)[(u_i)_0^\kappa]^2-\exp\left(-\frac{\nu\left(L+\Delta x\right)}{a_i}\right)[(u_i)_J^\kappa]^2.$$

Аналогично доказывается второе тождество:

$$\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left\{\left[(u_i)_{j+1}^\kappa\right]^2-\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2\right\}=$$

$$=\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_{j+1}^\kappa\right]^2-\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2=$$

$$=\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\exp\left(\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_{j+1}^\kappa\right]^2-\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2=$$

$$=\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_{j+1}}{a_i}\right)\left[(u_i)_{j+1}^\kappa\right]^2-\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2=$$

$$=\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2-\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2-$$

$$-\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\exp\left(\frac{\nu x_0}{a_i}\right)[(u_i)_0^\kappa]^2+\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)\exp\left(\frac{\nu x_J}{a_i}\right)[(u_i)_J^\kappa]^2=$$

$$=\left[\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)-1\right]\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2-\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)[(u_i)_0^\kappa]^2+\exp\left(\frac{\nu\left(L-\Delta x\right)}{a_i}\right)[(u_i)_J^\kappa]^2.$$

Лемма 3.3 доказана. □

Согласно лемме 3.1, для каждого V_i^κ, $i=1,2,\ldots,m$, справедливо следующее неравенство:

$$\frac{V_i^{\kappa+1}-V_i^\kappa}{\Delta t}\leqslant\mu_i\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left\{\left[(u_i)_{j-1}^\kappa\right]^2-\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2\right\},\quad i=1,2,\ldots,m.$$

Суммируя соответствующие левую и правую части этих неравенств, получаем:

$$\frac{W_1^{\kappa+1}-W_1^\kappa}{\Delta t}\leqslant\sum_{i=1}^{m}\mu_i\sum_{j=1}^{J}\exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left\{\left[(u_i)_{j-1}^\kappa\right]^2-\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2\right\}=$$

$$=\sum_{j=1}^{J}\left[\left(\mu^+\left(\nu x_j\right)\left(\mathbf{v}^I\right)_{j-1}^\kappa,\left(\mathbf{v}^I\right)_{j-1}^\kappa\right)-\left(\mu^+\left(\nu x_j\right)\left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa,\left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa\right)\right].\qquad(3.8)$$

Аналогично, применяя лемму 3.2 для каждого V_i^κ, $i=m+1,m+2,\ldots,n$, получаем следующее неравенство:

$$\frac{V_i^{\kappa+1}-V_i^\kappa}{\Delta t}\leqslant\mu_i\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left\{\left[(u_i)_{j+1}^\kappa\right]^2-\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2\right\},\quad i=m+1,m+2,\ldots,n.$$

Суммируя соответствующие левую и правую части этих неравенств, получаем:

$$\frac{W_2^{\kappa+1}-W_2^\kappa}{\Delta t}\leqslant\sum_{i=m+1}^{n}\mu_i\sum_{j=0}^{J-1}\exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right)\left\{\left[(u_i)_{j+1}^\kappa\right]^2-\left[(u_i)_j^\kappa\right]^2\right\}=$$

$$= \sum_{j=1}^{J} \left[\left(\mu^- (\nu x_j) \left(\mathbf{v}^{II}\right)_{j+1}^{\kappa}, \left(\mathbf{v}^{II}\right)_{j+1}^{\kappa} \right) - \left(\mu^- (\nu x_j) \left(\mathbf{v}^{II}\right)_{j}^{\kappa}, \left(\mathbf{v}^{II}\right)_{j}^{\kappa} \right) \right] \quad (3.9)$$

Согласно первому тождеству леммы 3.3, имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{J} \exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right) \left\{ \left[(u_i)_{j-1}^{\kappa}\right]^2 - \left[(u_i)_{j}^{\kappa}\right]^2 \right\} =$$

$$= \left[\exp\left(-\frac{\nu \Delta x}{a_i}\right) - 1\right] \sum_{j=1}^{J} \exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right) \left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2 + \exp\left(-\frac{\nu \Delta x}{a_i}\right) [(u_i)_0^{\kappa}]^2 -$$

$$- \exp\left(-\frac{\nu (L + \Delta x)}{a_i}\right) [(u_i)_J^{\kappa}]^2, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Умножим каждое из предыдущих неравенств на μ_i и просуммируем по i от 1 до m. Тогда выполняется неравенство

$$\frac{W_1^{\kappa+1} - W_1^{\kappa}}{\Delta t} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \mu_i \left[\exp\left(-\frac{\nu \Delta x}{a_i}\right) - 1\right] \sum_{j=1}^{J} \exp\left(-\frac{\nu x_j}{a_i}\right) \left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \mu_i \exp\left(-\frac{\nu \Delta x}{a_i}\right) [(u_i)_0^{\kappa}]^2 - \sum_{i=1}^{m} \mu_i \exp\left(-\frac{\nu (L + \Delta x)}{a_i}\right) [(u_i)_J^{\kappa}]^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{J} \left(\left[\left[\mu^+ (0)\right]^{-1} \mu^+ (\nu x_1) - E \right] \mu^+ (\nu x_j) \left(\mathbf{v}^{I}\right)_{j}^{\kappa}, \left(\mathbf{v}^{I}\right)_{j}^{\kappa} \right) +$$

$$+ \left(\mu^+ (\nu x_1) \left(\mathbf{v}^{I}\right)_{0}^{\kappa}, \left(\mathbf{v}^{I}\right)_{0}^{\kappa} \right) - \left(\mu^+ (\nu x_{J+1}) \left(\mathbf{v}^{I}\right)_{J}^{\kappa}, \left(\mathbf{v}^{I}\right)_{J}^{\kappa} \right).$$

Аналогично, согласно второму тождеству леммы 3.2, выполняется равенство

$$\sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(\frac{\nu x_j}{a_2}\right) \left\{ \left[(u_2)_{j+1}^{\kappa}\right]^2 - \left[(u_2)_{j}^{\kappa}\right]^2 \right\} =$$

$$= \left[\exp\left(-\frac{\nu \Delta x}{a_2}\right) - 1\right] \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(\frac{\nu x_j}{a_2}\right) \left[(u_2)_j^{\kappa}\right]^2 - \exp\left(-\frac{\nu \Delta x}{a_2}\right) [(u_2)_0^{\kappa}]^2 + \exp\left(\frac{\nu (L + \Delta x)}{a_2}\right) [(u_2)_J^{\kappa}]^2.$$

Умножая каждое из этих неравенств на μ_i и суммируя их по i от $m+1$ до n, получаем следующее неравенство:

$$\frac{W_2^{\kappa+1} - W_2^{\kappa}}{\Delta t} \leqslant \sum_{i=m+1}^{n} \mu_i \left[\exp\left(-\frac{\nu \Delta x}{a_i}\right) - 1\right] \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(\frac{\nu x_j}{a_i}\right) \left[(u_i)_j^{\kappa}\right]^2 -$$

$$- \sum_{i=m+1}^{n} \mu_i \exp\left(-\frac{\nu \Delta x}{a_i}\right) [(u_i)_0^{\kappa}]^2 + \sum_{i=m+1}^{n} \mu_i \exp\left(\frac{\nu (L + \Delta x)}{a_i}\right) [(u_i)_J^{\kappa}]^2 =$$

$$= \sum_{j=0}^{J-1} \left(\left\{ \left[\mu^- (0)\right]^{-1} \mu^- (\nu x_{-1}) - E \right\} \mu^- (\nu x_j) \left(\mathbf{v}^{II}\right)_{j}^{\kappa}, \left(\mathbf{v}^{II}\right)_{j}^{\kappa} \right) -$$

$$- \left(\mu^- (\nu x_{-1}) \left(\mathbf{v}^{II}\right)_{0}^{\kappa}, \left(\mathbf{v}^{II}\right)_{0}^{\kappa} \right) + \left(\mu^- (\nu x_{J+1}) \left(\mathbf{v}^{II}\right)_{J}^{\kappa}, \left(\mathbf{v}^{II}\right)_{J}^{\kappa} \right).$$

Лемма 3.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Тогда имеет место неравенство*

$$\frac{V^{\kappa+1} - V^{\kappa}}{\Delta t} < -\nu V^{\kappa}.$$

Доказательство. Используя неравенства для квадратичных форм W_1^κ, W_2^κ, имеем:

$$\frac{V^{\kappa+1}-V^\kappa}{\Delta t}=\frac{W_1^{\kappa+1}-W_1^\kappa}{\Delta t}+\frac{W_2^{\kappa+1}-W_2^\kappa}{\Delta t}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{J}\left(\left[\left[\mu^+(0)\right]^{-1}\mu^+(\nu x_1)-E\right]\mu^+(\nu x_j)\left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa,\left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa\right)+$$

$$+\left(\mu^+(\nu x_1)\left(\mathbf{v}^I\right)_0^\kappa,\left(\mathbf{v}^I\right)_0^\kappa\right)-\left(\mu^+(\nu x_{J+1})\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa,\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa\right)+$$

$$+\sum_{j=0}^{J-1}\left(\left\{\left[\mu^-(0)\right]^{-1}\mu^-(\nu x_{-1})-E\right\}\mu^-(\nu x_j)\left(\mathbf{v}^{II}\right)_j^\kappa,\left(\mathbf{v}^{II}\right)_j^\kappa\right)-$$

$$-\left(\mu^-(\nu x_{-1})\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa,\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa\right)+\left(\mu^-(\nu x_{J+1})\left(\mathbf{v}^{II}\right)_J^\kappa,\left(\mathbf{v}^{II}\right)_J^\kappa\right)=V_\nu^\kappa+W^\kappa.$$

Здесь

$$V_\nu^\kappa=\sum_{j=1}^{J}\left(\left[\left[\mu^+(0)\right]^{-1}\mu^+(\nu x_1)-E\right]\mu^+(\nu x_j)\left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa,\left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa\right)+$$

$$+\sum_{j=0}^{J-1}\left(\left\{\left[\mu^-(0)\right]^{-1}\mu^-(\nu x_{-1})-E\right\}\mu^-(\nu x_j)\left(\mathbf{v}^{II}\right)_j^\kappa,\left(\mathbf{v}^{II}\right)_j^\kappa\right),$$

$$W^\kappa=\left(\mu^+(\nu x_1)\left(\mathbf{v}^I\right)_0^\kappa,\left(\mathbf{v}^I\right)_0^\kappa\right)-\left(\mu^+(\nu x_{J+1})\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa,\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa\right)-$$

$$-\left(\mu^-(\nu x_{-1})\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa,\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa\right)+\left(\mu^-(\nu x_{J+1})\left(\mathbf{v}^{II}\right)_J^\kappa,\left(\mathbf{v}^{II}\right)_J^\kappa\right).$$

С учетом формулы Тейлора справедливо следующее равенство:

$$\frac{\exp\left(-\frac{\nu\Delta x}{a_i}\right)-1}{\Delta x}=-\frac{\nu}{a_i}+O(\Delta x).$$

Тогда, применяя эти тождества к коэффициентам квадратичной формы V_ν^κ, имеем с точностью до Δx :

$$V_\nu^\kappa\leqslant-\nu\left[\begin{array}{c}\Delta x\sum\limits_{j=1}^{J}\left(\left(\mathbf{K}^+\right)^{-1}\mu^+(\nu x_j)\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_j^\kappa,\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_j^\kappa\right)+\\+\Delta x\sum\limits_{j=0}^{J-1}\left(\left(\mathbf{K}^-\right)^{-1}\mu^-(\nu x_j)\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_j^\kappa,\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_j^\kappa\right)\end{array}\right]=-\nu V^\kappa.$$

Так как по предположению $\rho_2(R)<1$, то существуют строго положительно определенные матрицы $D_0,\ D_1$ размерности m и $n-m$, соответственно, такие, что

$$\left\|\Delta R\Delta^{-1}\right\|<1\ \text{ где }\ \Delta\stackrel{\Delta}{=}\operatorname{diag}\{D_0,\ D_1\}. \tag{3.10}$$

Параметры μ_i выбираются такими, что $\mu^+(\nu x_1)=D_0^2$ и $\mu^-(\nu x_{-1})=D_1^2$. Тогда с учетом этих определений относительно W^κ как функции $\mathbf{v}$ имеем для векторов $\mathbf{v}_j^\kappa$, удовлетворяющих краевым условиям (3.3):

$$W^\kappa(\nu)=\left(\mu^+(\nu x_1)\,\mathbf{s}\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa,\mathbf{s}\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa\right)-\left(\mu^+(\nu x_{J+1})\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa,\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa\right)-$$

$$-\left(\mu^-(\nu x_{-1})\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa,\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa\right)+\left(\mu^-(\nu x_{J+1})\,\mathbf{r}\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa,\mathbf{r}\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa\right)=$$

$$=-\left(\mu^+(\nu\left[L+\Delta x\right])\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa,\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa\right)-\left(D_1^2\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa,\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa\right)+$$

$$+\left(\mathbf{r}^T\mu^-(\nu\left[L+\Delta x\right])\,\mathbf{r}\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa,\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa\right)+\left(\mathbf{s}^TD_0^2\mathbf{s}\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa,\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa\right)=$$

$$=-\left(\left(\begin{array}{cc}\mu^+(\nu\left[L+\Delta x\right])D_0^{-2}&0\\0&E\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}D_0\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa\\D_1\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}D_0\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa\\D_1\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa\end{array}\right)\right)+$$

$$+\left(\begin{pmatrix} 0 & D_0\mathbf{s}D_1^{-1} \\ D_1\mathbf{r}D_0^{-1} & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & D_0\mathbf{s}D_1^{-1} \\ \mu^-\left(\nu\left[L+\Delta x\right]\right)D_1^{-1}\mathbf{r}D_0^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_0\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa \\ D_1\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_0\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa \\ D_1\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa \end{pmatrix}\right),$$

или

$$W^\kappa(\nu) = -\left(\Omega(\nu)\begin{pmatrix} D_0\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa \\ D_1\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_0\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa \\ D_1\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa \end{pmatrix}\right),$$

где

$$\Omega(\nu) \triangleq \begin{pmatrix} \mu^+\left(\nu\left[L+\Delta x\right]\right)D_0^{-2} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} -$$

$$-\begin{pmatrix} 0 & D_0\mathbf{s}D_1^{-1} \\ D_1\mathbf{r}D_0^{-1} & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & D_0\mathbf{s}D_1^{-1} \\ \mu^-\left(\nu\left[L+\Delta x\right]\right)D_1^{-1}\mathbf{r}D_0^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

а для $\nu = 0$:

$$W^\kappa(0) = -\left(\Omega(0)\begin{pmatrix} D_0\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa \\ D_1\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_0\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa \\ D_1\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa \end{pmatrix}\right) =$$

$$= -\left(\left(\mathbf{I} - (\Delta R\Delta^{-1})^T(\Delta R\Delta^{-1})\right)\begin{pmatrix} D_0\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa \\ D_1\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_0\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa \\ D_1\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa \end{pmatrix}\right).$$

Так как $\left\|\Delta R\Delta^{-1}\right\| < 1$, получаем, что $\mathbf{W}(0)$ — строго отрицательно определенная квадратичная форма относительно $\left(\mathbf{v}^I\right)_J^\kappa$ и $\left(\mathbf{v}^{II}\right)_0^\kappa$. Тогда в силу непрерывности $W(\nu)$ остается строго отрицательно определенной квадратичной формой при достаточно малых $\nu > 0$. Следовательно, имеем

$$\frac{V^{\kappa+1} - V^\kappa}{\Delta t} \leqslant V_\nu^\kappa + W^\kappa \leqslant -\nu V^\kappa$$

на решениях системы (3.1)–(3.3), или

$$\frac{V^{\kappa+1} - V^\kappa}{\Delta t} \leqslant -\nu V^\kappa, \quad \kappa = 0, \ldots, N-1.$$

□

Лемма 3.5. *Пусть для V^κ выполняется цепочка неравенств*

$$\frac{V^{\kappa+1} - V^\kappa}{\Delta t} \leqslant -\nu V^\kappa, \quad \kappa = 0, \ldots, N-1.$$

Тогда существует положительная константа C такая, что для решения $\mathbf{v}_j^\kappa$ разностной краевой задачи справедлива оценка:

$$\left\|\mathbf{v}^\kappa\right\|^2 \leqslant Ce^{-\nu t_\kappa}\left\|\mathbf{v}^0\right\|^2, \quad \kappa = 1, \ldots, N.$$

Здесь

$$\left\|\mathbf{v}^\kappa\right\|^2 = \Delta x\sum_{j=1}^{J}\left(\left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa, \left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa\right) + \Delta x\sum_{j=0}^{J-1}\left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_j^\kappa, \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_j^\kappa\right).$$

Доказательство. Рекурсивно применяя неравенства $\dfrac{V^{\kappa+1} - V^\kappa}{\Delta t} \leqslant -\nu V^\kappa$, получаем

$$V^{\kappa+1} < (1 - \Delta t\nu)^{\kappa+1}V^0 \leqslant e^{-\nu\Delta t(\kappa+1)}V^0 = e^{-\nu t_{\kappa+1}}V^0, \quad \kappa = 0, \ldots, N-1.$$

Введем в рассмотрение положительные постоянные:

$$C_1 = \min_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant j\leqslant J}}\left\{\lambda_{ij} : \left|\left|\mathbf{K}\right|^{-1}\mu_j - \lambda_{ij}\mathbf{E}\right| = 0\right\}, \quad C_2 = \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant j\leqslant J}}\left\{\lambda_{ij} : \left|\left|\mathbf{K}\right|^{-1}\mu_j - \lambda_{ij}\mathbf{E}\right| = 0\right\},$$

Тогда $C_1\mathbf{E} \leqslant \mu_j \leqslant C_2\mathbf{E}, \quad j = 0, \ldots, J$. Отсюда следует, что

$$C_1\left\{\Delta x\sum_{j=1}^{J}\left(\left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa, \left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa\right) + \Delta x\sum_{j=0}^{J-1}\left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_j^\kappa, \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_j^\kappa\right)\right\} \leqslant V^\kappa \leqslant e^{-\nu t_\kappa}V^0 \leqslant$$

$$\leqslant C_2 e^{-\nu t_\kappa} \left\{ \Delta x \sum_{j=1}^{J} \left(\left(\mathbf{v}_0^I\right)_j, \left(\mathbf{v}_0^I\right)_j \right) + \Delta x \sum_{j=0}^{J-1} \left(\left(\mathbf{v}_0^{II}\right)_j, \left(\mathbf{v}_0^{II}\right)_j \right) \right\},$$

$$\Delta x \sum_{j=1}^{J} \left(\left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa, \left(\mathbf{v}^I\right)_j^\kappa \right) + \Delta x \sum_{j=0}^{J-1} \left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_j^\kappa, \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_j^\kappa \right) \leqslant$$
$$\leqslant C e^{-\nu t_\kappa} \left\{ \Delta x \sum_{j=1}^{J} \left(\left(\mathbf{v}_0^I\right)_j, \left(\mathbf{v}_0^I\right)_j \right) + \Delta x \sum_{j=0}^{J-1} \left(\left(\mathbf{v}_0^{II}\right)_j, \left(\mathbf{v}_0^{II}\right)_j \right) \right\}, \quad \kappa = 1, \ldots, N; \quad C = C_2/C_1.$$

Таким образом, численное решение $\mathbf{v}_j^\kappa$ смешанной задачи экспоненциально устойчиво в L^2-норме. Лемма 3.5 доказана. □

Следовательно, если $\rho_2(R) < 1$, решения сходятся в L^2-норме, а равновесное решение экспоненциально устойчиво. Теорема 3.1 доказана.

4. Пример численного расчета

Рассмотрим в области $G = \{(x,t): \ 0 \leqslant x \leqslant l; \ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ следующую систему гиперболических уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} 3u(0,t) - v(0,t) = 0, \\ u(l,t) + 3v(l,t) = 0. \end{cases}$$

Здесь l, T — некоторые положительные константы.

Приводим исходную систему к каноническому виду, т. е. переписываем ее с учетом инвариантов Римана. Для этого вычтем второе уравнение исходной системы из первого и примем результат за первое уравнение канонической формы системы. Затем сложим первое уравнение исходной системы со вторым и примем результат как второе уравнение канонической формы системы. Тогда в результате имеем следующее:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial (u-v)}{\partial t} + \dfrac{\partial (u-v)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial (u+v)}{\partial t} - \dfrac{\partial (u+v)}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

В качестве инвариантов Римана возьмем следующие функции:

$$\begin{cases} u_1(x,t) = u(x,t) - v(x,t), \\ u_2(x,t) = u(x,t) + v(x,t). \end{cases}$$

Исходная система примет следующий вид в римановых координатах:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

с соответствующими граничными условиями

$$\begin{cases} u_1(0,t) = \dfrac{1}{2} u_2(0,t), \\ u_2(l,t) = \dfrac{1}{2} u_1(l,t). \end{cases} \tag{4.2}$$

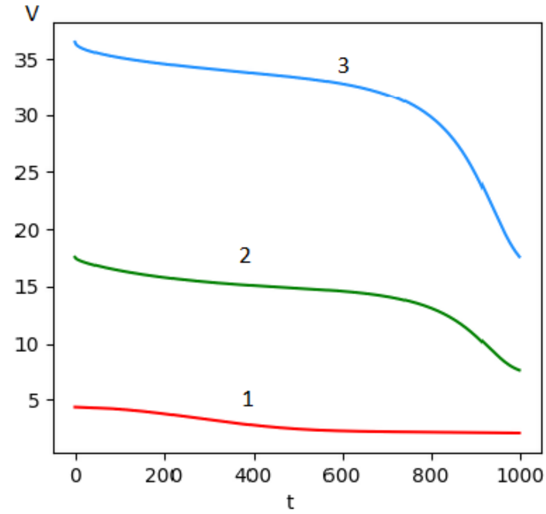

Рис. 1. Зависимость дискретной функции Ляпунова от времени при различных начальных данных

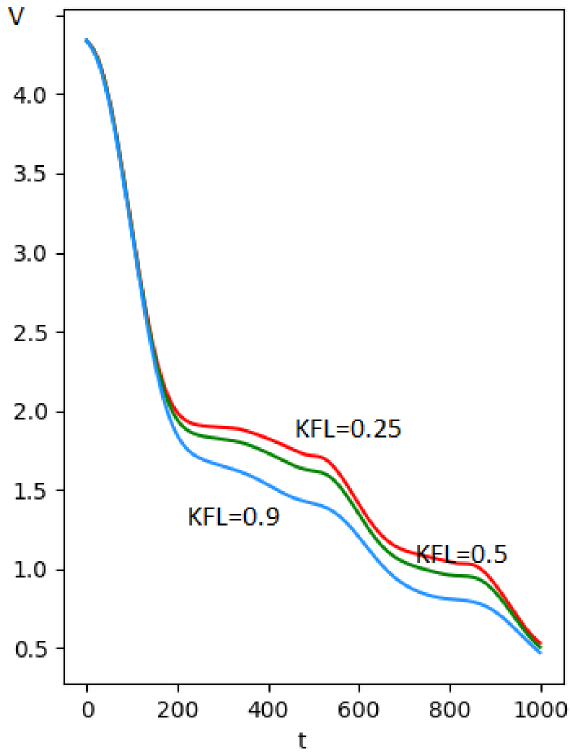

Рис. 2. Влияние условия КФЛ на функцию Ляпунова для начальной функции 1

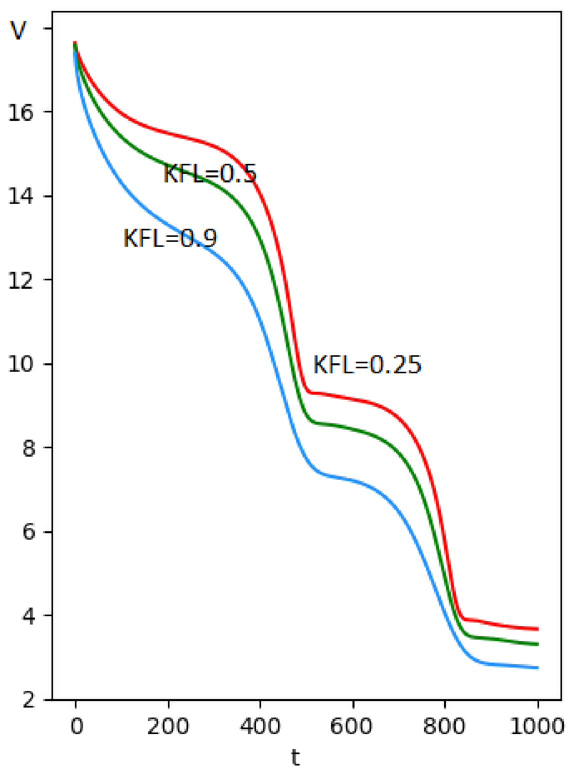

Рис. 3. Влияние условия КФЛ на функцию Ляпунова для начальной функции 2

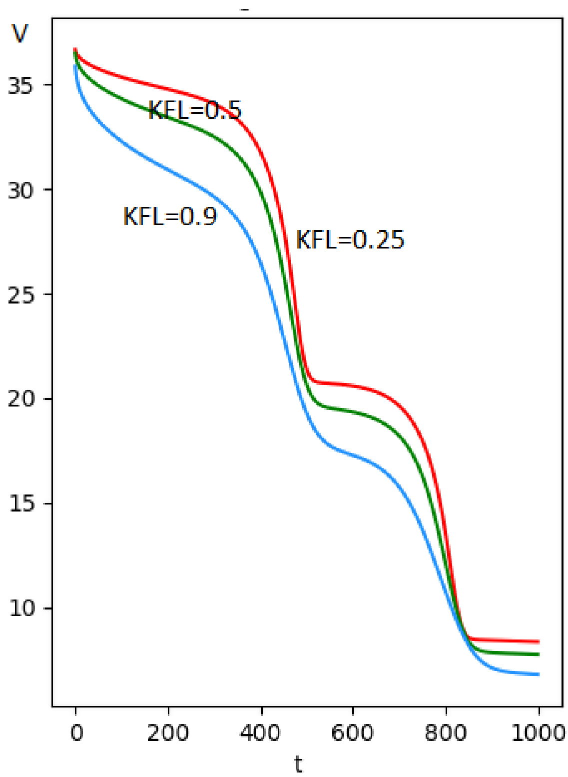

Рис. 4. Влияние условия КФЛ на функцию Ляпунова для начальной функции 3

В качестве значения параметров граничных условий принимаем $r = 0{,}5$, $s = 0{,}5$. Тогда $\rho_2(R) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$. Мы решили систему разностных уравнений (4.1)-(4.2) с начальными данными

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1, \quad L = 1,\ T = 1, \quad r = 0{,}5,\ s = 0{,}5.$$

В качестве параметров разностной сетки были заданы следующие значения:

$$J = 900, \quad K = 1000, \quad \Delta x = \frac{1}{J}, \quad \Delta t = \frac{1}{K}.$$

Кривые дискретных функций Ляпунова	Соответствующие начальные данные для u_1	Соответствующие начальные данные для u_2
1	$x^2 \cdot \sin(x)$	$\cos(x)$
2	$-x^2 + 0{,}2$	$x^3 - 1{,}3$
3	$\sqrt[3]{x^2 + \sin(x)}$	$0{,}3 + x \cdot e^x$

Таблица 1: Начальные функции для соответствующих функций u_1, u_2

5. Заключение

В заключение отметим, что в настоящей работе исследуется устойчивость противопоточной разностной схемы для численного расчета устойчивых решений смешанной задачи для линейной гиперболической системы с диссипативными граничными условиями. Построен дискретный аналог функции Ляпунова для численного значения устойчивых решений смешанной задачи. Получена априорная оценка дискретного аналога функции Ляпунова. Полученная априорная оценка позволяет констатировать экспоненциальную устойчивость численного решения. Доказаны теоремы об экспоненциальной устойчивости решения как для дифференциальной задачи, так и для разностной схемы в соответствующих нормах. Таким образом, это позволяет нам доказать сходимость устойчивого численного решения к устойчивому решению дифференциальной задачи. Приведен пример численного расчета, подтверждающий полученные теоретические результаты.

Благодарности. Работа была поддержана грантом UZB-Ind-2021-87 «Анализ симметрий Ли, моделирование и анализ устойчивости по Ляпунову гиперболических систем». Авторы благодарят за спонсорство и финансовую поддержку Министерство инновационного развития Республики Узбекистан.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алаев Р. Д., Худайберганов М. У.* Дискретный аналог функции Ляпунова для гиперболических систем// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2018. — *64*, № 4. — С. 591–602.
2. *Блохин А. М., Алаев Р. Д.* Интегралы энергии и их приложения к исследованию устойчивости разностных схем. — Новосибирск: Изд-во Новосибирского гос. ун-та, 1993.
3. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979.
4. *Aloev R. D., Blokhin A. M., Hudayberganov M. U.* One class of stable difference schemes for hyperbolic system// Am. J. Numer. Anal. — 2014. — *2*, № 1. — С. 85–89.
5. *Aloev R. D., Davlatov Sh. O., Eshkuvatov Z. K., Nik Long N. M. A.* Uniqueness solution of the finite elements scheme for symmetric hyperbolic systems with variable coefficients// Malays. J. Math. Sci. — 2016. — *10*. — С. 49–60.
6. *Aloev R. D., Eshkuvatov Z. K., Davlatov Sh. O., Nik Long N. M. A.* Sufficient condition of stability of finite element method for symmetric t-hyperbolic systems with constant coefficients// Comput. Math. Appl. — 2014. — *68*. — С. 1194–1204.
7. *Aloev R. D., Eshkuvatov Z. K., Khudoyberganov M. U., Nematova D. E.* The difference splitting scheme for hyperbolic systems with variable coefficients// Math. Statist. — 2019. — *7*. — С. 82–89.
8. *Aloev R. D., Eshkuvatov Z. K., Khudayberganov M. U., Nik Long N. M. A.* A discrete analogue of energy integral for a difference scheme for quasilinear hyperbolic systems// Appl. Math. — 2018. — *9*. — С. 789–805.

9. *Aloev R. D., Khudoyberganov M. U., Blokhin A. M.* Construction and research of adequate computational models for quasilinear hyperbolic systems// Numer. Algebra Control Optim. — 2018. — *8*, № 3. — С. 287–299.
10. *Bastin G., Coron J.-M.* Stability and boundary stabilization of 1-D hyperbolic systems. — Basel: Birkhäuser, 2016.
11. *Göttlich S., Schillen P.* Numerical Discretization of Boundary Control Problems for Systems of Balance Laws: Feedback Stabilization// Eur. J. Control. — 2017. — *35*. — С. 11–18.

Р. Д. Алаев
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: aloevr@mail.ru

Д. Е. Нематова
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: nematova_dilfuza@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-25-40 UDC 519.63

An Algebraic Condition for the Exponential Stability of an Upwind Difference Scheme for Hyperbolic Systems

© 2022 **R. D. Aloev, D. E. Nematova**

Abstract. In the paper, we investigate the question of obtaining the algebraic condition for the exponential stability of the numerical solution of the upwind difference scheme for the mixed problem posed for one-dimensional symmetric t-hyperbolic systems with constant coefficients and with dissipative boundary conditions. An a priori estimate for the numerical solution of the boundary-value difference problem is obtained. This estimate allows us to state the exponential stability of the numerical solution. A theorem on the exponential stability of the numerical solution of the boundary-value difference problem is proved. Easily verifiable algebraic conditions for the exponential stability of the numerical solution are given. The convergence of the numerical solution is proved.

REFERENCES

1. R. D. Aloev and M. U. Khudayberganov, “Diskretnyy analog funktsii Lyapunova dlya giperbolicheskikh sistem” [A discrete analog of the Lyapunov function for hyperbolic systems], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2018, **64**, No. 4, 591–602 (in Russian).
2. A. M. Blokhin and R. D. Aloev, *Integraly energii i ikh prilozheniya k issledovaniyu ustoychivosti raznostnykh skhem* [Energy Integrals and Their Applications to the Study of the Stability of Difference Schemes], Novosibirsk. gos. univ., Novosibirsk, 1993 (in Russian).
3. S. K. Godunov, *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1979 (in Russian).
4. R. D. Aloev, A. M. Blokhin, and M. U. Hudayberganov, “One class of stable difference schemes for hyperbolic system,” *Am. J. Numer. Anal.*, 2014, **2**, No. 1, 85–89.
5. R. D. Aloev, Sh. O. Davlatov, Z. K. Eshkuvatov, and N. M. A. Nik Long, “Uniqueness solution of the finite elements scheme for symmetric hyperbolic systems with variable coefficients,” *Malays. J. Math. Sci.*, 2016, **10**, 49–60.

6. R. D. Aloev, Z. K. Eshkuvatov, Sh. O. Davlatov, and N. M. A. Nik Long, “Sufficient condition of stability of finite element method for symmetric t-hyperbolic systems with constant coefficients,” *Comput. Math. Appl.*, 2014, **68**, 1194–1204.
7. R. D. Aloev, Z. K. Eshkuvatov, M. U. Khudoyberganov, and D. E. Nematova, “The difference splitting scheme for hyperbolic systems with variable coefficients,” *Math. Statist.*, 2019, **7**, 82–89.
8. R. D. Aloev, Z. K. Eshkuvatov, M. U. Khudayberganov, and N. M. A. Nik Long, “A discrete analogue of energy integral for a difference scheme for quasilinear hyperbolic systems,” *Appl. Math.*, 2018, **9**, 789–805.
9. R. D. Aloev, M. U. Khudoyberganov, and A. M. Blokhin, “Construction and research of adequate computational models for quasilinear hyperbolic systems,” *Numer. Algebra Control Optim.*, 2018, **8**, No. 3, 287–299.
10. G. Bastin and J.-M. Coron, *Stability and boundary stabilization of 1-D hyperbolic systems*, Birkhäuser, Basel, 2016.
11. S. Göttlich and P. Schillen, “Numerical Discretization of Boundary Control Problems for Systems of Balance Laws: Feedback Stabilization,” *Eur. J. Control*, 2017, **35**, 11–18.

R. D. Aloev
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: aloevr@mail.ru

D. E. Nematova
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: nematova_dilfuza@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). С. 41–58
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-41-58 УДК 517.55

МНОГОЧЛЕНЫ НА РЕГУЛЯРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

© 2022 г. **А. А. АТАМУРАТОВ**

Аннотация. В данной работе мы рассматриваем регулярное параболическое многообразие X и многочлены на нем. Доказаны некоторые свойства регулярных параболических многообразий и описанных многочленов на дополнениях к алгеброидным множествам Вейерштрасса.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Понятие «параболичности» введено в совместной работе П. Гриффитса, Дж. Кинга [10] и в работах В. Столла [17,18], где параболические многообразия применялись к теории распределения значений Неванлинны в высших измерениях. Эти исследования в основном были сосредоточены на аффинных алгебраических подмногообразиях комплексных пространств. Этот тип многообразий был назван параболическим. В работе [2] А. Садуллаевым была изучена теория Неванлинны для отображения на параболическом многообразии.

В качестве дальнейшего развития параболических многообразий Штейна можно указать исследования А. Зариахи [20], А. Айтуна, Дж. Крон, Т. Терзиоглу [4], Дж. П. Демайлли [8], Р. Л. Фут [9], А. Айтуна и А. Садуллаева [5, 6], М. Калка, Г. Патрицио [11], А. С. Снабьярнарсон [16].

В данной работе мы используем следующие понятия (см. [5, 6]).

Определение 1.1. Многообразие Штейна X называется *параболическим*, если оно не обладает отличными от константы ограниченными сверху плюрисубгармоническими функциями.

Определение 1.2. Многообразие Штейна X называется *S-параболическим*, если существуют специальные плюрисубгармонические сюръективные функции $\rho(z) \in psh(X)$, максимальные вне компактного подмножества X. Кроме того, если $\rho(z)$ можно выбрать непрерывным, то будем говорить, что X является *S^*-параболическим*.

Известно, что для открытых римановых поверхностей понятия параболичности, S-параболичности и S^*-параболичности совпадают. При $\dim X > 1$ этот вопрос остается открытым.

Пусть X — S-параболическое многообразие, а $\rho(z)$ — специальная сюръективная функция.

Определение 1.3. Если для функции $f(z) \in O(X)$ существуют положительные числа c и d такие, что для каждого $z \in X$ выполняется неравенство

$$\ln|f(z)| \leqslant d \cdot \rho^+(z) + c, \tag{1.1}$$

где $\rho^+(z) = \max\{0, \rho(z)\}$, то функция $f(z)$ называется *ρ-многочленом* на X. Минимальное целочисленное значение d, которое удовлетворяет (1.1), называется *степенью* полинома (как показывают примеры, в общем случае минимальное значение d может быть нецелым).

Для каждого $d > 0$ обозначим через $\mathcal{P}_\rho^d(X)$ множество всех ρ-полиномов степени меньше или равной d, а через $\mathcal{P}_\rho(X) = \bigcup\limits_{d=0}^{\infty} \mathcal{P}_\rho^d(X)$ — множество всех ρ-полиномов на X. В работе А. Айтуна и А. Садуллаева [6] (см. также [17]) было доказано, что векторное пространство $\mathcal{P}_\rho^d(X)$ для S^*-параболического многообразия конечномерно и с оценкой сверху:

$$\dim \mathcal{P}_\rho^d(X) \leqslant C d^n.$$

Класс полиномов на произвольных параболических многообразиях может быть очень бедным, даже пустым, $\mathcal{P}_\rho^d(X) = \{const\}$. Следующая теорема помогает построить S^*-параболическое многообразие без нетривиальных полиномов (см. [6]).

Теорема 1.1. *Существуют полярный компакт $K \subset \mathbb{C}$ и субгармоническая функция $u(z)$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, гармоническая в $\mathbb{C}\backslash K$, такие, что $u|_K = -\infty$ и*

$$\lim_{z \to K} \frac{u(z)}{\ln dist(z, K)} = 0. \tag{1.2}$$

Пример 1.1. Рассмотрим многообразие $X = \bar{\mathbb{C}}\backslash K$, где K — компакт, как в теореме выше. В качестве специальной сюръективной функции положим $\rho(z) = -u(z)$. Тогда ρ является гармоническим на $X\backslash\{\infty\}$, $\rho(\infty) = -\infty$, и $\rho(z) \to \infty$ при $z \to K$. Следовательно, (X, ρ) является S^*-параболическим. Многочлены на X — это функции $f \in \mathcal{O}(X)$, для которых

$$\ln|f| \leqslant C + d \cdot \rho^+(z), \ d \in \mathbb{N}.$$

Доказано, что такого рода функции тривиальны, т. е. $f = const$. Отсюда следует, что на X нет нетривиальных многочленов.

Пример 1.2. Алгебраическое множество $A \subset \mathbb{C}^N$, $\dim A = n$. В этом случае по известной теореме В. Рудина [14], можно считать, что $A \subset \{w = (w', w'') = (w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}, \ldots, w_N) : \|w''\| < C(1 + \|w'\|^k)\}$ (после соответствующего преобразования), где C, k — константы. Тогда, если мы положим $\rho(w) = \ln\|w'\|$, то сужение $\rho|_A$ может быть специальной сюръективной функцией для A. Ясно, что полиномы на A являются ограничениями полиномов $p(w', w'')$ в $\mathbb{C}^N$. Следовательно, $\mathcal{P}_\rho^d(A)$ плотно в $\mathcal{O}(A)$.

В этой статье мы сосредоточимся на специальном классе параболических многообразий, которые мы называем регулярными.

Определение 1.4 (А. Айтуна, А. Садуллаев, [6]). S-параболическое многообразие X называется *регулярным* в случае, если пространство всех ρ-многочленов $\mathcal{P}_\rho(X)$ плотно в $\mathcal{O}(X)$.

В данной работе мы рассматриваем свойства регулярных параболических многообразий, в частности, изучаем дополнения к алгеброидным множествам на комплексном пространстве. В разделах 1 и 2 мы делаем обзор свойств параболических многообразий и многочленов на параболических многообразиях. Основные результаты статьи приведены в разделах 3 и 4. В разделе 3 доказана регулярная параболичность декартовых произведений регулярных параболических многообразий Штейна. В разделе 4 мы рассматриваем дополнения алгеброидных множеств Вейерштрасса и многочлены на этих многообразиях.

Благодарности. Автор выражает благодарность профессорам А. Айтуна и А. Садуллаеву за неоднократное обсуждение результатов и полезные комментарии.

2. Предварительные результаты и свойства параболических многообразий

Следующие свойства параболических многообразий показывают, что мы можем конструировать широкие классы параболических многообразий помимо аффинно-алгебраических многообразий.

Теорема 2.1 (В. Столл, [17, теорема 10.12, с. 82]). *Некомпактная риманова поверхность X является S^*-параболической тогда и только тогда, когда каждая ограниченная (сверху) субгармоническая функция, определенная на X, сводится к константе.*

Теорема 2.2 (В. Столл, [17, теорема 10.13, с. 82]). *Пусть (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2) являются S^*-параболическими многообразиями размерностей n и m, соответственно. Определим многообразие $M = X_1 \times X_2$ размерности $k = n + m$ и проекции $\pi_1 : M \to X_1$, $\pi_2 : M \to X_2$. Тогда $M = X_1 \times X_2$ является S^*-параболическим со специальной сюръективной функцией $\rho = \ln(e^{2\rho_1 \circ \pi_1} + e^{2\rho_2 \circ \pi_2})$.*

Отметим, что в качестве специальной сюръективной функции на $M = X_1 \times X_2$ мы можем рассматривать $\rho = \max\{\rho_1 \circ \pi_1, \rho_2 \circ \pi_2\}$.

Как показано в [5], S^*-параболические многообразия являются уточненной категорией многообразий Штейна в смысле пространств Фреше аналитических функций, заданных на них. Градуированное пространство Фреше — это набор $(Y, \|\cdot\|_s)$, где Y — пространство Фреше и $(\|\cdot\|_s)$ фиксированная система полунорм на Y, определяющая топологию.

Непрерывный линейный оператор T между двумя градуированными пространствами Фреше $(Y, \|\cdot\|_s)$ и $(Z, |\cdot|_k)$ называется *ручным*, если:

$$\exists A > 0 \ \forall k \ \exists C > 0 : |T(x)|_k \leqslant C \|x\|_{k+A} .$$

Два градуированных пространства Фреше называются *ручно изоморфными*, если существует взаимно однозначный ручной линейный оператор из одного в другое, обратный которому также ручной.

На многообразии Штейна X каждое исчерпание $(K_s)_{s=1}^{\infty}$ голоморфных выпуклых компактов таких, что $K_s \subset\subset intK_{s+1}$, $s = 1, 2, 3, \ldots$, индуцирует градуировку $\{\|\cdot\|_{K_s}\}$ на $\mathcal{O}(X)$, где $\|\cdot\|_{K_s}$ — нормы Чебышева на компактах K_s.

Теорема 2.3 (А. Айтуна, А. Садуллаев [5]). *Многообразие Штейна X размерности n является S^*-параболическим тогда и только тогда, когда существует исчерпание $(K_s)_{s=1}^{\infty}$ многообразия X такое, что градуированные пространства $(\mathcal{O}(X), \|\cdot\|_{K_s})$ и $(\mathcal{O}(\mathbb{C}^n), \|\cdot\|_{P_s})$ ручно изоморфны, где $P_s = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| \leqslant e^s\}$, $s = 1, 2, \ldots$*

Этот результат в некотором смысле показывает сходство пространства аналитических функций на S^*-параболических многообразиях и пространства аналитических функций на комплексных евклидовых пространствах.

В [5] получен критерий параболичности в терминах известной P-меры. Каждое многообразие Штейна можно должным образом вложить в комплексное пространство $\mathbb{C}^{2n+1}$, где $n = \dim X$. Пусть $w \in \mathbb{C}^{2n+1}$ и $\sigma(z)$ — ограничение $\ln|w|$ на X. Тогда псевдошары $B_R = \{z \in X : \sigma(z) < \ln R\} \subset\subset X$. Без ограничения общности считаем, что $0 \notin X$ и $B_1 \neq \varnothing$. Как обычно, определим известную P-меру компакта $\bar{B}_1$ относительно области B_R:

$$\omega(z, \bar{B}_1, B_R) = \sup\{u(z) \in psh(B_R) : u|_{\bar{B}_1} \leqslant -1, \ u|_{B_R} \leqslant 0\}.$$

Пусть $\omega(z, \bar{B}_1) = \lim\limits_{R \to \infty} \omega(z, \bar{B}_1, B_R)$.

Теорема 2.4 (А. Айтуна, А. Садуллаев). *Многообразие Штейна X является параболическим тогда и только тогда, когда $\omega(z, \bar{B}_1) \equiv -1$.*

Установлена связь параболичности многообразий Штейна с некоторыми линейными топологическими свойствами пространств Фреше аналитических функций на X. Пусть $\mathcal{O}(X)$ — пространство аналитических функций на X. Топология на $\mathcal{O}(X)$ — это топология равномерной сходимости на компактных подмножествах X. Эта топология делает $\mathcal{O}(X)$ ядерным пространством Фреше. Пространства Фреше X обладают свойством ДН (доминируемой нормы) Фогта в случае, если для системы $(\|\cdot\|_k)$ полунорм, порождающих топологию из X, выполнено

$$\exists k_0 : \forall p \ \exists q, \ C > 0 : \|x\|_p \leqslant C \|x\|_{k_0}^{\frac{1}{2}} \|x\|_q^{\frac{1}{2}}, \forall x \in X.$$

Следующий результат принадлежит А. Айтуна [4].

Теорема 2.5. *Для n-мерного многообразия Штейна X следующие условия эквивалентны*:

- *X является параболическим*;
- *$\mathcal{O}(X)$ обладает свойством ДН*;
- *$\mathcal{O}(X)$ изоморфно как пространство Фреше к $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$.*

Другая характеристическая теорема параболических многообразий в терминах операторов продолжения доказана Д. Фогтом (см. [19]). Здесь мы приводим этот результат в удобной (в смысле нашей терминологии) интерпретации. Многообразие Штейна является параболическим тогда и только тогда, когда всякий раз, когда оно вкладывается в многообразие Штейна как замкнутое подмногообразие, оно допускает непрерывный линейный оператор продолжения.

3. Многочлены на параболических многообразиях

В этом разделе рассмотрены некоторые свойства регулярных параболических многообразий и многочленов.

Пусть X — S-параболическое многообразие и $\rho(z)$ — специальная сюръективная функция psh. Через $psh(X)$ обозначим пространство всех плюрисубгармонических функций на X. Рассмотрим класс функций $u \in psh(X)$, удовлетворяющих условию

$$u(z) \leqslant c_u + \rho^+(z),\ z \in X,$$

с некоторой константой c_u, зависящей от функции u. Класс всех таких функций обозначим через $\mathfrak{A}_\rho(X)$. Этот класс называется *классом Лелонга* плюрисубгармонических функций. На компакте $E \subset\subset X$ определим функцию

$$V_\rho(z, E) = \sup\left\{u(z) : u \in \mathfrak{A}_\rho(X),\ u|_E \leqslant 0\right\}.$$

Верхняя регуляризация $V_\rho^*(z, E) = \varlimsup_{w \to z} V_\rho(w, E)$ называется *верхней ρ-функцией Грина* компакта E. Заметим, что для псевдошара $\bar{B}_r = \{z \in X : \rho(z) \leqslant \ln r\}$ функция Грина равняется

$$V_\rho(z, \bar{B}_r) = \max\left\{\rho(z) - \ln r,\, 0\right\}. \tag{3.1}$$

Для функции Грина либо $V_\rho \in psh\,(X)$, либо $V_\rho \equiv +\infty$. Более того, множество $E \subset X$ плюриполярно тогда и только тогда, когда $V_\rho^*(z, E) \equiv +\infty$.

Если $\ln|f\,(z)| \leqslant c + d\rho^+\,(z)$, то функция f называется *полиномиальной*. При этом $[\min d]$ есть $\deg f$. Для каждого многочлена $f(z) \in \mathcal{P}_\rho^d(X)$ и для произвольного компакта $E \subset X$ выполнено неравенство Бернштейна—Уолша

$$|f(z)| \leqslant \|f\|_E \cdot e^{d \cdot V_\rho(z,E)},\ z \in X, \tag{3.2}$$

где $\|f\|_E = \sup\limits_{z \in E} |f(z)|$ — норма Чебышева.

Действительно, если мы рассмотрим функцию $u(z) = \dfrac{1}{d} \ln \dfrac{|f(z)|}{\|f\|_E}$, тогда $u \in \mathfrak{A}_\rho(X)$, так как

$$u(z) = \frac{1}{d} \ln \frac{|f(z)|}{\|f\|_E} \leqslant \frac{1}{d} \ln \frac{c(1 + e^{\rho(z)})^d}{\|f\|_E} \leqslant c_u + \rho^+(z)$$

и $u(z)|_E \leqslant 0$. Следовательно, $u(z) = \dfrac{1}{d} \ln \dfrac{|f(z)|}{\|f\|_E} \leqslant V_\rho(z, E)$.

Следующая теорема является аналогом теоремы Столла 2.2 для регулярных параболических многообразий.

Теорема 3.1. *Пусть (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2) — регулярные параболические многообразия размерности n и m, соответственно. Определим многообразие $X = X_1 \times X_2$ размерности $k = n + m$ и проекции $\pi_1 : M \to X_1$, $\pi_2 : M \to X_2$. Тогда $X = X_1 \times X_2$ — регулярное параболическое многообразие со специальной сюръективной функцией $\rho = \ln(e^{2\rho_1 \circ \pi_1} + e^{2\rho_2 \circ \pi_2})$.*

Следствие 3.1. *Пусть (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2), (X_k, ρ_k) — регулярные параболические многообразия с размерностями $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Определим многообразие $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$ размерности*

$n = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ и проекции $\pi_1 : M \to X_1$, $\pi_2 : M \to X_2$, $\pi_k : M \to X_k$. Тогда X — регулярное параболическое многообразие со специальной сюръективной функцией

$$\rho = \ln(e^{2\rho_1\circ\pi_1} + e^{2\rho_2\circ\pi_2} + \ldots + e^{2\rho_k\circ\pi_k}).$$

Доказательство теоремы 3.1. Пусть $(X_1, \rho_1(z))$, $(X_2, \rho_2(w))$ — регулярные параболические многообразия размерности n и m, соответственно. Параболичность многообразия $X = X_1 \times X_2$ со специальной сюръективной функцией $\rho(z,w) = \ln\left(e^{2\rho_1(z)} + e^{2\rho_2(w)}\right)$ следует из теоремы 2.2. Рассмотрим многочлены на $X = X_1 \times X_2$ и докажем, что всякая аналитическая функция может быть приближена ρ-многочленами.

Сначала мы выразим ρ-многочлены через ρ_1- и ρ_2-многочлены. Пусть $f(z,w) \in \mathcal{O}(X)$ является ρ-многочленом степени $d > 0$, т. е. удовлетворяет условию

$$\ln|f(z,w)| \leqslant d \cdot \ln^+(e^{2\rho_1(z)} + e^{2\rho_2(w)}) + C.$$

Таким образом, если мы зафиксируем $z \in X_1$, то $f(z,w)$ — ρ_2-многочлен на X_2, и обратно, для всякой фиксированной $w \in X_2$ функция $f(z,w)$ — ρ_1-многочлен на X_1. Так как векторное пространство $\mathcal{P}^d_{\rho_2}(X_2)$ конечномерно, существует линейно независимые ρ_2-многочлены $Q_1(w), Q_2(w), \ldots, Q_s(w)$ такие, что

$$f(z,w) = c_1(z)\cdot Q_1(w) + c_2(z)\cdot Q_2(w) + \ldots + c_s(z) Q_s(w). \tag{3.3}$$

Покажем, что коэффициенты $c_j(z)$ выражения (3.3) являются ρ_1-многочленами на X_1. Поскольку $\det(Q_j(w))_{\substack{j=\overline{1,s}\\ k=\overline{1,s}}} \equiv 0$, существуют точки $w^1, w^2, \ldots, w^s \in X_2$ такие, что $\det(Q_j(w^k))_{\substack{j=\overline{1,s}\\ k=\overline{1,s}}} \neq 0$.

Следовательно, система

$$\begin{array}{l} f(z,w^1) = c_1(z)\cdot Q_1(w^1) + c_2(z)\cdot Q_2(w^1) + \ldots + c_s(z) Q_s(w^1), \\ f(z,w^2) = c_1(z)\cdot Q_1(w^2) + c_2(z)\cdot Q_2(w^2) + \ldots + c_s(z) Q_s(w^2), \\ \ldots \\ f(z,w^s) = c_1(z)\cdot Q_1(w^s) + c_2(z)\cdot Q_2(w^s) + \ldots + c_s(z) Q_s(w^s) \end{array} \tag{3.4}$$

имеет единственное решение $\{c_1(z), c_2(z), \ldots, c_s(z)\} \subset \mathcal{O}(X)$.

Коэффициенты $c_j(z)$ представляют собой линейную комбинацию ρ_1-многочленов $f(z,w^1)$, $f(z,w^2), \ldots, f(z,w^s)$, поэтому $c_j(z)$ являются ρ_1-многочленами. Следовательно, каждый ρ-многочлен на $X = X_1 \times X_2$ допускает конечное разложение по многочленам на X_1 и X_2:

$$f(z,w) = P_1(z)\cdot Q_1(w) + P_2(z)\cdot Q_2(w) + \ldots + P_s(z) Q_s(w). \tag{3.5}$$

Теперь покажем, что каждая аналитическая функция на X может быть приближена ρ-многочленами на компактных подмножествах X. Доказательство проведем в три этапа.

Этап 1. Пусть функция $f(z,w) \in \mathcal{O}(X)$ — ρ_2-многочлен относительно w на X_2 для каждого фиксированного $z \in X_1$. В этом случае мы имеем выражение

$$f(z,w) = c_1(z)\cdot Q_1(w) + c_2(z)\cdot Q_2(w) + \ldots + c_s(z) Q_s(w),$$

где коэффициенты $c_j(z)$ — аналитические на X_1. Таким образом, если мы зафиксируем компакт $K = K_1 \times K_2 \subset X$ и положим

$$M_j = \sup_{K_2} |Q_j(w)|,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ существуют ρ_1-многочлены $P_j(z)$ такие, что

$$\|c_j(z) - P_j(z)\|_{K_1} < \frac{\varepsilon}{sM_j}.$$

Следовательно,

$$\|f(z,w) - (P_1(z)\cdot Q_1(w) + P_2(z)\cdot Q_2(w) + \ldots + P_s(z)\cdot Q_s(w))\|_K < \varepsilon,$$

т. е. каждый квазиполином на X может быть приближен ρ-полиномами.

Этап 2. Пусть $(Y, \rho(\xi))$ — регулярное параболическое многообразие. Так как размерность пространства $\mathcal{P}^d_\rho(Y)$ конечна, $\dim \mathcal{P}^d_\rho(Y) < \infty$, оно имеет конечный базис. Отсюда следует, что пространство $\mathcal{P}_\rho(Y)$ всех многочленов сепарабельно и имеет счетную всюду плотную в $\mathcal{P}_\rho(Y)$ систему $\{q_j(\xi)\}_{j=1,2,\ldots} \subset \mathcal{P}_\rho(Y)$. Предположим, что $q_j(\xi) \not\equiv 0$.

Зафиксируем компакт $K \subset Y$ и псевдошар $B \supset K$. Возьмем замыкание $\mathcal{O}(Y)$ $L_2(\partial B)$ по норме $\|\cdot\|_{L_2(\partial B)}$. Так как $(Y, \rho(\xi))$ регулярно, замыкание системы $\{q_j(\xi)\}_{j=1,2,\dots}$ совпадает с $\mathcal{O}(Y)$. Ортонормируем систему $\{q_j(\xi)\}_{j=1,2,\dots}$ в $L_2(\partial B)$: $Q_j(\xi) = a_{j1}q_1(\xi) + a_{j2}q_2(\xi) + \ldots + a_{jj}q_j(\xi)$, $\int\limits_{\partial B} Q(\xi)_j \bar{Q}_k(\xi)\, d\sigma(\xi) = \delta_{jk}$.

Тогда произвольное $f(\xi) \in \mathcal{O}(Y)$ может быть выражено (в $L_2(\partial B)$) следующим образом:

$$f(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j Q_j(\xi), \quad c_j = \int\limits_{\partial B} f(\xi)\, \bar{Q}_j(\xi)\, d\sigma(\xi), \; j = 1, 2, \ldots \tag{3.6}$$

Ряд в (3.6) сходится в $L_2(\partial B)$, следовательно, он равномерно сходится в B. В частности, он равномерно сходится на $K \subset B$. Более того, выполняется равенство Парсеваля

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j \bar{c}_j = \|f\|^2_{L_2(\partial B)}. \tag{3.7}$$

Этап 3. Зафиксируем компакт $K = K_1 \times K_2 \subset X_1 \times X_2$ и псевдошары $B_1 \supset K_1$, $B_2 \supset K_2$. Составим также две полиномиальные системы $\{P_k(z)\}_{k=1,2,\dots}$ и $\{Q_j(w)\}_{j=1,2,\dots}$ в $L_2(\partial B_1)$ и $L_2(\partial B_2)$, соответственно. Поскольку $(X_2, \rho_2(w))$ регулярно, для любого фиксированного $z \in X_1$ функция $f(z, w)$ может быть выражена как

$$f(z,w) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(z)\, Q_j(w), \quad c_j(z) = \int\limits_{\partial B_2} f(z,w)\, \bar{Q}_j(w)\, d\sigma(w), \; j = 1, 2, \ldots \tag{3.8}$$

Из (3.7) следует, что $c_j(z) \in \mathcal{O}(X)$, $j = 1, 2, \ldots$ В силу этапа 1 псевдомногочлен $\sum\limits_{j=1}^{N} c_j(z)\, Q_j(w)$ равномерно приближается многочленами $P(z,w) \in \mathcal{P}_\rho(X)$ на каждом компакте $F \subset X$, в частности, на $K = K_1 \times K_2$.

С другой стороны,

$$\left\| f(z,w) - \sum_{j=1}^{N} c_j(z)\, Q_j(w) \right\|^2_{L_2(\partial B_2)} = \left\| \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j(z)\, Q_j(w) \right\|^2_{L_2(\partial B_2)} =$$

$$= \int\limits_{\partial B_2} \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j(z)\, Q_j(w) \sum_{j=N+1}^{\infty} \bar{c}_j(z)\, \bar{Q}_j(w)\; d\sigma(\partial B_2) =$$

$$= \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j(z)\, \bar{c}_j(z) \int\limits_{\partial B_2} \sum_{j=N+1}^{\infty} Q_j(w)\; \bar{Q}_j(w)\, d\sigma(\partial B_2) = \sum_{j=N+1}^{\infty} \|c_j(z)\|^2,$$

и при $N \to \infty$ сумма стремится к нулю для любого фиксированного $z \in \partial B_1$, а по теореме Леви

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{\partial B_1} \left\| f(z,w) - \sum_{j=1}^{N} c_j(z)\, Q_j(w) \right\|^2_{L_2(\partial B_2)} d\sigma(\partial B_1) = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{\partial B_1} \sum_{j=N+1}^{\infty} \|c_j(z)\|^2\, d\sigma(\partial B_1) = 0.$$

Это означает, что при $N \to \infty$ сумма $\sum\limits_{j=1}^{N} c_j(z)\, Q_j(w)$ сходится к $f(z,w)$ в пространстве $L_2(\partial B_1) \times L_2(\partial B_2)$. Тогда эта сумма равномерно сходится на каждом компакте в $B_1 \times B_2$, в частности, на $K = K_1 \times K_2 \subset X_1 \times X_2$. Теорема доказана. $\square$

4. Полнота алгеброидного множества Вейерштрасса

В этом разделе мы обсудим важный пример параболических многообразий и многочленов на этих многообразиях.

4.1. Пусть в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ задано полиномиальное множество Вейерштрасса

$$A = \left\{z = ('z, z_n) \in \mathbb{C}^n : F(z) =: z_n^m + f_{m-1}('z) z_n^{m-1} + \ldots + f_1('z) z_n + f_0('z) = 0\right\},$$

где $f_j('z),\ j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ — целые функции переменной $z' = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$. Тогда $X = \mathbb{C}^n \backslash A$ — S^*-параболическое с сюръективной функцией $\rho(z) = \dfrac{1}{2} \ln \left(|'z|^2 + \left| F(z) + \dfrac{1}{F(z)} \right|^2 \right)$.

Очевидно, что $\rho(z) \in psh(X)$ и достигает максимума вне конечного множества $Q = \{F('0, z_n) = 0\}$. Остается доказать, что эта функция сюръективна на X, т. е. мы должны показать, что

$$E_r = \{\rho(z) < r\} \subset\subset X,\ \forall r \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Действительно, если $F(z) = 0$, то $\rho(z) = +\infty$, так что $\rho(z)|_A = +\infty$. Когда все коэффициенты $f_j('z),\ j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ являются константами, (4.1) тривиально. Поэтому предположим, что хотя бы одна из функций $f_j('z),\ j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ не является константой. Тогда $M_r = \max\limits_{|'z| \leqslant r} \{|f_0(z)|, \ldots, |f_{m-1}(z)|\} \to +\infty$ при $r \to +\infty$.

При $|'z| = r,\ |z_n| = M_r^2$ имеем

$$\rho(z) = \frac{1}{2} \ln \left(|'z|^2 + \left| F(z) + \frac{1}{F(z)} \right|^2 \right) \geqslant \ln \frac{|F^2(z) + 1|}{|F(z)|} \geqslant$$

$$\geqslant \ln \frac{M_r^{4m} - C\left(M_r^{4m-1} + \ldots + M_r^2 + 1\right)}{M_r^{2m} + M_r^{2m-1} + \ldots M_r} = \ln M_r^{2m}(1 + \alpha_m(r)),$$

где $C = \mathrm{const}$ и $\alpha_m(r) \to 0$ при $r \to +\infty$. Если мы положим $U_r = \{|'z| \leqslant r,\ |z_n| \leqslant M_r^2\}$, то получим, что $\rho|_{\partial U_r} \to +\infty$ при $r \to +\infty$. Теперь рассмотрим множество $B_c = \{\rho(z) < c\}$, где c — константа. Это множество открыто, и если выбрать r достаточно большим, выполняются следующие неравенства:

$$\ln r \geqslant c, \quad \ln M_r^{2m}(1 + \alpha_m(r)) \geqslant c.$$

Тогда $B_c \subset\subset U_r$, так как B_c не имеет компонент на $X \backslash U_r$, поскольку $\rho(z)$ достигает максимума вне конечного множества $Q = \{F('0, z_n) = 0\}$.

Изучим структуру многочленов на X. Начнем со следующего интересного примера, предложенного А. Айтуной.

Пример 4.1. Если $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ определена как $F(z) = z_2 - e^{z_1}$, тогда $f(z) = z_2$ не является многочленом на X. Действительно, предположим, что $f(z) = z_2$ является многочленом, т. е. существуют константы d, c такие, что

$$|z_2| \leqslant c \left(1 + \sqrt{|z_1|^2 + \frac{|z_2 - e^{z_1} + 1|^2}{|z_2 - e^{z_1}|^2}} \right)^d, (z_1, z_2) \in X.$$

В частности, если $z = (\ln(k), k+1)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, будем иметь

$$k + 1 \leqslant c \left(1 + \sqrt{\overset{2}{\ln}(k) + 4} \right)^d, \quad k \in \mathbb{N},$$

что невозможно. Хотя фукция $f(z) = z_2$ — не многочлен, она может быть приближена многочленами.

Основной результат статьи представлен в виде следующей теоремы.

Теорема 4.1. *Пусть в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ задано алгеброидное множество Вейерштрасса*

$$A = \left\{ z = (`z, z_n) \in \mathbb{C}^n : F(z) =: z_n^m + f_{m-1}(`z) z_n^{m-1} + \ldots + f_1(`z) z_n + f_0(`z) = 0 \right\},$$

где все коэффициенты $f_j(`z)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$ — целые функции переменной $z' = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ и хотя бы один из них не является многочленом. Если $X = \mathbb{C}^n \backslash A$ — S^*-параболическое многообразие Штейна со специальной сюръективной функцией $\rho(z) = \dfrac{1}{2} \ln \left(|`z|^2 + \left| F(z) + \frac{1}{F(z)} \right|^2 \right)$, то функция $f \in \mathcal{O}(X)$ — ρ-многочлен степени d тогда и только тогда, когда она допускает конечное разложение

$$f(z) = \sum_{k=0}^{d} P_{k,1}('z) \left(F(z) + \frac{1}{F(z)} \right)^k + \sum_{k=0}^{d-1} P_{k,2}('z) \frac{1}{F(z)} \left(F(z) + \frac{1}{F(z)} \right)^k, \tag{4.2}$$

где $P_{k,1}('z)$ и $P_{k,2}('z)$ — обыкновенные полиномы в $\mathbb{C}^{n-1}$ степени $(d-k)$ и $(d-k-1)$, соответственно.

4.2. В доказательстве теоремы 4.1 мы часто используем разложение Якоби—Хартогса по секциональным лемнискатам. Напомним некоторые результаты из теории рядов Якоби—Хартогса (подробнее см. [3]. Нам будет удобно использовать переменные [3] из разложения Якоби—Хартогса для изучения рядов рациональных функций).

Пусть $Q(z)$ — рациональная функция $\mathbb{C}$, $Q(\infty) = \infty$. Через G_R обозначим объединение нескольких связных компонент открытого множества $\{z \in \mathbb{C} : |Q(z)| < R\}$ в комплексной плоскости, которое называется *рациональной лемнискатой*. Если функция $f(z)$ голоморфна в окрестности $\overline{G_R}$, тогда функция

$$F(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_R} \frac{f(\xi)}{Q(\xi) - w} \cdot \frac{Q(\xi) - Q(z)}{\xi - z} d\xi$$

голоморфна в области $G_R \times \{|w| < R\}$. Согласно интегральной формуле Коши, $F(z, Q(z)) \equiv f(z)$, $z \in G_R$. Разложим $F(z, w)$ в ряд Хартогса по переменной w:

$$F(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z) w^k. \tag{4.3}$$

Если мы положим $w = Q(z)$, то

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z) Q^k(z), \quad z \in G_R, \tag{4.4}$$

а ряд (4.3) называется рядом Якоби—Хартогса функции $f(z)$.

Коэффициенты в (4.4) могут быть определены по формуле

$$c_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_R} f(\xi) \frac{Q(\xi) - Q(z)}{Q^{k+1}(\xi)\,(\xi - z)} d\xi \quad (z \in G_R,\ k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.5}$$

Действительно,

$$\frac{1}{Q(\xi) - w} = \frac{1}{Q(\xi)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w}{Q(\xi)}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{w^k}{(Q(\xi))^{k+1}}.$$

Таким образом,

$$F(z, w) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_R} f(\xi) \cdot \frac{Q(\xi) - Q(z)}{Q^{k+1}(\xi)(\xi - z)} d\xi \right] \cdot w^k.$$

Это доказывает формулу (4.5). По интегральной формуле Коши контур ∂G_R может быть заменен любым контуром $\partial G_{R'}$, $R' < R$.

Если мы рассмотрим рациональную функцию $Q(z) = \dfrac{p_m(z)}{q_m(z)}$, где $p_m(z)$, $q_m(z)$ — полиномы ($\deg p_m \leqslant m,\ \deg q_m \leqslant m$), то в силу (4.5)

$$c_k(z) = \frac{1}{q_m(z)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_R} \frac{f(\xi)\, q_m^k(\xi)}{p_m^{k+1}(\xi)} \cdot \frac{p_m(\xi) \cdot q_m(z) - p_m(z) \cdot q_m(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Следовательно, коэффициенты $c_k(z) = \tilde{p}_{m-1}^{(k)}/q_m$ также являются рациональными функциями и $\deg c_k \leqslant m \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$c_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_R} f(\xi) \frac{Q(\xi) - Q(z)}{Q^{k+1}(\xi)\,(\xi - z)} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_r} \frac{f(\xi)}{Q^{k+1}(\xi)} \frac{Q(\xi) - Q(z)}{\xi - z}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_R} \frac{f(\xi)}{Q^{k+1}(\xi)} \frac{1}{q_m(\xi) q_m(z)} \frac{p_m(\xi) \cdot q_m(z) - p_m(z) \cdot q_m(\xi)}{\xi - z}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i q_m(z)} \int\limits_{\partial G_R} \frac{f(\xi)}{Q^{k+1}(\xi) q_m(\xi)} \frac{p_m(\xi) \cdot q_m(z) - p_m(z) \cdot q_m(\xi)}{\xi - z}\, d\xi;$$

т. е. $c_k\,(z)\, q_m\,(z)$ — полином по z_n степени $\deg = (m-1)$. Если $Q\,(z) = P\,(z)$, то

$$c_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_R} f(\xi) \frac{P(\xi) - P(z)}{P^{k+1}(\xi)\,(\xi - z)}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_R} \frac{f(\xi)}{P^{k+1}(\xi)} \frac{P(\xi) - P(z)}{\xi - z}\, d\xi,$$

$$|c_k(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{M_f\,(R)}{R^{k+1}} \int\limits_{\partial G_R} \left| \frac{P(\xi) - P(z)}{\xi - z} \right| d\,|\xi| \qquad (z \in G_R,\ k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Лемма 4.1. *Для любого монического многочлена $P(z)$ на комплексной плоскости выполняется неравенство*

$$\int\limits_{|P(\xi)|=R} \left| \frac{P(\xi) - P(z)}{\xi - z} \right| d\,|\xi| \leqslant C \cdot R \quad (|P(z)| < R).$$

Доказательство. Пусть $P\,(z) = z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ — монический многочлен. По разложению в ряд Тейлора получим

$$\frac{P(\xi) - P(z)}{\xi - z} = P'(z) + \frac{P''(z)}{2!}(\xi - z) + \ldots + \frac{P^{(m)}(z)}{m!}(\xi - z)^{m-1}$$

и рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{|P(\xi)|=R} \left| \frac{P(\xi) - P(z)}{\xi - z} \right| d\,|\xi|\,.$$

Разделим интеграл на две части:

$$\int\limits_{\substack{|P(\xi)|=R \\ |\xi - z| \geqslant \sqrt[m]{R}}} \left| \frac{P(\xi) - P(z)}{\xi - z} \right| d\,|\xi| + \int\limits_{\substack{|P(\xi)|=R \\ |\xi - z| < \sqrt[m]{R}}} \left| \frac{P(\xi) - P(z)}{\xi - z} \right| d\,|\xi| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\substack{|P(\xi)|=R \\ |\xi - z| \geqslant \sqrt[m]{R}}} \left| \frac{P(\xi) - P(z)}{\xi - z} \right| |d\xi| + \int\limits_{\substack{|P(\xi)|=R \\ |\xi - z| < \sqrt[m]{R}}} \left(\left|P'(z)\right| + \left| \frac{P''(z)}{2!} \right| \left|(\xi - z)\right| + \ldots + \left| \frac{P^{(m)}(z)}{m!} \right| \left|(\xi - z)^{m-1}\right| \right) |d\xi| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\substack{|P(\xi)|=R \\ |\xi - z| \geqslant \sqrt[m]{R}}} \frac{2R}{\sqrt[m]{R}}\, |d\xi| + \int\limits_{\substack{|P(\xi)|=R \\ |\xi - z| < \sqrt[m]{R}}} \left(\left|P'(z)\right| + \left| \frac{P''(z)}{2!} \right| \sqrt[m]{R} + \ldots + \left| \frac{P^{(m)}(z)}{m!} \right| \left(\sqrt[m]{R} \right)^{(m-1)} \right) |d\xi|\,.$$

В работе В. И. Данченко [1] доказана следующая оценка длины лемнискат:

$$\int\limits_{|P(\xi)|=R} |d\xi| \leqslant 2\pi m \sqrt[m]{R}.$$

Таким образом, получаем

$$\int\limits_{|P(\xi)|=R} \left|\frac{P(\xi)-P(z)}{\xi-z}\right| d|\xi| \leqslant 4\pi mR + 2\pi m \sqrt[m]{R}\left(\left|P'(z)\right| + \left|\frac{P''(z)}{2!}\right| \sqrt[m]{R} + \ldots + \left|\frac{P^{(m)}(z)}{m!}\right| \left(\sqrt[m]{R}\right)^{m-1}\right). \tag{4.6}$$

Теперь мы используем следующую теорему Померенко [12] для оценки производной многочлена $P_m(\xi)$, $m = \deg P_m$:

Пусть E — связное и замкнутое множество с положительной гармонической емкостью $\operatorname{cap} E > 0$. *Если на E выполняется неравенство $|P_m(\xi)| \leqslant 1$, тогда для всех $z \in E$ верна оценка*

$$\left|P'_m(\xi)\right| \leqslant \frac{e \cdot m^2}{2\operatorname{cap}(E)}.$$

Последовательно используя эту оценку для производных полиномиальных лемнискат $\bar{G}_R = \{|P_m(z)| \leqslant R\}$ и учитывая равенство $\operatorname{cap}(G_R) = \sqrt[m]{R}$, получаем

$$\left|P_m^{(j)}(z)\right| \leqslant \frac{e^j m^2 (m-1)^2 \ldots (m-j+1)^2}{2^j \sqrt[m]{R^j}} R = L(m,j) \cdot R^{\frac{m-j}{m}}, \quad |P_m(z)| < R,$$

где $L(m,j)$ — константы, которые зависят только от степени многочлена и порядка производной j. Применяя оценки производных к (4.6), мы завершаем доказательство. □

Теорема 4.2 (см. [3]). *Область сходимости ряда* (4.4) *является лемнискатой* $\{|g(z)| < R\}$, *где R определено формулой*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\|c_k\|_E}},$$

где E — любое фиксированное неполярное множество, отделенное от множества полярных точек рациональной функции $Q(z)$.

Случай $'D \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^n$.

Пусть теперь $Q('z, z_n) = \dfrac{a_0('z) z_n^m + \ldots + a_m('z)}{b_0('z) z_n^k + \ldots + b_k('z)}$, $m > k \geqslant 0$, $a_j, b_s \in \mathcal{O}('D)$ — произвольная псевдорациональная функция на $'D \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^n$. Зафиксируем $'z \in' D$. Рассмотрим $G_{'z,r} = \{z_n \in \mathbb{C}_{z_n},\ |Q('z, z_n)| < R\}$. Это множество состоит из конечного числа областей.

Тогда, если функция $f('z, z_n)$ голоморфна в области $'D \times G_{'z,r}$, она может быть разложена в ряд Якоби—Хартогса:

$$f('z, z_n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k('z, z_n) \cdot g^k(z_n), \tag{4.7}$$

где $c_k('z, z_n) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial G_r} f('z, \xi_n) \cdot \frac{Q('z, \xi_n) - Q('z, z_n)}{Q^{k+1}(\xi_n)(\xi_n - z_n)} d\xi_n$.

Очевидно, что коэффициенты $c_k('z, z_n)$ — рациональные функции по z_n, коэффициенты которых голоморфны в $'D$.

Теорема 4.3 (см. [3]). *Ряд Якоби—Хартогса* (4.7) *равномерно сходится на компактных подмножествах открытого множества*

$$\{('z, z_n) \in' D \times \mathbb{C} : \left|Q('z, z_n)\right| < R_*('z)\},$$

где $R('z) = 1/(\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\|c_k('z, z_n)\|_E})$, $E \subset G_{'z,r} \in \mathbb{C}$ — *любое фиксированное неплюриполярное множество, и* $R_*('z) = \underline{\lim\limits_{'\xi\to'z}} R('\xi)$. (*Заметим, что $R(`z)$ не зависит от $E \subset G_{'z,r}$.*) *Более того,* *функция* $u('z) = -\ln R_*('z)$ *плюрисубгармонична в* $'D$, *и множество* $\{'z \in D;\ R_*('z) < R('z)\}$ *плюриполярно.*

Прежде чем мы перейдем к доказательству основной теоремы этого раздела, докажем еще одну лемму о свойствах многочленов на рассматриваемых многообразиях.

Лемма 4.2. *Пусть задано алгеброидное множество Вейерштрасса в комплексном пространстве* $\mathbb{C}^n$

$$A = \left\{z = ('z, z_n) \in \mathbb{C}^n : F(z) =: z_n^m + f_{m-1}('z)z_n^{m-1} + \ldots + f_1('z)z_n + f_0('z) = 0t\right\},$$

где все коэффициенты $f_j('z)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$ — *целые функции переменной* $'z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ *и хотя бы одна из них не является многочленом. Если* $X = \mathbb{C}^n \backslash A$ — S^**-параболическое многообразие Штейна со специальной сюръективной функцией* $\rho(z) = \dfrac{1}{2}\ln\left(|'z|^2 + \left|F(z) + \frac{1}{F(z)}\right|^2\right)$, *тогда каждый многочлен*

$$P('z) = \sum_{k_1+\ldots+k_{n-1} \leqslant s} a_{k_1\ldots k_{n-1}} z_1^{k_1}\ldots z_{n-1}^{k_{n-1}}$$

степени s *в то же время является* ρ*-многочленом степени* s *на* $X = \mathbb{C}^n \backslash A$ *и произведение* $P('z)$ *на* ρ*-многочлен вида* $\phi(z) = \left(F('z, z_n) + \dfrac{1}{F('z, z_n)}\right)^q$ *является* ρ*-многочленом степени* $\deg_{(X,\rho)} P('z)\phi(z) = s + q.$

Доказательство. Неравенства $\deg_{(X,\rho)} P('z) \leqslant s$ и $\deg_{(X,\rho)} P('z)\phi(z) \leqslant s + q$ тривиальны. Достаточно показать, что $\deg_{(X,\rho)} P('z)\phi(z) = s + q$. Предположим противное, т. е. что выполняется неравенство

$$\deg_{(X,\rho)} P('z)\phi(z) \leqslant s + q - \varepsilon$$

для достаточно малого действительного числа $\varepsilon > 0$. Тогда выполняется неравенство

$$\ln\left|P('z) \cdot \phi(z)\right| = M + (s+q-\varepsilon) \cdot \rho^+(z) \leqslant M + (s+q-\varepsilon) \cdot \frac{1}{2}\ln\left(1 + \left|'z\right|^2 + \left(F(z) + \frac{1}{F(z)}\right)^2\right). \quad (4.8)$$

Перепишем многочлен в виде суммы однородных многочленов:

$$P('z) = \sum_{k=0}^{s} P_s('z).$$

Так как $\deg P('z) = s$, $P_s('z) \not\equiv 0$ и, следовательно, существует $'w = (w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$, $|'w| = 1$ такое, что $P_s('w) \neq 0$. Рассмотрим комплексную прямую $\ell :\ 'z = 'w \cdot \lambda,\ \lambda \in \mathbb{C}$ и ограничение

$$g(\lambda) = P('z)\big|_\ell = P('w \cdot \lambda) = P_s('w) \cdot \lambda^s + P_{s-1}('w) \cdot \lambda^{s-1} + \ldots + P_0$$

Если мы положим $\lambda = R$, тогда

$$\left|P('w \cdot R)\right| = \left|P_s('w)\right| \cdot R^s(1 + P_{s-1}('w)\frac{1}{R} + o(\frac{1}{R})) \quad (4.9)$$

для достаточно большого числа $R > 0$. Если в оценке (4.7) положить $|z_1| = |w_1| \cdot R, \ldots, |z_{n-1}| = |w_{n-1}| \cdot R$ и $\left|F(z) + \dfrac{1}{F(z)}\right| = R$, тогда мы получим

$$\left|P('z) \cdot \phi(z)\right| \leqslant C \cdot \left(1 + \sqrt{2R^2}\right)^{s+q-\varepsilon} \leqslant 3C \cdot R^{s+q-\varepsilon}.$$

Последняя оценка остается верной и в случае ограничения $P('z) \cdot \phi(z)\big|_\ell = P('w\lambda) \cdot \phi('w\lambda, z_n)$, и мы будем иметь

$$\left|P_s('z) \cdot \phi(z)\big|_\ell\right| \leqslant 3C \cdot R^{s+q-\varepsilon}$$

Объединяя последнее неравенство с (4.8), мы получаем

$$3C \cdot R^{s+q-\varepsilon} \geqslant \left|P('wR) \cdot \phi('w\lambda, z_n)\right| = \left|P_s('w)\right| \cdot R^s(1 + P_{s-1}('w)\frac{1}{R} + o(\frac{1}{R}))R^q =$$

$$= \left|P_s('w)\right| \cdot (1 + P_{s-1}('w)\frac{1}{R} + o(\frac{1}{R}))R^{s+q},$$

$$R^{\varepsilon}(1 + \frac{P_{s-1}('w)}{R}1 + o(\frac{1}{R})) \leqslant \frac{3C}{\left|P_s('w)\right|}.$$

Последнее неравенство противоречит произвольности R. Таким образом, наше предположение неверно. Лемма 4.2 доказана. □

Доказательство теоремы 4.1.

I. *Достаточность*. Пусть задана функция вида

$$f('z, z_n) = \sum_{k=0}^{d} P_{k,1}('z) \cdot Q^k('z, z_n) + \frac{1}{F('z, z_n)} \sum_{k=0}^{d-1} P_{k,2}('z) \cdot Q^k('z, z_n),$$

где $P_{k,1}('z)$ и $P_{k,2}('z)$ — полиномы в $\mathbb{C}^{n-1}_{'z}$ степени $\deg P_{k,1}('z) \leqslant d-k$, $\deg P_{k,2}('z) \leqslant d-k-1$. Тогда мы оцениваем слагаемые

$$\ln\left|P^{k,1}('z)\right|\left|F(z) + \frac{1}{F(z)}\right|^k \leqslant \ln\left|P^{k,1}('z)\right| + \ln\left|F(z) + \frac{1}{F(z)}\right|^k \leqslant$$

$$\leqslant (d-k)\ln\left|'z\right| + k\ln\left|F(z) + \frac{1}{F(z)}\right| + C \leqslant (d-k)\rho^+(z) + k\rho^+(z) + C = d\rho^+(z) + C$$

и

$$\ln\left[\left|\frac{1}{F(z)}\right|\left|P^{k,1}('z)\right|\left|F(z) + \frac{1}{F(z)}\right|^k\right] = \ln\left|\frac{1}{F(z)}\right| + \ln\left|P^{k,1}('z)\right| + \ln\left|F(z) + \frac{1}{F(z)}\right|^k \leqslant$$

$$\leqslant \rho^+(z) + (d-k-1)\cdot\rho^+(z) + k\cdot\rho^+(z) + C = d\cdot\rho^+(z) + C.$$

Следовательно, каждое слагаемое в f — многочлен на X и $\deg_{(X,\rho)} f('z, z_n) \leqslant d$.

II. *Необходимость*. Докажем необходимость, т. е. что каждый ρ-многочлен в X допускает конечное разложение (4.1), в несколько этапов.

Этап 1. Пусть функция $f \in O(X)$ — ρ-многочлен степени d. Рассмотрим следующую рациональную функцию переменной z_n:

$$Q('z, z_n) = F('z, z_n) + \frac{1}{F('z, z_n)} = \frac{F^2('z, z_n) + 1}{F('z, z_n)},\ ('z, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ \ Q('z, \infty) = \infty.$$

Зафиксируем $'z \in \mathbb{C}^{n-1}$ и рассмотрим рациональную лемнискату

$$G_{'z,R} = \left\{z_n \in \mathbb{C}:\ \left|Q('z, z_n)\right| < R\right\},\ R \geqslant 1.$$

Граница этой лемнискаты $\gamma_{'z,R}('z) = \left\{\left|Q('z, z_n)\right| = R\right\}$ состоит из конечного числа гладких кривых для почти всех значений $R \in \mathbb{R}_+$. Очевидно, $\forall R > 0$, $\forall 'z \in \mathbb{C}^{n-1}$, $G_{'z,R} \subset\subset X$. Разложим функцию $f('z, z_n)$ в ряд Якоби—Хартогса по степеням рациональной функции $Q('z, z_n)$:

$$f('z, z_n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k('z, z_n) \cdot Q^k('z, z_n). \tag{4.10}$$

Коэффициенты ряда (4.10) определяются интегральной формулой

$$c_k('z, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{'z,R}} \frac{f('z, \xi_n)}{Q^{k+1}('z, \xi_n)} \cdot \frac{Q('z, \xi_n) - Q('z, z_n)}{(\xi_n - z_n)} d\xi_n. \tag{4.11}$$

При $Q('z, z_n) = F('z, z_n) + \dfrac{1}{F('z, z_n)}$ интегрирование по $\gamma_{'z,R}$ в (4.11) может быть заменено на разницу интегралов по полиномиальным лемнискатам:

$$\Gamma_{'z,\frac{R}{4}} = \left\{\left|F('z, \xi_n)\right| = \frac{R}{4}\right\},\quad \Gamma_{'z,\frac{4}{R}} = \left\{\left|F('z, \xi_n)\right| = \frac{4}{R}\right\}.$$

Заметим, что

$$\frac{Q('z,\xi_n)-Q('z,z_n)}{\xi_n-z_n}=\frac{1}{\xi_n-z_n}\cdot\left[F\left('z,\,\xi_n\right)+\frac{1}{F\left('z,\,\xi_n\right)}-F\left('z,\,z_n\right)-\frac{1}{F\left('z,\,z_n\right)}\right]=$$
$$=\frac{F\left('z,\,\xi_n\right)-F\left('z,\,z_n\right)}{\xi_n-z_n}\cdot\left[1-\frac{1}{F\left('z,\,\xi_n\right)F\left('z,\,z_n\right)}\right].$$

Соответственно, мы получаем

$$c_k('z,z_n)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{R}{4}}}\frac{f('z,\xi_n)}{Q^{k+1}('z,\xi_n)}\cdot\frac{F\left('z,\,\xi_n\right)-F\left('z,\,z_n\right)}{(\xi_n-z_n)}d\xi_n-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{4}{R}}}\frac{f('z,\xi_n)}{Q^{k+1}('z,\xi_n)}\cdot\frac{F\left('z,\,\xi_n\right)-F\left('z,\,z_n\right)}{(\xi_n-z_n)}d\xi_n-$$
$$-\frac{1}{F\left('z,\,z_n\right)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{R}{4}}}\frac{f('z,\xi_n)}{Q^{k+1}('z,\xi_n)F\left('z,\,\xi_n\right)}\cdot\frac{F\left('z,\,\xi_n\right)-F\left('z,\,z_n\right)}{(\xi_n-z_n)}d\xi_n+$$
$$+\frac{1}{F\left('z,\,z_n\right)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{4}{R}}}\frac{f('z,\xi_n)}{Q^{k+1}('z,\xi_n)F\left('z,\,\xi_n\right)}\cdot\frac{F\left('z,\,\xi_n\right)-F\left('z,\,z_n\right)}{(\xi_n-z_n)}d\xi_n=$$
$$=P_{m-1}^{k,1}\left('z,z_n\right)-P_{m-1}^{k,2}\left('z,z_n\right)\cdot\frac{1}{F\left('z,\,z_n\right)},$$

и все коэффициенты ряда (4.10) являются рациональными функциями z_n степени $\leqslant 2m-1$ с голоморфными коэффициентами, т. е. $\deg_{z_n}\left[c_k('z,z_n)F\left('z,z_n\right)\right]\leqslant 2m-1$.

Этап 2. Так как $f('z,z_n)$ — ρ-многочлен степени d, то

$$\ln\left|f('z,z_n)\right|\leqslant c+d\rho^+(z),\quad \rho(z)=\frac{1}{2}\ln\left(\left|'z\right|^2+\left|Q('z,z_n)\right|^2\right).$$

Из неравенства

$$\rho^+(z)\leqslant\frac{1}{2}\ln\left(1+\left|'z\right|^2+\left|Q('z,z_n)\right|^2\right)$$

получаем

$$\left|f('z,z_n)\right|\leqslant C\cdot\left(1+\left|'z\right|^2+R^2\right)$$

при $z_n\in\gamma_{'z,R}$ и, таким образом, для $R>4$ мы получаем оценки

$$\left|P_{m-1}^{k,1}\left('z,z_n\right)\right|=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{R}{4}}}\frac{f('z,\xi_n)}{Q^{k+1}('z,\xi_n)}\frac{F\left('z,\,\xi_n\right)-F\left('z,\,z_n\right)}{(\xi_n-z_n)}d\xi_n-\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{4}{R}}}\frac{f('z,\xi_n)}{Q^{k+1}('z,\xi_n)}\frac{F\left('z,\,\xi_n\right)-F\left('z,\,z_n\right)}{(\xi_n-z_n)}d\xi_n\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{R}{4}}}\left|\frac{f('z,\xi_n)}{Q^{k+1}('z,\xi_n)}\right|\cdot\left|\frac{F\left('z,\,\xi_n\right)-F\left('z,\,z_n\right)}{(\xi_n-z_n)}\right|\left|d\xi_n\right|+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{4}{R}}}\left|\frac{f('z,\xi_n)}{Q^{k+1}('z,\xi_n)}\right|\cdot\left|\frac{F\left('z,\,\xi_n\right)-F\left('z,\,z_n\right)}{(\xi_n-z_n)}\right|\left|d\xi_n\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{C\left[\left(1+\left|'z\right|^2+R^2\right)\right]^{d/2}}{2\pi}\frac{1}{\left(\frac{R}{4}-\frac{4}{R}\right)^{k+1}}\left[\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{R}{4}}}\left|\frac{F\left('z,\,\xi_n\right)-F\left('z,\,z_n\right)}{(\xi_n-z_n)}\right|\left|d\xi_n\right|+\right.$$

$$+\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{4}{R}}}\left|\frac{F\left('z,\,\xi_n\right)-F\left('z,\,z_n\right)}{\left(\xi_n-z_n\right)}\right||d\xi_n|\Bigg];$$

$$\left|P^{k,2}_{m-1}\left('z,z_n\right)\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{R}{4}}}\left|\frac{f('z,\xi_n)}{Q^{k+1}('z,\xi_n)F\left('z,\,\xi_n\right)}\right|\cdot\left|\frac{F\left('z,\,\xi_n\right)-F\left('z,\,z_n\right)}{\left(\xi_n-z_n\right)}\right||d\xi_n|+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{4}{R}}}\left|\frac{f('z,\xi_n)}{Q^{k+1}('z,\xi_n)F\left('z,\,\xi_n\right)}\right|\cdot\left|\frac{F\left('z,\,\xi_n\right)-F\left('z,\,z_n\right)}{\left(\xi_n-z_n\right)}\right||d\xi_n|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C\Big[\Big(1+|`z|^2+R^2\Big)\Big]^{d/2}}{2\pi}\frac{1}{\left(\frac{R}{4}-\frac{4}{R}\right)^{k+1}}\frac{4}{R}\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{R}{4}}}\left|\frac{F\left('z,\,\xi_n\right)-F\left('z,\,z_n\right)}{\left(\xi_n-z_n\right)}\right||d\xi_n|+$$

$$+\frac{C\Big[\Big(1+|`z|^2+R^2\Big)\Big]^{d/2}}{2\pi}\frac{1}{\left(\frac{R}{4}-\frac{4}{R}\right)^{k+1}}\frac{R}{4}\int\limits_{\Gamma_{'z,\frac{4}{R}}}\left|\frac{F\left('z,\,\xi_n\right)-F\left('z,\,z_n\right)}{\left(\xi_n-z_n\right)}\right||d\xi_n|.$$

Таким образом, в силу леммы 4.1 для всех $\forall 'z\in\mathbb{C}^{n-1}$ и $\forall z_n\in\Omega_{'z,R}=\left\{\frac{4}{R}<|F('z,z_n)|<\frac{R}{4}\right\}$ мы получаем

$$\left|P^{k,1}_{m-1}('z,z_n)\right|\leqslant C_1\Big[\Big(1+\left|'z\right|^2+R^2\Big)\Big]^{d/2}R^{-k},$$
$$\left|P^{k,2}_{m-1}('z,z_n)\right|\leqslant C_2\Big[\Big(1+\left|'z\right|^2+R^2\Big)\Big]^{d/2}R^{-k-1}.\tag{4.12}$$

Следовательно, в силу произвольности R

$$P^{k,1}_{m-1}('z,z_n)\equiv 0\ \forall k>d,\ \ P^{k,2}_{m-1}('z,z_n)\equiv 0\ \forall k>d-1,$$

т. е.

$$f('z,z_n)=\sum_{k=0}^{d}P^{k,1}_{m-1}('z,z_n)\cdot Q^k('z,z_n)+\frac{1}{F('z,z_n)}\sum_{k=0}^{d-1}P^{k,2}_{m-1}('z,z_n)\cdot Q^k('z,z_n).\tag{4.13}$$

Этап 3. На этом этапе мы покажем, что псевдомногочлены $P^{k,1}_{m-1}('z,z_n)$, $P^{k,2}_{m-1}('z,z_n)$ не зависят от z_n. Для этого мы воспользуемся леммой Картана об оценке модуля многочленов.

Лемма (лемма Картана, см. [13]). *Для любого действительного числа $\varepsilon>0$ и для каждого многочлена $p(\lambda)=(\lambda-\alpha_1)\dots(\lambda-\alpha_n)$ существует система дисков на комплексной плоскости с общей суммой радиусов ε такая, что вне этих дисков выполняется неравенство*

$$|p(\lambda)|=|(\lambda-\alpha_1)\dots(\lambda-\alpha_n)|>\left(\frac{\varepsilon}{e}\right)^n.$$

Следствие. *Для любого $\varepsilon>0$ существует действительное число $\alpha(\varepsilon)>0$ и радиусы $r_j>0$ такие, что $\sum r_j<\varepsilon$ и для всех многочленов вида $p(\lambda)=1+{}_1\lambda+\ldots+c_n\lambda^n$ существуют диски $B_j=\{|\lambda-b_j|<r_j\}$ в диске $|\xi|<1$ такие, что вне всех этих дисков выполняется неравенство $|p(\lambda)|>\alpha(\varepsilon)>0$.*

Предположим, что $P^{k,1}_{m-1}('z,z_n)$ представляется в виде

$$P^{k,1}_{m-1}('z,z_n)=a_0('z)+a_1('z)z_n+\ldots+a_s('z)z_n^s,$$

где коэффициенты $a_j('z)$, $j=0,1,\ldots,s$, $s\geqslant 0$, $a_s('z)\not\equiv 0$, — целые функции переменной $z=(z_1,z_2,\ldots,z_{n-1})\in\mathbb{C}^{n-1}$. Из (4.12) имеем

$$\left|P^{k,1}_{m-1}('z,z_n)\right|\leqslant C_1\Big[\Big(1+\left|'z\right|^2+R^2\Big)\Big]^{d/2}R^{-k},\ z\in\mathbb{C}^{n-1},\ \frac{4}{R}<\left|F('z,z_n)\right|<\frac{R}{4}.$$

Мы показали, что эта оценка противоречит нашему предположению. Зафиксируем положительное большое число $L \in \mathbb{N}$ и положим $G_{'z} = \left\{ \frac{4}{R} < |F('z, z_n)| < \frac{R}{4},\ |z_n| > \|'z\|^L \right\}$. Так как F не является многочленом (по $'z$), для каждого фиксированного L множество $G_{'z}$ — достаточно большое. Но для $|z_n| > 1$, $|a_s('z)| > \delta > 0$ (заметим, что мы предположили $a_s('z) \not\equiv 0$) имеем

$$\left|P^{k,1}_{m-1}('z, z_n)\right| = \left|a_0('z) + \ldots + a_s('z)\, z_n^s\right| =$$

$$= \left|a_s('z)\right| |z_n^s| \left|1 + d_1('z)\frac{1}{z_n} + \ldots + d_s('z)\frac{1}{z_n^s}\right| > \delta\, |z_n^s| \left|1 + d_1('z)\frac{1}{z_n} + \ldots + d_s('z)\frac{1}{z_n^s}\right|.$$

Если мы положим $\zeta_n = \frac{1}{z_n}$ и зафиксируем достаточно малое число $\varepsilon > 0$, тогда по следствию из леммы Картана существуют диски $B_j('z) \subset \{|\zeta| < 1\}$, зависящие от $'z$ и такие, что $\sum r_j < \varepsilon$ и выполняется

$$\left|1 + d_1('z)\,\zeta_n + \ldots + d_s('z)\,\zeta_n^s\right| \geqslant \alpha(\varepsilon), \quad \zeta \notin B_j.$$

Следовательно, для $z_n \in G_{'z},\ |a_s('z)| > \delta,\ z_n \notin B'_j('z)$, где $B'_j('z)$ — образ шара $B_j('z) \subset \{|\zeta| < 1\}$ при отображении $\zeta_n = \frac{1}{z_n}$,

$$\left|P^{k,1}_{m-1}('z, z_n)\right| > \delta \left|'z\right|^{s\cdot L} \alpha(\varepsilon), \quad z_n \notin B'_j('z).$$

Если мы выберем L и R достаточно большим, то $G_{'z} \setminus \bigcup_j B'_j('z) \neq \varnothing$ и, таким образом,

$$\delta \left|'z\right|^{s\cdot L} \alpha(\varepsilon) < C_1 \left[\left(1 + \left|'z\right|^2 + R^2\right)\right]^{d/2} R^{-k}.$$

Это противоречит нашему предположению при $s \neq 0$. Таким образом, $P^{k,1}_{m-1}('z, z_n)$ не зависит от z_n и по оценкам является многочленом по $'z$ степени $\leqslant d$, т. е.

$$P^{k,1}_{m-1}('z, z_n) = P_{k,1}('z).$$

Аналогично, мы можем показать, что $P^{k,2}_{m-1}('z, z_n)$ так же не зависит от z_n и является многочленом по $'z$ степени $\leqslant d$, т. е. $P^{k,2}_{m-1}('z, z_n) = P_{k,1}('z)$. Таким образом,

$$f('z, z_n) = \sum_{k=0}^{d} P_{k,1}('z) \cdot Q^k('z, z_n) + \frac{1}{F('z, z_n)} \sum_{k=0}^{d-1} P_{k,2}('z) \cdot Q^k('z, z_n). \tag{4.14}$$

Завершим доказательство теоремы 4.1, уточнив степени многочленов $P_{k,1}('z), P_{k,2}('z)$.

Итак, имеет место разложение (4.14) и, поскольку в левой части равенства стоит ρ-многочлен f степени d, то степень каждого слагаемого в левой части должна быть меньше или равна d (поскольку при фиксированном $'z$ функции $Q^k('z, z_n)$ линейно независимы). Следовательно, мы получаем неравенства

$$\deg P^{k,1}('z) \leqslant d - k, \quad \deg P^{k,2}('z) \leqslant d - k - 1.$$

В противном случае по лемме 4.2 в правой части равенства стоит ρ-многочлен высшей степени. Теорема 4.1 доказана. □

Пример 4.2. Для $A = \left\{z_2^2 - e^{z_1} = 0\right\} \subset \mathbb{C}^2$ многообразие $X = \mathbb{C}^2 \setminus A$ не регулярно. Функция $F(z) = z_2$ разделяет точки $(0, +2)$, $(0, -2)$. Но многочлены

$$\sum_{k=0}^{d} P_{k,1}(z_1) \left(z_2^2 - e^{z_1} + \frac{1}{{z_2}^2 - e^{z_1}}\right)^k + \sum_{k=0}^{d-1} P_{k,2}(z_1) \frac{1}{{z_2}^2 - e^{z_1}} \left({z_2}^2 - e^{z_1} + \frac{1}{{z_2}^2 - e^{z_1}}\right)^k$$

не разделяют их.

Пример 4.3. Если $A = \{z_n - \varphi('z) = 0\} \subset \mathbb{C}^n$ является графом, то многообразие $X = \mathbb{C}^n \setminus A$ регулярно, потому что в этом случае $f(z) = z_n$ можно аппроксимировать полиномами на $X = \mathbb{C}^n \setminus A$. В самом деле, если мы обозначим через $T_k : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}$ многочлен Тейлора степени k для $\varphi('z)$, то легко убедиться, что $P_k(z) = F(z) - T_k('z)$ — полином на X и $P_k(z)$ аппроксимирует z_n на компактных подмножествах X.

Пример 4.4. Если $A = \{P(z) = 0\} \subset \mathbb{C}^n$ является алгебраическим, то многообразие $X = \mathbb{C}^2 \backslash A$ регулярно. Рассмотрим правильное погружение X в пространство $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C}^n_z \times \mathbb{C}_w$ по формуле $z \to \left(z, \dfrac{1}{P(z)}\right)$. Тогда X реализуется как алгебраическое множество $X = \{w \cdot P(z) = 1\}$. Теперь мы можем использовать технику примера 4.3: после соответствующего унитарного преобразования $U : ('z, z_n, w) \to ('\xi, \xi_n, \xi_{n+1})$ будем иметь $X \subset \{('\xi, \xi_n, \xi_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : \ \|\xi_{n+1}\| < C(1 + (|'\xi|^2 + |\xi_n|^2)^k)\}$, где C, k — константы. Тогда, если мы положим $\rho(w) = \dfrac{1}{2}\ln\left(|'\xi|^2 + |\xi_n|^2\right)$, то сужение $\rho|_A$ — специальная сюръективная функция для X. Ясно, что многочлены на A являются сужениями многочленов $p('\xi, \xi_n, \xi_{n+1})$ в $\mathbb{C}^{n+1}$. Следовательно, $\mathcal{P}^d_\rho(X)$ плотно в $\mathcal{O}(X)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Данченко В. И.* Длины лемнискат. Вариации рациональных функций// Мат. сб. — 2007. — *198*, № 8. — С. 1111–1117.
2. *Садуллаев А. С.* Дефектные дивизоры в смысле Валирона// Мат. сб. — 1979. — *108*, № 4. — С. 567–580.
3. *Садуллаев А. С., Чирка Е. М.* О продолжении функций с полярными особенностями// Мат. сб. — 1987. — *132*, № 3. — С. 383–390.
4. *Aytuna A., Krone J., Terzioglu T.* Complemented infinite type power series subspaces of nuclear Frechet spaces// Math. Ann. — 1989. — *283*, № 2. — С. 193–202.
5. *Aytuna A., Sadullaev A.* Parabolic Stein manifolds// Math. Scand. — 2014. — *114*, № 1. — С. 86–109.
6. *Aytuna A., Sadullaev A.* Polynomials on parabolic manifolds// В сб.: «Topics in several complex variables. First USA–Uzbekistan conference on analysis and mathematical physics, California State University, Fullerton, CA, USA, May 20–23, 2014. Proceedings». — Providence: Am. Math. Soc., 2016. — С. 1–22.
7. *Bedford E., Kalka M.* Foliations and complex Monge—Ampere equations// Commun. Pure Appl. Math. — 1977. — *30*. — С. 543–571.
8. *Demailly J. P.* Mesures de Monge—Ampere et caractrisation geometrique des variets algebriques// Mem. Soc. Math. Fr. (N.S.). — 1985. — *19*. — С. 1–124.
9. *Foote R. E.* Homogeneous complex Monge—Ampere equations and algebraic embeddings of parabolic manifolds// Indiana Univ. Math. J. — 1990. — *39*, № 4. — С. 1245–1273.
10. *Griffits P., King J.* Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties// Acta Math. — 1973. — *130*. — С. 145–220.
11. *Kalka M., Patrizio G.* Splitting parabolic manifolds// ArXiv. — 2014. — 1409.3972v1 [mathCV].
12. *Pomerenko Ch.* On derivative of a polynomial// Michigan Math. J. — 1959. — *6*, № 4. — С. 373–375.
13. *Poppenberg M.* Tame subspaces of power series spaces// В сб.: «Functional analysis. Proceedings of the first international workshop held at Trier University, Germany, September 26 – October 1, 1994». — Berlin: de Gruyter, 1996. — С. 365-375.
14. *Rudin W.* A geometric criterion for algebraic varieties// J. Math. Mech. — 1968. — *17*. — С. 671–683.
15. *Shabat B. V.* Introduction to complex analysis. Part II: Functions of several variables. — Providence: Am. Math. Soc., 1992.
16. *Snaebjarnarson A. S.* Rapid polynomial approximation on Stein manifolds// ArXiv. — 2016. — 1612.06173v1 [math.CV].
17. *Stoll W.* Value distribution on parabolic spaces. — Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1977.
18. *Stoll W.* The characterization of strictly parabolic manifolds// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4). — 1980. — *7*. — С. 87–154.
19. *Vogt D.* Charakterisierung der Unterräume von (s)// Math. Z. — 1977. — *155*, № 2. — С. 109–111.
20. *Zeriahi A.* Function de Green pluricomplex a pole a l'infini sur un espace de Stein parabolique// Math. Scand. — 1991. — *69*. — С. 89–126.

А. А. Атамуратов
Ургенчский государственный университет им. Аль-Хорезми, Ургенч, Узбекистан
E-mail: alimardon01@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-41-58 UDC 517.55

Polynomials on Regular Parabolic Manifolds

© 2022 **A. A. Atamuratov**

Abstract. In this work, we consider the regular parabolic manifold X and polynomials on it. We prove some properties of regular parabolic manifolds and describe polynomials on complements of Weierstrass algebroidal sets.

REFERENCES

1. V. I. Danchenko, "Dliny lemniskat. Variatsii ratsional'nykh funktsiy" [Lengths of lemniscates. Variations of rational functions], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2007, **198**, No. 8, 1111–1117 (in Russian).
2. A. S. Sadullaev, "Defektnye divizory v smysle Valirona" [Deficient divisors in the Valiron sense], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1979, **108**, No. 4, 567–580 (in Russian).
3. A. S. Sadullaev and E. M. Chirka, "O prodolzhenii funktsiy s polyarnymi osobennostyami" [On the continuation of functions with polar singularities], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1987, **132**, No. 3, 383–390 (in Russian).
4. A. Aytuna, J. Krone, and T. Terzioglu, "Complemented infinite type power series subspaces of nuclear Frechet spaces," *Math. Ann.*, 1989, **283**, No. 2, 193–202.
5. A. Aytuna and A. Sadullaev, "Parabolic Stein manifolds," *Math. Scand.*, 2014, **114**, No. 1, 86–109.
6. A. Aytuna and A. Sadullaev, "Polynomials on parabolic manifolds," In: *Topics in several complex variables. First USA–Uzbekistan conference on analysis and mathematical physics, California State University, Fullerton, CA, USA, May* 20–23, 2014. *Proceedings*, Am. Math. Soc., Providence, 2016, pp. 1–22.
7. E. Bedford and M. Kalka, "Foliations and complex Monge—Ampere equations," *Commun. Pure Appl. Math.*, 1977, **30**, 543–571.
8. J. P. Demailly, "Mesures de Monge—Ampere et caractrisation geometrique des variets algebriques," *Mem. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, 1985, **19**, 1–124.
9. R. E. Foote, "Homogeneous complex Monge—Ampere equations and algebraic embeddings of parabolic manifolds," *Indiana Univ. Math. J.*, 1990, **39**, No. 4, 1245–1273.
10. P. Griffits and J. King, "Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties," *Acta Math.*, 1973, **130**, 145–220.
11. M. Kalka and G. Patrizio, "Splitting parabolic manifolds," *ArXiv*, 2014, 1409.3972v1 [mathCV].
12. Ch. Pomerenko, "On derivative of a polynomial," *Michigan Math. J.*, 1959, **6**, No. 4, 373–375.
13. M. Poppenberg, "Tame subspaces of power series spaces," In: *Functional analysis. Proceedings of the first international workshop held at Trier University, Germany, September* 26 – *October* 1*, 1994*, de Gruyter, Berlin, 1996, pp. 365-375.
14. W. Rudin, "A geometric criterion for algebraic varieties," *J. Math. Mech.*, 1968, **17**, 671–683.
15. B. V. Shabat, *Introduction to complex analysis. Part II: Functions of several variables*, Am. Math. Soc., Providence, 1992.
16. A. S. Snaebjarnarson, "Rapid polynomial approximation on Stein manifolds," *ArXiv*, 2016, 1612.06173v1 [math.CV].
17. W. Stoll, *Value distribution on parabolic spaces*, Springer, Berlin—Heidelberg—New York, 1977.
18. W. Stoll, "The characterization of strictly parabolic manifolds," *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4)*, 1980, **7**, 87–154.
19. D. Vogt, "Charakterisierung der Unterräume von (s)," *Math. Z.*, 1977, **155**, No. 2, 109–111.
20. A. Zeriahi, "Function de Green pluricomplex a pole a l'infini sur un espace de Stein parabolique," *Math. Scand.*, 1991, **69**, 89–126.

A. A. Atamuratov
Urgench State University, Urgench, Uzbekistan
E-mail: alimardon01@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). С. 59–69
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-59-69 УДК 512.554

ЛОКАЛЬНЫЕ И 2-ЛОКАЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ЛОКАЛЬНО ПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

© 2022 г. Ш. А. АЮПОВ, К. К. КУДАЙБЕРГЕНОВ, Б. Б. ЮСУПОВ

Аннотация. В статье изучаются локальные и 2-локальные дифференцирования классических локально простых алгебр Ли. Доказано, что каждое локальное и 2-локальное дифференцирование классической локально простой алгебры Ли является дифференцированием. Далее показано, что каждое локальное дифференцирование борелевской подалгебры локально простой алгебры Ли является дифференцированием.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Пусть $\mathcal{L}$ — алгебра. Линейный оператора $D : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ называется *дифференцированием*, если $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ для всех $x, y \in \mathcal{L}$ (тождество Лейбница). Каждому элементу $a \in \mathcal{L}$ соответствует дифференцирование R_a, которое называется *внутренним дифференцированием*.

Понятие локального дифференцирования впервые было введено в 1990 г. Р. В. Кадисоном [16], а также Д. Р. Ларсоном и А. Р. Сурором [17]. Линейный оператор Δ над алгеброй $\mathcal{L}$ называется *локальным дифференцированием*, если для любого $x \in \mathcal{L}$ существует дифференцирование D_x (зависящее от x) такое, что $\Delta(x) = D_x(x)$. Основная задача состоит в том, чтобы получить условия, при которых локальные дифференцирования становятся дифференцированиями и привести примеры алгебр с локальными дифференцированиями, которые не являются дифференцированиями. Р. В. Кадисоном доказано, что каждое непрерывное локальное дифференцирование алгебры фон Неймана M в двойственный банахов M-бимодуль является дифференцированием. В 2001 г. Б. Е. Джонсоном завершено исследование локальных дифференцирований и показано, что каждое локальное дифференцирование, отображающее C^*-алгебру A в банахов A-бимодуль, является дифференцированием [15].

Исследование локальных дифференцирований алгебр измеримых операторов началось работах в [1,6] и др. Затем в [5,12] схожие концепции были рассмотрены для алгебр Ли. В [5] Ш. А. Аюпов и К. К. Кудайбергенов доказали, что каждое локальное дифференцирование полупростой алгебры Ли является дифференцированием и привели примеры нильпотентных конечномерных алгебр Ли с локальными дифференцированиями, которые не являются дифференцированиями. В [2] исследованы локальные дифференцирования разрешимых алгебр Ли и было показано, что каждое локальное дифференцирование разрешимой алгебры Ли идеальным нильрадикалом является дифференцированием.

В [3] Ш. А. Аюпов, А. Х. Худайбердиев и В. В. Юсупов доказали, что все локальные и 2-локальные дифференцирования разрешимых алгебр Лейбница с идеальными или абелевыми нильрадикалами, чья размерность дополняющего пространства максимальна, являются дифференцированием. Также они показали, что разрешимая алгебра Лейбница с абелевыми нильрадикалами, которые имеют размерность дополняющего пространства 1, содержит локальные дифференцирования, которые не являются дифференцированиями.

В 1997 г. П. Шемрл [20] ввел понятие 2-локальных дифференцирований и 2-локальных автоморфизмов на алгебрах. А именно, отображение $\nabla : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (не обязательно линейное) на алгебре $\mathcal{L}$ называется 2-*локальным дифференцированием*, если для всех пар элементов $x, y \in \mathcal{L}$ существует дифференцирование $D_{x,y} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ такое, что $D_{x,y}(x) = \nabla(x)$ и $D_{x,y}(y) = \nabla(y)$. Понятие 2-локального автоморфизма определяется схожим образом. Для данной алгебры $\mathcal{L}$ основная задача, связанная с этими понятиями, состоит в том, чтобы доказать, что они автоматически являются дифференцированиями (соответственно, автоморфизмами) или привести примеры локальных и 2-локальных дифференцирований или автоморфизмов на $\mathcal{L}$, которые не являются дифференцированиями или автоморфизмами, соответственно. Решение этой задачи для конечномерных алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики было получено в [4,8,12]. А именно, в [8] доказано, что каждое 2-локальное дифференцирование на полупростой алгебре Ли $\mathcal{L}$ является дифференцированием и что каждая конечномерная нильпотентная алгебра Ли с размерностью большей, чем 2, содержит 2-локальные дифференцирования, которые не являются дифференцированием. Аналогичные результаты касательно 2-локальных дифференцирований и автоморфизмов на простых алгебрах Лейбница были получены в [7]. Для 2-локальных автоморфизмов З. Чен и В. Ванг в [12] доказали, что если $\mathcal{L}$ — простая алгебра Ли типа A_l, D_l или E_k $(k = 6, 7, 8)$ над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики, то каждый 2-локальный автоморфизм $\mathcal{L}$ является автоморфизмом. Наконец, в [4] Ш. А. Аюпов и К. К. Кудайбергенов обобщили результат, полученный в [12], и доказали, что каждый 2-локальный автоморфизм конечномерной полупростой алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики является автоморфизмом. Более того, они показали, что каждая нильпотентная алгебра Ли конечной размерности большей, чем 2, содержит 2-локальные автоморфизмы, которые не являются автоморфизмами.

В [10, 11, 22] были изучены 2-локальные дифференцирования бесконечномерных алгебр Ли над полем нулевой характеристики и доказано, что все 2-локальные дифференцирования алгебры Витта являются (глобальными) дифференцированиями и что каждое 2-локальное дифференцирование на алгебре Вирасоро является дифференцированием. В [9] авторы доказали, что каждое 2-локальное дифференцирование обобщенной алгебры Витта $W_n(\mathbb{F})$ над векторным пространством $\mathbb{F}^n$ является дифференцированием, где $\mathbb{F}$ — поле нулевой характеристики. Ниже мы рассмотрим обобщенные алгебры Витта вида $W = W(G, I)$ над полем $\mathbb{F}$, где I — бесконечное множество индексов, а $G = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z} = \{(\mathbf{a}_i)_{i\in I} : \mathbf{a}_i = 0 \text{ кроме конечного числа } i \in I\}$, и докажем, что все 2-локальные дифференцирования $W(G, I)$ также являются дифференцированиями. Наконец, в [9] показано, что все 2-локальные дифференцирования $B(\mathbb{Z}^n, I)$, борелевской подалгебры $W_n(\mathbb{F})$, являются дифференцированиями. В [13] Й. Чен, К. Жао и Й. Жао изучили локальные дифференцирования на обобщенных алгебрах Витта. Они доказали, что каждое локальное дифференцирование на алгебрах Витта является дифференцированием и что каждое локальное дифференцирование на нецентрированной обобщенной алгебре Вирасоро высшего ранга является дифференцированием.

В настоящей работе изучаются локальные и 2-локальные дифференцирования классических локально простых алгебр Ли и их борелевские подалгебры.

В разделе 2 доказывается, что каждое локальное дифференцирование классической локально простой алгебры Ли является дифференцированием. В разделе 3 доказывается, что всякое 2-локальное дифференцирование такой алгебры Ли является дифференцированием. В разделе 4 доказывается аналогичный результат для борелевских подалгебр описанных выше алгебр Ли.

2. Предварительные замечания

В этом разделе дадим необходимые определения и некоторые предварительные результаты.

Определение 2.1. *Алгебра Ли* $\mathcal{L}$ над полем $\mathbb{K}$ — это векторное пространство на $\mathbb{K}$ с билинейным отображением $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, обозначаемым $(x, y) \mapsto [x, y]$ и называемым *скобкой* $\mathcal{L}$, которое удовлетворяет следующему свойству:

$$[x, x] = 0, \quad \forall x \in \mathcal{L},$$
$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0, \forall x, y, z \in \mathcal{L}.$$

Алгебра Ли $\mathcal{L}$ называется *разрешимой*, если $\mathcal{L}^{(k)} = \{0\}$ для некоторого целого k, где $\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^{(k)} = [\mathcal{L}^{(k-1)}, \mathcal{L}^{(k-1)}]$, $k \geqslant 1$. Всякая алгебра Ли $\mathcal{L}$ содержит единственный максимальный разрешимый идеал, который называется *радикалом* $\mathcal{L}$ и обозначается через $\mathrm{Rad}\mathcal{L}$. Нетривиальная алгебра Ли $\mathcal{L}$ называется *полупростой*, если $\mathrm{Rad}\mathcal{L} = 0$. Это эквивалентно требованию того, что $\mathcal{L}$ не имеет ненулевых абелевых идеалов. В алгебре $\mathcal{L}$ *простой* алгеброй Ли называется неабелева алгебра Ли, которая не содержит ненулевых правильных идеалов.

Известна следующая теорема для локальных и 2-локальных дифференцирований на полупростых алгебрах Ли.

Теорема 2.1 (см. [5]). *Пусть $\mathcal{L}$ — конечномерная полупростая алгебра Ли. Тогда любое локальное дифференцирование Δ на $\mathcal{L}$ является дифференцированием.*

Теорема 2.2 (см. [8]). *Пусть $\mathcal{L}$ — конечномерная полупростая алгебра Ли. Тогда всякое 2-локальное дифференцирование Δ на $\mathcal{L}$ является дифференцированием.*

Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, и предположим, что $\mathcal{L}$ — конечномерная простая алгебра Ли над $\mathbb{F}$ ранга l, $\mathcal{H}$ — фиксированная подалгебра Картана алгебры $\mathcal{L}$, $R \subseteq \mathcal{H}^*$ — соответствующая корневая система алгебры $\mathcal{L}$, $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — фиксированная база R, R^+ — множество соответствующих положительных корней относительно Π. Корни в Π называются *простыми*.

Положим

$$\mathbb{B} = \mathcal{H} \bigoplus \left(\oplus_{\alpha \in R^+} \mathcal{L}_\alpha\right).$$

Тогда $\mathbb{B}$ называется *стандартной борелевской подалгеброй* $\mathcal{L}$.

Известны следующие теоремы для локальных дифференцирований стандартных борелевских подалгебр.

Теорема 2.3 (см. [21]). *Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, $\mathcal{L}$ — конечномерная простая алгебра Ли над $\mathbb{F}$, $\mathbb{B}$ — стандартная борелевская подалгебра $\mathcal{L}$. Тогда любое локальное дифференцирование Δ на $\mathbb{B}$ является дифференцированием.*

Если $\mathcal{A}$ — аддитивная группа в $\mathbb{Z}^n$ и $n > 0$, то групповая алгебра $\mathbb{F}\mathcal{A}$ изоморфна полиномиальной алгебре Лорена $\mathbb{F}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]$ над $\mathbb{F}$. Для набора из n элементов $J = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$ запишем $t^J = t_1^{j_1} \cdots t_n^{j_n}$. Пусть T — линейная оболочка $T = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{F}\partial_i$ операторов $\partial_i = t^i \dfrac{\partial}{\partial t_i}$. Если отображение $(\partial, J) \to \partial(J) : T \otimes \mathcal{A} \to \mathbb{F}$ удовлетворяет $\partial_i(J) = j_i$, то соответствующая обобщенная алгебра Витта $W = W_n(\mathbb{F})$ может быть определена алгеброй Ли $\mathrm{Der}_{\mathbb{F}}\left(\mathbb{F}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]\right)$ дифференцирования полиномиальной алгебры Лорена $\mathbb{F}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]$ над $\mathbb{F}$, состоящей из полиномиальных векторных полей Лорена

$$w(J; i) = w(j_1, \ldots, j_n; i) = t_1^{j_1} \cdots t_n^{j_n} \frac{\partial}{\partial t_i},$$

где $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{F}^n$ — канонические координаты в $\mathbb{F}^n$. Алгебра Ли, которая изоморфна алгебре Ли $W^n(\mathbb{F})$ полиномиальных векторных полей Лорена, называется *алгеброй Витта* над векторным пространством $\mathbb{F}^n$. Алгебра Ли $W_n(\mathbb{F})$ имеет базис $\{w(\mathbf{a}, i) : \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n,\ i \in I\}$ такой, что выполняется правило умножения:

$$[w(\mathbf{a}, i), w(\mathbf{b}, j)] = \mathbf{a}_j w(\mathbf{a} + \mathbf{b}, i) - \mathbf{b}_i w(\mathbf{a} + \mathbf{b}, j), \tag{2.1}$$

где $i, j \in I$ и $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_i)$, $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i) \in \mathbb{Z}^n$.

Известны следующие теоремы для локальных и 2-локальных дифференцирований бесконечномерных алгебр Ли.

Теорема 2.4 (см. [9]). *Всякое 2-локальное дифференцирование Δ на $W_n(\mathbb{F})$ является дифференцированием.*

Теорема 2.5 (см. [13]). *Всякое локальное дифференцирование Δ на $W_n(\mathbb{F})$ является дифференцированием.*

Пусть $\mathbb{Z}_+$ — множество положительных целых чисел. Полагая

$$B(\mathbb{Z}^n, I) = \operatorname{span}\left\{w(\mathbf{a}, i) : \mathbf{a} \in \mathbb{Z}_+^n\right\},$$

мы получаем т. н. *стандартную борелевскую подалгебру* $W_n(\mathbb{F})$.

Теорема 2.6 (см. [9]). *Пусть $B(\mathbb{Z}^n, I)$ — борелевская подалгебра обобщенной алгебры Витта $W_n(\mathbb{F})$ над полем нулевой характеристики. Тогда любое 2-локальное дифференцирование на $B(\mathbb{Z}^n, I)$ является дифференцированием.*

Для данного векторного пространства V пусть $\mathfrak{gl}(V)$ обозначает алгебру Ли всех линейных эндоморфизмов над V. Представление алгебры Ли $\mathcal{L}$ над V является гомоморфизмом алгебры Ли $\rho : \mathcal{L} \to \mathfrak{gl}(V)$. Например, $\mathrm{ad} : \mathcal{L} \to \mathfrak{gl}(\mathcal{L})$, заданное в виде $\mathrm{ad}(x)(y) = [x, y]$ является представлением $\mathcal{L}$ на векторном пространстве $\mathcal{L}$, которое называется *сопряженным представлением*. Если V — конечномерное векторное пространство, тогда представление ρ называется *конечномерным*.

Пусть $\mathcal{L}$ — алгебра Ли и $\rho : \mathcal{L} \to \mathfrak{gl}(V)$ — конечномерное представление $\mathcal{L}$. Тогда отображение $\tau : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathbb{F}$, определенное формулой

$$\tau(x, y) = \mathrm{tr}(\rho(x)\rho(y)),$$

является симметричной билинейной формой на $\mathcal{L}$, которая называется *следом* на $\mathcal{L}$ относительно ρ, где tr обозначает след линейного оператора. В частности, для $V = \mathcal{L}$ и $\rho = \mathrm{ad}$ соответствующий след называется *формой Киллинга* и обозначается $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Другое важное значение формы Киллинга состоит в следующем свойстве. Алгебра Ли $\mathcal{L}$ полупроста тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга не вырождена, т. е. из того, что $\langle x, y\rangle = 0$ для всех $y \in \mathcal{L}$, следует, что $x = 0$.

Пусть $\mathbb{F}$ — поле нулевой характеристики и $\mathfrak{g}$ — $\mathbb{F}$-алгебра Ли, которая равна прямому произведению простых конечномерных алгебр Ли. Это означает, что $\mathfrak{g} = \varinjlim \mathfrak{g}_j$ — прямой предел семейства $(\mathfrak{g}_j)_{j \in \mathfrak{J}}$ конечномерных простых алгебр Ли $\mathfrak{g}_j$, которые являются подалгебрами $\mathcal{L}$, и прямой порядок $\leqslant$ множества индексов $\mathfrak{J}$ задается неравенством $j \leqslant k$, если $\mathfrak{g}_j \leqslant \mathfrak{g}_k$.

Определение 2.2. Алгебра Ли называется *локально конечномерной*, или, проще, *локально конечной*, если каждое ее конечное подмножество порождает конечномерную подалгебру.

Произведение матриц xy определено, если по крайней мере один множитель лежит в $\mathfrak{gl}_{\mathfrak{J}}(\mathbb{F})$, а другой в $M_{\mathfrak{J}}(F)$. В частности, $\mathfrak{gl}_{\mathfrak{J}}(\mathbb{F})$ наследует таким образом структуру локальной конечной алгебры Ли посредством формулы $[x, y] := xy - yx$ и

$$\mathfrak{sl}_{\mathfrak{J}}\mathbb{F} := \{x \in \mathfrak{gl}_{\mathfrak{J}}(F) : trx = 0\}$$

— гиперплоскостный идеал, который является простой алгеброй Ли.

Чтобы определить алгебры Ли $\mathfrak{o}_{\mathfrak{J},\mathfrak{J}}(\mathbb{F})$ и+ $\mathfrak{sp}_{\mathfrak{J}}(\mathbb{F})$, положим $2\mathfrak{J} := \mathfrak{J}\dot{\cup} - \mathfrak{J}$, где $-\mathfrak{J}$ обозначает копию $\mathfrak{J}$, чьи элементы обозначаются $-i, i \in \mathfrak{J}$, и рассмотрим $2\mathfrak{J} \times 2\mathfrak{J}$-матрицы

$$Q_1 := \sum_{i \in \mathfrak{J}} E_{i,-i} + E_{-i,i} \quad \text{и} \quad Q_2 := \sum_{i \in \mathfrak{J}} E_{i,-i} - E_{-i,i}.$$

Затем мы определим

$$\mathfrak{o}_{\mathfrak{J},\mathfrak{J}}(\mathbb{F}) := \{x \in \mathfrak{gl}_{2\mathfrak{J}}(\mathbb{F}) : \; x^\top Q_1 + Q_1 x = 0\}$$

и

$$\mathfrak{sp}_{\mathfrak{J}}(\mathbb{F}) := \{x \in \mathfrak{gl}_{2\mathfrak{J}}(\mathbb{F}) : \; x^\top Q_2 + Q_2 x = 0\}.$$

Пусть $\mathfrak{J}$ — множество, $M_{\mathfrak{J}}(\mathbb{F})_{rc-fin}$ — алгебра Ли $\mathfrak{J}\times\mathfrak{J}$-матриц с конечным числом строк и столбцов и $\mathbf{1} = (\delta_{ij})$ — единичная матрица [18]. Тогда

$$der(\mathfrak{sl}_{\mathfrak{J}}\mathbb{F}) \cong M_{\mathfrak{J}}(\mathbb{F})_{rc-fin}/\mathbb{F}\mathbf{1},$$
$$der(\mathfrak{o}_{\mathfrak{J},\mathfrak{J}}(\mathbb{F})) \cong \{x \in M_{\mathfrak{J}}(\mathbb{F})_{rc-fin} : x^{\top}Q_1 + Q_1x = 0,\},$$
$$der(\mathfrak{sp}_{\mathfrak{J}}((F))) \cong \{x \in M_{\mathfrak{J}}(\mathbb{F})_{rc-fin} : x^{\top}Q_2 + Q_2x = 0\}.$$

Через $\mathfrak{gl}(\mathfrak{J},\mathbb{F})$ обозначим алгебру Ли всех $\mathfrak{J}\times\mathfrak{J}$-матриц с конечным большим числом ненулевых элементов, которая натянута на элементарные матрицы $E_{jk} : \mathfrak{J}\times\mathfrak{J} \to \mathbb{F}$, $(l,m) \longmapsto \delta_{jl}\delta_{km}$ при $(j,k) \in \mathfrak{J}\times\mathfrak{J}$. Алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(\mathfrak{J},\mathbb{F})$ локально конечна и, очевидно, все ее подалгебры также локально конечны. Это дает нам следующее разложение по корням $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus\limits_{\alpha\in R} \mathfrak{g}_\alpha$ относительно подалгебры $\mathfrak{h} = span_{\mathbb{F}}\{E_{jj} : j \in \mathfrak{J}\}$ диагональных матриц. Если мы положим $\varepsilon_k : \mathfrak{h} \to \mathbb{F}$, $E_{jj} \longmapsto \delta_{jk}$, тогда корневая система будет $R = \{\varepsilon_j - \varepsilon_k : j,k \in \mathfrak{J}, j \neq k\}$ и корневые пространства $\mathfrak{g}_{\varepsilon_j-\varepsilon_k} = \mathbb{F}E_{jk}$.

Мы говорим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет *разложение по корням* относительно абелевой подалгебры $\mathfrak{h}$, если

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{R}} \mathfrak{g}_\alpha,$$

где $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} : (\forall h \in \mathfrak{h})[h,x] = \alpha(h)x\}$ и $\mathfrak{R} := \mathfrak{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) := \{\alpha \in \mathfrak{h}^*\backslash 0 : \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}$ — соответствующая корневая система и $\mathfrak{h}^*$ — пространство всех линейных функционалов на $\mathfrak{h}$. В этом случае $\mathfrak{h}$ называется *подалгеброй разбиения Картана* $\mathfrak{g}$, и $\mathfrak{g}$ относительно пары $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ называется *разделенной* алгеброй Ли. Пусть тогда $\mathfrak{g} = \varinjlim \mathfrak{g}_i$ — прямой предел семейства $(\mathfrak{g}_i)_{i\in I}$ конечномерных простых алгебр Ли $\mathfrak{g}_i$. Через $\mathfrak{R}_I$ обозначим систему корней алгебры $\mathfrak{g}_I$ (см. [19]).

3. Локальные дифференцирования классических локально простых алгебр Ли

Основные результаты этого раздела заключены следующей теореме.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — локально простая алгебра Ли над полем нулевой характеристики. Тогда всякое локальное дифференцирование на $\mathfrak{g}$ является дифференцированием.*

Для доказательства этой теоремы нам потребуется несколько лемм.

Для конечного подмножества $I \subset \mathfrak{J}$ определим проекцию $p_I : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_I$ следующим образом:

$$p_I(x) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I} \lambda_\alpha e_\alpha,$$

где $x = \sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{R}} \lambda_\alpha e_\alpha \in \mathfrak{g}$.

Лемма 3.1.

$$p_I([x,y]) = [p_I(x), p_I(y)]$$

для всех $x,y \in \mathfrak{g}$.

Доказательство. Возьмем элементы $x = h_1 + \sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{R}} \lambda_\alpha e_\alpha$ и $y = h_2 + \sum\limits_{\beta\in\mathfrak{R}} \mu_\beta e_\beta$ из $\mathfrak{g}$, где $h_1,\ h_2 \in \mathfrak{h}$ и $p_I(x) = \sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{R}_I} \lambda_\alpha e_\alpha$, $p_I(y) = \sum\limits_{\beta\in\mathfrak{R}_I} \mu_\beta e_\beta$.

Достаточно рассмотреть следующие три случая.

Случай 1. Пусть $x = h_1 \in \mathfrak{h}$ и $y = h_2 \in \mathfrak{h}$. Тогда

$$p_I([x,y]) = p_I(0) = [p_I(x), p_I(y)].$$

Случай 2. Пусть $x = h_1 \in \mathfrak{h}_I$ и $y = \sum\limits_{\beta\in\mathfrak{R}} \mu_\beta e_\beta$. Тогда

$$p_I([x,y]) = p_I\left(\left[h_1, \sum_{\beta\in\mathfrak{R}} \mu_\beta e_\beta\right]\right) = p_I\left(\sum_{\beta\in\mathfrak{R}} \mu_\beta [h_1, e_\beta]\right) = p_I\left(\sum_{\beta\in\mathfrak{R}} \mu_\beta \beta(h_1) e_\beta\right) = \sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I} \mu_\beta \beta(h_1) e_\beta. \tag{3.1}$$

С другой стороны,

$$[p_I(x), p_I(y)] = \left[p_I(h_1), p_I\left(\sum_{\beta\in\mathfrak{R}} \mu_\beta e_\beta\right)\right] = \left[h_1, \sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I} \mu_\beta e_\beta\right] = \sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I} \mu_\beta \beta(h_1) e_\beta. \tag{3.2}$$

Сравнивая (3.1) и (3.2), мы получаем, что

$$p_I([x,y]) = [p_I(x), p_I(y)].$$

Случай 3. Пусть $x = \sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{R}} \lambda_\alpha e_\alpha$ и $y = \sum\limits_{\beta\in\mathfrak{R}} \mu_\beta e_\beta$. Тогда

$$p_I([x,y]) = p_I\left(\left[\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}} \lambda_\alpha e_\alpha, \sum_{\beta\in\mathfrak{R}} \mu_\beta e_\beta\right]\right) = p_I\left(\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}}\sum_{\beta\in\mathfrak{R}} \lambda_\alpha\mu_\beta e_{\alpha+\beta}\right) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I}\sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I} \lambda_\alpha\mu_\beta e_{\alpha+\beta}. \tag{3.3}$$

С другой стороны,

$$[p_I(x), p_I(y)] = \left[p_I\left(\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}} \lambda_\alpha e_\alpha\right), p_I\left(\sum_{\beta\in\mathfrak{R}} \mu_\beta e_\beta\right)\right] = \left[\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I} \lambda_\alpha e_\alpha, \sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I} \mu_\beta e_\beta\right] = \sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I}\sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I} \lambda_\alpha\mu_\beta e_{\alpha+\beta}. \tag{3.4}$$

Далее нам нужно рассмотреть следующие частные случаи.

Случай 3.1. Пусть $\alpha+\beta \in \mathfrak{R}_I$. Сравнивая (3.3) и (3.4), мы получаем, что

$$p_I\left(\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I}\sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I} \lambda_\alpha\mu_\beta e_{\alpha+\beta}\right) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I}\sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I} \lambda_\alpha\mu_\beta e_{\alpha+\beta} = [p_I(x), p_I(y)].$$

Случай 3.2. Пусть $0 \neq \alpha+\beta \notin \mathfrak{R}_I$. Сравнивая (3.3) и (3.4), мы получаем, что

$$p_I\left(\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I}\sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I} \lambda_\alpha\mu_\beta e_{\alpha+\beta}\right) = 0 = [p_I(x), p_I(y)].$$

Доказательство завершено. □

Лемма 3.2. *Пусть Δ — локальное дифференцирование на $\mathfrak{g}$. Тогда отображение Δ_I на $\mathfrak{g}_I$, определенное формулой*

$$\Delta_I(x) = p_I(\Delta(x)),\ x \in \mathfrak{g}_I,$$

является локальным дифференцированием.

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{g}_I$ — произвольный элемент. Возьмем элемент $a_x \in \mathfrak{g}$ такой, что $\Delta(x) = [a_x, x]$. Тогда по лемме 3.1

$$\Delta_I(x) = p_I(\Delta(x)) = p_I([a_x, x]) = [p_I(a_x), p_I(x)] = [p_I(a_x), x].$$

□

Доказательство теоремы 3.1. Покажем, что любое локальное дифференцирование Δ на g является дифференцированием. Возьмем конечное подмножество I в $\mathfrak{J}$ такое, что x, y, $\Delta(x)$, $\Delta(y)$, $\Delta([x,y]) \in \mathfrak{g}_I$. Тогда Δ_I — локальное дифференцирование $\mathfrak{g}_I$. Так как $\mathfrak{g}_I$ — конечномерная простая алгебра Ли, по теореме 2.1 Δ_I является дифференцированием. Следовательно,

$$\Delta([x,y]) = \Delta_I([x,y]) = [\Delta_I(x), y] + [x, \Delta_I(y)] = [\Delta(x), y] + [x, \Delta(y)].$$

Это означает, что Δ является дифференцированием. □

4. 2-локальные дифференцирования классических локально простых алгебр Ли

В этом разделе мы изучим 2-локальные дифференцирования классических локально простых алгебр Ли.

Представим следующие результаты из [18].

Предложение 4.1. *Каждая инвариантная симметрическая билинейная форма k на $\mathfrak{g}$ инвариантна относительно всех дифференцирований $\mathfrak{g}$.*

Предложение 4.2. *Существует невырожденная инвариантная симметрическая билинейная форма $k : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{F}$.*

Основные результаты этого раздела содержатся в следующей теореме.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — локально простая алгебра Ли над полем нулевой характеристики. Тогда всякое 2-локальное дифференцирование на $\mathfrak{g}$ является дифференцированием.*

Поскольку каждое дифференцирование на локально простой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ внутреннее, для алгебр, описанных выше, определение 2-локального дифференцирования переписывается следующим образом. Отображение $\nabla : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ называется *2-локальным дифференцированием* на $\mathfrak{g}$, если для любых двух элементов $x, y \in \mathfrak{g}$ существует элемент $a_{x,y} \in \mathfrak{g}$ (зависящий от x, y) такой, что

$$\nabla(x) = [a_{x,y}, x], \qquad \nabla(y) = [a_{x,y}, y].$$

Лемма 4.1. *Пусть ∇ — 2-локальное дифференцирование локально простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда ∇ линейно.*

Доказательство. Пусть $x, y, z \in \mathfrak{g}$ — произвольные элементы. Учитывая $ad\mathfrak{g}$-инвариантность формы Киллинга, мы получаем

$$\begin{aligned}\kappa(\nabla(x+y), z) &= \kappa(D_{x+y,z}(x+y), z) = -\kappa(x+y, D_{x+y,z}(z)) = -\kappa(x+y, \nabla(z)) = \\ &= -\kappa(x, \nabla(z)) - \kappa(y, \nabla(z)) = -\kappa(x, D_{x,z}(z)) - k(y, D_{y,z}(z)) = \\ &= \kappa(D_{x,z}(x), z) + \kappa(D_{y,z}, z) = \kappa(\nabla(x), z) + \kappa(\nabla(y), z) = \kappa(\nabla(x) + \nabla(y), z),\end{aligned}$$

т. е.

$$\kappa(\nabla(x+y), z) = \kappa(\nabla(x) + \nabla(y), z).$$

Поскольку форма Киллинга $\langle \cdot, \cdot \rangle$ невырождена, последнее равенство означает, что

$$\nabla(x+y) = \nabla(x) + \nabla(y) \quad \text{при } x, y \in \mathfrak{g}.$$

Далее,

$$\nabla(\lambda x) = D_{\lambda x,x}(\lambda x) = \lambda D_{\lambda x,x}(x) = \lambda \nabla(x).$$

Таким образом, ∇ линейно. □

Доказательство теоремы 4.1. Пусть ∇ — 2-локальное дифференцирование на $\mathfrak{g}$. В силу леммы 4.1 ∇ — локальное дифференцирование. По теореме 3.1 ∇ является дифференцированием. □

5. Локальные дифференцирования на борелевских подалгебрах

В этом разделе мы изучим локальные дифференцирования на борелевских подалгебрах.

Теорема 5.1. *Пусть $\mathfrak{b}$ — разделенная борелевская подалгебра. Тогда каждое локальное дифференцирование на $\mathfrak{b}$ является дифференцированием.*

Разделенная борелевская подалгебра множества $sl(\infty) \cong \varinjlim_{n \geqslant 2} sl(n)$ может быть определена как прямой предел $\mathfrak{b} = \varinjlim_{n \geqslant 2} \mathfrak{b}_n$ борелевских подалгебр $\mathfrak{b}_n \subset sl(n)$. Поскольку основная разделенная борелевская подалгебра множества $sl(\infty)$ сопряжена относительно $Aut(sl(\infty))$ с разделенной борелевской алгеброй, содержащей фиксированную разделенную подалгебру Картана $\mathfrak{h} \subset sl(\infty)$, мы рассмотрим только разделенные борелевские алгебры, содержащие $\mathfrak{h}$. Остальные борелевские подалгебры заданы следующей конструкцией. Мы говорим, что подмножество $\mathfrak{R}^+ \subset \mathfrak{R}$ — *подмножество положительных корней*, если:

1. для любого корня $\alpha \in \mathfrak{R}$ существуют единственные α и $-\alpha$ в $\mathfrak{R}^+$;
2. $\alpha,\ \beta \in \mathfrak{R}^+$ и $\alpha+\beta \in \mathfrak{R}$ влекут $\alpha+\beta \in \mathfrak{R}^+$.

Каждому положительному подмножеству корней $\mathfrak{R}^+$ поставим в соответствие борелевскую подалгебру $\mathfrak{b}(\mathfrak{R}^+) := \mathfrak{h} \bigoplus\limits_{\alpha\in\mathfrak{R}^+} sl_\alpha(\infty)$ множества $sl(\infty)$ и таким образом получим все разделенные борелевские подалгебры $sl(\infty)$, содержащие $\mathfrak{h}$ (см. [14]).

Для конечного подмножества $I \subset \mathfrak{J}$ определим проекцию $p_I : \mathfrak{b} \to \mathfrak{b}_I$ следующим образом:

$$p_I(x) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I^+} \lambda_\alpha e_\alpha,$$

где $x = \sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{R}^+} \lambda_\alpha e_\alpha \in \mathfrak{b}$.

Лемма 5.1. *Имеем*

$$p_I([x,y]) = [p_I(x), p_I(y)]$$

для всех $x, y \in \mathfrak{b}$.

Доказательство. Возьмем $x = h_1 + \sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{R}^+} \lambda_\alpha e_\alpha$ и $y = h_2 + \sum\limits_{\beta\in\mathfrak{R}^+} \mu_\beta e_\beta$ из $\mathfrak{g}$, где $h_1,\ h_2 \in \mathfrak{h}$ и $p_I(x) = \sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{R}_I^+} \lambda_\alpha e_\alpha$, $p_I(y) = \sum\limits_{\beta\in\mathfrak{R}_I^+} \mu_\beta e_\beta$.

Достаточно рассмотреть следующие три случая.

Случай 1. Пусть $x = h_1 \in \mathfrak{h}$ и $y = h_2 \in \mathfrak{h}$. Тогда

$$p_I([x,y]) = p_I(0) = [p_I(x), p_I(y)].$$

Случай 2. Пусть $x = h_1 \in \mathfrak{h}_I$ и $y = \sum\limits_{\beta\in\mathfrak{R}^+} \mu_\beta e_\beta$. Тогда

$$\begin{aligned} p_I([x,y]) &= p_I\left(\left[h_1, \sum_{\beta\in\mathfrak{R}^+} \mu_\beta e_\beta\right]\right) = p_I\left(\sum_{\beta\in\mathfrak{R}^+} \mu_\beta [h_1, e_\beta]\right) = p_I\left(\sum_{\beta\in\mathfrak{R}^+} \mu_\beta \beta(h_1) e_\beta\right) = \\ &= \sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I^+} \mu_\beta \beta(h_1) e_\beta. \end{aligned} \tag{5.1}$$

С другой стороны,

$$[p_I(x), p_I(y)] = \left[p_I(h_1), p_I\left(\sum_{\beta\in\mathfrak{R}^+} \mu_\beta e_\beta\right)\right] = \left[h_1, \sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I^+} \mu_\beta e_\beta\right] = \sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I^+} \mu_\beta \beta(h_1) e_\beta. \tag{5.2}$$

Сравнивая (5.1) и (5.2), мы получим, что

$$p_I([x,y]) = [p_I(x), p_I(y)].$$

Случай 3. Пусть $x = \sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{R}^+} \lambda_\alpha e_\alpha$ и $y = \sum\limits_{\beta\in\mathfrak{R}^+} \mu_\beta e_\beta$. Тогда

$$p_I([x,y]) = p_I\left(\left[\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}^+} \lambda_\alpha e_\alpha, \sum_{\beta\in\mathfrak{R}^+} \mu_\beta e_\beta\right]\right) = p_I\left(\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}^+}\sum_{\beta\in\mathfrak{R}^+} \lambda_\alpha \mu_\beta e_{\alpha+\beta}\right) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I^+}\sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I^+} \lambda_\alpha \mu_\beta e_{\alpha+\beta}. \tag{5.3}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} [p_I(x), p_I(y)] &= \left[p_I\left(\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}^+} \lambda_\alpha e_\alpha\right), p_I\left(\sum_{\beta\in\mathfrak{R}^+} \mu_\beta e_\beta\right)\right] = \left[\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I^+} \lambda_\alpha e_\alpha, \sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I^+} \mu_\beta e_\beta\right] = \\ &= \sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I^+}\sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I^+} \lambda_\alpha \mu_\beta e_{\alpha+\beta}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Далее нам нужно рассмотреть следующие частные случаи.

Случай 3.1. Пусть $\alpha+\beta \in \mathfrak{R}_I^+$. Сравнивая (5.3) и (5.4), мы получим, что

$$p_I\left(\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I}\sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I}\lambda_\alpha\mu_\beta e_{\alpha+\beta}\right)=\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I}\sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I}\lambda_\alpha\mu_\beta e_{\alpha+\beta}=[p_I(x),p_I(y)].$$

Случай 3.2. Пусть $0\neq\alpha+\beta\notin\mathfrak{R}_I^+$. Сравнивая (5.3) и (5.4), мы получим, что

$$p_I\left(\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_I^+}\sum_{\beta\in\mathfrak{R}_I^+}\lambda_\alpha\mu_\beta e_{\alpha+\beta}\right)=0=[p_I(x),p_I(y)].$$

Доказательство завершено. □

Пусть Δ — локальное дифференцирование. Определим отображение $\Delta_I:\mathfrak{b}_I\to\mathfrak{b}_I$ формулой

$$\Delta_I(x)=p_I(\Delta(x)),\quad x\in\mathfrak{b}_I.$$

Лемма 5.2. *Пусть Δ — локальное дифференцирование на $\mathfrak{b}_I$. Тогда Δ_I является дифференцированием.*

Доказательство. Пусть $x\in\mathfrak{b}_I$ — произвольный элемент. Возьмем элемент $a_x\in\mathfrak{b}$ такой, что $\Delta(x)=[a_x,x]$. Тогда, по лемме 5.1

$$\Delta_I(x)=p_I(\Delta(x))=p_I([a_x,x])=[p_I(a_x),p_I(x)]=[p_I(a_x),x].$$

□

Доказательство теоремы 5.1. Покажем, что любое локальное дифференцирование Δ на $\mathfrak{b}$ является дифференцированием. Возьмем конечное подмножество I в $\mathfrak{J}$ такое, что x, y, $\Delta(x)$, $\Delta(y)$, $\Delta([x,y])\in\mathfrak{b}_I$. Тогда Δ_I — локальное дифференцирование на $\mathfrak{b}_I$. Поскольку $\mathfrak{b}_I$ — стандартная борелевская подалгебра, по теореме 2.3 Δ_I является дифференцированием. Следовательно,

$$\Delta([x,y])=\Delta_I([x,y])=[\Delta_I(x),y]+[x,\Delta_I(y)]=[\Delta(x),y]+[x,\Delta(y)].$$

Это означает, что Δ является дифференцированием. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Albeverio S., Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Nurjanov B. O.* Local derivations on algebras of measurable operators// Commun. Cont. Math. — 2011. — *13*, № 4. — С. 643–657.
2. *Ayupov Sh. A., Khudoyberdiyev A. Kh.* Local derivations on Solvable Lie algebras// Linear Multilinear Algebra. — 2021. — *69*, № 7. — С. 1286–1301.
3. *Ayupov Sh. A., Khudoyberdiyev A. Kh., Yusupov B. B.* Local and 2-local derivations of solvable Leibniz algebras// ArXiv. — 2019. 1911.03733v1 [math.RA].
4. *Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K.* 2-Local automorphisms on finite dimensional Lie algebras// Linear Algebra Appl. — 2016. — *507*. — С. 121–131.
5. *Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K.* Local derivation on finite dimensional Lie algebras// Linear Algebra Appl. — 2016. — *493*. — С. 381–398.
6. *Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Nurjanov B. O., Alauadinov A. K.* Local and 2-local derivations on noncommutative Arens algebras// Math. Slovaca. — 2014. — *64*, № 2. — С. 423–432.
7. *Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Omirov A. B.* Local and 2-local derivations and automorphisms on simple Leibniz algebras// Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2). — 2020. — *43*. — С. 2199–2234.
8. *Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Rakhimov I. S.* 2-Local derivations on finite-dimensional Lie algebras// Linear Algebra Appl. — 2015. — *474*. — С. 1–11.
9. *Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Yusupov B. B.* 2-Local derivations on generalized Witt algebras// Linear Multilinear Algebra. — 2019. — *69*, № 16. — С. 3130–3140.
10. *Ayupov Sh. A., Yusupov B. B.* 2-local derivations on Virasoro algebras// Bull. Nat. Univ. Uzbekistan. Math. Natural Sci. — 2019. — *2*, № 4. — С. 217–230.
11. *Ayupov Sh. A., Yusupov B. B.* 2-local derivations of infinite-dimensional Lie algebras// J. Algebra Appl. — 2020. — *19*, № 5. — 2050100.

12. *Chen Z., Wang D.* 2-Local automorphisms of finite-dimensional simple Lie algebras// Linear Algebra Appl. — 2015. — *486.* — С. 335–344.
13. *Chen Y., Zhao K., Zhao Y.* Local derivations on Witt algebras// ArXiv. — 2019. — 1911.05.15v1 [math.RA].
14. *Dimitrov I., Penkov I.* Weight modules of direct limit Lie algebras// Int. Math. Res. Not. IMRN. — 1999. — *199*, № 5. — С. 223–249.
15. *Johnson B. E.* Local derivations on C^*-algebras are derivations// Trans. Moscow Math. Soc. — 2001. — *353.* — С. 313–325.
16. *Kadison R. V.* Local derivations// J. Algebra. — 1990. — *130.* — С. 494–509.
17. *Larson D. R., Sourour A. R.* Local derivations and local automorphisms of $B(X)$// В сб.: «Operator theory, operator algebras and applications. Proc. of the summer research institute, University of New Hampshire, Durham, USA, July 3–23, 1988». — Providence: Am. Math. Soc., 1990. — С. 187–194.
18. *Nebb K.-H.* Derivations of locally simple Lie algebras// J. Lie Theory. — 2005. — *15.* — С. 589–594.
19. *Neeb K.-H., Stumme N.* On the classification of locally finite split simple Lie algebras// J. Reine Angew. Math. — 2001. — *533.* — С. 25–53.
20. *Šemrl P.* Local automorphisms and derivations on $B(H)$// Proc. Am. Math. Soc. — 1997. — *125.* — С. 2677–2680.
21. *Yalong Yu., Chen Z.* Local derivations on Borel subalgebras of finite-dimensional simple Li algebras// Commun. Algebra. — 2019. — *48*, № 1. — С. 1–10.
22. *Yusupov B. B.* 2-Local derivations on Witt algebras// Uzbek Math. J. — 2018. — № 2. — С. 160–166.

Ш. А. Аюпов
Институт математики им. В. И. Романовского, Ташкент, Узбекистан;
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: sh_ayupov@mail.ru, shavkat.ayupov@mathinst.uz

К. К. Кудайбергенов
Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, Нукус, Узбекистан
E-mail: karim2006@mail.ru

Б. Б. Юсупов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: baxtiyor_yusupov_93@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-59-69 UDC 512.554

Local and 2-Local Derivations of Locally Simple Lie Algebras

© 2022 **Sh. Ayupov, K. Kudaybergenov, B. Yusupov**

Abstract. In the present paper, we study local and 2-local derivations of the classical locally simple Lie algebras. Firstly, we prove that every local and 2-local derivations on classical locally simple Lie algebra is a derivation. Further, we show that every local derivation of Borel subalgebras of locally simple Lie algebras is a derivation.

REFERENCES

1. S. Albeverio, Sh. A. Ayupov, K. K. Kudaybergenov, and B. O. Nurjanov, “Local derivations on algebras of measurable operators,” *Commun. Cont. Math.*, 2011, **13**, No. 4, 643–657.

2. Sh. A. Ayupov and A. Kh. Khudoyberdiyev, “Local derivations on Solvable Lie algebras,” *Linear Multilinear Algebra*, 2021, **69**, No. 7, 1286–1301.
3. Sh. A. Ayupov, A. Kh. Khudoyberdiyev, and B. B. Yusupov, “Local and 2-local derivations of solvable Leibniz algebras,” *ArXiv*, 2019, 1911.03733v1 [math.RA].
4. Sh. A. Ayupov and K. K. Kudaybergenov, “2-Local automorphisms on finite dimensional Lie algebras,” *Linear Algebra Appl.*, 2016, **507**, 121–131.
5. Sh. A. Ayupov and K. K. Kudaybergenov, “Local derivation on finite dimensional Lie algebras,” *Linear Algebra Appl.*, 2016, **493**, 381–398.
6. Sh. A. Ayupov, K. K. Kudaybergenov, B. O. Nurjanov, and A. K. Alauadinov, “Local and 2-local derivations on noncommutative Arens algebras,” *Math. Slovaca*, 2014, **64**, No. 2, 423–432.
7. Sh. A. Ayupov, K. K. Kudaybergenov, and A. B. Omirov, “Local and 2-local derivations and automorphisms on simple Leibniz algebras,” *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* (2), 2020, **43**, 2199–2234.
8. Sh. A. Ayupov, K. K. Kudaybergenov, and I. S. Rakhimov, “2-Local derivations on finite-dimensional Lie algebras,” *Linear Algebra Appl.*, 2015, **474**, 1–11.
9. Sh. A. Ayupov, K. K. Kudaybergenov, and B. B. Yusupov, “2-Local derivations on generalized Witt algebras,” *Linear Multilinear Algebra*, 2019, **69**, No. 16, 3130–3140.
10. Sh. A. Ayupov and B. B. Yusupov, “2-local derivations on Virasoro algebras,” *Bull. Nat. Univ. Uzbekistan. Math. Natural Sci.*, 2019, **2**, No. 4, 217–230.
11. Sh. A. Ayupov and B. B. Yusupov, “2-local derivations of infinite-dimensional Lie algebras,” *J. Algebra Appl.*, 2020, **19**, No. 5, 2050100.
12. Z. Chen and D. Wang, “2-Local automorphisms of finite-dimensional simple Lie algebras,” *Linear Algebra Appl.*, 2015, **486**, 335–344.
13. Y. Chen, K. Zhao, and Y. Zhao, “Local derivations on Witt algebras,” *ArXiv*, 2019, 1911.05.15v1 [math.RA].
14. I. Dimitrov and I. Penkov, “Weight modules of direct limit Lie algebras,” *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 1999, **199**, No. 5, 223–249.
15. B. E. Johnson, “Local derivations on C^*-algebras are derivations,” *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2001, **353**, 313–325.
16. R. V. Kadison, “Local derivations,” *J. Algebra.* , 1990, **130**, 494–509.
17. D. R. Larson and A. R. Sourour, “Local derivations and local automorphisms of $B(X)$,” In: *Operator theory, operator algebras and applications. Proc. of the summer research institute, University of New Hampshire, Durham, USA, July* 3–23*,* 1988, Am. Math. Soc., Providence, 1990, pp. 187–194.
18. K.-H. Nebb, “Derivations of locally simple Lie algebras,” *J. Lie Theory*, 2005, **15**, 589–594.
19. K.-H. Neeb and N. Stumme, “On the classification of locally finite split simple Lie algebras,” *J. Reine Angew. Math.*, 2001, **533**, 25–53.
20. P. Šemrl, “Local automorphisms and derivations on $B(H)$,” *Proc. Am. Math. Soc.*, 1997, **125**, 2677–2680.
21. Yu. Yalong and Z. Chen, “Local derivations on Borel subalgebras of finite-dimensional simple Li algebras,” *Commun. Algebra*, 2019, **48**, No. 1, 1–10.
22. B. B. Yusupov, “2-Local derivations on Witt algebras,” *Uzbek Math. J.*, 2018, No. 2, 160–166.

Sh. Ayupov
Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: `sh_ayupov@mail.ru, shavkat.ayupov@mathinst.uz`

K. Kudaybergenov
Karakalpak State University, Nukus, Uzbekistan
E-mail: `karim2006@mail.ru`

B. Yusupov
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: `baxtiyor_yusupov_93@mail.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). С. 70–79
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-70-79 УДК 512.74+517.926

СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

© 2022 г. **К. К. МУМИНОВ, Р. А. ГАФФОРОВ**

Аннотация. Установлены необходимые и достаточные условия эквивалентности поверхностей относительно действия специальной псевдоортогональной группы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Пусть C^n — комплексное n-мерное линейное пространство, и пусть $GL(n,C)$ — группа всех обратимых линейных преобразований в C^n. Элементы из C^n представляются в виде n-мерных вектор-столбцов $\overrightarrow{x} = \{\overrightarrow{x}_j\}_{j=1}^n$, а преобразования $g \in GL(n,C)$ в виде $n \times n$-матриц $(g_{ij})_{i,j=1}^n$, где x_i, $g_{ij} \in C$, $i,j = 1,\dots,n$. Действие $g \in GL(n,C)$ на вектор $\overrightarrow{x} = \{\overrightarrow{x}_j\}_{j=1}^n \in C^n$ определяется как умножение матрицы g на вектор-столбец $\overrightarrow{x}$ (запись: $g\overrightarrow{x}$).

C^∞-дифференцируемое отображение $x : (0,1) \times (0,1) \to C^n$ называется *элементарной поверхностью*. Если G — подгруппа группы $GL(n,C)$, то две элементарные поверхности $\overrightarrow{y}(s,t)$ и $\overrightarrow{x}(s,t)$ называют *G-эквивалентными*, если $\overrightarrow{y}(s,t) = g\overrightarrow{x}(s,t)$ для некоторого $g \in G$ и любых $(s,t) \in (0,1) \times (0,1)$.

Одной из важных задач в дифференциальной геометрии является проблема нахождения удобных критериев для эквивалентности элементарных поверхностей. Одним из эффективных методов при решении такой задачи является использование инструментов теории дифференциальных инвариантов.

В настоящей работе задача G-эквивалентности элементарных поверхностей для специальной псевдоортогональной группы $SO(n,p,C)$ переформулируется в терминах дифференциальной алгебры, что позволяет использовать алгебраический подход для решения этой задачи. Такой подход применялся при получении необходимых и достаточных условий G-эквивалентности поверхностей в случае действий общей линейной, специальной линейной, ортогональной, псевдоортогональной и симплектической групп (см. [1,4,5,9]).

Кроме того, описываются системы дифференциальных уравнений, решения которых восстанавливают поверхности с точностью до их эквивалентности относительно действия специальной псевдоортогональной группы $SO(n,p,C)$.

2. Предварительные сведения

Для каждой элементарной поверхности $\overrightarrow{x}(s,t) = (x_j(s,t))_{j=1}^n$ через

$$M_s(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} x_1(s,t) & \dfrac{\partial x_1(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial^2 x_1(s,t)}{\partial s^2} & \dots & \dfrac{\partial^{n-1} x_1(s,t)}{\partial s^{n-1}} \\ x_2(s,t) & \dfrac{\partial x_2(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial^2 x_2(s,t)}{\partial s^2} & \dots & \dfrac{\partial^{n-1} x_2(s,t)}{\partial s^{n-1}} \\ x_3(s,t) & \dfrac{\partial x_3(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial^2 x_3(s,t)}{\partial s^3} & \dots & \dfrac{\partial^{n-1} x_3(s,t)}{\partial s^{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n(s,t) & \dfrac{\partial x_n(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial^2 x_n(s,t)}{\partial s^2} & \dots & \dfrac{\partial^{n-1} x_n(s,t)}{\partial s^{n-1}} \end{pmatrix}$$

обозначим $n\times n$-матрицу $(m_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n$, где i-ый столбец имеет координаты $m_{ij}(s,t) = \dfrac{\partial^{i-1} x_j(s,t)}{\partial s^{i-1}}$, $i,j = 1,\dots,n$, при этом считается, что $\dfrac{\partial^0 x_j(s,t)}{\partial s^0} = x_j(s,t)$ для всех $j = 1,\dots,n,\ \ s,t \in (0,1)$.

Через

$$M'_{ss}(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial^2 x_1(s,t)}{\partial s^2} & \dfrac{\partial^3 x_1(s,t)}{\partial s^3} & \dots & \dfrac{\partial^n x_1(s,t)}{\partial s^n} \\ \dfrac{\partial x_2(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial^2 x_2(s,t)}{\partial s^2} & \dfrac{\partial^3 x_2(s,t)}{\partial s^3} & \dots & \dfrac{\partial^n x_2(s,t)}{\partial s^n} \\ \dfrac{\partial x_3(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial^2 x_3(s,t)}{\partial s^2} & \dfrac{\partial^3 x_3(s,t)}{\partial s^3} & \dots & \dfrac{\partial^n x_3(s,t)}{\partial s^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial x_n(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial^2 x_n(s,t)}{\partial s^2} & \dfrac{\partial^3 x_n(s,t)}{\partial s^3} & \dots & \dfrac{\partial^n x_n(s,t)}{\partial s^n} \end{pmatrix}$$

обозначается матрица $\left\{\dfrac{\partial^i x_j(s,t)}{\partial s^i}\right\}_{i,j=1}^n$, а через

$$M'_{st}(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1(s,t)}{\partial t} & \dfrac{\partial^2 x_1(s,t)}{\partial s \partial t} & \dfrac{\partial^3 x_1(s,t)}{\partial s^2 \partial t} & \dots & \dfrac{\partial^n x_1(s,t)}{\partial s^{n-1} \partial t} \\ \dfrac{\partial x_2(s,t)}{\partial t} & \dfrac{\partial^2 x_2(s,t)}{\partial s \partial t} & \dfrac{\partial^3 x_2(s,t)}{\partial s^2 \partial t} & \dots & \dfrac{\partial^n x_2(s,t)}{\partial s^{n-1} \partial t} \\ \dfrac{\partial x_3(s,t)}{\partial t} & \dfrac{\partial^2 x_3(s,t)}{\partial s \partial t} & \dfrac{\partial^3 x_3(s,t)}{\partial s^2 \partial t} & \dots & \dfrac{\partial^n x_3(s,t)}{\partial s^{n-1} \partial t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial x_n(s,t)}{\partial t} & \dfrac{\partial^2 x_n(s,t)}{\partial s \partial t} & \dfrac{\partial^3 x_n(s,t)}{\partial s^2 \partial t} & \dots & \dfrac{\partial^n x_n(s,t)}{\partial s^{n-1} \partial t} \end{pmatrix}$$

— матрица $\left\{\dfrac{\partial^i x_j(s,t)}{\partial s^{i-1} \partial t}\right\}_{i,j=1}^n$.

Всюду в дальнейшем рассматриваются только регулярные поверхности, т. е. элементарные поверхности $\overrightarrow{x}(s,t)$, для которых определитель

$$\det M_s\overrightarrow{(x)}(s,t) = det \begin{pmatrix} x_1(s,t) & \dfrac{\partial x_1(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial^2 x_1(s,t)}{\partial s^2} & \dots & \dfrac{\partial^{n-1} x_1(s,t)}{\partial s^{n-1}} \\ x_2(s,t) & \dfrac{\partial x_2(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial^2 x_2(s,t)}{\partial s^2} & \dots & \dfrac{\partial^{n-1} x_2(s,t)}{\partial s^{n-1}} \\ x_3(s,t) & \dfrac{\partial x_3(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial^2 x_3(s,t)}{\partial s^3} & \dots & \dfrac{\partial^{n-1} x_3(s,t)}{\partial s^{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n(s,t) & \dfrac{\partial x_n(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial^2 x_n(s,t)}{\partial s^2} & \dots & \dfrac{\partial^{n-1} x_n(s,t)}{\partial s^{n-1}} \end{pmatrix} \neq 0$$

при всех $s, t \in (0,1)$.

Пусть $O(n,C)$ (соответственно, $O(n,p,C)$) ортогональная (соответственно, псевдоортогональная) подгруппа в $GL(n,C)$, т. е.

$$O(n,C) = \{g \in GL(n,C) : g^T g = e\}$$

(соответственно,

$$O(n,p,C) = \{g \in GL(n,C) : g^T e_p g = e_p\}),$$

где g^T — транспонированная матрица g, e — единица группы $GL(n,C)$, $e_p = (e_{ij}^p)_{i,j=1}^n$ — матрица из $GL(n,C)$, для которой $e_{ii}^p = 1$ при $i = 1, 2, \ldots, p$, $e_{ii}^p = -1$ при $i = p+1, \ldots, n$, $e_{ij}^p = 0$ при $i \neq j$, $p \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Через $SO(n,C)$ (соответственно $SO(n,p,C)$) обозначим специальную ортогональную (соответственно, специальную псевдоортогональную) подгруппу в $GL(n,C)$, т. е.

$$SO(n,C) = \{g \in O(n,C) : \det g = 1\}$$

(соответственно,

$$SO(n,p,C) = \{g \in O(n,p,C) : \det g = 1\}).$$

Следующая теорема устанавливает необходимые и достаточные условия G-эквивалентности регулярных поверхностей $\overrightarrow{x}(s,t)$ и $\overrightarrow{y}(s,t)$ с помощью матриц $M_s(\overrightarrow{x})$ и $M_s(\overrightarrow{y})$, в случае, когда $G = SO(n,p,C)$.

Теорема 2.1. *Две регулярные поверхности $\overrightarrow{x}(s,t)$ и $\overrightarrow{y}(s,t)$ является $SO(n,p,C)$-эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства*:

$$a)\ M_s^{-1}(\overrightarrow{x})(s,t)M_{ss}'(\overrightarrow{x})(s,t) = M_s^{-1}(\overrightarrow{y})(s,t)M_{ss}'(\overrightarrow{y})(s,t);$$

$$b)\ M_s^{-1}(\overrightarrow{x})(s,t)M_{st}'(\overrightarrow{x})(s,t) = M_s^{-1}(\overrightarrow{y})(s,t)M_{st}'(\overrightarrow{y})(s,t);$$

$$c)\ M_s^T(\overrightarrow{x})(s,t)e_p M_s(\overrightarrow{x})(s,t) = M_s^T(\overrightarrow{y})(s,t)e_p M_s(\overrightarrow{y})(s,t);$$

$$d)\ \det M_s(\overrightarrow{x})(s,t) = \det M_s(\overrightarrow{y})(s,t)$$

для всех $s, t \in (0,1)$.

Доказательство. Пусть поверхности $\overrightarrow{x}(s,t)$ и $\overrightarrow{y}(s,t)$ — $SO(n,p,C)$-эквиваленты, т. е. существует такой элемент $g \in SO(n,p,C)$, для которого верно равенство $\overrightarrow{y}(s,t) = g\overrightarrow{x}(s,t)$. Следовательно, в силу определения матрицы $M_s(\overrightarrow{x})$ имеем, что $M_s(\overrightarrow{y}) = gM_s(\overrightarrow{x})$. Покажем, что из этого равенства вытекает справедливость равенств $a), b), c), d)$.

Действительно,

a). $M_s^{-1}(\overrightarrow{y})(s,t)M_{ss}'(\overrightarrow{y})(s,t) = (gM_s(\overrightarrow{x})(s,t))^{-1}(gM_{ss}(\overrightarrow{x})(s,t)) =$
$= M_s^{-1}(\overrightarrow{x})(s,t)g^{-1}gM_{ss}'(\overrightarrow{x})(s,t) = M_s^{-1}(\overrightarrow{x})(s,t)M_{ss}'(\overrightarrow{x})(s,t);$

b). $M_s^{-1}(\overrightarrow{y})(s,t)M_{st}'(\overrightarrow{y})(s,t) = (gM_s(\overrightarrow{x})(s,t))^{-1}(gM_s(\overrightarrow{x})(s,t))_{st}' =$
$= M_s^{-1}(\overrightarrow{x})(s,t)g^{-1}gM_{st}'(\overrightarrow{x})(s,t) = M_s^{-1}(\overrightarrow{x})(s,t)M_{st}'(\overrightarrow{x})(s,t);$

c). $M_s^T(\overrightarrow{y})(s,t)e_p M_s(\overrightarrow{y})(s,t) = (gM_s(\overrightarrow{x})(s,t))^T e_p g M_s(\overrightarrow{x})(s,t) =$
$= M_s^T(\overrightarrow{x})(s,t)g^T e_p g M_s(\overrightarrow{x})(s,t) = M_s^T(\overrightarrow{x})(s,t)e_p M_s(\overrightarrow{x})(s,t);$

d). $\det M_s(\overrightarrow{y})(s,t) = \det(gM_s(\overrightarrow{x})(s,t)) = \det g \cdot \det M_s(\overrightarrow{x})(s,t) = \det M_s(\overrightarrow{x})(s,t).$

Обратно, пусть для поверхностей $\overrightarrow{x}(s,t)$ и $\overrightarrow{y}(s,t)$ выполняются соотношения $a), b), c), d)$. Заметим, что если $A(s,t) = A$ — обратимая матрица, то из равенства $A^{-1}A = AA^{-1} = e$ вытекает, что $A_s A^{-1} + A(A^{-1})_s = 0$, откуда $(A^{-1})_s = -A^{-1}A_s A^{-1}$. Используя это равенство, соотношения $a), b)$ переписываются, соответственно, в виде:

a'). $(M_s(\overrightarrow{y}) \cdot M_s(\overrightarrow{x})^{-1})_s = 0;$

b'). $(M_s(\overrightarrow{y}) \cdot M_s(\overrightarrow{x})^{-1})_t = 0.$

Эти равенства означают, что

$$M_s(\overrightarrow{y}) \cdot M_s(\overrightarrow{x})^{-1} = g = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in GL(n, C).$$

Следовательно, $M_s(\overrightarrow{y}(s,t)) = gM_s(\overrightarrow{x}(s,t))$, в частности, $\overrightarrow{y}(s,t) = g\overrightarrow{x}(s,t)$ для всех $s,t \in (0,1)$.

Далее, в силу равенства c) имеем, что

$$g^T e_p g = \left(M_s(\overrightarrow{y})M_s(\overrightarrow{x})^{-1}\right)^T e_p M_s(\overrightarrow{y})M_s(\overrightarrow{x})^{-1} = e_p,$$

т. е. $g^T e_p g = e_p$. Это означает, что $g \in O(n,p,C)$.

Используя теперь равенство d), получим, что

$$\det M_s(\overrightarrow{y}) = \det(gM_s(\overrightarrow{x})) = \det g \cdot \det M_s(\overrightarrow{x}),$$

что влечет равенство $\det g = 1$. Следовательно, $g \in SO(n,p,C)$. Теорема 2.1 доказана. □

3. Дифференциальные уравнения для $SO(n,p,C)$-эквивалентных поверхностей

Пусть $\overrightarrow{x}(s,t) = \{x_j(s,t)\}_{j=1}^n$ регулярная поверхность в C^n, и пусть $M_s(\overrightarrow{x}) = \left\{\frac{\partial^{i-1}x_j(s,t)}{\partial s^{i-1}}\right\}_{i,j=1}^n$, $s,t \in (0,1)$.

Для вычисления обратной матрицы $(M_s(\overrightarrow{x})(s,t))^{-1}$ через $M_{ij}(s,t)$ обозначим минор порядка $(n-1)$, получающийся после вычеркивания из определителя $\det M_s(\overrightarrow{x})(s,t)$ i-ой строки и j-го столбца.

Пусть $\tilde{A}_{ij}(s,t)$ — алгебраическое дополнение элемента $\dfrac{\partial^{j-1}x_i(s,t)}{\partial s^{j-1}}$ матрицы $M_s(\overrightarrow{x})(s,t)$, т. е.

$$\tilde{A}_{ij}(s,t) = (-1)^{i+j} M_{ji}(s,t).$$

Элементы $\alpha_{ij}(s,t)$ обратной матрицы $(M_s(\overrightarrow{x})(s,t))^{-1}$ имеют вид

$$\alpha_{ij}(s,t) = \frac{1}{\det M_s(\overrightarrow{x})(s,t)} \tilde{A}_{ij}(s,t), \quad i,j = \overline{1,n}.$$

Следовательно, элемент $a_{i\,j}(s,t)$ матрицы $(M_s(\overrightarrow{x})(s,t))^{-1} M'_{ss}(\overrightarrow{x})(s,t)$ вычисляется с помощью равенства

$$a_{ij}(s,t) = \frac{1}{\det M_s(\overrightarrow{x})(s,t)} \sum_{k=1}^n \tilde{A}_{ik}(s,t) \frac{\partial^j x_k(s,t)}{\partial s^j} = \frac{1}{\det M_s(\overrightarrow{x})(s,t)} \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} M_{ik}(s,t) \frac{\partial^j x_k(s,t)}{\partial s^j},$$

где

$$M_{ij}(s,t) = \begin{vmatrix} x_1(s,t) & \dots & \dfrac{\partial^{j-2}x_1(s,t)}{\partial s^{j-2}} & \dfrac{\partial^j x_1(s,t)}{\partial s^j} & \dots & \dfrac{\partial^{n-1}x_1(s,t)}{\partial s^{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i-1}(s,t) & \dots & \dfrac{\partial^{j-2}x_{i-1}(s,t)}{\partial s^{j-2}} & \dfrac{\partial^j x_{i-1}(s,t)}{\partial s^j} & \dots & \dfrac{\partial^{n-1}x_{i-1}(s,t)}{\partial s^{n-1}} \\ x_{i+1}(s,t) & \dots & \dfrac{\partial^{j-2}x_{i+1}(s,t)}{\partial s^{j-2}} & \dfrac{\partial^j x_{i+1}(s,t)}{\partial s^j} & \dots & \dfrac{\partial^{n-1}x_{i+1}(s,t)}{\partial s^{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n(s,t) & \dots & \dfrac{\partial^{j-2}x_n(s,t)}{\partial s^{j-2}} & \dfrac{\partial^j x_n(s,t)}{\partial s^j} & \dots & \dfrac{\partial^{n-1}x_n(s,t)}{\partial s^{n-1}} \end{vmatrix}$$

и

$$\det M_s(\overrightarrow{x})(s,t) = \frac{\partial^{j-1}x_1(s,t)}{\partial s^{j-1}} \tilde{A}_{1\,j}(s,t) + \dots + \frac{\partial^{j-1}x_n(s,t)}{\partial s^{j-1}} \tilde{A}_{n\,j}(s,t).$$

Таким образом, произведение

$$(M_s(\overrightarrow{x}))^{-1} M'_{ss}(\overrightarrow{x}) = A(s,t) = (a_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n$$

имеет следующий вид:

$$A(s,t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n}(s,t) \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2n}(s,t) \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{3n}(s,t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{nn}(s,t) \end{pmatrix},$$

где

$$a_{in}(s,t) = \frac{1}{\det M_s(\overrightarrow{x})(s,t)} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} M_{ik}(s,t) \frac{\partial^n x_k(s,t)}{\partial s^n}$$

— комплекснозначные бесконечно дифференцируемые функции, $(s,t) \in (0,1) \times (0,1)$, $i = 1, \dots, n$, вычисляемые по формулам

$$a_{in} = \frac{\left[\overrightarrow{x} \dots \overrightarrow{x}_s^{(i-1)} \overrightarrow{x}_s^{(i+1)} \dots \overrightarrow{x}_s^{(n-1)}\right]}{\det M_s(\overrightarrow{x})}, \ i = 2, \dots, n-1;$$

$$a_{1n} = \frac{\left[\overrightarrow{x}_s^{(n)} \overrightarrow{x}_s^{(1)} \dots \overrightarrow{x}_s^{(n-1)}\right]}{\det M_s(\overrightarrow{x})};$$

....

$$a_{nn} = \frac{\left[\overrightarrow{x} \, \overrightarrow{x}_s^{(1)} \dots \overrightarrow{x}_s^{(n-2)} \overrightarrow{x}_s^{(n)}\right]}{\det M_s(\overrightarrow{x})}$$

(запись $[\overrightarrow{x} \ \overrightarrow{y} \dots \overrightarrow{z}]$ означает детерминант матрицы, у которой столбцами являются векторы $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}, \dots, \overrightarrow{z}$).

Из этих равенств вытекает, что числовая функция

$$\det M_s(\overrightarrow{x}) = \left[\overrightarrow{x} \ \overrightarrow{x}^{(1)} \dots \overrightarrow{x}^{(n-1)}\right] = d(s,t)$$

удовлетворяет равенствам

$$a_{nn} d = a_{nn} \left[\overrightarrow{x} \ \overrightarrow{x}_s^{(1)} \dots \overrightarrow{x}_s^{(n-1)}\right] = \left[\overrightarrow{x} \ \overrightarrow{x}_s^{(1)} \dots \overrightarrow{x}_s^{(n-2)} \ \overrightarrow{x}_s^{(n)}\right] = d_s^{'},$$

т. е.

$$d_s^{'}(s,t) = a_{nn}(s,t) d(s,t)$$

для всех $s, t \in (0,1)$. Кроме того, для невырожденной матрицы $C = M_s^T(\overrightarrow{x}) e_p M_s(\overrightarrow{x})$ следует, что

$$\begin{cases} det \ C = d^2, (n-p) - \text{четно}, \\ det \ C = -d^2, (n-p) - \text{нечетно}. \end{cases}$$

Рассмотрим следующую систему матричных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} X_s'(s,t) = X(s,t) A(s,t), \\ X_t'(s,t) = X(s,t) B(s,t). \end{cases} \tag{3.1}$$

где $X(s,t) = (x_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n$ — неизвестная $n \times n$-матрица, $A(s,t) = (a_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n$, $B(s,t) = (b_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n$ — заданные фиксированные $n \times n$-матрицы, $s, t \in (0,1)$ (предполагается, что функции $a_{ij}(s,t)$ и $b_{ij}(s,t)$ являются C^∞-дифференцируемыми).

Решение $X(s,t)$ системы (3.1) называется *невырожденным*, если $\det X(s,t) \neq 0$ для всех $s, t \in (0,1)$. Два решения $X_0(s,t)$ и $X_1(s,t)$ называют $SO(n,p,C)$-*эквивалентными*, если $X_1(s,t) = g X_0(s,t)$ для некоторого $g \in SO(n,p,C)$.

Вместе с системой (3.1) рассмотрим также следующую систему равенств:

$$\begin{cases} X^T(s,t) e_p X(s,t) = C(s,t), \\ \det X(s,t) = d(s,t), \end{cases}$$

где
$$C(s,t) = (c_{ij}(s,t))_{i,j=1}^{n} = C^T(s,t),$$
а $c_{ij}(s,t)$, $d(s,t)$ — C^∞-дифференцируемые функции, $d(s,t) \neq 0$ при всех $s,t \in (0,1)$.

Теорема 3.1. *Пусть невырожденные матрицы $A(s,t)$, $B(s,t)$, $C(s,t)$ удовлетворяют следующим условиям:*

(i).
$$A(s,t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n}(s,t) \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2n}(s,t) \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{3n}(s,t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{nn}(s,t) \end{pmatrix};$$

(ii). $A_t(s,t) + B(s,t)A(s,t) = B_s(s,t) + A(s,t)B(s,t)$,
где $A_t(s,t) = \Big(\dfrac{\partial\, a_{ij}(s,t)}{\partial t}\Big)_{i,j=1}^{n}$, $B_s(s,t) = \Big(\dfrac{\partial\, b_{ij}(s,t)}{\partial s}\Big)_{i,j=1}^{n}$;

(iii). $C_s(s,t) = A^T(s,t)C(s,t) + C(s,t)A(s,t)$, *где* $C_s(s,t) = \Big(\dfrac{\partial\, c_{ij}(s,t)}{\partial s}\Big)_{i,j=1}^{n}$;

(iv). $C_t(s,t) = B^T(s,t)C(s,t) + C(s,t)B(s,t)$, *где* $C_t(s,t) = \Big(\dfrac{\partial\, c_{ij}(s,t)}{\partial t}\Big)_{i,j=1}^{n}$,

и пусть C^∞-дифференцируемая функция $d(s,t)$ удовлетворяет равенствам

(v). $d'_s(s,t) = a_{nn}d$;
(vi). $d'_t(s,t) = (b_{11} + b_{22} + \ldots + b_{nn})d$;
(vii). $d^2(s,t) = \det C(s,t)$.

Тогда система уравнений
$$\begin{cases} X'_s = XA, \\ X'_t = XB, \\ X^T e_p X = C, \\ \det X = d \end{cases} \tag{3.2}$$
имеет невырожденное решение. При этом решение системы (3.2) *единственно с точностью до $SO(n,p,C)$-эквивалентности.*

Доказательство. В силу условия $A_t - B_s = AB - BA$ (см. условие (ii)) система (3.1) имеет невырожденное решение $X_0(s,t)$ (см., например, [2, § 7]). Покажем, что всякое другое решение $X_1 = X_1(s,t)$ системы (3.1) имеет вид $X_1 = gX_0$, где $g \in GL(n,R)$. Действительно, используя (3.1), имеем
$$(X_1(s,t)X_0^{-1}(s,t))_s = (X_1(s,t))_s X_0^{-1}(s,t) + X_1(s,t)(X_0^{-1}(s,t))_s = (X_1(s,t))_s X_0^{-1}(s,t) +$$
$$+ X_1(s,t)(-X_0^{-1}(s,t)X_{0\,s}(s,t)X_0^{-1}(s,t)) = (X_{1\,s}(s,t) - X_1(s,t)X_0^{-1}(s,t)X_{0\,s}(s,t))X_0^{-1}(s,t) =$$
$$= (X_1(s,t)A(s,t) - X_1(s,t)A(s,t))X_0^{-1}(s,t) = 0.$$
Аналогичным образом получаем
$$(X_1(s,t)X_0^{-1}(s,t))_t = (X_1(s,t))_t X_0^{-1}(s,t) + X_1(s,t)(X_0^{-1}(s,t))_t = (X_1(s,t))_t X_0^{-1}(s,t) +$$
$$+ X_1(s,t)(-X_0^{-1}(s,t)X_{0\,t}(s,t)X_0^{-1}(s,t)) = (X_{1\,t}(s,t) - X_1(s,t)X_0^{-1}(s,t)X_{0\,t}(s,t))X_0^{-1}(s,t) =$$
$$= (X_1(s,t)B(s,t) - X_1(s,t)B(s,t))X_0^{-1}(s,t) = 0.$$
Поэтому $X_1X_0^{-1} = g \in GL(n,C)$, т. е. $X_1 = gX$. Таким образом, все матрицы
$$\{gX = gX_0(s,t) : g \in GL(n,C)\} \tag{3.3}$$
также является решениями системы (3.2).

Если $X = (x_{jk}(s,t))_{j,k=1}^n$ — решение системы (3.1), $X_s = (x_{jk}^{(1)}(s,t))_{j,k=1}^n$, то учитывая вид матрицы A (см. условие (i)) и записав первое уравнение системы (3.1) в виде $X_s = XA$, получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\, x_{j1}(s,t)}{\partial\, s} = x_{j2}(s,t),\ j = 1,\dots,n, \\ \dots \\ \dfrac{\partial\, x_{j\,n-1}(s,t)}{\partial\, s} = x_{j\,n}(s,t),\ j = 1,\dots,n, \\ \dfrac{\partial\, x_{j\,n}(s,t)}{\partial\, s} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k\,n} x_{j\,k}(s,t),\ j = 1,\dots,n. \end{cases} \tag{3.4}$$

Это означает, что решение $X = (x_{jk}(s,t))_{j,k=1}^n$ системы (3.1) имеет вид $X = M_s(\overrightarrow{x})$, где $\overrightarrow{x} = (x_{11}(s,t),\dots,x_{n1}(s,t))$.

Пусть теперь $X(s,t)$ невырожденное решения системы (3.1), и пусть

$$W = (X^T)^{-1} C X^{-1}.$$

Ясно, что матрица W является невырожденной и симметрической. Поскольку $X(t)$ является решением системы (3.1), то из условия (iii) следует, что

$$\begin{gathered} W_s' = ((X^T(s,t))^{-1} C(s,t) X^{-1}(s,t))_s' = ((X^T)^{-1}(s,t))_s' C(s,t) X^{-1}(s,t) + \\ + (X^T(s,t))^{-1} (C(s,t) X^{-1}(s,t))_s' = -(X^{-1}(s,t) X_s'(s,t) X^{-1}(s,t))^T C(s,t) X^{-1}(s,t) + \\ + (X^T(s,t))^{-1} (C_s'(s,t) X^{-1}(s,t) - C(s,t) X^{-1}(s,t) X_s'(s,t) X^{-1}(s,t)) = \\ = (X^{-1}(s,t))^T [-(X_s(s,t))^T (X^{-1}(s,t))^T C(s,t) + C_s'(s,t) - \\ - C(s,t) X^{-1}(s,t) X_s'(s,t)] X^{-1}(s,t) = (X^{-1}(s,t))^T (-A^T(s,t) C(s,t) + C_s'(s,t) - \\ - C(s,t) A(s,t)) X^{-1}(s,t) = 0. \end{gathered}$$

Аналогичным образом устанавливается, что

$$\begin{gathered} W_t' = ((X^T(s,t))^{-1} C(s,t) X^{-1}(s,t))_t' = ((X^T)^{-1}(s,t))_t' C(s,t) X^{-1}(s,t) + \\ + (X^T(s,t))^{-1} (C(s,t) X^{-1}(s,t))_t' = -(X^{-1}(s,t) X_t'(s,t) X^{-1}(s,t))^T C(s,t) X^{-1}(s,t) + \\ + (X^T(s,t))^{-1} (C_t'(s,t) X^{-1}(s,t) - C(s,t) X^{-1}(s,t) X_t'(s,t) X^{-1}(s,t)) = \\ = (X^{-1}(s,t))^T [-(X_t(s,t))^T (X^{-1}(s,t))^T C(s,t) + C_t'(s,t) - \\ - C(s,t) X^{-1}(s,t) X_t'(s,t)] X^{-1}(s,t) = (X^{-1}(s,t))^T (-B^T(s,t) C(s,t) + C_t'(s,t) - \\ - C(s,t) B(s,t)) X^{-1}(s,t) = 0. \end{gathered}$$

Следовательно,

$$(X^T)^{-1} C X^{-1} = (h_{ij})_{i,j=1}^n = h \in GL(n, C),$$

в частности,

$$X^T h X = C. \tag{3.5}$$

Из разложения Такаги для невырожденной симметричной матрицы h (см., например, [7, гл. 4, § 4.4]) имеем, что $h = U^T D U$, где U — унитарная матрица, $D = diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ — диагональная матрица с элементами $\lambda_j > 0$, $j = 1,\dots,n$.

Взяв

$$D_p = diag(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_p}, i\sqrt{\lambda_{p+1}},\dots,i\sqrt{\lambda_n}),$$

где $i^2 = -1$, и положив $g = D_p U \in GL(n, C)$, получим, что $D = D_p^T e_p D_p$ и

$$h = U^T D_p^T e_p D_p U = g^T e_p g.$$

Таким образом, для $Y = gX$ с учетом (3.4) имеем, что

$$Y^T e_p Y = X^T g^T e_p g X = X^T h X = C.$$

Отсюда и из (3.3) следует, что Y является невырожденным решением системы

$$\begin{cases} X_s' = XA, \\ X_t' = XB, \\ X^T e_p X = C. \end{cases} \tag{3.6}$$

Если $X(s,t)$ — невырожденное решение системы (3.4), $g \in O(n,p,C)$ и $Y(s,t) = gX(s,t)$, то

$$Y_s'(s,t) = gX_s'(s,t) = gX(s,t)A(s,t) = Y(s,t)A(s,t)$$

и

$$Y_t'(s,t) = gX_t'(s,t) = gX(s,t)B(s,t) = Y(s,t)B(s,t),$$

при этом

$$Y^T(s,t)e_pY(s,t) = X^T(s,t)g^Te_pgX(s,t) = X^T(s,t)e_pX(s,t) = C(s,t).$$

Это означает, что $Y(s,t)$ также является невырожденным решением системы (3.6). Таким образом, для системы (3.5) существует единственное с точностью до $O(n,p,C)$-эквивалентности невырожденное решение $X(s,t) = (x_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n$.

Легко убедиться, что для системы уравнений (3.2) выполнены следующие соотношения:

$$\begin{cases} a_{nn} = \dfrac{d_s'}{d} = \dfrac{[\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{x}_s^{(1)}\dots\overrightarrow{x}_s^{(n-1)}]_s}{[\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{x}_s^{(1)}\dots\overrightarrow{x}_s^{(n-1)}]}, \\ b_{11} + b_{22} + \ldots + b_{nn} = \dfrac{d_t'}{d} = \dfrac{[\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{x}_s^{(1)}\dots\overrightarrow{x}_s^{(n-1)}]_t}{[\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{x}_s^{(1)}\dots\overrightarrow{x}_s^{(n-1)}]}. \end{cases}$$

Обозначая $u(s,t) = \det X(s,t)$, получим, что

$$\frac{d_s(s,t)u(s,t) - d(s,t)u_s(s,t)}{u^2(s,t)} \cdot \frac{u(s,t)}{d(s,t)} = 0$$

и аналогично

$$\frac{d_t(s,t)u(s,t) - d(s,t)u_t(s,t)}{u^2(s,t)} \cdot \frac{u(s,t)}{d(s,t)} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{u} = const = \lambda,$$

или $d = \lambda \det X(s,t)$ для некоторой константы $\lambda \neq 0$.

Так как $X^T(s,t)e_pX(s,t) = C(s,t)$ и $X^T(s,t)JX(s,t) = C(s,t)$, то

$$\begin{cases} \det C(s,t) = u^2(s,t) & \text{при четном } (n-p), \\ \det C(s,t) = -u^2(s,t) & \text{при нечетном } (n-p). \end{cases}$$

Следовательно,

$$u^2(s,t) = d^2(s,t) = \lambda^2 u^2(s,t),$$

что влечет равенство $\lambda = \pm 1$. Поскольку для любого $g \in O(n,p,C)$ верно равенство $g^Te_pg = e_p$, то $\det g = \pm 1$. Поэтому всегда найдется такое $g \in O(n,p,C)$, что $\det g = \lambda$.

Следовательно, для $Y(s,t) = gX(s,t)$ имеем, что

$$\det Y(s,t) = \det g \cdot \det X(s,t) = \lambda \cdot \frac{d(s,t)}{\lambda} = d(s,t),$$

т. е. $Y(s,t)$ является невырожденным решением системы (3.2).

Пусть $X(s,t)$ — одно из этих решений, тогда $Y(s,t) = gX(s,t)$ будет общим решением этой системы тогда и только тогда, когда $g \in SO(n,p,C)$.

Действительно, если X и Y — два невырожденных решения системы (3.2), то как показано выше, $Y = gX$ для некоторого $g \in SO(n,p,C)$.

Обратно, если $g \in SO(n,p,C)$ и $X(s,t)$ — фиксированное решение системы (3.2), то для $Y(s,t) = gX(s,t)$ имеем, что

$$\det Y(s,t) = \det g \cdot \det X(s,t) = \det X(s,t) = \det(s,t),$$

т. е. $Y(s,t)$ — также решение системы (3.1). Теорема 3.1 доказана. □

Следствие 3.1. *Пусть $X_0(s,t)$ — невырожденное решение системы* (3.2). *Тогда совокупность всех невырожденных решений системы* (3.2) *совпадает с множеством* $\{gX_0(s,t) : g \in SO(n,p,C)\}$.

Для каждой элементарной поверхности $\overrightarrow{x}(s,t) = (x_j(s,t))_{j=1}^n$ рассмотрим $n \times n$-матрицу

$$M_s(\overrightarrow{x}) = \Big\{ \frac{\partial^{i-1} x_j(s,t)}{\partial s^{i-1}} \Big\}_{i,j=1}^n,$$

где $\dfrac{\partial^0 x_j(s,t)}{\partial s^0} = x_j(s,t)$ для всех $j = 1, \ldots, n$, и положим

$$M'_{ss}(\overrightarrow{x}) = \Big(\frac{\partial^i x_j(s,t)}{\partial s^i} \Big)_{i,j=1}^n, \quad M'_{st}(\overrightarrow{x}) = \Big(\frac{\partial^i x_j(s,t)}{\partial s^{i-1} \partial t} \Big)_{i,j=1}^n.$$

Элементарная поверхность $\overrightarrow{x}(s,t)$ называется *регулярной*, если $\det M_s(\overrightarrow{x}(s,t)) \neq 0$ при всех $s, t \in (0,1)$.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Тогда*:

(i). *для любого невырожденного решения $X(s,t) = (x_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n$ системы уравнений* (3.2) *существует регулярная поверхность $\overrightarrow{x}(s,t) = (x_j(s,t))_{j=1}^n$, $s,t \in (0,1)$, для которой $M_s(\overrightarrow{x}(s,t)) = X(s,t)$ при всех $s,t \in (0,1)$;*

(ii). *существует единственная с точностью до $SO(n,p,C)$-эквивалентности регулярная поверхность $\overrightarrow{x}(s,t)$, для которой матрица $M_s(\overrightarrow{x}(s,t))$ является решением системы* (3.2).

Доказательство.

(i). Если $X(s,t) = (x_{ij}(s,t))_{i,j=1}^n$ — невырожденное решение системы (3.2), то в силу равенств (3.4) имеем, что

$$\frac{\partial x_{ji}}{\partial s}(s,t) = x_{j(i+1)}(s,t),$$

т. е.

$$x_{ij}(s,t) = \frac{\partial x_{j1}}{\partial s^{i-1}}(s,t)$$

для всех $j = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, для регулярной поверхности $\overrightarrow{x}(s,t) = (x_{j1}(s,t))_{j=1}^n$ верно равенство $M_s(\overrightarrow{x}(s,t)) = X(s,t)$ для всех $s,t \in (0,1)$.

(ii). Пусть $\overrightarrow{x}(s,t)$ и $\overrightarrow{y}(s,t)$ — две регулярные поверхности, для которых матрицы $M_s(\overrightarrow{x}(s,t))$ и $M_s(\overrightarrow{y}(s,t))$ является решениями системы (3.2). Согласно теореме 3.2, существует такое $g \in SO(n,p,C)$, что $M_s(\overrightarrow{y}(s,t)) = gM_s(\overrightarrow{x}(s,t))$, в частности, $\overrightarrow{y}(s,t) = g\overrightarrow{x}(s,t)$ для всех $s,t \in (0,1)$. Это означает, что поверхности $\overrightarrow{x}(s,t)$ и $\overrightarrow{y}(s,t)$ являются $SO(,p,C)$-эквивалентными. ☐

Замечание 3.1. Варианты теорем 3.1 и 3.2 для C^∞-дифференцируемых путей были получены раннее в монографии [6, гл. 4, § 4.3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бекбаев У. Д., Муминов К. К.* Об эквивалентности и инвариантах элементарных поверхностей относительно симплектической группы// Узб. мат. ж. — 1997. — № 4. — С. 26–30.
2. *Винберг Э. Б.* Компактные группы Ли. — М.: МГУ, 1967.
3. *Винберг Э. Б., Попов В. Л.* Теория инвариантов// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. Фундам. направл. — 1989. — *55*. — С. 137–309.
4. *Муминов К. К.* Эквивалентность поверхностей в комплексных векторных пространствах относительно Sp(2,C) групп// Узб. мат. ж. — 1997. — № 2. — С. 53–57.
5. *Муминов К. К.* Эквивалентность путей и поверхностей для действия псевдоортогональной группы// Узб. мат. ж. — 2005. — № 2. — С. 35–43.
6. *Муминов К. К., Чилин В. И.* Эквивалентность кривых в конечномерных пространствах. — Lambert Academic Publishing, 2015.
7. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. — М.: Мир, 1989.
8. *Muminov K. K.* Equivalence of multidimensional surfaces with to the acting of classical groups// Uzbek. Math. J. — 2010. — № 1. — С. 99–107.
9. *Muminov K. K., Bekboev U. D.* On differential rational invariants of classical movements groups of vector spaces// Methods Funct. Anal. Topology. — 2004. — *10*, № 3. — С. 7–10.

К. К. Муминов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: m.muminov@rambler.ru

Р. А. Гаффоров
Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан
E-mail: gafforov.rahmatjon@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-70-79 UDC 512.74+517.926

Systems of Matrix Differential Equations for Surfaces

 K. K. Muminov, R. A. Gafforov

Abstract. Necessary and sufficient conditions for the equivalence of surfaces under the action of a special pseudo-orthogonal group are established.

REFERENCES

1. U. D. Bekbaev and K. K. Muminov, "Ob ekvivalentnosti i invariantakh elementarnykh poverkhnostey otnositel'no simplekticheskoy gruppy" [On the equivalence and invariants of elementary surfaces with respect to the symplectic group], *Uzb. mat. zh.* [Uzbek. Math. J.], 1997, No. 4, 26–30 (in Russian).
2. E. B. Vinberg, *Kompaktnye gruppy Li* [Compact Lie Groups], MGU, Moscow, 1967 (in Russian).
3. E. B. Vinberg and V. L. Popov, "Teoriya invariantov" [Invariant theory], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat. Fundam. napravl.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math. Fundam. Directions], 1989, **55**, 137–309 (in Russian).
4. K. K. Muminov, "Ekvivalentnost' poverkhnostey v kompleksnykh vektornykh prostranstvakh otnositel'no Sp(2,C) grupp" [Equivalence of surfaces in complex vector spaces with respect to Sp(2,C) groups], *Uzb. mat. zh.* [Uzbek. Math. J.], 1997, No. 2, 53–57 (in Russian).
5. K. K. Muminov, "Ekvivalentnost' putey i poverkhnostey dlya deystviya psevdoortogonal'noy gruppy" [Equivalence of paths and surfaces for the action of a pseudo-orthogonal group], *Uzb. mat. zh.* [Uzbek. Math. J.], 2005, No. 2, 35–43 (in Russian).
6. K. K. Muminov and V. I. Chilin, *Ekvivalentnost' krivykh v konechnomernykh prostranstvakh* [Equivalence of Curves in Finite-Dimensional Spaces], Lambert Academic Publishing, 2015 (in Russian).
7. R. Horn and Ch. Johnson, *Matrichnyy analiz* [Matrix Analysis], Mir, Moscow, 1989 (Russian translation).
8. K. K. Muminov, "Equivalence of multidimensional surfaces with to the acting of classical groups," *Uzbek. Math. J.*, 2010, No. 1, 99–107.
9. K. K. Muminov and U. D. Bekboev, "On differential rational invariants of classical movements groups of vector spaces," *Methods Funct. Anal. Topology*, 2004, **10**, No. 3, 7–10.

K. K. Muminov
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: m.muminov@rambler.ru

R. A. Gafforov
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan
E-mail: gafforov.rahmatjon@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). С. 80–94
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-80-94 УДК 517.988.67

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ НЕПОЛНОГО ОБОБЩЕННОГО ЖОРДАНОВОГО НАБОРА

© 2022 г. **Д. Г. РАХИМОВ, Д. АХМАДЖАНОВА**

Аннотация. На основе методов теории бифуркаций рассмотрена задача возмущения линейных уравнений малыми аналитическими слагаемыми. В отличие от работы В. А. Треногина [7], исследован случай неполного обобщенного жорданового набора линейного фредгольмового оператора, действующего из одного банахова пространства в другое банахово пространство. Предложен прием, использующий регуляризацию фредгольмова оператора специальным образом построенным конечномерным оператором.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В середине прошлого века В. А. Треногин [1, 7] исследовал задачу возмущения линейных уравнений малым линейным слагаемым

$$Bx = h + \varepsilon Ax, \tag{1.1}$$

где B, A — линейные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, причем B — фредгольмов оператор с $N(B) = span\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, $N(B^*) = span\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$, и отвечающими им A-жордановыми цепочками с длинами $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_n$:

$$B\varphi_i^{(s)} = A\varphi_i^{(s-1)},\ s = \overline{2, p_i}, i = \overline{1, n}. \tag{1.2}$$

Если

$$D_p = det\| \left\langle A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_j^{(1)} \right\rangle \| \neq 0,$$

то обобщенный жорданов набор (ОЖН) $\{\varphi_i^{(s)}\}_{i=\overline{1,n}}^{s=\overline{1,p_i}}$ называется *полным*. В частности, доказана теорема, утверждающая, что для полноты ОЖН необходимо и достаточно, чтобы существовало число ρ, такое, что для всех ε, удовлетворяющих неравенству $0 < \varepsilon < \rho$, оператор $B - \varepsilon A$ был непрерывно обратимым. Далее доказано, что в случае полноты ОЖН уравнение (1.1) имеет единственное решение и определен порядок зависимости решения от параметра ε. Если ОЖН неполный, то, естественно, эта теорема не справедлива, по той же причине не обратим оператор $B - \varepsilon A$. Для этого случая В. А. Треногиным был предложен способ пополнения ОЖН. Позже в работе [3] был предложен иной способ пополнения ОЖН, но эти процессы требовали огромных вычислительных выкладок. В данной статье (см. разделы 2 и 3) рассматривается более общий случай — аналитические возмущения с неполным ОЖН. Применяемый здесь метод позволяет обойти сложный процесс пополнения ОЖН, и он основан на методе редукции, разработанном автором (см. [4, 5]). В последнее время появились работы [8–10], посвященные задачам возмущения существенного спектра линейных операторов, действующих в гильбертовых или банаховых пространствах. Там же определены понятия обобщенных жордановых цепочек, которые могут позволять исследовать возмущения в существенном спектре методами, изложенными в нашей статье. В данной работе используются терминология и обозначения работы [1].

2. Основные определения и утверждения

Пусть E_1, E_2 — некоторые банаховы пространства, $A(t) \in L\{E_1, E_2\}$ — оператор-функция, аналитически зависящая от спектрального параметра $t \in G \subset \mathbb{C}$.

Определение 2.1. Точка $\lambda \in G$ называется *регулярной точкой* оператор-функции $A(t)$, если оператор $A(\lambda)$ имеет ограниченный обратный $A^{-1}(\lambda) \in L\{E_1, E_2\}$. Совокупность всех регулярных точек $\rho(A)$ называют *резольвентным множеством* $A(t)$, а $A^{-1}(\lambda)$ — *резольвентой*.

Определение 2.2. Множество $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$ называется *спектром* оператора $A(t)$.

Очевидно, что резольвентное множество $\rho(A)$ — открытое множество, а спектр $\sigma(A)$ — замкнутое множество.

Определение 2.3. Точка спектра λ_0 называется *изолированной*, если существует окрестность точки λ_0, все точки которой регулярны.

Если при некотором λ уравнение $A(\lambda)x = 0$ имеет нетривиальное решение $x = \varphi$, то λ называется *собственным значением*, а решение φ — соответствующим *собственным элементом* оператор-функции $A(t)$. Совокупность всех изолированных собственных значений называется *дискретным спектром* $A(t)$ и обозначается $\sigma_p(A)$. Множество всех собственных элементов, соответствующих собственному значению λ, образуют подпространство, которое называют *собственным подпространством* оператора $A(\lambda)$ и обозначают $N(A(\lambda))$. Собственное подпространство $N^*(A(\lambda))$ оператора $A^*(\lambda)$ называют *дефектным подпространством*.

Определение 2.4. Точку $\lambda \in \sigma_p(A)$ называют *фредгольмовой*, если оператор $A(\lambda)$ нормально разрешим и $dim N(A(\lambda)) = dim N^*(A(\lambda)) < \infty$, и *нетеровой*, если оператор $A(\lambda)$ нормально разрешим, $m = dim N(A(\lambda)) < \infty$, $n = dim N^*(A(\lambda)) < \infty$, $m \neq n$.

Пусть λ — фредгольмова точка такая, что $N(A(\lambda)) = \{\varphi_i\}_1^n$, $N^*(A(\lambda)) = \{\psi_i\}_1^n$. Согласно следствию из теоремы Хана—Банаха существуют системы элементов $\{\gamma_i\}_1^n \subset E_1^*$, $\{z_i\}_1^n \subset E_2$, биортогональные соответственно к $\{\varphi_i\}_1^n$, $\{\psi_i\}_1^n$. Тогда проекторы $P = \sum\limits_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i$, $Q = \sum\limits_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i$ порождают разложения в прямые суммы $E_1 = E_1^n \oplus E_1^{\infty - n}$, $E_2 = E_{2n} \oplus E_{2,\infty - n}$.

Лемма (обобщенная лемма Шмидта, см. [1, гл. VII, §21, с. 340, лемма 21.1]). *Оператор* $\tilde{A}(\lambda) = A(\lambda) + \sum\limits_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i$ *непрерывно обратим, обратный к нему обозначим как* $\Gamma = \tilde{A}^{-1}(\lambda)$.

Справедливы равенства $\tilde{A}(\lambda)\varphi_i = z_i$, $\Gamma z_i = \varphi_i$, и $\tilde{A}^*(\lambda)\psi_i = \gamma_i$, $\Gamma^* \gamma_i = \psi_i$.

Определение 2.5. Будем говорить, что элементы $\varphi_i^{(1)} \equiv \varphi_i, \varphi_i^{(2)}, \ldots, \varphi_i^{(p_i)}$ образуют *обобщенную* $A(\lambda)$*-жорданову цепочку* (ОЖЦ) длины p_i, соответствующую φ_i, если выполнены тождества:

$$A(\lambda)\varphi_i^{(s)} = \sum_{j=1}^{s-1} A_j \varphi_i^{(s-j)}, \; s = \overline{2, p_i}, \tag{2.1}$$

где $A_j = \dfrac{1}{j!}A^{(j)}(\lambda)$, $j = 1,2,3,\ldots$, при этом для всех $\psi_l \in N^*(A(\lambda))$ выполняется $\langle\sum\limits_{j=1}^{s-1} A_j\varphi_i^{(s-j)}, \psi_l\rangle = 0$, $s = \overline{2,p_i}$, и $\langle\sum\limits_{j=1}^{p_i} A_j\varphi_i^{(p_i+1-j)}, \psi_k\rangle \neq 0$ хотя бы для одного функционала $\psi_k \in N^*(A(\lambda))$. Элементы $\varphi_i^{(2)}, \ldots, \varphi_i^{(p_i)}$ называют $A(\lambda)$-*присоединенными* элементами.

Так как уравнения (2.1) решаются неоднозначно, то требуется, чтобы $\langle\varphi_i^{(s)}, \gamma_j\rangle = 0$, $j, i = \overline{1,n}$, $s = \overline{2,p_i}$. Этим $A(\lambda)$-присоединенные элементы $\varphi_i^{(2)}, \ldots, \varphi_i^{(p_i)}$ определяются единственным образом по рекуррентным формулам [6, гл. 1, §2, с. 38, лемма 2.3]:

$$\varphi_i^{(s)} = \sum_{s-1=s_1l_1+s_2l_2+\ldots+s_kl_k} \left[(\Gamma A_{s_1})^{l_1}(\Gamma A_{s_2})^{l_2}\ldots(\Gamma A_{s_k})^{l_k}\right]\varphi_i, \tag{2.2}$$

$$s = \overline{2,p_i},\ i = \overline{1,n}.$$

Совокупность элементов $\{\varphi_i^{(s)}\}$, $s = \overline{2,p_i}$, $i = \overline{1,n}$, называется *обобщенным $A(\lambda)$-жордановым набором* (ОЖН), а число $N = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ — *корневым числом* оператора $A(\lambda)$.

Определение 2.6. Говорят, что оператор-функция $A(t)$ имеет в точке λ полный ОЖН, если

$$det\left\|\left\langle\sum_{j=1}^{p_i} A_j\varphi_i^{(p_i+1-j)}, \psi_l\right\rangle\right\| \neq 0. \tag{2.3}$$

Согласно определению, ОЖН будет неполным, если хотя бы одна цепочка имеет бесконечную длину или определитель (2.3) равен нулю. Тем не менее, как показано в монографии [1, гл. IX, §30, с. 428, теорема 30.1] (см. также [3]), полнота ОЖН связана с непрерывной обратимостью оператора $B - \varepsilon A$. В частности, при равенстве нулю определителя полноты показана схема продолжения жордановых цепочек до полного ОЖН. Следующие утверждения позволяют обойти трудности, связанные с построением полного ОЖН. Как будет показано в следующем разделе, для обратимости возмущенного оператора полнота ОЖН необязательна, а достаточна конечность длин всех цепочек.

Определение 2.7. Условие отсутствия общих нулей операторов $A(\lambda_0)$ и $\sum\limits_{s=1}^{\infty} A_s(\lambda-\lambda_0)^s$ назовем «*условием снятия вырождения*».

Условие снятия вырождения гарантирует возможность выполнения применяемого далее процесса регуляризации в задаче о возмущении.

3. Необходимое и достаточное условие конечности обобщенной жордановой цепочки

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $A(\varepsilon) \in L(E_1, E_2)$ — аналитическая относительно малого параметра $\varepsilon \in \mathbb{C}$ оператор-функция, причем $A(0) = B$ — фредгольмов оператор с $N(B) = \{\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_n^{(1)}\}$, $N(B^*) = \{\psi_1^{(1)}, \ldots, \psi_n^{(1)}\}$ и неполным ОЖН $\{\varphi_i^{(s)}\}_{i=\overline{1,n}}^{s=\overline{1,p_i}}$

$$B\varphi_i^{(s)} = \sum_{k=1}^{s-1} A_k\varphi_i^{(s-k)}, \quad \left\langle\sum_{k=1}^{s-1} A_k\varphi_i^{(s-k)}, \psi_j^{(1)}\right\rangle = 0, \quad s = \overline{2,p_i},\ i,j = \overline{1,n}, \tag{3.1}$$

$$\left\langle\sum_{k=1}^{p_i} A_k\varphi_i^{(p_i+1-k)}, \psi_j^{(1)}\right\rangle \neq 0, \quad i,j = \overline{1,n}, \quad D_p = det\left\|\left\langle\sum_{k=1}^{p_i} A_k\varphi_i^{(p_i+1-k)}, \psi_j^{(1)}\right\rangle\right\| = 0.$$

Пусть $\{\gamma_i\}_{i=\overline{1,n}}$, $\{z_i\}_{i=\overline{1,n}}$ — биортогональные системы к нулям $\{\varphi_i^{(1)}\}_{i=\overline{1,n}}$ и дефектным функционалам $\{\psi_i^{(1)}\}_{i=\overline{1,n}}$ соответственно.

Для каждого $i = \overline{1,n}$ введем оператор $B_i = B + \sum\limits_{j\neq i}\langle\cdot, \gamma_j\rangle z_j$. Несложно убедиться в том, что $N(B_i) = \{\varphi_i^{(1)}\}$, $N^*(B_i) = \{\psi_i^{(1)}\}$. Рассмотрим возмущенные оператор-функции $\overline{A}_i(\varepsilon) = B_i - \sum\limits_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k A_k$, где ε — малый комплексный параметр.

Лемма 3.1. *Если для некоторого* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *ОЖЦ* $\{\varphi_i^{(j)}\}_1^{p_i}$ *конечна, то оператор* $\overline{A}_i(\varepsilon)$ *непрерывно обратим.*

Доказательство. Пусть ОЖЦ $\{\varphi_i^{(j)}\}_1^{p_i}$ имеет конечную длину p_i. Уравнение $\overline{A}_i(\varepsilon)y = h$ запишется в виде

$$B_i y = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k y + h.$$

Так как $\widetilde{B_i} = \widetilde{B} = B + \sum\limits_{k=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_k \rangle z_k$ и согласно обобщенной лемме Шмидта существует и ограничен оператор $\Gamma = \left[\widetilde{B_i}\right]^{-1} = \widetilde{B}^{-1}$, то последнее равенство примет вид

$$\left[I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right] y = \Gamma h + \langle y, \gamma_i \rangle \varphi_i. \tag{3.2}$$

В силу аналитичности оператор-функции $A(\varepsilon)$ в окрестности точки $\varepsilon = 0$ существует предел $R = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A_n\|} < \infty$. Поэтому при $|\varepsilon| \leqslant \rho < \dfrac{1}{\|\Gamma\|\, R}$ оператор $\left[I - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right]^{-1}$ существует и ограничен. Тогда (3.2) сводится к системе

$$y = \left[I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right]^{-1} \Gamma h + \xi_i \left[I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right]^{-1} \varphi_i,\ \xi_i = \langle y, \gamma_i \rangle. \tag{3.3}$$

Подставляя первое во второе в системе (3.3), имеем

$$\xi_i \left\langle \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k\right) \left[I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right]^{-1} \varphi_i, \psi_i \right\rangle = -\left\langle \left[I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right]^{-1} \Gamma h, \gamma_i \right\rangle \tag{3.4}$$

Распишем левую и правую части равенства (3.4) по степеням ε:

$$\xi_i \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left\langle \sum_{k=s_1+s_2l_2+\ldots+s_\nu l_\nu} A_{s_1} (\Gamma A_{s_2})^{l_2} \ldots (\Gamma A_{s_\nu})^{l_\nu} \varphi_i, \psi_i \right\rangle =$$

$$= -\langle h, \psi_i \rangle - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left\langle \sum_{k=s_1+s_2l_2+\ldots+s_\nu l_\nu} A_{s_1} (\Gamma A_{s_2})^{l_2} \ldots (\Gamma A_{s_\nu})^{l_\nu} \Gamma h, \psi_i \right\rangle.$$

Тогда, используя формулы (2.2), можем записать

$$\xi_i \left[\sum_{k=1}^{p_i} \varepsilon^k \left\langle \sum_{s=1}^{k} A_s \varphi_i^{(k+1-s)}, \psi_i \right\rangle + \sum_{k=p_i+1}^{\infty} \varepsilon^k \left\langle \sum_{k=s_1+s_2l_2+\ldots+s_\nu l_\nu} A_{s_1} (\Gamma A_{s_2})^{l_2} \ldots (\Gamma A_{s_\nu})^{l_\nu} \varphi_i, \psi_i \right\rangle\right] =$$

$$= -\langle h, \psi_i \rangle - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left\langle \sum_{k=s_1+s_2l_2+\ldots+s_\nu l_\nu} A_{s_1} (\Gamma A_{s_2})^{l_2} \ldots (\Gamma A_{s_\nu})^{l_\nu} \Gamma h, \psi_i \right\rangle.$$

Согласно определению ОЖН, первые $p_i - 1$ слагаемых первой суммы равны нулю, поэтому

$$\xi_i \left[\varepsilon^{p_i} \left\langle \sum_{s=1}^{p_i} A_s \varphi_i^{(p_i+1-s)}, \psi_i \right\rangle + \sum_{k=p_i+1}^{\infty} \varepsilon^k \left\langle \sum_{k=s_1+s_2l_2+\ldots+s_\nu l_\nu} A_{s_1} (\Gamma A_{s_2})^{l_2} \ldots (\Gamma A_{s_\nu})^{l_\nu} \varphi_i, \psi_i \right\rangle\right] =$$

$$= -\langle h, \psi_i \rangle - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left\langle \sum_{k=s_1+s_2l_2+\ldots+s_\nu l_\nu} A_{s_1} (\Gamma A_{s_2})^{l_2} \ldots (\Gamma A_{s_\nu})^{l_\nu} \Gamma h, \psi_i \right\rangle.$$

Пусть q_i — номер первого отличного от нуля члена последовательности

$$h_i^{(s)} = \left\langle \sum_{s=s_1+s_2l_2+\ldots+s_\nu l_\nu} A_{s_1} (\Gamma A_{s_2})^{l_2} \ldots (\Gamma A_{s_\nu})^{l_\nu} \Gamma h, \psi_i \right\rangle,\ s = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

если $\langle h, \psi_i \rangle \neq 0$, то положим $q_i = 0$. Тогда

$$\xi_i \varepsilon^{p_i} \left[\left\langle \sum_{s=1}^{p_i} A_s \varphi_i^{(p_i+1-s)}, \psi_i \right\rangle + \sum_{k=p_i+1}^{\infty} \varepsilon^{k-p_i} \left\langle \sum_{k=s_1+s_2 l_2+\ldots+s_\nu l_\nu} A_{s_1} \left(\Gamma A_{s_2}\right)^{l_2} \ldots \left(\Gamma A_{s_\nu}\right)^{l_\nu} \varphi_i, \psi_i \right\rangle \right] = \\ = -\varepsilon^{q_i} \sum_{k=q_i}^{\infty} \varepsilon^{k-q_i} h_i^{(k)}. \quad (3.5)$$

Из равенства (3.5) следует, что найдется ρ_0 такое, что для всех ε, удовлетворяющих условию $0 < \|\varepsilon\| \leqslant \rho_0 < \rho < \dfrac{1}{\|\Gamma\| R}$, система (3.3), а вместе с ней и уравнение $\overline{A}_i(\varepsilon) y = h$, имеет единственное решение для любого $h \in E_2$. □

Теорема 3.1. *Для того, чтобы все цепочки $\{\varphi_i^{(j)}\}_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,p_i}}$ были конечными, необходимо и достаточно, чтобы существовало число ρ_0 такое, что для всех ε, удовлетворяющих неравенству $0 < |\varepsilon| \leqslant \rho_o$, операторы $\overline{A}_i^{-1}(\varepsilon)$, $i = \overline{1,n}$, существовали и были ограниченными.*

Доказательство. Необходимость следует из леммы, поэтому докажем достаточность.

Предположим противное, т. е. пусть для всех ε из круга $0 < |\varepsilon| \leqslant \rho_o$, операторы $\overline{A}_i^{-1}(\varepsilon)$, $i = \overline{1,n}$, существуют и ограничены, но для некоторого i цепочка $\{\varphi_i^{(j)}\}$, $j = \overline{1,p_i}$ имеет бесконечную длину, т. е.

$$B_i \varphi_i = 0, \;\; B_i \varphi_i^{(s)} = \sum_{k=1}^{s-1} A_k \varphi_i^{(s-k)}, \;\; s \geqslant 2.$$

Если присоединенные элементы $\{\varphi_i^{(j)}\}$, $j = \overline{2,\infty}$ выбраны из подпространства $E_1^{\infty-n}$, то методом математической индукции находим

$$\varphi_i^{(s)} = \sum_{s=s_1 l_1+\ldots+s_k l_k} (\Gamma A_{s_1})^{l_1} \ldots (\Gamma A_{s_k})^{l_k} \varphi_i.$$

Пусть $M = \max\limits_{i \in N} \|\Gamma A_i\|$.

Тогда справедливы неравенства $\|\varphi_i^{(s)}\| \leqslant \sum\limits_{s=s_1 l_1+\ldots+s_k l_k} (\|\Gamma\| \|A_{s_1}\|)^{l_1} \ldots (\|\Gamma\| \|A_{s_k}\|)^{l_k} \|\varphi_i\| \leqslant 2^s M^s \|\varphi_i\|$, из которых вытекает, что в круге $|\varepsilon| \leqslant \rho_1 < (2M)^{-1}$ ряд

$$y(\varepsilon) = \sum_{s=0}^{+\infty} \varphi_i^{(s+1)} \varepsilon^s$$

сходится абсолютно и равномерно. Этот ряд при указанных значениях ε является решением уравнения

$$\overline{A}_i(\varepsilon) y(\varepsilon) = 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему. □

4. Аналитические возмущения в линейных уравнениях

Рассмотрим возмущенное линейное уравнение

$$By = h + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k y, \quad (4.1)$$

где ε — малый числовой параметр ($|\varepsilon| < \rho_0$), E_1, E_2 — банаховы пространства, $B, A_k \in L(E_1, E_2)$, $k = 1, 2, \ldots$, а B — фредгольмов оператор такой, что $N(B) = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $N^*(B) = \{\psi_i\}_{i=1}^n$. Пусть $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$, $\{z_i\}_{i=1}^n$ — биортогональные к ним системы, и пусть $\{\varphi_i^{(j)}\}_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,p_i}}$ — ОЖН с конечными A-ОЖЦ. Если ОЖН полный, то, как известно (см. [1, гл. 9, теорема 31.2]), уравнение (4.1) имеет единственное решение, аналитическое в $\mathbb{C}$. Если ОЖН неполный, то теорема 31.2 в той постановке не справедлива. В этом разделе исследуется такой случай.

Сначала приведем два примера, показывающие возможность существования неполных ОЖН.

Пример 4.1. В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим следующую задачу на собственные значения где

$$(B-\lambda A)x=0, \quad \text{где} \quad B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Собственному значению $\lambda_0=0$ соответствуют собственные элементы $\varphi_1^{(1)}=e_1=(1,0,0)$, $\varphi_2^{(1)}=e_2=(0,1,0)$. Для данной матрицы $\psi_1=e_1$, $\psi_2=e_2$, $Ae_1=e_1+e_2$, $Ae_2=-e_1-e_2+e_3$. Тогда $\langle Ae_1,\psi_1\rangle=1$, $\langle Ae_1,\psi_2\rangle=1$, $\langle Ae_2,\psi_1\rangle=-1$, $\langle Ae_2,\psi_2\rangle=-1$, т. е.

$$\begin{vmatrix}1&1\\-1&-1\end{vmatrix}=0.$$

Такая же картина наблюдается и в случае наличия ОЖЦ конечной длины p_i, $i=\overline{1,n}$, $N=p_1+p_2+\ldots+p_n$.

Пример 4.2. Пусть для задачи, рассмотренной в примере 4.1,

$$B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

Тогда для этой задачи $\lambda_0=0$ и $\varphi_1^{(1)}=e_1=(1,0,0)$, $\varphi_2^{(1)}=e_2=(0,1,0)$. Так как $Ae_1=e_3$, $Ae_2=e_3$, то $\langle Ae_i,e_j\rangle=0$ для всех $i,j=1,2$, что означает существование присоединенных элементов. Таковыми являются $\varphi_1^{(2)}=e_1+e_3$, $\varphi_2^{(2)}=e_2+e_3$. Так как $A\varphi_1^{(2)}=e_1+e_2+e_3$, $A\varphi_2^{(2)}=e_1+e_2+e_3$, то $\langle A\varphi_i^{(2)},\varphi_j^{(1)}\rangle=1$ для всех $i,j=1,2$. Следовательно, каждая цепочка имеет длину 2, но $det\|\langle A\varphi_i^{(2)},\varphi_j^{(1)}\rangle\|=\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0$.

Рассмотрим уравнения

$$\overline{B_i}y=h+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k A_k y, \tag{4.2}$$

где $\overline{B_i}=B+\sum\limits_{s\neq i}\langle\cdot,\gamma_s\rangle z_s$, $i=\overline{1,n}$.

Теорема 4.1. *Пусть фредгольмов оператор $B\in L(E_1,E_2)$ с числом нулей $n>1$ имеет неполный ОЖН с А-ОЖЦ конечной длины $p_i, i=\overline{1,n}$. Тогда каждое уравнение из (4.2) имеет единственное решение $y_i(\varepsilon)$, которое при условии $p_i-q_i\leqslant 0$ будет аналитическим в точке $\varepsilon=0$ и в ее некоторой окрестности, а при условии $p_i>q_i$ имеет в точке $\varepsilon=0$ полюс порядка p_i-q_i.*

Доказательство. Так как $\widetilde{\overline{B_i}}=\widetilde{B}=B+\sum\limits_{k=1}^{n}\langle\cdot,\gamma_s\rangle z_s$, то в силу обобщенной леммы Шмидта существует и ограничен оператор $\Gamma_i=\widetilde{\overline{B_i}}^{-1}=\widetilde{B}^{-1}=\Gamma$. Тогда уравнение (4.2) сведется к системе

$$y=\left[I-\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\Gamma A_k\right]^{-1}\Gamma h+\xi_i\left[I-\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\Gamma A_k\right]^{-1}\varphi_i, \xi_i=\langle y,\gamma_i\rangle. \tag{4.3}$$

Подставляя первое во второе в системе (4.3), имеем

$$\xi_i\left\langle\left(\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k A_k\right)\left[I-\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\Gamma A_k\right]^{-1}\varphi_i,\psi_i\right\rangle=-\left\langle\left[I-\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\Gamma A_k\right]^{-1}\Gamma h,\gamma_i\right\rangle. \tag{4.4}$$

Распишем левую и правую части равенства (4.4) по степеням ε:

$$\xi_i\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\left\langle\sum_{k=s_1+s_2l_2+\ldots+s_\nu l_\nu}A_{s_1}\left(\Gamma A_{s_2}\right)^{l_2}\ldots\left(\Gamma A_{s_\nu}\right)^{l_\nu}\varphi_i,\psi_i\right\rangle=$$

$$=-\langle h,\psi_i\rangle-\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\left\langle\sum_{k=s_1+s_2l_2+\ldots+s_\nu l_\nu}A_{s_1}\left(\Gamma A_{s_2}\right)^{l_2}\ldots\left(\Gamma A_{s_\nu}\right)^{l_\nu}\Gamma h,\psi_i\right\rangle.$$

Тогда, используя формулы (2.3), можно записать

$$\xi_i\left[\sum_{k=1}^{p_i}\varepsilon^k\left\langle\sum_{s=1}^{k}A_s\varphi_i^{(k+1-s)},\psi_i\right\rangle+\sum_{k=p_i+1}^{\infty}\varepsilon^k\left\langle\sum_{k=s_1+s_2l_2+\ldots+s_\nu l_\nu}A_{s_1}\left(\Gamma A_{s_2}\right)^{l_2}\ldots\left(\Gamma A_{s_\nu}\right)^{l_\nu}\varphi_i,\psi_i\right\rangle\right]=$$

$$=-\langle h,\psi_i\rangle-\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\left\langle\sum_{k=s_1+s_2l_2+\ldots+s_\nu l_\nu}A_{s_1}\left(\Gamma A_{s_2}\right)^{l_2}\ldots\left(\Gamma A_{s_\nu}\right)^{l_\nu}\Gamma h,\psi_i\right\rangle.$$

Согласно определению ОЖН, первые p_i-1 слагаемых первой суммы равны нулю, поэтому

$$\xi_i\left[\varepsilon^{p_i}\left\langle\sum_{s=1}^{p_i}A_s\varphi_i^{(p_i+1-s)},\psi_i\right\rangle+\sum_{k=p_i+1}^{\infty}\varepsilon^k\left\langle\sum_{k=s_1+s_2l_2+\ldots+s_\nu l_\nu}A_{s_1}\left(\Gamma A_{s_2}\right)^{l_2}\ldots\left(\Gamma A_{s_\nu}\right)^{l_\nu}\varphi_i,\psi_i\right\rangle\right]=$$

$$=-\langle h,\psi_i\rangle-\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\left\langle\sum_{k=s_1+s_2l_2+\ldots+s_\nu l_\nu}A_{s_1}\left(\Gamma A_{s_2}\right)^{l_2}\ldots\left(\Gamma A_{s_\nu}\right)^{l_\nu}\Gamma h,\psi_i\right\rangle.$$

Пусть q_i — номер первого отличного от нуля члена последовательности

$$h_i^{(s)}=\left\langle\sum_{s=s_1+s_2l_2+\ldots+s_\nu l_\nu}A_{s_1}\left(\Gamma A_{s_2}\right)^{l_2}\ldots\left(\Gamma A_{s_\nu}\right)^{l_\nu}\Gamma h,\psi_i\right\rangle,\ s=0,1,2,3,\ldots;$$

если $\langle h,\psi_i\rangle\neq 0$, то положим $q_i=0$. Тогда

$$\xi_i\varepsilon^{p_i}\left[\left\langle\sum_{s=1}^{p_i}A_s\varphi_i^{(p_i+1-s)},\psi_i\right\rangle+\sum_{k=p_i+1}^{\infty}\varepsilon^{k-p_i}\left\langle\sum_{k=s_1+s_2l_2+\ldots+s_\nu l_\nu}A_{s_1}\left(\Gamma A_{s_2}\right)^{l_2}\ldots\left(\Gamma A_{s_\nu}\right)^{l_\nu}\varphi_i,\psi_i\right\rangle\right]=$$

$$=-\varepsilon^{q_i}\sum_{k=q_i}^{\infty}\varepsilon^{k-q_i}h_i^{(k)}.\quad(4.5)$$

Здесь возможны несколько случаев: 1) если $p_i>q_i$, то $\xi_i(\varepsilon)$ имеет при $\varepsilon=0$ полюс порядка p_i-q_i; 2) если же $p_i\leqslant q_i<+\infty$ или $p_i<q_i<+\infty$, то $\xi_i(\varepsilon)$ аналитичны в $\mathbb{C}$.

Без ограничения общности можно предположить, что $p_1\leqslant p_2\leqslant\ldots\leqslant p_n$ и $q_1\geqslant q_2\geqslant\ldots\geqslant q_n$. Если это не так, то можно поменять местами нули и дефектные функционалы так, чтобы были справедливы эти неравенства.

Согласно предположению, ОЖН $\{\varphi_i^{(s)}\}_{i=\overline{1,n}}^{s=\overline{1,p_i}}$ неполный, поэтому в силу формул (2.3)

$$D_p=det\left\|\left\langle\sum_{s=1}^{p_i}A_s\varphi_i^{(p_i+1-s)},\psi_j\right\rangle\right\|=0.$$

Предположим, что ранг матрицы определителя полноты равен $n-1$. Пусть главным минором, определяющим ранг, является левый верхний минор, т. е.

$$D_p'=det\left\|\left\langle\sum_{s=1}^{p_i}A_s\varphi_i^{(p_i+1-s)},\psi_j\right\rangle\right\|_{i,j=\overline{1,n-1}}\neq 0.$$

Без ограничения общности можно предположить, что $\langle\sum\limits_{s=1}^{p_n}A_s\varphi_n^{(p_n+1-s)},\psi_n\rangle\neq 0$.

Перепишем уравнение (4.1) в виде

$$B_ny=h+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^kA_ky+\sum_{s=1}^{n-1}\langle y,\gamma_s\rangle z_s,$$

где $B_n=B+\sum\limits_{s=1}^{n-1}\langle\cdot,\gamma_s\rangle z_s$. Согласно теореме 3.1 в силу условия $\langle\sum\limits_{s=1}^{p_n}A_s\varphi_n^{(p_n)},\psi_n\rangle\neq 0$ существует число ρ_0 такое, что для всех ε из круга $0<|\varepsilon|<\rho_0$ оператор $B_n-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varepsilon^kA_k$ непрерывно обратим.

Поэтому имеем

$$y = \left(B_n - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k\right)^{-1} h + \sum_{s=1}^{n-1} \xi_s \left(B_n - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k\right)^{-1} z_s,$$

или

$$y = y_n + \sum_{s=1}^{n-1} \xi_s \left(B_n - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k\right)^{-1} z_s, \quad \xi_s = \langle y, \gamma_s\rangle, s = \overline{1, n-1}. \tag{4.6}$$

Вычислим выражение

$$x_s = \left(B_n - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k\right)^{-1} z_s = \left(\widetilde{B_n} - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k - \langle\cdot, \gamma_n\rangle z_n\right)^{-1} z_s = \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k - \langle\cdot, \gamma_n\rangle \varphi_n\right)^{-1} \varphi_s.$$

Отсюда

$$\left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k - \langle\cdot, \gamma_n\rangle \varphi_n\right) x_s = \varphi_s,$$

или

$$\left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right) x_s - \langle x_s, \gamma_n\rangle \varphi_n = \varphi_s.$$

Введя обозначение $\xi'_s = \langle x_s, \gamma_n\rangle$, переносим второй член из левой части в правую часть равенства. Обращая оператор $I - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k$, имеем:

$$x_s = \xi'_s \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right)^{-1} \varphi_n + \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right)^{-1} \varphi_s.$$

Подставляя его в правую сторону в выражении для ξ'_s, получим уравнение для определения ξ'_s:

$$\xi'_s = \xi'_s \left\langle \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right)^{-1} \varphi_n, \gamma_n \right\rangle + \left\langle \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right)^{-1} \varphi_s, \gamma_n \right\rangle.$$

Применяя к нему равенства (2.3), приходим к уравнению:

$$\xi'_s \cdot \varepsilon^{p_n} \left[\left\langle \sum_{k=1}^{p_n} A_k \varphi_n^{(p_n+1-k)}, \psi_n \right\rangle + O(\varepsilon)\right] = -\varepsilon^{p_s} \left[\left\langle \sum_{k=1}^{p_s} A_k \varphi_s^{(p_s+1-k)}, \psi_n \right\rangle + O(\varepsilon)\right]. \tag{4.7}$$

Так как $p_s \leqslant p_n$, то из формул (2.3) следует, что ξ'_s имеет полюс порядка $p_n - p_s$ в точке $\varepsilon = 0$. $\square$

Подставляя значение x_s в (4.4), имеем

$$y = y_n + \sum_{s=1}^{n-1} \xi_s \left[\xi'_s \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right)^{-1} \varphi_n + \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k\right)^{-1} \varphi_s\right], \tag{4.8}$$

$$\xi_l = \langle y, \gamma_l\rangle, \ l = \overline{1, n-1}.$$

Теперь подставим первое уравнение во вторые, и после нескольких преобразований приходим к системе:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \xi_j a_{ij} = -\langle y_n, \gamma_i\rangle, \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{4.9}$$

где

$$a_{ij} = \varepsilon^{p_j} \left\langle \sum_{k=1}^{p_j} A_k \varphi_j^{(p_j+1-k)}, \psi_i \right\rangle + \xi'_j \varepsilon^{p_n} \left\langle \sum_{k=1}^{p_n} A_k \varphi_n^{(p_n+1-k)}, \psi_i \right\rangle,$$

$$\langle y_n, \gamma_i\rangle = \varepsilon^{q_i} \cdot \left(\langle h_i^{(q_i)}, \psi_i\rangle + O(\varepsilon)\right) + \varepsilon^{p_n} \cdot \xi''_n \left\langle \sum_{k=1}^{p_n} A_k \varphi_n^{(p_n+1-k)}, \psi_i \right\rangle.$$

Если учесть, что $\xi_j' = O(\varepsilon^{p_j - p_n})$ и $\xi_n'' = O(\varepsilon^{q_n - p_n})$ (см. формулы (4.2) и (4.6)), то

$$a_{ij} = \varepsilon^{p_j}\left[\left\langle \sum_{k=1}^{p_j} A_k \varphi_j^{(p_j+1-k)}, \psi_i \right\rangle + O(\varepsilon)\right]$$

и

$$\langle y_n, \gamma_i\rangle = \varepsilon^{q_n}\left[\left\langle \sum_{k=1}^{p_n} A_k \varphi_n^{(p_n+1-k)}, \psi_i \right\rangle + \varepsilon^{q_i - q_n}\langle h_i^{(q_i)}, \psi_i\rangle + O(\varepsilon)\right].$$

Так как определитель системы (4.9) $\Delta(\varepsilon) = \varepsilon^{p_1+\ldots+p_{n-1}}(D_p' + O(\varepsilon)) \neq 0$, то она имеет единственное решение. Теперь определим порядок зависимости коэффициентов ξ_i от параметра ε. Для этого оценим сопутствующие определители

$$\Delta_i = \varepsilon^{q_n + \sum\limits_{j\neq i} p_j}(D_{pk} + O(\varepsilon)), \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Тогда $\xi_i = \varepsilon^{q_n - p_i}C(\varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$. Поэтому если $D_{pk} = 0$ и $q_n \geqslant p_n$, то все ξ_i, и в том числе решение y, будут непрерывными в точке $\varepsilon = 0$ и в некоторой ее окрестности. В случае $p_i < q_n < p_{i+1}$ решение имеет полюс порядка $p_{i+1} - q_n$, а если $p_1 > q_n$, то решение имеет полюс порядка $p_1 - q_n$. Этим доказана следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть в уравнении* (4.1) *оператор B фредгольмов с $N(B) = \{\varphi_i\}_1^n$, $N^*(B) = \{\psi_i\}_1^n$ и соответствующим неполным ОЖН $\{\varphi_i^{(s)}\}_{i=\overline{1,n}}^{s=\overline{1,p_i}}$, состоящим из A-обобщенных жордановых цепочек конечной длины p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, и пусть ранг матрицы определителя полноты равен $n-1$. Если y_n — решение уравнения* (4.2), *то уравнение* (4.1) *имеет решение вида*

$$y(\varepsilon) = y_n(\varepsilon) + \sum_{j=1}^{n-1}\xi_j\left[\xi\left(I - \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\Gamma A_k\right)^{-1}\varphi_n + \left(I - \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\Gamma A_k\right)^{-1}\varphi_j\right].$$

Если $D_{pk} = 0$ и дополнительно выполнено неравенство $p_n \leqslant q_n$, то решение $y(\varepsilon)$ будет аналитическим при $\varepsilon = 0$ и в некоторой окрестности, и при условии $p_1 > q_n$ оно имеет в точке $\varepsilon = 0$ полюс порядка $p_1 - q_n$. Если $p_i < q_n < p_{i+1}$, то решение $y(\varepsilon)$ имеет полюс порядка $p_{i+1} - q_n$.

5. Возмущение линейного уравнения, аналитически зависящее от нескольких малых параметров

5.1. Обобщенные жордановы цепочки. Пусть $T(\lambda)\colon E_1 \to E_2$ — оператор-функция, аналитическая в некотором малом полидиске $\Delta \subset \mathbb{C}^q$, и λ_0 — ее изолированная фредгольмова точка такая, что $N(T(\lambda_0)) = E_1^n = \{\varphi_i\}_1^n$, $N^*(T(\lambda_0)) = E_{2,n} = \{\psi_i\}_1^n$. Пусть $\{\gamma_i\}_1^n$ и $\{z_i\}_1^n$ — соответствующие биортогональные системы. Тогда проекционные операторы $P = \sum\limits_{k=1}^{n}\langle\gamma_k, \cdot\rangle\varphi_k$ и $Q = \sum\limits_{k=1}^{n}\langle\psi_k, \cdot\rangle z_k$ порождают разложения $E_1 = E_1^n \oplus E_1^{\infty-n}$, $E_2 = E_{2,n} \oplus E_{2,\infty-n}$ (см. раздел 2).

Введем обозначения

$$\varepsilon = \lambda - \lambda_0 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q), \quad B = -T(\lambda_0), \quad T_\alpha = \frac{1}{\alpha!}\cdot\frac{\partial^{|\alpha|}T(\lambda_0)}{\partial\lambda_1^{\alpha_1}\ldots\partial\lambda_q^{\alpha_q}},$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q) \text{ — мультииндекс}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_q, \quad \alpha! = \alpha_1!\ldots\alpha_q!.$$

Определение 5.1. ОЖЦ, *отвечающей элементу* $\varphi_i \in N(B)$, называется совокупность решений уравнений

$$B\varphi_i = 0, \quad B\varphi_i^{(\alpha)} = \sum_{0<\beta\leqslant\alpha} T_\beta\varphi_i^{(\alpha-\beta)}. \tag{5.1}$$

Уравнения (5.1) имеют решения, если

$$\left\langle \psi_j, \sum_{0<\beta\leqslant\alpha} T_\beta\varphi_i^{(\alpha-\beta)}\right\rangle = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Решения уравнений (5.1) при $|\alpha| = p$, называем ОПЭ порядка p. Совокупность всех φ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, и всевозможных ОПЭ к ним назовем ОЖН.

Условиями принадлежности $\varphi_i^{(\alpha)}$ подпространству $E_1^{\infty-n}$

$$\langle \gamma_i, \varphi_j^{(\alpha)} \rangle = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

ОЖЦ, тем самым и ОЖН, определяются однозначно.

Согласно обобщенной лемме Шмидта ОПЭ можно записать в виде (см. (2.2))

$$\varphi_i^{(\alpha)} = \sum_{0<\beta\leqslant\alpha} \Gamma T_\beta \varphi_i^{(\alpha-\beta)}. \tag{5.2}$$

Отметим, что начиная с некоторого номера p_0 могут отсутствовать все или только часть ОПЭ порядков p. В последнем случае может оказаться, что ОЖЦ состоит из бесконечного числа элементов.

Пример 5.1.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{10} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T_{01} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi^{(0)} = \{-1;\, 1;\, 1\}, \quad \psi^{(0)} = \{-1;\, 1; -1\}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Выпишем ОПЭ:

$$\varphi^{(0,n)} = \{-1;\, 0;\, 1\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Учитывая это, введем следующие определения.

Определение 5.2. Назовем *порядком* ОЖЦ наибольший из порядков p, для которого существуют все ОПЭ, а *длиной* — число составляющих ее элементов.

Определение 5.3. Бесконечную последовательность мультииндексов $\{\beta\}$ назовем *регулярной*, если вместе с каждым β в нее входят все $\gamma < \beta$.

Ясно, что если длина ОЖЦ бесконечна, то существует по крайней мере одна последовательность ОПЭ $\{\varphi^{(\beta)}\}$ такая, что нумерующая ее последовательность мультииндексов β является регулярной.

Лемма 5.1. *Имеет место формула*

$$\varphi_i^{(\alpha)} = \sum_{\alpha=k_1\alpha_1+\ldots+k_m\alpha_m+\ldots} \left[(\Gamma T_{\alpha_1})^{k_1} \ldots (\Gamma T_{\alpha_m})^{k_m} \ldots \right] \varphi_i, \tag{5.3}$$

где $k_1\alpha_1+\ldots+k_m\alpha_m+\ldots = (k_1\alpha_1^{(1)}+\ldots+k_m\alpha_1^{(n)}+\ldots, \ldots, k_1\alpha_m^{(1)}+\ldots+k_m\alpha_m^{(n)}+\ldots)$ — *всевозможные представления мультииндексов* α *в виде линейных комбинаций мультииндексов* $\alpha_j \leqslant \alpha$.

Доказательство. Действительно, для $\alpha = 1_j = \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0\}$

$$\varphi_i^{(1_j)} = \sum_\beta \Gamma T_\beta \varphi_i^{(0)}.$$

Предположим, что формула (5.3) справедлива для всех $\beta < \alpha$. Тогда

$$\varphi_i^{(\alpha)} = \sum_\beta \Gamma T_\beta \varphi_i^{(\alpha-\beta)} = \sum_{\alpha=\beta+k_1\alpha_1+\ldots+k_m\alpha_m+\ldots} \Gamma T_\beta \left[(\Gamma T_{\alpha_1})^{k_1} \ldots (\Gamma T_{\alpha_m})^{k_m} \ldots \right] \varphi_i =$$

$$= \sum_{\alpha=k_1'\alpha_1+\ldots+k_m'\alpha_m+\ldots} \left[(\Gamma T_{\alpha_1})^{k_1'} \ldots (\Gamma T_{\alpha_m})^{k_m'} \ldots \right] \varphi_i.$$

$\square$

Замечание 5.1. Формулы (5.2), (5.3) определяют для каждого φ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ всю последовательность элементов $\{\varphi_j^{(\alpha)}\}$, в том числе с теми индексами α, для которых соответствующие ОПЭ отсутствуют. Элементы этой последовательности удовлетворяют уравнениям

$$\widetilde{B}\varphi_i^{(0)} = z_i, \ \ \widetilde{B}\varphi_i^{(\alpha)} = \sum_{0<\beta\leqslant\alpha} T_\beta \varphi_i^{(\alpha-\beta)}, \tag{5.4}$$

где $\widetilde{B} = B + \sum\limits_{i=1}^{n} \langle\gamma_i, \cdot\rangle z_i$.

Будем считать, что ряд $\sum\limits_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha a_\alpha$, мажорирующий $\sum\limits_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha$, сходится в полидиске $\Delta_1 = \{\varepsilon\colon |\varepsilon_i| < \rho_i^{(1)}\} \subseteq \Delta$ к функции $a(\varepsilon)$.

Теорема 5.1. *Если уравнение*

$$\left(B - \sum_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha\right) y = 0 \tag{5.5}$$

в некоторой окрестности $\varepsilon = 0$ *имеет решение вида*

$$y(\varepsilon) = \varphi + \sum_{\beta>0} \varepsilon^\beta y_\beta,$$

то каждому $\varphi \in N(B)$ *отвечает ОЖЦ бесконечной длины.*

Доказательство. Подставляя $y(\varepsilon)$ в (5.5), имеем

$$B\varphi = 0, \quad By_\alpha = \sum_\beta T_\beta y_{\alpha-\beta}, \quad |\alpha| = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.6}$$

Так как $y_\alpha \in D(B)$, то согласно свойству дефектного функционала ψ выполнено $\langle\psi, By_\alpha\rangle = 0$, т. е. $\langle\psi, \sum\limits_\beta T_\beta y_{\alpha-\beta}\rangle = 0$, для любого α. Следовательно, все уравнения (5.6) разрешимы. Таким образом, элементу $\varphi \in N(B)$ отвечает ОЖЦ $\{y_\alpha\}$ бесконечной длины. Теорема доказана. □

5.2. Возмущение линейного уравнения малыми линейными слагаемыми. Рассмотрим уравнение

$$By = h + \sum_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha y, \tag{5.7}$$

где $h \in E_2$ — некоторый известный элемент.

Если $n = 0$, то решение уравнения (5.7) в $\Delta' \subseteq \Delta$ единственно и аналитически зависит от ε (см. [1, с. 432]).

В случае $n \geqslant 1$ заменим уравнение (5.7) эквивалентной системой

$$\begin{cases} \widetilde{B}y = h + \sum\limits_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha y + \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i z_i, \\ \xi_i = \langle\gamma_i, y\rangle, \ i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{5.8}$$

Пусть $\varepsilon \in \Delta - \{\varepsilon\colon \|\Gamma \sum\limits_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha\| < 1\}$. Тогда система (4.7) заменится следующей:

$$\begin{cases} y = \left[I - \Gamma \sum\limits_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha\right]^{-1} \Gamma h + \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \left[I - \Gamma \sum\limits_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha\right]^{-1} \varphi_i, \\ \xi_i = \langle\gamma_i, y\rangle, \ i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{5.9}$$

Подставляя значение y во второе уравнение и замечая, что

$$\left[I - \Gamma \sum_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha\right]^{-1} \Gamma = \Gamma \left[I - \sum_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha \Gamma\right]^{-1}, \ \langle\gamma_i, \Gamma u\rangle = \langle\psi_i, u\rangle,$$

приходим к системе линейных уравнений, определяющей ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \left\langle \psi_j, \sum_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha \left[I - \Gamma \sum_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha \right]^{-1} \varphi_i \right\rangle + \left\langle \psi_j, \left[I - \Gamma \sum_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha \right]^{-1} \right\rangle h = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.10}$$

Так как

$$\sum_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha \left[I - \Gamma \sum_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha T_\alpha \right]^{-1} = \sum_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha \sum_{\alpha=\alpha^{(0)}+k_1\alpha^{(1)}+\ldots+k_m\alpha^{(m)}+\ldots} T_{\alpha^{(0)}} \left[(\Gamma T_{\alpha^{(1)}})^{k_1} \ldots (\Gamma T_{\alpha^{(m)}})^{k_m} \ldots \right],$$

то учитывая (5.3) и замечание 5.1, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \sum_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha \left\langle \psi_j, \sum_{\beta \leqslant \alpha} T_\beta \varphi_i^{(\alpha-\beta)} \right\rangle + \sum_{\alpha>0} \varepsilon^\alpha \left\langle \psi_j, h^{(\alpha)} \right\rangle = 0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{5.11}$$

где

$$h^{(\alpha)} = \sum_{\alpha=k_1\alpha^{(1)}+\ldots+k_m\alpha^{(m)}+\ldots} \left[(\Gamma T_{\alpha^{(1)}})^{k_1} \ldots (\Gamma T_{\alpha^{(m)}})^{k_m} \ldots \right] h. \tag{5.12}$$

Для тех индексов α, для которых существует ОПЭ $\varphi_i^{(\alpha)}$, соответствующий коэффициент $\left\langle \psi_j, \sum\limits_{\beta \leqslant \alpha} T_\beta \varphi_i^{(\alpha-\beta)} \right\rangle$, $j = 1, 2, \ldots, n$, равен нулю. Отметим также, что для элементов цепочки $\{h^{(\alpha)}\}$, принадлежащих $E_{2,\infty-n}$, коэффициенты $\langle \psi_j, h^{(\alpha)} \rangle$, $j = 1, 2, \ldots, n$, нулевые.

Таким образом, решение уравнения (5.11) в окрестности $\varepsilon = 0$ сводится к определению чисел ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющих системе линейных уравнений (5.11), т. е. сводится к исследованию особенностей мероморфных функций нескольких переменных.

Замечание 5.2. Рассматривая в пространстве $\mathbb{C}^q$ отдельные направления $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_q)$, т. е. полагая $\varepsilon_i = \lambda a_i$, придем к результатам, сформулированным в [1].

5.3. Приложения. Рассмотрим уравнение

$$Bx = h + \varepsilon_1 T_{10} x + \varepsilon_2 T_{01} x,$$

где:

а) B, T_{10} и T_{01} — операторы примера 5.1. Так как $n = 1$, то система (5.11) состоит из одного уравнения и $\xi = a(h, \varepsilon) \Big/ b(\varepsilon)$, где

$$b(\varepsilon) = \varepsilon_1 (3 + 9\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + 43\varepsilon_1^2 + 10\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2\varepsilon_2^2 + \ldots);$$

б) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\varphi^{(0)} = \{0;\, 1;\, -1\}, \quad \psi^{(0)} = \{1;\, 1;\, 0\}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ dim N(B) = 1.$$

В этом случае

$$b(\varepsilon) = \varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2\varepsilon_2^3 + 7\varepsilon_1^2\varepsilon_2 + 5\varepsilon_1\varepsilon_2^2 + \varepsilon_2^3 \ldots$$

в) Теперь рассмотрим краевые задачи Дирихле (Неймана) для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \ \ u|_S = g(S) \ \left(\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = g(S) \right), \tag{5.13}$$

где S — эллипсоид,

$$\begin{aligned} \xi &= \arcsin \theta \cos \varphi, \\ \eta &= a(1 - \varepsilon_1) \sin \theta \sin \varphi, \\ \zeta &= a(1 - \varepsilon_2) \cos \varphi, \end{aligned} \tag{5.14}$$

$g(S)$ — аналитическая функция параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Разыскивая решение (5.13) в виде соответствующего потенциала, приходим к интегральным уравнениям в пространстве функций, интегрируемых с квадратом по поверхности сферы единичного радиуса, ядра которых зависят от двух параметров ε_1 и ε_2.

Все необходимые подсчеты проведены в [2], где рассмотрена внутренняя задача Дирихле в предположении, что граничная функция $g(S)$ не зависит от ε. В [2] эта задача рассмотрена как пример задачи возмущения линейного уравнения малыми линейными слагаемыми для случая $n = 0$. Здесь мы отметим только, что для внутренней задачи Дирихле и внешней Неймана соответствующий интегральный оператор B не имеет нулей, а для внешней задачи Дирихле и внутренней Неймана подпространство $N(B)$ одномерно, $\varphi^{(0)}(\theta, \varphi) = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969.
2. *Логинов Б. В.* К теории возмущений для неоднородных уравнений// В сб.: «Исследования по дифференциальным уравнениям и их приложениям». — Алма-Ата: Илым, 1965. — С. 95–101.
3. *Логинов Б. В., Русак Ю. Б.* Обобщенная жорданова структура в теории ветвления // В сб.: «Прямые и обратные задачи для уравнений с частными производными». — Ташкент: Фан, 1978. — С. 133–148.
4. *Рахимов Д. Г.* О вычислении кратных собственных значений редукционным методом ложных возмущений// Журн. Средневолж. мат. об-ва. — 2010. — № 3. — С. 106–112.
5. *Рахимов Д. Г.* О регуляризации кратных собственных значений редукционным методом ложных возмущений// Вестн. Самар. гос. ун-та. Естеств. сер. — 2012. — № 6. — С. 35–41.
6. *Рахимов Д. Г., Логинов Б. В.* Возмущения в задачах на собственные значения. — Ташкент: Ташкент. унив. инф. техн., 2020.
7. *Треногин В. А.* Линейные уравнения в пространстве Банаха с малым параметром// В сб.: «Материалы 6 Межвузовской физ.-мат. науч. конф. Дальнего Востока». — Хабаровск, 1967.
8. *Albrecht A., Howlett P., Verma G.* Inversion of operator pencils on Banach space using Jordan chains when the generalized resolvent has an isolated essential singularity// Linear Algebra Appl. — 2020. — *595*. — С. 33–62.
9. *Albrecht A., Howlett P., Verma G.* Inversion of operator pencils on Hilbert space// J. Aust. Math. Soc. — 2020. — *108*, № 2. — С. 145–176.
10. *Avrachenkov K. E., Filar J. A., Howlett P. G.* Analytic perturbation theory and its applications. — Philadelphia: SIAM, 2013.

Д. Г. Рахимов
Филиал Российского университета нефти и газа им. И. М. Губкина, Ташкент, Узбекистан
E-mail: davranaka@yandex.com

Д. Ахмаджанова
Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: durdona@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-80-94 UDC 517.988.67

On Analytic Perturbations of Linear Equations in the Case of Incomplete Generalized Jordan Set

© 2022 **D. G. Rakhimov, D. Akhmadzhanova**

Abstract. Based on the methods of the theory of bifurcations, the problem of perturbation of linear equations by small analytic terms is considered. In contrast to the work of Trenogin [7], the case of an incomplete generalized Jordan set of a linear Fredholm operator acting from one Banach space to another Banach space is studied. A technique is proposed that uses the regularization of the Fredholm operator by a specially constructed finite-dimensional operator.

REFERENCES

1. M. M. Vaynberg and V. A. Trenogin, *Teoriya vetvleniya resheniy nelineynykh uravneniy* [Branching Theory for Solutions of Nonlinear Equations], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
2. B. V. Loginov, "K teorii vozmushcheniy dlya neodnorodnykh uravneniy" [On perturbation theory for nonhomogeneous equations], In: *Issledovaniya po differentsial'nym uravneniyam i ikh prilozheniyam* [Research on Differential Equations and Their Applications], Ilym, Alma-Ata, 1965, pp. 95–101 (in Russian).
3. B. V. Loginov and Yu. B. Rusak, "Obobshchennaya zhordanova struktura v teorii vetvleniya" [Generalized Jordan structure in branching theory], In: *Pryamye i obratnye zadachi dlya uravneniy s chastnymi proizvodnymi* [Direct and Inverse Problems for Partial Differential Equations], Fan, Tashkent, 1978, pp. 133–148 (in Russian).
4. D. G. Rakhimov, "O vychislenii kratnykh sobstvennykh znacheniy reduktsionnym metodom lozhnykh vozmushcheniy" [On the calculation of multiple eigenvalues by the reduction method of false perturbations], *Zhurn. Srednevolzh. mat. ob-va* [J. Middle Volga Math. Soc.], 2010, No. 3, 106–112 (in Russian).
5. D. G. Rakhimov, "O regulyarizatsii kratnykh sobstvennykh znacheniy reduktsionnym metodom lozhnykh vozmushcheniy" [On regularization of multiple eigenvalues by the reduction method of false perturbations], *Vestn. Samar. gos. un-ta. Estestv. ser.* [Bull. Samara State Univ. Nat. Sci. Ser.], 2012, No. 6, 35–41 (in Russian).
6. D. G. Rakhimov and B. V. Loginov, *Vozmushcheniya v zadachakh na sobstvennye znacheniya* [Perturbations in Eigenvalue Problems], Tashkent. univ. inf. tekhn., Tashkent, 2020 (in Russian).
7. V. A. Trenogin, "Lineynye uravneniya v prostranstve Banakha s malym parametrom" [Linear equations in Banach space with a small parameter], In: *Materialy 6 Mezhvuzovskoy fiz.-mat. nauch. konf. Dal'nego Vostoka* [Proc. 6th Interuniv. Phys.-Math. Sci. Conf. of Far East], Khabarovsk, 1967 (in Russian).
8. A. Albrecht, P. Howlett, and G. Verma, "Inversion of operator pencils on Banach space using Jordan chains when the generalized resolvent has an isolated essential singularity," *Linear Algebra Appl.*, 2020, **595**, 33–62.
9. A. Albrecht, P. Howlett, and G. Verma, "Inversion of operator pencils on Hilbert space," *J. Aust. Math. Soc.*, 2020, **108**, No. 2, 145–176.
10. K. E. Avrachenkov, J. A. Filar, and P. G. Howlett, *Analytic perturbation theory and its applications*, SIAM, Philadelphia, 2013.

D. G. Rakhimov
Tashkent Branch of Gubkin Russian State University of Oil and Gaz, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: davranaka@yandex.com

D. Akhmadzhanova
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: durdona@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). С. 95–109
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-95-109 УДК 517.98

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ HC-МОДЕЛИ С ДВУМЯ СОСТОЯНИЯМИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

© 2022 г. **У. А. РОЗИКОВ, Р. М. ХАКИМОВ, М. Т. МАХАММАДАЛИЕВ**

Аннотация. В данной статье изучается Hard-Core (HC) модель с двумя состояниями и активностью $\lambda > 0$ на дереве Кэли порядка $k \geqslant 2$. Известно, что существуют λ_{cr}, λ^0_{cr}, λ'_{cr} такие, что

- при $\lambda \leqslant \lambda_{\mathrm{cr}}$ для этой модели существует единственная мера Гиббса μ^*, которая является трансляционно-инвариантной. Мера μ^* является крайней при $\lambda < \lambda^0_{\mathrm{cr}}$ и не крайней при $\lambda > \lambda'_{\mathrm{cr}}$;
- при $\lambda > \lambda_{\mathrm{cr}}$ существуют ровно три 2-периодические меры Гиббса, одна из которых является μ^*, две остальные являются не трансляционно-инвариантными и всегда крайними.

Крайность этих периодических мер была доказана с помощью максимальности и минимальности соответствующих решений некоторого уравнения, обеспечивающего согласованность этих мер. В данной работе мы дадим краткий обзор известных мер Гиббса для HC-модели и альтернативное доказательство крайности 2-периодических мер при $k = 2, 3$. Наше доказательство основано на методе реконструкции на дереве.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Решения проблем, возникающих в результате исследований при изучении термодинамических свойств физических и биологических систем, в основном приводятся к задачам теории мер Гиббса. Мера Гиббса — это фундаментальный закон, определяющий вероятность микроскопического состояния данной физической системы. Известно, что каждой мере Гиббса сопоставляется одна фаза физической системы, и если мера Гиббса не единственна, то говорят, что существует фазовый переход. Для достаточно широкого класса гамильтонианов известно, что множество всех предельных мер Гиббса (соответствующих данному гамильтониану) образует непустое выпуклое компактное подмножество в множестве всех вероятностных мер (см. например [3, 7, 23]) и каждая точка этого выпуклого множества однозначно разлагается по его крайним точкам. В связи с этим особый интерес представляет описание всех крайних точек этого выпуклого множества, т. е. крайних мер Гиббса.

Определение меры Гиббса и других понятий, связанных с теорией мер Гиббса, можно найти, например, в работах [3, 7, 23, 24]. Несмотря на многочисленные работы, посвященных изучению мер Гиббса, ни для одной модели не было получено полное описание всех предельных мер Гиббса. Относительно других моделей для модели Изинга на дереве Кэли эта задача изучена достаточно полно. Так, например, в работе [1] построено несчетное множество крайних гиббсовских мер, а в работе [13] найдено необходимое и достаточное условие крайности неупорядоченной фазы модели Изинга на дереве Кэли.

В работе [20] Мазелью и Суховым была введена и изучена HC-модель (жесткий диск, жесткая сердцевина) на d-мерной решетке $\mathbb{Z}^d$. Работы [5,6,8–12,15,18,20–25] посвящены изучению (слабо) периодических мер Гиббса для HC-модели с двумя состояниями на дереве Кэли. В работе [25] была доказана единственность трансляционно-инвариантной меры и неединственность периодических мер Гиббса для HC-модели. Также в [25] (соответственно, в [18]) найдено достаточное условие на параметры HC-модели, при котором трансляционно-инвариантная мера Гиббса является не крайней (соответственно, крайней). В работе [6] расширена область крайности этой меры. Работа [5] посвящена изучению слабо периодических мер Гиббса для HC-модели для нормального делителя индекса два, и при некоторых условиях на параметры показана единственность слабо периодической меры Гиббса, а в работе [8] дано полное описание слабо периодических мер Гиббса для HC-модели при любых значениях параметров в случае нормального делителя индекса два. Для ознакомления с другими свойствами HC-модели (и их обобщения) на дереве Кэли см. гл. 7 монографии [24].

В данной работе изучается HC-модель с двумя состояниями на дереве Кэли. Даны новые доказательства утверждения, что на дереве Кэли порядка два и три существуют ровно три $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса. При этом найдены явные виды $G_k^{(2)}$-периодических (не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса на дереве Кэли порядка два и три. Доказано, что эти меры являются крайними.

2. Предварительные сведения и известные факты

2.1. Дерево Кэли. Пусть $\Gamma^k = (V, L, i)$ — дерево Кэли порядка $k \geqslant 1$, где V — множество вершин Γ^k, L — множество его ребер и i — функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y называются *ближайшими соседями* вершины и обозначается $l = \langle x, y\rangle$. Пусть $d(x, y), x, y \in V$ — расстояние между вершинами x, y, т. е. количество ребер кратчайшего пути, соединяющего x и y.

Для фиксированного $x^0 \in V$ обозначим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \ V_n = \cup_{j=0}^{n} W_j.$$

Для $x \in W_n$ обозначим (множество прямых потомков вершины x)

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}.$$

2.2. Допустимые конфигурации. Пусть $\Phi = \{0, 1\}$ и $\sigma \in \Phi^V$ — конфигурация, т. е. $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$, где $\sigma(x) = 1$ означает, что вершина x на дереве Кэли занята, а $\sigma(x) = 0$ означает, что она свободна. Конфигурация σ называется *допустимой*, если $\sigma(x)\sigma(y) = 0$ для любых соседних $\langle x, y\rangle$ из V (V_n или W_n, соответственно). Обозначим множество таких конфигураций через Ω (Ω_{V_n} и Ω_{W_n}, соответственно). Ясно, что $\Omega \subset \Phi^V$.

Объединение конфигураций $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$ и $\omega_n \in \Phi^{W_n}$ определяется следующей формулой:

$$\sigma_{n-1} \vee \omega_n = \{\{\sigma_{n-1}(x), x \in V_{n-1}\}, \{\omega_n(y), y \in W_n\}\}.$$

2.3. Мера Гиббса. Гамильтониан HC-модели определяется по формуле

$$H(\sigma) = J \sum_{x \in V} \sigma(x), \quad \sigma \in \Omega,$$

где $J \in \mathbb{R}$.

Пусть $\mathbf{B}$ — σ-алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами Ω. Для любого n обозначим через $\mathbf{B}_{V_n} = \{\sigma \in \Omega : \sigma|_{V_n} = \sigma_n\}$ подалгебру алгебры $\mathbf{B}$, где $\sigma|_{V_n}$ — сужение σ на V_n, $\sigma_n : x \in V_n \mapsto \sigma_n(x)$ — допустимая конфигурация в V_n.

Определение 2.1. Для $\lambda > 0$ *HC-мера Гиббса* — это вероятностная мера μ на $(\Omega, \mathbf{B})$ такая, что для любого n и $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$

$$\mu\{\sigma \in \Omega : \sigma|_{V_n} = \sigma_n\} = \int_{\Omega} \mu(d\omega) P_n(\sigma_n | \omega_{W_{n+1}}),$$

где

$$P_n(\sigma_n|\omega_{W_{n+1}}) = \frac{e^{-H(\sigma_n)}}{Z_n(\lambda;\omega|_{W_{n+1}})}\mathbf{1}(\sigma_n \vee \omega|_{W_{n+1}} \in \Omega_{V_{n+1}}).$$

Здесь $Z_n(\lambda;\omega|_{W_{n+1}})$ — нормировочный множитель с граничным условием $\omega|_{W_n}$:

$$Z_n(\lambda;\omega|_{W_{n+1}}) = \sum_{\widetilde{\sigma}_n\in\Omega_{V_n}} e^{-H(\widetilde{\sigma}_n)}\mathbf{1}(\widetilde{\sigma}_n \vee \omega|_{W_{n+1}} \in \Omega_{V_{n+1}}).$$

Для $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$ положим

$$\#\sigma_n = \sum_{x\in V_n} \mathbf{1}(\sigma_n(x) \geqslant 1)$$

— число занятых вершин в σ_n.

Пусть $z : x \mapsto z_x = (z_{0,x}, z_{1,x}) \in \mathbb{R}^2_+$ — векторнозначная функция на V. При $n = 1, 2, \dots$ и $\lambda > 0$ рассмотрим вероятностную меру $\mu^{(n)}$ на Ω_{V_n}, определяемую как

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n}\lambda^{\#\sigma_n}\prod_{x\in W_n} z_{\sigma(x),x}. \tag{2.1}$$

Здесь Z_n — нормирующий делитель:

$$Z_n = \sum_{\widetilde{\sigma}_n\in\Omega_{V_n}} \lambda^{\#\widetilde{\sigma}_n}\prod_{x\in W_n} z_{\widetilde{\sigma}(x),x}.$$

Говорят, что последовательность вероятностных мер $\mu^{(n)}$ является *согласованной*, если для любых $n \geqslant 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$:

$$\sum_{\omega_n\in\Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1}\vee\omega_n)\mathbf{1}(\sigma_{n-1}\vee\omega_n \in \Omega_{V_n}) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \tag{2.2}$$

В этом случае существует единственная мера μ на $(\Omega, \mathbf{B})$ такая, что для всех n и $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$

$$\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n).$$

Определение 2.2. Мера μ, являющаяся пределом последовательности $\mu^{(n)}$, определенной формулой (2.1) с условием согласованности (2.2), называется *HC-мерой Гиббса* с $\lambda > 0$, соответствующей функции $z : x \in V \setminus \{x^0\} \mapsto z_x$. При этом HC-мера Гиббса, соответствующая постоянной функции $z_x \equiv z$, называется *трансляционно-инвариантной*.

Известно, что существует взаимно-однозначное соответствие между множеством V вершин дерева Кэли порядка $k \geqslant 1$ и группой G_k, являющейся свободным произведением $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, \dots, a_{k+1}$, соответственно (см. [2]). Поэтому множество V можно отождествлять с множеством G_k.

Пусть $\widehat{G}_k$ — подгруппа группы G_k.

Если гиббсовская мера инвариантна относительно некоторой подгруппы конечного индекса $\widehat{G}_k \subset G_k$, то она называется $\widehat{G}_k$*-периодической*.

Известно (см. [25]), что каждой HC-мере Гиббса для HC-модели на дереве Кэли можно сопоставить совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$, удовлетворяющих равенству

$$z_x = \prod_{y\in S(x)} (1 + \lambda z_y)^{-1}, \tag{2.3}$$

где $\lambda = e^{J_1} > 0$ — параметр, $J_1 = -J\beta$, $\beta = \dfrac{1}{T}$, $T > 0$ — температура.

Определение 2.3. Совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$ называется $\widehat{G}_k$*-периодической*, если $z_{yx} = z_x$ для $\forall x \in G_k, y \in \widehat{G}_k$.

G_k-периодические совокупности называются *трансляционно-инвариантными*.

Для любого $x \in G_k$ множество $\{y \in G_k : \langle x, y\rangle\} \setminus S(x)$ имеет единственный элемент, который обозначим через $x_\downarrow$ (см. [4]).

Пусть $G_k/\widehat{G}_k = \{H_1, \dots, H_r\}$ — фактор группа, где $\widehat{G}_k$ — нормальный делитель индекса $r \geqslant 1$.

Определение 2.4. Совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$ называется $\widehat{G}_k$*-слабо периодической*, если $z_x = z_{ij}$ при $x \in H_i$, $x_\downarrow \in H_j$ для $\forall x \in G_k$.

Определение 2.5. Мера μ называется $\widehat{G}_k$-*(слабо) периодической*, если она соответствует $\widehat{G}_k$-(слабо) периодической совокупности величин z.

Заметим, что мера μ является трансляционно-инвариантной, если она соответствует G_k-периодической совокупности величин z.

2.4. Известные теоремы. Известно, что для каждого $\beta > 0$ меры Гиббса образуют непустое выпуклое компактное множество $\mathbf{G}$ в пространстве всех вероятностных мер на Ω, снабженном слабой топологией [3, Ch. 7].

Напомним (см. [7]), что мера Гиббса μ (как элемент выпуклого множества) называется *крайней*, если $\mu \neq s\nu + (1-s)\nu'$ для различных мер Гиббса ν, ν' и $0 < s < 1$.

Обозначим через ex$\mathbf{G}$ множество всех крайних мер (точек) в $\mathbf{G}$. Заметим, что (см. [3, теорема 12.6]) каждой крайней мере $\mu \in ex\mathbf{G}$ соответствует некоторое решение функционального уравнения (2.3). Но обратное неверно: могут существовать решения, не определяющие крайние меры. Теперь приведем несколько решений уравнения (2.3) и условия крайности соответствующих мер Гиббса.

Теорема 2.1 (см. [5]). *Для любого нормального делителя $\mathcal{G} \subset G_k$ всякая $\mathcal{G}$-периодическая мера Гиббса HC-модели является либо трансляционно-инвариантной, либо $G_k^{(2)}$-периодической мерой Гиббса, где*

$$G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| - \textit{четное число}\}.$$

Теорема 2.2 (см. [25]).

- *Для HC модели при $k \geqslant 2$ и $\lambda > 0$ трансляционно-инвариантная мера Гиббса μ^* единственна.*
- *Для $k \geqslant 2$ и*
$$\lambda > \frac{1}{\sqrt{k}-1}\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}-1}\right)^k \tag{2.4}$$
мера μ^* не является крайней.
- *Для любого $\epsilon > 0$ существует k_0 такое, что мера μ^* не является крайней для всех $k \geqslant k_0$ и*
$$\lambda > e^{1+\epsilon}\ln k(\ln k + \ln\ln k + 1 + \epsilon). \tag{2.5}$$
- *Если для некоторых k и λ^0 мера μ^* не является крайней, то она остается некрайней для этого k и для всех $\lambda > \lambda^0$.*

Следующая теорема доказана в [18].

Теорема 2.3. *Для $\lambda = 1$ мера μ^* является крайней для всех k.*

При доказательстве крайности некоторой меры Гиббса μ обычно принимается алгоритм реконструкции, предложенный и изученный в [21] (см. также [24, гл. 4]). В этом алгоритме рекурсивно присваивается значение 1 вершине x, если все $y \in S(x)$ имеют значения 0, и значение 0 в противном случае. Говорят, что реконструкция возможна, если при данной конфигурации $\sigma_n \in \Omega_{W_n}$ возможно определить значения 0 или 1 для начальной точки x^0. Известно, что возможность реконструкции эквивалентна некрайности меры μ. Точнее, рассматривается 0, 1-значная цепь Маркова, порожденная мерой μ на пути дерева. Пусть матрица вероятностных переходов для цепи есть $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j=0,1}$.

В [22] доказано, что реконструкция невозможна, если

$$\frac{(p_{00} - p_{10})^2}{\min\{p_{00} + p_{10},\ \ p_{01} + p_{11}\}} \leqslant \frac{1}{k}.$$

В работе [18] эта оценка улучшена следующим образом.

Теорема 2.4. *Реконструкция невозможна, если*

$$(\sqrt{p_{00}p_{11}} - \sqrt{p_{01}p_{10}})^2 \leqslant \frac{1}{k}. \tag{2.6}$$

Основным результатом [6] является следующая теорема.

Теорема 2.5. *При $k \geqslant 2$ и $\lambda \in (0, \lambda_*)$ мера μ^* является крайней, где*

$$\lambda_* = \lambda_*(k) = \frac{1}{t_*^k}\left(\frac{1}{t_*} - 1\right), \tag{2.7}$$

и $t_* \in (0,1)$ является единственным решением уравнения

$$t^{k+1} - kt^2 + (2k-1)t - k + 1 = 0. \tag{2.8}$$

Теперь дадим полное описание $G_k^{(2)}$-периодических мер Гиббса на дереве Кэли порядка два и три. Они соответствуют совокупности величин

$$z_x = \begin{cases} z_1, & \text{если } x \in G_k^{(2)}, \\ z_2, & \text{если } x \in G \setminus G_k^{(2)}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Отсюда, в силу (2.3) имеем

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{(1+\lambda z_2)^k}, \\ z_2 = \dfrac{1}{(1+\lambda z_1)^k}. \end{cases} \tag{2.10}$$

Известна следующая теорема.

Теорема 2.6 (см. [25]). *Для HC модели при*

$$\lambda \leqslant \lambda_{cr} = (k-1)^{-1}\left(\frac{k}{k-1}\right)^k. \tag{2.11}$$

существует ровно одна $G_k^{(2)}$-периодическая мера Гиббса μ_0, которая совпадает с единственной трансляционно-инвариантной мерой Гиббса μ^*, а при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют ровно три $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса μ_0, μ_1, μ_2, где мера μ_0 является трансляционно-инвариантной, а меры μ_1 и μ_2 являются $G_k^{(2)}$-периодическими (не трансляционно-инвариантными).

2.5. Слабо периодические меры. В работе [8] были изучены слабо периодические меры Гиббса для любых нормальных делителей индекса два и доказано, что такая мера единственна. Более того, она совпадает с единственной трансляционно-инвариантной мерой Гиббса.

Пусть $A \subset \{1, 2, \ldots, k+1\}$ и $H_A = \{x \in G_k : \sum\limits_{i \in A} w_x(a_i)$ — четное число$\}$, где $w_x(a_i)$ — число вхождений буквы a_i в слове $x \in G_k$, и $G_k^{(4)} = H_A \cap G_k^{(2)}$ — нормальный делитель индекса 4.

Тогда в силу (2.3) $G_k^{(4)}$-слабо периодические меры соответствуют решениям следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{(1+\lambda z_3)^k}{((1+\lambda z_3)^{k/i} + \lambda z_4^{1-1/i})^i} \cdot \dfrac{1}{(1+\lambda z_2)^{k-i}}, \\ z_2 = \dfrac{(1+\lambda z_4)^k}{((1+\lambda z_4)^{k/i} + \lambda z_3^{1-1/i})^i} \cdot \dfrac{1}{(1+\lambda z_1)^{k-i}}, \\ z_3 = \dfrac{(1+\lambda z_1)^k}{((1+\lambda z_1)^{k/i} + \lambda z_2^{1-1/i})^i} \cdot \dfrac{1}{(1+\lambda z_4)^{k-i}}, \\ z_4 = \dfrac{(1+\lambda z_2)^k}{((1+\lambda z_2)^{k/i} + \lambda z_1^{1-1/i})^i} \cdot \dfrac{1}{(1+\lambda z_3)^{k-i}}. \end{cases} \tag{2.12}$$

Здесь $i = |A|$ — мощность множества A.

Рассмотрим отображение $W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, определенное следующим образом:

$$\begin{cases} z_1^{'} = \dfrac{(1+\lambda z_3)^k}{((1+\lambda z_3)^{k/i}+\lambda z_4^{1-1/i})^i}\cdot\dfrac{1}{(1+\lambda z_2)^{k-i}}, \\ z_2^{'} = \dfrac{(1+\lambda z_4)^k}{((1+\lambda z_4)^{k/i}+\lambda z_3^{1-1/i})^i}\cdot\dfrac{1}{(1+\lambda z_1)^{k-i}}, \\ z_3^{'} = \dfrac{(1+\lambda z_1)^k}{((1+\lambda z_1)^{k/i}+\lambda z_2^{1-1/i})^i}\cdot\dfrac{1}{(1+\lambda z_4)^{k-i}}, \\ z_4^{'} = \dfrac{(1+\lambda z_2)^k}{((1+\lambda z_2)^{k/i}+\lambda z_1^{1-1/i})^i}\cdot\dfrac{1}{(1+\lambda z_3)^{k-i}}. \end{cases}$$

Заметим, что (2.12) — это уравнение $z = W(z)$. Чтобы решить систему уравнений (2.12), надо найти неподвижные точки отображения $z^{'} = W(z)$.

Известны следующие леммы.

Лемма 2.1 (см. [9]). *Отображение W имеет инвариантные множества следующих видов*:

$$I_1 = \{(z_1,z_2,z_3,z_4)\in\mathbb{R}^4 : z_1=z_2=z_3=z_4\},\quad I_2 = \{(z_1,z_2,z_3,z_4)\in\mathbb{R}^4 : z_1=z_3,\ z_2=z_4\},$$
$$I_3 = \{(z_1,z_2,z_3,z_4)\in\mathbb{R}^4 : z_1=z_2, z_3=z_4\},\quad I_4 = \{(z_1,z_2,z_3,z_4)\in\mathbb{R}^4 : z_1=z_4,\ z_2=z_3\}.$$

Лемма 2.2 (см. [9]). *Если на инвариантных множествах I_2, I_3, I_4 существуют слабо периодические меры Гиббса, то они являются либо трансляционно-инвариантными, либо слабо периодическими* (*не периодическими*).

В работах [9,11,12,15] были изучены слабо периодические меры Гиббса для HC-модели в случае нормального делителя индекса четыре на некоторых инвариантах. В частности, были доказаны утверждения следующей теоремы.

Теорема 2.7. *Для HC-модели в случае нормального делителя индекса четыре верны следующие утверждения*:

- *Пусть $k = 2$, $\lambda_{cr} = 4$ и $i = 1$ или $i = 2$. Тогда на I_2 при $\lambda < \lambda_{cr}$ существует одна слабо периодическая мера Гиббса, которая является трансляционно-инвариантной, при $\lambda = \lambda_{cr}$ существуют две слабо периодические меры Гиббса, одна из которых является трансляционно-инвариантной, другая слабо периодической* (*не периодической*), *и при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют ровно две слабо периодические* (*не периодические*) *меры Гиббса.*
- *Пусть $k = 3$, $i = 1$, $\lambda_{cr} = \dfrac{27}{16}$. Тогда для HC-модели в случае нормального делителя индекса четыре при $\lambda \leqslant \lambda_{cr}$ существует одна слабо периодическая мера Гиббса* (*соответствующая совокупности величин из I_2*), *которая является трансляционно-инвариантной, а при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют ровно три слабо периодические меры Гиббса* (*соответствующие совокупности величин из I_2*), *одна из которых является трансляционно-инвариантной, а две другие слабо периодическими* (*не периодическими*).
- *При $k \geqslant 6$, $i = 1$ и $\lambda \in (\lambda^-(k), \lambda^+(k))$ существует не менее трех слабо периодических мер Гиббса, соответствующих совокупности величин из I_4. При этом одна из них является трансляционно-инвариантной, другие слабо периодическими* (*не периодическими*) *мерами Гиббса, где*

$$s^{\pm} := s^{\pm}(k) = \frac{k-3\pm\sqrt{k^2-6k+1}}{4},$$

$$\lambda^{\pm} := \lambda^{\pm}(k) = (s^{\pm}+1)^k s^{\pm}.$$

Замечание. По лемме 2.2 ясно, что существующие слабо периодические меры Гиббса в теореме 2.7 отличаются от периодических.

3. Условия крайности периодических мер

Обозначим $f(x) = \dfrac{1}{(1+\lambda x)^k}$. Следующая лемма очевидна.

Лемма 3.1. *Если* (x_0, y_0) *является решением системы уравнений*

$$\begin{cases} x = f(y), \\ y = f(x), \end{cases} \tag{3.1}$$

то (y_0, x_0) *также является решением системы уравнений* (3.1).

В частности, из леммы следует, что если существует решение (x_0, y_0) $(x_0 \neq y_0)$, то система (3.1) имеет более одного решения.

При изучении крайности нам необходимы явные виды решений, соответствующих мерам μ_1 и μ_2. Теперь мы найдем явные виды решений при $k = 2, 3$.

Случай $k = 2$. Перепишем систему уравнений (2.10) при $k = 2$:

$$\begin{cases} \sqrt{z_1} + \lambda z_2 \sqrt{z_1} = 1, \\ \sqrt{z_2} + \lambda z_1 \sqrt{z_2} = 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Введя обозначения $\sqrt{z_1} = x$ и $\sqrt{z_2} = y$, перепишем (3.2) следующим образом:

$$\begin{cases} x + \lambda x y^2 = 1, \\ y + \lambda y x^2 = 1. \end{cases} \tag{3.3}$$

В этой системе уравнений, вычтя из первого уравнения второе, получим

$$(x - y)(1 - \lambda x y) = 0.$$

Отсюда $x = y$ или

$$\lambda x y = 1.$$

В случае $x = y$ получим решение, соответствующее единственной трансляционно-инвариантной мере Гиббса μ_0 при $\lambda > 0$. Это решение имеет явный вид. Кроме того, в работе [11] была изучена крайность трансляционно-инвариантной меры Гиббса, соответствующей этому решению.

Пусть $x \neq y$ и $\lambda x y = 1$. В этом случае, из (3.3) получим квадратное уравнение

$$\lambda x^2 - \lambda x + 1 = 0,$$

решения которого имеют вид

$$x_1 = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2\lambda}, \quad x_2 = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2\lambda}.$$

Ясно, что $\lambda > \lambda_{cr} = 4$ и $x_1 > 0,\ x_2 > 0$.

Далее, из $\lambda x y = 1$ получим

$$y_1 = \frac{2}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}, \quad y_2 = \frac{2}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}.$$

Итак, для системы уравнений (3.3) имеем решения вида: (x_1, y_1) и (x_2, y_2). В силу леммы 3.1 (y_1, x_1) и (y_2, x_2) также являются решениями (3.3). Но не трудно заметить, что $x_1 = y_2$ и $x_2 = y_1$. Из всего сказанного следует, что при $0 < \lambda \leqslant \lambda_{cr}$ существует ровно одна $G_k^{(2)}$-периодическая мера Гиббса, которая совпадает с единственной трансляционно-инвариантной мерой Гиббса μ_0, а при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют ровно три $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса μ_0, μ_1, μ_2, где меры μ_1, μ_2 соответствуют решениям $(z_1, z_2) = (x_1^2, y_1^2)$ и $(z_2, z_1) = (x_2^2, y_2^2)$, соответственно, и являются $G_k^{(2)}$-периодическими (не трансляционно-инвариантными).

Случай $k = 3$. Перепишем систему уравнений (2.10) при $k = 3$:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{z_1} + \lambda z_2 \sqrt[3]{z_1} = 1, \\ \sqrt[3]{z_2} + \lambda z_1 \sqrt[3]{z_2} = 1. \end{cases} \tag{3.4}$$

Введя обозначения $\sqrt[3]{z_1}=x$ и $\sqrt[3]{z_2}=y$, перепишем (3.4) следующим образом:

$$\begin{cases} x+\lambda xy^3=1, \\ y+\lambda yx^3=1. \end{cases} \tag{3.5}$$

В этой системе уравнений, вычтя из первого уравнения второе, получим

$$(x-y)(1-\lambda xy(x+y))=0.$$

Отсюда $x=y$ или

$$\lambda xy(x+y)=1.$$

В случае $x=y$ получим решение, соответствующее единственной трансляционно-инвариантной мере Гиббса $\mu^{(0)}$ при $\lambda>0$. В работе [6] была изучена крайность трансляционно-инвариантной меры Гиббса, соответствующей этому решению.

Пусть $x\neq y$. Тогда $\lambda xy(x+y)=1$. Используя последнее равенство, из первого уравнения (3.5) получим уравнение

$$x^2+y^2+xy=x+y.$$

Введем обозначения $x+y=a$ и $xy=b$. Тогда $ab\lambda=1$ и $a^2-b=a$. Отсюда имеем уравнение

$$a^3-a^2-\frac{1}{\lambda}=0,$$

решение которого по формуле Кардано имеет вид

$$a=\frac{1}{6}\sqrt[3]{\frac{12\sqrt{12\lambda+81}+8\lambda+108}{\lambda}}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{\lambda}{12\sqrt{12\lambda+81}+8\lambda+108}}+\frac{1}{3}.$$

С другой стороны, из $x+y=a$, $xy=b$ следует, что x и y являются решениями некоторого квадратного уравнения $t^2-at+b=0$. Используя равенство $b=\dfrac{1}{a\lambda}$, для решений этого квадратного уравнения будем иметь:

$$t_{1,2}=\frac{\lambda a^2\pm\sqrt{\lambda^2a^4-4\lambda a}}{2\lambda a},$$

т. е.

$$t_1=\frac{\lambda a^2-\sqrt{\lambda^2a^4-4\lambda a}}{2\lambda a}=x,\quad t_2=\frac{\lambda a^2+\sqrt{\lambda^2a^4-4\lambda a}}{2\lambda a}=y.$$

С помощью компьютерного анализа можно увидеть, что дискриминант $D(\lambda)=a^4\lambda^2-4a\lambda>0$ при $\lambda>\lambda_{cr}=\dfrac{27}{16}$ и $D(\lambda_{cr})=0$ (см. рис. 1). Заметим, что это критическое значение λ_{cr} совпадает со значением из теоремы 2.6 при $k=3$.

Значит, система уравнений (3.4) имеет решение (z_1,z_2), где

$$z_1=\left(\frac{\lambda a^2-\sqrt{\lambda^2a^4-4\lambda a}}{2\lambda a}\right)^3,\ z_2=\left(\frac{\lambda a^2+\sqrt{\lambda^2a^4-4\lambda a}}{2\lambda a}\right)^3.$$

Но в силу симметрии (z_2,z_1) также является решением (3.4). Итак, система уравнений (3.4) при $0<\lambda\leqslant\lambda_{cr}$ имеет единственное решение (z,z), соответствующее единственной трансляционно-инвариантной мере $\mu^{(0)}$, а при $\lambda>\lambda_{cr}$ имеет три решения (z,z), (z_1,z_2) и (z_2,z_1), которые соответствуют мерам $\mu^{(0)},\mu^{(1)},\mu^{(2)}$, где меры $\mu^{(1)},\mu^{(2)}$ являются $G_k^{(2)}$-периодическими (не трансляционно-инвариантными).

3.1. Крайность меры. Мы имеем $G_k^{(2)}$-периодические меры μ_1 и μ_2. Чтобы изучить их (не) крайность воспользуемся методами из работ [14, 16, 17, 19] для трансляционно-инвариантных мер Гиббса. Для каждой трансляционно-инвариантной меры рассматривается цепь Маркова с состояниями $\{0,1\}$, индексированная на дереве Кэли. А именно, предположим, что нам даны дерево Кэли с множеством вершин V, вероятностная мера ν и матрица вероятностных переходов $\mathbb{P}=(P_{ij})$ на множестве $\{0,1\}$. Мы можем построить дерево, индексированное цепью Маркова $X:V\to\{0,1\}$, путем выбора $X(x^0)$ в соответствии с ν и выбором $X(v)$ для каждой вершины $v\neq x^0$, используя вероятности перехода с учетом значения его родителя, независимо от всего остального. Так как

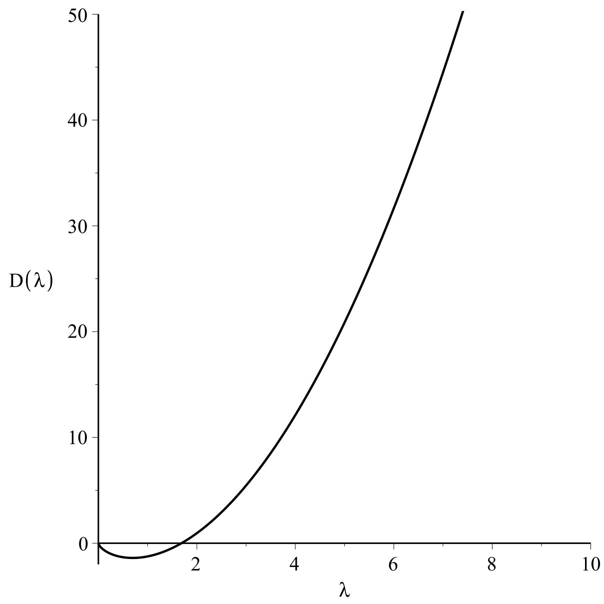

Рис. 1. График функции $D(\lambda)$.

трансляционно-инвариантные меры получаются при $z_1 = z_2$, в (2.9) матрица $\mathbb{P}$ зависит только от z_1, более точно,

$$\mathbb{P} \equiv \mathbb{P}_{z_1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+\lambda z_1} & \dfrac{\lambda z_1}{1+\lambda z_1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Но в случае периодических мер матрица $\mathbb{P}$ зависит от z_1 и z_2, где $z_1 \neq z_2$ и (z_1, z_2) — решение системы уравнений (2.10). Точнее, $\mathbb{P} \equiv \mathbb{P}_{z_1,z_2} = \mathbf{P}_{\mu_1}$ (соотв. $\mathbf{P}_{\mu_2}$) — матрица вероятностных переходов P_{il}, определенная данной периодической мерой Гиббса μ_1 (соответственно, μ_2). Заметим, что $\mathbf{P}_{\mu_1}$ является произведением двух матриц вероятностных переходов:

$$\mathbf{P}_{\mu_1} = \mathbb{P}_{z_1}\mathbb{P}_{z_2} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+\lambda z_1} & \dfrac{\lambda z_1}{1+\lambda z_1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+\lambda z_2} & \dfrac{\lambda z_2}{1+\lambda z_2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1+\lambda^2 z_1 z_2 + \lambda z_1}{(1+\lambda z_1)(1+\lambda z_2)} & \dfrac{\lambda z_2}{(1+\lambda z_1)(1+\lambda z_2)} \\ \dfrac{1}{1+\lambda z_2} & \dfrac{\lambda z_2}{1+\lambda z_2}. \end{pmatrix} \qquad (3.6)$$

Таким образом, матрица $\mathbf{P}_{\mu_1}$ определяет марковскую цепь на дереве Кэли порядка k^2, которое состоит из вершин исходного дерева в четных местах.

Достаточное условие Кестена—Стигума некрайности меры Гиббса μ_1, соответствующей матрице $\mathbf{P}_{\mu_1}$: $k^2 s_2^2 > 1$, где s_2 есть второе по абсолютной величине собственное значение $\mathbf{P}_{\mu_1}$.

Найдем собственные значения этой матрицы:

$$s_1 = 1,\ s_2 = \frac{\lambda^2 z_1 z_2}{\lambda^2 z_1 z_2 + \lambda z_1 + \lambda z_2 + 1}.$$

Случай $k = 2$. В этом случае

$$z_1 = \left(\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2\lambda}\right)^2,\ z_2 = \left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2\lambda}\right)^2.$$

В силу симметрии решений достаточно проверить условие некрайности меры μ_1 при $k=2$. Для этого вычислим $\lambda^2 z_1 z_2$ и $\lambda(z_1+z_2)$:

$$\lambda^2 z_1 z_2 = \lambda^2 \left(\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4\lambda}}{2\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4\lambda}}{2\lambda}\right)^2,$$

$$\lambda^2 z_1 z_2 = \lambda^2 \left(\frac{\lambda^2-\lambda^2+4\lambda}{4\lambda^2}\right)^2 = 1,$$

$$\lambda(z_1+z_2) = \lambda\frac{4\lambda^2-8\lambda}{4\lambda^2} = \lambda-2.$$

Тогда из $4s^2>1$ получим неравенство

$$4\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 > 1,$$

решение которого есть $\lambda<2$. Но меры μ_1 и μ_2 существуют при $\lambda>4$. Значит, эти меры заведомо являются крайними.

Для исследования крайности приведем необходимые определения из работы [19]. Если удалить произвольное ребро $\langle x^0, x^1\rangle = l \in L$ из дерева Кэли Γ^k, то оно разбивается на две компоненты $\Gamma^k_{x^0}$ и $\Gamma^k_{x^1}$, каждая из которых называется *полубесконечным* деревом или *полудеревом Кэли*.

Рассмотрим конечное полное поддерево $\mathcal{T}$, которое содержит все начальные точки полудерева $\Gamma^k_{x^0}$. Граница $\partial\mathcal{T}$ поддерева $\mathcal{T}$ состоит из ближайших соседей его вершин, которые лежат в $\Gamma^k_{x^0}\setminus\mathcal{T}$. Мы отождествляем поддерево $\mathcal{T}$ с множеством его вершин. Через $E(A)$ обозначим множество всех ребер A и ∂A.

В [19] ключевыми являются две величины κ и γ. Оба являются свойствами множества мер Гиббса $\{\mu^\tau_{\mathcal{T}}\}$, где граничное условие τ фиксировано и $\mathcal{T}$ является произвольным, начальным, полным, конечным поддеревом $\Gamma^k_{x^0}$. Для данного начального поддерева $\mathcal{T}$ дерева $\Gamma^k_{x^0}$ и вершины $x\in\mathcal{T}$ мы будем писать $\mathcal{T}_x$ для (максимального) поддерева $\mathcal{T}$ с начальной точкой в x. Когда x не является начальной точкой $\mathcal{T}$, через $\mu^s_{\mathcal{T}_x}$ обозначим меру Гиббса, в которой «предок» x имеет спин s и конфигурация на нижней границе $\mathcal{T}_x$ (т. е. на $\partial\mathcal{T}_x\setminus\{\text{предок}\ \ x\}$) задается через τ.

Для двух мер μ_1 и μ_2 на Ω через $\|\mu_1-\mu_2\|_x$ обозначим расстояние по норме

$$\|\mu_1-\mu_2\|_x = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{1}|\mu_1(\sigma(x)=i)-\mu_2(\sigma(x)=i)|.$$

Пусть $\eta^{x,s}$ — конфигурация η со спином в x, равным s.

Следуя [19], определим

$$\kappa\equiv\kappa(\mu) = \frac{1}{2}\max_{i,j}\sum_{l=0}^{1}|P_{il}-P_{jl}|,$$

$$\gamma\equiv\gamma(\mu) = \sup_{A\subset\Gamma^k}\max\|\mu_A^{\eta^{y,s}}-\mu_A^{\eta^{y,s'}}\|_x,$$

где максимум берется по всем граничным условиям η, всем $y\in\partial A$, всем соседям $x\in A$ вершины y и всем спинам $s,s'\in\{0,1\}$.

Достаточным условием крайности меры Гиббса μ является $k\kappa(\mu)\gamma(\mu)<1$, но для рассматриваемых $G_k^{(2)}$-периодических мер это условие выглядит: $k^2\kappa(\mu)\gamma(\mu)<1$.

Используя (3.6), при $i\neq j$ получим

$$\kappa = \frac{\lambda^2 z_1 z_2}{(1+\lambda z_1)(1+\lambda z_2)}.$$

А при $i=j$ имеем $|P_{il}-P_{jl}|=0$. Из работы [19, с. 151, теорема 5.1] известно, что для НС-модели справедлива оценка: $\gamma\leqslant\dfrac{\lambda}{\lambda+1}$.

В случае $k=2$ для мер μ_1 и μ_2, соответствующих решениям z_1 и z_2, имеем $\kappa = \frac{1}{\lambda}$. Следовательно, из условия $4\kappa\gamma > 1$ получим неравенство

$$\frac{4\lambda}{\lambda(\lambda+1)} < 1,$$

решением которого является $\lambda > 3$. Следовательно, в случае $k=2$ условие крайности мер μ_1 и μ_2 выполняется при любых значениях $\lambda > 4$, т. е. в области существования этих мер.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть $k=2$. Тогда для HC-модели $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса μ_1 и μ_2 при $\lambda > 4$ являются крайними.*

Случай $k=3$. В этом случае проверим условие некрайности меры $\mu^{(1)}$ (в силу симметрии решений и выражения для s_2 область некрайности меры $\mu^{(2)}$ совпадает с областью некрайности меры $\mu^{(1)}$). Из условия Кестена—Стигума $k^2 s_2^2 > 1$ получим неравенство

$$h(\lambda) = 9\left(\frac{\lambda^2 z_1 z_2}{(1+\lambda z_1)(1+\lambda z_2)}\right)^2 - 1 > 0.$$

Так как выражения для z_1 и z_2 громоздкие, решить это неравенство аналитически очень трудно. Поэтому рассмотрим производную $h\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)$:

$$\left(h\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)' = -\frac{1}{\lambda^2} h'\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Ясно, что из возрастания функции $h\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)$ при $\lambda \in (0,1]$ следует убывание функции $h(\lambda)$ при $\lambda \in [1,+\infty)$. Из графиков функций $h(\lambda)$ и $h\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)$ можно увидеть, что функция $h(\lambda)$ убывает при $\lambda \in [1,+\infty)$ (см. рис. 2). Кроме того, меры $\mu^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$ существуют при $\lambda > \frac{27}{16}$. Значит, эти меры заведомо являются крайними.

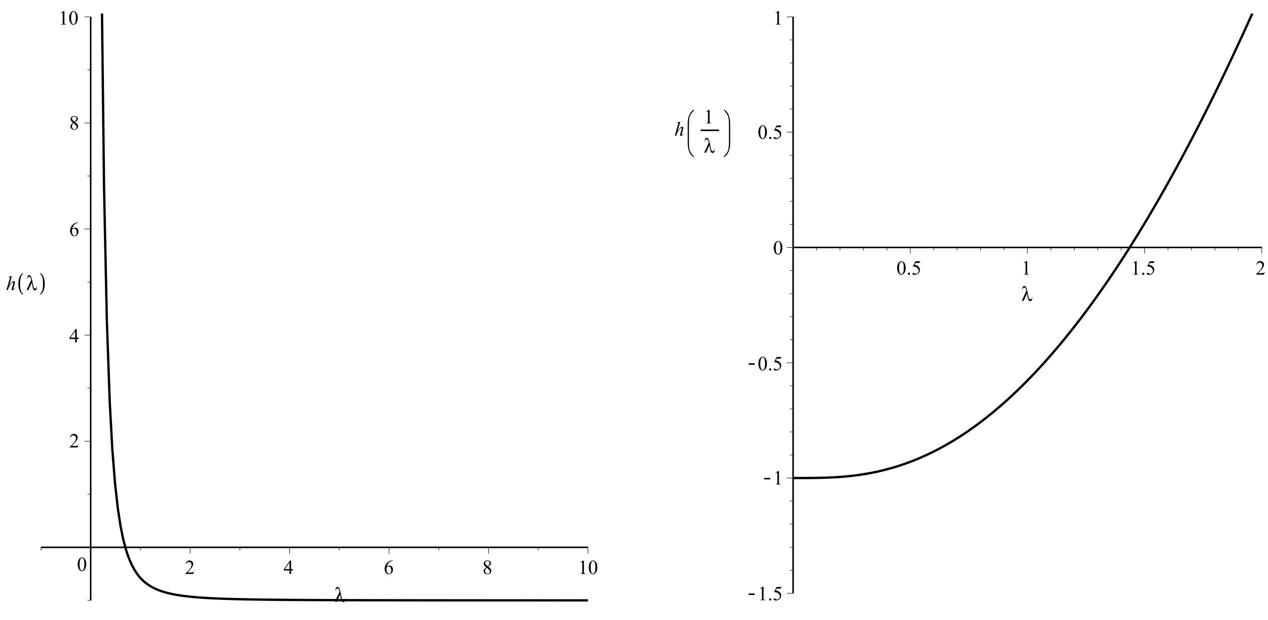

Рис. 2. График функции $h(\lambda))$ при $\lambda \in [1,+\infty)$ (слева) и график функции $h\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)$ при $\lambda \in (0,1]$ (справа).

Далее, проверим условие крайности меры $\mu^{(1)}$ (в силу симметрии решений и выражения для κ область крайности меры $\mu^{(2)}$ совпадает с областью крайности меры $\mu^{(1)}$). Достаточным условием крайности меры $\mu^{(1)}$ является: $k^2\kappa(\mu^{(1)})\gamma(\mu^{(1)}) < 1$, т. е.

$$g(\lambda) = \frac{9\lambda^2 z_1(\lambda) z_2(\lambda)}{(1+\lambda z_1(\lambda))(1+\lambda z_2(\lambda))} \cdot \frac{\lambda}{\lambda+1} - 1 < 0.$$

Так как меры $\mu^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$ существуют при $\lambda > \lambda_{cr} = \dfrac{27}{16}$, то неравенство $g(\lambda) < 0$ можно рассмотреть при $\lambda \in [1, +\infty)$. Вычислим производную функции $g\Big(\dfrac{1}{\lambda}\Big)$:

$$\left(g\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)' = -\frac{1}{\lambda^2} g'\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Из этого равенства и рис. 3 следует, что функция $g(\lambda)$ убывает при $\lambda \in [1, +\infty)$, т. к. функция $g\Big(\dfrac{1}{\lambda}\Big)$ возрастает при $\lambda \in (0, 1]$ (см. рис. 3). Следовательно, неравенство $g(\lambda) < 0$ справедливо при $\lambda > \lambda_{cr} > 1$.

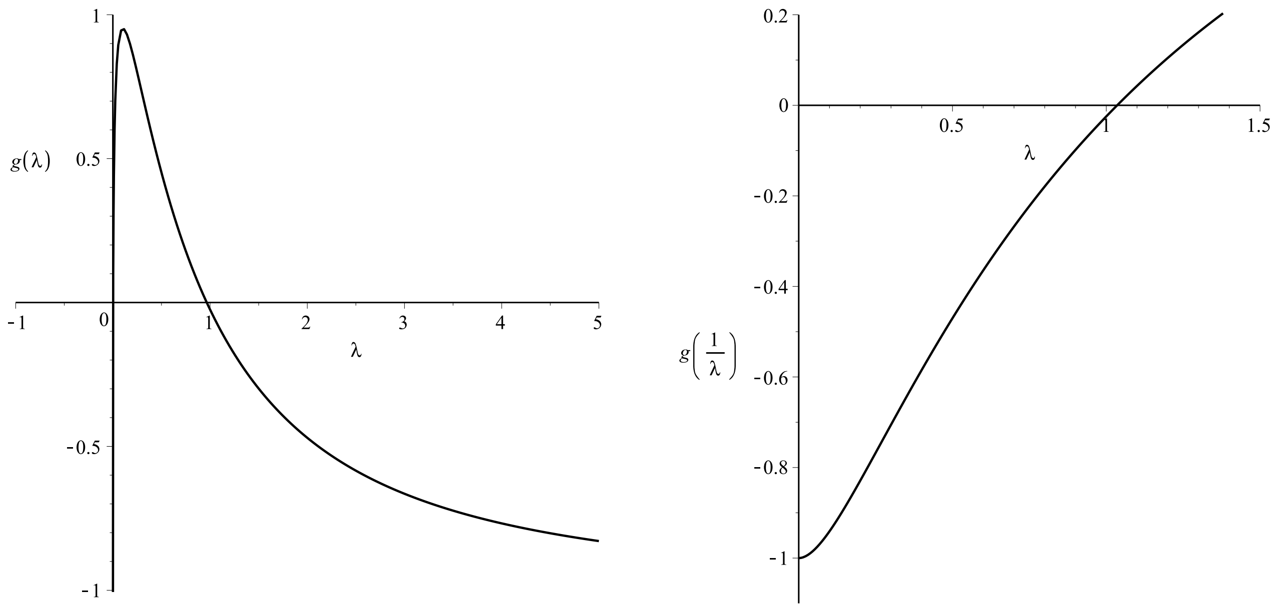

Рис. 3. График функции $g(\lambda)$ при $\lambda \in [1, +\infty)$ (слева) и график функции $g\Big(\dfrac{1}{\lambda}\Big)$ при $\lambda \in (0, 1]$ (справа).

Итак, верна следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть $k = 3$. Тогда для HC-модели $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса $\mu^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$ при $\lambda > \dfrac{27}{16}$ являются крайними.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блехер П. М., Ганиходжаев Н. Н.* О чистых фазах модели Изинга на решетке Бете// Теор. вер. и ее прим. — 1990. — *35*, № 2. — С. 920–930.
2. *Ганиходжаев Н. Н., Розиков У. А.* Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых решеточных моделей на дереве Кэли// Теор. мат. физ. — 1997. — *111*, № 1. — С. 109–117.
3. *Георги Х.-О.* Гиббсовские меры и фазовые переходы. — М.: Мир, 1992.
4. *Розиков У. А., Рахматуллаев М. М.* Описание слабо периодических мер Гиббса модели Изинга на дереве Кэли// Теор. мат. физ. — 2008. — *156*, № 2. — С. 292–302.
5. *Розиков У. А., Хакимов Р. М.* Условие единственности слабопериодической гиббсовской меры для модели жесткой сердцевины// Теор. мат. физ. — 2012. — *173*, № 1. — С. 60–70.

6. *Розиков У. А., Хакимов Р. М.* Крайность трансляционно-инвариантной меры Гиббса для HC-модели на дереве Кэли// Бюлл. ин-та мат. — 2019. — *2.* — С. 17–22.
7. *Синай Я. Г.* Теория фазовых переходов. Строгие результаты. — М.: Наука, 1980.
8. *Хакимов Р. М.* Единственность слабо периодической гиббсовской меры для HC-модели// Мат. заметки. — 2013. — *94*, № 5. — С. 796–800.
9. *Хакимов Р. М.* Слабо периодические меры Гиббса для HC-модели для нормального делителя индекса четыре// Укр. мат. ж. — 2015. — *67*, № 10. — С. 1409–1422.
10. *Хакимов Р. М.* HC-модель на дереве Кэли: трансляционно-инвариантные меры Гиббса// Вестн. НУУз. — 2017. — *2*, № 2. — С. 245–251.
11. *Хакимов Р. М.* Слабо периодические меры Гиббса для HC-моделей на дереве Кэли// Сиб. мат. ж. — 2018. — *59*, № 1. — С. 185–196.
12. *Хакимов Р. М., Махаммадалиев М. Т.* Условие единственности и не единственности слабо периодических мер Гиббса для HC-модели// ArXiv. — 2019. — 1910.11772v1 [math.ph].
13. *Bleher P. M., Ruiz J., Zagrebnov V. A.* On the purity of the limiting Gibbs states for the Ising model on the Bethe lattice// J. Stat. Phys. — 1995. — *79*, № 2. — С. 473–482.
14. *Kesten H., Stigum B. P.* Additional limit theorem for indecomposable multidimensional Galton—Watson processes// Ann. Math. Statist. — 1966. — *37.* — С. 1463–1481.
15. *Khakimov R. M., Madgoziyev G. T.* Weakly periodic Gibbs measures for two and three state HC models on a Cayley tree// Uzb. Math. J. — 2018. — *3.* — С. 116–131.
16. *Külske C., Rozikov U. A.* Extremality of translation-invariant phases for a three-state SOS-model on the binary tree// J. Stat. Phys. — 2015. — *160*, № 3. — С. 659–680.
17. *Külske C., Rozikov U. A.* Fuzzy transformations and extremality of Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree// Random Structures Algorithms. — 2017. — *50*, № 4. — С. 636–678.
18. *Martin J. B.* Reconstruction thresholds on regular trees// В сб.: «Discrete random walks, DRW'03. Proceedings of the conference, Paris, France, September 1–5, 2003». — Paris: MIMD, 2003. — С. 191–204.
19. *Martinelli F., Sinclair A., Weitz D.* Fast mixing for independent sets, coloring and other models on trees// Random Structures Algoritms. — 2007. — *31.* — С. 134–172.
20. *Mazel A. E., Suhov Yu. M.* Random surfaces with two-sided constraints: an application of the theory of dominant ground states// J. Stat. Phys. — 1991. — *64.* — С. 111–134.
21. *Mossel E.* Reconstruction on trees: beating the second eigenvalue// Ann. Appl. Probab. — 2001. — *11*, № 1. — С. 285–300.
22. *Mossel E., Peres Y.* Information flow on trees// Ann. Appl. Probab. — 2003. — *13*, № 3. — С. 817–844.
23. *Preston C. J.* Gibbs states on countable sets. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1974.
24. *Rozikov U. A.* Gibbs measures on Cayley trees. — Singapore: World Sci., 2013.
25. *Suhov Yu. M., Rozikov U. A.* A hard-core model on a Cayley tree: an example of a loss network// Queueing Syst. — 2004. — *46.* — С. 197–212.

У. А. Розиков

Институт математики им. В. И. Романовского при Национальном университете Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан

E-mail: `rozikovu@yandex.ru`

Р. М. Хакимов

Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан

E-mail: `rustam-7102@rambler.ru`

М. Т. Махаммадалиев

Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан

E-mail: `mmtmuxtor93@mail.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-95-109 UDC 517.98

Gibbs Periodic Measures for a Two-State HC-Model on a Cayley Tree

© 2022 **U. A. Rozikov, R. M. Khakimov, M. T. Makhammadaliev**

Abstract. In this paper, we study a two-state Hard-Core (HC) model with activity $\lambda > 0$ on a Cayley tree of order $k \geqslant 2$. It is known that there are $\lambda_{\rm cr}$, $\lambda^0_{\rm cr}$, and $\lambda'_{\rm cr}$ such that

- for $\lambda \leqslant \lambda_{\rm cr}$ this model has a unique Gibbs measure μ^*, which is translation invariant. The measure μ^* is extreme for $\lambda < \lambda^0_{\rm cr}$ and not extreme for $\lambda > \lambda'_{\rm cr}$;
- for $\lambda > \lambda_{\rm cr}$ there exist exactly three 2-periodic Gibbs measures, one of which is μ^*, the other two are not translation-invariant and are always extreme.

The extremity of these periodic measures was proved using the maximality and minimality of the corresponding solutions of some equation, which ensures the consistency of these measures. In this paper, we give a brief overview of the known Gibbs measures for the HC-model and an alternative proof of the extremity of 2-periodic measures for $k = 2, 3$. Our proof is based on the tree reconstruction method.

REFERENCES

1. P. M. Blekher and N. N. Ganikhodzhaev, “O chistykh fazakh modeli Izinga na reshetke Bete” [On pure phases of the Ising model on the Bethe lattice], *Teor. ver. i ee prim.* [Probab. Theory Appl.], 1990, **35**, No. 2, 920–930 (in Russian).
2. N. N. Ganikhodzhaev and U. A. Rozikov, “Opisanie periodicheskikh kraynikh gibbsovskikh mer nekotorykh reshetochnykh modeley na dereve Keli” [Description of periodic extreme Gibbs measures of some lattice models on the Cayley tree], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 1997, **111**, No. 1, 109–117 (in Russian).
3. H.-O. Georgii, *Gibbsovskie mery i fazovye perekhody* [Gibbs Measures and Phase Transitions], Mir, Moscow, 1992 (Russian translation).
4. U. A. Rozikov and M. M. Rakhmatullaev, “Opisanie slabo periodicheskikh mer Gibbsa modeli Izinga na dereve Keli” [Description of the weakly periodic Gibbs measures of the Ising model on the Cayley tree], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 2008, **156**, No. 2, 292–302 (in Russian).
5. U. A. Rozikov and R. M. Khakimov, “Uslovie edinstvennosti slaboperiodicheskoy gibbsovskoy mery dlya modeli zhestkoy serdtseviny” [Uniqueness condition for the weakly periodic Gibbs measure in the hard-core model], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 2012, **173**, No. 1, 60–70 (in Russian).
6. U. A. Rozikov and R. M. Khakimov, “Kraynost’ translyatsionno-invariantnoy mery Gibbsa dlya NS-modeli na dereve Keli” [The extremality of the translation-invariant Gibbs measure for the NC-model on the Cayley tree], *Byull. in-ta mat.* [Bull. Inst. Math.], 2019, **2**, 17–22 (in Russian).
7. Ya. G. Sinay, *Teoriya fazovykh perekhodov. Strogie rezul’taty* [Theory of Phase Transitions. Strict Results], Nauka, Moscow, 1980 (in Russian).
8. R. M. Khakimov, “Edinstvennost’ slabo periodicheskoy gibbsovskoy mery dlya HC-modeli” [Uniqueness of the weakly periodic Gibbs measure for the HC-model], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2013, **94**, No. 5, 796–800 (in Russian).
9. R. M. Khakimov, “Slabo periodicheskie mery Gibbsa dlya NS-modeli dlya normal’nogo delitelya indeksa chetyre” [Weakly periodic Gibbs measures for the NC-model for a normal index divisor of four], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 2015, **67**, No. 10, 1409–1422 (in Russian).
10. R. M. Khakimov, “HC-model’ na dereve Keli: translyatsionno-invariantnye mery Gibbsa” [HC model on a Cayley tree: translation-invariant Gibbs measures], *Vestn. NUUz* [Bull. Natl. Univ. Uzbekistan], 2017, **2**, No. 2, 245–251 (in Russian).

11. R. M. Khakimov, “Slabo periodicheskie mery Gibbsa dlya NS-modeley na dereve Keli” [Weakly periodic Gibbs measures for NC-models on a Cayley tree], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 2018, **59**, No. 1, 185–196 (in Russian).
12. R. M. Khakimov and M. T. Makhammadaliev, “Uslovie edinstvennosti i ne edinstvennosti slabo periodicheskikh mer Gibbsa dlya NS-modeli” [Condition of uniqueness and nonuniqueness of weakly periodic Gibbs measures for the NC-model], *ArXiv*, 2019, 1910.11772v1 [math.ph] (in Russian).
13. P. M. Bleher, J. Ruiz, and V. A. Zagrebnov, “On the purity of the limiting Gibbs states for the Ising model on the Bethe lattice,” *J. Stat. Phys.*, 1995, **79**, No. 2, 473–482.
14. H. Kesten and B. P. Stigum, “Additional limit theorem for indecomposable multidimensional Galton—Watson processes,” *Ann. Math. Statist.*, 1966, **37**, 1463–1481.
15. R. M. Khakimov and G. T. Madgoziyev, “Weakly periodic Gibbs measures for two and three state HC models on a Cayley tree,” *Uzb. Math. J.*, 2018, **3**, 116–131.
16. C. Külske and U. A. Rozikov, “Extremality of translation-invariant phases for a three-state SOS-model on the binary tree,” *J. Stat. Phys.*, 2015, **160**, No. 3, 659–680.
17. C. Külske and U. A. Rozikov, “Fuzzy transformations and extremality of Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree,” *Random Structures Algorithms*, 2017, **50**, No. 4, 636–678.
18. J. B. Martin, “Reconstruction thresholds on regular trees,” In: *Discrete random walks, DRW’03. Proceedings of the conference, Paris, France, September* 1–5, 2003, MIMD, Paris, 2003, pp. 191–204.
19. F. Martinelli, A. Sinclair, and D. Weitz, “Fast mixing for independent sets, coloring and other models on trees,” *Random Structures Algoritms*, 2007, **31**, 134–172.
20. A. E. Mazel and Yu. M. Suhov, “Random surfaces with two-sided constraints: an application of the theory of dominant ground states,” *J. Stat. Phys.*, 1991, **64**, 111–134.
21. E. Mossel, “Reconstruction on trees: beating the second eigenvalue,” *Ann. Appl. Probab.*, 2001, **11**, No. 1, 285–300.
22. E. Mossel and Y. Peres, “Information flow on trees,” *Ann. Appl. Probab.*, 2003, **13**, No. 3, 817–844.
23. C. J. Preston, *Gibbs states on countable sets*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1974.
24. U. A. Rozikov, *Gibbs measures on Cayley trees*, World Sci., Singapore, 2013.
25. Yu. M. Suhov and U. A. Rozikov, “A hard-core model on a Cayley tree: an example of a loss network,” *Queueing Syst.*, 2004, **46**, 197–212.

U. A. Rozikov
Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: rozikovu@yandex.ru

R. M. Khakimov
Namangan State University, Namangan, Uzbekistan
E-mail: rustam-7102@rambler.ru

M. T. Makhammadaliev
Namangan State University, Namangan, Uzbekistan
E-mail: mmtmuxtor93@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). С. 110–126
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-110-126 УДК 517.988+519.71

ПРИЛОЖЕНИЯ КВАДРАТИЧНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ К НЕЛИНЕЙНЫМ ПРОБЛЕМАМ КОНСЕНСУСА

© 2022 г. **М. САБУРОВ, Х. САБУРОВ**

Аннотация. Исторически идея достижения консенсуса путем повторных усреднений была предложена Де Грутом для структурированной синхронной среды, инвариантной по времени. С того времени консенсус, будучи наиболее общим феноменом многоагентных систем, становится популярным в разнообразных научных областях, таких как биология, физика, инженерия управления и социальные науки. В данной работе мы даем обзор недавнего развития приложения квадратичных стохастических операторов к нелинейным задачам консенсуса. Мы также даем некоторые уточнения и улучшения предыдущих результатов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Многоагентная система — это система, составленная из многих взаимодействующих так называемых *интеллектуальных агентов*, которые могут иметь различную информацию и/или расходящиеся интересы. Агенты могут быть роботами, людьми или командами людей. Люди — это сложные личности, чье поведение регулируется многими аспектами, относящимися к социальному контексту, культуре, закону и другим факторам. Несмотря на эти многочисленные факторы, человеческое общество характеризуется поразительной глобальной закономерностью, в которой мы можем видеть переходы от беспорядка к порядку. Эти макроскопические явления, естественно, требуют математической модели для понимания социального поведения, т. е. модели для понимания закономерностей в большом масштабе как коллективных эффектов взаимодействия между отдельными людьми. В основе человеческого поведения лежат мнения, которые могут рассматриваться как внутреннее состояние личностей, побуждающее к определенным действиям. *Динамика мнений* — это процесс слияния индивидуальных мнений, в котором группа взаимодействующих агентов непрерывно объединяет свои мнения по одному и тому же вопросу на основе установленных правил слияния для достижения *консенсуса*, *поляризации* или *фрагментации* на конечной стадии.

Для изучения эволюции мнений группы взаимодействующих индивидуумов были построены различные математические модели. Большинство подобных моделей является линейными. Обычно исследователи сосредоточены на задаче консенсуса и ищут пути его достижения. Исторически идея достижения консенсуса для структурированной синхронной среды, инвариантной по времени, была предложена Де Грутом (см. [6]). Позднее в работе Чаттерджи и Сенеты (см. [5]) было произведено обобщение модели Де Грута для структурированной синхронной среды с переменным временем. В этих моделях динамика обмена мнениями в структурированной синхронной многоагентной системе с переменным временем представлена *обратным произведением* квадратных стохастических матриц. В то же время, неоднородная цепь Маркова представляется в виде *прямого произведения* квадратных стохастических матриц. Следовательно, консенсус многоагентных систем и эргодичность цепи Маркова являются *двойственными задачами* друг к другу. С этого момента консенсус, будучи наиболее общим феноменом многоагентных систем, становится популярным в различных научных сообществах, таких как биология, физика, инженерия управления и социальные науки (см. [12,23,45,46]). В недавнее время были построены некоторые нелинейные модели для характеризации динамики мнений в обществе (см. [10,11,17–20]). Более общая модель динамики обмена мнениями описывается *средним процессом Краузе*, в котором мнения представлены в виде векторов. Читатель может обратиться к монографии [21] за подробным рассмотрением средних процессов Краузе. В серии работ [34–39] была установлена корреляция между средними процессами Краузе и *квадратичными стохастическими процессами*.

Квадратичный стохастический процесс (см. [7, 43]) является простейшей *нелинейной цепью Маркова*. Аналитическая теория квадратичных стохастических процессов, порожденных кубическими стохастическими матрицами, была построена в работах [7,43]. Исторически квадратичный стохастический оператор (сокращенно КСО) был впервые введен Бернштейном (см. [4]). Квадратичный стохастический оператор рассматривался как важный инструмент анализа для изучения динамических свойств и моделирования в различных областях, таких как биология (см. [15,22,26]), физика (см. [47]), системы управления (см. [34–39]). Множества фиксированных точек и омега-предельные множества квадратичных стохастических операторов, определенных на конечномерном симплексе, были изучены в [1, 2, 27, 40–42]. Эргодичность и хаотическая динамика квадратичных стохастических операторов на конечномерном симплексе была изучена в работах [13, 14, 28, 32, 33]. Подробное самостоятельное изложение последних достижений и открытых проблем теории квадратичных стохастических операторов и процессов было представлено в [9, 24].

Данная работа содержит обзор недавнего развития приложений квадратичных стохастических операторов к нелинейным задачам консенсуса. Мы также даем некоторые уточнения и улучшения предыдущих результатов.

2. Средние процессы Краузе

Сначала дадим обзор общей модели динамики обмена мнениями в многоагентной системе, представленной в работе [10], которая охватывает все классические модели динамики обмена мнениями (см. [3, 5, 6]). Рассмотрим группу из m индивидуумов $\mathbf{I}_m := \{1, \dots, m\}$, действующих вместе как команда или комитет, каждый из которых может выразить его/ее собственное субъективное распределение для некоторой данной задачи. Предполагается, что если индивидуум i информирован о распределениях каждого из остальных членов группы, то он/она может захотеть пересмотреть свое субъективное распределение в соответствии с этой информацией.

Пусть $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))^T$ — субъективные распределения многоагентной системы в момент времени t, где $x_i(t) \geqslant 0$ для всех $i \in \mathbf{I}_m$. Пусть $p_{ij}(t, \mathbf{x}(t))$ обозначают вес, который индивидуум i сопоставляет значению $x_j(t)$, когда он/она делает пересмотр в момент времени $t+1$. Предполагается, что

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij}(t, \mathbf{x}(t)) = 1 \quad \text{и} \quad p_{ij}(t, \mathbf{x}(t)) \geqslant 0, \quad \forall\, i, j \in \mathbf{I}_m.$$

После информирования о субъективных распределениях других членов группы, индивидуум i пересматривает свое субъективное распределение от $x_i(t)$ к $x_i(t+1)$ следующим образом:

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(t, \mathbf{x}(t)) x_j(t), \quad \forall\ i \in \mathbf{I}_m.$$

Пусть $\mathbb{P}\,(t, \mathbf{x}(t))$ обозначает стохастическую матрицу из $m \times m$ строк, чей (ij)-й элемент равен $p_{ij}(t, \mathbf{x}(t))$. *Общая модель структурированной синхронной системы с переменным временем* определяется следующим образом:

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbb{P}\,(t, \mathbf{x}(t))\, \mathbf{x}(t), \quad \forall\ t \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Тогда мы можем получить все классические модели (см. [3, 5, 6, 10, 11]), выбирая подходящие матрицы $\mathbb{P}\,(t, \mathbf{x}(t))$.

Говорят, что *консенсус* в структурированной синхронной многоагентной системе с переменным временем (2.1) достигнут, если распределения $\mathbf{x}(t)$ сходятся к $\mathbf{c} = (c, \dots, c)^T$ при $t \to \infty$. Стоит отметить, что консенсус $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{x}(0))$ может зависеть от начального мнения $\mathbf{x}(0)$.

Более общая модель динамики обмена мнениями — это *средний процесс Краузе*, в котором мнения представлены в виде векторов. Читатель может обратиться к выдающейся монографии У. Краузе [21] за детальным описанием средних процессов.

Пусть $\mathbf{S}$ — непустое выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^d$ и $\mathbf{S}^m$ — m-кратное декартово произведение $\mathbf{S}$.

Определение 2.1 (см. [21])**.** Последовательность $\{\mathbf{x}(t)\}_{t=0}^{\infty} \subset \mathbf{S}^m$, где $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))^T$, называется *средним процессом Краузе* на $\mathbf{S}^m$, если выполнено

$$x_i(t+1) \in \mathbf{conv}\{x_1(t), \dots, x_m(t)\}, \quad \forall\ i \in \mathbf{I}_m,\ t \in \mathbb{N},$$

где $\mathbf{conv}\{\cdot\}$ — выпуклая оболочка множества.

Другими словами, последовательность $\{\mathbf{x}(t)\}_{t=0}^{\infty} \subset \mathbf{S}^m$ является *средним процессом Краузе*, если

$$\mathbf{conv}\{x_1(t+1), \dots, x_m(t+1)\} \subset \mathbf{conv}\{x_1(t), \dots, x_m(t)\}, \quad \forall\ t \in \mathbb{N}.$$

Определение 2.2 (см. [21])**.** Отображение $\mathcal{T} : \mathbf{S}^m \to \mathbf{S}^m$ называется *средним оператором Краузе*, если его траектория $\{\mathbf{x}(t)\}_{t=0}^{\infty}$, $\mathbf{x}(t) = \mathcal{T}^t(\mathbf{x}(0))$ с произвольной начальной точкой $\mathbf{x}(0) \in \mathbf{S}^m$ порождает средний процесс Краузе на $\mathbf{S}^m$.

Следует отметить, что нелинейная модель динамики обмена мнениями (2.1) является средним процессом Краузе, потому что действие стохастической матрицы $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^{m}$ на вектор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^T$ может быть рассмотрено как набор арифметических средних

$$(\mathbb{P}\mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} x_j, \quad \forall\ i \in \mathbf{I}_m$$

с весами p_{ij}. Различные виды нелинейных моделей средних процессов были изучены в серии работ [10, 11, 17–20].

3. Квадратичные стохастические процессы

Пусть $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{m}$ — стандартный базис в пространстве $\mathbb{R}^m$. Положим, что пространство $\mathbb{R}^m$ наделено l_1-нормой

$$\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{k=1}^{m} |x_k|,$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$. Будем говорить, что $\mathbf{x} \geqslant 0$ (и, соответственно, $\mathbf{x} > 0$), если $x_k \geqslant 0$ (соответственно, $x_k > 0$) для всех $k \in \mathbf{I}_m$. Пусть

$$\mathbb{S}^{m-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{x} \geqslant 0,\ \|\mathbf{x}\|_1 = 1\}$$

— $(m-1)$-мерный стандартный симплекс. Элемент симплекса $\mathbb{S}^{m-1}$ называется *стохастическим вектором*. Пусть $\mathbf{c} = \left(\frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}\right)^T$ — центр симплекса $\mathbb{S}^{m-1}$, а

$$\mathrm{int}\mathbb{S}^{m-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{m-1} : \mathbf{x} > 0\} \quad \text{и} \quad \partial\mathbb{S}^{m-1} = \mathbb{S}^{m-1} \setminus \mathrm{int}\mathbb{S}^{m-1},$$

— соответственно, внутренность и граница симплекса $\mathbb{S}^{m-1}$.

Теперь дадим необходимые определения неоднородных цепей Маркова и квадратичных стохастических процессов согласно работам [7, 8, 25, 43, 44].

Пусть $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^m$ — матрица. Определим векторы

$$(\mathbf{p}_{i\bullet})^T := (p_{i1}, \ldots, p_{im}) \quad \text{и} \quad \mathbf{p}_{\bullet j} := (p_{1j}, \ldots, p_{mj})^T, \quad \forall\, i, j \in \mathbf{I}_m.$$

Квадратная матрица $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^m$ называется *строчно-стохастической* (*столбцово-стохастической*, соответственно), если вектор $\mathbf{p}_{i\bullet}$ ($\mathbf{p}_{\bullet j}$, соответственно) является стохастическим вектором для всех $i \in \mathbf{I}_m$ (для всех $j \in \mathbf{I}_m$, соответственно). Квадратная матрица $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^m$ называется *дважды стохастической*, если она одновременно является строчно-стохастической и столбцово-стохастической. Мы говорим, что $\mathbb{P} \geqslant 0$ ($\mathbb{P} > 0$, соответственно), если $\mathbf{p}_{i\bullet} \geqslant 0$ ($\mathbf{p}_{i\bullet} > 0$, соответственно) для всех $i \in \mathbf{I}_m$.

В течение нескольких последних десятилетий большие усилия были приложены к построению различных необходимых и/или достаточных условий эргодичности неоднородных цепей Маркова (см. [25, 44] и цитируемые в них источники). Одной из главных областей в изучении неоднородных цепей Маркова является нахождение условий, при которых цепь является слабо/сильно эргодической. Основная техника, используемая для этого, состоит в том, чтобы установить, что все конечные произведения регулярны, и затем потребовать выполнения некоторых условий на размер положительных элементов в матрицах перехода (см. [44]). При нахождении множеств квадратных стохастических матриц, используемых при построении слабо/строго эргодических неоднородных цепей Маркова, необходимо найти подмножества регулярных квадратных стохастических матриц, которые образуют полугруппы. Множество квадратных стохастических матриц *скремблирования* является одним из таких множеств (см. [44]).

Стохастическая матрица $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^m$ называется матрицей *скремблирования*, если для любого $i, j \in \mathbf{I}_m$ существует число $k \in \mathbf{I}_m$ такое, что $p_{ik}p_{jk} > 0$, т. е. любые две строки такой квадратной стохастической матрицы не ортогональны. Квадратная стохастическая матрица с идентичными строками называется *устойчивой* (*постоянной*) матрицей. Очевидно, что любая положительная квадратная стохастическая матрица является скремблирующей. Более того, любая устойчивая (постоянная) квадратная стохастическая матрица также является скремблирующей матрицей. Одним из классических результатов в теории линейных марковских цепей является тот факт, что стохастическая матрица является сильно эргодической, т. е. ее степени сходятся к некоторой устойчивой/постоянной стохастической матрице тогда и только тогда, когда некоторая ее степень является скремблирующей матрицей.

Семейство квадратных строчно-стохастических матриц

$$\left\{\mathbb{P}^{[r,t]} = \left(p_{ik}^{[r,t]}\right)_{i,k=1}^m : r, t \in \mathbb{N},\ t - r \geqslant 1\right\}$$

называется *неоднородной цепью Маркова с дискретным временем*, если для любых натуральных чисел r, s, t таких, что $r < s < t$, выполняется следующее условие, известное как *уравнение Колмогорова—Чепмена*:

$$p_{ik}^{[r,t]} = \sum_{j=1}^m p_{ij}^{[r,s]} p_{jk}^{[s,t]} \quad \forall\, i, k \in \mathbf{I}_m.$$

Линейный оператор $\mathcal{L}^{[r,t]} : \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{S}^{m-1}$, ассоциированный с квадратной строчно-стохастической матрицей $\mathbb{P}^{[r,t]} = \left(p_{ik}^{[r,t]}\right)_{i,k=1}^m$, где

$$\left(\mathcal{L}^{[r,t]}(\mathbf{x})\right)_k = \sum_{i=1}^m x_i p_{ik}^{[r,t]} \quad \forall\, k \in \mathbf{I}_m,$$

называется *линейным стохастическим оператором* (*Маркова*) (см. [25, 44]).

Отметим, что уравнение Колмогорова—Чепмена может быть записано в следующем виде:

$$\mathcal{L}^{[r,t]} = \mathcal{L}^{[s,t]} \circ \mathcal{L}^{[r,s]}, \qquad r < s < t.$$

Пусть $\mathcal{P} = (p_{ijk})_{i,j,k=1}^m$ — кубическая матрица (см. [7, 8, 43]). Определим следующие векторы:

$$\mathbf{p}_{ij\bullet} := (p_{ij1}, \ldots, p_{ijm})^T \quad \forall\ i, j \in \mathbf{I}_m.$$

Кубическая матрица $\mathcal{P} = (p_{ijk})_{i,j,k=1}^m$ называется *стохастической*, если $\mathbf{p}_{ij\bullet}$ — стохастический вектор для любых $i, j \in \mathbf{I}_m$.

Семейство кубических стохастических матриц

$$\left\{\mathcal{P}^{[r,t]} = \left(p_{ijk}^{[r,t]}\right)_{i,j,k=1}^m : p_{ijk} = p_{jik},\ r, t \in \mathbb{N},\ t - r \geqslant 1\right\}$$

с начальным распределением $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{S}^{m-1}$ называется *квадратичным стохастическим процессом с дискретным временем*, если для любых натуральных чисел r, s, t при $r < s < t$ выполнено одно из следующих условий, так называемых *нелинейных уравнений Колмогорова—Чепмена*:

$$\text{(A)} \qquad p_{ijk}^{[r,t]} = \sum_{\alpha,\beta=1}^m p_{ij\alpha}^{[r,s]} x_\beta^{(s)} p_{\alpha\beta k}^{[s,t]}, \qquad i, j, k \in \mathbf{I}_m,$$

$$\text{(B)} \qquad p_{ijk}^{[r,t]} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^m x_\alpha^{(r)} p_{i\alpha\beta}^{[r,s]} x_\gamma^{(r)} p_{j\gamma\delta}^{[r,s]} p_{\beta\delta k}^{[s,t]}, \qquad i, j, k \in \mathbf{I}_m,$$

где $x_k^{(\nu)} = \sum\limits_{i,j=1}^m x_i^{(0)} x_j^{(0)} p_{ijk}^{[0,\nu]}$.

Отметим, что условия (A) и (B) не эквивалентны. Читатель может обратиться к работам [7, 43] для изучения квадратичных стохастических процессов.

Непрерывное отображение $\mathcal{Q}^{[r,t]} : \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{S}^{m-1}$, ассоциированное с кубической стохастической матрицей $\mathcal{P}^{[r,t]} = \left(p_{ijk}^{[r,t]}\right)_{i,j,k=1}^m$, где

$$\left(\mathcal{Q}^{[r,t]}(\mathbf{x})\right)_k = \sum_{i,j=1}^m x_i x_j p_{ijk}^{[r,t]}, \quad k \in \mathbf{I}_m,$$

называется *квадратичным стохастическим оператором* (*нелинейным марковским оператором*). Очевидно, имеем

$$\mathbf{x}^{(\nu)} = \mathcal{Q}^{[0,\nu]}(\mathbf{x}^{(0)}).$$

Отметим, что нелинейное уравнение Колмогорова—Чепмена может быть записано в виде

$$\mathcal{Q}^{[r,t]} = \mathcal{Q}^{[s,t]} \circ \mathcal{Q}^{[r,s]}, \quad r < s < t.$$

Определим следующие стохастические векторы и квадратные строчно-стохастические матрицы, ассоциированные с кубической стохастической матрицей $\mathcal{P} = (p_{ijk})_{i,j,k=1}^m$:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{ij\bullet} &:= (p_{ij1}, p_{ij2}, \ldots, p_{ijm})^T, \quad i, j \in \mathbf{I}_m, \\ \mathbb{P}_{i\bullet\bullet} &:= (p_{ijk})_{j,k=1}^m, \quad i \in \mathbf{I}_m, \\ \mathbf{P}_\mathbf{x} &:= \sum_{i=1}^m x_i \mathbb{P}_{i\bullet\bullet}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{S}^{m-1}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что квадратичный стохастический оператор имеет следующие векторную и матричную формы:

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^m x_i x_j \mathbf{p}_{ij\bullet} \qquad \text{(векторная форма)}, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \left(\mathbf{x}^T \mathbf{P}_\mathbf{x}\right)^T = \mathbf{P}_\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^m x_i \left(\mathbb{P}_{i\bullet\bullet}^T \mathbf{x}\right) \qquad \text{(матричная форма)}. \tag{3.2}$$

Определение 3.1 (см. [16]). Непрерывное отображение $\mathcal{M} : \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{S}^{m-1}$ называется *нелинейным марковским оператором*, если

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = \mathbb{M}_{\mathbf{x}}\mathbf{x} \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{S}^{m-1},$$

где $\mathbb{M}_{\mathbf{x}} = (p_{ij}(\mathbf{x}))_{i,j=1}^{m}$ — стобцово-стохастическая матрица, зависящая от $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{m-1}$ (что вводит нелинейность).

Квадратичный стохастический оператор $\mathcal{Q} : \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{S}^{m-1}$, введенный формулой (3.1), на самом деле является нелинейным марковским оператором, поскольку он может быть записан в матричной форме, определенной формулой (3.2). Следует отметить, что существуют некоторые нелинейные марковские операторы, не являющиеся квадратичными стохастическими операторами (см. [16]). Следовательно, множество всех квадратичных стохастических операторов не может покрыть множество всех нелинейных марковских операторов.

4. Нелинейные задачи Перрона—Фробениуса

Теорема Перрона—Фробениуса играет решающую роль в изучении задачи консенсуса (см. [3, 6, 21]). Теорема Перрона—Фробениуса (см. [44]) утверждает, что линейный стохастический (марковский) оператор, ассоциированный с *положительной* квадратной стохастической матрицей, имеет единственное стационарное распределение (неподвижную точку) в симплексе и является сильно эргодическим (регулярным) относительно этого стационарного распределения (т. е. траектория, начинающаяся в любой начальной точке, сходится к единственной неподвижной точке). Более того, такой оператор также является сжатием. Другими словами, класс *положительных сильно эллиптических эргодических* (*регулярных*) линейных стохастических (марковских) операторов совпадает с классом *положительных сжимающих* линейных стохастических (марковских) операторов.

Однако в нелинейном случае ситуация становится более сложной, чем можно ожидать. Во-первых, в отличие от линейного случая, *положительность не гарантирует единственности неподвижных точек* квадратичных стохастических (нелинейных марковских) операторов. Во-вторых, *положительность и единственность неподвижных точек не влечет сильную эргодичность* (*регулярность*) квадратичных стохастических (нелинейных марковских) операторов. Наконец, *существуют положительные сильно эргодические* (*регулярные*) *квадратические стохастические* (*нелинейные марковские*) *операторы, не являющиеся сжатием*. Это свойство неожиданно для квадратических стохастических операторов.

Теперь приведем примеры для каждого случая. Примеры, данные в этом разделе, разбросаны по различным источникам, однако ради полного и всестороннего изучения мы собрали их все здесь, чтобы получить полное представление о проблеме. Приведем их кратко, не вдаваясь в детальные объяснения.

Пример 4.1 (положительность $\not\Rightarrow$ единственность неподвижной точки; [40, 41]). Выберем три точки $\mathbf{A} = (0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}7)^T$, $\mathbf{B} = (0{,}4,\ 0{,}3,\ 0{,}3)^T$ и $\mathbf{C} = (0{,}59,\ 0{,}31,\ 0{,}1)^T$ из симплекса $\mathbb{S}^2$. Определим положительный квадратичный стохастический оператор $\mathcal{Q} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ следующим образом:

$$\mathcal{Q} : \begin{cases} (\mathcal{Q}(\mathbf{x}))_1 = \dfrac{232873}{319300}x_1^2 + \dfrac{4717}{10300}x_2^2 + \dfrac{207}{63860}x_3^2 + \dfrac{7}{5}x_1x_2 + \dfrac{3}{5}x_1x_3 + \dfrac{1}{50}x_2x_3, \\ (\mathcal{Q}(\mathbf{x}))_2 = \dfrac{27}{100}x_1^2 + \dfrac{1}{2}x_2^2 + \dfrac{3}{20}x_3^2 + \dfrac{470171}{814300}x_1x_2 + \dfrac{378421}{407150}x_1x_3 + \dfrac{158157}{814300}x_2x_3, \\ (\mathcal{Q}(\mathbf{x}))_3 = \dfrac{54}{79825}x_1^2 + \dfrac{433}{10300}x_2^2 + \dfrac{27037}{31930}x_3^2 + \dfrac{18409}{814300}x_1x_2 + \dfrac{191589}{407150}x_1x_3 + \dfrac{1454157}{814300}x_2x_3. \end{cases}$$

Непосредственное вычисление показывает, что точки $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ являются неподвижными точками положительного квадратичного стохастического оператора $\mathcal{Q} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$.

Пример 4.2. (положительность $\bigoplus$ единственность неподвижной точки $\not\Rightarrow$ сильная эргодичность; [30, 31]). Определим положительный квадратичный стохастический оператор $\mathcal{R}_\varepsilon : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$

для любого $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{1000}$ следующим образом:

$$\mathcal{R}_\varepsilon : \begin{cases} (\mathcal{R}_\varepsilon(\mathbf{x}))_1 = (0{,}9 - \varepsilon)x_1^2 + \varepsilon x_2^2 + 0{,}1x_3^2 + 2(1-2\varepsilon)x_1x_2 + 2\varepsilon x_1x_3 + 2\varepsilon x_2x_3, \\ (\mathcal{R}_\varepsilon(\mathbf{x}))_2 = 0{,}1x_1^2 + (0{,}9 - \varepsilon)x_2^2 + \varepsilon x_3^2 + 2\varepsilon x_1x_2 + 2\varepsilon x_1x_3 + 2(1-2\varepsilon)x_2x_3, \\ (\mathcal{R}_\varepsilon(\mathbf{x}))_3 = \varepsilon x_1^2 + 0{,}1x_2^2 + (0{,}9 - \varepsilon)x_3^2 + 2\varepsilon x_1x_2 + 2(1-2\varepsilon)x_1x_3 + 2\varepsilon x_2x_3. \end{cases}$$

Положительный квадратичный стохастический оператор $\mathcal{R}_\varepsilon$ имеет единственную неподвижную точку $\mathbf{c} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$, которая является отталкивающей. Следовательно, он не является сильно эргодическим (регулярным).

Пример 4.3 (сильная эргодичность $\not\Rightarrow$ сжатие; [29, 32])**.** Определим положительный квадратичный стохастический оператор $\mathcal{Q}_\varepsilon : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ для любого $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$ следующим образом:

$$\mathcal{Q}_\varepsilon : \begin{cases} (\mathcal{Q}_\varepsilon(\mathbf{x}))_1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{6}\right)x_1^2 + \frac{\varepsilon}{2}x_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}x_3^2 + \left(\frac{4}{3} - \frac{\varepsilon}{3}\right)x_1x_2 + \left(\frac{4}{3} - \frac{\varepsilon}{3}\right)x_1x_3 + \left(\frac{4}{3} - \frac{\varepsilon}{3}\right)x_2x_3, \\ (\mathcal{Q}_\varepsilon(\mathbf{x}))_2 = \left(\frac{1}{6} + \frac{\varepsilon}{12}\right)x_1^2 + \frac{\varepsilon}{4}x_2^2 + \frac{\varepsilon}{4}x_3^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{\varepsilon}{6}\right)x_1x_2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{\varepsilon}{6}\right)x_1x_3 + \left(\frac{2}{3} - \frac{\varepsilon}{6}\right)x_2x_3, \\ (\mathcal{Q}_\varepsilon(\mathbf{x}))_3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\right)x_1^2 + \left(1 - \frac{3\varepsilon}{4}\right)x_2^2 + \left(1 - \frac{3\varepsilon}{4}\right)x_3^2 + \frac{\varepsilon}{2}x_1x_2 + \frac{\varepsilon}{2}x_1x_3 + \frac{\varepsilon}{2}x_2x_3. \end{cases}$$

Положительный квадратичный стохастический оператор $\mathcal{Q}_\varepsilon$ является сильно эргодическим (регулярным) с единственной неподвижной точкой $\mathbf{p} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)^T$. Однако он не является сжимающим. В самом деле, пусть $0 < a < \dfrac{1-2\varepsilon}{2-2\varepsilon}$ — положительное число, $\mathbf{A} = (0, a, 1-a)^T$ и $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)^T$. Тогда легко видеть, что $\|\mathcal{Q}_\varepsilon(\mathbf{A}) - \mathcal{Q}_\varepsilon(\mathbf{e}_3)\|_1 = 4a(1-a)(1-\varepsilon) > 2a = \|\mathbf{A} - \mathbf{e}_3\|_1$.

Эти примеры показывают, что нелинейный аналог теоремы Перрона—Фробениуса для *положительных* квадратичных стохастических операторов является неверным. В то же время эти примеры дают нам основание для изучения нелинейной задачи Перрона—Фробениуса для *некоторого подкласса* положительных квадратичных стохастических операторов. Обсудим этот вопрос в следующих разделах.

5. Средние процессы Краузе через квадратичные стохастические операторы

В этом разделе мы установим некоторую корреляцию между средними процессами Краузе и квадратичными стохастическими операторами. Сначала введем некоторые понятия и обозначения.

Определение 5.1. Кубическая матрица $\mathcal{P} = (p_{ijk})_{i,j,k=1}^m$ называется *дважды стохастической*, если

$$\sum_{j=1}^m p_{ijk} = \sum_{k=1}^m p_{ijk} = 1, \quad p_{ijk} \geqslant 0 \quad \forall\ i,j,k \in \mathbf{I}_m.$$

Замечание 5.1. В данной работе мы *не* требуем выполнения условия $p_{ijk} = p_{jik}$ для всех $i,j,k \in \mathbf{I}_m$.

Пусть $\mathcal{P} = (p_{ijk})_{i,j,k=1}^m$ — кубическая дважды стохастическая матрица и $\mathbb{P}_{\bullet\bullet k} = (p_{ijk})_{i,j=1}^m$ — квадратная матрица для фиксированного $k \in \mathbf{I}_m$. Ясно, что матрица $\mathbb{P}_{\bullet\bullet k} = (p_{ijk})_{i,j=1}^m$ также является квадратной стохастической матрицей. В дальнейшем будем писать

$$\mathcal{P} = (\mathbb{P}_{\bullet\bullet 1}|\ldots|\mathbb{P}_{\bullet\bullet m})$$

для кубических дважды стохастических матриц.

Определим квадратичный стохастический оператор $\mathcal{Q} : \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{S}^{m-1}$, ассоциированный с кубической дважды стохастической матрицей $\mathcal{P} = (\mathbb{P}_{\bullet\bullet 1}|\ldots|\mathbb{P}_{\bullet\bullet m})$, следующим образом:

$$(\mathcal{Q}(\mathbf{x}))_k = \sum_{i,j=1}^m p_{ijk}x_ix_j \quad \forall\ k \in \mathbf{I}_m. \tag{5.1}$$

Также определим линейный стохастический оператор $\mathcal{L}_k : \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{S}^{m-1}$, ассоциированный с квадратной стохастической матрицей $\mathbb{P}_{\bullet\bullet k} = (p_{ijk})_{i,j=1}^m$, следующим образом:

$$(\mathcal{L}_k(\mathbf{x}))_j = \left(\mathbf{x}^T \mathbb{P}_{\bullet\bullet k}\right)_j = \sum_{i=1}^m p_{ijk}\ x_i \quad \forall\ j \in \mathbf{I}_m. \tag{5.2}$$

Из выражений (5.1) и (5.2) следует, что

$$(\mathcal{Q}(\mathbf{x}))_k = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m p_{ijk} x_i\right) x_j = \sum_{j=1}^m (\mathcal{L}_k(\mathbf{x}))_j\, x_j = \big(\mathcal{L}_k(\mathbf{x}), \mathbf{x}\big) \quad \forall\ k \in \mathbf{I}_m,$$

где через $(\cdot, \cdot)$ обозначено стандартное скалярное произведение двух векторов.

Следовательно, квадратичный стохастический оператор $\mathcal{Q} : \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{S}^{m-1}$, заданный формулой (5.1), может быть записан в виде

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \Big(\big(\mathcal{L}_1(\mathbf{x}), \mathbf{x}\big), \ldots, \big(\mathcal{L}_m(\mathbf{x}), \mathbf{x}\big)\Big)^T, \tag{5.3}$$

где оператор $\mathcal{L}_k : \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{S}^{m-1}$ определен формулой (5.2) для всех $k \in \mathbf{I}_m$.

Теперь определим $m \times m$-матрицу

$$\mathbb{P}(\mathbf{x}) \;=\; \begin{pmatrix} \big(\mathcal{L}_1(\mathbf{x})\big)_1 & \big(\mathcal{L}_1(\mathbf{x})\big)_2 & \cdots & \big(\mathcal{L}_1(\mathbf{x})\big)_m \\ \big(\mathcal{L}_2(\mathbf{x})\big)_1 & \big(\mathcal{L}_2(\mathbf{x})\big)_2 & \cdots & \big(\mathcal{L}_2(\mathbf{x})\big)_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \big(\mathcal{L}_m(\mathbf{x})\big)_1 & \big(\mathcal{L}_m(\mathbf{x})\big)_2 & \cdots & \big(\mathcal{L}_m(\mathbf{x})\big)_m \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Покажем, что матрица $\mathbb{P}(\mathbf{x})$ является дважды стохастической матрицей для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{m-1}$. В самом деле, известно, что $\mathbb{P}(\mathbf{x}) = \big(p_{kj}(\mathbf{x})\big)_{k,j=1}^m$, где

$$p_{kj}(\mathbf{x}) = \big(\mathcal{L}_k(\mathbf{x})\big)_j = \sum_{i=1}^m p_{ijk} x_i. \tag{5.5}$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m p_{kj}(\mathbf{x}) \;&=\; \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^m p_{ijk} x_i\right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^m p_{ijk}\right) x_i = \sum_{i=1}^m x_i = 1, \\ \sum_{j=1}^m p_{kj}(\mathbf{x}) \;&=\; \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m p_{ijk} x_i\right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m p_{ijk}\right) x_i = \sum_{i=1}^m x_i = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, из (5.3) и (5.4) следует, что

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(\mathbf{x})\mathbf{x}. \tag{5.6}$$

Назовем эту матрицу *матричной формой* квадратичного стохастического оператора (5.1), ассоциированного с кубической дважды стохастической матрицей $\mathcal{P} = (\mathbb{P}_{\bullet\bullet 1}| \ldots |\mathbb{P}_{\bullet\bullet m})$.

Теперь представим нелинейную динамику обмена мнениями в многоагентной системе.

DSM-протокол: Пусть $\mathcal{P} = (\mathbb{P}_{\bullet\bullet 1}| \ldots |\mathbb{P}_{\bullet\bullet m})$ — кубическая *дважды* стохастическая матрица и $\mathcal{Q} : \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{S}^{m-1}$ — квадратичный стохастический оператор, ассоциированный с кубической *дважды* стохастической матрицей $\mathcal{P} = (\mathbb{P}_{\bullet\bullet 1}| \ldots |\mathbb{P}_{\bullet\bullet m})$. Положим, что динамика обмена мнениями в многоагентной системе порождена квадратичным стохастическим оператором $\mathcal{Q} : \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{S}^{m-1}$ следующим образом:

$$\mathbf{x}^{(n+1)} := \mathcal{Q}\left(\mathbf{x}^{(n)}\right) = \mathbb{P}\left(\mathbf{x}^{(n)}\right)\mathbf{x}^{(n)}, \qquad \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{S}^{m-1},$$

где $\mathbf{x}^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}\right)^T$ — субъективное распределение после n пересмотров.

Мы предлагаем интерпретацию многоагентной системы *DSM-протокола*. Положим, что *каждый агент может пересмотреть свое мнение по некоторому вопросу после воздействия всех возможных групп из 2-х агентов*, что очевидно создает нелинейность в предложенной модели.

Для того чтобы модель оставалась однородной, мы интерпретируем воздействие отдельного агента как воздействие группы из двух идентичных агентов. Более точно, сделаны следующие допущения:

- Имеется группа из m агентов $\mathbf{I}_m := \{1, \ldots, m\}$, действующих вместе как команда или комитет.
- Каждый агент может обозначить свое мнение по некоторому вопросу. Мнение — это общее понятие, которое представляет *убеждение*, *поведение* или *отношение* агента.
- Профиль мнения в момент времени n является *стохастическим* вектором $\mathbf{x}^{(n)} = (x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})^T$.
- Каждый агент, например, k, подвержен воздействию группы из двух агентов, например, $\{i, \{j\}\}$, в которой агент j является *представителем* группы.
- Воздействие группы из двух агентов, например, $\{i, \{j\}\}$ (соответственно, $\{j, \{i\}\}$) с представителем j (соответственно, i), на агента k обозначим через $p_{ij,k}$ (соответственно, $p_{ji,k}$). В общем случае возможно, что $p_{ij,k} \neq p_{ji,k}$.
- Профиль воздействия группы $\{i, \{j\}\}$ с представителем j — это *стохастический* вектор $\mathbf{p}_{ij\bullet} := (p_{ij,1}, p_{ij,2}, \ldots, p_{ij,m})^T$.
- Воздействия всех возможных групп из двух агентов на агента k задаются квадратной *стохастической* матрицей $\mathbb{P}_{\bullet\bullet k} = (p_{ij,k})_{i,j=1}^m$.
- Агент верит, что группа из двух агентов является *доверенной/влиятельной*, если ее влияние на агента высоко.
- Доверие $p_{kj}(\mathbf{x}^{(n)})$ агента k агенту j с профилем мнения $\mathbf{x}^{(n)}$ — это среднее влияние всевозможных групп из двух агентов, для которых агент j является представителем агента k с профилем мнения $\mathbf{x}^{(n)}$, т. е. $p_{kj}(\mathbf{x}^{(n)}) := \sum\limits_{i=1}^m x_i^{(n)} p_{ij,k}$.
- Матрица доверия с профилем мнения $\mathbf{x}^{(n)}$ является квадратной *стохастической* матрицей $\mathbb{P}(\mathbf{x}^{(n)}) = \left(p_{kj}(\mathbf{x}^{(n)})\right)_{k,j=1}^m$.
- Профиль мнения в момент времени $n+1$ пересматривается следующим образом: $\mathbf{x}^{(n+1)} := \mathbb{P}\left(\mathbf{x}^{(n)}\right)\mathbf{x}^{(n)}$.

Из формулы (5.6) следует, что динамика обмена мнениями в многоагентной системе, заданная *DSM-протоколом*, может быть записана как

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbb{P}\left(\mathbf{x}^{(n)}\right)\mathbf{x}^{(n)}, \quad \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{S}^{m-1},$$

где $\mathbf{x}^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}\right)^T$ — субъективное распределение после n пересмотров. Это значит, что согласно матричной форме (2.1) динамика обмена мнениями в многоагентной системе, заданной формулой *DSM-протокола*, порождает средний процесс Краузе. Следовательно, имеем следующий результат.

Утверждение 5.1 (см. [38]). *Пусть $\mathcal{P} = (\mathbb{P}_{\bullet\bullet 1}| \ldots |\mathbb{P}_{\bullet\bullet m})$ — кубическая дважды стохастическая матрица, а оператор $\mathcal{Q} : \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{S}^{m-1}$ — ассоциированный квадратичный стохастический оператор. Тогда динамика обмена мнениями в многоагентной системе, данная формулой* DSM-протокола, *порождает средний процесс Краузе.*

Очевидно, что для любого ненулевого вектора $\mathbf{x} \geqslant 0$ имеем $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_1^2 \mathcal{Q}\Big(\dfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_1}\Big)$, где $\dfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_1} \in \mathbb{S}^{m-1}$ и $\mathcal{Q}\Big(\dfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_1}\Big) \in \mathbb{S}^{m-1}$. Следовательно, если $\|\mathbf{x}^{(0)}\|_1 > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathbf{x}^{(n)}\|_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \|\mathbf{x}^{(0)}\|_1^{2^n} = \infty$ и если $\|\mathbf{x}^{(0)}\|_1 < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathbf{x}^{(n)}\|_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \|\mathbf{x}^{(0)}\|_1^{2^n} = 0$. Таким образом, в отличие от линейного случая, симплекс $\mathbb{S}^{m-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{x} \geqslant 0,\ \|\mathbf{x}\|_1 = 1\}$ является единственным инвариантным множеством при действии квадратичного стохастического оператора, т. е. $\mathcal{Q}\left(\mathbb{S}^{m-1}\right) \subset \mathbb{S}^{m-1}$. Другими словами, для любого начального мнения $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{S}^{m-1}$ динамика обмена мнениями в многоагентной системе, заданная *DSM-протоколом*, порождает векторную последовательность $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n=0}^\infty$, для которой $\mathbf{x}^{(n)} \in \mathbb{S}^{m-1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Аналогично линейному случаю, говорят, что в структурированной синхронной многоагентной системе с переменным временем достигнут *консенсус*, если векторная последовательность $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n=0}^\infty$ сходится к $\mathbf{c} = (c, \ldots, c)^T \in \mathbb{S}^{m-1}$ при $n \to \infty$.

Однако,очевидно, что *только* стохастический вектор симплекса с равными распределениями является центром симплекса, т. е. $\mathbf{c} = \left(\frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}\right)^T$. Следовательно, в отличие от линейного случая, консенсус в динамике обмена мнениями, заданной *DSM-протоколом*, *не зависит* от начального мнения $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{S}^{m-1}$ и может быть сформулирован следующим образом.

Определение 5.2. Говорят, что многоагентная система с течением времени достигает *консенсуса*, если динамика обмена мнениями сходится к центру $\mathbf{c} = \left(\frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}\right)^T$ симплекса $\mathbb{S}^{m-1}$.

6. Обзор предыдущих результатов

В этом разделе мы даем обзор предыдущих результатов (см. [34–39]) в области нелинейных задач консенсуса.

Определение 6.1. Кубическая матрица $\mathcal{P} = (p_{ijk})_{i,j,k=1}^m$ называется *трижды стохастической*, если имеет место

$$\sum_{i=1}^m p_{ijk} = \sum_{j=1}^m p_{ijk} = \sum_{k=1}^m p_{ijk} = 1, \quad p_{ijk} \geqslant 0 \quad \forall\, i,j,k \in \mathbf{I}_m.$$

Очевидно, что если матрица $\mathcal{P} = (p_{ijk})_{i,j,k=1}^m$ является кубической стохастической матрицей, то она также является кубической дважды стохастической. Следовательно, квадратичный стохастический оператор, ассоциированный с кубической трижды стохастической матрицей, также порождает средний процесс Краузе.

TSM-протокол: Пусть $\mathcal{P} = (\mathbb{P}_{\bullet\bullet 1}|\ldots|\mathbb{P}_{\bullet\bullet m})$ — кубическая *трижды* стохастическая матрица и пусть $\mathcal{Q} : \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{S}^{m-1}$ — квадратичный стохастический оператор, ассоциированный с кубической *трижды* стохастической матрицей $\mathcal{P} = (\mathbb{P}_{\bullet\bullet 1}|\ldots|\mathbb{P}_{\bullet\bullet m})$. Положим, что динамика обмена мнениями в многоагентной системе порождена квадратичным стохастическим оператором $\mathcal{Q} : \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{S}^{m-1}$ следующим образом:

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathcal{Q}\left(\mathbf{x}^{(n)}\right), \quad \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{S}^{m-1},$$

где $\mathbf{x}^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}\right)^T$ — субъективное распределение после n пересмотров.

Определение 6.2. Кубическая матрица $\mathcal{P} = (p_{ijk})_{i,j,k=1}^m$ называется *диагонально положительной*, если ее диагональ $\mathrm{diag}(\mathcal{P}) := (p_{jjk})_{j,k=1}^m$ положительна, т. е. $\mathrm{diag}(\mathcal{P}) > 0$, где

$$\mathrm{diag}(\mathcal{P}) := \begin{pmatrix} p_{111} & p_{112} & \cdots & p_{11m} \\ p_{221} & p_{222} & \cdots & p_{22m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{mm1} & p_{mm2} & \cdots & p_{mmm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{p}_{11\bullet})^T \\ (\mathbf{p}_{22\bullet})^T \\ \vdots \\ (\mathbf{p}_{mm\bullet})^T \end{pmatrix}.$$

Следующий результат был доказан в работах [34–39].

Теорема 6.1 (консенсус кубической трижды стохастической матрицы; см. [34–39])**.** *Пусть* $\mathcal{P} = (\mathbb{P}_{\bullet\bullet 1}|\ldots|\mathbb{P}_{\bullet\bullet m})$ — *кубическая трижды стохастическая матрица, и пусть* $\mathcal{Q} : \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{S}^{m-1}$ — *ассоциированный стохастический оператор. Если* $\mathrm{diag}(\mathcal{P}) > 0$, *то динамика обмена мнениями многоагентной системы, заданная* TSM-протоколом, *со временем достигает консенсуса.*

Это показывает, что справедлив нелинейный аналог теоремы Перрона—Фробениуса для квадратичных стохастических операторов, ассоциированных с (*диагонально*) *положительными кубическими стохастическими матрицами*. В следующем разделе мы улучшаем этот результат для случая квадратичных стохастических операторов, ассоциированных с (*диагонально*) *положительными кубическими дважды стохастическими матрицами*. Также хотелось бы подчеркнуть, что поскольку мы *не* требовали условия $p_{ijk} = p_{jik}$ при $i,j,k \in \mathbf{I}_m$, то в общем случае двойная стохастичность не влечет тройной стохастичности кубических матриц.

7. Основной результат

Теперь мы готовы сформулировать основной результат нашей работы.

Теорема 7.1 (консенсус кубической дважды стохастической матрицы). *Пусть $\mathcal{P} = (\mathbb{P}_{\bullet\bullet 1}|\ldots|\mathbb{P}_{\bullet\bullet m})$ — кубическая дважды стохастическая матрица, и пусть $\mathcal{Q} : \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{S}^{m-1}$ — ассоциированный квадратичный стохастический оператор. Если $\operatorname{diag}(\mathcal{P}) > 0$, то динамика обмена мнениями многоагентной системы, заданная DSM-протоколом, со временем достигает консенсуса.*

Интерпретация многоагентной системы. *Предположим, что динамика обмена мнениями в многоагентной системе задана DSM-протоколом. Если влияние каждой группы из двух идентичных агентов на любого другого агента положительно, то многоагентная система со временем достигает консенсуса.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{P} = (\mathbb{P}_{\bullet\bullet 1}|\ldots|\mathbb{P}_{\bullet\bullet m})$ — диагональная положительная кубическая дважды стохастическая матрица. Пусть $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$, $\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathcal{Q}(\mathbf{x}^{(n)})$ — траектория ассоциированного квадратичного стохастического оператора $\mathcal{Q} : \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{S}^{m-1}$, начинающаяся с точки $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{S}^{m-1}$. Согласно определению, многоагентная система со временем достигает консенсуса, если $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ сходится к центру $\mathbf{c} = \left(\frac{1}{m},\ldots,\frac{1}{m}\right)^T$ симплекса $\mathbb{S}^{m-1}$.

Очевидно, поскольку $\operatorname{diag}(\mathcal{P}) > 0$, то для любого значения $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{m-1}$ мы имеем

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = x_1^2\mathbf{p}_{11\bullet} + x_2^2\mathbf{p}_{22\bullet} + \ldots + x_m^2\mathbf{p}_{mm\bullet} + \sum_{i\neq j} x_i x_j \mathbf{p}_{ij\bullet} > 0.$$

Это означает, что $\mathcal{Q}(\mathbb{S}^{m-1}) \Subset \operatorname{int}\mathbb{S}^{m-1}$. Поскольку $\mathcal{Q}(\mathbb{S}^{m-1})$ — компактное множество, то существует число $\alpha > 0$ такое, что

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) \geqslant \alpha\mathbf{e} := (\alpha,\alpha,\ldots,\alpha)^T \qquad \forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{S}^{m-1}.$$

Следовательно, достаточно исследовать динамику квадратичного стохастического оператора $\mathcal{Q} : \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{S}^{m-1}$ над множеством $\mathbb{S}_\alpha = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{m-1} : \mathbf{x} \geqslant \alpha\mathbf{e}\}$, которое является инвариантным.

Пусть $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{S}_\alpha$. Поскольку $\mathbb{S}_\alpha$ — инвариантное множество, имеем $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{S}_\alpha$, т. е. $\mathbf{x}^{(n)} \geqslant \alpha\mathbf{e}$ для любых $n \in \mathbb{N}$. Из матричной формы (5.6) квадратичного стохастического оператора следует, что

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathcal{Q}(\mathbf{x}^{(n)}) = \mathbb{P}\left(\mathbf{x}^{(n)}\right)\mathbf{x}^{(n)} = \mathbb{P}\left(\mathbf{x}^{(n)}\right)\ldots\mathbb{P}\left(\mathbf{x}^{(1)}\right)\mathbb{P}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\mathbf{x}^{(0)}, \tag{7.1}$$

где $\mathbb{P}\left(\mathbf{x}\right)$ — квадратная стохастическая матрица, определенная уравнением (5.4).

Пусть для любых двух целых чисел $s > r$ выполнено

$$\mathbb{P}^{\left[\mathbf{x}^{(s)},\mathbf{x}^{(r)}\right]} := \mathbb{P}\left(\mathbf{x}^{(s)}\right)\mathbb{P}\left(\mathbf{x}^{(s-1)}\right)\ldots\mathbb{P}\left(\mathbf{x}^{(r+1)}\right)\mathbb{P}\left(\mathbf{x}^{(r)}\right).$$

Тогда для любых $n \geqslant r \geqslant 0$ получаем, что

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbb{P}^{\left[\mathbf{x}^{(n)},\mathbf{x}^{(0)}\right]}\mathbf{x}^{(0)} = \mathbb{P}^{\left[\mathbf{x}^{(n)},\mathbf{x}^{(r)}\right]}\mathbf{x}^{(r)}.$$

Для квадратной стохастической матрицы $\mathbb{P}(\mathbf{x}^{(n)}) = \left(p_{kj}(\mathbf{x}^{(n)})\right)_{k,j=1}^m$ из (5.5) следует, что

$$p_{kj}(\mathbf{x}^{(n)}) = \sum_{i=1}^m p_{ijk}x_i^{(n)} \geqslant p_{jjk}x_j^{(n)} \geqslant \alpha p_{jjk} > 0 \quad \forall\ j,k \in \mathbf{I}_m.$$

Это значит, что квадратная стохастическая матрица $\mathbb{P}(\mathbf{x}^{(n)})$ положительна для любых $n \in \mathbb{N}$. Более того, она является скремблирующей.

Пусть $\delta(\mathbb{P}) = \dfrac{1}{2}\max\limits_{i_1,i_2}\sum\limits_{j=1}^m |p_{i_1 j} - p_{i_2 j}|$ — коэффициент Добрушина эргодичности квадратной стохастической матрицы $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^m$ (см. [44]). Поскольку матрица $\mathbb{P}(\mathbf{x}^{(n)})$ положительна, а ее элементы равномерно отделены от нуля для любого $n \in \mathbb{N}$, то мы получаем, что

$$\delta\left(\mathbb{P}\left(\mathbf{x}^n\right)\right) \leqslant \lambda < 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{7.2}$$

Следовательно, имеем

$$\delta\left(\mathbb{P}^{\left[\mathbf{x}^{(n)},\mathbf{x}^{(0)}\right]}\right) \leqslant \lambda^n, \quad \lim_{n\to\infty}\delta\left(\mathbb{P}^{\left[\mathbf{x}^{(n)},\mathbf{x}^{(0)}\right]}\right) = 0.$$

Следовательно, обратное произведение стохастических матриц $\{\mathbb{P}_{\mathbf{x}^{(n)}}\}_{n=0}^{\infty}$ слабо эргодично (см. [44]), а также сильно эргодично, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}^{\left[\mathbf{x}^{(n)},\mathbf{x}^{(0)}\right]} = m\mathbf{c}^T\mathbf{c}$ и

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{x}^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}^{\left[\mathbf{x}^{(n)},\mathbf{x}^{(0)}\right]}\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{c}, \quad \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{S}_\alpha,$$

где $\mathbf{c} = \left(\dfrac{1}{m},\ldots,\dfrac{1}{m}\right)^T$. Это завершает доказательство. □

Замечание 7.1. Из теорем 6.1 и 7.1 следует, что консенсус устанавливается в динамике обмена мнениями, заданной диагонально положительными кубическими *дважды*, а также *трижды* стохастическими матрицами. Вероятно, можно было ожидать того же результата для динамики обмена мнениями, заданной диагонально положительными кубическими *одинарно* стохастическими матрицами. Однако *это не так*. Например, консенсус не может быть установлен для динамики обмена мнениями, заданной примерами 4.1 и 4.2. В самом деле, пример 4.1 показывает, что динамика обмена мнениями, заданная (диагонально) положительными кубическими *одинарно* стохастическими матрицами, может сходиться к *трем различным непостоянным состояниям*, зависящим от начального мнения. Более того, в отличие от случая задачи консенсуса, пример 4.2 показывает, что состояние консенсуса (которое является центром симплекса) может быть отталкивающим положением равновесия для динамики обмена мнениями, заданной (диагонально) положительными кубическими *одинарно* стохастическими матрицами. Следовательно, *двойная стохастичность* кубической матрицы играет ключевую роль в изучении нелинейных задач консенсуса.

8. Пример

Рассмотрим кубическую дважды стохастическую матрицу $\mathcal{P} = (\mathbb{P}_{1\bullet\bullet}|\mathbb{P}_{2\bullet\bullet}|\mathbb{P}_{3\bullet\bullet})$, где $\mathbb{P}_{1\bullet\bullet}$, $\mathbb{P}_{2\bullet\bullet}$ и $\mathbb{P}_{3\bullet\bullet}$ являются квадратными дважды стохастическими матрицами следующего вида:

$$\mathbb{P}_{1\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P}_{2\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P}_{3\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Следующий квадратичный стохастический оператор $\mathcal{Q} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ представляет *DSM-протокол*:

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = x_1\left(\mathbb{P}_{1\bullet\bullet}\mathbf{x}\right) + x_2\left(\mathbb{P}_{2\bullet\bullet}\mathbf{x}\right) + x_3\left(\mathbb{P}_{3\bullet\bullet}\mathbf{x}\right) = \mathbb{P}\left(\mathbf{x}\right)\mathbf{x}, \tag{8.1}$$

где $\mathbb{P}\left(\mathbf{x}\right) = x_1\mathbb{P}_{1\bullet\bullet} + x_2\mathbb{P}_{2\bullet\bullet} + x_3\mathbb{P}_{3\bullet\bullet}$ — квадратная дважды стохастическая матрица.

В работах [34–39] было показано, что если квадратные дважды стохастические матрицы $\mathbb{P}_{1\bullet\bullet}, \mathbb{P}_{2\bullet\bullet}, \mathbb{P}_{3\bullet\bullet}$ положительны и

$$\mathbb{P}_{1\bullet\bullet} + \mathbb{P}_{2\bullet\bullet} + \mathbb{P}_{3\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8.2}$$

то в системе, заданной *DSM-протоколом* достигается консенсус. Однако теорема 7.1 улучшает этот результат. А именно, в отсутствие положительности квадратных дважды стохастических матриц $\mathbb{P}_{1\bullet\bullet}, \mathbb{P}_{2\bullet\bullet}, \mathbb{P}_{3\bullet\bullet}$ и в отсутствие ограничений (8.2) в системе, заданной *DSM-протоколом*, по-прежнему достигается консенсус, если кубическая дважды стохастическая матрица $\mathcal{P}$ является (только) диагонально положительной, т. е.

$$\operatorname{diag}(\mathcal{P}) := \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} \end{pmatrix} > 0.$$

Другими словами, мы требуем только положительности первого столбца матрицы $\mathbb{P}_{1\bullet\bullet}$, положительности второго столбца матрицы $\mathbb{P}_{2\bullet\bullet}$ и положительности третьего столбца матрицы $\mathbb{P}_{3\bullet\bullet}$, чего достаточно для установления консенсуса системы. Строчно-стохастическая матрица как минимум с одним положительным столбцом иногда называется *матрицей Маркова* (см. [44]). В этом смысле результат данной работы обобщает и расширяет все предыдущие результаты работ [34–39].

Благодарности. Авторы глубоко признательны анонимному рецензенту за внимательное чтение рукописи и конструктивные замечания и предложения, которые в значительной степени способствовали улучшению качества и оформления статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жамилов У. У., Розиков У. А.* О динамике строго невольтерровских квадратичных стохастических операторов на двумерном симплексе// Мат. сб. — 2009. — *200*, № 9. — С. 81–94.
2. *Розиков У. А., Зада А.* Об l-вольтерровских квадратичных стохастических операторах// Докл. РАН. — 2009. — *424*, № 2. — С. 168–170.
3. *Berger R. L.* A necessary and sufficient condition for reaching a consensus using DeGroot's method// J. Am. Statist. Assoc. — 1981. — *76*. — С. 415–418.
4. *Bernstein S.* Solution of a mathematical problem connected with the theory of heredity// Ann. Math. Stat. — 1942. — *13*. — С. 53–61.
5. *Chatterjee S., Seneta E.* Towards consensus: some convergence theorems on repeated averaging// J. Appl. Probab. — 1977. — *14*. — С. 89–97.
6. *De Groot M. H.* Reaching a consensus// J. Am. Statist. Assoc. — 1974. — *69*. — С. 118–121.
7. *Ganihodzhaev N.* On stochastic processes generated by quadratic operators// J. Theoret. Probab. — 1991. — *4*. — С. 639–653.
8. *Ganikhodjaev N., Akin H., Mukhamedov F.* On the ergodic principle for Markov and quadratic stochastic processes and its relations// Linear Algebra App. — 2006. — *416*. — С. 730–741.
9. *Ganikhodzhaev R., Mukhamedov F., Rozikov U.* Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems// Inf. Dim. Anal. Quan. Prob. Rel. Top. — 2011. — *14*, № 2. — С. 279–335.
10. *Hegselmann R., Krause U.* Opinion dynamics and bounded confidence: models, analysis and simulation// J. Art. Soc. Social Sim. — 2002. — *5*, № 3. — С. 1–33.
11. *Hegselmann R., Krause U.* Opinion dynamics driven by various ways of averaging// Comput. Econ. — 2005. — *25*. — С. 381–405.
12. *Jadbabaie A., Lin J., Morse A. S.* Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules// IEEE Trans. Automat. Control. — 2003. — *48*, № 6. — С. 985–1001.
13. *Jamilov U., Ladra M.* Non-ergodicity of uniform quadratic stochastic operators// Qual. Theory Dyn. Sys. — 2016. — *15*, № 1. — С. 257–271.
14. *Jamilov U., Ladra M., Mukhitdinov R.* On the equiprobable strictly non-Volterra quadratic stochastic operators// Qual. Theory Dyn. Sys. — 2017. — *16*, № 3. — С. 645–655.
15. *Kesten H.* Quadratic transformations: a model for population growth I// Adv. Appl. Probab. — 1970. — *2*. — С. 1–82.
16. *Kolokoltsov V.* Nonlinear Markov processes and kinetic equations. — Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
17. *Krause U.* A discrete nonlinear and non-autonomous model of consensus formation// В сб.: «Communications in difference equations». — Amsterdam: Gordon and Breach, 2000. — С. 227–236.
18. *Krause U.* Compromise, consensus, and the iteration of means// Elem. Math. — 2009. — *64*. — С. 1–8.
19. *Krause U.* Markov chains, Gauss soups, and compromise dynamics// J. Cont. Math. Anal. — 2009. — *44*, № 2. — С. 111–116.
20. *Krause U.* Opinion dynamics — local and global// В сб.: «Proceedings of the Workshop "Future Directions in Difference Equations"». — Vigo: Universidade de Vigo, 2011. — С. 113–119.
21. *Krause U.* Positive dynamical systems in discrete time: theory, models, and applications. — Berlin: De Gruyter, 2015.
22. *Lyubich Y. I.* Mathematical structures in population genetics. — Berlin etc.: Springer, 1992.
23. *Moreau L.* Stability of multiagent systems with time-dependent communication links// IEEE Trans. Automat. Control. — 2005. — *50*, № 2. — С. 169–182.
24. *Mukhamedov F., Ganikhodjaev N.* Quantum quadratic operators and processes. — Cham: Springer, 2015.
25. *Pulka M.* On the mixing property and the ergodic principle for non-homogeneous Markov chains// Linear Algebra App. — 2011. — *434*. — С. 1475–1488.
26. *Rozikov U.* Population dynamics: algebraic and probabilistic approach. — World Scientific, 2020.
27. *Rozikov U., Jamilov U.* F-Quadratic stochastic operators// Math. Notes. — 2008. — *83*, № 4. — С. 606–612.
28. *Saburov M.* Ergodicity of nonlinear Markov operators on the finite dimensional space// Nonlinear Anal. — 2016. — *143*. — С. 105–119.
29. *Saburov M.* Quadratic stochastic Sarymsakov operators// J. Phys. Conf. Ser. — 2016. — *697*. — 012015.

30. *Saburov M.* On regularity of diagonally positive quadratic doubly stochastic operators// Results Math. — 2017. — *72.* — С. 1907–1918.
31. *Saburov M.* On regularity of positive quadratic doubly stochastic operators// Math Notes. — 2018. — *103*, № 2. — С. 328–333.
32. *Saburov M.* Ergodicity of **p**-majorizing quadratic stochastic operators// Markov Process. Related Fields. — 2018. — *24*, № 1. — С. 131–150.
33. *Saburov M.* Ergodicity of **p**-majorizing nonlinear Markov operators on the finite dimensional space// Linear Algebra Appl. — 2019. — *578.* — С. 53–74.
34. *Saburov M., Saburov Kh.* Reaching a consensus in multi-agent systems: a time invariant nonlinear rule// J. Educ. Vocational Research. — 2013. — *4*, № 5. — С. 130–133.
35. *Saburov M., Saburov Kh.* Mathematical models of nonlinear uniform consensus// Sci. Asia. — 2014. — *40*, № 4. — С. 306–312.
36. *Saburov M., Saburov Kh.* Reaching a nonlinear consensus: polynomial stochastic operators// Inter. J. Cont. Auto. Sys. — 2014. — *12*, № 6. — С. 1276–1282.
37. *Saburov M., Saburov Kh.* Reaching a nonlinear consensus: a discrete nonlinear time-varying case// Inter. J. Sys. Sci. — 2016. — *47*, № 10. — С. 2449–2457.
38. *Saburov M., Saburov Kh.* Reaching consensus via polynomial stochastic operators: a general study// Springer Proc. Math. Statist. — 2017. — *212.* — С. 219–230.
39. *Saburov M., Saburov Kh.* Mathematical models of nonlinear uniformly consensus II// J. Appl. Nonlinear Dynamics. — 2018. — *7*, № 1. — С. 95–104.
40. *Saburov M., Yusof N. A.* Counterexamples to the conjecture on stationary probability vectors of the second-order Markov chains// Linear Algebra Appl. — 2016. — *507.* — С. 153–157.
41. *Saburov M., Yusof N.* The structure of the fixed point set of quadratic operators on the simplex// Fixed Point Theory. — 2018. — *19*, № 1. — С. 383–396.
42. *Saburov M., Yusof N.* On uniqueness of fixed points of quadratic stochastic operators on a 2D simplex// Methods Funct. Anal. Topol. — 2018. — *24*, № 3. — С. 255–264.
43. *Sarymsakov T., Ganikhodjaev N.* Analytic methods in the theory of quadratic stochastic processes// J. Theor. Probab. — 1990. — *3.* — С. 51–70.
44. *Seneta E.* Nonnegative matrices and Markov chains. — New York—Heidelberg—Berlin: Springer, 1981.
45. *Touri B., Nedić A.* Product of random stochastic matrices// IEEE Trans. Automat. Control. — 2014. — *59*, № 2. — С. 437–448.
46. *Tsitsiklis J., Bertsekas D., Athans M.* Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms// IEEE Trans. Automat. Control. — 1986. — *31*, № 9. — С. 803–812.
47. *Ulam S.* A collection of mathematical problems. — New York—London: Interscience Publishers, 1960.

М. Сабуров

Инженерно-технологический колледж, Американский университет Ближнего востока, Эгайла, Кувейт

E-mail: `msaburov@gmail.com, Mansur.Saburov@aum.edu.kw`

Х. Сабуров

Факультет высоких технологий и инженерии, Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан

E-mail: `khikmatdr@gmail.com`

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-110-126 UDC 517.988+519.71

Applications of Quadratic Stochastic Operators to Nonlinear Consensus Problems

© 2022 **M. Saburov, Kh. Saburov**

Abstract. Historically, the idea of reaching consensus through repeated averaging was introduced by De Groot for a structured time-invariant and synchronous environment. Since that time, the consensus, which is the most ubiquitous phenomenon of multi-agent systems, becomes popular in the various scientific fields such as biology, physics, control engineering and social science. In this paper, we give an overview of the recent development of applications of quadratic stochastic operators to nonlinear consensus problems. We also present some refinement and improvement of the previous results.

REFERENCES

1. U. U. Zhamilov and U. A. Rozikov, "O dinamike strogo nevol'terrovskikh kvadratichnykh stokhasticheskikh operatorov na dvumernom simplekse" [On the dynamics of strictly non-Volterra quadratic stochastic operators on a two-dimensional simplex], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2009, **200**, No. 9, 81–94 (in Russian).
2. U. A. Rozikov and A. Zada, "Ob l-vol'terrovskikh kvadratichnykh stokhasticheskikh operatorakh" [On l-Volterra quadratic stochastic operators], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2009, **424**, No. 2, 168–170 (in Russian).
3. R. L. Berger, "A necessary and sufficient condition for reaching a consensus using DeGroot's method," *J. Am. Statist. Assoc.*, 1981, **76**, 415–418.
4. S. Bernstein, "Solution of a mathematical problem connected with the theory of heredity," *Ann. Math. Stat.*, 1942, **13**, 53–61.
5. S. Chatterjee and E. Seneta, "Towards consensus: some convergence theorems on repeated averaging," *J. Appl. Probab.*, 1977, **14**, 89–97.
6. M. H. De Groot, "Reaching a consensus," *J. Am. Statist. Assoc.*, 1974, **69**, 118–121.
7. N. Ganihodzhaev, "On stochastic processes generated by quadratic operators," *J. Theoret. Probab.*, 1991, **4**, 639–653.
8. N. Ganikhodjaev, H. Akin, and F. Mukhamedov, "On the ergodic principle for Markov and quadratic stochastic processes and its relations," *Linear Algebra App.*, 2006, **416**, 730–741.
9. R. Ganikhodzhaev, F. Mukhamedov, and U. Rozikov, "Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems," *Inf. Dim. Anal. Quan. Prob. Rel. Top.*, 2011, **14**, No. 2, 279–335.
10. R. Hegselmann and U. Krause, "Opinion dynamics and bounded confidence: models, analysis and simulation," *J. Art. Soc. Social Sim.*, 2002, **5**, No. 3, 1–33.
11. R. Hegselmann and U. Krause, "Opinion dynamics driven by various ways of averaging," *Comput. Econ.*, 2005, **25**, 381–405.
12. A. Jadbabaie, J. Lin, and A. S. Morse, "Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules," *IEEE Trans. Automat. Control*, 2003, **48**, No. 6, 985–1001.
13. U. Jamilov and M. Ladra, "Non-ergodicity of uniform quadratic stochastic operators," *Qual. Theory Dyn. Sys.*, 2016, **15**, No. 1, 257–271.
14. U. Jamilov, M. Ladra, and R. Mukhitdinov, "On the equiprobable strictly non-Volterra quadratic stochastic operators," *Qual. Theory Dyn. Sys.*, 2017, **16**, No. 3, 645–655.
15. H. Kesten, "Quadratic transformations: a model for population growth I," *Adv. Appl. Probab.*, 1970, **2**, 1–82.
16. V. Kolokoltsov, *Nonlinear Markov processes and kinetic equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

17. U. Krause, “A discrete nonlinear and non-autonomous model of consensus formation,” In: *Communications in difference equations*, Gordon and Breach, Amsterdam, 2000, pp. 227–236.
18. U. Krause, “Compromise, consensus, and the iteration of means,” *Elem. Math.*, 2009, **64**, 1–8.
19. U. Krause, “Markov chains, Gauss soups, and compromise dynamics,” *J. Cont. Math. Anal.*, 2009, **44**, No. 2, 111–116.
20. U. Krause, “Opinion dynamics — local and global,” In: *Proceedings of the Workshop “Future Directions in Difference Equations”*, Universidade de Vigo, Vigo, 2011, pp. 113–119.
21. U. Krause, *Positive dynamical systems in discrete time: theory, models, and applications*, De Gruyter, Berlin, 2015.
22. Y. I. Lyubich, *Mathematical structures in population genetics*, Springer, Berlin etc., 1992.
23. L. Moreau, “Stability of multiagent systems with time-dependent communication links,” *IEEE Trans. Automat. Control*, 2005, **50**, No. 2, 169–182.
24. F. Mukhamedov and N. Ganikhodjaev, *Quantum quadratic operators and processes*, Springer, Cham, 2015.
25. M. Pulka, “On the mixing property and the ergodic principle for non-homogeneous Markov chains,” *Linear Algebra App.*, 2011, **434**, 1475–1488.
26. U. Rozikov, *Population dynamics: algebraic and probabilistic approach*, World Scientific, 2020.
27. U. Rozikov and U. Jamilov, “F-Quadratic stochastic operators,” *Math. Notes*, 2008, **83**, No. 4, 606–612.
28. M. Saburov, “Ergodicity of nonlinear Markov operators on the finite dimensional space,” *Nonlinear Anal.*, 2016, **143**, 105–119.
29. M. Saburov, “Quadratic stochastic Sarymsakov operators,” *J. Phys. Conf. Ser.*, 2016, **697**, 012015.
30. M. Saburov, “On regularity of diagonally positive quadratic doubly stochastic operators,” *Results Math.*, 2017, **72**, 1907–1918.
31. M. Saburov, “On regularity of positive quadratic doubly stochastic operators,” *Math Notes*, 2018, **103**, No. 2, 328–333.
32. M. Saburov, “Ergodicity of $\mathbf{p}$-majorizing quadratic stochastic operators,” *Markov Process. Related Fields*, 2018, **24**, No. 1, 131–150.
33. M. Saburov, “Ergodicity of $\mathbf{p}$-majorizing nonlinear Markov operators on the finite dimensional space,” *Linear Algebra Appl.*, 2019, **578**, 53–74.
34. M. Saburov and Kh. Saburov, “Reaching a consensus in multi-agent systems: a time invariant nonlinear rule,” *J. Educ. Vocational Research*, 2013, **4**, No. 5, 130–133.
35. M. Saburov and Kh. Saburov, “Mathematical models of nonlinear uniform consensus,” *Sci. Asia*, 2014, **40**, No. 4, 306–312.
36. M. Saburov and Kh. Saburov, “Reaching a nonlinear consensus: polynomial stochastic operators,” *Inter. J. Cont. Auto. Sys.*, 2014, **12**, No. 6, 1276–1282.
37. M. Saburov and Kh. Saburov, “Reaching a nonlinear consensus: a discrete nonlinear time-varying case,” *Inter. J. Sys. Sci.*, 2016, **47**, No. 10, 2449–2457.
38. M. Saburov and Kh. Saburov, “Reaching consensus via polynomial stochastic operators: a general study,” *Springer Proc. Math. Statist.*, 2017, **212**, 219–230.
39. M. Saburov and Kh. Saburov, “Mathematical models of nonlinear uniformly consensus II,” *J. Appl. Nonlinear Dynamics.*, 2018, **7**, No. 1, 95–104.
40. M. Saburov and N. A. Yusof, “Counterexamples to the conjecture on stationary probability vectors of the second-order Markov chains,” *Linear Algebra Appl.*, 2016, **507**, 153–157.
41. M. Saburov and N. Yusof, “The structure of the fixed point set of quadratic operators on the simplex,” *Fixed Point Theory*, 2018, **19**, No. 1, 383–396.
42. M. Saburov and N. Yusof, “On uniqueness of fixed points of quadratic stochastic operators on a 2D simplex,” *Methods Funct. Anal. Topol.*, 2018, **24**, No. 3, 255–264.
43. T. Sarymsakov and N. Ganikhodjaev, “Analytic methods in the theory of quadratic stochastic processes,” *J. Theor. Probab.*, 1990, **3**, 51–70.
44. E. Seneta, *Nonnegative matrices and Markov chains*, Springer, New York—Heidelberg—Berlin, 1981.
45. B. Touri and A. Nedić, “Product of random stochastic matrices,” *IEEE Trans. Automat. Control*, 2014, **59**, No. 2, 437–448.
46. J. Tsitsiklis, D. Bertsekas, and M. Athans, “Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms,” *IEEE Trans. Automat. Control*, 1986, **31**, No. 9, 803–812.
47. S. Ulam, *A collection of mathematical problems*, Interscience Publishers, New York—London, 1960.

M. Saburov
College of Engineering and Technology, American University of the Middle East, Egaila, Kuwait
E-mail: `msaburov@gmail.com, Mansur.Saburov@aum.edu.kw`

Kh. Saburov
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: khikmatdr@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). С. 127–143
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-127-143 УДК 517.55

ГОЛОМОРФНОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ВДОЛЬ ФИКСИРОВАННОГО НАПРАВЛЕНИЯ (ОБЗОР)

© 2022 г. **А. С. САДУЛЛАЕВ**

Аннотация. В этой статье мы даем обзор наиболее весомых и важных результатов по голоморфным продолжениям функций вдоль фиксированного направления. Мы останавливаемся на следующих по характеру геометрических вопросах многомерного комплексного анализа:

- голоморфное продолжение формальных рядов вдоль пучка прямых, теорема Форелли;
- голоморфное продолжение функций, имеющих тонкую особенность вдоль фиксированного направления;
- голоморфное продолжение функций вдоль семейства аналитических кривых.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Классическая теорема Хартогса утверждает, что если функция $f\left({}'z, z_n\right)$ голоморфна в поликруге ${}'U \times \{|z_n| < r_n\}$, $r_n > 0$ и такова, что при каждом фиксированном ${}'z^0 \in {}'U$ функция $f\left({}'z^0, z_n\right)$ голоморфная по z_n в круге $\{|z_n| < r_n\}$, голоморфно продолжается в больший круг $\{|z_n| < R_n\}$, $R_n > r_n$, то $f\left({}'z, z_n\right)$ по совокупности переменных $\left({}'z, z_n\right)$ голоморфно продолжается в поликруг ${}'U \times \{|z_n| < R_n\}$.

Теорема Хартогса, доказанная в начале прошлого века, развивалась и обобщалась во многих направлениях. В литературе имеются богатый набор статей и монографий, содержащих такие обобщения и их применения в различных направлениях математики. В этой работе мы вкратце останавливаемся на следующих, наиболее весомых и важных частях дальнейшего продвижения теорем типа Хартогса:

- голоморфное продолжение формальных рядов вдоль пучка прямых (теорема Форелли);
- голоморфное продолжение функций, имеющих тонкую особенность вдоль фиксированного направления (теорема Чирки—Садуллаева);
- голоморфное продолжение функций вдоль семейства аналитических кривых.

Основным методом изучения рассматриваемых вопросов является теория плюрипотенциала, объекты и методы этой теории, такие как плюригармонические меры, функции Грина, емкости и др.

Поэтому в разделе 2 мы коротко напомним основы теории плюрипотенциала (подробнее с этой теорией можно ознакомиться, например, в [6, 7, 9, 21]).

2. Элементы теории плюрипотенциала

Классическая теория потенциала основывается на субгармонических функциях и операторе Лапласа Δ. Построенная в 80-х годах теория плюрипотенциала, основанная на плюрисубгармонических (psh) функциях, связана с оператором Монжа—Ампера $(dd^cu)^n$, где, как обычно, $d = \partial + \overline{\partial}$, $d^c = i\left(\overline{\partial} - \partial\right)$. Теория построена благодаря исследованиям многочисленных авторов, успешно развивается и применяется в различных направлениях науки (см. [1–35] и библиографию).

Для дважды гладкой функции $u \in C^2(G)$, $G \subset \mathbb{C}^n$, по определению

$$(dd^cu)^k = \underbrace{dd^cu \wedge dd^cu \wedge \ldots \wedge dd^cu}_{k \text{ раз}}$$

представляет собой дифференциальную форму бистепени (k, k). Нетрудно доказать, что

$$(dd^cu)^n = \pi^n n! \det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right)\beta_n,$$

где $\beta_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n \prod\limits_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j$ — форма объема в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Оператор $(dd^cu)^k$ для произвольной ограниченной плюрисубгармонической функции, $-M \leqslant u(z) \leqslant M$, $M = const$, определяется в обобщенном смысле, в виде потока. Рекуррентное соотношение

$$\int (dd^cu)^k \wedge \phi = \int u\,(dd^cu)^{k-1} \wedge dd^c\phi, \quad \phi \in D^{(n-k,n-k)}(G), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.1}$$

где $D^{(n-k,n-k)}(G)$ — пространство бесконечно гладких финитных дифференциальных форм бистепени $(n-k, n-k)$, определяет $(dd^cu)^k$ как положительный поток бистепени (k, k). Фундаментальная теорема теории плюрипотенциала утверждает слабую сходимость потоков $(dd^cu_j)^k$ для монотонно убывающей локально ограниченной последовательности psh функций: если $u_j(z) \in psh(G) \bigcap L^\infty_{loc}(G)$, $u_j(z) \downarrow u(z)$, то $(dd^cu_j)^k \mapsto (dd^cu)^k$. Это обстоятельство позволяет применять поток типа меры $(dd^cu)^k$ в классе $u(z) \in psh(G) \bigcap L^\infty_{loc}(G)$ таким же успехом, что и дифференциальную форму $(dd^cu)^k$ в классе $u(z) \in psh(G) \bigcap C^2(G)$.

Для подмножества $E \subset G$ области $G \subset \mathbb{C}^n$ определим $\mathcal{P}$-меру. Положим

$$\omega(z, E, G) = \sup\left\{u(z) \in psh(G): \ u|_E \leqslant -1, \ u|_G < 0\right\}.$$

Тогда регуляризация $\omega^*(z, E, G) = \overline{\lim\limits_{w \to z}}\,\omega(z, E, G)$ называется *$\mathcal{P}$-мерой* множества E относительно области G. Для содержательной теории обычно предполагают, что область G-регулярная, что существует функция $\rho(z) \in psh(G)$ такая, что $\rho|_G < 0$, $\lim\limits_{z \to \partial G} \rho(z) = 0$. При таком предположении $\mathcal{P}$-мера $\omega^*(z, E, G)$ либо нигде не равна нулю, $-1 \leqslant \omega^*(z, E, G) < 0$, либо $\omega^*(z, E, G) \equiv 0$. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда E плюриполярно в G, т. е. существует плюрисубгармоническая функция $\sigma(z) \not\equiv -\infty$ такая, что $\sigma|_E \equiv -\infty$. В применениях, особенно в оценках голоморфных функций, часто используются следующая теорема о двух константах: если $u \in psh(G)$, $u|_G \leqslant M$, $u|_E \leqslant m$, то

$$u(z) \leqslant M\left(1 + \omega * (z, E, G)\right) - m\omega * (z, E, G) \ \ \forall z \in G. \tag{2.2}$$

Неравенство (2.2) содержательно, когда E не является плюриполярным множеством, т. е. когда $\omega^* \not\equiv 0$.

Аналогично гармоническим функциям в классической теории потенциала, локально ограниченная плюрисубгармоническая функция $u(z) \in psh(G) \bigcap L^\infty_{loc}(G)$ называется *максимальной функцией*, если для нее оператор Монжа—Ампера $(dd^cu)^n = 0$. При $n = 1$ оператор Монжа—Ампера $dd^cu = 4\Delta u dx \wedge dy$. Следовательно, максимальные функции при $n = 1$ являются гармоническими, и поэтому они являются бесконечно гладкими. В отличие от классического случая $n = 1$, при

$n > 1$ максимальные функции не обязательно гладкие; они могут быть даже разрывными. Тем не менее, имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. *Для любого компакта $K \subset G$ плюрисубгармоническая функция $\omega^*(z, K, G)$ является максимальной, $(dd^c \omega^*(z, K, G))^n = 0$ в области $G \backslash K$.*

Далее, функция $\omega(z, K, G)$, которая заведомо равна -1 в точках $z \in K$, при регуляризации, возможно, терпит скачок: в некоторых точках $z^0 \in K$, может оказаться, что $\omega\left(z^0, K, G\right) > -1$. Такие точки называются *(плюри)иррегулярными точками* компакта K. Если совокупность иррегулярных точек $I_K = \left\{z^0 \in K: \ \omega^*\left(z^0, K, G\right) > -1\right\} = \varnothing$, т. е. все точки компакта K плюрирегулярны, то K называется *плюрирегулярным компактом*. Плюрирегулярные компакты играют важную роль в теории плюрипотенциала. Для них справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. *Если K — плюрирегулярный компакт в плюрирегулярной области $G \subset \mathbb{C}^n$, то $\mathcal{P}$-мера $\omega^*(z, K, G)$ является непрерывной функцией в G.*

Величина

$$C(K, G) = \int\limits_K (dd^c \omega^*)^n = \int\limits_G (dd^c \omega^*)^n$$

называется *емкостью* (K, G). Для открытого множества $U \subset G$ его емкость определяется как $C(U, G) = \sup\{C(K, G) : K \subset U, \ K - \text{компакт}\}$. И наконец, величина $C^*(E, G) = \inf\{C(U, G) : U \supset E, \ U - \text{открытое}\}$ называется *внешней емкостью* произвольного множества $E \subset G$.

Внешняя емкость $C^*(E, G)$ множества $E \subset G$ неотрицательна, $C^*(E, G) \geqslant 0$, причем она равна нулю, $C^*(E, G) = 0$, тогда и только тогда, когда E — плюриполярное. Более того, функция множества $C^*(E, G)$ удовлетворяет всем условиям измеримости Шоке, и борелевские множества являются измеримыми относительно $C(E, G)$: если $E \subset G$ — борелевское множество, то его внутренняя и внешняя емкости совпадают,

$$C^*(E, G) = C_*(E, G) = \sup\{C(K, G) : \ K \subset E, \ K - \text{компакт}\}.$$

В описаниях голоморфных оболочек большую роль играет функция Грина в $\mathbb{C}^n$. Для множества $E \subset \mathbb{C}^n$ функция Грина $V(z, E)$ определяется с помощью класса Лелона

$$L = \{u(z) \in psh(\mathbb{C}^n) : \quad u(z) \leqslant \alpha + \ln(1 + |z|) \ \ \forall z \in \mathbb{C}^n, \ \ \alpha = \alpha(u) = \text{const}\}.$$

Положим $V(z, E) = \sup\{u(z) \in L : \ \ u|_E \leqslant 0\}$; тогда регуляризация $V^*(z, E)$ называется *обобщенной функцией Грина*, или просто *функцией Грина*. Функция $V^*(z, E) \geqslant 0$ либо принадлежит классу L, либо $V^*(z, E) \equiv +\infty$. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда E является плюриполярным множеством. Функция $V^*(z, E)$ является монотонной функцией по E : из $E_1 \subset E_2$ следует $V^*(z, E_1) \geqslant V^*(z, E_2)$. Если открытое множество $U \subset \mathbb{C}^n$ представляется в виде объединения возрастающей последовательности компактов, $U = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_j, \ K_j \subset K_{j+1}$, то $V^*(z, U) = \lim\limits_{j \to \infty} V^*(z, K_j)$. Для произвольного множества $E \subset \mathbb{C}^n$ существует убывающая последовательность открытых множеств

$$U_1 \supset U_2 \supset \ldots, \quad U_j \supset E : \quad V^*(z, E) = \left[\lim_{j \to \infty} V^*(z, U_j)\right]^*.$$

Для плюрирегулярных компактов $K \subset \mathbb{C}^n$, $V^*(z, K)|_K \equiv 0$, функция Грина является непрерывной во всем $\mathbb{C}^n$. В этом случае открытое множество $\{V^*(z, K) < \beta\}$ содержит внутри себя компакт K, $K \subset \{V^*(z, K) < \beta\}$ $\forall \beta > 0$.

Для любого полинома $P_m(z)$, $\deg P \leqslant m$, функция $\dfrac{1}{m} \ln|P(z)| \in L$. Следовательно, справедливо неравенство Бернштейна—Уолша

$$\frac{1}{m} \ln|P(z)| \leqslant \frac{1}{m} \ln\|P(z)\|_K + V(z, K). \tag{2.3}$$

Совокупность всех функций вида $\frac{1}{\deg P}\ln|P(z)|$, где $P(z)$ – полиномы в $\mathbb{C}^n$, является собственным подклассом L. Следовательно,

$$V(z,K)\geqslant \sup\left\{\frac{1}{\deg P}\ln|P(z)|:\ \ \|P\|_K\leqslant 1\right\}. \tag{2.4}$$

На самом деле, в (2.4) имеет место знак равенства.

Теорема 2.3. *Для любого компакта $K\subset\mathbb{C}^n$ имеет место равенство*

$$V(z,K)=\sup\left\{\frac{1}{\deg P}\ln|P(z)|:\ \ \|P\|_K\leqslant 1,\ P-\textit{полиномы}\right\}. \tag{2.5}$$

Ниже нам понадобится также функция Грина круговых компактов. Пусть $K\subset\mathbb{C}^n$ — круговой компакт, т. е. с каждой точкой $z^0\in K$ компакт K содержит все точки вида $e^{i\phi}z^0$, $\phi\in\mathbb{R}$. Из (2.5) вытекает, что функция Грина $V(z,K)$ кругового компакта K совпадает с функцией Грина $V\left(z,\hat{K}\right)$ полиномиальной выпуклой оболочки $\hat{K}$, которая является полным круговым компактом.

Теорема 2.4. *Пусть $K\subset\mathbb{C}^n$ — круговой компакт. Тогда*

$$V(z,K)=\sup\left\{\frac{1}{\deg P}\ln|P(z)|:\ \ \|P\|_K\leqslant 1,\ P-\textit{полиномы}\right\}=$$

$$=\sup\left\{\frac{1}{\deg Q}\ln|Q(z)|:\ \ \|Q\|_K\leqslant 1,\ Q-\textit{однородные полиномы}\right\}.$$

Доказательство. Доказательство теоремы проводим в два шага.

Шаг 1 (см. [6, 7]). Для кругового компакта $K\subset\mathbb{C}^n$ полиномиально выпуклая оболочка $\hat{K}$ совпадает с выпуклой оболочкой $\tilde{K}$ относительно однородных полиномов. В самом деле, для этого нужно показать, что если $z^0\in\tilde{K}$, т. е. если $\left|Q\left(z^0\right)\right|\leqslant\|Q\|_K$ для всех однородных полиномов Q, то это неравенство выполняется и для всех полиномов $P(z)$.

Фиксируем полином $P(z)=\sum\limits_{j=0}^{m}Q_j(z)$, $m=\deg P$, такой, что $\|P\|_K\leqslant 1$. Для любой комплексной прямой l, заданной формулой $z=\lambda\xi$, где $\lambda\in\mathbb{C}^n$ фиксирована, $\|\lambda\|=1$ и $\xi\in\mathbb{C}$ — параметр, пересечение $l\bigcap K$ представляет собой круг $\{|\xi|\leqslant r(l)\}$. Применяя неравенство Коши для сечения $P(z)\,|_l=\sum\limits_{j=0}^{m}Q_j(\lambda)\,\xi^m$, мы получим $|Q_j(\lambda)|\leqslant\frac{1}{r^j(l)}$, $j=0,1,\dots,m$. Отсюда $|Q_j(\lambda)\,r(l)|\leqslant 1$, что эквивалентно неравенству $\|Q_j\|_{K\bigcap l}\leqslant 1$. Следовательно, $\|Q_j\|_K\leqslant 1$, $j=0,1,\dots,m$, и при фиксированном $\sigma<1$ справедливо $\left|P\left(\sigma z^0\right)\right|\leqslant\sum\limits_{j=0}^{m}\left|Q_j\left(z^0\right)\right|\sigma^j\leqslant\frac{1}{1-\sigma}$. Это неравенство выполняется для любого полинома R такого, что $\|R\|_K=1$, в частности, для P^k, $k\in\mathbb{N}$, т. е. $\left|P^k\left(\sigma z^0\right)\right|\leqslant\frac{1}{1-\sigma}$, или $\left|P\left(\sigma z^0\right)\right|\leqslant\frac{1}{(1-\sigma)^{1/k}}$. Устремив сначала $k\to\infty$, а затем $\sigma\to 1$, получаем $\left|P\left(z^0\right)\right|\leqslant 1$.

Шаг 2. Достаточно доказать теорему для полиномиально выпуклого компакта $\hat{K}=K$. Положим

$$V_O(z,K)=\sup\left\{\frac{1}{\deg Q}\ln|Q(z)|:\ \ \|Q\|_K\leqslant 1,\ Q-\text{однородные полиномы}\right\}.$$

Тогда с одной стороны $V_O(z,K)\leqslant V(z,K)$. С другой стороны, фиксируем число $\varepsilon>0$, точку $z^0\in\mathbb{C}^n\backslash K$ и находим полином $P_m(z)=\sum\limits_{j=0}^{m}Q_j(z)$, $m=\deg P_m$, такой, что

$$\|P_m\|_K\leqslant 1,\quad V\left(z^0,K\right)-\frac{1}{m}\ln\left|P_m\left(z^0\right)\right|<\varepsilon. \tag{2.6}$$

Рассматривая сечения $P_m|_l=P_m(\lambda\xi)=\sum\limits_{j=0}^{m}Q_j(\lambda)\,\xi^j$ на комплексные прямые l вида $z=\lambda\xi$, $\lambda\in\mathbb{C}^n$, $\xi\in\mathbb{C}$, как выше, по неравенствам Коши мы получаем, что $\|Q_j\|_K\leqslant 1$, $j=0,1,\dots,m$. Из

$P_m(z) = \sum\limits_{j=0}^{m} Q_j(z)$, $V\left(z^0, K\right) - \dfrac{1}{m}\ln\left|P_m\left(z^0\right)\right| < \varepsilon$ вытекает, что хотя бы для одного $0 \leqslant j_0 \leqslant m$

$$P_m(z) = \sum_{j=0}^{m} Q_j(z), \quad \left|Q_{j_0}\left(z^0\right)\right| \geqslant \frac{\left|P_m\left(z^0\right)\right|}{m}$$

и

$$V\left(z^0, K\right) - \frac{1}{m}\ln\left|mQ_{j_0}\left(z^0\right)\right| < \varepsilon. \tag{2.7}$$

Так как $\|Q_{j_0}\|_K \leqslant 1$ и $j_0 \leqslant m$, то $\dfrac{1}{m}\ln\left|Q_{j_0}\left(z^0\right)\right| \leqslant V_O\left(z^0, K\right)$. Следовательно, согласно (2.7),

$$V\left(z^0, K\right) - V_O\left(z^0, K\right) = V\left(z^0, K\right) - \frac{1}{m}\ln\left|mQ_{j_0}\left(z^0\right)\right| + \frac{\ln m}{m} \leqslant \varepsilon + \frac{\ln m}{m}.$$

Здесь $\varepsilon > 0$ мы можем взять сколь угодно маленькой, а $m = \deg P_m$ — сколь угодно большой. Отсюда $V\left(z^0, K\right) \leqslant V_O\left(z^0, K\right)$, и вместе с $V_O(z, K) \leqslant V(z, K)$ получаем, что $V_O(z, K) = V(z, K)$. Теорема доказана. □

Следствие 2.1. *Если K — круговой компакт, принадлежащий замкнутому единичному шару $\|z\| \leqslant 1$, то*

$$\hat{K} = \left\{z: \ |z| \cdot \exp V\left(\frac{z}{|z|}, \ K\right) \leqslant 1\right\}.$$

Доказательство. Действительно, для любого однородного полинома Q_m, $\|Q_m\|_K \leqslant 1$ имеем

$$\left|Q_m\left(\frac{z}{|z|}\right)\right|^{1/m} \leqslant \exp V\left(\frac{z}{|z|}, K\right).$$

Отсюда

$$|Q_m(z)| = |z|^m \left|Q_m\left(\frac{z}{|z|}\right)\right| \leqslant \left[|z| \exp V\left(\frac{z}{|z|}, K\right)\right]^m$$

и, значит,

$$\tilde{K} \supset \left\{z: |z| \exp V\left(\frac{z}{|z|}, K\right) \leqslant 1\right\}.$$

Так как, согласно шагу 1 доказательства теоремы 2.4, имеет место $\tilde{K} = \hat{K}$, то

$$\hat{K} \supset \left\{z: |z| \exp V\left(\frac{z}{|z|}, K\right) \leqslant 1\right\}.$$

На самом деле, здесь вместо включения $\supset$ будет знак равенства $=$, поскольку компакт, стоящий в правой части, является полиномиально выпуклым. □

Следствие 2.2 (ср. [18])**.** *Если круговой компакт K принадлежит единичной сфере $S(0,1)$, то полиномиально выпуклая оболочка $\hat{K}$ содержит шар $|z| \leqslant \exp\left[-\sup\limits_{|\xi|=1} V(\xi, K)\right]$.*

Доказательство. Вытекает из следствия 2.1. □

Следствие 2.3. *Для кругового компакта $K \subset \mathbb{C}^n$ имеет место тождество* $\exp V(Rz, K) = R \exp V(z, K)$ $\forall z \notin \hat{K} \bigcap R\hat{K}$.

Доказательство. В самом деле, можно считать, что K — полиномиально выпуклый, $K = \hat{K}$ и $R > 1$. Тогда для $z \notin \hat{K}$ согласно теореме 2.4

$$\exp V(Rz, K) = \sup\left\{|Q(Rz)|^{1/\deg Q}: \ \|Q\|_K \leqslant 1, \ Q \text{ — однородные полиномы}\right\} =$$
$$= \sup\left\{|Q(Rz)|^{1/\deg Q}: \ \|Q\|_K \leqslant 1, \ Q \text{ — однородные полиномы } \deg Q \geqslant 1\right\} =$$
$$= \sup\left\{R\,|Q(z)|^{1/\deg Q}: \ \|Q\|_K \leqslant 1, \ Q \text{ — однородные полиномы } \deg Q \geqslant 1\right\} =$$
$$= R \sup\left\{|Q(z)|^{1/\deg Q}: \ \|Q\|_K \leqslant 1, \ Q \text{ — однородные полиномы}\right\} = R \exp V(z, K).$$

т. е. $\exp V(Rz, K) = R \exp V(z, K)$ $\forall z \notin \hat{K}$. □

Следствие 2.4. *Для кругового компакта* $K \subset \mathbb{C}^n$ *имеет место тождество* $\exp V(z, RK) = R^{-1} \exp V(z, K) \ \ \forall z \notin \hat{K} \bigcap R\hat{K}$.

Доказательство. Действительно, считая опять K полиномиально выпуклым, $K = \hat{K}$ и $R > 1$, для $z \notin \hat{K}$ согласно теореме 2.4 имеем

$$\exp V(Rz, RK) = R \exp V(z, RK), \ \ z \notin RK.$$

Очевидно, $\exp V(Rz, RK) = \exp V(z, K)$. Отсюда $\exp V(z, RK) = R^{-1} \exp V(z, K) \ \ \forall z \notin R\hat{K}$. □

3. Сходимость формальных рядов Хартогса

1. Рассмотрим формальный ряд Хартогса

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k('z)\, z_n^k, \tag{3.1}$$

где $c_k('z)$ — голоморфные функции в некоторой области $'D \subset \mathbb{C}^{n-1}$. Этот ряд — формальный в том смысле, что пока не понятно, где и как он сходится. Предположим, что при каждом фиксированном $'z \in {'D}$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k('z)\, z_n^k$ сходится в круге $|z_n| < R('z^0)$. Мы предполагаем, что $R('z)$ является максимальным радиусом сходимости,

$$R^{-1}('z) = \overline{\lim_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|c_k('z)|}.$$

Если ряд (3.1) равномерно сходится в некоторой окрестности плоскости $\{z_n = 0\}$, т. е. сумма ряда $f('z, z_n)$ голоморфна в окрестности $\{z_n = 0\}$, то, как известно, $f('z, z_n)$ голоморфно продолжается в область

$$D = \left\{ 'z \in {'D} : \ \ |z_n| < R_*('z) \right\}, \tag{3.2}$$

где $R_*('z) = \underline{\lim}_{'w \to z} R(z)$ — нижняя регуляризация функции $R('z)$. Отметим, что $-\ln R_*('z) \in psh('D)$, причем множество $\{'z \in {'D} : \ \ R_*('z) < R('z)\}$ — плюриполярное.

Без условия сходимости ряда (3.1) в некоторой окрестности плоскости $\{z_n = 0\}$ по совокупности переменных голоморфное продолжение функции $f('z, z_n)$ в область типа (3.2), вообще говоря, не имеет места.

Пример 3.1. Берем последовательность компактов

$$K_m = K_m^1 \bigcup K_m^2 \subset \mathbb{C}, \quad K_m^1 = \left\{ |z_1| \leqslant 1, \ \frac{1}{m} \leqslant \arg z_1 \leqslant 2\pi \right\},$$

$$K_m^2 = \left\{ \frac{1}{m} \leqslant |z_1| \leqslant 1, \ \arg z_1 = \frac{1}{2m} \right\}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Тогда непрерывная на компакте K_m функция

$$g_m(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{m!}, & \text{если } \ z_1 \in K_m^1, \\ m!, & \text{если } \ z_1 \in K_m^2, \end{cases}$$

равномерно на K_m приближается полиномами, т. е. существует полином $P_m(z_1)$ такой, что $\|g_m - P_m\|_{K_m} \leqslant \dfrac{1}{m!}$. Ряд

$$f(z_1, z_2) = \sum_{m=1}^{\infty} P_m(z_1)\, z_2^m$$

обладает тем свойством, что при любом фиксированном z_1^0 таком, что $\left|z_1^0\right| < 1$, он сходится на всей плоскости $|z_2| < \infty$, но его сумма $f(z_1, z_2)$ не является голоморфной на множестве $S = \{|z_1| < 1, \ \arg z_1 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$.

Тем не менее, имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1 (см. [12, 35]). *Рассмотрим ряд Хартогса*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\left('z\right) z_n^k$$

с голоморфными в области $'D \subset \mathbb{C}^{n-1}$ коэффициентами $c_k\left('z\right)$, $k = 0, 1, \ldots$ Предположим, что радиус сходимости ряда положителен при каждом фиксированном $'z \in {'D}$, т. е. $R\left('z\right) = 1/\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\left|c_k\left('z\right)\right|} > 0 \ \forall 'z \in {'D}$.

Тогда существует нигде не плотное замкнутое множество $'S \subset {'D}$ такое, что

а). $-\ln R_*\left('z\right) \in psh\left('D \backslash 'S\right)$;

б). *сумма ряда голоморфна по совокупности переменных в*

$$\left\{'z \in {'D} \backslash S, \ |z_n| < R_*\left('z\right)\right\}.$$

Отметим, что без условия $R\left('z\right) > 0 \ \forall 'z \in {'D}$ теорема 3.1, вообще говоря, не верна.

Пример 3.2. Пусть $K = \{|z_1| \leqslant 1\}$ — замкнутый единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}_{z_1}$. Берем последовательность полиномиально выпуклых компактов

$$F_m = \left\{z_1 \in \mathbb{C} : \ 1 + \frac{1}{m} \leqslant |z_1| \leqslant m, \ 0 \leqslant \arg z_1 \leqslant 2\pi - \frac{1}{m}\right\}.$$

Тогда $F_m \subset F_{m+1}$ и $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m = \mathbb{C} \backslash K$. Более того, компакты $F_m \bigcup K$ полиномиально выпуклы. Положим

$$g_m\left(z_1\right) = \begin{cases} m!, & \text{если } z_1 \in F_m \\ \dfrac{1}{m!}, & \text{если } z_1 \in K. \end{cases}$$

По теореме Мергеляна эти функции равномерно на $F_m \bigcup K$ приближаются полиномами, т. е. существуют полиномы $p_m\left(z_1\right)$ такие, что

$$\left\|g_m\left(z_1\right) - p_m\left(z_1\right)\right\|_{K \bigcup F_m} < \frac{1}{m!}, \ m = 1, 2, \ldots$$

Рассмотрим формальный ряд

$$f\left(z_1, z_2\right) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m\left(z_1\right) z_2^m.$$

Этот ряд сходится на всей плоскости $\mathbb{C}_{z_2}$ для любой фиксированной точки $z_1 \in K$, и его сумма голоморфна в $\{|z_1| < 1\} \times \mathbb{C}_{z_2}$. Но радиус сходимости ряда $R\left(z_1\right) = 0$ для всех $z_1 \in \mathbb{C} \backslash K$, и ряд не определяет голоморфную функцию в $\left[\mathbb{C}_{z_1} \backslash K\right] \times \mathbb{C}_{z_2}$.

2. Для формальных рядов на пучке комплексных прямых ситуация более естественная. Пусть на пучке комплексных прямых $\{l : \ z = \lambda\xi, \ \lambda \in \mathbb{C}^n, \ \xi \in \mathbb{C}\} \approx P^{n-1}$ определен формальный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(\lambda\right) \xi^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(\lambda\xi\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(z\right), \tag{3.3}$$

где $c_k\left(z\right)$ — однородные многочлены в $\mathbb{C}^n$.

Теорема 3.2 (см. [7]). *Если для каждой комплексной прямой из некоторого пучка $\Im \subset \{l : \ z = \lambda\xi, \ \lambda \in \mathbb{C}^n, \ \xi \in \mathbb{C}\}$ ряд (3.3) сходится в круге $l \bigcap B\left(0, 1\right)$, то этот ряд сходится в открытом множестве $G = \left\{z \in \mathbb{C}^n : \ |z| \cdot \exp V^*\left(\dfrac{z}{|z|}, E\right) < 1\right\}$. Здесь $E = \bigcup\limits_{l \in \Im} l \bigcap B\left(0, 1\right)$.*

Доказательство. В самом деле, без нарушения общности считаем, что $\Im$ совпадает с совокупностью всех комплексных прямых l, для которых ряд (3.3) сходится в круге $l \bigcap B\left(0, 1\right)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и положим

$$F_N = \left\{\lambda \in S\left(0, 1\right) : \ \left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(\lambda\right) \xi^k\right| \leqslant N \ \text{ при } \ |\xi| \leqslant 1 - \varepsilon\right\}.$$

По неравенствам Коши $|c_k(\lambda)| \leqslant \dfrac{N}{(1-\varepsilon)^k}$, $\lambda \in F_N$, $k = 0, 1, \ldots$ Следовательно, по неравенству Бернштейна—Уолша имеем

$$|c_k(\lambda)| \leqslant \frac{N}{(1-\varepsilon)^k} \left[\exp V^*(\lambda, F_N)\right]^k, \ \lambda \in \mathbb{C}^n, \ k = 0, 1, \ldots$$

В частности, для $\lambda = \dfrac{z}{|z|} \in S(0,1)$

$$\left|c_k\left(\frac{z}{|z|}\right)\right| \leqslant \frac{N}{(1-\varepsilon)^k}\left[\exp V^*\left(\frac{z}{|z|}, F_N\right)\right]^k, \ z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\},$$

что эквивалентно неравенству

$$|c_k(z)| \leqslant \frac{N}{(1-\varepsilon)^k}\left[|z| \exp V^*\left(\frac{z}{|z|}, F_N\right)\right]^k, \ z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, \ k = 0, 1, \ldots$$

Отсюда вытекает, что однородный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ сходится в

$$G_{N,\varepsilon} = \left\{z \in \mathbb{C}^n : \ |z| \cdot \exp V^*\left(\frac{z}{|z|}, F_N\right) < 1 - 2\varepsilon\right\}.$$

Отметим, что множество F_N является замкнутым круговым компактом на сфере $S(0,1)$, причем $F_N \subset F_{N+1}$, $N = 1, 2, \ldots$ и $\bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \hat{F}_N = E$. Следовательно, устремив сначала $N \to \infty$, а затем $\varepsilon \to 0$, мы получаем сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ внутри открытого множества $G = \Big\{z \in \mathbb{C}^n : |z| \cdot \exp V^*\Big(\dfrac{z}{|z|}, E\Big) < 1\Big\}$. $\square$

Замечание 3.1. Если $f(z)$ — какая-либо функция, бесконечно гладкая в окрестности нуля, $f(z) \in C^\infty\{0\}$, то ей соответствует формальный степенной ряд

$$f \sim \sum_{|I|+|J|=0}^{\infty} c_{IJ} z^I \bar{z}^J, \tag{3.4}$$

где $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ и $J = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ — мультииндексы, $|I| = i_1 + i_2 + \ldots + i_n$, $|J| = j_1 + j_2 + \ldots + j_n$, $z^I = z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n}$, $\bar{z}^J = \bar{z}_1^{j_1} \bar{z}_2^{j_2} \ldots \bar{z}_n^{j_n}$. Перепишем ряд в (3.4) в виде

$$\sum_{|I|+|J|=0}^{\infty} c_{IJ} z^I \bar{z}^J = \sum_{|I|=0}^{\infty} c_{I0} z^I + \sum_{|I|+|J|=0, J \neq 0}^{\infty} c_{IJ} z^I \bar{z}^J. \tag{3.5}$$

Если сужение функции $f(z)$ на каждую комплексную прямую $\{l: \ z = w\xi, \ w \in \mathbb{C}^n, \ \xi \in \mathbb{C}\} \subset P^{n-1}$ голоморфно продолжается в единичный круг, то последний ряд в (3.5) обращается в нуль, т. е. $f(z) = \sum\limits_{|I|=0}^{\infty} c_{I0} z^I$, и по теореме 3.2 получаем голоморфность функции в шаре $B(0,1) \subset \mathbb{C}^n$. Таким образом, мы приходим к прекрасной теореме Форелли.

Теорема 3.3 (теорема Форелли [27]). *Если f — бесконечно гладкая функция в точке 0 и сужение $f|_l$ голоморфно в круге $l \bigcap B(0,1)$ для всех комплексных прямых $l \ni 0$, то f голоморфно продолжается в шар $l \bigcap B(0,1)$.*

Замечание 3.2.

1). Для функции $f(z_1, z_2) = \dfrac{z_1^{k+1} \bar{z}_2}{z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2} \in C^k(\mathbb{C}^2)$ теорема 3.2 неприменима, хотя сужение функции голоморфно для всех комплексных прямых $l \ni 0$ (f не определяет формальный степенной ряд (3.4)).

2). Функция $f(z_1,z_2) = |z_1|^2 - |z_2|^2 \in C^\infty(\mathbb{C}^2)$, $f|_l \equiv 0$ на комплексных прямых $\Im = \{z_2 = e^{i\theta}z_1,\ \theta \in [0,2\pi]\}$. Хотя множество $\Im \subset P^1$ образует неплюриполярное множество в проективном пространстве P^1, теорема 3.2 здесь неприменима. Для применения теоремы 3.2 к формальным рядам по z и по $\bar z$ нужно потребовать, чтобы множество $\Im \subset P^{n-1}$ было неполярным в смысле вещественного анализа.

Теорему 3.2 можно доказать в общей форме, когда для комплексной прямой $l \in \Im$ не требуется сходимость ряда (3.3) в круге $l\bigcap B(0,1)$, а требуется его сходимость в произвольном круге $l\bigcap B(0,r_l)$, $0 < r_l \leqslant \infty$. Имеет место следующая основная теорема.

Теорема 3.4. *Пусть дан пучок комплексных прямых* $\Im \subset \{l : z = w\xi,\, w \in \mathbb{C}^n,\, \|w\| = 1,\, \xi \in \mathbb{C}\}$, *проходящих через нуль. Если для каждой комплексной прямой* $l \in \Im$ *сужение* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(\lambda)\,\xi^k$ *ряда* (3.3) *сходится в круге* $l\bigcap B(0,r_l)$, $0 < r_l \leqslant \infty$, *то этот ряд сходится в открытом множестве* $G = \left\{z \in \mathbb{C}^n :\ |z|\cdot \exp V^*\Big(\frac{z}{|z|}, E\Big) < 1\right\}$. *Здесь* $E = \bigcup\limits_{l\in\Im} l\bigcap B(0,r_l)$.

Доказательство. Доказательство проведем в несколько шагов, предполагая первоначально для определенности, что $\Im$ — это множество всех комплексных прямых, для которых $r_l > 0$, т. е. $\Im = \{l \in P^{n-1} :\ r_l > 0\}$.

1. При $0 < r_l \leqslant 1\ \forall l \in \Im$ фиксируем числа $N \in \mathbb{N}$, $r > 0$ и $0 < \varepsilon < r$. Положим $\Im_r = \{l \in \Im :\ r_l \geqslant r\}$ и обозначим

$$F_{N,r,\varepsilon} = \left\{\lambda \in S(0,1),\ l = \{z = \lambda\xi\} \in \Im_r :\ \left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\lambda)\,\xi^k\right| \leqslant N \ \text{ при } \ |\xi| \leqslant r_l - \varepsilon\right\}.$$

По неравенствам Коши $|c_k(\lambda)| \leqslant \dfrac{N}{(r_l-\varepsilon)^k}$, $\lambda \in F_{N,r,\varepsilon}$, $k = 0,1,\ldots$ Это эквивалентно тому, что $|c_k((r_l-\varepsilon)\lambda)| \leqslant N$, $\lambda \in F_{N,r,\varepsilon}$, $k = 0,1,\ldots$ Так как $F_{N,r,\varepsilon}$ — круговой компакт, то отсюда $|c_k(z)| \leqslant N$, $z = \lambda\xi$, $\lambda \in F_{N,r,\varepsilon}$, $|\xi| \leqslant r_l - \varepsilon$, $k = 0,1,\ldots$ Следовательно, $\|c_k(z)\|_{E_{N,r,\varepsilon}} \leqslant N$, где $E_{N,r,\varepsilon} = \{|z| \leqslant r_l - \varepsilon,\ z = \lambda\xi,\ \lambda \in F_{N,r,\varepsilon}\}$, и по неравенству Бернштейна—Уолша $|c_k(z)| \leqslant N\left[\exp V^*(z, E_{N,r,\varepsilon})\right]^k$, $z \in \mathbb{C}^n$, $k = 0,1,\ldots$

В частности, для $\lambda = \dfrac{z}{|z|} \in S(0,1)$

$$\left|c_k\left(\frac{z}{|z|}\right)\right| \leqslant N\left[\exp V^*\left(\frac{z}{|z|}, E_{N,r,\varepsilon}\right)\right]^k,\ \ z \in \mathbb{C}^n\setminus\{0\},$$

что эквивалентно неравенству

$$|c_k(z)| \leqslant N\left[|z|\exp V^*\left(\frac{z}{|z|}, E_{N,r,\varepsilon}\right)\right]^k,\ \ z \in \mathbb{C}^n\setminus\{0\},\ k = 0,1,\ldots$$

Отсюда вытекает, что однородный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ сходится в

$$G_{N,r,\varepsilon} = \left\{z \in \mathbb{C}^n :\ |z|\cdot\exp V^*\left(\frac{z}{|z|}, E_{N,r,\varepsilon}\right) < 1\right\}.$$

Устремив сначала $N \to \infty$, а затем $\varepsilon \to 0$, мы получаем сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ внутри открытого множества

$$G_r = \left\{z \in \mathbb{C}^n :\ |z|\cdot\exp V^*\left(\frac{z}{|z|}, E_r\right) < 1\right\},$$

где $E_r = \bigcup\limits_{l\in\Im_r} l\bigcap B(0,r_l)$. При $r\downarrow 0$ множество E_r, возрастая, сходится к E. Следовательно, $V^*\Big(\dfrac{z}{|z|},E_r\Big)\downarrow V^*\Big(\dfrac{z}{|z|},E\Big)$ и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ равномерно сходится внутри открытого множества

$$G=\left\{z\in\mathbb{C}^n:\ |z|\cdot\exp V^*\left(\frac{z}{|z|},E\right)<1\right\}.$$

2. Ряд (3.3) сходится в круге $l\bigcap B(0,r_l)$ переменного радиуса r_l, $0<r_l\leqslant R$, $l\in\Im$. Сделаем преобразование $z=Rw$. Соответствующий ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(Rw)$ обладает тем свойством, что его сужение на $l\in\Im$ сходится в круге радиуса r_l/R, $0<r_l/R\leqslant 1$. Тогда из сказанного выше следует, что этот ряд сходится в открытом множестве

$$\left\{w\in\mathbb{C}^n:\ |w|\cdot\exp V^*\left(\frac{w}{|w|},\frac{E}{R}\right)<1\right\},\ \ \frac{E}{R}=\bigcup_{l\in\Im} l\bigcap B(0,r_l/R).$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ сходится в открытом множестве

$$\left\{z\in\mathbb{C}^n:\ \frac{|z|}{R}\exp V^*\left(\frac{z}{|z|},\frac{E}{R}\right)<1\right\}.$$

Но согласно следствию 2.4 из теоремы 2.4, функция Грина $V^*\Big(\xi,\dfrac{E}{R}\Big)=RV^*(\xi,E)$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ сходится в открытом множестве $\left\{z\in\mathbb{C}^n:\ |z|\exp V^*\Big(\dfrac{z}{|z|},E\Big)<1\right\}$, где $E=\bigcup\limits_{l\in\Im} l\bigcap B(0,r_l)$.

3. Рассмотрим общий случай: $0<r_l\leqslant\infty$, $l\in\Im$. Фиксируем $R>1$ и обозначим $E_R=E\bigcap\{\|z\|\leqslant R\}$. Согласно пункту 2 доказательства, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ сходится в открытом множестве $\left\{z\in\mathbb{C}^n:\ |z|\exp V^*\Big(\dfrac{z}{|z|},E_R\Big)<1\right\}$. Теперь доказательство теоремы легко получается путем устремления R к бесконечности: $V^*\Big(\dfrac{z}{|z|},E_R\Big)\downarrow V^*\Big(\dfrac{z}{|z|},E\Big)$ при $R\uparrow\infty$. □

4. Голоморфное продолжение функций, имеющих тонкую особенность вдоль фиксированного направления

Начнем со следующей теоремы, опубликованной в совместной с Е. М. Чиркой статье [13].

Теорема 4.1. *Пусть функция $f('z,z_n)$ голоморфна в поликруге $U='U\times U_n\subset\mathbb{C}^{n-1}_{'z}\times\mathbb{C}_{z_n}$ и при каждом фиксированном $'a$ из некоторого неплюриполярного множества $E\subset{}'U$ функция $f('a,z_n)$ переменного z_n продолжается до функции, голоморфной на всей плоскости, за исключением некоторого полярного (дискретного) множества особенностей $S_{'a}$. Тогда f голоморфно продолжается в $('U\times\mathbb{C})\setminus S$, где S — замкнутое плюриполярное (аналитическое) подмножество $'U\times\mathbb{C}$.*

Трудным моментом доказательства теоремы является описание особого множества вне U; априори $\bigcup\limits_{'a\in'U} S_{'a}$ может быть всюду плотным в $'U\times[\mathbb{C}\setminus U_n]$. Эти трудности преодолевается путем разложения функции в ряд Якоби—Хартогса $f(z',z_n)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k('z,z_n)\,g^k(z_n)$ по всевозможным рациональным функциям

$$g(z_n)=\frac{z_n^m}{p_m(z_n)},\ p_m(z_n)-\text{полином степени } m>0. \tag{4.1}$$

Далее в доказательстве существенно применяется теория плюрипотенциала, потенциальные свойства семейства плюрисубгармонических функций и псевдовогнутых множеств.

Для формальных рядов на пучке прямых, т. е. для формальных рядов однородных многочленов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$, где $c_k(z)$ — однородные многочлены, справедлива следующая теорема (ср. пример 3.2).

Теорема 4.2. *Пусть дан неплюриполный пучок комплексных прямых*

$$\Im \subset \{l : z = \lambda\xi,\ \lambda \in \mathbb{C}^n,\ \|\lambda\| = 1,\ \xi \in \mathbb{C}\} = P^n,$$

проходящих через нуль. Если для каждой комплексной прямой $l \in \Im$ сужение $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(\lambda)\,\xi^k$ ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ на комплексную прямую l сходится в круге радиуса $r_l > 0$ и сумма этого ряда голоморфна на $\mathbb{C}$, за исключением полярного (дискретного) множества, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ определяет в пространстве $\mathbb{C}^n$ голоморфную функцию за исключением, быть может, некоторого плюриполярного (аналитического) множества $S \subset \mathbb{C}^n$.

Доказательство. Согласно теореме 3.4 ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ сходится в открытом множестве

$$G = \left\{ z \in \mathbb{C}^n :\ |z| \cdot \exp V^*\left(\frac{z}{|z|}, E\right) < 1 \right\},$$

где $E = \bigcup\limits_{l\in\Im} l \bigcap B(0, r_l)$. Сумма этого ряда $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ является голоморфной функцией в G. По условию теоремы 4.2 множество E не является плюриполярным. Следовательно, $V^*(\cdot, E) \neq +\infty$ и область G содержит точку 0.

Рассмотрим стандартное преобразование в пространстве $\mathbb{C}^n$:

$$\pi : (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n) \to (z_1 z_n, z_2 z_n, \ldots, z_{n-1} z_n, z_n),$$

при котором вертикальные комплексные прямые $('z^0, z_n) = (z_1^0, z_2^0, \ldots, z_{n-1}^0, z_n)$, $z_n \in \mathbb{C}$, переходят в пучок прямых $(z_1^0 z_n, z_2^0 z_n, \ldots, z_{n-1}^0 z_n, z_n)$, $z_n \in \mathbb{C}$. Поэтому функция $\tilde{f}('z, z_n) = \pi^{-1} \circ f = f(z_1 z_n, z_2 z_n, \ldots, z_{n-1} z_n, z_n)$, $z_n \in \mathbb{C}$, обладает свойством голоморфности по совокупности переменных в некоторой окрестности плоскости $\{z_n = 0\}$, и при каждом фиксированном $'z^0 = (z_1^0, z_2^0, \ldots, z_{n-1}^0) :\ l = \{z_1^0 z_n, z_2^0 z_n, \ldots, z_{n-1}^0 z_n, z_n,\ z_n \in \mathbb{C}\} \in \Im$ функция $\tilde{f}('z^0, z_n)$, $z_n \in \mathbb{C}$, голоморфно продолжается на всю плоскость $\mathbb{C}_{z_n}$ за исключением полярного (дискретного) множества. По теореме 4.1 функция $\tilde{f}('z, z_n)$ голоморфно продолжается в $\mathbb{C}^n \backslash S$, где $S \subset \mathbb{C}^n$ — плюриполярное (аналитическое) множество. Отсюда функция $f(z) = \pi \circ f(z)$ голоморфно продолжается в $[\mathbb{C}^n \backslash \{z_n = 0\}] \backslash \pi(S)$, где $\pi(S)$ — плюриполярное (аналитическое) множество в $\mathbb{C}^n \backslash \{z_n = 0\}$.

Выше мы рассматривали преобразование $\pi : (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n) \to (z_1 z_n, z_2 z_n, \ldots, z_{n-1} z_n, z_n)$, выделяя координату oz_n. Если мы проделаем эту процедуру для каждого индекса $k = n, n-1, \ldots, 1$, то получим, что функция $f(z)$ голоморфно продолжается в $[\mathbb{C}^n \backslash \{z_k = 0\}] \backslash A_k$, где A_k — плюриполярное (аналитическое) множество в $\mathbb{C}^n \backslash \{z_k = 0\}$. Отсюда легко вытекает, что $f(z)$ голоморфно продолжается в $\mathbb{C}^n \backslash A$, где A — плюриполярное (аналитическое) множество в $\mathbb{C}^n$. □

5. Голоморфное продолжение функций вдоль семейства аналитических кривых

Вариация теоремы Хартогса в смысле замены координатных прямых семействами аналитических кривых, пожалуй, впервые рассмотрена в работе Е. М. Чирки [15]. Приведем три утверждения из этой работы, в которых продемонстрированы новые подходы в изучении функций, голоморфных на голоморфных слоениях:

1). *Пусть в области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ даны n линейно независимых расслоений $\left\{S_\xi^j\right\}$, $\Omega = \bigcup\limits_{\xi} S_\xi^j$, голоморфными кривыми S_ξ^j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Если функция f локально ограничена в Ω и все сужения $f|_{S_\xi^j}$ являются голоморфными, то f голоморфна в Ω.*

Доказательство этого утверждения основывается на том факте, что при указанных условиях f является липшицевой функцией, имеющей локально ограниченный дифференциал df почти всюду в Ω, причем $\bar{\partial} f = 0$.

2). *Пусть область* $\Omega \subset D \times \mathbb{C}_w^k$, $D \subset \mathbb{C}_z^m$, *расслоена голоморфными графиками* S_ξ *так, что* $w = \phi_\xi(z)$. *Если все сужения* $f|_{S_\xi}$ *функции* $f(z,w)$*голоморфны на* S_ξ *и* $f(c,w)$ *голоморфны на* $\Omega \bigcap \{z = c\}$, $c \in D$, *то* $f(z,w)$ *является голоморфной в* Ω.

В доказательстве утверждения сначала с использованием теоремы Бэра находится открытая часть $\Omega_1 \subset \Omega$, где $f(z,w)$ ограничена, а затем с применением метода доказательства утверждения 1 доказывается голоморфность этой функции в Ω_1. Далее, так как $f(c,w)$ голоморфна на $\Omega \bigcap \{z = c\}$, то по классической лемме Хартогса заключается, что $f(z,w)$ голоморфна в Ω.

Следующее утверждение является криволинейным аналогом классической леммы Хартогса.

3). *Пусть область* $\Omega \subset D \times \mathbb{C}_w^k$, $D \subset \mathbb{C}_z^m$, $0 \in D$, *как в утверждении* 2, *расслоена голоморфными графиками* S_ξ *так, что* $w = \phi_\xi(z)$. *Если все сужения* $f|_{S_\xi}$ *функции* $f(z,w)$ *голоморфны на* S_ξ *и* $f(z,w)$ *голоморфна по совокупности переменных в некоторой окрестности* $\Omega \bigcap \{z = 0\}$, *то* $f(z,w)$ *является голоморфной функцией в* Ω.

Отметим, что теорема Форелли (см. раздел 3) является своеобразным вариантом теоремы Хартогса. В работе [15] Е. М. Чирка показал также справедливость криволинейного аналога теоремы Форелли при $n = 2$. Дальнейшие вариации теоремы Хартогса, а также теоремы Форелли получены в работах [28, 29, 31] К.-Т. Кима, Е. Полецкого, Г. Шмалза, Ж.-Ч. Жу.

Теорема 5.1 (см. [31]). *Если функция* $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ — *бесконечно гладкая в точке* 0, $f \in C^\infty(0)$, *и голоморфна вдоль интегральных аналитических кривых векторного поля* $X = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j z_j \dfrac{\partial}{\partial z}$, *где* α_j — *константы,* $\dfrac{\alpha_j}{\alpha_k} > 0\ \forall j,k$, *то* f *голоморфна в* $B(0,1)$.

Теорема 5.2 (см. [28]). *Пусть область* $\Omega \subset D \times \mathbb{C}_w^k$, $D \subset \mathbb{C}_z^m$, *расслоена гладким радиальным в точке* 0 *семейством аналитических кривых* $\{S_\xi\}$, $\xi \in P^{n-1}$, $0 \in S_\xi$ *так, что* $\bigcup_{\xi} S_\xi = \Omega$. *Если функция* $f \in \mathbb{C}^\infty\{0\}$ *обладает тем свойством, что все ее сужения* $f|_{S_\xi}$ *голоморфны на* S_ξ, *то* f *голоморфно продолжается в* Ω.

В этом разделе мы изучаем голоморфное продолжение формального ряда из однородных многочленов, который голоморфен вдоль заданного семейства аналитических кривых, проходящих через нуль. При этом на семейство аналитических кривых не накладываются какие-либо другие условия. Начнем со следующей леммы, которая имеет и самостоятельное значение.

Лемма 5.1. *Ряд вида* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\xi)\,\xi^k$, *где* $a_k(\xi) \in O(U)$, $k = 0,1,\ldots$, *сходится равномерно внутри круга* $U : |\xi| < 1$ *тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \|a_k(\xi)\|_{|\xi| \leqslant 1-\varepsilon}^{1/k} \leqslant 1. \tag{5.1}$$

Доказательство. В самом деле, если выполняется (5.1), то при фиксированном $\varepsilon > 0$ найдется k_0 такое, что $|a_k(\xi)| < (1+\varepsilon)^k$, $|\xi| \leqslant 1-\varepsilon$, $k \geqslant k_0$. Следовательно, $\left|a_k(\xi)\,\xi^k\right| \leqslant |(1+\varepsilon)\,\xi|^k \leqslant \left(1-\varepsilon^2\right)^k$ и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\xi)\,\xi^k$ сходится равномерно в круге $|\xi| \leqslant 1-\varepsilon$. И наоборот, если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\xi)\,\xi^k$ сходится в круге $|\xi| \leqslant 1-\varepsilon$ равномерно, то $\left\|a_k(\xi)\,\xi^k\right\|_{|\xi| \leqslant 1-\varepsilon} \leqslant const$, $k = 0,1,2,\ldots$ Отсюда $\overline{\lim_{k \to \infty}} \|a_k(\xi)\|_{|\xi| \leqslant 1-\varepsilon}^{1/k} \leqslant 1$. □

Замечание 5.1. Если неравенство $\overline{\lim_{k \to \infty}} |a_k(\xi)|^{1/k} \leqslant 1$ выполняется поточечно при фиксированных $\xi \in U$, то существует всюду плотное открытое множество $\tilde{U} \subset U$, внутри которого ряд сходится равномерно.

В самом деле, положим $F_m = \left\{\xi \in U : \ \left|a_k(\xi)\,\xi^k\right| \leqslant m,\ k = 0, 1, 2, \ldots, \right\}$. Тогда F_m — замкнутые подмножества U и $U = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m$. По теореме Бэра мы получаем, что открытое ядро $\tilde{U} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m^0$ является всюду плотным в U, а ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(\xi)\,\xi^k$ равномерно сходится внутри $\tilde{U}$.

Следующая теорема является ключевой в исследовании голоморфных функций многих переменных вдоль фиксированных кривых. Пусть $A = \{z = p(\xi),\ |\xi| < 1\}$ — аналитическая кривая, где $p(\xi) = (p_1(\xi), \ldots, p_n(\xi))$ — голоморфная в единичном круге $U: \ |\xi| < 1$ вектор-функция, $p(0) = 0$. Положим $A_\varepsilon = A \bigcap \{\,|\xi| < 1 - \varepsilon\}$, $0 < \varepsilon < 1$.

Теорема 5.3. *Предположим, что $A \subset \mathbb{C}^n$ — аналитическая кривая, проходящая через нуль, $0 \in A$, такая, что ряд из однородных полиномов $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$, где $c_k(z)$ — однородный полином степени k, сходится на множестве A. Тогда $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \|c_k(z)\|_{A_\varepsilon}^{1/k} \leqslant 1$.*

Доказательство. Действительно, пусть $A: \{z = p(\xi)\}$ — аналитическая кривая, проходящая через 0, где $p(\xi)$ — голоморфная в единичном круге $U: |\xi| < 1$ вектор-функция, $p(0) = 0$. Предположим, что $f_A(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(p(\xi))$ сходится в круге $|\xi| < 1$. Запишем

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(p(\xi)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k(p(\xi))}{\xi^k}\xi^k,$$

где $\dfrac{c_k(p(\xi))}{\xi^k}$ — голоморфные функции в единичном круге $|\xi| < 1$. Ясно, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(p(\xi))$ сходится равномерно в круге $|\xi| < 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Следовательно, согласно лемме 5.1

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left\| \frac{c_k(p(\xi))}{\xi^k} \right\|_{|\xi| \leqslant 1-\varepsilon}^{1/k} \leqslant 1.$$

Отсюда

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \|c_k(p(\xi))\|_{|\xi| \leqslant 1-\varepsilon}^{1/k} \leqslant 1.$$

□

Основным результатом раздела 4 является следующая теорема.

Теорема 5.4. *Пусть дано произвольное семейство $\aleph = \{A_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ аналитических кривых A_α: $z = p_\alpha(\xi)$, $\xi \in U$, $p_\alpha(0) = 0$. Если ряд из однородных полиномов $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$, где $c_k(z)$ — однородный полином степени k, сходится на каждом множестве A_α, $\alpha \in \Lambda$, то этот ряд сходится равномерно внутри шара*

$$B\left(0, \frac{1}{\exp \underline{\gamma}(E)}\right) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \ \ \|z\| < \frac{1}{\exp \underline{\gamma}(E)} \right\}, \tag{5.2}$$

Здесь $E = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ и $\underline{\gamma}(E) = \underline{\lim\limits_{z\to\infty}} \left[V^*(z,\ E) - \ln\|z\|\right]$ — нижняя постоянная Робена множества E.

Следствие 5.1. *В условиях теоремы 5.4, если множество $E = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ не является плюриполярным в $\mathbb{C}^n$, то формальный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ имеет сумму $f(z)$, голоморфную в непустом шаре $\|z\| < \exp^{-1} \underline{\gamma}(E)$.*

Замечание 5.2 (см. раздел 3)**.** Если $f(z) \in C^\infty\{0\}$, то ей соответствует формальный степенной ряд

$$f \sim \sum_{|I|=0}^{\infty} c_{I0} z^I + \sum_{|I|+|J|=0, J\neq 0}^{\infty} c_{IJ} z^I \bar{z}^J, \tag{5.3}$$

где $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ и $J = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ — мультииндексы, $|I| = i_1 + i_2 + \ldots + i_n$, $|J| = j_1 + j_2 + \ldots + j_n$, $z^I = z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n}$, $\bar{z}^J = \bar{z}_1^{j_1} \bar{z}_2^{j_2} \ldots \bar{z}_n^{j_n}$. Если сужения $f|_{A_\alpha}$, $\alpha \in \Lambda$ голоморфны и множество $E = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ не является $\mathbb{R}^{2n}$-полярным, то второй ряд в (5.3) обращается в нуль. Поэтому, применяя теорему 5.4 в этом случае, мы получаем, что функция f является голоморфной в некоторой окрестности нуля.

Доказательство теоремы 5.2. Фиксируем число $0 < \varepsilon < 1$. Согласно теореме 5.1 имеет место $\varlimsup\limits_{k \to \infty} \|c_k(z)\|_{A_{\alpha,\varepsilon}}^{1/k} \leqslant 1$ для каждого $\alpha \in \Lambda$, где $A_{\alpha,\varepsilon} = \{z \in \mathbb{C}^n : \ z = p_\alpha(\xi), \ |\xi| \leqslant 1 - \varepsilon\} \subset\subset A_\alpha$. Для каждого фиксированного $j \in \mathbb{N}$ положим

$$\Lambda_{j,\varepsilon} = \left\{\alpha \in \Lambda : \ \|c_k(z)\|_{A_{\alpha,\varepsilon}}^{1/k} \leqslant 1 + \varepsilon, \ \ k \geqslant j\right\}$$

и

$$E_{j,\varepsilon} = \left\{\bigcup A_{\alpha,\varepsilon} : \ \alpha \in \Lambda_{j,\varepsilon}\right\}.$$

Тогда $\|c_k(z)\|_{E_{j,\varepsilon}}^{1/k} \leqslant 1 + \varepsilon$, $k \geqslant j$. По непрерывности это неравенство верно вплоть до замыкания $\overline{E}_{j,\varepsilon}$, т. е. $\|c_k(z)\|_{\overline{E}_{j,\varepsilon}}^{1/k} \leqslant 1 + \varepsilon$, $k \geqslant j$. По неравенству Бернштейна—Уолша

$$|c_k(z)|^{1/k} \leqslant (1 + \varepsilon) \exp V^*\left(z, \overline{E}_{j,\varepsilon}\right), \ \ z \in \mathbb{C}^n, \ k \geqslant j.$$

Отсюда следует, что при фиксированном радиусе $R > 0$

$$|c_k(z)|^{1/k} \leqslant (1 + \varepsilon) \max_{\|z\| = R} \exp V^*\left(z, \overline{E}_{j,\varepsilon}\right), \ \ z \in \partial B(0, R), \ k \geqslant j,$$

и для произвольного $z \in \mathbb{C}^n$ имеем неравенство

$$|c_k(z)|^{1/k} = \left|c_k\left(\frac{\|z\|}{R} \frac{Rz}{\|z\|}\right)\right|^{1/k} = \frac{\|z\|}{R} \left|c_k\left(\frac{Rz}{\|z\|}\right)\right|^{1/k} \leqslant (1 + \varepsilon) \|z\| \frac{\max\limits_{\|\xi\| = R} \exp V^*\left(\xi, \overline{E}_{j,\varepsilon}\right)}{R}, \ \ k \geqslant j.$$

При $R \to \infty$ из этого неравенства мы получаем, что

$$|c_k(z)|^{1/k} \leqslant (1 + \varepsilon) \|z\| \exp \underline{\gamma}\left(\overline{E}_{j,\varepsilon}\right), \ \ k \geqslant j. \tag{5.4}$$

Из (5.4) вытекает, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ равномерно сходится в шаре

$$B\left(0, \frac{1}{(1 + \varepsilon) \exp \underline{\gamma}\left(\overline{E}_{j,\varepsilon}\right)}\right) = \left\{\|z\| < \frac{1}{(1 + \varepsilon) \exp \underline{\gamma}\left(\overline{E}_{j,\varepsilon}\right)}\right\}. \tag{5.5}$$

Устремив сначала $j \to \infty$, а затем $\varepsilon \to 0$, мы из (5.5) получаем, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ равномерно сходится в шаре

$$B\left(0, \frac{1}{\exp \underline{\gamma}(E)}\right) = \left\{z \in \mathbb{C}^n : \ \ \|z\| < \frac{1}{\exp \underline{\gamma}(E)}\right\}.$$

Теорема доказана. □

Замечание 5.3. Как видно из доказательства теоремы 5.4, область сходимости ряда $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z)$ может быть больше, чем шар (5.2), если мы воспользуемся оценками однородных полиномов в круговых областях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдуллаев Б.И., Садуллаев А.* Теория потенциалов в классе m-субгармонических функций// Тр. МИАН. — 2012. — *279*. — С. 166–192.
2. *Абдуллаев Б.И., Садуллаев А.* Емкости и гессианы в классе m-субгармонических функций// Докл. РАН. — 2013. — *448*, № 5. — С. 1–3.
3. *Атамуратов А.А.* О мероморфном продолжении вдоль фиксированного направления// Мат. заметки. — 2009. — *86*, № 3. — С. 323–327.

4. *Захарюта В. П.* Экстремальные плюрисубгармонические функции, ортогональные полиномы и теорема Бернштейна—Уолша для аналитических функций многих комплексных переменных// Ann. Polon. Math. — 1976. — *33*. — С. 137–148.
5. *Имомкулов С. А.* О голоморфном продолжении функций, заданных на граничном пучке комплексных прямых// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2005. — *69*, № 2. — С. 125–144.
6. *Садуллаев А.* Плюрисубгармонические меры и емкости на комплексных многообразиях// Усп. мат. наук. — 1981. — *36*, № 4. — С. 35–105.
7. *Садуллаев А.* Плюрисубгармонические функции// Соврем. пробл. мат. Фундам. направл. — 1985. — *8*. — С. 65–113.
8. *Садуллаев А.* О плюригармоническом продолжении вдоль фиксированного направления// Мат. сб. — 2005. — *196*. — С. 145–156.
9. *Садуллаев А.* Теория плюрипотенциала. Применения. — Рига: Palmarium Academic Publishing, 2012.
10. *Садуллаев А., Имомкулов С. А.* Продолжение плюригармонических функций с дискретными особенностями на параллельных сечениях// Вестн. Красноярск. гос. ун-та. — 2004. — № 5/2. — С. 3–6.
11. *Садуллаев А., Имомкулов С. А.* Продолжение голоморфных и плюригармонических функций с тонкими особенностями на параллельных сечениях// Тр. МИАН. — 2006. — *253*. — С. 158–174.
12. *Садуллаев А., Туйчиев Т.* О продолжении рядов Хартогса, допускающих голоморфное продолжение на параллельные сечениия// Узб. мат. ж. — 2009. — № 1. — С. 148–157.
13. *Садуллаев А., Чирка Е. М.* О продолжении функций с полярными особенностями// Мат. сб. — 1987. — *132*, № 3. — С. 383–390.
14. *Худайберганов Г.* О полиномиальной и рациональной выпуклости объединения компактов в $\mathbb{C}^n$// Изв. вузов. Сер. мат. — 1987. — № 2. — С. 70–74.
15. *Чирка Е.* Вариация теоремы Хартогса// Тр. МИАН. — 2006. — *253*. — С. 232–240.
16. *Abdullayev B. I.* Subharmonic functions on complex Hyperplanes of $\mathbb{C}^n$// Журн. СФУ. Сер. Мат. Физ. — 2013. — *6*, № 4. — С. 409–416.
17. *Abdullayev B. I.* $\mathcal{P}$-measure in the class of $m-wsh$ functions// Журн. СФУ. Сер. Мат. Физ. — 2014. — *7*, № 1. — С. 3–9.
18. *Alexander H.* Projective capacity// Ann. Math. Stud. — 1981. — *100*, № 1. — С. 3–27.
19. *Atamuratov A. A., Vaisova M. D.* On the meromorphic extension along the complex lines// TWMS J. Pure Appl. Math. — 2011. — *2*, № 1. — С. 10–16.
20. *Bedford E.* Survey of pluripotential theory, several complex variable// Math. Notes. — 1993. — *38*. — С. 48–95.
21. *Bedford E., Taylor B. A.* A new capacity for plurisubharmonic functions// Acta Math. — 1982. — *149*, № 1-2. — С. 1–40.
22. *Blocki Z.* Weak solutions to the complex Hessian equation// Ann. Inst. Fourier. — 2005. — *5*. — С. 1735–1756.
23. *Bloom T., Levenberg N.* Weighted pluripotential theory in $\mathbb{C}^N$// Am. J. Math. — 2003. — *125*, № 1. — С. 57–103.
24. *Cegrell U.* The general definition of the complex Monge—Ampere operator// Ann. Inst. Fourier. — 2004. — *54*. — С. 159–179.
25. *Coman D., Guedj V., Zeriahi A.* Domains of definition of Monge—Ampere operators on compact Kahler manifolds// Math. Z. — 2008. — *259*. — С. 393–418.
26. *Dinew S., Kolodziej S.* A priori estimates for the complex Hessian equation// Anal. PDE. — 2014. — *7*. — С. 227–244.
27. *Forelly F.* Plurisubharmonicity in terms of harmonic slices// Math. Scand. — 1977. — *41*. — С. 358–364.
28. *Joo J.-C., Kim K.-T., Schmalz G.* A generalization of Forelli's theorem// Math. Ann. — 2013. — *355*. — С. 1171–1176.
29. *Joo J.-C., Kim K.-T., Schmalz G.* On the generalization of Forelli's theorem// Math. Ann. — 2016. — *365*. — С. 1187–1200.
30. *Khudaiberganov G.* On the homogeneous-polynomially convex hull of balls// Pliska Stud. Math. Bulgar. — 1989. — *10*. — С. 45–49.
31. *Kim K.-T., Poletsky E., Schmalz G.* Functions holomorphic along holomorphic vector fields// J. Geom. Anal. — 2009. — *19*. — С. 655–666.
32. *Klimek M.* Pluripotential theory. — Oxford etc.: Clarendon Press, 1991.
33. *Siciak J.* Extremal plurisubharmonic functios in $\mathbb{C}^n$ // Ann. Polon. Math. — 1981. — *39*. — С. 175–211.
34. *Tuychiev T.* On domains of convergence of multidimensional locunary series// Журн. СФУ. Сер. Мат. Физ. — 2019. — *12*, № 6. — С. 736–746.

35. *Tuychiev T., Tishabaev J.* On the continuation of the Hartogs series with holomorphic coefficients// Bull. Natl. Univ. Uzbekistan. Math. Nat. Sci. — 2019. — *2*, № 1. — С. 69–76.

А. С. Садуллаев
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: sadullaev@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-127-143 UDC 517.55

Holomorphic Continuation of Functions Along a Fixed Direction (Survey)

© 2022 **A. S. Sadullaev**

Abstract. In this article, we give an overview of the most significant and important results on holomorphic extensions of functions along a fixed direction. We discuss the following geometric questions of multidimensional complex analysis:

- holomorphic extension along a bundle of complex straight line, the Forelly theorem;
- holomorphic continuation of functions with thin singularities along a fixed direction;
- holomorphic continuation of functions along a family of analytic curves.

REFERENCES

1. B. I. Abdullaev and A. Sadullaev, “Teoriya potentsialov v klasse m-cubgarmonicheskikh funktsiy” [Potential theory in the class of m-subharmonic functions], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2012, **279**, 166–192 (in Russian).
2. B. I. Abdullaev and A. Sadullaev, “Emkosti i gessiany v klasse m-subgarmonicheskikh funktsiy” [Capacities and Hessians in the class of m-subharmonic functions], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2013, **448**, No. 5, 1–3 (in Russian).
3. A. A. Atamuratov, “O meromorfnom prodolzhenii vdol’ fiksirovannogo napravleniya” [On meromorphic continuation along a fixed direction], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2009, **86**, No. 3, 323–327 (in Russian).
4. V. P. Zakharyuta, “Ekstremal’nye plyurisubgarmonicheskie funktsii, ortogonal’nye polinomy i teorema Bernshteyna—Uol’sha dlya analiticheskikh funktsiy mnogikh kompleksnykh peremennykh” [Extremal plurisubharmonic functions, orthogonal polynomials, and the Bernstein–Wolsh theorem for analytic functions of several complex variables], *Ann. Polon. Math.*, 1976, **33**, 137–148 (in Russian).
5. S. A. Imomkulov, “O golomorfnom prodolzhenii funktsiy, zadannykh na granichnom puchke kompleksnykh pryamykh” [On the holomorphic continuation of functions defined on the boundary pencil of complex lines], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 2005, **69**, No. 2, 125–144 (in Russian).
6. A. Sadullaev, “Plyurisubgarmonicheskie mery i emkosti na kompleksnykh mnogoobraziyakh” [Plurisubharmonic measures and capacities on complex manifolds], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1981, **36**, No. 4, 35–105 (in Russian).
7. A. Sadullaev, “Plyurisubgarmonicheskie funktsii” [Plurisubharmonic functions], *Sovrem. probl. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 1985, **8**, 65–113 (in Russian).
8. A. Sadullaev, “O plyurigarmonicheskom prodolzhenii vdol’ fiksirovannogo napravleniya” [On pluriharmonic continuation along a fixed direction], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2005, **196**, 145–156 (in Russian).
9. A. Sadullaev, *Teoriya plyuripotentsiala. Primeneniya* [Theory of Pluripotential. Applications], Palmarium Academic Publishing, Riga, 2012 (in Russian).
10. A. Sadullaev and S. A. Imomkulov, “Prodolzhenie plyurigarmonicheskikh funktsiy s diskretnymi osobennostyami na parallel’nykh secheniyakh” [Extension of pluriharmonic functions with discrete

singularities on parallel sections], *Vestn. Krasnoyarsk. gos. un-ta* [Bull. Krasnoyarsk State Univ.], 2004, No. 5/2, 3–6 (in Russian).
11. A. Sadullaev and S. A. Imomkulov, "Prodolzhenie golomorfnykh i plyurigarmonicheskikh funktsiy s tonkimi osobennostyami na parallel'nykh secheniyakh" [Extension of holomorphic and pluriharmonic functions with fine singularities on parallel sections], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2006, **253**, 158–174 (in Russian).
12. A. Sadullaev and T. Tuychiev, "O prodolzhenii ryadov Khartogsa, dopuskayushchikh golomorfnoe prodolzhenie na parallelnye secheniiya" [On extension of Hartogs series admitting holomorphic extension to parallel sections], *Uzb. mat. zh.* [Uzbek. Math. J.], 2009, No. 1, 148–157 (in Russian).
13. A. Sadullaev and E. M. Chirka, "O prodolzhenii funktsiy s polyarnymi osobennostyami" [On the continuation of functions with polar singularities], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1987, **132**, No. 3, 383–390 (in Russian).
14. G. Khudayberganov, "O polinomial'noy i ratsional'noy vypuklosti ob"edineniya kompaktov v $\mathbb{C}^n$" [On the polynomial and rational convexity of the union of compact sets in $\mathbb{C}^n$], *Izv. vuzov. Ser. mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1987, No. 2, 70–74 (in Russian).
15. E. Chirka, "Variatsiya teoremy Khartogsa" [Variation of Hartogs' theorem], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2006, **253**, 232–240 (in Russian).
16. B. I. Abdullayev, "Subharmonic functions on complex Hyperplanes of $\mathbb{C}^n$," *Zhurn. SFU. Ser. Mat. Fiz.*, 2013, **6**, No. 4, 409–416.
17. B. I. Abdullayev, "$\mathcal{P}$-measure in the class of $m - wsh$ functions," *Zhurn. SFU. Ser. Mat. Fiz.*, 2014, **7**, No. 1, 3–9.
18. H. Alexander, "Projective capacity," *Ann. Math. Stud.*, 1981, **100**, No. 1, 3–27.
19. A. A. Atamuratov and M. D. Vaisova, "On the meromorphic extension along the complex lines," *TWMS J. Pure Appl. Math.*, 2011, **2**, No. 1, 10–16.
20. E. Bedford, "Survey of pluripotential theory, several complex variable," *Math. Notes*, 1993, **38**, 48–95.
21. E. Bedford and B. A. Taylor, "A new capacity for plurisubharmonic functions," *Acta Math.*, 1982, **149**, No. 1-2, 1–40.
22. Z. Blocki, "Weak solutions to the complex Hessian equation," *Ann. Inst. Fourier*, 2005, **5**, 1735–1756.
23. T. Bloom and N. Levenberg, "Weighted pluripotential theory in $\mathbb{C}^N$," *Am. J. Math.*, 2003, **125**, No. 1, 57–103.
24. U. Cegrell, "The general definition of the complex Monge—Ampere operator," *Ann. Inst. Fourier*, 2004, **54**, 159–179.
25. D. Coman, V. Guedj, and A. Zeriahi, "Domains of definition of Monge—Ampere operators on compact Kahler manifolds," *Math. Z.*, 2008, **259**, 393–418.
26. S. Dinew and S. Kolodziej, "A priori estimates for the complex Hessian equation," *Anal. PDE*, 2014, **7**, 227–244.
27. F. Forelly, "Plurisubharmonicity in terms of harmonic slices," *Math. Scand.*, 1977, **41**, 358–364.
28. J.-C. Joo, K.-T. Kim, and G. Schmalz, "A generalization of Forelli's theorem," *Math. Ann.*, 2013, **355**, 1171–1176.
29. J.-C. Joo, K.-T. Kim, and G. Schmalz, "On the generalization of Forelli's theorem," *Math. Ann.*, 2016, **365**, 1187–1200.
30. G. Khudaiberganov, "On the homogeneous-polynomially convex hull of balls," *Pliska Stud. Math. Bulgar.*, 1989, **10**, 45–49.
31. K.-T. Kim, E. Poletsky, and G. Schmalz, "Functions holomorphic along holomorphic vector fields," *J. Geom. Anal.*, 2009, **19**, 655–666.
32. M. Klimek, *Pluripotential theory*, Clarendon Press, Oxford etc., 1991.
33. J. Siciak, "Extremal plurisubharmonic functios in $\mathbb{C}^n$," *Ann. Polon. Math.*, 1981, **39**, 175–211.
34. T. Tuychiev, "On domains of convergence of multidimensional locunary series," *Zhurn. SFU. Ser. Mat. Fiz.*, 2019, **12**, No. 6, 736–746.
35. T. Tuychiev and J. Tishabaev, "On the continuation of the Hartogs series with holomorphic coefficients," *Bull. Natl. Univ. Uzbekistan. Math. Nat. Sci.*, 2019, **2**, No. 1, 69–76.

A. S. Sadullaev
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: sadullaev@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). С. 144–156
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-144-156 УДК 517.55

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА В МАТРИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ ЗИГЕЛЯ

© 2022 г. **Г. Х. ХУДАЙБЕРГАНОВ, Б. Т. КУРБАНОВ**

Аннотация. Приведен обзор последних результатов в многомерном комплексном анализе, относящихся к матричным областям Зигеля.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Теория функций многих комплексных переменных, или многомерный комплексный анализ, к настоящему времени имеет достаточно строго построенную теорию [2, 9, 16]. В то же время многие вопросы классического (одномерного) комплексного анализа до сих пор не имеют однозначных многомерных аналогов. Это связано со сложной структурой многомерного комплексного пространства, многозначностью (переопределенностью) условий Коши—Римана, отсутствием универсальной интегральной формулы Коши и т. д. В работах Э. Картана, К. Зигеля [3], Хуа Ло-Кена [11], И. И. Пятецкого-Шапиро [8] широко используется матричный подход изложения теории многомерного комплексного анализа. Здесь в основном исследованы классические области и связанные с ними вопросы теории функций и геометрии. Важность изучения классических областей состоит в том, что они не являются приводимыми, т. е. эти области в каком-то смысле являются модельными областями многомерного пространства. В нашем обзоре мы приводим последние результаты в многомерном комплексном анализе, относящиеся к классическим областям.

2. Матричная структура многомерных пространств

2.1. Пространства $\mathbb{C}[m \times k]$, $\mathbb{C}^n[m \times k]$. Рассмотрим пространство mk комплексных переменных $\mathbb{C}^{mk}$ с элементами

$$(z_{11}, z_{12}, \dots, z_{mk}). \tag{2.1}$$

В этом пространстве введем матричную структуру, отождествляя каждому элементу (2.1) прямоугольную матрицу из m строк и k столбцов:

$$\begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{m1} & \cdots & z_{mk} \end{pmatrix}.$$

После такого представления элементов пространство $\mathbb{C}^{mk}$ будем обозначать через $\mathbb{C}[m \times k]$. Такое матричное представление представляет удобство и компактность записи громоздких формул, а также дает возможность дальнейшей реализации идей одномерного комплексного анализа. Элементы пространства $\mathbb{C}[m \times k]$ обозначим заглавными буквами: $Z, U, V, W, \ldots$

Во многих вопросах представляет интерес пространство, получаемое при помощи декартового произведения нескольких $\mathbb{C}[m \times k]$:

$$\mathbb{C}^n[m \times k] = \underbrace{\mathbb{C}[m \times k] \times \mathbb{C}[m \times k] \times \cdots \times \mathbb{C}[m \times k]}_{n}.$$

Такая структура пространства позволяет использовать технику векторных исчислений (скалярное произведение, норма и т. п.). При $m = k$ получаются пространства квадратных матриц $\mathbb{C}[m \times m]$, $\mathbb{C}^n[m \times m]$. В монографии [14] приведены примеры простейших матричных областей (матричный единичный круг, матричная верхняя полуплоскость, матричный единичный поликруг) в этих пространствах.

2.2. Классификация матричных шаров, ассоциированных с классическими областями. В анализе всегда большую роль играло исследование конкретных классов областей. Известная теорема Римана утверждает, что *любая односвязная область, граница которой содержит более одной точки, конформно эквивалентна единичному кругу* $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Эта теорема перестает быть верной в $\mathbb{C}^n$ при $n > 1$: не существует биголоморфного отображения шара

$$\mathbf{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$$

на поликруг

$$\mathbf{U}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : ||z|| < 1\}.$$

Это связано с переопределенностью условий голоморфности при $n > 1$. Поэтому оказывается весьма существенным рассмотрение и изучение важнейших классов областей в многомерных комплексных пространствах.

Одним из таких классов областей является класс ограниченных однородных областей. В 1935 году Э. Картан доказал, что существует только шесть возможных типов неприводимых транзитивных ограниченных симметрических областей (см. [3]). Все эти области биголоморфно неэквивалентны и представляют большой интерес с разных точек зрения. Это связано с тем, что они являются сравнительно широким классом областей в $\mathbb{C}^n$, для которых удалось получить целый ряд содержательных существенно многомерных результатов.

Множество

$$\mathfrak{B}^{(1)}_{m,n} = \{(Z_1, \ldots, Z_n) = Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : I - \langle Z, Z\rangle > 0\}$$

называется *матричным шаром* (*первого типа*), здесь $\langle Z, Z\rangle = Z_1 Z_1^* + \ldots + Z_n Z_n^*$ — «скалярное» произведение, I — единичная матрица порядка m, $Z_\nu^* = \overline{Z'_\nu}$, $\nu = 1, \ldots, n$, а условие $I - \langle Z, Z\rangle > 0$ означает, что эрмитова матрица положительно определена, т. е. все ее собственные значения положительны.

Определим *матричные шары* $\mathfrak{B}^{(2)}_{m,n}$ и $\mathfrak{B}^{(3)}_{m,n}$ *второго и третьего типов*, соответственно:

$$\mathfrak{B}^{(2)}_{m,n} = \{Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : I - \langle Z, Z\rangle > 0,\ Z'_\nu = Z_\nu, \nu = 1, \ldots, n\}$$

и

$$\mathfrak{B}^{(3)}_{m,n} = \{Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : I - \langle Z, Z\rangle > 0,\ Z'_\nu = -Z_\nu, \nu = 1, \ldots, n\}.$$

Остовы (*границы Шилова*) матричных шаров $\mathfrak{B}^{(k)}_{m,n}$ обозначим через $\mathfrak{X}^{(k)}_{m,n}$, $k = 1, 2, 3$, т. е.

$$\mathfrak{X}^{(1)}_{m,n} = \{Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : \langle Z, Z\rangle = I\},$$

$$\mathfrak{X}^{(2)}_{m,n} = \{Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : \langle Z, Z\rangle = I,\ Z'_\nu = Z_\nu, \nu = 1, \ldots, n\},$$

$$\mathfrak{X}^{(3)}_{m,n} = \{Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : I - \langle Z, Z\rangle = 0,\ Z'_\nu = -Z_\nu, \nu = 1, \ldots, n\}.$$

Заметим, что $\mathfrak{B}^{(1)}_{1,1}$, $\mathfrak{B}^{(2)}_{1,1}$ и $\mathfrak{B}^{(3)}_{2,1}$ — единичные круги, а $\mathfrak{X}^{(1)}_{1,1}$, $\mathfrak{X}^{(2)}_{1,1}$ и $\mathfrak{X}^{(3)}_{2,1}$ — единичные окружности в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Если $n = 1$, $m > 1$, то $\mathfrak{B}^{(k)}_{m,1}$, $k = 1,2,3$ — классические области первого, второго и третьего типов (по классификации Э. Картана), а остовы $\mathfrak{X}^{(1)}_{m,1}$, $\mathfrak{X}^{(2)}_{m,1}$ и $\mathfrak{X}^{(3)}_{m,1}$ — унитарные, симметрические унитарные и кососимметрические унитарные матрицы, соответственно.

Если $m = 1$, то $\mathfrak{B}^{(1)}_{1,n}$ — единичный шар в пространстве $\mathbb{C}^n$, а $\mathfrak{X}^{(1)}_{1,n}$ — единичная сфера (остов совпадает с топологической границей). Отметим, что автоморфизмы указанных матричных шаров описаны в работах [4, 15].

Приведем некоторые *нерешенные задачи,* связанные с матричными шарами $\mathfrak{B}^{(2)}_{m,n}$ и $\mathfrak{B}^{(3)}_{m,n}$:

$1_{1,2}$. *выписать ядра Коши для* $\mathfrak{B}^{(2)}_{m,n}$ *и* $\mathfrak{B}^{(3)}_{m,n}$;

$2_{1,2}$. *получить ядра Пуассона для* $\mathfrak{B}^{(2)}_{m,n}$ *и* $\mathfrak{B}^{(3)}_{m,n}$;

$3_{1,2}$. *определить инвариантный оператор Лапласа для* $\mathfrak{B}^{(2)}_{m,n}$ *и* $\mathfrak{B}^{(3)}_{m,n}$;

$4_{1,2}$. *ввести понятия гармонических функций в* $\mathfrak{B}^{(2)}_{m,n}$ *и* $\mathfrak{B}^{(3)}_{m,n}$;

$5_{1,2}$. *решить задачу Дирихле для* $\mathfrak{B}^{(2)}_{m,n}$ *и* $\mathfrak{B}^{(3)}_{m,n}$;

$6_{1,2,3}$. *выписать ортонормированный базис для* $\mathfrak{B}^{(1)}_{m,n}$, $\mathfrak{B}^{(2)}_{m,n}$, *и* $\mathfrak{B}^{(3)}_{m,n}$ *в пространстве квадратных матриц* $\mathbb{C}^n[m\times m]$ *(существование таких базисов следует из теоремы Э. Картана (1943) о полных круговых областях, см. [11]).*

2.3. Матричный аналог преобразования Кэли типа «единичный круг — верхняя полуплоскость». Единичный круг и его различные многомерные обобщения (единичный n-мерный шар, поликруг, матричный единичный круг, классические области четырех типов по классификации Картана, матричный шар) являются достаточно хорошо изученными: к настоящему времени решены многие важные вопросы многомерного комплексного анализа такие, как описание групп автоморфизмов, получение интегральных формул типа Коши—Сеге, Бергмана, Пуассона, доказательство необходимых и достаточных условий для голоморфной продолжимости функций с границы и т. д. Обширные результаты, полученные в этих областях, приведены в монографиях Хуа Ло-Кена [11], У. Рудина [9], Г. Худайберганова, А. М. Кытманова, Б. А. Шаимкулова [14], отметим также работы С. Косбергенова, А. М. Кытманова, С. Г. Мысливец [5].

Довольно часто задачи, поставленные для единичного круга на плоскости, переносятся на верхнюю полуплоскость при помощи преобразования Кэли

$$w = \frac{i(1+z)}{1-z}.$$

В этой связи является актуальным нахождение многомерных аналогов формулы для реализации преобразования типа «единичный круг — верхняя полуплоскость». Ниже мы рассмотрим реализацию классической области первого типа в виде области Зигеля второго рода.

Пусть $\mathbb{C}[p\times q]$ — пространство прямоугольных матриц из p строк и q столбцов ($q \geqslant p$), элементы которых — комплексные числа.

Область $\mathcal{R}_1$, образованная матрицами Z из $\mathbb{C}[p\times q]$, удовлетворяющих условию

$$I - ZZ^* > 0,$$

называется *классической областью первого типа* (по классификации Э. Картана, см. [11]). Здесь I — единичная матрица порядка p, $Z^* = \bar{Z}'$ — матрица, комплексно-сопряженная к транспонированной матрице Z'.

Граница Шилова $\mathcal{S}_1$ для области $\mathcal{R}_1$ образована матрицами Z из p строк и q столбцов с условием, что

$$ZZ^* = I.$$

Известно, что любая ограниченная однородная (по отношению к голоморфным автоморфизмам) область в $\mathbb{C}^N$ имеет реализацию в виде области Зигеля второго рода. В частности, область $\mathcal{R}_1$ биголоморфно эквивалентна некоторой области Зигеля второго рода, которая строится с помощью следующей конструкции (см. [10]).

Пусть U_1 — квадратная матрица порядка $p\times p$, а U_2 — матрица порядка $p\times(q-p)$. В пространстве пар матриц (U_1, U_2) комплексной размерности $N = pq$ рассмотрим область

$$\mathcal{D} = \{U = (U_1, U_2) \in \mathbb{C}[p\times q] : \mathrm{Im} U_1 - U_2U_2^* > 0\},$$

где $\mathrm{Im}U_1 = \dfrac{1}{2i}(U_1 - U_1^*)$. Остов этой области обозначим

$$\mathcal{G} = \{U = (U_1, U_2) : \mathrm{Im}U_1 = U_2 U_2^*\}.$$

Следуя этой конструкции, область $\mathcal{R}_1$ можно задать и в следующей форме:

$$\mathcal{R}_1 = \{Z = (Z_1, Z_2) \in \mathbb{C}[p \times q] : I - \langle Z, Z\rangle > 0\},$$

здесь $\langle Z, Z\rangle = Z_1 Z_1^* + Z_2 Z_2^*$, а Z_1 и Z_2 — матрицы порядка $p \times p$ и $p \times (q-p)$, соответственно.

Обозначим через $d\mu$ и $d\eta$ элементы объемов (меры Лебега) в $\mathcal{D}$ и $\mathcal{G}$.

Теорема 2.1 (см. [13,14])**.** *Отображение $\Phi : \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_u$ определяемое соответствиями*

$$U_1 = i(I - Z_1)^{-1}(I + Z_1), \qquad U_2 = (I - Z_1)^{-1} Z_2, \tag{2.2}$$

биголоморфно отображает область $\mathcal{R}_1$ на $\mathcal{D}$, при этом $\mathcal{S}_1$ переходит в $\mathcal{G}$.

Лемма 2.1. *Вещественный якобиан отображения $\Phi(Z)$ вычисляется по формуле*

$$J_R\Phi(Z) = 2^{2p^2} |\det(I - Z_1)|^{-2(p+q)}.$$

Доказательство. Пусть $B = \Phi(A)$, $A \in \mathcal{R}_1$, $B \in \mathcal{D}$. Рассмотрим разность

$$\Phi(Z + A) - \Phi(A) = (I - Z_1 - A_1)^{-1}\left(2iZ_1(I - A_1)^{-1},\ Z_2 + Z_1(I - A_1)^{-1}A_2\right).$$

Согласно правилу дифференцирования отображения

$$\Phi'(A) = (I - A_1)^{-1} \otimes \begin{pmatrix} 2i(I - A_1)^{-1} & (I - A_1)^{-1}A_2 \\ 0 & I^{(q-p)} \end{pmatrix},$$

где Φ' — матрица Якоби отображения Φ, знак $\otimes$ означает кронекеровское (прямое) произведение матриц. Отсюда, используя свойства прямого произведения матриц, имеем

$$\det \Phi'(A) = (\det(I - A_1)^{-1})^q (\det(2i(I - A_1)^{-1}))^p = (2i)^{p^2} \det{}^{-(p+q)}(I - A_1).$$

Следовательно,

$$J_R\Phi(Z) = |\det \Phi'(Z)|^2 = 2^{2p^2} |\det(I - Z_1)|^{-2(p+q)}.$$

Лемма доказана. □

3. Интегральные формулы и голоморфное продолжение

3.1. Интегральные формулы. Интегральные формулы в комплексном анализе являются хорошим средством при изучении свойств голоморфных функций. В классических областях Картана интегральные формулы типа Коши—Сеге, Бергмана, Пуассона были доказаны Хуа Ло-Кеном [11].

Пусть $\mathfrak{D}$ — полная выпуклая ограниченная круговая область с центром в начале координат, граница Шилова (остов) $\mathfrak{R}$ которой является гладким многообразием, либо неограниченная однородная область Зигеля второго рода с остовом $\mathfrak{R}$.

Функция f принадлежит *классу* $\mathcal{L}^p(\mathfrak{R})$ с заданной на нем мерой Лебега $d\mu$, если она интегрируема со степенью p по мере $d\mu$ на $\mathfrak{R}$, т. е. если интеграл

$$\int\limits_{\mathfrak{R}} |f(x)|^p d\mu$$

конечен.

Класс Харди $\mathcal{H}^p(\mathfrak{D})$ $(0 < p < +\infty)$ состоит из всех функций f, голоморфных в области $\mathfrak{D}$, для которых равномерно ограничены интегралы

$$\int\limits_{\mathfrak{R}} |f(rz)|^p d\mu < C_f$$

для всех $0 < r < 1$.

Через $\mathcal{O}^2(\mathfrak{D})$ обозначим пространство, состоящее из голоморфных функций в $\mathfrak{D}$, интегрируемых с квадратом по обычной мере Лебега $d\nu$, т. е. $f \in \mathcal{O}^2(\mathfrak{D})$, если f голоморфна в $\mathfrak{D}$ и

$$\int\limits_{\mathfrak{D}} |f(\zeta)|^2 d\nu(\zeta) < +\infty.$$

Определим *ядро Бергмана* $K(U,V)$ в области $\mathcal{D}$ (см. раздел 2.3) следующим образом:

$$K(U,V)=\frac{c_k}{(\det[i(U_1-V_1^*)+2U_2V_2^*])^{p+q}},$$

где $c_k=(-1)^p 2^{p-2p^2}$.

Выясним, как преобразуется соответствующее ядро Бергмана в области $\mathcal{R}_1$ при биголоморфном отображении (2.2) $\Phi:\mathcal{R}_1\to\mathcal{D}$.

Как известно, ядро Бергмана в $\mathcal{R}_1$ имеет вид (см. [11, гл.4]):

$$K_{\mathcal{R}_1}(Z,W)=\frac{1}{(\det(I-\langle Z,W\rangle))^{p+q}}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$i(U_1-V_1^*)+2U_2V_2^*=-2(I-Z_1)^{-1}(I-\langle Z,W\rangle)(I-W_1^*)^{-1}.$$

Тогда из свойств определителя матриц имеем:

$$(\det[i(U_1-V_1^*)+2U_2V_2^*])^{p+q}=(-2)^p(\det[(I-Z_1)(I-W_1^*)])^{-(p+q)}(\det(I-\langle Z,W\rangle))^{p+q}.$$

Отсюда

$$K(\Phi(Z),\Phi(W))=\frac{c_k}{(-2)^p(\det[(I-Z_1)(I-W_1^*)])^{-(p+q)}}\cdot\frac{1}{(\det(I-\langle Z,W\rangle))^{p+q}}=$$

$$=\frac{1}{2^{2p^2}}K_{\mathcal{R}_1}(Z,W)\cdot(\det[(I-Z_1)(I-W_1^*)])^{p+q}.$$

Таким образом, получаем следующее утверждение.

Лемма 3.1. *При отображении* (2.2) *ядро Бергмана* $K(U,V)$ *преобразуется следующим образом*:

$$K(\Phi(Z),\Phi(W))=\frac{1}{2^{2p^2}}\,K_{\mathcal{R}_1}(Z,W)\,(\det[(I-Z_1)(I-W_1^*)])^{p+q}.$$

Теорема 3.1 (см. [14]). *Для всякой функции* $f\in\mathcal{O}^2(\mathcal{D})$ *справедлива формула*

$$f(U)=\int\limits_{\mathcal{D}}f(V)K(U,V)d\mu(V),\ U\in\mathcal{D}.$$

Интеграл в этой формуле задает ортогональный проектор из пространства $\mathcal{L}^2(\mathcal{D})$ *в пространство* $\mathcal{O}^2(\mathcal{D})$.

Определим *ядро Коши—Сеге* $C(U,V)$ в области $\mathcal{D}$ следующим образом:

$$C(U,V)=\frac{c_k}{(\det[i(U_1-V_1^*)+2U_2V_2^*])^{q}}$$

для $U\in\mathcal{D}$, $V\in\mathcal{G}$, где $c_k=(-1)^p 2^{p-2p^2}$.

Аналогично лемме 3.1 доказывается следующая лемма.

Лемма 3.2. *Пусть* $U=\Phi(Z)$ *и* $V=\Phi(W)$. *При отображении* (2.2) *ядро Коши—Сеге* $C(U,V)$ *преобразуется следующим образом*:

$$C(\Phi(Z),\Phi(W))=\frac{1}{2^{2p^2}}\,C_{\mathcal{R}_1}(Z,W)\,(\det[(I-Z_1)(I-W_1^*)])^{q},$$

где $C_{\mathcal{R}_1}(Z,W)$ — *ядро Коши—Сеге для области* $\mathcal{R}_1$ (*см.* [11, гл. 4]),

$$C_{\mathcal{R}_1}(Z,W)=\frac{1}{(\det(I-\langle Z,W\rangle))^{q}}.$$

Теорема 3.2 (см. [12, 14]). *Для всякой функции* $f\in\mathcal{H}^1(\mathcal{D})$ *справедлива формула*

$$f(U)=\int\limits_{\mathcal{G}}f(V)C(U,V)d\mu(V),\quad U\in\mathcal{D}.$$

В качестве применения таких интегральных формул приводим достаточные условия голоморфной продолжимости функций в виде условий Морера.

3.2. Граничный вариант теоремы Морера. Граничные варианты теоремы Морера рассмотрены в работах [5–7, 17–19, 21], а также в монографии [14]. В них утверждается возможность голоморфного продолжения функции f с границы ∂D области $D \subset \mathbb{C}^n$ при условии равенства нулю интегралов от f по границам аналитических дисков, лежащих на ∂D.

Пусть $\mathbb{C}[p \times q]$ — пространство прямоугольных матриц из p строк и q столбцов ($q \geqslant p$), элементы которых — комплексные числа.

Известно, что всякое биголоморфное отображение $\Phi : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{D}$ устанавливает изоморфность групп $\mathrm{Aut}(\mathcal{R}_1)$ и $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ по формуле

$$\varphi \to \Phi \circ \varphi \circ \Phi^{-1}, \ \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{D}),$$

т. е. изоморфность групп $\mathrm{Aut}(\mathcal{R}_1)$ и $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ необходима для голоморфной эквивалентности областей $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{D}$.

Пусть Φ_A — автоморфизм области $\mathcal{R}_1$, переводящий точку $A = (A_1, A_2)$ в $(0, 0)$. Тогда отображение

$$\Psi_B = \Phi \circ \Phi_A \circ \Phi^{-1}, \quad \text{где} \quad B = \Phi(A),$$

является автоморфизмом области $\mathcal{D}$, переводящим точку $B = (B_1, B_2)$ в $(iE, 0)$.

Таким образом, при помощи отображения (2.2) выписывается группа автоморфизмов области $\mathcal{D}$.

Автоморфизм Φ_A в векторной форме определяется следующим образом:

$$\Phi_A^l = R^{-1} \left(E - \langle Z, A \rangle \right)^{-1} \sum_{j=1}^{2} (Z_j - A_j) Q_{jl}, \quad l = 1, 2, \tag{3.1}$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$$

— блочная матрица порядка q, элементы которой $Q_{11}, Q_{12}, Q_{21}, Q_{22}$ — матрицы порядков $p \times p$, $p \times (q - p)$, $(q - p) \times p$, $(q - p) \times (q - p)$, соответственно, и матрица R удовлетворяют условиям

$$R^*(E - \langle A, A \rangle)R = E, \quad Q^*(E^{(q)} - A^* A)Q = E^{(q)}.$$

В области $\mathcal{R}_1$ транзитивно действует подгруппа автоморфизмов с неподвижной точкой $(0, 0)$. Они называются *унитарными преобразованиями*, поскольку они линейны и для случая областей, состоящих из квадратных матриц, задаются унитарными матрицами. В рассматриваемом случае прямоугольных матриц такие преобразования получаются из (3.1) при $A = 0$:

$$W_l = \sum_{j=1}^{2} Z_j Q_{jl}, \quad l = 1, 2, \tag{3.2}$$

причем

$$\sum_{s=1}^{2} Q_{js} Q_{ks}^* = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq k, \\ E & \text{при } j = k. \end{cases}$$

Преобразованиям (3.2) в области $\mathcal{D}$ соответствуют следующие преобразования с неподвижной точкой $(iE, 0)$:

$$\psi_{\mathcal{U}}^1(U) = i \left[U_1 + iE - (U_1 - iE)Q_{11} - 2iU_2 Q_{21} \right]^{-1} \left[U_1 + iE + (U_1 - iE)Q_{11} + 2iU_2 Q_{21} \right],$$

$$\psi_{\mathcal{U}}^2(U) = i \left[U_1 + iE - (U_1 - iE)Q_{11} - 2iU_2 Q_{21} \right]^{-1} \left[(U_1 - iE)Q_{12} + 2iU_2 Q_{22} \right]. \tag{3.3}$$

Эти преобразования мы также назовем *обобщенными унитарными преобразованиями* области $\mathcal{D}$.

Рассмотрим следующее вложение круга $\Delta = \{|t| < 1\}$ в область $\mathcal{D}$:

$$\{\Omega_t \in \mathbb{C}^{pq} : \Omega_t = \Phi(t \Phi^{-1}(\Lambda^0)), \ t \in \Delta\}, \tag{3.4}$$

где $\Lambda^0 \in \mathcal{G}$. Если Ψ — произвольный автоморфизм области $\mathcal{D}$, то множество (3.4) под действием этого автоморфизма перейдет в некоторый аналитический диск с границей на $\mathcal{G}$.

Теорема 3.3. *Пусть f — непрерывная ограниченная функция на $\mathcal{G}$. Если для функции f выполнено условие*

$$\int\limits_T f(\Psi(\Omega_t))\,dt = 0 \tag{3.5}$$

для всех автоморфизмов Ψ области $\mathcal{D}$ и фиксированного $\Lambda^0 \in \mathcal{G}$, то функция f голоморфно продолжается в $\mathcal{D}$ до функции $F \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{D})$, непрерывной вплоть до $\mathcal{G}$.

Доказательство. Доказательство теоремы проводится по схеме, изложенной в монографии [14] при доказательстве теорем такого типа.

В условии (3.5) вместо Ψ рассмотрим автоморфизм $\Psi = \Phi \circ \Phi_A^{-1} \circ \Phi^{-1}$:

$$\int\limits_T f(\Phi \circ \Phi_A^{-1} \circ \Phi^{-1}(\Omega_t))\,dt = 0. \tag{3.6}$$

Так как $\mathcal{G}$ инвариантно относительно унитарных преобразований (3.3), то условие (3.6) будет выполняться для произвольных $\Lambda \in \mathcal{G}$. Обозначая $\Phi^{-1}(\Lambda) = \Theta$ и учитывая, что $\Omega_t = \Phi(t\Phi^{-1}(\Lambda))$, получим

$$\int\limits_T f(\Phi \circ \Phi_A^{-1}(\Theta t))\,dt = 0. \tag{3.7}$$

Рассмотрим следующую параметризацию многообразия $\mathcal{S}_1$:

$$Z = \Theta t, \quad t = e^{i\phi}, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi, \quad \Theta \in \mathcal{S}_1^+,$$

где $\mathcal{S}_1^+$ — многообразие, состоящее из матриц $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2)$ таких, что в матрице Θ_1 первый элемент $\theta_{11}^{(1)} > 0$. Фактически $\mathcal{S}_1^+$ отличается от $\mathcal{S}_1$ на множество меры нуль. Нормированная мера Лебега многообразия $\mathcal{S}_1$ может быть представлена в виде

$$d\sigma = \frac{d\phi}{2\pi} \wedge d\sigma_1(\Theta) = \frac{1}{2\pi i}\frac{dt}{t} \wedge d\sigma_1(\Theta),$$

где $t = e^{i\phi}$, а мера $d\sigma_1$ положительна на $\mathcal{S}_1^+$. Используя такое представление, переходим в условии (3.7) к интегрированию по многообразию $\mathcal{S}_1$, предварительно умножив (3.7) на $d\sigma_1(\Theta)$:

$$\int\limits_{\mathcal{S}_1} f(\Phi \circ \Phi_A^{-1}(Z))\, z^l_{ks_l}\, d\sigma(Z) = 0, \tag{3.8}$$

где $z^l_{ks_l}$ — элементы матрицы $Z = (Z_1, Z_2)$; $l = 1, 2$; $k, s_1 = \overline{1,p}$; $s_2 = \overline{1, q-p}$.

Сделаем замену переменных $W = \Phi_A^{-1}$. Тогда (3.8) переходит в условие

$$\int\limits_{\mathcal{S}_1} f(\Phi(W))\, \Phi^{A,l}_{ks_l}(W)\, d\sigma(\Phi_A(W)) = 0, \tag{3.9}$$

где $\Phi^{A,l}_{ks_l}$ — компонента автоморфизма Φ_A.

Из [5] мы знаем, что

$$d\sigma(\Phi_A(W)) = P_{\mathcal{R}_1}(W, A) d\sigma(W),$$

где $P_{\mathcal{R}_1}(W, A)$ — ядро Пуассона в $\mathcal{R}_1$. Следовательно,

$$\int\limits_{\mathcal{S}_1} f(\Phi(W))\, \Phi^{A,l}_{ks_l}(W)\, P_{\mathcal{R}_1}(W, A) d\sigma(W) = 0 \tag{3.10}$$

для всех точек $A \in \mathcal{R}_1$ и всех l, k, s_l.

Так как матрицы R и Q_{jl} не зависят от W, то условие (3.10) будет выполняться и для компонент $\varphi^{A,l}_{ks_l}$ отображения

$$\varphi^l_A = (E - \langle W, A\rangle)^{-1}\,(W_l - A_l), \quad l = 1, 2,$$

т. е.

$$\int\limits_{\mathcal{S}_1} f(\Phi(W))\, \varphi^{A,l}_{ks_l}(W)\, P_{\mathcal{R}_1}(W, A) d\sigma(W) = 0. \tag{3.11}$$

Теперь в этом интеграле при помощи отображения (2.2) произведем замену $U = \Phi(W)$:

$$\varphi^{A,l}_{ks_l}(W) = \varphi^{A,l}_{ks_l}(\Phi^{-1}(U)) = \psi^{B,l}_{ks_l}(U),$$

где $\psi^{B,l}_{ks_l}(U)$ — компонента отображения $\psi_B(U) = (\psi^1_B(U), \psi^2_B(U)) = \varphi_A \circ \Phi^{-1}$ и

$$\psi^1_B(U) = \varphi^1_A(\Phi^{-1}(U)) = -i(B_1^* - iE)[i(U_1 - B_1^*) + 2U_2B_2^*]^{-1}(U_1 - B_1)(B_1 + iE)^{-1},$$

$$\psi^2_B(U) = \varphi^2_A(\Phi^{-1}(U)) = -i(B_1^* - iE)[i(U_1 - B_1^*) + 2U_2B_2^*]^{-1}[U_2 - (U_1 + iE)(B_1 + iE)^{-1}B_2].$$

Далее в силу [20, лемма 3.4]:

$$P_{\mathcal{R}_1}(\Phi^{-1}(U), \Phi^{-1}(B))d\sigma(\Phi^{-1}(U)) = P(U,B)d\eta(U),$$

здесь $P(U,B)$ — ядро Пуассона в области $\mathcal{D}$ (см. теорема 3.2):

$$P(U,B) = c \cdot \frac{(\det[i(U_1 - U_1^*) + 2U_2U_2^*])^q}{(\det[i(U_1 - B_1^*) + 2U_2B_2^*])^{2q}},$$

где $c = (-1)^p 2^{p-2p^2}$. Тогда в условии (3.11) множество интегрирования будет меняться на $\mathcal{G}$, откуда получим условие

$$\int\limits_{\mathcal{G}} f(U)\, \psi^{B,l}_{ks_l}(U)\, P(U,B)d\eta(U) = 0 \qquad (3.12)$$

для всех точек $B \in \mathcal{D}$ и всех l, k, s_l.

В целях упрощения записи далее используем следующее обозначение

$$\delta(U,B) = i(U_1 - B_1^*) + 2U_2B_2^*, \quad \delta^{-1}(U,B) = [i(U_1 - B_1^*) + 2U_2B_2^*]^{-1}.$$

Докажем две вспомогательных леммы.

Лемма 3.3. *Если условие* (3.12) *выполнено для компонент отображения* $\psi_B(U)$, *то*:

$$\text{а)} \quad \int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\left[\delta^{-1}(B,B) - \delta^{-1}(U,B)\right] d\eta(U) = 0, \qquad (3.13)$$

$$\text{б)} \quad \int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\left[\delta^{-1}(U,B)U_2B_2^* - \delta^{-1}(B,B)B_2B_2^*\right] d\eta(U) = 0. \qquad (3.14)$$

Доказательство.

a). Имеем

$$\int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)(U_1 - B_1)d\eta(U) = 0,$$

$$\int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)\left[U_2 - (U_1 + iE)(B_1 + iE)^{-1}B_2\right] d\eta(U) = 0.$$

Умножим первое равенство на i, а другое справа на $2B_2^*$ и сложим полученные равенства:

$$\int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)\left[iU_1 - iB_1 + 2U_2B_2^* - (U_1 + iE)(B_1 + iE)^{-1}2B_2B_2^*\right] d\eta(U) = 0.$$

Сделаем следующие преобразования в квадратной скобке подынтегрального выражения:

$$iU_1 - iB_1^* - (iB_1 - iB_1^*) + 2U_2B_2^* - 2B_2B_2^* + 2B_2B_2^* - (U_1 + iE)(B_1 + iE)^{-1}2B_2B_2^* =$$
$$= \delta(U,B) - \delta(B,B) + [B_1 + iE - (U_1 + iE)]\,(B_1 + iE)^{-1}2B_2B_2^* =$$
$$= \delta(U,B) - \delta(B,B) - 2(U_1 - B_1)(B_1 + iE)^{-1}B_2B_2^*.$$

Подставляя это на свое место, получим:

$$\int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)\left[\delta(U,B) - \delta(B,B) - 2(U_1 - B_1)(B_1 + iE)^{-1}B_2B_2^*\right] d\eta(U) =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)\left[\delta(U,B)-\delta(B,B)\right]d\eta(U) -$$

$$- 2\int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)(U_1-B_1)(B_1+iE)^{-1}B_2B_2^* d\eta(U) = 0.$$

Так как второй интеграл равен нулю, то

$$\int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)\left[\delta(U,B)-\delta(B,B)\right]d\eta(U) = 0,$$

и отсюда легко следует (3.13).

б). Имеем

$$\int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)\left(iU_1-iB_1\right)\delta^{-1}(B,B)d\eta(U) = 0. \tag{3.15}$$

Сделаем следующие преобразования:

$$iU_1 - iB_1 = iU_1 - iB_1^* - (iB_1 - iB_1^*) + 2U_2B_2^* -$$

$$- 2B_2B_2^* - 2U_2B_2^* + 2B_2B_2^* = \delta(U,B) - \delta(B,B) + 2B_2B_2^* - 2U_2B_2^*.$$

Подставим это в (3.15):

$$\int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)\left[\delta(U,B)-\delta(B,B)+2B_2B_2^*-2U_2B_2^*\right]\delta^{-1}(B,B)d\eta(U) =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)\left[\delta(U,B)-\delta(B,B)\right]\delta^{-1}(B,B)d\eta(U) +$$

$$+ \int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)\left[2B_2B_2^*-2U_2B_2^*\right]\delta^{-1}(B,B)d\eta(U) = 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)\left[2U_2B_2^*-2B_2B_2^*\right]d\eta(U) =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(U,B)2U_2B_2^* d\eta(U) - \int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\delta^{-1}(B,B)2B_2B_2^* d\eta(U) +$$

$$+ \int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)\left[\delta^{-1}(B,B)-\delta^{-1}(U,B)\right]2B_2B_2^* d\eta(U) = 0.$$

Так как последний интеграл согласно (3.13) равен нулю, отсюда следует (3.14). □

Введем следующий оператор дифференцирования:

$$\tilde{\partial} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{s_1=1}^{p}\bar{b}^1_{ks_1}\frac{\partial}{\partial\bar{b}^1_{ks_1}} + \sum_{k=1}^{p}\sum_{s_2=1}^{q-p}\bar{b}^2_{ks_2}\frac{\partial}{\partial\bar{b}^2_{ks_2}} + i\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial}{\partial\bar{b}^1_{kk}},$$

где $\bar{b}^{\,l}_{ij}$ — элементы матрицы B_l^*, $l = 1,2$.

Лемма 3.4. *Справедливо равенство*

$$\tilde{\partial}P(U,B) = 2pP(U,B)\left(\mathrm{Sp}\left[\left(\delta^{-1}(B,B)-\delta^{-1}(U,B)\right)(E-iB_1^*)\right] +\right.$$

$$\left. + 2\mathrm{Sp}\left[\delta^{-1}(B,B)B_2B_2^* - \delta^{-1}(U,B)U_2B_2^*\right]\right),$$

где Sp *означает след матрицы.*

Доказательство. Вычисления показывают, что

$$\tilde{\partial}\det\delta(U,B) = p\det\delta(U,B) - i\sum_{k,s_1=1}^{p}\bar{b}^1_{ks_1}\delta(U,B)_{s_1k} + \sum_{k=1}^{m}\delta(U,B)_{kk} - i\sum_{k,s_1=1}^{p}(u^1_{s_1k}-\bar{b}^1_{ks_1})\delta(U,B)_{s_1k},$$

где $\delta(U,B)_{s_1k}$ — алгебраическое дополнение к s_1k-му элементу в матрице $\delta(U,B)$.

Аналогично

$$\tilde{\partial}\det\delta(B,B) = p\det\delta(B,B) - i\sum_{k,s_1=1}^{p}\bar{b}^1_{ks_1}\delta(B,B)_{s_1k} + \sum_{k=1}^{m}\delta(B,B)_{kk} - i\sum_{k,s_1=1}^{p}(b^1_{s_1k}-\bar{b}^1_{ks_1})\delta(B,B)_{s_1k}.$$

Тогда

$$\tilde{\partial}P(U,B) = 2pP(U,B)\times$$
$$\times\left(p - i\frac{\sum\limits_{k,s_1=1}^{p}\bar{b}^1_{ks_1}\delta(B,B)_{s_1k}}{\det\delta(B,B)} + \frac{\sum\limits_{k=1}^{p}\delta(B,B)_{kk}}{\det\delta(B,B)} - i\frac{\sum\limits_{k,s_1=1}^{p}(b^1_{s_1k}-\bar{b}^1_{ks_1})\delta(B,B)_{s_1k}}{\det\delta(B,B)} -\right.$$
$$\left.- p + i\frac{\sum\limits_{k,s_1=1}^{p}\bar{b}^1_{ks_1}\delta(U,B)_{s_1k}}{\det\delta(U,B)} + \frac{\sum\limits_{k=1}^{p}\delta(U,B)_{kk}}{\det\delta(U,B)} - i\frac{\sum\limits_{k,s_1=1}^{p}(u^1_{s_1k}-\bar{b}^1_{ks_1})\delta(U,B)_{s_1k}}{\det\delta(U,B)}\right) =$$
$$= 2pP(U,B)\left(-i\mathrm{Sp}\left[\delta^{-1}(B,B)B_1^*\right] + \mathrm{Sp}\delta^{-1}(B,B) - i\mathrm{Sp}\left[\delta^{-1}(B,B)(B_1-B_1^*)\right] +\right.$$
$$\left.+ i\mathrm{Sp}\left[\delta^{-1}(U,B)B_1^*\right] - \mathrm{Sp}\delta^{-1}(U,B) + i\mathrm{Sp}\left[\delta^{-1}(U,B)(U_1-B_1^*)\right]\right) =$$
$$= 2pP(U,B)\left(\mathrm{Sp}\left[\delta^{-1}(B,B)(E-iB_1^*)\right] - \mathrm{Sp}\left[\delta^{-1}(U,B)(E-iB_1^*)\right] +\right.$$
$$\left.+ 2\mathrm{Sp}\left[\delta^{-1}(B,B)B_2B_2^*\right] - 2\mathrm{Sp}\left[\delta^{-1}(U,B)U_2B_2^*\right]\right).$$

□

Из лемм 3.3 и 3.4 согласно условию (3.12) получаем

$$\tilde{\partial}F(B) = 0, \tag{3.16}$$

где $F(B) = \int\limits_{\mathcal{G}} f(U)P(U,B)d\eta(U)$ — интеграл Пуассона от функции f.

Функция $F(B)$ является вещественно-аналитической в области $\mathcal{D}$. Разложим ее в ряд Тейлора в окрестности точки $I = (I_1,\ldots,I_p,\underbrace{\mathbf{0}\ldots,\mathbf{0}}_{p\ \text{штук}})$, где I_k — p-мерный единичный вектор, у которого на k-м месте стоит i, а $\mathbf{0}$ — $(q-p)$-мерный нулевой вектор:

$$F(B) = \sum_{|\alpha|,|\beta|} c_{\alpha,\beta}\,(B-I)^{\alpha}\,\overline{(B-I)}^{\beta},$$

где α,β — мультииндексы:

$$|\alpha| = \sum_{l,k,j_l}\alpha^l_{kj_l},\ B^{\alpha} = \prod_{l,k,j_l} b_{kj_l}^{l,\alpha^l_{kj_l}}$$
$$(l=1,2;\ k,j_1=\overline{1,p};\ j_2=\overline{1,q-p}).$$

Тогда согласно (3.16)

$$\tilde{\partial}F(B) = \sum_{|\alpha|,|\beta|} c_{\alpha,\beta}|\beta|c_{\alpha,\beta}\,(B-I)^{\alpha}\,\overline{(B-I)}^{\beta} = 0,$$

т. е. все коэффициенты $c_{\alpha,\beta}$ равны нулю при $|\beta|>0$. Значит, все $\beta^l_{kj_l}=0$. Следовательно, функция $F(B)$ голоморфна в области $\mathcal{D}$ и принадлежит классу $\mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{D})$. □

Эта теорема допускает следующее обобщение.

Теорема 3.4. *Пусть f — непрерывная ограниченная функция на $\mathcal{G}$. Если для функции f выполнено условие* (3.5) *для всех автоморфизмов, переводящих точку* $(iE, 0)$ *в точки из некоторого открытого множества $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}$, тогда f голоморфно продолжается в $\mathcal{D}$ до функции $F \in \mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{D})$, непрерывной вплоть до $\mathcal{G}$.*

Обозначим

$$\Delta_{\Psi} = \{\Theta : \Theta = \Psi(\Omega_t)\},$$

где Ω_t определяется как в (3.4), а Ψ — автоморфизм области $\mathcal{D}$.

Следствие 3.1. *Пусть f — непрерывная и ограниченная функция на $\mathcal{G}$. Предположим, что функция f голоморфно продолжается в аналитические диски Δ_{Ψ} для всех автоморфизмов, переводящих точку $(iE, 0)$ в точки из некоторого открытого множества $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}$. Тогда функция f голоморфно продолжается в $\mathcal{D}$ до функции $F \in \mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{D})$, непрерывной вплоть до $\mathcal{G}$.*

Это следствие является аналогом для области $\mathcal{D}$ теоремы Стаута (см. [22]) о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1976.
2. *Владимиров В. С.* Методы функций многих комплексных переменных. — М.: Наука, 1964.
3. *Зигель К.* Автоморфные функции нескольких комплексных переменных. — М.: ИЛ, 1954.
4. *Косбергенов С.* Голоморфные автоморфизмы и интеграл Бергмана для матричного шара// Докл. АН РУз. — 1998. — № 1. — С. 7–10.
5. *Косбергенов С., Кытманов А. М., Мысливец С. Г.* О граничной теореме Морера для классических областей// Сиб. мат. ж. — 1999. — *40*, № 3. — с. 595–604.
6. *Курбанов Б. Т.* О граничной теореме Морера// Докл. АН РУз. — 2001. — № 8-9. — С. 9–11.
7. *Кытманов А. М., Мысливец С. Г.* Об одном граничном аналоге теоремы Морера// Сиб. мат. ж. — 1995. — *36*, № 6. — С. 1350–1353.
8. *Пятецкий-Шапиро И. И.* Геометрия классических областей и теория автоморфных функций. — М.: Наука, 1961.
9. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. — М.: Мир, 1984.
10. *Фукс Б. А.* Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных. — М.: Физматгиз, 1962.
11. *Хуа Л.-К.* Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. — М.: ИЛ, 1959.
12. *Худайберганов Г., Курбанов Б. Т.* Формула Коши—Сеге для неограниченной реализации матричного шара// Вестн. НУУз. — 2006. — № 2. — С. 57-58.
13. *Худайберганов Г., Курбанов Б. Т.* Об одной реализации классической области первого типа// Узб. мат. ж. — 2014. — № 1. — С. 126–129.
14. *Худайберганов Г., Кытманов А. М., Шаимкулов Б. А.* Комплексный анализ в матричных областях. — Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, 2011.
15. *Худайберганов Г., Хидиров Б. Б., Рахманов У.* Автоморфизмы матричных шаров// Вестн. НУУз. — 2010. — № 4. — С. 205–209.
16. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч. 2. — М.: Наука, 1985.
17. *Globevnik J.* A boundary Morera theorem// J. Geom. Anal. — 1993. — *3*, № 3. — С. 269–277.
18. *Globevnik J., Stout E. L.* Boundary Morera theorems for holomorphic functions of several complex variables// Duke Math. J. — 1991. — *64*, № 3. — С. 571–615.
19. *Grinberg E.* A boundary analogue of Morera's theorem on the unit ball of $\mathbb{C}^n$// Proc. Am. Math. Soc. — 1988. — *102*. — С. 114–116.
20. *Koranyi A.* The Poisson integral for the generalized half planes and bounded symmetric domains// Ann. Math. (2). — 1965. — *82*, № 2. — С. 332–350.
21. *Nagel A., Rudin W.* Moebius-invariant function spaces on balls and spheres// Duke Math. J. — 1976. — *43*, № 4. — С. 841–865.
22. *Stout E. L.* The boundary values of holomorphic functions of several complex variables// Duke Math. J. — 1977. — *44*, № 1. — С. 105–108.

Г. Х. Худайберганов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: gkhudaiberg@mail.ru

Б. Т. Курбанов
Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, Нукус, Узбекистан
E-mail: bukharbay@inbox.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-144-156 UDC 517.55

Some Problems of Complex Analysis in Matrix Siegel Domains

© 2022 **G. Kh. Khudaibergenov, B. T. Kurbanov**

Abstract. We give a review of recent results in multivariate complex analysis related to matrix Siegel domains.

REFERENCES

1. R. Bellman, *Vvedenie v teoriyu matrits* [Introduction to Matrix Analysis], Nauka, Moscow, 1976 (Russian translation).
2. V. S. Vladimirov, *Metody funktsiy mnogikh kompleksnykh peremennykh* [Methods of Functions of Several Complex Variables], Nauka, Moscow, 1964 (in Russian).
3. C. Siegel, *Avtomorfnye funktsii neskol'kikh kompleksnykh peremennykh* [Automorphic functions of several complex variables], IL, Moscow, 1954 (Russian translation).
4. S. Kosbergenov, "Golomorfnye avtomorfizmy i integral Bergmana dlya matrichnogo shara" [Holomorphic automorphisms and the Bergman integral for a matrix ball], *Dokl. AN RUz* [Rep. Acad. Sci. Usbekistan], 1998, No. 1, 7–10 (in Russian).
5. S. Kosbergenov, A. M. Kytmanov, and S. G. Myslivets, "O granichnoy teoreme Morera dlya klassicheskikh oblastey" [On Maurer's boundary theorem for classical domains], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1999, **40**, No. 3, 595–604 (in Russian).
6. B. T. Kurbanov, "O granichnoy teoreme Morera" [On Maurer's boundary theorem], *Dokl. AN RUz* [Rep. Acad. Sci. Usbekistan], 2001, No. 8-9, 9–11 (in Russian).
7. A. M. Kytmanov and S. G. Myslivets, "Ob odnom granichnom analoge teoremy Morera" [On one boundary analog of Morera's theorem], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1995, **36**, No. 6, 1350–1353 (in Russian).
8. I. I. Pyatetskiy-Shapiro, *Geometriya klassicheskikh oblastey i teoriya avtomorfnykh funktsiy* [Geometry of Classical Domains and the Theory of Automorphic Functions], Nauka, Moscow, 1961 (in Russian).
9. W. Rudin, *Teoriya funktsiy v edinichnom share iz* $\mathbb{C}^n$ [Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$], Mir, Moscow, 1984 (in Russian).
10. B. A. Fuks, *Spetsial'nye glavy teorii analiticheskikh funktsiy mnogikh kompleksnykh peremennykh* [Special Chapters in the Theory of Analytic Functions of Several Complex Variables], Fizmatgiz, Moscow, 1962 (in Russian).
11. L. K. Hua, *Garmonicheskiy analiz funktsiy mnogikh kompleksnykh peremennykh v klassicheskikh oblastyakh* [Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains], IL, Moscow, 1959 (Russian translation).
12. G. Khudayberganov and B. T. Kurbanov, "Formula Koshi—Sege dlya neogranichennoy realizatsii matrichnogo shara" [Cauchy–Szego formula for an unbounded realization of a matrix ball], *Vestn. NUUz* [Bull. Natl. Univ. Uzbekistan], 2006, No. 2, 57-58 (in Russian).
13. G. Khudayberganov and B. T. Kurbanov, "Ob odnoy realizatsii klassicheskoy oblasti pervogo tipa" [On one realization of the classical domain of the first type], *Uzb. mat. zh.* [Uzbek. Math. J.], 2014, No. 1, 126–129 (in Russian).

14. G. Khudayberganov, A. M. Kytmanov, and B. A. Shaimkulov, *Kompleksnyy analiz v matrichnykh oblastyakh* [Complex Analysis in Matrix Domains], Sibirskiy federal'nyy univ., Krasnoyarsk, 2011 (in Russian).
15. G. Khudayberganov, B. B. Khidirov, and U. Rakhmanov, "Avtomorfizmy matrichnykh sharov" [Automorphisms of matrix balls], *Vestn. NUUz* [Bull. Natl. Univ. Uzbekistan], 2010, No. 4, 205–209 (in Russian).
16. B. V. Shabat, *Vvedenie v kompleksnyy analiz. Ch. 2* [Introduction to Complex Analysis. V. 2], Nauka, Moscow, 1985 (in Russian).
17. J. Globevnik, "A boundary Morera theorem," *J. Geom. Anal.*, 1993, **3**, No. 3, 269–277.
18. J. Globevnik and E. L. Stout, "Boundary Morera theorems for holomorphic functions of several complex variables," *Duke Math. J.*, 1991, **64**, No. 3, 571–615.
19. E. Grinberg, "A boundary analogue of Morera's theorem on the unit ball of $\mathbb{C}^n$," *Proc. Am. Math. Soc.*, 1988, **102**, 114–116.
20. A. Koranyi, "The Poisson integral for the generalized half planes and bounded symmetric domains," *Ann. Math.* (2), 1965, **82**, No. 2, 332–350.
21. A. Nagel and W. Rudin, "Moebius-invariant function spaces on balls and spheres," *Duke Math. J.*, 1976, **43**, No. 4, 841–865.
22. E. L. Stout, "The boundary values of holomorphic functions of several complex variables," *Duke Math. J.*, 1977, **44**, No. 1, 105–108.

G. Kh. Khudaibergenov
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: gkhudaiberg@mail.ru

B. T. Kurbanov
Karakalpak State University, Nukus, Uzbekistan
E-mail: bukharbay@inbox.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). С. 157–166
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-157-166 УДК 519.21

О НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ МОМЕНТОВ ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

© 2022 г. **Я. М. ХУСАНБАЕВ, Х. Е. КУДРАТОВ**

Аннотация. Мы рассматриваем ветвящиеся случайные процессы с иммиграцией, начинающиеся со случайного числа элементов. В данной работе даются оценки сверху для моментов таких процессов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Пусть $\{\xi_{k,i}, \varepsilon_k : k, i \in \mathbb{N}\}$ — независимые, неотрицательные, целые случайные величины такие, что $\{\xi_{k,i} : k, i \in \mathbb{N}\}$, а величины $\{\varepsilon_k : k \in \mathbb{N}\}$ одинаково распределены.

Рассмотрим ветвящиеся процессы с иммиграцией X_k, $k \geqslant 0$, которые определены следующим рекуррентным соотношением:

$$X_0 = \eta, \ X_k = \sum_{j=1}^{X_{k-1}} \xi_{k,j} + \varepsilon_k, \ k \geqslant 1, \tag{1.1}$$

где η — неотрицательная целая случайная величина, не зависящая от $\{\xi_{k,i}, \varepsilon_k : k, i \geqslant 1\}$ (см. [4]). Последовательность $\{X_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ называется *ветвящимся процессом с иммиграцией*. Величина X_k интерпретируется как размер k-го поколения популяции, в которой начальные моменты — это η частиц, где $\xi_{k,j}$ — число потомков j-й особи в $(k-1)$-м поколении, а ε_k — число иммигрантов, дающих вклад в k-е поколение.

В случае, когда $\eta \equiv 1$ и $\varepsilon_k \equiv 0$, процесс (1.1) является хорошо известным и тщательно исследованным процессом Галтона—Ватсона (см., например, [2, 4, 6]).

Обозначим

$$m := E\xi_{1,1}, \quad \sigma^2 := D\xi_{1,1}, \quad \gamma_p := E\xi_{1,1}^p, \quad \theta_p := E \mid \xi_{1,1} - m \mid^p,$$

$$\lambda := E\varepsilon_1, \quad b^2 := D\varepsilon_1, \quad \tau_p := E\varepsilon_1^p, \quad \delta_p := E \mid \varepsilon_1 - \lambda \mid^p,$$

$$\nu_p := E\eta^p, \quad s^2 := D\eta, \quad \beta_p := E|\eta - E\eta|^p.$$

Здесь и далее полагаем, что все моменты конечные.

Случаи $m < 1$, $m = 1$, $m > 1$ называются *субкритическим*, *критическим* и *суперкритическим*, соответственно.

Благодаря практической важности процессов вида (1.1) многие научные работы были посвящены их изучению (см., например, [3]). Ветвящиеся процессы с иммиграцией и их разнообразные обобщения до сих пор представляют большой научный интерес (см., например, недавно опубликованные работы [5, 7]). В работе [5] доказана слабая сходимость агрегации многотипных ветвящихся процессов Гальтона—Ватсона с иммиграцией к стационарному гауссовскому процессу с нулевым средним. В работе [7] получены необходимые и достаточные условия существования моментов стационарного распределения субкритических многотипных процессов Гальтона—Ватсона с иммиграцией.

Оценки моментов случайных величин играют важную роль в теории вероятностей. Многие результаты были получены для моментов суммы независимых случайных величин (см. [8, 10]). Однако оценки моментов процессов вида (1.1) были мало изучены. Хорошо известно, что моменты $EX_n^m, m \geqslant 1$ получаются дифференцированием производящей функции Es^{X_n} m раз. Однако выражение для m-й производной функции Es^{X_n} становится сложным при увеличении числа m. Поэтому важной является оценка сверху моментов EX_n^m. Неравенства для моментов критических и суперкритических процессов Гальтона—Ватсона были впервые даны С. В. Нагаевым (см. [9]). В его работе в основном был использован анализ производящих функций.

В настоящей работе предоставляются оценки моментов ветвящихся случайных процессов с иммиграцией. Мы используем вероятностные методы и хорошо применимые известные неравенства для сумм независимых случайных величин.

2. Основные результаты

Пусть имеется процесс (1.1). В следующих двух теоремах дадим оценки моментов и оценки центральных моментов процессов X_n.

Теорема 2.1. *Справедливы следующие неравенства*:

1. *при* $0 < p \leqslant 1$ *и* $m \neq 1$
$$EX_n^p \leqslant \left(\nu_1 m^{n-1} + \frac{m^{n-1}-1}{m-1}\lambda\right)\gamma_p + \tau_p;$$
2. *при* $0 < p \leqslant 1$ *и* $m = 1$
$$EX_n^p \leqslant (\nu_1 + \lambda n)\gamma_p + \tau_p;$$
3. *при* $p > 1$ *и* $2^{p-1}\gamma_p \neq 1$
$$EX_n^p \leqslant \left(2^{p-1}\gamma_p\right)^n \nu_p + \frac{2^{p-1}\tau_p\left[\left(2^{p-1}\gamma_p\right)^n - 1\right]}{2^{p-1}\gamma_p - 1};$$
4. *при* $p > 1$ *и* $2^{p-1}\gamma_p = 1$
$$EX_n^p \leqslant \nu_p + 2^{p-1}\tau_p n.$$

Теорема 2.2. *Справедливы следующие неравенства*:

1. *при* $0 < p \leqslant 1$ *и* $m \neq 1$
$$E|X_n - EX_n|^p \leqslant m^{n-1}\theta_p\left(\nu_1 + \frac{\lambda}{m-1}\right)\frac{\left(m^{(p-1)n}-1\right)}{m^{(p-1)}-1} + \left(\delta_p - \frac{\lambda\theta_p}{m-1}\right)\frac{(m^{np}-1)}{m^p-1} + m^{np}\beta_p;$$
2. *при* $0 < p \leqslant 1$ *и* $m = 1$
$$E|X_n - EX_n|^p \leqslant (\theta_p\nu_1 + \delta_p)n + \frac{(n-1)n}{2}\theta_p\lambda + \beta_p;$$
3. *при* $1 < p \leqslant 2$ *и* $m \neq 1$
$$E|X_n - EX_n|^p \leqslant$$
$$\leqslant 2^{2(p-1)}n^{p-1}\left[2\theta_p m^{n-1}\left(\nu_1 + \frac{\lambda}{m-1}\right)\frac{m^{n(p-1)}-1}{m^{p-1}-1} + \left(\delta_p - \frac{2\theta_p\lambda}{m-1}\right)\frac{m^{pn}-1}{m^p-1}\right] + 2^{p-1}m^{np}\beta_p;$$
4. *при* $1 < p \leqslant 2$ *и* $m = 1$
$$E|X_n - EX_n|^p \leqslant 2^{2(p-1)}n^p[2\theta_p\nu_1 + \delta_p + (n-1)\theta_p\lambda] + 2^{p-1}\beta_p;$$

5. *при* $p > 2$ *и* $m \neq 1$, $m \neq (2^{\frac{p}{2}-1}\gamma_{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{p}}$

$$E|X_n - EX_n|^p \leqslant 2^{2(p-1)}n^{p-1}[C(p)\theta_p\left(\nu_{\frac{p}{2}} + \frac{2^{\frac{p}{2}-1}\tau_{\frac{p}{2}}}{2^{\frac{p}{2}-1}\gamma_{\frac{p}{2}}-1}\right)\frac{m^{pn}-(2^{\frac{p}{2}-1}\gamma_{\frac{p}{2}})^n}{m^p-2^{\frac{p}{2}-1}\gamma_{\frac{p}{2}}} +$$

$$+\left(\delta_p - \frac{2^{\frac{p}{2}-1}C(p)\theta_p\tau_{\frac{p}{2}}}{2^{\frac{p}{2}-1}\gamma_{\frac{p}{2}}-1}\right)\frac{m^{np}-1}{m^p-1}] + 2^{p-1}m^{np}\beta_p,$$

где $C(p)$ — *константа, зависящая только от* p;

6. *при* $p > 2$ *и* $m = 1$

$$E|X_n - EX_n|^p \leqslant 2^{2(p-1)}n^p[C(p)\theta_p\nu_{\frac{p}{2}} + \delta_p + 2^{\frac{p}{2}-1}C(p)\theta_p\tau_{\frac{p}{2}}(n-1)] + 2^{p-1}\beta_p,$$

где $C(p)$ — *константа, зависящая только от* p.

Рассмотрим важный частный случай. Если $\varepsilon_i \equiv 0$, $i \geqslant 1$, тогда мы имеем процесс Гальтона—Ватсона:

$$Z_0 = \zeta, \quad Z_n = \sum_{j=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,j}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Воспользуемся обозначениями

$$\mu_p := E\zeta^p, \quad \beta'_p := E|\zeta - E\zeta|^p.$$

Для этого процесса из теорем выше будем иметь следующие результаты.

Следствие 2.1. *Пусть* Z_n, $n = 0, 1, \ldots$ — *процесс, определенный формулой* (2.1). *Тогда*

1. *при* $0 < p \leqslant 1$

$$EZ_n^p \leqslant \mu_1 m^{n-1}\gamma_p;$$

2. *при* $p > 1$

$$EZ_n^p \leqslant \mu_p\gamma_p^n.$$

Следствие 2.2. *Пусть* Z_n, $n = 0, 1, \ldots$ — *процесс, определенный формулой* (2.1). *Тогда*

1. *при* $0 < p \leqslant 1$ *и* $m \neq 1$

$$E|Z_n - EZ_n|^p \leqslant \mu_1 m^{(n-1)p}\theta_p\frac{m^{(1-p)n}-1}{m^{1-p}-1} + m^{np}\beta'_p;$$

2. *при* $0 < p \leqslant 1$ *и* $m = 1$

$$E|Z_n - EZ_n|^p \leqslant \mu_1\theta_p n + \beta'_p;$$

3. *при* $1 < p \leqslant 2$ *и* $m \neq 1$

$$E|Z_n - EZ_n|^p \leqslant 2^p n^{p-1}\theta_p\mu_1 m^{n-1}\frac{m^{(p-1)n}-1}{m^{p-1}-1} + 2^{p-1}m^{np}\beta'_p;$$

4. *при* $1 < p \leqslant 2$ *и* $m = 1$

$$E|Z_n - EZ_n|^p \leqslant 2^p n^{p-1}\theta_p\mu_1 n + 2^{p-1}\beta'_p;$$

5. *при* $p > 2$ *и* $m \neq (\gamma_{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{p}}$

$$E|Z_n - EZ_n|^p \leqslant 2^{p-1}n^{p-1}C(p)\theta_p\mu_{\frac{p}{2}}\frac{m^{pn}-\gamma_{\frac{p}{2}}^n}{m^p-\gamma_{\frac{p}{2}}} + 2^{p-1}m^{np}\beta'_p,$$

где $C(p)$ — *константа, зависящая только от* p;

6. *при* $p > 2$ *и* $m = (\gamma_{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{p}}$

$$E|Z_n - EZ_n|^p \leqslant 2^{p-1}n^{p-1}C(p)\theta_p\mu_{\frac{p}{2}}n + 2^{p-1}\gamma_{\frac{p}{2}}^n\beta'_p,$$

где $C(p)$ — *константа, зависящая только от* p.

3. Предварительные результаты

Дадим некоторые леммы, используемые для доказательства основных результатов.
Введем обозначения

$$f(s) := Es^{\xi_{1.1}}, \quad h(s) := Es^{\varepsilon_1}, \quad \varphi(s) := Es^{\eta}, \quad H_n(s) := Es^{X_n}.$$

Лемма 3.1. *Справедливо следующее соотношение*:

$$H_n(s) = \varphi(f_n(s)) \prod_{k=0}^{n-1} h(f_{n-1-k}(s)), \tag{3.1}$$

где $f_0(s) = s,\ f_k(s)$ — k*-я итерация функции* $f(s)$.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 1$ имеем

$$H_1(s) = Es^{X_1} = Es^{(\xi_{1,1}+\ldots+\xi_{1,\eta}+\varepsilon_1)} = Es^{\varepsilon_1} E\left[Es^{(\xi_{1,1}+\ldots+\xi_{1,\eta})}/\eta\right] = h(s)E(f(s))^{\eta} = \varphi(f(s))h(s),$$

где мы воспользовались независимостью величин $\eta, \{\xi_{1,j}, j \in \mathbb{N}\}$ и ε_1. Пусть выражение (3.1) выполнено при $n = m$. Докажем его для $n = m + 1$:

$$H_{m+1}(s) = Es^{X_{m+1}} = Es^{(\xi_{m+1,1}+\ldots+\xi_{m+1,X_m}+\varepsilon_{m+1})} = Es^{\varepsilon_{m+1}} E\left[E^{(\xi_{m+1,1}+\ldots+\xi_{m+1,X_m})}/X_m\right] =$$

$$= h(s)E(f(s))^{X_m} = \varphi(f_{m+1}(s)) \prod_{k=0}^{m} h(f_{m-k}(s)).$$

Это завершает доказательство леммы 3.1. □

Лемма 3.2. *Пусть* X_n — *ветвящийся случайный процесс с иммиграцией, определенный формулой* (1.1). *Тогда*

(i) $EX_n = m^n\nu_1 + \dfrac{m^n - 1}{m - 1}\lambda,$ *если* $m \neq 1$;

(ii) $EX_n = \nu_1 + n\lambda,$ *если* $m = 1$;

(iii) $DX_n = s^2m^{2n} + \nu_1\sigma^2\dfrac{m^{n-1}(m^n - 1)}{m - 1} + b^2\dfrac{m^{2n} - 1}{m^2 - 1} + \dfrac{\lambda\sigma^2(m^n - 1)(m^{n-1} - 1)}{(m + 1)(m - 1)^2},$ *если* $m \neq 1$;

(iv) $DX_n = s^2 + \nu_1\sigma^2 n + b^2 n + \dfrac{\lambda\sigma^2}{2}n(n - 1),$ *если* $m = 1$;

(v) $cov(X_k, X_n) = m^{|k-n|}DX_{min(k,n)}$.

Доказательство. Сначала докажем равенство (i). Логарифмируя обе части равенства (3.1), получаем соотношение

$$\ln H_n(s) = \ln\varphi(f_n(s)) + \ln h(f_{n-1}(s)) + \ldots + \ln h(s).$$

Дифференцируя это равенство, получим

$$\frac{1}{H_n(s)}H_n'(s) = \frac{1}{\varphi(f_n(s))}(\varphi'(f_n(s))f_n'(s)) + \frac{1}{h(f_{n-1}(s))}(h'(f_{n-1}(s))f_{n-1}'(s)) + \ldots + \frac{1}{h(s)}h'(s). \tag{3.2}$$

Учитывая выражения $H_n(1) = 1$, $f_n(1) = 1$, $f_n'(1) = m^n$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi'(1) = \nu_1$, $h(1) = 1$, $h'(1) = \lambda$ в равенстве (3.2), будем иметь

$$H_n'(1) = \nu_1 m^n + \lambda m^{n-1} + \ldots + \lambda m + \lambda = \nu_1 m^n + \frac{m^n - 1}{m - 1}\lambda.$$

Доказательство пункта (ii) производится аналогично пункту (i). Перейдем к доказательству равенства (iii). Дифференцируя равенство (3.2), получим

$$\frac{H_n''(s)H_n(s) - (H_n'(s))^2}{H_n^2(s)} = \frac{(\varphi''(f_n(s))(f_n'(s))^2 + f_n''(s)\varphi'(f_n(s)))\varphi(f_n(s)) - (\varphi'(f_n(s))f_n'(s))^2}{\varphi^2(f_n(s))} +$$

$$+ \frac{(h''(f_{n-1}(s))(f_{n-1}'(s))^2 + f_{n-1}''(s)h'(f_{n-1}(s)))h(f_{n-1}(s)) - (h'(f_{n-1}(s))f_{n-1}'(s))^2}{h^2(f_{n-1}(s))} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h''(s)h(s) - (h'(s))^2}{h^2(s)}.$$

Учитывая соотношения $H_n(1) = 1$, $f_n(1) = 1$, $f_n'(1) = m^n$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi'(1) = \nu_1$, $h(1) = 1$, $h'(1) = \lambda$ в последнем равенстве, будем иметь

$$H_n''(1) - (H_n'(1))^2 = \varphi''(1)m^{2n} + f_n''(1)\nu_1 - \nu_1^2 m^{2n} + h''(1)m^{2(n-1)} + f_{n-1}''(1)\lambda -$$
$$- \lambda^2 m^{2(n-1)} + \ldots + h''(1) - \lambda^2 = [s^2 - \nu_1]m^{2n} + (\sigma^2 + m(m-1))\frac{m^{n-1}(m^n-1)}{m-1}\nu_1 +$$
$$+ (b^2 - \lambda)[m^{2(n-1)} + m^{2(n-2)} + \ldots + 1] + \lambda(f_{n-1}''(1) + \ldots + f''(1)).$$

Рассматривая выражения $f_n''(1) = f''(1)\dfrac{m^{n-1}(m^n-1)}{m-1}$ (см. [1]) в последнем равенстве, получим пункт (iii). Доказательство равенства (iv) является аналогичным доказательству пункта (iii). Теперь докажем равенство (v). С этой целью докажем следующее рекуррентное соотношение:

$$EX_k = m\,EX_{k-1} + \lambda, \tag{3.3}$$

$$Cov(X_k, X_n) = m\,Cov(X_k, X_{n-1}), \quad 0 \leqslant k < n. \tag{3.4}$$

В самом деле, из соотношения (1.1) получаем

$$E(X_k/\mathfrak{F}_{k-1}) = E\left(\left(\sum_{j=1}^{X_{k-1}} \xi_{k,j} + \varepsilon_k\right)/\mathfrak{F}_{k-1}\right) = mX_{k-1} + \lambda,$$

откуда следует равенство (3.3). Используя равенство (3.3) и свойства условного математического ожидания, получим

$$E((X_k - EX_k)(X_n - EX_n)/\mathfrak{F}_{n-1}) = (X_k - EX_k)E((X_n - mEX_{n-1} - \lambda)/\mathfrak{F}_{n-1}) =$$
$$= (X_k - EX_k)E\left(\left(\sum_{j=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,j} + \varepsilon_n - mEX_{n-1} - \lambda\right)/\mathfrak{F}_{n-1}\right) =$$
$$= (X_k - EX_k)E\left(\left(\sum_{j=1}^{X_{n-1}} (\xi_{n,j} - m) + m(X_{n-1} - EX_{n-1}) + (\varepsilon_n - \lambda)\right)/\mathfrak{F}_{n-1}\right) =$$
$$= m(X_k - EX_k)(X_{n-1} - EX_{n-1}),$$

где $\mathfrak{F}_k$ — σ-алгебра, порожденная случайными величинами $X_0, X_1, \ldots, X_k$. Из последнего соотношения следует равенство (3.4). В свою очередь, равенство (v) следует из равенства (3.4).

Это завершает доказательство леммы 3.2. □

Теперь дадим некоторые результаты, необходимые для доказательства основных результатов.

Следующая лемма является обобщением неравенства фон Бара—Эссеена для случайных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.

Лемма 3.3. *Пусть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины, ζ — случайная величина, принимающая неотрицательные целые значения и не зависящая от $\{Y_k, k \in \mathbb{N}\}$. Пусть $E\zeta < \infty, EY_1 = 0$ и $E|Y_1|^p < \infty$ для некоторых $0 < p \leqslant 2$. Тогда*

$$E|\sum_{k=1}^{\zeta} Y_k|^p \leqslant 2E\zeta E|Y_1|^p. \tag{3.5}$$

Доказательство. Из независимости случайных величин ζ и $\{Y_k, k \in \mathbb{N}\}$, а также из формулы полной вероятности следует соотношение

$$E|\sum_{k=1}^{\zeta} Y_k|^p = \sum_{N=0}^{\infty} E|\sum_{k=1}^{N} Y_k|^p I\{\zeta = N\} = \sum_{N=0}^{\infty} E|\sum_{k=1}^{N} Y_k|^p P\{\zeta = N\}. \tag{3.6}$$

Для последнего равенства из неравенства фон Бара—Эссеена (см. [10]) имеем

$$\sum_{N=0}^{\infty} E|\sum_{k=1}^{N} Y_k|^p P\{\zeta = N\} \leqslant 2\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N} E|Y_k|^p P\{\zeta = N\} = 2E|Y_1|^p \sum_{N=0}^{\infty} NP\{\zeta = N\} = 2E\zeta E|Y_1|^p. \tag{3.7}$$

Из равенств (3.6) и (3.7) следует соотношение (3.5). Это завершает доказательство леммы 3.3. □

Лемма 3.4. *Пусть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины, ζ — случайная величина, принимающая целые значения и не зависящая от $\{Y_k, k \in \mathbb{N}\}$. Пусть $E\zeta < \infty, EY_1 = 0$ и $E|Y_1|^p < \infty$ при некотором $p \geqslant 2$. Тогда*

$$E|\sum_{k=1}^{\zeta} Y_k|^p \leqslant C(p) E\zeta^{\frac{p}{2}} E|Y_1|^p, \tag{3.8}$$

где $C(p)$ — константа, зависящая только от p.

Доказательство. Из независимости случайных величин ζ и $\{Y_k, k \in \mathbb{N}\}$ и формулы полной вероятности имеем

$$E|\sum_{k=1}^{\zeta} Y_k|^p = \sum_{N=0}^{\infty} E|\sum_{k=1}^{N} Y_k|^p I\{\zeta = N\} = \sum_{N=0}^{\infty} E|\sum_{k=1}^{N} Y_k|^p P\{\zeta = N\}. \tag{3.9}$$

Так как величины $\{Y_k, k \in \mathbb{N}\}$ одинаково распределены, из последнего равенства и из неравенства Марцинкевича—Зигмунда (см. [10]) следует

$$\sum_{N=0}^{\infty} E|\sum_{k=1}^{N} Y_k|^p P\{\zeta = N\} \leqslant C(p) \sum_{N=0}^{\infty} N^{\frac{p}{2}-1} E \sum_{k=1}^{N} |Y_k|^p P\{\zeta = N\} =$$

$$= C(p) E|Y_1|^p \sum_{N=0}^{\infty} N^{\frac{p}{2}} P\{\zeta = N\} = C(p) E\zeta^{\frac{p}{2}} E|Y_1|^p. \tag{3.10}$$

Из равенств (3.9) и (3.10) следует соотношение (3.8).

Это завершает доказательство леммы 3.4. □

Лемма 3.5 (см. [8])**.** *Справедливы следующие равенства*:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^p \quad \text{при } 0 < p \leqslant 1 \quad (a_i \geqslant 0),$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p \leqslant n^{p-1} \sum_{i=1}^{n} a_i^p \quad \text{при } p > 1 \quad (a_i \geqslant 0).$$

4. Доказательство основных результатов

В этом разделе мы представим доказательства теорем 2.1 и 2.2.

Доказательство теоремы 2.1. Рассмотрим сначала случай $0 < p \leqslant 1$ и $m \neq 1$. Используя первое неравенство леммы 3.5, получим

$$E(X_n^p / X_{n-1}) = E\left[\left(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,i} + \varepsilon_n\right)^p / X_{n-1}\right] \leqslant E\left[\left(\left(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,i}\right)^p + \varepsilon_n^p\right) / X_{n-1}\right] \leqslant$$

$$\leqslant E\left(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,i}^p / X_{n-1}\right) + E\varepsilon_n^p = X_{n-1}\gamma_p + \tau_p. \tag{4.1}$$

Из равенства (i) леммы 3.2 следует

$$EX_n^p \leqslant EX_{n-1}\gamma_p + \tau_p = \left(m^{n-1}\nu + \frac{m^{n-1} - 1}{m - 1}\lambda\right)\gamma_p + \tau_p.$$

В случае $0 < p \leqslant 1$ $m = 1$, используя соотношение (4.1) и равенство (ii) леммы 3.2, получаем

$$EX_n^p \leqslant EX_{n-1}\gamma_p + \tau_p = (\nu + \lambda n)\gamma_p + \tau_p.$$

Теперь рассмотрим случай $p > 1,\ 2^{p-1}\gamma_p \neq 1$. Используя второе неравенство леммы 3.5, получаем

$$E(X_n^p/X_{n-1}) = E\left[\left(\sum_{i=1}^{X_{n-1}}\xi_{n,i}+\varepsilon_n\right)^p/X_{n-1}\right] \leqslant 2^{p-1}\left[E\left(\sum_{i=1}^{X_{n-1}}\xi_{n,i}\right)^p/X_{n-1}+E\varepsilon_n^p/X_{n-1}\right] \leqslant$$
$$\leqslant 2^{p-1}\left[E\left(X_{n-1}^{p-1}\sum_{i=1}^{X_{n-1}}\xi_{n,i}^p/X_{n-1}\right)+\tau_p\right] = 2^{p-1}(X_{n-1}^p\gamma_p+\tau_p).$$

Из последнего неравенства следует, что

$$EX_n^p \leqslant 2^{p-1}\left[\gamma_p EX_{n-1}^p+\tau_p\right] \leqslant \ldots \leqslant \left(2^{p-1}\gamma_p\right)^n EX_0^p + \tau_p\sum_{k=1}^n\left(2^{p-1}\right)^k\gamma_p^{k-1} =$$
$$= \left(2^{p-1}\gamma_p\right)^n\nu_p + \frac{2^{p-1}\tau_p\left[\left(2^{p-1}\gamma_p\right)^n-1\right]}{2^{p-1}\gamma_p-1}.$$

Пусть $p > 1,\ 2^{p-1}\gamma_p = 1$. Используя второе неравенство леммы 3.5, получим

$$E(X_n^p/X_{n-1}) \leqslant 2^{p-1}\left(X_{n-1}^p\gamma_p+\tau_p\right)$$

и, следовательно,

$$EX_n^p \leqslant 2^{p-1}\left(\gamma_p EX_{n-1}^p+\tau_p\right) \leqslant \ldots \leqslant \left(2^{p-1}\gamma_p\right)^n EX_0^p + 2^{p-1}\tau_p\sum_{k=1}^n\left(2^{p-1}\gamma_p\right)^{k-1} = \nu_p + 2^{p-1}\tau_p n.$$

Это завершает доказательство теоремы 2.1. □

Доказательство теоремы 2.2. Рассмотрим сначала случай $0 < p \leqslant 1$ и $m \neq 1$. Имеем

$$X_n - EX_n = X_n - E(X_n/X_{n-1}) + E(X_n/X_{n-1}) - EX_n =$$
$$= \sum_{j=1}^{X_{n-1}}\xi_{n,j} + \varepsilon_n - mX_{n-1} - \lambda + mX_{n-1} + \lambda - mEX_{n-1} - \lambda =$$
$$= \sum_{j=1}^{X_{n-1}}(\xi_{n,j}-m) + (\varepsilon_n-\lambda) + m(X_{n-1}-EX_{n-1}) \tag{4.2}$$

Используем обозначения

$$D_n = X_n - EX_n, \quad M_n = \sum_{j=1}^{X_{n-1}}(\xi_{n,j}-m) + (\varepsilon_n-\lambda).$$

Эти обозначения позволяют переписать формулу (4.2) в следующем виде:

$$D_n = mD_{n-1} + M_n.$$

Из этого равенства следует, что

$$D_n = mD_{n-1} + M_n = m(mD_{n-2}+M_{n-1}) + M_n = m^2D_{n-2} + mM_{n-1} + M_n =$$
$$= m^2(mD_{n-3}+M_{n-2}) + mM_{n-1} + M_n = m^3D_{n-3} + m^2M_{n-2} + mM_{n-1} + M_n =$$
$$= \ldots = m^nD_0 + m^{n-1}M_1 + m^{n-2}M_2 + \ldots + mM_{n-1} + M_n = \sum_{k=1}^n m^{(n-k)}M_k + m^nD_0. \tag{4.3}$$

Из формулы (4.3) и леммы 3.5 следует, что

$$E|X_n-EX_n|^p = E\left|\sum_{k=1}^n m^{(n-k)}M_k + m^nD_0\right|^p \leqslant E\left|\sum_{k=1}^n m^{(n-k)}M_k\right|^p + E|m^nD_0|^p =$$
$$= E\left|\sum_{k=1}^n m^{(n-k)}\sum_{j=1}^{X_{k-1}}(\xi_{k,j}-m) + (\varepsilon_k-\lambda)\right|^p + m^{np}\beta_p \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)p} E \left| \sum_{j=1}^{X_{k-1}} (\xi_{k,j} - m) + (\varepsilon_k - \lambda) \right|^p + m^{np}\beta_p \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)p} \left[E \left| \sum_{j=1}^{X_{k-1}} (\xi_{k,j} - m) \right|^p + E\left|\varepsilon_k - \lambda\right|^p \right] + m^{np}\beta_p \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)p} \left[E \sum_{j=1}^{X_{k-1}} |\xi_{k,j} - m|^p + \delta_p \right] + m^{np}\beta_p =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)p} \left[\theta_p \left(\nu_1 m^{k-1} + \lambda \frac{m^{k-1} - 1}{m - 1} \right) + \delta_p \right] + m^{np}\beta_p. \qquad (4.4)$$

Первое неравенство теоремы 2.2 следует из формулы (4.4).

Случай $0 < p \leqslant 1,\ m = 1$ доказывается аналогично.

Теперь рассмотрим случай $1 < p \leqslant 2,\ m \neq 1$. Согласно формуле (4.3) и лемме 3.5, имеем

$$E|X_n - EX_n|^p = E \left| \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)} M_k + m^n D_0 \right|^p \leqslant 2^{p-1} \left[E \left| \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)} M_k \right|^p + E|m^n D_0|^p \right]. \qquad (4.5)$$

Из лемм 3.3 и 3.5 следует

$$E \left| \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)} M_k \right|^p \leqslant n^{p-1} \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)p} E \left| \sum_{j=1}^{X_{k-1}} (\xi_{k,j} - m) + (\varepsilon_k - \lambda) \right|^p \leqslant$$

$$\leqslant 2^{p-1} n^{p-1} \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)p} \left[E \left| \sum_{j=1}^{X_{k-1}} (\xi_{k,j} - m) \right|^p + E|\varepsilon_k - \lambda|^p \right] =$$

$$= 2^{p-1} n^{p-1} \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)p} [2\theta_p \left(\nu_1 m^{k-1} + \lambda \frac{m^{k-1} - 1}{m - 1} \right) + \delta_p]. \qquad (4.6)$$

Третье неравенство теоремы 2.2 следует из формул (4.5) и (4.6).

Случай $1 < p \leqslant 2,\ m = 1$ доказывается аналогично.

Остается только рассмотреть случай $p > 2$. Из лемм 3.4 и 3.5 следует

$$E \left| \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)} M_k \right|^p \leqslant n^{p-1} \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)p} E \left| \sum_{j=1}^{X_{k-1}} (\xi_{k,j} - m) + (\varepsilon_k - \lambda) \right|^p \leqslant$$

$$\leqslant 2^{p-1} n^{p-1} \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)p} \left[E \left| \sum_{j=1}^{X_{k-1}} (\xi_{k,j} - m) \right|^p + E|\varepsilon_k - \lambda|^p \right] \leqslant$$

$$\leqslant 2^{p-1} n^{p-1} \sum_{k=1}^{n} m^{(n-k)p} [C(p)\theta_p E X_{k-1}^{\frac{p}{2}} + \delta_p]. \qquad (4.7)$$

Пятое неравенство теоремы 2.2 следует из формул (4.5), (4.7) и теоремы 2.1.

Случай $p > 2,\ m = 1$ доказывается аналогично. Это завершает доказательство теоремы 2.2. $\square$

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензенту, чьи комментарии внесли вклад в улучшение статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ватутин В. А.* Ветвящиеся процессы и их применения. — М.: МИАН, 2008.
2. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. — М.: Наука, 1971.
3. *Asmussen S., Hering H.* Branching processes. — Boston etc.: Birkhauser, 1983.
4. *Athreya K. B., Ney P. E.* Branching processes. — New York—Heidelberg: Springer, 1972.
5. *Barczy M., Nedenyi F. K., Pap G.* On aggregation of multitype Galton—Watson branching processes with immigration// ArXiv. — 2018. — 1711.04099v2 [math.PR].
6. *Harris T. E.* The theory of branching processes. — Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer, 1963.
7. *Kevei P., Wiandt P.* Moments of the stationary distribution of subkritical multitype Galton—Watson processes with immigration// ArXiv. — 2020. — 2002.08848v1 [math.PR].
8. *Lin Z., Bai Z.* Probability inequalities. — Berlin—Heidelberg: Springer, 2010.
9. *Nagaev S. V.* Probabilistic inequalities for the Galton—Watson processes// Theory Probab. Appl. — 2015. — *59*. — С. 611–640.
10. *Petrov V. V.* Sums of independent random variables. — Berlin: Springer, 1972.

Я. М. Хусанбаев
Институт математики им. В. И. Романовского, Ташкент, Узбекистан
E-mail: yakubjank@mail.ru

Х. Е. Кудратов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: qudratovh_83@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-157-166 UDC 519.21

On the Inequalities for Moments of Branching Random Processes

© 2022 **Ya. M. Khusanbayev, Kh. E. Kudratov**

Abstract. We consider branching random processes with immigration starting from a random number of items. In this work, we provide estimates from above for the moments of such processes.

REFERENCES

1. V. A. Vatutin, *Vetvyashchiesya protsessy i ikh primeneniya* [Branching Processes and Their Applications], MIAN, Moscow, 2008 (in Russian).
2. B. A. Sevast'yanov, *Vetvyashchiesya protsessy* [Branching Processes], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
3. S. Asmussen and H. Hering, *Branching processes*, Birkhauser, Boston etc., 1983.
4. K. B. Athreya and P. E. Ney, *Branching processes*, Springer, New York—Heidelberg, 1972.
5. M. Barczy, F. K. Nedenyi, and G. Pap, "On aggregation of multitype Galton—Watson branching processes with immigration," *ArXiv*, 2018, 1711.04099v2 [math.PR].
6. T. E. Harris, *The theory of branching processes*, Springer, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1963.
7. P. Kevei and P. Wiandt, "Moments of the stationary distribution of subkritical multitype Galton—Watson processes with immigration," *ArXiv*, 2020, 2002.08848v1 [math.PR].
8. Z. Lin and Z. Bai, *Probability inequalities*, Springer, Berlin—Heidelberg, 2010.
9. S. V. Nagaev, "Probabilistic inequalities for the Galton—Watson processes," *Theory Probab. Appl.*, 2015, **59**, 611–640.
10. V. V. Petrov, *Sums of independent random variables*, Springer, Berlin, 1972.

Ya. M. Khusanbayev
Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: yakubjank@mail.ru

Kh. E. Kudratov
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: qudratovh_83@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). С. 167–177
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-167-177 УДК 517.962

ОПТИМАЛЬНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ ФОРМУЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

© 2022 г. **Х. М. ШАДИМЕТОВ, Р. Н. МИРЗАКАБИЛОВ**

Аннотация. Оптимизация вычислительных методов в функциональных пространствах является одной из основных проблем вычислительной математики. В настоящей работе рассматриваются алгебраические и функциональные утверждения для задачи разностных формул. В оптимизации разностных формул, т. е. при построении оптимальных разностных формул в функциональных пространствах, важную роль играет экстремальная функция данной разностной формулы. В данной работе в пространствах Соболева в явном виде находится экстремальная функция разностной формулы и вычисляется норма функционала погрешности разностной формулы. Более того, доказываются существование и единственность оптимальной разностной формулы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y) \tag{1.1}$$

с начальным условием $y(0) = y_0$ на отрезке $[0, 1]$. Разделим его на N частей длины $h = \dfrac{1}{N}$ и найдем приближенные значения y_n решения $y(x)$ в узлах $x_n = nh$, $n = 0, 1, \ldots, N$. Классическим примером методов такого типа является метод Эйлера, который состоит в следующем: приближенное значение y_{n+1} решения в точке x_{n+1} получается из приближенного значения y_n решения в точке x_n с помощью формулы

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n, \tag{1.2}$$

где $y'_n = f(x_n, y_n)$. Следовательно, y_{n+1} — линейная комбинация значений функции и ее производных в точке x_n. Мы будем рассматривать только дискретные методы, т. е. методы, которые определяют решение для дискретных значений независимой переменной. Характеристической чертой дискретных методов для решения уравнения (1.1) является процесс решения, состоящий из повтора алгоритма получения неизвестного решения y_n использованием ранее вычисленных значений y_{n-j} и $f(x_j, y_j)$, $j = 1, 2, \ldots, s$.

Задача построения численного алгоритма может быть разделена на три группы:

1. Локальные свойства алгоритма. Задача состоит в выборе такого алгоритма для вычисления y_n, что разность $y_n - y(x_n)$ будет минимальной. Здесь y_n — приближенное значение точного решения $y(x)$, а значения $y(x_{n-j}), j = 1, 2, \ldots, m$ известны. Асимптотическая оценка точности алгоритма при

$$|x_{n-j} - x_{n-j-1}| = h \to 0$$

определяется двумя числами α и C:

$$|y_n - y(x_n)| = Ch^{\alpha} + o(h^{\alpha}).$$

Предполагается, что решение является достаточно гладким, а параметр α обозначает *алгебраическую степень точности*. Примером такого алгоритма являются методы Эйлера (1.2), для которых $\alpha = 2$ и $C = \dfrac{1}{2}y''(x_n)$.

2. Глобальные свойства алгоритма. Основная проблема состоит в выборе такого алгоритма, который не приводит к накоплению ошибок, т. е.

$$y_n \to y(\widetilde{x})$$

при

$$|x_n - x_{n-1}| \to 0 \quad \text{и} \quad x_n \to \widetilde{x}.$$

3. Устойчивость алгоритма как численного процесса. Некоторые сходящиеся алгоритмы могут сопровождаться численной неустойчивостью. Следовательно, мы будем рассматривать условия, которые обеспечивают устойчивость алгоритмов.

2. Задача построения разностных формул

Рассмотрим сначала задачу построения разностных формул, точных для многочленов степени не выше $m-1$, в алгебраической постановке. Далее под разностной формулой будем подразумевать следующее приближающее равенство:

$$\sum_{\beta=0}^{k} C\,[\beta]\,\varphi\,[\beta] - h\sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}\,[\beta]\,\varphi'\,[\beta] \cong 0. \tag{2.1}$$

Здесь $[\beta] = h\beta$, $\beta = 0, 1, \ldots, k$, $C\,[k] \neq 0$, $C\,[\beta]$ и $C^{(1)}\,[\beta]$ — коэффициенты разностной формулы.

Разностная формула порядка k называется *неявной*, если $C[k] \neq 0$, и *явной*, если $C[k] = 0$. Следующая разность называется *погрешностью* формулы

$$(\ell, \varphi) = \sum_{\beta=0}^{k} C\,[\beta]\,\varphi\,[\beta] - h\sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}\,[\beta]\,\varphi'\,[\beta]. \tag{2.2}$$

В классе дифференцируемых функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, равенство (2.2) определяет аддитивный и однородный функционал ℓ, который называется *функционалом погрешности* дифференциальной формулы (2.1). Говорят, что разностная формула для функции φ является *точной*, если разность (2.2) равна нулю. Другими словами, функции, для которых разностная формула является точной, образуют ядро функционала погрешности ℓ. Задача построения разностных формул в алгебраической постановке на отрезке $[0, 1]$ выглядит следующим образом:

Найти коэффициенты $C[\beta]$ и $C^{(1)}[\beta]$ разностной формулы такие, что формула становится точной для всех многочленов из пространства $\mathbf{P}_{m-1}$ при достаточно больших m, где $\mathbf{P}_{m-1}$ — пространство многочленов степени $m-1$.

Следовательно, качество разностной формулы будет выше, когда размерность пространства многочленов $\mathbf{P}_{m-1}$ будет выше.

Подставляя многочлен

$$P_{m-1}\,(x) = a_0x^{m-1} + a_1x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}$$

вместо $\varphi(x)$ в (2.2), получаем

$$(\ell, P_{m-1}) = \sum_{\beta=0}^{k} C[\beta] P_{m-1}[\beta] - h \sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}[\beta] P'_{m-1}[\beta].$$

Следовательно, наше требование $(\ell, P_{m-1}) = 0$ для $P_{m-1}(x) \in \mathbf{P}_{m-1}$, которое эквивалентно системе условий

$$(\ell, x^{\alpha}) = 0, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2.3}$$

выполнено в случае, когда векторы

$$C = (C[0], C[1], \ldots, C[k]) \quad \text{и} \quad C^{(1)} = \left(C^{(1)}[0], C^{(1)}[1], \ldots, C^{(1)}[k]\right)$$

являются решением системы

$$\sum_{\beta=0}^{k} C[\beta] = 0, \quad C[k] = 1,$$

$$(hk)^s + \sum_{\beta=0}^{k-1} C[\beta](h\beta)^s = \sum_{\beta=0}^{k} sC^{(1)}[\beta](h\beta)^{s-1}, \quad s = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Система (2.3) имеет решение, если $k \geqslant m-1$.

Теперь дадим известные разностные формулы, построенные алгебраическим способом.

Обозначим через $\nabla y_n = y_n - y_{n-1}$, тогда формула Адамса—Башфорта имеет вид

$$y_{n+1} = y_n + h\left(y'_n + \frac{1}{2}\nabla y'_n + \frac{5}{12}\nabla^2 y'_n + \frac{3}{8}\nabla^3 y'_n + \ldots\right),$$

а формула Адамса—Мультона имеет вид

$$y_n = y_{n-1} + h\left(y'_n - \frac{1}{2}\nabla y'_n - \frac{1}{12}\nabla^2 y'_n - \frac{1}{24}\nabla^3 y'_n \ldots\right).$$

Существуют иные известные формулы, например, формулы Нистрома и Мали—Симпсона, а также другие формулы.

3. Функциональная постановка задачи. Экстремальная функция разностных формул

Теперь перейдем к функциональной постановке нашей задачи. Рассмотрим функции φ из пространства Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$. Пространство $L_2^{(m)}$ является гильбертовым пространством вещественных функций φ, которые являются различными для многочленов степени $m-1$ и квадратично интегрируемыми с производной порядка m на отрезке $[0,1]$. Скалярное произведение функций f и φ в этом пространстве задается через

$$\{f, \varphi\} = \int_0^1 f^{(m)}(x)\varphi^{(m)}(x)dx. \tag{3.1}$$

Поскольку пространство $L_2^{(m)}(0,1)$ вложено в пространство $C(0,1)$ непрерывных функций, функционал погрешности разностной формулы является линейным функционалом, и выполнено следующее:

$$(\ell, \varphi) = \sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\varphi[\beta] - h\sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}[\beta]\varphi'[\beta] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\delta(x - h\beta) + h\sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}[\beta]\delta'(x - h\beta)\right]\varphi(x)\,dx. \tag{3.2}$$

Задача построения разностной формулы

$$\sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\varphi[\beta] - h\sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}[\beta]\varphi'[\beta] \cong 0$$

в функциональной постановке состоит в том, чтобы найти такой функционал (3.2), который имеет минимальную норму в пространстве $L_2^{(m)*}(0,1)$, где $L_2^{(m)*}(0,1)$ — сопряженное пространство к пространству Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$. Для нахождения явного вида нормы функционала погрешности ℓ используем экстремальную функцию данного функционала, т. е. используем функцию ψ_ℓ, удовлетворяющую равенству

$$(\ell,\psi_\ell)=\left\|\ell|L_2^{(m)*}\right\|\cdot\left\|\psi_\ell|L_2^{(m)}\right\|.$$

Известно, что в работе И. Бабушки и др. [1] нахождение экстремальной функции ψ_ℓ было сведено к дифференциальному уравнению порядка $2m$. Однако, там не было дано решение дифференциального уравнения. Наш метод нахождения ψ_ℓ отличается от метода И. Бабушки и позволяет найти экстремальную функцию в явном виде.

Отметим, что задачи построения кубатуры и разностных формул в функциональной постановке были рассмотрены, например, в работах [2–9, 13–15].

Норма функции в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ определяется как

$$\left\|\varphi|L_2^{(m)}(0,1)\right\|=\left(\int\limits_0^1\left(\varphi^{(m)}(x)\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3}$$

Поскольку функционал вида

$$\ell(x)=\sum_{\beta=0}^{k}C[\beta]\,\delta(x-h\beta)+h\sum_{\beta=0}^{k}C^{(1)}[\beta]\,\delta'(x-h\beta)$$

лежит в пространстве $L_2^{(m)*}(0,1)$, то мы имеем

$$(\ell,x^\alpha)=0,\quad \alpha=0,1,\dots,m-1. \tag{3.4}$$

Так как пространство $L_2^{(m)}(0,1)$ — гильбертово пространство, наделенное скалярным произведением (3.1) и соответствующей нормой (3.3), то, применяя теорему Рисса к любому линейному функционалу, а в частности, к функционалу погрешности ℓ, находим явный вид нормы функционала, используя функцию ψ_ℓ, которая является элементом Рисса. По теореме Рисса для любого элемента $\varphi\in L_2^{(m)}$ выполнены следующие равенства:

$$(\ell,\varphi)=\{\psi_\ell,\varphi\}, \tag{3.5}$$

$$\left\|\ell|L_2^{(m)*}(0,1)\right\|=\left\|\psi_\ell|L_2^{(m)}(0,1)\right\|.$$

Согласно (3.1) и (3.5), получаем следующее тождество, которое справедливо для любой функции $\varphi\in\mathring{C}^{(\infty)}(0,1)$ из пространства бесконечно дифференцируемых финитных функций

$$\int\limits_0^1\frac{d^m\psi_\ell(x)}{dx^m}\frac{d^m\varphi(x)}{dx^m}dx=(\ell,\varphi). \tag{3.6}$$

Интегрируя по частям левую часть уравнения (3.6) m раз, получаем

$$(\ell,\varphi)=\int\limits_0^1\left(\frac{d^m}{dx^m}\psi_\ell(x)\right)\left(\frac{d^m}{dx^m}\varphi(x)\right)=(-1)^m\left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}\left(\varepsilon_{[0,1]}(x)\,\psi_\ell(x)\right),\varphi(x)\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\frac{d^{m+j-1}}{dx^{m+j-1}}\psi_\ell(x)\,\frac{d^{m-j}}{dx^{m-j}}\varphi(y)\Bigg|\begin{matrix}y=1\\y=0\end{matrix}=\left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}\left((-1)^m\varepsilon_{[0,1]}(x)\,\psi_\ell(x)\right),\varphi(x)\right)+$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\frac{d^{m+j-1}}{dx^{m+j-1}}\psi_\ell(y)\,\delta^{(m-j)}(x-y),\varphi(x)\right)\Bigg|\begin{matrix}y=1\\y=0\end{matrix},$$

где $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ — характеристическая функция отрезка $[0,1]$.

Следовательно, в пространстве обобщенных функций имеем следующее уравнение:

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}\left(\varepsilon_{[0,1]}(x)\,\psi_\ell(x)\right)=(-1)^m\ell(x)+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{m+j}\frac{d^{m+j-1}}{dx^{m+j-1}}\psi_\ell(y)\delta^{(m-j)}(x-y)\Bigg|\begin{matrix}y=1\\y=0\end{matrix}. \tag{3.7}$$

Общее решение уравнения (3.7) записывается в виде

$$\varepsilon_{[0,1]}(x)\,\psi_\ell(x)=(-1)^m\ell(x)*G_m(x)+\sum_{j=1}^{m}a_j|x-y|^{2m-j}\Bigg|\begin{matrix}y=1\\y=0\end{matrix}+P_{2m-1}(x). \tag{3.8}$$

В формуле (3.8) сумма

$$\sum_{j=1}^{m}a_j|x-y|^{2m-j}\Bigg|\begin{matrix}y=1\\y=0\end{matrix}$$

является многочленом степени $2m-1$ с переопределенными коэффициентами a_j, соответствующими следующему члену:

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{d^{m+j-1}}{dx^{m+j-1}}\psi_\ell(y)\,\delta^{(m-j)}(x-y)\Bigg|\begin{matrix}y=1\\y=0\end{matrix}.$$

Функция $G_m(x)$ является фундаментальным решением уравнения

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}G_m(x)=\delta(x)$$

и имеет вид

$$G_m(x)=\frac{|x|^{2m-1}}{2\,(2m-1)!}.$$

Рассмотрим уравнение (3.8) вне отрезка $[0,1]$. Согласно (2.3), вне отрезка $[0,1]$ выражение $(-1)^m\ell(x)*G_m(x)$ является многочленом степени $m-1$, и поскольку эта функция из пространства $C^\infty(R\setminus[0,1])$, то после дифференцирования m раз она обращается в нуль. Для того, чтобы условие $\varepsilon_{[0,1]}\psi_\ell(x)=0$ было выполнено при $x\overline{\in}[0,1]$, должно быть справедливо

$$\sum_{j=1}^{m-1}a_j|x-y|^{2m-j}\Bigg|\begin{matrix}y=1\\y=0\end{matrix}+P_{2m-1}(x)=R_{m-1}(x),$$

где $R_{m-1}(x)$ — многочлен степени $m-1$.

Поэтому для любой разностной формулы вида (2.1) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ ее экстремальная функция, т. е. ее элемент Рисса, дается формулой

$$\psi_\ell(x)=(-1)^m\ell(x)*G_m(x)+P_{m-1}(x),$$

где $P_{m-1}(x)$ — многочлен степени $m-1$. Так, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3.1. *Экстремальная функция разностной формулы* (2.1) *в пространстве* $L_2^{(m)}(0,1)$ *определяется формулой*

$$\psi_\ell(x)=(-1)^m\ell(x)*G_m(x)+P_{m-1}(x). \tag{3.9}$$

4. Квадрат нормы функционала погрешности

Известно, что из теоремы Рисса и из определения экстремальной функции следует, что

$$(\ell,\psi_\ell)=\left\|\ell|L_2^{(m)*}\right\|\cdot\left\|\psi_\ell|L_2^{(m)}\right\|=\left\|\ell|L_2^{(m)*}\right\|^2.$$

Следовательно, получаем теорему.

Теорема 4.1. *Квадрат нормы функционала погрешности разностной формулы* (2.1) *определяется формулой*

$$\left\|\ell|L_2^{(m)*}\right\|^2=(\ell,\psi_\ell).$$

В силу теоремы 4.1, применяя экстремальную функцию и условия ортогональности (3.4) функционала погрешности $\ell(x)$ к многочленам степени $m-1$, после некоторых вычислений получаем

$$\left\|\ell|L_2^{(m)*}\right\|^2 = (-1)^m \left[\sum_{\gamma=0}^{k} C[\gamma] \sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\, G_m(h\gamma - h\beta) - 2h \sum_{\gamma=0}^{k} C^{(1)}[\gamma] \sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\, G'_m(h\gamma - h\beta) - \right.$$

$$\left. - h^2 \sum_{\gamma=0}^{k} C^{(1)}[\gamma] \sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}[\beta]\, G''_m(h\gamma - h\beta)\right],$$

где

$$G'_m(x) = \frac{x^{2m-2}\operatorname{sign} x}{2(2m-2)!}, \qquad G''_m(x) = \frac{x^{2m-3}\operatorname{sign} x}{2(2m-3)!}.$$

Известно, что устойчивость разностной формулы в смысле Далквиста (как сильной устойчивости) определяется только коэффициентами $C[\beta]$, $\beta = 0, 1, \ldots, k$.

По этой причине поиск оптимальной формулы связан только с вариацией коэффициентов

$$C^{(1)}[\beta], \ \ \beta = 0, 1, \ldots, k.$$

Разностная формула с функционалом погрешности ℓ в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ может быть охарактеризована двумя методами. С одной стороны, она определена коэффициентами $C[\beta], C^{(1)}[\beta]$, $\beta = 0, 1, \ldots, k$ с условиями (3.4), с другой стороны — экстремальной функцией ψ_ℓ.

Теперь перейдем к минимизации квадрата нормы функционала погрешности ℓ разностной формулы для $C[\beta]$, заданного коэффициентами $C^{(1)}[\beta]$ с условиями (3.4).

Применим метод Лагранжа неопределенных множителей. Для этого рассмотрим функцию

$$\Psi\left(C, C^{(1)}, \lambda\right) = \left\|\ell|L_2^{(m)*}\right\|^2 - (-1)^m 2 \sum_{\alpha=0}^{m-1} \lambda_\alpha (\ell, x^\alpha).$$

Частные производные функции $\Psi\left(C, C^{(1)}, \lambda\right)$ по $C^{(1)}[\beta]$ и λ_α обращаются в нуль:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial C^{(1)}[\beta]} = 0, \quad \beta = 0, 1, \ldots, k,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_\alpha} = 0, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Это дает следующую систему уравнений

$$h \sum_{\gamma=0}^{k} C^{(1)}[\beta]\, G''_m(h\beta - h\gamma) + P_{m-2}[\beta] = -\sum_{\gamma=0}^{k} G'_m(h\beta - h\gamma), \ \beta = 0, 1, \ldots, k, \tag{4.1}$$

$$h\alpha \sum_{\gamma=0}^{k} C^{(1)}[\gamma]\, [\gamma]^{\alpha-1} = \sum_{\gamma=0}^{k} C[\gamma]\, [\gamma]^{\alpha}, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{4.2}$$

где

$$G_m(x) = \frac{x^{2m-1}\operatorname{sign} x}{2(2m-1)!}, \qquad G'_m(x) = \frac{x^{2m-2}\operatorname{sign} x}{2(2m-2)!}, \qquad G''_m(x) = \frac{x^{2m-3}\operatorname{sign} x}{2(2m-3)!}.$$

Решение системы (4.1), (4.2), обозначенное через $\mathring{C}^{(1)}[\beta]$, $\mathring{\lambda}_\alpha$, является критической точкой функции $\Psi\left(C, C^{(1)}, \lambda\right)$. Из метода Лагранжа следует, что $\mathring{C}^{(1)}[\beta]$ — искомые значения коэффициентов оптимальной разностной формулы. Они дают условный минимум нормы $\left\|\ell|L_2^{(m)*}\right\|^2$ при условиях (3.4).

Теперь рассмотрим формулу (3.9). Учитывая произвольность коэффициентов многочленов $P_{m-1}(x)$, мы выбираем их такими, что производная $(-1)^m P'_{m-1}(x)$ совпадает с многочленом $P_{m-2}(x)$ из (4.1). При таком выборе значений производной экстремальной функции ψ_ℓ в точках $h\beta$ получаем $\psi'_\ell[\beta] = 0$, что следует из формулы (4.1). Следовательно, мы доказали теорему Бабушки алгебраическим способом.

Теорема 4.2. *Разностные формулы*

$$\sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\,\varphi[\beta] \cong h\sum_{\beta=0}^{k} \mathring{C}^{(1)}[\beta]\varphi'[\beta],$$

$$\sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\,\varphi[\beta] \cong h\sum_{\beta=0}^{k-1} \mathring{C}^{(1)}[\beta]\varphi'[\beta]$$

являются оптимальными тогда и только тогда, когда функция ψ_ℓ, *определенная формулой* (3.9), *может быть выбрана так, что*

$$\psi_\ell'[\beta] = 0 \quad \textit{при} \quad \beta = 0,1,\ldots,k$$

и

$$\psi_\ell'[\beta] = 0 \quad \textit{при} \quad \beta = 0,1,\ldots,k-1$$

для неявной и явной формул, соответственно.

Как результат, для построения неявных оптимальных разностных формул необходимо решить следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} h\sum\limits_{\gamma=0}^{k} C^{(1)}[\gamma]\,G_m''(h\beta-h\gamma) + P_{m-2}[\beta] = -\sum\limits_{\gamma=0}^{k} C[\gamma]\,G_m'(h\beta-h\gamma), & \beta=0,1,\ldots,k, \\ h\alpha\sum\limits_{\gamma=0}^{k} C^{(1)}[\gamma]\,[\gamma]^{\alpha-1} = \sum\limits_{\gamma=0}^{k} C[\gamma]\,[\gamma]^{\alpha}, & \alpha = 1,\ldots,m-1, \end{cases}$$

где $C[\beta]$ определены из условий устойчивости разностной формулы в смысле Далквиста и $\sum\limits_{\gamma=0}^{k} C[\gamma] = 0$.

Определение 4.1. Разностная формула (2.1) *устойчива в смысле Далквиста*, если все корни ζ_i характеристического многочлена $P(\zeta) = \sum\limits_{\beta=0}^{k} C[\beta]\,\zeta^{\beta}$ удовлетворяют неравенству $|\zeta_i| \leqslant 1$, а корни, для которых $|\zeta_i| = 1$, являются простыми [10–12].

Например,

$$C[k] = 1, \quad C[k-1] = -1, \quad C[k-i] = 0$$

при $i = 2,3,\ldots,k$.

Аналогично, для явной разностной формулы имеем

$$\begin{cases} \sum\limits_{\gamma=0}^{k-1} d^{(1)}[\beta]\,G''(h\beta-h\gamma) + P_{m-2}[\beta] = -\sum\limits_{\gamma=0}^{k} d[\beta]\,G_m'(h\beta-h\gamma), & \beta=0,1,\ldots, \\ \alpha h\sum\limits_{\gamma=0}^{k-1} d^{(1)}[\gamma]\,[\gamma]^{\alpha-1} = \sum\limits_{\gamma=0}^{k} d[\gamma]\,[\gamma]^{\alpha}, & \alpha = 1,2,\ldots,m-1, \end{cases}$$

где $d[\gamma]$ определены из устойчивости разностной формулы и из равенства $\sum\limits_{\gamma=0}^{k} d[\gamma] = 0$.

Здесь мы полагаем, что система (4.1), (4.2) разрешима. Ее разрешимость следует из общей теории множителей Лагранжа. Однако можно доказать разрешимость алгебраическим методом напрямую.

Из теории условного экстремума известно достаточное условие, при котором решение $\mathring{C}^{(1)}[\beta]$ и $\mathring{\lambda}_\alpha$ дает локальный минимум функции $\Psi\left(C, C^{(1)}, \lambda\right)$ на многообразии (3.4). Оно состоит в положительной определенности квадратичной формы

$$F\left(C^{(1)}\right) = \sum_{\beta=0}^{k}\sum_{\gamma=0}^{k} \frac{\partial^2\Psi}{\partial C^{(1)}[\beta]\,\partial C^{(1)}[\gamma]} C^{(1)}[\beta]\,C^{(1)}[\gamma] \tag{4.3}$$

на множестве векторов $C^{(1)} = \left(C^{(1)}[0], C^{(1)}[1], \ldots, C^{(1)}[k]\right)$ при условии

$$QC^{(1)} = 0. \tag{4.4}$$

Здесь матрица Q имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & h & 2h & \dots & kh \\ 0 & h^2 & (2h)^2 & \dots & (kh)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & h^{m-2} & (2h)^{m-2} & \dots & (kh)^{m-2} \end{pmatrix}.$$

Мы покажем, что в рассмотренном случае квадратичная форма $F\left(C^{(1)}\right)$ строго положительна.

Теорема 4.3. *Для любого ненулевого вектора*

$$C^{(1)} = \left(C^{(1)}[0], C^{(1)}[1], \dots, C^{(1)}[k]\right) \in \mathbb{R}^{k+1}$$

из подпространства $QC^{(1)} = 0$ функция $F\left(C^{(1)}\right)$ является строго положительной.

Доказательство. Из определения функции Лагранжа $\Psi\left(C, C^{(1)}, \lambda\right)$ и из равенства (4.3) получаем

$$F\left(C^{(1)}\right) = \sum_{\beta=0}^{k}\sum_{\gamma=0}^{k} G''_m(h\beta - h\gamma)\, C^{(1)}[\gamma]\, C^{(1)}[\beta].$$

Рассмотрим линейный функционал вида

$$\nu_{C^{(1)}}(x) = \sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}[\beta]\,\delta(x - h\beta).$$

Если учесть условие (4.4), то этот функционал принадлежит пространству $L_2^{(m-1)*}(0,1)$. Поэтому он имеет экстремальную функцию $U_{C^{(1)}}(x) \in L_2^{(m-1)}$, которая является решением уравнения

$$\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} U_{C^{(1)}}(x) = (-1)^m \nu_{C^{(1)}}(x).$$

Ясно, что для $U_{C^{(1)}}(x)$ можно получить следующую линейную комбинацию сдвигов фундаментального решения:

$$U_{C^{(1)}}(x) = \sum_{\gamma=0}^{k} C^{(1)}[\gamma]\, G''_m(x - h\gamma).$$

Здесь $G''_m(x)$ — решение уравнения

$$\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} G''_m(x) = \delta(x).$$

Квадрат нормы функции $U_{C^{(1)}}(x)$ в пространстве $L_2^{(m-1)}(0,1)$ совпадает с формой $F\left(C^{(1)}\right)$:

$$\left\| U_{C^{(1)}}(x) | L_2^{(m-1)} \right\|^2 = \left(\nu_{C^{(1)}}(x), U_{C^{(1)}}(x)\right) = \sum_{\gamma=0}^{k}\sum_{\beta=0}^{k} G''_m(h\beta - h\gamma)\, C^{(1)}[\beta]\, C^{(1)}[\gamma].$$

Следовательно, ясно, что для ненулевых $C^{(1)}[\beta]$ функция $F\left(C^{(1)}\right)$ является строго положительной. Известно, что при $k > m$ система (4.4) всегда имеет решение, т. е. матрица Q имеет правую обратную, и тогда система (4.1), (4.2) имеет единственное решение. ☐

Теорема 4.4. *Если матрица Q имеет правую обратную, то матрица M системы* (4.1), (4.2) *невырождена.*

Доказательство. Обозначим через G'' матрицу квадратичной формы (4.3). Запишем однородную систему, соответствующую системе (4.1), (4.2), в следующем виде:

$$M\begin{pmatrix} C^{(1)} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G'' & Q^* \\ Q & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C^{(1)} \\ \lambda \end{pmatrix} = 0. \tag{4.5}$$

Покажем, что единственное решение задачи (4.5) является тождественным нулем.

Пусть $\overline{C}^{(1)}, \overline{\lambda}$ — решение задачи (4.5). Рассмотрим следующий функционал для вектора $\overline{C}^{(1)}$:

$$\mu_{\overline{C}^{(1)}}(x) = \sum_{\gamma=0}^{k} \overline{C}^{(1)}[\gamma]\,\delta(x - h\gamma).$$

Ясно, что этот функционал лежит в пространстве $L_2^{(m-1)*}(0,1)$. Возьмем в качестве экстремальной функции для $\mu_{\overline{C}^{(1)}}(x)$ функцию

$$U_{\overline{C}^{(1)}}(x) = \sum_{\gamma=0}^{k} \overline{C}^{(1)}[\gamma]\,G_m''(x - h\gamma) + \sum_{\alpha=1}^{m-1} \overline{\lambda} x^{\alpha-1}.$$

Это является возможным, так как функция $U_{C^{(1)}}(x)$ лежит в пространстве $L_2^{(m-1)}(0,1)$ и является решением уравнения

$$\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} U_{\overline{C}^{(1)}}(x) = (-1)^m \mu_{\overline{C}^{(1)}}(x).$$

Первые $k+1$ уравнений системы (4.5) означают, что функция $U_{C^{(1)}}(x)$ обнуляется во всех узлах разностной формулы, т. е. $U_{\overline{C}^{(1)}}(h\beta) = 0$, $\beta = 0, 1, \ldots, k$. Тогда относительно нормы функционала $\mu_{\overline{C}^{(1)}}(x)$ в $L_2^{(m-1)*}(0,1)$ имеем

$$\left\| \mu_{\overline{C}^{(1)}}(x) \,|\, L_2^{(m-1)*} \right\|^2 = \left(\mu_{\overline{C}^{(1)}}(x), U_{\overline{C}^{(1)}}(x) \right) = \sum_{\beta=0}^{k} \overline{C}^{(1)}[\beta]\, U_{\overline{C}^{(1)}}(h\beta) = 0,$$

что возможно только при $\overline{C}^{(1)}[\beta] = 0$. Учитывая это, из первых $k+1$ уравнений системы (4.5) получаем

$$Q^* \overline{\lambda} = 0. \tag{4.6}$$

По утверждению теоремы матрица Q имеет правую обратную, и тогда матрица Q^* имеет левую обратную. Отсюда и из (4.6) следует, что решение $\overline{\lambda}$ также нулевое. Теорема доказана. □

Следовательно, система (4.1), (4.2) имеет единственное решение.

БЛАГОДАРНОСТИ

Мы очень благодарны рецензенту за замечания и предложения, позволившие улучшить качество статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабушка И., Прагер М., Витасек Э.* Численные процессы решения дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1969.
2. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. — М.: Наука, 1974.
3. *Соболев С. Л., Васкевич В. Л.* Кубатурные формулы. — Новосибирск: Ин-т мат., 1996.
4. *Шадиметов Х. М.* Весовые оптимальные кубатурные формулы в периодическом пространстве Соболева// Сиб. ж. выч. мат. — 1999. — *2*, № 2. — С. 185–195.
5. *Шадиметов Х. М.* Об оптимальных решетчатых квадратурных и кубатурных формулах// Докл. РАН. — 2001. — *376*, № 5. — С. 597–599.
6. *Шадиметов Х. М.* Функциональная постановка задач оптимальных разностных формул// Узб. мат. ж. — 2015. — № 4. — С. 179–183.
7. *Akhmedov D. M., Hayotov A. R., Shadimetov Kh. M.* Optimal quadrature formulas with derivatives for Cauchy type singular integrals// Appl. Math. Comput. — 2018. — *317*. — С. 150–159.
8. *Babuška I., Sobolev S.* Optimization of numerical methods// Apl. Mat. — 1965. — *10*. — С. 9–170.
9. *Boltaev N. D., Hayotov A. R., Shadimetov Kh. M.* Construction of optimal quadrature formula for numerical calculation of Fourier coefficients in Sobolev space $L_2^{(1)}$// Am. J. Numer. Anal. — 2016. — *4*, № 1. — С. 1–7.
10. *Dahlquist G.* Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations// Math. Scand. — 1956. — *4*. — С. 33–52.
11. *Dahlquist G.* Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations. — Stockholm: Almqvist & Wiksell, 1958.

12. *Henrici P.* Discrete variable methods in ordinary differential equations. — New York—London: John Wiley & Sons, 1962.
13. *Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R.* Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in $W_2^{(m,m-1)}$ space// Calcolo. — 2014. — *51*. — С. 211–243.
14. *Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R., Akhmedov D. M.* Optimal quadrature formulas for Cauchy type singular integrals in Sobolev space// Appl. Math. Comput. — 2015. — *263*. — С. 302–314.
15. *Shadimetov Kh. M., Mirzakabilov R. N.* The problem on construction of difference formulas// Probl. Comput. Appl. Math. — 2018. — *5*, № 17. — С. 95–101.

Х. М. Шадиметов
Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан
E-mail: kholmatshadimetov@mail.ru

Р. Н. Мирзакабилов
Институт математики им. В. И. Романовского, Ташкент, Узбекистан
E-mail: ravshan.m.n@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-167-177 UDC 517.962

Optimal Difference Formulas in the Sobolev Space

© 2022 **Kh. M. Shadimetov, R. N. Mirzakabilov**

Abstract. Optimization of computational methods in functional spaces is one of the main problems of computational mathematics. In this paper, algebraic and functional assertions for the problem of difference formulas are discussed. For optimization of difference formulas, i.e., for construction of optimal difference formulas in functional spaces, an important role is played by the extremal function of the given difference formula. In this work, we explicitly find in Sobolev spaces the extremal function of the difference formula and compute the norm of the error functional of the difference formula. Furthermore, we prove existence and uniqueness of the optimal difference formula.

REFERENCES

1. I. Babuška, M. Práger, and E. Vitásek, *Chislennye protsessy resheniya differentsial'nykh uravneniy* [Numerical Processes In Differential Equations], Mir, Moscow, 1969 (Russian translation).
2. S. L. Sobolev, *Vvedenie v teoriyu kubaturnykh formul* [Introduction to the Theory of Cubature Formulas], Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).
3. S. L. Sobolev and V. L. Vaskevich, *Kubaturnye formuly* [Cubature Formulas], Inst mat., Novosibirsk, 1996 (in Russian).
4. Kh. M. Shadimetov, "Vesovye optimal'nye kubaturnye formuly v periodicheskom prostranstve Soboleva" [Weighted optimal cubature formulas in periodic Sobolev space], *Sib. zh. vych. mat.* [Siberian J. Comput. Math.], 1999, **2**, No. 2, 185–195 (in Russian).
5. Kh. M. Shadimetov, "Ob optimal'nykh reshetchatykh kvadraturnykh i kubaturnykh formulakh" [On optimal lattice quadratures and cubature formulas], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2001, **376**, No. 5, 597–599 (in Russian).
6. Kh. M. Shadimetov, "Funktsional'naya postanovka zadach optimal'nykh raznostnykh formul" [Functional statement of problems of optimal difference formulas], *Uzb. mat. zh.* [Uzbek. Math. J.], 2015, No. 4, 179–183 (in Russian).

7. D. M. Akhmedov, A. R. Hayotov, and Kh. M. Shadimetov, “Optimal quadrature formulas with derivatives for Cauchy type singular integrals,” *Appl. Math. Comput.*, 2018, **317**, 150–159.
8. I. Babuška and S. Sobolev, “Optimization of numerical methods,” *Apl. Mat.*, 1965, **10**, 9–170.
9. N. D. Boltaev, A. R. Hayotov, and Kh. M. Shadimetov, “Construction of optimal quadrature formula for numerical calculation of Fourier coefficients in Sobolev space $L_2^{(1)}$,” *Am. J. Numer. Anal.*, 2016, **4**, No. 1, 1–7.
10. G. Dahlquist, “Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations,” *Math. Scand.*, 1956, **4**, 33–52.
11. G. Dahlquist, *Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations*, Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1958.
12. P. Henrici, *Discrete variable methods in ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, New York—London, 1962.
13. Kh. M. Shadimetov and A. R. Hayotov, “Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in $W_2^{(m,m-1)}$ space,” *Calcolo*, 2014, **51**, 211–243.
14. Kh. M. Shadimetov, A. R. Hayotov, and D. M. Akhmedov, “Optimal quadrature formulas for Cauchy type singular integrals in Sobolev space,” *Appl. Math. Comput.*, 2015, **263**, 302–314.
15. Kh. M. Shadimetov and R. N. Mirzakabilov, “The problem on construction of difference formulas,” *Probl. Comput. Appl. Math.*, 2018, **5**, No. 17, 95–101.

Kh. M. Shadimetov
Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: kholmatshadimetov@mail.ru

R. N. Mirzakabilov
Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: ravshan.m.n@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). С. 178–189
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-178-189 УДК 517.983

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО АДАМАРУ И ТИПА АДАМАРА В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

© 2022 г. **М. У. ЯХШИБОЕВ**

Аннотация. В статье рассматривается ограниченность интегралов дробного интегрирования по Адамару и типа Адамара (смешанного и по направлению) в пространствах Лебега со смешанной нормой. Доказаны теоремы типа Соболева об ограниченности одномерного и многомерного дробного интегрирования типа Адамара в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В 1961 году были введены пространства Лебега со смешанной нормой $L^{\overline{p}}(\mathbb{R}^n)$ как естественное обобщение классического пространства Лебега $L^p(\mathbb{R}^n)$ путем замены постоянной экспоненты p вектором экспоненты $\overline{p}$. Пространства Лебега со смешанной нормой были введены и изучены в работе [9]. Изучению ограниченности операторов в пространствах Лебега со смешанной нормой посвящены работы [4,7,8,20]. Ряд свойств пространств Лебега со смешанной нормой можно найти в книге [2].

Будем называть пространства $L^{\overline{p}}(\mathbb{R}^n)$ *анизотропными*, а $L^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}(\mathbb{R}^n)$ — *весовыми анизотропными* пространствами.

Поскольку функциональные пространства со смешанными нормами имеют более тонкие структуры, чем соответствующие классические функциональные пространства, они естественным образом возникают в исследованиях решений уравнений в частных производных, используемых для моделирования физических процессов, включающих как пространственные, так и временные переменные такие, как тепловые или волновые уравнения [13, 15, 18].

Известно, что дробное интегродифференцирование Римана—Лиувилля является формально дробной степенью $\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}$ и инвариантно относительно сдвига [5, 6]. Ж. Адамар [14] предложил конструкцию дробного интегродифференцирования, являющуюся дробной степенью $\left(x\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}$, приспособленную к полуоси и инвариантную относительно растяжения. Именно, он ввел дробные интегралы вида:

$$\left(J_{\pm}^{\alpha}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\ln\frac{1}{t}\right)_{\pm}^{\alpha-1}\varphi(x\cdot t)\,\frac{dt}{t},\quad x>0,\quad \alpha>0.$$

При $0<\alpha<1$ дробная производная по Адамару имеет вид

$$\left(D_{\pm}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\pm x\frac{d}{dx}\right)\int\limits_{0}^{\infty}\left(\ln\frac{1}{t}\right)_{\pm}^{-\alpha}f(x\cdot t)\,\frac{dt}{t},\quad x>0.$$

В работе [1] рассматриваются свойства некоторых интегродифференциальных операторов, обобщающих операторы дробного дифференцирования в смысле Адамара и Адамара—Маршо в классе гармонических функций. В качестве применения полученных свойств изучаются вопросы разрешимости нелокальных задач для уравнения Лапласа в шаре.

В статьях [3, 10–12, 16, 17, 19, 21] рассмотрены операторы одномерного дробного интегродифференцирования Адамара и типа Адамара. Ряд свойств дробного интегрирования по Адамару можно найти в книге [6]. В настоящей работе дается распространение теории такого дробного интегрирования на случай функций многих переменных в рамках пространств $\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}$ со смещенной нормой.

В работе [21] доказана теорема об ограниченности одномерного дробного интегрирования по Адамару и типа Адамара в кусочно-степенных весовых пространствах суммируемых функций.

В настоящей работе доказана ограниченность дробного интегрирования по Адамару и типа Адамара (смешанного и по направлению) в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой. Кроме того, доказаны теоремы типа Соболева ограниченности дробного интегрирования типа Адамара в весовых пространствах Лебега. Полученные результаты являются новыми и дополняют статью [21].

Рассмотрение ведется в рамках пространств со смешанной нормой

$$\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\left(\mathbb{R}_{+}^{n},\,\frac{dx}{x}\right)=\left\{f:\left\|f;\ \mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\right\|=\left\{\int\limits_{0}^{\infty}\left[\ldots\left(\int\limits_{0}^{\infty}|f(x)|^{p_1}\,x_1^{-\gamma_1}\frac{dx_1}{x_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\ldots\right]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}}x_n^{-\gamma_n}\frac{dx_n}{x_n}\right\}^{\frac{1}{p_n}}<\infty\right\},$$

$$C_{\overline{\gamma}}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)=\left\{f:\|f;\ C_{\bar{\gamma}}\|=\max_{x\in\mathbb{R}_{+}^{n}}\left|x^{-\overline{\gamma}}f(x)\right|<\infty,\ \lim_{|x|\to 0}x^{-\overline{\gamma}}f(x)=\lim_{|x|\to\infty}x^{-\overline{\gamma}}f(x)\right\},$$

$\gamma_i\geqslant 0$, $i=\overline{1,n}$. Норма в $\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}$ также определяется формулой

$$\|f\|_{\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}}=\left\|f;\ \mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\right\|=\left\|x^{-\overline{\gamma}^*}f;\ \mathfrak{L}^{\overline{p}}\right\|,\quad 1\leqslant\overline{p}\leqslant\infty,\tag{1.1}$$

где $x^{-\overline{\gamma}^*}=x_1^{-\gamma_1^*}\cdot x_2^{-\gamma_2^*}\cdot\ldots\cdot x_n^{-\gamma_n^*}$,

$$\gamma_i^*=\begin{cases}\dfrac{\gamma_i}{p_i}, & 1\leqslant p_i<\infty,\\ \gamma_i, & p_i=\infty,\end{cases}\qquad i=\overline{1,n}.\tag{1.2}$$

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 приведены необходимые сведения о дробном интегрировании Адамара и типа Адамара (смешанном и по направлению), в разделе 3 доказывается ограниченность дробного интегрирования Адамара и типа Адамара (смешанного и по направлению) в пространствах Лебега со смешанной нормой.

1.1. Обозначения. $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$ — множество вещественных чисел, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, $\mathbb{R}_+=(0;+\infty)$ — полуось; $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство точек $x=(x_1,\ldots,x_n)$; $\dot{\mathbb{R}}^n$ — компактификация $\mathbb{R}^n$ одной бесконечно удаленной точкой, $\mathbb{R}_+^n=\{x\in\mathbb{R}^n;\ x_1>0,\ \ldots,x_n>0\}$, $\dot{\mathbb{R}}_+^n=\mathbb{R}_+^n\cup\{\infty\}$. Всюду ниже: E — единичный оператор;

$(\Pi_\delta f)(x) = f(x\cdot\delta)$, $x,\delta\in\mathbb{R}^n_+$, — оператор растяжения. Введем конечную разность с использованием оператора растяжения:

$$(\tilde\Delta^s_\tau f)(x) = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \tbinom{s}{k} f\left(x\cdot\tau^k\right) = (E-\Pi_\tau)^s f, \quad s\in\mathbb{N}, \quad \tau\in\mathbb{R}_+, \tag{1.3}$$

и смешанную конечную разность функции f векторного порядка $l=(l_1,l_2,\dots,l_n)$, $l_k\in\mathbb{N}$, с «мультипликативным» векторным шагом $t\in\mathbb{R}^n_+$:

$$(\tilde\Delta^l_t f)(x) = \tilde\Delta^{l_1}_{\xi_1}[\tilde\Delta^{l_2}_{\xi_2}\dots(\tilde\Delta^{l_n}_{\xi_n} f)](x) = \sum_{0\leqslant|k|\leqslant l} (-1)^{|k|}\binom{l}{k} f\left(x\cdot t^k\right), \tag{1.4}$$

где $x\cdot t^k = \left(x_i\cdot t_1^{k_1},\dots,x_n\cdot t_n^{k_n}\right)$, $\binom{l}{k} = \prod\limits_{i=1}^{n}\binom{l_i}{k_i}$, $\binom{l_i}{k_i}$ — биномиальные коэффициенты, k — мультииндекс. Условимся, что запись $1\leqslant\overline{p}<\infty$ и $\overline{p}=\overline{\infty}$, где $\overline{p}=(p_1,\dots,p_n)$, $\overline{\infty}=(\infty,\dots,\infty)$, означает, что $1\leqslant p_i<\infty$, $p_i=\infty$, $i=\overline{1,n}$. Обозначим $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} = \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}\left(\mathbb{R}^n_+, \frac{dx}{x}\right)$, $1\leqslant\overline{p}<\infty$ и $C\left(\dot{\mathbb{R}}^n_+\right) = \{\, f: f\in C\left(\mathbb{R}^n_+\right),\ f(0)=f(\infty)\,\}$. Пусть $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n)$, тогда $\rho^\omega=(\rho_1^{\omega_1},\dots,\rho_n^{\omega_n})$, $x\cdot\rho^\omega = (x_1\cdot\rho_1^{\omega_1},\dots,x_n\cdot\rho_n^{\omega_n})$, $(x:\rho^\omega) = (x\cdot\rho^{-\omega}) = \left(\frac{x_1}{\rho_1^{\omega_1}},\dots,\frac{x_n}{\rho_n^{\omega_n}}\right)$. Если $u=(u_1,\dots,u_n)$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, то

$$u^\alpha_+ = \prod_{i=1}^{n}(u_i)^{\alpha_i}_+, \quad (u_i)^{\alpha_i}_+ = \begin{cases} u_i^{\alpha_i}, & u_i>0,\\ 0, & u_i<0,\end{cases} \qquad \gamma^* = \begin{cases} \dfrac{\gamma}{p}, & 1\leqslant p<\infty,\\ \gamma, & p=\infty.\end{cases}$$

2. Дробное интегрирование Адамара и типа Адамара (смешанное и по направлению)

Определим интегралы дробного порядка по Адамару и типа Адамара.

Определение 2.1. Для функции $\varphi(x)$, заданной во всем октанте $\mathbb{R}^n_+$, интегралы

$$(J^\alpha_{+\dots+}\varphi)(x) = \int\limits_0^{x_1}\cdots\int\limits_0^{x_n}\varphi(t)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\left(\ln\frac{x_i}{t_i}\right)^{\alpha_i-1}\frac{dt_1}{t_1}\cdots\frac{dt_1}{t_1}, \tag{2.1}$$

$$(J^\alpha_{-\dots-}\varphi)(x) = \int\limits_{x_1}^{\infty}\cdots\int\limits_{x_n}^{\infty}\varphi(t)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\left(\ln\frac{t_i}{x_i}\right)^{\alpha_i-1}\frac{dt_1}{t_1}\cdots\frac{dt_1}{t_1} \tag{2.2}$$

назовем *смешанными интегралами дробного порядка* α ($\alpha_i>0$, $i=\overline{1,n}$) *по Адамару* (соответственно, левосторонним и правосторонним).

Определение 2.2. Для функции $\varphi(x)$, заданной во всем октанте $\mathbb{R}^n_+$, интегралы

$$(J^\alpha_{+\dots+,\mu}\varphi)(x) = \int\limits_0^{x_1}\cdots\int\limits_0^{x_n}\varphi(t)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\left(\frac{t_i}{x_i}\right)^{\mu_i}\left(\ln\frac{x_i}{t_i}\right)^{\alpha_i-1}\frac{dt_1}{t_1}\cdots\frac{dt_n}{t_n}, \tag{2.3}$$

$$(J^\alpha_{-\dots-,\mu}\varphi)(x) = \int\limits_{x_1}^{\infty}\cdots\int\limits_{x_n}^{\infty}\varphi(t)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(\Gamma\alpha_i)}\left(\frac{x_i}{t_i}\right)^{\mu_i}\left(\ln\frac{t_i}{x_i}\right)^{\alpha_i-1}\frac{dt_1}{t_1}\cdots\frac{dt_n}{t_n}, \tag{2.4}$$

$$(\Im^\alpha_{+\dots+,\mu}\varphi)(x) = \int\limits_0^{x_1}\cdots\int\limits_0^{x_n}\varphi(t)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\left(\frac{t_i}{x_i}\right)^{\mu_i}\left(\ln\frac{x_i}{t_i}\right)^{\alpha_i-1}\frac{dt_1}{x_1}\cdots\frac{dt_n}{x_n}, \tag{2.5}$$

$$(\Im^\alpha_{-\dots-,\mu}\varphi)(x) = \int\limits_{x_1}^{\infty}\cdots\int\limits_{x_n}^{\infty}\varphi(t)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\left(\frac{x_i}{t_i}\right)^{\mu_i}\left(\ln\frac{t_i}{x_i}\right)^{\alpha_i-1}\frac{dt_1}{x_1}\cdots\frac{dt_n}{x_n} \tag{2.6}$$

назовем *смешанными интегралами дробного порядка* α ($\alpha_i>0$, $i=\overline{1,n}$) *типа Адамара* (соответственно левосторонними и правосторонними).

Операторы (2.1)–(2.4) коммутируют с оператором растяжения $\Pi_\rho J^\alpha_{\pm\cdots\pm} = J^\alpha_{\pm\ldots\pm}\Pi_\rho$, $\Pi_\rho J^\alpha_{\pm\cdots\pm,\mu} = J^\alpha_{\pm\cdots\pm,\mu}\Pi_\rho$. Операторы $J^\alpha_{\pm\ldots\pm}$, $J^\alpha_{\pm\ldots\pm,\mu}$ связаны с оператором Римана—Лиувилля $I^\alpha_{\pm\cdots\pm}$ (см. [6, с. 251]) равенствами

$$J^\alpha_{\pm\ldots\pm}\varphi = Q^{-1} I^\alpha_{\pm\ldots\pm} Q\varphi,$$
$$J^\alpha_{\pm\ldots\pm,\mu}\varphi = M_{\mp\mu} Q^{-1} I^\alpha_{\pm\ldots\pm} Q M_{\pm\mu}\varphi,$$

где $(Q\varphi)(x) = \varphi(e^x) = \varphi(e^{x_1},\ldots,e^{x_n})$, $\left(Q^{-1}\varphi\right)(x) = \varphi(\ln x) = \varphi(\ln x_1,\ldots,\ln x_n)$, $(M_{\pm\mu}\varphi)(x) = x_1^{\pm\mu_1}\cdots x_n^{\pm\mu_n}\varphi(x_1,\ldots,x_n)$.

Если $\mu = 0$, тогда из (2.3), (2.4) следуют (2.1), (2.2). С помощью замены $t_i = x_i\cdot y_i$, $t_i = x_i \cdot y_i^{-1}$, $i=\overline{1,n}$, интегралы (2.3), (2.4) можно записать в следующем виде:

$$(J^\alpha_{+\ldots+,\mu}\varphi)(x) = \int\limits_0^\infty \cdots \int\limits_0^\infty \varphi(x\cdot y)\prod_{i=1}^n k^+_{\mu_i,\alpha_i}(y_i)\,\frac{dy_1}{y_1}\cdots\frac{dy_n}{y_n},$$

$$(J^\alpha_{-\ldots-,\mu}\varphi)(x) = \int\limits_0^\infty \cdots \int\limits_0^\infty \varphi\left(x\cdot y^{-1}\right)\prod_{i=1}^n k^+_{\mu_i,\alpha_i}(y_i)\,\frac{dy_1}{y_1}\cdots\frac{dy_n}{y_n},$$

где $x\cdot y = (x_1\cdot y_1,\ldots,x_n\cdot y_n)$, $x\cdot y^{-1} = \left(\frac{x_1}{y_1},\cdots,\frac{x_n}{y_n}\right)$,

$$k^+_{\mu_i,\alpha_i}(y_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha_i)} y_i^\mu \left(\ln\dfrac{1}{y_i}\right)^{\alpha_i-1}, & 0<y_i<1,\\ 0, & y_i>1,\end{cases} \qquad i=\overline{1,n}.$$

Дробным интегралом порядка α, $\alpha\in\mathbb{R}_+$, по направлению ω, $\omega\in\mathbb{R}^n_+$, назовем конструкцию

$$(J^\alpha_{\omega,\,\mu}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 \xi^\mu\,|\ln\xi|^{\alpha-1}\,\varphi\left(x\cdot\xi^{\ln\omega}\right)\frac{d\xi}{\xi},$$

где $x\cdot\xi^{\ln\omega} = \left(x_1\cdot\xi^{\ln\omega_1},\ldots,x_n\cdot\xi^{\ln\omega_n}\right)$ и вектор $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ подчинен условию $(\ln\omega_1)^2+\ldots+(\ln\omega_n)^2 = 1$.

Введем модификацию смешанных дробных интегралов с ядром, «улучшенным» на бесконечности:

$$(J^{\alpha,l}_{+\ldots+,\mu;\,\tau}\varphi)(x) = \int\limits_0^\infty\cdots\int\limits_0^\infty\left(\tilde\Delta^l_{\tau^{-1}}k^+_{\mu,\alpha}\right)(y)\,\varphi(x\cdot y)\,\frac{dy_1}{y_1}\cdots\frac{dy_n}{y_n}, \tag{2.7}$$

$$(J^{\alpha,l}_{-\ldots-,\mu;\,\tau}\varphi)(x) = \int\limits_0^\infty\cdots\int\limits_0^\infty\left(\tilde\Delta^l_{\tau^{-1}}k^+_{\mu,\alpha}\right)(y)\,\varphi\left(x\cdot y^{-1}\right)\frac{dy_1}{y_1}\cdots\frac{dy_n}{y_n}, \tag{2.8}$$

где $\tau\in\mathbb{R}^n_+$, $\mu_i\geqslant 0$, $l_i>\alpha_i>0$, $i=1,2,\ldots,n$,

$$\left(\tilde\Delta^l_{\tau^{-1}}k^+_{\mu,\alpha}\right)(y) = \tilde\Delta^{l_1}_{\tau_1^{-1}}\tilde\Delta^{l_2}_{\tau_2^{-1}}\ldots(\tilde\Delta^{l_n}_{\tau_n^{-1}}k^+_{\mu,\alpha})(y),\; k^+_{\mu,\alpha}(y) = \prod_{i=1}^n\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}y_i^{\mu_i}\left(\ln\frac{1}{y_i}\right)_+^{\alpha_i-1}.$$

Аналогичная модификация дробного интеграла по направлению ω, $\omega\in\mathbb{R}^n_+$, имеет вид

$$(J^{\alpha,s}_{\omega,\mu;\tau}\varphi)(x) = \int\limits_0^\infty(\tilde\Delta^s_{\tau^{-1}}k^+_{\mu,\alpha})(t)\,\varphi\left(x\cdot t^{\ln\omega}\right)\frac{dt}{t}, \tag{2.9}$$

где $\tau\in\mathbb{R}_+,\mu\geqslant 0$,

$$(\tilde\Delta^s_{\tau^{-1}}k^+_{\mu,\alpha})(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^s(-1)^k\begin{pmatrix} s\\ k\end{pmatrix}\left(\frac{t}{\tau^k}\right)^\mu\left(\ln\frac{\tau^k}{t}\right)_+^{\alpha-1}, \quad (\tilde\Delta^s_{\tau^{-1}}k^+_{\mu,\alpha})(t)\in L_1(\mathbb{R}_+).$$

Очевидно, что $J^{\alpha,l}_{\pm\ldots\pm,\mu;\tau}\varphi = \tilde\Delta^l_\tau J^\alpha_{\pm\ldots\pm,\mu}\varphi$, $J^{\alpha,s}_{\omega,\mu;\tau}\varphi = \tilde\Delta^s_\tau J^\alpha_{\omega,\mu}\varphi$ на достаточно хороших функциях $\varphi(x)$, т. е. операторы (2.7)–(2.9) получаются применением определений (1.3)-(1.4) разностных операторов $\tilde{\Delta}^{(l_1,\ldots,l_n)}_{(\tau_1,\ldots,\tau_n)}$, $\tilde{\Delta}^s_\tau$ с «мультипликативным» шагом к операторам $J^\alpha_{\pm\ldots\pm,\mu}\varphi$ и $J^\alpha_{\omega,\mu}\varphi$. Они имеют то преимущество по сравнению с $J^\alpha_{\pm\ldots\pm,\mu}\varphi$ и $J^\alpha_{\omega,\mu}\varphi$, что при $l_i > \alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $s > \alpha > 0$, они ограничены в пространстве $\mathfrak{L}^{\bar{p}}_{\bar{\gamma}}\Big(\mathbb{R}^n_+, \dfrac{dx}{x}\Big)$ при всех $1 \leqslant p_i < \infty$, $\gamma_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (т. е. включая случай $\gamma_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$).

3. Об ограниченности дробного интегрирования по Адамару и типа Адамара в пространстве $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$

Теорема 3.1. *Пусть* $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $\alpha_i > 0$ *и* $\mu_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1,n}$.

(i) *Если* $\operatorname{Re}\mu_i > -\gamma_i^*$, $i = \overline{1,n}$, *где* $\gamma_i^*, i = \overline{1,n}$ *— постоянные из* (1.2), *то оператор* $J^\alpha_{+\ldots+,\mu}$ *ограничен в* $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$, *и*

$$\left\|J^\alpha_{+\ldots+,\mu}\varphi;\ \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}\right\| \leqslant \prod_{i=1}^n C^+\left(\mu_i, \gamma_i^*\right)\left\|\varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}\right\|, \tag{3.1}$$

где $C^+\left(\mu_i, \gamma_i^*\right) = \left(\operatorname{Re}\mu_i + \gamma_i^*\right)^{-\alpha_i}$.

(ii) *Если* $\operatorname{Re}\mu_i > \gamma_i^*$, $i = \overline{1,n}$, *где* $\gamma_i^*, i = \overline{1,n}$ *— постоянные из* (1.2), *то оператор* $J^\alpha_{-\ldots-,\mu}$ *ограничен в* $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$, *и*

$$\left\|J^\alpha_{-\ldots-,\mu}\varphi;\ \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}\right\| \leqslant \prod_{i=1}^n C^-\left(\mu_i, \gamma_i^*\right)\left\|\varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}\right\|,$$

где $C^-\left(\mu_i, \gamma_i^*\right) = \left(\operatorname{Re}\mu_i - \gamma_i^*\right)^{-\alpha_i}$.

(iii) *Если* $\operatorname{Re}\mu > -\sum\limits_{i=1}^n \gamma_i^* \ln\omega_i$, *где* $\gamma_i^*, i = \overline{1,n}$ *— постоянные из* (1.2), *то оператор* $J^\alpha_{\omega,\mu}$ *ограничен в* $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$, *и*

$$\left\|J^\alpha_{\omega,\mu}\varphi;\ \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}\right\| \leqslant C\left(\mu, \overline{\gamma^*}\ln\omega\right)\left\|\varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}\right\|, \tag{3.2}$$

где $C\left(\mu, \overline{\gamma^*}\ln\omega\right) = \left(\operatorname{Re}\mu + \sum\limits_{i=1}^n \gamma_i^*\ln\omega_i\right)^{-\alpha}$.

Доказательство. Докажем утверждение (i). Сначала рассмотрим случай $1 \leqslant \overline{p} < \overline{\infty}$. С помощью обобщенного неравенства Минковского имеем

$$\left\|J^\alpha_{+\ldots+,\mu}\varphi;\ \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}\right\| \leqslant \int\limits_0^\infty \cdots \int\limits_0^\infty \left\|\varphi\left(x\cdot y\right); \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}\right\| \prod_{i=1}^n \left|k^+_{\mu_i,\alpha_i}\left(y_i\right)\right| \frac{dy_1}{y_1}\cdots\frac{dy_n}{y_n}.$$

После подстановки $\tau_i = x_i \cdot y_i$, $i = \overline{1,n}$, получаем

$$\left\|J^\alpha_{+\ldots+,\mu}\varphi;\ \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}\right\| \leqslant \int\limits_0^\infty \cdots \int\limits_0^\infty \prod_{i=1}^n \left|k^+_{\mu_i,\alpha_i}\left(y_i\right)\right| y_i^{\frac{\gamma_i}{p_i}} \frac{dy_1}{y_1}\cdots\frac{dy_n}{y_n}\left\|\varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}\right\|.$$

Следовательно,

$$\left\|J^\alpha_{+\ldots+,\mu}\varphi;\ \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}\right\| \leqslant \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 \prod_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma\left(\alpha_i\right)} y_i^{\mu_i + \frac{\gamma_i}{p_i}}\left(\ln\frac{1}{y_i}\right)^{\alpha_i - 1}\frac{dy_1}{y_1}\cdots\frac{dy_n}{y_n}\left\|\varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty \cdots \int\limits_0^\infty \prod_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma\left(\alpha_i\right)} e^{-(\mu_i + \frac{\gamma_i}{p_i})\xi_i}\left(\xi_i\right)^{\alpha_i - 1} d\xi_1\cdots d\xi_n \left\|\varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}\right\| \leqslant \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{\mu_i\, p_i + \gamma_i}\right)^{\alpha_i}\left\|\varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}\right\|. \tag{3.3}$$

В случае $\overline{p} = \overline{\infty}$ в (3.3) заменим p_i, $i = \overline{1,n}$, на 1. Тогда получим (3.1).

Аналогично доказывается утверждение (ii).

Докажем теперь утверждение (iii). С помощью обобщенного неравенства Минковского получаем

$$\left\| J^{\alpha}_{\omega,\mu}\varphi;\, \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \int\limits_{0}^{\infty} \left| k^{+}_{\mu,\alpha}(y) \right| \left\| \varphi\left(x\cdot y^{\ln\omega} \right); \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \frac{dy}{y}.$$

После подстановки $\tau_i = x_i y^{\ln\omega_i}$, $i=\overline{1,n}$, имеем

$$\left\| J^{\alpha}_{\omega,\mu}\varphi;\, \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{0}^{1} y^{\mu+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{p_i}\ln\omega_i} \left|\ln y\right|^{\,\alpha-1} \left\| \varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \frac{dy}{y} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-(\mu+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{p_i}\ln\omega_i)\xi} \xi^{\alpha-1} d\xi \left\| \varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \left(\mu + \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{p_i}\ln\omega_i \right)^{-\alpha} \left\| \varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\|. \qquad (3.4)$$

В случае $\overline{p}=\overline{\infty}$ в (3.4) заменим p_i, $i=\overline{1,n}$, на 1. Тогда получим (3.2). □

Принимая во внимание очевидные соотношения

$$\Im^{\alpha}_{+\ldots+,\mu}\varphi = J^{\alpha}_{+\ldots+,\mu+1}\varphi, \quad \Im^{\alpha}_{-\ldots-,\mu}\varphi = J^{\alpha}_{-\ldots-,\mu-1}\varphi$$

между дробными интегралами типа Адамара (2.3), (2.4) и (2.5), (2.6) и применяя теорему 3.1 с μ_i, замененным на μ_i+1 и μ_i-1, мы получаем свойства $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$ ограниченности дробных интегральных операторов $\Im^{\alpha}_{+\ldots+,\mu}\varphi$ и $\Im^{\alpha}_{-\ldots-,\mu}\varphi$.

Теорема 3.2. *Пусть* $\gamma_i\in\mathbb{R}$, $1\leqslant p_i\leqslant\infty$, $\alpha_i>0$ *и* $\mu_i\in\mathbb{C}$, $i=\overline{1,n}$.

(i) *Если* $\operatorname{Re}\mu_i > -\gamma_i^*-1$, $i=\overline{1,n}$, *где* $\gamma_i^*, i=\overline{1,n}$ — *постоянные из* (1.2), *то оператор* $\Im^{\alpha}_{+\ldots+,\mu}$ *ограничен в* $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$, *и*

$$\left\| \Im^{\alpha}_{+\ldots+,\mu}\varphi;\, \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \prod_{i=1}^{n} C^{+}\left(\operatorname{Re}\mu_i+1, \gamma_i^*\right) \left\| \varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\|,$$

где $C^{+}\left(\operatorname{Re}\mu_i+1,\gamma_i^*\right) = \left(\operatorname{Re}\mu_i+1+\gamma_i^*\right)^{-\alpha_i}$.

(ii) *Если* $\operatorname{Re}\mu_i > \gamma_i^*+1$, $i=\overline{1,n}$, *где* $\gamma_i^*, i=\overline{1,n}$ — *постоянные из* (1.2), *то оператор* $\Im^{\alpha}_{-\ldots-,\mu}$ *ограничен в* $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$, *и*

$$\left\| \Im^{\alpha}_{-\ldots-,\mu}\varphi;\, \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \prod_{i=1}^{n} C^{-}\left(\operatorname{Re}\mu_i-1, \gamma_i^*\right) \left\| \varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\|,$$

где $C^{-}\left(\operatorname{Re}\mu_i-1,\gamma_i^*\right) = \left(\operatorname{Re}\mu_i-1-\gamma_i^*\right)^{-\alpha_i}$.

Доказательство теоремы 3.2 аналогично доказательству теоремы 3.1.

Теорема 3.3.

1. *Пусть* $\gamma_i\in\mathbb{R}$, $1\leqslant p_i\leqslant\infty$, $\alpha_i>0$, $i=\overline{1,n}$.

(i) *Если* $\gamma_i>0$, $i=\overline{1,n}$, *то оператор* $J^{\alpha}_{+\ldots+}$ *ограничен в* $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$, *и*

$$\left\| J^{\alpha}_{+\ldots+}\varphi;\, \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \prod_{i=1}^{n} C^{+}\left(\gamma_i^*\right) \left\| \varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\|,$$

где $C^{+}\left(\gamma_i^*\right) = \left(\gamma_i^*\right)^{-\alpha_i}$, $\gamma_i^*, i=\overline{1,n}$ — *постоянные из* (1.2).

(ii) *Если* $\gamma_i<0, i=\overline{1,n}$, *то оператор* $J^{\alpha}_{-\ldots-}$ *ограничен в* $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$, *и*

$$\left\| J^{\alpha}_{-\ldots-}\varphi;\, \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \prod_{i=1}^{n} C^{-}\left(\gamma_i^*\right) \left\| \varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}} \right\|,$$

где $C^{-}\left(\gamma_i^*\right) = \left(-\gamma_i^*\right)^{-\alpha_i}$, $\gamma_i^*, i=\overline{1,n}$ — *постоянные из* (1.2).

(*iii*) *Если* $\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_i^*\ln\omega_i>0$, $\gamma_i>0$, $i=\overline{1,n}$, *где* $\gamma_i^*, i=\overline{1,n}$ — *постоянные из* (1.2), *то оператор* J_ω^α *ограничен в* $\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}$ *и*

$$\left\|J_\omega^\alpha\varphi;\,\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\right\|\leqslant C\left(\overline{\gamma}^*\ln\omega\right)\left\|\varphi;\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\right\|,$$

где $C\left(\overline{\gamma}^*\ln\omega\right)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_i^*\ln\omega_i\right)^{-\alpha}$.

2. *Пусть* $1\leqslant p_i\leqslant\infty$, $1\leqslant q_i\leqslant\infty$, $0<\alpha_i<1$, $i=\overline{1,n}$. *Операторы дробного интегрирования* $J_{\pm\cdots\pm}^\alpha\varphi$ *и* $J_\omega^\alpha\varphi$ *ограничены из* $\mathfrak{L}^{\overline{p}}\Big(\mathbb{R}_+^n,\dfrac{dx}{x}\Big)$ *в* $\mathfrak{L}^{\overline{q}}\Big(\mathbb{R}_+^n,\dfrac{dx}{x}\Big)$ *тогда и только тогда, когда* $1<p_i<\dfrac{1}{\alpha_i}$, $q_i=\dfrac{p_i}{1-\alpha_ip_i}$, $i=\overline{1,n}$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из теоремы 3.1. Далее, операторы $J_{\pm\cdots\pm}^\alpha\varphi$ и $J_\omega^\alpha\varphi$ связаны с операторами Римана—Лиувилля $I_{\pm\cdots\pm}^\alpha\varphi$ и $I_v^\alpha\varphi$ равенствами

$$J_{\pm\cdots\pm}^\alpha\varphi=Q^{-1}I_{\pm\cdots\pm}^\alpha Q\varphi,\quad J_\omega^\alpha\varphi=Q^{-1}I_v^\alpha Q\varphi,\tag{3.5}$$

где $(Q\varphi)(x)=\varphi\left(e^x\right)=\varphi\left(e^{x_1},\ldots,e^{x_n}\right)$, $v=\ln\omega$. В силу связи (3.5) второе утверждение теоремы следует из известной теоремы Харди—Литтлвуда для обычного дробного интегрирования по $\mathbb{R}^n$ (см. [6, с. 345]). □

Теорема 3.4. *Пусть* $\gamma_i\in\mathbb{R}$, $1\leqslant p_i\leqslant\infty$, *и* $\mu_i\in\mathbb{C}$, $i=\overline{1,n}$.

(*i*) *Если* $\operatorname{Re}\mu_i\geqslant-\gamma_i^*$, $0<\tau_i\leqslant1$, $l_i>\alpha_i>0$, $i=\overline{1,n}$, *где* $\gamma_i^*, i=\overline{1,n}$ — *постоянные из* (1.2), *то оператор* $J_{\pm\ldots\pm,\mu;\tau}^{\alpha,l}$ *ограничен в* $\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}$, *и*

$$\left\|J_{\pm\ldots\pm,\mu;\tau}^{\alpha,l}\varphi;\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\right\|\leqslant\prod_{i=1}^{n}c_i\left(\tau_i,\mu_i\right)\left\|\varphi;\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\right\|,$$

где $0<c_i\left(\tau_i,\mu_i\right)<1$, $i=\overline{1,n}$.

(*ii*) *Если* $\operatorname{Re}\mu\geqslant-\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_i^*\ln\omega_i$, $0<\tau\leqslant1$, $s>\alpha>0$, *где* $\gamma_i^*, i=\overline{1,n}$ — *постоянные из* (1.2), *то оператор* $J_{\omega,\mu;\tau}^{\alpha,s}$ *ограничен в* $\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}$, *и*

$$\left\|J_{\omega,\mu;\tau}^{\alpha,s}\varphi;\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\right\|\leqslant c_1\left(\tau,\mu\right)\left\|\varphi;\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\right\|,$$

где $0<c_1\left(\tau,\mu\right)<1$.

Доказательство теоремы 3.4 аналогично доказательству теорем для одномерного случая из [21].

Теорема 3.5. *Операторы* $J_{\pm\ldots\pm,\tau}^{\alpha,l}, J_{\omega,\tau}^{\alpha,s}$ *ограничены в пространстве* $\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}$ *при* $1\leqslant p_i\leqslant\infty$, $\gamma_i\geqslant0$, $i=\overline{1,n}$,

$$\left\|J_{\pm\ldots\pm,\tau}^{\alpha,l}\varphi;\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\right\|\leqslant\prod_{i=1}^{n}c_i\left(\tau_i\right)\left\|\varphi;\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\right\|,$$

где $0<c_i\left(\tau_i\right)<1$ *при* $0<\tau_i\leqslant1$, $l_i>\alpha_i>0$, $i=\overline{1,n}$,

$$\left\|J_{\omega,\tau}^{\alpha,s}\varphi;\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\right\|\leqslant c_1\left(\tau\right)\left\|\varphi;\mathfrak{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\right\|,$$

где $0<c_1\left(\tau\right)<1$ *при* $0<\tau\leqslant1$, $s>\alpha>0$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теорем для одномерного случая из [21].

Рассмотрим одномерные левосторонние и правосторонние дробные интегралы типа Адамара

$$\left(J_{+,\mu}^\alpha\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x\left(\frac{y}{x}\right)^\mu\left(\ln\frac{x}{y}\right)^{\alpha-1}\varphi\left(y\right)\frac{dy}{y}=\int\limits_0^\infty\varphi\left(y\right)k_{\mu,\alpha}^+\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y},\tag{3.6}$$

$$\left(J^{\alpha}_{-,\mu}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^{\infty}\left(\frac{x}{y}\right)^{\mu}\left(\ln\frac{y}{x}\right)^{\alpha-1}\varphi(y)\,\frac{dy}{y}=\int\limits_0^{\infty}\varphi(y)\,k^{+}_{\mu,\alpha}\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{y},$$

где

$$k^{+}_{\mu,\alpha}(u)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}u^{-\mu}(\ln u)_{+}^{\alpha-1}=\begin{cases}0, & 0<u<1,\\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}u^{-\mu}(\ln u)^{\alpha-1}, & u>1,\end{cases}\tag{3.7}$$

$$k^{+}_{\mu,\alpha}\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{u}\right)^{-\mu}\left(\ln\frac{1}{u}\right)_{+}^{\alpha-1}=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{u}\right)^{-\mu}\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{\alpha-1}, & 0<u<1,\\ 0, & u>1.\end{cases}$$

Теорема 3.6. *Пусть* $\gamma\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$, $\mu\in\mathbb{C}$ *и* $1\leqslant p,r\leqslant q\leqslant\infty$, $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{p}+1$, $\alpha>\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}$.

(i) *Если* $\operatorname{Re}\mu>-\gamma^*$, *то оператор* $J^{\alpha}_{+,\mu}$ *ограничен из* $\mathfrak{L}^p_{\gamma}$ *в* $\mathfrak{L}^q_{\frac{q\gamma}{p}}$ *и*

$$\left\|J^{\alpha}_{+,\mu}\varphi;\,\mathfrak{L}^q_{\frac{q\gamma}{p}}\right\|\leqslant C^{+}_r(\mu,\gamma^*)\left\|\varphi;\mathfrak{L}^p_{\gamma}\right\|,\tag{3.8}$$

где $C^{+}_r(\mu,\gamma^*)=((\operatorname{Re}\mu+\gamma^*)r)^{1-\alpha-\frac{1}{r}}\frac{[\Gamma(1+(\alpha-1)r)]^{\frac{1}{r}}}{\Gamma(\alpha)}$ *при* $1<p<q$, $r<q$ *или* $q=\infty$, $r=p'$, $C^{+}_r(\mu,\gamma)=((\operatorname{Re}\mu+\gamma)r)^{1-\alpha-\frac{1}{r}}\frac{[\Gamma(1+(\alpha-1)r)]^{\frac{1}{r}}}{\Gamma(\alpha)}$ *при* $1=p<q$, $r=q$, $C^{+}_1(\mu,\gamma^*)=(\operatorname{Re}\mu+\gamma^*)^{-\alpha}$ *при* $p=q$, $r=1$.

(ii) *Если* $\operatorname{Re}\mu>\gamma^*$, *то оператор* $J^{\alpha}_{-,\mu}$ *ограничен из* $\mathfrak{L}^p_{\gamma}$ *в* $\mathfrak{L}^q_{\frac{q\gamma}{p}}$ *и*

$$\left\|J^{\alpha}_{-,\mu}\varphi;\,\mathfrak{L}^q_{\frac{q\gamma}{p}}\right\|\leqslant C^{-}_r(\mu,\gamma^*)\left\|\varphi;\mathfrak{L}^p_{\gamma}\right\|,$$

где $C^{-}_r(\mu,\gamma^*)=((\operatorname{Re}\mu-\gamma^*)r)^{1-\alpha-\frac{1}{r}}\frac{[\Gamma(1+(\alpha-1)r)]^{\frac{1}{r}}}{\Gamma(\alpha)}$ *при* $1<p<q$, $r<q$ *или* $q=\infty$, $r=p'$, $C^{-}_r(\mu,\gamma)=((\operatorname{Re}\mu-\gamma)r)^{1-\alpha-\frac{1}{r}}\frac{[\Gamma(1+(\alpha-1)r)]^{\frac{1}{r}}}{\Gamma(\alpha)}$ *при* $1=p<q$, $r=q$, $C^{-}_1(\mu,\gamma^*)=(\operatorname{Re}\mu-\gamma^*)^{-\alpha}$ *при* $p=q$, $r=1$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если $q=\infty$, то $r=p'$ и из неравенства Гельдера следует, что для всех $x\in\mathbb{R}_+$ справедливо неравенство

$$\left\|J^{\alpha}_{+,\mu}\varphi;\,\mathfrak{L}^{\infty}_{\gamma/p}\right\|\leqslant\left\|k^{+}_{\mu,\alpha};\,\mathfrak{L}^{p'}_{\gamma/p}\right\|\ \left\|\varphi;\,\mathfrak{L}^p_{\gamma}\right\|.$$

Поэтому в дальнейшем будем считать, что $q<\infty$.

Пусть $1<p<q$, $r<q$, тогда представим дробные интеграла типа Адамара (3.6) в виде

$$\left|\left(J^{\alpha}_{+,\mu}\varphi\right)(x)\right|\leqslant\int\limits_0^{\infty}\left(|\varphi(y)|^p\left|k^{+}_{\mu,\alpha}\left(\frac{x}{y}\right)\right|^r y^{-\gamma\left(1-\frac{r}{p}\right)}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left|k^{+}_{\mu,\alpha}\left(\frac{x}{y}\right)\right|^r y^{\frac{\gamma}{p}r}\right)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}\left(|\varphi(y)|^p y^{-\gamma}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\frac{dy}{y}.$$

Применяя к последнему интегралу обобщенное неравенство Гельдера, записанное в виде

$$\int\limits_0^{\infty}|f_1|^{\alpha_1}|f_2|^{\alpha_2}|f_3|^{\alpha_3}\,du\leqslant\left(\int\limits_0^{\infty}|f_1|\,du\right)^{\alpha_1}\left(\int\limits_0^{\infty}|f_2|\,du\right)^{\alpha_2}\left(\int\limits_0^{\infty}|f_3|\,du\right)^{\alpha_3},$$

где $0\leqslant\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\leqslant 1$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$, $\alpha_1:=\dfrac{1}{q}$, $\alpha_2:=\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{q}$, $\alpha_3:=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}$, а равенство $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$ следует из $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{p}+1$, получим

$$\left|\left(J^{\alpha}_{+,\mu}\varphi\right)(x)\right|\leqslant$$

$$\leqslant \left[\int\limits_0^\infty |\varphi(y)|^p \left|k^+_{\mu,\alpha}\left(\frac{x}{y}\right)\right|^r y^{-\gamma\left(1-\frac{r}{p}\right)}\frac{dy}{y}\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int\limits_0^\infty \left|k^+_{\mu,\alpha}\left(\frac{x}{y}\right)\right|^r y^{\frac{\gamma}{p}r}\frac{dy}{y}\right]^{\frac{1-\frac{r}{q}}{r}} \left[\int\limits_0^\infty |\varphi(y)|^p y^{-\gamma}\frac{dy}{y}\right]^{\frac{1-\frac{p}{q}}{p}} =$$

$$= \left[\int\limits_0^\infty |\varphi(y)|^p \left|k^+_{\mu,\alpha}\left(\frac{x}{y}\right)\right|^r y^{-\gamma\left(1-\frac{r}{p}\right)}\frac{dy}{y}\right]^{\frac{1}{q}} x^{\frac{\gamma}{p}\left(1-\frac{r}{q}\right)} \left\|k^+_{\mu,\alpha};\, \mathfrak{L}^r_{\gamma/p}\right\|^{1-\frac{r}{q}} \left\|\varphi;\, \mathfrak{L}^p_\gamma\right\|^{1-\frac{p}{q}}.$$

В силу теоремы Фубини для почти всех $x \in \mathbb{R}_+$ функция

$$\int\limits_0^\infty |\varphi(y)|^p \left|k^+_{\mu,\alpha}\left(\frac{x}{y}\right)\right|^r y^{-\gamma\left(1-\frac{r}{p}\right)}\frac{dy}{y}$$

конечна и интегрируема на $\mathbb{R}_+$, причем

$$\left\|J^\alpha_{+,\mu}\varphi;\, \mathfrak{L}^q_{q\gamma/p}\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int\limits_0^\infty \left[\int\limits_0^\infty |\varphi(y)|^p \left|k^+_{\mu,\alpha}\left(\frac{x}{y}\right)\right|^r y^{-\gamma\left(1-\frac{r}{p}\right)}\frac{dy}{y}\right] x^{\frac{\gamma}{p}\left(1-\frac{r}{q}\right)q} x^{-\frac{\gamma}{p}q}\frac{dx}{x}\right]^{\frac{1}{q}} \left\|k^+_{\mu,\alpha};\, \mathfrak{L}^r_{\gamma/p}\right\|^{1-\frac{r}{q}} \left\|\varphi;\, \mathfrak{L}^p_\gamma\right\|^{1-\frac{p}{q}} =$$

$$= \left[\int\limits_0^\infty |\varphi(y)|^p y^{-\gamma}\frac{dy}{y}\right]^{\frac{1}{q}\cdot} \left[\int\limits_0^\infty \left|k^+_{\mu,\alpha}(t)\right|^r t^{-\frac{r\gamma}{p}}\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}\cdot} \left\|k^+_{\mu,\alpha};\, \mathfrak{L}^r_{\gamma/p}\right\|^{1-\frac{r}{q}} \left\|\varphi;\, \mathfrak{L}^p_\gamma\right\|^{1-\frac{p}{q}} =$$

$$= \left\|k^+_{\mu,\alpha};\, \mathfrak{L}^r_{\gamma/p}\right\| \left\|\varphi;\, \mathfrak{L}^p_\gamma\right\|. \tag{3.9}$$

Далее с учетом свойства (3.7) вычислим

$$\left\|k^+_{\mu,\alpha};\, \mathfrak{L}^r_{\gamma/p}\right\| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int\limits_1^\infty (\ln t)^{(\alpha-1)r} t^{-\left(\mu+\frac{\gamma}{p}\right)r}\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{r}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int\limits_0^\infty u^{(\alpha-1)r} e^{-\left(\mu+\frac{\gamma}{p}\right)r\,u} du\right]^{\frac{1}{r}} =$$

$$= \frac{\left[\Gamma\left((\alpha-1)r+1\right)\right]^{\frac{1}{r}}}{\Gamma(\alpha)}\left(\left(\mu+\frac{\gamma}{p}\right)r\right)^{1-\alpha-\frac{1}{r}}. \tag{3.10}$$

Подставляя (3.10) в (3.9), получим (3.8).

В случаях $p = q,\ r = 1$ и $1 = p < q,\ r = q$ доказательство аналогично. Оценка интеграла $J^\alpha_{+,\mu}$ осуществляется с помощью неравенства Гельдера для двух функций.

Аналогично доказывается утверждение (ii). □

Теорема 3.7. *Пусть* $\gamma_i \in \mathbb{R},\ \alpha_i > 0,\ \mu_i \in \mathbb{C},\ i = \overline{1,n}$ *и* $1 \leqslant p_i, r_i \leqslant q_i \leqslant \infty,\ \dfrac{1}{r_i} = \dfrac{1}{q_i} - \dfrac{1}{p_i} + 1,$ $i = \overline{1,n},\ \alpha_i > \dfrac{1}{p_i} - \dfrac{1}{q_i},\ i = \overline{1,n}.$

(i) *Если* $\operatorname{Re}\mu_i > -\gamma_i^*,\ i = \overline{1,n}$, *где* $\gamma_i^*, i = \overline{1,n}$ *— постоянные из* (1.2), *то оператор* $J^\alpha_{+\ldots+,\mu}$ *ограничен из* $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$ *в* $\mathfrak{L}^{\overline{q}}_{\overline{\nu}}$, *и*

$$\left\|J^\alpha_{+\ldots+,\mu}\varphi;\, \mathfrak{L}^{\overline{q}}_{\overline{\nu}}\right\| \leqslant \prod_{i=1}^n C^+_{r_i}(\mu_i, \gamma_i^*)\left\|\varphi; \mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}\right\|,$$

где $\overline{\nu} := (\gamma_1^* q_1, \ldots, \gamma_n^* q_n)$, $C^+_{r_i}(\mu_i, \gamma_i^*) = ((\operatorname{Re}\mu_i + \gamma_i^*)r_i)^{1-\alpha_i-\frac{1}{r_i}}\frac{[\Gamma(1+(\alpha_i-1)r_i)]^{\frac{1}{r_i}}}{\Gamma(\alpha_i)}$ *при* $1 < p_i < q_i$, $r_i < q_i$ *или* $q_i = \infty,\ r_i = p_i',\ i = \overline{1,n}$, $C^+_{r_i}(\mu_i, \gamma_i) = ((\operatorname{Re}\mu_i + \gamma_i)r_i)^{1-\alpha_i-\frac{1}{r_i}}\frac{[\Gamma(1+(\alpha_i-1)r_i)]^{\frac{1}{r_i}}}{\Gamma(\alpha_i)}$ *при* $1 = p_i < q_i,\ r_i = q_i,\ i = \overline{1,n}$, $C^+_1(\mu_i, \gamma_i^*) = (\operatorname{Re}\mu_i + \gamma_i^*)^{-\alpha_i}$ *при* $p_i = q_i,\ r_i = 1,\ i = \overline{1,n}$.

(ii) *Если* $\operatorname{Re}\mu_i > \gamma_i^*$, $i = \overline{1,n}$, *где* $\gamma_i^*, i = \overline{1,n}$ *— постоянные из* (1.2), *то оператор* $J^{\alpha}_{-\dots-,\mu}$ *ограничен из* $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$ *в* $\mathfrak{L}^{\overline{q}}_{\overline{\nu}}$ *и*

$$\left\|J^{\alpha}_{-\dots-,\mu}\varphi;\, \mathfrak{L}^{\overline{q}}_{\overline{\nu}}\right\| \leqslant \prod_{i=1}^{n} C^{-}_{r_i}(\mu_i,\gamma_i^*)\left\|\varphi;\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}\right\|,$$

где $\overline{\nu} := (\gamma_1^* q_1,\dots,\gamma_n^* q_n)$, $C^{-}_{r_i}(\mu_i,\gamma_i^*) = ((\operatorname{Re}\mu_i - \gamma_i^*)r_i)^{1-\alpha_i-\frac{1}{r_i}}\frac{[\Gamma(1+(\alpha_i-1)r_i)]^{\frac{1}{r_i}}}{\Gamma(\alpha_i)}$ *при* $1 < p_i < q_i$, $r_i < q_i$ *или* $q_i = \infty$, $r_i = p_i'$, $i = \overline{1,n}$, $C^{-}_{r_i}(\mu_i,\gamma_i) = ((\operatorname{Re}\mu_i - \gamma_i)r_i)^{1-\alpha_i-\frac{1}{r_i}}\frac{[\Gamma(1+(\alpha_i-1)r_i)]^{\frac{1}{r_i}}}{\Gamma(\alpha_i)}$ *при* $1 = p_i < q_i$, $r_i = q_i$, $i = \overline{1,n}$, $C^{-}_{1}(\mu_i,\gamma_i^*) = (\operatorname{Re}\mu_i - \gamma_i^*)^{-\alpha_i}$ *при* $p_i = q_i$, $r_i = 1$, $i = \overline{1,n}$.

Доказательство. После последовательного применения обобщенного неравенства Минковского (см. [2, с. 23, формула (13)]) и n-кратного применения неравенства (3.8), получим обобщение неравенства (3.8) на многомерный случай. □

Теорема 3.8. *Пусть* $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i > 0$, $\mu_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1,n}$ *и* $1 \leqslant p_i, r_i \leqslant q_i \leqslant \infty$, $\dfrac{1}{r_i} = \dfrac{1}{q_i} - \dfrac{1}{p_i} + 1$, $i = \overline{1,n}$, $\alpha_i > \dfrac{1}{p_i} - \dfrac{1}{q_i}$, $i = \overline{1,n}$.

(i) *Если* $\operatorname{Re}\mu_i > -1 - \gamma_i^*$, $i = \overline{1,n}$, *где* $\gamma_i^*, i = \overline{1,n}$ *— постоянные из* (1.2), *то оператор* $\Im^{\alpha}_{+\dots+,\mu}$ *ограничен из* $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$ *в* $\mathfrak{L}^{\overline{q}}_{\overline{\nu}}$, *и*

$$\left\|\Im^{\alpha}_{+\dots+,\mu}\varphi;\, \mathfrak{L}^{\overline{q}}_{\overline{\nu}}\right\| \leqslant \prod_{i=1}^{n} C^{+}_{r_i}(\mu_i,\gamma_i^*)\left\|\varphi;\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}\right\|,$$

где $\overline{\nu} := (\gamma_1^* q_1,\dots,\gamma_n^* q_n)$, $C^{+}_{r_i}(\mu_i,\gamma_i^*) = ((\operatorname{Re}\mu_i + 1 + \gamma_i^*)r_i)^{1-\alpha_i-\frac{1}{r_i}}\frac{[\Gamma(1+(\alpha_i-1)r_i)]^{\frac{1}{r_i}}}{\Gamma(\alpha_i)}$ *при* $1 < p_i < q_i$, $r_i < q_i$, $i = \overline{1,n}$, $C^{+}_{r_i}(\mu_i,\gamma_i) = ((\operatorname{Re}\mu_i + 1 + \gamma_i)r_i)^{1-\alpha_i-\frac{1}{r_i}}\frac{[\Gamma(1+(\alpha_i-1)r_i)]^{\frac{1}{r_i}}}{\Gamma(\alpha_i)}$ *при* $1 < p_i < q_i$, $r_i < q_i$ *или* $q_i = \infty$, $r_i = p_i'$, $i = \overline{1,n}$, $C^{+}_{1}(\mu_i,\gamma_i^*) = (\operatorname{Re}\mu_i + 1 + \gamma_i^*)^{-\alpha_i}$ *при* $p_i = q_i$, $r_i = 1$, $i = \overline{1,n}$.

(ii) *Если* $\operatorname{Re}\mu_i > 1 + \gamma_i^*$, $i = \overline{1,n}$, *где* $\gamma_i^*, i = \overline{1,n}$ *— постоянные из* (1.2), *то оператор* $\Im^{\alpha}_{-\dots-,\mu}$ *ограничен из* $\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$ *в* $\mathfrak{L}^{\overline{q}}_{\overline{\nu}}$, *и*

$$\left\|\Im^{\alpha}_{-\dots-,\mu}\varphi;\, \mathfrak{L}^{\overline{q}}_{\overline{\nu}}\right\| \leqslant \prod_{i=1}^{n} C^{-}_{r_i}(\mu_i,\gamma_i^*)\left\|\varphi;\mathfrak{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}\right\|,$$

где $\overline{\nu} := (\gamma_1^* q_1,\dots,\gamma_n^* q_n)$, $C^{-}_{r_i}(\mu_i,\gamma_i^*) = ((\operatorname{Re}\mu_i - 1 - \gamma_i^*)r_i)^{1-\alpha_i-\frac{1}{r_i}}\frac{[\Gamma(1+(\alpha_i-1)r_i)]^{\frac{1}{r_i}}}{\Gamma(\alpha_i)}$ *при* $1 < p_i < q_i$, $r_i < q_i$ *или* $q_i = \infty$, $r_i = p_i'$, $i = \overline{1,n}$, $C^{-}_{r_i}(\mu_i,\gamma_i) = ((\operatorname{Re}\mu_i - 1 - \gamma_i)r_i)^{1-\alpha_i-\frac{1}{r_i}}\frac{[\Gamma(1+(\alpha_i-1)r_i)]^{\frac{1}{r_i}}}{\Gamma(\alpha_i)}$ *при* $1 = p_i < q_i$, $r_i = q_i$, $i = \overline{1,n}$, $C^{-}_{1}(\mu_i,\gamma_i^*) = (\operatorname{Re}\mu_i - 1 - \gamma_i^*)^{-\alpha_i}$ *при* $p_i = q_i$, $r_i = 1$, $i = \overline{1,n}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бердышев А. С., Турметов Б. Х., Кадиркулов Б. Й.* Некоторые свойства и применения интегродифференциальных операторов типа Адамара—Маршо классе гармонических функций// Сиб. мат. ж. — 2012. — *53*, № 4. — С. 752–764.
2. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.
3. *Килбас А. А., Титюра А. А.* Дробные интегралы и производные типа Адамара// Тр. ин-та мат. — 2002. — *11*. — С. 79–87.
4. *Лизоркин П. И.* Мультипликаторы интегралов Фурье и оценки сверток в пространствах со смешанной нормой. Приложения// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1970. — *34*, № 1. — С. 218–247.
5. *Самко С. Г.* Гиперсингулярные интегралы и их приложения. — Ростов-на-Дону: Ростовский ун-т, 1984.
6. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.

7. *Antonic N., Ivec I.* On the Hormander—Mihlin theorem for mixed-norm Lebesgue spaces// J. Math. Anal. Appl. — 2016. — *433.* — C. 176–199.
8. *Benedek A., Calderon A. P., Panzone R.* Convolution operators on Banach space valued functions// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1962. — *48.* — C. 356–365.
9. *Benedek A., Panzone R.* The space L^p with mixed norm// Duke Math. J. — 1961. — *28.* — C. 301–324.
10. *Butzer P. L., Kilbas A. A., Trujillo J. J.* Fractional calculus in the Mellin setting and Hadamard-type fractional integrals// J. Math. Anal. Appl. — 2002. — *269*, № 1. — C. 1–27.
11. *Butzer P. L., Kilbas A. A., Trujillo J. J.* Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property// J. Math. Anal. Appl. — 2002. — *269*, № 2. — C. 387–400.
12. *Butzer P. L., Kilbas A. A., Trujillo J. J.* Mellin transform analysis and integration by parts for Hadamard-type fractional integrals// J. Math. Anal. Appl. — 2002. — *270*, № 1. — C. 1–15.
13. *Fernandez D. L.* Vector-valued singular integral operators on L^p-spaces with mixed norms and applications// Pacific J. Math. — 1987. — *129*, № 2. — C. 257–275.
14. *Hadamard J.* Essai sur l'etude des functions données par leur développment de Taylor// J. Math. Pures Appl. — 1892. — *8*, № 4. — C. 101–186.
15. *Kenig C. E., Ponce G., Vega L.* Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg—de Vries equation via the contraction principle// Commun. Pure Appl. Math. — 1993. — *46.* — C. 527–620.
16. *Kilbas A.* Hadamard-type fractional calculus// J. Korean Math. Soc. — 2001. — *38*, № 6. — C. 1191–1204.
17. *Kilbas A.* Hadamard-type integral equations and fractional calculus operators. In Singular integral operators, factorization and applications // Oper. Theory Adv. Appl. — 2003. — *142.* — C. 175–188.
18. *Kim D.* Elliptic and parabolic equations with measurable coefficients in Lp-spaces with mixed norms// Methods Appl. Anal. — 2008. — *15.* — C. 437–468.
19. *Samko S. G., Yakhshiboyev M. U.* A Chen-type modification of Hadamard fractional integro-dfferentiation// Oper. Theory Adv. Appl. — 2014. — *242.* — C. 325–339.
20. *Stefanov A., Torres R. H.* Calderon—Zygmund operators on mixed Lebesgue spaces and applications to null forms// J. London Math. Soc. — 2004. — *2*, № 70. — C. 447–462.
21. *Yakhshiboev M. U.* Hadamard-type fractional integrals and Marchaud—Hadamard-type fractional derivatives in the spaces with power weight// Uzbek Math. J. — 2019. — № 3. — C. 155–174.

М. У. Яхшибоев
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: m.yakhshiboev@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-1-178-189 UDC 517.983

On Boundedness of Fractional Hadamard Integration and Hadamard-Type Integration in Lebesgue Spaces with Mixed Norm

© 2022 **M. U. Yakhshiboyev**

Abstract. In this paper, we consider the boundedness of integrals of fractional Hadamard integration and Hadamard-type integration (mixed and directional) in Lebesgue spaces with mixed norm. We prove Sobolev-type theorems of boundedness of one-dimensional and multidimensional Hadamard-type fractional integration in weighted Lebesgue spaces with mixed norm.

REFERENCES

1. A. S. Berdyshev, B. Kh. Turmetov, and B. Y. Kadirkulov, “Nekotorye svoystva i primeneniya integrodifferentsial’nykh operatorov tipa Adamara—Marsho klasse garmonicheskikh funktsiy” [Some properties and applications of integro-differential operators of the Hadamard–Marchaud type in the class of harmonic functions], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 2012, **53**, No. 4, 752–764 (in Russian).
2. O. V. Besov, V. P. Il’in, and S. M. Nikol’skii, *Integral’nye predstavleniya funktsiy i teoremy vlozheniya* [Integral Representations of Functions and Embedding Theorems], Nauka, Moscow, 1975 (in Russian).
3. A. A. Kilbas and A. A. Tityura, “Drobnye integraly i proizvodnye tipa Adamara” [Fractional integrals and Hadamard-type derivatives], *Tr. in-ta mat.* [Proc. Inst. Math.], 2002, **11**, 79–87 (in Russian).
4. P. I. Lizorkin, “Mul’tiplikatory integralov Fur’e i otsenki svertok v prostranstvakh so smeshannoy normoy. Prilozheniya” [Fourier integral multipliers and estimates of convolutions in spaces with mixed norm. Applications], *Izv. AN SSSR. Ser. mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1970, **34**, No. 1, 218–247 (in Russian).
5. S. G. Samko, *Gipersingulyarnye integraly i ikh prilozheniya* [Hypersingular Integrals and Their Applications], Rostov Univ., Rostov-na-Donu, 1984 (in Russian).
6. S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Fractional Integrals and Derivatives and Some of Their Applications], Nauka i tekhnika, Minsk, 1987 (in Russian).
7. N. Antonic and I. Ivec, “On the Hormander—Mihlin theorem for mixed-norm Lebesgue spaces,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, **433**, 176–199.
8. A. Benedek, A. P. Calderon, and R. Panzone, “Convolution operators on Banach space valued functions,” *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1962, **48**, 356–365.
9. A. Benedek and R. Panzone, “The space L^p with mixed norm,” *Duke Math. J.*, 1961, **28**, 301–324.
10. P. L. Butzer, A. A. Kilbas, and J. J. Trujillo, “Fractional calculus in the Mellin setting and Hadamard-type fractional integrals,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, **269**, No. 1, 1–27.
11. P. L. Butzer, A. A. Kilbas, and J. J. Trujillo, “Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, **269**, No. 2, 387–400.
12. P. L. Butzer, A. A. Kilbas, and J. J. Trujillo, “Mellin transform analysis and integration by parts for Hadamard-type fractional integrals,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, **270**, No. 1, 1–15.
13. D. L. Fernandez, “Vector-valued singular integral operators on L^p-spaces with mixed norms and applications,” *Pacific J. Math.*, 1987, **129**, No. 2, 257–275.
14. J. Hadamard, “Essai sur l‘etude des functions données par leur développment de Taylor,” *J. Math. Pures Appl.*, 1892, **8**, No. 4, 101–186.
15. C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, “Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg—de Vries equation via the contraction principle,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1993, **46**, 527–620.
16. A. Kilbas, “Hadamard-type fractional calculus,” *J. Korean Math. Soc.*, 2001, **38**, No. 6, 1191–1204.
17. A. Kilbas, “Hadamard-type integral equations and fractional calculus operators. In Singular integral operators, factorization and applications,” *Oper. Theory Adv. Appl.*, 2003, **142**, 175–188.
18. D. Kim, “Elliptic and parabolic equations with measurable coefficients in Lp-spaces with mixed norms,” *Methods Appl. Anal.*, 2008, **15**, 437–468.
19. S. G. Samko and M. U. Yakhshiboyev, “A Chen-type modification of Hadamard fractional integro-dfferentiation,” *Oper. Theory Adv. Appl.*, 2014, **242**, 325–339.
20. A. Stefanov and R. H. Torres, “Calderon—Zygmund operators on mixed Lebesgue spaces and applications to null forms,” *J. London Math. Soc.*, 2004, **2**, No. 70, 447–462.
21. M. U. Yakhshiboev, “Hadamard-type fractional integrals and Marchaud—Hadamard-type fractional derivatives in the spaces with power weight,” *Uzbek Math. J.*, 2019, No. 3, 155–174.

M. U. Yakhshiboyev
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: m.yakhshiboev@gmail.com