РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 67, № 4, 2021

Наука — технология — образование — математика — медицина

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4
http://journals.rudn.ru/cmfd

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print)
4 выпуска в год
http://journals.rudn.ru/cmfd
Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.
Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.
Индексируется в международных базах данных научных публикаций *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.
Полный текст журнала размещен в базах данных компании *EBSCO Publishing* на платформе *EBSCOhost*.
Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты. Объем статьи, занимающий целый том, должен составлять 140–190 страниц в стиле нашего журнала.

Правила оформления статей, архив публикаций и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала: http://journals.rudn.ru/cmfd, http://www.mathnet.ru/cmfd.

Редактор: *Е. М. Варфоломеев*
Компьютерная верстка: *Е. М. Варфоломеев*

Адрес редакции:
115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Подписано в печать 06.10.2021. Формат $60\times84/8$.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.
Усл. печ. л. 22,32. Тираж 135 экз. Заказ 1153.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов» (РУДН)
117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН
115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 67, No. 4, 2021

Science — Technology — Education — Mathematics — Medicine

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4

http://journals.rudn.ru/cmfd

Founded in 2003

Founder: PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS
Published by the Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print)
4 issues per year
http://journals.rudn.ru/cmfd
Reviewed in *MathSciNet* and *Zentralblatt Math.*
The full texts can be found in the *EBSCOhost* databases by *EBSCO Publishing*.
Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results. Occupying the whole volume, an article should make up 140–190 pages in the format of the journal.

Guidelines for authors, archive of issues, and other information can be found at the journal's website: http://journals.rudn.ru/cmfd, http://www.mathnet.ru/eng/cmfd.

Editor: ***E. M. Varfolomeev***
Computer design: ***E. M. Varfolomeev***

Address of the Editorial Office:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Print run 135 copies.

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

Printed at RUDN Publishing House:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 4 (2021). С. 609–619
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-609-619 УДК 517.911.5

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПФАФФА С НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2021 г. **А. А. АБДУГАНИЕВ, А. А. АЗАМОВ, А. О. БЕГАЛИЕВ**

Аннотация. В статье рассматриваются уравнения Пфаффа с непрерывными коэффициентами. Устанавливаются аналоги теоремы Пеано о существовании и теоремы Камке о единственности решения задачи Коши, предлагается метод приближенного решения задачи Коши для уравнения Пфаффа.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В статье доказываются теоремы существования и единственности решения задачи Коши для уравнения Пфаффа с непрерывными коэффициентами. Отметим, что уравнение Пфаффа, а также другие переопределенные системы уравнений в частных производных, возникли в 19-ом веке [13, 19, 24] ввиду важных приложений к термодинамике, дифференциальной геометрии и теоретической механике [21, 34]. Однако за долгие годы чуть ли не единственным существенным результатом об уравнении Пфаффа оставалась теорема Фробениуса об интегрируемости [4,20]. За последние десятилетия интерес к таким уравнениям снова возрождается в связи с новыми применениями в теории слоений [11] и теоретической физике [33], глубже стала изучаться теория линейных систем Пфаффа [18, 38]. Особый интерес вызывают алгебраические интегралы систем Пфаффа с полиномиальными коэффициентами [12, 14, 16, 31, 39]. В работах [22, 23] рассмотрена обратная задача для уравнения Пфаффа, а в работе [36] изучено поведение интегральных поверхностей около сингулярных кривых по аналогии с теорией особых точек динамических систем. Отметим также, что в свое время С. Лефшец использовал однородное полиномиальное уравнение Пфаффа для аналитического выражения продолжения векторного поля с плоскости $\mathbb{R}^2$ на сферу Пуанкаре [25]. В работе [10] предложена модификация уравнения Лефшеца для обеспечения проективности. О других приложениях уравнения Пфаффа см. работы [17, 32]. Теории уравнений Пфаффа (под названием многомерных дифференциальных уравнений) посвящена монография [2], содержащая обширную библиографию.

С точки зрения приложений к геометрии является естественным рассмотрение уравнений Пфаффа с гладкими коэффициентами. Вместе с тем в приложениях к термодинамическим процессам такое условие является слишком жестким, так как в неоднородных средах оно, как правило, не выполняется. В связи с этим были предприняты попытки исследовать уравнения с негладкими коэффициентами. А. И. Перовым дано обобщение условия Фробениуса, когда от коэффициентов уравнения требуется непрерывность по независимым переменным [5] с сохранением условия гладкости по неизвестной. В работах [28, 29] развит подход, основанный на теории обобщенных функций (распределений), который по самому существу пригоден только для линейных систем Пфаффа (о линейных системах Пфаффа см. также [3] и [2, гл. II]). В работе [27], посвященной исследованию единственности решения задачи Коши, система Пфаффа с непрерывными коэффициентами изучается посредством аппроксимации гладкими системами, удовлетворяющими критерию Фробениуса. В настоящей работе разрабатывается подход, основанный на преобразовании задачи Коши для уравнения Пфаффа к равносильной системе интегральных уравнений. Для уравнения в пространстве $\mathbb{R}^3$ этот подход изложен в [9]. Отметим, что результат [9] на случай систем более высоких размерностей не допускает непосредственного обобщения. Еще больших технических средств в этом плане требуют системы Пфаффа, в связи с чем в настоящей работе рассматриваются только уравнения Пфаффа. Основываясь на полученной системе интегральных уравнений, приводятся аналоги теоремы Пеано о существовании и теоремы Камке о единственности, а также схема Эйлера о приближенном решении задачи Коши. Работа выполнена в рамках гранта № ОТ-Ф4-84: «Дискретно-численный метод для полиномиальных систем и его приложения к моделированию циклических и управляемых процессов». Изучению свойств решений, в том числе топологической характеристики области определения непродолжаемых решений, будет посвящена отдельная статья.

Будем рассматривать дифференциальное уравнение Пфаффа

$$\omega = a_0(X)dX_0 + a_1(X)dX_1 + \cdots + a_n(X)dX_n, \tag{1.1}$$

где $X = (X_0, X_1, \ldots, X_n) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. (В дальнейшем будем предполагать, что из области D исключены особые точки, где все коэффициенты $a_j(X)$ одновременно равняются 0.) Уравнение (1.1) задает поле гиперплоскостей в области D. Оно называется *интегрируемым* (в области D), если существует семейство многообразий коразмерности 1 (гиперповерхностей), однократно покрывающих D и в каждой своей точке касающихся к гиперплоскости поля (1.1) в этой точке, т. е. являются огибающими соответствующего поля гиперплоскостей. Такие многообразия называются *интегральными*. В случае $n = 1$ непрерывности коэффициентов $a_j(X)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, достаточно для интегрируемости (теорема Пеано), а в случае $n \geqslant 2$ даже уравнение с гладкими коэффициентами может быть неинтегрируемым. Если все коэффициенты $a_j(X)$ непрерывно дифференцируемы в области D, то условие Фробениуса

$$\omega \wedge d\omega = 0 \tag{1.2}$$

необходимо и достаточно для интегрируемости уравнения (1.1) (см. [4, 20]). При выполнении этого условия через каждую точку X^0, $X^0 \in D$, не являющейся особой, проходит единственная интегральная гиперповерхность.

Далее, для определенности предположим, что $a_0(X) \neq 0$ в некоторой односвязной окрестности D точки X^0. Тогда уравнение (1.1) будет равносильно системе

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, u), \tag{1.3}$$

где $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \Big(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\Big)$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $u = X_0$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_j = X_j$, $f_j(x, u) = -a_j(X)/a_0(X)$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Хотя условие Фробениуса в форме (1.2) формально не требует гладкости правых частей системы (1.3), однако такое требование в неявном виде участвует в операции внешнего дифференцирования (см. [20, гл. VI, теоремы 3.1, 6.1]). Если это требование выполнено, то условие (1.2) в координатах $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ примет вид:

$$\frac{\partial f_i(x, u)}{\partial x_j} + \frac{\partial f_i(x, u)}{\partial u} f_j(x, u) = \frac{\partial f_j(x, u)}{\partial x_i} + \frac{\partial f_j(x, u)}{\partial u} f_i(x, u), \tag{1.4}$$

где $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

В работе [27] система (1.3) изучена при условии непрерывности правых частей методом аппроксимации непрерывных функций гладкими. При этом условие (1.4) переносится на аппроксимирующие системы. Здесь предлагается другой подход, в котором система (1.3) преобразуется к системе интегральных уравнений и рассматривается сама по себе.

2. Преобразование задачи Коши к эквивалентной системе интегральных уравнений

Итак, пусть функции f_k непрерывны в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и $(x^0, u^0) \in D$. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, u), u(x^0) = u^0. \tag{2.1}$$

Вектор, полученный из x заменой координаты x_k на s_k, обозначим $x|^0 s_k$ и результат назовем *главным аргументом* (k фиксировано, $k = 1, 2, \ldots, n$). Из главного аргумента образуем *подчиненные аргументы* по следующей схеме. Расположим координаты точки $x|^0 s_k$ в вершинах правильного n-угольника. Если номер j координаты больше n, но не превосходит $2n$, то отождествим его с $j - n \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Сделав в векторе $x|^0 s_k$ пару замен $s_k \to x_k^0$, $x_k + 1 \to s_k + 1$ получим *первый подчиненный аргумент* $x|^1 s_{k+1}$. Заменяя в последнем s_{k+1} на x_{k+1}^0 и x_{k+2} на s_{k+2}, получаем *второй подчиненный аргумент* $x|^2 s_{k+2}$ и т. д. При этом получится следующая последовательность аргументов:

$$\begin{gathered}
(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, s_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n) \\
(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k^0, s_{k+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n) \\
(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k^0, x_{k+1}^0, s_{k+2}, \ldots, x_{n-1}, x_n) \\
\ldots\ldots \\
(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k^0, x_{k+1}^0, \ldots, x_{n-2}^0, s_{n-1}, x_n) \\
(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k^0, x_{k+1}^0, \ldots, x_{n-2}^0, x_{n-1}^0, s_n) \\
(s_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k^0, x_{k+1}^0, \ldots, x_{n-2}^0, x_{n-1}^0, x_n^0) \\
(x_1^0, s_2, \ldots, x_{k-1}, x_k^0, x_{k+1}^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0) \\
(x_1^0, x_2^0, s_3, \ldots, x_{k-1}, x_k^0, x_{k+1}^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0) \\
\ldots\ldots \\
(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-3}^0, s_{k-2}, x_{k-1}, x_k^0, x_{k+1}^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0) \\
(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-3}^0, x_{k-2}^0, s_{k-1}, x_k^0, x_{k+1}^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0)
\end{gathered}$$

Последний член этого ряда $x|^{n-1} s_{k+n}$ получается из $x|^{n-2} s_{k+n-1}$ парой замен $s_{k+n-1} \to x_{k+n-1}^0$, $x_{k+n} \to s_{k+n}$; в нем все координаты суть из $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, за исключением координаты с номером $k + n - 1$, которая есть s_{k+n-1}.

Лемма. *Задача Коши* (2.1) *равносильна системе из* n *интегральных уравнений*

$$u(x) = u_0 + \sum_{l=0}^{n-1} \int\limits_{x_{k+l}^0}^{x_{k+l}} f_{k+l}\left[x|^l s_{k+l}, u\left(x|^l s_{k+l}\right)\right] ds_{k+l}, \tag{2.2}$$

$k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$

Доказательство. Под знаком суммы в (2.2) только одно слагаемое зависит от x_k, а именно, слагаемое

$$\int\limits_{x_k^0}^{x_k} f_k\left[x|^0 s_k, u\left(x|^0 s_k\right)\right] ds_k,$$

$(l = 0)$, а во всех остальных слагаемых на месте x_k стоит x_k^0. Поэтому из (2.2) вытекает $\partial u/\partial x_k = f_k(x|^0 x_k) = f_k(x)$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, где $f_k(x|^0 x_k)$ получено из интегранта $f_k(x|^0 s_k)$ обратной подстановкой $s_k \to x_k$. (Аналогичный смысл имеют выражения типа $x|^l y$, используемые ниже.) Условие $u(x^0) = u^0$ для (2.2) выполняется очевидным образом.

Обратное докажем рассуждениями, называемыми иногда в литературе «методом телевизионной башни» [35]. Из уравнения $\partial u(x)/\partial x_1 = f_1(x, u(x))$ следует

$$u(x) = u(x|^0 x_1^0) + \int\limits_{x_1^0}^{x_1} f_1[x|^0 s_1, u(x|^0 s_1)] ds_1. \tag{2.3}$$

Далее, подставляя $x_1 = x_1^0$ во второе уравнение системы (2.1), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(x|^1 x_1^0)}{\partial x_2} = f_2 \left[x|^1 x_1^0, u(x|^1 x_1^0) \right],$$

интегрирование которого (в пределах от x_2^0 до x_2) дает

$$u\left(x|^1 x_1^0\right) = u\left(x|^1 x_2^0\right) + \int\limits_{x_2^0}^{x_2} f_2 \left[x|^1 s_2, u\left(x|^1 s_2\right)\right] ds_2. \tag{2.4}$$

Повторяя эту процедуру, на последнем шаге из последнего уравнения системы $\partial u(x)/\partial x_n = f_n(x, u(x))$ получаем

$$\frac{\partial u\left(x|^{n-1} x_n\right)}{\partial x_n} = f_n \left[x|^{n-1} x_n, u\left(x|^{n-1} x_n\right)\right],$$

интегрирование которого приведет к соотношению

$$u\left(x|^{n-1} x_n\right) = u\left(x|^{n-1} x_n^0\right) + \int\limits_{x_n^0}^{x_n} f_n \left[x|^{n-1} s_n, u\left(x|^{n-1} s_n\right)\right] ds_n. \tag{2.5}$$

Кроме того, $u(x|^0 x_n^0) = u(x^0) = u^0$. Сложив соотношения (2.3)–(2.5) приходим к уравнению (2.2) для $k = 1$. Для $k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n$ рассуждения аналогичны. □

Как было отмечено выше, формулировка условия интегрируемости Фробениуса в форме $\omega \wedge d\omega = 0$ без предположения дифференцируемости функций f_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, является малосодержательной. Чтобы ослабить условие интегрируемости, прежде всего, мы должны переформулировать критерий интегрируемости в удобной форме.

Теорема 2.1. *Пусть функция f непрерывно дифференцируема. Тогда следующие предложения равносильны*:

a) *система* (1.3) *интегрируема в области D*;
b) *имеют место тождества* (1.4) *в области D*;
c) *система интегральных уравнений* (2.2) *с одной неизвестной функцией $u(x)$ имеет решение для каждой точки $(x^0, u^0) \in D$.*

Равносильность a) и b) есть критерий Фробениуса, а равносильность a) и c) непосредственно вытекает из доказанной выше Леммы.

В отличие от критерия Фробениуса, условие c) теоремы 2.1 не требует гладкости (даже липшицевости) функции f. При этом в доказательстве леммы использована только непрерывность f, поэтому равносильность a) и c) сохраняет силу для систем вида (1.3) с непрерывной правой частью. Это служит мотивацией для следующего определения.

Определение. Утверждение c) теоремы 2.1 называется *ослабленным условием интегрируемости* системы (1.3).

Отметим, что в отличие от условия Фробениуса, ослабленное условие интегрируемости может быть сформулировано индивидуально — для конкретной задачи Коши (2.1). Ясно, что если функция f непрерывно дифференцируема, то ослабленное условие равносильно условию Фробениуса (1.4). В этом случае как существование, так и единственность решения задачи Коши для (1.3) выполняются автоматически. В случае ослабленного условия интегрируемости оба свойства раздваиваются. Например, решение может не существовать по двум причинам: либо от того, что одно из интегральных уравнений (2.2) не имеет решения, либо каждое из уравнений (2.2) имеет решение, но решение переопределенной системы (1.3) отсутствует (т. е. (2.2) несовместима). В связи с этим возникает задача обеспечения существования и единственности решения отдельно взятого уравнения системы (2.2). Существование решения (3.1) может быть установлено любым из способов, применяемых для аналогичной задачи для дифференциальных уравнений [8]. С этой целью обратимся к аналогу метода Эйлера, который заодно предоставляет нам метод приближенного решения.

3. Приближенное решение задачи Коши

Предположим, что задана гладкая система (3.1), удовлетворяющая условию Фробениуса. За исключением редких случаев, решение задачи Коши, не говоря об общем интеграле, не удается найти в явном виде [37], и естественным образом возникает задача о приближенном решении. Это можно осуществить методом «телевизионной башни» — решая n задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (2.3)–(2.5), у которых аргументами являются одна из переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, а остальные будут играть роль параметра. Последнее обстоятельство сильно усложняет построение приближенного решения. Ослабленное условие интегрируемости в этом отношении предоставляет удобное средство — достаточно найти приближенное решение одного из уравнений системы (2.2).

Здесь изложим аналог метода ломаных Эйлера для $k = 1$, т. е. уравнения

$$u(x) = u_0 + \sum_{l=0}^{n-1} \int\limits_{x_{1+l}^0}^{x_{1+l}} f_{1+l}\left[x|^l s_{1+l}, u\left(x|^l s_{1+l}\right)\right] ds_{1+l} \tag{3.1}$$

по схеме [15]. Отметим, что (3.1), хотя внешне имеет вид интегрального уравнения, на самом деле представляет собой рекуррентную формулу.

Уравнение (3.1) будем рассматривать в пределах параллелепипеда
$\Pi = \left\{ (x,u) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| \, |x| \leqslant a, \ \left|u - u^0\right| \leqslant b \right\}$. Пусть $M = \max\limits_{(x,u)\in\Pi} |f(x,u)|$, $d = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$. Зафиксировав целое положительное число N, построим соответствующую «ломаную» $\upsilon_N(x)$, определенную в кубе $K = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \middle| \left|x_k - x_k^0\right| \leqslant d, \ \ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n \right\}$. Компакт K есть объединение 2^n ортантов. Построение начнем с положительного ортанта $K^+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \middle| \, x_k^0 \leqslant x_k \leqslant x_k^0 + d,\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ d \right\}$. Далее разделим K^+ на N^n клеток, которые пронумеруем посредством мультииндекса $\mathbb{i} = (i_1, i_2, \dots,\ i_N)$, где $0 \leqslant i_k \leqslant N-1$, $k = 1,\ 2,\ \dots,\ N$. Совокупность всех мультииндексов обозначим I. Будем пользоваться также обозначениями $\not{k} = \{0,\ 0,\ \dots,\ 0\}$, $\mathbb{1} = \{1,\ 1,\ \dots,\ 1\}$. Далее построим сетку в K^+ с узлами. Положим $x^{\mathbb{i}} = x^0 + \mathbb{i}h$, $\mathbb{i} \in I$. Каждый $\mathbb{i} \in I$ определяет кубик деления $K_{\mathbb{i}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \middle| \, x^{\mathbb{i}} \leqslant x < x^{\mathbb{i}+1} \right\}$, где неравенства $x^{\mathbf{i}} \leqslant x < x^{\mathbf{i}+1}$ понимаются покоординатно (при $i_k + 1 = N$ неравенство $x_k < x_k^{i_k+1}$ заменяется на $x_k \leqslant x_k^N$ для соответствующего k. Приближение $\upsilon_N(x)$ построим методом «телевизионной башни» [35]. Для $x \in K_0$ положим $\upsilon_N(x) \equiv u^0$. Далее, предполагая $\upsilon_N(x)$ уже построенным на $K_{(i_1,\ 0,\ \dots,\ 0)}$, $i_1 < N$, доопределим его для $x \in K_{(i_1+1,\ 0,\ \dots,\ 0)}$ формулой

$$\begin{aligned}\upsilon_N(x) = u_0 + \int\limits_{x_1^0+h}^{x_1} f_1\left[s_1 - h, x_2, \dots, x_n, \upsilon_N\left(s_1 - h, x_2, \dots, x_n\right)\right] ds_1 + \\ + \sum_{l=1}^{n-1} \int\limits_{x_k^0}^{x_k} f_{1+l}\left[x|^l s_{1+l}, u\left(x|^l s_{1+l}\right)\right] ds_{1+l}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Тем самым $\upsilon_N(x)$ определяется на полосе («тени башни на земле») $x_1^0 \leqslant x_1 \leqslant x_1^0 + d$, $x_k^0 \leqslant x_k < x_k^0 + h$, $k = 2,\ 3,\ \dots,\ n$.

Теперь продолжим $\upsilon_N(x)$ на полосу («заметаемую тенью башни») $x_j^0 \leqslant x_j < x_j^0 + d$ для $j = 1,\ 2$ и $x_j^0 \leqslant x_j < x_j^0 + h$ для $j = 3,\ 4,\ \dots,\ n$ рекуррентной формулой

$$\upsilon_N(x) = \upsilon_N(x_1, x_2, x_3^0, \ldots, x_n^0) + \int\limits_{x_1^0+h}^{x_1} f_1\left[x_1|^0 s_1, \upsilon_N\left(x_1|^0 s_1\right)\right]ds_1 + \\ + \int\limits_{x_2^0+h}^{x_2} f_2\left[x_2|^1 s_2 - h, \upsilon_N\left(x_2|^1 s_2 - h\right)\right]ds_2 + \\ + \sum_{l=2}^{n}\int\limits_{x_{l+1}^0}^{x_{l+1}} f_{l+1}\left[x_{l+1}|^l s_{l+1} - h, \upsilon_N\left(x_{l+1}|^l s_{l+1} - h\right)\right]ds_{l+1}. \quad (3.3)$$

На последнем шаге из полосы, определяемой условием $x_k^0 \leqslant x_k < x_k^0 + d$ для $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1$ и $x_n^0 \leqslant x_n < x_n^0 + h$, продолжаем $\upsilon_N(x)$ на ортант K^+ формулой

$$\upsilon_N(x) = \upsilon_N\left(x_n|^{n-1}x_n^0\right) + \sum_{l=0}^{n-2}\int\limits_{x_{l+1}^0}^{x_{l+1}} f_{l+1}\left[x_n|^{n-1}s_n - h, \upsilon_N\left(x_n|^{n-1}s_n - h\right)\right]ds_n. \quad (3.4)$$

Для полноты опишем схему продолжения $\upsilon_N(x)$ на весь куб K. Пусть $\Delta = \{-1, +1\}$, $\sigma \in \Delta^n$. Каждый элемент σ определяет ортант K^σ, состоящий из точек $x \in \mathbb{R}^d$, удовлетворяющих условию $x_k^0 \leqslant x_k < x_k^0 + d$, если $\sigma_k = 1$; $x_k^0 - d \leqslant x_k \leqslant x_k^0$, если $\sigma_k = -1$.

В частности, если $\sigma = 1$, то $K^\sigma = K^+$. Очевидно, $K = \bigcup\limits_{\sigma\in\Delta^n} K^\sigma$. Для определения $\upsilon_N(x)$ на ортанте K^σ следует в формуле (3.2) $x_1|^0 s_1 - h$ заменить на $x_1|^0 s_1 - \sigma_1 h$, а в формуле (3.3) — аргумент $x_2|^1 s_2 - h$ на $x_2|^1 s_2 - \sigma_2 h$ и т. д. На последнем шаге в формуле (3.4) аргумент $x_n|^{n-1}s_n - h$ следует заменить на величину $x_n|^{n-1}s_n - \sigma_n h$. Аналогично со случаем $n = 1$ выводятся оценки $|\upsilon_N(x) - u_0| \leqslant b$ и $|\upsilon_N(x) - \upsilon_N(x')| \leqslant C\,|x - x'|$ для некоторого $C > 0$. Поэтому по теореме Арцела—Асколи последовательность $\{\upsilon_N(x)\}$ содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность $\upsilon_{N_m}(x)$, предел $\tilde{\upsilon}(x)$ которой является решением задачи Коши (2.1). Если при этом функция f удовлетворяет условию Липшица, то имеет место также оценка

$$|\upsilon_N(x) - \tilde{\upsilon}(x)| \leqslant C_f(e^L d - 1)h,$$

где C_f — постоянная, зависящая от f.

Теперь рассмотрим задачу о продолжении решений. В случае $n = 1$ отрезок определения решения задачи Коши продолжается лишь в двух направлениях. В отличие от него, в случае $n > 1$ приходится привлечь лемму Цорна. Пусть U — семейство всех пар $(u(\cdot), \Delta)$, где $u(\cdot)$ — решение задачи Коши (2.1), определенное в открытой области Δ. Семейство U не пусто, так как содержит построенную выше пару $(\tilde{\upsilon}(\cdot), \mathrm{K})$. Семейство U является частично упорядоченным множеством: $(u_1(\cdot), \Delta_1) \prec (u_2(\cdot), \Delta_2)$, если $\Delta_1 \subset \Delta_2$ и сужение $u_2(\cdot)$ на Δ_1 совпадает с $u_1(\cdot)$. При этом каждая цепь $V \subset U$ имеет наименьшую верхнюю грань $\left(\bar{u}(\cdot), \bar{\Delta}\right)$, у которой $\bar{\Delta} = \bigcup\limits_{(u,\Delta)\in V} \Delta$, а решение $\bar{u}(\cdot)$ определяется по следующему правилу. Пусть $x \in \bar{\Delta}$, следовательно, $x \in \tilde{\Delta}$ для некоторой пары $\left(\tilde{u}(\cdot), \tilde{\Delta}\right)$. Тогда $\bar{u}(x) = \tilde{u}(x)$ для $x \in \tilde{\Delta}$. Корректность определения $\bar{u}(\cdot)$ очевидна. Таким образом, применима лемма Цорна: семейство U имеет максимальные элементы, являющимися непродолжаемыми решениями задачи Коши (2.1). Отметим, что поскольку единственность решения не гарантируется, то продолжение может оказаться не единственным.

На рис. 1 изображены приближенные решения задачи Коши $u(0,0) = 1$ для систем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\left[2u^2 + \sin(2\pi xy)\right], \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x\left[2u^2 + \sin(2\pi xy)\right]; \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\left[2\sqrt[3]{u^2} - (xy)^2 - xy\right], \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x\left[2\sqrt[3]{u^2} - (xy)^2 - xy\right]; \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\left[\frac{1}{20}u^2 + (xy)^2 - xy\right], \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x\left[\frac{1}{20}u^2 + (xy)^2 - xy\right]; \quad (3.7)$$

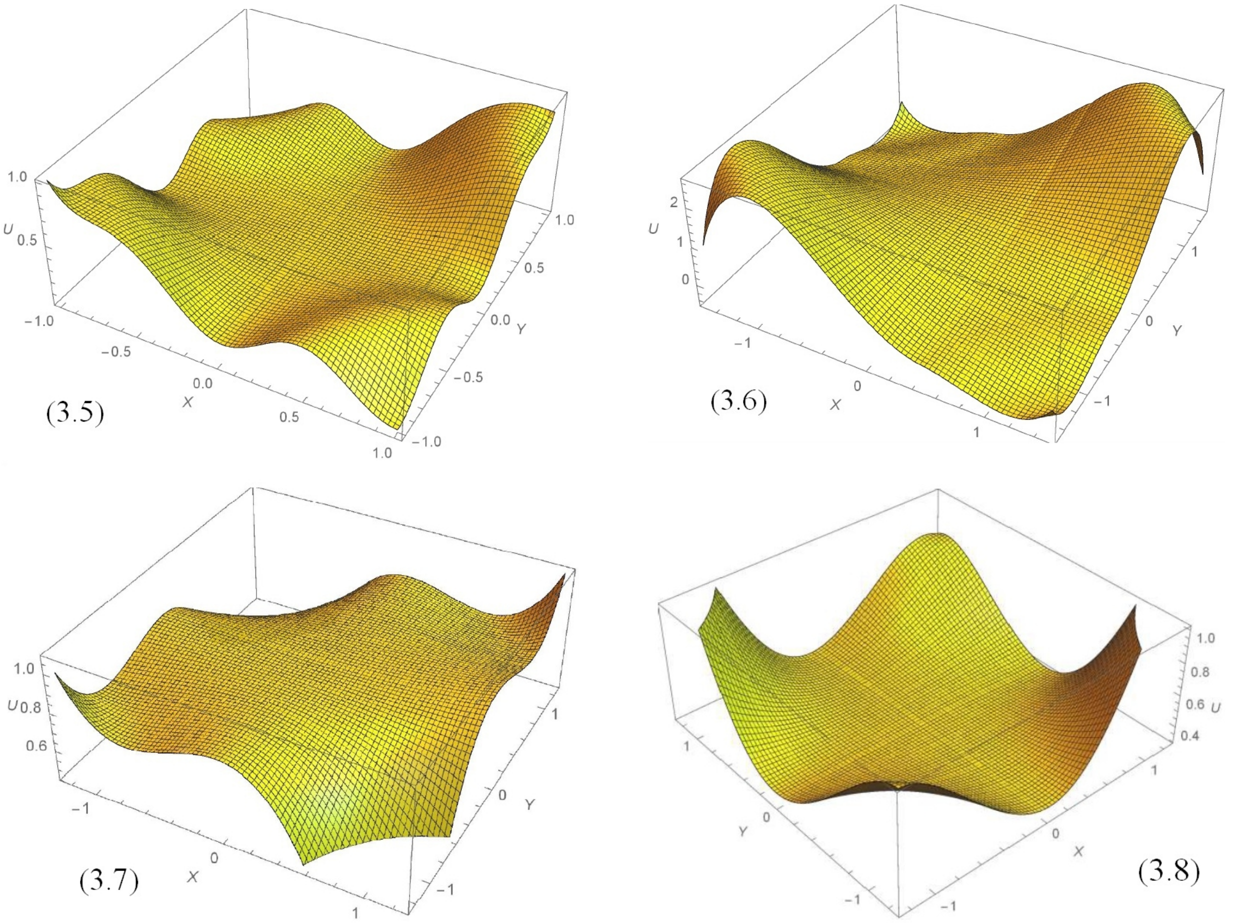

Рис. 1

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\left[\frac{9}{10}u^2 - (xy)^2 + xy\right], \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x\left[\frac{9}{10}u^2 - (xy)^2 + xy\right], \tag{3.8}$$

на квадратах $|x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1$ (система (3.5)); $|x| \leqslant 1,5,\ |y| \leqslant 1,5$ (система (3.6)); и $|x| \leqslant 1,25,\ |y| \leqslant 1,25$ (системы (3.7)-(3.8)) соответственно. Во всех случаях условие Фробениуса выполнено, но система не интегрируется в явном виде.

4. Единственность решения задачи Коши

Задача о единственности решения задачи Коши для уравнения Пфаффа хорошо изучена (см. статью [7] и список литературы к ней). В частности, теорема Осгуда [6, 7] и ее усиление, данное в работе [26], легко переносятся на случай задачи (2.1). В статье [1] приведен аналог теоремы Нагумо [30], которая не затронута в [26]. Отметим, что во всех работах, посвященных теореме о единственности решения уравнения Пфаффа, условие на функцию $f(x,u)$, обеспечивающее это свойство, накладывается в некоторой (телесной) окрестности начальной точки (x_0, u_0). Приведенная в разделе 2 настоящей статьи лемма позволяет установить теорему единственности с минимальными требованиями в определенном смысле.

Пусть $[x]_k = [x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0]$. Рассмотрим n задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, практически независимых друг от друга:

$$\frac{\partial u([x]_k)}{\partial x_k} = f[[x]_k, u([x]_k)], \quad u([x]_k)|_{x=x_k} = u^0, \tag{4.1}$$

$k = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 4.1. *Если для хотя бы одной из задач Коши* (4.1) *имеет место единственность решения, то задача Коши* (2.1) *имеет единственное решение.*

Например, того, что хотя бы при одном k функция $f_k(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0, u)$ удовлетворяет условию Камке по паре переменных (x_k, u) (см. [6, гл. 1, теорема 1.15.1], [20, гл. 1, теорема 6.1]), достаточно для единственности решения задачи (2.1). Таким образом, задача о единственности решения задачи Коши для системы (1.3) принципиально отличается от аналогичной задачи для уравнений других типов.

Заключительные замечания. Переформулировка условия разрешимости уравнения Пфаффа в терминах интегральных уравнений позволяет переносить на него свойства обыкновенных дифференциальных уравнений, в том числе теорему Камке о единственности, теорему существования непродолжаемых решений и метод Эйлера приближенного построения решения задачи Коши. В месте с тем задача изучения свойств непродолжаемых решений существенно отличается от случая обыкновенных дифференциальных уравнений, что обусловлено более богатой топологией плоскости и многомерных пространств по сравнению с прямой. Исследованию этих вопросов будет посвящена отдельная работа.

В заключение авторы выражают благодарность О. Ахмедову за помощь подготовке статьи к печати и рецензентам за замечания, позволившие улучшить текст статьи, а также пополнить список литературы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азамов А., Бегалиев А. О.* Теорема существования и метод приближенного решения для уравнения Пфаффа с непрерывными коэффициентами// Тр. ИММ УрО РАН. — 2021. — *27*, № 3. — С. 12–24.
2. *Гайшун И. В.* Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. — М.: Едиториал УРСС, 2004.
3. *Гайшун Л. Н.* О представлении решений вполне интегрируемых линейных систем// Дифф. уравн. — 1978. — *14*, № 4. — С. 728–730.
4. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. — М.: Мир, 1971.
5. *Перов А. И.* Об одном обобщении теоремы Фробениуса// Дифф. уравн. — 1969. — *5*, № 10. — С. 1881–1884.
6. *Agarwal R. P., Lakshmikantham V.* Uniqueness and nonuniqueness criteria for ordinary differential equations. — Singapore: World Scientific, 1993.
7. *Araújo J. A. C.* On uniqueness criteria for systems of ordinary differential equations// J. Math. Anal. Appl. — 2003. — *281*. — С. 264–275.
8. *Arutyunov A. V.* The coincidence point problem for set-valued mappings and Ulam—Hyers stability// Dokl. Math. — 2014. — *89*, № 2. — С. 188–191.
9. *Azamov A., Begaliyev A. O.* Existence and uniqueness of the solution of a Cauchy problem for the Pfaff equation with continuous coefficients// Uzb. Math. J. — 2019. — № 2. — С. 18–26.
10. *Azamov A., Suvanov Sh., Tilavov A.* Studing of behavior at infinity of vector fields on poincare's sphere: revisited// Qual. Theory Dyn. Syst. — 2015. — *14*, № 1. — С. 2–11.
11. *Bedford E., Kalka M.* Foliations and complex Monge—Ampere equations// Commun. Pure Appl. Math. — 1991. — *30*. — С. 543–571.
12. *Brunella M., Gustavo M. L.* Bounding the degree of solutions to Pfaff equations// Publ. Mat. — 2000. — *44*, № 2. — С. 593–604.
13. *Cartan É.* Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff// Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (3). — 1899. — *16*. — С. 239–332.
14. *Cerveau D., Lins-Neto A.* Holomorphic foliations in $CP(2)$ having an invariant algebraic curve// Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1991. — *41*, № 4. — С. 883–903.
15. *Coddington E. A., Levinson N.* Theory of ordinary differential equations. — New Dehli: TATA McGRAW-Hill Publishing Co. Ltd., 1987.
16. *Coutinho S. C.* A constructive proof of the density of algebraic Pfaff equations without algebraic solutions// Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 2007. — *57*, № 5. — С. 1611–1621.
17. *Dryuma V.* On geometrical properties of the spaces defined by the Pfaff equations// Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2005. — *47*, № 1. — С. 69–84.
18. *Hakopian H. A., Tonoyan M. G.* Partial differential analogs of ordinary differential equations and systems// New York J. Math. — 2004. — *10*. — С. 89–116.
19. *Han C. K.* Pfaffian systems of Frobenius type and solvability of generic overdetermined PDE systems// В сб.: «Symmetries and Overdetermined Systems of Partial Differential Equations». — New York: Springer, 2008. — С. 421–429.

20. *Hartman Ph.* Ordinary differential equations. — New York: John Willey & Sons, 1964.
21. *Howard R.* Methods of thermodinamics. — New York: Blaisdell Publ. Comp., 1965.
22. *Izobov N. A.* On the existence of linear Pfaffian systems whose set of lower characteristic vectors has a positive plane mesure// Differ. Equ. — 1997. — *33*, № 12. — С. 1626–1632.
23. *Izobov N. A., Platonov A. S.* Construction of a linear Pfaff equation with arbitrarily given characteristics and lower characteristic sets// Differ. Equ. — 1998. — *34*, № 12. — С. 1600–1607.
24. *Jouanolou J. P.* Equations de Pfaff algébriques. — Berlin—Heidelberg: Springer-Verlag, 1979.
25. *Lefschetz S.* Differential equations: Geometric theory. — New York—London: Interscience Publishers, 1963.
26. *Luzatto S., Türeli S., War K.* Integrability of continuous bundles// ArXiv. — 2016. — 1606.00343v2 [math. CA].
27. *Luzatto S., Türeli S., War K.* A Frobenius theorem for corank-1 continuous distributions in dimensions two and three// ArXiv. — 2016. — 1411.5896v5 [math.DG].
28. *Mardare S.* On Pfaff systems with L^p coefficients in dimension two// C.R. Math. Acad. Sci. Paris. — 2005. — *340*. — С. 879–884.
29. *Mardare S.* On Pfaff systems with L^p coefficients and their applications in differential geometry// J. Math. Pures Appl. — 2005. — *84*. — С. 1659–1692.
30. *Mejstrik T.* Some remarks on Nagumo's theorem// Czech. Math. J. — 2012. — *62*. — С. 235–242.
31. *Mendes L. G.* Bounding the degree of solutions to Pfaff equations// Publ. Mat. — 2000. — *44*, № 2. — С. 593–604.
32. *Musen P.* On the application of Pfaff's method in the theory of variations of astronomical constants. — Washington: NASA, 1964.
33. *Popescu P., Popescu M.* Some aspects concerning the dynamics given by Pfaff forms// Physics AUC. — 2011. — *21*. — С. 195–202.
34. *Rashevskiy K. S.* Geometric theory of partial differential equations. — New York: Springer, 2001.
35. *Siu Y. T.* Partial differential equations with compatibility condition. — https://www.coursehero.com/file/8864495/Lecture-notes-1/.
36. *Spichekovo N. V.* On the behaviour of integral surfaces of a Pfaff equation with a nonclosed singular curve// Differ. Equ. — 2005. — *41*, № 10. — С. 1509–1513.
37. *Unni K. R.* Pfaffian differential expressions and equations// Master's degree thesis. — Logan: Utah State Univ., 1961. — С. 22.
38. *Vasilevich N. D., Prokhorovich T. N.* A linear Pfaff system of three equations on CP^m// Differ. Equ. — 2003. — *39*, № 6. — С. 896–898.
39. *Żoladek H.* On algebraic solutions of algebraic Pfaff equations// Studia Math. — 1995. — *114*, № 2. — С. 117–126.

А. А. Абдуганиев
Институт математики имени В. И. Романовского, Ташкент, Узбекистан
E-mail: aaa_uz@mail.ru

А. А. Азамов
Институт математики имени В. И. Романовского, Ташкент, Узбекистан
E-mail: abdulla.azamov@gmail.com

А. О. Бегалиев
Институт математики имени В. И. Романовского, Ташкент, Узбекистан
E-mail: azizuzmu@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-609-619 UDC 517.911.5

Existence and Uniqueness Theorems for the Pfaff Equation with Continuous Coefficients

© 2021 **A. A. Abduganiev, A. A. Azamov, A. O. Begaliev**

Abstract. In this paper, the Pfaff equations with continuous coefficients are considered. Analogs of Peano's existence theorem and Kamke's theorem on the uniqueness of the solution to the Cauchy problem are established, and a method for the approximate solution of the Cauchy problem for the Pfaff equation is proposed.

REFERENCES

1. A. Azamov and A. O. Begaliev, "Teorema sushchestvovaniya i metod priblizhennogo resheniya dlya uravneniya Pfaffa s nepreryvnymi koeffitsientami" [Existence theorem and method of approximate solution for the Pfaff equation with continuous coefficients], *Tr. IMM UrO RAN* [Proc. IMM UrO RAS], 2021, **27**, No. 3, 12–24 (in Russian).
2. I. V. Gayshun, *Vpolne razreshimye mnogomernye differentsial'nye uravneniya* [Completely Solvable Multidimensional Differential Equations], Editorial URSS, Moscow, 2004 (in Russian).
3. L. N. Gayshun, "O predstavlenii resheniy vpolne integriruemykh lineynykh sistem" [Representation of solutions of completely integrable linear systems], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1978, **14**, No. 4, 728–730 (in Russian).
4. H. Cartan, *Differentsial'noe ischislenie. Differentsial'nye formy* [Differential Calculus. Differential Forms], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
5. A. I. Perov, "Ob odnom obobshchenii teoremy Frobeniusa" [On one generalization of the Frobenius theorem], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1969, **5**, No. 10, 1881–1884 (in Russian).
6. R. P. Agarwal and V. Lakshmikantham, *Uniqueness and nonuniqueness criteria for ordinary differential equations*, World Scientific, Singapore, 1993.
7. J. A. C. Araújo, "On uniqueness criteria for systems of ordinary differential equations," *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, **281**, 264–275.
8. A. V. Arutyunov, "The coincidence point problem for set-valued mappings and Ulam–Hyers stability," *Dokl. Math.*, 2014, **89**, No. 2, 188–191.
9. A. Azamov and A. O. Begaliyev, "Existence and uniqueness of the solution of a Cauchy problem for the Pfaff equation with continuous coefficients," *Uzb. Math. J.*, 2019, No. 2, 18–26.
10. A. Azamov, Sh. Suvanov, and A. Tilavov, "Studing of behavior at infinity of vector fields on poincare's sphere: revisited," *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 2015, **14**, No. 1, 2–11.
11. E. Bedford and M. Kalka, "Foliations and complex Monge–Ampere equations," *Commun. Pure Appl. Math.*, 1991, **30**, 543–571.
12. M. Brunella and M. L. Gustavo, "Bounding the degree of solutions to Pfaff equations," *Publ. Mat.*, 2000, **44**, No. 2, 593–604.
13. É. Cartan, "Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff," *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (3)*, 1899, **16**, 239–332.
14. D. Cerveau and A. Lins-Neto, "Holomorphic foliations in $CP(2)$ having an invariant algebraic curve," *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1991, **41**, No. 4, 883–903.
15. E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, TATA McGRAW-Hill Publishing Co. Ltd., New Dehli, 1987.

16. S. C. Coutinho, “A constructive proof of the density of algebraic Pfaff equations without algebraic solutions,” *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 2007, **57**, No. 5, 1611–1621.
17. V. Dryuma, “On geometrical properties of the spaces defined by the Pfaff equations,” *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat.*, 2005, **47**, No. 1, 69–84.
18. H. A. Hakopian and M. G. Tonoyan, “Partial differential analogs of ordinary differential equations and systems,” *New York J. Math.*, 2004, **10**, 89–116.
19. C. K. Han, “Pfaffian systems of Frobenius type and solvability of generic overdetermined PDE systems,” In: *Symmetries and Overdetermined Systems of Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2008, pp. 421–429.
20. Ph. Hartman, *Ordinary differential equations*, John Willey & Sons, New York, 1964.
21. R. Howard, *Methods of thermodinamics*, Blaisdell Publ. Comp., New York, 1965.
22. N. A. Izobov, “On the existence of linear Pfaffian systems whose set of lower characteristic vectors has a positive plane mesure,” *Differ. Equ.*, 1997, **33**, No. 12, 1626–1632.
23. N. A. Izobov and A. S. Platonov, “Construction of a linear Pfaff equation with arbitrarily given characteristics and lower characteristic sets,” *Differ. Equ.*, 1998, **34**, No. 12, 1600–1607.
24. J. P. Jouanolou, *Equations de Pfaff algébriques*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1979.
25. S. Lefschetz, *Differential equations: Geometric theory*, Interscience Publishers, New York–London, 1963.
26. S. Luzatto, S. Türeli, and K. War, “Integrability of continuous bundles,” *ArXiv*, 2016, 1606.00343v2 [math. CA].
27. S. Luzatto, S. Türeli, and K. War, “A Frobenius theorem for corank-1 continuous distributions in dimensions two and three,” *ArXiv*, 2016, 1411.5896v5 [math.DG].
28. S. Mardare, “On Pfaff systems with L^p coefficients in dimension two,” *C.R. Math. Acad. Sci. Paris*, 2005, **340**, 879–884.
29. S. Mardare, “On Pfaff systems with L^p coefficients and their applications in differential geometry,” *J. Math. Pures Appl.*, 2005, **84**, 1659–1692.
30. T. Mejstrik, “Some remarks on Nagumo’s theorem,” *Czech. Math. J.*, 2012, **62**, 235–242.
31. L. G. Mendes, “Bounding the degree of solutions to Pfaff equations,” *Publ. Mat.*, 2000, **44**, No. 2, 593–604.
32. P. Musen, *On the application of Pfaff’s method in the theory of variations of astronomical constants*, NASA, Washington, 1964.
33. P. Popescu and M. Popescu, “Some aspects concerning the dynamics given by Pfaff forms,” *Physics AUC*, 2011, **21**, 195–202.
34. K. S. Rashevskiy, *Geometric theory of partial differential equations*, Springer, New York, 2001.
35. Y. T. Siu, *Partial differential equations with compatibility condition*, https://www.coursehero.com/file/8864495/Lecture-notes-1/.
36. N. V. Spichekovo, “On the behaviour of integral surfaces of a Pfaff equation with a nonclosed singular curve,” *Differ. Equ.*, 2005, **41**, No. 10, 1509–1513.
37. K. R. Unni, “Pfaffian differential expressions and equations,” *Master’s degree thesis*, Logan: Utah State Univ., 1961, p. 22.
38. N. D. Vasilevich and T. N. Prokhorovich, “A linear Pfaff system of three equations on CP^m,” *Differ. Equ.*, 2003, **39**, No. 6, 896–898.
39. H. Źoladek, “On algebraic solutions of algebraic Pfaff equations,” *Studia Math.*, 1995, **114**, No. 2, 117–126.

A. A. Abduganiev
Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: aaa_uz@mail.ru

A. A. Azamov
Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: abdulla.azamov@gmail.com

A. O. Begaliev
Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: azizuzmu@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 4 (2021). С. 620–633
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-620-633 УДК 517.55

α-СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

© 2021 г. **Б. И. АБДУЛЛАЕВ, С. А. ИМОМКУЛОВ, Р. А. ШАРИПОВ**

Аннотация. В этой работе изучается класс α-субгармонических функций. Доказывается ряд важных свойств α-субгармонических функций, дается эквивалентное, более удобное определение α-субгармоничности. Описывается также геометрическая структура устранимых особенностей некоторых классов α-субгармонических функций.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Хорошо известная классическая теория потенциала строится на основе оператора Лапласа и класса субгармонических функций. Естественно, возникает потребность изучения своеобразных расширений класса субгармонических функций, встречающийся в тех или иных задачах комплексного анализа.

Как известно, дважды гладкая функция $u(x) \in C^2(D)$ в области $D \subset \mathbb{R}^n$ называется субгармонической, если оператор Лапласа $\Delta u \geqslant 0$ в D. В пространстве $\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$ это условие эквивалентно тому, что дифференциальная форма $dd^c u \wedge \beta^{n-1}$ бистепени (n, n) положительна, $dd^c u \wedge \beta^{n-1} \geqslant 0$, где $\beta = dd^c |z|^2$ — форма объема в пространстве $\mathbb{C}^n$, $d = \partial + \overline{\partial}$, $d^c = \dfrac{\partial - \overline{\partial}}{4i}$ — стандартные обозначения в многомерном комплексном анализе.

Для произвольных полунепрерывных сверху функций положительность $dd^c u \wedge \beta^{n-1} \geqslant 0$ понимается в обобщенном смысле, в смысле потоков:

$$\int u\,(z)\ \beta^{n-1}\,(z)\,dd^c\omega\,(z) \geqslant 0,\ \forall \omega \in F(D),\ \omega \geqslant 0, \tag{1.1}$$

где $F\,(D) = \{\omega \in C^\infty(D),\ \operatorname{supp}\omega \Subset D\}$ — пространство основных функций.

В теории сильно m-субгармонических (sh_m) функций часто используются так называемые α-субгармонические функции, когда вместо строго положительной дифференциальной формы

$$\beta^{n-1} = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} (n-1)! \sum_{j=1}^{n} dz\,[j] \wedge d\overline{z}\,[j]$$

бистепени $(n-1,n-1)$ будет стоять произвольная строго положительная дифференциальная форма

$$\alpha=\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\sum_{j,k=1}^{n}\alpha_{jk}(z)dz\,[j]\wedge d\overline{z}\,[k]\,, \tag{1.2}$$

т. е. вместо оператора $dd^cu\wedge\beta^{n-1}$ рассматривается оператор $dd^cu\wedge\alpha$. Здесь $d\,z\,[j]=d\,z_1\wedge\ldots\wedge d\,z_{j-1}\wedge d\,z_{j+1}\wedge\ldots\wedge d\,z_n$, $d\,\bar z\,[k]=d\,\bar z_1\wedge\ldots\wedge d\,\bar z_{k-1}\wedge d\,\bar z_{k+1}\wedge\ldots\wedge d\,\bar z_n$ (см. [2]).

Для классов субгармонических и плюрисубгармонических функций имеются достаточно полные результаты об устранимых особых множествах. Так, в терминах хаусдорфовой меры, условия устранения особого множества гармонических функций класса Lip_λ изучены в работах Л. Карлесона [9] (для $0<\lambda\leqslant 1$) и Е. П. Долженко [8] (для $1<\lambda\leqslant 2$). Особые множества субгармонических функций из класса Lip_λ изучены в работе В. Л. Шапиро [25] (случай $(0<\lambda<1)$ и в работе А. Садуллаева и Ж. Р. Ярметова [17] (случай $(1\leqslant\lambda\leqslant 2)$. В работах Р. Харви и Дж. Полкинга [22], В. Г. Мазья и В. П. Хавина [12] получен ряд теорем об устранения особенностей гармонических функций из класса $L^{k,p}(G)$, аналогичные результаты в случае субгармонических функций из класса $L^{k,p}(G)$ получены в работах Б. Абдуллаева и С. Имомкулова [1], а также Б. Абдуллаева и Ж. Ярметова [3]. Здесь $L^{k,p}(G)$ — класс функций, имеющих производные до k-го порядка, причем производные k-го порядка принадлежат пространству L^p.

Отметим также, что структура устранимых особых множеств плюрисубгармонических в $\mathbb{C}^n$ функций рассмотрены в работах У. Сегрела [19], Е. Чирки [20] и для голоморфных функций многих переменных из класса $L^{2,1}_{loc}(G)$ — в недавней работе Ж. Рихентауса [24].

Изучение устранимых особых множеств сильно m-субгармонических функций (sh_m) показало, что здесь требуется исследовать структуру особых множеств для α-субгармонических функций. В этом направлении в статье А. Садуллаева, Б. И. Абдуллаева и Р. А. Шарипова [16] была доказана устранимость замкнутого полярного множества, т. е. множества нулевой ньютоновой емкости для класса ограниченных сверху сильно m-субгармонических (sh_m) функций $(1\leqslant m\leqslant n)$. Ниже мы изучим структуру устранимых особенностей некоторых классов α-субгармонических функций (раздел 7). Для этой цели в разделе 6 вводится емкостная величина $C_{q,l}$-емкости, в терминах которой описывается метрическая структура устранимых особых множеств α-субгармонических функций. В разделах 2–5 изучаются свойства класса α-субгармонических функций, приводятся различные их определения.

2. Определение α-субгармонических функций

Пусть α — произвольная замкнутая, строго положительная дифференциальная форма бистепени $(n-1,n-1)$ в области $D\subset\mathbb{C}^n$:

$$\alpha=\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\sum_{j,k=1}^{n}\alpha_{jk}(z)dz\,[j]\wedge d\overline{z}\,[k]\,,\ \alpha_{jk}(z)\in C^1\left(D\right),\ \ d\alpha=0. \tag{2.1}$$

Строго положительность α означает, что для любой компактной области $G\Subset D$ существует число $\varepsilon>0$ такое, что дифференциальная форма $\alpha-\varepsilon\beta^{n-1}\geqslant 0$.

Определение 2.1 (см. [6]). Дважды гладкая функция $u(z)\in C^2(D)$ называется *α-субгармонической* в области $D\subset\mathbb{C}^n$, если дифференциальная форма $dd^cu\wedge\alpha\geqslant 0$ в D. Функция $u(z)\in L^1_{loc}(D)$ называется *α-субгармонической* в области $D\subset\mathbb{C}^n$, если

1. она полунепрерывна сверху в D, т. е. $u\left(z^0\right)\geqslant\overline{\lim\limits_{z\to z^0}}\,u\left(z\right),\ \forall\, z^0\in D$;
2. оператор $dd^cu\wedge\alpha$ положителен в обобщенном смысле, т. е.

$$\int u\left(z\right)\alpha\left(z\right)\wedge dd^c\omega\left(z\right)\geqslant 0,\ \forall\omega\in F\left(D\right),\ \omega\geqslant 0.$$

Класс α-субгармонических функций обозначается через $\alpha-sh(D)$, причем для удобства включаем в этот класс и функцию $u(z)\equiv-\infty$. Для $\alpha=\beta^{n-1}=\left(dd^c\left|z\right|^2\right)^{n-1}$ мы будем иметь классические субгармонические функции. Заметим, что $dd^cu\wedge\beta^{n-1}=(n-1)!\Delta udV$. При $n=1$ на комплексной плоскости α-субгармоничность функции эквивалентна обычной субгармоничности. Они хорошо изучены, и мы опускаем этот случай и считаем ниже, что $n \geqslant 2$.

Определение 2.2. Дважды гладкая в области $D \subset \mathbb{C}^n$ функция $u(z) \in C^2(D)$ называется *α-гармонической*, если $dd^c u \wedge \alpha = 0$ в D.

В работе М. Ваисовой [6] для строго положительной, замкнутой дифференциальной формы α бистепени $(n-1, n-1)$ показано, что оператор $dd^c u \wedge \alpha$ является равномерно эллиптическим оператором в D.

Аналогично оператору Лапласа Δu определим и запишем оператор $\Delta_\alpha u$ в вещественной форме пространства $\mathbb{R}^{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$, $z_j = x_j + i x_{n+j}$. Для любой дважды гладкой функции $u(z) \in C^2(D)$ представим $dd^c u \wedge \alpha$ в виде

$$dd^c u \wedge \alpha = \left[\frac{i}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} dz_j \wedge d\overline{z}_k\right] \wedge \left[\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}(z)\, dz[j] \wedge d\overline{z}[k]\right] =$$

$$= \left(\frac{i}{2}\right)^{n} \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}(z)\, \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} dz \wedge d\overline{z} = \left[\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}(z)\, \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\right] \left[\left(\frac{i}{2}\right)^{n} dz \wedge d\overline{z}\right] =$$

$$= \left[\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}(z)\, \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\right] dV.$$

Заметим, что если обозначить $\mathcal{D}_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $j = \overline{1, 2n}$, то

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial x_{n+j}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial x_{n+k}}\right) u(z) = (\mathcal{D}_j - i\mathcal{D}_{n+j})(\mathcal{D}_k + i\mathcal{D}_{n+k})\, u(z).$$

Следовательно,

$$dd^c u \wedge \alpha = \left[\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}(z)\, \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\right] dV = \left[\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}(z)\, (\mathcal{D}_j - i\mathcal{D}_{n+j})(\mathcal{D}_k + i\mathcal{D}_{n+k})\, u(z)\right] dV.$$

Положим

$$\Delta_\alpha u = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}(z)\, (\mathcal{D}_j - i\mathcal{D}_{n+j})(\mathcal{D}_k + i\mathcal{D}_{n+k})\, u(z).$$

Теорема 2.1. *Если α-строго положительная, замкнутая дифференциальная форма бистепени $(n-1, n-1)$ в области D, то оператор $\Delta_\alpha u$ является самосопряженным оператором.*

Доказательство. Мы представим оператор $\Delta_\alpha u$ в виде

$$\Delta_\alpha u = \sum_{j,k=1}^{2n} a_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k},$$

где

$$a_{jk} = \begin{cases} (-1)^{j+k}\mathrm{Re}\alpha_{jk}(z), & 1 \leqslant j \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant n, \\ (-1)^{j+k}\mathrm{Im}\alpha_{j,k-n}(z), & 1 \leqslant j \leqslant n,\ n+1 \leqslant k \leqslant 2n, \\ (-1)^{j+k}\mathrm{Im}\alpha_{j-n,k}(z), & n+1 \leqslant j \leqslant 2n,\ 1 \leqslant k \leqslant n, \\ (-1)^{j+k}\mathrm{Re}\alpha_{j-n,k-n}(z), & n+1 \leqslant j \leqslant 2n,\ n+1 \leqslant k \leqslant 2n. \end{cases} \tag{2.2}$$

Так как $a_{jk} \in C^1(D)$, то оператору Δ_α можно придать вид

$$\Delta_\alpha u = \sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \sum_{j=1}^{2n}\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_k}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}. \tag{2.3}$$

Тогда оператор

$$\Delta_\alpha^* \vartheta = \sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{jk}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_j}\right) + \sum_{j=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_k}\right)\vartheta\right] \tag{2.4}$$

называется *сопряженным оператором* (см. [14, с. 18-19]), и если $\Delta_\alpha^* = \Delta_\alpha$, то оператор называется *самосопряженным*.

Как видно из определения, для самосопряженности оператора Δ_α достаточно выполнения условия

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_k} = 0, \quad \forall\, j = \overline{1, 2n}.$$

Чтобы доказать эти равенства, воспользуемся замкнутостью формы α. Действительно, если $d\alpha = 0$, то $\partial\alpha = \bar\partial\alpha = 0$. С другой стороны,

$$\bar\partial\alpha = \bar\partial\left(\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{j,k} \alpha_{jk}(z)\, dz[j] \wedge d\bar z[k]\right) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k-2} \frac{\partial \alpha_{jk}(z)}{\partial \bar z_k}\right) dz[j] \wedge d\bar z = 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \frac{\partial \alpha_{jk}(z)}{\partial \bar z_k} = 0.$$

Переходя к вещественным координатам, получим

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \left(\frac{\partial \alpha_{jk}(z)}{\partial x_k} + i \frac{\partial \alpha_{jk}(z)}{\partial x_{n+k}}\right) = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_k} = 0, \quad \forall j = \overline{1, 2n}. \tag{2.5}$$

Теперь возьмем произвольные функции $u, \vartheta \in C^2(D)$ и рассмотрим разность $u\Delta_\alpha\vartheta - \vartheta\Delta_\alpha^* u$. Учитывая соотношения (2.5) получим

$$u\Delta_\alpha\vartheta - \vartheta\Delta_\alpha^* u = \sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left[a_{jk}\left(u\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j} - \vartheta\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right] + \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_k}\right) u\,\vartheta\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_k} \cdot \sum_{j=1}^{2n}\left(u\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j} - \vartheta\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{j,k=1}^{2n} a_{jk}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j} + u\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_j\partial x_k} - \frac{\partial\vartheta}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_j} - \vartheta\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k}\right) =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{2n} a_{jk}\left(u\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_j\partial x_k} - \vartheta\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k}\right) = u\Delta_\alpha\vartheta - \vartheta\Delta_\alpha u.$$

Отсюда в силу произвольности функции ϑ следует, что $\Delta_\alpha^* u = \Delta_\alpha u$, т. е. оператор Δ_α является самосопряженным оператором. □

Так как $dd^c u \wedge \alpha$ является эллиптическим оператором второго порядка, то мы можем применять общую теорию эллиптических операторов. В частности, если коэффициенты $\alpha_{jk} \in C^{l+\lambda}(D)$, где $C^{l+\lambda}$ — класс l-раз дифференцируемых функций, причем l-е частные производные принадлежат классу Гельдера Lip_λ, $0 < \lambda < 1$, то решение уравнения $dd^c u \wedge \alpha = 0$ существует и принадлежит классу $C^{l+2+\lambda}(D)$ (см. [5, с. 143-144]).

3. Представление Рисса

Согласно теории эллиптических операторов, самосопряженный оператор $dd^c u\wedge\alpha$ имеет *симметрическое* фундаментальное решение $K_\alpha(z,w)$, которое обладает следующими свойствами (см. [6]):

а) $K_\alpha(z,w) \in C^{2+\lambda}(D\setminus\{w\})$, $\ 0 < \lambda < 1$, $\ K_\alpha(w,w) = -\infty$ (напомним, что $\alpha \in C^1(D)$);

б) $K_\alpha(z,w)$ является α-субгармонической функцией в D, причем она α-гармоническая при $z \neq w$;

в) существует константы $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что

$$\frac{c_1}{|z-w|^{2n-2}} \leqslant |K_\alpha(z,w)| \leqslant \frac{c_2}{|z-w|^{2n-2}}, \quad w \in D,\ z \in B(w,r) \Subset D. \tag{3.1}$$

Если $u(z)$ — α-субгармоническая функция в области D, то по определению, оператор $dd^c u \wedge \alpha \geqslant 0$ в обобщенном смысле, т. е. обобщенная функция

$$dd^c u\,(z) \wedge \alpha\,(z)\,(\omega) = \int u\,(z)\;\alpha\,(z) \wedge dd^c \omega\,(z) \geqslant 0,\ \forall \omega \in F\,(D)\,,\ \omega \geqslant 0.$$

Следовательно, положительная обобщенная функция $dd^c u \wedge \alpha$ является борелевской мерой в области D, $dd^c u \wedge \alpha = \mu$. Это означает, что $dd^c u\,(z) \wedge \alpha\,(z)\,(\omega) = \int \omega\,(z)\,d\mu,\ \forall \omega \in F\,(D)$. Эта мера называется *ассоциированной мерой* с функцией $u\,(z)$.

Теорема 3.1. *Для любого подобласти $G \Subset D$ имеет место представление*

$$u(z) = \int\limits_G K_\alpha\,(z,w)\,d\mu\,(w) + g(z), \tag{3.2}$$

где $\mu = dd^c u \wedge \alpha$ и $g(z)$ — α-гармоническая функция в G.

4. Функция Грина и интеграл Пуассона для α-субгармонических функций

Пусть функции u и ϑ дважды непрерывно дифференцируемы на замыкании ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^n$ с гладкой границей ∂D. Нетрудно видеть, что

$$\vartheta\,(z)\,\Delta_\alpha u\,(z) - u\,(z)\,\Delta_\alpha \vartheta\,(z) = \sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left[a_{jk}\,(z)\left(\vartheta\,(z)\,\frac{\partial u\,(z)}{\partial x_j} - u\,(z)\,\frac{\partial \vartheta\,(z)}{\partial x_j}\right)\right].$$

Следовательно, формула Грина с оператором Δ_α принимает вид (см. [14])

$$\int\limits_D \left(\vartheta\,(z)\,\Delta_\alpha u\,(z) - u\,(z)\,\Delta_\alpha \vartheta\,(z)\right)dV\,(z) = \int\limits_{\partial D} a(\xi)\left(\vartheta\,(\xi)\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\,(\xi) - u\,(\xi)\,\frac{\partial \vartheta}{\partial \nu}\,(\xi)\right)d\sigma(\xi), \tag{4.1}$$

где $\nu(\xi) = (\nu_1(\xi), \nu_2(\xi), \ldots, \nu_{2n}(\xi))$ — внешняя нормаль к границе ∂D в точки ξ, а $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ и $\dfrac{\partial \vartheta}{\partial \nu}$ — производные от функций u и ϑ, соответственно, по направлению нормали ν, а функция $a(\xi)$ определяется формулой

$$a(\xi) = \left[\sum_{j=1}^{2n}\left(\sum_{k=1}^{2n} a_{jk}(\xi)\nu_k(\xi)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.2}$$

Предположим теперь, что D является α-регулярной (например, с гладкой границей) областью. α-Регулярность области означает, что существует функция Грина $G_\alpha\,(z,w)\,,\ (z,w) \in D \times D$, обладающая (при фиксированном $w \in D$) следующими свойствами (см. [4, 23]):

а) $G_\alpha(z,w) \in C\left(\bar{D} \setminus \{w\}\right)$, $\quad G_\alpha(w,w) = -\infty$;
б) $G_\alpha(z,w) < 0$, $\forall\, z,w \in D$ и $G_\alpha(z,w\,)|_{\partial D} = 0$;
в) $G_\alpha(z,w)$ является α-субгармонической функцией в D, причем она α-гармоническая при $z \neq w$;
г) разность $G_\alpha(z,w) - K_\alpha(z,w)$ ограничена в некоторой окрестности точки $w \in D$;
д) функция Грина $G_\alpha(z,w)$ симметрична относительно точек z и w, т. е. $G_\alpha(z,w) = G_\alpha(w,z)$ для любых $z,w \in D$ (см. [14, с. 28]).

Функция $P_\alpha(z,\xi) = a(\xi)\left.\dfrac{\partial G_\alpha(z,w)}{\partial \nu}\right|_{w=\xi}$, где $z \in D$ и $\xi \in \partial D$, существует и называется *ядром Пуассона*. Ядро Пуассона $P_\alpha(z,\xi)$ является α-гармонической по $z \in D$ при фиксированном $\xi \in \partial D$ и непрерывной по $\xi \in \partial D$ при фиксированном $z \in D$ функцией. Из свойства б) функции Грина вытекает, что $P_\alpha(z,\xi) \geqslant 0$. Кроме того, всякая α-субгармоническая функция в некоторой окрестности замыкания $\bar{D}$ функция $u(z)$ представляется в виде

$$u(z) = \int\limits_D G_\alpha(z,w)d\mu\,(w) + \int\limits_{\partial D} P_\alpha(z,\xi)u(\xi)d\sigma(\xi),\ z \in D. \tag{4.3}$$

Отметим, что формула

$$\vartheta(z) = \int\limits_{\partial D} P_\alpha(z,\xi)\varphi(\xi)d\sigma(\xi) \tag{4.4}$$

для заданной функции $\varphi(\xi) \in C(\partial D)$ дает нам решение задачи Дирихле

$$\Delta_\alpha \vartheta = 0,$$
$$\vartheta|_{\partial D} = \varphi.$$

В частности, если фунция $u(z)$ α-гармоническая и непрерывная вплоть до границы области D, то

$$u(z) = \int\limits_{\partial D} P_\alpha(z,\xi)u(\xi)d\sigma(\xi).$$

5. Эквивалентные определения α-субгармонических функций

С помощью интегральных представлений (4.3) мы можем вводить понятие α-субгармоничности по-другому.

Определение 5.1. Функция $u(z)$ называется *α-субгармонической* в области D, если выполняются следующие условия:

1. $u(z)$ полунепрерывна сверху в области D;
2. для любого шара $B \Subset D$ справедливо неравенство

$$u(z) \leqslant \int\limits_{\partial B(z^0,r)} P_\alpha(z,\xi)u(\xi)d\sigma(\xi), \ \forall z \in B.$$

Здесь $P_\alpha(z,\xi)$ — ядро Пуассона для шара B.

Теорема 5.1. *Определение* 2.1 *эквивалентно определению* 5.1.

Из этой теоремы легко вытекает, что функция $u : D \to [-\infty, \infty)$ является α-субгармонической в области D тогда и только тогда, когда она полунепрерывна сверху в D и для любого шара $B \Subset D$ и любой α-гармонической в B и непрерывной в $\bar{B}$ функции ϑ, удовлетворяющей условию $\vartheta \geqslant u$ на ∂B, следует, что $\vartheta \geqslant u$ в B.

Такую функцию ϑ будем называть *α-гармонической мажорантой* функции u для шара B.

Доказательство. Согласно формуле (4.3) из определения 2.1 легко следует определение 5.1. Нам остается только показать обратное, т. е. что из определения 5.1 следует определение 2.1.

Для этого сначала предположим, что $u(z) \in C^2(D)$, и для любого шара $B(z^0, r) \Subset D$ напишем неравенство

$$u(z) \leqslant \int\limits_{\partial B(z^0,r)} P_\alpha(z,\xi)u(\xi)d\sigma(\xi), \ z \in B(z^0, r).$$

Если в некоторой точке $z = \xi$ выполняется $dd^c u(z) \wedge \alpha(z)|_{z=\xi} < 0$, то в силу непрерывности $dd^c u(z) \wedge \alpha(z) < 0$ в некоторой окрестности $B = B(\xi, \delta), \ \delta > 0$. Так как, кроме того, $G_\alpha(z, w) < 0$, то согласно формуле (4.3) получим

$$u(z) = \int\limits_B G_\alpha(z,w)d\mu(w) + \int\limits_{\partial B} P_\alpha(z,\xi)u(\xi)d\sigma(\xi) > \int\limits_{\partial B} P_\alpha(z,\xi)u(\xi)d\sigma(\xi),$$

что противоречит определению 5.1.

Пусть теперь $u(z) \in L^1_{loc}(D)$ — произвольная функция. При помощи стандартной свертки (см., например, [15]) определим аппроксимацию $u_j(z)$:

$$u_j(z) = \int u(z+w)K_{\frac{1}{j}}(w)dV(w),$$

где $K_{\frac{1}{j}}(z) \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$, $\operatorname{supp} K_{\frac{1}{j}} = B\left(0, \ \frac{1}{j}\right)$, причем $\int K_{\frac{1}{j}}(z)dV = 1$. Тогда

$$u_j(z) \in \alpha - sh \cap C^\infty\left(D_{\frac{1}{j}}\right),$$

где $D_{\frac{1}{j}} = \left\{ z \in D: \ \rho(z, \partial D) > \frac{1}{j} \right\}$, и $\|u_j(z) - u(z)\|_{L^1_{loc}} \to 0$ при $j \to \infty$. Так как функция $u(z)$ и последовательность $u_j(z)$ локально равномерно ограничены сверху, то по теореме Лебега

$$\int u(z)\alpha(z) \wedge dd^c\omega(z) = \lim_{j\to\infty} \int u_j(z)\alpha(z) \wedge dd^c\omega(z) = \lim_{j\to\infty} \int dd^c u_j(z) \wedge \alpha(z)\omega(z) \geqslant 0, \ \ \forall \omega \geqslant 0.$$

Это означает, что $u(z)$ — α-субгармоническая функция по определению 2.1. □

Следующее определение α-субгармонических функций является более простым и удобным в употреблении.

Определение 5.2. Функция $u(z)$, заданная в области D, называется *α-субгармонической*, если выполняются следующие условия:

1. $u(z)$ полунепрерывна сверху в области D;
2. для любых $z^0 \in D$ и достаточно малых $r > 0$: $B(z^0, r) \Subset D$, имеет место неравенство

$$u(z^0) \leqslant \int\limits_{\partial B(z^0, r)} P_\alpha(z^0, \xi) u(\xi) d\sigma(\xi).$$

Ясно, что из определения 5.1 тривиальным образом вытекает определение 5.2. Для обратного утверждения мы воспользуемся следующим принципом максимума.

Теорема 5.2 (принцип максимума). *Если $u(z) \not\equiv const$ и α-субгармонична в смысле определения* 5.2 *в области $D \subset \mathbb{C}^n$ функция, то*

$$u(z) < \sup_{w \in D} u(w), \ \forall z \in D,$$

т. е. на компактных подмножествах $G \Subset D$ функция достигает своего максимума только на границе ∂G.

В самом деле, предположим, что существует точка $z^0 \in D$: $u(z^0) = \sup\limits_{w \in D} u(w)$. Обозначим через $M = \left\{ z \in D: \ u(z) = u\left(z^0\right) \right\}$. Тогда $M \neq \varnothing$, ибо $z^0 \in M$. Оно замкнуто в D, ибо $M = \left\{ z \in D: \ u(z) \geqslant u\left(z^0\right) \right\}$. Остается показать, что оно открытое. Если существует $w^0 \in M$, являющаяся граничной (не внутренней) точкой, то для достаточно маленьких $r > 0$

$$u\left(z^0\right) = u\left(w^0\right) \leqslant \int\limits_{\partial B(w^0, r)} P_\alpha(w^0, \xi) u(\xi) d\sigma(\xi) < u\left(z^0\right),$$

ибо в последнем интеграле $P_\alpha(w^0, \xi) \geqslant 0$, $\int\limits_{\partial B(w^0, r)} P_\alpha(w^0, \xi) d\sigma(\xi) = 1$ и из полунепрерывности сверху функции $u(z)$, а также из $w^0 \in \partial M$, вытекает, что открытое множество $\left\{ \xi \in \partial B\left(w^0, r\right): \ u(\xi) < u\left(z^0\right) \right\} \neq \varnothing$.

Отсюда следует, что $M = D$ и $u(z) \equiv u\left(z^0\right)$.

Следствие 5.1. *Если функция $u: D \to [-\infty, \infty)$ является α-субгармонической в области D в смысле определения* 5.2, *то для любого шара $B \Subset D$ и любой α-гармонической в B и непрерывной в $\bar{B}$ функции ϑ, удовлетворяющей условию $\vartheta \geqslant u$ на ∂B, следует, что $\vartheta \geqslant u$ в B.*

Доказательство легко вытекает, если мы применяем теорему 5.2 для разности $u - \vartheta$. Более того, такая функция $u(z)$ непременно удовлетворяет неравенству

$$u(z) \leqslant \int\limits_{\partial B(z^0, r)} P_\alpha(z, \xi) u(\xi) d\sigma(\xi) \ \forall z \in B,$$

ибо функция $\vartheta(z) = \int\limits_{\partial B(z^0, r)} P_\alpha(z, \xi) u(\xi) d\sigma(\xi)$ является α-гармонической в B и $\vartheta|_{\partial B} \geqslant u|_{\partial B}$. Все это показывает, что из определения 5.2 следует определение 5.1.

В заключении пункта отметим, что α-субгармонические функции обладают всеми элементарными свойствами, присущими субгармоническим функциям, и их формулировки мы опускаем.

6. $C_{q,l}$-ЕМКОСТИ

Рассмотрим потенциал Рисса:

$$U_l^\mu(z) = \int \frac{d\mu(w)}{|z-w|^{2n-l}},\ z \in \mathbb{C}^n,$$

где $0 < l < 2n$, μ — положительная борелевская мера с компактным носителем $\operatorname{supp}\mu \Subset \mathbb{C}^n$.

Для произвольного компактного множества $E \subset \mathbb{C}^n$ емкостная величина определяется следующим образом.

Определение 6.1 (см. [12,13]).

$$C_{q,l}(E) = \sup_\mu \mu(E),\ \ 1 < q < +\infty,\ \ ql < 2n,$$

где верхняя грань берется по всем положительным, сосредоточенным на множестве E борелевским мерам, удовлетворяющим условию

$$\left\|U_l^\mu(z)\right\|_p = \left[\int\limits_{\mathbb{C}^n} \left|U_l^\mu(z)\right|^p dV\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant 1,\ \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Если $ql \geqslant 2n$, то потенциал Рисса $U_l^\mu(z) \notin L^p(\mathbb{C}^n)$. Для определения емкости $C_{q,l}(E)$ в этом случае мы предполагаем, что $E \subset B(0,1)$, где $B(0,1) = \{z \in \mathbb{C}^n:\ \ |z| \leqslant 1\}$, и определяем емкость как

$$C_{q,l}(E) = \sup \mu(E),\ \ 1 < q < +\infty,$$

где верхняя грань берется по всем положительным, сосредоточенным на множестве E борелевским мерам, удовлетворяющим условию

$$\left\|U_l^\mu(z)\right\|_p = \left[\int\limits_{B(0,1)} \left|U_l^\mu(z)\right|^p dV\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant 1,\ \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Отметим, что при $ql > 2n$ емкость $C_{q,l}(E) = 0$ тогда и только тогда, когда множество E пусто (см. [12,13]).

При $ql \leqslant 2n$ множества $C_{q,l}$-емкости нуль, $C_{n-s,q}(E) = 0$, имеют следующие метрические свойства (см. [12]):

а) если $ql < 2n$, $0 < \lambda < 2n - ql$ и $H_\lambda(E) = 0$, то $C_{q,l}(E) = 0$;
б) если $ql < 2n$, $2n - ql < \lambda$ и $H_\lambda(E) > 0$, то $C_{q,l}(E) > 0$;
в) если $ql = 2n$, $\varphi(r) = |\ln r|^{1-q}$, $q > 1$ и $H_\varphi(E) < \infty$, то $C_{q,l}(E) = 0$;
г) если $ql = 2n$, $\lambda > 0$ и $H_\lambda(E) > 0$, то $C_{q,l}(E) > 0$.

Из а), б), в) и г) следует, что размерность множества нулевой $C_{q,l}$-емкости равна $2n - ql$.

7. УСТРАНИМЫЕ ОСОБЕННОСТИ α-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Определение 7.1. Множество $E \subset D$ называется *α-полярным* множеством в области D, если существует α-субгармоническая в D функция $u(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, такая, что $u \not\equiv -\infty$ и $u(z)\big|_E = -\infty$.

Теорема 7.1. *Пусть E — компактное подмножество области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$. Множество E устранимо для всех α-субгармонических в $D \backslash E$, локально ограниченных сверху в D функций тогда и только тогда, когда E α-полярно в D.*

Доказательство. Необходимость. Предположим обратное: пусть существует не α-полярный компакт E, который устраним для всех α-субгармонических в $D\backslash E$ и локально ограниченных сверху в D функций. Тогда существует положительная мера μ с носителем на E такая, что потенциал

$$u(z) = -\int\limits_E K_\alpha(z,w)d\mu$$

является ограниченным сверху и α-(суб)гармоническим вне E (см. [7]). Но эта функция не является всюду α-субгармонической, т. е. компакт E не является устранимым. Мы пришли к противоречию, которое указывает на то, что устранимое особое множество E всегда должно быть α-полярным.

Достаточность. Сначала для каждого $z \in E \cap D$ положим $u(z) = \overline{\lim\limits_{\substack{\xi\to z\\ \xi\notin E}}}\, u(\xi)$. Ясно, что при таком определении на множестве E функция $u(z)$ становится полунепрерывной сверху функцией в D. Теперь покажем, что для произвольного шара $B = B(z^0, r) \Subset D$ имеет место неравенство

$$u(z) \leqslant \int\limits_{\partial B} P_\alpha(z,w)u(w)d\sigma(w) \quad \forall z \in B. \tag{7.1}$$

Так как множество E α-полярное, оно имеет нулевую $(2n-1)$-мерную меру. Следовательно, значение интеграла Пуассона (7.1) не зависит от значений функции $u(w)$, $w \in \partial B \cap E$.

Фиксируем α-субгармоническую функцию $\omega(z), z \in D$, такую, что $\omega(z) \not\equiv -\infty$, $\omega(z)|_E = -\infty$. Положим $\tilde{E} = \{z \in D:\ \omega(z) = -\infty\}$, $\tilde{E} \supset E$. Без ограничения общности считаем, что $\omega(z) < 0$ в заданном шаре $B \Subset D$.

И наконец, построим на сфере ∂B последовательность непрерывных функций $u_j(\xi)$, такую, что $u_j(\xi) \geqslant u_{j+1}(\xi),\ \ u_j(\xi) \downarrow u(\xi)$.

Рассмотрим функцию

$$V_\varepsilon^{(j)}(z) = u(z) + \varepsilon\omega(z) - \vartheta_j(z),\ \ \varepsilon > 0,\ \ z \in B,$$

где

$$\vartheta_j(z) = \int\limits_{\partial B} P_\alpha(z,\xi)u_j(\xi)d\sigma(\xi), \tag{7.2}$$

Ясно, что функция $V_\varepsilon^{(j)}(z)$ является α-субгармонической вне E, и так как $V_\varepsilon^{(j)}(z)\Big|_E = -\infty$, то из определения 5.1 $V_\varepsilon^{(j)}(z)$ является α-субгармонической и в точках E, т. е. $V_\varepsilon^{(j)}(z) \in \alpha - sh\,(B)$. Кроме того, во всех точках $\psi \in \partial B(z^0, r)$ выполняется неравенство

$$V_\varepsilon^{(j)}(\xi) \leqslant u(\xi) - \vartheta_j(\xi) \leqslant u_j(\xi) - \vartheta_j(\xi) \leqslant 0.$$

Следовательно, $V_\varepsilon^{(j)}(z) \leqslant 0$ в шаре B, т. е. $u(z) + \varepsilon\omega(z) \leqslant \vartheta_j(z),\ \ z \in B$. Для точек $z \notin \tilde{E}$, устремляя ε к нулю, заключаем, что $u(\xi) \leqslant \vartheta_j(\xi)$. Согласно полунепрерывности $u(z)$ и непрерывности $\vartheta_j(z)$, это неравенство остается верным для всех точек $\tilde{E} \supset E$. Наконец, при $j \to +\infty$ получим неравенство (7.1). □

Теорема 7.2. *Пусть E — компактное подмножество области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$. Множество E устранимо для всех α-субгармонических в $D\backslash E$ функций $u(z)$ из класса $L^p_{loc}(D)$, $\dfrac{2n}{2n-2} \leqslant p < +\infty$, тогда и только тогда, когда емкость $C_{q,2}(E) = 0$, $q = \dfrac{p}{p-1}$.*

Теорема 7.3. *Пусть E — компактное подмножество области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$. Множество E устранимо для всех α-субгармонических в $D\backslash E$ функций $u(z)$ из класса $L^{1,p}_{loc}(D)$, $\dfrac{2n}{2n-1} \leqslant p < +\infty$, тогда и только тогда, когда емкость $C_{q,1}(E) = 0$, $q = \dfrac{p}{p-1}$.*

Доказательство теоремы 7.2. *Необходимость.* Предположим противное, что существует компактное множество E, которое устранимо для всех α-субгармонических в $D\backslash E$ функций из класса

$L^p_{loc}(D)$, $\dfrac{2n}{2n-2} \leqslant p < +\infty$, причем $C_{q,2}(E) > 0$, $q = \dfrac{p}{p-1}$. Тогда по определению $C_{q,2}$ емкости существует положительная борелевская мера с носителем на E такая, что $\mu(E) > 0$ и потенциал

$$U^\mu(z) = \int \frac{d\mu(w)}{|z-w|^{2n-2}}$$

при $\dfrac{2n}{2n-2} \leqslant p < +\infty$ принадлежит классу $L^p_{loc}(D)$. Отсюда согласно оценке (3.1) получим, что α-потенциал

$$U^\mu_\alpha(z) = -\int K_\alpha(z,w)\, d\mu(w)$$

также принадлежит классу $L^p_{loc}(D)$, $\dfrac{2n}{2n-2} \leqslant p < +\infty$. Кроме того, α-потенциал $U^\mu_\alpha(z)$ является α-гармонической функцией в $D \backslash E$, но не является α-субгармонической, т. е. E не является устранимой. Это противоречие доказывает необходимость условия $C_{q,2}(E) = 0$.

Достаточность. Доказательство достаточности условия $C_{q,2}(E) = 0$ основывается на следующей лемме из работы В. Г. Мазья [11].

Лемма 7.1. *Пусть E — компактное подмножество области $D \subset \mathbb{R}^n$ ($D \subset \mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$), и l — натуральное число. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1. $C_{q,l}(E) = 0$;
2. *Множество основных функций $F(D\backslash E)$ плотно на множестве основных функций $F(D)$ по норме L^l_q.*

Предположим теперь, что $C_{q,2}(E) = 0$ и $u(z)$ — α-субгармоническая в $D\backslash E$ функция из класса $L^p_{loc}(D)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Рассмотрим в D функцию $\tilde{u}(z)$ такую, что

$$\tilde{u}(z) = \begin{cases} u(z) & \text{при} \quad z \in D\backslash E, \\ \overline{\lim\limits_{\substack{\xi\to z \\ \xi\notin E}}}\, u(z) & \text{при} \quad z \in E. \end{cases}$$

Покажем, что $\tilde{u}(z)$ является α-субгармоническим продолжением функции $u(z)$ на всем D.

Пусть $\psi(z)$ — положительная основная функция с носителям на D, а $\varphi_k(z)$ — последовательность положительных основных функций с носителем на $D\backslash E$, сходящаяся к $\psi(z)$ по норме L^2_q. Существование последовательности $\varphi_k(z)$ следует из леммы 7.1. Тогда имеет место неравенство

$$\left| \int\limits_D \tilde{u}(z)\, (dd^c(\psi(z) - \varphi_k(z))) \wedge \alpha \right| \leqslant c \cdot \left(\int\limits_{\mathrm{supp}\psi} |\tilde{u}(z)|^p\, dV \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \|\psi(z) - \varphi_k(z)\|_{L^2_q},$$

где $c = const$. Из этого неравенства следует, что для любой положительной основной функции $\psi(z) \in F(D)$ имеет место

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{D\backslash E} \tilde{u}(z)\, (dd^c\varphi_k(z)) \wedge \alpha = \int\limits_D \tilde{u}(z)\, (dd^c\psi(z)) \wedge \alpha \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что функция $\tilde{u}(z)$ α-субгармоническая в D. $\square$

Следствие 7.1. *Пусть E — множество из области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$. Всякая α-гармоническая в $D\backslash E$ функция $u(z)$ из класса $L^p_{loc}(D)$, $\dfrac{2n}{2n-2} \leqslant p < +\infty$, α-гармонически продолжается в D тогда и только тогда, когда емкость $C_{q,2}(E) = 0$, $q = \dfrac{p}{p-1}$.*

Доказательство теоремы 7.3. *Необходимость.* Предположим, что существует компактное множество E, которое устранимо для класса α-субгармонических в $D\backslash E$ функций из класса $L^{1,p}_{loc}(D)$,

$\dfrac{2n}{2n-1} \leqslant p < +\infty$ и $C_{q,1}(E) > 0$, $q = \dfrac{p}{p-1}$. Тогда по определению емкости $C_{q,1}$ емкости существует положительная борелевская мера с носителем на E такая, что $\mu(E) > 0$ и потенциал

$$U^{\mu}(z) = \int \frac{d\mu(w)}{|z-w|^{2n-1}}$$

при $\dfrac{2n}{2n-1} \leqslant p < +\infty$ принадлежит классу $L^{1,p}_{loc}(D)$. Отсюда в силу оценки

$$\left|\frac{\partial K_{\alpha}(z,w)}{\partial z_j}\right| \leqslant \frac{const}{|z-w|^{2n-1}}, \quad j = \overline{1,n},$$

$z, w \in \mathbb{C}^n$ (см. [4]), следует, что α-потенциал

$$U^{\mu}_{\alpha}(z) = -\int K_{\alpha}(z,w)\, d\mu$$

также принадлежит классу $L^{1,p}_{loc}(D)$, $\dfrac{2n}{2n-1} \leqslant p < +\infty$. Кроме того, α-потенциал $U^{\mu}_{\alpha}(z)$ является α-гармоническим в $D\backslash E$, но не является α-субгармоническим, т. е. E не является устранимым. Это противоречие доказывает необходимость условия $C_{q,1}(E) = 0$.

Достаточность. Предположим теперь, что $C_{q,1}(E) = 0$ и $u(z)$ — α-субгармоническая в $D\backslash E$ функция из класса $L^{1,p}_{loc}(D)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Рассмотрим в D функцию $\tilde{u}(z)$ такую, что

$$\tilde{u}(z) = \begin{cases} u(z) & \text{при} \quad z \in D\backslash E, \\ \varlimsup\limits_{\substack{\xi \to z \\ \xi \notin E}} u(z) & \text{при} \quad z \in E. \end{cases}$$

Покажем, что $\tilde{u}(z)$ является α-субгармоническим продолжением функции $u(z)$ на всем D. Согласно лемме 7.1, мы берем произвольную положительную функцию $\psi(z) \in F(D)$ и последовательность положительных функций $\varphi_k(z) \in F(D\backslash E)$, сходящуюся к $\psi(z)$ по норме L^1_q. Тогда имеет место неравенство

$$\left|\int\limits_D \tilde{u}(z)\,(dd^c(\psi(z) - \varphi_k(z))) \wedge \alpha\right| \leqslant c \cdot \|\tilde{u}(z)\|_{L^{1,p}_{loc}(D)} \cdot \|\psi(z) - \varphi_k(z)\|_{L^1_q(D)},$$

где $c = const$. Из этого неравенства следует, что для любой положительной основной функции $\psi(z) \in F(D)$

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{D\backslash E} \tilde{u}(z)\,(dd^c\varphi_k(z)) \wedge \alpha = \int\limits_D \tilde{u}(z)\,(dd^c\psi(z)) \wedge \alpha \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что функция $\tilde{u}(z)$ — α-субгармоническая в D. □

Следствие 7.2. *Пусть E — компактное подмножество области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$. Множество E устранимо для всех α-гармонических в $D\backslash E$ функций $u(z)$ из класса $L^{1,p}_{loc}(D)$, $\dfrac{2n}{2n-1} \leqslant p < +\infty$, тогда и только тогда, когда емкость $C_{q,1}(E) = 0$, $q = \dfrac{p}{p-1}$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдуллаев Б., Имомкулов С.* Устранимые особенности субгармонических функций из класса L_p и L^1_p// Узб. мат. ж. — 1997. — № 4. — С. 10–14.
2. *Абдуллаев Б., Садуллаев А.* Теория потенциалов в классе m-субгармонических функций // Тр. МИАН. — 2012. — *279*. — С. 166–192.
3. *Абдуллаев Б. И., Ярметов Ж. Р.* Об особых множествах субрешений эллиптических операторов// Вестн. Крас. ГУ. — 2006. — № 9. — С. 74–80.
4. *Алимов Ш. А.* Дробные степени эллиптических операторов и изоморфизм классов дифференцируемых функций// Дифф. уравн. — 1972. — *8*, № 9. — С. 1609–1626.

5. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1966.
6. *Ваисова М.* Теория потенциала в классе α-субгармонических функций// Узб. мат. ж. — 2016. — № 3. — С. 46–52.
7. *Ваисова М.* Емкость в классе α-субгармонических функций и ее свойства// Илм сарчашмалари. — 2018. — № 6. — С. 8–13.
8. *Долженко Е. П.* Об особых точках непрерывных гармонических функций// Изв. АН СССР. — 1964. — *28*, № 6. — С. 1251–1270.
9. *Карлесон Л.* Избранные проблемы теории исключительных множеств. — М.: Мир, 1971.
10. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. — М.: Наука, 1966.
11. *Мазья В. Г.* Классы множеств и мер, связанные с теоремами вложения// В сб.: «Теоремы вложения и их приложения». — М.: Наука, 1970. — С. 142–159.
12. *Мазья В. Г., Хавин В. П.* Нелинейная теория потенциала// Усп. мат. наук. — 1972. — *27*, № 6. — С. 67–138.
13. *Мельников М. С., Синанян С. О.* Вопросы теории приближений функций одного комплексного переменного// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. — 1975. — *4*. — С. 143–250.
14. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. — М.: ИЛ, 1957.
15. *Садуллаев А.* Плюрисубгармонические функции// Соврем. пробл. мат. Фундам. направл. — 1985. — *8*. — С. 65–111.
16. *Садуллаев А., Абдуллаев Б., Шарипов Р.* Устранимые особенности ограниченных сверху $m-sh$ функций// Узб. мат. ж. — 2016. — № 3. — С. 118–124.
17. *Садуллаев А., Ярметов Ж. Р.* Устранимые особенности субгармонических функций класса Lip_α// Мат. сб. — 1995. — *186*, № 1. — С. 131–148.
18. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. — М.: Мир, 1980.
19. *Cegrell U.* Sur les ensembles singuliers impropes des plurisubharmonic// C.R. Math. Acad. Sci. Paris. — 1975. — *281*. — С. 905–908.
20. *Chirka E. M.* On the removal of subharmonic singularities of plurisubharmonic functions// Ann. Polon. Math. — 2003. — *80*. — С. 113–116.
21. *Demailly J.-P.* Complex analytic and differential geometry. — Saint-Martin d'Héres: Universite de Grenoble I, 1997.
22. *Harve R., Polking J. C.* A notion of capacity which characterizes removable singularites// Trans. Am. Math. Soc. — 1968. — *169*. — С. 183–195.
23. *Littman W., Stampasshia G., Weinberger H. F.* Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (3). — 1963. — *17*. — С. 43–77.
24. *Riihentaus J.* A removability results for holomorphic functions of several complex variables// J. Basic Appl. Sci. — 2016. — *12*. — С. 50–52.
25. *Shapiro V. L.* Subharmonic functions and Hausdorff measure// J. Differ. Equ. — 1978. — *27*, № 1. — С. 28–45.

Б. И. Абдуллаев
Ургенчский государственный университет им. Аль-Хорезми, Ургенч, Узбекистан
E-mail: abakhrom1968@mail.ru

С. А. Имомкулов
Ургенчский государственный университет им. Аль-Хорезми, Ургенч, Узбекистан
E-mail: sevdiyor_i@mail.ru

Р. А. Шарипов
Ургенчский государственный университет им. Аль-Хорезми, Ургенч, Узбекистан
E-mail: sharipovr80@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-620-633 UDC 517.55

α-Subharmonic Functions

© 2021 **B. I. Abdullaev, S. A. Imomkulov, R. A. Sharipov**

Abstract. In this paper, we study the class of α-subharmonic functions. A number of important properties of α-subharmonic functions are proved, and an equivalent, more convenient definition of α-subharmonicity is given. The geometric structure of removable singularities for some classes of α-subharmonic functions is also described.

REFERENCES

1. B. Abdullaev and S. Imomkulov, "Ustranimye osobennosti subgarmonicheskikh funktsiy iz klassa L_p i L_p^1" [Removable singularities of subharmonic functions from the classes L_p and L_p^1], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 1997, No. 4, 10–14 (in Russian).
2. B. Abdullaev and A. Sadullaev, "Teoriya potentsialov v klasse m-cubgarmonicheskikh funktsiy" [Potential theory in the class of m-subharmonic functions], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2012, **279**, 166–192 (in Russian).
3. B. I. Abdullaev and Zh. R. Yarmetov, "Ob osobykh mnozhestvakh subresheniy ellipticheskikh operatorov" [On singular sets of subsolutions of elliptic operators], *Vestn. Kras. GU* [Bull. Kras. State Univ.], 2006, No. 9, 74–80 (in Russian).
4. Sh. A. Alimov, "Drobnye stepeni ellipticheskikh operatorov i izomorfizm klassov differentsiruemykh funktsiy" [Fractional powers of elliptic operators and isomorphism of classes of differentiable functions], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1972, **8**, No. 9, 1609–1626 (in Russian).
5. L. Bers, F. John, and M. Schechter, *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations], Mir, Moscow, 1966 (Russian translation).
6. M. Vaisova, "Teoriya potentsiala v klasse α-subgarmonicheskikh funktsiy" [Potential theory in the class of α-subharmonic functions], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 2016, No. 3, 46–52 (in Russian).
7. M. Vaisova, "Emkost' v klasse α-subgarmonicheskikh funktsiy i ee svoystva" [Capacity in the class of α-subharmonic functions and its properties], *Ilm sarchashmalari* [Sources of Knowledge], 2018, No. 6, 8–13 (in Russian).
8. E. P. Dolzhenko, "Ob osobykh tochkakh nepreryvnykh garmonicheskikh funktsiy" [On singular points of continuous harmonic functions], *Izv. AN CCSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1964, **28**, No. 6, 1251–1270 (in Russian).
9. L. Karleson, *Izbrannye problemy teorii isklyuchitel'nykh mnozhestv* [Selected Problems of Exceptional Sets], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
10. N. S. Landkof, *Osnovy sovremennoy teorii potentsiala* [Foundations of Modern Potential Theory], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
11. V. G. Maz'ya, "Klassy mnozhestv i mer, svyazannye s teoremami vlozheniya" [Classes of sets and measures related to embedding theorems], In: *Teoremy vlozheniya i ikh prilozheniya* [Embedding Theorems and Their Applications], Nauka, Moscow, 1970, pp. 142–159 (in Russian).
12. V. G. Maz'ya and V. P. Khavin, "Nelineynaya teoriya potentsiala" [Nonlinear potential theory], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1972, **27**, No. 6, 67–138 (in Russian).
13. M. S. Mel'nikov and S. O. Sinanyan, "Voprosy teorii priblizheniy funktsiy odnogo kompleksnogo peremennogo" [Questions of the theory of approximations of functions of one complex variable], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math.], 1975, **4**, 143–250 (in Russian).

14. K. Miranda, *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi ellipticheskogo tipa* [Partial Differential Equations of Elliptic Type], IL, Moscow, 1957 (in Russian).
15. A. Sadullaev, "Plyurisubgarmonicheskie funktsii" [Plurisubharmonic functions], *Sovrem. probl. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 1985, **8**, 65–111 (in Russian).
16. A. Sadullaev, B. Abdullaev, and R. Sharipov, "Ustranimye osobennosti ogranichennykh sverkhu $m-sh$ funktsiy" [Removable singularities of upper-bounded $m-sh$ functions], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 2016, No. 3, 118–124 (in Russian).
17. A. Sadullaev and Zh. R. Yarmetov, "Ustranimye osobennosti subgarmonicheskikh funktsiy klassa Lip_α" [Removable singularities of subharmonic functions of the class Lip_α], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1995, **186**, No. 1, 131–148 (in Russian).
18. W. Hayman and P. Kennedy, *Subgarmonicheskie funktsii* [Subharmonic Functions], Mir, Moscow, 1980 (Russian translation).
19. U. Cegrell, "Sur les ensembles singuliers impropes des plurisubharmonic," *C.R. Math. Acad. Sci. Paris*, 1975, **281**, 905–908.
20. E. M. Chirka, "On the removal of subharmonic singularities of plurisubharmonic functions," *Ann. Polon. Math.*, 2003, **80**, 113–116.
21. J.-P. Demailly, *Complex analytic and differential geometry*, Universite de Grenoble I, Saint-Martin d'Héres, 1997.
22. R. Harve and J. C. Polking, "A notion of capacity which characterizes removable singularites," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1968, **169**, 183–195.
23. W. Littman, G. Stampasshia, and H. F. Weinberger, "Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients," *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (3)*, 1963, **17**, 43–77.
24. J. Riihentaus, "A removability results for holomorphic functions of several complex variables," *J. Basic Appl. Sci.*, 2016, **12**, 50–52.
25. V. L. Shapiro, "Subharmonic functions and Hausdorff measure," *J. Differ. Equ.*, 1978, **27**, No. 1, 28–45.

B. I. Abdullaev
Urgench State University named after Al-Khorezmi, Urgench, Uzbekistan
E-mail: abakhrom1968@mail.ru

S. A. Imomkulov
Urgench State University named after Al-Khorezmi, Urgench, Uzbekistan
E-mail: sevdiyor_i@mail.ru

R. A. Sharipov
Urgench State University named after Al-Khorezmi, Urgench, Uzbekistan
E-mail: sharipovr80@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 4 (2021). С. 634–653
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-634-653 УДК 517.95

ОБОБЩЕННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ И СУММИРУЕМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ КРАТНЫХ РЯДОВ И ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ

© 2021 г. **Р. Р. АШУРОВ**

Аннотация. Хорошо известно, что гипотеза Лузина имеет положительное решение для одномерных тригонометрических рядов Фурье, но во многомерном случае она до сих пор не нашла своего подтверждения для сферических частичных сумм кратных рядов Фурье. Исторически прогресс в решении гипотезы Лузина был достигнут путем рассмотрения более простых проблем. В данной работе рассматриваются три из таких проблем для сферических частичных сумм: принцип обобщенной локализации, суммируемость почти всюду, почти всюду сходимость кратных рядов Фурье гладких функций. Приводится краткий обзор работ по этим направлениям и упоминаются нерешенные проблемы и формулируется новые задачи. Кроме того, в конце работы доказан новый результат о сходимости сферических сумм для функций из классов Соболева.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

1. Пусть $\mathbb{T}^N$ — N-мерный тор: $\mathbb{T}^N = (\pi, \pi]^N$, $N \geqslant 2$. Сферические частичные суммы ряда Фурье функции $f \in L_2(\mathbb{T}^N)$ определяются по формуле:

$$S_\lambda f(x) = \sum_{|n|^2<\lambda} f_n\, e^{inx}, \tag{1.1}$$

где $n \in \mathbb{Z}^N$, а коэффициенты Фурье $\{f_n\}$ имеют вид

$$f_n = (2\pi)^{-N} \int\limits_{\mathbb{T}^N} f(y) e^{-iny} dy.$$

Одной из классических проблем теории рядов Фурье является проблема поточечной сходимости $S_\lambda f(x)$ к f при $\lambda \to \infty$: для каких классов функций f частичные суммы $S_\lambda f(x)$ сходятся к f в заданной точке, почти всюду, во всех точках или равномерно.

В данной работе будем изучать проблему сходимости почти всюду рядов $S_\lambda f(x)$, которая является одной из самых привлекательных задач в метрической теории функций. Естественными классами для изучения сходимости почти всюду являются пространства L_p, $p \geqslant 1$.

Следует отметить, что даже в простейшем случае $N = 1$ и $p = 2$ известная гипотеза Н. Н. Лузина о сходимости почти всюду тригонометрических рядов Фурье функций из $L_2(\mathbb{T}^1)$, опубликованная еще в 1915 году, решена только спустя более 50 лет, в 1966 году, Карлесоном [25]. Усовершенствуя метод Карлесона, немецкий математик Хант [28] распространил этот результат для функций из классов L_p, $p > 1$. Если же $p = 1$, то это уже неверно в силу знаменитого примера функции из класса $L_1(\mathbb{T}^1)$ с расходящимися всюду в $\mathbb{T}^1$ рядом Фурье, построенного Колмогоровым в 1922 году (см. [1]).

Для многомерных рядов Фурье справедливость результата Карлесона—Ханта зависит от вида частичных сумм. Так, для квадратных частичных сумм N-кратного ряда Фурье Шелин [34] распространил теорему Ханта. Однако, как показал Фефферман [26], сходимость по прямоугольникам приводит к совершенно новым эффектам: существует непрерывная функция $f(x_1, x_2)$, ряд Фурье которой неограниченно расходится по прямоугольникам в каждой внутренней точке квадрата $\mathbb{T}^2$.

Что касается сферических частичных сумм S_λ, то вопрос о справедливости гипотезы Лузина остается открытым до настоящего времени.

Исторически прогресс в решении гипотезы Лузина был достигнут путем рассмотрения более простых проблем. Например, более простую проблему получим, если наложить на разлагаемую функцию f некоторые дополнительные условия, которые упрощают исследования сходимости почти всюду. В качестве таких условий можно взять обращение в нуль функции f в некоторой подобласти $G \subset \mathbb{T}^N$ и исследовать сходимость почти всюду сферических сумм в G (*принцип обобщенной локализации*). Или же, можно изучать сходимость $S_\lambda f(x)$ не для функций из всего класса L_p, а для функций из подпространства $L_p(\mathbb{T}^N)$, которые обладают некоторой гладкостью. Как альтернативный способ упрощения ситуации можно рассматривать исследование суммируемости S_λ с некоторыми методами суммирования. Наиболее удобным методом суммирования в данном случае является метод Рисса.

Исследованию этих проблем для сферических сумм как кратных рядов, так и кратных интегралов (определение см. ниже) Фурье посвящены многочисленные результаты специалистов. В настоящей работе приведем краткий обзор этих результатов и сформулируем некоторые нерешенные проблемы. Кроме того, в разделе 4 доказан новый результат о сходимости почти всюду сферических сумм $S_\lambda f(x)$ для функций из класса Соболева.

Следует также отметить, что за пределами нашего изложения останется ряд важных работ, посвященные к другим близким направлениям, а именно, к исследованию сходимости почти всюду рядов Фурье радиальных функций, а так же изучению сходимости лакунарных рядов.

Проблемам сходимости и суммируемости кратных рядов и интегралов Фурье (а также более общих разложений по собственным функциям и спектральных разложений эллиптических операторов) посвящен ряд обзорных статьей (см., например, [1, 2]) и книг специалистов (см., например, [27, 39]). В статье Алимова и др. [1] содержится обзор работ, опубликованных до 1989 года. Здесь наряду с формулировками известных и значимых результатов в наиболее интересных направлениях развития теории кратных рядов Фурье приводятся разъяснения принципиальных моментов и идеи доказательств. Работа Алимова, Ильина и Никишина [2], опубликованная в 1976 году, посвящена обзору работ как по кратным тригонометрическим рядам, так и по спектральным разложениям, отвечающих самосопряженным эллиптическим дифференциальным операторам. Отметим, что в статьях [2, 31, 38] приведены нерешенные проблемы и сформулировано значительное число новых задач (только некоторые из них к настоящему времени нашли свое решение).

2. Изучение вопросов сходимости рядов Фурье имеет также важное прикладное значение. Если рассмотреть оператор Лапласа $-\Delta$ на торе $\mathbb{T}^N$ с периодическими граничными условиями, то его собственные функции имеют вид $(2\pi)^{-N/2}e^{inx}$, а собственные числа равны $|n|^2$. При обосновании метода Фурье, скажем, для волнового уравнения естественно возникает задача о разложении произвольной заданной в области $\mathbb{T}^N$ функции f в ряд Фурье по системе указанных собственных функций. Такой ряд имеет вид

$$S_\lambda f(x) = \sum_{|n|^2 < \lambda} f_n e^{inx},$$

что совпадает со сферическими частичными суммами кратных рядов Фурье.

Если же оператор Лапласа заменить на произвольное однородное эллиптическое дифференциальное выражение порядка m с вещественными коэффициентами $A(D) = \sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha$, где

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ — мультииндекс, $D_j = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_N^{\alpha_N}$, и рассмотреть периодические граничные условия, то собственные функции остаются теми же, а собственные числа имеют вид $A(n)$, что проверяется непосредственным вычислением. Напомним, дифференциальное выражение $A(D)$ называется эллиптическим, если соответствующий полином $A(\xi) = \sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha$ является эллиптическим, т. е. $A(\xi) > 0$ для всех $\xi \neq 0$.

В рассматриваемом случае ряд Фурье по собственным функциям определяет некоторый способ суммирования кратного тригонометрического ряда Фурье функции f, который записывается в виде

$$S_\lambda(A)f(x) = \sum_{A(n)<\lambda} f_n e^{inx}. \tag{1.2}$$

Пусть теперь оператор A с областью определения $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ действует в $L_2(\mathbb{R}^N)$ по формуле $Au = A(D)u$. Тогда, используя преобразование Фурье, можно показать (см. [1]), что существует единственное самосопряженное расширение $\hat{A}$ этого оператора, разложение единицы которого имеет вид

$$E_\lambda(A)f(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int\limits_{A(\xi)<\lambda} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi. \tag{1.3}$$

Здесь преобразование Фурье функции $f \in L_2(\mathbb{R}^N)$ определено посредством равенства

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-ix\xi} dx,$$

при этом интеграл по теореме Планшереля сходится в $L_2(\mathbb{R}^N)$.

Отметим, что разложение (1.3) определяет, по аналогии с (1.2), некоторый способ суммирования кратного интеграла Фурье функции f. В частности, оператору Лапласа $A(D) = -\Delta$ отвечает способ суммирования по сферам:

$$E_\lambda f(x) \equiv E_\lambda(-\Delta)f(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int\limits_{|\xi|^2<\lambda} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi. \tag{1.4}$$

2. Принцип обобщенной локализации

Классический принцип локализации Римана утверждает: если функция интегрируема и равна нулю на некотором интервале, то ее ряд Фурье сходится к нулю равномерно на любом компакте из этого интервала. Ситуация меняется в случае функций двух или многих переменных. В этом случае существуют примеры функций с достаточно высокой гладкостью, для которых классический принцип локализации не имеет места (см. [1]). В связи с этим В. А. Ильин в 1968 году ввел понятие обобщенной локализации [15]. Напомним это определение: если для любой функции f, принадлежащей к некоторому классу $L_p(\mathbb{T}^N)$ и равной нулю в области $G \subset \mathbb{T}^N$, сферические частичные суммы кратных рядов Фурье $S_\lambda f(x)$ сходятся к нулю почти всюду в G, то будем говорить, что в классе $L_p(\mathbb{T}^N)$ есть *обобщенная локализация*. Отметим, что в отличии от классической локализации, для справедливости обобщенной локализации достаточно сходимости $S_\lambda f(x)$ к нулю почти всюду в G.

Понятие обобщенной локализации для кратных интегралов Фурье $E_\lambda f(x)$ вводится совершенно аналогично.

В силу определения коэффициентов Фурье имеем

$$S_\lambda f(x) = \int\limits_{\mathbb{T}^N} \theta(x-y,\lambda) f(y) dy,$$

где ядро представимо в виде

$$\theta(x,\lambda) = (2\pi)^{-N} \sum_{|n|^2<\lambda} e^{inx}.$$

Для того, чтобы изучить сходимость $S_\lambda f(x)$ при $\lambda \to \infty$, необходимо исследовать асимптотическое поведение $\theta(x,\lambda)$ для больших λ, что представляет собой далеко не простую задачу. Если мы заменим сумму на интеграл, то этот интеграл вычисляется явно:

$$e(x,\lambda) = (2\pi)^{-N} \int\limits_{|\xi|^2<\lambda} e^{ix\xi} d\xi = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \lambda^{\frac{N}{2}} \frac{J_{\frac{N}{2}}(|x|\sqrt{\lambda})}{(|x|\sqrt{\lambda})^{N/2}}, \tag{2.1}$$

где $J_\nu(t)$ — функция Бесселя порядка ν. Но с другой стороны, эта функция $e(x,\lambda)$ является ядром интегрального оператора

$$E_\lambda f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} e(x-y,\lambda) f(y) dy = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int\limits_{|\xi|^2<\lambda} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi, \tag{2.2}$$

который совпадает со сферической частичной суммой кратного интеграла Фурье функции $f \in L_2(\mathbb{R}^N)$.

Очевидно, при $\lambda \to \infty$ ядро $e(x-y,\lambda)$ ведет себя лучше всего вне диагонала $|x-y| > \delta > 0$. При исследовании принципа локализации мы как раз находимся в этой области, вследствие чего изучение принципа локализации кратных рядов или интегралов Фурье становится более простой задачей, чем исследование их сходимости.

Принцип обобщенной локализации в классах $L_p(\mathbb{R}^N)$ для сферических частичных интегралов исследован многими авторами (Шелин П., Карбери А., Сория Ф., Рубио де Франсиа Ж. Л., Вега Л., Бастис А. и др., см. [12, 13, 17, 18, 20–24, 35]).

В частности, в фундаментальной работе [23] доказана следующая теорема.

Теорема 2.1 (Карбери и Сория (1988)). *Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $2 \leqslant p < 2N/(N-1)$ и $f = 0$ в открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Тогда*

$$\lim_{\lambda\to\infty} E_\lambda f(x) = 0 \tag{2.3}$$

почти всюду в Ω.

Ранее это утверждение для функций $f \in L_2(\mathbb{R}^N)$ с компактным носителем было получено Шелином [34].

Метод, предложенный в работе [23], практически не зависит от вида частичных сумм. Так, в работе [17] с помощью этого метода доказан следующий результат.

Теорема 2.2. *Пусть $A(\xi)$ — произвольный однородный эллиптический полином. Тогда, если $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $2 \leqslant p < 2N/(N-1)$ и $f = 0$ в открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, то $\lim\limits_{\lambda\to\infty} E_\lambda(A) f(x) = 0$ почти всюду в Ω.*

Таким образом, для частичных интегралов $E_\lambda(A)f(x)$, определенных посредством совершенно произвольного эллиптического полинома, справедлив тот же результат, что и для сферических сумм $E_\lambda f(x)$. Следует отметить, что в отличие от обобщенной локализации, условия, обеспечивающие классическую локализацию Римана для $E_\lambda(A)f(x)$, существенно зависят от геометрии области $\Omega_A = \{\xi \in \mathbb{R}^N : A(\xi) < 1\}$, а именно, от числа отличных от нуля главных кривизн поверхности $\partial\Omega_A = \{\xi \in \mathbb{R}^N : A(\xi) = 1\}$ (см. [3, 5]).

Что касается справедливости обобщенной локализации в классах $L_p(\mathbb{R}^N)$, когда p находится вне отрезка $[2, 2N/(N-1))$, известно только следующее: если $1 \leqslant p < 2$ то, как доказал А. Бастис [13], локализация исчезает как для кратных рядов, так и для кратных интегралов Фурье. Поскольку полученные результаты формулируются одинаково, мы приведем их лишь для кратных рядов Фурье.

Теорема 2.3. *Пусть $1 \leqslant p < 2$. Тогда существует функция $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$ такая, что на некотором множестве с положительной мерой, содержащейся в $\mathbb{T}^N \setminus \operatorname{supp} f$, имеем*

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}} |S_\lambda f(x)| = +\infty.$$

Пусть теперь порядок интегрируемости p удовлетворяет условию $p \geqslant 2N/(N-1)$. В этом случае мы можем только утверждать отсутствие сходимости почти всюду сферических частичных сумм кратных интегралов Фурье. Это вытекает из следующего наблюдения, высказанного Ж. Рубио де Франсия [23].

Предположим, что $E_\lambda f$ сходится почти всюду для всех $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$. Тогда, в частности, $E_1 f$ должно быть по крайней мере распределением умеренного роста S' и в силу дуальности, $E_1 : S \to L_q(\mathbb{R}^N)$, $q = p/(p-1)$. Следовательно, если выбрать f так, чтобы $\hat{f} = 1$ в шаре $\{\xi \in \mathbb{R}^N : |\xi| \leqslant 1\}$, то необходимым условием выполнения нашего предположения является включение: $E_1 f(x) = e(x, 1) \in L_q(\mathbb{R}^N)$. Из явного вида $e(x, 1)$ (см. (2.1)) и асимптотики функции Бесселя ясно, что это возможно только при $q > 2N/(N+1)$, т. е. при $p < 2N/(N-1)$.

Итак, если $p \geqslant 2N/(N-1)$, то для функций из класса $L_p(\mathbb{R}^N)$ отсутствует сходимость почти всюду кратных интегралов Фурье. В связи с этим можно сформулировать следующую задачу.

Верно ли, что и принцип обобщенной локализации отсутствует для сферических частичных сумм $E_\lambda f$ в классах $L_p(\mathbb{R}^N)$, если порядок интегрируемости p удовлетворяет условию $p \geqslant 2N/(N-1)$?

Что касается сходимости почти всюду кратных интегралов Фурье, то вопрос остается открытым для функций из классов $L_p(\mathbb{R}^N)$ при $2 \leqslant p < 2N/(N-1)$ (напомним, что при $1 \leqslant p < 2$ отсутствует даже обобщенная локализация).

Как было отмечено выше, прямоугольные частичные суммы кратных рядов Фурье непрерывных функций расходятся всюду. Для справедливости даже классической локализации Римана требуется, чтобы разлагаемая функция была достаточно гладкой (см. [1]). Поэтому изучение обобщенной локализации для прямоугольных частичных сумм является актуальным. Исследованию этого вопроса посвящен ряд работ И. Л. Блошанского (см. [1]). В работе [14] автору удалось доказать, что обобщенная локализация для прямоугольных частичных сумм относится к тем характеристикам, которыми различаются двух- и трехкратные ряды Фурье. Именно, доказано, что обобщенная локализация в классах $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, имеет место при $N = 2$ и не имеет места при $N \geqslant 3$.

Обобщенный принцип локализации В. А. Ильина изучен также и для многомерных сферически симметричных непрерывных всплеск-разложений [10]. Следует отметить, что поточечная сходимость одномерных и многомерных непрерывных всплеск-разложений изучена многими авторами (подробный обзор работ можно найти в статье Р. Ашурова и А. Бутаева [19]). При этом, для того, чтобы обеспечить сходимость почти всюду многомерных (и даже одномерных) сферически симметричных непрерывных всплеск-разложений, необходимо требовать достаточно быстрое убывание на бесконечности соответствующих всплесков. Однако, как показано в указанной выше работе [10], обобщенный принцип локализации справедлив для совершенно произвольных всплесков в тех же классах $L_p(\mathbb{R}^N)$, что и в теореме Карбери и Сория.

Следует также отметить, что в работах [18, 20] изучены разложения распределений с компактными носителями в кратные интегралы Фурье. Рассмотрены как сферические, так и частичные интегралы, определенные посредством произвольных однородных эллиптических полиномов. Найдены необходимые и достаточные условия на разлагаемое распределение, которые обеспечат справедливость принципа обобщенной локализации.

Возвращаясь к вопросу об обобщенной локализации для сферических частичных сумм кратных рядов Фурье, отметим, что еще в 1976 году в работе [2] был поставлен вопрос о ее справедливости в классе $L_2(\mathbb{T}^2)$ для двукратных рядов. Недавно, в работе [16] (см. также [8]) автором этой статьи дан положительный ответ на этот вопрос в случае N-кратных рядов Фурье, т. е. доказано следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Пусть $f \in L_2(\mathbb{T}^N)$ и $f = 0$ на некотором множестве $\Omega \subset \mathbb{T}^N$. Тогда равенство $\lim\limits_{\lambda\to\infty} S_\lambda f(x) = 0$ имеет место почти всюду в Ω.*

Таким образом, проблема обобщенной локализации для S_λ полностью решена в классах $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p \geqslant 1$: если $p \geqslant 2$, то имеет место локализация, а если $p < 2$, то, как показано в теореме 2.3, локализация отсутствует.

Доказательство этой теоремы основано на методе, предложенном в работе [23], где авторы рассматривали функции из классов $L_p(\mathbb{R}^N)$. Если же носитель функции является ограниченным множеством, то данный метод сильно упрощается. Покажем это на примере доказательства упомянутой выше теоремы Шелина.

Теорема 2.5. *Пусть $f \in L_2(\mathbb{R}^N)$ — функция с компактным носителем. Тогда равенство $\lim\limits_{\lambda\to\infty} E_\lambda f(x) = 0$ имеет место почти всюду в $\mathbb{R}^N \setminus \operatorname{supp} f$.*

Нам удобно обозначить $E'_\lambda f(x) \equiv E_{\lambda^2} f(x)$ и изучить сходимость $E'_\lambda f(x)$ при $\lambda \to \infty$. Хорошо известно (см. например, [1]), что для функций $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ достаточным условием сходимости почти всюду $E'_\lambda f(x)$ является ограниченность в $L_p(\mathbb{R}^N)$ максимального оператора $E_\star f(x) = \sup\limits_{\lambda>0} |E'_\lambda f(x)|$.

Кроме того, для доказательства теоремы достаточно предположить, что разлагаемая функция обращается в нуль в некотором шаре $\{|x| < R\} \subset \mathbb{R}^N$ и доказать сходимость $\lim\limits_{\lambda\to\infty} E'_\lambda f(x) = 0$ почти всюду внутри этого шара.

Следовательно, утверждение теоремы является следствием оценки

$$\int\limits_{|x|\leqslant r} |E_\star f(x)|^2 dx \leqslant C \int\limits_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2 dx, \tag{2.4}$$

справедливой для любого $r < R$ с некоторой константой $C = C(R, r)$.

Ключевым моментом доказательства является замена ядра $e(x, \lambda^2)$ интегрального оператора $E_{\lambda^2} f(x)$ на функцию $e_\lambda(x) = e(x, \lambda^2)\chi(x)$ с некоторой радиальной функцией $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$:

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & |x| < R - r, \\ 1, & 2(R - r) < |x| \leqslant A, \end{cases}$$

где A — достаточно большое число. При этом для всех $|x| \leqslant r$ имеет место равенство

$$E'_\lambda f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} e_\lambda(x - y) f(y) dy.$$

Следует особо отметить, что именно для выполнения этого равенства нам необходима ограниченность носителя функции f. По этой же причине аналогичную замену ядра можно произвести и для интегрального оператора $S_\lambda f(x)$.

Подчеркнем важность рассмотрения ядра $e_\lambda(x)$ вместо ядра $e(x, \lambda^2)$. Преобразование Фурье функции $e(x, \lambda^2)$ имеет вид

$$\hat{e}(\eta, \lambda^2) = \begin{cases} 1, & \lambda > |\eta|, \\ 0, & \lambda \leqslant |\eta|. \end{cases}$$

Эта функция не убывает при $\lambda \to \infty$, в то время как функция $\hat{e}_\lambda(\eta)$ имеет необходимое для нашего рассуждения убывание на бесконечности (см. оценку (2.6)).

Для доказательства оценки (2.4) достаточно установить справедливость неравенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \sup_{\lambda>0} |e_\lambda * f|^2 \, dx \leqslant C \int\limits_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2 dx. \tag{2.5}$$

При этом нам необходима следующая оценка для преобразования Фурье $\widehat{e}_\lambda(\eta)$ функции $e_\lambda(x)$, доказанная в работе [23].

Лемма 2.1. *Для любого $l \in \mathbb{N}$ существует константа C_l, зависящая от l, r и R, такая, что для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\eta \in \mathbb{R}^N$ справедлива оценка*

$$\left|\frac{d^j}{d\lambda^j} \widehat{e}_\lambda(\eta)\right| \leqslant \frac{C_l}{(1 + ||\eta| - \lambda|)^l}, \quad j = 0, 1. \tag{2.6}$$

Доказательство. Докажем оценку (2.6) при $j = 0$; для $j = 1$ она доказывается аналогично.

По определению преобразования Фурье имеем

$$\widehat{e}_\lambda(\eta) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\int\limits_{|\xi|<\lambda} e^{ix\xi} d\xi \chi(x) \right) e^{-ix\eta} dx = (2\pi)^{-N} \int\limits_{|\xi|<\lambda} (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \chi(x) e^{-ix(\eta-\xi)} dx d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-N} \int\limits_{|\xi|<\lambda} \widehat{\chi}(\eta - \xi) d\xi = (-2\pi)^{-N} \int\limits_{|\eta-\xi|<\lambda} \widehat{\chi}(\xi) d\xi.$$

Пусть сначала $|\eta| < \lambda$. Так как $\chi(0) = 0$ и для любого j справедлива оценка $|\widehat{\chi}(\xi)| \leqslant C_j(1+|\xi|)^{-j}$, то

$$|\widehat{e}_\lambda(\eta)| = |-(-2\pi)^{-N} \int\limits_{|\eta-\xi|\geqslant\lambda} \widehat{\chi}(\xi)d\xi| \leqslant C_j \int\limits_{|\eta-\xi|\geqslant\lambda} (1+|\xi|)^{-j}d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C_j \int\limits_{|\xi|>\lambda-|\eta|} (1+|\xi|)^{-j}d\xi \leqslant \frac{C_l}{(1+||\eta|-\lambda|)^l}.$$

Аналогично, если $|\eta| > \lambda$, то

$$|\widehat{e}_\lambda(\eta)| = |(-2\pi)^{-N} \int\limits_{|\eta-\xi|<\lambda} \widehat{\chi}(\xi)d\xi| \leqslant C_j \int\limits_{|\xi|>|\eta|-\lambda} (1+|\xi|)^{-j}d\xi \leqslant \frac{C_l}{(1+||\eta|-\lambda|)^l}.$$

Следовательно, лемма 2.1 доказана. □

Интегрируя (2.6) по λ, получим равномерную по $\eta \in \mathbb{R}^N$ оценку

$$\int\limits_0^\infty |\frac{d^j}{d\lambda^j}\widehat{e}_\lambda(\eta)|^2 d\lambda < C, \quad j = 0, 1. \tag{2.7}$$

Доказательство оценки (2.5) завершается следующим образом. Так как

$$[e_\lambda * f]^2 = 2\int\limits_0^\lambda (e_t * f)\frac{d}{dt}(e_t * f)dt$$

и $2ab \leqslant a^2 + b^2$, то

$$\sup_{\lambda>0} |e_\lambda * f|^2 \leqslant \int\limits_0^\infty |e_t * f|^2 dt + \int\limits_0^\infty |\frac{d}{dt}e_t * f|^2 dt,$$

или

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \sup_{\lambda>0} |e_\lambda * f|^2 \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\widehat{f}(\eta)|^2 \int\limits_0^\infty |\widehat{e}_t(\eta)|^2 dt d\eta + \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\widehat{f}(\eta)|^2 \int\limits_0^\infty |\frac{d}{dt}\widehat{e}_t(\eta)|^2 dt d\eta.$$

Требуемая оценка (2.5) теперь вытекает из неравенств (2.7). Таким образом, доказательство теоремы Шелина завершено.

Далее изложим краткую схему доказательства теоремы 2.4. Для этого введем максимальный оператор

$$S_\star f(x) = \sup_{\lambda>0} |S_\lambda f(x)|$$

и предположим, что $f \in L_2(\mathbb{T}^N)$ и $f = 0$ в шаре $\{|x| < R\}$, $R < 1$. Тогда нетрудно убедиться, что утверждение теоремы вытекает из следующей оценки: для любого $r < R$ существует константа $C = C(R, r)$ такая, что

$$\int\limits_{|x|\leqslant r} |S_\star f(x)|^2 dx \leqslant C \int\limits_{\mathbb{T}^N} |f(x)|^2 dx. \tag{2.8}$$

Пусть $\chi_b(t)$ — характеристическая функция сегмента $[0, b]$. Обозначим через $\varphi_1(t)$ гладкую функцию такую, что $\chi_{(R-r)/3}(t) \leqslant \varphi_1(t) \leqslant \chi_{2(R-r)/3}(t)$, и положим $\varphi_2(t) = 1 - \varphi_1(t)$. Определим 2π-периодическую по каждому переменному x_j функцию $\psi(x)$, положив $\psi(x) = \varphi_2(|x|)$, $x \in \mathbb{T}^N$.

Обозначим $\theta_\lambda(x) = \theta(x, \lambda)\psi(x)$. Тогда, так как носитель функции f есть множество $\{|x| \geqslant R\}$, для любого x из шара $|x| \leqslant r$ справедливо равенство

$$S_\lambda f(x) = \int\limits_{\mathbb{T}^N} \theta_\lambda(x-y)f(y)dy.$$

Поэтому, если обозначить этот интеграл через $\theta_\lambda * f$, то для доказательства оценки (2.8) достаточно установить справедливость неравенства

$$\int\limits_{\mathbb{T}^N} \sup_{j>0} |\theta_j * f|^2\, dx \leqslant C \int\limits_{\mathbb{T}^N} |f(x)|^2 dx, \tag{2.9}$$

где $\sup$ берется по всем натуральным числам.

Обратим внимание на то, что поскольку в определение (1.1) суммирование ведется по множеству $\{n \in \mathbb{Z}^N : |n|^2 < \lambda\}$, то здесь достаточно взять $\sup$ только по всем натуральным числам.

Для коэффициентов Фурье $(\theta_j)_n$ функции $\theta_j(x)$ имеют место оценки

$$|(\theta_j)_n| \leqslant \frac{C_l}{(1 + ||n| - \sqrt{j}|)^l}, \tag{2.10}$$

справедливые для любого $l, j \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{Z}^N$ с некоторой константой C_l, зависящей от l, r и R. Оценка (2.10) доказывается аналогично с неравенством (2.6).

Роль производной $\dfrac{d}{d\lambda}\widehat{e}_\lambda(\eta)$ в данном случае играют числа $(\Theta_j)_n = (\theta_{j+1})_n - (\theta_j)_n$, т. е.

$$(\Theta_j)_n = (2\pi)^{-N} \sum_{|m|^2=j} \psi_{m-n} = (2\pi)^{-N} \sum_{|n-m|^2=j} \psi_m.$$

Следует отметить, что в силу (2.10), оценка суммы $(\theta_j)_n$ по j, в отличии от оценки (2.7), не является равномерной по n, т. е.

$$\sum_{j=0}^{\infty} |(\theta_j)_n|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k \leqslant \sqrt{j} < k+1} |(\theta_j)_n|^2 \leqslant C \cdot |n|.$$

Что бы компенсировать это обстоятельство, нам необходимо получить лучшую оценку для суммы чисел $(\Theta_j)_n$. Для этого множество чисел $\{j,\ k \leqslant \sqrt{j} < k+1\}$ запишем как $Q^k = \{j = k^2 + p,\ p = 0, 1, \ldots, 2k\}$. В работе [16] доказана следующая оценка для указанной суммы.

Лемма 2.2. *Существуют множества Q_q^k, $q = 0, 1, \ldots, 2k-1$, такие, что $\bigcup\limits_{q=0}^{2k-1} Q_q^k = Q^k$ и для всех целых $l \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^2 \sum_{p \in Q_q^k} |(\Theta_{k^2+p})_n|^2 \leqslant \frac{C_l}{(1 + \sqrt{||n| - k|})^l}. \tag{2.11}$$

Из этой леммы следует равномерная по $n \in \mathbb{Z}^N$ оценка

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^2 \sum_{p \in Q_q^k} |(\Theta_{k^2+p})_n|^2 \leqslant C. \tag{2.12}$$

С другой стороны, для коэффициентов Фурье $(\theta_j)_n$, в силу (2.10), имеем равномерную по $n \in \mathbb{Z}^N$ оценку

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^{-2} \sum_{p \in Q_q^k} |(\theta_{k^2+p})_n|^2 \leqslant C. \tag{2.13}$$

Переходим к доказательству неравенства (2.9). Имеем

$$[\theta_q * f]^2 = \sum_{j=0}^{q-1} [\Theta_j * f]^2 + 2 \sum_{j=0}^{q-1} [\Theta_j * f][\theta_j * f].$$

Поэтому

$$\sup_{q \in \mathbb{N}} |\theta_q * f|^2 \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |\Theta_j * f|^2 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{2k-1} \sum_{p \in Q_q^k} |\Theta_{k^2+p} * f|(q+1)|\theta_{k^2+p} * f|(q+1)^{-1}.$$

Интегрируя по $\mathbb{T}^N$ и привлекая оценки (2.12) и (2.13), будем иметь

$$\int\limits_{\mathbb{T}^N} \sup_{q\in\mathbb{N}} |\theta_q * f|^2 \leqslant \sum_n |f_n|^2 \sum_{j=0}^{\infty} |(\Theta_j)_n|^2 + \sum_n |f_n|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^2 \sum_{p\in Q_q^k} |(\Theta_{k^2+p})_n|^2 +$$

$$+ \sum_n |f_n|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^{-2} \sum_{p\in Q_q^k} |(\theta_{k^2+p})_n|^2 \leqslant C \sum_n |f_n|^2 = C \int\limits_{\mathbb{T}^N} |f(x)|^2 dx.$$

Таким образом, оценка (2.9) получена, следовательно, и теорема 2.4 доказана.

Как было показано в теореме 2.2, для произвольного эллиптического полинома $A(\xi)$ обобщенная локализация для $E_\lambda(A)f$ имеет место в тех же классах $L_p(\mathbb{R}^N)$, что и в случае сферических частичных интегралов. В связи с этим возникает следующий вопрос: верно ли, что для частичных сумм $S_\lambda(A)f$, определенных посредством совершенно произвольного эллиптического полинома $A(\xi)$, принцип обобщенной локализации справедлив в классе $L_2(\mathbb{T}^N)$?

3. Суммируемость рядов Фурье

Еще одна более простая задача возникает, когда вместо сходимости частичных сумм S_λ изучается их суммируемость некоторыми методами суммирования. Наиболее удобным методом суммирования в данном случае является метод Рисса. *Средние Рисса* $S_\lambda^s f(x)$ порядка $s \geqslant 0$ сферических частичных сумм $S_\lambda f(x)$ определяются посредством равенства

$$S_\lambda^s f(x) = \sum_{|n|^2<\lambda} \left(1 - \frac{|n|^2}{\lambda}\right)^s f_n\, e^{inx}. \tag{3.1}$$

Очевидно, $S_\lambda^0 f = S_\lambda f$.

Частичные суммы S_λ называются *суммируемыми к f методом Рисса порядка s*, если $S_\lambda^s f(x) \to f(x)$.

Средние Рисса представляют собой регуляризацию исходных частичных сумм и во многих случаях их асимптотическое поведение улучшается с увеличением $\operatorname{Re} s$.

Выше было отмечено, что достаточным условием сходимости почти всюду рядов Фурье $S_\lambda f$ является ограниченность соответствующего максимального оператора $S_\star f$ в пространстве $L_p(\mathbb{T}^N)$. Аналогичное утверждение справедливо и для средних $S_\lambda^s f$. Поэтому изучение сходимости почти всюду средних Рисса $S_\lambda^s f$ для функций из классов $L_p(\mathbb{T}^N)$ опирается на оценки мажорант $S_\star^s f$. При этом мажоранту достаточно оценить при $p=1$ и $p=2$, поскольку для любого p из интервала $1 < p < 2$ необходимая оценка доказывается применением к полученным оценкам интерполяционной теоремы Стейна. В связи с этим заметим, что сумма в равенстве (3.1) сохраняет смысл для любого комплексного s с $\operatorname{Re} s \geqslant 0$, благодаря чему можно воспользоваться при изучении средних Рисса интерполяционными теоремами.

Сходимость почти всюду средних Рисса $S_\lambda^s f \to f$ любого положительного порядка $s > 0$ для функций из $L_2(\mathbb{T}^N)$ (следовательно, из $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p \geqslant 2$) доказана Митчеллом [32]. Доказательство ограниченности максимального оператора в L_2 в этой работе опирается на то, что для ортогональных рядов функций из L_2, как доказано С. Качмажем (см. [1]), все риссовские средние различных положительных порядков в смысле сходимости почти всюду эквивалентны. Иначе говоря, если средние $S_\star^a$ какого-нибудь положительного порядка a ограничены в L_2, то ограничены и средние $S_\star^s$ любого другого положительного порядка $s > 0$. Следовательно, дело сводится к доказательству ограниченности в L_2 средних $S_\star^s$ какого-нибудь высокого порядка $s > \dfrac{N-1}{2}$, при которых попадаем под действие метода суммирования Пуассона. Напомним, метод суммирования Пуассона сводит изучение ядра оператора $S_\lambda^s f$ к изучению ядра интегрального оператора $E_\lambda^s f$, что является, в виду явного вида ядра (2.1), несомненно более простой задачей.

Сходимость почти всюду сферических частичных сумм кратных рядов и интегралов Фурье для функций из классов L_p при $1 \leqslant p < 2$ изучалась Э. Стейном [36]. Поскольку полученные результаты формулируются одинаково, мы приведем их лишь для кратных рядов.

Теорема 3.1 (Стейн). *Пусть*

$$s > (N-1)\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big), \quad 1 \leqslant p \leqslant 2. \tag{3.2}$$

Тогда $S_\lambda^s f(x) \to f(x)$ почти всюду в $\mathbb{T}^N$ для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$. Кроме того, при $1 < p \leqslant 2$ максимальный оператор $S_\star^s : L_p(\mathbb{T}^N) \to L_p(\mathbb{T}^N)$ ограничен.

Если $p = 1$, то точность условия этой теоремы на порядок средних Рисса вытекает из следующего результата Стейна (см. [39]): если $s = \dfrac{N-1}{2}$, то существует функция $f \in L_1(\mathbb{T}^N)$ такая, что $S_\lambda^s f(x)$ расходятся всюду на $\mathbb{T}^N$.

При $p > 1$ известен только следующий результат К. И. Бабенко [11] (справедливый и для кратных интегралов Фурье $E_\lambda^s f(x)$): если

$$0 \leqslant s \leqslant N\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \frac{2N}{N+1}, \tag{3.3}$$

то существует функция $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, средние Рисса $S_\lambda^s f(x)$ которой расходятся на множестве положительной меры.

Сопоставляя полученный положительный результат (3.2) с отрицательным (3.3), мы видим, что при $1 < p < \dfrac{2N}{N+1}$ они имеют расхождение на величину $1 - \dfrac{1}{p} > 0$. Для интегралов Фурье этот «зазор» удалось частично устранить (хотя и не так, как ожидалось) благодаря двум замечательным результатам Теренса Тао, которые приведены ниже.

Следует отметить, что точно такой же зазор, как и между (3.2) и (3.3), существовал и между необходимыми и достаточными условиями сходимости $E_\lambda^s f$ в $L_p(\mathbb{R}^N)$, $1 < p \leqslant 2$. В двумерном случае теорема Карлесона—Шелина полностью устранила этот зазор, утверждая, что при всех p и s из этого зазора есть сходимость. Кроме того, в N-мерном случае теоремы Феффермана, В. З. Мешкова и последующих авторов постепенно закрывают этот зазор положительными результатами (см. [1, 30, 31, 40]). Следовательно, поскольку $E_\lambda^s f$ поточечно сходится при $\lambda \to \infty$ для функций $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, то естественно было предположить, что и в зазоре в условиях сходимости почти всюду отрицательные результаты являются точными и отмеченное расхождение вызвано недостаточно совершенными положительными результатами. Однако, как показал следующий результат Тао, это предположение оказалось неверным.

Теорема 3.2 (Тао, см. [40]). *Пусть*

$$s < N\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2p}, \quad 1 < p < 2 - \frac{1}{N}. \tag{3.4}$$

Тогда максимальный оператор $E_\star^s$ не имеет слабого типа (p,p).

Заметим, что в силу известного результата Стейна (определение оператора слабого типа и этот результат имеется в работе [37]) при $1 \leqslant p \leqslant 2$ сходимость почти всюду $E_\lambda^s f(x)$ эквивалентна тому, что оператор $E_\star^s$ имеет слабый тип (p,p).

Пусть преобразование Фурье оператора $\widetilde{E}_\lambda^s f$ определено посредством равенства $\widehat{(\widetilde{E}_\lambda^s f)} = (1 - |\xi|^2)_+^s \varphi(\xi)\hat{f}(\xi)$, где функция $\varphi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ имеет носитель в шаре $|\xi - (\tilde{0}, \xi_N)| < \dfrac{1}{4}$ (см. [40]). Здесь и далее обозначено $\xi = (\tilde{\xi}, \xi_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$. Теренс Тао показал, что для доказательства утверждения теоремы достаточно построить контрпример к следующей оценке:

$$|| \sup_{\lambda \sim 1} |\widetilde{E}_\lambda^s f| ||_{L_p(\mathbb{R}^N)} \leqslant C ||f||_{L_p(\mathbb{R}^N)}, \tag{3.5}$$

где sup берется по некоторой окрестности точки $\lambda = 1$; в качестве контрпримера он рассмотрел функцию

$$f(\tilde{y}, y_N) = e^{iy_N} \psi(\tilde{y}, R^{-1/2} y_N), \quad R >> 1,$$

где $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Заметим, что $||f||_{L_p(\mathbb{R}^N)} = O(R^{1/2p})$.

Автору удалось показать, что функцию ψ с достаточно малым носителем можно выбрать так, что при $0 < x_N = O(|x|) = O(R)$ и $\lambda = \dfrac{|x|}{x_N}$ имеет место оценка $|E_\lambda^s f(x)| = O(R^{-s-\frac{N}{2}})$. Отсюда следует, что

$$||E_\lambda^s f||_{L_p(\mathbb{R}^N)} \geqslant R^{N/p} R^{-s-\frac{N}{2}}.$$

Тогда, учитывая оценку нормы функции f, нетрудно получить противоречие с (3.5).

В этой же работе [40] Теренс Тао высказал гипотезу:

Максимальный оператор $E_\star^s$ имеет слабый тип (p, p) тогда и только тогда когда

$$s \geqslant \max\Big\{0, N\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2p}\Big\}, \quad 1 < p < 2. \tag{3.6}$$

Следующий результат Тао частично показывает справедливость этой гипотезы.

Теорема 3.3 (Тао, см. [41]). *Пусть*

$$s > \max\Big\{\frac{3}{4p} - \frac{3}{8},\ \frac{7}{6p} - \frac{2}{3}\Big\}, \quad 1 < p < 2. \tag{3.7}$$

Тогда для любой функция $f \in L_p(\mathbb{R}^2)$ средние Рисса $E_\lambda^s f(x)$ сходятся почти всюду при $\lambda \to \infty$ к функции $f(x)$.

Доказательство этой теоремы Тао технически весьма сложно и существенно использует то, что $N = 2$. Фактически она доказана при значениях параметров $p = \dfrac{10}{7}$ и $s = \dfrac{3}{20} + \varepsilon$, где ε — произвольное положительное число, и далее применена интерполяционная теорема к классическим результатам Митчелла и Стейна, сформулированным выше.

Обратим внимание на то, что даже при $N = 2$ между условиями (3.4) и (3.7) все еще остается зазор:

$$\max\Big\{0, 2\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2p}\Big\} \leqslant s \leqslant \max\Big\{\frac{3}{4p} - \frac{3}{8}, \frac{7}{6p} - \frac{2}{3}\Big\}, \quad 1 < p < 2.$$

Представляет также интерес проблема получения аналога последней теоремы Тао для интеграла Фурье при $N \geqslant 3$.

При $p \geqslant 2$ вопрос о сходимости почти всюду средних Рисса $E_\lambda^s f$ для функций из классов $L_p(\mathbb{R}^N)$ закрыт полностью: если

$$s > \max\Big\{0, N\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\Big) - \frac{1}{2}\Big\}, \tag{3.8}$$

то, как доказано в работе А. Карбери и соавторов [22], средние Рисса $E_\lambda^s f(x)$ сходятся почти всюду к $f(x)$ (многие частные случае этого результата были известны ранее; см. [22, 30]), если же выполняется обратное к (3.8) неравенство, то, используя асимптотическое поведение функции Бесселя, нетрудно убедиться, что сходимость почти всюду отсутствует.

Перейдем теперь к рассмотрению кратных интегралов Фурье $E_\lambda(A)f$ (см. (1.3)), определенных посредством однородного эллиптического полинома $A(\xi)$ порядка m. В силу определения преобразования Фурье имеем

$$E_\lambda f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} e_A(x - y, \lambda) f(y) dy, \tag{3.9}$$

где ядро имеет вид

$$e_A(x, \lambda) = (2\pi)^{-N} \int\limits_{A(\xi)<\lambda} e^{ix\xi} d\xi = (2\pi)^{-N} \lambda^{\frac{N}{m}} \int\limits_{\Omega_A} e^{i\lambda^{\frac{1}{m}} x\xi} d\xi.$$

Здесь символом Ω_A, как и в разделе 2, обозначено множество $\Omega_A = \{\xi \in \mathbb{R}^N : A(\xi) < 1\}$.

Множество Ω_A называют *строго выпуклым*, если все главные кривизны поверхности $\partial\Omega_A$ строго положительны. Например, если $A(\xi) = |\xi|^2$, то множество Ω_A есть шар, и поэтому оно строго выпукло. При этом $E_\lambda^s(A)f$ совпадает со сферическими частичными интегралами. Важность строгой выпуклости множества Ω_A заключается в том, что в этом случае фазовая функция осциллирующего интеграла $e_A(x, \lambda)$ будет морсовской и в силу метода стационарной фазы асимптотика интеграла будет аналогичной с (2.1). Поэтому, повторяя те же рассуждения, как и в работе [36], можно показать, что как для $E_\lambda^s(A)f$, так и для $S_\lambda^s(A)f$ справедливы утверждения теоремы Стейна.

Если же множество Ω_A является выпуклым, но не строго выпуклым (например, в случае $A(\xi) = \xi_1^4 + \xi_2^4$ при $N = 2$), то некоторые из главных кривизн могут обращаться в нуль в отдельных точках. По методу стационарной фазы в асимптотической оценке $e_A(x, \lambda)$ появится особенность, т. е. в знаменателе будет участвовать гауссова кривизна, которая обращается в нуль в некоторых точках. Однако, как доказал Б. Рэндол [33], эта особенность является интегрируемой, и слегка изменив метод работы [36], удается доказать те же теоремы и в этом случае [4, 6].

В связи с этими результатами возникает следующая задача.

Пусть $A(\xi)$ — произвольный эллиптический полином (или пусть множество Ω_A является выпуклым или, может быть, строго выпуклым). Являются ли условия Тао (3.7) достаточными для сходимости почти всюду $E_\lambda^s(A)f$? Аналогичный вопрос остается открытым и в отношении условия Карбери и др. (3.8).

До появления замечательной работы С. Кенига и П. Томаса [29] (1980 г.) исследование сходимости почти всюду средних Рисса кратных рядов Фурье сводилось, как отмечалось выше, с помощью метода суммирования Пуассона к изучению средних Рисса кратных интегралов Фурье, что несомненно является более простой задачей. Однако для справедливости метода Пуассона требовалось, что бы порядок средних Рисса был достаточно большим: $s > \dfrac{N-1}{2}$. А теорема С. Кенига и П. Томаса фактически утверждает, что для сходимости почти всюду средних $S_\lambda^s(A)f$ любого неотрицательного порядка необходима и достаточна сходимость почти всюду средних Рисса $E_\lambda^s(A)f$. Переходим к точной формулировке этой теоремы.

Функцию M из $L_\infty(\mathbb{R}^N)$ назовем *регулярной*, если каждая точка $\mathbb{R}^N$ является точкой Лебега для M (см. [29]). Для любого числа $\lambda > 0$ определим оператор $E_{M,\lambda}$ в $L_2(\mathbb{R}^N)$ равенством $\widehat{E_{M,\lambda}f}(\xi) = M(\xi/\lambda)\hat{f}(\xi)$ и оператор $S_{M,\lambda}$ в $L_2(\mathbb{T}^N)$ равенством $\widehat{S_{M,\lambda}F}(n) = M(n/\lambda)\hat{F}(n)$. Обозначим символами $E_M^\star f(x)$ и $S_M^\star F(x)$ соответствующие максимальные операторы, т. е. $E_M^\star f(x) = \sup\limits_{\lambda>0}|E_{M,\lambda}f(x)|$ и $S_M^\star F(x) = \sup\limits_{\lambda>0}|S_{M,\lambda}F(x)|$. Функция M называется *p-максимальной* на $\mathbb{R}^N$ (или *слабо p-максимальной* на $\mathbb{R}^N$), если оператор $E_M^\star$ ограничен (или слабо ограничен) в $L_p(\mathbb{R}^N)$; аналогично для $S_M^\star$ в $L_p(\mathbb{T}^N)$.

Теорема 3.4 (С. Кениг и П. Томас, [29]). *Пусть функция $M \in L_\infty(\mathbb{R}^N)$ является регулярной, и пусть $1 < p < \infty$. Тогда функция M является p-максимальной или слабо p-максимальной на $\mathbb{R}^N$ тогда и только тогда, когда M является p-максимальной или слабо p-максимальной на $\mathbb{T}^N$.*

Доказательство теоремы основано на линеаризации проблемы (см. также следующий раздел) и последующем применении техники доказательства теоремы де Лю (см. [39]) о связи мультипликаторов в $L_p(\mathbb{R}^N)$ и $L_p(\mathbb{T}^N)$. Отметим также, что развернутое доказательство этой теоремы имеется в работе [27].

Если, например, взять функцию $M(\xi) = (1-|\xi|^2)_+^s$, $s \geqslant 0$, то из этой теоремы вытекает эквивалентность сходимости почти всюду средних Рисса порядка s сферических частичных сумм $S_\lambda^s F(x)$ и интегралов Фурье $E_\lambda^s f(x)$.

Отметим, что в работе Тао [41] фактически доказана слабая p-максимальность на $\mathbb{R}^2$ функции $M(\xi) = (1-|\xi|^2)_+^s$ при выполнении условий (3.7). Следовательно, в силу теоремы Кенига и Томаса, выполнение этих условий гарантируют сходимость почти всюду на $\mathbb{T}^2$ рядов Фурье:

$$\sum_{n_1^2+n_2^2<\lambda} \left(1 - \frac{n_1^2+n_2^2}{\lambda}\right)^s f_{n_1,n_2} e^{i(n_1x_1+n_2x_2)} \to f(x_1, x_2).$$

Применяя теорему Кенига и Томаса, можно также убедиться, что при выполнении условий (3.4) отсутствует сходимость почти всюду средних $S_\lambda^s f$ для функций из классов $L_p(\mathbb{T}^N)$.

Отметим также, что если $A(\xi)$ — однородный эллиптический полином, то утверждение теоремы Кенига и Томаса справедливо и для пары операторов $E_\lambda^s(A)f$ и $S_\lambda^s(A)f$.

4. Сходимость рядов Фурье гладких функций

Как альтернативный способ упрощения ситуации можно рассматривать исследование сходимости $S_\lambda f(x) \to f(x)$ не для функций из пространства $L_p(\mathbb{T}^N)$, а для функций из подпространства $L_p(\mathbb{T}^N)$, которые обладают некоторой гладкостью. Наиболее распространенными подпространствами такого рода являются пространства Соболева.

Функция $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p \geqslant 1$, принадлежит *пространству Соболева* $L_p^a(\mathbb{T}^N)$ с действительным числом $a > 0$, если конечна норма

$$||f||_{L_p^a(T^N)} = || \sum_{n \in Z^N} (1+|n|^2)^{\frac{a}{2}} f_n e^{inx} ||_{L_p(T^N)}. \tag{4.1}$$

Когда a не целое, то это пространство также называется *пространством Лиувилля*.

В работе [23] Карбери и Сория, наряду с другими вопросами, изучена также сходимость почти всюду интегралов Фурье $E_\lambda f(x)$ для функций f из классов Соболева $L_p^a(\mathbb{R}^N)$. Напомним, что норма в этом пространстве определяется аналогично с нормой (4.1):

$$||f||_{L_p^a(\mathbb{R}^N)} = || \int\limits_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^{\frac{a}{2}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi ||_{L_p(\mathbb{R}^N)}. \tag{4.2}$$

Теорема 4.1 (Карбери и Сория [23]). *Пусть $N \geqslant 2$. Если*

$$a > (N-1)\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big), \quad 1 < p \leqslant 2, \tag{4.3}$$

то для любой функции $f \in L_p^a(\mathbb{R}^N)$ кратные интегралы $E_\lambda f$ сходятся почти всюду к f.

Обратим внимание на то, что условие на показатель гладкости a в этой теореме совпадает с условием Стейна (3.2) на показатель средних Рисса s.

В работе [7] утверждение этой теоремы доказано для спектральных разложений произвольного эллиптического псевдодифференциального оператора, определенного в $L_2(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. При этом условия сходимости для функций из класса Соболева $L_p^a(\Omega)$ имеют вид: $1 \leqslant p \leqslant 2$ и $a > N\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big)$. Следует особо отметить, что, как доказано в этой же работе, эти условия являются окончательными в классе всех эллиптических псевдодифференциальных операторов.

Если в теореме Карбери и Сория вместо самых разложений $E_\lambda f$ рассмотреть их средние $E_\lambda^s f$, то естественно ожидать, что утверждение теоремы будет справедливо для менее гладких функций. То, что это действительно так, доказано в следующей теореме.

Теорема 4.2 (см. [9]). *Пусть $A(\xi)$ — произвольный эллиптический полином и пусть множество Ω_A строго выпукло. Тогда, если числа $s \geqslant 0$ и $a > 0$ удовлетворяют условиям*

$$a + s > (N-1)\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big), \quad 1 \leqslant p \leqslant 2, \tag{4.4}$$

то для любой функции $f \in L_p^a(\mathbb{R}^N)$ с компактным носителем средние Рисса $E_\lambda^s(A)f$ сходятся почти всюду к f.

Следующая теорема показывает, что даже для сферических частичных интегралов условие (4.4) при $p = 1$ существенно улучшить не возможно.

Теорема 4.3 (см. [9]). *Пусть $A(D) = -\Delta$, $0 < a + s < \dfrac{N-1}{2}$. Тогда существует функция $f \in L_1^a(\mathbb{R}^N)$ с компактным носителем такая, что*

$$\lim_{\lambda \to \infty} |E_\lambda^s(A) f(x)| = +\infty$$

на некотором множестве E положительной меры.

В связи с этими результатами возникают следующие задачи.

Будут ли справедливы теорема 3.3 и теорема Карбери и др. [22] (см. условие (3.8)), сформулированные в предыдущем разделе, если вместо средних Рисса рассмотреть гладкие функции с показателем a? Более того, можно ли заменить в этих теоремах показатель средних s на $a+s$ и рассмотреть гладкие функции с показателем a?

Другой вопрос: насколько важным является условие строгой выпуклости множества Ω_A в условиях теоремы 4.2?

Переходим к рассмотрению кратных рядов Фурье функций из классов Соболева. Следует отметить, что в этих классах теорема Кенига и Томаса не действует. Поэтому результаты о сходимости кратных интегралов Фурье не переходят автоматически к рядам Фурье. Однако, используя метод доказательства этой теоремы, покажем, что те же условия Карбери и др. (4.3) гарантируют сходимость почти всюду кратных рядов Фурье.

Теорема 4.4. *Пусть параметры a и p удовлетворяют условиям* (4.3). *Тогда для любой функции $F \in L_p^a(\mathbb{T}^N)$ частичные суммы $S_\lambda F(x)$ сходятся к $F(x)$ почти всюду в $\mathbb{T}^N$. Более того, максимальный оператор $S_\star F(x) = \sup\limits_{\lambda>0} |S_\lambda F(x)|$ имеет оценку*

$$||S_\star F||_{L_p(\mathbb{T}^N)} \leqslant C_{p,a} ||F||_{L_p^a(\mathbb{T}^N)}. \tag{4.5}$$

Для доказательства теоремы необходимо прежде всего перейти от пространств $L_p^a(\mathbb{T}^N)$ к классам $L_p(\mathbb{T}^N)$. Для этого с помощью оператора Лапласа Δ напишем

$$E_\lambda f = (1-\Delta)^{-\frac{a}{2}} E_\lambda (1-\Delta)^{\frac{a}{2}} f = (1-\Delta)^{-\frac{a}{2}} E_\lambda g,$$

где $g = (1-\Delta)^{\frac{a}{2}} f \in L_p(\mathbb{R}^N)$. Для любой функции $g \in L_p(\mathbb{R}^N)$ введем оператор

$$E_{(\lambda,a)} g = (1-\Delta)^{-\frac{a}{2}} E_\lambda g = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int\limits_{|\xi|^2<\lambda} (1+|\xi|^2)^{-\frac{a}{2}} \hat{g}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Аналогично определим оператор $S_{(\lambda,a)}G$, $G \in L_p(\mathbb{T}^N)$ на торе $\mathbb{T}^N$:

$$S_{(\lambda,a)} G = \sum_{|n|^2<\lambda} (1+|n|^2)^{-\frac{a}{2}} G_n e^{inx}, \quad G \in L_p(\mathbb{T}^N).$$

Пусть $E_{(a)}^\star$ и $S_{(a)}^\star$ — соответствующие максимальные операторы.

Нетрудно убедиться в том, что ни при каких функциях M операторы $E_{(\lambda,a)}$ и $S_{(\lambda,a)}$ не представимы в виде $E_{M,\lambda}$ и $S_{M,\lambda}$. Поэтому мы не можем применить теорему Кенига и Томаса к паре операторов $E_{(\lambda,a)}$ и $S_{(\lambda,a)}$. Тем не менее, имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.5. *Пусть $1 < p < \infty$. Если оператор $E_{(a)}^\star$ ограничен* (*или слабо ограничен*) *в $L_p(\mathbb{R}^N)$, тогда и оператор $S_{(a)}^\star$ ограничен* (*или слабо ограничен*) *в $L_p(\mathbb{T}^N)$.*

Заметим, что в отличие от теоремы Кенига и Томаса здесь даются только достаточные условия ограниченности (или слабой ограниченности) операторов $S_{(a)}^\star$.

Определим банахово пространство $L_p(\Omega, l^\infty(\mathbb{Z}^+))$ как множество последовательностей функций $\{f_k\}$ из $L_p(\Omega)$, для которых ограничена норма $|| \sup\limits_k |f_k| ||_{L_p(\Omega)}$. Банахово пространство $L_p(\Omega, l^1(\mathbb{Z}^+))$ определяется аналогично. Тогда $E_{(a)}^\star$ можно рассматривать как оператор, определенный в $L_p(\mathbb{R}^N)$ и принимающий значения из $L_p(\mathbb{R}^N, l^\infty(\mathbb{Z}^+))$. Аналогично, $S_{(a)}^\star$ можно рассматривать как оператор с областью определения $L_p(\mathbb{T}^N)$ и со значениями в $L_p(\mathbb{T}^N, l^\infty(\mathbb{Z}^+))$. Используя эту редукцию и принцип дуальности, следующая линеаризация максимальных операторов может быть доказана повтором тех же рассуждений, что и в работе [29] (см. также [27, с. 229]).

Лемма 4.1 (о линеаризации). *Пусть $1 < p < \infty$ и $q = \dfrac{p}{p-1}$. Оператор $E_{(a)}^\star$ ограничен в $L_p(\mathbb{R}^N)$ тогда и только тогда, когда*

$$|| \sum_k E_{(\lambda_k,a)} f_k ||_{L_q(\mathbb{R}^N)} \leqslant C || \sum_k |f_k| ||_{L_q(\mathbb{R}^N)}, \quad \{f_k\} \in L_q(\mathbb{R}^N, l^1(\mathbb{Z}^+)), \tag{4.6}$$

равномерно по всем последовательностям положительных чисел $\{\lambda_k\}$.

Аналогично, оператор $S^{\star}_{(a)}$ ограничен в $L_p(\mathbb{T}^N)$ тогда и только тогда, когда

$$||\sum_k S_{(\lambda_k,a)}F_k||_{L_q(\mathbb{T}^N)} \leqslant C||\sum_k |F_k|||_{L_q(\mathbb{T}^N)}, \quad \{F_k\} \in L_q(\mathbb{T}^N, l^1(\mathbb{Z}^+)), \tag{4.7}$$

равномерно по всем последовательностям положительных чисел $\{\lambda_k\}$.

Подобные результаты справедливы и для слабой ограниченности операторов $E^{\star}_{(a)}$ и $S^{\star}_{(a)}$. Именно, пара неравенств

$$||E^{\star}_{(a)}f||_{L_{p,\infty}(\mathbb{R}^N)} \leqslant ||f||_{L_p(\mathbb{R}^N)}, \quad f \in L_p(\mathbb{R}^N),$$
$$||S^{\star}_{(a)}F||_{L_{p,\infty}(\mathbb{T}^N)} \leqslant ||F||_{L_p(\mathbb{T}^N)}, \quad F \in L_p(\mathbb{T}^N),$$

эквивалентна следующим оценкам:

$$||\sum_k E_{(\lambda_k,a)}f_k||_{L_q(\mathbb{R}^N)} \leqslant C||\sum_k |f_k|||_{L_{q,1}(\mathbb{R}^N)}, \quad \{f_k\} \in L_{q,1}(\mathbb{R}^N, l^1(\mathbb{Z}^+)), \tag{4.8}$$

$$||\sum_k S_{(\lambda_k,a)}F_k||_{L_q(\mathbb{T}^N)} \leqslant C||\sum_k |F_k|||_{L_{q,1}(\mathbb{T}^N)}, \quad \{F_k\} \in L_{q,1}(\mathbb{T}^N, l^1(\mathbb{Z}^+)). \tag{4.9}$$

Здесь символом $L_{p,q}$ обозначено пространство Лоренца (см., например, [27]).

Замечание 4.1. В связи с теоремой Кенига и Томаса естественно возникает следующий вопрос: следует ли утверждение теоремы 2.4 из теоремы 2.1 Карбери и Сория с использованием теоремы Кенига и Томаса? Ответ на этот вопрос отрицательный, так как доказательство теоремы 2.1 основано на оценке, аналогичной с (2.4), а применение принципа дуальности, который играет ключевую роль в доказательстве леммы о линеаризации, для этой оценки не дает нужного результата. Причина здесь в том, что в левой части (2.4) интеграл берется не по всему пространству $\mathbb{R}^N$, а по шару радиуса r.

Переходим к доказательству теоремы 4.5. Покажем сначала, что ограниченность оператора $S^{\star}_{(a)}$ в $L_p(\mathbb{T}^N)$ вытекает из ограниченности оператора $E^{\star}_{(a)}$ в $L_p(\mathbb{R}^N)$.

В силу леммы о линеаризации достаточно доказать, что из оценки (4.6), равномерной относительно всех последовательностей λ_k, следует оценка (4.7), равномерная по всем последователям λ_k.

Пусть имеет место неравенство (4.6). Достаточно доказать (4.7) для произвольных тригонометрических полиномов $F_k(x) = P_k(x)$. Если $Q(x)$ — произвольный тригонометрический полином в $\mathbb{T}^N$ и $L_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon\pi|x|^2}$, то справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{T}^N} \sum_k S_{(\lambda_k,a)}P_k(x)Q(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \sum_k E_{(\lambda_k,a)}(P_k L_{\varepsilon/q})Q(x)L_{\varepsilon/p}(x)dx.$$

В случае операторов $S_{M,\lambda}$ и $E_{M,\lambda}$ доказательство этого равенства содержится в [39, с. 261]. Поскольку в этом доказательстве используется только ограниченность и непрерывность функции M, то легко убедиться в том, что оно справедливо и в рассматриваемом случае.

В силу этого равенства и оценки (4.6) имеем

$$\left|\int_{\mathbb{T}^N} \sum_k S_{(\lambda_k,a)}P_k(x)Q(x)dx\right| \leqslant C_p \limsup_{\varepsilon\to 0}\left[\varepsilon^{\frac{N}{2}}||\sum_k |P_k|L_{\varepsilon/q}||_{L_q(\mathbb{R}^N)}||QL_{\varepsilon/p}||_{L_p(\mathbb{R}^N)}\right] =$$

$$= C_p \limsup_{\varepsilon\to 0}\left[||\varepsilon^{\frac{N}{2}}\sum_k |P_k|L_{\varepsilon/q}||_{L_q(\mathbb{R}^N)}||\varepsilon^{\frac{N}{2}}QL_{\varepsilon/p}||_{L_p(\mathbb{R}^N)}\right] = C||\sum_k |P_k|||_{L_q(\mathbb{T}^N)}||Q||_{L_p(\mathbb{T}^N)}.$$

Взяв супремум по всем тригонометрическим полиномам Q с L_p нормой 1, получим (4.7), что завершает доказательство теоремы относительно ограниченности операторов.

Что касается слабой ограниченности операторов, то доказательство аналогичное: мы вновь воспользуемся леммой о линеаризации, и для доказательства (4.9) в предположении (4.8) достаточно заметить, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\frac{N}{2q}}||\sum_k |P_k|L_{\varepsilon/q}||_{L_{q,1}(\mathbb{R}^N)} = \sum_k |P_k|||_{L_{q,1}(\mathbb{T}^N)}.$$

Это равенство легко вытекает из метода суммирования Пуассона (см. [27, с. 225, 231]).

Далее покажем, как теорема 4.4 следует из теоремы 4.5 и из оценок, доказанных в работе [23] для кратных интегралов.

Пусть $1 < p \leqslant 2$, $q = \dfrac{2N}{N-1+2/p}$ и $a = \dfrac{N-1}{2}$. Применение интерполяционной теоремы Марцинкевича к оценкам, полученных в [23, разделы 3, 4], дает

$$||E^\star_{(a)}f||_{L_q(\mathbb{R}^N)} \leqslant C||f||_{L_p(\mathbb{R}^N)}, \quad f \in L_p(\mathbb{R}^N).$$

Следовательно, $E^\star_{(a)}f$ ограничен почти всюду в $\mathbb{R}^N$ для каждой функции $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $p > 1$. Тогда по теореме Стейна [37] о последовательности линейных операторов, инвариантных относительно сдвига, действующих из $L_p(\mathbb{R}^N)$ в $L_p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, можно утверждать, что

$$||E^\star_{(a)}f||_{L_{p,\infty}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C||f||_{L_p(\mathbb{R}^N)}, \quad f \in L_p(\mathbb{R}^N), \quad p > 1, \quad a = \frac{N-1}{2}.$$

Отсюда, в силу теоремы 4.5, при тех же значениях параметров p и a имеем

$$||S^\star_{(a)}F||_{L_{p,\infty}(\mathbb{T}^N)} \leqslant C||F||_{L_p(\mathbb{T}^N)}, \quad F \in L_p(\mathbb{T}^N). \tag{4.10}$$

С другой стороны, из оценок, полученных в [23, раздел 3], следует

$$||E^\star_{(a)}f||_{L_2(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_a||f||_{L_2(\mathbb{R}^N)}, \quad f \in L_2(\mathbb{R}^N), \quad a > 0,$$

или, вновь в силу теоремы 4.5,

$$||S^\star_{(a)}F||_{L_2(\mathbb{T}^N)} \leqslant C_a||F||_{L_2(\mathbb{T}^N)}, \quad F \in L_2(\mathbb{T}^N), \quad a > 0. \tag{4.11}$$

Применяя сначала интерполяционную теорему Марцинкевича к оценкам (4.10) и (4.11) (при $a = \dfrac{N-1}{2}$), получим

$$||S^\star_{(a)}F||_{L_p(\mathbb{T}^N)} \leqslant C||F||_{L_p(\mathbb{T}^N)}, \quad F \in L_p(\mathbb{T}^N), \quad p > 1, \quad a = \frac{N-1}{2}.$$

Затем, применяя к этой оценке и оценке (4.11) (при $a > 0$) интерполяционную теорему Стейна о семействе аналитически зависящих от параметра линейных операторов (см., например, [1, с. 46]), будем иметь

$$||S^\star_{(a)}F||_{L_p(\mathbb{T}^N)} \leqslant C_{p,a}||F||_{L_p(\mathbb{R}^N)}, \quad F \in L_p(\mathbb{T}^N),$$

где

$$1 < p \leqslant 2, \quad a > (N-1)\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big).$$

Возвращаясь к пространствам Соболева, эту оценку перепишем в виде

$$||S_\star G||_{L_p(\mathbb{T}^N)} \leqslant C_{p,a}||G||_{L^a_p(\mathbb{T}^N)}, \quad G \in L^a_p(\mathbb{T}^N),$$

где p и a такие же, как и выше.

Это и есть оценка (4.5). Первая часть утверждения теоремы 4.4 вытекает из этой оценки.

Автор приносит глубокую благодарность Ш. А. Алимову за обсуждение результатов работы, а также благодарит С. Р. Умарова за поддержку и гостеприимство.

Данная работа выполнена при поддержке Фонда поддержки фундаментальных исследований республики Узбекистан (номер проекта OT-F4-88).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алимов Ш. А., Ашуров Р. Р., Пулатов А. К.* Кратные ряды и интегралы Фурье// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. — 1989. — *42*. — С. 7–104.
2. *Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М.* Проблемы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений. I// Усп. мат. наук. — 1976. — *31*. — С. 29–86.
3. *Ашуров Р. Р.* Об условиях локализации для спектральных разложений эллиптических операторов с постоянными коэффициентами// Мат. заметки. — 1983. — *33*. — С. 434–439.
4. *Ашуров Р. Р.* Суммируемость почти всюду рядов Фурье функций из L_p по собственным функциям// Мат. заметки. — 1983. — *34*. — С. 837–843.
5. *Ашуров Р. Р.* Об условиях локализации для тригонометрических рядов Фурье// Докл. АН СССР. — 1985. — *31*. — С. 496–499.

6. *Ашуров Р. Р.* Суммируемость кратных тригонометрических рядов Фурье// Мат. заметки. — 1991. — *49.* — С. 563–568.
7. *Ашуров Р. Р.* О спектральных разложениях эллиптических псевдодифференциальных операторов// Узб. мат. ж. — 1998. — *6.* — С. 20–29.
8. *Ашуров Р. Р.* Обобщенная локализация для шаровых частичных сумм кратных рядов Фурье// Докл. РАН. — 2019. — *489.* — С. 7–10.
9. *Ашуров Р. Р., Буваев К. Т.* Суммируемость почти всюду кратных интегралов Фурье// Дифф. уравн. — 2017. — *53.* — С. 750–760.
10. *Ашуров Р. Р., Файзиев Ю. Э.* Принцип обобщенной локализации для непрерывных всплеск-разложений// Мат. заметки. — 2019. — *106.* — С. 75–81.
11. *Бабенко К. И.* О суммируемости и сходимости разложений по собственным функциям дифференциального оператора// Мат. сб. — 1973. — *91.* — С. 147–201.
12. *Бастис А. Й.* Обобщенный принцип локализации для N-кратного интеграла Фурье// Докл. АН СССР. — 1984. — *278.* — С. 777–778.
13. *Бастис А. Й.* Обобщенная локализация для рядов Фурье по собственным функциям оператора Лапласа в классах L_p// Литов. мат. сб. — 1991. — *31.* — С. 387–405.
14. *Блошанский И. Л.* О равномерной сходимости тригонометрических рядов и интегралов Фурье// Мат. заметки. — 1975. — *18.* — С. 675–684.
15. *Ильин В. А.* Об обобщенной интерпретации принципа локализации для рядов Фурье по фундаментальным системам функций// Сиб. мат. ж. — 1968. — *9*, № 5. — С. 1093–1106.
16. *Ashurov R. R.* Generalized localization for spherical partial sums of multiple Fourier series// J. Fourier Anal. Appl. — 2019. — *25*, № 6. — С. 3174–3183.
17. *Ashurov R. R., Ahmedov A., Mahmud Ahmad Rodzi B.* The generalized localization for multiple Fourier integrals// J. Math. Anal. Appl. — 2010. — *371.* — С. 832–841.
18. *Ashurov R. R., Butaev A.* On generalized localization of fourier inversion for distributions// В сб.: «Topics in functional analysis and algebra», USA—Uzbekistan Conf. on Anal. and Math. Phys., California State Univ., Fullerton, USA, May 20–23, 2014. — Providence: American Mathematical Society, 2016. — С. 33–50.
19. *Ashurov R. R., Butaev A.* On pointwise convergence of continuous wavelet transforms// Uzb. Mat. Zh. — 2018. — *1.* — С. 2–24.
20. *Ashurov R. R., Butaev A., Pradhan B.* On generalized localization of fourier inversion associated with an elliptic operator for distributions// Abstr. Appl. Anal. — 2012. — *2012.* — 649848.
21. *Carbery A., Romera E., Soria F.* Radial weights and mixed norm inequalities for the disc multiplier// J. Funct. Anal. — 1992. — *109.* — С. 52–75.
22. *Carbery A., Rubio de Francia J. L., Vega L.* Almost everywhere summability of Fourier integrals// J. London Math. Soc. (2). — 1988. — *38.* — С. 513–524.
23. *Carbery A., Soria F.* Almost everywhere convergence of Fourier integrals for functions in Sobolev spaces, and an L_2-localization principle// Rev. Mat. Iberoam. — 1988. — *4.* — С. 319–337.
24. *Carbery A., Soria F.* Pointwise Fourier inversion and localization in R^n// J. Fourier Anal. Appl. — 1997. — *3*, Special Issue. — С. 847–858.
25. *Carleson L.* On convergence and growth of partial sums of Fourier series// Acta Math. — 1966. — *116.* — С. 135–157.
26. *Fefferman C.* On the divergence of multiple Fourier series// Bull. Am. Math. Soc. — 1971. — *77.* — С. 191–195.
27. *Grafakos L.* Classical Fourier analysis. — New York: Springer, 2008.
28. *Hunt R. A.* On convergence of Fourier series// Proc. Conf. on Orthogonal Expansions and Their Continuous Analogues. — Edwardsville—Carbondale: Univ. Press, 1968. — С. 235–255.
29. *Kenig C. E., Tomas P. A.* Maximal operators defined by Fourier multipliers// Studia Math. — 1980. — *68.* — С. 79–83.
30. *Lee S.* Improved bounds for Bochner—Riesz and maximal Bochner—Riesz operators// Duke Math. J. — 2004. — *122.* — С. 205–232.
31. *Lu Sh.* Conjectures and problems in Bochner—Riesz means// Front. Math. China. — 2013. — *8.* — С. 1237–1251.
32. *Mitchell J.* On the summability of multiple orthogonal series// Trans. Am. Math. Soc. — 1951. — *71.* — С. 136–151.
33. *Randol B.* On the asymptotic behavior of the Fourier transform of the indicator function of the convex set// Trans. Am. Math. Soc. — 1969. — *139.* — С. 279–285.

34. *Sjölin P.* Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series// Ark. Mat. — 1971. — *9.* — С. 65–90.
35. *Sjölin P.* Regularity and integrability of spherical means// Monatsh. Math. — 1983. — *96.* — С. 277–291.
36. *Stein E. M.* Localization and summability of multiple Fourier series// Acta Math. — 1958. — *1-2.* — С. 93–147.
37. *Stein E. M.* On limits of sequences of operators// Ann. Math. — 1961. — *74.* — С. 140–170.
38. *Stein E. M.* Some problems in harmonic analysis// В сб.: «Harmonic analysis in Euclidean spaces. Part 1». — Providence: Am. Math. Soc, 1978. — С. 3–20.
39. *Stein E. M., Weiss G.* Itroduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. — Princeton: Princeton University Press, 1971.
40. *Tao T.* The weak-type endpoint Bochner—Riesz conjecture and related topics// Indiana Univ. Math. J. — 1998. — *47.* — С. 1097–1124.
41. *Tao T.* On the maximal Bochner—Riesz conjecture in the plane for $p < 2$// Trans. Am. Math. Soc. — 2002. — *354.* — С. 1947–1959.

Р. Р. Ашуров
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Институт математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан
E-mail: ashurovr@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-634-653 UDC 517.95

Generalized Localization and Summability Almost Everywhere of Multiple Fourier Series and Integrals

© 2021 **R. R. Ashurov**

Abstract. It is well known that Luzin's conjecture has a positive solution for one-dimensional trigonometric Fourier series, but in the multidimensional case it has not yet found its confirmation for spherical partial sums of multiple Fourier series. Historically, progress in solving Luzin's hypothesis has been achieved by considering simpler problems. In this paper, we consider three of these problems for spherical partial sums: the principle of generalized localization, summability almost everywhere, and convergence almost everywhere of multiple Fourier series of smooth functions. A brief overview of the work in these areas is given and unsolved problems are mentioned and new problems are formulated. Moreover, at the end of the work, a new result on the convergence of spherical sums for functions from Sobolev classes is proved.

REFERENCES

1. Sh. A. Alimov, R. R. Ashurov, and A. K. Pulatov, "Kratnye ryady i integraly Fur'e" [Multiple Fourier series and integrals], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math.], 1989, **42**, 7–104 (in Russian).
2. Sh. A. Alimov, V. A. Il'in, and E. M. Nikishin, "Problemy skhodimosti kratnykh trigonometricheskikh ryadov i spektral'nykh razlozheniy. I" [Convergence problems for multiple trigonometric series and spectral expansions. I], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1976, **31**, 29–86 (in Russian).
3. R. R. Ashurov, "Ob usloviyakh lokalizatsii dlya spektral'nykh razlozheniy ellipticheskikh operatorov s postoyannymi koeffitsientami" [On localization conditions for spectral expansions of elliptic operators with constant coefficients], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1983, **33**, 434–439 (in Russian).

4. R. R. Ashurov, “Summiruemost’ pochti vsyudu ryadov Fur’e funktsiy iz L_p po sobstvennym funktsiyam” [Summability almost everywhere of Fourier series of functions from L_p in eigenfunctions], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1983, **34**, 837–843 (in Russian).
5. R. R. Ashurov, “Ob usloviyakh lokalizatsii dlya trigonometricheskikh ryadov Fur’e” [Localization conditions for trigonometric Fourier series], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1985, **31**, 496–499 (in Russian).
6. R. R. Ashurov, “Summiruemost’ kratnykh trigonometricheskikh ryadov Fur’e” [Summability of multiple trigonometric Fourier series], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1991, **49**, 563–568 (in Russian).
7. R. R. Ashurov, “O spektral’nykh razlozheniyakh ellipticheskikh psevdodifferentsial’nykh operatorov” [Spectral decompositions of elliptic pseudodifferential operators], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 1998, **6**, 20–29 (in Russian).
8. R. R. Ashurov, “Obobshchennaya lokalizatsiya dlya sharovykh chastichnykh summ kratnykh ryadov Fur’e” [Generalized localization for spherical partial sums of multiple Fourier series], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2019, **489**, 7–10 (in Russian).
9. R. R. Ashurov and K. T. Buvaev, “Summiruemost’ pochti vsyudu kratnykh integralov Fur’e” [Summability almost everywhere of multiple Fourier integrals], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2017, **53**, 750–760 (in Russian).
10. R. R. Ashurov and Yu. E. Fayziev, “Printsip obobshchennoy lokalizatsii dlya nepreryvnykh vsplesk-razlozheniy” [Generalized localization principle for continuous wavelet expansions], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2019, **106**, 75–81 (in Russian).
11. K. I. Babenko, “O summiruemosti i skhodimosti razlozheniy po sobstvennym funktsiyam differentsial’nogo operatora” [On summability and convergence of expansions in eigenfunctions of a differential operator], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1973, **91**, 147–201 (in Russian).
12. A. Y. Bastis, “Obobshchennyy printsip lokalizatsii dlya N-kratnogo integrala Fur’e” [Generalized localization principle for N-fold Fourier integral], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1984, **278**, 777–778 (in Russian).
13. A. Y. Bastis, “Obobshchennaya lokalizatsiya dlya ryadov Fur’e po sobstvennym funktsiyam operatora Laplasa v klassakh L_p” [Generalized localization for Fourier series in eigenfunctions of the Laplace operator in the L_p classes], *Litov. mat. sb.* [Lithuanian Math. Digest], 1991, **31**, 387–405 (in Russian).
14. I. L. Bloshanskiy, “O ravnomernoy skhodimosti trigonometricheskikh ryadov i integralov Fur’e” [On uniform convergence of trigonometric series and Fourier integrals], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1975, **18**, 675–684 (in Russian).
15. V. A. Il’in, “Ob obobshchennoy interpretatsii printsipa lokalizatsii dlya ryadov Fur’e po fundamental’nym sistemam funktsiy” [On generalized interpretation of the localization principle for Fourier series in fundamental systems of functions], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1968, **9**, No. 5, 1093–1106 (in Russian).
16. R. R. Ashurov, “Generalized localization for spherical partial sums of multiple Fourier series,” *J. Fourier Anal. Appl.*, 2019, **25**, No. 6, 3174–3183.
17. R. R. Ashurov, A. Ahmedov, and B. Mahmud Ahmad Rodzi, “The generalized localization for multiple Fourier integrals,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2010, **371**, 832–841.
18. R. R. Ashurov and A. Butaev, “On generalized localization of fourier inversion for distributions,” In: *Topics in functional analysis and algebra*, USA–Uzbekistan Conf. on Anal. and Math. Phys., California State Univ., Fullerton, USA, May 20–23, 2014, American Mathematical Society, Providence, 2016, pp. 33–50.
19. R. R. Ashurov and A. Butaev, “On pointwise convergence of continuous wavelet transforms,” *Uzb. Math. J.*, 2018, **1**, 2–24.
20. R. R. Ashurov, A. Butaev, and B. Pradhan, “On generalized localization of fourier inversion associated with an elliptic operator for distributions,” *Abstr. Appl. Anal.*, 2012, **2012**, 649848.
21. A. Carbery, E. Romera, and F. Soria, “Radial weights and mixed norm inequalities for the disc multiplier,” *J. Funct. Anal.*, 1992, **109**, 52–75.
22. A. Carbery, J. L. Rubio de Francia, and L. Vega, “Almost everywhere summability of Fourier integrals,” *J. London Math. Soc. (2)*, 1988, **38**, 513–524.
23. A. Carbery and F. Soria, “Almost everywhere convergence of Fourier integrals for functions in Sobolev spaces, and an L_2-localization principle,” *Rev. Mat. Iberoam.*, 1988, **4**, 319–337.
24. A. Carbery and F. Soria, “Pointwise Fourier inversion and localization in R^n,” *J. Fourier Anal. Appl.*, 1997, **3**, Special Issue, 847–858.
25. L. Carleson, “On convergence and growth of partial sums of Fourier series,” *Acta Math.*, 1966, **116**, 135–157.
26. C. Fefferman, “On the divergence of multiple Fourier series,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1971, **77**, 191–195.
27. L. Grafakos, *Classical Fourier analysis*, Springer, New York, 2008.

28. R. A. Hunt, “On convergence of Fourier series,” *Proc. Conf. on Orthogonal Expansions and Their Continuous Analogues*, Univ. Press, Edwardsville–Carbondale, 1968, pp. 235–255.
29. C. E. Kenig and P. A. Tomas, “Maximal operators defined by Fourier multipliers,” *Studia Math.*, 1980, **68**, 79–83.
30. S. Lee, “Improved bounds for Bochner–Riesz and maximal Bochner–Riesz operators,” *Duke Math. J.*, 2004, **122**, 205–232.
31. Sh. Lu, “Conjectures and problems in Bochner–Riesz means,” *Front. Math. China.*, 2013, **8**, 1237–1251.
32. J. Mitchell, “On the summability of multiple orthogonal series,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1951, **71**, 136–151.
33. B. Randol, “On the asymptotic behavior of the Fourier transform of the indicator function of the convex set,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1969, **139**, 279–285.
34. P. Sjölin, “Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series,” *Ark. Mat.*, 1971, **9**, 65–90.
35. P. Sjölin, “Regularity and integrability of spherical means,” *Monatsh. Math.*, 1983, **96**, 277–291.
36. E. M. Stein, “Localization and summability of multiple Fourier series,” *Acta Math.*, 1958, **1-2**, 93–147.
37. E. M. Stein, “On limits of sequences of operators,” *Ann. Math.*, 1961, **74**, 140–170.
38. E. M. Stein, “Some problems in harmonic analysis,” In: *Harmonic analysis in Euclidean spaces. Part 1*, Am. Math. Soc, Providence, 1978, pp. 3–20.
39. E. M. Stein and G. Weiss, *Itroduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton University Press, Princeton, 1971.
40. T. Tao, “The weak-type endpoint Bochner–Riesz conjecture and related topics,” *Indiana Univ. Math. J.*, 1998, **47**, 1097–1124.
41. T. Tao, “On the maximal Bochner–Riesz conjecture in the plane for $p < 2$,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 2002, **354**, 1947–1959.

R. R. Ashurov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: ashurovr@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 4 (2021). С. 654–667
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-654-667 УДК 517.98

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ МЕР

© 2021 г. **А. С. ВЕКСЛЕР, В. И. ЧИЛИН**

Аннотация. Пусть (Ω,μ) — измеримое пространство с σ-конечной непрерывной мерой, $\mu(\Omega)=\infty$. Линейный оператор $T: L_1(\Omega)+L_\infty(\Omega)\to L_1(\Omega)+L_\infty(\Omega)$ называют *оператором Данфорда—Шварца*, если $\|T(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1$ (соответственно, $\|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$) для всех $f\in L_1(\Omega)$ (соответственно, $f\in L_\infty(\Omega)$). Если $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ — сильно непрерывная в $L_1(\Omega)$ полугруппа операторов Данфорда—Шварца, то каждый оператор $A_t(f)=\dfrac{1}{t}\int\limits_0^t T_s(f)ds \in L_1(\Omega)$, $f\in L_1(\Omega)$ имеет единственное продолжение до оператора Данфорда—Шварца, которое также обозначается через A_t, $t>0$. Доказывается, что во вполне симметричном пространстве $E(\Omega)\not\subseteq L_1$ измеримых функций на (Ω,μ) средние A_t сильно сходятся при $t\to+\infty$ для каждой сильно непрерывной в $L_1(\Omega)$ полугруппы $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ операторов Данфорда—Шварца в том и только в том случае, когда норма $\|\cdot\|_{E(\Omega)}$ порядково непрерывна.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Известная статистическая эргодическая теорема для линейных сжатий T рефлексивного банахова пространства $(X,\|\cdot\|_X)$ утверждает, что средние Чезаро $A_n(T)=\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^n T^k$ сходятся сильно в X [14, глава III, §3], т. е. для любого $x\in X$ существует такое $\widehat{x}\in X$, что

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n T^k(x)-\widehat{x}\right\|_X \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Полезными примерами, иллюстрирующими статистическую эргодическую теорему, являются банаховы пространства $L_p(\Omega)=L_p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, $1\leqslant p<\infty$, всех действительных измеримых функций f, заданных на измеримом пространстве $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ с σ-конечной мерой μ, для которых $\|f\|_p=(\int\limits_\Omega |f|^p d\mu)^{1/p}<\infty$ (равные почти всюду функции отождествляются). При $1<p<\infty$ пространства $L_p(\Omega)$ рефлексивны, и поэтому средние Чезаро $A_n(T)$ сходятся сильно в $L_p(\Omega)$ для любого линейного сжатия $T: L_p(\Omega)\to L_p(\Omega)$. В случае пространств $L_1(\Omega)$ и $L_\infty(\Omega)$ статистическая эргодическая теорема, вообще говоря, уже неверна.

Важными примерами линейных операторов, для которых верна статистическая эргодическая теорема, являются *абсолютные линейные сжатия*, т. е. такие линейные операторы $T: L_1(\Omega)\to$

$L_1(\Omega)$, для которых $\|T(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1$ для всех $f \in L_1(\Omega)$ и $\|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ для всех $f \in L_1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$.

Каждое абсолютное линейное сжатие T естественным образом продолжается до линейного сжатия в пространстве $L_p(\Omega)$ [16, гл. II, §4] (это продолжение также обозначается через T), и поэтому средние Чезаро $A_n(T)$ сходятся сильно в $L_p(\Omega)$ при $1 < p < \infty$. Эргодические свойства абсолютных линейных сжатий в пространствах $L_p(\Omega)$ рассматривались в [15, 17].

Каждое абсолютное линейное сжатие T однозначно определяет линейный оператор

$$\widehat{T} : L_1(\Omega) + L_\infty(\Omega) \to L_1(\Omega) + L_\infty(\Omega),$$

для которого сужение $\widehat{T}_{|L_1(\Omega)}$ на $L_1(\Omega)$ совпадает с оператором T (см. [7, теорема 3.1]). При этом

$$\|\widehat{T}(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1 \ \text{ для всех } \ f \in L_1(\Omega) \quad \text{и} \quad \|\widehat{T}(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \ \text{ для всех } \ f \in L_\infty(\Omega). \tag{1.1}$$

Линейный оператор $T : L_1(\Omega) + L_\infty(\Omega) \to L_1(\Omega) + L_\infty(\Omega)$, удовлетворяющий неравенствам (1.1), называют *оператором Данфорда—Шварца* (запись: $T \in DS$). Если $T \in DS$, то $T(E(\Omega)) \subset E(\Omega)$ и $\|T\|_{E(\Omega)\to E(\Omega)} \leqslant 1$ для любого точного интерполяционного в паре $(L_1(\Omega), L_\infty(\Omega))$ симметричного пространства $E(\Omega) \subseteq L_1(\Omega) + L_\infty(\Omega)$ (см. [16, гл. II, §4, раздел 2]). Примерами таких точных интерполяционных симметричных пространств служат функциональные пространства Орлича, Лоренца и Марцинкевича. Отметим также, что класс точных интерполяционных симметричных пространств для пары $(L_1(\Omega), L_\infty(\Omega))$ совпадает с классом вполне симметричных пространств измеримых функций на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (см. [16, гл. II, §4, теорема 4.3]).

Естественно возникает задача об описании класса всех вполне симметричных пространств $E(\Omega)$, для которых сохраняется справедливость статистической эргодической теоремы при действии произвольного оператора Данфорда—Шварца $T : E(\Omega) \to E(\Omega)$. Известно, что в случае пространства Лебега $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ с конечной непрерывной мерой средние Чезаро $A_n(T)$ сходятся сильно во вполне симметричном пространстве $E(\Omega)$ для любого $T \in DS$ в том и только в том случае, когда $E(\Omega)$ сепарабельно (см. [1, 2, 19, 20], [4, гл. 2, § 2.1, теорема 2.1.3]). Если же $\mu(\Omega) = \infty$, то уже в случае сепарабельного вполне симметричного пространства $L_1((0, \infty), \nu)$, где ν — обычная мера Лебега, существуют такие $T \in DS$, для которых статистическая эргодическая теорема неверна. В [11] показано, что необходимым и достаточным условием для справедливости статистической эргодической теоремы при действии произвольного оператора Данфорда—Шварца $T : E(0, \infty) \to E(0, \infty)$ во вполне симметричном пространстве $E(0, \infty)$ измеримых функций на $((0, \infty), \nu)$ является одновременное выполнение следующих двух требований: (i) $E(0, \infty)$ сепарабельно; (ii) $E(0, \infty) \nsubseteq L_1((0, \infty), \nu)$.

Основная цель настоящей работы есть установление аналогичного критерия справедливости статистической эргодической теоремы для действий произвольных сильно непрерывных в $L_1(\Omega)$ полугрупп $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ операторов Данфорда—Шварца во вполне симметричных пространствах измеримых функций, заданных на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ с σ-конечной непрерывной мерой.

2. Предварительные сведения

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — измеримое пространство с σ-конечной мерой. Через $L_0 = L_0(\Omega)$ обозначим алгебру всех классов равных почти всюду действительных измеримых функций на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, а через $L_0(\mu)$ — подалгебру в L_0, состоящую из тех функций $f \in L$, для которых $\mu(\{|f| > \lambda\}) < \infty$ при некотором $\lambda > 0$. Как обычно, через $L_p \subset L_0(\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, обозначается классическое банахово функциональное пространство, снабженное стандартной нормой $\|\cdot\|_p$.

Если $f \in L_0(\mu)$, то *невозрастающая перестановка* $\mu_t(f)$ функции f определяется с помощью равенства

$$\mu_t(f) = \inf\{\lambda > 0 : \mu\{|f| > \lambda\} \leqslant t\}, \quad t \geqslant 0$$

(см., например, [6, ch. II, §1], [16, гл. II, §2]).

Ненулевое линейное подпространство $E \subset L_0(\mu)$ с банаховой нормой $\|\cdot\|_E$ называется *симметричным* пространством на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, если из условий

$$f \in E, \ g \in L_0(\mu), \ \mu_t(g) \leqslant \mu_t(f) \ \text{ для всех } \ t \geqslant 0$$

следует, что $g \in E$ и $\|g\|_E \leqslant \|f\|_E$.

Примерами симметричных пространств служат банаховы пространства $(L_p, \|\cdot\|_p)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, а также пространство $L_1 \cap L_\infty$ с нормой

$$\|f\|_{L_1 \cap L_\infty} = \max\{\|f\|_1, \|f\|_\infty\}$$

и пространство $L_1 + L_\infty$ с нормой

$$\|f\|_{L_1 + L_\infty} = \inf\{\|g\|_1 + \|h\|_\infty : f = g + h,\ g \in L_1,\ h \in L_\infty\}$$

(см. [16, гл. II, §4]).

Положим

$$\mathcal{R}_\mu = \{f \in L_0(\mu) : \mu_t(f) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty\}.$$

Известно, что $\mathcal{R}_\mu$ совпадает с замыканием подпространства $L_1 \cap L_\infty$ в $(L_1 + L_\infty, \|\cdot\|_{L_1+L_\infty})$ и верно равенство

$$\mathcal{R}_\mu = \{f \in L_0(\mu) : \mu\{|f| > \lambda\} < \infty \quad \text{для всех} \quad \lambda > 0\}.$$

В частности, $(\mathcal{R}_\mu, \|\cdot\|_{L_1+L_\infty})$ также есть симметричное пространство на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Обозначим через $\mathcal{A}_\nu$ σ-алгебру всех измеримых по Лебегу множеств из $(0, \infty)$, а через ν — меру Лебега на $(0, \infty)$. Для любого симметричного пространства $E = E(\nu)$ на $((0, \infty), \mathcal{A}_\nu, \nu)$ положим

$$E(\mu) = \{f \in L_0(\mu) : \mu_t(f) \in E\};$$

$$\|f\|_{E(\mu)} = \|\mu_t(f)\|_E, \quad f \in E(\mu).$$

Известно, что $(E(\mu), \|\cdot\|_{E(\mu)})$ есть симметричное пространство на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (см., например, [16, гл. II, §8]). Это симметричное пространство обычно называют пространством, порожденным симметричным пространством $E(\nu)$. В случае, когда $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ не имеет атомов (такие измеримые пространства называются неатомическими), каждое симметричное пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ порождается симметричным пространством $(E(\nu), \|\cdot\|_{E(\nu)})$ на $((0, \infty), \mathcal{A}_\nu, \nu)$, определенным равенствами

$$E(\nu) = \{f \in L_0(\nu) : \mu_t(f) = \mu_t(g) \quad \text{для некоторого} \quad g \in E\};$$

$$\|f\|_{E(\nu)} = \|g\|_E, \quad \text{где} \quad \mu_t(f) = \mu_t(g).$$

Для любого симметричного пространства E всегда верны следующие непрерывные вложения [6, ch. 2, §6, Theorem 6.6]:

$$(L_1 \cap L_\infty, \|\cdot\|_{L_1 \cap L_\infty}) \subset (E, \|\cdot\|_E) \subset (L_1 + L_\infty, \|\cdot\|_{L_1 + L_\infty}).$$

Обозначим через χ_A характеристическую функцию множества $A \in \mathcal{A}$ и положим $\mathbf{1} = \chi_\Omega$. Если $\mu(\Omega) < \infty$, то

$$\mathbf{1} \in L_\infty \subset E \subset L_1 = \mathcal{R}_\mu.$$

Следующее утверждение описывает класс симметричных пространств, содержащихся в $\mathcal{R}_\mu$ (см. [7, Proposition 2.1]).

Утверждение 2.1. *Если $\mu(\Omega) = +\infty$, то симметричное пространство E на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ содержится в $\mathcal{R}_\mu$ в том и только в том случае, когда $\mathbf{1} \notin E$.*

Если $(E, \|\cdot\|_E)$ — симметричное пространство на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, то *ассоциированное пространство* (*Köthe dual space*) $(E^\times, \|\cdot\|_{E^\times})$ для $(E, \|\cdot\|_E)$ определяется следующими равенствами:

$$E^\times = \{f \in L_1 + L_\infty : \int\limits_\Omega |fg| d\mu < \infty \quad \text{для всех} \quad g \in E\},$$

$$\|f\|_{E^\times} = \sup\{\int\limits_\Omega |fg| d\mu : \quad \|g\|_E \leqslant 1\}.$$

Известно (см., например [18, Ch. 7, § 7.1], что $(E^\times, \|\,\|_{E^\times})$ есть симметричное пространство на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. При этом

$$E \subseteq E^{\times\times},\ (L_\infty)^\times = L_1,\ (L_1)^\times = L_\infty,$$

$$(L_1 \cap L_\infty)^\times = L_1 + L_\infty,\ (L_1 + L_\infty)^\times = L_1 \cap L_\infty.$$

Определим в $L_0(\mu)$ частичный порядок Харди—Литтлвуда—Полиа (Hardy, Littlewood, Polya) $f \prec g$, полагая

$$f \prec g \iff \int_0^s \mu_t(f)dt \leqslant \int_0^s \mu_t(g)dt \quad \text{для всех} \quad s > 0.$$

Ненулевое линейное подпространство $E \subset L_0(\mu)$ с банаховой нормой $\|\cdot\|_E$ называется *вполне симметричным* пространством на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, если из условий $f \in E$, $g \in L_0(\mu)$, $g \prec f$, следует, что $g \in E$ и $\|g\|_E \leqslant \|f\|_E$.

Любое вполне симметричное пространство является симметричным пространством. Обратное, вообще говоря, неверно (см. [16, гл. II, §5, теорема 5.11]). Примерами вполне симметричных пространств служат пространства $(L_p, \|\cdot\|_p)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $L_1 \cap L_\infty$, $L_1 + L_\infty$, $(\mathcal{R}_\mu, \|\cdot\|_{L_1+L_\infty})$, $(E^\times, \|\cdot\|_{E^\times})$.

Как уже отмечалось во введении, линейный оператор $T : L_1 + L_\infty \to L_1 + L_\infty$ есть оператор Данфорда—Шварца (запись: $T \in DS$), если

$$\|T(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1 \quad \text{для всех} \quad f \in L_1, \qquad \|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \quad \text{для всех} \quad f \in L_\infty.$$

Для каждого оператора $T \in DS$ верны неравенства $\|T\|_{L_1+L_\infty \to L_1+L_\infty} \leqslant 1$, $Tf \prec\prec f$ при всех $f \in L_1 + L_\infty$ (см. [16, гл. II, §3, раздел 4]). В частности, отсюда вытекает, что $T(E) \subset E$ и $\|T\|_{E \to E} \leqslant 1$ для любого вполне симметричного пространства E (см. [16, гл. II, §4, раздел 2]).

Пусть $\{T_t\}_{t \geqslant 0}$ — полугруппа операторов Данфорда—Шварца, действующая в симметричном пространстве $L_1 + L_\infty$ (при $t = 0$ считаем, что $T_0(f) = I(f) = f$ есть тождественный оператор в $L_1 + L_\infty$). Говорят, что полугруппа $\{T_t\}_{t \geqslant 0}$ *сильно непрерывна* в L_1, если

$$\|T_t(f) - T_{t_0}(f)\|_1 \to 0 \quad \text{при} \quad t \to t_0 \quad \text{для всех} \quad f \in L_1.$$

В этом случае для фиксированного $f \in L_1$ и любого $g \in L_\infty$ функция $\varphi_{f,g}(t) = \int\limits_\Omega T_t(f)g)d\mu$ непрерывна на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, и поэтому отображение $U_f : \mathbb{R}_+ \to L_1$, определенное равенством $U_f(t) = T_t(f)$, является слабо ν-измеримым (см. [22, Ch. V, §4]). Поскольку образ $U_f(\mathbb{R}_+)$ есть сепарабельное подмножество в L_1, то, согласно теореме Петтиса (см. [22, Ch. V, §4]), отображение U_f сильно ν-измеримо, и следовательно, действительная функция $\|U_f(t)\|_1 = \|T_t(f)\|_1$ также ν-измерима на $\mathbb{R}_+$. Поэтому из неравенства $\|T_t(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1$ следует, что неотрицательная функция $\|T_s(f)\|_1$ интегрируема по Лебегу на отрезке $[0, t]$ для каждого $t > 0$. Следовательно, L_1-значная функция $T_s(f)$ является ν-интегрируемой по Бохнеру на каждом отрезке $[0, t]$, $t > 0$ (см. [22, Ch. V, §5, Theorem 1]). В частности, для любых $f \in L_1$ и $t > 0$ существует интеграл

$$A_t(f) = \frac{1}{t} \int_0^t T_s(f)ds \in L_1, \tag{2.1}$$

при этом $\|A_t(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1$ для всех $f \in L_1$ и $\|A_t(xf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ для всех $f \in L_1 \cap L_\infty$. Следовательно, оператор A_t есть абсолютное линейное сжатие в L_1 для каждого $t > 0$ (при $t = 0$ считаем, что $A_0(f) = I(f) = f$ есть тождественный оператор). Согласно [7, Theorem 3.2], для любого $t \geqslant 0$ существует единственное расширение оператора A_t до оператора Данфорда—Шварца, действующего в $L_1 + L_\infty$ (это расширение также будем обозначать через A_t). Операторы $A_t \in DS$ обычно называют *непрерывными средними* сильно непрерывной в L_1 полугруппы $\{T_t\}_{t \geqslant 0}$. Для таких непрерывных средних всегда верны равенства $A_t(f) = \dfrac{1}{t} \int\limits_0^t T_s(f)ds \in L_1$ при каждом $f \in L_1$ и включения $A_t(E) \subset E$ для всех вполне симметричных пространств E на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Известна следующая статистическая эргодическая теорема для сильно непрерывных в L_1 полугрупп $\{T_t\}_{t \geqslant 0} \subset DS$ (см., например, [14, Ch. VIII, §7, Theorem 1, Corollary 3]).

Теорема 2.1. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — *измеримое пространство с* σ-*конечной мерой, и пусть* $\{T_t\}_{t \geqslant 0}$ — *сильно непрерывная в* L_1 *полугруппа операторов Данфорда—Шварца. Тогда непрерывные средние* $\{A_t\}_{t \geqslant 0}$ *сходятся сильно в каждом* $L_p(\mu)$, $1 < p < \infty$, *при* $t \to \infty$, *т. е. для любого* $f \in L_p(\mu)$ *существует такое* $\widehat{f} \in L_p(\mu)$, *что* $\|A_t(f) - \widehat{f}\|_p \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Отметим, что в случае $\mu(\Omega) < \infty$ утверждение теоремы 2.1 сохраняется и для пространства $L_1(\mu)$ (см. [14, Ch. VIII, §7, Corollary 4]).

3. Статистическая эргодическая теорема и порядковая непрерывность нормы

В этом разделе доказывается, что для каждого вполне симметричного пространства $(E, \|\cdot\|_E)$ на неатомическом измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ с σ-конечной мерой μ, $\mu(\Omega) = \infty$, норма $\|\cdot\|_E$ которого не является порядково непрерывной, всегда существует такая сильно непрерывная в L_1 полугруппа $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ операторов Данфорда—Шварца, что непрерывные средние $\{A_t\}_{t\geqslant 0}$ не сходятся сильно в $(E, \|\cdot\|_E)$, т. е. для полугруппы $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ неверна статистическая эргодическая теорема в $(E, \|\cdot\|_E)$.

Пусть $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ — два измеримых пространства с σ-конечными мерами. Отображение $\sigma : \Omega_1 \to \Omega_2$ называется *сохраняющим меру преобразованием* , если

$$\sigma^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1 \quad \text{и} \quad \mu_1\left(\sigma^{-1}(A)\right) = \mu_2(A) \ \text{ для любого } \ A \in \mathcal{A}_2.$$

Обозначим через $\operatorname{supp}(f)$ носитель функции $f \in L_0(\Omega)$. Нам понадобится следующее важное свойство неатомических пространств с σ-конечной мерой.

Теорема 3.1 (см. [6, Ch. 2, Corollary 7.6]). *Если $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — неатомическое пространство с σ-конечной мерой, то для любого $0 \leqslant f \in \mathcal{R}_\mu$ существует такое сюръективное сохраняющее меру преобразование $\sigma : \operatorname{supp}(f) \to \operatorname{supp}(\mu_t(f))$, что $f(\omega) = \mu_t(f)(\sigma(\omega))$ для п.в. $\omega \in \operatorname{supp}(f)$.*

Если в условиях теоремы 3.1 $\mu(\operatorname{supp}(f)) = +\infty$ (это равенство выполняется, например, в случае, когда $\operatorname{supp}(f) = \Omega$), то $\operatorname{supp}(\mu_t(f)) = (0, \infty)$, и в этой ситуации отображение σ есть сюръективное сохраняющее меру преобразование из $\operatorname{supp}(f)$ на $(0, \infty)$.

Пусть ∇_1, ∇_2 — полные булевы алгебры. Булев гомоморфизм $\varphi : \nabla_1 \to \nabla_2$ называется *вполне аддитивным*, если $\varphi(\sup\limits_{i\in I} e_i) = \sup\limits_{i\in I} \varphi(e_i)$ для любого семейства $\{e_i\}_{i\in I}$ попарно дизъюнктных элементов из ∇_1. Каждый булев изоморфизм $\varphi : \nabla_1 \to \nabla_2$ всегда вполне аддитивен.

Обозначим через ∇_μ полную булеву алгебру классов эквивалентности $e = [A]$ равных почти всюду множеств из $A \in \mathcal{A}$. Функция $\widehat{\mu}(e) = \mu(A)$ есть строго положительная σ-конечная счетно-аддитивная мера на ∇_μ (см., например, [21, Ch. I, §6]). В дальнейшем меру $\widehat{\mu}$ будем обозначать также через μ, соответственно, алгебру $L_0(\Omega)$ (пространство $L_p(\Omega)$) через $L_0(\nabla_\mu)$ ($L_p(\nabla_\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$).

Если $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$ — два измеримых пространства с σ-конечными мерами и преобразование $\sigma : \Omega_1 \to \Omega_2$ сохраняет меру, то отображение $\varphi : \nabla_{\mu_2} \to \nabla_{\mu_1}$, определяемое равенством $\varphi([A]) = [\sigma^{-1}(A)]$, $A \in \mathcal{A}_2$, есть булев гомоморфизм со свойством $\mu_1(\varphi(e)) = \mu_2(e)$ для всех $e \in \nabla_{\mu_2}$ (в этом случае говорят, что булев гомоморфизм φ сохраняет меру).

Теорема 3.2. *Пусть $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ — измеримые пространства с σ-конечными мерами μ_i, $i = 1, 2$, и пусть $\varphi : \nabla_{\mu_2} \to \nabla_{\mu_1}$ — инъективный вполне аддитивный булев гомоморфизм (изоморфизм), сохраняющий меру. Тогда существует такой инъективный гомоморфизм (изоморфизм) Φ из алгебры $L_0(\nabla_{\mu_2})$ в алгебру (на алгебру) $L_0(\nabla_{\mu_1})$, что*

- (i) *$\Phi(e) = \varphi(e)$ для всех $e \in \nabla_{\mu_2}$;*
- (ii) *$\Phi(L_1(\nabla_{\mu_2})) \subset L_1(\nabla_{\mu_1})$ и $\Phi(L_\infty(\nabla_{\mu_2})) \subset L_\infty(\nabla_{\mu_1})$ (соответственно, $\Phi(L_1(\nabla_{\mu_2})) = L_1(\nabla_{\mu_1})$ и $\Phi(L_\infty(\nabla_{\mu_2})) = L_\infty(\nabla_{\mu_1})$), при этом оба отображения $\Phi : L_1(\nabla_{\mu_2}) \to L_1(\nabla_{\mu_1})$ и $\Phi : L_\infty(\nabla_{\mu_2}) \to L_\infty(\nabla_{\mu_1})$ суть линейные изометрии (соответственно, сюръективные линейные изометрии).*

Доказательство. (i). Покажем сначала, что булев гомоморфизм (изоморфизм) φ продолжается до гомоморфизма (изоморфизма) $\Phi_0 : L_\infty(\nabla_{\mu_2}) \to L_\infty(\nabla_{\mu_2})$. Обозначим через $\mathbb{R}(\nabla_{\mu_2})$ всюду плотную в банаховой алгебре $(L_\infty(\nabla_{\mu_2}), \|\cdot\|_\infty)$ подалгебру всех ступенчатых элементов алгебры $L_\infty(\nabla_{\mu_2})$ вида $f = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$, где $e_i \in \nabla_{\mu_2}$, $e_i e_j = 0$, если $i \neq j$, и $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел. Для каждого ступенчатого элемента $f = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$ положим $\Phi_0(f) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi(e_i)$. Так как φ есть инъективный булев гомоморфизм (изоморфизм), то Φ_0 есть инъективный гомоморфизм (изоморфизм) из алгебры $\mathbb{R}(\nabla_{\mu_2})$ в алгебру (на алгебру) $\mathbb{R}(\nabla_{\mu_1})$, при этом $\|f\|_\infty = \|\Phi_0(f)\|_\infty$ для всех $f \in \mathbb{R}(\nabla_{\mu_2})$. Поскольку подалгебра $\mathbb{R}(\nabla_{\mu_i})$ плотна в банаховой алгебре $(L_\infty(\nabla_{\mu_i}), \|\cdot\|_\infty)$, $i =$

$1, 2$, то Φ_0 продолжается до инъективного гомоморфизма (изоморфизма) $\Phi_0 : L_\infty(\nabla_{\mu_2}) \to L_\infty(\nabla_{\mu_2})$, при этом $\Phi_0(e) = \varphi(e)$ для всех $e \in \nabla_{\mu_2}$.

Если $f \in L_0(\nabla_{\mu_2})$, то существует такое разбиение $\{e_i\}_{i\in I}$ единицы $\mathbf{1}_{\nabla_{\mu_2}}$ булевой алгебры ∇_{μ_2}, что $fe_i \in L_\infty(\nabla_{\mu_1})$ для любого $i \in I$. Так как φ — вполне аддитивный булев гомоморфизм, то $\{\varphi(e_i)\}_{i\in I}$ есть разбиение единицы $\mathbf{1}_{\nabla_{\mu_1}}$ булевой алгебры ∇_{μ_1}. Следовательно, существует единственный элемент $g \in L(\nabla_{\mu_1})$ такой, что $\Phi_0(fe_i)\varphi(e_i) = g\varphi(e_i)$ для всех $i \in I$.

Если $\{q_j\}_{j\in J}$ — другое разбиение единицы $\mathbf{1}_{\nabla_{\mu_2}}$, для которого $fq_j \in L_\infty(\nabla_{\mu_2})$ при всех $j \in J$, то $p_{ij} = e_iq_j$, $i \in I$, $j \in J$, также есть разбиение единицы $\mathbf{1}_{\nabla_{\mu_2}}$ и $fp_{ij} \in L_\infty(\nabla_{\mu_2})$ для любых $i \in I$, $j \in J$. Если $h \in L_0(\nabla_{\mu_1})$ и $h\varphi(q_j) = \Phi_0(fq_j)\varphi(q_j)$ для всех $j \in J$, то

$$g\varphi(p_{ij}) = g\varphi(e_i)\varphi(q_j) = \Phi_0(fe_i)\varphi(e_i)\varphi(q_j) = \Phi_0(fe_iq_j) =$$
$$= \Phi_0(fq_j)\varphi(q_j)\varphi(e_i) = h\varphi(q_j)\varphi(e_i) = h\varphi(p_{ij})$$

при каждом $i \in I$, $j \in J$. Поскольку

$$\sup_{i,j} \varphi(p_{ij}) = \left(\sup_i \varphi(e_i)\right)\left(\sup_j \varphi(q_j)\right) = \mathbf{1}_{\nabla_{\mu_1}},$$

то $h = g$. Таким образом, корректно определено отображение $\Phi : L_0(\nabla_{\mu_2}) \to L_0(\nabla_{\mu_1})$ с помощью равенства $\Phi(f) = g$. Ясно, что построенное отображение Φ есть инъективный гомоморфизм (изоморфизм), для которого $\Phi(e) = \varphi(e)$ при каждом $e \in \nabla_2$ и $\Phi(f) = \Phi_0(f)$ для всех $f \in L_\infty(\nabla_{\mu_2})$.

(ii). Поскольку φ — сохраняющий меру гомоморфизм, то для любого $f = \sum\limits_{i=1}^k \lambda_i e_i \in \mathbb{R}(\nabla_{\mu_2})$ имеем, что

$$\|\Phi(f)\|_1 = \left\|\sum_{i=1}^k \lambda_i\varphi(e_i)\right\|_1 = \sum_{i=1}^k |\lambda_i|\, \mu_1(\varphi(e_i)) = \sum_{i=1}^k |\lambda_i|\, \mu_2(e_i) = \|f\|_1.$$

Так как алгебра $\mathbb{R}(\nabla_{\mu_2})$ плотна в банаховом пространстве $(L_1\nabla_{\mu_2}), \|\cdot\|_1)$, то существует такая линейная изометрия (соответственно, сюръективная линейная изометрия) U из $(L_1(\nabla_{\mu_2}), \|\cdot\|_1)$ в $(L_1(\nabla_{\mu_1}), \|\cdot\|_1)$, что $U(f) = \Phi(f)$ для всех $f \in \mathbb{R}(\nabla_{\mu_2})$. Если $0 \leqslant f \in L_1(\nabla_{\mu_2})$, то найдется такая последовательность $\{f_n\} \subset \mathbb{R}(\nabla_{\mu_2})$, что $0 \leqslant f_n \uparrow f$. В частности, $\|f_n - f\|_1 \to 0$, что влечет $\|U(f_n) - U(f)\|_1 \to 0$. Таким образом, $\Phi(f_n) = U(f_n) \uparrow U(f)$. Так как $\Phi : L_0(\nabla_{\mu_2}) \to L_0(\nabla_{\mu_1})$ есть инъективный вполне аддитивный гомоморфизм, то $\Phi(f_n) \uparrow \Phi(f)$, и поэтому $\Phi(f) = U(f)$ для всех $0 \leqslant f \in L_1(\nabla_{\mu_2})$. Отсюда сразу следует, что $\Phi(g) = U(g)$ при каждом $g \in L_1(\nabla_{\mu_2})$. Следовательно, отображение $\Phi : (L_1(\nabla_{\mu_2}), \|\cdot\|_1) \to (L_1(\nabla_{\mu_1}), \|\cdot\|_1)$ есть линейная изометрия (соответственно, сюръективная линейная изометрия).

Если $0 \leqslant f \in L_\infty(\nabla_{\mu_2})$, то выбираем такую последовательность $\{f_n\} \subset \mathbb{R}(\nabla_{\mu_2})$, для которой $0 \leqslant f_n \uparrow f$ и $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Повторяя предыдущее доказательство, получим, что отображение $\Phi : L_\infty(\nabla_{\mu_2}) \to L_\infty(\nabla_{\mu_1})$ есть линейная изометрия (соответственно, сюръективная линейная изометрия). $\square$

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — измеримое пространство с полной непрерывной σ-конечной мерой, $\mu(\Omega) = \infty$, и пусть $\mathcal{A}_\nu$ есть σ-алгебра всех измеримых по Лебегу множеств из $((0, \infty, \nu)$. Зафиксируем функцию $0 \leqslant f \in \mathcal{R}_\mu$ с $\operatorname{supp}(f) = \mathbf{1}_{\nabla_\mu}$ и, используя теорему 3.1, рассмотрим сюръективное сохраняющее меру преобразование $\sigma : \Omega \to (0, \infty)$, для которого $f(\omega) = \mu_t(f)(\sigma(\omega))$ для п.в. $\omega \in \Omega$. Положим

$$\mathcal{A}_\sigma = \{\sigma^{-1}(B) : B \in \mathcal{A}_\nu\}, \quad \nabla_\sigma = \{[\sigma^{-1}(B)] : B \in \mathcal{A}_\nu\}. \tag{3.1}$$

Отображение $\varphi : \nabla_\nu \to \nabla_\sigma$, определяемое равенством

$$\varphi([B]) = [\sigma^{-1}(B)], \ B \in \mathcal{A}_\nu, \tag{3.2}$$

есть сохраняющий меру булев изоморфизм из ∇_ν на ∇_σ. Согласно теореме 3.2, существует изоморфизм Φ из алгебры $L_0(\nabla_\nu)$ на алгебру $L_0(\nabla_\sigma)$, для которого $\Phi(e) = \varphi(e)$ для всех $e \in \nabla_\nu$, при этом $\Phi(\mu_t(f)) = f$ и $\Phi(g \circ \sigma) = g$ для каждой функции $g \in L_0(\nabla_\nu)$. Поскольку изоморфизм $\varphi : \nabla_\nu \to \nabla_\sigma$ сохраняет меру, то функции $\Phi(g)$ и g равноизмеримы для всех $g \in L_0(\nabla_\nu)$.

Если $E(\nabla_\nu)$ — симметричное пространство на $((0, \infty), \mathcal{A}_\nu, \nu)$ и $E(\nabla_\mu)$ — симметричное пространство на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, порожденное пространством $E(\nabla_\nu)$, то из равноизмеримости функций $\Phi(g)$ и g,

$g \in L_0(\nabla_\sigma)$ следует, что $\Phi(g) \in E(\nabla_\mu)$ и $\|\Phi(g)\|_{E(\nabla_\mu)} = \|g\|_{\nabla_\nu)}$ для каждой функции $g \in E(\nabla_\nu)$. Это означает, что $\Phi(E(\nabla_\nu)) \subseteq E(\nabla_\mu)$ и отображение Φ есть линейная изометрия из $E(\nabla_\nu)$ в $E(\nabla_\mu)$.

Таким образом, верна следующая теорема об изометрическом вложении симметричного пространства $E(\nabla_\nu)$ в симметричное пространство $E(\nabla_\mu)$.

Теорема 3.3. *Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — измеримое пространство с непрерывной σ-конечной мерой, $0 \leqslant f \in \mathcal{R}_\mu, \operatorname{supp}(f) = \Omega$, и пусть $\sigma : \Omega \to (0, \infty)$ сюръективное сохраняющее меру преобразование, для которого $f(\omega) = \mu_t(f)(\sigma(\omega))$ для п.в. $\omega \in \Omega$ (см. теорему 3.1). Пусть ∇_σ — σ-подалгебра в ∇_μ (см. равенство (3.1)), и пусть Φ — изоморфизм из алгебры $L_0(\nabla_\nu)$ на алгебру $L_0(\nabla_\sigma)$, для которого $\Phi(e) = \varphi(e)$ для всех $e \in \nabla_\nu$ (см. равенство (3.2) и теорему 3.2). Тогда для каждого симметричного пространства $E(\nabla_\nu)$ на $((0, \infty), \mathcal{A}_\nu, \nu)$ верно равенство $\Phi(E(\nabla_\nu)) = E(\nabla_\sigma)$, где $E(\nabla_\sigma)$ есть симметричное пространство на (∇_σ, μ), порожденное симметричным пространством $E(\nabla_\nu)$, при этом отображение $\Phi : E(\nabla_\nu) \to E(\nabla_\sigma)$ есть сюръективная изометрия.*

Говорят, что норма $\|\cdot\|_{E(\mu)}$ в симметричном пространстве $E(\mu)$ на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *порядково непрерывна*, если из условий $0 \leqslant f_n \in E(\mu)$, $n = 1, 2, \ldots$, $f_n \downarrow 0$ следует, что $\|f_n\|_{E(\mu)} \to 0$. Ясно, что симметричное пространство $E(\nu)$ имеет (соответственно, не имеет) порядково непрерывную норму в том и только в том случае, когда порожденное им симметричное пространство $E(\mu)$ также имеет (соответственно, не имеет) порядково непрерывную норму. Отметим также, что симметричное пространство $E(\nu)$ на $((0, \infty), \mathcal{A}_\nu, \nu)$ имеет порядково непрерывную норму тогда и только тогда, когда $E(\nu)$ сепарабельное пространство (см., например, [5, гл. IV, §3, теорема 3]).

Будем говорить, что вполне симметричное пространство $E(\mu)$ удовлетворяет *статистической эргодической теореме* для сильно непрерывных в L_1 полугрупп $\{T_t\}_{t \geqslant 0} \subset DS$ (запись: $E(\mu) \in$ (СЭТ)), если для любой сильно непрерывной в L_1 полугруппы $\{T_t\}_{t \geqslant 0}$ операторов Данфорда—Шварца непрерывные средние $\{A_t\}_{t \geqslant 0}$ сходятся сильно в $E(\mu)$, т. е. для каждого $f \in E(\mu)$ существует такое $\widetilde{f} \in E(\mu)$, что $\|A_t(f) - \widehat{f}\|_{E(\mu)} \to 0$ при $t \to \infty$.

Известен следующий критерий справедливости статистической эргодической теоремы для сильно непрерывных в L_1 полугрупп $\{T_t\}_{t \geqslant 0} \subset DS$ в случае пространств Лебега с конечной непрерывной мерой (см. [3, гл. 2, § 2.1, теорема 2.1.1, § 2.6, теорема 2.6.4]).

Теорема 3.4. *Пусть $((0, a), \mathcal{A}_\nu, \nu)$, $0 < a < \infty$ — измеримое пространство Лебега с конечной непрерывной мерой, и пусть $E(\nu)$ — вполне симметричное пространство на $((0, a), \mathcal{A}_\nu, \nu)$. Тогда $E(\nu) \in$ (СЭТ) в том и только в том случае, когда $E(\nu)$ имеет порядково непрерывную норму.*

Ниже показывается, что в случае пространства Лебега $((0, \infty), \mathcal{A}_\nu, \nu)$ с бесконечной непрерывной мерой для вполне симметричного пространства $L_1(\nu)$, имеющего порядково непрерывную норму, имеются примеры сильно непрерывных в L_1 полугрупп $\{T_t\}_{t \geqslant 0} \subset DS$, для которых статистическая эргодическая теорема неверна.

Пример 3.1. Положим $T_0 = I$ и для каждого $s \in (0, 1]$ определим оператор $T_s \in DS$, действующий в $L_1(\nu) + L_\infty(\nu)$ по правилу $T_s(f)(t) = f(t - s)$, $t \geqslant s$ и $T_s(f)(t) = 0$, $t \in (0, s)$. Если $s > 1$, то полагаем $T_s = T_1^{[s]} \cdot T_{\{s\}}$, где $[s]$ (соответственно, $\{s\}$) — целая (дробная) часть числа s. Нетрудно видеть, что $\{T_t\}_{t \geqslant 0}$ есть сильно непрерывная в L_1 полугруппа операторов Данфорда—Шварца, при этом для каждого $k = 1, 2, \ldots$ имеем, что

$$A_k(\chi_{0,1)})(t) = \left(\frac{1}{k}\int\limits_0^k T_s(\chi_{(0,1)})ds\right)(t) = \frac{1}{k} \cdot \left(\|\cdot\|_1 - \lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} T_{\frac{i\cdot k}{n}}(\chi_{(0,1)})\right)(t) =$$

$$= \left(\|\cdot\|_1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} T_{\frac{i\cdot k}{n}}(\chi_{(0,1)})\right)(t),$$

и поэтому $A_k(\chi_{0,1)})(t) = 0$ почти всюду для $t > k$. Аналогично, $\int\limits_k^{2k} T_s(\chi_{(0,1)})(t)ds = 0$ почти всюду для $0 < t \leqslant k$. Следовательно,

$$\|A_{2k}(\chi_{0,1)})(t) - A_k(\chi_{(0,1)})(t)\|_1 = \left\| \frac{1}{2k}\int\limits_0^{2k} T_s(\chi_{(0,1)})(t)ds - \frac{1}{k}\int\limits_0^{k} T_s(\chi_{(0,1)})(t)ds \right\|_1 =$$

$$= \left\| -\frac{1}{2k}\int\limits_0^{k} T_s(\chi_{(0,1)})(t)ds + \frac{1}{2k}\int\limits_k^{2k} T_s(\chi_{(0,1)})(t)ds \right\|_1 =$$

$$= \left\| \frac{1}{2k}\int\limits_0^{k} T_s(\chi_{(0,1)})(t)ds \right\|_1 + \left\| \frac{1}{2k}\int\limits_k^{2k} T_s(\chi_{(0,1)})(t)ds \right\|_1 .$$

Если $g = \int\limits_0^1 T_s(\chi_{(0,1)})(t)ds$, то для каждого $k = 1, 2, \ldots,$ имеем

$$(A_k(\chi_{(0,1)})(t) = \frac{1}{k}\int\limits_0^{k} T_s(\chi_{(0,1)})(t)ds = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_i^{i+1} T_s(\chi_{(0,1)})(t)ds = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} T_i(g) = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} T_1^i(g).$$

Так как $\|T_1(f)\|_1 = \|f\|_1$ для всех $f \in L_1(\nu)$, то

$$\|A_k(\chi_{(0,1)}\|_1 = \left\| \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} T_1^i(g) \right\|_1 = \|g\|_1.$$

Таким образом,

$$\|A_{2k}(\chi_{0,1)})(t) - A_k(\chi_{(0,1)})(t)\|_1 = \left\| \frac{1}{2k}\int\limits_0^{k} T_s(\chi_{(0,1)})(t)ds \right\|_1 + \left\| \frac{1}{2k}\int\limits_k^{2k} T_s(\chi_{(0,1)})(t)ds \right\|_1 = \frac{3}{2}\cdot \|g\|_1 > 0$$

для всех $k = 1, 2, \ldots$. Это означает, что сеть $\{A_t(\chi_{(0,1)})\}_{t>0}$ не может сходится по норме $\|\cdot\|_1$ при $t \to \infty$. Следовательно, $L_1(0,\infty) \notin$ (СЭТ).

Следующая теорема показывает, что для вполне симметричного пространства $E(\mu)$, не имеющего порядково непрерывную норму, обязательно верно $E(\mu) \notin$ (СЭТ) (ср. [9, Theorem 4.3]).

Теорема 3.5. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — *измеримое пространство с непрерывной* σ*-конечной мерой,* $\mu(\Omega) = \infty$, *и пусть* $E(\mu)$ — *симметричное пространство на* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, *порожденное вполне симметричным пространством* $E(\nu)$. *Если норма* $\|\cdot\|_{E(\mu)}$ *не является порядково непрерывной, то* $E(\mu) \notin$ *(СЭТ).*

Доказательство. Согласно [16, Ch. II, §4, теорема 4.8], существует такое натуральное число $k \in \mathbb{N}$, для которого $(E((0,k)), \|\cdot\|_{E((0,\infty),\nu)})$ не имеет порядково непрерывную норму. Следовательно, в силу теоремы 3.4 найдутся такие функция $f_0 \in E((0,k),\nu))$ и сильно непрерывная в $L_1((0,k),\nu))$ полугруппа $T_t : L_1((0,k),\nu)) + L_\infty((0,k),\nu) \to L_1((0,k),\nu)) + L_\infty((0,k),\nu))$, $t \geqslant 0$, операторов Данфорда—Шварца, для которых непрерывные средние $\{A_t(f_0)\}_{t\geqslant 0}$ не сходятся по норме $\|\cdot\|_{E((0,\infty),\nu)}$ при $t \to \infty$.

Определим операторы Данфорда—Шварца

$$\hat{T}_t : L_1((0,\infty),\nu)) + L_\infty((0,\infty),\nu) \to L_1((0,\infty),\nu)) + L_\infty((0,\infty),\nu),\ t \geqslant 0,$$

полагая $\hat{T}_t(h) = T_t(h\cdot\chi_{(0,k)})$, $h \in L_1((0,\infty),\nu)) + L_\infty((0,\infty),\nu)$. Ясно, что $\{\hat{T}_t\}_{t\geqslant 0}$ есть сильно непрерывная в $L_1((0,\infty),\nu))$ полугруппа, при этом $\hat{A}_t(h) = A_t(h)$ для всех $t \geqslant 0$ и каждого $h \in E((0,k),\nu))$, где $\{\hat{A}_t\}_{t\geqslant 0}$ (соответственно, $\{A_t\}_{t\geqslant 0}$) есть непрерывные средние для полугруппы $\{\hat{T}_t\}_{t\geqslant 0}$ (соответственно, $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$). Поскольку $f_0 \in E((0,k),\nu))$, то $\hat{A}_t(f_0) = A_t(f_0)$, для всех $t \geqslant 0$. Следовательно, непрерывные средние $\{\hat{A}_t(f_0)\}_{t\geqslant 0}$ не сходятся по норме $\|\cdot\|_{E((0,\infty),\nu)}$ при $t \to \infty$.

Пусть Φ есть изоморфизм из алгебры $L_0((0,\infty),\nu)$ на алгебру $L_0(\nabla_\sigma)$, для которого верно равенство $\Phi(E((0,\infty),\nu)) = E(\nabla_\sigma)$, при этом отображение $\Phi : E((0,\infty),\nu) \to E(\nabla_\sigma)$ есть сюръективная изометрия (см. теорему 3.3). Рассмотрим также оператор условного математического ожидания $M : L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu) \to L_1(\Omega,\mathcal{A}_\sigma,\mu)$ (определение σ-подалгебры A_σ см. в (3.1)). Ясно, что M является абсолютным линейным сжатием в $L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, и следовательно, единственным образом продолжается до оператора Данфорда—Шварца (см. [7, теорема 3.1]):

$$\widehat{M} : L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu) + L_\infty(\Omega,\mathcal{A},\mu) \to L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu) + L_\infty(\Omega,\mathcal{A},\mu),$$

для которого верно равенство $\widehat{M}(h) = h$ при всех $h \in L_1(\Omega,\mathcal{A}_\sigma,\mu) + L_\infty(\Omega,\mathcal{A}_\sigma,\mu)$.

Определим теперь операторы Данфорда—Шварца

$$\widetilde{T}_t : L_1(\Omega,\mu) + L_\infty(\Omega,\mu) \to L_1(\Omega,\mu) + L_\infty(\Omega,\mu),\ t \geqslant 0,$$

полагая $\widetilde{T}_t(g) = \big(\Phi \circ \hat{T}_t \circ \Phi^{-1} \circ \widehat{M}\big)(g)$, $g \in L_1(\Omega,\mu) + L_\infty(\Omega,\mu)$. Ясно, что $\{\widetilde{T}_t\}_{t\geqslant 0}$ есть сильно непрерывная в $L_1((\Omega,\mu)$ полугруппа, при этом из включения $\Phi(f_0) \in E(\nabla_\sigma)$ следует, что $\widetilde{T}_t(\Phi(f_0)) = \big(\Phi \circ \hat{T}_t \circ \Phi^{-1} \circ \widehat{M}\big)(\Phi(f_0)) = \Phi \circ \hat{T}_t(f_0)$ для всех $t \geqslant 0$. Это означает, что для непрерывных средних $\{\widetilde{A}_t\}_{t\geqslant 0}$ полугруппы $\{\widetilde{T}_t\}_{t\geqslant 0}$ верно равенство $\widetilde{A}_t(\Phi(f_0)) = \Phi \circ \hat{A}_t(f_0)$ для всех $t \geqslant 0$. Следовательно, непрерывные средние $\{\widetilde{A}_t(\Phi(f_0))\}_{t\geqslant 0}$ не сходятся по норме $\|\cdot\|_{E(\nabla_\sigma)}$ при $t \to \infty$. Это означает, что $E(\mu) \notin$ (СЭТ). $\square$

Следующая теорема дает еще одно достаточное условие для вполне симметричного пространства $E(\Omega)$, при выполнении которого верно $E(\Omega) \notin$ (СЭТ) (ср. [9, Theorem 4.2]).

Теорема 3.6. *Пусть $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ — измеримое пространство с непрерывной σ-конечной мерой, $\mu(\Omega) = \infty$, и пусть $E(\mu)$ — вполне симметричное пространство на $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$. Если $E(\mu) \subset L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, то $E(\mu) \notin$ (СЭТ).*

Доказательство. Рассмотрим сильно непрерывную в L_1 полугруппу $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ операторов Данфорда—Шварца из примера 3.1. Согласно этому примеру, имеем, что $L_1((0,\infty),\nu) \notin$ (СЭТ). Повторяя доказательство теоремы 3.5, получим, что $L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu) \notin$ (СЭТ), т. е. найдется такая функция $f_0 \in L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ и сильно непрерывная в $L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ полугруппа $T_t : L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu) + L_\infty(\Omega,\mathcal{A},\mu) \to L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu) + L_\infty(\Omega,\mathcal{A},\mu), t \geqslant 0$, операторов Данфорда—Шварца, что непрерывные средние $\{A_t(f_0)\}_{t\geqslant 0}$ не сходятся по норме $\|\cdot\|_{L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)}$ при $t \to \infty$.

Известно, что вложение $(E_1(\mu),\|\cdot\|_{E_1(\mu)}) \subset (E_2(\mu),\|\cdot\|_{E_2(\mu)})$ двух симметричных пространств на $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ всегда является непрерывным (см. [18, Ch. 6, § 6.1, Proposition 6.1.1]), т. е. существует такая константа $\alpha > 0$, что $\|f\|_{E_2(\mu)} \leqslant \alpha\|f\|_{E_1(\mu)}$ для всех $f \in E_1(\mu)$.

Так как $E(\mu) \subseteq L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, то $\|f\|_{L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)} \leqslant \alpha\|f\|_{E(\mu)}$ для всех $f \in E(\mu)$. Следовательно, непрерывные средние $\{A_t(f_0)\}_{t\geqslant 0}$ не сходятся по норме $\|\cdot\|_{E(\mu)}$ при $t \to \infty$, что влечет отсутствие сильной сходимости непрерывных средних $\{A_t\}_{t\geqslant 0}$ в $E(\mu)$, т. е. $E(\mu) \notin$ (СЭТ). $\square$

Отметим, что согласно [9, следствие 4.2] верен следующий критерий для справедливости вложения $E(\mu) \subset L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$.

Утверждение 3.1. *Пусть $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ — измеримое пространство с непрерывной σ-конечной мерой, $\mu(\Omega) = \infty$, и пусть $E(\mu)$ — симметричное пространство на $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$. Тогда вложение $E(\mu) \subset L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ верно в том и только в том случае, когда $\chi_\Omega \in E^\times(\mu)$, где $E^\times(\mu)$ — ассоциированное пространство для $E(\mu)$.*

4. Критерий справедливости статистической эргодической теоремы

Основная цель настоящего раздела есть нахождение необходимых и достаточных условий для вполне симметричных пространств $E(\mu)$ измеримых функций на пространстве $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ с непрерывной σ-конечной мерой, $\mu(\Omega) = \infty$, обеспечивающих справедливость включения $E(\mu) \in$ (СЭТ).

Пусть $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ — произвольное измеримое пространство с σ-конечной мерой, $f_n \in L_0(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$. Говорят, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции $f \in L_0(\Omega)$ *локально по мере*, если $f_n\chi_A \xrightarrow{\mu} f\chi_A$ для любого $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \infty$, где $g_n \xrightarrow{\mu} g$ есть обычная сходимость по мере μ для последовательности $g_n \in L_0(\Omega)$, $g \in L_0(\Omega)$. Известно, что для любого симметричного пространства

$(E(\mu), \|\cdot\|_{E(\mu)})$ на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ сходимость $\|f_n - f\|_{E(\mu)} \to 0$, $f_n, f \in E(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, влечет сходимость $f_n \to f$ локально по мере (см. [12, Proposition 2.2]).

Нам понадобится следующий вариант индивидуальной эргодической теоремы Данфорда—Шварца о поточечной сходимости непрерывных средних $\{A_t(f)\}_{t\geqslant 0}$ (см. [8, теорема 4.1], а также [10, теорема 4.1]).

Теорема 4.1. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — *измеримое пространство с σ-конечной мерой, и пусть* $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ — *сильно непрерывная в* L_1 *полугруппа операторов Данфорда—Шварца. Тогда для любого* $f \in \mathcal{R}_\mu$ *существует такая функция* $\widehat{f} \in \mathcal{R}_\mu$, *что непрерывные средние* $\{A_t(f)\}_{t\geqslant 0}$ *сходятся к* $\widehat{f}$ *почти всюду при* $t \to \infty$.

Определим отображение $P : \mathcal{R}_\mu \to \mathcal{R}_\mu$, полагая

$$P(f) = \text{п.в.} - \lim_{t\to\infty} A_t(f), \quad f \in \mathcal{R}_\mu.$$

Ясно, что P есть линейное отображение. Так как $\|A_t(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1$ для всех $f \in L_1(\Omega)$, то из сходимости почти всюду $A_t(f) \to P(f)$ и замкнутости шаров в $(L_1(\Omega), \|\cdot\|_1)$ относительно сходимости локально по мере (см. [5, Ch. IV, §3]) следует, что $\|P(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1$ для всех $f \in L_1(\Omega)$.

Аналогично, для каждого $f \in L_1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ имеем, что $\|A_t(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ при всех $t \geqslant 0$. Поэтому сходимость почти всюду $A_t(f) \to P(f)$, $t \to \infty$, влечет неравенство $\|P(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. Следовательно, P есть абсолютное линейное сжатие в $L_1(\Omega)$. Согласно [7, теорема 3.2], существует единственный оператор $\widehat{P} \in DS$ такой, что $\widehat{P}(f) = P(f)$ для всех $f \in \mathcal{R}_\mu$, в частности, $\|P\|_{\mathcal{R}_\mu\to\mathcal{R}_\mu} = \|\widehat{P}\|_{\mathcal{R}_\mu\to\mathcal{R}_\mu} \leqslant 1$.

Лемма 4.1. $(PT_r)(f) = P(f)$ *для всех* $f \in \mathcal{R}_\mu$, $r \geqslant 0$.

Доказательство. Так как

$$A_{t+r}(f) - \frac{t}{t+r}A_t(f) = \frac{1}{t+r}\int_0^{t+r} T_s(f)ds - \frac{1}{t+r}\int_0^t T_s(f)ds = \frac{1}{t+r}\int_t^{t+r} T_s(f)ds$$

и

$$(I - T_r)A_t(f) = (I - T_r)\frac{1}{t}\int_0^t T_s(f)ds = \frac{1}{t}\int_0^t T_s(f)ds - \frac{1}{t}\int_0^t T_{s+r}(f)ds =$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t T_s(f)ds - \frac{1}{t}\int_r^{t+r} T_s(f)ds = \frac{1}{t}\int_0^r T_s(f)ds + \frac{1}{t}\int_t^{t+r} T_s(f)ds,$$

то (см. теорему 4.1)

$$(I - T_r)A_t(f) = \frac{1}{t}\int_0^r T_s(f)ds + \frac{t+r}{t}\Big(A_{t+r}(f) - \frac{t}{t+r}A_t(f)\Big) \to 0 \;\text{ почти всюду при } t \to \infty.$$

С другой стороны,

$$T_rA_t(f) = T_r\frac{1}{t}\int_0^t T_s(f)ds = \frac{1}{t}\int_0^t T_rT_s(f)ds = \frac{1}{t}\int_0^t T_s(T_r(f))ds \to P(T_r(f)) \;\text{ почти всюду при } t \to \infty.$$

Следовательно,

$$(I - T_r)A_t(f) = A_t(f) - T_rA_t(f) \to P(f) - P(T_r(f)) \;\text{ почти всюду при } \; t \to \infty.$$

Это означает, что $(PT_r)(f) = P(f)$ для всех $f \in \mathcal{R}_\mu$. □

Лемма 4.2. *Для любого* $f \in L_2(\Omega)$ *имеет место сходимость*

$$\|A_t(f) - P(f)\|_2 \to 0 \;\text{ при }\; t \to \infty.$$

Доказательство. Согласно статистической эргодической теоремы для пространства L_2 (см. теорему 2.1), имеем, что для любого $f \in L_2(\Omega)$ существует такое $\widetilde{f} \in L_2(\Omega)$, что

$$\|A_t(f) - \widetilde{f}\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Следовательно, $A_t(f) \to \widetilde{f}$ локально по мере μ (см. [12, Proposition 2.2]). Поскольку $A_t(f) \to P(f)$ почти всюду, то верно равенство $\widetilde{f} = P(f)$. □

Следующая теорема устанавливает сильную сходимость непрерывных средних $A_t(f)$ во вполне симметричном пространстве $(\mathcal{R}_\mu, \|\cdot\|_{L_1+L_\infty})$.

Теорема 4.2. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — *измеримое пространство с* σ*-конечной мерой, и пусть* $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ — *сильно непрерывная в* L_1 *полугруппа операторов Данфорда—Шварца. Тогда*

$$\|\{A_t(f)\} - P(f)\|_{L_1+L_\infty} \to 0 \quad \textit{при} \quad t \to \infty \quad \textit{для всех} \quad f \in \mathcal{R}_\mu.$$

Доказательство. Если $f \in L_1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega) \subset L_2(\Omega)$, то в силу леммы 4.2 имеем, что

$$\|A_t(f) - P(f)\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Поскольку $L_2(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_1(\Omega) + L_\infty(\Omega)$ (см. [6, Ch. 2, §6, Theorem 6.6]), то

$$\|A_t(f) - P(f)\|_{L_1+L_\infty} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty \quad \text{для всех} \quad f \in L_1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega).$$

При этом $\sup\limits_{t\geqslant 0} \|A_t\|_{L_1+L_\infty \to L_1+L_\infty} \leqslant 1$, $\|P\|_{L_1+L_\infty \to L_1+L_\infty} \leqslant 1$, и линейное подпространство $L_1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ всюду плотно в банаховом пространстве $(\mathcal{R}_\mu, \|\cdot\|_{L_1+L_\infty})$. Если $f \in \mathcal{R}_\mu$ и f_n — такая последовательность из $L_1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, для которой $\|f_n - f\|_{L_1+L_\infty} \to 0$ при $n \to \infty$, то используя неравенства

$$\|A_t(f) - P(f)\|_{L_1+L_\infty} \leqslant \|A_t(f - f_n)\|_{L_1+L_\infty} + \|A_t(f_n) - P(f_n)\|_{L_1+L_\infty} + \|P(f_n) - P(f)\|_{L_1+L_\infty},$$

получим, что $\|\{A_t(f)\} - P(f)\|_{L_1+L_\infty} \to 0$ при $t \to \infty$. □

Из теоремы 4.2 и [12, Proposition 2.2] вытекает следующее утверждение.

Утверждение 4.1. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — *измеримое пространство с* σ*-конечной мерой, и пусть* $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ — *сильно непрерывная в* L_1 *полугруппа операторов Данфорда—Шварца. Тогда непрерывные средние* $A_t(f) \to P(f)$ *локально по мере при* $t \to \infty$ *для всех* $f \in \mathcal{R}_\mu$.

Лемма 4.3. $(T_r P)(f) = P(f)$ *для всех* $f \in \mathcal{R}_\mu$, $r \geqslant 0$.

Доказательство. Согласно теореме 4.2, $\|A_t(f) - P(f)\|_{L_1+L_\infty} \to 0$ при $t \to \infty$ для любого $f \in \mathcal{R}_\mu$. Следовательно,

$$(T_r P)(f) = T_r(\|\cdot\|_{L_1+L_\infty} - \lim_{t\to\infty} A_t(f) = \|\cdot\|_{L_1+L_\infty} - \lim_{t\to\infty} T_r(A_t(f)) =$$

$$= \|\cdot\|_{L_1+L_\infty} - \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t T_{r+s}(f) ds = \|\cdot\|_{L_1+L_\infty} - \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_r^{r+t} T_s(f) ds =$$

$$= \|\cdot\|_{L_1+L_\infty} - \lim_{t\to\infty} \Big(\frac{t+r}{t} \cdot \frac{1}{t+r} \int\limits_0^{r+t} T_s(f) ds - \frac{1}{t} \int\limits_0^r T_s(f) ds\Big) = P(f).$$

□

Из лемм 4.1 и 4.3 вытекает

Утверждение 4.2. $P^2 = P$ *и* $(T_r P)(f) = P(f) = (P T_r)(f)$ *для всех* $f \in \mathcal{R}_\mu$, $r \geqslant 0$.

Пусть $E(\nu)$ — симметричное пространство на $((0, \infty), \mathcal{A}_\nu, \nu)$ и $E(\mu)$ — симметричное пространство на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, порожденное симметричным пространством $E(\nu)$. Известно, что ассоциированное симметричное пространство $E(\mu)^\times$ порождается ассоциированным симметричным пространством $E(\nu)^\times$ (см. [12, Theorem 5.5]).

Ниже нам понадобится следующее свойство симметричных пространств, установленное в [13, Proposition 2.2].

Утверждение 4.3. *Пусть $E(\nu)$ — симметричное пространство на $((0,\infty),\mathcal{A}_\nu,\nu)$ с порядково непрерывной нормой и $\chi_{(0,\infty)} \notin E^\times(\nu)$. Пусть $(E(\mu),\|\cdot\|_{E(\mu)})$ — симметричное пространство на $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, порожденное симметричным пространством $E(\nu)$. Если f_n, $g \in E(\mu)$, $f_n \prec g$, $n \in \mathbb{N}$, и $f_n \longrightarrow 0$ локально по мере, то $\|f_n\|_{E(\mu)} \to 0$.*

Следующая теорема есть вариант статистической эргодический теоремы Данфорда—Шварца о сильной сходимости непрерывных средних $A_t(f)$ для вполне симметричных пространств $E(\mu)$ на измеримом пространстве с σ-конечной мерой.

Теорема 4.3. *Пусть $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ — измеримое пространство с σ-конечной мерой, и пусть $E(\mu)$ — вполне симметричное пространство на $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, для которого $\chi_{(0,\infty)} \notin E^\times(\nu)$, и норма $\|\cdot\|_{E(\mu)}$ порядково непрерывна. Тогда для любой сильно непрерывной в L_1 полугруппы $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ операторов Данфорда—Шварца непрерывные средние $\{A_t\}_{t\geqslant 0}$ сходятся сильно в $E(\mu)$ при $t \to \infty$.*

Доказательство. Если $P(f) = f \in E(\mu)$, то из утверждения 4.2 вытекает, что

$$A_t(f) = A_t(P(f)) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t T_s(P(f))ds = P(f) = f \quad \text{для всех} \quad t > 0. \tag{4.1}$$

Пусть теперь f — произвольная функция из $E(\mu)$. Согласно утверждению 4.2, для $g = f - P(f)$ имеем, что $P(g) = P(f) - P^2(f) = 0$.

Так как норма $\|\cdot\|_{E(\mu)}$ порядково непрерывна, то $\mu\{|f| > \lambda\} < \infty$ для всех $f \in E(\mu)$ и $\lambda > 0$, и поэтому $E(\mu) \subset \mathcal{R}_\mu$. Отсюда в силу утверждения 4.1 вытекает, что $A_t(g) \to 0$ локально по мере при $t \to \infty$.

Поскольку $A_t \in DS$, то $A_t(g) \prec g \in E(\mu)$ для всех $t \geqslant 0$. Поэтому из утверждения 4.3 следует, что $\|A_t(g)\|_E \to 0$. Используя теперь утверждение 4.2, равенство (4.1) и равенства $A_t(g) = A_t(f) - A_t(P(f))$, $t > 0$, получим, что $\|A_t(f) - P(f)\|_E \to 0$. ☐

Из теорем 3.5, 3.6 и 4.3 вытекает следующий критерий для включения $E(\mu) \in$ (СЭТ).

Теорема 4.4. *Пусть $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ — измеримое пространство с непрерывной σ-конечной мерой, $\mu(\Omega) = \infty$, и пусть $E(\mu)$ — симметричное пространство на $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, порожденное вполне симметричным пространством $E(\nu)$. Следующие условия эквивалентны*:

(*i*) $E(\mu) \in$ (*СЭТ*);

(*ii*) $E(\mu)$ *не содержится в $L_1(\Omega)$ и норма $\|\cdot\|_{E(\mu)}$ является порядково непрерывной.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векслер А. С.* Эргодическая теорема в симметричных пространствах// Сиб. мат. ж. — 1985. — *26*, № 4. — С. 189–191.
2. *Векслер А. С.* Статистическая эргодическая теорема в несепарабельных симметричных пространствах функций// Сиб. мат. ж. — 1988. — *29*, № 3. — С. 183–185.
3. *Векслер А. С.* Статистические эргодические теоремы в перестановочно-инвариантных пространствах измеримых функций. — Beau Bassin: Lambert Academic Publishing, 2018.
4. *Векслер А. С., Федоров А. Л.* Симметрические пространства и статистические эргодические теоремы для автомофизмов и потоков. — Ташкент: ФАН, 2016.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.
6. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of operators. — Boston, etc.: Academic Press Inc., 1988.
7. *Chilin V., Cömez D., Litvinov S.* Individual ergodic theorems for infinite measure// ArXiv. — 2019. — 1907.04678v1 [math.FA].
8. *Chilin V., Litvinov S.* Noncommutative weighted individual ergodic theorems with continuous time// ArXiv. — 2018. — 1809.01788v1 [math.FA].
9. *Chilin V., Litvinov S.* Almost uniform and strong convergences in ergodic theorems for symmetric spaces// Acta Math. Hungar. — 2019. — *157*, № 1. — С. 229–253.
10. *Chilin V., Litvinov S.* Noncommutative weighted individual ergodic theorems with continuous time// Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. — 2020. — *23*, № 2. — 2050013.
11. *Chilin V. I., Veksler A. S.* Mean ergodic theorem in function symmetric spaces for infinite measure// Uzb. Math. J. — 2018. — № 1. — С. 35–46.

12. *Dodds P. G., Dodds T. K., Pagter B.* Noncommutative Köthe duality// Trans. Am. Math. Soc. — 1993. — *339*. — С. 717–750.
13. *Dodds P. G., Dodds T. K., Sukochev F. A.* Banach—Saks properties in symmetric spaces of measurable operators// Studia Math. — 2007. — *178*. — С. 125–166.
14. *Dunford N., Schwartz J. T.* Linear operators. Part I: General theory. — New York, etc.: John Willey & Sons, 1988.
15. *Garsia A.* Topics in almost everywhere convergence. — Chicago: Markham Publishing Company, 1970.
16. *Krein S. G., Petunin Ju. I., Semenov E. M.* Interpolation of linear operators. — Providence: Am. Math. Soc., 1982.
17. *Krengel U.* Ergodic theorems. — Berlin—New York: Walter de Gruyter, 1985.
18. *Rubshtein B. A., Muratov M. A., Grabarnik G. Ya., Pashkova Yu. S.* Foundations of symmetric spaces of measurable functions. Lorentz, Marcinkiewicz and Orlicz spaces. — Cham: Springer, 2016.
19. *Sukochev F., Veksler A.* The Mean Ergodic Theorem in symmetric spaces// C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. — 2017. — *355*. — С. 559–562.
20. *Sukochev F., Veksler A.* The Mean Ergodic Theorem in symmetric spaces// Studia Math. — 2019. — *245*, № 3. — С. 229–253.
21. *Vladimirov D. A.* Boolean algebras in analysis. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.
22. *Yosida K.* Functional analysis. — Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer Verlag, 1965.

А. С. Векслер
Институт математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан
E-mail: aleksandr.veksler@micros.uz

В. И. Чилин
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: vladimirchil@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-654-667 UDC 517.98

Statistical Ergodic Theorem in Symmetric Spaces for Infinite Measures

© 2021 **A. S. Veksler, V. I. Chilin**

Abstract. Let (Ω, μ) be a measurable space with σ-finite continuous measure, $\mu(\Omega) = \infty$. A linear operator $T : L_1(\Omega) + L_\infty(\Omega) \to L_1(\Omega) + L_\infty(\Omega)$ is called the Dunford–Schwartz operator if $\|T(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1$ (respectively, $\|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$) for all $f \in L_1(\Omega)$ (respectively, $f \in L_\infty(\Omega)$). If $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ is a strongly continuous in $L_1(\Omega)$ semigroup of Dunford–Schwartz operators, then each operator $A_t(f) = \dfrac{1}{t}\int\limits_0^t T_s(f)ds \in L_1(\Omega)$, $f \in L_1(\Omega)$ has a unique extension to the Dunford–Schwartz operator, which is also denoted by A_t, $t > 0$. It is proved that in the completely symmetric space $E(\Omega) \nsubseteq L_1$ of measurable functions on (Ω, μ) the means A_t converge strongly as $t \to +\infty$ for each strongly continuous in $L_1(\Omega)$ semigroup $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ of Dunford–Schwartz operators if and only if the norm $\|\cdot\|_{E(\Omega)}$ is order continuous.

REFERENCES

1. A. S. Veksler, “Ergodicheskaya teorema v simmetrichnykh prostranstvakh” [Ergodic theorem in symmetric spaces], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1985, **26**, No. 4, 189–191 (in Russian).

2. A. S. Veksler, “Statisticheskaya ergodicheskaya teorema v neseparabel’nykh simmetrichnykh prostranstvakh funktsiy” [Statistical ergodic theorem in inseparable symmetric function spaces], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1988, **29**, No. 3, 183–185 (in Russian).
3. A. S. Veksler, *Statisticheskie ergodicheskie teoremy v perestanovochno-invariantnykh prostranstvakh izmerimykh funktsiy* [Statistical Ergodic Theorems in Permutation-Invariant Spaces of Measurable Functions], Lambert Academic Publishing, Beau Bassin, 2018 (in Russian).
4. A. S. Veksler and A. L. Fedorov, *Simmetricheskie prostranstva i statisticheskie ergodicheskie teoremy dlya avtomofizmov i potokov* [Symmetric Spaces and Statistical Ergodic Theorems for Automophisms and Flows], FAN, Tashkent, 2016 (in Russian).
5. L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Funktsional’nyy analiz* [Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
6. C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Academic Press Inc., Boston, etc., 1988.
7. V. Chilin, D. Cömez, and S. Litvinov, “Individual ergodic theorems for infinite measure,” *ArXiv*, 2019, 1907.04678v1 [math.FA].
8. V. Chilin and S. Litvinov, “Noncommutative weighted individual ergodic theorems with continuous time,” *ArXiv*, 2018, 1809.01788v1 [math.FA].
9. V. Chilin and S. Litvinov, “Almost uniform and strong convergences in ergodic theorems for symmetric spaces,” *Acta Math. Hungar.*, 2019, **157**, No. 1, 229–253.
10. V. Chilin and S. Litvinov, “Noncommutative weighted individual ergodic theorems with continuous time,” *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 2020, **23**, No. 2, 2050013.
11. V. I. Chilin and A. S. Veksler, “Mean ergodic theorem in function symmetric spaces for infinite measure,” *Uzb. Math. J.*, 2018, No. 1, 35–46.
12. P. G. Dodds, T. K. Dodds, and B. Pagter, “Noncommutative Köthe duality,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1993, **339**, 717–750.
13. P. G. Dodds, T. K. Dodds, and F. A. Sukochev, “Banach–Saks properties in symmetric spaces of measurable operators,” *Studia Math.*, 2007, **178**, 125–166.
14. N. Dunford, and J. T. Schwartz, *Linear operators. Part I: General theory*, John Willey & Sons, New York, etc., 1988.
15. A. Garsia, *Topics in almost everywhere convergence*, Markham Publishing Company, Chicago, 1970.
16. S. G. Krein, Ju. I. Petunin, and E. M. Semenov, *Interpolation of linear operators*, Am. Math. Soc., Providence, 1982.
17. U. Krengel, *Ergodic theorems*, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1985.
18. B. A. Rubshtein, M. A. Muratov, G. Ya. Grabarnik, and Yu. S. Pashkova, *Foundations of symmetric spaces of measurable functions. Lorentz, Marcinkiewicz and Orlicz Spaces*, Springer, Cham, 2016.
19. F. Sukochev and A. Veksler, “The Mean Ergodic Theorem in symmetric spaces,” *C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I*, 2017, **355**, 559–562.
20. F. Sukochev and A. Veksler, “The Mean Ergodic Theorem in symmetric spaces,” *Studia Math.*, 2019, **245**, No. 3, 229–253.
21. D. A. Vladimirov, *Boolean algebras in analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.
22. K. Yosida, *Functional analysis*, Springer Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1965.

A. S. Veksler
Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: aleksandr.veksler@micros.uz

V. I. Chilin
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: vladimirchil@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 4 (2021). С. 668–692
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-668-692 УДК 517.518

ПОЛИНОМЫ ВЕЙЕРШТРАССА В ОЦЕНКАХ ОСЦИЛЛЯТОРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

© 2021 г. **И. А. ИКРОМОВ, А. С. САДУЛЛАЕВ**

Аннотация. В работе получены оценки для преобразования Фурье гладких зарядов (мер), сосредоточенных на некоторых невыпуклых гиперповерхностях. Доказана суммируемость максимальной функции Рэндола для широкого класса невыпуклых гиперповерхностей. Кроме того, в трехмерном случае получены оценки в зависимости от высоты А. Н. Варченко. Доказана точность полученных оценок. Доказательство оценки осцилляторных интегралов основывается на подготовительной теореме Вейерштрасса.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

1.1. Постановка задачи. Пусть $S(a) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — семейство гладких гиперповерхностей, гладко зависящих от параметров $a \in \mathbb{R}^m$, и $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n+1})$ — гладкая функция с компактным носителем. Для фиксированного $a \in \mathbb{R}^m$ рассмотрим заряд $d\mu_a(x) := \psi(a, x)dS(a)$, где dS_a — индуцированная лебегова мера на поверхности S_a. В частности, если ψ — неотрицательная функция, то мы имеем дело с борелевской мерой. Преобразование Фурье заряда $d\mu_a$ определяется следующим интегралом:

$$\hat{d}\mu_a(\xi) := \int\limits_{S(a)} e^{ix\cdot\xi} d\mu_a(x), \tag{1.1}$$

что соответствует преобразованию Фурье обобщенной функции, заданной зарядом $d\mu_a$ (см. [10]), где $x \cdot \xi$ — скалярное произведение векторов x и ξ.

В настоящей работе мы рассмотрим следующую задачу: *найти точную нижнюю грань p_0 множества $\{p : \hat{d}\mu_a \in L^p(\mathbb{R}^{n+1})\}$*, где $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ — пространство интегрируемых функций со степенью $p(1 \leqslant p < \infty)$.

Замечание 1.1. Аналогичная задача может быть рассмотрена для гладких поверхностей коразмерности строго больше единицы.

Работа выполнена при поддержке Исполнительного Комитета по координации Науки и технологий при КМ Республики Узбекистан, гранты ОТ-Ф-4-69 и ОТ-Ф-4-37/29.

Замечание 1.2. Вообще говоря, p_0 может стремиться к бесконечности. Например, для гиперплоскости соответствующее преобразование Фурье не суммируемо ни для какого конечного значения p. Однако, если гиперповерхность удовлетворяет так называемому условию «кривизны» (см. [30]), то p_0 — конечное число. Задача о точном значении этого числа весьма сложна и является одной из нерешенных задач классического анализа. Ниже мы получим некоторые оценки для точной грани p_0 и найдем точное значение p_0 для некоторого класса гиперповерхностей.

1.2. Краткая история проблемы. Для тригонометрических интегралов с полиномиальными фазовыми функциями проблема суммируемости была рассмотрена И. М. Виноградовым [4], Хуа-Ло-Кеном [19] в связи с некоторыми проблемами теории чисел. В этом случае степень тригонометрического интеграла интегрируется по пространству коэффициентов полинома. Далее, в работе [2] Г. И. Архипова, А. А. Карацуба и В. Н. Чубарикова было предложено полное решение этой задачи в случае однократных тригонометрических интегралов с полиномиальной фазой. Более того, в этой работе получены оценки сверху для показателя суммируемости кратных тригонометрических интегралов. Также в работе [8] получены аналогичные результаты относительно преобразования Фурье гладких мер (зарядов), сосредоточенных на кривых с кручением, не имеющим нулей бесконечного порядка.

Задача о точном показателе суммируемости кратных тригонометрических интегралов с полиномиальной фазой до сих пор остается открытой. Известны только некоторые результаты о конечности показателя суммируемости, полученные в работе [2](см. также [14]).

В 1996 году Дж. Мокенхаупт [23] показал связь между задачей о точном показателе суммируемости тригонометрических интегралов и проблемой об ограничении преобразования Фурье на гладких поверхностях. Следует отметить серию статьей Дж. Вака и А. Сегера (см. [15]), посвященных к этой проблеме, где используются результаты работы [2].

1.3. Мотивы проблемы. Задача о точном показателе суммируемости преобразования Фурье зарядов (мер) имеет несколько причин. Как отмечено выше, один из них связан с методом тригонометрических сумм (см. [2], а также [4]). Другим мотивом задачи о суммируемости является задача об ограничении преобразования Фурье на множествах меры нуль. Известны некоторые результаты об ограничении преобразования Фурье на гладких поверхностях, более подробное их обсуждение содержится в [28, 30] (см. также [21, 22] для окончательных результатов в случае двумерных гиперповерхностей).

Обратим внимание на недавнюю работу Л. Эрдоша и М. Салмхофера [17], в которой рассмотрена задача о суммируемости преобразования Фурье мер, сосредоточенных на двумерных гиперповерхностях, заданных дисперсионным соотношением дискретного оператора Шредингера. Следует отметить, что эти поверхности удовлетворяют некоторым условиям невырожденности. Оказывается, показатель суммируемости осцилляторного интеграла позволяет получить оценку для некоторого кратного интеграла, связанного с дискретным оператором Шредингера. В данной работе мы рассмотрим проблему суммируемости преобразования Фурье зарядов для широких классов гиперповерхностей многомерного Евклидова пространства. Кроме того, в трехмерном случае мы получим более точные оценки.

Работа состоит из введения (раздел 1) и пяти разделов 2–6. В разделе 2 приведена формулировка основных результатов. Далее, в разделах 3-4 рассматриваются аналоги классической подготовительной теоремы Вейерштрасса и доказываются некоторые вспомогательные утверждения, необходимые для применения в доказательствах основных результатов и дальнейшего изложения материала. В следующем разделе 5 приведено доказательство основных результатов. Затем, в разделе 6, показана точность полученных результатов. Отметим, что некоторые результаты, приведенные здесь в более или менее слабой форме, опубликованы в статье [27] авторов. Некоторые результаты, касающихся к подготовительной теоремы Вейерштрасса, приводятся с доказательствами для полноты изложения и ясности в применении.

2. Формулировка основных результатов

Прежде чем перейти к обсуждению результатов нашей работы, мы введем необходимые определения и обозначения. В работе C, c обозначают любые константы. Они могут изменяться от строки к строке. Так, например, выполняются соотношения $C + C = C$ или $2C = C$ и т. п.

Через $K_l(x)$ обозначим класс гладких гиперповерхностей, имеющих хотя бы l ненулевых главных кривизн в точке $x \in S$. Далее, соотношение $S \subset K_l$ означает, что в каждой точке $x \in S$ имеет место включение $S \subset K_l(x)$.

В. Литтман [30] доказал, что если гиперповерхность принадлежит классу K_l, то интеграл (1.1) имеет равномерную оценку

$$\hat{d\mu}(\xi) = O(|\xi|^{-l/2}) \quad \text{при} \quad |\xi| \to +\infty.$$

В частности, если гауссова кривизна гиперповерхности в некоторой точке отлична от нуля, то преобразование Фурье гладких мер, сосредоточенных в достаточно малой окрестности этой точки, разлагается в асимптотический ряд. Более того, если S — гладкая, компактная гиперповерхность, то согласно классической теореме Сарда [1] для п.в. направлений $\omega \in S^n$ (где S^n — единичная сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$ с центром в начале координат) имеет место соотношение:

$$\hat{d\mu}(r\omega) = O(r^{-n/2}) \quad \text{при} \quad r \to +\infty.$$

Поэтому естественно определяется следующая максимальная функция Рэндола:

$$M(\omega) := \sup_{r>0} r^{\frac{n}{2}} |\hat{d\mu}(r\omega)|, \tag{2.1}$$

где $\omega \in S^n$ и $\xi = r\omega$. Максимальная функция, соответствующая

$$\hat{d\mu}_a(\xi) = \int\limits_{S(a)} e^{ix\cdot\xi} d\mu_a(x),$$

обозначается через M_a.

Аналогичные максимальные функции введены Рэндолом для исследования преобразования Фурье индикатора выпуклых компактных областей с аналитической границей [25]. Позднее И. Свенссон [31] рассмотрел и исследовал максимальные функции для компактных выпуклых областей с гладкой границей.

В работах [25,31] доказано, что если S является гладкой границей выпуклой компактной области и имеет конечный линейный тип (т. е. каждая касательная прямая имеет конечный порядок касания с гиперповерхностью), то существует положительное число ε такое, что $M \in L^{2+\varepsilon}(S^n)$.

Следует отметить, что методы этих работ неприменимы для невыпуклых гиперповерхностей (см. [5], а также [11]). Мы рассмотрим аналогичную задачу о суммируемости для некоторых невыпуклых гиперповерхностей. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Предположим, что $S(a) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (с параметром $a \in \mathbb{R}^m$) — семейство аналитических гиперповерхностей, удовлетворяющее условиям*:

1) $S(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — *аналитическая гиперповерхность и* $S(0) \in K_{n-1}$;
2) *для гауссовой кривизны $K(a, x)$ гиперповерхности $S(a)$ выполняется условие*: $K(0, \cdot) \not\equiv 0$.

Тогда имеют место следующие утверждения:

(i) *Существуют окрестность $V \times U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n+1}$ и $p_m > 2$ такие, что для любой функции $\psi \in C_0^\infty(V \times U)$ справедливо включение*: $M_a \in L^{p_m}(S^n)$, *где M_a — максимальная функция, соответствующая $\hat{d\mu}_a(r\omega)$. Более того, интеграл*

$$\int\limits_{S^n} M_a^{p_m} d\omega$$

равномерно ограничен относительно $a \in V \subset \mathbb{R}^m$.

(ii) *Если $p_m > 2(n+1)/n$, то для любого $p > 2(n+1)/n$ справедливо включение*: $\hat{d\mu}_a \in L^p(\mathbb{R}^{n+1})$. *Более того, для любого фиксированного $p > 2(n+1)/n$ интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} |\hat{d\mu}_a(\xi)|^p d\xi$$

равномерно ограничен относительно $a \in V$.

(iii) *Если* $2 < p_m \leqslant 2(n+1)/n$, *то для любого* $p > (2n+2-p_m)/(n-1)$ *имеет место включение*: $\hat{d\mu}_a \in L^p(\mathbb{R}^{n+1})$. *Кроме того, для любого фиксированного числа* $p > (2n+2-p_m)/(n-1)$ *интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} |\hat{d\mu}_a(\xi)|^p d\xi$$

равномерно ограничен относительно $a \in V$.

Замечание 2.1. Если S — цилиндр со сферическим основанием, то имеет место включение $S \in K_{n-1}$ и $K \equiv 0$. В этом случае $M \notin L^2(S^n)$. Более того, если $n = 2$, то $\hat{d\mu} \notin L^4(\mathbb{R}^3)$ для некоторой амплитудной функции $\psi(x)$. Помимо этого, для любых $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ при $p > 4$ справедливо включение: $\hat{d\mu} \in L^p(\mathbb{R}^3)$. Таким образом, без условия 2) теоремы 2.1 ее утверждение перестанет быть справедливым.

Для произвольных аналитических гиперповерхностей трехмерного евклидова пространства мы имеем аналогичные результаты, не налагая никаких условий на кривизну. Если рассмотрим заданную гиперповерхность в достаточно малой окрестности фиксированной точки, например, начала координат, то при помощи евклидова движения представим гиперповерхность S как график некоторой функции $x_3 = \Phi(x_1, x_2)$, где Φ — гладкая функция, удовлетворяющая условиям: $\Phi(0, 0) = 0$, $\nabla\Phi(0, 0) = 0$. Тогда мы можем определить высоту гиперповерхности, обозначаемую через $h(S)$, соотношением (см. [3], а также [20]): $h(S) := h(\Phi)$, где $h(\Phi)$ — высота функции Φ, определенная в работе [3]. В работе [20] показана корректность этого определения высоты гиперповерхности.

Теорема 2.2. *Пусть* $S \subset \mathbb{R}^3$ — *произвольная аналитическая гиперповерхность, содержащая начало координат и* $d\mu(x) := \psi(x)dS$, *где* ψ — *гладкая функция, сосредоточенная в достаточно малой окрестности начала координат. Если* h — *высота гиперповерхности в начале координат, то для любого числа* $p > 2 + h$ *имеет место включение*: $\hat{d\mu} \in L^p(\mathbb{R}^3)$. *Более того, если* $h = 2$, *а* $K \not\equiv 0$, *то существует положительное число* $\varepsilon > 0$ *такое, что справедливо включение*: $\hat{d\mu} \in L^{(4-\varepsilon)}(\mathbb{R}^3)$.

Замечание 2.2. Отметим, что последнее утверждение теоремы 2.2 не следует из теоремы 2.1, примененной к трехмерному случаю, потому что в случае $h = 2$ обе главные кривизны могут обратится в нуль в начале координат.

Замечание 2.3. В работе [17] доказана суммируемость преобразования Фурье борелевских мер при некоторых дополнительных условиях. В частности, предполагается, что гауссова кривизна имеет лишь нули первого порядка, т. е. градиент этой кривизны отличен от нуля там, где кривизна обращается в нуль. Легко показать, что в этом случае в каждой точке хотя бы одна из главных кривизн отлична от нуля. Для таких гиперповерхностей трехмерного пространства в каждой точке высота не превосходит двух, и более того, гауссова кривизна не может иметь нулей бесконечного порядка. Поэтому наши результаты не только обобщают, но и улучшают оценки работы [17].

Следующее утверждение показывает точность полученных результатов.

Предложение 2.1. *Для любого положительного числа* ε *существует гиперповерхность* $S \subset \mathbb{R}^3$, *удовлетворяющая условиям*: $S \in K_1$, $K(x) \not\equiv 0$, *но при этом* $\hat{d\mu} \notin L^{(4-\varepsilon)}(\mathbb{R}^3)$.

Для доказательств основных результатов существенно используются полиномы Вейерштрасса и аналоги классической подготовительной теоремы Вейерштрасса, которые мы обсудим в следующем разделе.

3. Полиномы Вейерштрасса

3.1. Обобщение классической теоремы Вейерштрасса. Хорошо известная теорема Вейерштрасса говорит, что если функция $f(z, w)$ голоморфна в окрестности точки $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}_z^n \times \mathbb{C}_w$ и $f(z_0, w_0) = 0$, но $f(z_0, w) \not\equiv 0$, то в некотором поликруге $U = V(z^0, r) \times W(w^0, r) \subset \mathbb{C}_z^n \times \mathbb{C}_w$ она представляется в виде

$$f(z, w) = [(w - w_0)^m + c_1(z)(w - w_0)^{m-1} + \dots + c_m(z)]\varphi(z, w), \tag{3.1}$$

где $m \geqslant 1$ — порядок нуля функции $f(z_0, w)$ в точке $w = w_0$, $c_k(z), k = 1, \dots, m$ — голоморфные функции в V, $c_k(z_0) = 0$, и $\varphi(z, w)$ — голоморфная функция в U, $\varphi(z, w) \neq 0$, при $(z, w) \in U$.

Псевдополином $(w-w_0)^m + c_{m-1}(z)(w-w_0)^{m-1} + \dots + c_0(z)$ называется полиномом Вейерштрасса.

В цитированных выше работах обычно предполагается, что фазовая функция является аналитической в фиксированной критической точке $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}_z^n \times \mathbb{C}_w$. Как показал В. И. Арнольд [1] условие $f(z_0, w) \not\equiv 0$ эквивалентно тому, что фазовая функция является аналитической деформацией конечнократной изолированной критической точки. Однако, в приложениях часто встречаются фазовые функции, имеющие неизолированные критические точки. И поэтому естественно ожидать справедливости аналога теоремы Вейерштрасса без выполнения условия $f(z_0, w) \not\equiv 0$, хотя $f(z, w) \not\equiv 0$. Таким аналогом было бы утверждение: в некоторой окрестности $U = V \times W$ точки (z_0, w_0) функция представляется в виде

$$f(z, w) = [c_m(z)(w - w_0)^m + c_{m-1}(z)(w - w_0)^{m-1} + \dots + c_0(z)]\varphi(z, w), \tag{3.2}$$

где $c_k(z), k = 0, 1, \dots, m$, голоморфны в V и φ голоморфна в $U, \varphi(z, w) \neq 0, \forall (z, w) \in U$. Такой результат был бы полезным в изучении осцилляторных интегралов и в оценках максимальных операторов, ассоциированных с аналитическими гиперповерхностями.

Когда $n = 1$ представление (3.2) имеет место так как в этом случае, легко показать, что в окрестности $U = V \times W$ точки (z_0, w_0) функция $f(z, w)$ представляется как $f(z, w) = (z - z_0)^j \varphi(z, w)$, где $j \geqslant 0, \varphi(z, w) \in \mathcal{O}(U), \varphi(z_0, w) \not\equiv 0$. Однако, известный контрпример Осгуда (см. например, [26]) показывает, что при $n > 1$ не всегда возможно разложение функции на множители (3.2). Тем не менее имеет место (см. [12, 26]).

Лемма 3.1. *Если $f(z, w) \in \mathcal{O}(V \times W)$, где $V = V(0, \varepsilon) \subset \mathbb{C}_z^n$, $W = \{|w| < \varepsilon\}$ полицилиндр с центром в начале координат $(0, 0)$ и $f(0, 0) = 0$, то $f(z, w)$ представляется в виде $f(z, w) = c(z)\varphi(z, w)$, где $c(z) \in \mathcal{O}(U)$, $\varphi(z, w) \in \mathcal{O}(V \times W)$ и размерность аналитического множества $G_\varphi = \{z_0 \in V : \varphi(z_0, w) \equiv 0\}$ не превосходит $n - 2$ ($G_\varphi = \varnothing$ для $n = 1$).*

Для описания локальной структуры нулей голоморфных функций в направлении ow весьма полезна следующая

Лемма 3.2. *Пусть $f(z, w)$ голоморфная функция в полицилиндре $V \times W$, причем $f(0, w) \equiv 0$. Тогда в некоторой окрестности $V' \times W' \subset V \times W$ функция $f(z, w)$ представляется как*

$$f(z, w) = w^l [c_0(z) g_0(z, w) + \dots + c_m(z) g_m(z, w)], \tag{3.3}$$

где $l \geqslant 0$, $c_k(z) \in \mathcal{O}(V')$, $g_k(z, w) \in \mathcal{O}(V' \times W')$, $k = 0, \dots, m$, $|g_0(0, w)| + \dots + |g_m(0, w)| \not\equiv 0$.

Доказательство. Если $f(z, 0) \equiv 0$, то f представляется в виде $f(z, w) = w^l \varphi(z, w)$, где $l > 0$, $\varphi(z, 0) \not\equiv 0$.

Разлагаем функцию $\varphi(z, w)$ в ряд Гартогса

$$\varphi(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z) w^k, \quad c_k(z) \in \mathcal{O}(U).$$

Тогда $G_\varphi = \{z_0 \in V : \varphi(z_0, w) \equiv 0\} = \{c_0(z) = 0\} \cap \{c_1(z) = 0\} \cap \dots$.

Так как пространство ${}_{(n+1)}\mathcal{O}_{(0,0)}$ ростков голоморфных функций в $(0, 0) \in \mathbb{C}^{(n+1)}$ является Нетеровым кольцом, т. е. произвольный идеал ${}_{(n+1)}\mathcal{O}_{(0,0)}$ имеет конечный базис, то идеал I_F порожденный семейством $F = \{c_0(z), c_1(z), \dots\}$ имеет конечный базис: существует конечная система $\{c_0, \dots, c_m\} \subset F$ такая, что произвольная функция $\phi \in I_F$ в некоторой окрестности $(0, 0) \in V' \times W' \subset V \times W$ представляется в виде

$$\phi(z, w) = c_0(z) g_0(z, w) + \dots + c_m(z) g_m(z, w),$$

где $g_k(z, w) \in \mathcal{O}(V' \times W')$, $k = 0, \dots, m$. Отсюда следует, что в некоторой окрестности $V' \times W' \subset V \times W$ функция $\varphi(z, w)$ представляется как $\varphi(z, w) = c_0(z) g_0(z, w) + \dots + c_m(z) g_m(z, w)$ или же, окончательно, функция $f(z, w)$ имеет вид

$$f(z, w) = w^l [c_0(z) g_0(z, w) + \dots + c_m(z) g_m(z, w)], \tag{3.4}$$

где $c_k(z) \in \mathcal{O}(V')$, $c_k(0) = 0$, $g_k(z, w) \in \mathcal{O}(V' \times W')$, $k = 0, \dots, m$, $l \geqslant 0$.

Если в (3.4) $|g_0(0,w)|+\dots+|g_m(0,w)| \equiv 0$, то каждую из функций $g_k(z,w)$ применяем опять (3.4):

$$g_k(z,w) = w^{l_k}[c_0^k(z)g_0^k(z,w) + \dots + c_{m_k}^k(z)g_{m_k}^k(z,w)],$$

где $c_j^k(z) \in \mathcal{O}(V'')$, $c_j^k(0) = 0$, $g_j^k(z,w) \in \mathcal{O}(V'' \times W'')$, $k = 0,\dots,m$, $j = 0,\dots,m_k$, $l_k \geqslant 0$. После конечного числа шагов (ибо процесс не может продолжаться бесконечно) мы приходим к

$$f(z,w) = w^{l'}[c_0'(z)g_0'(z,w) + \dots + c_m'(z)g_m'(z,w)].$$

□

Имеет место глобальный многомерный (относительно w) вариант (3.2) для произвольной функции $f(z,w) \in \mathcal{O}\left(D_z \times \mathbb{C}_w^k\right)$ (см. [26]).

Теорема 3.1. *Пусть $f(z,w)$ голоморфна в области $\Omega = D_z \times \mathbb{C}_w \subset \mathbb{C}^{n+1}$, где в $D_z \subset \mathbb{C}^n$ разрешима любая вторая проблема Кузена. Обозначим через $n_f(z_0)$ число нулей целой функции $f(z_0,w)$ по переменной $w \in \mathbb{C}$ с учетом кратности, причем для удобства считаем $n_f(z_0) = -1$, если $f(z_0,w) \equiv 0$. Если множество $\Im(f) := \{z \in D : n_f(z) < \infty\}$ не является плюриполярным в D, то функция $f(z,w)$ представляется в виде* (3.2)*, где $c_k(z) \in \mathcal{O}(D), k = 0,1,\dots,m, \varphi(z,w) \in \mathcal{O}(\Omega), \varphi(z,w) \neq 0$ для любой точки $(z,w) \in \Omega$.*

Теорема 3.2. *Предположим, что $f(z,w), z = (z_1,\dots,z_n), w = (w_1,\dots,w_k), n \geqslant 1, k \geqslant 1$, голоморфна в области $\Omega = D_z \times C_w^k \subset \mathbb{C}^{n+k}$, где в $D_z \subset \mathbb{C}^n$ любая вторая проблема Кузена разрешима. Если совокупность точек $z_0 \in D$, для которой множество $Z_{z_0} = \{w \in \mathbb{C}^k : f(z_0,w) = 0\}$ — алгебраическое, не является плюриполярным в D, т. е. если множество $\Im_f = \{z_0 \in D : Z_{z_0}$ является алгебраическим в $\mathbb{C}^k\}$ не является плюриполярным множеством, то функция $f(z,w)$ представляется в виде*

$$f(z,w) = Q_m(z,w)\varphi(z,w),$$

где $Q_m(z,w)$ — псевдополином некоторой степени $m \geqslant 0$ и функция $\varphi(z,w) \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\varphi(z,w) \neq 0$, $\forall\,(z,w) \in \Omega$.

Напомним, что псевдополином степени m в области $\Omega = D_z \times \mathbb{C}_w^k \subset \mathbb{C}^{n+k}$ выражается в виде:

$$Q_m(z,w) = \sum_{|\alpha|=m} C_\alpha(z)w^\alpha + \sum_{|\alpha|=m-1} C_\alpha(z)w^\alpha + \dots + C_0(z),$$

где $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n), |\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n, w^\alpha = w_1^{\alpha_1}w_2^{\alpha_2}\dots w_n^{\alpha_n}$ и $C_\alpha(z) \in \mathcal{O}(D), \forall|\alpha| \leqslant m$.

3.2. Вещественно-аналитический случай. Аналог теоремы Вейерштрасса имеет место и для вещественно-аналитических функций: пусть $f(x,t)$ вещественнозначная вещественно-аналитическая функция в точке $(0,0) \in \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t^1$, такая, что $f(0,0) = 0$, но $f(0,t) \not\equiv 0$. Соответствующая голоморфная функция $f(z,w)$ согласно подготовительной теореме Вейерштрасса в некоторой окрестности $U = V \times W$ точки $(0,0)$ представляется как

$$f(z,w) = [w^m + c_{m-1}(z)w^{m-1} + \dots + c_0(z)]\varphi(z,w),$$

где $m \geqslant 1$ порядок нуля $f(0,t)$ в $t = 0, c_k(z), k = 0,1,\dots,m-1$, голоморфные функции в $V, c_k(0) = 0$ и $\varphi(z,w)$ является голоморфной и $\neq 0$ в U функцией. Положим $f(z,w) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z)w^j$, $a_j(z) \in \mathcal{O}(V)$. Так как $f(x,t)$ вещественнозначная, то все тейлоровы коэффициенты $a_j(x)$ также вещественны в $V \cap \mathbb{R}^n$. Отсюда следует, что если $w = \alpha$ корень функции $f(x,w)$, т. е. $f(x,\alpha) = 0$, то комплексное сопряжение $\overline{\alpha}$ также является корнем, $f(x,\overline{\alpha}) = 0$. Поэтому полином Вейерштрасса $t^m + c_{m-1}(x)t^{m-1} + \dots + c_0(t)$ является вещественнозначным, $c_k(x), k = 0,1,\dots,m-1$, являются вещественнозначными функциями в $V \cap \mathbb{R}^n$. Из соотношения $f(x,t) = [t^m + c_{m-1}(x)t^{m-1} + \dots + c_0(x)]\varphi(x,t)$ мы имеем, что $\varphi(x,t) \neq 0$ также вещественно-аналитическая вещественнозначная функция в $U \cap \mathbb{R}^{n+1}$. Следовательно,

$$f(x,t) = [t^m + c_{m-1}(x)t^{m-1} + \dots + c_0(x)]\varphi(x,t), \tag{3.5}$$

где $c_k(x), k = 0,1,\dots,m-1$, $\varphi(x,t)$ вещественно-аналитические, вещественнозначные функции, $\varphi(x,t) \neq 0$.

Справедлив также глобальный вещественный аналог теоремы 3.1 без условии $f(0,t) \not\equiv 0$ (см. [27]). Пусть $f(x,t) \not\equiv 0$ — вещественно-аналитическая и вещественнозначная функция в области $\Omega = D_x \times \mathbb{R}_t \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Функция $f(x,t)$ — вещественно-аналитическая в области $\Omega = D_x \times \mathbb{R}_t \subset \mathbb{R}^{n+1}$, голоморфно продолжается в некоторой окрестности $\hat{\Omega} \subset \mathbb{C}_z^n \times \mathbb{C}_w, \hat{\Omega} \supset \Omega$. Обозначим продолжение функции в $\hat{\Omega}$ как $\hat{f}$, $\hat{f}|_\Omega = f$. Так как для произвольной фиксированной точки $x_0 \in D_x$ функция $f(x_0,t)$ аналитически продолжается в $\mathbb{C}$ как целая функция, т. е. $\hat{\Omega} \cap \{z = x^0\} = \mathbb{C}$, и $D_z \subset \mathbb{R}_x^n \subset \mathbb{C}_z^n$ не является плюриполярной в $\mathbb{C}_z^n$, то существует область $\hat{D}_z \supset D_x$ такая, что $\hat{f}$ голоморфна в $\hat{D}_z \times \mathbb{C}_w$. Без ограничения общности мы предположим, что в $\hat{D}_z$ разрешима вторая проблема Кузена. Обозначим через $n_f(x_0)$ число нулей функции $\hat{f}(x_0,w)$ по переменной $w \in \mathbb{C}$ с учетом кратности. Положим $n_f(x_0) = -1$, если $\hat{f}(x_0,w) \equiv 0$.

Теорема 3.3. *Пусть $f(x,t)$ — вещественно-аналитическая и вещественнозначная функция в области $\Omega = D_x \times \mathbb{R}_t \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Если множество $\Im(f) := \{x \in D : n_f(x) < \infty\}$ не является плюриполярным в $\mathbb{C}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, то функция $f(x,t)$ представляется как $f(x,t) = [c_m(x)t^m + c_{m-1}(x)t^{m-1} + \cdots + c_0(x)]\varphi(x,t)$, где $c_k(x), k = 0,1,\ldots,m$ — вещественно-аналитические в D и $\varphi(x,t)$ — вещественно-аналитические в Ω, $\varphi(x,t) \neq 0$ для любого $(x,t) \in \Omega$.*

Имеет место многомерный (по t) аналог этой теоремы в следующей форме. Псевдополином степени m в области $\Omega = D_x \times \mathbb{R}_t^k \subset \mathbb{R}^{n+k}$ выражается в виде:

$$Q_m(x,t) = \sum_{|\alpha|=m} C_\alpha(x)t^\alpha + \sum_{|\alpha|=m-1} C_\alpha(z)t^\alpha + \cdots + C_0(x),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), |\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$, $w^\alpha = w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2} \ldots w_n^{\alpha_n}$ и $C_\alpha(x)$ является вещественно-аналитической функцией в D $\forall\, 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$.

Теорема 3.4. *Предположим, что $f(x,t)$, $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $t = (t_1,\ldots,t_k)$, $n \geqslant 1$, $k \geqslant 1$ — вещественно-аналитическая функция в области $\Omega = D_x \times \mathbb{R}_t^k \subset \mathbb{R}^{n+k}$. Если совокупность точек $x_0 \in D$, для которых множество $Z_{x_0} = \{w \in \mathbb{C}^k : \hat{f}(x_0,w) = 0\}$ — алгебраическое, не является плюриполярной в $\mathbb{C}^n, D \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, т. е., если множество $\Im(f) = \{x_0 \in D : Z_{x_0}$ алгебраическая в $\mathbb{C}^k\}$ является не плюриполярным, то функция $f(x,t)$ представляется как*

$$f(x,t) = Q_m(x,t)\varphi(x,t),$$

где $Q_m(x,t)$ — вещественнозначный псевдополином степени $m \geqslant 0$ и функция $\varphi(x,t)$ — вещественнозначная вещественно-аналитическая в Ω, $\varphi(x,t) \neq 0$ для любого $(x,t) \in \Omega$. Здесь функция $\hat{f}(x,t)$ — голоморфное продолжение $f(x,t)$ на $\hat{\Omega} \supset \Omega$, $\hat{f}|_\Omega = f$.

Пусть теперь $f(x,t) \not\equiv 0$ — вещественно-аналитическая и вещественнозначная функция в окрестности точки $(0,0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ такая, что $f(0,0) = 0$.

Теорема 3.5. *Существует вещественно-аналитическое многообразие Y и отображение $\pi : Y \mapsto \mathbb{R}^n$, которое является композицией конечного числа σ-процессов таких, что для любой точки $y^0 \in Y$ существует карта $(y_1,\ldots,y_n)$ с центром в точке y^0, для которой справедливо следующее соотношение*:

$$f(\pi(y),t) = (y_1 - y_1(y^0))^{k_1} \ldots (y_n - y_n(y^0))^{k_n} p(y,t) g(y,t),$$

где $k_j \in \mathbb{N}$, $j = 1,2,\ldots,n$, $g(y,t)$ — вещественно-аналитическая функция, $(g(0,y^0) \neq 0)$, и $p(y,t)$ — унитарный псевдополином, т. е.

$$p(y,t) = t^m + d_1(y)t^{m-1} + \cdots + d_m(y);$$

здесь $d_1,\ldots,d_m$ — вещественно-аналитические функции в точке y^0 и $d_l(y^0) = 0$, $l = \overline{1,m}$.

Теорема 3.5 доказана в работе [7].

Для C^∞-функций мы имеем следующую теорему, доказанную Б. Мальгранжем (см. [13]).

Теорема 3.6. *Пусть $f(x,t)$ — C^∞-функция от $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ в окрестности точки $(0,0)$, удовлетворяющая условиям:*

$$f = \frac{\partial f}{\partial t} = \dots = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial t^{k-1}} = 0, \frac{\partial^k f}{\partial t^k} \neq 0 \quad \text{в} \quad (0,0).$$

Тогда функция f представляется как

$$f(x,t) = (t^k + a_{k-1}(x)t^{k-1} + \dots + a_0(x))c(x,t),$$

где a_j и c являются C^∞-функциями в окрестностях точек 0 и $(0,0)$ соответственно, $a_j(0) = 0$, $c(0,0) \neq 0$. Если f — вещественнозначная функция, то такими являются a_j и c.

4. Некоторые вспомогательные утверждения

4.1. Пусть $V(\mathbb{R})$ — пространство функций с ограниченной вариацией в $\mathbb{R}$. Естественная норма этого пространства обозначается через $\|.\|_V$, т. е.

$$\|b\|_V = |b(-\infty)| + V_{\mathbb{R}}[b],$$

где $V_{\mathbb{R}}[b]$ — полная вариация функции b в $\mathbb{R}$.

Пусть $\phi(A,\, x)$ — семейство гладких функций, зависящее от параметров $A \in \mathbb{R}^m$. Берем фазовую функцию следующего вида:

$$\Phi(s,\, A,\, x) := \phi(A,\, x) + sx, \tag{4.1}$$

где s рассматривается как малый параметр. Рассмотрим также соответствующий осцилляторный интеграл с фазой вида (4.1):

$$J(s,\, A,\, \lambda) = \int_{\mathbb{R}} b(s,\, A,\, x) \exp(i\lambda\Phi(s,\, A,\, x))dx \tag{4.2}$$

и введем максимальную функцию, соответствующую осцилляторному интегралу (4.2):

$$m(s,\, A) = \sup_{\lambda>0} |\lambda|^{1/2} |J(s,\, A,\, \lambda)|.$$

Для измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^m$ с конечной мерой Лебега и числа $q > 1$ обозначим через $L^{q-0}(E)$ множество функций

$$L^{q-0}(E) := \bigcap_{p<q} L^p(E).$$

Основным результатом этого раздела является следующая теорема.

Теорема 4.1. *Если $\phi(A,\, x)$ имеет особенность типа A_k в начале координат, то существует окрестность нуля $W \times V \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ и функция $\Psi(s,\, A)$, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) *при любой амплитудной функции $b(s, A, x) \in C_0^\infty(W \times V \times U)$ для осцилляторного интеграла $J(s,\, A,\, \lambda)$ справедлива оценка*

$$|J(s,\, A,\, \lambda)| \leqslant \frac{\|b(s,\, A,\, \cdot)\|_V \cdot \Psi(s, A)}{\sqrt{|\lambda|}};$$

2) *при любой фиксированной точке $A \in V$ функция $\Psi(\cdot,\, A)$ принадлежит классу $L^{\frac{2k}{k-1}-0}(W)$;*
3) *для любого фиксированного положительного числа $p < \dfrac{2k}{k-1}$ норма $L^p(W)$ функции $\Psi(A,\, \cdot)$ равномерно ограничена в V.*

Доказательство. Сначала сформулируем стандартную лемму о нормальных формах функций, имеющих особенность эллиптического типа в начале координат [1].

Лемма 4.1. *Пусть $\phi(A,\, x)$ — гладкая функция, определенная в некоторой окрестности начала координат в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2$, и $\Phi(s,\, A,\, x)$ — функция, определенная соотношением (4.2), где*

$s \in \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ и sx — скалярное произведение. Если функция $\phi(0, x)$ имеет особенность эллиптического типа кратности k в начале координат, то существуют окрестность нуля $W \times V \times U \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2$, гладкое отображение

$$X : W \times V \times U \mapsto \mathbb{R}^2$$

и гладкие функции $\sigma_j(s, A)(j = 0, \dots, k-1)$, удовлетворяющие условиям:

1)
$$X(0) = 0, \quad \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X_1(0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial X_1(0)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial X_2(0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial X_2(0)}{\partial x_2} \end{pmatrix} \neq 0, \quad \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \sigma_1(0)}{\partial s_1} & \dfrac{\partial \sigma_1(0)}{\partial s_2} \\ \dfrac{\partial \sigma_2(0)}{\partial s_1} & \dfrac{\partial \sigma_2(0)}{\partial s_2} \end{pmatrix} \neq 0;$$

2) *для функции $\Phi(s, A, x)$ выполняется равенство*

$$\Phi(s, A, x(s, A, X)) = f(X_1, X_2) + \sum_{j=3}^{k-1} \sigma_j(s, A) e_j(X) + \sigma_1(s, A) X_1 + \sigma_2(s, A) X_2 + \sigma_0(s, A),$$

где $f(X_1, X_2)$ — квазиоднородный многочлен, имеющий особенность эллиптического типа в начале координат, и $\{1, X_1, X_2, \{e_j(X)\}_{j=3}^{k-1}\}$ — базисные мономы локальной алгебры особенностей.

Единственное отличие этой леммы от общей теоремы Мозера [1] состоит в том, что ранг отображения, задаваемого функциями (σ_1, σ_2), равняется двум в некоторой окрестности начала координат. Это свойство существенно используется при доказательстве суммируемости функции $\Psi(\cdot, A)$. В частности, в одномерном случае $s \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ функция $\Phi(s, A, x)$ приводится к виду:

$$\Phi(s_1, A, x(s_1, A, X)) = X^{k+1} + \sigma_{k-1}(s_1, A) X^{k-1} + \dots + \sigma_2(s_1, A) X^2 + \sigma_1(s_1, A) X + \sigma_0(s_1, A),$$

причем $\dfrac{\partial \sigma_1(0)}{\partial s_1} \neq 0$.

Теперь приведем доказательство теоремы 4.1. Согласно лемме 4.1, достаточно провести доказательство в случае одномерных осцилляторных интегралов с фазой, имеющей нормальный вид: $\Phi_1(s_1, A, X) := \Phi(s_1, A, x(s_1, A, X))$. В некоторой окрестности нуля каждая функция $\sigma_l(s_1, A)\,(l = 2, \dots, k-1)$ записывается в виде (см. [13]):

$$\sigma_l(s_1, A) = \sigma_1(s_1, A) g_l(s_1, A) + \tilde{\sigma}_l(A),$$

где $g_l(s_1, A)$, $\tilde{\sigma}_l(A)$ — некоторые гладкие функции. С учетом этих равенств фазовая функция $\Phi_1(s_1, A, X)$ преобразуется следующим образом:

$$\Phi_1(s_1, A, X) = X^{k+1} + \tilde{\sigma}_{k-1}(A) X^{k-1} + \dots + \tilde{\sigma}_2(A) X^2 + \sigma_1(s_1, A) \varphi(s_1(\sigma_1, A), A, X) X + \sigma_0(s_1(\sigma_1, A), A),$$

где

$$\varphi(s_1(\sigma_1, A), A, X) := 1 + g_2(s_1(\sigma_1, A), A) X + \dots + g_{k-1}(s_1(\sigma_1, A), A) X^{k-1}$$

и σ_1 рассматривается как новая независимая переменная. Доказательство теоремы 4.1 проводится по индукции относительно k. Если $k = 1$, то согласно лемме Ван дер Корпута [32] искомая оценка тривиально выполняется. Предположим, что $k > 1$ и утверждение теоремы 4.1 доказано для всех $\leqslant k - 1$. Мы докажем его для k.

Введем обозначение:

$$\rho(A) := |\tilde{\sigma}_2(A)|^{\frac{k+1}{k-1}} + \dots + |\tilde{\sigma}_{k-1}(A)|^{\frac{k+1}{2}}.$$

Для параметров $(\sigma_1, \rho(A))$ рассмотрим два случая:

1-*й случай*: $\rho(A) < \varepsilon |\sigma_1|$, где ε — фиксированное, достаточно малое положительное число. В этом случае в осцилляторном интеграле сделаем замену переменных $X = |\sigma_1|^{\frac{1}{k}} x$ и получим:

$$J(\sigma_1, A, \lambda) = |\sigma_1|^{\frac{1}{k}} e^{i\lambda \sigma_0(s_1(A, \sigma_1), A)} \int e^{i\lambda |\sigma_1|^{\frac{k+1}{k}} \Phi_2(\sigma_1, \tilde{\sigma}(A), x)} b(\sigma_1, A, |\sigma_1|^{\frac{1}{k}} x) dx,$$

где

$$\Phi_2(\sigma_1, \tilde{\sigma}(A), x) := x^{k+1} + \frac{\tilde{\sigma}_{k-1}(A)}{|\sigma_1|^{\frac{2}{k}}} x^{k-1} + \dots + \frac{\tilde{\sigma}_2(A)}{|\sigma_1|^{\frac{k-1}{k}}} x^2 + sgn(\sigma_1) x \varphi(\sigma_1, A, s_1(A), x),$$

и

$$\varphi(\sigma_1, A, s_1(A), x) := 1 + g_2(s_1(A, \sigma_1), A)|\sigma_1|^{\frac{1}{k}}x + \dots + g_{k-1}(s_1(A, \sigma_1), A)|\sigma_1|^{\frac{k-1}{k}}x^{k-1}.$$

Так как коэффициенты полинома Φ_2 ограничены, то множество его критических точек содержится в некотором компакте $\{|x| \leqslant N\}$. Берем гладкую функцию χ с компактным носителем такую, что $\chi(x) \equiv 1$ при $x \in [-N-1, N+1]$. С помощью этой функции запишем интеграл $J(s_1, A, \lambda)$ в виде суммы следующих двух интегралов:

$$J_0(\sigma_1, A, \lambda) := |\sigma_1|^{\frac{1}{k}} e^{i\lambda\sigma_0(s_1(A,\sigma_1),A)} \int e^{i\lambda|\sigma_1|^{\frac{k+1}{k}}\Phi_2(\sigma_1),\tilde{\sigma}(A),x)} b(|\sigma_1, A, |\sigma_1|^{\frac{1}{k}}x)\chi(x)dx$$

и $J_1(\sigma_1, A, \lambda) := J(\sigma_1, A, \lambda) - J_0(\sigma_1, A, \lambda)$.

Заметим, что носитель амплитуды осцилляторного интеграла $J_1(\sigma_1, A, \lambda)$ не содержит критических точек фазовой функции, более того, ее вторая производная оценивается снизу с некоторой положительной константой. Поэтому, мы можем применить лемму Ван дер Корпута и иметь оценку [32] (см. также [2]):

$$|J_1(\sigma_1, A, \lambda)| \leqslant \frac{\|b(\sigma_1, A, \cdot)\|_V \cdot c}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}|\sigma_1|^{\frac{k-1}{2k}}}. \tag{4.3}$$

Далее, носитель амплитуды осцилляторного интеграла $J_0(\sigma_1, A, \lambda)$ находится в фиксированном компакте. Мы можем считать, что фазовая функция является малой деформацией функции $x^{k+1} + \operatorname{sgn}(\sigma_1)x$. Следовательно, если σ_1 меняется в достаточно малой окрестности нуля и ε — достаточно малое положительное число, то фазовая функция при всех рассматриваемых значениях параметров имеет не более двух невырожденных критических точек. Поэтому для интеграла $J_0(\sigma_1, A, \lambda)$ также справедлива оценка вида (4.3).

2-*й случай*: $\rho(A) \geqslant \varepsilon|\sigma_1|$, или, что то же самое, $|\sigma_1| \leqslant M\rho(A)$, где $M := \varepsilon^{-1}$.

В этом случае в интеграле (4.1) сделаем замену переменных $X = \rho^{\frac{1}{k+1}}x$ (где $\rho := \rho(A)$) и получим:

$$J = \rho^{\frac{1}{k+1}} e^{i\lambda\sigma_0(s_1(A,\sigma_1),A)} \int e^{i\lambda\rho\Phi_3(\tilde{\sigma}_1,\varsigma(A),x)} b(\sigma_1, A, \rho^{\frac{1}{k+1}}x)dx,$$

где

$$\Phi_3(\tilde{\sigma}_1, \varsigma(A), x) := x^{k+1} + \varsigma_{k-1}(A)x^{k-1} + \dots + \varsigma_2(A)x^2 + \tilde{\sigma}_1 x\varphi_1(\sigma_1, A, s_1(A), x),$$

$$\varphi_1(\sigma_1, A, s_1(A), x)) := 1 + g_2(s_1(A, \sigma_1), A)\rho^{\frac{1}{k+1}}x + \dots + g_{k-1}(s_1(A, \sigma_1), A)\rho^{\frac{k-1}{k+1}}x^{k-1}$$

и

$$g_l := \frac{\tilde{\sigma}_l}{\rho^{\frac{k+1-l}{k+1}}}, \ (l = 2, \dots, k-1).$$

Так как коэффициенты полинома Φ_3 также ограничены, то множество его критических точек содержится в некотором компакте $\{|x| \leqslant N_1\}$. Берем гладкую функцию χ с компактным носителем такую, что $\chi(x) \equiv 1$ при $x \in [-N_1 - 1, N_1 + 1]$. С помощью этой функции запишем интеграл $J(\sigma_1, A, \lambda)$ в виде суммы следующих двух интегралов:

$$J_0(\sigma_1, A, \lambda) := \rho^{\frac{1}{k+1}} e^{i\lambda\sigma_0(s_1(A,\sigma_1),A)} \int e^{i\lambda\rho\Phi_3(\tilde{\sigma}_1,\varsigma(A),x)} b(\sigma_1, A, \rho^{\frac{1}{k+1}}x)\chi(x)dx$$

и

$$J_1(\sigma_1, A, \lambda) := J(\sigma_1, A, \lambda) - J_0(\sigma_1, A, \lambda).$$

Аналогично к предыдущему случаю носитель амплитуды осцилляторного интеграла $J_1(\sigma_1, A, \lambda)$ не содержит критических точек фазовой функции, а ее вторая производная оценивается снизу с некоторым положительным числом. Применяя лемму Ван дер Корпута, имеем оценку вида (4.3).

Далее, носитель амплитуды осцилляторного интеграла $J_0(\sigma_1, A, \lambda)$ находится в фиксированном компакте. Причем $\varsigma := (\varsigma_2, \dots, \varsigma_{k-1})$ лежит на квазисфере $\Sigma := \{\varsigma \in \mathbb{R}^{k-2} : \rho(\varsigma) = 1\}$, а $|\varsigma_1| \leqslant M$. Фиксируем точку $(\varsigma^0, \varsigma_1^0) \in \Sigma \times [-M, M]$. Тогда фазовая функция является деформацией следующей функции:

$$\Phi_3(\varsigma^0, \varsigma_1^0, x) := x^{k+1} + \varsigma_{k-1}^0 x^{k-1} + \dots + \varsigma_2^0 x^2 + \varsigma_1^0 x.$$

Так как $\varsigma^0 \in \Sigma$, то эта функция имеет не более k критических точек, кратности которых не превосходят $k-1$. С помощью разбиения единицы интеграл $J_0(\sigma_1,\, A,\, \lambda)$ записывается в виде суммы конечного числа интегралов. Каждый из этих интегралов оцениваем по индукции. По предположению индукции существует функция $\psi(\varsigma)$, определенная в некоторой окрестности $W(\varsigma^0)\times V(\varsigma_1^0)\subset \Sigma\times\mathbb{R}$ точки $(\varsigma^0,\, \varsigma_1^0)$, которая удовлетворяет условиям:

1) При всех значениях $\varsigma \in W(\varsigma^0)\times V(\varsigma_1^0)$ для интеграла $J_0(\sigma_1,\, A,\, \lambda)$ справедлива оценка:

$$|J_0(\sigma_1,\, A,\, \lambda)| \leqslant \frac{\|b(\cdot,\, A, \sigma_1)\|_V \psi(\varsigma)}{|\lambda|^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{k-1}{2(k+1)}}}.$$

2) Для любого $p < \dfrac{2(k-1)}{k}$ интеграл

$$\int\limits_{V(\varsigma_1^0)} (\psi(\varsigma))^p d\varsigma_1$$

равномерно ограничен в $W(\varsigma^0)$.

Такая функция $\psi(\varsigma)$ существует в окрестности каждой точки $(\varsigma^0, \varsigma_1^0)\in \Sigma\times\mathbb{R}$. Следовательно, из компактности множества $\Sigma\times[-M,\, M]$ мы можем найти аналогичную функцию $\psi(\varsigma)$ для всего $\Sigma\times[-M,\, M]$.

Отсюда для любого числа $p < \dfrac{2k}{k-1}$ имеем:

$$\int\limits_{|s_1|\leqslant M\rho^{\frac{k}{k+1}}} \frac{(\psi(\varsigma,\, \frac{s_1}{\rho^{\frac{k}{k+1}}}))^p ds_1}{\rho^{\frac{(k-1)p}{2(k+1)}}} = \int\limits_{[-M,\, M]} \rho^{\frac{2k-(k-1)p}{2(k+1)}} (\psi(\varsigma,\, \varsigma_1))^p d\varsigma_1 \leqslant \int\limits_{[-M,\, M]} (\psi(\varsigma,\, \varsigma_1))^p d\varsigma_1 < \infty.$$

Суммируя полученные оценки, мы приходим к доказательству теоремы 4.1. □

4.2. Рассмотрим случай, когда фазовая функция Φ зависит от некоторого дополнительного параметра $\eta\in\mathbb{R}^n$, причем $\Phi(\eta, a, x): \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(\eta, a, 0)\equiv 0$, $\Phi(\eta, a, 0)\equiv 0$ и

$$F(\eta,\, s_1, a,\, x) := \Phi(\eta,\, a,\, x) + s_1 x. \tag{4.4}$$

Рассмотрим соответствующий осцилляторный интеграл:

$$J(\eta,\, s_1,\, a, \lambda) := \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda F(\eta, s_1, a, x)} b(\eta,\, s_1,\, a,\, x)dx. \tag{4.5}$$

Теорема 4.2. *Пусть Φ — вещественно-аналитическая функция в начале координат, удовлетворяющая условию $\Phi(\eta,\, 0,\, x)\not\equiv 0$. Тогда существует окрестность нуля $W\times V\times U\subset \mathbb{R}^{n+1}_{(\eta,s_1)}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}$ такая, что при любой амплитудной функции $b\in C_0^\infty(W\times V\times U)$ для осцилляторного интеграла* (4.5) *справедлива оценка*

$$|J(\eta,\, s_1,\, a,\, \lambda)| \leqslant \frac{\psi(\eta,\, s_1,\, a)}{|\lambda|^{1/2}}, \tag{4.6}$$

где ψ — некоторая функция, удовлетворяющая условию: существует число $\varepsilon>0$ такое, что для любого фиксированного a функция $\psi(\cdot,\, a)$ принадлежит классу $L^{2+\varepsilon}(W)$, причем ее норма $\|\psi(\cdot,\, a)\|_{L^{2+\varepsilon}(W)}$ равномерно ограничена относительно $a\in V$.

Доказательство. Мы следуем методу доказательства локального варианта леммы 3.1 (см. также [7]). Запишем функцию Φ в виде:

$$\Phi(\eta,\, a,\, x) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k(\eta,\, a) x^k,$$

где $\{c_k\}_{k=2}^\infty$ — некоторые аналитические функции в фиксированной окрестности начала координат.

Рассмотрим идеал I алгебры аналитических функций в начале координат, порожденный функциями $\{c_k\}_{k=2}^\infty$. По нашему предположению $I\neq 0$. Если I совпадает с алгеброй аналитических в нуле функций, то $\Phi(0,0,x)$ является ненулевой аналитической функцией. Таким образом, она является деформацией особенности A_k с конечным числом k (см. [1]). В этом случае доказательство теоремы 4.2 следует из теоремы 4.1. Далее, предположим, что $I \neq 0$ — собственный идеал. Тогда согласно теореме Гильберта о нетеровости кольца аналитических функций существует натуральное число N такое, что идеал I порождается элементами $\{c_k\}_{k=2}^N$. Также естественно определяется идеал $I_0 :=< \{c_k(\cdot,\,0)\}_{k=2}^{\infty} >$, который порождается элементами $\{c_k(\cdot,\,0)\}_{k=2}^N$. В частности, по условиям леммы 4.2 для аналитической функции $c^2(\eta,a)$, определенной равенством

$$c^2(\eta,a) := \sum_{l=2}^{N} c_l^2(\eta,a),$$

мы имеем соотношение $c^2(\eta,0) \not\equiv 0$. Следовательно, существует положительное число $\delta > 0$ и окрестность нуля $W \times V \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^m$ такие, что для любого $a \in V$ интеграл

$$\int\limits_V \frac{d\eta}{|c(\eta,\,a)|^{\delta}} \tag{4.7}$$

равномерно ограничен относительно a.

Следует отметить, что из сходимости последнего интеграла при $a = 0$, вообще говоря, не следует равномерной ограниченности этого интеграла относительно a. Соответствующий пример приведен в работе А. Н. Варченко (см. [3]). Однако для достаточно малых δ последний интеграл сходится и равномерно ограничен относительно a. Например, если

$$c^2(\eta,0) = \sum_{k=m}^{\infty} p_k(\eta)$$

— разложение функции c^2 в ряд Тейлора, где p_k — однородный многочлен степени k, а также $p_m \not\equiv 0$, то легко показать, что при $\delta < 2/m$ интеграл (4.7) сходится для достаточно малых a и он равномерно ограничен. Для более тонких результатов в этом направлении см. [9] (а также [24] для дальнейших обобщений).

Для оценки осцилляторного интеграла $J(\eta,\,s_1,\,a,\,\lambda)$ сначала рассмотрим случай $|c(\eta,\,a)| < |s_1|$. Так как $\Phi(\eta,\,a,\,x)/(x^2 c(\eta,\,a))$ и ее производные ограничены, то функция $\Phi(\eta,\,a,\,x)/|s_1|$ и ее производные достаточно малы в окрестности начала координат. Следовательно, мы можем использовать формулу интегрирования по частям и получить:

$$|J(\eta,\,s_1,\,a,\,\lambda)\chi_{\{|c(\eta,a)|<|s_1|\}}(\eta,\,s_1,\,a)| \leqslant \frac{C}{|\lambda s_1|^{1/2}}$$

с некоторой постоянной C, где $\chi_{\{|c(\eta,a)|<|s_1|\}}$ — индикатор множества $\{|c(\eta,\,a)| < |s_1|\}$.

При $|c(\eta,\,a)| \geqslant |s_1|$ мы используем лемму 4.1. Определим

$$\Phi_1(\eta,\,a,\,x) := \frac{\Phi(\eta,\,a,\,x)}{c(\eta,\,a)} \quad \text{и} \quad \varsigma_1 := \frac{s_1}{c(\eta,\,a)}.$$

Согласно лемме 4.1 мы можем предполагать, что функция $\Phi_1(\eta,\,a,\,x)$ является гладкой деформацией особенности A_k (хотя k может быть различными в зависимости от параметров).

Воспользуемся теперь теоремой 3.5, находим вещественно-аналитическое многообразие Y и собственное отображение $\pi : Y \mapsto \mathbb{R}^n_\eta \times \mathbb{R}^m_a$ такие, что для любой точки $y^0 \in Y$ существует карта $(y_1,\ldots,y_{n+m})$ с центром в точке y^0, для которой справедливо соотношение:

$$\Phi_1(\pi(y),x) = (y_1 - y_1(y^0))^{k_1} \ldots (y_{n+m} - y_{n+m}(y^0))^{k_n} p(y,x) g(y,x),$$

где $k_j \in \mathbb{N}$, $j = 1,2,\ldots,(n+m)$, $g(y,x)$ — вещественно-аналитическая функция, $(g(0,y^0) \neq 0)$ и $p(y,x)$ — унитарный псевдополином, т. е.

$$p(y,x) = x^q + d_1(y)x^{q-1} + \cdots + d_q(y),$$

где $d_1,\ldots,d_q$ — вещественно-аналитические функции в точке y^0 и $d_l(y^0) = 0$, $l = \overline{1,q}$.

Фиксируем $\varsigma_1 = \varsigma_1^0 \in [-1,1]$ и рассмотрим функцию

$$\Phi^0(y,\varsigma_1,\,x) := \Phi_1(\pi(y),\,x) + \varsigma_1^0 x + (\varsigma_1 - \varsigma_1^0)x.$$

Теорема Хиронака [18] о разрешении особенностей показывает, что собственное отображение $\pi : Y \mapsto W \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ является взаимно-однозначным вне некоторого особого аналитического подмножества Y. Тогда согласно теореме 4.1 существует функция $\Psi(y, \varsigma_1)$ такая, что для осцилляторного интеграла справедлива оценка:

$$|J(\eta,\, s_1,\, a,\, \lambda)| \leqslant \frac{C\chi_{\{c(\eta,a)\geqslant|s_1|\}}(\eta,\, a,\, s_1)\Psi(\eta, \frac{s_1}{c(\eta,a)})}{|c(\eta,a)\lambda|^{1/2}},$$

причем интеграл

$$\int_{-1}^{1} \Psi^p(y,\, \varsigma_1) d\varsigma_1$$

равномерно ограничен на многообразии Y благодаря компактности прообраза π. Положим

$$\psi(\eta,\, s_1,\, a) := \frac{C\chi_{\{|c(\eta,\,a)|<|s_1|\}}(\eta,\, a,\, s_1)}{|s_1|^{1/2}} + \frac{C\chi_{\{|c(\eta,\,a)|\geqslant|s_1|\}}(\eta,\, a,\, s_1)\Psi(\eta, \frac{s_1}{c(\eta,a)})}{|c(\eta,a)|^{1/2}}.$$

Легко показать, что функция $\psi(\eta,\, s_1,\, a)$ удовлетворяет утверждениям теоремы 4.2. $\square$

4.3. В этом пункте мы докажем аналог теоремы 4.1 для двукратных осцилляторных интегралов, фазовая функция которых является деформацией особенности типа $D_4^{\pm}$.

Пусть $\phi(A,\, x)$, где $(A,\, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2$ — семейство гладких функций. Рассмотрим фазовую функцию следующего вида:

$$\Phi(s,\, A,\, x) := \phi(A,\, x) + s_1x_1 + s_2x_2.$$

Через $J(s,\, A,\, \lambda)$ обозначим соответствующий осцилляторный интеграл:

$$J(s,\, A,\, \lambda) := \int_{\mathbb{R}^2} b(s,\, A,\, x)e^{i\lambda\Phi(s,\,A,\,x)}dx,$$

где $b \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2)$.

Теорема 4.3. *Пусть гладкая функция $\phi(0,\, x)$ имеет особенность типа $D_4^{\pm}$ в начале координат. Тогда существуют окрестность нуля $W \times V \times U \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2$ и функция $\Psi(s,\, A)$ удовлетворяющие следующим условиям*:

1) *при любой амплитудной функции $b \in C_0^{\infty}(W \times V \times U)$ для осцилляторного интеграла $J(s,\, A,\, \lambda)$ справедлива оценка*

$$|J(s,\, A,\, \lambda)| \leqslant \frac{\|b(s,\, \cdot)\|_{C^2}\Psi(s,\, A)}{|\lambda|};$$

2) *для любой фиксированной точки $A \in V$ функция $\Psi(\cdot,\, A)$ принадлежит классу $L^{3-0}(W)$;*
3) *для любого $p < 3$ функция $\|\Psi(\cdot,\, A)\|_{L^p(W)}$ равномерно ограничена в V.*

Доказательство. Согласно лемме 4.1 достаточно провести доказательство теоремы в случае, когда фазовая функция имеет нормальный вид. Также, используя свойства отображения $(\sigma_1,\, \sigma_2)$ из леммы 4.1 ($k = 4$), мы можем представить функцию σ_3 в виде:

$$\sigma_3(s,\, A) = \sigma_1(s,\, A)g_1(s,\, A) + \sigma_2(s,\, A)g_2(s,\, A) + \tilde{\sigma}_3(A),$$

где $g_1(s,\, A)$, $g_2(s,\, A)$ и $\tilde{\sigma}_3(A)$ — некоторые гладкие функции в окрестности начала координат.

Обозначая новую функцию $\tilde{\sigma}_3(A)$ снова через $\sigma_3(A)$, мы можем написать фазовую функцию в виде:

$$\Phi(\sigma,\, X) = X_1^3 \pm X_1X_2^2 + \sigma_3(A)X_2^2 + \sigma_1(X_1 + g_1(\sigma, A)X_2^2) + \sigma_2X_2(1 + g_1(\sigma, A)X_2).$$

Введем обозначение $\rho := (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{\frac{1}{4}}$ и сначала рассмотрим случай $\varepsilon|\sigma_3| > \rho$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое фиксированное положительное число. При этом мы можем дать оценку $|\lambda\sigma_3^3| \geqslant 1$, ибо в противном случае согласно классическим результатам Дж. Дейстермаата [16] интеграл $J(s,\, A,\, \lambda)$ оценивается следующим образом:

$$|J| \leqslant \frac{C\|b(\sigma,\, \cdot)\|_{C^2}}{|\lambda|^{\frac{2}{3}}|\lambda\sigma_3^3|^{\frac{1}{3}}} \leqslant \frac{C\|b(\sigma,\, \cdot)\|_{C^2}}{|\lambda| \cdot \rho},$$

где $\rho^{-1} \in L^{4-0}(V)$.

Таким образом, предполагая $|\lambda\sigma_3^3| \geqslant 1$, в интеграле $J(s, A, \lambda)$ сделаем замену переменных $X \mapsto |\sigma_3|x$ и получим:

$$J(s, A, \lambda) = |\sigma_3|^2 \int e^{i\lambda|\sigma_3|^3\Phi_1(\sigma, x)} b(\sigma, |\sigma_3|x)dx,$$

где

$$\Phi_1(\sigma, x) = x_1^3 \pm x_1x_2^2 + sgn(\sigma_3)x_2^2 + \tilde{\sigma}_1(x_1 + g_1(\sigma, A)\sigma_3x_2^2) + \tilde{\sigma}_2x_2(1 + g_1(\sigma, A)\sigma_3x_2).$$

Здесь $\tilde{\sigma}_j = \dfrac{\sigma_j}{\sigma_3^2}$ $(j = 1, 2)$ и $\operatorname{sgn}(\sigma_3) = \pm 1$ $(\sigma_3 \neq 0)$.

Очевидно, что при любых значениях параметров $(\tilde{\sigma}, \sigma_3)$ множество критических точек фазовой функции $\Phi_1(\sigma, x)$ содержится в некотором компакте K. Выберем гладкую функцию χ, имеющую компактный носитель и такую, что $\chi(x) \equiv 1$ в некоторой окрестности K. С помощью этой функции интеграл J записывается в виде суммы двух следующих интегралов:

$$J_0 := |\sigma_3|^2 \int e^{i\lambda|\sigma_3|^3\Phi_1(\sigma, x)} b(\sigma, |\sigma_3|x,)\chi dx \quad \text{и} \quad J_1 := J - J_0.$$

Теперь покажем, что осцилляторный интеграл J_1 достаточно быстро убывает. Действительно, рассмотрим векторное поле, определенное на множестве $\operatorname{supp}(1-\chi) \cap \operatorname{supp}(a(\delta_\rho(\cdot)))$ следующей формулой:

$$v := \frac{\frac{\partial\Phi_1(x)}{\partial x_1}}{\left(\frac{\partial\Phi_1(x)}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_1(x)}{\partial x_2}\right)^2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\frac{\partial\Phi_1(x)}{\partial x_2}}{\left(\frac{\partial\Phi_1(x)}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_1(x)}{\partial x_2}\right)^2}\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Тогда очевидным образом выполняется следующее равенство:

$$v(e^{i\lambda|\sigma_3|^3\Phi_1(x)}) = i\lambda|\sigma_3|^3 e^{i\lambda|\sigma_3|^3\Phi_1(x)}.$$

С использованием последнего равенства, дважды применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$J_1 := (i\lambda|\sigma_3|^3)^{-2}|\sigma_3|^2 \int e^{i\lambda|\sigma_3|^3\Phi_1(x)}(v^t)^2(b(|\sigma_3|^3x, \sigma)(1-\chi(x)))dx,$$

где v^t — сопряженный оператор к векторному полю v.

Очевидно, что последний интеграл абсолютно сходится и справедлива следующая оценка:

$$|J_1| \leqslant \frac{C\|b(\sigma, \cdot)\|_{C^2}}{|\lambda\sigma_3|} \leqslant \frac{C\|b(\sigma, \cdot)\|_{C^2}}{|\lambda|\rho}.$$

Таким образом, осталось оценить осцилляторный интеграл J_0. Непосредственная проверка показывает, что фазовая функция Φ_1 является версальной деформацией особенности типа A_2 в достаточно малой окрестности начала координат. Остальные критические точки фазовой функции — невырожденные при условии малости ε. Применяя метод стационарной фазы по одной переменной с остаточным членом вида $O(|\lambda|^{-1}\|b(\sigma, \cdot)\|_{C^2})$ (см. [11]), сводим задачу к оценке одномерных осцилляторных интегралов. Следовательно, существует функция $\Psi_1(\tilde{\sigma}, \sigma_3, A)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) для осцилляторного интеграла $J(s, A, \lambda)$ справедлива оценка

$$|J(s, A, \lambda)| \leqslant \frac{\|b(\sigma, \cdot)\|_{C^2}\Psi_1(\tilde{\sigma}, \sigma_3, A)}{|\lambda|};$$

2) при любой фиксированной точке $A \in W$ функция $\Psi_1(\cdot, \sigma_3, A)$ принадлежит классу $L^{4-0}(V)$;

3) для любого $p < 4$ L^p-норма функции $\tilde{\Psi}_1(\cdot, \sigma_3, A) := \dfrac{\Psi_1(\tilde{\sigma}, \sigma_3, A)}{|\sigma_3|}$ равномерно ограничена в U.

Теперь рассмотрим случай $\sigma \in \{|\sigma_3| \leqslant M\rho\}$, где M — достаточно большое фиксированное положительное число.

Снова, как и прежде, предположим, что $\lambda\rho^3 \geqslant 1$. В противном случае классические результаты Дж. Дейстермаата [16] позволяют получить искомую оценку. В осцилляторном интеграле сделаем замену переменных $X \mapsto \rho x$ и получим:

$$J = \rho^2 \int e^{i\lambda\rho^3\Phi_2(x,\sigma)} b(|\sigma_3|x, \sigma)dx,$$

где

$$\Phi_1(x, \sigma) = x_1^3 \pm x_1x_2^2 + \tilde{\sigma}_3X_2^2 + \tilde{\sigma}_1(X_1 + g_1(\sigma, A)\rho X_2^2) + \tilde{\sigma}_2X_2(1 + g_1(\sigma, A)\rho X_2),$$

здесь $\tilde{\sigma}_3 = \dfrac{\sigma_3}{\rho}$ и $\tilde{\sigma}_j = \dfrac{\sigma_j}{\rho^2}$ $(j = 1, 2)$.

Заметим, что $(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2) \in S^1$, где S^1 — единичная сфера с центром в начале координат; при этом для σ_3 имеем: $|\sigma_3| \leqslant M$.

Очевидно, что при любых значениях параметров $(\tilde{\sigma}, \sigma_3)$ множество критических точек фазовой функции $\Psi_2(A, \tilde{\sigma}, \sigma_3)$ содержится в некотором компакте K. Выберем гладкую функцию χ, имеющую компактный носитель и такую, что $\chi(x) \equiv 1$ в некоторой окрестности K. С помощью этой функции интеграл J записывается в виде суммы двух следующих интегралов:

$$J_0 := \rho^2 \int e^{i\lambda\rho^3\Phi_2(A,\tilde{\sigma},\tilde{\sigma}_3)} a(\rho x, \sigma)\chi dx \quad \text{и} \quad J_1 := J - J_0.$$

Теперь покажем, что осцилляторный интеграл J_1 достаточно быстро убывает. Действительно, рассмотрим векторное поле, определенное на множестве $\operatorname{supp}(1-\chi) \cap \operatorname{supp}(b(\rho(\cdot), \sigma))$ следующей формулой:

$$v := \frac{\frac{\partial\Phi_2(x)}{\partial x_1}}{\left(\frac{\partial\Phi_2(x)}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_2(x)}{\partial x_2}\right)^2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\frac{\partial\Phi_2(x)}{\partial x_2}}{\left(\frac{\partial\Phi_2(x)}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_2(x)}{\partial x_2}\right)^2}\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Тогда очевидным образом выполняется следующее равенство:

$$v(e^{i\lambda\rho^3\Phi_2(x)}) = i\lambda\rho^3 e^{i\lambda\rho^3\Phi_2(x)}.$$

С использованием последнего соотношения, дважды применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$J_1 := (i\lambda\rho^3)^{-2}\rho^2 \int e^{i\lambda\rho^3\Phi_2(x)}(v^t)^2(b(\rho^3x, \sigma)(1 - \chi(x)))dx,$$

где v^t — сопряженный оператор к векторному полю v.

Очевидно, что последний интеграл абсолютно сходится и справедлива следующая оценка:

$$|J_1| \leqslant \frac{C\|b(\cdot, \sigma)\|_{C^2}}{|\lambda|\rho}.$$

Теперь осталось лишь оценить осцилляторный интеграл $J_0(\lambda, A, s)$. Мы покажем, что существует функция $\Psi_2(A, \cdot)$, принадлежащая классу $L^{3-0}(S^1)$ и такая, что для осцилляторного интеграла $J_0(s, A, \lambda)$ справедлива оценка:

$$|J_0(s, A, \lambda)| \leqslant \frac{\|b(\cdot, \sigma)\|_{C^2}\Psi_2(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_3, A)}{\rho|\lambda|}. \tag{4.8}$$

Действительно, так как переменные $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_3)$ меняются в компактном множестве $S^1 \times [-M, M]$, то достаточно получить искомую оценку в некоторой окрестности фиксированной точки $(\tilde{\sigma}^0, \tilde{\sigma}_3^0)$ этого множества. Легко показать, что фазовая функция Φ_2 является деформацией особенности типа A_k $(k \leqslant 3)$. Причем в малой окрестности критической точки деформация удовлетворяет условиям леммы 4.1, при этом $k \leqslant 3$. Таким образом, рассуждения, основанные на методе стационарной фазы, сводят нашу проблему к задачу об оценках однократных осцилляторных интегралов.

Следовательно, существует функция $\Psi_2(A, \tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_3)$, удовлетворяющая оценке (4.8). Помимо этого, при любой фиксированной точке $A \in W$ функция $\Psi_2(A, \cdot, \tilde{\sigma}_3)$ принадлежит классу $L^{3-0}(S^1)$, причем для любого $p < 3$ интеграл

$$\int\limits_{S^1} (\Psi_2(A, \tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_3))^p dl$$

локально равномерно и поэтому равномерно ограничен по $(A, \tilde{\sigma}_3)$, ибо A меняется в достаточно малой окрестности нуля и $\tilde{\sigma}_3$ лежит в компактном множестве $[-M, M]$.

Покажем, что норма функции $\tilde{\Psi}_2(A, \cdot, \tilde{\sigma}_3) := \dfrac{\Psi_2(A, \tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_3)}{\rho}$ в L^p равномерно ограничена в U. Действительно, для любого $p < 3$ имеем:

$$\int \Psi_2(A, \tilde{\sigma}, \sigma_3)^p d\tilde{\sigma}_1 d\tilde{\sigma}_2 = \int \frac{(\Psi_2(A, \tilde{\sigma}, \sigma_3))^p}{\rho^p} d\tilde{\sigma}_1 d\tilde{\sigma}_2 = \int\limits_{[0,\varepsilon]} \rho^{4-p} d\rho \int\limits_{S^1} \Psi_2(A, \tilde{\sigma}, \sigma_3)^p dl \leqslant C,$$

где, как отмечено выше, C не зависит от параметров A, $\tilde{\sigma}_3$.

$\square$

5. Доказательство основных теорем

Доказательство теоремы 2.1.

(i). Пусть $S(a)$ — семейство аналитических гиперповерхностей. Используя метод стационарной фазы, сводим интеграл к одномерному осцилляторному интегралу, удовлетворяющему условиям теоремы 4.2.

Действительно, преобразование Фурье (1.1) меры $\hat{d}\mu_a$ локально может записано в виде кратного осцилляторного интеграла, ибо локально $S(a)$ после возможного евклидова движения представляется как график аналитической функции

$$S := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} := \phi(a, x)\},$$

где $\phi(a, x)$ — вещественно-аналитическая функция, удовлетворяющая условиям: $\phi(0, 0) = 0$, $\nabla_x \phi(0, 0) = 0$. Как следствие, поверхностный интеграл сводится к кратному интегралу

$$J(s, a, \lambda) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\Phi(s,a,x)} b(x) dx.$$

Здесь $\lambda := \xi_{n+1}$, $s_j := \dfrac{\xi_j}{\lambda}$ $(j = 1, \dots, n)$, $\Phi(s, a, x) := \phi(a, x) + s \cdot x$, где $\phi(s, a, x)$ — вещественно-аналитическая функция, удовлетворяющая условиям: $\nabla_x \phi(0, 0) = 0$, $\operatorname{rank} \operatorname{Hess}_x \phi(0, 0) = n - 1$, что эквивалентно условию $S(0) \in \Lambda_{n-1}$.

Если $|s| > 1$ и b — гладкая функция с достаточно малым носителем, содержащимся в окрестности начало координат, то для произвольного натурального числа N, используя формулу интегрирования по частям, получим:

$$J(s, a, \lambda) = O(|s\lambda|^{-N}) \quad \text{при} \quad |\lambda| \to +\infty.$$

Далее, без ограничения общности предполагая

$$\det\{\partial_j \partial_k \phi(0, 0)\}_{j,k=2}^n \neq 0,$$

мы можем использовать классическую лемму Морса: существует окрестность $V \times U$ и диффеоморфное отображение $\varphi : V \times U \mapsto V \times U$ вида

$$x_1 = y_1, x_j = \varphi_j(s_2, \dots, s_n, a, y), \quad j = 2, \dots, n$$

такое, что для фазовой функции $\Phi(s, a, x)$ справедливо следующее соотношение:

$$\Phi(s, a, \varphi(s_2, \dots, s_n, a, y)) := \Phi_1(s_2, \dots, s_n, a, y_1) + s_1 y_1 + Q(y_2, \dots, y_n),$$

где $\Phi_1(s_2, \dots, s_n, a, y_1)$ — вещественно-аналитическая функция, $Q := (Ay', y')$ — невырожденная квадратичная форма от переменных $(y_2, \dots, y_n)$, заданная с обратимой симметрической матрицей A. Напомним, что соотношение

$$\frac{\partial^2 \Phi_1(s_2, \dots, s_n, y_1)}{\partial y_1^2} \not\equiv 0$$

эквивалентно условию $K(0, x) \not\equiv 0$.

Таким образом, осцилляторный интеграл $J(s,\,a,\,\lambda)$ после замены переменных, заданной отображением $(y_1, \varphi(s_2, \ldots, s_n, a, y)$, может быть записан как повторный интеграл

$$J(s,\,a,\,\lambda) = \int\limits_{\mathbf{R}} e^{i\lambda(\Phi_1(s_2,\ldots,s_n,\,a,\,y_1)+s_1y_1)} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{i\lambda Q(y_2,\ldots,y_n)} b_1(s,\,y) dy_2 \ldots dy_n \right) dy_1,$$

с гладкой амплитудной функцией $b_1 \in C_0^\infty(V \times U)$.

Далее, согласно классическому методу стационарной фазы получим асимптотическое соотношение (см. [13])

$$\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{i\lambda Q(y_2,\ldots,y_n)} b_1(y,s) dy_2 \ldots dy_n = c b_1(y_1, 0, \ldots, 0, s) \lambda^{\frac{1-n}{2}} + O(|\lambda|^{-\frac{n+1}{2}}) \text{ при } |\lambda| \to +\infty,$$

где

$$c := \frac{e^{isign(Q)\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi^{n-1}|\det A|}}.$$

Следовательно, осцилляторный интеграл $J(s,\,a,\,\lambda)$ может записан в виде

$$J(s,\,a,\,\lambda) = c\lambda^{\frac{1-n}{2}} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{i\lambda(\Phi_1(s_2,\ldots,s_n,\,a,\,y_1)+s_1y_1)} b_1(y_1, 0, \ldots, 0, s) dy_1 + O(|\lambda|^{-\frac{n+1}{2}}) \text{ при } |\lambda| \to +\infty.$$

Поэтому задача о поведении осцилляторного интеграла $J(s,\,a,\,\lambda)$ сводится к задаче об оценке одномерного осцилляторного интеграла

$$J_1(s,\,a,\,\lambda) := \int\limits_{\mathbf{R}} e^{i\lambda(\Phi_1(s_2,\ldots,s_n,a,y_1,)+s_1y_1)} b_1(y_1, 0, \ldots, 0, s, a) dy_1.$$

Запишем фазовую функцию $\Phi_1(s_2, \ldots, s_n,\, a,\, y_1) + s_1 y_1$ в виде:

$$\Phi_1(s_2, \ldots, s_n, a, y_1) + s_1 y_1 := \Phi_2(s_2, \ldots, s_n, a, y_1) + \tilde{s}_1 y_1 + \Phi_0(s_2, \ldots, s_n, a),$$

где

$$\tilde{s}_1 := s_1 + \frac{\partial \Phi_1(s_2, \ldots, s_n, a, 0)}{\partial y_1}, \quad \Phi_0(s_2, \ldots, s_n, a) := \Phi_1(s_2, \ldots, s_n, a, 0)$$

и

$$\Phi_2(s_2, \ldots, s_n, a, y_1) := \Phi_1(s_2, \ldots, s_n, \sigma, y_1) - \frac{\partial \Phi_1(s_2, \ldots, s_n, a, y_1)}{\partial y_1} y_1 - \Phi_0(s_2, \ldots, s_n, a).$$

Далее, функция $\Phi_2(s_2, \ldots, s_n, a, y_1)$ делится на y_1^2 и имеем:

$$\Phi_2(s_2, \ldots, s_n, a, y_1) = y_1^2 G(s_2, \ldots, s_n, a, y_1),$$

где G — вещественно-аналитическая функция, удовлетворяющая условию: $G(s_2, \ldots, s_n, 0, y_1) \not\equiv 0$.

Обозначая $\tilde{s}_1$ снова через s_1, получим фазовую функцию:

$$F(s,\,a,\,x_1) := x_1^2 G(s,\,a,\,x_1) + s_1 x_1.$$

Рассмотрим также соответствующий осцилляторный интеграл:

$$J(s,\,a,\,\lambda) := c\lambda^{\frac{1-n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda F(s,\,a,\,x_1)} b(s,\,a,\,x_1) dx_1 + O(|\lambda|^{-\frac{n+1}{2}}) \text{ при } |\lambda| \to +\infty. \tag{5.1}$$

Наконец, мы можем считать, что носитель меры $d\mu_a$ находится в достаточно малой окрестности фиксированной точки, а параметры a лежат на достаточно малой окрестности фиксированной точки. Таким образом, достаточно доказать искомое утверждение для меры $d\mu_a(x) := \psi(a,\,x) dS(a)$, где $S(a)$ является графиком

$$S := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} := \phi(a, x)\}.$$

Тогда, как мы отметили раньше, справедливо соотношение

$$\hat{\mu}_a(\xi) = J(s,\,a,\,\lambda), \tag{5.2}$$

где $\lambda = \xi_{n+1}$, $s_j = \dfrac{\xi_j}{\xi_{n+1}}$, $j = 1, \ldots, n$.

Из вышеприведенных рассуждений следует, что основной вклад в максимальной функции Рэндола дают близкие к $\omega_0 := (0, \ldots, 0, 1)$ точки. Иными словами, мы можем считать, что $(s_1, \ldots, s_n)$ меняется в достаточно малой окрестности нуля. Тогда, согласно (5.1), (5.2), получим, что

$$\hat{\mu}_a(\xi) = c\lambda^{\frac{1-n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda F(s, a, x_1)} b(s,\, a,\, x_1) dx_1 + O(|\lambda|^{-\frac{n+1}{2}}) \text{ при } |\lambda| \to +\infty.$$

Для последнего одномерного осцилляторного интеграла, используя теорему 4.2, получим:

$$|\hat{\mu}_a(\xi)| \leqslant \frac{\psi(s_1, \ldots, s_n\, a)}{|\lambda|^{n/2}} \chi_{\{|s|<\varepsilon\}}(s) + C|\lambda|^{-n/2},$$

где $\chi_{\{|s|<\varepsilon\}}$ — характеристическая функция множества $\{|s| < \varepsilon\}$. Таким образом, максимальная функция Рэндола имеет оценку

$$M_a(\omega) \leqslant \psi(s_1, \ldots, s_n\, a)\chi_{|s|<\varepsilon}(s) + C, \tag{5.3}$$

где s и ω связаны соотношением $s_j = \dfrac{\omega_j}{\omega_{n+1}}$, $j = 1, \ldots, n$.

Отсюда получим справедливость включения $M_a \in L^{p_m}(S^n)$ для некоторого числа $p_m > 2$.

(ii). Если $p_m > 2(n+1)/n$, то с использованием сферических координат получим:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} |\hat{\mu}_a(\xi)|^p d\xi = c + \int\limits_1^\infty r^n dr \int\limits_{S^n} |\hat{\mu}_a(r\omega)|^p d\omega \leqslant c + \int\limits_1^\infty r^{n-pn/2} dr \int\limits_{S^n} |M_a(\omega)|^p d\omega < C.$$

Последний интеграл сходится при условии $p_m \geqslant p > 2(n+1)/n$. Более того, постоянная C не зависит от a.

(iii). Теперь рассмотрим случай $2 < p_m \leqslant 2(n+1)/n$. В этом случае с использованием классических равномерных оценок имеем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} |\hat{\mu}_a(\xi)|^p d\xi \leqslant c + \int\limits_1^\infty r^{n-p_m n/2-(p-p_m)(n-1)/2} dr \int\limits_{S^n} |M_a(\omega)|^{p_m} d\omega.$$

Последний интеграл сходится при условии $p > (2n+2-p_m)/(n-1)$, причем он равномерно ограничен относительно a.

Этим завершается доказательство основной теоремы. □

Теперь докажем теорему 2.2. Если $S \subset \mathbb{R}^3$ — вещественно-аналитическая гиперповерхность, то согласно результатам работы [6] для максимальной функции имеется соотношение $M \in L^{2-0}(S^2)$. Берем достаточно малое положительное число $\varepsilon > 0$, чтобы было $M \in L^{2-\varepsilon}(S^2)$. Согласно теореме В. Н. Карпушкина о равномерной оценке осцилляторных интегралов [9] для преобразования Фурье имеем оценку

$$|\hat{\mu}(\xi)| \leqslant \frac{C \ln(2+|\xi|)^m}{(1+|\xi|)^{1/h}},$$

где m — так называемая кратность показателя осцилляции (см. [1]). Заметим, что в нашем случае $m = 0, 1$. Аналогичные равномерные оценки для гладкого случая доказаны в работе [21]. В частности, мы можем написать оценку

$$|\hat{\mu}(\xi)| \leqslant \frac{C}{(1+|\xi|)^{1/h-\varepsilon}} \tag{5.4}$$

для произвольного фиксированного положительного числа $\varepsilon > 0$.

Объединяя оценку (5.3) и (5.4), получим:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} |\hat{\mu}(\xi)|^p d\xi \leqslant c + \int\limits_1^\infty r^2 dr \int\limits_{S^2} |\hat{\mu}(r\omega)|^p d\omega \leqslant c + c_1 \int\limits_1^\infty r^{2-(2-\varepsilon)-(p-(2-\varepsilon))(1/h-\varepsilon)} dr \int\limits_{S^2} |M(\omega)|^{2-\varepsilon} d\omega.$$

Последний интеграл сходится при условии

$$p > 2 + \frac{h(1+\varepsilon+\varepsilon^2)-\varepsilon}{1-h\varepsilon}.$$

Так как ε — любое фиксированное положительное число, то мы получаем искомый результат, что $\hat{d\mu} \in L^p(\mathbb{R}^3)$. В частности, если $h < 2$, то существует положительное число $\varepsilon > 0$ такое, что $\hat{d\mu} \in L^{4-\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$.

Остается рассмотреть случай $h = 2$. Используя разбиение единицы, мы можем предполагать, что поверхность задана в виде графика аналитической функции

$$S := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = \Phi(x_1, x_2)\},$$

где Φ — вещественно-аналитическая функция в начале координат, удовлетворяющая условиям: $\Phi(0,0) = 0$, $\nabla\Phi(0,0) = 0$. Докажем следующий более сильный результат.

Предложение 5.1. *Если $h(\Phi) = 2$ и $K \not\equiv 0$, то существует положительное число ε такое, что $M \in L^{2+\varepsilon}(S^2)$.*

Доказательство. Мы используем методы работы [21]. Запишем функцию Φ в виде:

$$\Phi(x_1,\, x_2) = \Phi_\kappa(x_1,\, x_2) + \Phi_{r\kappa}(x_1,\, x_2), \tag{5.5}$$

где $\Phi_{r\kappa}$ — остаточный член и Φ_κ — квазиоднородный полином с весом $(\kappa_1,\, \kappa_2), \kappa_2 \geqslant \kappa_1 > 0$, причем $h(\Phi_\kappa) = 2$. Предположим, что $|\xi_3| \geqslant |\xi_1| + |\xi_2$, в противном случае мы можем использовать формулу интегрирования по частям при условии малости носителя амплитуды ψ. Следуя работе [21], рассмотрим разбиение единицы и соответствующее разложение преобразования Фурье:

$$\hat{d\mu}(\xi) = \sum_{j=j_0}^{\infty} \hat{d\mu}_j(\xi),$$

где после преобразований растяжения $\hat{d\mu}_j$ имеет вид:

$$\hat{d\mu}_j = 2^{-|\kappa|j} \int e^{i2^{-j}\lambda(\Phi_\kappa(x_1,x_2)+\tilde{\Phi}_{r\kappa}(x_1,x_2,2^{-j})+\sigma_1x_1+\sigma_2x_2)}\chi(x)\psi(\delta_{2^{-j}}(x))dx.$$

Здесь $\delta_{2^{-j}}$ — преобразование растяжения, соответствующее весу κ, т. е.

$$\delta_{2^{-j}}(x_1,\, x_2) := (2^{-j\kappa_1}x_1,\, 2^{-j\kappa_2}x_2),$$

а $\sigma_l := 2^{(1-\kappa_l)j}s_l\,(l = 1,2)$, $\lambda := \xi_3$, $s_l := \xi_l/\lambda$ и $\tilde{\Phi}_{r\kappa}(x_1, x_2, 2^{-j})$ — «остаточный» член после замены переменных, χ — так называемая срезающая функция с носителем на множестве $\big\{x \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{1}{2} < |x| < 2\big\}$.

Отметим, что $\tilde{\Phi}_{r\kappa}(x_1, x_2, 2^{-j})$ может быть рассмотрено как малая деформация при достаточно больших j_0. Отметим, что если носитель амплитуды сосредоточен в достаточно малой окрестности начала координат, то мы можем предполагать, что j_0 — достаточно большое число.

Покажем, что существует функция $\varphi \in L^{2+\varepsilon}(V)$ такая, что

$$|\hat{d\mu}(s,\lambda)| \leqslant \frac{\varphi(s_1,s_2)}{|\lambda|},$$

где V — достаточно малая окрестность начала координат. Функция φ ищется в виде суммы ряда.

Существует положительное число M такое, что при $|\sigma| \geqslant M$ фазовая функция осцилляторного интеграла $\hat{d\mu}_j(\xi)$ не имеет критических точек. Следовательно, мы можем применить формулу интегрирования по частям и получим:

$$|\hat{d\mu}_j(\xi)\chi_{\{|\sigma|\geqslant M\}}(\sigma)| \leqslant \frac{\varphi_{1j}(s)}{\lambda},$$

где

$$\varphi_{1j}(s) := \frac{C2^{-|\kappa|j}}{|2^{-j}\sigma|}\chi_{\{|\sigma|\geqslant M\}}(\sigma),$$

здесь $\sigma_l := 2^{(1-\kappa_l)j}s_l\,(l = 1, 2)$ и $\chi_{\{|\sigma|\geqslant M\}}$ — характеристическая функция множества $\{|\sigma| \geqslant M\}$.

Легко показать, что если ε — достаточно малое фиксированное положительное число, то существует положительное число δ такое, что справедлива оценка:

$$2^{(1-|\kappa|)j}\left(\int\limits_{|\sigma|>1}|\sigma|^{(\varepsilon+2)}ds_1ds_2\right)^{1/(2+\varepsilon)}\leqslant C2^{-\delta j}.$$

Следовательно, сходится ряд

$$\sum_{j=j_0}^{\infty}\|\varphi_{1j}(s)\|_{L^{2+\varepsilon}(V)}.$$

Если же $|\sigma|\leqslant M$, то рассуждая, как в работе [20], получаем, что часть поверхности

$$\{x\in\mathbb{R}^3:\,x_3=\Phi_\kappa(x_1,\,x_2)+\tilde{\Phi}_{r\kappa}(x_1,x_2,2^{-j})\}$$

может быть рассмотрена как семейство аналитических гиперповерхностей, имеющее хотя бы одну ненулевую главную кривизну и удовлетворяющее условиям теоремы 2.1. Поэтому существует функция $\varphi_{2j}(\sigma)\chi_{\{|\sigma|\leqslant M\}}(\sigma)$ такая, что $\varphi_{2j}(\sigma)\chi_{\{|\sigma|\leqslant M\}}(\sigma)\in L^{2+\varepsilon}(\{|\sigma|\leqslant M\})$. Заметим, что

$$\int\limits_V(\varphi_{2j}(\sigma)\chi_{\{|\sigma|\leqslant M\}}(\sigma))^p(\sigma)ds=2^{(|\kappa|-2)j}\int\limits_{\{|\sigma|\leqslant M\}}\varphi_{2j}^p(\sigma)d\sigma.$$

Суммируя полученные оценки, имеем:

$$|\hat{d\mu}_k(\xi)|\leqslant\frac{\varphi_j(s)}{\lambda},$$

где $\varphi_j(s):=\varphi_{1j}(s)+\varphi_{2j}(s)$, причем справедливо соотношение:

$$\|\varphi_j\|_{L^{2+\varepsilon}(V)}\leqslant C2^{-\delta j}.$$

Поэтому ряд

$$\varphi(s):=\sum_{j=j_0}^{\infty}\varphi_j(s)$$

сходится в пространстве $L^{2+\varepsilon}$. Предложение 5.1 доказано, вместе с ним доказана и теорема 2.2 в случае $h=2$. □

6. О точности результатов

Мы докажем следующую лемму, которая показывает, что полученные оценки близки к точным.

Лемма 6.1. *Рассмотрим гиперповерхность* $S\subset\mathbb{R}^3$, *определенную соотношением*:

$$S:=\{x\in\mathbb{R}^3:\quad x_3=x_2^2+x_1^k\},\tag{6.1}$$

где $k\geqslant 3$. *Если* μ — *мера, сосредоточенная на поверхности* (6.1), *то* $\hat{d\mu}\in L^p(\mathbb{R}^3)$ *для любого* $p>p_k:=2(2k+1)/(k+2)$, *причем если* $\psi(0)>0$, *то* $\hat{d\mu}\notin L^p(\mathbb{R}^3)$ *при* $p\leqslant p_k$.

Замечание 6.1. Лемма 6.1 показывает справедливость предложения 2.1, ибо для любого $\varepsilon>0$ мы можем выбрать k такое, что $4-\varepsilon<p_k$.

Доказательство леммы 6.1. Пусть $d\mu:=\psi(x)dS(x)$ и носитель амплитуды ψ находится в достаточно малой окрестности начала координат, а также мы будем предполагать, что $\psi(0,0)=1$. В случае $\psi(0,0)=0$ мы имеем дело с оцилляторным интегралом с множителем гашения. Более того, методом стационарной фазы мы сводим задачу к оценкам одномерных осцилляторных интегралов, где могут быть применены методы работы [8]. На самом деле, в этом случае интеграл быстрее убывает.

Достаточно рассмотреть случай $|\xi_2|+|\xi_1|<|\xi_3|$, ибо в остальных случаях формула интегрирования по частям показывает, что осцилляторный интеграл достаточно быстро убывает. Для этого случая применяем метод стационарной фазы по переменной x_2 и получим:

$$\hat{d}\mu(\xi)=c\frac{e^{-i\frac{\xi_2}{4\xi_3^2}}}{|\xi_3|^{1/2}}\int e^{i(\xi_3x_1^k+\xi_1x_1)}b\left(x_1,-\frac{\xi_2}{2\xi_3}\right)dx_1+R(\xi),$$

где $R(\xi)$ — остаточный член, удовлетворяющий условию: $R(\xi)=O(|\xi|^{-3/2})$ при $|\xi|\to+\infty$. Поэтому для любого положительного числа ε мы имеем соотношение $R\in L^{2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$.

Оценим главный член осцилляторного интеграла:

$$J(\xi):=\frac{e^{-i\frac{\xi_2}{4\xi_3^2}}}{|\xi_3|^{1/2}}\int e^{i(\xi_3x_1^k+\xi_1x_1)}b\left(x_1,-\frac{\xi_2}{2\xi_3}\right)dx_1.$$

Сначала покажем, что при $p\leqslant p_k$ имеет место соотношение $J(\xi)\notin L^p(\mathbb{R}^3)$. Действительно, если $|\xi_1|<\varepsilon|\xi_3|^{1/k}$ (где $\varepsilon>0$ — достаточно малое положительное число), то мы имеем следующую оценку снизу:

$$|J(\xi)|\geqslant\frac{c}{|\xi_3|^{(k+2)/(2k)}},$$

где c — некоторое положительное число. Поэтому легко показать, что интеграл от функции $|J(\xi)|^p$ по множеству

$$\Omega:=\{(\xi\in\mathbb{R}^3:|\xi_2|\leqslant|\xi_3|,\,|\xi_1|<\varepsilon|\xi_3|^{1/k}\}$$

расходится при $p\leqslant p_k$.

Теперь покажем, что если $p>p_k$, то интеграл от этой функции по $\mathbb{R}^3$ сходится. Пусть

$$\xi\in\Omega_M:=\{(\xi\in\mathbb{R}^3:\,|\xi_2|\leqslant|\xi_3|,\,|\xi_1|\leqslant M|\xi_3|^{1/k}\},$$

где M — любое фиксированное положительное число. Тогда мы можем применить оценку типа Ван дер Корпута и иметь:

$$|J(\xi)|\leqslant\frac{C}{|\xi_3|^{(k+2)/(2k)}}.$$

Поэтому если $p>p_k$, то интеграл функции $|J(\xi)|^p$ по множеству Ω_M сходится. Далее, мы рассмотрим интеграл по множеству $\mathbb{R}^3\setminus\Omega_M$. Берем гладкую функцию χ со следующими свойствами:

$$\chi(x)=\begin{cases}1 & \text{если}\quad |x|\leqslant 1,\\ 0 & \text{если}\quad |x|\geqslant 2\end{cases}$$

и определим новую функцию $\beta(x):=\chi(x)-\chi(2x)$ (см. [28]). Используя эту функцию, мы получим разложение интеграла в ряд:

$$J(\xi)=\sum_{j=j_0}^{\infty}\frac{e^{-i\frac{\xi_2}{4\xi_3^2}}}{|\xi_3|^{1/2}}\int e^{i(\xi_3x_1^k+\xi_1x_1)}b\left(x_1,-\frac{\xi_2}{2\xi_3}\right)\beta(2^jx_1)dx_1,$$

где j_0 — достаточно большое число, зависящее от носителя функции b (см. [21]).

Рассмотрим теперь оценку осцилляторного интеграла J_j, определенного соотношением:

$$J_j(\xi):=\frac{e^{-i\frac{\xi_2}{4\xi_3^2}}}{|\xi_3|^{1/2}}\int e^{i(\xi_3x_1^k+\xi_1x_1)}b\left(x_1,-\frac{\xi_2}{2\xi_3}\right)\beta(2^jx_1)dx_1.$$

После преобразования растяжения имеем:

$$J_j(\xi):=2^{-j}\frac{e^{-i\frac{\xi_2}{4\xi_3^2}}}{|\xi_3|^{1/2}}\int e^{i(2^{-jk}\xi_3x_1^k+2^{-j}\xi_1x_1)}b\left(2^{-j}x_1,-\frac{\xi_2}{2\xi_3}\right)\beta(x_1)dx_1.$$

Предположим сначала, что $|\xi_3|\leqslant N2^{jk}$ (где N — достаточно большое фиксированное положительное число). В этом случае мы используем оценку

$$J_j(\xi)=O\left(\frac{1}{2^j|\xi_3|^{1/2}(1+|\xi_12^{-j}|)}\right)$$

для интеграла по x_1. Действительно, если $|\xi_1 2^{-j}| \leqslant 2N$, то тривиальная оценка интеграла дает искомое соотношение, в противном случае достаточно использовать формулу интегрирования по частям и получить:

$$\int\limits_{0\leqslant \max\{|\xi_1|,\,|\xi_2|\}\leqslant|\xi_3|\leqslant 2^{jk}} |J_j(\xi)|^p d\xi \leqslant C2^{-j(p-1)} \int\limits_1^{2^{jk}} |\xi_3|^{1-p/2} d\xi_3 \leqslant C2^{-j(p-1)+(2-p/2)jk} \leqslant C2^{-\delta j}$$

при условии $p > p_k$, где $\delta > 0$ — положительное число.

В случае $|\xi_3| < N2^{jk}$ мы введем обозначение

$$\sigma_1 := 2^{-j(k-1)} \frac{\xi_1}{\xi_3}.$$

Если $|\sigma_1| \geqslant M$ (где M достаточно большое положительное число), то фазовая функция осцилляторного интеграла не имеет критических точек. Поэтому мы можем использовать формулу интегрирования по частям по x_1 и получить:

$$|J_j(\xi)| \leqslant C \frac{2^{j(k-1)}}{|\xi_3|^{3/2} |\sigma_1|}.$$

Интегрируя по ξ, имеем

$$\int\limits_{\substack{\{0\leqslant \max\{|\xi_1|,\,|\xi_2|\}\leqslant|\xi_3|\}\cap \\ \cap\{|\xi_3|\geqslant N2^{jk}\}\cap \\ \cap\{|\sigma_1|\geqslant M\}}} |J_j(\xi)|^p d\xi \leqslant C2^{-j(p-1)} \int\limits_{2^{jk}}^{\infty} |\xi_3|^{2-3p/2} d\xi_3 \leqslant C2^{-j((2k+1)-p(k+2)/2)} \leqslant C2^{-\delta j}$$

при $p > p_k$, где $\delta > 0$.

Наконец, рассмотрим случай $|\sigma_1| < M$. Отметим, что если $|\sigma_1| < \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое положительное число), то фазовая функция осцилляторного интеграла не имеет критических точек. Поэтому, используя формулу интегрирования по частям по x_1, мы имеем оценку

$$|J_j(\xi)| \leqslant C \frac{2^{j(k-1)}}{|\xi_3|^{3/2}}.$$

Тогда интеграл по переменным ξ по множеству

$$\{0 \leqslant \max\{|\xi_1|,\,|\xi_2|\} \leqslant |\xi_3|\} \cap \{|\xi_3| \geqslant N2^{jk}\} \cap \{|\sigma_1| < \varepsilon\}$$

имеет оценку $O(2^{-\delta j})$.

В случае $\varepsilon \leqslant |\sigma_1| \leqslant M$ фазовая функция имеет не более двух невырожденных критических точек, и классическая лемма Ван дер Корпута дает оценку:

$$|J_j(\xi)| \leqslant C \frac{2^{j(k/2-1)}}{|\xi_3|}.$$

Стало быть, мы получили

$$\int\limits_{\substack{\{0\leqslant \max\{|\xi_1|,\,|\xi_2|\}\leqslant|\xi_3|\}\cap \\ \cap\{|\xi_3|\geqslant N2^{jk}\}\cap \\ \cap\{\varepsilon\leqslant|\sigma_1|\leqslant M\}}} |J_j(\xi)|^p d\xi \leqslant C2^{j(p(k/2-1)-(k-1)+(3-p)k)} \leqslant C2^{-\delta j},$$

где снова $\delta > 0$ при $p > p_k$. Таким образом, суммируя полученные оценки, мы завершаем доказательство леммы 6.1. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-заде С. М.* Особенности диффернцируемых отображений, ч. 1. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов. — М.: Наука, 1982.
2. *Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н.* Тригонометрические интегралы// Изв. АН СССР. — 1979. — *43*, № 5. — С. 971–1003.
3. *Варченко А. Н.* Многогранники Ньютона и оценки осциллирующих интегралов// Функц. анализ и его прилож. — 1976. — *10*, № 3. — С. 13–38.
4. *Виноградов И. М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — М.: Наука, 1980.
5. *Икромов И. А.* Об оценках преобразования Фурье индикатора невыпуклых множеств// Докл. РАН. — 1993. — *331*, № 3. — С. 272–274.
6. *Икромов И. А.* Об оценках преобразования Фурье индикатора невыпуклых областей// Функц. анализ и его прилож. — 1995. — *29*, № 3. — С. 16–24.
7. *Икромов И. А.* Демпфированные осцилляторные интегралы и максимальные операторы// Мат. заметки. — 2005. — *78*, № 6. — С. 833–852.
8. *Икромов И. А.* Суммируемость осцилляторных интегралов по параметрам и проблема об ограничении преобразования Фурье на кривых// Мат. заметки. — 2010. — *87*, № 5. — С. 734–755.
9. *Карпушкин В. Н.* Теорема о равномерной оценке осциллирующих интегралов с фазой, зависящей от двух переменных// Труды сем. им. И. Г. Петровского. — 1984. — *10*. — С. 150–169.
10. *Паламодов В. П.* Обобщенные функции и гармонический анализ// Соврем. пробл. мат. Фундам. направл. — 1991. — *72*. — С. 5–134.
11. *Попов Д. А.* Оценки с константами для некоторых классов осциллирующих интегралов// Усп. мат. наук. — 1997. — *52*, № 1. — С. 77–148.
12. *Садуллаев А. С.* Критерии алгебраичности аналитических множеств// Функц. анализ и его прилож. — 1972. — *6*, № 1. — С. 85-86.
13. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Ч. 1. — М.: Мир, 1986.
14. *Чахкиев М.* Оценки осциллирующих интегралов с выпуклой фазой и их приложения// Автореферат дисс. д.ф.-м.н. — М.: МГУ, 2006.
15. *Bak J.-G., Oberlin D., Seeger A.* Restriction of Fourier transform to curves: An endpoint estimate with affine arclength measure// ArXiv. — 2012. — 1109.1300v2 [math.CA].
16. *Duistermaat J.* Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unifoldings of singularities// Commun. Pure Appl. Math. — 1974. — *27*, № 2. — С. 207–281.
17. *Erdös L'., Salmhofer M.* Decay of the Fourier transform of surfaces with vanishing curvature// Math. Z. — 2007. — *257*, № 2. — С. 261–294.
18. *Hironaka H.* Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: I, II// Ann. Math. — 1964. — *79*. — С. 109–326.
19. *Hua L.-K.* On the number of solutions of Tarry's problem// Acta Sci. Sinica. — 1952. — *1*, № 1. — С. 1–76.
20. *Ikromov I. A., Kempe M., Müller D.* Estimates for maximal functions associated with hypersurfaces in $\mathbb{R}^3$ and related problems of harmonic analysis// Acta Math. — 2010. — *204*, № 2. — С. 151–271.
21. *Ikromov I. A., Müller D.* Uniform estimates for the Fourier transform of surface carried measures in $\mathbb{R}^3$ and an application to Fourier restriction// J. Fourier Anal. Appl. — 2011. — *17*, № 6. — С. 1292–1332.
22. *Ikromov I. A., Müller D.* Fourier restriction for hypersurfaces in three dimensions and Newton polyhedra. — Princeton—Oxford: Princeton University Press, 2016.
23. *Mokenhaupt G.* Bounds in Lebesgue spaces of oscillatory integral operators// Habilitationsschrift. — Universität Siegen, 1996.
24. *Phong D. H., Stein E. M., Sturm J. A.* On the growth and stability of real-analytic functions// Am. J. Math. — 1999. — *121*, № 3. — С. 519–554.
25. *Randol B.* On the asymptotic behavior of the Fourier transform of the indicator function of a convex set// Trans. AMS. — 1970. — *139*. — С. 278–285.
26. *Sadullaev A.* On Weierstrass polynomials// Ann. Pol. Mat. — 2019. — *123*. — С. 473–479.
27. *Sadullaev A., Ikromov I. A.* Oscillatory integrals and Weierstrass polynomials// Bull. Nat. Univ. Uzbekistan. Math. Nat. Sci. — 2019. — *2*, № 2. — С. 125–139.
28. *Sogge C. D.* Fourier integrals in classical analysis. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
29. *Sogge C. D., Stein E. M.* Averages of functions over hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$// Invent. Math. — 1985. — *82*, № 3. — С. 543–556.
30. *Stein E. M.* Harmonic analysis: real-valued methods, orthogonality and oscillatory integrals. — Princeton: Princeton University Press, 1993.

31. *Svensson I.* Estimates for the Fourier transform of the characteristic function of a convex set// Ark. Mat. — 1970. — *9*, № 1. — С. 11–22.
32. *Van der Corput J. G.* Zur Methode der stationaren phase. I// Composito Math. — 1934. — *1*. — С. 15–38.

Икромов Исроил Акрамович
Самаркандский государственный университет им. А. Навои, Самарканд, Узбекистан
E-mail: ikromov1@rambler.ru

Садуллаев Азимбай Садуллаевич
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: sadullaev@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-668-692 UDC 517.518

Weierstrass Polynomials in Estimates of Oscillatory Integrals

© 2021 **I. A. Ikromov, A. S. Sadullaev**

Abstract. In this paper, estimates are obtained for the Fourier transform of smooth charges (measures) concentrated on some nonconvex hypersurfaces. The summability of the maximal Randall function is proved for a wide class of nonconvex hypersurfaces. In addition, in the three-dimensional case, estimates are obtained depending on the Varchenko height. The accuracy of the obtained estimates is proved. The proof of the estimate for oscillatory integrals is based on the Weierstrass preparatory theorem.

REFERENCES

1. V. I. Arnol'd, A. N. Varchenko, and S. M. Guseyn-zade, *Osobennosti differntsiruemykh otobrazheniy, ch. 1. Klassifikatsiya kriticheskikh tochek kaustik i volnovykh frontov* [Singularities of Differentiable Mappings, V. 1. Classification of Critical Points of Caustics and Wave Fronts], Nauka, Moscow, 1982 (in Russian).
2. G. I. Arkhipov, A. A. Karatsuba, and V. N. Chubarikov, "Trigonometricheskie integraly" [Trigonometric integrals], *Izv. AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1979, **43**, No. 5, 971–1003 (in Russian).
3. A. N. Varchenko, "Mnogogranniki N'yutona i otsenki ostsilliruyushchikh integralov" [Newton polytopes and estimates for oscillating integrals], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1976, **10**, No. 3, 13–38 (in Russian).
4. I. M. Vinogradov, *Metod trigonometricheskikh summ v teorii chisel* [Method of Trigonometric Sums in Number Theory], Nauka, Moscow, 1980 (in Russian).
5. I. A. Ikromov, "Ob otsenkakh preobrazovaniya Fur'e indikatora nevypuklykh mnozhestv" [On estimates of the Fourier transform of the indicator of nonconvex sets], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1993, **331**, No. 3, 272–274 (in Russian).
6. I. A. Ikromov, "Ob otsenkakh preobrazovaniya Fur'e indikatora nevypuklykh oblastey" [On estimates of the Fourier transform of the indicator of nonconvex domains], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1995, **29**, No. 3, 16–24 (in Russian).
7. I. A. Ikromov, "Dempfirovannye ostsillyatornye integraly i maksimal'nye operatory" [Damped oscillatory integrals and maximum operators], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2005, **78**, No. 6, 833–852 (in Russian).
8. I. A. Ikromov, "Summiruemost' ostsillyatornykh integralov po parametram i problema ob ogranichenii preobrazovaniya Fur'e na krivykh" [Summability of oscillatory integrals with respect to parameters and the problem of restricting the Fourier transform on curves], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2010, **87**, No. 5, 734–755 (in Russian).

9. V. N. Karpushkin, "Teorema o ravnomernoy otsenke ostsilliruyushchikh integralov s fazoy, zavisyashchey ot dvukh peremennykh" [A uniform estimate theorem for oscillating integrals with phase depending on two variables], *Trudy sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 1984, **10**, 150–169 (in Russian).
10. V. P. Palamodov, "Obobshchennye funktsii i garmonicheskiy analiz" [Generalized functions and harmonic analysis], *Sovrem. probl. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 1991, **72**, 5–134 (in Russian).
11. D. A. Popov, "Otsenki s konstantami dlya nekotorykh klassov ostsilliruyushchikh integralov" [Estimates with constants for some classes of oscillating integrals], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1997, **52**, No. 1, 77–148 (in Russian).
12. A. S. Sadullaev, "Kriterii algebraichnosti analiticheskikh mnozhestv" [Criteria for the algebraicity of analytic sets], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1972, **6**, No. 1, 85-86 (in Russian).
13. L. Khermander, *Analiz lineynykh differentsial'nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. Ch. 1* [Analysis of Linear Partial Differential Operators. V. 1], Mir, Moscow, 1986 (in Russian).
14. M. Chakhkiev, "Otsenki ostsilliruyushchikh integralov s vypukloy fazoy i ikh prilozheniya" [Estimates for oscillating integrals with convex phase and their applications], *Abstract of doctoral thesis*, MSU, Moscow, 2006 (in Russian).
15. J.-G. Bak, D. Oberlin, and A. Seeger, "Restriction of Fourier transform to curves: An endpoint estimate with affine arclength measure," *ArXiv*, 2012, 1109.1300v2 [math.CA].
16. J. Duistermaat, "Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unifoldings of singularities," *Commun. Pure Appl. Math.*, 1974, **27**, No. 2, 207–281.
17. L'. Erdös and M. Salmhofer, "Decay of the Fourier transform of surfaces with vanishing curvature," *Math. Z.*, 2007, **257**, No. 2, 261–294.
18. H. Hironaka, "Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: I, II," *Ann. Math.*, 1964, **79**, 109–326.
19. L.-K. Hua, "On the number of solutions of Tarry's problem," *Acta Sci. Sinica*, 1952, **1**, No. 1, 1–76.
20. I. A. Ikromov, M. Kempe, and D. Müller, "Estimates for maximal functions associated with hypersurfaces in $\mathbb{R}^3$ and related problems of harmonic analysis," *Acta Math.*, 2010, **204**, No. 2, 151–271.
21. I. A. Ikromov and D. Müller, "Uniform estimates for the Fourier transform of surface carried measures in $\mathbb{R}^3$ and an application to Fourier restriction," *J. Fourier Anal. Appl.*, 2011, **17**, No. 6, 1292–1332.
22. I. A. Ikromov and D. Müller, *Fourier restriction for hypersurfaces in three dimensions and Newton polyhedra*, Princeton University Press, Princeton–Oxford, 2016.
23. G. Mokenhaupt, "Bounds in Lebesgue spaces of oscillatory integral operators," *Habilitationsschrift*, Universität Siegen, 1996.
24. D. H. Phong, E. M. Stein, and J. A. Sturm, "On the growth and stability of real-analytic functions," *Am. J. Math.*, 1999, **121**, No. 3, 519–554.
25. B. Randol, "On the asymptotic behavior of the Fourier transform of the indicator function of a convex set," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1970, **139**, 278–285.
26. A. Sadullaev, "On Weierstrass polynomials," *Ann. Pol. Mat.*, 2019, **123**, 473–479.
27. A. Sadullaev and I. A. Ikromov, "Oscillatory integrals and Weierstrass polynomials," *Bull. Nat. Univ. Uzbekistan. Math. Nat. Sci.*, 2019, **2**, No. 2, 125–139.
28. C. D. Sogge, *Fourier integrals in classical analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
29. C. D. Sogge and E. M. Stein, "Averages of functions over hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$," *Invent. Math.*, 1985, **82**, No. 3, 543–556.
30. E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-valued methods, orthogonality and oscillatory integrals*, Princeton University Press, Princeton, 1993.
31. I. Svensson, "Estimates for the Fourier transform of the characteristic function of a convex set," *Ark. Mat.*, 1970, **9**, No. 1, 11–22.
32. J. G. van der Corput, "Zur Methode der stationaren phase. I," *Composito Math.*, 1934, **1**, 15–38.

I. A. Ikromov
Samarkand State University named after A. Navoi, Samarkand, Uzekistan
E-mail: `ikromov1@rambler.ru`

A. S. Sadullaev
Samarkand State University named after A. Navoi, Samarkand, Uzekistan
E-mail: `sadullaev@mail.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 4 (2021). С. 693–706
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-693-706 УДК 515.12

ФУНКТОР ИДЕМПОТЕНТНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР С КОМПАКТНЫМ НОСИТЕЛЕМ И ОТКРЫТЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

© 2021 г. **А. Я. ИШМЕТОВ**

Аннотация. В работе показано, что функтор идемпотентных вероятностных мер с компактным носителем, действующий в категории тихоновских пространств и их непрерывных отображений, является нормальным. Установлено, что этот функтор монодичен. Далее, доказано, что функтор идемпотентных вероятностных мер с компактным носителем сохраняет открытость непрерывных отображений тихоновских пространств.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Традиционную математику над числовыми полями можно трактовать как квантовую науку. Имеется и ее «классический аналог» — идемпотентная математика, т. е. математика над полуполями (и полукольцами) с идемпотентным сложением. Для идемпотентных полуполей выполнены все стандартные аксиомы, кроме наличия вычитания; вместо этого выполняется свойство идемпотентности сложения: $x + x = x$. Типичным примером является алгебра Max-Plus, состоящая из вещественных чисел (и символа «минус бесконечность», играющего роль нуля) и имеющая операцию maximum в качестве сложения и обычное сложение в качестве (нового) умножения.

Напомним [15], что множество S называется *полукольцом*, если в нем определены две операции: $\oplus$ — сложение и $\odot$ — умножение, удовлетворяющие следующим условиям:

- сложение $\oplus$ и умножение $\odot$ ассоциативны;
- сложение $\oplus$ коммутативно;
- умножение $\odot$ дистрибутивно относительно сложения $\oplus$:

$$x \odot (y \oplus z) = x \odot y \oplus x \odot z \quad \text{и}$$
$$(x \oplus y) \odot z = x \odot z \oplus y \odot z$$

для всех $x,\ y,\ z \in S$.

Единицей полукольца S называется такой элемент $\mathbf{1} \in S$, что $\mathbf{1} \odot x = x \odot \mathbf{1} = x$ для всех $x \in S$. *Нулем* полукольца S называется такой элемент $\mathbf{0} \in S$, что $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$ и $\mathbf{0} \oplus x = x \oplus \mathbf{0} = x$ для всех $x \in S$. Полукольцо S называется *идемпотентным полукольцом*, если $x \oplus x = x$ для всех $x \in S$.

(Идемпотентное) полукольцо S с элементами $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ называется (*идемпотентным*) *полуполем*, если для любого ненулевого элемента множества S существует обратный элемент.

Изложим *деквантование Маслова*. Пусть $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ — поле вещественных чисел и $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ — полуполе неотрицательных вещественных чисел (относительно обычных операций сложения и умножения). Рассмотрим отображение $\Phi_h \colon \mathbb{R} \to S = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, определенное равенством

$$\Phi_h(x) = h \ln x, \qquad h > 0. \tag{1.1}$$

Перенесем обычные операции сложения и умножения из $\mathbb{R}$ в S с помощью отображения Φ_h. Пусть

$$u = \Phi_h(x) = h \ln x, \qquad v = \Phi_h(y) = h \ln y.$$

Тогда

$$\Phi_h(x+y) = h \ln (x+y) = h \ln \left(\mathrm{e}^{\frac{u}{h}} + \mathrm{e}^{\frac{v}{h}}\right),$$
$$\Phi_h(xy) = h \ln (xy) = h \ln x + h \ln y.$$

Положим $u \oplus_h v = \Phi_h(x+y)$ и $u \odot v = \Phi_h(xy)$, т. е. $u \oplus_h v = h \ln \left(\mathrm{e}^{\frac{u}{h}} + \mathrm{e}^{\frac{v}{h}}\right)$ и $u \odot v = u + v$. Образ $\Phi_h(0) = -\infty$ обычного нуля 0 является нулем $\mathbf{0}$ и образ $\Phi_h(1) = 0$ обычной единицы 1 — единицей $\mathbf{1}$ в S относительно этих операций. Таким образом, S приобретает структуру полукольца $\mathbb{R}^{(h)}$, изоморфного $\mathbb{R}_+$.

Непосредственная проверка показывает, что $u \oplus_h v \to \max\{u, v\}$ при $h \to 0$. Несложно проверить, что S образует полукольцо относительно сложения $u \oplus v = \max\{u, v\}$ и умножения $u \odot v = u + v$ с нулевым элементом $\mathbf{0} = -\infty$ и единицей $\mathbf{1} = 0$. Обозначим это полукольцо через $\mathbb{R}_{\max}$; оно является идемпотентным полуполем. Переход из $\mathbb{R}^{(h)}$ к предельному состоянию $\mathbb{R}_{\max}$ при $h \to 0$ и процедура квантования аналогичны. Здесь параметр h играет роль постоянной Планка. Поэтому полуполе $\mathbb{R}_+ \cong \mathbb{R}^{(h)}$ рассматривают как «квантовый» объект, а $\mathbb{R}_{\max}$ — как результат его деквантования. Изложенный переход из $\mathbb{R}_+$ к $\mathbb{R}_{\max}$ называется *деквантованием Маслова*. Идемпотентная математика продвинута весьма далеко (в частности, построен идемпотентный функциональный анализ [15]) и имеет многочисленные приложения (в особенности в задачах оптимизации и оптимального управления [12, 13]).

В традиционной математике идемпотентной вероятностной мере соответствует вероятностная мера. Понятие идемпотентной меры (меры Маслова) находит многочисленные применения в различных областях математики, математической физики и экономики. В частности, такие меры возникают в задачах динамической оптимизации [11]. Аналогия между интегрированием Маслова и оптимизацией отмечена также в [14]. Однако, как показывают результаты работ [4, 6], для доказательства аналогичных результатов для вероятностных мер и идемпотентных вероятностных мер требуются различные друг от друга методы. В [23] утверждается, что использование мер Маслова для моделирования неопределенности в математической экономике может быть настолько же релевантным, насколько и использование классической теории вероятностей.

В работе [22] Е. Щепин ввел понятие нормального функтора в категории компактов и их непрерывных отображений. А. Ч. Чигогидзе в работе [21] предложил построения конструкции продолжений нормальных функторов $F \colon Comp \to Comp$ до ковариантного функтора $F_\beta \colon Tych \to Tych$ с сохранением нормальности. В работе [9] были установлены категорные свойства функтора $I \colon Comp \to Comp$ идемпотентных вероятностных мер на категории компактов и их непрерывных отображений. В отличие от случая (обычных) вероятностных мер, рассмотрению которых посвящена обширная литература (см. [18]), геометрические и топологические свойства пространств идемпотентных мер до недавнего времени практически не были исследованы. В связи с этим последнее время появились работы [5–8, 10, 26] по идемпотентным вероятностным мерам. Далеко идущее продвижение в этом направлении наблюдалось в [28].

В работе [27] установлены варианты основных принципов функционального анализа для слабо аддитивных функционалов, и тем самым обобщено некоторые результаты из [14].

В настоящей работе рассмотрим распространение функтора идемпотентных вероятностных мер на категорию $Tych$ тихоновских пространств и их непрерывных отображений. Детально обсуждены плотные подмножества пространства идемпотентных вероятностных мер, и полученные результаты применены при доказательствах основных достижений работы. Установлено, что функтор I_β идемпотентных вероятностных мер с компактным носителем, действующий в категории тихоновских пространств и их непрерывных отображений, является нормальным. Показано, что функтор I_β может быть включен в монаду. Доказано, что функтор идемпотентных вероятностных мер с компактным носителем сохраняет открытость непрерывных отображений тихоновских пространств.

Стоить отметить, что в данной работе предложен новый метод, сильно отличающийся от методов, изложенных в [1].

2. Конструкция функтора I_β

Пусть X — компактное Хаусдорфово пространство (далее, для краткости, компакт), $C(X)$ — банахова алгебра непрерывных функций на X с обычными алгебраическими операциями и sup-нормой. На $C(X)$ операции $\oplus$ и $\odot$ определим по правилам $\varphi \oplus \psi = \max\{\varphi, \psi\}$ и $\varphi \odot \psi = \varphi + \psi$, где $\varphi, \psi \in C(X)$.

Напомним, что функционал $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ называется *идемпотентной вероятностной мерой* [9] на X, если он обладает следующими свойствами:

(1) $\mu(\lambda_X) = \lambda$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, где λ_X — постоянная функция;
(2) $\mu(\lambda \odot \varphi) = \lambda \odot \mu(\varphi)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in C(X)$;
(3) $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in C(X)$.

Для компакта X обозначим через $I(X)$ множество всех идемпотентных вероятностных мер на X.

Предложение 2.1. *Идемпотентная вероятностная мера непрерывна.*

Доказательство. Отметим сначала, что всякая идемпотентная вероятностная мера $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ *сохраняет порядок*, т. е. неравенство $\varphi \leqslant \psi$ влечет $\mu(\varphi) \leqslant \mu(\psi)$, где $\varphi, \psi \in C(X)$. Действительно, так как неравенство $\varphi \leqslant \psi$ справедливо тогда и только тогда, когда $\varphi \oplus \psi = \psi$, то имеем

$$\mu(\varphi) \leqslant \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi) = \mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\psi).$$

Кроме того, свойство (2) означает, что всякая идемпотентная вероятностная мера $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ *слабо аддитивна*, т. е. $\mu(\varphi + \lambda_X) = \mu(\varphi) + \lambda$ для всех $\varphi \in C(X)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Пусть теперь $\varphi, \psi \in C(X)$ — функции такие, что $\|\psi - \varphi\| < \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\begin{gathered} -\varepsilon_X < \psi - \varphi < \varepsilon_X, \\ \varphi - \varepsilon_X < \psi < \varphi + \varepsilon_X, \\ \mu(\varphi) - \varepsilon < \mu(\psi) < \mu(\varphi) + \varepsilon, \\ |\mu(\psi) - \mu(\varphi)| < \varepsilon. \end{gathered}$$

Предложение 2.1 доказано. □

Ясно, что $I(X)$ является подмножеством пространства $\mathbb{R}^{C(X)}$. Рассмотрим $I(X)$ как подпространство пространства $\mathbb{R}^{C(X)}$ — тихоновского произведения числовых прямых. Базу окрестностей идемпотентной вероятностной меры $\mu \in I(X)$ относительно индуцированной из $\mathbb{R}^{C(X)}$ в $I(X)$ топологии образуют множества вида

$$\langle \mu; \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \varepsilon \rangle = \{\nu \in I(X) : |\nu(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| < \varepsilon, \, i = 1, \ldots, n\},$$

где $\varphi_i \in C(X)$, $i = 1, \ldots, n$, $\varepsilon > 0$. Таким образом, индуцированная топология и топология поточечной сходимости на $I(X)$ совпадают. Для компакта X топологическое пространство $I(X)$, снабженное топологией поточечной сходимости, является компактом [9].

Пусть X, Y — компакты, $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Определим отображение $I(f)\colon I(X) \to I(Y)$ по формуле $I(f)(\mu)(\psi) = \mu(\psi \circ f)$. Так как композиция непрерывных отображений непрерывна, то из предложения 2.1 вытекает, что отображение $I(f)$ непрерывно. Таким образом, конструкция I переводит компакты в компакты и непрерывные отображения — в непрерывные, т. е. I образует функтор, действующий в категории компактов и их непрерывных отображений. Более того, конструкция I является нормальным функтором [9].

Для идемпотентной вероятностной меры $\mu \in I(X)$ определен ее носитель:

$$\operatorname{supp} \mu = \cap\{F : F \ \text{ замкнуто в } \ X \ \text{ и } \ \mu \in I(F)\}.$$

Для компакта X и целого положительного числа n определим следующее множество:

$$I_n(X) = \{\mu \in I(X) : \ |\operatorname{supp}\mu| \leqslant n\}.$$

Положим

$$I_\omega(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n(X).$$

Пусть X — тихоновское пространство, βX — его стоун-чеховское компактное расширение. Положим

$$I_\beta(X) = \{\mu \in I(\beta X) : \operatorname{supp}\mu \subset X\}.$$

Ясно, что имеет место

Предложение 2.2. *Подпространство $I_\beta(X)$ компакта $I(\beta X)$ является тихоновским пространством.*

Отметим, что для непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ тихоновских пространств X и Y определено (единственное) продолжение $\beta f\colon \beta X \to \beta Y$ отображения f.

Предложение 2.3. *Для каждой пары тихоновских пространств X и Y и непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ имеет место $I_\beta(f)(I_\beta(X)) \subset I_\beta(Y)$.*

Доказательство. Пусть $\mu \in I_\beta(X)$ и $\varphi \in C_b(Y)$. Имеем $I_\beta(f)(\mu)(\varphi) = I(\beta f)(\mu)(\tilde{\varphi}) = \mu(\tilde{\varphi} \circ \beta f) =$ (так как $\operatorname{supp}\mu \subset X$) $= \mu((\tilde{\varphi} \circ \beta f)|X) = \mu(\varphi \circ f)$, где $\tilde{\varphi} \in C(\beta Y)$ — продолжение $\varphi \in C_b(Y)$. Следовательно, $I_\beta(f)(\mu)$ сосредоточена на $f(X) \subset Y$. Предложение 2.3 доказано. $\square$

Если X и Y — тихоновские пространства, и $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, то положим

$$I_\beta(f) = I(\beta f) \mid I_\beta(X). \tag{2.1}$$

Предложение 2.4. *Отображение $I_\beta(f)$, определенное равенством* (2.1)*, непрерывно.*

Доказательство вытекает из определения.

Для того, чтобы установить категорные свойства продолжения I_β функтора идемпотентных вероятностных мер на категорию $Tych$ тихоновских пространств и их непрерывных отображений, приведем следующие понятия.

Пусть $\mathfrak{C} = \{\mathcal{O}, \mathcal{M}\}$ и $\mathfrak{C}' = \{\mathcal{O}', \mathcal{M}'\}$ — две категории. Отображение $F\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$, переводящее объекты в объекты, а морфизмы в морфизмы, называется *ковариантным функтором* из категории $\mathfrak{C}$ в категории $\mathfrak{C}'$, если:

$F1$) для всякого морфизма $f\colon X \to Y$ из категории C морфизм $F(f)$ действует из $F(X)$ в $F(Y)$;
$F2$) $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ для всякого $X \in \mathcal{O}$;
$F3$) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ для любых морфизмов f и g из $\mathcal{M}$.

Предложение 2.5. *Конструкция I_β является ковариантным функтором в категории $Tych$ тихоновских пространств и их непрерывных отображений.*

Доказательство. Из предложения 2.2 вытекает, что I_β удовлетворяет условию $F1$). Покажем, что I_β сохраняет композицию отображений. Пусть X, Y, Z — тихоновские пространства и $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ — непрерывные отображения. Пусть $\mu \in I_\beta(X)$ и $\varphi \in C_b(Z)$. Тогда

$$I_\beta(g \circ f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ (g \circ f)) = \mu((\varphi \circ g) \circ f) = I_\beta(f)(\mu)(\varphi \circ g) = (I_\beta(g) I_\beta(f)(\mu))(\varphi),$$

т. е. $I_\beta(g \circ f) = I_\beta(g) \circ I_\beta(f)$.

Пусть $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ — тождественное отображение, т. е. $\mathrm{id}_X(x) = x$ для всех $x \in X$. Тогда

$$I_\beta(\mathrm{id}_X)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ \mathrm{id}_X) = \mu(\varphi),$$

т. е. $I_\beta(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{I_\beta(X)}$. Предложение 2.5 доказано. $\square$

Итак, нами построен функтор I_β, действующий в категории тихоновских пространств и их непрерывных отображений, Этот функтор называется *функтором идемпотентных вероятностных мер* с компактным носителем.

3. Категорные свойства функтора I_β

Для тихоновского пространства X и положительного целого n аналогично определим множество

$$I_{\beta,n}(X) = \{\mu \in I_\beta(X) :\ |\operatorname{supp}\mu| \leqslant n\}$$

и положим

$$I_{\beta,\omega}(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{\beta,n}(X).$$

Напомним, что функционал $\delta_x\colon C(\beta X) \to \mathbb{R}$, определенный по формуле $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$, $\varphi \in C(\beta X)$, называется *мерой Дирака*. Каждая мера Дирака δ_x является идемпотентной вероятностной мерой с носителем $\operatorname{supp}\delta_x = \{x\}$, где $x \in X$.

Далее в работе *всюду плотное* подмножество заданного пространства для краткости будем называть как *плотное* подмножество.

Предложение 3.1. *Если Y плотно в компакте X, то $I_{\beta,\omega}(Y)$ плотно $I(X)$.*

Доказательство. Известно [9], что $I_\omega(X)$ плотно в $I(X)$. Поэтому достаточно проверить, что $I_{\beta,\omega}(Y)$ плотно в $I_\omega(X)$. Возьмем произвольную меру $\mu \in I_\omega(X)$ и ее базисную окрестность $\langle\mu;\varphi_1,\,\dots,\,\varphi_k;\varepsilon\rangle$. Пусть $\mu = \lambda_1 \odot \delta_{x_1} \oplus \lambda_2 \odot \delta_{x_2} \oplus\, \dots \,\oplus \lambda_s \odot \delta_{x_s}$. Поскольку Y плотно в X, то существуют точки $y_1\,\dots\,y_s$ такие, что $|\varphi_i(x_j) - \varphi_i(y_j)| < \varepsilon$ для всех $i = 1\,\dots\,k$; $j = 1\,\dots\,s$. Кроме того, существуют неположительные числа $\lambda'_1\,\dots\,\lambda'_s$, такие, что $|\lambda_i - \lambda'_j| < \varepsilon$ для всех $j = 1\,\dots\,s$. Теперь, как легко видеть, имеем $\nu = \lambda'_1 \odot \delta_{y_1} \oplus \lambda'_2 \odot \delta_{y_2} \oplus \dots \oplus \lambda'_s \odot \delta_{y_s} \in \langle\mu;\varphi_1,\,\dots,\varphi_k;\varepsilon\rangle \cap I_{\beta,\omega}(X)$. Предложение 3.1 доказано. □

Следствие 3.1. *Если Y плотно в компакте X, то $I_\omega(Y)$ и $I_\beta(Y)$ плотны в $I(X)$.*

Предложение 3.2. *Если Y плотно в тихоновском пространстве X, то $I_{\beta,\omega}(Y)$ плотно в $I_\beta(X)$.*

Доказательство. Пусть bX — произвольное компактное расширение пространства X. Тогда Y, будучи плотным в X, плотно в компакте bX. По предложению 2.1 множество $I_{\beta,\omega}(Y)$ плотно в компакте $I(bX)$. Но $I_{\beta,\omega}(X) \subset I_\beta(X) \subset I(bX)$. Следовательно, $I_{\beta,\omega}(Y)$ плотно в пространстве $I_\beta(X)$. Предложение 3.2 доказано. □

Следствие 3.2. *Для любого тихоновского пространства X множество $I_{\beta,\omega}(X)$ всюду плотно в $I_\beta(X)$.*

Пусть X — тихоновское пространство, bX — его некоторое компактное расширение. Тогда

$$I_b(X) = \{\mu \in I(bX) : \operatorname{supp}\mu \subset X\} = \{\mu \in I(\beta X) : \operatorname{supp}\mu \subset X\} = I_\beta(X),$$

т. е. $I_\beta(X) = I_b(X)$.

Предложение 3.3. *Функтор I_β сохраняет вес бесконечных тихоновских пространств, т. е. для любого бесконечного тихоновского пространства X имеет место равенство*

$$w(I_\beta(X)) = w(X).$$

Доказательство. Ясно, что отображение $\delta\colon X \to I_\beta(X)$, определенное по формуле $\delta(x) = \delta_x$, $x \in X$, есть вложение тихоновского пространства X в $I_\beta(X)$. В самом деле, $\delta_x \in I_\beta(X)$, так как $\operatorname{supp}\delta_x = \{x\} \subset X$. Поэтому $w(X) \leqslant w(I_\beta(X))$.

Обратно, пусть $w(X) = \tau \geqslant \aleph_0$. Известно, что существует компактное расширение bX пространства X такое, что $w(bX) = w(X)$. Следовательно, из [9, предложение 12] имеем $w(I(bX)) = w(bX) = \tau$. Но, $I_b(X) \subset I(bX)$, поэтому $\tau = w(I(bX)) \geqslant w(I_b(X))$, т. е. $w(I_b(X)) \leqslant \tau$. Предложение 3.3 доказано. □

Предложение 3.4. *I_β — мономорфный функтор, т. е. I_β сохраняет инъективность отображений тихоновских пространств.*

Доказательство. Пусть μ_1, $\mu_2 \in I_\beta(X) \subset I(\beta X)$, $\mu_1 \neq \mu_2$. Из мономорфности функтора I (см. [9]) вытекает, что $I(\beta f)(\mu_1) \neq I(\beta f)(\mu_2)$. В силу определения функтора I_β получим, что

$$I_\beta(f)(\mu_1) = I(\beta f)(\mu_1) \neq I(\beta f)(\mu_2) = I_\beta(f)(\mu_2),$$

т. е. $I_\beta(f)(\mu_1) \neq I_\beta(f)(\mu_2)$. Предложение 3.4 доказано. □

Пусть X и Y — тихоновские пространства. Напомним, что вложение $i\colon X \to Y$ называется [19] C^*-вложением, если всякая функция $\varphi \in C_b(X)$ продолжается до некоторой функции $\tilde{\varphi} \in C_b(Y)$.

Предложение 3.5. *Функтор $I_\beta\colon Tych \to Tych$ переводит C^*-вложение во вложения.*

Доказательство. Для каждого инъективного отображения $f\colon X \to Y$ инъективность отображения $I_\beta(f)\colon I_\beta(X) \to I_\beta(Y)$ была установлена в предложении 3.4.

Пусть $f\colon X \to Y$ — топологическое C^*-вложение тихоновского пространства X в тихоновское пространство Y и $\beta f\colon \beta X \to \beta Y$ — его стоун-чеховская компактификация. Тогда в силу непрерывности отображения $I(\beta f)\colon I(\beta X) \to I(\beta Y)$, отображение $I_\beta(f)$ непрерывно как его сужение.

По условию βY вложено в βX. Поскольку функтор I сохраняет вложений, то отображение $I(\beta f)$ — вложение. Поэтому отображение $I(\beta f)^{-1}$ также непрерывно, и следовательно, $I_\beta(f)^{-1} = I(\beta f)^{-1}|_{I(\beta f)(I_\beta(X))}$ непрерывно. Предложение 3.5 доказано. □

Предложение 3.6. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение и образ $f(X)$ всюду плотен в Y. Тогда образ $I_\beta(f)(I_\beta(X))$ всюду плотен в $I_\beta(Y)$.*

Доказательство. Образ $I_\beta(f)(I_\beta(X))$ содержит множество

$$I_\omega(f(X)) = \{\mu \in I(\beta Y) : |\operatorname{supp}\mu| < \infty \ \text{ и } \ \operatorname{supp}\mu \subset f(X)\},$$

которое всюду плотно в $I_\beta(Y) \subset I(\beta Y)$. Предложение 3.6 доказано. □

Предложение 3.7. *Функтор $I_\beta\colon Tych \to Tych$ сохраняет*

a) точку,

b) пустое множество.

Доказательство.

a) Пусть $x \in X \subset \beta X$. Ясно, что $\delta_x \in I_\beta(X)$, так как $\operatorname{supp}\delta_x = \{x\} \subset X$. Для любой точки $y \in \beta X \setminus X$ имеем $\operatorname{supp}\delta_y = \{y\} \subset \beta X \setminus X$. Поэтому $\delta_y \notin I_\beta(X)$. Следовательно, если $X = \{x\}$ — одноточечное множество, то $I_\beta(X) = I(X) = I(\{x\}) = \{\delta_x\}$.

b) Пусть $X = \varnothing$. Тогда $\beta X = \varnothing$ и $C(\beta X) = \varnothing$. следовательно,

$$\mathbb{R}^{C(\beta X)} = \mathbb{R}^{\varnothing} = \varnothing.$$

Из того, что $I_\beta(X) \subset \mathbb{R}^{C(\beta X)}$ получим, что $I_\beta(\varnothing) \subset \mathbb{R}^{C(\beta X)} = \varnothing$, т. е. $I_\beta(\varnothing) = \varnothing$. Предложение 3.7 доказано. □

Доказательство следующего утверждения вытекает из определения. Это утверждение отличается от компактного случая тем, что в компактном случае оно выполнено только для замкнутых подмножеств.

Предложение 3.8. *Если A — произвольное подмножество тихоновского пространства X, то $I_\beta(A) \subset I_\beta(X)$. Более того, $I_\beta(A) = \{\mu \in I_\beta(X) : \operatorname{supp}\mu \subset A\}$.*

Предложение 3.9. *Если $f\colon X \to Y$ — совершенное отображение между тихоновскими пространствами и $B \subset Y$, то*

$$I_\beta(f^{-1}(B)) = I_\beta(f^{-1})(I_\beta(B)).$$

Доказательство. Пусть $\mu \in I_\beta(f^{-1}(B))$. Тогда $\mu \in I(\beta X)$ и $\operatorname{supp}\mu \subset f^{-1}(B)$. Следовательно, $f(\operatorname{supp}\mu) \subset B$ или, что то же самое, $(\beta f)(\operatorname{supp}\mu) \subset B$. Поэтому из предложения 3.8 имеем $\operatorname{supp} I(\beta f)(\mu) \subset B$. Но $I(\beta f)(\mu) = I_\beta(f)(\mu)$. Следовательно, $I_\beta(f)(\mu) \in I_\beta(B)$. Наоборот, пусть $\mu \in I_\beta(f)^{-1}(I_\beta(B))$. Тогда $I_\beta(f)(\mu) = I(\beta f)(\mu) \in I_\beta(B)$, т. е. $\operatorname{supp} I(\beta f)(\mu) \subset B$. Следовательно, согласно предложению 3.8 имеем $(\beta f)(\operatorname{supp}\mu) \subset B$. Это означает, что $\operatorname{supp}\mu \subset (\beta f)^{-1}(B)$. Но по теореме А. Д. Тайманова [16] для совершенного отображения $f\colon X \to Y$ и произвольного $B \subset Y$ имеет место равенство $(\beta f)^{-1}(B) = f^{-1}(B)$. Следовательно, $\operatorname{supp}\mu \subset f^{-1}(B)$, откуда $\mu \in I_\beta(f^{-1}(B))$. Предложение 3.9 доказано. □

Пусть $\{X_\alpha, p_\alpha^\beta; A\}$ — обратный спектр, индексированный элементами множества A и состоящий из тихоновских пространств. Через $\lim X_\alpha$ обозначим предел этого спектра, а через $p_\alpha\colon \lim X_\alpha \to X_\alpha$ — предельные проекции, $\alpha \in A$. Обратный спектр $\{X_\alpha, p_\alpha^{\alpha'}; A\}$ порождает обратный спектр $\{I_\beta(X_\alpha), I_\beta(p_\alpha^{\alpha'}); A\}$, предел которого обозначим через $\lim I_\beta(X_\alpha)$, а предельные проекции через $pr_\alpha\colon \lim I_\beta(X_\alpha) \to I_\beta(X_\alpha)$. Отображения $I_\beta(p_\alpha)\colon I_\beta(\lim X_\alpha) \to I_\beta(X_\alpha)$ порождают отображение $R\colon I_\beta(\lim X_\alpha) \to \lim I_\beta(X_\alpha)$, $\alpha \in A$. Известно, что если все X_α — компакты, то отображение R — гомеоморфизм [9].

Для тихоновского случая имеет место следующее утверждение.

Предложение 3.10. *Отображение $R\colon I_\beta(\lim X_\alpha) \to \lim I_\beta(X_\alpha)$ является вложением.*

Доказательство. Пусть $\{X_\alpha, P_\alpha^\beta; A\}$ — спектр тихоновских пространств. Рассмотрим стоун-чеховское продолжение $\{\beta X_\alpha, \beta P_\alpha^\beta; A\}$ спектра $\{X_\alpha, P_\alpha^\beta; A\}$. Отметим, что $\lim X_\alpha$ вкладывается в $\lim \beta X_\alpha$. Согласно непрерывности функтора $I\colon Comp \to Comp$ соответствующее отображение

$$\overline{R}\colon I(\lim \beta X_\alpha) \to \lim I(\beta X_\alpha)$$

является гомеоморфизмом. Поскольку функтор I_β сохраняет вложение (предложение 3.4), то отображение $R\colon I_\beta(\lim X_\alpha) \to \lim I_\beta(X_\alpha)$ вкладывается в гомеоморфизм $\overline{R}$ и является вложением. Предложение 3.10 доказано. □

Отметим, что для всякой пары F, K непересекающихся C^*-вложенных подмножеств тихоновского пространства X имеет место $[F]_{\beta X} \cap [K]_{\beta X} = \varnothing$, где $[Y]_{\beta X}$ — замыкание подмножества $Y \subset X$ в βX. Каждое C^*-вложенное подмножество замкнуто.

Предложение 3.11. *Функтор I_β сохраняет пересечение C^*-вложенных множеств, т. е. для любой пары C^*-вложенных подмножеств A и B тихоновского пространства X имеет место*

$$I_\beta(A \cap B) = I_\beta(A) \cap I_\beta(B).$$

Доказательство. Пусть X — тихоновское пространство и A, B — C^*-вложенные подмножества пространства X. Так как функтор I сохраняет пересечение [9], то имеем

$$\begin{aligned} I_\beta(A) \cap I_\beta(B) &= \{\mu \in I([A]_{\beta X}) : \operatorname{supp} \mu \subset A\} \cap \{\mu \in I([B]_{\beta X}) : \operatorname{supp} \mu \subset B\} = \\ &= \{\mu \in I([A]_{\beta X}) \cap I([B]_{\beta X}) : \operatorname{supp} \mu \subset A \text{ и } \mu \subset B\} = \\ &= \{\mu \in I([A]_{\beta X} \cap [B]_{\beta X}) : \operatorname{supp} \mu \subset A \cap B\} = I_\beta(A \cap B). \end{aligned}$$

Предложение 3.11 доказано. □

Предложение 3.12. *Если $f\colon X \to Y$ — совершенное отображение между тихоновскими пространствами, то отображение $I_\beta(f)\colon I_\beta(X) \to I_\beta(Y)$ также совершенно.*

Доказательство. По теореме А. Д. Тайманова [16] имеем $X = \beta f^{-1}(Y)$. Тогда по предложению 2.3 имеем

$$I_\beta(X) = I(\beta f)^{-1}(I_\beta(Y)),$$

следовательно, отображение $I_\beta(f)$ совершенно как ограничение совершенного отображения $I_\beta(\beta f)\colon I_\beta(\beta X) \to I_\beta(\beta Y)$ на полный прообраз $I_\beta(\beta f)^{(-1)}(I_\beta(Y)) = I_\beta(X)$. Предложение 3.12 доказано. □

Определение 3.1. Ковариантный функтор $F\colon Tych \to Tych$ называется *нормальным*, если он удовлетворяет следующим условиям: функтор F непрерывен, сохраняет вес, вложения, пересечения, прообразы, точку, пустое множество и переводит k-накрывающие отображения в сюръекцию [1].

Напомним, что непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *k-накрывающим*, если для любого компакта $B \subset Y$ существует такой компакт $A \subset X$, что $f(A) = B$. Всякое совершенное отображение является k-накрывающим.

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 3.1. *Функтор $I_\beta\colon Tych \to Tych$ является нормальным.*

4. О МОНАДЕ, ПОРОЖДЕННОЙ ФУНКТОРОМ I_β

Понятие монады введено С. Эйленбергом и Дж. Муром в связи теорией сопряженных функторов.

Определение 4.1 (см. [24]). *Монадой* (или *тройкой*) на категории $\mathfrak{C}$ называется тройка $\mathbb{T} = (T,\, \delta,\, \psi)$, состоящая из ковариантного функтора T и естественных преобразований $\delta\colon\ \mathrm{Id} \to T$ (единица) и $\psi\colon\ T^2 \to T$ (умножение), для которых выполняются условия:

$$\psi_X \circ T(\delta_X) = \psi_X \circ \delta_{T(X)} = \mathrm{id}_{T(X)}\,.$$

Функтор T, который может быть включен в тройку $\mathbb{T}$, называется *монадичным* в категории $\mathfrak{C}$.

В работе [9] М. Заричный показал, что функтор $I\colon\ Comp \to Comp$ идемпотентных вероятностных мер, действующий в категории компактов и их непрерывных отображений, порождает монаду в этой категории. Установим, что его распространение I_β на категорию тихоновских пространств и их непрерывных отображений также включается в монаду.

Для тихоновских пространств X, Y через

$$j_{XY}\colon\ I_\beta(X) \times Y \to I_\beta(X \times Y)$$

обозначим отображение, определяемое следующим образом:

$$j_{XY}(\nu,\, y) = I_\beta(i_y)(\nu),$$

где $\nu \in I_\beta(X)$, $y \in Y$ и $i_y\colon\ X \to X \times Y$ — вложение в качестве слоя:

$$i_y(x) = (x, y), x \in X.$$

Предложение 4.1. *Отображение j_{XY} является замкнутым вложением.*

Доказательство. Пусть X, Y — тихоновские пространства и $\beta\, X$, $\beta\, Y$ — их стоун-чеховские расширения. Из [2, предложение 1.12] и [25, теорема 2] следует, что отображение

$$j_{\beta\, X\beta\, Y}\colon\ I(\beta\, X) \times \beta\, Y \to I(\beta\, X \times \beta\, Y)$$

является вложением компактов. Очевидно, что

$$j_{XY}(I_\beta(X) \times Y) = j_{\beta\, X\beta\, Y}(I_\beta(X) \times Y) = j_{\beta\, X\beta\, Y}(I(\beta\, X) \times \beta\, Y) \cap (I_\beta(X) \times Y).$$

Предложение 4.1 доказано. □

Следствие 4.1. *Функтор I_β сохраняет гомотопии, т. е. для любой гомотопии $H_{(\cdot)} = \{H_t\colon\ X \to Y \,|\, t \in [0,\, 1]\}$ семейство*

$$I_\beta(H)_{(\cdot)} = \{I_\beta(H)_t\colon\ I_\beta(X) \to I_\beta(Y) \,|\, t \in [0,\, 1]\},$$

где $I_\beta(H)_t = I_\beta(H_t) \circ j_{X[0,\,1]}$, является гомотопией и непрерывно как отображение

$$I_\beta(H)_{(\cdot)}\colon\ I_\beta(X) \times [0,\, 1] \to I_\beta(Y).$$

Доказательство. Пусть $H_{(\cdot)}\colon\ X \times [0,\, 1] \to Y$ — гомотопия. Тогда $I_\beta(H)_{(\cdot)}$ является непрерывным отображением как композиция

$$I_\beta(H)_{(\cdot)} = I_\beta(H_{(\cdot)}) \circ j_{X[0,\,1]}$$

непрерывных отображений

$$j_{X[0,\,1]}\colon\ I_\beta(X) \times [0,\, 1] \to I_\beta(X \times [0,\, 1])$$

и

$$I_\beta(H_{(\cdot)})\colon\ I_\beta(X \times [0,\, 1]) \to I_\beta(Y).$$

Следствие 4.1 доказано. □

Отметим, что для $\varphi \in C(Y)$ имеем

$$\begin{aligned} I_\beta(H)_{(t)}(\mu)(\varphi) &= I_\beta(H)_{(\cdot)}(\mu, t)(\varphi) = I_\beta(H_{(\cdot)}) \circ j_{X[0,1]}(\mu, t)(\varphi) = \\ &= I_\beta(H_{(\cdot)}) \circ I_\beta(i_t)(\mu)(\varphi) = I_\beta(i_t)(\mu)(\varphi \circ H_{(\cdot)}) = \mu(\varphi \circ H_{(\cdot)} \circ i_t) = \\ &= \mu(\varphi \circ H_{(\cdot)} \circ i_t(x)) = \mu(\varphi \circ H_{(\cdot)}(x, t)) = \mu(\varphi \circ H_t(x)) = \mu(\varphi \circ H_t), \end{aligned}$$

т. е. $I_\beta(H)_{(t)}(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ H_t)$.

Пусть $F_i\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$, $i = 1, 2$ — два ковариантных функтора из категории $\mathfrak{C} = \{\mathfrak{O}, \mathfrak{M}\}$ в категорию $\mathfrak{C}' = \{\mathfrak{O}', \mathfrak{M}'\}$. Семейство морфизмов $\Phi = \{\varphi_X\colon F_1(X) \to F_2(X) | X \in \mathfrak{O}\} \subset \mathfrak{M}'$ называется *естественным преобразованием* функтора F_1 в функтор F_2, если для всякого морфизма $f\colon X \to Y$ категории $\mathfrak{C}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F_1(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & F_2(X) \\ \downarrow F_1(f) & & \downarrow F_2(f) \\ F_1(Y) & \xrightarrow{\varphi_Y} & F_2(Y). \end{array}$$

Для каждого тихоновского пространства X через $\delta_X\colon X \to I_\beta(X)$ обозначим отображение, ставящее в соответствии каждой точке $x \in X$ функционал Дирака $\delta(x)$, сосредоточенный в точке x. Через $\exp^\beta(X)$ принято обозначать пространство непустых компактных подмножеств тихоновского пространства X, снабженное топологией Вьеториса. Известно [17], что конструкция $\exp^\beta$ взятия компактных подмножеств является ковариантным функтором в категории тихоновских пространств. Для $F \in \exp^\beta X$ положим $\varphi_X(F) = \nu_F = \bigoplus\limits_{x \in F} 0 \odot \delta_x$.

Предложение 4.2. *Семейство морфизмов*

$$\Phi = \{\varphi_X\colon \exp^\beta(X) \to I_\beta(X) | X \in Tych\}$$

является естественным преобразованием функтора $\exp^\beta$ *в функтор* I_β. *Более того, каждая компонента* φ_X *является замкнутым вложением пространства* $\exp^\beta(X)$ *в* $I_\beta(X)$.

Доказательство. Для установления первой части леммы нам следует показать коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \exp^\beta(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & I_\beta(X) \\ \downarrow \exp^\beta(f) & & \downarrow I_\beta(f) \\ \exp^\beta(Y) & \xrightarrow{\varphi_Y} & I_\beta(Y). \end{array}$$

Пусть $F \in \exp^\beta X$. По определению имеем $\varphi_X(F) = \bigoplus\limits_{x \in F} 0 \odot \delta_x$. Далее, для произвольной функции $\psi \in C(Y)$ имеем

$$I_\beta(\varphi_X(F))(\psi) = \varphi_X(F)(\psi \circ f) = \bigoplus_{x \in F} 0 \odot \delta_x(\psi \circ f) = \bigoplus_{x \in F} 0 \odot \psi(f(x)) = \bigoplus_{y \in f(F)} 0 \odot \psi(y).$$

С другой стороны,

$$\varphi_Y(\exp^\beta(f)(F)) = \varphi_Y(f(F)) = \bigoplus_{y \in f(F)} 0 \odot \psi(y).$$

Таким образом, в силу произвольности множества F и функции ψ, имеем $I_\beta(f) \circ \varphi_X = \varphi_Y \circ \exp^\beta(f)$, т. е. рассматриваемая диаграмма коммутативна.

Пусть $F_1, F_2 \in \exp^\beta X$ — различные множества. Предположим, что $F_1 \setminus F_2 \neq \varnothing$. Пусть $x \in F_1 \setminus F_2$. Так как F_2 — компакт, не содержащий x, то существует непрерывная функция $\zeta \in C_b(X)$ такая, что $\zeta(x) = 1$ и $\zeta(y) = 0$ для всех $y \in F_2$. Имеем $\varphi_X(F_1)(\zeta) \geqslant 1 \neq 0 = \varphi_X(F_2)(\zeta)$, т. е. отображение φ_X инъективно. В работе [20] было показано, что для любого компакта Z топология Вьеториса на $\exp Z$ и топология поточечной сходимости на $\varphi_Z(\exp Z)$ совпадают. Отсюда, в частности, вытекает, что φ_X — вложение.

Теперь покажем, что $\varphi_X(\exp^\beta X)$ замкнуто в $I_\beta(X)$. Пусть $\mu \in I_\beta(X) \setminus \varphi_X(\exp^\beta X)$. Так как идемпотентные вероятностные меры с конечным носителем всюду плотны в $I_\beta(X)$, то можно предполагать, что μ — мера с конечным носителем. Поскольку $\mu \notin \varphi_X(\exp^\beta X)$, то идемпотентную вероятностную меру μ нельзя представить в виде $\bigoplus\limits_{x \in \operatorname{supp} \mu} 0 \odot \delta_x$. Другими словами, существует точка $x' \in \operatorname{supp} \mu$ такая, что в представлении $\bigoplus\limits_{x \in \operatorname{supp} \mu} \lambda_x \odot \delta_x$ идемпотентной вероятностной меры μ, где $\bigoplus\limits_{x \in \operatorname{supp} \mu} \lambda_x = 0$, коэффициент $\lambda_{x'}$ отрицателен. Рассмотрим функцию $\xi(x) = \lambda_{x'} + \lambda_x$ и окрестность $\left\langle \mu;\, \xi;\, \dfrac{|\lambda_{x'}|}{2} \right\rangle$. Очевидно, что окрестность $\left\langle \mu;\, \xi;\, \dfrac{|\lambda_{x'}|}{2} \right\rangle$ не пересекается с $\varphi_X(\exp^\beta X)$. Предложение 4.2 доказано. $\square$

Предложение 4.3. *Семейство* $\delta = \{\delta_X : X \in Tych\}$ *определяет естественное преобразование тождественного функтора* $\mathrm{Id}\colon Tych \to Tych$ *в функтор* $I_\beta\colon Tych \to Tych$*, причем каждая компонента* $\delta_X\colon X \to I_\beta(X)$ *является замкнутым вложением.*

Доказательство. Легко проверить, что $\delta = \{\delta_X : X \in Tych\}$ — естественное преобразование функтора Id в функтор I_β. То, что каждое отображение $\delta_X\colon ,X \to I_\beta(X)$ является замкнутым вложением, следует из теоремы 1.14 в [17,], которая гласит, что X замкнуто в $\exp^\beta X$, и предложения 4.2. Предложение 4.3 доказано. $\square$

Для функтора I_β умножение $\psi_X\colon I^2_\beta(X) \to I_\beta(X)$ определим по формуле $\psi_X(\alpha)(\varphi) = \alpha(\tilde{\varphi})$, где $\alpha \in I^2_\beta(X)$, $\varphi \in C(X)$, а $\tilde{\varphi}\colon I_\beta(X) \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, определимая формулой $\tilde{\varphi}(\mu) = \mu(\varphi)$, $\mu \in I_\beta(X)$.

Теорема 4.1. *Тройка* $\mathbb{I}_\beta = \langle I_\beta, \delta, \psi\rangle$ *образует монаду в категории* $Tych$ *тихоновских пространств и их непрерывных отображений.*

Доказательство. В работе [9] было показано, что функтор $I\colon Comp \to Comp$ образует монаду в категории $Comp$. Поэтому достаточно доказать, что для каждого тихоновского пространства X имеют место включения $\delta_{\beta X}(X) \subset I_\beta(X)$ и $\psi_{\beta X}(I^2_\beta(X)) \subset I_\beta(X)$, где $\delta_{\beta X}$ и $\psi_{\beta X}$ — компоненты естественных преобразований, входящих в тройку $\mathbb{I} = \langle I,\, \delta,\, \psi\rangle$. Из предложения 4.3 вытекает, что $\delta_{\beta X}(X) \subset I_\beta(X)$. Для доказательства включения $\psi_{\beta X}(I^2_\beta(X)) \subset I_\beta(X)$ предположим, что $\alpha \in I^2_\beta(X) \subset I^2_\beta(\beta X)$. Тогда $\operatorname{supp}\alpha \subset I_\beta(X)$. Пусть $\varphi \in C_b(X)$. Обозначим через $\tilde{\varphi}$ продолжение φ на βX. Имеем $(\psi_X(\alpha)(\varphi) = \alpha(\tilde{\varphi}) = \alpha(\tilde{\varphi}|\operatorname{supp}\alpha) =$(поскольку $\operatorname{supp}\alpha \subset I_\beta(X)) = \alpha(\tilde{\varphi}|_{I_\beta(X)})$. Так как всякая функция $f \in C_b(Z)$ пространства Z представима в виде $f = (f(z))_{z\in Z}$, то $\alpha(\tilde{\varphi}|_{I_\beta(X)}) = \alpha((\tilde{\varphi}(\mu))_{\mu\in I_\beta(X)}) = \alpha((\mu(\varphi))_{\mu\in I_\beta(X)})$. Следовательно, $\operatorname{supp}\psi_X(\alpha) \subset X$. Теорема 4.1 доказана. $\square$

5. Функтор I_β и открытые отображения

При доказательстве основного результата будем использовать следующие две леммы, доказанные в [3].

Лемма 5.1. *Пусть* $f\colon X \to Y$ — *непрерывное отображение,* $y_0 \in Y$ *и* $\varphi \in C_b(Y)$. *Тогда существует функция* $\psi \in C_b(Y)$ *такая, что* $\psi \circ f \leqslant \varphi$ *и* $\psi(y_0) = \inf\left\{\varphi(x) : x \in f^{-1}(y_0)\right\}$.

Лемма 5.2. *Пусть* $f\colon X \to Y$ — *непрерывное отображение,* $y_0 \in Y$ *и* $\nu \in I_\beta$ *такие, что* $I_\beta(f)(\nu) = \delta_{y_0}$. *Тогда для любой* $\varphi \in C_b(X)$ *такой, что* $\varphi(x) \geqslant c$ (*соответственно,* $\varphi(x) \leqslant c$) *при* $x \in f^{-1}(y_0)$, *имеем* $\nu(\varphi) \geqslant c$ (*соответственно,* $\nu(\varphi) \leqslant c$).

Напомним, что подмножество A пространства $I(X)$ является max-plus-*выпуклым*, если для каждой пары $\mu,\, \nu \in A$ имеем $\alpha \odot \mu \oplus \beta \odot \nu \in A$, где $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}_{\max}$ и $\alpha \oplus \beta = \mathbf{1}$.

Предложение 5.1. *Для отображения* $f\colon X \to Y$ *компактов и всякой меры* $\nu \in I(X)$ *прообраз* $I(f)^{-1}(\nu)$ *является* max-plus-*выпуклым множеством в* $I(X)$.

Доказательство. Пусть $\mu_1,\, \mu_2 \in I(f)^{-1}(\nu)$. Тогда для всякой пары $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}_{\max}$ с $\alpha \oplus \beta = \mathbf{1}$ и для каждой $\psi \in C(Y)$ имеем

$$I(f)(\alpha \odot \mu_1 \oplus \beta \odot \mu_2)(\psi) = (\alpha \odot \mu_1 \oplus \beta \odot \mu_2)(\psi \circ f) = \alpha \odot \mu_1(\psi \circ f) \oplus \beta \odot \mu_2(\psi \circ f) =$$
$$= \alpha \odot I(f)(\mu_1)(\psi) \oplus \beta \odot I(f)(\mu_2)(\psi) = \alpha \odot \nu(\psi) \oplus \beta \odot \nu(\psi) = \nu(\psi),$$

т. е. $I(f)(\alpha \odot \mu_1 \oplus \beta \odot \mu_2) = \nu$. Следовательно, $\alpha \odot \mu_1 \oplus \beta \odot \mu_2 \in I(f)^{-1}(\nu)$. Предложение 5.1 доказано. $\square$

Взяв одноточечное множество Y, из предложений 3.7 и 5.1 извлекаем следующее утверждение.

Следствие 5.1. *Множество* $I_\beta(X)$ *является* max-plus-*выпуклым подмножеством тихоновского произведения* $\mathbb{R}^{C_b(X)}$.

Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение и $\varphi \in C_b(X)$. Через φ^* (соответственно, φ_*) обозначим функцию $\varphi^*\colon Y \to \mathbb{R}$ (соответственно, $\varphi_*\colon Y \to \mathbb{R}$), определенную правилом $\varphi^*(y) = \sup\left\{\varphi(x) : x \in f^{-1}(y)\right\}$ (соответственно, $\varphi_*(y) = \inf\left\{\varphi(x) : x \in f^{-1}(y)\right\}$). Известно, что если f — открытое отображение, то функции φ^* и φ_* непрерывны.

Теорема 5.1. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение тихоновских пространств. Отображение $I_\beta(f)\colon I_\beta(X) \to I_\beta(Y)$ открыто тогда и только тогда, когда f открыто.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ — такое отображение, что отображение $I_\beta(f)\colon I_\beta(X) \to I_\beta(Y)$ открыто. Рассмотрим точку $x_0 \in X$. Пусть $y_0 = f(x_0)$. Возьмем такую $\varphi \in C_b(X)$, что $\varphi(x_0) = 0$. Положим

$$V = \{x \in X : -1 < \varphi(x) < 1\}.$$

Достаточно показать, что $f(V)$ — открытая окрестность точки y_0, так как множества вида V образуют базу окрестностей точку x_0.

Рассмотрим открытую окрестность $W = \{\mu \in I_\beta(X) : -1 < \mu(\varphi) < 1\}$ функционала $\delta_{x_0} \in I_\beta(X)$. Тогда $I_\beta(f)(W)$ — открытая окрестность функционала $\delta_{y_0} \in I_\beta(Y)$. Существуют функции $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_k \in C_b(Y)$, $\psi_i(y_0) = 0$ и ε, $0 < \varepsilon < 1$, такие, что $H = \langle \delta_{y_0}, \psi_1, \psi_2 \ldots \psi_k; \varepsilon\rangle \subset I_\beta(f)(W)$.

Положим $G = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \{y \in Y : -\varepsilon < \psi_i(y) < \varepsilon\}$. Тогда G — открытая окрестность точки y_0. Пусть $y \in G$ — произвольная точка. Тогда $\delta_y \in H$. Следовательно, существует $\mu \in I_\beta(X)$ такая, что $\mu \in W$ и $I_\beta(f)(\mu) = \delta_y$. Согласно условиям, имеем $-1 < \mu(\varphi) < 1$. Поскольку каждая идемпотентная вероятностная мера является сохраняющим порядок функционалом, то μ сохраняет порядок, поэтому существует $x \in f^{-1}(y)$ такая, что $-1 < \varphi(x) < 1$. Таким образом, $G \subset f(V)$ и, следовательно, f открыто.

Пусть теперь $f\colon X \to Y$ — открытое отображение. Предположим, что $I_\beta(f)$ не открыто. Тогда существуют:

1) идемпотентная мера $\mu_0 \in I_\beta(X)$,
2) сеть идемпотентных мер $\{\nu_\alpha\} \subset I_\beta(X)$, сходящаяся к $\nu_0 = I_\beta(f)(\mu_0)$, и
3) окрестность W идемпотентной меры μ_0

такие, что $I_\beta(f)^{-1}(\nu_\alpha) \bigcap W = \varnothing$ для каждого α.

Поскольку $I_\omega(Y)$ всюду плотно в $I_\beta(Y)$, то можно предполагать, что все функционалы ν_α сосредоточены на конечных множествах. Пусть $A_\alpha = I_\beta(X)^{-1}(\nu_\alpha)$ и $[A_\alpha] = \left[I_\beta(f)^{-1}(\nu_\alpha)\right]_{I(\beta X)}$. Так как $I(\beta X)$ — компакт и функция $I(\beta f)$ непрерывна, то сеть $[A_\alpha]$ сходится к $[A_0] = \left[I_\beta(f)^{-1}(\nu_0)\right]_{I(\beta X)}$ по топологии Вьеториса в $\exp I(\beta X)$. Кроме того, из непрерывности отображения $I(\beta f)$ вытекает, что $[A_0] \subset I(\beta f)^{-1}(\nu_0)$ и $\mu_0 \in [A_0]$ (нарушено условие 3)). Ясно, если $\mu_0 \notin [A_0]$, то для каждой $\mu \in [A_0]$ существует $\varphi_\mu \in C_b(X) \cong C(\beta X)$ такая, что $\mu_0(\varphi_\mu) \neq \mu(\varphi_\mu)$. Согласно предположению, для каждого α существует конечное множество $\{y_{\alpha 1} \ldots y_{\alpha n_\alpha}\}$ такое, что $\nu_\alpha \in I(\{y_{\alpha 1} \ldots y_{\alpha n_\alpha}\})$. Для каждого $y_{\alpha i}$ можно выбрать $x_{\alpha i} \in X$ такие, что $f(x_{\alpha i}) = y_{\alpha i}$ и $\varphi(x_{\alpha i}) = \varphi^*(y_{\alpha i})$, $\mu \in [A]$. Определим вложение $j_\alpha\colon \{y_{\alpha 1} \ldots y_{\alpha n_\alpha}\} \to X$ по правилу $j_\alpha(y_{\alpha i}) = x_{\alpha i}$ и пусть $\mu_\alpha = I(j_\alpha)(\nu_\alpha)$. Легко видеть, что $\varphi = \varphi^* \circ f = \varphi^* \circ \beta f$ на каждом конечном $\{y_{\alpha 1} \ldots y_{\alpha n_\alpha}\}$. Поэтому

$$\mu_\alpha(\varphi) = \mu_\alpha(\varphi^* \circ f) = \mu_\alpha(\varphi^* \circ \beta f) = I(\beta f)(\mu_\alpha)(\varphi^*) = \nu_\alpha(\varphi_*)$$

для каждого α. Пусть μ_1 — предел сети (μ_α). Тогда $\mu_1 \in [A]$ и

$$\mu_1(\varphi) = \lim_\alpha \mu_\alpha(\varphi) = \lim_\alpha \mu_\alpha(\varphi^* \circ \beta f) = \lim_\alpha I(\beta f)(\mu_\alpha)(\varphi^*) = \lim_\alpha \nu_\alpha(\varphi^*) = \nu_0(\varphi^*), \quad \varphi \in C(X).$$

С другой стороны, $\nu_0(\varphi^*) = I(\beta f)(\mu_0)(\varphi^*) = \mu_0(\varphi^* \circ \beta f)$. Таким образом,

$$\mu_1(\varphi) = \mu_0(\varphi^* \circ \beta f) \tag{5.1}$$

для каждого $\varphi \in C(X)$. Аналогично,

$$\mu_1(\varphi) = \mu_0(\varphi_* \circ \beta f)$$

для каждого $\varphi \in C(X)$. Пусть функция $\varphi_{\mu_1} \in C(X)$ такая, что $\mu_0(\varphi_{\mu_1}) \neq \mu_1(\varphi_{\mu_1})$. Предположим, что $\mu_0(\varphi_{\mu_1}) > \mu_1(\varphi_{\mu_1})$. Из $\varphi^* \circ \beta f \geqslant \varphi$ в силу равенства (5.1) имеем $\mu_1(\varphi_{\mu_1}) = \mu_0(\varphi_{\mu_1}^* \circ \beta f) \geqslant \mu_0(\varphi_{\mu_1})$. Аналогично, можно показать, что предположение $\mu_0(\varphi_{\mu_1}) < \mu_1(\varphi_{\mu_1})$ также не верно.

Таким образом, получили противоречие, которое показывает, что $I_\beta(f)$ открыто. Теорема 5.1 доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аль-Кассас Ю.* Метризуемость и паракомпактность пространств вероятностных мер// Дисс. к.ф.-м.н. — М.: МГУ, 1991.
2. *Заитов А. А.* О продолжении слабо аддитивных функционалов// Докл. АН РУз. — 2005. — № 5. — С. 3–7.
3. *Заитов А. А.* Теорема об открытом отображении пространств слабо аддитивных однородных функционалов// Мат. заметки. — 2010. — *88*, № 5. — С. 683–688.
4. *Заитов А. А.* Геометрические и топологические свойства подпространства $P_f(X)$ вероятностных мер// Изв. вузов. Сер. мат. — 2019. — № 10. — С. 28–37.
5. *Заитов А. А., Ишметов А. Я.* О монаде, порожденной функтором I_β// Вестн. НУУз. — 2013. — № 2. — С. 61–64.
6. *Заитов А. А., Ишметов А. Я.* Гомотопические свойства пространства $I_f(X)$ идемпотентных вероятностных мер// Мат. заметки. — 2019. — *106*, № 4. — С. 531–542.
7. *Заитов А. А., Тожиев И. И.* Функциональные представления замкнутых подмножеств компакта// Узб. мат. ж. — 2010. — № 1. — С. 53–63.
8. *Заитов А. А., Холтураев Х. Ф.* О взаимосвязи функторов P вероятностных мер и I идемпотентных вероятностных мер// Узб. мат. ж. — 2014. — № 4. — С. 36–45.
9. *Заричный М. М.* Пространства и отображения идемпотентных мер// Изв. РАН. Сер. мат. — 2010. — *74*, № 3. — С. 45–64.
10. *Ишметов А. Я.* О функторе идемпотентных вероятностных мер с компактными носителями// Узб. мат. ж. — 2010. — № 1. — С. 72–80.
11. *Колокольцов В. Н.* Идемпотентные структуры в оптимизации// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. — 1999. — *65*. — С. 118–174.
12. *Колокольцов В. Н., Маслов В. П.* Идемпотентный анализ как аппарат теории управления. I// Функц. анализ и его прилож. — 1989. — *23*, № 1. — С. 1–14.
13. *Колокольцов В. Н., Маслов В. П.* Идемпотентный анализ как аппарат теории управления и оптимального синтеза. II// Функц. анализ и его прилож. — 1989. — *23*, № 4. — С. 53–62.
14. *Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Шпиз Г. Б.* Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход// Мат. заметки. — 2001. — *69*, № 5. — С. 758–797.
15. *Маслов В. П., Колокольцов В. Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. — М.: Физматлит, 1994.
16. *Тайманов А. Д.* О замкнутых отображениях// Мат. сб. — 1955. — *46*. — С. 349–352.
17. *Федорчук В. В.* Многозначные ретракции и характеризация n-мягких отображений// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1988. — *51*. — С. 169–207.
18. *Федорчук В. В.* Вероятностные меры в топологии// Усп. мат. наук. — 1991. — *46*, № 1. — С. 41–80.
19. *Федорчук В. В., Садовничий Ю. В.* О некоторых топологических и категорных свойствах знакопеременных мер// Фундам. и прикл. мат. — 1999. — *5*, № 2. — С. 597–618
20. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. — М.: МГУ, 1988.
21. *Чигогидзе А. Ч.* О продолжении нормальных функторов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1984. — № 6. — С. 23–26.
22. *Щепин Е. В.* Функторы и несчетные степени компактов// Усп. мат. наук. — 1981. — *36*, № 3. — С. 3–62.
23. *Aubin J. P.* Dynamic economic theory: A viability approach. — Berlin—Heidelberg: Springer-Verlag, 1997.
24. *Eilenberg S., Moore J.* Adjoint functors and triples// Ill. J. Math. — 1965. — *9*, № 3. — С. 381–398.
25. *Radul T. N.* On the functor of order-preserving functionals// Comment. Math. Univ. Carolin. — 1998. — *39*, № 3. — С. 609–615.
26. *Radul T.* Idempotent measures: absolute retracts and soft maps// ArXiv. — 2018. — 1810.09140v1 [math.GN].
27. *Zaitov A. A.* Order-preserving variants of the basic principles of functional analysis// Fundame. J. Math. Appl. — 2019. — *2*, № 1. — С. 10–17.
28. *Zaitov A. A.* On a metric on the space of idempotent probability measures// Appl. Gen. Topol. — 2020. — *21*, № 1. — С. 35-51.

А. Я. Ишметов
Ташкентский архитектурно-строительный институт, Ташкент, Узбекистан
E-mail: ishmetov_azadbek@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-693-706 UDC 515.12

Functor of Idempotent Probability Measures with Compact Support and Open Mappings

© 2021 **A. Ya. Ishmetov**

Abstract. In this paper, we show that the functor of idempotent probability measures with compact support acting in the category of Tikhonov spaces and their continuous mappings is normal. It is found that this functor is monodic. Further, it is proved that the functor of idempotent probability measures with compact support preserves the openness of continuous mappings of Tikhonov spaces.

REFERENCES

1. Yu. Al'-Kassas, "Metrizuemost' i parakompaktnost' prostranstv veroyatnostnykh mer" [Metrizability and paracompactness of spaces of probability measures], *Thesis*, MSU, Moscow, 1991 (in Russian).
2. A. A. Zaitov, "O prodolzhenii slabo additivnykh funktsionalov" [On extension of weakly additive functionals], *Dokl. AN RUz* [Rep. Acad. Sci. Resp. Uzb.], 2005, No. 5, 3–7 (in Russian).
3. A. A. Zaitov, "Teorema ob otkrytom otobrazhenii prostranstv slabo additivnykh odnorodnykh funktsionalov" [An open mapping theorem for spaces of weakly additive homogeneous functionals], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2010, **88**, No. 5, 683–688 (in Russian).
4. A. A. Zaitov, "Geometricheskie i topologicheskie svoystva podprostranstva $P_f(X)$ veroyatnostnykh mer" [Geometric and topological properties of the subspace $P_f(X)$ of probability measures], *Izv. vuzov. Ser. mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2019, No. 10, 28–37 (in Russian).
5. A. A. Zaitov and A. Ya. Ishmetov, "O monade, porozhdennoy funktorom I_β" [On the monad generated by the functor I_β], *Vestn. NUUz* [Bull. Nat. Univ. Uzb.], 2013, No. 2, 61–64 (in Russian).
6. A. A. Zaitov and A. Ya. Ishmetov, "Gomotopicheskie svoystva prostranstva $I_f(X)$ idempotentnykh veroyatnostnykh mer" [Homotopy properties of the space $I_f(X)$ of idempotent probability measures], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2019, **106**, No. 4, 531–542 (in Russian).
7. A. A. Zaitov and I. I. Tozhiev, "Funktsional'nye predstavleniya zamknutykh podmnozhestv kompakta" [Functional representations of closed subsets of a compactum], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 2010, No. 1, 53–63 (in Russian).
8. A. A. Zaitov and Kh. F. Kholturaev, "O vzaimosvyazi funktorov P veroyatnostnykh mer i I idempotentnykh veroyatnostnykh mer" [On the relationship of functors P of probability measures and I idempotent probability measures], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 2014, No. 4, 36–45 (in Russian).
9. M. M. Zarichnyi, "Prostranstva i otobrazheniya idempotentnykh mer" [Spaces and mappings of idempotent measures], *Izv. RAN. Ser. mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2010, **74**, No. 3, 45–64 (in Russian).
10. A. Ya. Ishmetov, "O funktore idempotentnykh veroyatnostnykh mer s kompaktnymi nositelyami" [On the functor of compactly supported idempotent probability measures], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 2010, No. 1, 72–80 (in Russian).
11. V. N. Kolokol'tsov, "Idempotentnye struktury v optimizatsii" [Idempotent structures in optimization], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee pril.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 1999, **65**, 118–174 (in Russian).
12. V. N. Kolokol'tsov and V. P. Maslov, "Idempotentnyy analiz kak apparat teorii upravleniya. I" [Idempotent analysis as an apparatus of control theory. I], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1989, **23**, No. 1, 1–14 (in Russian).

13. V. N. Kolokol'tsov and V. P. Maslov, "Idempotentnyy analiz kak apparat teorii upravleniya i optimal'nogo sinteza. II" [Idempotent analysis as an apparatus of control theory and optimal synthesis. II], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1989, **23**, No. 4, 53–62 (in Russian).
14. G. L. Litvinov, V. P. Maslov, and G. B. Shpiz, "Idempotentnyy funktsional'nyy analiz. Algebraicheskiy podkhod" [Idempotent functional analysis. Algebraic approach], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2001, **69**, No. 5, 758–797 (in Russian).
15. V. P. Maslov and V. N. Kolokol'tsov, *Idempotentnyy analiz i ego primenenie v optimal'nom upravlenii* [Idempotent analysis and Its Application in Optimal Control], Fizmatlit, Moscow, 1994 (in Russian).
16. A. D. Taymanov, "O zamknutykh otobrazheniyakh" [On closed mappings], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1955, **46**, 349–352 (in Russian).
17. V. V. Fedorchuk, "Mnogoznachnye retraktsii i kharakterizatsiya n-myagkikh otobrazheniy" [Multivalued retractions and characterization of n-soft mappings], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1988, **51**, 169–207 (in Russian).
18. V. V. Fedorchuk, "Veroyatnostnye mery v topologii" [Probability measures in topology], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1991, **46**, No. 1, 41–80 (in Russian).
19. V. V. Fedorchuk and Yu. V. Sadovnichiy, "O nekotorykh topologicheskikh i kategornykh svoystvakh znakoperemennykh mer" [On some topological and categorical properties of alternating measures], *Fundam. i prikl. mat.* [Fundam. Appl. Math.], 1999, **5**, No. 2, 597–618 (in Russian)
20. V. V. Fedorchuk and V. V. Filippov, *Obshchaya topologiya. Osnovnye konstruktsii* [General Topology. Basic Constructions], MGU, Moscow, 1988 (in Russian).
21. A. Ch. Chigogidze, "O prodolzhenii normal'nykh funktorov" [On extension of normal functors], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 1984, No. 6, 23–26 (in Russian).
22. E. V. Shchepin, "Funktory i neschetnye stepeni kompaktov" [Functors and uncountable powers of compacta], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1981, **36**, No. 3, 3–62 (in Russian).
23. J. P. Aubin, *Dynamic economic theory: A viability approach*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1997.
24. S. Eilenberg and J. Moore, "Adjoint functors and triples," *Ill. J. Math.*, 1965, **9**, No. 3, 381–398.
25. T. N. Radul, "On the functor of order-preserving functionals," *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 1998, **39**, No. 3, 609–615.
26. T. Radul, "Idempotent measures: absolute retracts and soft maps," *ArXiv*, 2018, 1810.09140v1 [math.GN].
27. A. A. Zaitov, "Order-preserving variants of the basic principles of functional analysis," *Fundam. J. Math. Appl.*, 2019, **2**, No. 1, 10–17.
28. A. A. Zaitov, "On a metric on the space of idempotent probability measures," *Appl. Gen. Topol.*, 2020, **21**, No. 1, 35-51.

A. Ya. Ishmetov
Tashkent Institute of Architecture and Civil Engineering, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: `ishmetov_azadbek@mail.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 4 (2021). С. 707–754
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-707-754 УДК 510.5+510.6+512.57+519.68

ОТДЕЛИМЫЕ АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

© 2021 г. **Н. Х. КАСЫМОВ, Р. Н. ДАДАЖАНОВ, Ф. Н. ИБРАГИМОВ**

Аннотация. Излагаются основные результаты теории отделимых алгоритмических представлений классических алгебраических систем. Описываются важнейшие классы таких систем и их представления в нижних классах арифметической иерархии — позитивных и негативных. Особое внимание уделено алгоритмическим, структурным и топологическим свойствам отделимых представлений групп, колец и тел, а также эффективным аналогам теоремы А. И. Мальцева о вложимости колец в тела. Рассматриваются возможности применения изучаемых понятий в рамках теоретической информатики.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Предварительные сведения

Базовые понятия, используемые в работе, содержатся в [1, 3–5, 49, 52, 54–58].

Под словосочетанием *алгебраическая система* будем понимать непустое множество вместе с фиксированным семейством конечноместных операций и отношений, заданных на нем. Иногда, для краткости, алгебраические системы будем называть *моделями*. Под словом *алгебра* будем понимать модель чисто функциональной сигнатуры. При этом язык алгебраической системы (т. е. список имен операций и отношений) называется *сигнатурой*.

Стандартным приемом в математике является выделение класса алгебраических систем фиксированной сигнатуры путем определения некоторых простых законов, которым должны удовлетворять системы данного класса. Например, группы, кольца, поля, решетки и т. п. (см. [54]). Заметим, что в этих классах, как правило, есть некоторые «стандартные» представители, имеющие очень ясную алгоритмическую природу, т. е., фактически, упомянутые законы и задают алгоритмические реализации этих систем. К примеру, в любом конечно аксиоматизируемом квазимногообразии существуют свободные системы любого конечного ранга, которые обладают «хорошими» (в уточняемом далее смысле) алгоритмическими представлениями, строящимися в соответствии с некоторой единообразной эффективной процедурой, исходя из синтаксического материала, заключенного в самих аксиомах (см. [3, 5, 52, 54, 55]). Задание алгебраических систем порождающими и определяющими соотношениями также дает один из примеров такого подхода.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда «Наследие академика Т. Н. Кары-Ниязова».

Аналогичный подход широко используется в теоретической информатике, когда по заданной спецификации (тексту программы в некотором необходимо логическом языке) нужно автоматически (без элементов креативности) построить некую стандартную модель, реализующую данную спецификацию, причем строительным материалом для этой модели служит сама спецификация, т. е. сигнатура и формальные математические законы (см., например, [2, 63, 64, 67]).

Введенное академиком А. И. Мальцевым в [52] понятие нумерованной алгебры — одно из наиболее общих центральных понятий, возникших на стыке теории универсальных алгебр и теории нумераций. В силу чрезвычайной общности класса всех нумерованных алгебр изучение последних обычно проводится в предположениях наличия ограничений на алгоритмические сложности нумерационных эквивалентностей. В этом аспекте, в первую очередь, нужно отметить вычислимые и, в более общем случае, позитивные и негативные алгебры, теория которых представляет бурно развивающийся раздел современной математической логики. Проблемы существования и числа вычислимых нумераций (представлений) алгебраических систем стали уже классическими (С. С. Гончаров, Ю. Л. Ершов [3], Ю. Л. Ершов [4, 5]), а ослабление требований к алгоритмической сложности нумерационных эквивалентностей является одним из общепринятых способов расширения исследуемого класса нумерованных систем.

Другой путь ограничения исследуемого класса нумерованных алгебр, который, в отличие от предыдущего, игнорирует сложность нумерационной эквивалентности, заключается в наложении эффективных условий типа отделимости. Идеи использования понятия отделимости в теории нумераций восходят к В. А. Успенскому [59, 60] и А. Нероуду [72] и развиваются в работах А. И. Мальцева [53] и Ю. Л. Ершова [4]. Классическим условием отделимости в теории алгоритмов является принцип вычислимой отделимости. Синтез понятий универсальной алгебры и вычислимо отделимой нумерации образует понятие вычислимо отделимой алгебры. В работах [6–25, 35–37, 47, 48] изучены наиболее общие эффективные, структурные и топологические свойства вычислимо отделимых алгебр и описаны их важнейшие типы. Многие естественные и важные типы нумерованных алгебр оказались вычислимо отделимыми, в том числе — среди неочевидных — негативные алгебры, позитивные алгебры со счетными решетками конгруэнций, стандартно нумерованные конечно порожденные и финитно аппроксимируемые алгебры и ряд других.

В различных по методам доказательства и звучанию результатах о нумерованных алгебрах из упомянутых выше классов имеется немало принципиальных общих моментов, причем справедливость весьма сильных свойств оказалась не зависящей от сложности нумерационной эквивалентности. Эти факты становятся прозрачными именно при обобщенном взгляде на ситуацию — с точки зрения теории вычислимо отделимых нумерованных алгебр. На базе и в рамках этой теории решается ряд естественных вопросов, возникших в связи с работами А. И. Мальцева [52], В. Баура [61, 62], Д. Бергстры и Д. Такера [63], М. Броя и др. [64], С. Камина [67] в теории вычислимо представимых алгебр и в теоретической информатике.

Целесообразность изучения вычислимо отделимых нумерованных алгебр обуславливается еще одним обстоятельством. Несмотря на обширность, класс этих алгебр допускает вполне удовлетворительные, в тех или иных смыслах, описания. Для естественного класса отделимых нумерованных алгебр справедливы только релятивизированные варианты основных утверждений. В связи с этим уместно отметить, что в теории нумерованных алгебр роль и место вычислимо отделимых нумерованных алгебр — с точки зрения сложности отделяющих множеств — подобны роли и месту вычислимых алгебр — с точки зрения сложности нумерационной эквивалентности.

Более того, оказалось, что основные структурные теоремы, справедливые для универсальных алгебр, оказались верными и для их естественных обобщений — вычислимо отделимых алгебраических систем и моделей (см. [34, 38]).

Однако более фундаментальным условием отделимости для универсальных алгебр является условие перечислимой отделимости (т. е. для всякой пары различных элементов нумерованной алгебры имеется перечислимое множество, содержащее в точности один из элементов данной пары), т. к., в определенном смысле, можно сказать, что теория алгоритмов как наука начинается с доказательства существования невычислимых перечислимых множеств.

Понятие отделимой нумерованной универсальной алгебры является естественным обобщением понятия вычислимо отделимо нумерованной алгебры.

В настоящем обзоре изучается понятие перечислимо отделимой нумерованной алгебры, являющейся обобщением понятия вычислимо отделимой универсальной нумерованной алгебры, и излагаются основные факты о структурных, алгоритмических и топологических свойствах отделимо нумерованных алгебр. Рассматриваются вопросы строения классических отделимых систем (групп, колец, полей), а также демонстрируются возможности приложения результатов теории отделимо нумерованных алгебр к решению некоторых принципиальных вопросов, возникших в смежных областях математической логики и теоретической информатики.

Мы предполагаем, что читатель хорошо знаком с основными определениями, касающимися вычислимых функций, а также вычислимых и перечислимых множеств (см., например, [55,57,58]). Следуя Ю. Л. Ершову и С. С. Гончарову [3–5], приведем ряд основных определений.

Всюду далее под словом *алгебра*, если не оговорено противное, будем понимать произвольную универсальную алгебру эффективной сигнатуры, т. е. мы предполагаем зафиксированной некоторую естественную нумерацию сигнатуры, для которой число аргументов произвольного символа эффективно находится по его номеру в этой нумерации.

Если $\langle A;\Sigma\rangle$ — счетная алгебра эффективной сигнатуры Σ, то ее *нумерацией* называется всякое отображение ν множества натуральных чисел ω на основное множество алгебры A такое, что по любому номеру сигнатурной операции σ эффективно находится алгоритм для вычисления такой функции f, что $\forall \overline{x}\ (\sigma\nu(\overline{x}) = \nu f\ (\overline{x}))$.

Заметим, что любая не более чем счетная алгебра эффективной сигнатуры имеет нумерацию (например, индуцированную геделевской нумерацией абсолютно свободной алгебры Σ-термов от счетного множества свободных порождающих, т. к. любая Σ-алгебра есть гомоморфный образ абсолютно свободной от подходящего вычислимого множества свободных порождающих).

Стоит отметить, что в теории вычислимых моделей сегодня используется общее понятие нумерации, в котором отсутствует требование вычислимости сигнатурных операций на ν-номерах. В данной работе мы следуем первоначальному определению А. И. Мальцева из [52] и, таким образом, использованное нами определение является более узким.

Ядром нумерации ν алгебры A будем называть нумерационную эквивалентность $\{\langle x,y\rangle | \nu x = \nu y\}$. Если ν — нумерация, то ее ядро будем обозначать через $ker(\nu)$.

Если η — фиксированная эквивалентность на ω, то всякую алгебру, обладающую нумерацией с ядром, равным η, будем называть *η-алгеброй* (или *определимой* над η). Иными словами, алгебра A *определима* над эквивалентностью η, если существует такая вычислимая алгебра $\langle\omega;F\rangle$, где F — вычислимое семейство вычислимых функций, что η является конгруэнцией алгебры $\langle\omega;F\rangle$ и A изоморфна фактор-алгебре $\langle\omega/\eta;F\rangle$.

Характеристической трансверсалью эквивалентности η на ω (обозначаемой через $tr(\eta)$) называется множество всех натуральных чисел, являющихся наименьшими в содержащих их смежных η-классах, т. е. $\{x | x = y \pmod{\eta} \to x \leqslant y\}$. *Характеристической трансверсалью нумерации* ν называется характеристическая трансверсаль ее ядра, т. е. $tr(ker(\nu))$.

Эквивалентность с бесконечным (конечным) числом смежных классов будем называть *бесконечной* (соответственно, *конечной*).

Пусть $(A;\nu)$ — нумерованная алгебра. Подмножество B основного множества алгебры A называется *ν-вычислимым* (*ν-перечислимым*, *ν-коперечислимым*), если вычислимо (перечислимо, соответственно, коперечислимо) множество $\nu^{-1}(B)$. Если из контекста будет ясно, какая нумерация имеется в виду, то подмножества основного множества алгебры часто будем называть вычислимыми (перечислимыми, коперечислимыми), без приставки ν.

Если даны две нумерованные алгебры (A,μ) и (B,ν), то гомоморфизм φ из A в B называется *морфизмом*, если он эффективен на номерах, т. е. существует такая вычислимая функция g, что $\varphi\mu = \nu g$. Другими словами, мы рассматриваем только гомоморфизмы, эффективно заданные на номерах, т. е. по любому μ-номеру любого элемента алгебры (A,μ) можно эффективно, с помощью функции g, вычислить некоторый ν-номер φ-образа этого элемента. Далее под гомоморфизмами нумерованных алгебр мы понимаем их морфизмы, т. е. мы работаем в категории нумерованных алгебр с морфизмами в качестве эффективных на номерах гомоморфизмов, что совершенно естественно с точки зрения дескриптивной теории вычислимости.

Определение 1.1. Нумерованная алгебра с вычислимым (перечислимым, коперечислимым) ядром называется *вычислимой* (*позитивной*, *негативной*).

Алгебра называется *вычислимо* (*позитивно*, *негативно*) *представимой*, если существует ее вычислимая (позитивная, негативная) нумерация. Согласно определению 1.1 вычислимая представимость алгебры равносильна либо ее конечности, либо ее изоморфности алгебре вида $\langle\omega; F\rangle$, где ω — множество натуральных чисел, а F — подходящее эффективно задаваемое семейство вычислимых функций. Для позитивных (негативных) нумерованных алгебр возникают их фактор-алгебры по соответствующим ядру нумерации конгруэнциям, и в этих случаях исходную алгебру, вообще говоря, уже нельзя свести к представлению, изоморфному алгебре вида $\langle\omega; F\rangle$.

Замечание 1.1. Далее в тексте, когда это не вызывает недоразумений, мы часто будем пользоваться существительными «представление» и «реализация» как синонимами понятия «нумерация». В особенности это касается последнего раздела, т. к. более употребимое в теоретической информатике понятие алгоритмической реализации с математической точки зрения равносильно понятию представления (или нумерации). Это связано с тем, что в рамках информатики функция обычно трактуется интенсионально (т. е. как процесс, заданный алгоритмом или программой в некотором формальном языке), а с точки зрения математики — функция задается экстенсионально (если f — функция, то она полностью определена своим графиком, т. е. множеством упорядоченных пар $\{\langle\overline{x}, f(\overline{x})\rangle\}$). Однако именно теория вычислимости объединяет в себе два подхода к фундаментальному понятию отображения, поскольку нумерации (алгоритмические представления) задаются соответствующими алгоритмами (интенсиональность), являясь одновременно актуально бесконечными объектами, воспринимаемыми наблюдателем как нечто целостное и априори заданное (экстенсиональность). Эта двойственность будет присутствовать во всех наших построениях. При этом мы не рассматриваем реализации с точки зрения их «практической эффективности» (хотя это крайне важная задача, она не входит в круг вопросов, изучаемых в предлагаемой статье), т. к. находимся в рамках дескриптивной теории алгоритмов, интересующейся принципиальными вопросами существования алгоритмов или их отсутствием, игнорируя при этом количественные характеристики «времени» и «памяти», необходимые для решения задачи.

Пусть (M,ν) — нумерованное множество. Подмножество $\alpha\subseteq\omega$ называется *ν-замкнутым*, если оно является объединением подходящих смежных $ker(\nu)$-классов, т. е. $(x\in\alpha\wedge\nu x=\nu y)\to y\in\alpha)$.

Если $(A,\mu),(B,\nu)$ — две нумерованные алгебры, то будем говорить, что (A,μ) *сводится* к (B,ν) (в обозначениях $(A,\mu)\trianglelefteq(B,\nu)$), если существует такой изоморфизм $\varphi: A\to B$, который поддерживается подходящей вычислимой функцией f на номерах, т. е. $\varphi\mu=\nu f$. Заметим, что из сводимости $(A,\mu)\trianglelefteq(B,\nu)$ вовсе не следует $(B,\nu)\trianglelefteq(A,\mu)$, т. к. обратный изоморфизм может и не поддерживаться на номерах вычислимой функцией (см., например, [42]). Множество всех нумераций фиксированной алгебры разбивается на классы эквивалентности $\approx$ (получающемуся эквивалентным замыканием предпорядка, индуцированного $\trianglelefteq$).

Алгебра A называется *вычислимо* (*позитивно*, *негативно*) *устойчивой*, если для любой пары ее вычислимых (позитивных, негативных) нумераций μ,ν имеет место $(A,\mu)\approx(A,\nu)$.

Это определение является эффективным аналогом понятия единственности (с точностью до вычислимого изоморфизма) алгоритмического представления алгебры.

Например, нетрудно заметить, что всякая конечно порожденная алгебра позитивно устойчива.

Все приведенные выше определения естественным образом обобщаются для алгебраических систем (далее, для краткости, — моделей). Так, нумерованная модель (M,μ) эффективной сигнатуры Σ называется *вычислимой* (*позитивной*, *негативной*), если ее функциональное обеднение (т. е. сужение сигнатуры $\Sigma=\Sigma_F\cup\Sigma_P$ до функциональной части Σ_F) является таковым же и для всякого отношения $p\in\Sigma_P$ множество μ-номеров этого отношения (т. е. $\{\overline{x}|\mu\overline{x}\in p\}$), причем соответствующий алгоритм строится равномерно эффективно по имени (номеру) предикатного символа p.

Напомним (см. [4,55,57,58]), что Σ^0_1 — класс перечислимых множеств в арифметической иерархии (проекции множеств, получающиеся путем навешивания кванторов существования на некоторые аргументы вычислимых отношений), а Π^0_1 — класс коперечислимых множеств, являющихся дополнениями Σ^0_1-множеств. Их пересечение есть в точности класс вычислимых множеств Δ^0_1. Далее, исходя из непустоты разностей как $\Sigma^0_1\diagdown\Pi^0_1$, так и $\Pi^0_1\diagdown\Sigma^0_1$, строится иерархия, относительно определимости в которой полезно следующее весьма общее определение.

Определение 1.2. Пусть η — эквивалентность на ω. Алгебраическая система M называется *Δ^0_n-определимой* над эквивалентностью η на ω (*Σ^0_n-определимой* над η, *Π^0_n-определимой* над η), если существует такая ее нумерация, в которой все основные отношения являются Δ^0_n-множествами (Σ^0_n-множествами, Π^0_n-множествами, соответственно).

Заметим, что в данном определении алгоритмическая сложность эквивалентности η может быть какой угодно.

Каждому нумерованному множеству (M, μ) естественным образом сопоставляется два топологических пространства, первое из которых определяется базой, состоящей из μ-замкнутых вычислимых подмножеств ω, а второе порождается μ-замкнутыми перечислимыми подмножествами. Заметим, что всякий гомоморфизм нумерованных алгебр непрерывен относительно обеих этих топологий, т. к. прообразы вполне вычислимых (вполне перечислимых) подмножеств являются таковыми же. Более того, все операции любой нумерованной алгебры, представляемые подходящими вычислимыми функциями в данной нумерации, также непрерывны относительно обеих топологий, причем этот факт не зависит от алгоритмической сложности сигнатуры алгебры (см. [46]). Для фиксированной нумерации ν будем называть первое их этих пространств *ν-вычислимым* и обозначать его через $\tau_{comp}(\nu)$, а второе — *ν-перечислимым* (в обозначениях $\tau(\nu)$). Очевидно, что вообще говоря, $\tau(\nu)$-топология сильнее $\tau_{comp}(\nu)$-топологии (т. к. всякое вычислимое множество перечислимо) и, как было отмечено выше, перечислимая топология более фундаментальна с точки зрения абстрактной вычислимости.

Определение 1.3. Нумерованная алгебра (A, ν) называется *вычислимо отделимой*, если всякая пара различных ее элементов отделяется подходящим ν-вычислимым множеством.

Очевидно, что данный вид отделимости определяется базой открыто-замкнутых множеств, т. к. дополнения вычислимых множеств также вычислимы.

Определение 1.4. Нумерованная алгебра (A, ν) называется *отделимой*, если всякая пара различных ее элементов отделяется подходящим ν-перечислимым множеством.

Таким образом, отделимость для алгебры, заданной алгоритмическим представлением, мы отождествляем с наличием семейства перечисляющих алгоритмов (или, двойственно (см. замечание 1.1), множеств, перечисляемых этими алгоритмами), отделяющих все пары различных элементов данной алгебры.

Этот, более общий, вид отделимости соответственно и задается более сложной топологией. Например, рассмотрим двухэлементное множество $M = \{a, b\}$ и его нумерацию ν, которая отображает перечислимое невычислимое множество α в a и $\omega \setminus \alpha$ в b. Имеем T_0-отделимое пространство, гомеоморфное связному двоеточию. При вычислимом α все четыре подмножества двухэлементного множества $M = \{a, b\}$ будут открыты.

Максимальная разница в силах топологий, определенных вычислимо отделимыми и отделимыми нумерациями, наблюдается в следующем случае.

Пусть η — совершенная эквивалентность, т. е. позитивная эквивалентность с бесконечным числом смежных классов, единственными η-замкнутыми вычислимыми множествами для которой являются $\varnothing$ и ω (массу примеров таких эквивалентностей можно найти в Ю. Л. Ершов [4]). Тогда вычислимая топология на фактор-множестве ω/η есть пространство слипшихся точек, а перечислимая топология — дискретна.

2. Отделимые алгоритмические представления универсальных алгебр

В этом разделе будут рассмотрены наиболее общие алгоритмические, структурные и, частично, топологические свойства универсальных алгебр.

2.1. Вычислимо отделимые представления. Из результатов обзорной работы [25] вытекает важность негативных нумераций и негативных алгебр с точки зрения теории вычислимо отделимых нумерованных алгебр. Негативные модели играют аналогичную роль в характеризации вычислимо отделимых нумерованных моделей. Кроме того, понятие негативной модели является алгоритмически «двойственным» одному из важнейших понятий теории вычислимых моделей и теории абстрактных типов данных — понятию позитивной модели. Наконец, негативные нумерации и негативные модели сами по себе являются весьма естественными объектами. В данном подразделе дается характеризация вычислимо отделимых нумерованных моделей в терминах их гомоморфизмов на негативные модели. Следующая теорема показывает, что негативные модели являются важными (и неочевидными) примерами вычислимо отделимых моделей.

Теорема 2.1. *Нумерованная алгебра вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами.*

Доказательство см. в [17].

Оказалось, что эту теорему можно обобщить и для моделей.

Если (A, ν) — нумерованная система, то n-местное отношение P на множестве A (т. е. $P \subseteq A^n$) называется *ν-вычислимым* (*ν-перечислимым*), если вычислим (перечислим) полный ν-прообраз этого отношения, т. е. множество $\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle | \langle \nu x_1, \ldots, \nu x_n\rangle \in P\}$.

Определение 2.1. Нумерованная алгебраическая система (A, ν) называется *вычислимо отделимой* (*отделимой*), если всякая точка ложности любого основного отношения этой модели имеет ν-вычислимую (ν-перечислимую) окрестность, не пересекающуюся с областью истинности данного отношения.

Напомним, что алгебраические системы, для краткости, мы называем моделями.

Предложение 2.1. *Нумерованная модель является вычислимо отделимой тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными моделями.*

Доказательство см. в [34].

Теорема 2.1 и предложение 2.1 подчеркивают исключительную роль негативных моделей с точки зрения структурной теории вычислимо отделимых нумерованных моделей.

Приведем некоторые следствия теоремы 2.1.

Назовем эквивалентность на ω *эффективно бесконечной*, если существует инъективная вычислимая функция, значения которой на различных аргументах попарно различны по модулю этой эквивалентности. Соответственно, нумерация эффективно бесконечна, если таково ее ядро. Эквивалентность (нумерацию) с бесконечным числом смежных классов, не являющуюся эффективно бесконечной, будем называть *неэффективно бесконечной*.

Фундаментальным понятием теории алгоритмов является понятие иммунного множества, которое можно назвать конечным с точки зрения возможности алгоритмического отслеживания его эффективных подмножеств: множество называется *иммунным*, если всякое его собственное перечислимое подмножество конечно (см. [55, 57, 58]). Усилением свойства иммунности является гипериммунность — такое свойство множества α, которое не позволяет отслеживать элементы α даже при наличии столь мощного инструмента, как перечислимая по каноническим индексам (т. е. имея алгоритм мы имеем в явном виде все конечное множество) последовательность попарно непересекающихся конечных множеств, в каждом из которых содержится элемент из α (см. также [55, 57, 58]). Очевидно, что из гипериммунности следует иммунность (иначе для бесконечного неиммунного множества можно было бы выделить его бесконечное перечислимое подмножество и для него определить упомянутую выше прослеживающую последовательность конечных множеств). Обратное неверно (см. [55, 57]).

Пусть (A, ν) — неэффективно бесконечная алгебра. Легко заметить, что гипериммунность характеристической трансверсали ее ядра $tr(ker(\nu))$ влечет неэффективную бесконечность ν, которой, в свою очередь, достаточно для иммунности $tr(ker(\nu))$. Можно показать, что обратные включения не имеют места (см. [25]).

Стандартной нумерацией назовем такую нумерацию алгебры, которая сводится к любой другой. Такие нумерации существуют, например, для конечно-порожденных алгебр конечных сигнатур (см. также [25]). Поэтому, говоря об алгоритмическом свойстве алгебры безотносительно нумерации, имеется в виду именно стандартная нумерация, являющаяся наименьшей в классе эквивалентных относительно упомянутой выше алгоритмической сводимости нумераций.

Следствие 2.1. *Стандартная нумерация конечно порожденной финитно аппроксимируемой алгебры является вычислимо отделимой.*

Следствие 2.2. *Неэффективно бесконечная конечно порожденная алгебра вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она финитно аппроксимируема.*

Предложение 2.2. *Характеристическая трансверсаль негативной (позитивной) эквивалентности перечислима (соответственно, коперечислима).*

Доказательство. Пусть η — негативная эквивалентность на ω. Тогда $x \in tr(\eta) \Leftrightarrow \forall z(z < x \Rightarrow (x \neq z \pmod{\eta}))$. В силу перечислимости правой части указанной равносильности $tr(\eta)$ перечислима.

Если же η позитивна, то $x \notin tr(\eta) \Leftrightarrow \exists z(z < x \wedge z = x \pmod{\eta}))$. Из очевидной перечислимости правой части равносильности следует перечислимость $\omega \diagdown tr(\eta)$, т. е. коперечислимость $tr(\eta)$. □

Следствие 2.3. *Всякая бесконечная вычислимо отделимая алгебра, конечно определенная в конечно базируемом многообразии, является эффективно бесконечной.*

Доказательство. В самом деле, если бы стандартная нумерация (существование которой в данном случае очевидно) такой алгебры была бы неэффективно бесконечной, то, в силу ее аппроксимируемости негативными алгебрами по теореме 2.1, а также наличия семейства конечных аппроксимирующих алгебр (в силу следствия 2.2), проблема равенства слов в ней была бы коперечислимой, т. е. она была бы негативной (даже вычислимой), что невозможно, т. к. характеристическая трансверсаль любой негативной нумерации согласно предложению 2.2 перечислима. □

Предложение 2.3. *Существует конечно порожденная алгебра, стандартная нумерация которой вычислимо отделима, неэффективно бесконечна и позитивна.*

Доказательство см. в [8].

Следствие 2.4. *Существует конечно порожденная позитивная алгебра, всякое позитивно представимое обогащение которой является финитно аппроксимируемым.*

Это следствие дает пример приложения теории вычислимо отделимых алгебр к теоретической информатике, т. к. оно решает проблему, сформулированную в [63,64,67] о существовании неявных эквациональных спецификаций для моделей данных (подробнее см. в последнем разделе).

Ряд других неожиданных результатов теории вычислимо отделимых алгебр можно найти в упомянутом обзоре [25].

2.2. Негативные аппроксимации. Нумерация ν семейства перечислимых множеств S называется *вычислимой*, если перечислимым является множество $\{\langle x, y\rangle \mid y \in \nu x\}$. Если (M, ν) — нумерованное множество, то подмножество $M_0 \subseteq M$ называется *ν-перечислимым* (*ν-вычислимым*), если перечислимым (вычислимым) является множество $\{x \mid \nu x \in M_0\}$ всех ν-номеров элементов множества M_0. Как отмечалось выше, будем использовать термины перечислимый (вычислимый), имея в виду фиксированную нумерацию ν, если из контекста будет ясно, о чем идет речь. Последовательность $A_0, A_1, \ldots$ перечислимых множеств называется *вычислимой*, если перечислимым является множество $\{\langle x, y\rangle \mid y \in A_x\}$. Эквивалентность η называется *эффективно отделимой*, если для нее существует вычислимая последовательность η-замкнутых перечислимых отделяющих множеств. Аналогично, нумерация называется *эффективно отделимой*, если таковой является ее нумерационная эквивалентность.

Замечание 2.1. Поскольку одним из центральных понятий работы является понятие вычислимой (в смысле Ю. Л. Ершова) нумерации (т. е. вычислимой нумерации семейства вычислимо перечислимых множеств), то мы будем, по мере возможности, избегать чересчур частого применения прилагательного «вычислимый», предпочитая использовать эквивалентные ему прилагательные, понятные из контекста. Ранее в русскоязычной (и не только) литературе использовался вполне устоявшийся термин «рекурсивный» как синоним нынешнего «вычислимый». Мы принимаем компромиссное терминологическое решение. Например, словосочетание «вычислимая нумерация вычислимого семейства вычислимых множеств» в нашей интерпретации будет звучать приблизительно как «вычислимая нумерация эффективного семейства разрешимых множеств». Точно так же, вместо ныне общепринятого термина «вычислимо перечислимый» часто будем употреблять его сокращение «перечислимый», что позволит избежать терминологических недоразумений и режущих слух выражений.

Определение 2.2. Нумерация ν семейства вычислимых множеств $\Re$ называется *вполне вычислимой*, если вычислимым является множество $\{\langle x, y\rangle \mid y \in \nu x\}$.

Эквивалентность η назовем *вполне отделимой*, если для нее существует перечислимая по индексам характеристических функций последовательность $R_0, R_1, \dots$ вычислимых отделяющих множеств. Неформально, вычислимость нумерации семейства перечислимых множеств равносильна наличию эффективной процедуры, которая по номеру вычислимо перечислимого множества перечисляет элементы данного множества. Вполне вычислимость же означает существование алгоритма, который по номеру вычислимого множества «выдает» алгоритм разрешения этого множества. Таким образом, если вычислимость подразумевает возможность перечисления семейства по вычислимо перечислимым индексам, то вполне вычислимость означает перечислимость данного семейства по индексам характеристических функций его элементов. В частности, если семейство перечислимых множеств содержит хотя бы одно невычислимое множество, то для него заведомо бессмысленна постановка вопроса о существовании вполне вычислимой нумерации.

Одним из центральных результатов для эффективно отделимых нумераций является следующий (Ю. Л. Ершов, [4, гл. 1, §3, предложение 8, с. 60]):

Теорема 2.2. *Эквивалентность эффективно отделима тогда и только тогда, когда она является нумерационной эквивалентностью вычислимой нумерации подходящего семейства вычислимо перечислимых множеств.*

При этом нумерационные эквивалентности вычислимых нумераций не имеют четкой характеризации в арифметической иерархии Клини—Мостовского. Так, пусть E_0 — класс эффективно отделимых эквивалентностей на ω. Тогда E_0 содержит позитивные (из класса Σ^0_1) и негативные (из класса Π^0_1) эквивалентности и $E_0 \subset \Pi^2_0$. Однако для $\Delta^2_0 = \Sigma^2_0 \bigcap \Pi^2_0$ имеет место как $\Delta^2_0 \setminus E_0 \neq \varnothing$, так и $E_0 \setminus \Delta^2_0 \neq \varnothing$. Следующая теорема показывает, что для вполне вычислимых нумераций их нумерационные эквивалентности в точности совпадают с классом негативных эквивалентностей.

Предложение 2.4. *Для произвольной эквивалентности η на ω следующие условия равносильны*:

1. *η — нумерационная эквивалентность подходящей вполне вычислимой нумерации*;
2. *η негативна*;
3. *η вполне отделима.*

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$. Пусть ν — вполне вычислимая нумерация подходящего семейства $\Re$ вычислимых множеств и η — нумерационная эквивалентность нумерации ν. Тогда $x \neq y \pmod{\eta} \leftrightarrow \exists m(m \in \nu x \setminus \nu y \vee m \in \nu y \setminus \nu x)$, где правая часть соотношения перечислима в силу равномерной вычислимости отношения $p \in \nu q$ по p, q.

$2 \Rightarrow 3$. Пусть η — негативная эквивалентность. Еще А. И. Мальцевым в [52] отмечалась вычислимая отделимость любых двух различных η-классов негативной эквивалентности. В действительности, как показано в [17], отделяющие множества можно выбирать среди η-замкнутых, причем процедура предоставления характеристического индекса соответствующего множества равномерно зависит от пар чисел, различных по модулю η. Поэтому вычислимо перечислимое множество пар чисел, различных по модулю η, определяет вполне вычислимую последовательность η-замкнутых вычислимых отделяющих множеств.

$3 \Rightarrow 2$. Пусть $R_0, R_1, \dots$ — вполне отделяющая последовательность для η. Построим нумерацию ν некоторого семейства вычислимых множеств, определенную следующим образом: $\nu x = \{n \mid x \in R_n\}$. Очевидно, что ν — вполне вычислимая нумерация. Покажем, что нумерационная эквивалентность этой нумерации есть η. В самом деле, если $x = y \pmod{\eta}$, то, в силу η-замкнутости всех множеств из отделяющей последовательности, каждое множество, содержащее $x(y)$, одновременно содержит и y (соответственно x), т. е. $\nu x = \nu y$. Если же $x \neq y \pmod{\eta}$, то для них найдется отделяющий член последовательности, скажем, $x \in R_n$ и $y \notin R_n$, поэтому объекты, нумеруемые числами x и y, являются различными, т. к. $n \in \nu x$ и $n \notin \nu y$. □

Напомним, что алгебра называется *определимой* над эквивалентностью η на ω, если существует нумерация этой алгебры с нумерационной эквивалентностью в качестве η. Отметим, что в современной теории вычислимых структур вычислимость семейства F представляющих функций, согласованных с эквивалентностью η, вообще говоря, не требуется, однако, для большинства приводимых ниже результатов это условие необходимо. Как обычно, в рамках понятий универсальной алгебры, из согласованности всех F-операций с эквивалентностью η (или, что равносильно, из того, что эквивалентность η есть конгруэнция вычислимой алгебры $\langle\omega; F\rangle$) следует корректная определенность фактор-алгебры $\langle\omega/\eta; F\rangle$, т. к. действия F-операций на фактор-множестве ω/η определены однозначно. Это позволяет обосновать запись $\langle\omega/\eta; F\rangle$. Уместно отметить, что вычислимые алгебры вида $\langle\omega; F\rangle$, где F — произвольное (не обязательно вычислимое) семейство вычислимых функций, играют в теории вычислимых структур роль «абсолютно свободных» объектов, т. к. образуют тот исходный материал, из которого строится любая нумерованная алгебра путем подходящей факторизации. Поскольку всякая не более чем счетная алгебра эффективной сигнатуры имеет нумерацию, то всякая такая алгебра определима над некоторой эквивалентностью на ω. Всюду далее в тексте, говоря о нумерованных алгебрах, будем подразумевать, что эти алгебры содержат более одного элемента, т. к. иначе возникает вырожденная ситуация, которую всегда нужно будет оговаривать. Известно, что существуют нетривиальные позитивные эквивалентности, над которыми определимы только тривиальные алгебры в следующем смысле. Очевидно, что функции-константы и проектирующие функции (и только они) согласованы с любой эквивалентностью. Существует позитивная эквивалентность с бесконечным числом смежных классов, по модулю которой всякая согласованная с этой эквивалентностью вычислимая функция действует либо как константа, либо как проектирующая. Пример такой эквивалентности можно найти в (Ю. Л. Ершов, [4, гл. 3, §6, с. 296–299]). Для негативных эквивалентностей ситуация диаметрально противоположная, как показывает

Следствие 2.5. *Над всякой негативной эквивалентностью определима конгруэнц-простая алгебра.*

Доказательство. Если η — эквивалентность на ω и $\alpha \subseteq \omega$, то *η-замыканием* α называется наименьшее η-замкнутое расширение множества α (в обозначениях $[\alpha]_\eta$). Будем говорить, что число z *η-отвергается* множеством α, если $z \notin [\alpha]_\eta$. Нетрудно заметить, что отношение «z отвергается γ_x» — перечислимое отношение для любой негативной эквивалентности η, равномерно зависящее от z, x (здесь γ — каноническая нумерация семейства всех конечных подмножеств ω). Если ясно, о какой эквивалентности идет речь, то будем говорить, что z отвергается α, без явного указания η. Пусть η — негативная эквивалентность. Выше было отмечено, что $tr(\eta)$ перечислима. Если характеристическая трансверсаль $tr(\eta)$ конечна, то доказывать нечего. В противном случае зафиксируем некоторое разнозначное вычислимое перечисление бесконечной характеристической трансверсали $tr(\eta) = \{t_0, t_1, \dots\}$.

Покажем, что для любой пары $x \neq y \pmod{\eta}$ существует η-замкнутое разрешимое множество, отделяющее x, y, и, более того, это множество равномерно строится по данным x, y (более подробно об алгоритмах отвержения см. в [24, 25]). Шаг 0. $A_x^0 = \{x\}, A_y^0 = \{y\}$. Шаг $s+1$. Пусть z — наименьшее натуральное число, не принадлежащее $A_x^s \cup A_y^s$. Проверяем z на предмет его отвержения хотя бы одним из множеств A_x^s, A_y^s. Если z отвергается A_x^s, то полагаем $A_x^{s+1} = A_x^s, A_y^{s+1} = A_y^s \cup \{z\}$; если x отвергается A_y^s, то $A_x^{s+1} = A_x^s \cup \{z\}, A_y^{s+1} = A_y^s$. Если z отвергается обоими множествами, то относим его к A_x^{s+1}. Конец шага $s+1$. Определим

$$A_x = \bigcup_{s\in\omega} A_x^s, A_y = \bigcup_{s\in\omega} A_y^s.$$

Индукцией по шагам построения легко показать, что каждый шаг заканчивается с отнесением текущего тестируемого натурального числа к одному из двух множеств, а также тот факт, что $[A_x^s]_\eta \cap [A_y^s]_\eta = \varnothing$ для любого шага s. Поэтому перечислимые A_x, A_y не пересекаются, являются η-замкнутыми и их объединение покрывает все ω. Равномерная зависимость индексов характеристических функций A_x, A_y от x, y очевидна. Теперь для каждой пары $\langle x, y\rangle$ различных по модулю η чисел построим вычислимое семейство операций $F_{x,y} = \{f_{x,y,m,n} | m, n \in \omega\}$ следующим образом:

$$z \in A_x \Rightarrow f_{x,y,m,n}(z) = t_m; z \in A_y \Rightarrow f_{x,y,m,n}(z) = t_n,$$

где $t_m, t_n \in tr(\eta), m \neq n$. Наконец, определим вычислимое семейство операций

$$F = \bigcup_{x\neq y \pmod{\eta}} F_{x,y}.$$

Очевидно, что любая операция $f \in F$ согласована с η, т. е. $x = y \pmod \eta \Rightarrow f(x) = f(y) \pmod \eta$ и потому корректно определена фактор-алгебра $\langle \omega/\eta; F\rangle$ вычислимой алгебры $\langle \omega; F\rangle$ по конгруэнции η. Так как для любой пары различных по модулю η чисел x, y и любых различных $t_m, t_n \in tr(\eta)$ найдется операция из F, переводящая x в t_m и y в t_n, то алгебра $\langle \omega/\eta; F\rangle$ проста. □

Определение 2.3. Эквивалентность η называется *равномерно вычислимо отделимой*, если существует частичная вычислимая функция, значение которой определено на каждой паре чисел, различных по модулю этой эквивалентности, и равно характеристическому индексу η-замкнутого вычислимого множества, отделяющего одно из этих чисел от другого.

Предложение 2.4 позволяет давать более прямые и краткие описания важных свойств негативных эквивалентностей. Например, имеет место

Следствие 2.6. *Эквивалентность негативна тогда и только тогда, тогда она является равномерно вычислимо отделимой эквивалентностью с перечислимой характеристической трансверсалью.*

Доказательство. Конструкцию опишем с умеренной степенью детализации.

Если эквивалентность η негативна, то, по предложению 2.4, она вполне отделима, т. е. для нее существует перечислимая по характеристическим индексам последовательность $R_0, R_1, \ldots$ η-замкнутых вычислимых отделяющих множеств. Тогда частичная вычислимая функция f, определенная следующим образом: $f(x,y) = \mu n((x \in R_n \wedge y \notin R_n) \vee (y \in R_n \wedge x \notin R_n))$, где μ — оператор минимизации, определена на каждой паре чисел x, y, различных по модулю η, и «выдает» в качестве значения некоторый номер множества, отделяющего x и y. Вычислимая перечислимость характеристической трансверсали негативной эквивалентности очевидна.

Обратно, пусть η — равномерно вычислимо отделимая эквивалентность с перечислимой характеристической трансверсалью $tr(\eta)$, $t_0, t_1, \ldots$ — фиксированный эффективный пересчет множества $tr(\eta)$, f — функция из определения равномерно вычислимой отделимости, а χ_m обозначает функцию с характеристическим индексом m.

Тогда $\neg(x\eta y) \Leftrightarrow \exists a, b(a, b \in tr(\eta) \wedge a \neq b \wedge (\chi_{f(a,b)}(x)$ и $\chi_{f(a,b)}(y)$ определены и различны)). Отсюда следует перечислимость дополнения η. □

2.3. Отделимые представления и эффективно отделимые аппроксимации. Мы условились называть нумерованную алгебру *отделимой* (*эффективно отделимой*), если таковой является ее нумерационная эквивалентность, и понимать под гомоморфизмами нумерованных алгебр обычные гомоморфизмы, одновременно являющиеся морфизмами соответствующих нумерованных множеств. Напомним, что для нумерованной алгебры (A, ν) все операции алгебры A, представленные вычислимыми операциями в нумерации ν (точнее, их действиями, индуцированными на классах нумерационной эквивалентности), являются непрерывными как в ν-перечислимо порожденном, так и в ν-вычислимо порожденном пространствах. Следующий факт позволяет свести изучение отделимых нумераций алгебр к вычислимым (в смысле Ю. Л. Ершова, т. е. к эффективно отделимым) нумерациям.

Теорема 2.3. *Нумерованная алгебра отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется эффективно отделимыми алгебрами.*

Доказательство. Приведем набросок доказательства. Пусть (A, ν) — нумерованная алгебра эффективной сигнатуры Σ и ν — отделимая нумерация. Обогатим сигнатуру Σ счетным множеством констант $C = \{c_n \mid n \in \omega\}$, не пересекающимся с Σ, интерпретируя константу c_n в элемент νn алгебры A. *Переменной* будем называть любой элемент множества $X = \{x_n \mid n \in \omega\}$, не пересекающегося с $\Sigma \cup C$.

Следуя А. И. Мальцеву [51], *трансляцией* $t(x)$ назовем любой терм от одной переменной x, который можно получить из подходящего терма путем замены части переменных некоторыми константами и отождествления всех оставшихся переменных с буквой x. Таким образом, всякая трансляция алгебры A задает на ней одноместную операцию, однозначно определенную интерпретациями всех символов обогащенной сигнатуры. Множество всех трансляций будем обозначать через $T(x)$.

ν-Интерпретацией трансляции $t(x)$ в нумерации ν алгебры A назовем одноместную функцию $t_\nu(x)$, получаемую из $t(x)$ подстановкой вместо всех Σ-символов соответствующих вычислимых функций и натуральных чисел (для Σ-констант), представляющих операции алгебры A в нумерации ν. Таким образом, каждая ν-трансляция определяет одноместную вычислимую функцию, представляющую соответствующую трансляцию алгебры A. Множество ν-интерпретаций всех трансляций из $T(x)$ обозначим через $T_\nu(x)$.

Хорошо известно (см. [51]), что отношение эквивалентности на основном множестве алгебры является ее конгруэнцией тогда и только тогда, когда она согласована со всеми трансляциями данной алгебры.

Легко проверить, что в силу эффективности сигнатуры Σ и перечислимости $T(x)$ множество $T_\nu(x)$ вычислимо, т. е. существует эффективная процедура, равномерно трансформирующая номер ν-трансляции в способ вычисления соответствующей вычислимой функции. Более формально, в качестве нумерации соответствующего семейства вычислимых функций удобно принять нумерацию этого семейства синтаксическими выражениями из $T(x)$, т. к. существует очевидное эффективное соответствие между трансляциями и ν-трансляциями. С использованием стандартных λ-обозначений Черча множество вычислимых ν-трансляций можно записать как $T_\nu(x) = \{\lambda.t_\nu(x) \mid t(x) \in T(x)\}$, где все символы в $t(x)$, за исключением переменной x, представлены интерпретациями сигнатурных символов в нумерации ν. Вполне очевидна вычислимость этого семейства, поэтому мы не будем вдаваться в детали построения конкретной вычислимой геделевской нумерации $\gamma : \omega \to T_\nu(x)$.

Пусть A_0, A_1 — разбиение основного множества алгебры A на две непустые непересекающиеся части и $\Theta(A)$ — решетка всех конгруэнций этой алгебры. Рассмотрим множество (A_0, A_1) всех тех конгруэнций алгебры A, никакая из которых не отождествляет никакой элемент из A_0 ни с каким элементом из A_1, т. е.

$$\Theta(A_0, A_1) = \{\theta \mid \theta \in \Theta(A) \wedge x = y \pmod{\theta} \to ((x \in A_0 \wedge y \in A_0) \vee (x \in A_1 \wedge y \in A_1))\}.$$

Следующий простой факт представляет самостоятельный интерес.

Лемма 2.1. *В (A_0, A_1) существует наибольший элемент.*

Используем лемму 2.1 следующим образом.

Пусть $\nu m \neq \nu n$. Из отделимости ν следует существование η-замкнутого вычислимо перечислимого множества α (где η обозначает нумерационную эквивалентность нумерации ν), отделяющего эти элементы. Пусть, для определенности, $m \in \alpha$ и $n \notin \alpha$. Положим $A_0 = \nu\alpha$ и $A_1 = \nu(\omega\setminus\alpha)$, тогда множества A_0, A_1 образуют разбиение основного множества алгебры A на две дизъюнктные части. По предыдущей лемме существует наибольшая конгруэнция θ, не «склеивающая» никакой элемент из A_0 ни с каким элементом из A_1. Очевидно, $\nu m \neq \nu n \pmod{\theta}$. Поскольку θ — наибольшая конгруэнция, различающая элементы $\nu m, \nu n$ алгебры A, то всякая ненулевая конгруэнция фактор-алгебры A/θ содержит пару элементов $\langle \nu m/\theta, \nu n/\theta\rangle$. Рассмотрим нумерованную фактор-алгебру $(A/\theta, \nu^*)$ нумерованной алгебры (A, ν), где ν^* обозначает естественную нумерацию фактор-алгебры, индуцированную нумерацией ν, т. е. $\nu^* = \theta\nu$.

Лемма 2.2. *Нумерованная алгебра $(A/\theta, \nu^*)$ эффективно отделима.*

Доказательство. Заметим, что алгебра A/θ подпрямо неразложима, т. к. пересечение всех ее ненулевых конгруэнций содержит пару $\langle m/\theta, \nu n/\theta\rangle$. В частности, любая главная конгруэнция алгебры A/θ (т. е. порожденная парой различных ее элементов) также содержит эту пару. Следовательно, для любой пары различных элементов $\nu^* p, \nu^* q$ алгебры A/θ найдется ν-трансляция $t^*(x)$, переводящая номера одного из этих элементов в α, а другого — в $\omega \setminus \alpha$, т. е. $t^*(p) \in \alpha \wedge t^*(q) \notin \alpha$ либо $t^*(q) \in \alpha \wedge t^*(p) \notin \alpha$. В противном случае существовала бы собственная конгруэнция алгебры A/θ, различающая элементы $\nu m/\theta, \nu n/\theta$, что невозможно.

Обозначим t^*-прообраз множества α через $t^{*-1}(\alpha)$, т. е. $t^{*-1}(\alpha) = \{x \mid t^*(x) \in \alpha\}$. Ясно, что множество $t^{*-1}(\alpha)$ вычислимо перечислимо как вычислимый t^*-прообраз вычислимо перечислимого множества α. Если, далее, через η^* обозначить нумерационную эквивалентность нумерации ν^*, то $t^{*-1}(\alpha)$ является η^*-замкнутым.

Пусть $t_0, t_1, \ldots,$ — вычислимая последовательность всех ν-трансляций. Рассмотрим последовательность множеств $t_0^{-1}(\alpha), t_1^{-1}(\alpha), \ldots$. Тогда эта последовательность, очевидно, вычислима и, с учетом вышесказанного, является отделяющей для нумерации ν^*. □

Следовательно, для любой пары различных элементов алгебры (A, ν) найдется эффективный на номерах гомоморфизм из этой алгебры на подходящую эффективно отделимую алгебру, различающий эти элементы. Обратная импликация в формулировке теоремы очевидна. □

Согласно теореме 2.1 нумерованная алгебра вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами.

Таким образом, роль и место эффективно отделимых алгебр в классе отделимых родственна роли и месту негативных алгебр в классе рекурсивно отделимых. При этом, как показывает теорема 2.3, наиболее общая концепция отделимости, определяемая теоремой Ю. Л. Ершова о вычислимых нумерациях, дает готовый математический аппарат для развития структурной теории отделимых алгебр.

Следствие 2.7. *Отделимая нумерация подпрямо неразложимой алгебры эффективно отделима.*

Доказательство. Пусть алгебра A подпрямо неразложима и пара $\langle a, b\rangle$ различных ее элементов содержится в любой ненулевой конгруэнции этой алгебры. Допустим, что $\nu : \omega \to A$ — отделимая нумерация алгебры A и $\nu(m) = a$, $\nu(n) = b$. По теореме 2.3 пара $\langle \nu m, \nu n\rangle$ различается в некотором эффективно отделимом гомоморфном образе нумерованной алгебры (A, ν), но A вообще не имеет ненулевых конгруэнций, различающих пару $\langle a, b\rangle$, следовательно, эффективно отделимой конгруэнцией, различающей данную пару, необходимо является нулевая, т. е. ν эффективно отделима. □

Определение 2.4. Неединичная эквивалентность η на ω называется *перечислимо простой* (*вычислимо простой*), если не существует собственных η-замкнутых вычислимо перечислимых (вычислимых) подмножеств множества ω.

Перечислимая простота (вычислимая простота) эквивалентности η означает, что ни для какого ее расширения η_1, являющегося эквивалентностью, не существует собственных η_1-замкнутых перечислимых (вычислимых) подмножеств.

Нумерацию назовем *перечислимо* (*вычислимо*) *простой*, если таково ее ядро.

Напомним, что для эквивалентности η семейство всех η-замкнутых перечислимых (вычислимых) множеств образует базу естественной перечислимой (вычислимой) топологии на множестве ω/η, которую будем называть *эффективно порожденной перечислимой топологией* (соответственно, *вычислимой топологией*).

На языке эффективно порожденных пространств перечислимая простота означает, что соответствующее эффективно порожденное пространство (с естественной нумерацией — каждое число нумерует содержащий его класс эквивалентности) является пространством слипшихся точек. Точно так же, вычислимая простота эквивалентности равносильна тому, что соответствующее вычислимо порожденное пространство антидискретно.

Следствие 2.8. *Неединичная эквивалентность перечислимо проста тогда и только тогда, когда никакая алгебра определимая над ней не обладает эффективно отделимой фактор-алгеброй.*

Доказательство. Пусть эквивалентность η не является перечислимо простой. Тогда существует собственное η-замкнутое перечислимое подмножество α множества ω. Если алгебра A определима над η, то, по лемме 2.1 теоремы 2.3, существует такая наибольшая конгруэнция θ алгебры A, которая «не склеивает» никакой элемент из α/η ни с каким элементом из $(\omega \setminus \alpha)/\eta$, и именно фактор-алгебра A/θ алгебры A является эффективно отделимой, т. к. любая главная (т. е. порожденная парой различных элементов) конгруэнция этой фактор-алгебры такова, что найдется трансляция, переводящая один из элементов пары в α, а другой — в $\omega \setminus \alpha$ и, следовательно, множество всех трансляционных прообразов множества α является вычислимым семейством отделяющих перечислимых множеств для фактор-алгебры A/θ.

Обратно. Если над эквивалентностью η определима алгебра A, обладающая эффективно отделимой нетривиальной фактор-алгеброй, то ядро этого гомоморфизма очевидно обеспечивает свойство «не быть перечислимо простой» для η. $\square$

Следствие 2.9. *Нумерованная простая алгебра эффективно отделима тогда и только тогда, когда она имеет собственное перечислимое подмножество.*

Доказательство. Пусть A — простая алгебра, ν — ее нумерация и α — нетривиальное $ker(\nu)$-замкнутое перечислимое множество. Тогда, так же как и в предыдущем следствии, существует наибольшая конгруэнция θ алгебры A («не склеивающая» никакой элемент из α ни с каким элементом из $\omega \setminus \alpha$), которая эффективно отделима в нумерации $\theta\nu$ ($\theta\nu$ обозначает композицию нумерации и проектирования). Единичная конгруэнция таковой быть не может, следовательно, сама нумерованная алгебра (A,ν) эффективно отделима. Обратное очевидно. $\square$

Следствие 2.10. *Всякая нумерация простой алгебры либо вычислимо проста, либо негативна.*

Доказательство. Пусть ν — не вычислимо простая нумерация простой алгебры A. Тогда существует собственное подмножество $A_0 \subseteq A$ такое, что $\nu^{-1}(A_0)$ вычислимо. Так как алгебра A проста, то для любой пары ее различных элементов a, b найдется такая трансляция $\lambda x.t(x)$, что либо $t(a) \in A_0 \wedge t(b) \notin A_0$, либо $t(a) \notin A_0 \wedge t(b) \in A_0$ (иначе главная конгруэнция, порожденная парой $\langle a, b\rangle$, была бы собственной, т. е. отличной от нулевой и единичной, т. к. она не «склеивала» бы никакой элемент из A_0 ни с каким элементом из $A \setminus A_0$). Остается заметить, что

$$\nu m \neq \nu n \Leftrightarrow \exists t \in T^{\nu}_{\Sigma}[(t(m) \in \nu^{-1}(A_0) \wedge t(n) \notin \nu^{-1}(A_0)) \vee (t(m) \notin \nu^{-1}(A_0) \wedge t(n) \in \nu^{-1}(A_0))],$$

где T^{ν}_{Σ} — вычислимо перечислимое множество всех вычислимых трансляций, представляющих трансляции алгебры A сигнатуры Σ в нумерации ν. $\square$

Подчеркнем, что связки «либо…, либо» в формулировке следствия 2.10 взаимно исключающие. Другими словами, если нумерованная простая алгебра имеет вычислимое нетривиальное (отличное от $\varnothing$ и ω) подмножество, то она негативна.

Пусть A — простая алгебра, $\Lambda_{neg}, \Lambda_{com-spl}, \Lambda_{en-spl}$ — классы негативных, вычислимо простых и перечислимо простых нумераций алгебры A соответственно. Тогда $\Lambda_{neg} \cap \Lambda_{com-spl} = \varnothing$, при этом всякая нумерация алгебры A лежит в $\Lambda_{neg} \cup \Lambda_{com-spl}$ и $\Lambda_{en-spl} \subseteq \Lambda_{com-spl}$. Далее будет показано, что любая алгебра имеет перечислимо простую нумерацию, однако неизвестно, будет ли включение $\Lambda_{en-spl} \subseteq \Lambda_{com-spl}$ собственным в случае конгруэнц-простых алгебр.

Другими словами, вопрос о существовании вычислимо простых, но не перечислимо простых нумерованных конгруэнц-простых алгебр открыт.

Для T_1-отделимо нумерованных подпрямо неразложимых алгебр и алгебр с артиновыми решетками конгруэнций ответ на вопрос «$\Lambda_{com-spl} \diagdown \Lambda_{en-spl} \neq \varnothing$?» — положительный (см. последний подраздел следующего раздела).

Неодноэлементное топологическое пространств называется тривиальным, если открытыми множествами являются только само множество и $\varnothing$.

Следствие 2.11. *Для нумерованной простой алгебры эффективная отделимость перечислимо порожденного топологического пространства равносильна его нетривиальности.*

2.4. Условия конечности. Среди трех основных инструментов исследования в универсальной алгебре — решеток конгруэнций, подалгебр и групп автоморфизмов — особую роль с точки зрения теории нумераций играют решетки конгруэнций. Так, если над эквивалентностью определима конечно порожденная алгебра, то, очевидным образом, над ней определяются алгебры, порожденные любым своим элементом (т. е. с одноэлементными решетками подалгебр). Семейства вычислимых автоморфизмов, играющие фундаментальную роль при изучении абстрактных свойств симметрии позитивных (в особенности вычислимых) систем, в случае произвольных нумерованных алгебр вообще не являются группами (см. [26, 71]). Более того, существуют естественные примеры негативных систем, полугруппы вычислимых автоморфизмов которых не являются группами (см. [42]). Иное дело решетки конгруэнций. Например, всякая алгебра, определимая над неразрешимой позитивной эквивалентностью, имеет весьма богатую решетку конгруэнций (см. [16, 18, 21], впрочем, справедливости ради, следует отметить, что, согласно следствию 2.5, над любой негативной эквивалентностью определимы конгруэнц-простые алгебры). Ниже будет показано, что множество конгруэнций всякой алгебры, имеющей отделимую невычислимую нумерацию, является бесконечным. Как было отмечено выше, нумерационная эквивалентность всякой эффективно отделимой нумерации принадлежит индуктивному классу арифметической иерархии Клини—Мостовского. В то же время, в каждой m-степени присутствует вычислимо отделимая (а значит, и отделимая) эквивалентность (см. [4]). Поскольку класс отделимых нумераций алгебр весьма обширен, то представляется целесообразным изучение подклассов этого класса в предположениях наличия ограничений тех или иных типов на решетки конгруэнций. Свидетельством полезности такого подхода является следующая теорема.

Теорема 2.4. *Всякая отделимая нумерация алгебры с артиновой решеткой конгруэнций является эффективно отделимой.*

Приведем основную идею доказательства, данного в [31]. Пусть решетка конгруэнций алгебры A удовлетворяет условию минимальности и ν — отделимая нумерация этой алгебры. Допустим, что ν не является эффективно отделимой. Покажем, что в этом случае можно построить бесконечно убывающую цепь конгруэнций алгебры A. Зафиксируем любую пару различных элементов a_0, b_0 алгебры A. По теореме 2.3 существует такая конгруэнция $\theta_0(a_0, b_0)$ этой алгебры, различающая элементы a_0 и b_0, что нумерованная фактор-алгебра $(A/\theta_0(a_0, b_0), \nu_0)$, где $\nu_0 = \theta_0\nu$ (θ_0 обозначает естественное проектирование в классы $\theta_0(a_0, b_0)$-эквивалентности) является эффективно отделимой. Ядро гомоморфизма θ_0 — ненулевое, т. к. ν, согласно предположению, не является эффективно отделимой. В силу того, что гомоморфизм θ_0 является собственным, существует пара различных элементов a_1, b_1 алгебры A, которые равны по модулю $\theta_0(a_0, b_0)$. Опять-таки, по теореме 2.3, эти элементы различаются в подходящем эффективно отделимом гомоморфном образе алгебры A по конгруэнции, которую обозначим через $\theta_1(a_1, b_1)$.

Положим $\theta = \theta_0(a_0, b_0) \cap \theta_1(a_1, b_1)$. Очевидно, что θ — конгруэнция, для которой $\theta_0(a_0, b_0)$ является собственным расширением. Рассмотрим нумерованную алгебру $(A/\theta, \theta\nu)$. Легко показать, что пересечение конечного числа эффективно отделимых эквивалентностей на ω является эффективно отделимым и потому нумерованная алгебра $(A/\theta, \theta\nu)$ эффективно отделима, причем $\theta_0(a_0, b_0)$ является строгим расширением θ, т. к. $\langle a_1, b_1\rangle \in \theta_0(a_0, b_0) \setminus \theta_1(a_1, b_1)$.

Далее, повторяем процедуру построения строго меньшей эффективно отделимой конгруэнции, рассматривая в качестве $\eta_0(a_0, b_0)$ конгруэнцию θ. Поскольку на каждом этапе построения получается эффективно отделимая конгруэнция, то, в силу предположения о том, что исходная нумерация не является эффективно отделимой, каждая конгруэнция из этой цепи является ненулевой. Следовательно, решетка конгруэнций алгебры A оказывается неартиновой, что противоречит исходному предположению.

Следствие 2.12. *Нумерация алгебры с артиновой решеткой конгруэнций отделима тогда и только тогда, когда она эффективно отделима.*

Таким образом, отделимые нумерации алгебр с артиновыми решетками конгруэнций являются вычислимыми в смысле Ю. Л. Ершова, т. е. класс таких нумераций содержится в классе вычислимых нумераций семейств перечислимых множеств.

Можно показать, что не над всякой эффективно отделимой эквивалентностью определима алгебра с артиновой решеткой конгруэнций. Действительно, согласно замечанию, сделанному перед следствием 2.5, существует такая позитивная эквивалентность η, что всякая операция любой η-алгебры действует на η-классах либо как константа, либо как проектирующая. Поскольку любое разбиение основного множества такой алгебры допустимо относительно всех операций, то решетка ее конгруэнций неартинова (впрочем, и ненетерова тоже). В силу эффективной отделимости как позитивных, так и негативных эквивалентностей, эквивалентность η дает пример такого вычислимого семейства перечислимых множеств ($\{S | S \subseteq \omega, \exists x(S = x/\eta\}$ с естественной проектирующей нумерацией $\nu(x) = x/\eta$), над ядром которого не определима никакая алгебра со сколь-нибудь разумными условиями конечности для решетки ее конгруэнций.

Отметим однако, что существуют невычислимые позитивные эквивалентности, над которыми определимы алгебры со счетными (даже нетеровыми) решетками конгруэнций. При этом все такие эквивалентности необходимо отделимы (даже вычислимо отделимы, см. [13–15]).

Следствие 2.13. *Отделимая нумерация алгебры с конечным числом конгруэнций является эффективно отделимой.*

Непосредственно вытекает из теоремы 2.4, т. к. если число конгруэнций алгебры конечно, то, очевидно, решетка конгруэнций артинова.

В частности, эффективно отделимой является любая отделимая нумерация конечной алгебры эффективной сигнатуры.

Еще более частным случаем (в случае пустой сигнатуры) является эффективная отделимость отделимой нумерации любого конечного множества.

Следствие 2.14. *Решетка конгруэнций всякой алгебры, обладающей отделимой, но не эффективно отделимой нумерацией, является бесконечной.*

Доказательство. В самом деле, в этом случае решетка конгруэнций не может быть артиновой, а значит, она бесконечна. □

Для алгебр с нетеровыми решетками конгруэнций теорема 2.4 не имеет места. Согласно следствию 2.14 такие алгебры должны быть бесконечными. Простейшей бесконечной алгеброй с нетеровой решеткой конгруэнций является алгебра следования $S = \langle \omega; s \rangle$, где $s(x) = x + 1$. Оказывается, что уже эта алгебра имеет отделимые (даже вычислимо отделимые) нумерации, алгоритмические сложности нумерационных эквивалентностей которых превосходят любую наперед заданную арифметическую сложность, как показывает следующее предложение.

Предложение 2.5. *Алгебра следования S имеет континуум нумераций, ядра которых вычислимо отделимы.*

Доказательство см. в [31].

Следствие 2.15. *Для любого класса арифметической иерархии Клини—Мостовского существует отделимая нумерация алгебры с нетеровой решеткой конгруэнций, алгоритмическая сложность нумерационной эквивалентности которой не принадлежит данному классу.*

В работе [70] доказано, что следующие алгебры имеют невычислимые негативные нумерации:

(а) стандартная модель $\langle \omega; s, +, * \rangle$ арифметики Пеано, где s — функция следования, а $+, *$ имеют естественные интерпретации сложения и умножения на ω (в частности, вычислимой негативной нумерацией обладает стандартная модель арифметики Пресбургера в сигнатуре $\langle s, + \rangle$, а также, что особенно важно, алгебра следования $\langle \omega; s \rangle$, при этом любая позитивная нумерация алгебры следования и, тем более, стандартной модели арифметики Пресбургера и арифметики Пеано является, очевидно, вычислимой);
(б) всякое бесконечное вычислимо представимое поле $\langle F; 0, 1, +, * \rangle$ (заметим, что любое поле есть конгруэнц-простая алгебра);
(в) всякая вычислимо представимая абелева группа без кручения;
(г) всякое бесконечное вычислимо представимое векторное пространство над конечным полем;
(д) абсолютно свободная алгебра термов эффективной сигнатуры от свободного эффективного множества порождающих.

Примеры такого рода, которые легко умножить, показывают, что в определенном смысле негативные алгебры не менее естественны, нежели позитивные. В пользу этого наблюдения говорит также следующий факт.

Пусть K_{ES} — класс вычислимых (т. е. эффективно отделимых) алгебр, K_{AS} — класс отделимо нумерованных алгебр с артиновыми решетками конгруэнций. Все позитивные и негативные алгебры являются K_{ES}-алгебрами. Согласно теореме 2.4 всякая K_{AS}-алгебра есть K_{ES}-алгебра, т. е. для класса алгебр с артиновыми решетками конгруэнций понятия отделимой и вычислимой нумерации совпадают. В классе K_{AS} присутствует весьма обширный и важный подкласс K_{AN} негативно нумерованных алгебр с артиновыми решетками конгруэнций, причем многие естественные K_{AN}-алгебры невычислимы. Пусть K_{AP} — класс позитивно нумерованных алгебр с артиновыми решетками конгруэнций, тогда K_{AP} также есть подкласс класса K_{AS}. Очевидно, что $K_{AS} \diagdown K_{AP} \neq \varnothing$ (например, связное двоеточие). Известно, что всякая K_{AP}-алгебра, мощность решетки конгруэнций которой меньше континуума, вычислима (см. [35]), т. е. является K_{AN}-алгеброй. Класс невычислимых негативных алгебр с условием минимальности для решетки конгруэнций, т. е. $K_{AN} \setminus K_{AP}$, как следует из вышесказанного, весьма богат. Известно также, что существуют как невычислимые позитивные (см. [14]), так и невычислимые негативные алгебры с нетеровыми решетками конгруэнций (для негативных алгебр соответствующие примеры почти тривиальны). Насколько богат класс $K_{AP} \setminus K_{AN}$? Обширность указанной разности классов означала бы, что невычислимые позитивные алгебры с естественными условиями конечности встречаются «не менее часто», чем невычислимые негативные.

Вопрос «$K_{AP} \setminus K_{AN} \neq \varnothing$?» в настоящий момент является открытым.

Предложение 2.6. *Среди нумерованных алгебр существуют как подпрямо неразложимые, так и алгебры с артиновыми решетками конгруэнций, нумерационные эквивалентности которых обладают собственными вполне перечислимыми подмножествами, но не являются отделимыми.*

Доказательство см. в [31].

Следствие 2.16. *Существуют нумерации алгебр как с артиновыми решетками конгруэнций, так и подпрямо неразложимых, эффективно порожденные пространства которых нетривиальны, но неотделимы.*

Таким образом, следствие 2.9, верное для класса простых алгебр, нельзя обобщить на собственные расширения этого класса с более слабыми условиями конечности.

2.5. Аксиомы отделимости. В этом разделе рассмотрим некоторые усиления условия отделимости нумерации, которые, во многих естественных случаях, оказываются достаточными для ее эффективной отделимости и даже негативности.

Определение 2.5. Нумерация называется T_1-*отделимой* (T_2-*отделимой*; T_3-*отделимой*; T_4-*отделимой*), если для всякой пары натуральных чисел, различных по модулю ее нумерационной эквивалентности, найдется перечислимая окрестность первого числа, не содержащая второе, и перечислимая окрестность второго, не содержащая первое (найдутся непересекающиеся перечислимые окрестности этих чисел; для всякого элемента и замкнутого в эффективно порожденной топологии множества, не содержащего этот элемент, найдутся их непересекающиеся окрестности; для всякой пары непересекающихся замкнутых множеств найдутся их непересекающиеся окрестности).

Обозначим через $K_m (0 \leqslant m \leqslant 4)$ класс пространств, гомеоморфных эффективно порожденным пространствам, для которых выполняется аксиома T_m-отделимости.

Предложение 2.7. $K_m \setminus K_{m+1} \neq \varnothing$ *для* $m \in \{0, 1\}$, $K_3 = K_4$.

Доказательство. Для $m = 0$ тривиальный пример дается связным двоеточием, т. к. если α — вычислимо перечислимое невычислимое множество, то двухэлементное множество $\{\alpha, \omega \setminus \alpha\}$ с естественной нумерацией, сопоставляющей каждому числу содержащее его множество, есть эффективно порожденное отделимое и не T_1-отделимое пространство.

Для $m = 1$ в [25] построен пример эффективно порожденного пространства, гомеоморфного счетно-бесконечному пространству Зарисского, т. к. непустыми перечислимыми подмножествами в этом примере являются все коконечные множества и только они.

Для $m = 3$ вопрос, так же, как и для $m = 0$, тривиален, т. к. для счетных топологических пространств регулярность и нормальность равносильны (предполагается T_1-отделимость). $\square$

Для $m = 2$ вопрос открыт.

В случае вычислимо порожденных пространств ситуацию полностью описывает

Предложение 2.8. *Нумерация вычислимо отделима тогда и только тогда, когда вычислимо порожденное топологическое пространство совершенно нормально.*

Доказательство см. в [25].

В частности, в этом случае выполняются все аксиомы T_m-отделимости ($m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$).

Определение 2.6. Нумерация называется эффективно *T_1-отделимой* (*T_2-отделимой*), если для нее существует вычислимая последовательность T_1-отделяющих (T_2-отделяющих) множеств.

Для T_1-отделимых (T_2-отделимых) нумераций естественно возникает вопрос о справедливости усиленных аналогов теоремы 2.3: *всякая ли T_1-отделимая (T_2-отделимая) нумерованная алгебра аппроксимируется эффективно T_1-отделимыми (T_2-отделимыми)*?

Если (A, ν) — нумерованная алгебра и K — класс нумерованных алгебр, однотипных с A, то назовем A *простой относительно класса K* (*K-простой*), если никакая ее нееединичная фактор-алгебра не принадлежит K. Через $K_1(K_2)$ обозначим класс эффективно T_1-отделимых (T_2-отделимых) нумерованных алгебр. Для алгебр пустой сигнатуры (т. е. нумерованных множеств) верна

Теорема 2.5. *Существует T_1-отделимое, но не T_2-отделимое нумерованное множество, никакое фактор-множество которого не является эффективно T_1-отделимым.*

Доказательство см. в [31].

Следствие 2.17. *Существует K_1-простая T_1-отделимая нумерованная алгебра, эффективно порожденное топологическое пространство которой является пространством Зарисского.*

Доказательство. Приведем основную идею. В доказательстве теоремы 2.5 построен пример такой бесконечной эквивалентности η, что нетривиальными η-замкнутыми перечислимыми множествами являются все те, дополнения которых являются объединениями конечного числа классов η-эквивалентности (η-коконечные) и только они. Первые примеры таких эквивалентностей были построены в [25]. Далее, используя бесконечность характеристической трансверсали $tr(\eta)$ и счетность множества эффективно отделимых эквивалентностей, можно построить (неэффективным диагональным методом) такое бесконечное $\alpha \subseteq tr(\eta)$, что всякое бесконечное подмножество α (претендующее на роль характеристической трансверсали в расширении эквивалентности η) заведомо не будет характеристической трансверсалью никакой эффективно отделимой эквивалентности. Пусть $\alpha = \{a_0 < a_1 < \dots\}$. «Склеим» все η-классы в полуинтервалах $[a_n, a_{n+1})$ и обозначим полученную эквивалентность через $\eta^* \supseteq \eta$. Тогда не только η^*, но и никакой ее фактор не может быть эффективно отделимым (для бесконечных — в силу свойств α, для конечных — ввиду неперечислимости η^*-конечных множеств), но η^* является T_1-отделимой. При этом все η^*-замкнутые η^*-коконечные множества и только они являются перечислимыми (за исключением $\varnothing$), но никакой фактор η^* не является эффективно T_1-отделимым. □

Простейшими примерами эффективно T_2-отделимых нумераций являются позитивные и негативные нумерации. Более того, ниже будет показано, что в этих случаях имеет место равномерная T_2-отделимость, т. е. существует эффективная процедура, определенная на каждой паре чисел, различных по модулю нумерационной эквивалентности, значением которой является пара вычислимо перечислимых индексов непересекающихся множеств, замкнутых относительно нумерационной эквивалентности, отделяющих эту пару чисел. Приведем пример T_2-отделимого нумерованного множества, не имеющего вычислимых факторов, эффективно порожденное пространство которого является дискретным.

Предложение 2.9. *Существует T_2-отделимое нумерованное множество с перечислимыми элементами, никакое фактор-множество которого не является эффективно T_1-отделимым.*

Доказательство см. в [31].

Следствие 2.18. *Существует K_1-простая T_2-отделимая нумерованная алгебра, эффективно порожденное пространство которой дискретно.*

Доказательство. Идея сходна с построением в предыдущем следствии. Начинаем с совершенной эквивалентности η (т. е. позитивной и вычислимо простой). Выбираем бесконечное $\alpha \subseteq tr(\eta)$ такое, что ни α, ни какое-либо его бесконечное подмножество не лежат в Π^0_3. Как и выше, пусть $\alpha = \{a_0 < a_1 < \dots\}$. «Склеив» все η-классы в полуинтервалах $[a_n, a_{n+1})$, получим $\eta^* \supseteq \eta$, каждый смежный класс которой перечислим, но никакой ее фактор не может быть эффективно T_1-отделимым. Для бесконечных это следует из свойств α, для конечных — из совершенности η (и из вычислимой простоты η^*). □

Следствия 2.17 и 2.18 дополнительно подчеркивают фундаментальную роль теоремы Ю. Л. Ершова о вычислимых нумерациях с точки зрения теории нумерованных алгебр, т. к. для приведенных выше естественных усилений аксиом отделимости теорема об аппроксимации T_1-отделимых (T_2-отделимых) алгебр эффективно T_1-отделимыми (T_2-отделимыми) неверна. Заметим, что нумерованные множества, построенные в теореме 2.5 и в предложении 2.9, тривиально аппроксимируются эффективно отделимыми — связными двоеточиями.

Предложение 2.10. *Всякая алгебра, обладающая отделимой нумерацией с такой характеристической трансверсалью, всякое бесконечное подмножество которой не принадлежит классу Π^0_3, является финитно аппроксимируемой.*

Доказательство. Действительно, если ν — отделимая нумерация алгебры A и $\forall\alpha \subseteq tr(\nu) \wedge \alpha$ бесконечно ($\alpha \notin \Pi^0_3$), то любая бесконечная фактор-алгебра нумерованной алгебры (A,ν), в т. ч. по нулевой конгруэнции, также имеет характеристическую трансверсаль, никакое бесконечное подмножество которой не лежит в Π^0_3 и потому не может быть эффективно отделимой. Однако по теореме 2.3, (A,ν) аппроксимируется эффективно отделимыми алгебрами, следовательно, все аппроксимирующие эффективно отделимые алгебры конечны, т. е. A финитно аппроксимируема. $\square$

Особое место как в теории решеток конгруэнций универсальных алгебр, так и в теории вычислимых структур, принадлежит простым алгебрам. Оказалось, что свойство T_1-отделимости (T_2-отделимости) тесно связано с негативностью нумераций не только простых алгебр, но и алгебр с артиновыми решетками конгруэнций, а также подпрямо неразложимых алгебр. В случае отделимых алгебр простейшим примером нумерованной простой алгебры, не являющейся негативной, является связное двоеточие (см. случай $m = 0$ предложения 2.7). Для T_2-отделимых алгебр пример не негативной простой алгебры неизвестен. Если такая алгебра существует, то она не имеет собственных вполне вычислимых подмножеств [25], но, согласно следствию 2.13, является эффективно отделимой, а значит, сложность ее нумерационной эквивалентности не выходит за пределы индуктивного класса Π^0_2 в иерархии Клини—Мостовского. С другой стороны (если такого примера нет), не видно явных причин, вынуждающих T_2-отделимые нумерации простых алгебр быть негативными. Таким образом, естественный вопрос о существовании не негативной T_2-отделимой (или хотя бы T_1-отделимой) нумерованной простой алгебры на текущий момент остается открытым.

Как обычно, через ω обозначается как множество натуральных чисел, так и тип его линейного упорядочения (т. е. изоморфизма естественного порядка натуральных чисел).

В определенном смысле к простым алгебрам «близки» алгебры с условиями минимальности для решеток конгруэнций. Например, простейшей бесконечной подпрямо неразложимой алгеброй с артиновой решеткой конгруэнций является алгебра предшествования $P = \langle\omega; p\rangle$, где $p(n+1) = n$, $p(0) = 0$ (любая ее ненулевая конгруэнция содержит пару $\langle 0, 1\rangle$). Хотя среди бесконечных подпрямо неразложимых алгебр с артиновыми решетками конгруэнций унар P является простейшим, в нем проявляются присущие ему вполне нетривиальные свойства, что демонстрирует следующее утверждение.

Предложение 2.11. *Для алгебры P справедливо следующее*:

1. *P имеет артинову и ненетерову решетку конгруэнций*;
2. *решетка конгруэнций алгебры P как частичный порядок — линейно упорядоченное множество порядкового типа $\omega + 1$*;
3. *решетка подалгебр алгебры P также имеет порядковый тип $\omega + 1$*;
4. *всякая фактор-алгебра P/θ по ненулевой конгруэнции θ изоморфна P*;
5. *группа автоморфизмов алгебры P тривиальна.*

Доказательство. Приведем набросок доказательства.

1. «Расклейка» любой пары элементов $\langle m, n\rangle$ $(m < n)$, лежащих в единичной конгруэнции, дает «прыжок» к почти нулевой конгруэнции, в которой все числа из множества $\{k | k \geqslant n\}$ будут образовывать одноэлементные смежные классы (артиновость). «Склейка» же любой пары элементов $\langle m, n\rangle$ $(m < n)$, порождает главную конгруэнцию с одним нетривиальным смежным классом $\{x | x \leqslant n\}$. Поэтому цепь $\theta_0 \subset \theta_1 \subset \dots \subset \theta_n \subset \dots$, где $\theta_n = \{\langle x, y\rangle | x, y \in \{0, \dots, n\}\} \cup id\,\omega$, строго возрастающая (ненетеровость).

2 и 3. Каждая последующая конгруэнция θ_{n+1} (подалгебра P_{n+1}) относительно вышеупомянутого дискретного линейного порядка для заданной конгруэнции $\theta_n = \{\langle x,y\rangle | x,y \leqslant n\} \cup id\,\omega$ (подалгебры $P_n = \langle\{0,\dots,n\};p\rangle$) получается путем добавления к нетривиальному смежному классу (к подалгебре) элемента $n+1$. Поэтому и решетка конгруэнций, и решетка подалгебр алгебры P линейно упорядочена по типу $\omega+1$. Единичная конгруэнция (алгебра $\langle\omega;p\rangle$) является наибольшим элементом соответствующей решетки, а нулевая когруэнция (алгебра $\langle\{0\};p\rangle$) — наименьшим.

Пункт 4 следует из доказательства пункта 1.

Пункт 5: очевидно. □

Легко понять, что всякая T_2-отделимая нумерация алгебры предшествования является негативной. В самом деле, пусть ν — T_2-отделимая нумерация этой алгебры, α,β — пара непересекающихся вычислимо перечислимых $ker(\nu)$-замкнутых множеств и $\nu^{-1}(0)\subseteq\alpha, \nu^{-1}(1)\subseteq\beta$. Тогда

$$x \neq y \Leftrightarrow \exists n\in\omega[(p^n(x)\in\alpha \wedge p^n(y)\in\beta)\vee(p^n(y)\in\alpha\wedge p^n(x)\in\beta)].$$

Очевидно, что всякая позитивная нумерация алгебры P является вычислимой. В то же время нетрудно построить негативные невычислимые нумерации этой алгебры.

Легко построить пример отделимой нумерации алгебры предшествования, не являющейся негативной. Вопрос о существовании T_1-отделимой, но не негативной нумерации этой алгебры получил положительное решение (см. следующий раздел). Сложность построения контрпримера связана как минимум с построением T_1-отделимой нехаусдорфовой нумерации, что само по себе сопряжено с определенными трудностями.

Заметим, что в некоторых важных частных случаях, для известных типов алгебр, наличие T_1-отделимости (T_2-отделимости) для нумераций может являться достаточным условием их негативности.

3. Топологические нумерованные алгебры

Для нумерованной алгебры (A,ν) семейство всех перечислимых (вычислимых) ν-замкнутых множеств образует базу естественной топологии на $\omega/ker(\nu)$ (см. [4]), которое выше мы назвали эффективной (соответственно — вычислимой) ν-топологией и обозначили через $\tau(\nu)$ (соответственно через $\tau_{comp}(\nu)$). Если η — эквивалентность на ω, то для всякой η-алгебры также можно определить соответствующие топологические пространства: $\tau(\eta)$-пространство и $\tau_{comp}(\eta)$-пространство, порожденные η-замкнутыми перечислимыми и вычислимыми множествами соответственно. Эти подходы равносильны, т. к. $ker(\nu)$ однозначно определяется нумерацией, а эквивалентность η задает естественную (проектирующую) нумерацию ν: $\nu(x) = x/\eta$.

Как отмечалось выше, замечательным свойством этих топологий для любой нумерованной алгебры (A,ν) (не обязательно эффективной сигнатуры) является факт непрерывности всех операций алгебры A как в $\tau(\nu)$-топологии, так и в $\tau_{comp}(\nu)$-топологии, т. к. каждая операция алгебры поддерживается подходящей вычислимой функцией, представляющей данную операцию в нумерации ν (см. [46]).

Повторимся также, что всякий гомоморфизм нумерованных алгебр также является непрерывным отображением, т. к. вычислимые прообразы вычислимых (перечислимых) множеств вычислимы (соответственно, перечислимы).

Отметим, что в случае негативно нумерованных алгебр соответствующая $\tau_{comp}(\nu)$-топология, заданная вычислимыми множествами, определяет T_4-пространство (см. [25]). Поэтому, в случае $\tau_{comp}(\nu)$-топологии (более слабой относительно $\tau(\nu)$-топологии) это пространство оказывается совершенно нормальным и вполне несвязным. Для отделимых нумераций это конечно не так, например: связное двоеточие, где один элемент представлен перечислимым невычислимым множеством, а второй — его дополнением.

Так как топология вводится на нумерованном множестве, а не наоборот, то в названии раздела прилагательное «топологические» предшествует прилагательному «нумерованные».

Определение 3.1. Нумерация ν универсальной алгебры A называется *эффективно невырожденной*, если пространство $\tau(\nu)$ нетривиально (т. е. $\tau(\nu)$-топология содержит хотя бы один элемент, кроме $\varnothing$ и $\omega/ker(\nu)$).

Нумерацию, не являющуюся эффективно невырожденной, будем называть *эффективно вырожденной*. Иначе говоря, эффективная вырожденность нумерации универсальной алгебры равносильна отсутствию нетривиальных перечислимых окрестностей ее элементов.

3.1. Эффективно невырожденные нумерации. Формулировке следующего результата предпошлем важное замечание, касающееся эффективности сигнатуры. Большинство результатов общей теории нумерованных алгебр предполагает эффективность сигнатуры (т. е. наличие равномерно эффективной процедуры, «выдающей» алгоритм вычисления соответствующей представляющей операцию функции по ее сигнатурному имени), т. к. семейство всех трансляций должно быть перечислимым. Однако многие принципиальные факты справедливы для произвольных счетных сигнатур. В начале раздела уже упоминалось, что свойство непрерывности операций не зависит от эффективности сигнатуры. Таковым же является и один из следующих «отрицательных» (с точки зрения возможности эффективного различения элементов) универсальных результатов для нумерованных алгебр.

Предложение 3.1. *Всякая не более чем счетная универсальная алгебра счетной сигнатуры имеет эффективно вырожденную нумерацию.*

Доказательство. Пусть $\langle A;\Sigma\rangle$ — универсальная алгебра счетной сигнатуры Σ. Рассмотрим «универсальную» сигнатуру Σ^*, определенную следующим образом. В Σ^* содержится бесконечное вычислимое множество константных символов, бесконечное вычислимое множество унарных функциональных символов, бинарных и т. д. Очевидно, что Σ^* — вычислимая сигнатура, в то время как алгоритмическая сложность Σ может быть какой угодно. Таким образом, Σ^* является обогащением Σ для любого счетного Σ. Интерпретируем произвольным образом на алгебре A все символы из $\Sigma^* \setminus \Sigma$ и через A^* обозначим полученное Σ^*-обогащение алгебры A. Если мы построим некоторую нумерацию для алгебры A^*, то, тем самым, эта же нумерация будет и представлением для $\langle A;\Sigma\rangle$, т. к. A является Σ-обеднением алгебры A^* сигнатуры Σ^*.

Пусть $T_{\Sigma^*}(X)$ — абсолютно свободная Σ^*-алгебра от свободного вычислимого бесконечного множества порождающих $X = \{x_0, x_1, \dots\}$. Зафиксируем произвольную вычислимую геделевскую нумерацию γ алгебры $T_{\Sigma^*}(X)$ (удобно считать сами Σ^*-термы (слова) от порождающего множества X их же γ-номерами, т. к. они вполне могут играть роль «натуральных чисел»).

Выберем сжатое (т. е. бесконечное не разбиваемое на две бесконечные части никаким перечислимым множеством) множество $\alpha \subseteq \omega$ и рассмотрим следующее подмножество Y множества порождающих X: $Y = \{x_i | i \in \alpha\}$. Разобьем множество Y на бесконечное число бесконечных непересекающихся подмножеств $Y = \bigcup\limits_{n\in\omega} Y_n$ и затем расширим Y_0 множеством $X \setminus Y$.

Построим сюръективное отображение $\mu : X \to A$ так, чтобы $\mu x = \mu y \Leftrightarrow \exists n \in \omega(x \in Y_n \wedge y \in Y_n)$. Отображение μ абсолютно свободных порождающих X единственным образом продолжается до гомоморфизма $\mu^* \supseteq \mu$ алгебры $T_{\Sigma^*}(X)$ на $\langle A^*;\Sigma^*\rangle$. Искомая нумерация ν является композицией γ и μ^*, т. е. $\nu = \mu^*\gamma$ (очевидно, что все операции исходной алгебры представлены вычислимыми функциями в нумерации ν, т. к. результат «вычисления» Σ^*-операции f на наборе элементов $\langle t_1(\overline{x}), \dots, t_n(\overline{x})\rangle$ есть слово $f(t_1(\overline{x}), \dots, t_n(\overline{x}))$).

Покажем, что нумерованная алгебра (A^*, ν) не имеет собственного подмножества, ν-прообраз которого перечислим (т. е. $\tau(\nu)$-пространство тривиально).

Допустим противное. Пусть B — собственное подмножество A и $\beta = \nu^{-1}(B)$ — перечислимое подмножество ω. Тогда существуют такие $m \neq n$, что $\{i | x_i \in Y_m\} \subseteq \beta$ и $\{i | x_i \in Y_n\} \subseteq (\omega \setminus \beta)$. Но тогда перечислимое множество β разделяет сжатое множество α на две бесконечные части. Противоречие. $\square$

Следствие 3.1. *Всякая не более чем счетная универсальная алгебра счетной сигнатуры представима над некоторой эквивалентностью.*

Таким образом, эффективно невырожденные нумерованные алгебры образуют достаточно узкий класс (в категории нумерованных алгебр с морфизмами), в рамках которого мы будем формулировать наши утверждения.

Яркими примерами эффективно отделимых нумераций являются позитивные и негативные. В отличие от позитивности, которую при различных построениях приходится аккуратно поддерживать, свойство негативности, напротив, оказалось очень тесно связанным с сильными типами отделимости, и его ликвидация связана с определенными трудностями. В случае эквивалентностей (т. е. алгебр пустой сигнатуры) затруднений не возникает, т. к. любая позитивная эквивалентность (так же, как и негативная) является эффективно отделимой. Более того, покажем, что позитивные и негативные эквивалентности дают примеры равномерно T_2-отделимых нумераций (т. е. существует эффективная процедура, которая по паре различных по модулю ядра эквивалентности натуральных чисел «выдает» алгоритмы перечисления пары замкнутых непересекающихся множеств, содержащих данную пару чисел).

Предложение 3.2. *Позитивные и негативные эквивалентности являются равномерно эффективно T_2-отделимыми.*

Доказательство. Пусть η — позитивная эквивалентность. Рассмотрим следующую полуформальную процедуру.

Для данных x, y (предположительно различных по модулю η) начинаем перечислять два множества, первое из которых есть класс x/η, а второе — y/η. Эти множества и являются искомыми.

Для негативной эквивалентности η по $x \neq y \pmod{\eta}$ можно равномерно эффективно переходить не просто к перечислимым индексам вычислимо перечислимых непересекающихся η-замкнутых множеств, отделяющих x, y, а к характеристическим индексам вычислимых непересекающихся η-замкнутых отделяющих множеств (см. [25]). □

3.2. Перечислимые топологии и компактные расширения. Напомним, что всякая нумерованная алгебра эффективной сигнатуры вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами (см. [25], аппроксимации понимаются как морфизмы, т. е. эффективные на номерах гомоморфизмы). Как отмечалось выше, для позитивных алгебр вычислимые и перечислимые топологии могут максимально различаться в случае, когда, например, η — бесконечная позитивная эквивалентность, которая не имеет собственных η-замкнутых вычислимых подмножеств. Тогда η-пространство является дискретным, а η_{comp}-пространство — тривиальным. Оказывается, что в случае негативных алгебр вычислимые и перечислимые топологии совпадают.

Приведем это утверждение в наиболее общей формулировке.

Теорема 3.1. *Пусть (A, ν) — негативно нумерованное множество. Тогда $\tau(\nu)$-топология и $\tau(\nu)_{comp}$-топология совпадают.*

Доказательство. В одну сторону это очевидно, т. к. всякое вычислимое множество перечислимо.

Пусть α — ν-замкнутое подмножество ω, открытое в $\tau(\nu)$-топологии.

Не ограничивая общности, можно считать, что α — базовая (т. е. перечислимая) окрестность. Пусть $a \in \alpha$.

Для доказательства теоремы достаточно построить разбиение ω на ν-замкнутые перечислимые непересекающиеся множества β и δ такие, что $a \in \beta \subseteq \alpha$ и $\beta \cup \delta = \omega$. Мы построим их с помощью пошаговой конструкции. Конечные части множеств β и δ, накопленные перед исполнением шага $s+1$, будем обозначать соответственно через β_s и δ_s.

Заметим, что случай $\omega \setminus \alpha = \varnothing$ также учитывается предлагаемой конструкцией.

Шаг 0. Положим $\beta_0 = \{a\}$, $\delta_0 = \varnothing$.

Шаг $s+1$. Пусть z — наименьшее натуральное число из $\omega \setminus (\beta_s \cup \delta_s)$. Одновременно перечисляя множества $\omega^2 \setminus ker(\nu)$ и α, ждем, пока не подтвердится выполнение хотя бы одного из следующих условий (далее будет показано, что это обязательно случится):

(a) (z отвергается множеством δ_s) $\wedge$ $(z \in \alpha)$;
(b) z отвергается множеством β_s.

Если выполнено (a), то добавляем z к перечислению β, иначе — к перечислению δ.

Лемма 3.1. *Справедливы следующие утверждения*:

1. $\beta \subseteq \alpha$;
2. $\beta \cap \delta = \varnothing$;
3. *любой элемент из β отвергается всеми элементами из δ и наоборот*;
4. $\beta \cup \delta = \omega$.

Доказательство. Пункты 1 и 2 очевидны. Пункт 3 следует из того, что, как нетрудно убедиться индукцией по шагам построения, каждый элемент из β_s отвергается всеми элементами из δ_s и наоборот.

Пусть не выполнено условие (b), т. е. z не отвергается множеством β_s. Это означает, что z является ν-эквивалентным элементу из β_s, а поскольку в силу уже доказанного в пункте 1 мы имеем $\beta_s \subseteq \beta \subseteq \alpha$ и по условию α ν-замкнуто, то получим $z \in \alpha$. Далее, поскольку z ν-эквивалентно некоторому элементу из β_s, то, в силу уже доказанного в пункте 3, получаем, что z отвергается множеством δ_s.

Для доказательства пункта 4 достаточно показать, что на каждом шаге s одно из условий (a), (b) в описании конструкции обязательно выполнится, и в результате очередное z попадет либо в β, либо в δ.

Пусть не выполнено условие (b), т. е. z не отвергается множеством β_s. Это означает, что z является ν-эквивалентным некоторому элементу из β_s, а поскольку в силу уже доказанного в пункте 1 мы имеем $\beta_s \subseteq \beta \subseteq \alpha$ и α по условию ν-замкнуто, то получим $z \in \alpha$. Далее, т. к. z ν-эквивалентно некоторому элементу из β_s, то, в силу уже доказанного в пункте 3, имеем факт отвержения z множеством δ_s. Таким образом, в случае невыполнения условия (b) будет выполнено условие (a). □

Замкнутость множеств β и δ относительно ядра нумерации легко следует из пункта 3 доказанной леммы. Теорема 3.1 доказана. □

Таким образом, вычислимо порожденная топология на негативной системе полностью охватывает все множества, являющиеся объединениями перечислимых.

Завершим подраздел достаточно «универсальным» фактом существования компактного (в различных типах топологий) бесконечного расширения любой бесконечной эквивалентности.

Предложение 3.3. *Всякая бесконечная эквивалентность на ω имеет такое бесконечное расширение, перечислимое* (*вычислимое, арифметическое*) *фактор-пространство по модулю которого является компактным.*

Доказательство. Пусть η — бесконечная эквивалентность. Обозначим через $\{t_0 < t_1 < \dots\}$ ее характеристическую трансверсаль, выписанную в порядке строгого возрастания. Положим $\alpha_0 = t_0/\eta$, т. е. α_0 — это смежный η-класс, содержащий число 0.

Следующее утверждение представляет самостоятельный интерес.

Лемма 3.2. *Пусть Σ — счетное семейство η-замкнутых множеств, дополнения которых η-бесконечны. Тогда существует такое бесконечное расширение η^* эквивалентности η, что никакое η^*-замкнутое надмножество α_0 не является Σ-множеством* (*т. е. множеством из* Σ).

Доказательство. Пусть $\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots\}$. Будем строить возрастающую последовательность η-замкнутых и η-конечных множеств $\delta_0, \delta_1, \dots$ по шагам.

Шаг 0. Так как σ_0 является η-кобесконечным, то существуют такие k, l, что $t_k \notin \sigma_0 \wedge t_l \notin \sigma_0$. Выберем среди таких чисел наименьшее (t_{k_0}) и следующее после наименьшего (t_{l_0}) и определим $\delta_0 = \alpha_0 \cup t_{k_0}/\eta$ (сразу отметим, что t_{l_0} никогда не попадет в строящееся объединение $\bigcup\limits_{n\in\omega} \delta_n$).

Шаг $n+1$. Этот шаг посвящен добавлению некоторого η-класса, являющегося подмножеством $\omega \setminus \sigma_{n+1}$ в $\bigcup\limits_{n\in\omega} \sigma_n$ с гарантированным невключением в это объединение какого-то другого η-класса, входящего в $\omega \setminus \sigma_{n+1}$ (последнее нужно, чтобы η^* имела бесконечное число смежных классов).

Пусть $\{\langle t_{k_0}, t_{l_0}\rangle, \dots, \langle t_{k_n}, t_{l_n}\rangle\}$ — все упорядоченные пары трансверсальных чисел, использовавшихся для включения (t_{k_i}) в построенные $\sigma_0, \dots, \sigma_n$. Выберем такие $t_{k_{n+1}} < t_{l_{n+1}}$, что оба эти числа трансверсальны, принадлежат $\omega \setminus \sigma_{n+1}$ и $t_{k_{n+1}}$ больше всех ранее использованных.

Положим $\delta_{n+1} = \delta_n \cup t_{k_{n+1}}/\eta$.

Конец шага $n+1$.

Определим $\delta = \bigcup\limits_{n\in\omega} \delta_n$.

Пусть $\eta^* = \eta \cup \{\langle x, y\rangle | x, y \in \delta\}$.

Конструкция обеспечивает «склейку» бесконечного числа η-классов в один η^*-класс, содержащий число t_0 $(= 0)$. При этом все η^*-классы вне множества δ совпадают с η-классами, и число этих классов бесконечно. Наконец, никакое η^*-замкнутое расширение класса $t_0/\eta^* = \delta$ не является Σ-расширением, т. к. δ имеет непустое пересечение с дополнением каждого $\sigma_m \in \Sigma, m \in \omega$. $\square$

Согласно этой лемме, например, для семейства всех η-перечислимых кобесконечных множеств можно построить такое бесконечное расширение η^* для η, что все η-перечислимые расширения некоторого η^*-класса β будут η^*-коконечны, т. е. η^*/ω-пространство будет компактным. При этом все η-замкнутые перечислимые кандидаты на окрестности β с бесконечными дополнениями нами ликвидированы, а новым η^*-замкнутым множествам взяться неоткуда, т. к. всякое η^*-замкнутое множество является одновременно и η-замкнутым. Таким образом, фактор-пространство ω/η^* компактно относительно топологии, порожденной перечислимыми множествами.

Для вычислимо и арифметически порожденных топологий ситуация аналогичная. $\square$

Следствие 3.2. *Всякая бесконечная эквивалентность имеет бесконечное компактное в перечислимой топологии расширение.*

Пусть (A, ν) — нумерованное бесконечное множество. Всякая эквивалентность θ на множестве A индуцирует расширение η^* нумерационной эквивалентности $\eta = ker(\nu)$, смежные η^*-классы которого содержат в точности те натуральные числа, чьи ν-образы равны по модулю θ, т. е. $\eta^* = \{\langle x, y\rangle | \nu x = \nu y \pmod{\theta}\}$. Ясно, что естественная проекция $\pi_\theta(a) = a/\theta$ для всех $a \in A$ порождает нумерацию ν^* фактор-множества A/θ, где $\nu^*(x) = \nu(x)/\theta$. При этом тождественная вычислимая функция e будет осуществлять естественный морфизм (A, ν) на его фактор $(A/\theta, \nu^*)$, т. е. $\pi_\theta\nu = \nu^* e$.

Следствие 3.3. *Для всякого нумерованного бесконечного множества (A, ν) существует такая эквивалентность θ на A с бесконечным числом смежных классов, что нумерованное фактор-множество $(A/\theta, \nu^*)$ (где $\nu^* = \pi_\theta\nu$) является компактным.*

Родственные вопросы, касающиеся топологических аспектов отделимо нумерованных алгебр, можно найти в [22, 37, 45, 68, 69].

3.3. Отделимые представления подпрямо неразложимых алгебр и алгебр с условиями минимальности для решеток конгруэнций. Апеллируя к многократно упомянутому примеру связного двоеточия, алгоритмически реализуемого невычислимым перечислимым множеством, можно заключить, что особый интерес представляют T_1-отделимые нумерации, т. к. именно в этом случае наблюдается тесная связь между негативностью и сильными типами отделимости (т. е. от T_2 и выше).

Таким образом, для T_0-отделимо нумерованных подпрямо неразложимых (с артиновыми решетками конгруэнций и, вообще, с любыми мыслимыми условиями типа конечности) алгебр вопрос об их не негативной (но обязательно эффективно отделимой!) алгоритмической реализации бессодержателен. Поэтому мы рассматриваем вопросы существования T_1-отделимо нумерованных подпрямо неразложимых алгебр, а также алгебр с условиями минимальности для решеток их конгруэнций с точки зрения порождения их представлений не негативными ядрами. Заметим при этом, что всякая T_1-отделимая нумерация конечного множества вычислима (т. к. каждый смежный класс вычислимо перечислим), поэтому все наши рассмотрения в случае невычислимых нумераций будут касаться бесконечных множеств.

Резюмируя вышесказанное, можно отметить «вездесущесть» свойства негативности в тех случаях, когда имеют место в совокупности как сильные типы алгоритмической отделимости нумераций алгебр, так и существенные ограничения на решетки их конгруэнций. Согласно теоремам 2.3 и 2.4 всякие T_1-отделимые представления как подпрямо неразложимых алгебр, так и алгебр с артиновыми решетками конгруэнций эффективно отделимы, т. е. лежат в классе Π^0_2. Все известные примеры отделимых нумераций алгебр данных типов оказывались негативными, т. е. находились в классе Π^0_1. Потому вопрос состоит в нахождении нумерованных алгебр указанных типов в относительно узком диапазоне между негативными (Π^0_1-) и Π^0_2-нумерациями.

Пусть $P = \langle\omega; p\rangle$ — алгебра предшествования. Выше было отмечено, что P — подпрямо неразложимая алгебра с артиновой решеткой конгруэнций. Кроме того (см. конец предыдущего раздела) всякое T_2-отделимое представление алгебры P является негативным.

Теорема 3.2. *Существует T_1-отделимая не негативная нумерация алгебры P.*

Доказательство см. в [43].

Таким образом, одним примером решаются два вопроса.

Следствие 3.4. *Существует T_1-отделимо нумерованная подпрямо неразложимая алгебра, не являющаяся негативной.*

Следствие 3.5. *Существует T_1-отделимо нумерованная алгебра с артиновой решеткой конгруэнций, не являющаяся негативной.*

Отметим, что для любой такой нумерации ν алгебры P имеется весьма богатое семейство вычислимо перечислимых $ker(\nu)$-замкнутых множеств (в частности, в соответствующую топологию входит не только семейство всех $ker(\nu)$-коконечных множеств, что очевидно, но и целое семейство $ker(\nu)$-кобесконечных множеств). Тем не менее, не существует пары нетривиальных непересекающихся вычислимо перечислимых $ker(\nu)$-замкнутых множеств.

4. Отделимые представления групп, колец и тел

Фундаментальные алгебраические понятия тела и области целостности являются классическими объектами исследования как в алгебре, так и в математической логике, которая, в частности, занимается описанием алгоритмических свойств колец, заданных теми или иными нумерациями (см. [3–5, 61, 62], там же есть и библиография по теме). Важнейшими среди нумераций (представлений) этих объектов являются вычислимые, т. е. изоморфные кольцам, носителями которых являются вычислимые подмножества множества натуральных чисел, а операции сложения и умножения представлены подходящими вычислимыми операциями.

4.1. Трансляционно полные и предполные алгебры. Напомним, что унарная термальная операция с фиксированными элементами алгебры в качестве параметров называется *трансляцией* (А. И. Мальцев [51]).

Определение 4.1. Универсальная алгебра называется *трансляционно полной*, если всякая пара различных ее элементов переводится в любую другую пару различных элементов подходящей трансляцией (т. е. для любых $a \neq b$, $c \neq d$ найдется такая трансляция t, что либо $t(a) = c \wedge t(b) = d$, либо $t(a) = d \wedge t(b) = c$).

Очевидно, что всякая трансляционно полная алгебра является простой. Обратное неверно. Например, пусть $\langle A; f\rangle$ — трехэлементный унар, на котором f действует как цикл длины 3. Очевидно, что любая трансляция этой простой алгебры имеет вид $f^n(x)$ (при $n = 0$ имеем тождественную функцию) и действует на $A = \{a_0, a_1, a_2\}$, скажем, так: $f(a_0) = a_1$, $f(a_1) = a_2$, $f(a_2) = a_0$. Ясно, что любая соседняя пара элементов (т. е. вида $\langle a_i, a_{i+1}\rangle$ для $i \in \{0, 1\}$) переводится любой трансляцией в соседнюю же (с учетом ориентации) пару, поэтому пара $\langle a_0, a_1\rangle$ не переводится никакой трансляцией в пару $\langle a_0, a_2\rangle$.

Приведем простейший пример когруэнц-простого кольца, не являющегося трансляционно полным. Пусть Z_3 — группа вычетов по модулю 3 аддитивной группы целых чисел $\langle Z; +\rangle$. Примем ее за аддитивную группу кольца, умножение в котором определим как нулевое. Легко убедиться в том, что построенное кольцо не имеет нетривиальных идеалов и не является трансляционно полным (ср. с предыдущим примером трехэлементного унара). Детали опускаем.

Определение 4.2. Универсальная алгебра называется *трансляционно предполной*, если существует такая пара ее различных элементов, в которую переводится любая пара различных элементов подходящей трансляцией.

Трансляционная предполнота алгебры влечет ее подпрямую неразложимость (т. к. пересечение всех ненулевых конгруэнций ненулевое). Например, легко понять, что алгебра предшествования P подпрямо неразложима (любая ее ненулевая конгруэнция содержит пару $\langle 0, 1\rangle$) и является трансляционно предполной.

Согласно данным определениям, всякая трансляционно полная алгебра трансляционно предполна. При этом первый класс собственным образом находится во втором хотя бы потому, что трансляционно полные алгебры конгруэнц-просты, а трансляционно предполные могут простыми и не быть.

Как отмечалось выше, из теоремы 2.3 следует, что всякое отделимое алгоритмическое представление любой подпрямо неразложимой алгебры (как и всякой алгебры с условием минимальности для решетки ее конгруэнций) является эффективно отделимым, т. е. находится в Π^0_2-классе иерархии Клини—Мостовского.

Пусть АРК — класс алгебр с артиновыми решетками конгруэнций и ПНА — класс подпрямо неразложимых алгебр. Алгебра предшествования P лежит в пересечении этих классов. Нетрудно показать, что обе разности между этими классами непусты.

Предложение 4.1. *Всякая T_2-отделимая нумерация трансляционно предполной алгебры является негативной.*

Доказательство приведено в [39]. Идея его в следующем. Пусть (A,ν) — T_2-отделимо нумерованная трансляционно предполная алгебра и пара различных элементов $\langle a,b\rangle$ этой алгебры содержится в любой ее ненулевой конгруэнции. Зафиксируем ν-номера этих элементов, скажем, $\nu m = a$, $\nu n = b$. По условию существуют такие $ker(\nu)$-замкнутые перечислимые непересекающиеся множества α и β, что $m \in \alpha$ и $n \in \beta$. Теперь, если через T_ν обозначим перечислимое множество всех трансляций алгебры A, заданных соответствующими вычислимыми представлениями операций этой алгебры в нумерации ν, то

$$\nu x \neq \nu y \Leftrightarrow \exists t \in T_\nu[(t(x) \in \alpha \wedge t(y) \in \beta) \vee (t(x) \in \beta \wedge t(y) \in \alpha)].$$

Как отмечалось выше, алгебра следования $S = \langle \omega, s\rangle$, $s(x) = x+1$, являющаяся в некотором смысле «противоположной» алгебре предшествования P, имеет нетерову решетку конгруэнций (более того, всякая ее ненулевая конгруэнция имеет конечный индекс). Очевидно, что эта алгебра не является трансляционно предполной. Ясно также, что всякая позитивная нумерация алгебры S (так же как и для P) является вычислимой. В то же время, выше также отмечалось существование невычислимых негативных нумераций алгебры следования.

Предыдущее предложение дает достаточное (трансляционная предполнота), но не необходимое условие негативности любого T_2-отделимого представления алгебры. Покажем, что существует естественный пример простой, но не трансляционно предполной бесконечной алгебры, всякая T_1-отделимая (не говоря уже о T_2-отделимой) нумерация которой негативна (даже вычислима!).

Алгеброй Мальцева назовем алгебру, удовлетворяющую тождествам $\varphi(x,x,z){=}z$, $\varphi(x,z,z){=}x$, где φ — термальный многочлен в сигнатуре исходной алгебры [51] (алгебра из конгруэнц-перестановочного мальцевского многообразия).

Рассмотрим алгебру $M = (\omega; f)$, где $f(x,y,z) = z$ при $x = y$ и $f(x,y,z) = x$ при $x \neq y$. Очевидно, что M — алгебра Мальцева.

Предложение 4.2. *Всякая T_1-отделимая нумерация алгебры M является вычислимой.*

Доказательство см. в [44].

Заметим, что алгебра M проста и не является трансляционно предполной (т. к. любая трансляция при равенстве первых двух аргументов есть тождественная функция от третьей переменной, а при различных первых двух — константа, равная первому аргументу).

Пусть M — счетно-бесконечное множество и F — система алгебраических операций на нем. Разбиение (эквивалентность) на M будем называть *F-допустимым*, если оно является конгруэнцией алгебры $\langle M; F\rangle$. *Тривиальной операцией* на любом множестве назовем функцию-константу либо проектирующую. Легко заметить, что все тривиальные операции на множестве M и только они допустимы относительно любого разбиения множества M. *Квазипроектирующей функцией* от n переменных на множестве M назовем такую операцию, которая на любом наборе в качестве аргумента принимает в качестве значения один из элементов данного набора, т. е.

$$\forall \overline{x} = \langle m_1, \ldots, m_n\rangle \in M(\bigvee_{i\in\{1,\ldots,n\}} f(\overline{x}) = m_i).$$

Известно существование такой позитивной эквивалентности η (совершенной с комаксимальной характеристической трансверсалью $tr(\eta) = \{x | x = y \pmod{\eta} \to x \leqslant y\}$, см. Ю. Л. Ершов [4]), над которой определимы только тривиальные алгебры (т. е. всякая операция данной алгебры есть константа или проектирующая, см. [25]).

Несмотря на, казалось бы, «близость» понятий проектирования и квазипроектирования верно следующее.

Предложение 4.3. *Существует простая алгебра с одной трехместной квазипроектирующей операцией.*

Таковой будет алгебра Мальцева из предыдущего предложения.

Следствие 4.1. *Существует алгебра с одной трехместной квазипроектирующей операцией, всякая T_1-отделимая нумерация которой вычислима.*

Следующее предложение постулирует трансляционную полноту для важнейшего класса алгебраических систем.

Предложение 4.4. *Всякое тело является трансляционно полным.*

Доказательство см. в [39], суть его вкратце такова. Пусть даны два произвольных различных элемента a, b тела F. Зафиксируем произвольную пару различных элементов c и d. Покажем, что существует такая трансляция $\lambda x[t(x)]$ тела F, которая переводит элемент a в c, а элемент b в d. Для этого определим следующее множество трансляций $T(a)$, имеющих очень простой вид линейных многочленов: $T(a) = \{\lambda x[f(x-a)+c] | f \in F\}$. Очевидно, что всякая трансляция $\lambda x[t(x)]$ из $T(a)$ переводит элемент a в c. В то же время, для любого $b \neq a$ найдется единственная трансляция $\lambda x[f_0(x-a)+c] \in T(a)$, которая переводит элемент b в d. Ясно, что этой трансляцией будет $\lambda x[f_0(x-a)+c]$ при $f_0 = (d-c)(b-a)^{-1}$.

Заметим, что аналогичным образом существует такая трансляция $\lambda x[t^*(x)]$ тела F, которая переводит элемент a в d, а элемент b в c. В этом случае определим множество трансляций $T^*(a) = \{\lambda x[f(x-a)+d] | f \in F\}$, всякая трансляция из которого переводит элемент a в d, но для $b \neq a$ найдется единственная трансляция $\lambda x[f_0^*(x-a)+d] \in T^*(a)$, которая переводит элемент b в c, и этой трансляцией будет $\lambda x[f_0^*(x-a)+d]$ при $f_0^* = (c-d)(b-a)^{-1}$.

Теорема 4.1. *Всякая эффективно невырожденная нумерация любого тела является негативной.*

Доказательство. Пусть F — тело, ν — его эффективно невырожденная нумерация. По условию, существует нетривиальное ν-замкнутое собственное перечислимое подмножество $\alpha \subseteq \omega$. Зафиксируем элементы тела $c \in \nu(\omega \setminus \alpha)$ и $d \in \nu\alpha$.

Пусть теперь даны два произвольных различных элемента a, b тела F. По предыдущему предложению существует такая трансляция $\lambda x[t(x)]$ тела F, которая переводит элемент a в c, а элемент b в d. Таким образом, для двух элементов a, b, заданных своими номерами m, n соответственно в невырожденном представлении ν тела F с фиксированной перечислимой ν-окрестностью α элемента d тела F, не содержащей c, будем вычислять ν-номера для всех трансляций вида $\nu(k)(\nu(n)-\nu(m))+\nu(l)$, где l — некоторый фиксированный ν-номер элемента c, пытаясь обнаружить их во множестве α, заставляя k пробегать множество всех ν-номеров элементов тела F. Если действительно $\nu m \neq \nu n$, то этот факт гарантированно подтвердится через конечное число шагов перечислением в α числа $k_0(n-m)+l$, где k_0 есть некоторый ν-номер элемента, являющегося произведением мультипликативно обратного к $d-c$ и $\nu(n)-\nu(m)$. Последнее и означает негативность ν. Более формально,

$$\nu m \neq \nu n \Leftrightarrow \exists k(\nu(k)(\nu(n)-\nu(m))+\nu(l) \in \nu(\alpha)).$$

□

Сделаем три важных замечания, касающихся почти тривиального доказательства теоремы 4.1.

Во-первых, хотя в любой конгруэнц-простой алгебре всякая главная (т. е. порожденная парой различных элементов) конгруэнция «склеивает» любую пару других элементов, вовсе не факт, что найдется такая трансляция, которая переводит один из порождающих этой конгруэнции в один из «склеиваемых» элементов, а второй — в другой из «склеиваемых». В общем случае можно лишь утверждать существование конечной цепи значений подходящих трансляций, через которые и «склеиваются» все пары элементов исходной алгебры. В случае тел, по теореме 4.1, существует полное (очень богатое) семейство трансляций, позволяющее «склеивать» любую пару элементов непосредственно в качестве значений подходящей трансляции.

Во-вторых, негативность всякой невырожденной нумерации ν любого тела равносильна совершенной нормальности ν-пространства, порожденного ν-замкнутыми вычислимыми подмножествами ω (см. [25]), поэтому в случае нумерованных тел, согласно теореме 4.1, вычислимые и перечислимые топологии совпадают. Очевидно, что в случае произвольных алгебр вычислимая топология вообще говоря слабее перечислимой (простейший пример — упоминавшееся ранее связное двоеточие).

Наконец, в-третьих, использование трансляций, содержащих унарную операцию взятия мультипликативно обратного элемента, вообще говоря, некорректно, т. к. эта операция частична (хотя и непрерывна), и значения некоторых трансляций (образующих коперечислимое множество) при этом оказываются неопределенными (впрочем, за счет усложнения доказательства можно обойти это препятствие).

Следствие 4.2. *Всякая отделимая нумерация любого конечного тела является вычислимой.*

Действительно, в этом случае имеем негативную нумерацию конечного множества, которая является вычислимой.

Следствие 4.3. *Для всякой эффективно невырожденной нумерации любого тела соответствующее перечислимое пространство совершенно нормально и вполне несвязно.*

Известно, что если (A, ν) — вычислимо отделимая нумерованная конгруэнц-простая универсальная алгебра и $\tau(\nu)_{comp}$-пространство нетривиально, то ν негативна (см. [25]). Поскольку всякая простая (т. е. без нетривиальных идеалов) коммутативная область целостности является полем (иначе решетка ее идеалов была бы неартиновой), то, по теореме 4.1, автоматически, всякое эффективно невырожденное представление простой области целостности негативно. Однако принципиальный вопрос о негативности эффективно невырожденного представления всякого простого коммутативного кольца (разумеется, с делителями нуля) на настоящий момент открыт.

4.2. Локально позитивные и негативные группы.

Определение 4.3. Нумерация алгебры называется *локально позитивной* (*негативной*), если хотя бы один смежный класс ядра этой нумерации является перечислимым (коперечислимым).

Отметим, что в то время как позитивность и негативность являются «глобальными» понятиями, подразумевающими наличие единообразной эффективной процедуры порождения нумерационной эквивалентности или, соответственно, ее дополнения, «локальность», вообще говоря, означает отсутствие такой процедуры. При этом, к примеру, число локально позитивных (негативных) эквивалентностей даже с не более чем двухэлементными смежными классами есть континуум, тогда как число позитивных (негативных) эквивалентностей счетно. Очевидно, что всякая эквивалентность с конечными смежными классами является как локально позитивной, так и локально негативной, однако ее алгоритмическая сложность может быть какой угодно. Тем не менее, свойства симметрии в группах и полях позволяют равномерно эффективно переходить от локальной позитивности (негативности) их представлений к глобальной, т. е. алгоритмы позитивности (негативности) оказываются изначально присутствующими в структурах самих этих систем, что проявляется и в свойствах их алгоритмических представлений.

Предложение 4.5. *Для всякой локально позитивной* (*локально негативной*) *группы любой смежный класс ее ядра является перечислимым* (*коперечислимым*).

Доказательство. Пусть (G, ν) — локально позитивная (локально негативная) группа и $*$ есть вычислимая функция, представляющая групповую операцию группы G в нумерации ν. Допустим, что смежный $ker(\nu)$-класс, ν-отображаемый в элемент a группы G по ядру ее нумерационной эквивалентности (т. е. $\nu^{-1}(a) = \alpha$) перечислим (коперечислим). Возьмем любой другой элемент группы G, скажем, b, и обозначим через $\nu^{-1}(b) = \beta$ множество его ν-номеров. Зафиксируем некоторый ν-номер n элемента $b^{-1}a$ группы G. Очевидно, что $x \in \beta \Leftrightarrow x * n \in \alpha$, что показывает перечислимость смежного $ker(\nu)$-класса β. В случае локальной негативности истинность утверждения следует из соотношения $x \in (\omega \setminus \beta) \Leftrightarrow x * n \in (\omega \setminus \alpha)$. $\square$

Предложение 4.6. *Всякая локально позитивная нумерация любой группы является позитивной.*

Доказательство. Пусть (G, ν) — локально позитивная группа. Согласно предыдущему предложению множество ν-номеров единицы группы e перечислимо. Обозначим это множество через $\alpha = \nu^{-1}(e)$. Тогда $\nu x = \nu y$ эквивалентно тому, что найдется такое $z \in \omega$, что $x{*}z \in \alpha \wedge y{*}z \in \alpha$. □

Следствие 4.4. *Всякая локально позитивная нумерация любого кольца является позитивной.*

До сих пор, по умолчанию, мы рассматривали группы в сигнатуре с одной бинарной операцией.

Предложение 4.7. *Всякая локально негативная нумерация любой группы в сигнатуре с бинарной групповой и унарной операцией взятия обратного элемента является негативной.*

Доказательство. Пусть $\langle G; *, ^{-1} \rangle$ — группа с бинарной групповой операцией $*$ и унарной операцией $^{-1}$ взятия обратного элемента, ν — локально негативная нумерация группы G, в которой вычислимыми представлениями операций $*$ и $^{-1}$ являются $\times$ и f соответственно. Обозначим через e единицу группы G. По предложению 4.5 $\alpha = \nu^{-1}(e)$ коперечислимо. Очевидно, $\nu x \neq \nu y \Leftrightarrow x \times f(y) \in (\omega \setminus \alpha)$. □

Авторам неизвестен ответ на вопрос: «*всякая ли локально негативная группа в сигнатуре с одной бинарной групповой операцией является негативной*?».

Если существуют локально негативные, но не негативные группы, то, в силу ряда причин, их строение должно быть весьма специфическим с алгоритмической точки зрения.

Следствие 4.5. *Всякая локально позитивная нумерация любого тела является вычислимой.*

Действительно, из локальной позитивности, а значит, согласно следствию 4.4, из позитивности тела вытекает его вычислимость (напомним, см. работу Ю. Л. Ершова [5], что всякая позитивная нумерация любой конгруэнц-простой универсальной алгебры эффективной сигнатуры вычислима).

Предложение 4.8. *Всякая локально негативная нумерация любого тела является негативной.*

Непосредственно вытекает из теоремы 4.1, т. к. локальная негативность тела обеспечивает эффективную невырожденность соответствующего ему перечислимо порожденного пространства.

4.3. Критерий эффективной вложимости области целостности в поле. А. И. Мальцевым в [50] построен знаменитый пример ассоциативного кольца без делителей нуля, не вложимого в тело. Более того, мультипликативная полугруппа построенного им кольца не вложима в группу. Эти результаты стимулировали авторов настоящей статьи к изучению вопросов эффективной вложимости колец в поля. Основная часть рассмотренных в данном разделе вопросов и понятий примыкает именно к этой проблематике.

По-видимому, в литературе по абстрактной вычислимости не уделялось должного внимания тому факту, что процедура вложения коммутативной области целостности в поле своих частных по существу является эффективной.

Идея конструкции поля частных для нумерованной области целостности, так же, как и в классическом случае, заключается в построении отношения эквивалентности (идеала кольца) на множествах пар номеров, вторые члены которых («знаменатели» формальных дробей) могут принимать в качестве значений все элементы перечислимого множества, являющегося дополнением нулевого элемента исходного кольца. К этой идее апеллирует и введенное выше понятие локальной негативности кольца.

Теорема 4.2. *Для всякой локально негативной области целостности существует негативное представление поля ее частных, в которое она эффективно вложима.*

Доказательство. Пусть $\langle R; +, * \rangle$ — ассоциативно-коммутативное кольцо без делителей нуля, ν — его локально негативная нумерация, 0 — нейтральный элемент аддитивной группы кольца R, а $\oplus, \otimes$ — вычислимые представления операций $+, *$ соответственно в нумерации ν. По предложению 4.1 множество $\alpha = \nu^{-1}(0)$ коперечислимо. Рассмотрим канторовскую свертку $c(\omega \times (\omega \setminus \alpha))$

перечислимого множества $(\omega \times (\omega\setminus\alpha))$ и назовем два числа x, y из $c(\omega \times (\omega\setminus\alpha))$ *находящимися в отношении* η, если $\nu(l(x) \otimes r(y)) = \nu(l(y) \otimes r(x))$ (здесь l, r — вычислимые функции взятия левого, соответственно правого, члена свертки). Неформально, правый член («знаменатель») упорядоченной пары строящегося поля частных отличен от нуля исходного кольца, а левый член («числитель») — может быть каким угодно. Из классического результата о вложимости области целостности в поле частных следует, что η — отношение эквивалентности и, более того, η — конгруэнция (идеал), согласованная с операциями $\oplus, \otimes$ кольца $\langle c(\omega \times (\omega\setminus\alpha)); \oplus, \otimes\rangle$. Вычислимые бинарные операции поля частных обозначим через g, h, где g представляет сложение в поле частных, а h — умножение. Тогда для любых $x, y \in \omega$ и $u, v \in \omega \setminus \alpha$ функции g, h на паре элементов a, b (здесь $g(a, b)$ и $h(a, b)$ обозначают $l(a) = x, r(a) = u; l(b) = y, r(b) = v$) действуют следующим образом: $g(c(x, u), c(y, v)) = c[(x \otimes v) \oplus (y \otimes u), u \otimes v]$ и $h(c(x, u), c(y, v)) = c[x \otimes y, u \otimes v]$.

При этом нумерованным полем частных является $(\langle\{c(\omega \times (\omega \setminus \alpha))/\eta\}; g, h\rangle, \mu)$, где μ — проектирующее отображение, т. е. $\mu(x) = x/\eta$.

Детали, связанные с вычислимым отображением перечислимого множества $(\omega \times (\omega\setminus\alpha)$ на ω, опускаем.

Локальная негативность нумерации μ поля частных $(\langle\{c(\omega \times (\omega\setminus\alpha))/\eta\}; g, h\rangle, \mu)$ очевидна, т. к. дополнением множества ν-номеров нуля кольца R в поле частных является множество $c((\omega\setminus\alpha) \times (\omega\setminus\alpha))$, которое является собственным μ-перечислимым подмножеством ω. Из локальной негативности поля частных, ввиду эффективной невырожденности нумерации μ, согласно теореме 4.1, следует негативность поля частных.

Покажем эффективную вложимость области целостности $(\langle R; +, *\rangle, \nu)$ в поле частных $(\langle\{c(\omega \times (\omega\setminus\alpha))/\eta\}; g, h\rangle, \mu)$. Для этого, прежде всего, зафиксируем в кольце R некоторый ν-номер ненулевого элемента, скажем, $n \in (\omega\setminus\alpha)$, такой, что $\nu l(n) = \nu r(n)$. Очевидно, что число $m = c(l(n), r(n))$ есть μ-номер смежного η-класса, являющегося мультипликативной единицей поля частных (заметим, что в самом кольце R мультипликативной единицы может и не быть).

Вычислимое отображение $\lambda x[f(x) = c(x, n)]$ осуществляет изоморфное вложение (R, ν) в поле его частных $(\langle\{c(\omega \times (\omega\setminus\alpha))/\eta\}; g, h\rangle, \mu)$. Детали, связанные с тем, что μ-номерным множеством поля частных является не ω, а перечислимое множество $\omega \times (\omega\setminus\alpha)$, так же, как и выше, опускаем. □

Следствие 4.6. *Всякая локально негативная область целостности негативна.*

Следует из эффективной вложимости локально негативной области целостности в локально негативное (а значит, по предложению 4.8, и негативное) поле.

Следствие 4.7. *Нумерованная коммутативная область целостности эффективно вложима в эффективно невырожденное поле тогда и только тогда, когда она негативна.*

Предложение 4.9. *Существует позитивная область целостности, эффективно не вложимая ни в какое эффективно невырожденное поле.*

Доказательство см. в [39].

В некотором уточняемом ниже смысле негативные модели приоритетнее позитивных. Например, всякое позитивное поле вычислимо, тогда как любое бесконечное вычислимо представимое поле, как уже отмечалось выше, имеет невычислимую негативную нумерацию (см. [70]).

5. Логические спецификации и алгоритмические представления моделей данных

Продемонстрируем возможности применения понятия отделимо нумерованной системы к решению некоторых вопросов теоретической информатики, расширения класса допустимых моделей данных и структурирования эффективно реализованных моделей данных.

5.1. Алгебраические спецификации и инициальные модели квазимногообразий. Одной из основных проблем теоретической информатики является проблема адекватного описания (спецификации) модели данных (т. е. алгебраической системы, отражающей законы изучаемой предметной области) в некотором формальном языке и реализации этой модели посредством некоторого семейства алгоритмов. Решение этой проблемы сводится к следующим двум вопросам:

1. выделение в классе моделей, удовлетворяющих спецификации (т. е. моделей, в которых выполняются все законы, заданные спецификацией), некоторых «стандартных» моделей, для которых гарантированно существуют эффективные реализации;
2. выбор наиболее рациональной (в тех или иных смыслах) алгоритмической реализации для модели спецификации.

Таким образом, речь идет о существовании и единственности эффективно реализуемой модели для спецификации. Подчеркнем, что говоря об эффективной реализации, мы подразумеваем наличие алгоритмических представлений (нумераций) модели, а не «эффективность» в практическом смысле, т. к. все наши рассмотрения проводятся в рамках дескриптивной теории алгоритмов.

Спецификация, как правило, есть конечный текст в некотором языке. Язык спецификаций необходимо должен быть формальным, с жесткой семантикой, не допускающей различные толкования, т. е. он должен быть логическим. Таковыми являются как математические языки описания вычислимых функций (машины Тьюринга, частично-рекурсивные функции, нормальные алгоритмы Маркова и т. д. [55]), так и практические языки программирования.

Наиболее изученным, простым и удобным языком, обладающим рядом полезных свойств, является язык исчисления предикатов первого порядка [54] и различные его фрагменты. Однако уже в этом языке наблюдаются эффекты существования разнообразных и весьма нежелательных моделей, удовлетворяющих спецификации. Рассмотрение в качестве спецификаций, например, счетно-категоричных теорий (т. е. теорий с единственными с точностью до изоморфизма счетными моделями) не решает проблему, т. к. таких теорий очень мало [54]. Для произвольных теорий в языке первого порядка понятия «стандартной» модели, вообще говоря, не существует, хотя для некоторых фрагментов этого языка такое возможно.

Например язык квазитождеств (или, чуть шире, универсальных хорновских предложений) в качестве используемого фрагмента языка первого порядка в полной мере удовлетворяет как требованию наличия «стандартной модели», так и эффективной реализуемости этой модели, а также единственности данной реализации.

В теории спецификаций программ можно считать достаточно утвердившимся тезис о позитивной представимости любой модели данных (см. [2]). Семантика таких моделей должна адекватно определяться их синтаксическими описаниями, которые, очевидно, обязаны иметь однозначно определенную интерпретацию и механизмы генерирования фактов о свойствах моделей. При этом реализация должна не просто существовать, но и строиться единообразным алгоритмическим методом, исходя из синтаксического материала, заключенного в спецификации (т. к. другого материала для построения модели попросту нет).

Универсальные хорновские предложения, являющиеся основой языков логического программирования, очень удобны в качестве языка спецификаций для моделей данных, что связано с двумя обстоятельствами:

1. всякое непротиворечивое эффективное множество универсальных хорновских предложений имеет позитивно представимую модель;
2. семантика этой модели заключена в устройстве инициальной модели данного множества предложений, которая всегда существует, и, более того, существует алгоритм извлечения ее эффективной реализации из синтаксического описания.

Эти факты являются классическими в математической логике (см. [54]), поэтому определение границ применимости данного языка, вопросы определимости моделей в классах их гомоморфных образов (инициальная семантика — строение свободной системы соответствующего ранга), а также о числе реализаций (эффективных, поскольку ничто другое нельзя считать реализацией в рамках идеологии теоретической информатики) являются основополагающими в этой парадигме программирования. Согласно этой парадигме алгоритм должен иметь не императивный, а декларативный характер, и решение задачи должно заключаться не в описании конкретных процедур достижения цели, а в формулировке желаемой цели, при предоставлении поиска реализующей процедуры самой машине (универсальному алгоритму), предпринимающей эти попытки, исходя из синтаксического материала описания модели данных.

Введем, следуя [63, 64, 67], следующее

Определение 5.1. *Эквациональной спецификацией* называется конечное множество тождеств.

В [63] доказано, что всякая вычислимо представимая конечнопорожденная алгебра конечной сигнатуры имеет обогащение, обладающее эквациональной спецификацией. Другими словами, всякая конечно порожденная алгебра конечной сигнатуры имеет обогащение, являющееся инициальной системой подходящего конечно-базируемого многообразия алгебр.

Идея использования эквациональных спецификаций восходит к этим же авторам (см. [63]). Однако выразительных возможностей языка исходной сигнатуры может оказаться недостаточно для эквационального описания. Примеров такого рода (как просматриваемый стек и т. д.) было много. Рассмотрим очень простой пример. Пусть $A = \langle \omega; 0, s, f\rangle$ — алгебра на множестве натуральных чисел ω, 0 — константа для нуля, s — функция следования ($s(x) = x + 1$) и f — функция квадрата числа ($f(x) = x^2$). Учитывая существенно большую скорость роста f относительно s, нетрудно показать, что ни для какого конечного множества тождеств E в сигнатуре $\Sigma = \langle 0, s, f\rangle$ фактор-алгебра $T_\Sigma / \equiv_E$ (где T_Σ — алгебра замкнутых термов сигнатуры Σ, а $\equiv_E$ — конгруэнция, порожденная на множестве $_\Sigma$ тождествами E) не является изоморфной алгебре A. Обогатим сигнатуру Σ до $\Sigma^* = \Sigma \cup \{d, h\}$, добавив символы унарной d и бинарной h функций, которые интерпретируем в A как функцию удвоения $d(x) = 2x$ и сложения соответственно. Очевидно, что следующее множество из 6 тождеств верно в A: $E^* = \{d(0) = 0,\ ds(x) = ssd(x),\ h(x, 0) = x,\ h(x, s(y)) = sh(x, y),$ $f(x) = 0,\ fs(x) = s(h(f(x), d(x)).$ Заметим, что эти тождества по существу являются примитивно рекурсивными определениями упомянутых функций. В упомянутой выше работе [63] показано, что Σ-обеднение алгебры $T_{\Sigma^*} / \equiv_{E^*}$ изоморфно A, и A не является инициальной алгеброй ни в каком конечно базируемом многообразии в своей сигнатуре.

Отметим также важнейший, с точки зрения приложений в теоретической информатике, факт. Для любого конечного множества тождеств инициальная алгебра строится единообразным эффективным «некреативно-механическим» способом, т. к., если два слова равны в инициальной алгебре (т. е. являются логическими следствиями определяющей системы тождеств), то этот факт рано или поздно обязательно подтвердится. Однако даже если инициальная алгебра вычислима (т. е. проблема равенства слов в ней алгоритмически разрешима), то по системе тождеств не всегда можно построить алгоритм, определяющий различные слова по модулю конгруэнции, индуцированной тождествами. То есть алгоритм, конечно же, может и существовать, но автоматически сгенерировать его из синтаксического материала, содержащегося в тождествах, нельзя, что соответствует невозможности равномерно эффективного перехода от перечислимых индексов вычислимых множеств к их характеристическим индексам (см. [57, 58]).

Таким образом, метод эквационального специфицирования моделей данных оказался достаточно универсальным, т. к. всякая вычислимо представимая конечно порожденная алгебра конечной сигнатуры имеет эквациональное описание. Очевидно, что всякая инициальная алгебра любой эквационально спецификации имеет позитивное представление (перечислимую проблему равенства слов, т. е. термов), но вычислимым представлением может и не обладать. Например, конечно определенная полугруппа с неразрешимой проблемой равенства слов [55]. Добавление новых операций к сигнатуре может только сузить класс алгоритмических представлений, но никак не расширить. Это поставило следующую принципиальную проблему:

«*Всякая ли конечно порожденная позитивно представимая алгебра имеет обогащение, являющееся инициальной алгеброй некоторого конечно базируемого многообразия*?»

Отрицательное решение данной проблемы предполагало нахождение таких свойств алгебр, которые, с одной стороны, «мешают» им быть инициальными в конечно базируемых многообразиях, а с другой стороны — эти свойства должны быть инвариантными относительно их позитивных представлений. Теория эффективно отделимых алгебр предоставляет такие инструменты.

Из предложения 2.3 и следствия 2.2 вытекает

Теорема 5.1. *Существует конечно порожденная позитивно представимая алгебра, никакое обогащение которой не является инициальной системой ни в каком конечно базируемом многообразии.*

Доказательство. Построенная в предложении 2.3 конечно порожденная алгебра A обладает вычислимо отделимой позитивной нумерацией μ с иммунной характеристической трансверсалью $tr(ker(\mu))$. Покажем, что всякое позитивно представимое обогащение алгебры A является финитно аппроксимируемым.

Прежде всего заметим, что если A^* — позитивно представимое обогащение алгебры A и ν — любое позитивное представление этого обогащения, то, в силу вычислимой устойчивости относительно позитивных представлений конечно порожденных алгебр, эти представления вычислимо изоморфны, т. е. существуют такие вычислимые функции f, g, что $\mu = \nu f$ и $\nu = \mu g$. Поэтому нумерация μ, с точностью до вычислимого изоморфизма, является также позитивным представлением обогащения A^*. Как было отмечено выше, (A^*, μ) аппроксимируется негативными алгебрами ввиду справедливости основной структурной теоремы теории вычислимо отделимых алгебр: нумерованная алгебра вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами.

Пусть a, b — различные элементы алгебры A^*. Тогда существуют эффективный на μ-номерах сюръективный гомоморфизм $\varphi_{a,b}$ из (A^*, μ) на некоторую негативную алгебру (B, ξ) (в сигнатуре алгебры A^*), различающий эти элементы (т. е. $\varphi_{a,b}(a) \neq \varphi_{a,b}(b)$), и такая вычислимая функция h, что $\varphi_{a,b}\mu = \xi h$. Ясно, что фактор-алгебра $A^*/\theta(a, b)$ (где через $\theta(a, b)$ обозначена конгруэнция, $\{\langle c, d\rangle | \varphi_{a,b}(c) = \varphi_{a,b}(d)\}$) изоморфна B.

Рассмотрим нумерованную алгебру $(A^*/\theta(a, b), \mu^*)$, где $\mu^* = \theta(a, b)\mu$, которая вычислимо изоморфна негативной алгебре (B, ξ). При этом вычислимый изоморфизм осуществляется сводящей функцией h. Т.к. $\mu^*(x) = \mu^*(y) \Leftrightarrow \xi h(x) = \xi h(y)$, а ξ — негативная, то и μ^* также негативна. Теперь заметим, что $ker(tr(\mu^*)) \subseteq ker(tr(\mu))$, т. к. если эквивалентность η_0 расширяется эквивалентностью η_1, то характеристическая трансверсаль расширения η_1 является подмножеством характеристической трансверсали расширяемой эквивалентности η_0. Но $ker(tr(\mu)$ иммунна, а $ker(tr(\mu^*))$ перечислима (т. к. μ^* негативна). Следовательно, $ker(tr(\mu^*))$, а значит и B конечна. Таким образом, A^* финитно аппроксимируема.

Именно алгебра A и является примером конечно порожденной позитивно представимой алгебры, никакое позитивно представимое обогащение которой не является инициальной ни в каком конечно базируемом многообразии.

Предположим противное. Пусть A^* — позитивно представимое обогащение алгебры A, инициальное в конечно базируемом многообразии, заданном конечной системой тождеств E. Через T_Σ обозначим множество всех замкнутых термов конечной сигнатуры Σ обогащения A^*. Инициальность означает свободу ранга 0, т. е. A^* порождена сигнатурными константами. Ясно, что A^* изоморфна $T_\Sigma / \equiv_E$, где $\equiv_E$ — конгруэнция на абсолютно свободной алгебре термов T_Σ, порожденная системой тождеств E, т. е. $A^* \models t_1 = t_2 \Leftrightarrow E \vdash t_1 = t_2$. Очевидно, что для любой конечной Σ-алгебры B, порожденной Σ-константами можно эффективно проверить, выполняется ли E в B или нет. Ясно также, что для всякого $n \in \omega$ имеется конечное число типов изоморфизма порожденных константами Σ-алгебр мощности n. Поэтому множество типов изоморфизма конечных Σ-алгебр, порожденных константами и принадлежащих многообразию $\mathfrak{M}$, порожденному системой E, является алгоритмически разрешимым. Если $A^* \models t_1 = t_2$, то этот факт подтвердится через конечное число шагов в силу позитивности инициальной системы любого эффективно аксиоматизируемого многообразия. Если же $A^* \models t_1 \neq t_2$, то, в силу финитной аппроксимируемости A^*, в последовательности конечных Σ-алгебр из многообразия $\mathfrak{M}$ обязательно найдется такая конечная Σ-алгебра B, порожденная константами, в которой $t_1 \neq t_2$, т. е. A^* негативна, а значит, и разрешима, что невозможно, т. к. A^* не имеет разрешимых представлений. Противоречие. □

Отметим очень важный момент в доказательстве этой теоремы. Если, например, речь идет об инициальности в конечно базируемом квазимногообразии $\mathfrak{Q}$, заданном конечной системой квазитождеств QE, то метод не проходит, т. к. гомоморфные образы инициальной алгебры квазимногообразия не обязаны находиться в классе $\mathfrak{Q}$, поскольку квазитождества не являются устойчивыми относительно гомоморфизмов. Однако, как будет показано далее, в некоторых случаях возможно обобщение данного результата на более широкие классы формул, которые устойчивы относительно гомоморфизмов специальных видов.

Далее под словом «*спецификация*» будем понимать вычислимо перечислимое множество предложений логики первого порядка.

Спецификацию назовем *хорновской* (*универсальной*, *экзистенциальной*, *индуктивной* и т. д.), если каждое предложение из нее есть предложение хорновское (соответственно универсальное, экзистенциальное, индуктивное и т. д.).

Определение 5.2. Бескванторная формула называется *дизъюнктивно-импликативно-позитивной* (*ДИП-формулой*), если она имеет один из следующих трех видов:

1. $A_1 \vee \ldots \vee A_n \to \Phi$,
2. $A_1 \vee \ldots \vee A_n \to F$,
3. Φ,

где A_i — атомарные, Φ — позитивная формулы, а F — «ложь».

ДИП-формулами являются, в частности, конъюнкции отрицаний атомарных (случай 2), позитивные формулы (случай 3), а также бескванторные части однопосылочных квазитождеств вида $A_1 \to B$ (при $n = 1$ и атомарности Φ). Универсальное замыкание ДИП-формулы называется *универсальным ДИП-предложением*.

Негативные модели, опять-таки, образуют важный класс равномерно вычислимо отделимых моделей (см. [25]).

Предложение 5.1. *Для нумерованной модели (M, ν) равносильны следующие условия*:

1. (M, ν) — *равномерно вычислимо отделимая модель*;
2. *если Φ — перечислимое множество универсальных ДИП-предложений, реализующееся в M, то (M, ν) равномерно аппроксимируется негативными Φ-моделями* (*т. е. негативными моделями, в которых реализуется Φ*).

Доказательство см. в [23, 38]. Важность универсальных ДИП-формул для равномерно вычислимо отделимых моделей с точки зрения аппроксимируемости связана с тем, что если универсальное ДИП-предложение истинно в модели, но на каком-то наборе ложна правая часть, то на этом наборе ложна и левая часть, т. е. ни один из атомарных дизъюнктивных членов левой части не может быть истинным и, следовательно, каждый из них можно «расщепить» с помощью алгоритма равномерной отделимости. Процесс итерируется. При этом, если, скажем, значения какой-то операции попадают в разные классы, а аргументы остаются «склеенными», то эти аргументы «расклеиваются», причем эту процедуру можно выполнять через трансляции (согласованность которых определяется однопосылочными квазитождествами, т. е. ДИП-предложениями). Предельная конструкция будет негативной конгруэнцией, в факторе по которой реализуется исходное множество ДИП-предложений. Заметим, что уже для квазитождеств вида $A \wedge B \Rightarrow C$ (не являющихся ДИП-предложениями) указанная процедура не работает, т. к. если C ложно на некотором наборе, то на этом наборе не могут одновременно реализовываться и A, и B, однако, вообще говоря, нельзя определить, который из двух конъюнктивных атомарных членов в действительности ложен.

В формулировке этой теоремы нельзя заменить универсальные ДИП-предложения произвольными универсальными и экзистенциальными ДИП-предложениями, так же, как нельзя опустить условие равномерности (см. [23]).

Предложение 5.2. *Существует конечно порожденная равномерно вычислимо отделимая позитивная модель с иммунной характеристической трансверсалью.*

Общий метод построения таких моделей приведен в [23, 25].

Теорема 5.2. *Существует конечно порожденная позитивно представимая алгебра конечной сигнатуры, никакое обогащение которой не является инициальной системой ни в каком конечно базируемом многообразии* (*квазимногообразии, задаваемом однопосылочными квазитождествами, позитивном классе*).

Доказательство см. в [23]. По поводу этой теоремы отметим, что она существенно обобщает теорему 5.1 и позволяет частично преодолеть трудности, связанные с неустойчивостью формул того или иного вида относительно гомоморфизмов.

Таким образом, выразительная мощность естественных фрагментов языка логики предикатов первого порядка с хорошими интерпретациями оказывается недостаточной для адекватного алгебраического описания класса всех моделей данных.

Если (M, ν) — нумерованная модель, то через M_ν, будем обозначать следующее обогащение модели M счетным множеством констант, каждая из которых не принадлежит сигнатуре модели M: $\nu n = c_n$. Модель M_ν будем называть *стандартным ν-обогащением* модели M. Далее нумерованная модель (M, ν) и обогащение M_ν модели M будут отождествляться, поскольку в рассматриваемых нами случаях эти представления вычислимо эквивалентны.

Пусть (M, ν) — позитивная модель, Φ — универсальная хорновская спецификация в сигнатуре модели M, реализующаяся в M. Тогда, очевидно, Φ реализуется и в M_ν. Известно (см. [25]), что если Φ не реализуется ни в каком эффективном гомоморфном образе модели M_ν, то ν — вычислимая нумерация. Другими словами, если (M, ν) — позитивная невычислимая модель и Φ — универсальная хорновская спецификация, реализующаяся в M, то в классе Φ-моделей содержатся собственные позитивно представимые гомоморфные образы M.

Следовательно, никакую позитивную невычислимую модель нельзя выделить в классе ее собственных позитивных гомоморфных образов никакой универсальной хорновской спецификацией.

Известно также, что никакую позитивную невычислимую модель нельзя выделить в классе ее собственных гомоморфных образов никакой универсальной спецификацией (см. [12]).

Сказанное выше поставило проблему определения тонкой грани (если она существует) между выразительными возможностями универсальных хорновских и универсальных спецификаций в рамках проблемы определимости модели в классе ее гомоморфных образов (проблема № 13 из [25]). Иначе говоря, можно ли в принципе выделить позитивную невычислимую модель в классе ее собственных эффективных гомоморфных образов подходящей универсальной спецификацией?

Теорема 5.3. *Существует позитивно представимая модель M, не обладающая вычислимыми представлениями, которая выделяется в классе своих собственных позитивно представимых гомоморфных образов подходящей универсальной спецификацией.*

Доказательство см. в [38].

Уникальность модели из теоремы 5.3 демонстрирует следующий факт.

Следствие 5.1. *Существуют позитивно представимая модель M и ее универсальная спецификация Φ со следующими свойствами*:

- *M не имеет вычислимого представления*;
- *всякая позитивно представимая Φ-модель, построенная из констант, изоморфна M*;
- *M изоморфно вложима во всякую позитивно представимую Φ-модель.*

Заметим, что теорему 5.3 можно усилить.

Следствие 5.2. *Существует позитивно представимая модель, не обладающая вычислимыми представлениями, которая выделяется в классе своих собственных позитивно представимых гомоморфных образов подходящей бескванторной спецификацией.*

Очевидно, что такая спецификация не может быть хорновской.

Таким образом, язык универсальных спецификаций оказывается существенно богаче языка универсальных хорновских предложений с точки зрения возможности адекватного описания эффективно представимых моделей.

5.2. Позитивные и негативные упорядоченные модели данных в рамках теоретической информатики. Общеизвестно, что всякое позитивное представление стандартной модели арифметики $\Omega = \langle \omega;\ 0, s, +, * \rangle$ в сигнатуре $\Sigma = \langle 0, s, +, * \rangle$ (где ω обозначает множество натуральных чисел, а Σ-символы имеют очевидные естественные интерпретации) является вычислимым (см., например, [5]). Более того, вычислимы также любые позитивные представления обеднений Ω_0, Ω_1, Ω_2 модели Ω в обедненных сигнатурах $\Sigma_0 = \langle 0, s \rangle$, $\Sigma_1 = \langle 0, s, + \rangle$, $\Sigma_2 = \langle 0, s, +, * \rangle$ соответственно (заметим, что Σ_1 является языком арифметики Пресбургера, а Σ_2 — арифметики Пеано). Более того, любая пара позитивных представлений этой модели вычислимо изоморфна, т. е. Ω вычислимо устойчива относительно позитивных реализаций.

Менее известен тот факт, что Ω обладает негативными невычислимыми представлениями (см. [70]). В теоретической информатике под реализационной полнотой некоторой «стандартной» модели программной спецификации понимается единственность позитивного представления этой модели, т. е. вычислимая изоморфность всех позитивных представлений упомянутой модели (см. [5]). С этой точки зрения стандартная модель арифметики Пеано не является реализционно полной относительно ее негативных представлений, поскольку имеется как минимум два негативных представления — общеизвестное вычислимое и негативное невычислимое.

Следуя [2], под упорядоченной арифметикой будем понимать теорию первого порядка в сигнатуре $\Sigma_\leqslant = \langle\omega;\ 0, s, +, *, \leqslant\rangle$ (где 0 обозначает константный символ, s — символ унарной операции, $+$ и $*$ — имена бинарных операций, а $\leqslant$ — символ бинарного отношения), заданную следующими множеством $AxGon$ аксиом:

A1 $(\forall xy)(s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$;
A2 $(\forall x)(s(x) \neq x)$;
A3 $(\forall x)(x \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(s(y) = x))$;
A4 $(\forall x)(x + 0 = x)$;
A5 $(\forall xy)(x + s(y) = s(x + y))$;
A6 $(\forall x)(x * 0 = 0)$;
A7 $(\forall xy)(x * s(y) = x * y + x)$;
A8 $(\forall xy)(x \leqslant y \Leftrightarrow (\exists z)(x + z = y))$;
A9 $(\forall xyz)(x \leqslant x \wedge (x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x = y) \wedge (x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z) \wedge (x \leqslant y \vee y \leqslant x))$;
A10 $\Phi(0) \wedge (\forall x)(\Phi(x) \Rightarrow \Phi(s(x)) \Rightarrow (\forall x)(\Phi(x))$,

где $\Phi(x)$ — произвольная формула сигнатуры $\Sigma_\leqslant$ с одной свободной переменной x (схема аксиом математической индукции).

Под стандартной моделью упорядоченной арифметики понимается классическая модель арифметики $\Omega_\leqslant = \langle\omega;\ 0, s, +, *, \leqslant\rangle$, где ω обозначает множество натуральных чисел, а $\Sigma_\leqslant$-символы $0, s, +, *, \leqslant$ имеют очевидные естественные интерпретации.

Заметим,что первые три аксиомы описывают инъективную функцию следования ($A1$) без неподвижных точек ($A2$), областью значений которой является все основное множество, кроме константы 0 ($A3$). Аксиомы с $A4$ по $A7$ задают примитивно рекурсивные определения функций сложения и умножения. $A8$ определяет согласованность сложения с отношением $\leqslant$, являющимся линейным порядком, что постулируется $A9$. Наконец, $A10$ задает бесконечную, но вычислимую группу аксиом, позволяющих доказывать предложения в аксиоматической системе $AxGon$ методом математической индукции, основанной на простейшем порядковом типе первого бесконечного ординала ω.

В рамках сигнатуры Σ, являющейся ограничением сигнатуры $\Sigma_\leqslant$ упорядоченной арифметики на сигнатуру арифметики Пеано, как уже отмечалось выше, существуют различные (вычислимо неизоморфные) алгоритмические представления. Однако оказалось, что всякое негативное представление стандартной модели упорядоченной арифметики в сигнатуре $\Sigma_\leqslant$ является вычислимым (см. [33]), т. е. все алгоритмические представления стандартной модели упорядоченной арифметики, ядра нумераций которых принадлежат классу $\Sigma^0_1 \cup \Pi^0_1$, являются вычислимо изоморфными. Другими словами, для стандартной модели упорядоченной арифметики существует единственная алгоритмическая реализация в классе как позитивных, так и негативных представлений.

Предложение 5.3. *Всякая негативная нумерация стандартной модели $\Omega_\leqslant$ теории $AxGon$ является вычислимой.*

Доказательство. Пусть $\nu : \omega \to \Omega_\leqslant$ — негативная нумерация стандартной модели $\Omega_\leqslant$, а f — вычислимая функция, представляющая операцию s в нумерации ν, т. е. $\forall x(s\nu(x) = \nu f(x))$. По условию множество $\alpha = \{\langle u, v\rangle | \nu u \nleqslant \nu v\}$ является перечислимым. Обозначим через $s^k(0)$ выражение $s \ldots s(0)$, в котором функциональный символ s встречается ровно k раз, зафиксируем $m \in \nu^{-1}(0)$ и определим строгий линейный порядок $<$ на $\Omega_\leqslant$, индуцированный порядком $\leqslant$: $\nu u < \nu v \Leftrightarrow \langle v, u\rangle \in \alpha$. Очевидно, что порядок $<$ является ν-перечислимым. Достаточно показать позитивность ν. Ясно, что $x = y \Leftrightarrow \exists k \in \omega(f^k(m) < x < f^{k+2}(m) \wedge f^k(m) < y < f^{k+2}(m))$. Следовательно, нумерация ν является вычислимой.

Покажем позитивность порядка $\leqslant$ в нумерации ν.

В самом деле, $\nu x \leqslant \nu y \Leftrightarrow (\nu x = \nu y \vee \nu y \nleqslant \nu x)$. Так как правая часть равносильности перечислима, то $\leqslant$ является ν-позитивной, а значит, и ν-вычислимой. □

Этот факт обуславливает целесообразность введения в рассмотрение дискретно упорядоченных структур, что существенно расширяет класс используемых моделей данных с сохранением единственности алгоритмической реализации.

Рассмотрим упорядоченное унитарное кольцо $\Re = \langle R; +, *, \leqslant \rangle$ в сигнатуре $\langle +, *, \leqslant \rangle$ (предполагается выполнение условия согласованности кольцевых операций с линейным порядком). Допустим, что $\Re$ упорядочено отношением $\leqslant$ по типу целых чисел $\mathbb{Z}$. Тогда верна

Теорема 5.4. *Всякое негативное представление кольца $\Re$ вычислимо, и любая пара таких представлений вычислимо изоморфна.*

Доказательство см. в [33].

С другой стороны, очевидно, что всякое позитивное представление такого кольца также вычислимо и все его вычислимые представления вычислимо изоморфны.

Таким образом, введение согласованного линейного порядка для широкого класса естественных колец гарантирует единственность эффективного представления как в классе позитивных, так и негативных представлений.

Следствие 5.3. *Всякое негативное представление модели $\Omega_{\leqslant}$ вычислимо.*

Следствие 5.4. *Модель $\Omega_{\leqslant}$ имеет единственное негативное представление.*

Следствие 5.5. *Стандартная модель $\Omega_{\leqslant}$ теории $AxGon$ вычислимо устойчива как относительно позитивных, так и относительно негативных представлений.*

Следствие 5.6. *Стандартная модель $\Omega_{\leqslant}$ теории $AxGon$ реализационно полна в классе позитивных и негативных представлений.*

Замечание 5.1. В теоретическом программировании одной из ключевых задач является проблема единственности эффективной реализации абстрактной модели данных, т. е. эквивалентности (=вычислимой изоморфности) различных реализаций некоторой стандартной модели для заданной спецификации. Под эффективным представлением модели обычно понимается позитивное. Однако негативные представления порой несут не менее важную семантическую информацию о свойствах стандартной модели спецификации (обоснования этого тезиса см. в [2, 25, 31, 38]), поэтому представляется целесообразным рассматривать в качестве представлений модели данных ее алгоритмические представления и в других нижних классах иерархии Клини—Мостовского. Одним из уточнений такого подхода является рассмотрение в качестве алгоритмических представлений не только позитивных, но и негативных. В рамках такого подхода стандартная модель арифметики Пеано (тем более, арифметики Пресбургера), как отмечено выше, не является реализационно полной. Тем не менее, при добавлении естественного порядка, реализационная полнота (как относительно позитивных, так и негативных представлений) может иметь место.

Нумерованная модель называется *отделимой*, если всякая точка ложности любого отношения имеет перечислимую (в данной нумерации) окрестность, не пересекающуюся с областью истинности этого отношения. Если семейство отделяющих множеств имеет вычислимую нумерацию (т. е., неформально говоря, его можно задать посредством некоторого перечислимого множества перечислимых индексов), то нумерация называется *эффективно отделимой*. Наконец, равномерно эффективная отделимость означает, что по точке ложности отношения можно эффективно построить перечислимый индекс такой ее окрестности, которая не содержит точек истинности данного отношения. Эффективная отделимость предполагает наличие перечислимой окрестности из некоторого вычислимого семейства окрестностей, в то время как равномерно эффективная отделимость позволяет явно строить эти окрестности имея точки ложности.

Покажем, что позитивные и негативные линейные порядки представляют собой классические образцы отделимых моделей.

Предложение 5.4. *Позитивные и негативные линейные порядки являются равномерно эффективно отделимыми.*

Доказательство. Пусть $(\langle L; \leqslant \rangle, \mu)$ — позитивный линейный порядок. Допустим, что $\mu a \nleqslant \mu b$. Тогда, в силу линейности порядка, имеет место $\mu b < \mu a$, где $<$ — строгий порядок, индуцированный рефлексивным порядком $\leqslant$ на L. Рассмотрим множество упорядоченных пар $\alpha = \{\langle x, y \rangle | \mu a \leqslant \mu x \wedge \mu y \leqslant \mu b\}$, которое, очевидно, μ-замкнуто и перечислимо. По построению в $\mu\alpha$ нет точек истинности $\leqslant$ и $\langle a, b \rangle \in \alpha$. Ясно также, что по данной паре $\mu a \nleqslant \mu b$ отделяющее множество α строится равномерно эффективно.

Эффективная отделимость ядра представления $ker(\mu)$ следует из предложения 3.2.

Пусть теперь $(\langle L;\leqslant\rangle,\mu)$ — негативный линейный порядок. Тогда ядро $ker(\mu)$, по предложению 3.2, эффективно (даже вычислимо) отделимо. Обозначим через γ множество $\{\langle x,y\rangle|\mu x \nleqslant \mu y\}$, т. е. γ — μ-перечислимое дополнение порядка $\leqslant$ в нумерации μ. Заметим, что в этом случае строгий порядок $<$ будет перечислимым, т. к. $\mu x < \mu y \Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in \gamma$. Пусть $\mu a \nleqslant \mu b$, тогда $\mu b < \mu a$. Если между μb и μa есть пара различных соседних элементов (т. е. между которыми нет элементов порядка $(\langle L;\leqslant\rangle,\mu)$), скажем, $\mu b \leqslant \mu c < \mu d \leqslant \mu a$ и $\neg\exists e(\mu c < \mu e < \mu d)$, то сечение $B|A$, где $B=\{x|\mu x < \mu d\}=\{x|\langle d,x\rangle\in\gamma\}$, $A=\{x|\mu c<\mu x\}=\{x|\langle x,c\rangle\in\gamma\}$ является перечислимым (даже вычислимым, т. к. $B\cup A=\omega\wedge B\cap A=\varnothing$), строится равномерно по a,b и $a\in A\wedge b\in B$. Тогда вычислимым расширением точки ложности $\langle\mu a,\mu b\rangle$ порядка $\leqslant$ будет μ-вычислимое множество $\mu(A)\times\mu(B)$, которое, очевидно, не пересекается с областью истинности порядка $\leqslant$. Если же между $\mu b,\mu a$ соседних элементов нет, то интервал $\{\mu x|\mu b<\mu x<\mu a\}$ упорядочен отношением $\leqslant$ по типу рациональных чисел. В этом случае, используя вычислимые строго возрастающие (убывающие) фундаментальные последовательности Коши, можно построить такое вычислимое сечение $B|A$, для которого в B нет наибольшего элемента, а в A — наименьшего и $b\in B\wedge a\in A$ (см. [32]). Тогда $\mu(A)\times\mu(B)$, опять-таки, является даже вычислимым расширением точки $\langle\mu a,\mu b\rangle$, не пересекающимся с областью истинности порядка $\leqslant$ на L. ☐

С некоторыми другими фактами об эффективно отделимых линейных порядках (в т. ч. об их вычислимо необратимых автоморфизмах, соотношениях между предельными точками порядков и алгоритмическими свойствами эквивалентностей, над которыми эти порядки определимы) можно ознакомиться в [27–30, 33, 40, 42].

5.3. Степени представимости алгебраических систем. Здесь будут изучаться не тьюринговы степени представимости структур, а специфические степени, образованные эквивалентностями и отражающие потенциалы различных эквивалентностей для представлений над ними алгебраических систем.

С точки зрения представимости систем над эквивалентностью «первичным» фиксированным понятием является эквивалентность (что порождает проблему описания общих свойств всех систем, представимых над заданной эквивалентностью), в то время как в рамках теории нумерованных систем основной объект есть сама система, по отношению к которой все ее нумерации «вторичны» (соответственно, в этом случае основная проблематика — описание свойств нумераций с теми или иными качествами и соотношений между ними). Однако эти понятия двойственны, что мы и будем использовать в дальнейшем без каких-либо ограничений и оговорок, если из контекста будет явно вытекать то, что имеется в виду (см. [10, 25]).

Далее в качестве допустимых моделей мы будем понимать линейно упорядоченные модели. Важнейшими типами эффективно отделимых (даже равномерно эффективно отделимых, см. предложение 3.2) линейных порядков являются позитивные и негативные. При этом негативные модели в определенном смысле даже более предпочтительны, чем позитивные, что обуславливается по меньшей мере тремя причинами.

Во-первых, согласно [65] существует линейный порядок, обладающий позитивным представлением, но не имеющий вычислимой реализации. С другой стороны, классическим фактом является то, что для всякого негативно представимого линейного порядка существует его вычислимое представление (см. [4]).

Напомним (см. определение 1.2), что линейный порядок $\langle L;\preceq\rangle$ называется *определимым* над позитивной (негативной) эквивалентностью η, если существует такая позитивная (соответственно негативная) нумерация $\nu:\omega\to L$ этого порядка с перечислимым (коперечислимым) ядром $ker(\nu)=\eta$, что множество $\{\langle x,y\rangle|\nu x\preceq_\nu y\}$ (где $\preceq_\nu$ обозначает представление порядка $\preceq$ в нумерации ν) является перечислимым (соответственно коперечислимым).

Замечание 5.2. При этом позитивная определимость линейного порядка над негативной эквивалентностью (равно как и негативная определимость линейного порядка над позитивной эквивалентностью) автоматически влечет вычислимость как отношения эквивалентности, так и отношения порядка (см. [32]). Поэтому далее мы рассматриваем лишь содержательные случаи, неявно предполагая позитивную определимость линейного порядка над позитивной же эквивалентностью (соответственно, негативную определимость линейного порядка над негативной эквивалентностью).

Второе важное наблюдение состоит в следующем.

Существует такая позитивная эквивалентность, над которой вообще не определим никакой линейный порядок (см. [32]). Для негативных эквивалентностей ситуация диаметрально противоположная:

Над всякой негативной эквивалентностью определим линейный порядок. Более того, над всякой бесконечной негативной эквивалентностью определимы все типы изоморфизмов плотных линейных порядков (и не только они! — см. [32]).

В-третьих, существует такая позитивная эквивалентность η, над которой определим порядковый тип рациональных чисел, однако множество вычислимых нетривиальных дедекиндовых сечений этого порядка пустое (более того, вычислимая η-топология тривиальна, а перечислимая — дискретна, см. [71]).

Над всякой же бесконечной негативной эквивалентностью не только определим линейный порядок, изоморфный порядку рациональных чисел, но и множество вычислимых сечений данного порядка «эффективно неисчерпаемо», т. е. для всякого «вычислимого» (в смысле Ю. Л. Ершова [4]) семейства вычислимых сечений (заданного некоторым алгоритмом перечисления индексов этих сечений) данного нумерованного порядка можно «некреативно-механически» построить алгоритм разрешения некоторого вычислимого сечения, находящегося вне данного семейства (см. [32]).

Это свойство есть не что иное, как вариант теоремы Геделя о неполноте, сформулированной им для арифметики (о продуктивности множества арифметических истин; см., например, [57]).

Для полноты картины повторим в тезисной форме важнейшие факты о продуктивности, приведенные в [32]. Факт эффективной реализуемости плотных линейных порядков над любой бесконечной негативной эквивалентностью особо значим как на фоне отмеченного выше утверждения о существовании бесконечных позитивных эквивалентностей, над которыми вовсе не представимы никакие линейные порядки, так и в свете следующего предложения о существовании богатых семейств вычислимых сечений негативных плотных порядков.

Предложение 5.5. *Для любого негативного плотного линейного порядка существует эффективная процедура, сопоставляющая всякой паре различных элементов этого порядка вычислимую щель, отделяющую эти элементы.*

Доказательство см. в [32].

Таким образом, в негативных плотных линейных порядках для любой пары различных элементов отделяющая их вычислимая щель не просто существует, но, более того, разрешающий алгоритм соответствующей щели дается равномерно эффективной процедурой по данной паре элементов.

Дадим точное определение вычислимого семейства вычислимых сечений негативного линейного порядка.

Пусть χ — фиксированная вычислимая нумерация семейства всех одноместных частично вычислимых функций. Например, если k — бинарная клиниевская функция, универсальная для класса унарных частично вычислимых функций (т. е. семейство одноместных частично вычислимых функций есть множество объектов $\{\lambda x.k(x,n)|n \in \omega\}$), то можно положить $\chi(n) = \lambda x.k(x,n)$.

Следующие определения содержат неизбежные коллизии, возникающие при различных толкованиях вездесущего прилагательного «вычислимый», о чем было упомянуто выше.

Определение 5.3. Нумерация γ семейства вычислимых сечений $\Re$ негативного линейного порядка называется *вычислимой*, если существует такая вычислимая функция f, что $\gamma = \chi f$ (т. е. по любому γ-номеру сечения эффективно определяется некоторый его χ-номер, являющийся индексом характеристической функции нижнего класса данного сечения).

Семейство вычислимых сечений негативного линейного порядка называется *вычислимым*, если существует его вычислимая нумерация.

Неформально, вычислимость семейства вычислимых сечений означает перечислимость алгоритмов разрешения для сечений данного семейства.

Назовем семейство вычислимых щелей негативного линейного порядка *относительно полным*, если любая пара различных элементов этого порядка отделяется подходящей щелью из данного семейства.

Следствие 5.7. *Для всякого негативного плотного линейного порядка существует вычислимая* (*даже негативная*) *нумерация относительно полного семейства вычислимых щелей.*

Доказательство см. в [32]. Перечисляя множество всех пар различных по модулю негативной эквивалентности натуральных чисел и сопоставляя каждой такой паре индекс характеристической функции нижнего класса отделяющей их щели, получим искомую вычислимую нумерацию. В действительности, всякая такая вычислимая нумерация будет негативной, т. к. для двух различных сечений гарантированно найдется элемент, принадлежащий верхнему классу для одного из этих сечений и нижнему классу — для другого. Детали опускаем.

В связи с существованием относительно полной системы отделяющих вычислимых щелей, задаваемой равномерно эффективной процедурой, возникает естественный и принципиальный вопрос об алгоритмической природе совокупности всех вычислимых сечений негативного плотного линейного порядка.

Определение 5.4. Семейство $\Re$ вычислимых сечений нумерованного линейного порядка называется *продуктивным*, если существует эффективная процедура, позволяющая по каждому вычислимому подсемейству $\Re_0 \subseteq \Re$ строить вычислимое сечение из $\Re \setminus \Re_0$.

Теорема 5.5. *Семейство всех вычислимых сечений негативного плотного линейного порядка является продуктивным.*

Доказательство см. в [32].

Следствие 5.8. *Множество всех вычислимых сечений произвольного негативного плотного линейного порядка не является вычислимым.*

Как отмечалось выше, понятие представимости (определимости) алгебраической системы над эквивалентностью η над ω оказалось полезным для решения ряда задач логики и теоретического программирования.

Мы хотим ввести на фактор-множестве множества отделимых эквивалентностей по модулю отношения «реализовывать равнообъемные классы моделей данных» частичный порядок, который неформально можно интерпретировать как «степень универсальности эквивалентности» с точки зрения возможности определения над ней различных моделей данных. Каждый такой класс эквивалентных эквивалентностей (по модулю равнообъемности определимых над ними классов моделей данных) будем называть *степенью представимости моделей данных* или, если ясно из контекста, просто *степенью представимости*.

Продемонстрируем введенное понятие на примере негативных и позитивных линейных порядков.

Для негативной эквивалентности η обозначим через $L(\eta)$ класс всех линейных порядков, негативно представимых над η.

На множестве негативных эквивалентностей на ω введем следующее бинарное отношение $\trianglelefteq_{NLO}$:

$$\eta_1 \trianglelefteq_{NLO} \eta_2 \Leftrightarrow L(\eta_1) \subseteq L(\eta_2).$$

Очевидно, что $\trianglelefteq_{NLO}$ является предпорядком (т. е. рефлексивным и транзитивным отношением) на множестве всех негативных эквивалентностей на ω. Тогда его симметричное замыкание $\equiv_{NLO}$ есть эквивалентность, факторизация по которой разбивает множество всех негативных эквивалентностей на $\equiv_{NLO}$-классы эквивалентности. Содержательно, $\equiv_{NLO}$-эквивалентность двух эквивалентностей означает совпадение представимых над ними классов порядковых типов.

Если Π — семейство всех негативных эквивалентностей, то на $\Pi/{\equiv_{NLO}}$ действует частичный порядок, индуцированный предпорядком $\trianglelefteq_{NLO}$, который мы будем обозначать так же (корректность очевидна). Частично упорядоченное множество $\langle \Pi/{\equiv_{NLO}}; \trianglelefteq_{NLO}\rangle$ будем называть *структурой негативной представимости линейных порядков*, а его элементы — *степенями негативной представимости линейных порядков*. Далее, если будет ясно о чем идет речь, структуру негативной представимости линейных порядков будем называть просто *структурой негативной представимости*, а ее элементы — *степенями*. Для сокращения обозначений через $d(\eta)$ будем обозначать степень эквивалентности η. Будем также говорить, что линейный порядок представим над заданной степенью, если он представим над некоторой (а значит, и над любой) эквивалентностью из этой степени.

Строение структуры негативной представимости линейных порядков отражает алгоритмическую природу эквивалентностей с точки зрения предоставляемых возможностей для реализации над ними важных объектов, каковыми являются линейные порядки. Ясно, что чем $\trianglelefteq_{NLO}$-выше расположена степень, тем больше реализационных возможностей она предоставляет. Такой подход может оказаться также полезным в рамках теоретической информатики.

Отметим, что конечные негативные эквивалентности (которые в данном случае, очевидно, будут вычислимыми) порождают изолированные степени в структуре негативной представимости, т. к. если число классов эквивалентности есть n, то над ней представим только порядковый тип, изоморфный конечному ординалу n. Отбросив все $\equiv_{NLO}$-классы, порожденные конечными эквивалентностями, получим ограничения отношений $\trianglelefteq_{NLO}, \equiv_{NLO}$ на бесконечные негативные эквивалентности. Всюду далее нас будет интересовать только структура, образованная степенями, содержащими бесконечные эквивалентности.

Пусть Σ — множество бесконечных позитивных эквивалентностей, и отношение $\eta_1 \trianglelefteq_{PLO} \eta_2$ на Σ означает, что всякий линейный порядок, позитивно представимый над η_1, позитивно представим и над η_2. Совершенно аналогично негативному случаю, путем симметричного замыкания предпорядка $\trianglelefteq_{PLO}$ и факторизации относительно полученного отношения эквивалентности на множестве всех бесконечных позитивных эквивалентностей, получим структуру позитивной представимости линейных порядков $\langle\Sigma/\equiv_{PLO};\trianglelefteq_{PLO}\rangle$, которая оказалась совершенно отличной от структуры негативной представимости линейных порядков $\langle\Pi/\equiv_{NLO};\trianglelefteq_{NLO}\rangle$. Так, в структуре позитивной представимости имеется бесконечная позитивная степень, над которой не определим никакой линейный порядок (т. е. соответствующий класс порядков пустой и данная степень — наименьшая относительно $\trianglelefteq_{NLO}$, см. [32]), в то время как над любой бесконечной негативной степенью представим плотный порядок. Изучению структуры $\langle\Sigma/\equiv_{PLO};\trianglelefteq_{PLO}\rangle$ посвящена работа [66], в которой, в частности, показано, что эта структура не имеет наибольшего элемента, но имеет максимальный (им будет степень $d(id\,\omega)$), существует бесконечно убывающая цепь позитивных степеней и имеются несравнимые степени (аналог теоремы Фридберга—Мучника). Некоторые принципиальные вопросы, рассмотренные в работе [66], являются в настоящий момент открытыми для структуры $\langle\Pi/\equiv_{NLO};\trianglelefteq_{NLO}\rangle$.

Относительно структуры $\langle\Pi/\equiv_{NLO};\trianglelefteq_{NLO}\rangle$ на настоящий момент известно следующее.

Предложение 5.6. *Структура негативной представимости линейных порядков имеет наибольший элемент.*

Доказательство вытекает из отмеченного выше почти очевидного факта, что всякий негативно представимый линейный порядок имеет вычислимую нумерацию.

Таким образом, всякий негативно представимый бесконечный линейный порядок представим над степенью $id\,\omega/\equiv_{NLO}$, которая и является наибольшей в структуре негативной представимости.

Еще раз подчеркнем (см. [65]), что наличие позитивного представления линейного порядка вовсе не влечет существование его вычислимого представления.

Предложение 5.7. *Существует бесконечно убывающая цепь степеней негативной представимости линейных порядков.*

Доказательство см. в [32].

Следствие 5.9. *Структура бесконечных степеней негативной представимости линейных порядков содержит множество степеней, упорядоченное по типу $1+\omega^*$.*

Многие принципиальные вопросы, касающиеся структуры $\langle\Pi/\equiv_{NLO};\trianglelefteq_{NLO}\rangle$, в настоящий момент открыты. Например,

- существуют ли две несравнимые $\equiv_{NLO}$-степени (аналог проблемы Поста о существовании несравнимых тьюринговых степеней, см. [57])?
- существует ли в $\langle\Pi/\equiv_{NLO};\trianglelefteq_{NLO}\rangle$ наименьший элемент?
- разрешима ли элементарная теория структуры $\langle\Pi/\equiv_{NLO};\trianglelefteq_{NLO}\rangle$?
- и ряд других.

Каждый из этих вопросов обладает емким содержанием. Например, положительный ответ на первый вопрос означал бы, что имеются две существенно различные степени (реализации), над каждой из которых принципиально нельзя алгоритмически определить некоторый негативно представимый линейный порядок, определимый над другой. Существование наименьшего элемента означало бы наличие некоторого «общего знаменателя» для степеней с точки зрения реализуемости порядков, т. е. все, что реализуется над наименьшей степенью, реализуется и над любой другой.

Вместо линейных порядков можно также рассматривать другие объекты, в т. ч. универсальные алгебры (не фиксируя сигнатуру), которые широко используются в абстрактных типах данных и объектно-ориентированном программировании. Так, например, как уже отмечалось, над любой негативной эквивалентностью представима конечно-порожденная конгруэнц-простая алгебра [24], тогда как существуют позитивные эквивалентности, над которыми представимы только тривиальные структуры [25] (заданные проектирующими функциями и функциями-константами, которые, очевидно, представимы над любой эквивалентностью). С другой стороны, разумные расширения класса рассматриваемых эквивалентностей также позволяют получать структуры с содержательными свойствами. Так, для эффективно отделимых эквивалентностей (которые содержат и негативные, и позитивные) соответствующая структура весьма богата.

Пусть Ω — множество эффективно отделимых эквивалентностей. Очевидно, что Ω счетно, хотя множество отделимых эквивалентностей имеет мощность континуума. Рассмотрим структуру $\langle \Omega/\equiv_{ES}; \trianglelefteq_{ES}\rangle$, где для $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega$ отношение $\gamma_1 \trianglelefteq_{ES} \gamma_2$ означает, что всякая универсальная алгебра (конечной сигнатуры), представимая над γ_1, представима и над γ_2, и $\equiv_{ES}$ обозначает эквивалентное замыкание предпорядка $\trianglelefteq_{ES}$.

Такой подход ближе по духу к парадигме объектно-ориентированного программирования, когда над одним носителем можно вводить новые операции, не фиксируя язык (сигнатуру) системы (см. [25, 63, 64]), хотя в нашем определении $\trianglelefteq_{ES}$-сводимости мы не требуем конечной порожденности.

Всякая подпрямо неразложимая алгебра и алгебра с артиновой решеткой конгруэнций, обладающая отделимой нумерацией, представима над некоторой $\equiv_{ES}$-степенью, т. к. согласно следствию 2.7 и теореме 2.4 любое такое представление эффективно отделимо. Все бесконечные позитивные и негативные эквивалентности лежат в некоторых $\equiv_{ES}$-степенях. При этом в $\langle \Omega/\equiv_{ES}; \trianglelefteq_{ES}\rangle$ имеется наименьший элемент $d(\gamma)$ (где γ — бесконечная позитивная эквивалентность, над которой определимы только функции-константы и проектирующие, см. замечание перед следствием 2.5).

Можно показать, что в частичный порядок $\langle \Omega/\equiv_{ES}; \trianglelefteq_{ES}\rangle$ изоморфно вкладывается ординал $\omega + 1$. Приведем идею доказательства. Пусть η_0 — бесконечная позитивная эквивалентность, по модулю которой всякая вычислимая функция f, согласованная с ней (т. е. $\forall \overline{x}, \overline{y}[\overline{x} = \overline{y} \pmod{\eta_0} \Rightarrow f(\overline{x}) = f(\overline{y}) \pmod{\eta_0}]$), действует либо как константа, либо как проектирующая. О существовании такой эквивалентности упоминалось в предыдущем абзаце. Через η_1 обозначим эквивалентность $\{\langle s(x), s(y)\rangle | x = y \pmod{\eta_0}\} \cup id\ \omega$, где $s(x) = x + 1$, т. е. η_1 — фактически есть «расширение» η_0 одним разрешимым η_1-классом, содержащим одноэлементный класс, состоящим из числа 0. Нетрудно заметить, что всякая алгебра, определимая над η_0, определима и над η_1, но не наоборот, т. к., например, над η_1 определима вычислимая функция, не действующая на η_1-классах ни как константа, ни как проектирующая.

Рассмотрим взаимоотношения $\equiv_{ES}$-степеней для эквивалентностей η_{n+1} и η_{n+2} в случае одноместных функций. Для этого разобьем ω на две вычислимые η_{n+1}-замкнутые части — $A = \{0, \ldots, n\}$ и $B = \omega \setminus \{0, \ldots, n\}$, т. е. A — совокупность всех тривиальных классов эквивалентности η_{n+1}. Эти же множества являются объединениями η_{n+2}-замкнутых классов, но в этом случае одноэлементный класс $(n+1)/\eta_{n+2}$ оказывается включенным в множество B. Покажем, что для всякой одноместной вычислимой функции, согласованной с η_{n+1}, найдется такая вычислимая функция g, согласованная с η_{n+2}, что алгебры $\langle \omega/\eta_{n+1}; f\rangle$ и $\langle \omega/\eta_{n+2}; g\rangle$ изоморфны (с точностью до обозначения операций). В самом деле, рассмотрим действие функции f по модулю η_{n+1}. Ограничение f на A можно изоморфно перенести в качестве действия g на A очевидным образом. Есть лишь один нетривиальный момент — когда значение f на каких-то элементах из A есть $n + 1$. В этом случае значением g объявляем любой элемент, η_{n+1}-эквивалентный числу $n+1$ из B. Далее, ограничение f на B может быть либо тождественной функцией, либо константой (с фиксированным значением из A либо B). И в том, и в другом случае понятно, как определять g с сохранением изоморфизма. Таким образом, всякая алгебра с одной одноместной операцией, определимая над η_{n+1}, является определимой и над η_{n+2}. Случай многоместных операций сводится к вычислимым семействам элементарных трансляций. Для того, чтобы показать строгость отношения $\eta_{n+1} \trianglelefteq_{ES} \eta_{n+2}$, достаточно заметить, что над η_{n+2} представима унарная алгебра U_{n+3}, имеющая ровно один цикл длины $n+3$ и все остальные длины 1 (неподвижные точки). Очевидно, что U_{n+3} нельзя определить над η_{n+1}.

Понятно, что получаем строго возрастающую цепь позитивных степеней, но они же, порождая эффективно отделимые степени, так же образуют бесконечную цепь типа ω. Добавим эквивалентность $\eta_\omega = id\ \omega$, $\equiv_{ES}$-степень которой собственным образом содержит все η_n, и получаем цепь типа $\omega + 1$.

Легко также понять, что существуют $\equiv_{ES}$-несравнимые степени. В самом деле, рассмотрим степень $d_1 = id\,\omega/\equiv_{ES}$ и d_2, где d_2 — степень, содержащая позитивную эквивалентность η, над которой представима алгебра A, не имеющая вычислимого представления. Тогда A не определима над степенью d_1. С другой стороны, алгебра следования $S = \langle\omega; s\rangle$ представима над d_1, но не представима над степенью d_2, т. к. в силу конечной порожденности S позитивно устойчива и ее представимость над d_2 означала бы вычислимость эквивалентности $\eta \in d_2$. Противоречие.

Конечно, хотя любая алгебра (даже с сигнатурой любой алгоритмической сложности) имеет нумерацию (см. предложение 3.1), далеко не всякая алгебра определима над подходящей $\equiv_{ES}$-степенью. Однако класс эффективно отделимо представимых алгебр, являющийся базисом структурной теории отделимых алгебр, дает широкие возможности с точки зрения построения алгоритмических представлений, т. к., с одной стороны, такие наиболее важные типы представлений, как позитивные и негативные, являются эффективно отделимыми, а с другой стороны, сами эффективно отделимые алгебры расположены довольно низко в арифметической иерархии, т. е. представляют не только абстрактный, но и практический интерес.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Биркгоф Г.* Теория решеток. — М.: Наука, 1984.
2. *Гончаров С. С.* Модели данных и языки их описаний// Вычисл. системы. — 1985. — *107*. — С. 52–70.
3. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. — Новосибирск: Научная книга, 1999.
4. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. — М.: Наука, 1977.
5. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. — М.: Наука, 1980.
6. *Касымов Н. Х.* Алгебраическое описание рекурсивно перечислимых типов данных// Вычисл. системы. — 1984. — *101*. — С. 130–140.
7. *Касымов Н. Х.* Логические программы без равенства и конструктивные представления// Вычисл. системы. — 1987. — *122*. — С. 3–18.
8. *Касымов Н. Х.* Об алгебрах с финитно аппроксимируемыми позитивно представимыми обогащениями// Алгебра и логика. — 1987. — *26*, № 6. — С. 715–730.
9. *Касымов Н. Х.* О неспецифицируемости эффективно представимых данных позитивными формулами// Докл. АН УзССР. — 1989. — № 6. — С. 4–5.
10. *Касымов Н. Х.* Об одной двойственной задаче теории конструктивных моделей// Вычисл. системы. — 1989. — *129*. — С. 137–143.
11. *Касымов Н. Х.* Финитная аппроксимируемость квазиэрбрановских моделей// Докл. АН УзССР. — 1989. — № 12. — С. 5-6.
12. *Касымов Н. Х.* Позитивные модели и универсальные предложения// Вычисл. системы. — 1990. — *133*. — С. 3–13.
13. *Касымов Н. Х.* Позитивные алгебры с конгруэнциями конечного индекса// Алгебра и логика. — 1991. — *30*, № 3. — С. 293–305.
14. *Касымов Н. Х.* Позитивные алгебры со счетными решетками конгруэнций// Алгебра и логика. — 1992. — *31*, № 1. — С. 21–37.
15. *Касымов Н. Х.* Позитивные алгебры с нетеровыми решетками конгруэнций// Сиб. мат. ж. — 1992. — *33*, № 2. — С. 181–185.
16. *Касымов Н. Х.* О числе конгруэнций алгебр над простыми множествами// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 150–152.
17. *Касымов Н. Х.* О гомоморфизмах на негативные алгебры// Алгебра и логика. — 1992. — *31*, № 2. — С. 132–144.
18. *Касымов Н. Х.* О числе Q-конгруэнций позитивных алгебр// Алгебра и логика. — 1992. — *31*, № 3. — С. 297–305.

19. *Касымов Н. Х.* О гомоморфизмах нумерованных алгебр с рекурсивно отделимыми классами// Докл. АН УзССР. — 1992. — № 6. — С. 3-4.
20. *Касымов Н. Х.* Неконструктивные негативные алгебры с условиями конечности// Сиб. мат. ж. — 1992. — *33*, № 6. — С. 195–198.
21. *Касымов Н. Х.* Совершенные нумерации алгебр// Узб. мат. ж. — 1993. — № 2. — С. 51-56.
22. *Касымов Н. Х.* Аксиомы отделимости и разбиения натурального ряда// Сиб. мат. ж. — 1993. — *34*, № 3. — С. 81–85.
23. *Касымов Н. Х.* Нумерованные алгебры с равномерно рекурсивно отделимыми классами// Сиб. мат. ж. — 1993. — *34*, № 5. — С. 85–102.
24. *Касымов Н. Х.* Об алгебрах над негативными эквивалентностями// Алгебра и логика. — 1994. — *33*, № 1. — С. 76–80.
25. *Касымов Н. Х.* Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры// Усп. мат. наук. — 1996. — *51*, № 3. — С. 145–176.
26. *Касымов Н. Х.* О полугруппах рекурсивных автоморфизмов нумерованных систем// Докл. АН РУз. — 1996. — № 12. — С. 3-4.
27. *Касымов Н. Х., Дадажанов Р. Н.* О рекурсивно отделимых нумерациях, все рекурсивные автоморфизмы которых имеют неподвижные точки// Докл. АН РУз. — 2014. — № 1. — С. 5-7.
28. *Касымов Н. Х.* О вычислимости негативных представлений стандартной модели арифметики Гончарова// Тез. докл. Межд. конф. «Алгебра, анализ и квантовая вероятность». — Ташкент, 2015. — С. 117–119.
29. *Касымов Н. Х., Дадажанов Р. Н.* Позитивные и негативные линейные порядки и их вычислимо необратимые автоморфизмы// Вестн. НУУз. — 2015. — № 2. — С. 54-63.
30. *Касымов Н. Х.* О точных представлениях линейных порядков над негативными эквивалентностями// Докл. АН РУз. — 2016. — № 1. — С. 9–12.
31. *Касымов Н. Х.* О гомоморфизмах на эффективно отделимые алгебры// Сиб. мат. ж. — 2016. — *57*, № 1. — С. 47–66.
32. *Касымов Н. Х., Дадажанов Р. Н.* Негативные плотные линейные порядки// Сиб. мат. ж. — 2017. — *58*, № 6. — С. 1306–1331.
33. *Касымов Н. Х., Дадажанов Р. Н.* О вычислимости негативных представлений некоторых типов упорядоченных колец// Тез. докл. Межд. конф. «Алгебра и математическая логика: теория и приложения». — Казань, 2019. — С. 100–101.
34. *Касымов Н. Х., Ибрагимов Ф. Н.* Структурная характеризация рекурсивно отделимых моделей// Докл. АН РУз. — 1998. — № 11. — С. 14–16.
35. *Касымов Н. Х., Ибрагимов Ф. Н.* О негативности рекурсивно отделимых нумераций алгебр с артиновыми решетками конгруэнций// Докл. АН РУз. — 2013. — № 2. — С. 8–9.
36. *Касымов Н. Х., Ибрагимов Ф. Н.* Сильно вычислимые нумерации и негативные эквивалентности// Докл. АН РУз. — 2014. — № 5. — С. 3–4.
37. *Касымов Н. Х., Ибрагимов Ф. Н.* О непрерывности операций нумерованных алгебр в эффективно порожденных топологических пространствах// Докл. АН РУз. — 2016. — № 4. — С. 3–6.
38. *Касымов Н. Х., Ибрагимов Ф. Н.* Вычислимо отделимые модели// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2018. — *64*, № 4. — С. 682–705.
39. *Касымов Н. Х., Ибрагимов Ф. Н.* Отделимые нумерации тел и эффективная вложимость в них колец// Сиб. мат. ж. — 2019. — *60*, № 1. — С. 82–94.
40. *Касымов Н. Х., Куралов Ю. А.* Вычислимость алгоритмических представлений упорядоченного кольца целых чисел// Вестн. НУУз. — 2017. — № 2. — С. 117-123.
41. *Касымов Н. Х., Морозов А. С.* Логические программы без равенства и конструктивные представления// Вычисл. системы. — 1987. — *122*. — С. 73–96.
42. *Касымов Н. Х., Морозов А. С.* Об определимости линейных порядков над негативными эквивалентностями// Алгебра и логика. — 2016. — *55*, № 1. — С. 37–57.
43. *Касымов Н. Х., Морозов А. С.* О T_1-отделимых нумерациях алгебр с артиновыми решетками конгруэнций// Тез. докл. Межд. конф. «Алгебра и математическая логика: теория и приложения». — Казань, 2019. — С. 118–120.
44. *Касымов Н. Х., Морозов А. С., Ходжамуратова И. А.* О T_1-отделимых нумерациях подпрямо неразложимых алгебр// Алгебра и логика. — 2021. — *60*, № 4. — С. 400–424.
45. *Касымов Н. Х., Ходжамуратова И. А.* О компактных расширениях эффективных пространств// Докл. АН РУз. — 2017. — № 5. — С. 3–5.
46. *Касымов Н. Х., Ходжамуратова И. А.* Топологические пространства над алгоритмическими представлениями универсальных алгебр// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. — 2018. — *144*. — С. 17–29.

47. *Касымов Н. Х., Хусаинов Б. М.* Позитивные и негативные нумерации алгебр// Вычисл. системы. — 1991. — *139*. — С. 103–110.
48. *Касымов Н. Х., Хусаинов Б. М.* Позитивные эквивалентности с конечными классами и алгебры над ними// Сиб. мат. ж. — 1992. — *33*, № 5. — С. 196–200.
49. *Кон П. М.* Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.
50. *Мальцев А. И.* О вложении алгебраических колец в тела// Math. Ann. — 1937. — *113*. — С. 886–891.
51. *Мальцев А. И.* К общей теории алгебраических систем// Мат. сб. — 1954. — *35*, № 1. — С. 3–20.
52. *Мальцев А. И.* Конструктивные алгебры. I// Усп. мат. наук. — 1961. — *16*, № 3. — С. 3–60.
53. *Мальцев А. И.* Позитивные и негативные нумерации// Докл. АН СССР. — 1965. — *160*, № 2. — С. 278–280.
54. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.
55. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. — М.: Наука, 1986.
56. *Мартин-Леф П.* Очерки по конструктивной математике. — М.: Мир, 1975.
57. *Роджерс Х. Д.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. — М.: Мир, 1972.
58. *Соар Р. И.* Вычислимо перечислимые множества и степени. — Казань: Казанское мат. об-во, 2000.
59. *Успенский В. А.* О вычислимых операциях// Докл. АН СССР. — 1955. — *103*, № 5. — С. 773–776.
60. *Успенский В. А.* Системы перечислимых множеств и их нумерации// Докл. АН СССР. — 1955. — *105*, № 6. — С. 1155–1158.
61. *Baur W.* Rekursive Algebren mit Kettenbedingungen// Z. Math. Logik Grundl. Math. — 1974. — *20*. — С. 37–46.
62. *Baur W.* Uber recursive strukturen// Invent. Math. — 1974. — *23*, № 2. — С. 89–95
63. *Bergstra J. A., Tucker J. V.* A characterization of computable data types by means of a finite, equational specification method// Lecture Notes in Comput. Sci. — 1980. — *85*. — С. 76–90.
64. *Broy M., Dosch W., Partsch H., Pepper P., Wirsing M.* Existential quantifiers in abstract data types// Lecture Notes in Comput. Sci. — 1979. — *71*. — С. 73–81.
65. *Feiner L.* Hierarchies of Boolean algebras// J. Symbolic Logic. — 1970. — *35*, № 2. — С. 365–373.
66. *Fokina E. B., Khoussainov B., Semukhin P., Turetskiy D.* Linear orders realized by C.E. equivalence relations// J. Symbolic Logic. — 2016. — *81*, № 2. — С. 463–482.
67. *Kamin S.* Some definitions for algebraic data type specifications// SIGPLAN Notes. — 1979. — *14*, № 3. — С. 28–37.
68. *Kasymov N. Kh., Dadajanov R. N., Ibragimov F. N.* On the negativity of Hausdorff algorithmic representations of translational complete algebras// Тез. докл. Межд. конф. «Современные проблемы математики и физики». — Ташкент, 2019. — С. 78–79.
69. *Kasymov N. Kh., Dadajanov R. N., Karimova N. R.* Effective compacts over coimmunne sets// Uzb. Math. J. — 2019. — № 3. — С. 26–32.
70. *Khoussainov B., Slaman T., Semukhin P.* $\prod^{0}_{1}$-presentasions of algebras// Arch. Math. Logic. — 2006. — *45*, № 6. — С. 769–781.
71. *Morozov A. S., Truss J. K.* On computable automorphisms of the rational numbers// J. Symbolic Logic. — 2001. — *66*, № 3. — С. 1458–1470.
72. *Nerode A.* General topology and partial recursive functionals// Summaries Summer Inst. Symbolic Logic. — 1960. — *1957*. — С. 247–251.

Н. Х. Касымов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `nadim59@mail.ru`

Р. Н. Дадажанов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `dadajonovrn@mail.ru`

Ф. Н. Ибрагимов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `farkh-i@yandex.com`

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-707-754 UDC 510.5+510.6+512.57+519.68

Separable Algorithmic Representations of Classical Systems and Their Applications

© 2021 **N. Kh. Kasymov, R. N. Dadazhanov, F. N. Ibragimov**

Abstract. The main results of the theory of separable algorithmic representations of classical algebraic systems are presented. The most important classes of such systems and their representations in the lower classes of the arithmetic hierarchy — positive and negative — are described. Special attention is paid to the algorithmic, structural and topological properties of separable representations of groups, rings and bodies, as well as to effective analogs of the Maltsev theorem on embedding rings in bodies. The possibilities of using the studied concepts in the framework of theoretical informatics are considered.

REFERENCES

1. G. Birkhoff, *Teoriya reshetok* [Lattice Theory], Nauka, Moscow, 1984 (Russian translation).
2. S. S. Goncharov, “Modeli dannykh i yazyki ikh opisaniy” [Data models and languages of their descriptions], *Vychisl. sistemy* [Comput. Syst.], 1985, **107**, 52–70 (in Russian).
3. S. S. Goncharov and Yu. L. Ershov, *Konstruktivnye modeli* [Constructive Models], Nauchnaya kniga, Novosibirsk, 1999 (in Russian).
4. Yu. L. Ershov, *Teoriya numeratsiy* [Numbering Theory], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
5. Yu. L. Ershov, *Problemy razreshimosti i konstruktivnye modeli* [Solvability Problems and Constructive models], Nauka, Moscow, 1980 (in Russian).
6. N. Kh. Kasymov, “Algebraicheskoe opisanie rekursivno perechislimykh tipov dannykh” [Algebraic descriptions of recursively enumerated data types], *Vychisl. sistemy* [Comput. Syst.], 1984, **101**, 130–140 (in Russian).
7. N. Kh. Kasymov, “Logicheskie programmy bez ravenstva i konstruktivnye predstavleniya” [Logic programs without equality and constructive representations], *Vychisl. sistemy* [Comput. Syst.], 1987, **122**, 3–18 (in Russian).
8. N. Kh. Kasymov, “Ob algebrakh s finitno approksimiruemymi pozitivno predstavimymi obogashcheniyami” [On algebras with finitely approximable, positively representable enrichments], *Algebra i logika* [Algebra and Logic], 1987, **26**, No. 6, 715–730 (in Russian).
9. N. Kh. Kasymov, “O nespetsifitsiruemosti effektivno predstavimykh dannykh pozitivnymi formulami” [On the nonspecification of effectively representable data by positive formulas], *Dokl. AN UzSSR* [Rep. Acad. Sci. Uzb. SSR], 1989, No. 6, 4–5 (in Russian).
10. N. Kh. Kasymov, “Ob odnoy dvoystvennoy zadache teorii konstruktivnykh modeley” [On a dual problem in the theory of constructive models], *Vychisl. sistemy* [Comput. Syst.], 1989, **129**, 137–143 (in Russian).
11. N. Kh. Kasymov, “Finitnaya approksimiruemost’ kvazierbranovskikh modeley” [Finite approximation of quasi-Herbrand models], *Dokl. AN UzSSR* [Rep. Acad. Sci. Uzb. SSR], 1989, No. 12, 5-6 (in Russian).
12. N. Kh. Kasymov, “Pozitivnye modeli i universal’nye predlozheniya” [Positive models and universal suggestions], *Vychisl. sistemy* [Comput. Syst.], 1990, **133**, 3–13 (in Russian).
13. N. Kh. Kasymov, “Pozitivnye algebry s kongruentsiyami konechnogo indeksa” [Positive algebras with finite index congruences], *Algebra i logika* [Algebra and Logic], 1991, **30**, No. 3, 293–305 (in Russian).
14. N. Kh. Kasymov, “Pozitivnye algebry so schetnymi reshetkami kongruentsiy” [Positive algebras with countable congruence lattices], *Algebra i logika* [Algebra and Logic], 1992, **31**, No. 1, 21–37 (in Russian).
15. N. Kh. Kasymov, “Pozitivnye algebry s neterovymi reshetkami kongruentsiy” [Positive algebras with Noetherian congruence lattices], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1992, **33**, No. 2, 181–185 (in Russian).

16. N. Kh. Kasymov, "O chisle kongruentsiy algebr nad prostymi mnozhestvami" [On the number of congruences of algebras over simple sets], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1992, **52**, No. 2, 150–152 (in Russian).
17. N. Kh. Kasymov, "O gomomorfizmakh na negativnye algebry" [On homomorphisms onto negative algebras], *Algebra i logika* [Algebra and Logic], 1992, **31**, No. 2, 132–144 (in Russian).
18. N. Kh. Kasymov, "O chisle Q-kongruentsiy pozitivnykh algebr" [On the number of Q-congruences of positive algebras], *Algebra i logika* [Algebra and Logic], 1992, **31**, No. 3, 297–305 (in Russian).
19. N. Kh. Kasymov, "O gomomorfizmakh numerovannykh algebr s rekursivno otdelimymi klassami" [On homomorphisms of numbered algebras with recursively separable classes], *Dokl. AN UzSSR* [Rep. Acad. Sci. Uzb. SSR], 1992, No. 6, 3-4 (in Russian).
20. N. Kh. Kasymov, "Nekonstruktivnye negativnye algebry s usloviyami konechnosti" [Non-constructive negative algebras with finiteness conditions], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1992, **33**, No. 6, 195–198 (in Russian).
21. N. Kh. Kasymov, "Sovershennye numeratsii algebr" [Perfect numberings of algebras], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 1993, No. 2, 51-56 (in Russian).
22. N. Kh. Kasymov, "Aksiomy otdelimosti i razbieniya natural'nogo ryada" [Separation axioms and partitions of natural series], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1993, **34**, No. 3, 81–85 (in Russian).
23. N. Kh. Kasymov, "Numerovannye algebry s ravnomerno rekursivno otdelimymi klassami" [Numbered algebras with uniformly recursively separable classes], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1993, **34**, No. 5, 85–102 (in Russian).
24. N. Kh. Kasymov, "Ob algebrakh nad negativnymi ekvivalentnostyami" [On algebras over negative equivalences], *Algebra i logika* [Algebra and Logic], 1994, **33**, No. 1, 76–80 (in Russian).
25. N. Kh. Kasymov, "Rekursivno otdelimye numerovannye algebry" [Recursively separable numbered algebras], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1996, **51**, No. 3, 145–176 (in Russian).
26. N. Kh. Kasymov, "O polugruppakh rekursivnykh avtomorfizmov numerovannykh sistem" [On semigroups of recursive automorphisms of numbered systems], *Dokl. AN RUz* [Rep. Acad. Sci. Resp. Uzb.], 1996, No. 12, 3-4 (in Russian).
27. N. Kh. Kasymov, "O vychislimosti negativnykh predstavleniy standartnoy modeli arifmetiki Goncharova" [Computability of negative representations of the standard model of Goncharov's arithmetic], *Abstr. Int. Conf. Algebra, Analysis and Quantum Probability*, Tashkent, 2015, pp. 117–119 (in Russian).
28. N. Kh. Kasymov, "O tochnykh predstavleniyakh lineynykh poryadkov nad negativnymi ekvivalentnostyami" [On exact representations of linear orders over negative equivalences], *Dokl. AN RUz* [Rep. Acad. Sci. Resp. Uzb.], 2016, No. 1, 9–12 (in Russian).
29. N. Kh. Kasymov, "O gomomorfizmakh na effektivno otdelimye algebry" [On homomorphisms onto effectively separable algebras], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 2016, **57**, No. 1, 47–66 (in Russian).
30. N. Kh. Kasymov and R. N. Dadazhanov, "O rekursivno otdelimykh numeratsiyakh, vse rekursivnye avtomorfizmy kotorykh imeyut nepodvizhnye tochki" [On recursively separable numberings all of whose recursive automorphisms have fixed points], *Dokl. AN RUz* [Rep. Acad. Sci. Resp. Uzb.], 2014, No. 1, 5-7 (in Russian).
31. N. Kh. Kasymov and R. N. Dadazhanov, "Pozitivnye i negativnye lineynye poryadki i ikh vychislimo neobratimye avtomorfizmy" [Positive and negative linear orderings and their computably irreversible automorphisms], *Vestn. NUUz* [Bull. Nat. Univ. Uzb.], 2015, No. 2, 54-63 (in Russian).
32. N. Kh. Kasymov and R. N. Dadazhanov, "Negativnye plotnye lineynye poryadki" [Negative dense linear orderings], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 2017, **58**, No. 6, 1306–1331 (in Russian).
33. N. Kh. Kasymov and R. N. Dadazhanov, "O vychislimosti negativnykh predstavleniy nekotorykh tipov uporyadochennykh kolets" [On computability of negative representations of certain types of ordered rings], *Abstr. Int. Conf. Algebra and Mathematical Logic: Theory and Applications*, Kazan', 2019, pp. 100–101 (in Russian).
34. N. Kh. Kasymov and F. N. Ibragimov, "Strukturnaya kharakterizatsiya rekursivno otdelimykh modeley" [Structural characterization of recursively separable models], *Dokl. AN RUz* [Rep. Acad. Sci. Resp. Uzb.], 1998, No. 11, 14–16 (in Russian).
35. N. Kh. Kasymov and F. N. Ibragimov, "O negativnosti rekursivno otdelimykh numeratsiy algebr s artinovymi reshetkami kongruentsiy" [On the negativity of recursively separable numberings of algebras with Artinian congruence lattices], *Dokl. AN RUz* [Rep. Acad. Sci. Resp. Uzb.], 2013, No. 2, 8–9 (in Russian).
36. N. Kh. Kasymov and F. N. Ibragimov, "Sil'no vychislimye numeratsii i negativnye ekvivalentnosti" [Strongly computable numberings and negative equivalences], *Dokl. AN RUz* [Rep. Acad. Sci. Resp. Uzb.], 2014, No. 5, 3–4 (in Russian).

37. N. Kh. Kasymov and F. N. Ibragimov, "O nepreryvnosti operatsiy numerovannykh algebr v effektivno porozhdennykh topologicheskikh prostranstvakh" [Continuity of operations of numbered algebras in effectively generated topological spaces], *Dokl. AN RUz* [Rep. Acad. Sci. Resp. Uzb.], 2016, No. 4, 3–6 (in Russian).
38. N. Kh. Kasymov and F. N. Ibragimov, "Vychislimo otdelimye modeli" [Computably separable models], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2018, **64**, No. 4, 682–705 (in Russian).
39. N. Kh. Kasymov and F. N. Ibragimov, "Otdelimye numeratsii tel i effektivnaya vlozhimost' v nikh kolets" [Separable numbering of bodies and effective embedding of rings in them], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 2019, **60**, No. 1, 82–94 (in Russian).
40. N. Kh. Kasymov and Yu. A. Kuralov, "Vychislimost' algoritmicheskikh predstavleniy uporyadochennogo kol'tsa tselykh chisel" [Computability of algorithmic representations of an ordered ring of integers], *Vestn. NUUz* [Bull. Nat. Univ. Uzb.], 2017, No. 2, 117-123 (in Russian).
41. N. Kh. Kasymov and A. S. Morozov, "Logicheskie programmy bez ravenstva i konstruktivnye predstavleniya" [Logic programs without equality and constructive representations], *Vychisl. sistemy* [Comput. Syst.], 1987, **122**, 73–96 (in Russian).
42. N. Kh. Kasymov and A. S. Morozov, "Ob opredelimosti lineynykh poryadkov nad negativnymi ekvivalentnostyami" [On the definability of linear orders over negative equivalences], *Algebra i logika* [Algebra and Logic], 2016, **55**, No. 1, 37–57 (in Russian).
43. N. Kh. Kasymov and A. S. Morozov, "O T_1-otdelimykh numeratsiyakh algebr s artinovymi reshetkami kongruentsiy" [On T_1-separable numberings of algebras with Artinian congruence lattices], *Abstr. Int. Conf. Algebra and Mathematical Logic: Theory and Applications*, Kazan', 2019, pp. 118–120 (in Russian).
44. N. Kh. Kasymov, A. S. Morozov, and I. A. Khodzhamuratova, "O T_1-otdelimykh numeratsiyakh podpryamo nerazlozhimykh algebr" [On T_1-separable numberings of subdirectly indecomposable algebras], *Algebra i logika* [Algebra and Logic], 2021, **60**, No. 4, 400–424 (in Russian).
45. N. Kh. Kasymov and I. A. Khodzhamuratova, "O kompaktnykh rasshireniyakh effektivnykh prostranstv" [Compact extensions of effective spaces], *Dokl. AN RUz* [Rep. Acad. Sci. Resp. Uzb.], 2017, No. 5, 3–5 (in Russian).
46. N. Kh. Kasymov and I. A. Khodzhamuratova, "Topologicheskie prostranstva nad algoritmicheskimi predstavleniyami universal'nykh algebr" [Topological spaces over algorithmic representations of universal algebras], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math.], 2018, **144**, 17–29 (in Russian).
47. N. Kh. Kasymov and B. M. Khusainov, "Pozitivnye i negativnye numeratsii algebr" [Positive and negative numbering of algebras], *Vychisl. sistemy* [Comput. Syst.], 1991, **139**, 103–110 (in Russian).
48. N. Kh. Kasymov and B. M. Khusainov, "Pozitivnye ekvivalentnosti s konechnymi klassami i algebry nad nimi" [Positive equivalences with finite classes and algebras over them], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1992, **33**, No. 5, 196–200 (in Russian).
49. P. M. Cohn, *Universal'naya algebra* [Universal Algebra], Mir, Moscow, 1968 (Russian translation).
50. A. I. Mal'tsev, "O vlozhenii algebraicheskikh kolets v tela" [On embedding of algebraic rings in bodies], *Math. Ann.* [Math. Ann.], 1937, **113**, 886–891 (in Russian).
51. A. I. Mal'tsev, "K obshchey teorii algebraicheskikh sistem" [To the general theory of algebraic systems], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1954, **35**, No. 1, 3–20 (in Russian).
52. A. I. Mal'tsev, "Konstruktivnye algebry. I" [Constructive algebras. I], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1961, **16**, No. 3, 3–60 (in Russian).
53. A. I. Mal'tsev, "Pozitivnye i negativnye numeratsii" [Positive and negative numberings], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1965, **160**, No. 2, 278–280 (in Russian).
54. A. I. Mal'tsev, *Algebraicheskie sistemy* [Algebraic Systems], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
55. A. I. Mal'tsev, *Algoritmy i rekursivnye funktsii* [Algorithms and Recursive Functions], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
56. P. Martin-Löf, *Ocherki po konstruktivnoy matematike* [Notes on Constructive Mathematics], Mir, Moscow, 1975 (Russian translation).
57. H. D. Rogers, *Teoriya rekursivnykh funktsiy i effektivnaya vychislimost'* [Theory of Recursive Functions and Effective Computability], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
58. R. I. Soare, *Vychislimo perechislimye mnozhestva i stepeni* [Recursively Enumerable Sets and Degrees], Kazanskoe mat. ob-vo, Kazan', 2000 (Russian translation).
59. V. A. Uspenskiy, "O vychislimykh operatsiyakh" [On computable operations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1955, **103**, No. 5, 773–776 (in Russian).

60. V. A. Uspenskiy, “Sistemy perechislimykh mnozhestv i ikh numeratsii” [Systems of enumerable sets and their numberings], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1955, **105**, No. 6, 1155–1158 (in Russian).
61. W. Baur, “Rekursive Algebren mit Kettenbedingungen,” *Z. Math. Logik Grundl. Math.*, 1974, **20**, 37–46.
62. W. Baur, “Uber recursive strukturen,” *Invent. Math.*, 1974, **23**, No. 2, 89–95
63. J. A. Bergstra and J. V. Tucker, “A characterization of computable data types by means of a finite, equational specification method,” *Lecture Notes in Comput. Sci.*, 1980, **85**, 76–90.
64. M. Broy, W. Dosch, H. Partsch, P. Pepper, and M. Wirsing, “Existential quantifiers in abstract data types,” *Lecture Notes in Comput. Sci.*, 1979, **71**, 73–81.
65. L. Feiner, “Hierarchies of Boolean algebras,” *J. Symbolic Logic*, 1970, **35**, No. 2, 365–373.
66. E. B. Fokina, B. Khoussainov, P. Semukhin, and D. Turetskiy, “Linear orders realized by C.E. equivalence relations,” *J. Symbolic Logic*, 2016, **81**, No. 2, 463–482.
67. S. Kamin, “Some definitions for algebraic data type specifications,” *SIGPLAN Notes*, 1979, **14**, No. 3, 28–37.
68. N. Kh. Kasymov, R. N. Dadajanov, and F. N. Ibragimov, “On the negativity of Hausdorff algorithmic representations of translational complete algebras,” *Abstr. Int. Conf. Contemp. Probl. Math. Phys.*, Tashkent, 2019, pp. 78–79.
69. N. Kh. Kasymov, R. N. Dadajanov, and N. R. Karimova, “Effective compacts over coimmunne sets,” *Uzb. Math. J.*, 2019, No. 3, 26–32.
70. B. Khoussainov, T. Slaman, and P. Semukhin, “$\prod\limits_1^0$-presentasions of algebras,” *Arch. Math. Logic*, 2006, **45**, No. 6, 769–781.
71. A. S. Morozov and J. K. Truss, “On computable automorphisms of the rational numbers,” *J. Symbolic Logic*, 2001, **66**, No. 3, 1458–1470.
72. A. Nerode, “General topology and partial recursive functionals,” *Summaries Summer Inst. Symbolic Logic*, 1960, **1957**, 247–251.

N. Kh. Kasymov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: nadim59@mail.ru

R. N. Dadazhanov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: dadajonovrn@mail.ru

F. N. Ibragimov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: farkh-i@yandex.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 4 (2021). С. 755–765
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-755-765 УДК 517.98

СВОЙСТВА ИНЪЕКТИВНОСТИ И ЯДЕРНОСТИ ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ C*-АЛГЕБР

© 2021 г. **А. А. РАХИМОВ, М. Э. НУРИЛЛАЕВ, Х. Х. БОЛТАЕВ**

Аннотация. В работе изучаются инъективные и ядерные вещественные W^*- и C^*-алгебры. Рассмотрена связь этих понятий с аналогичными понятиями обертывающих W^*- и C^*-алгебр. Показана эквивалентность понятий инъективности и ядерности для вещественных C^*-алгебр. Как следствие, полностью описаны ядерные вещественные факторы типов II_1, II_∞, III_1, III_0 и III_λ $(0 < \lambda < 1)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Решения проблем, возникающих в результате научно-прикладных исследований на мировом уровне, очень часто сводятся к изучению динамических систем математической физики и квантовой механики, в частности, теории операторных алгебр. Наблюдаемой данной физической системе в квантовой механике соответствует линейный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве, а всякому состоянию рассматриваемой системы соответствует матрица плотности. Так как операторные алгебры, в частности, комплексные и вещественные C^*- и W^*-алгебры, являются математическими моделями квантовой механики и динамических систем, где каждый полученный результат имеет свое применение в квантовой механике, то операторные алгебры очень важны как в теоретическом, так и в практическом смысле и являются одним из актуальных направлений современной математики. В настоящее время в мире процессы в технике и природе моделируются с помощью динамических систем, многие из которых имеют важные практические свойства. Среди них особое значение имеет изучение свойств инъективности, гиперфинитности и ядерности операторных алгебр, которые являются актуальной проблемой для динамических систем. Результаты исследования имеют теоретическое доказательство того, что эти свойства являются эквивалентными для динамических систем, в частности, операторных алгебр. К настоящему времени свойства инъективности и гиперфинитности этих алгебр хорошо изучены. Исследование свойств ядерности динамических систем, классифицирование ядерных комплексных и вещественных C^*- и W^*-алгебр и нахождение отношения между свойствами ядерности, инъективности и гиперфинитности являются одними из целевых исследований динамических систем в квантовой механике.

Теория алгебр операторов, действующих в гильбертовом пространстве, возникла в 30-е годы прошлого века с появлением серии статей фон Неймана и Мюррея [2, 3, 11]. Ими подробно изучена структура семейства алгебр, которые теперь называют *алгебрами фон Неймана*, или *W*-алгебрами*. Это слабо замкнутые комплексные *-алгебры операторов в гильбертовом пространстве. В настоящее время теория алгебр фон Неймана глубоко развита и имеет многочисленные приложения, которым посвящено много работ (Диксмье [7], Сакаи [13] и Такесаки [16]). В рамках этой теории важное место занимают алгебры фон Неймана с тривиальным центром, которые называют *факторами*. Построенная фон Нейманом теория разложения позволяет во многих случаях сводить задачи о произвольных алгебрах фон Неймана к соответствующим задачам для факторов. Первоначальная классификация факторов, согласно которой факторы распределяются по типам I_n ($n = 1, 2, \ldots \infty$), II_1, II_∞ и III, появилась в основополагающих работах Мюррея и фон Неймана. Факторы типа I_n были полностью классифицированы с самого начала: это алгебра всех операторов в гильбертовом пространстве размерности n. Первым замечательным результатом в классификации является теорема фон Неймана об изоморфности всех гиперфинитных (т. е. конечномерно аппроксимативных) факторов типа II_1. В конце 70-х годов прошлого века доказана единственность гиперфинитного фактора типа II_∞ (см. [6]). Затем А. Конн показал [6], что любые два инъективных фактора типа III_λ ($0 \leqslant \lambda < 1$) изоморфны. Единственность инъективного фактора типа III_1 была получена чуть позже, в работах Хаагерупа.

В то же время, для W*-алгебр, наряду с понятиями инъективности и гиперфинитности, изучались такие близкие понятия, как аменабельность и полудискретность. Каждое из приведенных понятий выделяет свой класс алгебр, и несмотря на то, что W*-алгебры с этими свойствами возникли в связи с различными вопросами функционального анализа и математической физики, с самого начала была выдвинута гипотеза, что все эти понятия совпадают. К настоящему времени благодаря усилиям Конна, Вассермана и Хаагерупа полностью доказана эквивалентность всех этих понятий.

В середине 1960-х годов в работах Топпинга и Штермера впервые были рассмотрены йордановы (неассоциативные вещественные) аналоги W*-алгебр — *JW-алгебры*, т. е. вещественные линейные пространства самосопряженных операторов из алгебры $B(H)$, которые содержат $\mathbb{1}$, замкнуты относительно йорданова умножения $a \circ b = (ab + ba)/2$ и замкнуты в слабой операторной топологии. Структура этих алгебр оказалась близка к структуре W*-алгебр, и в изучении JW-алгебр оказалось возможным применить идеи, сходные с идеями теории W*-алгебр. В работе Топпинга была получена начальная классификация JW-алгебр по типам I, II_1, II_∞, III, а в работах Штермера и Аюпова была решена проблема о связи типа JW-алгебры с типом ее обертывающей W*-алгебры. Штермер полностью изучил JW-алгебры типа I и доказал, что всякая обратимая JW-алгебра (в частности, типа II или III) изоморфна прямой сумме $A_c \oplus A_r$, где JW-алгебра $A_c = U(A_c)_h$ является самосопряженной частью W*-алгебры $U(A_c)$, а JW-алгебра $A_r = U(A_r)_h$ является самосопряженной частью вещественной W*-алгебры $U(A_r)$ (так называемая чисто вещественная JW-алгебра).

Напомним, что *вещественной W*-алгеброй* называется вещественная *-алгебра R в $B(H)$, содержащая единицу $\mathbb{1}$, которая слабо замкнута и удовлетворяет условиям: $R \cap iR = \{0\}$.

Таким образом, задача изучения JW-алгебр типа II и III в существенном редуцируется к изучению вещественных W*-алгебр типа II и III. Поэтому параллельно с теорией JW-алгебр началось исследование теории вещественных W*-алгебр. В последние годы теория вещественных W*-алгебр получила значительное развитие. Основные достижения в классификации вещественных факторов принадлежат, в первую очередь, Ш. Аюпову и Э. Штермеру. Ими полностью описаны класс JW-факторов и класс вещественных факторов, у которых обертывающая W*-алгебра (т. е. наименьшая (комплексная) W*-алгебра) является инъективной [1, 15]. Для вещественных W*-алгебр доказана единственность (с точностью до изоморфизма) вещественных инъективных факторов типа II_1, II_∞ и III_1, а для типа III_λ ($0 < \lambda < 1$) — что существуют в точности два вещественных инъективных факторов типа III_λ. Что касается вещественных инъективных факторов типа III_0, то можно построить счетное число попарно неизоморфных вещественных инъективных факторов типа III_0, у которых обертывающие W*-факторы изоморфны.

Изучение пространств обычных или обобщенных функций всюду определенными непрерывными дифференциальными операторами было начато в 50-х годах прошлого века. Эти пространства обладали резко выраженными особенностями, наиболее существенной из которых оказалась справедливость «теоремы о ядре». Сформулировав эту теорему в абстрактном виде, на языке введенных им «топологических тензорных произведений», А. Гротендик [8,9], выделил класс локально выпуклых пространств, названных им ядерными. Теория ядерных пространств была развита Гротендиком в рамках его общей теории тензорных произведений локально выпуклых пространств. Ядерные C*-алгебры были введены, по аналогии с понятием ядерного локально выпуклого пространства, в теории тензорных произведений C*-алгебр. Их теория быстро развилась и в настоящее время превратилась из предмета в инструмент исследования. Как известно, приложения теории ядерных C*-алгебр в общей теории C*-алгебр весьма многообразны. Ядерные C*-алгебры по отношению к тензорным произведениям ведут себя подобно ядерным пространствам. Ядерные (комплексные) C*-алгебры достаточно хорошо изучены. Благодаря работам А. Конна, Э. Штермера, У. Хаагерупа, С. Вассермана, Э. Эффросса, С. Попа, С. Ланса и М. Чоя для факторов была доказана эквивалентность таких понятий, как ядерность, инъективность и гиперфинитность. Исключением является $B(H)$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов на гильбертовом пространстве H, так как оно не является ядерным и гиперфинитным. Для вещественных факторов понятия инъективности и гиперфинитности достаточно хорошо изучены в работах Ш. Усманова, А. Рахимова и Б. Байкабилова. Однако в вещественном случае понятие ядерности алгебры недостаточно изучено.

Настоящая статья посвящена изучению ядерных и инъективных вещественных C*-алгебр. Как известно, имеются определения инъективности в смысле фон Неймана и в смысле Хакеда—Томиямы. В работе [12] авторы, изучая инъективные вещественные C*-алгебры, доказали эквивалентность этих определений. В частности, доказано, что вещественная C*-алгебра R инъективна тогда и только тогда, когда ее обертывающая (комплексная) C*-алгебра $R+iR$ инъективна. В настоящей статье при изучении отношения между понятиями ядерности и инъективности для вещественных C*- или W*-алгебр используется определение инъективности в смысле Хакеда—Томиямы.

2. Предварительные сведения

Пусть A — банахова *-алгебра над полем $\mathbb{C}$. Алгебра A называется C*-*алгеброй*, если $\|aa^*\| = \|a\|^2$ для любого $a \in A$. C*-алгебра M называется W*-*алгеброй*, если существует банахово пространство M_* такое, что $(M_*)^* = M$. При этом пространство M_* называется *предсопряженным пространством* для M.

Пусть $B(H)$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве H, и пусть $(x_\gamma) \subset B(H)$ — сеть. На $B(H)$ рассмотрим следующие локально-выпуклые топологии:

1. топология, определяемая с помощью сходимости:

$$x_\gamma \to \theta \Leftrightarrow \ (x_\gamma\xi, \eta) \to 0 \ (\forall \xi, \eta \in H)$$

— называется *слабой* (*операторной*) *топологией* и обозначается как ω-*топология*;

2. топология, определяемая с помощью сходимости:

$$x_\gamma \to \theta \Leftrightarrow \ \|x_\gamma\| \to 0$$

— называется *равномерной* (*операторной*) *топологией* и обозначается как u-*топология*.

Пусть $M \subset B(H)$ — *-подалгебра. Подмножество $M' = \{x \in B(H) : \ xy = yx, \forall y \in M\}$ называется *коммутантом* алгебры M. Легко видеть, что $M \subset M'' = M^{iv} = \dots$ и $M' = M''' = M^v = \dots$, где $M'' = (M')'$. При этом, если $M = M''$, то M называется *алгеброй фон Неймана*. По теореме о бикоммутанте известно, что для *-подалгебры $M \subset B(H)$ следующие условия эквивалентны:

1. $M = M''$, т. е. M — алгебра фон Неймана;
2. M — W*-алгебра;
3. M слабо замкнута и $\mathbb{1} \in M$.

Поэтому W*-алгебры получили также название алгебр фон Неймана. Пусть M — W*-алгебра. Совокупность всех элементов M, коммутирующих со всеми элементами из M, называется *центром* алгебры M и обозначается как $Z(M)$. Легко видеть, что $Z(M) = M \cap M'$. Элементы $Z(M)$ называются *центральными*. Алгебру, у которой центральными элементами являются только элементы вида $\lambda\mathbb{1}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$), называют *фактором*.

Вещественная банахова *-алгебра R называется *вещественной C*-алгеброй*, если норму на R можно продолжить на комплексификацию $A = R + iR$ алгебры R так, чтобы алгебра A являлась (комплексной) C*-алгеброй (см. [10]). Известен результат [10, теорема 5.2.10] о том, что вещественная банахова *-алгебра R является вещественной C*-алгеброй тогда и только тогда, когда R — эрмитова алгебра и $\|aa^*\| = \|a\|^2$ для любого $a \in R$. Эрмитовость R означает, что $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$ для любого $a \in R$, где $\sigma(a)$ — спектр элемента a. С другой стороны, эрмитовость алгебры R эквивалентна обратимости элемента $\mathbb{1} + aa^*$ для любого $a \in R$.

Пусть H_r — вещественное гильбертово пространство такое, что $H_r + iH_r = H$, и пусть $R \subset B(H_r) \subset B(H_r) + iB(H_r) = B(H)$ — вещественная *-подалгебра (см. [10]). Коммутант *-алгебры R определяется аналогично комплексному случаю: $R' = \{a \in B(H_r) : \ ab = ba, \forall b \in R\}$. Непосредственно проверяется, что $(R + iR)' = R' + iR'$. Аналогично комплексному случаю, если $R = R''$, то R называется *вещественной алгеброй фон Неймана*.

Теперь, пусть R — вещественная C*-алгебра. Тогда, как уже сказано выше, $R+iR$ является (комплексной) C*-алгеброй. Легко видеть, что эта алгебра есть наименьшая C*-алгебра, содержащая R. Вещественная C*-алгебра R называется *вещественной* W*-*алгеброй*, если C*-алгебра $R + iR$ является (комплексной) W*-алгеброй. Для вещественных *-алгебр также имеется аналог теоремы о бикоммутанте: для вещественной *-подалгебры $R \subset B(H_r)$ следующие условия эквивалентны:

1. $R = R''$, т. е. R — вещественная алгебра фон Неймана;
2. R — вещественная W*-алгебра;
3. R слабо замкнута и $\mathbb{1} \in R$.

Для удобства в дальнейшем алгебру, удовлетворяющую одному из эквивалентных условий, будем называть *вещественной W*-алгеброй*.

3. Конечномерные и абелевы вещественные ядерные C*-алгебры

Как уже сказано, ядерные пространства были введены А. Гротендиком [8, 9] в 1950-е годы как пространства, которые содержат так называемые «пространства дифференциального типа». Теория ядерных пространств была развита Гротендиком в рамках его общей теории тензорных произведений локально выпуклых пространств. Ядерные C*-алгебры были введены, по аналогии с понятием ядерного локально выпуклого пространства, в теории тензорных произведений C*-алгебр.

Норма γ на инволютивной алгебре $A \otimes B$ называется *C*-нормой*, если $\gamma(x^*x) = \gamma(x)^2$ для всех $x \in A \otimes B$. Если γ — C*-норма, то пополнение алгебры $A \otimes B$ по норме γ является C*-алгеброй, которую мы обозначим как $A\overline{\otimes}_\gamma B$, или просто $A\overline{\otimes}B$. Любая C*-норма на $A \otimes B$ является так называемой *кросс-нормой*, т. е. удовлетворяет условию $\gamma(a \otimes b) = \|a\| \cdot \|b\|$, для всех $a \in A$, $b \in B$.

В тензорном произведение $A \otimes B$ всегда существуют, по крайне мере, следующие две C*-нормы, называемые *минимальной* и *максимальной*, соответственно:

$$\|u\|_{min} = \sup\{\left|(f \otimes g)(u)\right| : \ f \in A^*, g \in B^*, \ \|f\| \leqslant 1, \|g\| \leqslant 1\},$$

$$\|u\|_{max} = \inf \sum_j \|a_j\| \cdot \|b_j\|,$$

где $u = \sum\limits_j a_j \otimes b_j \in A \otimes B$ и $(f \otimes g)(u) = \sum\limits_j f(a_j) \cdot g(b_j)$. Эти нормы иногда называются также *инъективной* и *проективной*, соответственно. Нетрудно показать, что для любой C*-нормы $\| \cdot \|_\gamma$ имеет место

$$\| \cdot \|_{min} \leqslant \| \cdot \|_\gamma \leqslant \| \cdot \|_{max}.$$

В частности, отображение

$$\gamma_0(u) := \|u\|_{\gamma_0} = \sup \frac{\bigotimes\limits_{i=1}^{2} \varphi_i(v^*u^*uv)}{\bigotimes\limits_{i=1}^{2} \varphi_i(v^*v)}, \quad \varphi_i \in S_i, v \in A \otimes B, \ \bigotimes_{i=1}^{2} \varphi_i(v^*v) > 0$$

также является C*-нормой, где $S_1 = S(A)$ и $S_2 = S(B)$ — пространства состояний алгебр A и B, соответственно.

Рассмотрим связь обертывающей W*-алгебры тензорных произведений вещественных W*-алгебр с тензорным произведением их обертывающих W*-алгебр.

Предложение 3.1. *Пусть R и Q — вещественные W*-алгебры, $U(R) = R + iR$ и $U(Q) = Q + iQ$ — их обертывающие W*-алгебры, соответственно. Тогда*

$$U(R\overline{\otimes}Q) = U(R)\overline{\otimes}U(Q), \quad \textit{т. е.} \quad (R + iR)\overline{\otimes}(Q + iQ) = R\overline{\otimes}Q + i(R\overline{\otimes}Q).$$

Доказательство. Пусть α_R и α_Q — канонические инволютивные *-антиавтоморфизмы[1] $U(R)$ и $U(Q)$, порождающие R и Q, соответственно (см. [4, теорема 1.5.2]), т. е.

$$R = \{x \in U(R) : \alpha_R(x) = x^*\}, \quad Q = \{y \in U(Q) : \alpha_Q(y) = y^*\}.$$

Рассмотрим *-антиавтоморфизм $\alpha_R \otimes \alpha_Q : U(R)\overline{\otimes}U(Q) \to U(R)\overline{\otimes}U(Q)$, определяемый как

$$(\alpha_R \otimes \alpha_Q)(x \otimes y) := \alpha_R(x) \otimes \alpha_Q(y).$$

Так как *-автоморфизм $(\alpha_R\otimes\alpha_Q)^2$ — нормальный и $\alpha_R^2 = \alpha_Q^2 = id$ — тождественный, то для любого

$$z = \sup_n \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in U(R)\overline{\otimes}U(Q)$$

имеет место:

$$\begin{aligned}(\alpha_R \otimes \alpha_Q)^2(z) &= \sup_n(\alpha_R \otimes \alpha_Q)^2\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\Big) = \sup_n \sum_{i=1}^{n}(\alpha_R \otimes \alpha_Q)^2(x_i \otimes y_i) = \\ &= \sup_n \sum_{i=1}^{n}(\alpha_R^2(x_i) \otimes \alpha_Q^2(y_i)) = \sup_n \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = z,\end{aligned}$$

т. е. $(\alpha_R \otimes \alpha_Q)^2$ — тождественное отображение на $U(R)\overline{\otimes}U(Q)$. Рассмотрим вещественную W*-алгебру

$$F = \{z \in U(R)\overline{\otimes}U(Q) :\ (\alpha_R \otimes \alpha_Q)(z) = z^*\}.$$

Аналогично доказательству [4, теорема 1.5.2] легко показать, что

$$F \cap iF = \{0\} \quad \text{и} \quad U(R)\overline{\otimes}U(Q) = F + iF.$$

Если $x \in R$ и $y \in Q$, то

$$(\alpha_R \otimes \alpha_Q)(a \otimes y) = \alpha_R(x) \otimes \alpha_Q(y) = x^* \otimes y^* = (x \otimes y)^*,$$

следовательно, $R \otimes Q \subset F$. Так как F слабо-* замкнуто, то $R\overline{\otimes}Q \subset F$. Отсюда $U(R\overline{\otimes}Q) \subset U(R)\overline{\otimes}U(Q)$.

Пусть теперь $z \in U(R) \otimes U(Q)$. Тогда

$$z = \sum_{k=1}^{n}(a_k + ib_k) \otimes (c_k + id_k) \quad (a_k, b_k \in R,\ c_k, d_k \in Q).$$

Так как

$$z = \sum_{k=1}^{n}(a_k \otimes c_k - b_k \otimes d_k) + i\sum_{k=1}^{n}(b_k \otimes c_k + a_k \otimes d_k),$$

то $z \in R\otimes Q+i(R\otimes Q) = U(R\otimes Q)$. Следовательно, $U(R)\otimes U(Q) \subset U(R\otimes Q)$. Отсюда $U(R)\overline{\otimes}U(Q) \subset U(R\overline{\otimes}Q)$. □

Замечание 3.1. В доказательстве предложение 3.1 используется тот факт, что всякая вещественная W*-алгебра порождается каноническим инволютивным *-антиавтоморфизмом обертывающей W*-алгебры, и наоборот. Поэтому утверждение сформулировано для вещественных W*-алгебр. Однако в работах П. Стейси (см., например, [14]) показано, что всякая вещественная C*-алгебра также порождается некоторым инволютивным *-антиавтоморфизмом обертывающей C*-алгебры, и наоборот. Таким образом, предложение 3.1 верно и для вещественных C*-алгебр.

[1] Отображение $\alpha : R \to R$ называется *инволютивным *-антиавтоморфизмом*, если $\alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x)$, $\alpha(x^*) = \alpha(x)^*$ $(\forall x, y \in R)$ и $\alpha^2 = id$.

Определение 3.1. Комплексная или вещественная C*-алгебра A называется *ядерной*, если для любой комплексной (соответственно, вещественной) C*-алгебры B на $A \otimes B$ существует единственная C*-норма.

Ядерность вещественной C*-алгебры связана с ядерностью обертывающей (комплексной) C*-алгебры следующим образом.

Предложение 3.2. *Вещественная C*-алгебра R — ядерная, если ее обертывающая C*-алгебра $R + iR$ — ядерная.*

Доказательство. Пусть B — вещественная C*-алгебра. Тогда $B + iB$ — C*-алгебра и по предложению 3.1 (см. также замечание 3.1) имеем:

$$(R + iR)\overline{\otimes}(B + iB) = R\overline{\otimes}B + i(R\overline{\otimes}B).$$

Так как C*-норма на алгебре $(R+iR) \otimes (B+iB)$ единственна, то из последнего равенство получим, что C*-норма на алгебре $R \otimes B$ также единственна. □

Наша цель — доказать и обратное утверждение. Используя понятие инъективности, мы докажем его в следующем разделе.

Используя свойства тензорного произведения матричных алгебр, легко показать, что конечномерные вещественные (также комплексные) C*-алгебры являются ядерными.

Сначала покажем, что матричные алгебры является ядерными.

Теорема 3.1. *Если F — поле вещественных чисел или тело кватернионов (т. е. $F = \mathbb{R}$ или $F = \mathbb{H}$), то вещественная C*-алгебра $M_n(F)$ — алгебра $n \times n$-матриц над F (которая также является вещественной C*-алгеброй, относительно обычных операций над матрицами) — является ядерной, т. е. для любой вещественной C*-алгебры R на тензорном произведении $M_n(F) \otimes R$ существует единственная C*-норма. В этом случае $M_n(F) \otimes R \cong M_n(R)$.*

Доказательство. Рассмотрим комплексификацию $A = R + iR$ алгебры R, которая является (комплексной) C*-алгеброй. Так как комплексная матричная *-алгебра $M_n(\mathbb{C})$ является ядерной, тогда на $M_n(\mathbb{C}) \otimes A$ существует единственная C*-норма $\|\cdot\|$. По предложению 3.1 (см. также замечание 3.1 и [12, теорема 10]) имеем:

$$M_n(\mathbb{C}) \otimes A = (M_n(F) + iM_n(F)) \otimes (R + iR) = M_n(F) \otimes R + i(M_n(F) \otimes R)$$

($F = \mathbb{H}$ может быть только в случае четного n). Тогда легко видеть, что сужение нормы $\|\cdot\|$ на $M_n(F) \otimes R$ также является единственной C*-нормой. Следовательно, вещественная C*-алгебра $M_n(F)$ является ядерной. □

Пусть теперь R — конечномерная вещественная C*-алгебра. Тогда известно, что $R \cong \bigoplus_{k=1}^{m} M_{n_k}(F)$, где $F = \mathbb{R}$ или $F = \mathbb{H}$. Тогда для любой вещественной C*-алгебры Q легко показать, что

$$R \otimes Q \cong \bigoplus_{k=1}^{m} M_{m_k}(Q).$$

Следовательно, на $R \otimes Q$ существует естественная C*-норма, а значит, по теореме 3.1 эта норма единственна. Таким образом, для конечномерных вещественных C*-алгебр также имеем:

Следствие 3.1. *Всякая конечномерная вещественная C*-алгебра является ядерной.*

Теперь, докажем вещественный аналог известной теоремы Такесаки, т. е. покажем, что абелевы (т. е. коммутативные) вещественные C*-алгебры также являются ядерными

Теорема 3.2. *Всякая абелева вещественная C*-алгебра является ядерной.*

Доказательство. Пусть A — абелева вещественная C*-алгебра и пусть Ω — ее спектральное пространство, т. е. множество всех ненулевых вещественно-значных мультипликативных (вещественно) линейных функционалов на A. Элементы Ω называются *характерами* алгебры A. Известно, что множество Ω есть локально-компактное хаусдорфово пространство относительно топологии поточечной сходимости на A, и абелева вещественная C*-алгебра A *-изоморфна алгебре $C_0(\Omega)$ всех непрерывных вещественных функций на пространстве Ω, стремящихся к нулю в бесконечности (см. [5, п. 4.1.3]).

Поэтому пусть $A \cong C_0(\Omega_1)$ — вещественная абелева C*-алгебра, где Ω_1 — локально-компактное хаусдорфово пространство. Пусть B — вещественная C*-алгебра. Не ограничивая общности, можно полагать, что A и B — алгебры с единицей. Пусть $\|.\|_\gamma$ — произвольная C*-норма на $A \otimes B$.

Сначала пусть B также абелева, т. е. $B \cong C_0(\Omega_2)$, где Ω_2 — некоторое компактное хаусдорфово пространство. Тогда вещественная C*-алгебра $A\overline{\otimes}_\gamma B$ с единицей также является абелевой: $A\overline{\otimes}_\gamma B \cong C_0(\Omega)$, где Ω — компактное хаусдорфово пространство. Если $\varphi \in \Omega$, то для $\varphi_1 = \varphi(\cdot \otimes \mathbb{1}_B)$ и $\varphi_2 = \varphi(\mathbb{1}_A \otimes \cdot)$ можно непосредственно показать, что

$$\varphi_1 \in \Omega_1,\ \varphi_2 \in \Omega_2, \quad \varphi(a \otimes b) = \varphi_1(a) \otimes \varphi_2(b)$$

для $\forall a \otimes b \in A \otimes B$. Следовательно, Ω — замкнутое подпространство $\Omega_1 \times \Omega_2$. Если $\Omega \neq \Omega_1 \times \Omega_2$, то существуют непустые открытые подмножества $U_1 \subset \Omega_1$ и $U_2 \subset \Omega_2$ такие, что $\Omega \cap (U_1 \times U_2) = \varnothing$. Выберем элементы $a \in A$ и $b \in B$ так, чтобы $supp(a)(\cdot) \subset U_1$ и $supp(b)(\cdot) \subset U_2$. Тогда $\varphi(a \otimes b) = 0$ для $\forall \varphi \in \Omega$. Это противоречие, так как $a \otimes b \neq 0$. Следовательно, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, т. е. $A\overline{\otimes}_\gamma B \cong C_0(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Тогда для любого $a \otimes b \in A \otimes B$ мы имеем

$$\begin{aligned}\|a \otimes b\|_\gamma &= \|a \otimes b\|_{\gamma_0} = \sup\{|\varphi_1(a) \otimes \varphi_2(b)| : \ \varphi_i \in \Omega_i\} = \\ &= \sup\{\bigl|f(a) \otimes g(b)\bigr| : \ f \in A^*, g \in B^*, \ \|f\| \leqslant 1, \|g\| \leqslant 1\} = \|a \otimes b\|_{min},\end{aligned}$$

т. е. на алгебре $A \otimes B$ существует единственная C*-норма.

Теперь рассмотрим общий случай, т. е. пусть B — произвольная (не обязательно абелева) вещественная C*-алгебра. Пусть $\varphi_1 \in \Omega_1$ (т. е. φ_1 — чистое состояние на A), и пусть E — подмножество состояний φ_2 на B такое, что функционал $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ непрерывен относительно нормы $\|\cdot\|_\gamma$. Легко показать, что E является $\sigma(B^*, B)$-компактным выпуклым подмножеством $S(B)$ пространства состояний алгебры B. Пусть $h^* = h \in B$, и пусть B_1 — абелева C*-подалгебра B, порожденная элементами $\mathbb{1}_B$ и h. Выберем состояние ψ на B_1 такое, что $\psi(h) = \max\{\lambda : \ \lambda \in \sigma(h)\}$. Так как B_1 — абелева, то, как показано выше, на $A \otimes B_1$ существует единственная C*-норма $\|\cdot\|_\gamma$. Тогда функционал $\varphi_1 \otimes \psi$ является $\|\cdot\|_\gamma$-непрерывным. Следовательно, по теореме Хана—Банаха функционал $\varphi_1 \otimes \psi$ можно непрерывно продолжить до состояния φ на $A\overline{\otimes}_\gamma B_1$. Очевидно, $\varphi(\cdot \otimes \mathbb{1}_{B_1}) = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$, где φ_2 — продолжение ψ на B. В частности, $\varphi_2 \in E$ и $E = S(B)$. Так как для $\varphi_1 \in S(A)$ и $\varphi_2 \in S(B)$ функционал $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ является $\|\cdot\|_\gamma$-непрерывным, то $\|\cdot\|_\gamma \geqslant \|\cdot\|_{\gamma_0}$. С другой стороны, если φ — чистое состояние на $A \otimes B$, то можно показать, что существуют чистые состояния $\varphi_1 \in S(A)$ и $\varphi_2 \in S(B)$, удовлетворяющие $\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$ и такие, что для любого $x = a \otimes b \in A \otimes B$ мы получим

$$\|x\|_\gamma^2 = \|x^* x\|_\gamma = \sup_\varphi\{\varphi(x^* x)\} = \sup\{\varphi_1(a^* a) \otimes \varphi_2(b^* b)\} \leqslant \|a \otimes b\|_{\gamma_0} = \|x\|_{\gamma_0}.$$

Таким образом, на алгебре $A \otimes B$ существует единственная C*-норма. □

Замечание 3.2. Как сказано выше, в комплексном случае эта теорема доказана в работе М. Такесаки. Из этого случая нельзя непосредственно получить утверждение теоремы 3.2, потому что спектральное пространство абелевой вещественной C*-алгебры шире, чем спектральное пространство обертывающей абелевой (комплексной) C*-алгебры.

4. Инъективные и ядерные вещественные C*-алгебры

Как уже сказано, что инъективные комплексные и вещественные W*-алгебры достаточно хорошо изучены. Напомним некоторые определения.

Инъективность (в смысле Хакеда—Томияма) W*-алгебры R означает существование проекции $P : B(H) \to R$ с $\|P\| = 1$, $P(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$.

Пусть A — комплексная или вещественная C*-алгебра. Элемент $a \in A$ называется *положительным* (пишут $a \geqslant 0$), если существует самосопряженный элемент b такой, что $a = b^2$. Обозначим через A^+ множество всех положительных элементов в A. *Положительное отображение* φ между C*-алгебрами A и B — это отображение $\varphi : A \to B$, при котором $\varphi(a) \in B^+$ для всех $a \in A^+$. Положительное линейное отображение φ называется *вполне положительным*, если отображение $\varphi_n : M_n(A) \to M_n(B)$, определяемое как $\varphi_n((a_{ij})_{i,j=1}^n) = (\varphi(a_{ij}))_{i,j=1}^n$, является положительным для всех n. Алгебра A называется *инъективной*, если для любой комплексной (или вещественной) C*-алгебры B с $\mathbb{1}$ и для каждого самосопряженного подпространства $S \subset B$, содержащего $\mathbb{1}$, всякое вполне положительное линейное отображение $\varphi : S \to A$ можно продолжить до вполне положительного линейного отображения $\overline{\varphi} : B \to A$.

В работе [12, следствие 2] показано следующее.

Предложение 4.1. *Вещественная C*-алгебра инъективна тогда и только тогда, когда она инъективна в смысле Хакеда—Томияма.*

Таким образом, оба определения эквивалентны. Кроме того, в работе [12, теоремы 7 и 8] доказано, что вещественная W*-алгебра R инъективна тогда и только тогда, когда обертывающая W*-алгебра $R+iR$ инъективна. На самом деле этот результат верен и для вещественных C*-алгебр.

При изучении инъективных факторов удобно использовать определение в смысле Хакеда—Томияма. Однако в вещественном случае имеются две основные алгебры $B(H)$ и $B(H_r)$ — всех ограниченных линейных операторов на комплексном и вещественном гильбертовом пространстве, соответственно. Поэтому здесь можно рассматривать инъективность (в смысле Хакеда—Томияма) относительно $B(H)$ и относительно $B(H_r)$. В связи с этим докажем следующий результат.

Предложение 4.2. *Вещественная W*-алгебра $R \subset B(H_r) \subset B(H)$ инъективна относительно $B(H)$ тогда и только тогда, когда она инъективна относительно $B(H_r)$.*

Доказательство. Пусть вещественная W*-алгебра R инъективна относительно $B(H_r)$, т. е. существует проекция $P : B(H_r) \to R$ такая, что $\|P\| = 1$ и $P(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Так как $B(H_r)$ инъективна (см. [12, теорема 3]), то существует проекция $P_1 : B(H) \to B(H_r)$ такая, что $\|P_1\| = 1$ и $P_1(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Положим $P_2 = P \circ P_1$. Легко видеть, что P_2 является проекцией из $B(H)$ на R такой, что $\|P_2\| = 1$ и $P_2(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$.

Теперь, пусть вещественная W*-алгебра R инъективна относительно $B(H)$, т. е. существует проекция $P : B(H) \to R$ такая, что $\|P\| = 1$ и $P(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Тогда сужение P на $B(H_r)$: $P_1 = P|_{B(H_r)}$ также является проекцией из $B(H_r)$ на R такой, что $\|P_1\| = 1$ и $P_1(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. □

Ниже рассмотрим коммутант R' алгебры R и второе сопряженное пространство R^{**}. Наша цель — с помощью них показать эквивалентность понятий инъективности и ядерности для вещественных C*-алгебр.

Теорема 4.1. *Если $R \subset B(H_r)$ — ядерная вещественная C*-алгебра, то коммутант R' алгебры R является инъективным.*

Доказательство. Поскольку R — ядерная, то отображение $R \otimes R' \to B(H_r)$, определяемое как

$$\sum a_i \otimes a_i' \ \longrightarrow\ \sum a_i a_i',$$

продолжается до представления алгебры $R \otimes R'$ на H_r. Так как алгебру $R \otimes R'$ можно изоморфно вложить в $R \otimes B(H_r)$, то существуют вещественное гильбертово пространство K, содержащее H_r, и представление φ алгебры $R \otimes B(H_r)$ на K такие, что

$$\varphi(a \otimes a')|_{H_r} = aa', \qquad a \in R, a' \in R'.$$

Пусть $p : K \to H_r$ — проекция, и пусть $\pi(x) = p\varphi(\mathbb{1} \otimes x)|_{H_r}$, $x \in H_r$. Непосредственно проверяется, что элемент $\pi(x)$ коммутирует с алгеброй R и отображение π действует тождественно на R'. Таким образом, π — проекция из $B(H_r)$ на R' такая, что $\|\pi\| = 1$ и $\pi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. □

Сформулируем один вспомогательный результат.

Предложение 4.3 (см. [10, 5.5.4]). *Пусть R — вещественная C*-алгебра и $\{\pi, H_r\}$ — *-представление алгебры R. Тогда $\{\pi, H_r\}$ единственным образом может быть продолжено до *-представления $\{\overline{\pi}, H_r\}$ алгебры R^{**} такого, что $\overline{\pi}$ является $\sigma(R^{**}, R^*)$-непрерывным и $\overline{\pi}(R^{**}) = \pi(R)''$. Здесь R^{**} — второе сопряженное пространство.*

Если $R \subset B(H_r)$ — ядерная вещественная C*-алгебра, то по теореме 4.1 коммутант R' алгебры R является инъективным. Известно, что коммутант инъективной (комплексной или вещественной) W*-алгебры также инъективен. Отсюда следует, что слабое замыкание $\overline{R}^w = R''$ инъективно.

Так как это выполняется для любого точного *-представления R, в частности, универсального *-представления, то по предложению 4.3 алгебра R^{**} является инъективной. Таким образом, получим следующий результат.

Теорема 4.2. *Если вещественная C^*-алгебра R — ядерная, то вещественная W^*-алгебра R^{**} — инъективная.*

Верно и обратное утверждение.

Теорема 4.3. *Пусть R — вещественная C^*-алгебра. Если вещественная W^*-алгебра R^{**} является инъективной, то алгебра R — ядерная.*

Доказательство. Положим $A = R + iR$. Так как $A^{**} = R^{**} + iR^{**}$ (см. [10]) и алгебра R^{**} инъективна, то в силу [12, теоремы 7 и 8] алгебра A^{**} также инъективна. Поскольку, в комплексном случае, понятия инъективности и ядерности эквивалентны, то алгебра A — ядерная. По предложению 3.2 алгебра R также является ядерной. $\square$

Следствие 4.1. *Вещественная C^*-алгебра R — ядерная тогда и только тогда, когда вещественная W^*-алгебра R^{**} — инъективная.*

Отсюда, получим один из основных результатов статьи.

Теорема 4.4. *Вещественная C^*-алгебра R — ядерная тогда и только тогда, когда обертывающая C^*-алгебра $R + iR$ — ядерная.*

Доказательство. По следствию 4.1 ядерность R эквивалентна инъективности алгебры R^{**}. В силу [12, теоремы 7 и 8], инъективность R^{**} эквивалентна инъективности алгебры $R^{**} + iR^{**} = (R + iR)^{**}$, следовательно, ядерности C*-алгебры $R + iR$. Теорема доказана. $\square$

Из следствия 4.1 и теоремы 4.4 следует один из основных результатов работы.

Следствие 4.2. *Для вещественной W^*-алгебры понятия ядерности и инъективности совпадают.*

Итак, подведя итог и учитывая все, сказанное во введении, получим главный результат работы.

Теорема 4.5. *Имеют место следующие утверждения:*

1. *существует единственный (с точностью до изоморфизма) ядерный вещественный фактор типа II_1;*
2. *существует единственный ядерный вещественный фактор типа II_∞;*
3. *существует единственный ядерный вещественный фактор типа III_1;*
4. *существуют в точности два ядерных вещественных фактора типа $III_\lambda (0 < \lambda < 1)$;*
5. *для любого натурального числа n существуют n попарно неизоморфных вещественных ядерных факторов типа III_0, у которых обертывающие W^*-факторы изоморфны.*

Доказательство. В [4, теорема 1.7.3] получен следующий результат:

- существует единственный класс изоморфности инъективных вещественных факторов типа II_1, II_∞ и III_1, соответственно;
- существуют в точности два класса изоморфности инъективных вещественных факторов типа III_λ $(0 < \lambda < 1)$;
- для любого натурального числа n существуют n попарно неизоморфных вещественных инъективных факторов типа III_0, у которых обертывающие W*-факторы изоморфны.

Тогда из следствия 4.2 получим утверждение данной теоремы. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аюпов Ш. А.* Классификация инъективных JW-факторов// Функц. анализ и его прилож. — 1984. — *18*, № 3. — С. 67-68.
2. *Фон Нейман Дж.* Обобщение математического аппарата квантовой механики методами абстрактной алгебры. I// Мат. сб. — 1936. — *1*, № 4. — С. 415–485.
3. *Фон Нейман Дж.* Избранные труды по функциональному анализу. I, II. — М.: Наука, 1987.

4. *Ayupov Sh. A., Rakhimov A. A., Usmanov Sh. M.* Jordan, Real and Lie structures in operator algebras. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
5. *Ayupov Sh. A., Rakhimov A. A.* Real W*-algebras, actions of groups and index theory for real factors. — Beau-Bassin: VDM Verlag Dr. Müller, 2010.
6. *Connes A.* Classification of injective facteurs// Ann. Math. — 1976. — *104*, № 1. — С. 73–115.
7. *Dixmier J.* Les algebres d'operateurs dans l'espace Hilbertien. — Paris: Gauthier-Villars, 1969.
8. *Grothendieck A.* Resume des results essentiels dans la theorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucleaires// Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1954. — *4*. — С. 73–112.
9. *Grothendieck A.* Produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires// Séminaire N. Bourbaki. — 1954. — *69*. — С. 193–200.
10. *Li B. R.* Real operator algebras. — River Edge: World Scientific, 2003.
11. *Murray F., von Neumann J.* On rings of operators. I// Ann. Math. — 1936. — *37*. — С. 116–229.
12. *Rakhimov A. A., Nurillaev M. E.* On property of injectivity for real W*-algebras and JW-algebras// Positivity. — 2018. — *22*. — С. 1345–1354.
13. *Sakai S.* C*-algebras and W*-algebras. — Berlin: Springer, 1971.
14. *Stacey P. J.* Real structure in unital separable simple C*-algebras with tracial rank zero and with a unique tracial state// New York J. Math. — 2006. — *12*. — С. 269–273.
15. *Stormer E.* Real structure in the hyperfinite factor// Duke Math. J. — 1980. — *47*, № 1. — С. 145–153.
16. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. I, II, III. — Berlin: Springer, 1979.

А. А. Рахимов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon, Turkey
E-mail: rakhimov@ktu.edu.tr

М. Э. Нуриллаев
Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами, Ташкент, Узбекистан
E-mail: nur11laev_muzaffar@mail.ru

Х. Х. Болтаев
Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами, Ташкент, Узбекистан
E-mail: bkhabibzhan@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-755-765 UDC 517.98

Injectivity and Nuclearity Properties for Real C*-Algebras

© 2021 **A. A. Rakhimov, M. E. Nurillaev, Kh. Kh. Boltaev**

Abstract. In this paper, we study injective and nuclear real W*- and C*-algebras. The connection of these concepts with similar concepts of enveloping W*- and C*-algebras is considered. The equivalence of the concepts of injectivity and nuclearity for real C*-algebras is shown. As a consequence, nuclear real factors of types II_1, II_∞, III_1, III_0, and III_λ $(0 < \lambda < 1)$ are completely described.

REFERENCES

1. Sh. A. Ayupov, "Klassifikatsiya in"ektivnykh JW-faktorov" [Classification of injective JW-factors], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1984, **18**, No. 3, 67-68 (in Russian).

2. J. von Neumann, “Obobshchenie matematicheskogo apparata kvantovoy mekhaniki metodami abstraktnoy algebry. I” [Generalization of the mathematical apparatus of quantum mechanics by methods of abstract algebra. I], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1936, **1**, No. 4, 415–485 (Russian translation).
3. J. von Neumann, *Izbrannye trudy po funktsional’nomu analizu. I, II* [Selected Works on Functional Analysis. I, II], Nauka, Moscow, 1987 (Russian translation).
4. Sh. A. Ayupov, A. A. Rakhimov, and Sh. M. Usmanov, *Jordan, Real and Lie structures in operator algebras*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
5. Sh. A. Ayupov and A. A. Rakhimov, *Real W*-algebras, actions of groups and index theory for real factors*, VDM Verlag Dr. Müller, Beau-Bassin, 2010.
6. A. Connes, “Classification of injective facteurs,” *Ann. Math.*, 1976, **104**, No. 1, 73–115.
7. J. Dixmier, *Les algebres d’operateurs dans l’espace Hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
8. A. Grothendieck, “Resume des results essentiels dans la theorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucleaires,” *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1954, **4**, 73–112.
9. A. Grothendieck, “Produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires,” *Séminaire N. Bourbaki*, 1954, **69**, 193–200.
10. B. R. Li, *Real operator algebras*, World Scientific, River Edge, 2003.
11. F. Murray and J. von Neumann, “On rings of operators. I,” *Ann. Math.*, 1936, **37**, 116–229.
12. A. A. Rakhimov and M. E. Nurillaev, “On property of injectivity for real W*-algebras and JW-algebras,” *Positivity*, 2018, **22**, 1345–1354.
13. S. Sakai, *C*-algebras and W*-algebras*, Springer, Berlin, 1971.
14. P. J. Stacey, “Real structure in unital separable simple C*-algebras with tracial rank zero and with a unique tracial state,” *New York J. Math.*, 2006, **12**, 269–273.
15. E. Stormer, “Real structure in the hyperfinite factor,” *Duke Math. J.*, 1980, **47**, No. 1, 145–153.
16. M. Takesaki, *Theory of operator algebras. I, II, III*, Springer, Berlin, 1979.

A. A. Rakhimov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan;
Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon, Turkey
E-mail: rakhimov@ktu.edu.tr

M. E. Nurillaev
Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: nur11laev_muzaffar@mail.ru

Kh. Kh. Boltaev
Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: bkhabibzhan@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 4 (2021). С. 766–782
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-766-782 УДК 517.953

МЕТОД ФОКАСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА МЕТРИЧЕСКИХ ГРАФАХ

© 2021 г. З. А. СОБИРОВ, М. Р. ЭШИМБЕТОВ

Аннотация. В работе дан метод построения решений начально-краевых задач для уравнения теплопроводности на простых метрических графах, таких как звездообразный граф, дерево и треугольник с тремя сходящимися ребрами. Решения задач построены так называемым методом Фокаса, который является обобщением метода преобразования Фурье. При этом задача сведена к системе алгебраических уравнений относительно преобразования Фурье неизвестных значений решения в вершинах графа.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Известно, что краевые задачи для уравнений с частными производными на метрических графах используются для моделирования процесса диффузии и распространения волн в разветвленных структурах для многих проблем физики, химии и биологии [4, 6]. При этом в точках разветвления графа используется обобщенное условие локального сохранения потока, т. е. условие Кирхгоффа, которое в самом простом случае состоит из условий непрерывности решения на вершине графа и равенства нулю суммы исходящих односторонних производных решения на вершине.

Граф состоит из точек, называемыми *вершинами*, и из отрезков, концы которых лежат в вершинах графа [5]. Эти отрезки называются *ребрами* графа. Мы будем рассматривать только связные графы, т. е. графы, в которых из любой точки можно попасть в другую по ребрам графа. Изометрическим сопоставлением каждого ребра графа числовому интервалу мы получаем так называемый метрический граф. Метрика здесь понимается в смысле геодезической метрики, т. е. как кратчайшее расстояние по ребрам графа между двумя точками графа. Понятно, что такая структура является одномерной, в то время как реалистические разветвленные структуры — двумерные (например, графеновые нанотрубки) или трехмерные. Поэтому возникает вопрос о целесообразности моделирования реальных проблем техники и физики с помощью метрических графов. В работах [7, 19] исследована краевая задача для стационарного уравнения Шредингера в тонких (с малыми поперечными сечениями) разветвленных областях. Доказано, что в случае стремления к нулю диаметра поперечного сечения решение рассматриваемой задачи стремится к решению краевой задачи на соответствующем квантовом (метрическом) графе. При этом из уравнения Шредингера в малой области точки разветвления, которая переходит в вершину графа при пределе, получаются условия Кирхгоффа. Этот результат остается справедливым и в случае уравнения теплопроводности в силу того, что уравнение теплопроводности с помощью преобразования Лапласа по времени переходит в стационарное уравнение Шредингера.

Еще одно обоснование моделирования процесса теплопроводности в разветвленных областях посредством метрических графов можно найти в работе [17]. Также в этой работе методом Фокаса получено решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на компактном звездообразном графе.

В данной работе мы обобщаем метод унифицированного преобразования Фокаса [8–10, 16–18] для решения уравнения теплопроводности на случай некоторых других простых метрических графов. Основной целью работы является демонстрация преимущества и простоты использования вышеуказанного метода для решения начально-краевых задач на метрических графах. В начале мы приводим постановку задачи и некоторые предварительные результаты, полученные в работах [15, 16, 18]. В следующих разделах работы приведены наши новые результаты. Мы даем метод построения решения начально-краевых задач для уравнения теплопроводности на графах в виде дерева и графа с циклом, состоящего из треугольной части и имеющего исходящие из вершин дополнительные ребра. Заметим, что разрешимость начально-краевых задач на метрических графах исследована в работах [1, 2].

2. Постановка задачи и предварительные результаты

Пусть $\Gamma = E \cup V$ — связный метрический граф, где $E = \{b_j\}_{j=1}^{n}$ — множество его ребер, а $V = \{\nu_j\}_{j=1}^{m}$ — множество вершин [5]. Определим координаты x_j на ребрах графа с помощью изометрического отображения этих ребер на интервалы $(0,\, L_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Будем говорить, что вершина ν *соприкасается* с ребром b_j, если она является концом данного ребра, и обозначать это $b_j \sim \nu$. Количество элементов множества $\{b : b \sim \nu, b \in E\}$ назовем *валентностью* вершины ν. Если валентность вершины равна единице, то она называется *граничной*. Пусть $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{m_1}\} = \partial\Gamma \subset V$ — граничные вершины графа. Далее, не нарушая общности, будем использовать x вместо x_j.

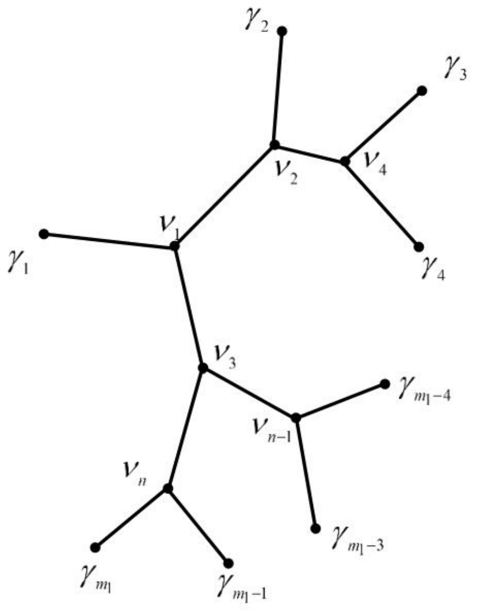

Рис. 2.1. Метрический граф Γ.

На каждом ребре графа рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t^{(j)}(x,t) = u_{xx}^{(j)}(x,t), \quad x \in b_j, \quad t > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Потребуем, чтобы решение уравнения (2.1) удовлетворяло начальному условию

$$u^{(j)}(x,0) = u_0^{(j)}(x), \quad j = 1,2,\ldots,n. \tag{2.2}$$

В точках разветвления (т. е. во внутренних вершинах) графа решение должно удовлетворять следующим *условиям склеивания*:

а) значения на вершине ν всех функций $u^{(j)}$, для которых $b_j \sim \nu$, одинаковы;

б) сумма односторонних производных на каждой вершине ν всех функций $u^{(j)}$, для которых $b_j \sim \nu$, равна нулю:

$$\sum_{b_j \sim \nu} \left.\frac{\partial u^{(j)}(x,t)}{\partial x}\right|_{\nu} = 0, \ \ \nu \in V \backslash \partial\Gamma, \ \ t \in [0, T]. \tag{2.3}$$

Первое из этих условий называется *условием непрерывности* решения на вершине, а второе — *условием сохранения потока*. Эти условия еще называются *условиями Кирхгоффа*, а иногда *условиями типа* δ на вершине.

На граничных вершинах графа потребуем выполнения следующих граничных условий:

$$u^{(j)}(x,t)|_{\nu} = g_0^{(j)}(t), \ \text{ если } \ x_j = 0 \text{ на вершине } \nu,$$

$$u^{(j)}(x,t)|_{\nu} = h_0^{(j)}(t), \ \text{ если } \ x_j = L_j \text{ на вершине } \nu, \ \ b_j \sim \nu. \tag{2.4}$$

Начальные данные $u_0^{(j)}$, $j = \overline{1,n}$, удовлетворяют условиям склеивания на неграничных вершинах графа и условиям согласования на граничных вершинах.

Далее в этом разделе мы рассмотрим несколько примеров использования метода унифицированного преобразования Фокаса. Начнем с простого случая, приведенного в работе [10].

2.1. Уравнение теплопроводности на полупрямой. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (2.1) на полупрямой (см. [10]). Требуется найти регулярное решение уравнения $u_t = u_{xx} + f(x,t)$ в области $E = \{(x,t) : x > 0, 0 < t \leqslant T\}$, $T > 0$, непрерывное в замыкании этой области, удовлетворяющее начальному условию $u(x,0) = u_0(x)$, $x \geqslant 0$, краевому условию $u(0,t) = g_0(t)$ и асимптотическому условию $\lim\limits_{x\to\infty} u(x,t) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Предполагается, что начальные и граничные данные — достаточно гладкие функции, и $u_0(0) = g_0(0)$, $f(x,t) \in C^1(\bar{E})$, функции $f(x,t)$ и $u_0(x)$ стремятся к нулю при $x \to +\infty$, являются абсолютно интегрируемыми функциями в $(0,+\infty)$ по переменой x для всех $0 \leqslant t \leqslant T$ и имеют ограниченные производные в своих областях определения.

Метод Фокаса состоит из трех этапов. Первый этап идентичен процедуре, используемой для реализации обычных преобразований. Второй требует использования теоремы Коши и леммы Жордана. Третий включает в себя только алгебраические преобразования.

1. *Глобальным соотношением* назовем уравнение, которое связывает неизвестное решение с его значениями и значениями его производных на границе области.

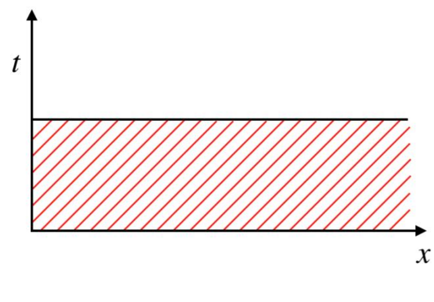

Рис. 2.2

В нашем случае это соотношение получается умножением уравнения на $e^{i(\lambda x+wt)}$, интегрированием по области и дальнейшим применением формулы Грина. Здесь диффузионное соотношение имеет вид $w=\lambda^2$. После несложных преобразований легко получим

$$e^{\lambda^2 t}\widehat{u}(-i\lambda,t)=\widehat{u}_0(-i\lambda)-\widetilde{g}_1(\lambda^2,t)-i\lambda\widetilde{g}_0(\lambda^2,t),\quad \operatorname{Im}\lambda\leqslant 0, \tag{2.5}$$

где

$$\widehat{u}(-i\lambda,t)=\int\limits_0^\infty e^{-i\lambda x}u(x,t)dx,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\quad \operatorname{Im}\lambda\leqslant 0, \tag{2.6}$$

$$\widehat{u}_0(-i\lambda)=\int\limits_0^\infty e^{-i\lambda x}u_0(x)dx,\quad \operatorname{Im}\lambda\leqslant 0, \tag{2.7}$$

$$\widetilde{g}_0(\lambda,t)=\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}g_0(\tau)d\tau, \widetilde{g}_1(\lambda,t)=\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}g_1(\tau)d\tau,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\quad \lambda\in\mathbb{C}, \tag{2.8}$$

$$g_1(t)=u_x(0,t),\quad g_0(t)=u(0,t),\quad 0<t\leqslant T. \tag{2.9}$$

Отметим, что

$$\left|e^{-i\lambda x}\right|=\left|e^{-i\lambda_R x+\lambda_I x}\right|=e^{\lambda_I x}.$$

Таким образом, эти выражения ограничены при $x\to\infty$ для всех $\lambda_I\leqslant 0$.

Функции $\widetilde{g}_0$ и $\widetilde{g}_1$ определены для всех комплексных значений λ, тогда как $\widehat{u}$ и $\widehat{u}_0$ определены для $\operatorname{Im}\lambda\leqslant 0$, поэтому глобальное соотношение (2.5) справедливо для $\operatorname{Im}\lambda\leqslant 0$.

Заметим, что глобальное соотношение (2.5) можно также получить, используя преобразование Лапласа, определенное по формуле (2.6).

2. На этом этапе мы должны получить интегральное представление решения.

Для уравнения теплопроводности, определенного на полуоси, это интегральное представление имеет вид

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\lambda^2 t}\widehat{u}_0(-i\lambda)d\lambda-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D^+}e^{i\lambda x-\lambda^2 t}\left[\widetilde{g}_1(\lambda^2,t)+i\lambda\widetilde{g}_0(\lambda^2,t)\right]d\lambda, \tag{2.10}$$

где контур ∂D^+ является границей области D^+, определенной как $D^+=\{\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0,\ \operatorname{Re}\lambda^2<0\}$ (см. рис. 2.3).

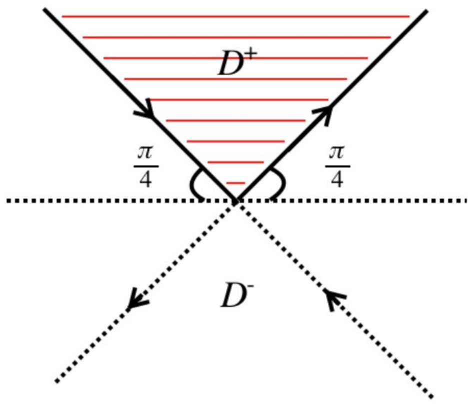

Рис. 2.3

Действительно, решая глобальное соотношение (2.5) относительно $\widehat{u}(-i\lambda,t)$, а затем используя формулу обратного преобразования Фурье, мы находим выражение, похожее на (2.10), но с контуром интегрирования вдоль вещественной оси вместо ∂D^+. Чтобы перейти от интеграла по вещественной оси к ∂D^+, используем теорему Коши и лемму Жордана.

Сначала рассмотрим функцию

$$e^{i\lambda x-\lambda^2 t}\widetilde{g}_1(\lambda^2,t)=e^{i\lambda x}\int\limits_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)}g_1(\tau)d\tau,$$

которая является голоморфной функцией λ. Последнее равенство включает в себя две экспоненты

$$e^{i\lambda x}=e^{i\lambda_R x-\lambda_I x},\quad e^{-\lambda^2(t-\tau)}=e^{-\operatorname{Re}(\lambda^2)(t-\tau)-i\operatorname{Im}(\lambda^2)(t-\tau)}.$$

Поскольку $x\geqslant 0$ и $t-\tau\geqslant 0$, вышеуказанные экспоненты ограничены при $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$ и $\operatorname{Re}\lambda^2\geqslant 0$. Кроме того, при выполнении этих условий, используя формулу интегрирования по частям, легко получить, что указанная выше функция имеет порядок $O\Big(\dfrac{1}{\lambda^2}\Big)$ при $\lambda\to\infty$:

$$e^{-\lambda^2 t}\int\limits_0^t e^{\lambda^2\tau}g_1(\tau)d\tau\sim\frac{g_1(t)}{\lambda^2},\quad \lambda\to\infty.$$

Таким образом, из теоремы Коши для области, ограниченной линией $|\operatorname{Re}(\lambda)|=R$ и ∂D^+, с использованием леммы Жордана при $R\to+\infty$ легко следует, что интеграл по вещественной прямой может быть заменен на интеграл по контуру ∂D^+.

Аналогичные утверждения верны для интеграла от функции $i\lambda e^{i\lambda x-\lambda^2 t}\widetilde{g}_0(\lambda^2,t)$.

3. На этом этапе, используя заданные граничные условия, глобальное соотношение, а также некоторые инвариантные преобразования, надо исключить из вышеприведенного интегрального представления неизвестные граничные значения.

Наше глобальное соотношение определено в $\operatorname{Im}\lambda\leqslant 0$, но при этом нам надо найти $\widetilde{g}_1$ при $\lambda\in\partial D^+$, в котором $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$.

Заметим, что замена λ на $-\lambda$ имеет следующие два свойства: во-первых, при этом отображении множество $\operatorname{Im}\lambda\leqslant 0$ переходит в множество $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$, а во-вторых, выражения $\widetilde{g}_0(\lambda^2,t)$ и $\widetilde{g}_1(\lambda^2,t)$ при этом не меняются. Воспользовавшись этой заменой, имеем

$$\widetilde{g}_1(\lambda^2,t)=i\lambda\widetilde{g}_0(\lambda^2,t)+\widehat{u}_0(i\lambda)-e^{\lambda^2 t}\widehat{u}(i\lambda,t),\quad \operatorname{Im}\lambda\geqslant 0.\tag{2.11}$$

При подстановке в интегральное представление (2.10) слагаемое $e^{\lambda^2 t}\widehat{u}(i\lambda,t)$ дает нам интеграл

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D^+}e^{i\lambda x}\widehat{u}(i\lambda,t)d\lambda,\quad 0<x<\infty,\quad t>0.$$

Функции $e^{\lambda x}$ и $\widehat{u}(i\lambda,t)$ обе ограничены и голоморфны в верхней полуплоскости, и

$$\widehat{u}(i\lambda,t)=\int\limits_0^\infty e^{i\lambda x}u(x,t)dx\sim-\frac{u(0,t)}{i\lambda},\quad \lambda\to\infty.$$

Тогда, согласно теореме Коши и лемме Жордана, этот интеграл равен нулю.

Таким образом, из (2.10) и (2.11) получим решение нашей задачи в виде

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\lambda^2 t}\widehat{u}_0(-i\lambda)d\lambda-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D^+}e^{i\lambda x-\lambda^2 t}\left[2i\lambda\widetilde{g}_0(\lambda^2,t)+\widehat{u}_0(i\lambda)\right]d\lambda.\tag{2.12}$$

2.2. Решение уравнении теплопроводности на конечном интервале методом Фокаса. Теперь покажем применение метода Фокаса для уравнения теплопроводности на конечном интервале $0<x<L$. Приступим к реализации этапов 1, 2 и 3, приведенных в предыдущем разделе.

1. Аналогичными действиями, как показано выше, имеем следующее глобальное соотношение:

$$e^{\lambda^2 t}\widehat{u}(-i\lambda,t)=\widehat{u}_0(-i\lambda)-\widetilde{g}_1(\lambda^2,t)-i\lambda\widetilde{g}_0(\lambda^2,t)+e^{-i\lambda L}\left[\widetilde{h}_1(\lambda^2,t)+i\lambda\widetilde{h}_0(\lambda^2,t)\right],\quad \lambda\in\mathbb{C},\tag{2.13}$$

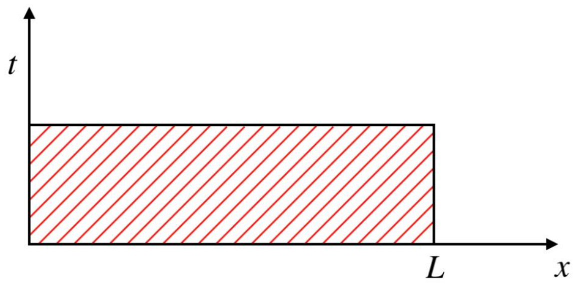

Рис. 2.4

где $\widehat{u}$ и $\widehat{u}_0$ — «преобразования Фурье на конечном интервале» [3] для функций $u(x,t)$ и $u_0(x)$, определенные как

$$\widehat{u}(-i\lambda,t)=\int\limits_0^L e^{-i\lambda x}u(x,t)dx,\quad \widehat{u}_0(-i\lambda)=\int\limits_0^L e^{-i\lambda x}u_0(x)dx,\quad \lambda\in\mathbb{C}, \tag{2.14}$$

$\widetilde{g}_1$, $\widetilde{g}_0$ определены в (2.9), а $\widetilde{h}_1$ и $\widetilde{h}_0$ определяются как

$$\widetilde{h}_0(\lambda,t)=\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}h_0(\tau)d\tau,\quad \widetilde{h}_1(\lambda,t)=\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}h_1(\tau)d\tau,\quad t>0,\quad \lambda\in\mathbb{C}, \tag{2.15}$$

где $h_0(t)=u(L,t)$, $h_1(t)=u_x(L,t)$, $t>0$.

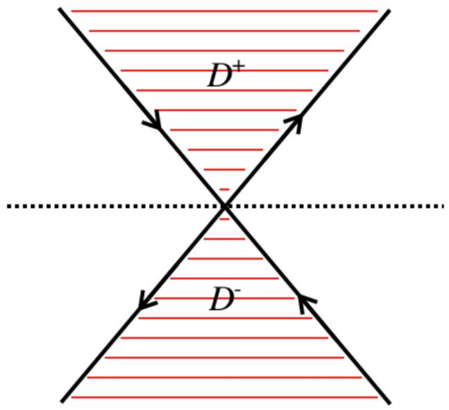

Рис. 2.5. Области D^+ и D^- для уравнения теплопроводности.

2. Из соотношения (2.13) для $\widehat{u}(-i\lambda,t)$ с использованием формулы обратного преобразования Фурье (см. [9, гл. 6–8], [3, гл. 7]), а также переходом из интегрирования по действительной оси к интегралам по контуру ∂D^+ в интеграле, включающем $\widetilde{g}_1$, $\widetilde{g}_0$, и по контуру ∂D^- в интеграле, включающем $\widetilde{h}_1$, $\widetilde{h}_0$, находим

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x-\lambda^2 t}\widehat{u}_0(-i\lambda)d\lambda-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D^+} e^{i\lambda x-\lambda^2 t}\left[\widetilde{g}_1+i\lambda\widetilde{g}_0\right]d\lambda-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D^-} e^{-i\lambda(L-x)-\lambda^2 t}\left[\widetilde{h}_1+i\lambda\widetilde{h}_0\right]d\lambda, \tag{2.16}$$

где D^- — область, симметричная области D^+ относительно вещественной оси (см. рис. 2.5).

3. Преобразование $\lambda \to -\lambda$ вместе с глобальным соотношением (2.13) дает два уравнения. Поскольку существуют четыре неизвестных граничных значения (по два на каждом конце области), нам нужны два граничных условия. Известно, что согласно теории начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными эти граничные условия можно задавать разными способами.

В качестве примера рассмотрим первую краевую задачу с граничными условиями:

$$u(0,t) = g_0(t), \quad u(L,t) = h_0(t), \quad t \geqslant 0.$$

Глобальное соотношение (2.13) перепишем в виде

$$e^{\lambda^2 t}\widehat{u}(-i\lambda,t) = G(\lambda,t) - \widetilde{g}_1 + e^{-i\lambda L}\widetilde{h}_1, \tag{2.17}$$

где G — известная функция, определенная как

$$G(\lambda,t) = \widehat{u}_0(-i\lambda) - i\lambda\widetilde{g}_0(\lambda^2,t) + i\lambda e^{-i\lambda L}\widetilde{h}_0(\lambda^2,t). \tag{2.18}$$

Заменяя в (2.17) λ на $-\lambda$, получим

$$e^{\lambda^2 t}\widehat{u}(i\lambda,t) = G(-\lambda,t) - \widetilde{g}_1 + e^{i\lambda L}\widetilde{h}_1. \tag{2.19}$$

Из (2.17) и (2.19) имеем

$$\widetilde{g}_1 = \frac{1}{e^{i\lambda L} - e^{-i\lambda L}}\left\{e^{i\lambda L}G(\lambda,t) - e^{-i\lambda L}G(-\lambda,t) + e^{\lambda^2 t}\left[e^{-i\lambda L}\widehat{u}(i\lambda,t) - e^{i\lambda L}\widehat{u}(-i\lambda,t)\right]\right\}, \tag{2.20}$$

$$\widetilde{h}_1 = \frac{1}{e^{i\lambda L} - e^{-i\lambda L}}\left\{G(\lambda,t) - G(-\lambda,t) + e^{\lambda^2 t}\left[\widehat{u}(i\lambda,t) - \widehat{u}(-i\lambda,t)\right]\right\}. \tag{2.21}$$

Далее, подставим полученные выражения для $\widetilde{g}_1$ и $\widetilde{h}_1$ в (2.16). При этом интегралы, содержащие $\widehat{u}(\pm i\lambda,t)$, в полученном выражении обращаются в нуль. Покажем, что это действительно так.

Пусть $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$. Тогда, согласно правилу Лопиталя, выражение

$$\frac{e^{-i\lambda L}\widehat{u}(i\lambda,t) - e^{i\lambda L}\widehat{u}(-i\lambda,t)}{e^{i\lambda L} - e^{-i\lambda L}}$$

эквивалентно выражению

$$-\widehat{u}(i\lambda,t) + e^{i\lambda L}\int\limits_0^L e^{i\lambda(L-x)}u(x,t)dx$$

при $\lambda \to \infty$ по любому направлению в $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$, которое является ограниченным.

Аналогично, в случае $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$ выражение

$$\frac{\widehat{u}(-i\lambda,t) - \widehat{u}(i\lambda,t)}{e^{i\lambda L} - e^{-i\lambda L}}$$

эквивалентно ограниченному выражению

$$\int\limits_0^L e^{-i\lambda(L-x)}u(x,t)dx - e^{-i\lambda L}\widehat{u}(i\lambda,t)$$

при $\lambda \to \infty$ по любому направлению в $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$.

Также заметим, что знаменатель этих выражений $e^{i\lambda L} - e^{-i\lambda L}$ имеет только действительные нули и, соответственно, не имеет нулей в $D^\pm$, кроме $\lambda = 0$. Но эта сингулярность является устранимой, так что мы можем считать, что эти выражения ограничены в D^+ и D^-, соответственно. Это и доказывает наше утверждение.

Таким образом, мы получаем решение задачи в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x - \lambda^2 t}\widehat{u}_0(\lambda)d\lambda - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D^+} e^{i\lambda x - \lambda^2 t}\left[i\lambda\widetilde{g}_0(\lambda^2,t) + \frac{e^{i\lambda L}G(\lambda,t) - e^{-i\lambda L}G(-\lambda,t)}{e^{i\lambda L} - e^{-i\lambda L}}\right]d\lambda -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D^-} e^{i\lambda x-\lambda^2 t}\left[i\lambda\widetilde{h}_0(\lambda^2,t)+\frac{G(\lambda,t)-G(-\lambda,t)}{e^{i\lambda L}-e^{-i\lambda L}}\right]d\lambda. \quad (2.22)$$

2.3. Звездообразный граф с конечными и полубесконечными ребрами. В этом пункте мы приведем наш результат для звездообразного графа из работы [15]. Рассмотрим метрический граф, который состоит из n конечных ребер b_1, $b_2,\ldots$, b_n и m полубесконечных ребер b_{n+1}, $b_{n+2},\ldots$, b_{n+m}, имеющих общую вершину O, называемую вершиной графа. Координаты на каждом ребре определяем следующими соотношениями: $b_j\sim(0,\ L_j)$ для $j=\overline{1,n}$ и $B_r\sim(0,+\infty)$ для $r=\overline{n+1,n+m}$. Здесь вершина графа соответствует 0 на каждом ребре графа (рис. 2.6).

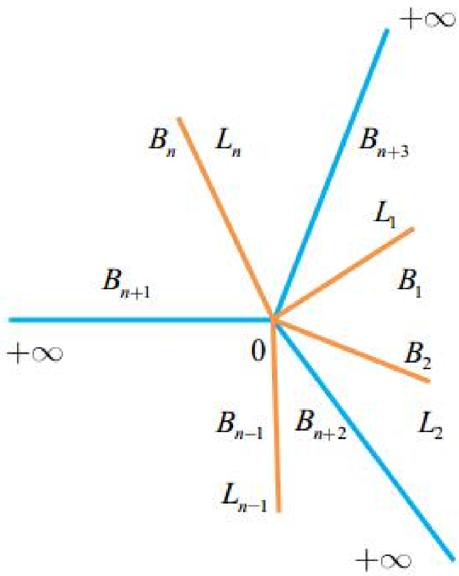

Рис. 2.6

В полубесконечных ребрах потребуем выполнения асимптотических условий

$$\lim_{x\to\infty}u^{(r)}(x,t)=0,\quad 0<t\leqslant T,\quad r=\overline{n+1,n+m}. \quad (2.23)$$

В этом случае глобальное соотношение для каждого решения будет таким же, как и в выше рассмотренных случаях. С учетом граничных условий, начального условия и условий на вершине из глобальных соотношений мы получим систему из $2n+m$ уравнений относительно $2n+m$ граничных значений. Основная матрица этой системы уравнений имеет нули действительной оси, кроме $\lambda=0$, который приведет к устранимой особенности в интегральном выражении и может не учитываться. Далее, аналогичными действиями, как и выше, можно найти решение задачи. Подробности можно найти в работе [15].

Теорема 2.1 (см. [15]). *Решение исследуемой начально-краевой задачи имеет вид*

$$u^{(j)}(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx-wt}u_0^{(j)}(k)dk-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D_R^-}e^{ikx-ikL_j-wt}\frac{\widehat{u}_0^{(j)}(k)-\widehat{u}_0^{(j)}(-k)-2ik\sigma^2\widetilde{g}_0(w,t)}{A_j}dk-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D_R^+} e^{ikx-wt}\frac{e^{ikL_j}\widehat{u}_0^{(j)}(k)-e^{-ikL_j}\widehat{u}_0^{(j)}(-k)+2ik\sigma^2h_0^{(j)}(w,t)}{A_j}dk, \quad j=\overline{1,n}, \quad (2.24)$$

$$u^{(r)}(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt}\widehat{u}_0^{(r)}(k)dk-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D^+} e^{ikx-wt}\widehat{u}_0^{(r)}(-k)dk-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial D^+} e^{ikx-wt}ik\sigma^2\widetilde{g}_0(w,t)dk, \ (r=\overline{n+1,n+m}). \quad (2.25)$$

Здесь

$$ik\sigma^2\widetilde{g}_0(w,t)=\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n}\delta_j^2\frac{B_j}{A_j}+\sum\limits_{r=n+1}^{n+m}\delta_r^2}\times$$
$$\times\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta_j^2}{A_j}\left[e^{ikL_j}\widehat{u}_0^{(j)}(k)-e^{-ikL_j}\widehat{u}_0^{(j)}(-k)+2ik\sigma^2h_0^{(j)}(w,t)\right]+\sum_{r=n+1}^{n+m}\delta_r^2\widehat{u}_0^{(r)}(k)\right],$$
$$A_j=e^{ikL_j}-e^{-ikL_j}, \quad B_j=e^{ikL_j}+e^{-ikL_j} \quad (j=\overline{1,n}).$$

Аналогичный результат в случае нестационарного уравнения Шредингера получен в работе [14].

3. Основные результаты

Теперь перейдем к основным результатам нашей работы. В этом разделе мы применим метод Фокаса для решения начально-краевой задачи (2.1)–(2.4) в случае более общих графов. Начнем с графа, который состоит из треугольной части и имеет по одному прикрепленному ребру на каждой вершине этого треугольника (см. рис. 3.1).

3.1. Граф в виде треугольника с прикрепленными исходящими ребрами на каждой вершине. В этом случае количество ребер $n=6$, а количество вершин $m=6$. Мы здесь изложим метод построения решения более подробно.

Начнем с выполнения стандартных шагов по применению метода Фокаса (см. [8–10, 16–18]). Перепишем уравнение в виде

$$\left(e^{-ikx+wt}u^{(j)}(x,t)\right)_t=\left(e^{-ikx+wt}\left(u_x^{(j)}(x,t)+iku^{(j)}(x,t)\right)\right)_x, \quad (3.1)$$

где $w(k)=k^2$, $j=1,2,\ldots,6$.

Интегрируя по области $(0,\,L_j)\times(0,\,t)$, $j=1,2,\ldots,6$, и применяя формулу Грина, находим

$$\int\limits_0^{L_j} e^{-ikx+wt}u^{(j)}(x,t)dx-\int\limits_0^{L_j} e^{-ikx}u^{(j)}(x,0)dx=$$
$$=\int\limits_0^{t} e^{-ikL_j+ws}\left(u_x^{(j)}(L_j,s)+iku^{(j)}(L_j,s)\right)ds-\int\limits_0^{t} e^{ws}\left(u_x^{(j)}(0,s)+iku^{(j)}(0,s)\right)ds, \quad (3.2)$$

где $k\in\mathbb{C}$, $j=1,2,\ldots,6$.

Для $k\in\mathbb{C}$ введем следующие обозначения:

$$\widehat{u}^{(j)}(k,t)=\int\limits_0^{L_j} e^{-ikx}u^{(j)}(x,t)dx;\widehat{u}_0^{(j)}(k)=\int\limits_0^{L_j} e^{-ikx}u_0^{(j)}(x)dx;$$

$$\widehat{h}_1^{(j)}(w,t)=\int\limits_0^{t} e^{ws}u_x^{(j)}(L_j,s)ds;\widehat{h}_0^{(j)}(w,t)=\int\limits_0^{t} e^{ws}u^{(j)}(L_j,s)ds;$$

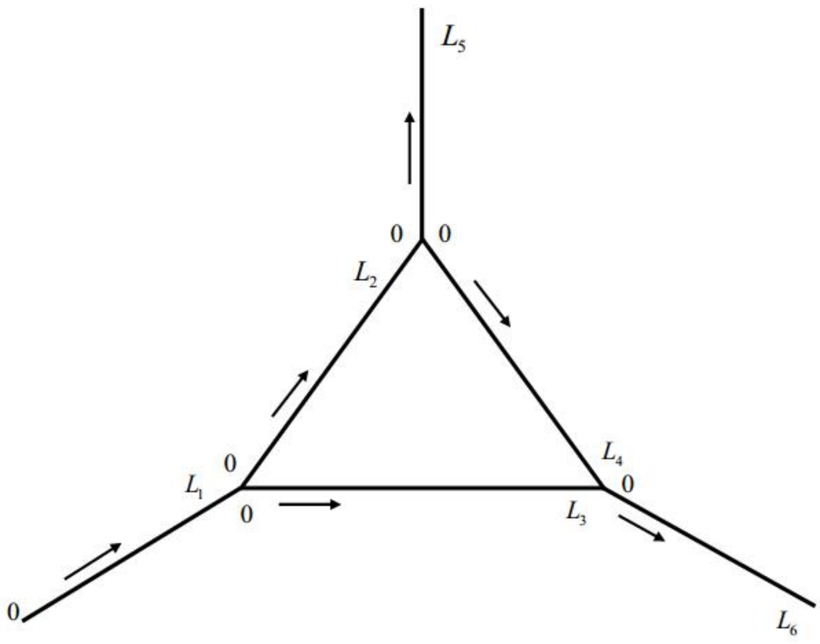

Рис. 3.1. Метрический граф Γ_1.

$$\widehat{g}_1^{(j)}(w,t)=\int\limits_0^t e^{ws}u_x^{(j)}(0,s)ds;\widehat{g}_0^{(j)}(w,t)=\int\limits_0^t e^{ws}u^{(j)}(0,s)ds,\quad j=1,2,\ldots,6.$$

Согласно этим обозначениям мы можем записать равенство (3.2), т. е. глобальное соотношение, в форме

$$e^{wt}\widehat{u}^{(j)}(k,t)-\widehat{u}_0^{(j)}(k)=e^{-ikL_j}(\widehat{h}_1^{(j)}(w,t)+ik\widehat{h}_0^{(j)}(w,t))-\widehat{g}_0^{(j)}(w,t)-ik\widehat{g}_0^{(j)}(w,t),\quad j=1,2,\ldots,6,\tag{3.3}$$

где $\{k\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}k<0\}$.

Заменяя k на $-k$, из (3.3) имеем:

$$e^{wt}\widehat{u}^{(j)}(-k,t)-\widehat{u}_0^{(j)}(-k)=e^{ikL_j}\sigma^2(\widehat{h}_1^{(j)}(w,t)-ik\widehat{h}_0^{(j)}(w,t))-\sigma^2(\widehat{g}_j(w,t)-ik\widehat{g}_0(w,t)),\quad j=\overline{1,6},\tag{3.4}$$

где $\{k\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Im}k>0\}$.

Применим обратное преобразование Фурье в глобальном соотношении (3.3):

$$u^{(j)}(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx-wt}\widehat{u}_0^{(j)}(k)dk+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx-ikL_j-wt}\left(\widehat{h}_1^{(j)}(w,t)+ik\widehat{h}_0^{(j)}(w,t)\right)dk-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx-wt}\left(\widehat{g}_1^{(j)}(w,t)+ik\widehat{g}_0^{(j)}(w,t)\right)dk,\quad j=1,2,\ldots,6.\tag{3.5}$$

Пусть $\mathbb{C}^+=\{k\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}k>0\}$, $\mathbb{C}^-=\{k\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}k<0\}$, $D=\left\{k\in\mathbb{C}^\pm:\operatorname{Re}k^2<0\right\}=D^+\cup D^-$. Область D показана на рис. 2.5.

Подынтегральная функция второго интеграла в (3.5) является целой функцией и убывает при $k\to\infty$ в $k\in\mathbb{C}^-\backslash D^-$. Подынтегральная функция в третьем интеграле является целой функцией и убывает при $k\to\infty$ в $k\in\mathbb{C}^+\backslash D^+$. Используя голоморфность подынтегральных функций и лемму Жордана, можно заменить контур интегрирования второго интеграла на $-\int\limits_{\partial D^-}$, а третьего интеграла — на $-\int\limits_{\partial D^+}$ (см. [9]):

$$u^{(j)}(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx-wt}\widehat{u}_0^{(j)}(k)dk-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D^-}e^{ikx-ikL_j-wt}\left(\widehat{h}_1^{(j)}(w,t)+ik\widehat{h}_0^{(j)}(w,t)\right)dk-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D^+}e^{ikx-wt}\left(\widehat{g}_1^{(j)}(w,t)+ik\widehat{g}_0^{(j)}(w,t)\right)dk,\quad j=1,2,\ldots,6. \tag{3.6}$$

Найдем неизвестные функции в этом интегральном представлении решения. Из условий непрерывности и сохранения потока (2.3) имеем

$$\widehat{h}_0^{(1)}(w,t)=\widehat{g}_0^{(2)}(w,t)=\widehat{g}_0^{(3)}(w,t);\quad \widehat{h}_1^{(1)}(w,t)=\widehat{g}_1^{(2)}(w,t)+\widehat{g}_1^{(3)}(w,t);$$
$$\widehat{h}_0^{(2)}(w,t)=\widehat{g}_0^{(4)}(w,t)=\widehat{g}_0^{(5)}(w,t);\quad \widehat{h}_1^{(2)}(w,t)=\widehat{g}_1^{(4)}(w,t)+\widehat{g}_1^{(5)}(w,t);$$
$$\widehat{h}_0^{(3)}(w,t)=\widehat{h}_0^{(4)}(w,t)=\widehat{g}_0^{(6)}(w,t);\quad \widehat{h}_1^{(3)}(w,t)+\widehat{h}_1^{(4)}(w,t)=\widehat{g}_1^{(6)}(w,t).$$

Отсюда, с учетом глобальных соотношений, получаем следующую систему уравнений:

$$e^{wt}\left(A_2A_3\left(\widehat{u}^{(1)}(k,t)-\widehat{u}^{(1)}(-k,t)\right)-A_1A_3\left(e^{ikL_2}\widehat{u}^{(2)}(k,t)-e^{-ikL_2}\widehat{u}^{(2)}(-k,t)\right)\right)-$$
$$-e^{wt}A_1A_2\left(e^{ikL_3}\widehat{u}^{(3)}(k,t)-e^{-ikL_3}\widehat{u}^{(3)}(-k,t)\right)-A_1A_3\left(\widehat{u}_0^{(1)}(k)-\widehat{u}_0^{(1)}(-k)\right)+$$
$$+A_1A_3\left(e^{ikL_2}\widehat{u}_0^{(2)}(k)-e^{-ikL_2}\widehat{u}_0^{(2)}(-k)\right)+A_1A_2\left(e^{ikL_3}\widehat{u}_0^{(3)}(k)-e^{-ikL_3}\widehat{u}_0^{(3)}(-k)\right)=$$
$$=ikC_{123}\widehat{h}_0^{(1)}(w,t)-2ikA_1A_3\widehat{h}_0^{(2)}(w,t)-2ikA_1A_2\widehat{h}_0^{(3)}(w,t)-2ikA_2A_3\widehat{g}_0^{(1)}(w,t); \tag{3.7}$$

$$e^{wt}\left(A_4A_5\left(\widehat{u}^{(2)}(k,t)-\widehat{u}^{(2)}(-k,t)\right)-A_2A_5\left(e^{ikL_4}\widehat{u}^{(4)}(k,t)-e^{-ikL_4}\widehat{u}^{(4)}(-k,t)\right)\right)-$$
$$-e^{wt}A_2A_4\left(e^{ikL_5}\widehat{u}^{(5)}(k,t)-e^{-ikL_5}\widehat{u}^{(5)}(-k,t)\right)-A_4A_5\left(\widehat{u}_0^{(2)}(k)-\widehat{u}_0^{(2)}(-k)\right)+$$
$$+A_2A_5\left(e^{ikL_4}\widehat{u}_0^{(4)}(k)-e^{-ikL_4}\widehat{u}_0^{(4)}(-k)\right)+A_2A_4\left(e^{ikL_5}\widehat{u}_0^{(5)}(k)-e^{-ikL_5}\widehat{u}_0^{(5)}(-k)\right)=$$
$$=-2ikA_4A_5\widehat{h}_0^{(1)}(w,t)+ikC_{245}\widehat{h}_0^{(2)}(w,t)-2ikA_2A_5\widehat{h}_0^{(3)}(w,t)-2ikA_2A_4\widehat{h}_0^{(5)}(w,t); \tag{3.8}$$

$$e^{wt}\left(A_4A_6\left(\widehat{u}^{(3)}(k,t)-\widehat{u}^{(3)}(-k,t)\right)+A_3A_6\left(\widehat{u}^{(4)}(k,t)-\widehat{u}^{(4)}(-k,t)\right)\right)-$$
$$-e^{wt}A_3A_4\left(e^{ikL_6}\widehat{u}^{(6)}(k,t)-e^{-ikL_6}\widehat{u}^{(6)}(-k,t)\right)-A_4A_6\left(\widehat{u}_0^{(3)}(k)-\widehat{u}_0^{(3)}(-k)\right)-$$
$$-A_3A_6\left(\widehat{u}_0^{(4)}(k)-\widehat{u}_0^{(4)}(-k)\right)+A_3A_4\left(e^{ikL_6}\widehat{u}_0^{(6)}(k)-e^{-ikL_6}\widehat{u}_0^{(6)}(-k)\right)=$$
$$=-2ikA_4A_6\widehat{h}_0^{(1)}(w,t)-2ikA_3A_6\widehat{h}_0^{(2)}(w,t)-2ikA_3A_4\widehat{h}_0^{(6)}(w,t)+ikC_{346}\widehat{h}_0^{(3)}(w,t). \tag{3.9}$$

Здесь $\widehat{h}_0^{(j)}(w,t)$, $j=1,2,3$ — неизвестные функции, $C_{ijk}=B_iA_jA_k+A_iB_jA_k+A_iA_jB_k$.

Перепишем систему уравнений (3.7)–(3.9) в виде

$$M\cdot X(w,t)=N_1(k)\cdot\widehat{U}_0(k)+N_2(k)\cdot\widehat{U}_0(-k))-e^{wt}\cdot(N_1(k)\cdot\widehat{U}(k,t)+N_2(k)\cdot\widehat{U}(-k,t)), \tag{3.10}$$

здесь

$$X(w,t)=\left(\widehat{h}_0^{(1)}(w,t),\widehat{h}_0^{(2)}(w,t),\widehat{h}_0^{(3)}(w,t)\right)^T.$$

Чтобы доказать разрешимость последней системы уравнений, нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 3.1. *Задача* (2.1)–(2.4) *не имеет более одного регулярного решения.*

Доказательство. Рассмотрим задачу (2.1)–(2.4) с однородными граничными условиями. Умножая уравнение (2.1) на $u^{(j)}(x,t)$ и интегрируя от 0 до L_j для каждого $j=\overline{1,n}$, складывая полученные равенства и интегрируя по частям, имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{0}^{L_j}(u^{(j)}(x,t))^2dx+\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{0}^{L_j}(u_x^{(j)}(x,t))^2dx=0.$$

Далее, интегрируя это соотношение по t, получим

$$\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{0}^{L_j}(u^{(j)}(x,t))^2dx+2\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{L_j}(u_x^{(j)}(x,s))^2dxds=\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{0}^{L_j}(u_0^{(j)}(x))^2dx.$$

Отсюда следует, что если $u_0^{(j)}(x)\equiv 0$, то $u^{(j)}(x,t)=0$ при $x\in b_j$, $t>0$. Лемма доказана. □

Лемма 3.2. *Определитель матрицы*

$$M(k)=\begin{pmatrix} C_{123} & -2A_1A_3 & -2A_1A_2\\ -2A_4A_5 & C_{245} & -2A_2A_5\\ -2A_4A_6 & -2A_3A_6 & C_{346}\end{pmatrix}$$

отличен от нуля при $\operatorname{Im}k\neq 0$.

Доказательство. Пусть $\psi_j(x)$ является решением уравнения $-\dfrac{d^2}{dx^2}\psi(x)=\lambda\psi(x)$ на графе Γ с однородными граничными условиями (2.4) и условиями склеивания (Кирхгоффа), указанными выше. Положим $\lambda=k^2$. Известно, что в таком случае граф называется *квантовым графом* [7]. Спектральные задачи на квантовых графах исследованы в работах [5, 11, 12].

Рассмотрим задачу (2.1)–(2.4) с однородными граничными условиями и с начальным условием $u^{(j)}(x,0)=\psi_j(x)$, $x\in\bar{b}_j$, $j=\overline{1,n}$. Ясно, что эта задача имеет единственное решение в виде $u^{(j)}(x,t)=e^{-k^2t}\psi_j(x)$. Подставляя это выражение в систему уравнений (3.7)–(3.9), получим систему уравнений $M(k)\phi=0$, где $\phi=(\psi_1(L_1),\psi_2(L_2)),\psi_3(L_3))$.

Предположим, что $\det M(k)=0$ при некотором k, мнимая часть которого не равна нулю. Тогда система уравнений $M(k)\phi=0$ имеет ненулевые решения. Далее, из глобальных соотношений (3.3) можно найти значения производных $\phi'=(\psi_1'(L_1),\psi_2'(L_2)),\psi_3'(L_3))$.

С учетом того, что вторая производная инвариантна относительно замены x на L_j-x, на каждом отдельном ребре b_j, $j=\overline{1,n}$, получаем задачу Коши для уравнения $\psi_j''(x)=k^2\psi(x)$ с найденными выше начальными данными. Так как хотя бы одно из начальных значений отлично от нуля, то хотя бы одна из этих задач Коши имеет ненулевое решение. Из глобального соотношения (3.3) и системы уравнений (3.7)–(3.9) следует, что эти найденные решения удовлетворяют граничным условиям (2.4) и условиям склеивания (Кирхгоффа) (2.3) на вершинах графа.

Таким образом, мы получили собственные функции оператора Шредингера $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на метрическом графе Γ, соответствующее собственному числу $\lambda=k^2$. Согласно нашему предположению, это собственное значение либо отрицательно, либо является комплексным числом с отличной от нуля мнимой частью. Но это противоречит положительной определенности и самосопряженности оператора Шредингера на метрическом графе Γ (см. [5, 11, 12]).

Лемма доказана. □

Заметим, что при $k\to 0$ обе части системы уравнений имеют порядок k^3, поэтому решение системы уравнений (3.7)–(3.9) при $k=0$ имеет устранимую особенность.

Рассмотрим интегралы $\int\limits_{\partial D^+}e^{ikx}\widehat{u}(\pm k,t)dk$ и $\int\limits_{\partial D^-}e^{-ik(L_j-x)}\widehat{u}(\pm k,t)dk$. Понятно, что подынтегральные функции в этих интегралах являются голоморфными функциями в D^- и D^+, соответственно (в силу регулярности решения задачи), и экспоненциально стремятся к нулю в данных областях при $\lambda\to\infty$. Значит, согласно теореме Коши и лемме Жордана, эти интегралы равны нулю. Поэтому мы можем не учитывать третье и четвертое слагаемые в правой части уравнения (3.10), зависящие от неизвестного решения, так как они при подстановке в интегральное представление решения обнуляются.

В заключение этого пункта сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Решение начально-краевой задачи на* Γ_1 *имеет вид*

$$u^{(j)}(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx-wt}\widehat{u}_0^{(j)}(k)dk-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D^-}e^{ikx-ikL_j-wt}\left(\tilde{h}_1^{(j)}(w,t)+ik\tilde{h}_0^{(j)}(w,t)\right)dk-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D^+}e^{ikx-wt}\left(\tilde{g}_1^{(j)}(w,t)+ik\widehat{g}_0^{(j)}(w,t)\right)dk,\quad j=1,2,\dots,6,\quad (3.11)$$

где $G^{(j)}(k,t)=\widehat{u}_0^{(j)}(k)+(e^{-ikL_j}-1)ik\widehat{h}_0^{(j)}(w,t)$, $j=1,2,\dots,6$, $\widehat{g}_0^{(1)}(w,t)$, $\widehat{h}_0^{(5)}(w,t)$, $\widehat{h}_0^{(6)}(w,t)$ — *известные функции, которые выражаются через граничные данные по формулам* (2.4),

$$\tilde{h}_1^{(j)}(w,t)=\frac{1}{A_j}\left(G^{(j)}(k,t)-G^{(j)}(-k,t)\right),\quad (3.12)$$

$$\tilde{g}_1^{(j)}(w,t)=\frac{1}{A_j}\left(e^{ikL_j}G^{(j)}(k,t)-e^{-ikL_j}G^{(j)}(-k,t)\right),\quad (3.13)$$

$A_j=e^{ikL_j}-e^{-ikL_j}$, $B_j=e^{ikL_j}+e^{-ikL_j}$, $j=1,2,\dots,6$, $\left(\tilde{h}_0^{(1)}(w,t),\tilde{h}_0^{(2)}(w,t),\tilde{h}_0^{(3)}(w,t)\right)^T=(M(k))^{-1}(N_1(k)\cdot\widehat{U}_0(k)+N_2(k)\cdot\widehat{U}_0(-k))$.

3.2. Граф в виде дерева. Рассмотрим начально-краевую задачу в случае графа-дерева Γ_2. В этом случае $n=7$ и $m=8$.

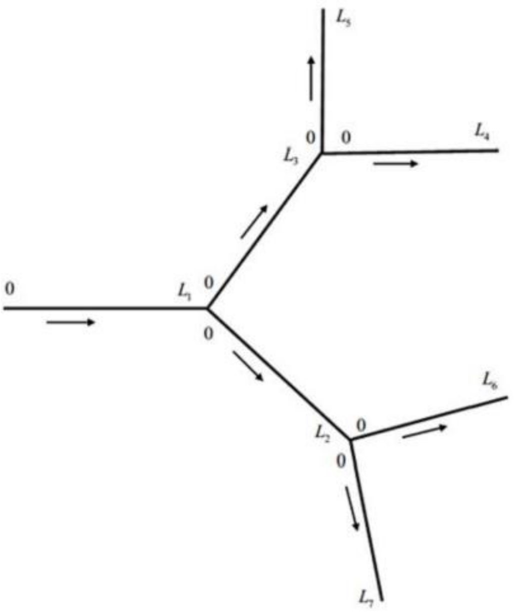

Рис. 3.2.1. Метрический граф Γ_2.

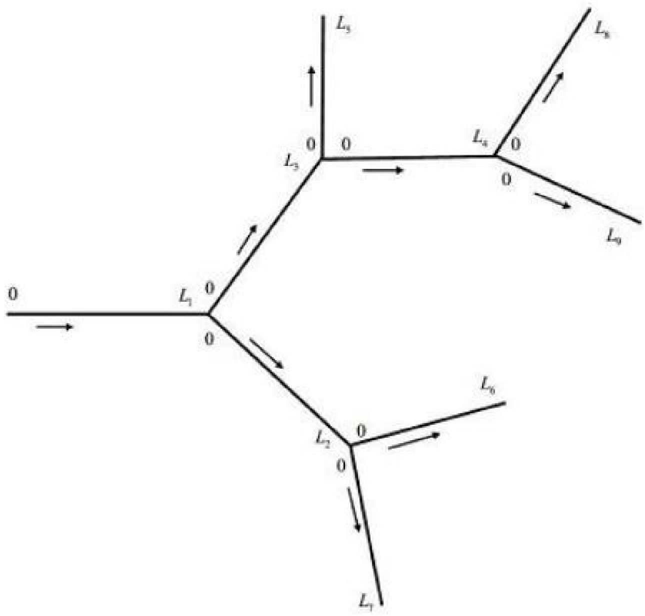

Рис. 3.2.2. Метрический граф Γ_3.

Решение задачи в этом случае строится аналогично, поэтому мы опускаем подробности его построения. В этом случае основная система уравнений для определения значений решения в точках разветвления имеет вид:

$$e^{wt}\left(A_2A_3\left(\widehat{u}^{(1)}(k,t)-\widehat{u}^{(1)}(-k,t)\right)-A_1A_3\left(e^{ikL_2}\widehat{u}^{(2)}(k,t)-e^{-ikL_2}\widehat{u}^{(2)}(-k,t)\right)\right)-$$
$$-e^{wt}A_1A_2\left(e^{ikL_3}\widehat{u}^{(3)}(k,t)-e^{-ikL_3}\widehat{u}^{(3)}(-k,t)\right)-A_1A_3\left(\widehat{u}_0^{(1)}(k)-\widehat{u}_0^{(1)}(-k)\right)+$$
$$+A_1A_3\left(e^{ikL_2}\widehat{u}_0^{(2)}(k)-e^{-ikL_2}\widehat{u}_0^{(2)}(-k)\right)+A_1A_2\left(e^{ikL_3}\widehat{u}_0^{(3)}(k)-e^{-ikL_3}\widehat{u}_0^{(3)}(-k)\right)=$$
$$=ikC_{123}\widehat{h}_0^{(1)}(w,t)-2ikA_1A_3\widehat{h}_0^{(2)}(w,t)-2ikA_1A_2\widehat{h}_0^{(3)}(w,t)-2ikA_2A_3\widehat{g}_0^{(1)}(w,t);\quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}
&e^{wt}\left(A_4A_5\left(\widehat{u}^{(3)}(k,t)-\widehat{u}^{(3)}(-k,t)\right)-A_3A_5\left(e^{ikL_4}\widehat{u}^{(4)}(k,t)-e^{-ikL_4}\widehat{u}^{(4)}(-k,t)\right)\right)-\\
&\quad-e^{wt}A_3A_4\left(e^{ikL_5}\widehat{u}^{(5)}(k,t)-e^{-ikL_5}\widehat{u}^{(5)}(-k,t)\right)-A_4A_5\left(\widehat{u}_0^{(3)}(k)-\widehat{u}_0^{(3)}(-k)\right)+\\
&\quad+A_3A_5\left(e^{ikL_4}\widehat{u}_0^{(4)}(k)-e^{-ikL_4}\widehat{u}_0^{(4)}(-k)\right)+A_3A_4\left(e^{ikL_5}\widehat{u}_0^{(5)}(k)-e^{-ikL_5}\widehat{u}_0^{(5)}(-k)\right)=\\
&\quad=ikC_{345}\widehat{h}_0^{(3)}(w,t)-2ikA_4A_5\widehat{h}_0^{(1)}(w,t)-2ikA_3A_5\widehat{h}_0^{(4)}(w,t)-2ikA_3A_4\widehat{h}_0^{(5)}(w,t); \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&e^{wt}\left(A_6A_7\left(\widehat{u}^{(2)}(k,t)-\widehat{u}^{(2)}(-k,t)\right)-A_2A_7\left(e^{ikL_6}\widehat{u}^{(6)}(k,t)-e^{-ikL_6}\widehat{u}^{(6)}(-k,t)\right)\right)-\\
&\quad-e^{wt}A_2A_6\left(e^{ikL_7}\widehat{u}^{(7)}(k,t)-e^{-ikL_7}\widehat{u}^{(7)}(-k,t)\right)-A_6A_7\left(\widehat{u}_0^{(2)}(k)-\widehat{u}_0^{(2)}(-k)\right)+\\
&\quad+A_2A_7\left(e^{ikL_6}\widehat{u}_0^{(6)}(k)-e^{-ikL_6}\widehat{u}_0^{(6)}(-k)\right)+A_2A_6\left(e^{ikL_7}\widehat{u}_0^{(7)}(k)-e^{-ikL_7}\widehat{u}_0^{(7)}(-k)\right)=\\
&\quad=ikC_{267}\widehat{h}_0^{(2)}(w,t)-2ikA_6A_7\widehat{h}_0^{(1)}(w,t)-2ikA_2A_7\widehat{h}_0^{(6)}(w,t)-2ikA_2A_6\widehat{h}_0^{(7)}(w,t). \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Существование решений этой системы уравнений доказывается аналогично вышеизложенному. После нахождения этих неизвестных задача сводится к решению начально-краевой задачи на конечном интервале, которая была приведена выше.

Для наглядности приведем еще один случай графа-дерева Γ_3 (см. рис. 3.2.2), где количество ребер $n=9$ и количество вершин $m=10$.

В этом случае количество внутренних вершин равно четырем, так как с добавлением дополнительных ребер одна из граничных вершин графа Γ_2 становится внутренней вершиной. Соответственно, в системе уравнений (3.14)–(3.16) для определения неизвестных значений решения на внутренних вершинах (в точках разветвления) графа добавляется еще одно уравнение:

$$\begin{aligned}
&e^{wt}\left(A_8A_9\left(\widehat{u}^{(4)}(k,t)-\widehat{u}^{(4)}(-k,t)\right)-A_4A_9\left(e^{ikL_8}\widehat{u}^{(8)}(k,t)-e^{-ikL_8}\widehat{u}^{(8)}(-k,t)\right)\right)-\\
&\quad-e^{wt}A_4A_8\left(e^{ikL_9}\widehat{u}^{(9)}(k,t)-e^{-ikL_9}\widehat{u}^{(9)}(-k,t)\right)-A_8A_9\left(\widehat{u}_0^{(4)}(k)-\widehat{u}_0^{(4)}(-k)\right)+\\
&\quad+A_4A_9\left(e^{ikL_8}\widehat{u}_0^{(8)}(k)-e^{-ikL_8}\widehat{u}_0^{(8)}(-k)\right)+A_4A_8\left(e^{ikL_9}\widehat{u}_0^{(9)}(k)-e^{-ikL_9}\widehat{u}_0^{(9)}(-k)\right)=\\
&\quad=ikC_{489}\widehat{h}_0^{(4)}(w,t)-2ikA_8A_9\widehat{h}_0^{(3)}(w,t)-2ikA_4A_9\widehat{h}_0^{(8)}(w,t)-2ikA_4A_8\widehat{h}_0^{(9)}(w,t). \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

4. Заключение и выводы

В этой работе мы привели метод построения решений начально-краевых задач на некоторых метрических графах, таких как звездообразный граф; граф, состоящий из треугольника с дополнительными прикрепленными ребрами на каждой вершине; граф в виде дерева. Мы выбрали эти графы, чтобы показать, что в случае графа с циклами и графа без циклов метод работает почти одинаково. В общем, этот метод применим для решения начально-краевых задач в произвольных метрических графах.

При решении задачи используются так называемое глобальное соотношение и соотношение, получаемое из него заменой комплексного параметра на противоположный. Эти два соотношения эквивалентны отображению условий Дирихле на условия Неймана на вершинах. С помощью этих соотношений рассматриваемая задача сводится к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных значений решения в точках разветвления графа.

Решение мы задаем в виде интегралов по контуру от известных функций. При этом контуры выбраны так, что подынтегральные функции экспоненциально убывают на бесконечности по этому контуру. Это свойство обеспечивает хорошую сходимость интегралов, что очень важно, например, для численного вычисления решения (см. [13]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Волкова А. С.* Обобщенные решения краевой задачи для уравнения теплопроводности на графе// Вестн. СПб. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. — 2013. — *3*. — С. 39–47.
2. *Мерков А. Б.* Уравнение теплопроводности на графах// Усп. мат. наук. — 1987. — *42*, № 5. — С. 213-214.

3. *Ablowitz M. J., Fokas A. S.* Complex variables introduction and applications second edition. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.
4. *Albert R., Barabasi A. L.* Statistical mechanics of complex networks// Rev. Mod. Phys. A. — 2002. — *74*, № 4. — С. 62–76.
5. *Berkolaiko G.* An elementary introduction to quantum graphs// В сб.: «Geometric and Computational Spectral Theory». — Providence: Am. Math. Soc., 2017. — С. 41–72.
6. *Cohen R., Havlin S.* Complex networks: Structure, robustness and function. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010.
7. *Exner P., Post O.* A General approximation of quantum graph vertex couplings by scaled Schrödinger operators on thin branched manifolds// Commun. Math. Phys. — 2013. — *1322*. — С. 207–227.
8. *Fokas A. S.* A unified transform method for solving linear and certain nonlinear PDEs// Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. — 1997. — *453*, № 1962. — С. 1411–1443.
9. *Fokas A. S.* A unified approach to boundary value problems. — Philadelphia: SIAM, 2008.
10. *Fokas A. S.* Fokas method (unified transform)// Preprint. — Jan. 25, 2017. — http://www.damtp.cam.ac.uk/user/examples/3N15.pdf.
11. *Gnutzmann S., Keating J. P., Piotet F.* Eigenfunction statistics on quantum graphs// Ann. Phys. — 2010. — *325*, № 12. — С. 2595–2640.
12. *Gnutzmann S., Smilansky U.* Quantum graphs: Applications to quantum chaos and universal spectral statistics// Adv. Phys. — 2006. — *55*. — С. 527–625.
13. *Kesici E., Pelloni B., Pryer T., Smith D. A.* A numerical implementation of the unified Fokas transform for evolution problems on a finite interval// Eur. J. Appl. Math. — 2017. — *29*, № 3. — С. 543–567.
14. *Khudayberganov G., Sobirov Z. A., Eshimbetov M. R.* Unified transform method for the Schrödinger equation on a simple metric graph// Журн. СФУ. Сер. Мат. Физ. — 2019. — *12*, № 4. — С. 412–420.
15. *Khudayberganov G., Sobirov Z. A., Eshimbetov M. R.* The Fokas' unified transformation method for heat equation on general star graph// Uzb. Math. J. — 2019. — № 1. — С. 73–81.
16. *Sheils N. E.* Interface problems using the Fokas method// Дисс. докт. наук. — Washington: University of Washington, 2015.
17. *Sheils N. E.* Multilayer diffusion in a composite medium with imperfect contact// Appl. Math. Modelling. — 2017. — *46*. — С. 450–464.
18. *Sheils N. E., Smith A. D.* Heat equation on a network using the Fokas method// J. Phys. A. Math. Theor. — 2015. — *48*. — 335001.
19. *Uecker H., Grieser D., Sobirov Z. A., Babajanov D., Matrasulov D.* Soliton transport in tubular networks: Transmission at vertices in the shrinking limit// Phys. Rev. E. — 2015. — *91*. — 023209.

З. А. Собиров
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: z.sobirov@nuu.uz

М. Р. Эшимбетов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: mr.eshimbetov92@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-766-782 UDC 517.953

Fokas Method for the Heat Equation on Metric Graphs

© 2021 **Z. A. Sobirov, M. R. Eshimbetov**

Abstract. The paper presents a method for constructing solutions to initial-boundary value problems for the heat equation on simple metric graphs such as a star-shaped graph, a tree, and a triangle with three converging edges. The solutions to the problems are constructed by the so-called Fokas method, which is a generalization of the Fourier transform method. In this case, the problem is reduced to a system of algebraic equations for the Fourier transform of the unknown values of the solution at the vertices of the graph.

REFERENCES

1. A. S. Volkova, "Obobshchennye resheniya kraevoy zadachi dlya uravneniya teploprovodnosti na grafe" [Generalized solutions of a boundary-value problem for the heat equation on a graph], *Vestn. SPb. un-ta. Ser. 10. Prikl. matem. Inform. Prots. upr.* [Bull. Saint Petersburg Univ. Ser. 10. Appl. Math. Inform. Control Proc.], 2013, **3**, 39–47 (in Russian).
2. A. B. Merkov, "Uravnenie teploprovodnosti na grafakh" [Heat equation on graphs], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1987, **42**, No. 5, 213-214 (in Russian).
3. M. J. Ablowitz and A. S. Fokas, *Complex variables introduction and applications second edition*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
4. R. Albert and A. L. Barabasi, "Statistical mechanics of complex networks," *Rev. Mod. Phys. A*, 2002, **74**, No. 4, 62–76.
5. G. Berkolaiko, "An elementary introduction to quantum graphs," In: *Geometric and Computational Spectral Theory*, Am. Math. Soc., Providence, 2017, pp. 41–72.
6. R. Cohen and S. Havlin, *Complex networks: Structure, robustness and function*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.
7. P. Exner and O. Post, "A General approximation of quantum graph vertex couplings by scaled Schrödinger operators on thin branched manifolds," *Commun. Math. Phys.*, 2013, **1322**, 207–227.
8. A. S. Fokas, "A unified transform method for solving linear and certain nonlinear PDEs," *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, 1997, **453**, No. 1962, 1411–1443.
9. A. S. Fokas, *A unified approach to boundary value problems*, SIAM, Philadelphia, 2008.
10. A. S. Fokas, "Fokas method (unified transform)," *Preprint*, Jan. 25, 2017, http://www.damtp.cam.ac.uk/user/examples/3N15.pdf.
11. S. Gnutzmann, J. P. Keating, and F. Piotet, "Eigenfunction statistics on quantum graphs," *Ann. Phys.*, 2010, **325**, No. 12, 2595–2640.
12. S. Gnutzmann and U. Smilansky, "Quantum graphs: Applications to quantum chaos and universal spectral statistics," *Adv. Phys.*, 2006, **55**, 527–625.
13. E. Kesici, B. Pelloni, T. Pryer, and D. A. Smith, "A numerical implementation of the unified Fokas transform for evolution problems on a finite interval," *Eur. J. Appl. Math.*, 2017, **29**, No. 3, 543–567.
14. G. Khudayberganov, Z. A. Sobirov, and M. R. Eshimbetov, "Unified transform method for the Schrödinger equation on a simple metric graph," *Zhurn. SFU. Ser. Math. Phys.*, 2019, **12**, No. 4, 412–420.
15. G. Khudayberganov, Z. A. Sobirov, and M. R. Eshimbetov, "The Fokas' unified transformation method for heat equation on general star graph," *Uzb. Math. J.*, 2019, No. 1, 73–81.
16. N. E. Sheils, "Interface problems using the Fokas method," *Doctoral Thesis*, University of Washington, Washington, 2015.

17. N. E. Sheils, “Multilayer diffusion in a composite medium with imperfect contact,” *Appl. Math. Modelling*, 2017, **46**, 450–464.
18. N. Sheils E. and A. D. Smith, “Heat equation on a network using the Fokas method,” *J. Phys. A. Math. Theor.*, 2015, **48**, 335001.
19. H. Uecker, D. Grieser, Z. A. Sobirov, D. Babajanov, and D. Matrasulov, “Soliton transport in tubular networks: Transmission at vertices in the shrinking limit,” *Phys. Rev. E*, 2015, **91**, 023209.

Z. A. Sobirov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: z.sobirov@nuu.uz

M. R. Eshimbetov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: mr.eshimbetov92@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 4 (2021). С. 783–794
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-783-794 УДК 517.98

КВАДРАТИЧНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА С ОДНОРОДНЫМ ТУРНИРОМ

© 2021 г. **М. А. ТАДЖИЕВА, Д. Б. ЭШМАМАТОВА, Р. Н. ГАНИХОДЖАЕВ**

Аннотация. Как известно [1], каждый квадратичный стохастический оператор вольтерровского типа, заданный на конечномерном симплексе, определяет некий турнир, свойства которого позволяют изучить асимптотическое поведение траекторий этого вольтерровского оператора. В работе вводится понятие однородного турнира и изучаются динамические свойства вольтерровских операторов, соответствующих однородным турнирам в симплексе S^4.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Канонический вид квадратичных стохастических операторов вольтерровского типа

Пусть $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство, и $B(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — симметричный билинейный оператор. Тогда квадратичный оператор $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ определяется равенством

$$V(x) = B(x,x), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Очевидно, поляризационное равенство

$$4B(x,y) = V(x+y) - V(x-y) \tag{1.1}$$

устанавливает взаимно однозначное соотношение между квадратичными и симметричными билинейными операторами.

Также ясно, что равенство

$$B(x,y) = x \circ y$$

определяет в $\mathbb{R}^m$ коммутативное, но, вообще говоря, не ассоциативное умножение. Таким образом, $\mathbb{R}^m$ превращается в коммутативную, но не ассоциативную алгебру.

Пусть $e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{im})$, $i = \overline{1,m}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^m$ и

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j, \\ 1 \text{ при } i = j \end{cases} \text{— символ Кронекера.}$$

Положим

$$B(e_i, e_j) = e_i \circ e_j = \sum_{k=1}^{m} P_{ij,k} e_k, \tag{1.2}$$

где $P_{ij,k} = P_{ji,k}$ — структурные константы билинейного оператора в стандартном базисе.

Далее вместо $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$ будем писать $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

При этих обозначениях квадратичный оператор определяется равенством

$$Vx = (\sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,1} x_i x_j, \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,2} x_i x_j, \ldots, \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,m} x_i x_j). \tag{1.3}$$

Определение 1.1. Квадратичный оператор (1.3) называется *стохастическим*, если структурные константы $\{P_{ij,k}\}$ удовлетворяют условиям

$$P_{ij,k} = P_{ji,k} \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{m} P_{ij,k} = 1. \tag{1.4}$$

Напомним, что $(m-1)$-мерный стандартный симплекс определяется равенством

$$S^{m-1} = \{x = (x_1, \ldots, x_m) : x_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\}.$$

Ясно, что S^{m-1} — выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник в $\mathbb{R}^m$.

Из условий (1.4) легко следует, что $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$.

Точку $x \in S^{m-1}$ можно рассматривать как распределение вероятностей. Таким образом, квадратичный стохастический оператор переводит распределение вероятностей некоторой системы также в распределение вероятностей. Квадратичные операторы часто встречаются в физических и биологических моделях.

В биологии $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ описывает эволюцию биологической системы, состоящей из m видов.

Классификации и изучению асимптотического поведения траекторий квадратичных стохастических операторов посвящены работы фон Неймана, С. Улама, Г. Х. Харди, С. Бернштейна, Ю. И. Любича и других.

Поскольку $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ непрерывен, а S^{m-1} — выпуклый компакт, то согласно теореме Боля—Брауэра, множество неподвижных точек V непусто, т. е.

$$X = \{x \in S^{m-1} : Vx = x\} \neq \varnothing.$$

Если $x^0 \in S^{m-1}$, то последовательность $\{x^{(n)}\} \subset S^{m-1}$, определяемая рекуррентной формулой

$$x^{(n+1)} = Vx^{(n)}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

называется *траекторией*, начинающейся из точки x^0.

Через $\omega(x^0) = \{x^0, x^{(1)}, \ldots\}'$ обозначим множество предельных точек данной траектории. Очевидно, $\omega(x^0)$ — непустое замкнутое и инвариантное подмножество S^{m-1}, т. е. $V(\omega(x^0)) \subset \omega(x^0)$.

Если $\omega(x^0)$ состоит из одной точки, то траектория сходится. В случае $1 < |\omega(x^0)| < \infty$ траектория называется *периодической*.

Определение 1.2. Квадратичный стохастический оператор называется *вольтерровским*, если

$$P_{ij,k} = 0 \quad \text{при} \quad k \notin \{i, j\}. \tag{1.5}$$

Из (1.5) следует, что

$$P_{ik,k} + P_{ik,i} = 1 \quad \text{для любых} \quad i, k = \overline{1, m}.$$

Поэтому, полагая

$$a_{ki} = \begin{cases} 2P_{ik,k} - 1, & \text{если } i \neq k, \\ 0, & \text{если } \ i = k, \end{cases} \tag{1.6}$$

вольтерровский квадратичный стохастический оператор можно переписать в виде

$$Vx = (x_1(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{1i} x_i), \quad x_2(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{2i} x_i), \ldots, x_m(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{mi} x_i)). \tag{1.7}$$

Пусть $Vx = (x_1', x_2', \dots, x_m')$. Следовательно,

$$x_k' = x_k(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i), \quad k = \overline{1,m}. \tag{1.8}$$

Соотношение (1.8) называется *каноническим видом* вольтерровского оператора на симплексе S^{m-1}.

Заметим, что из (1.6) следует, что

$$a_{ki} = -a_{ik} \ \text{ и } \ |a_{ki}| \leqslant 1.$$

Таким образом, вольтерровский оператор на симплексе однозначно определяется заданием кососимметрической матрицы

$$A = (a_{ki}), \quad k, i = \overline{1,m} \ \text{ с условием } |a_{ki}| \leqslant 1.$$

Теорема 1.1 (см. [14]). *Отображение $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$, определяемое* (1.8)*, является гомеоморфизмом, а при $|a_{ki}| < 1$ при всех $k, i = \overline{1,m}$ будет диффеоморфизмом симплекса S^{m-1}.*

Так как V — гомеоморфизм при $|a_{ki}| \leqslant 1$, то для любого $x^0 \in S^{m-1}$ существует отрицательная траектория $\{x^{(-n)}\}$, определяемая рекуррентным соотношением

$$x^{(-n-1)} = V^{-1}(x^{(-n)}), \quad n = 0, 1, \dots$$

В работе [8] доказано, что любая отрицательная траектория всегда сходится к одной из неподвижных точек.

Известно также (см. [2]), что вольтерровские квадратичные стохастические операторы не имеют периодических орбит на симплексе. Следовательно, либо траектория сходится, либо $\omega(x^0)$ — бесконечное множество.

Определение 1.3. Кососимметрическая матрица $A = (a_{ki})$ называется матрицей *общего положения*, если все главные миноры четного порядка отличны от нуля.

Как известно (см. [13]), кососимметрические матрицы общего положения образуют открытое и всюду плотное подмножество в множестве всех кососимметрических матриц.

Пусть V — вольтерров оператор с кососимметрической матрицей общего положения.

Тогда $a_{ki} \neq 0$ при $k \neq i$. Действительно, главный минор второго порядка матрицы A есть

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{ki} \\ a_{ik} & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Так как, $a_{ki} = -a_{ik}$, то отсюда следует, что $a_{ki} \neq 0$ при $k \neq i$.

Теорема 1.2 (см. [7]). *Если V — вольтерров оператор с матрицей общего положения, то множество неподвижных точек на симплексе S^{m-1} всегда конечно.*

Замечание. Если A не является матрицей общего положения, то множество неподвижных точек, вообще говоря, бесконечно.

2. Однородные турниры

Определение 2.1. Граф называется *полным*, если любая пара (различных) вершин соединена дугой. Граф называется *ориентированным*, если в каждой дуге указано направление.

Определение 2.2. Полный ориентированный граф называется *турниром*.

Например, два турнира на рис. 1 называются, соответственно, транзитивным турниром с тремя вершинами и циклическим турниром с тремя вершинами [18].

Пусть все вершины турнира пронумерованы числами $1, 2, \dots, m$.

Определение 2.3. Два турнира с m вершинами называются *изоморфными*, если существует биекция вершин одного турнира на другой, сохраняющая смежность вершин.

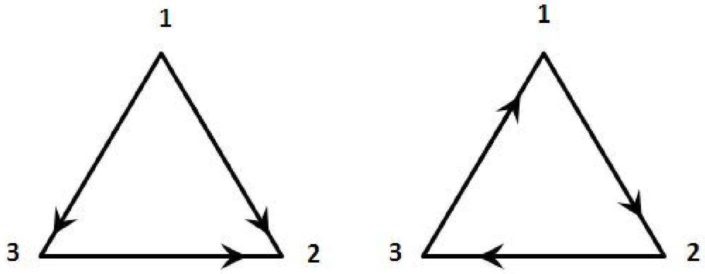

Рис. 1. Транзитивный турнир с тремя вершинами и циклический турнир с тремя вершинами.

Турнир называется *сильным*, если из любой вершины можно попасть в любую другую, следуя ориентации дуг.

Как известно [18], если турнир сильный, то существует гамильтонов цикл, содержащий все вершины данного турнира.

Турнир, не содержащий сильных подтурниров, называется *транзитивным*.

Определение 2.4. Турнир называется *однородным*, если его любой подтурнир является либо сильным, либо транзитивным.

Легко заметить, что это определение равносильно тому, что полустепени исхода и захода одинаковы для всех вершин [18, 23].

Ясно, что при $m \leqslant 3$ все турниры с m вершинами являются однородными.

Например, два турнира с четырьмя вершинами на рис. 2 не являются однородными.

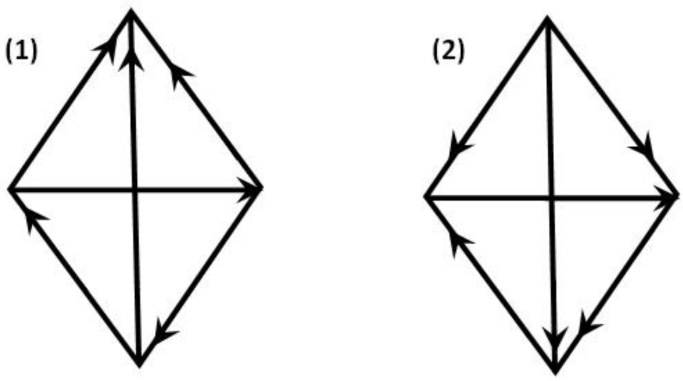

Рис. 2

Теорема 2.1. *Турнир является однородным тогда и только тогда, когда он не содержит подтурниров, изоморфных одному из указанных на рис.* 2.

Доказательство. Турниры, указанные на рис. 2, не являются ни сильными, ни транзитивными. Следовательно, любой турнир, содержащий подтурнир, изоморфный одному из них, по определению не может быть однородным.

Обратно, если турнир содержит подтурнир, который не является ни сильным, ни транзитивным, то согласно [18] множество его вершин можно разбить на два непустых и не пересекающихся класса I и II так, что все дуги, выходящие из класса I и идущие в класс II, направлены из I в II, причем подтурнир, состоящий из вершин одного из этих классов, является сильным.

Всякий сильный подтурнир содержит хотя бы одну циклическую тройку. Добавив к этой циклической тройке любую вершину из другого класса, получим один из турниров из рис. 2. Следовательно, неоднородный турнир всегда содержит подтурнир, изоморфный одному из указанных на рис. 2. Теорема 2.1 доказана. □

Пусть $A = (a_{ki})$, $|a_{ki}| \leqslant 1$ — кососимметрическая матрица общего положения, соответствующая вольтерровскому оператору V.

На плоскости возьмем m пронумерованных точек $1, 2, \ldots, m$ и точку с номером k соединим с точкой i дугой, направленной из k в i, если $a_{ki} < 0$ $(k \neq i)$, и обратным направлением, если $a_{ki} > 0$. Полученный турнир обозначим через T_m. Далее будем предполагать, что T_m — однородный турнир, а A — кососимметрическая матрица общего положения.

3. Неподвижные точки и функции Ляпунова

Теорема 3.1. *Любая неподвижная точка отображения $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ имеет только лишь нечетное число ненулевых координат.*

Доказательство. Заметим, что сужение вольтерровского оператора на любую грань симплекса S^{m-1} также является вольтерровским. Пусть $\Gamma \subset S^{m-1}$ — грань симплекса, содержащая четное число вершин симплекса, и $x \in \Gamma$ — неподвижная точка с четным числом ненулевых координат. Далее, V_Γ и A_Γ — соответствующие сужения V и A на Γ. Тогда из

$$Vx = x$$

следуют равенства

$$V_\Gamma x = x \quad \text{и} \quad A_\Gamma x = 0. \tag{3.1}$$

Так как A — матрица общего положения, то определитель A_Γ отличен от нуля, т. е. равенство $A_\Gamma x = 0$ возможно только лишь при $x = 0$. Однако $x = 0$ не принадлежит симплексу S^{m-1}. Теорема 3.1 доказана. □

Носителем точки $x \in \mathbb{R}^m$ называется

$$\operatorname{supp} x = \{i : x_i \neq 0\}.$$

Теорема 3.2. *Вольтерровский квадратичный стохастический оператор не может содержать двух неподвижных точек с равными носителями.*

Доказательство. Если x и y — две различные неподвижные точки с равными носителями, то отрезок

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$$

также состоит из неподвижных точек оператора V, что противоречит конечности множества неподвижных точек.

Таким образом, теорема 3.2 позволяет обозначать неподвижную точку только лишь указанием номеров ненулевых координат, например, $x(2, 4, 5)$ — неподвижная точка с условиями на координаты $x_2 > 0$, $x_4 > 0$, $x_5 > 0$, все остальные координаты которой равны нулю. Теорема 3.2 доказана. □

Лемма 3.1. *Если $A = (a_{ki})$ — кососимметрическая матрица общего положения с условием $|a_{ki}| \leqslant 1$, то система линейных неравенств*

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_i \geqslant 0, \quad k = \overline{1, m} \tag{3.2}$$

имеет единственное решение в симплексе S^{m-1}.

Доказательство. Пусть $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, $\alpha \subset I$ — непустое подмножество. Через Γ_α обозначим выпуклую оболочку базисных векторов e_i, где $i \in \alpha$, и будем называть $(|\alpha| - 1)$-*мерной гранью* симплекса S^{m-1}.

Пусть $F_k = \{x \in S^{m-1} : \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki} x_i \geqslant 0, \}$, $k = \overline{1, m}$. Тогда F_k — замкнутые множества, причем для любого $\alpha \subset I$ имеем

$$\bigcup_{k \in \alpha} F_k \supset \Gamma_\alpha, \tag{3.3}$$

что легко следует из кососимметричности матрицы A. Согласно комбинаторной лемме Шпернера [10] из (3.3) следует, что $\bigcap_{k=1}^{m} F_k \neq \varnothing$, т. е. (3.2) имеет хотя бы одно решение в S^{m-1}.

Любое решение (3.2) есть неподвижная точка для вольтерровского оператора V, так как

$$x_k' = x_k(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i) \geqslant x_k \quad \text{при всех} \quad k = \overline{1,m}. \tag{3.4}$$

Поскольку $\sum_{k=1}^{m} x_k' = \sum_{k=1}^{m} x_k = 1$, то из (3.4) следует $Vx = x$.

С другой стороны, множество решений неравенств (3.2) в S^{m-1} — выпуклое множество. Так как A — матрица общего положения, то множество неподвижных точек конечно. Следовательно, решение (3.2) в симплексе единственно. Лемма 3.1 доказана. □

Аналогично доказывается, что

$$\{x \in S^{m-1} : \sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i \leqslant 0\} \neq \varnothing$$

и единственно при тех же условиях.

Определение 3.1. Непрерывный функционал $\varphi : S^{m-1} \to \mathbb{R}$ называется *функцией Ляпунова* для оператора $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$, если

$$\varphi(Vx) \leqslant \varphi(x) \quad \text{для всех} \quad x \in S^{m-1}.$$

Таким образом, функция Ляпунова монотонно не возрастает вдоль любой траектории, определяемой отображением V.

Пусть $p = (p_1, \dots, p_m) \in S^{m-1}$ — решение неравенств (3.2).

Теорема (см. [7, 8]). *Функция*

$$\varphi(x) = x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{p_m}$$

является функцией Ляпунова для квадратичного стохастического оператора Вольтерра.

Следствие 3.1. *Для любого $x^0 \neq Vx^0$ множество предельных точек траектории, начинающейся в x^0, лежит на границе симплекса S^{m-1}, т. е.*

$$\omega(x^0) \subset \partial S^{m-1}.$$

Следствие 3.2. *Для любой начальной точки отрицательные траектории сходятся к одной из неподвижных точек.*

4. Карта неподвижных точек вольтерровских операторов с однородным турниром в симплексе S^4

Как было отмечено выше, любая грань S^{m-1} инвариантна относительно вольтерровского оператора V, причем сужение V на эту грань также является оператором вольтерровского вида.

Пусть Γ_α — некоторая грань S^{m-1}, V_α — сужение V на Γ_α и A_α — кососимметрическая матрица, которая получается из A заменой всех a_{ki} нулями при $(k,i) \notin \alpha \times \alpha$.

Введем обозначения:

$$P_\alpha = \{x \in \Gamma_\alpha : A_\alpha x \leqslant 0\}, \qquad Q_\alpha = \{x \in \Gamma_\alpha : A_\alpha x \geqslant 0\}.$$

Согласно доказанной выше лемме, P_α и Q_α состоят из единственной неподвижной точки, причем возможны случаи, когда $P_\alpha = Q_\alpha$.

Пример. В случае транзитивного турнира с тремя вершинами (см. рис. 3) имеем:

1) если $\alpha = \{1,2\}$, то $P_\alpha = e_1, Q_\alpha = e_2$;
2) если $\alpha = \{1,2,3\}$, то $P_\alpha = e_1, \quad Q_\alpha = e_3$;
3) если $\alpha = \{3\}$, то $P_\alpha = Q_\alpha = e_3$ при любых коэффициентах a_{ki}.

В случае циклического турнира с тремя вершинами (см. рис. 4) имеем:

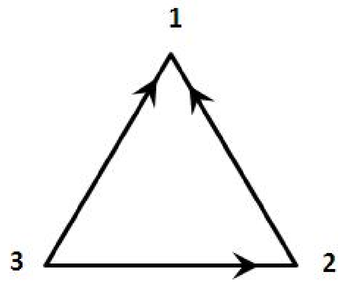

Рис. 3

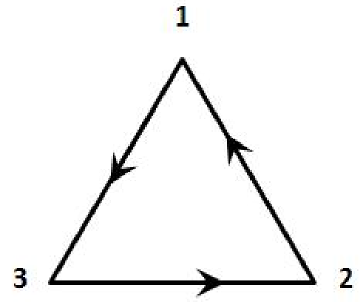

Рис. 4

1) если $\alpha=\{2,3\}$, то $P_\alpha=e_2, Q_\alpha=e_3$;
2) если $\alpha=\{1,2,3\}$, то $P_\alpha=Q_\alpha$ есть внутренняя неподвижная точка.

Множество всех неподвижных точек $\{x\in S^{m-1}: Vx=x\}$ оператора V изобразим в виде точек на плоскости, затем для каждого $\alpha\subset I$ неподвижную точку P_α соединим дугой с неподвижной точкой Q_α, направленной из P_α в Q_α. Полученный ориентированный граф назовем *картой неподвижных точек* оператора V и обозначим через G_V.

Легко заметить, что в случае транзитивных турниров карта неподвижных точек G_V совпадает с исходным турниром. Содержательные примеры карт неподвижных точек начинаются с $m\geqslant 5$.

Далее мы изучим случай, когда $m=5$.

Как известно (см. [18]), при $m=5$ существуют 12 попарно неизоморфных турниров, причем 6 из них являются сильными.

Однородных турниров с 5 вершинами существуют 4, причем один из них является транзитивным. В случае транзитивных турниров любая траектория вольтерровского оператора сходится к одной из вершин симплекса.

Рассмотрим оставшиеся три однородных турнира с 5 вершинами. Пусть T_5 имеет вид, как на рис. 5. Тогда соответствующий вольтерровский оператор представляется равенствами:

$$\begin{cases} x_1' = x_1(1-a_1x_2-a_2x_3-a_3x_4+a_4x_5),\\ x_2' = x_2(1+a_1x_1-a_5x_3-a_6x_4-a_7x_5),\\ x_3' = x_3(1+a_2x_3+a_5x_2-a_8x_4-a_9x_5),\\ x_4' = x_4(1+a_3x_1+a_6x_2+a_8x_3-a_{10}x_5),\\ x_5' = x_5(1-a_4x_1+a_7x_2+a_9x_3+a_{10}x_4), \end{cases}$$

где коэффициенты $a_k>0$ и $a_k\leqslant 1$.

Как видно из рис. 5, T_5 имеет три циклические тройки $\overline{125}$, $\overline{135}$, $\overline{145}$.

Пусть $\alpha=\{1,2,5\}$, $\beta=\{1,3,5\}$, $\gamma=\{1,4,5\}$. Они определяют следующие неподвижные точки:

$$x(\alpha)=\frac{1}{a_1+a_4+a_7}(a_7,a_4,0,0,a_1),\quad x(\beta)=\frac{1}{a_2+a_4+a_9}(a_9,0,a_4,0,a_2),$$

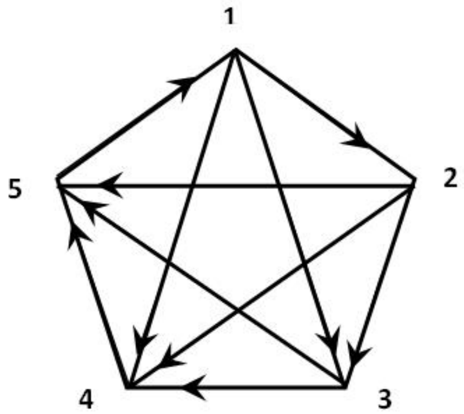

Рис. 5

$$x(\gamma) = \frac{1}{a_3 + a_4 + a_{10}}(a_{10}, 0, 0, a_4, a_3).$$

Для этих неподвижных точек строим функции

$$\varphi_\alpha(x) = (x_1^{a_7} \cdot x_2^{a_4} \cdot x_5^{a_1})^{\frac{1}{a_1+a_4+a_7}}, \quad \varphi_\beta(x) = (x_1^{a_9} \cdot x_3^{a_4} \cdot x_5^{a_2})^{\frac{1}{a_2+a_4+a_9}},$$

$$\varphi_\gamma(x) = (x_1^{a_{10}} \cdot x_4^{a_4} \cdot x_5^{a_3})^{\frac{1}{a_3+a_4+a_{10}}}.$$

Следующее неравенство

$$c_1^{p_1} \cdot c_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot c_m^{p_m} \leqslant \sum_{k=1}^{m} c_k \cdot p_k,$$

где

$$c_k \geqslant 0, \quad p_k \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{m} p_k = 1,$$

называется *неравенством Юнга* [11].

Используя неравенство Юнга, получим следующие оценки:

$$\varphi_\alpha(Vx) \leqslant \varphi_\alpha(x)(1 - \delta_\alpha \Delta_1 x_3 - \delta_\alpha \Delta_2 x_4),$$

$$\varphi_\beta(Vx) \leqslant \varphi_\beta(x)(1 + \delta_\beta \Delta_1 x_2 - \delta_\beta \Delta_3 x_4),$$

$$\varphi_\gamma(Vx) \leqslant \varphi_\gamma(x)(1 + \delta_\gamma \Delta_2 x_2 + \delta_\gamma \Delta_3 x_3),$$

для всех $x \in S^4$, где

$$\delta_\alpha = \frac{1}{a_1 + a_4 + a_7}, \quad \delta_\beta = \frac{1}{a_2 + a_4 + a_9}, \quad \delta_\gamma = \frac{1}{a_3 + a_4 + a_{10}},$$

$$\Delta_1 = a_2 a_7 + a_4 a_5 - a_1 a_9, \quad \Delta_2 = a_3 a_7 + a_4 a_6 - a_1 a_{10}, \quad \Delta_3 = a_3 a_9 + a_4 a_8 - a_2 a_{10}.$$

Карта неподвижных точек имеет вид, как на рис. 6.

Направления на дугах, соединяющих неподвижные точки $x(\alpha)$, $x(\beta)$ и $x(\gamma)$, определяются знаками чисел Δ_1, Δ_2, Δ_3. Отметим, что Δ_1^2, Δ_2^2, Δ_3^2 суть миноры четвертого порядка матрицы A.

Так как A — кососимметрическая матрица общего положения, то $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \neq 0$.

Например, если $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, то $\varphi_\alpha(x)$ является функцией Ляпунова для оператора V.

Если $\Delta_1 \cdot \Delta_2 < 0$, $\Delta_1 \cdot \Delta_3 > 0$, $\Delta_2 \cdot \Delta_3 < 0$, то V имеет еще одну неподвижную точку внутри симплекса S^4.

Вообще говоря, асимптотическое поведение траекторий оператора V и расположение множества предельных точек $\omega(x^0)$ зависят от знаков Δ_1, Δ_2 и Δ_3.

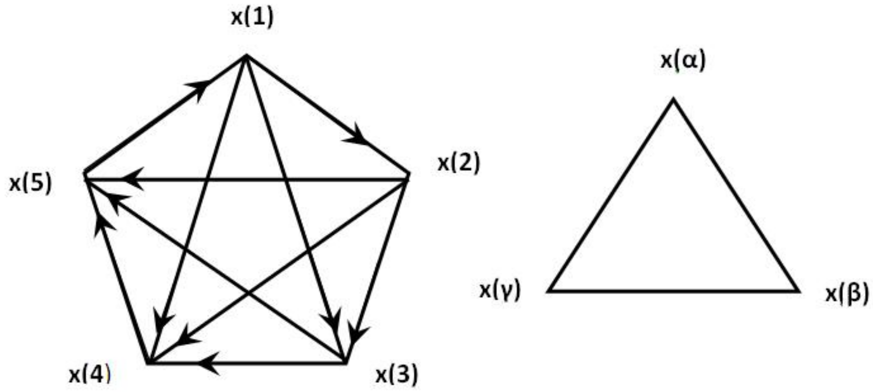

Рис. 6

В рассматриваемом случае либо одна и только одна из функций φ_α, φ_β, φ_γ является функцией Ляпунова для вольтерровского оператора, либо существует неподвижная точка, являющаяся внутренней для S^4, которая порождает функцию Ляпунова.

Следующие два однородных турнира с 5 вершинами имеют вид, как на рис. 7. В случае рис. 7.а) существуют 4 циклические тройки, а в случае рис. 7.б) — 5 циклических троек.

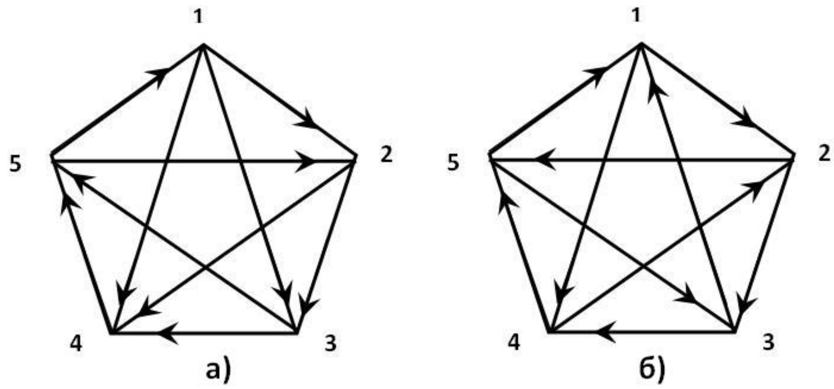

Рис. 7

Построение карты неподвижных точек проводится аналогичным образом.

Отметим свойства карт неподвижных точек вольтерровских операторов с однородным турниром:

1) Существует только лишь одна вершина (=неподвижная точка), в которую нет входящих дуг, причем она определяет функцию Ляпунова.
2) В карте неподвижных точек могут быть соединены дугой только лишь неподвижные точки с одинаковым числом ненулевых координат.

В настоящее время следующие задачи остаются нерешенными:

1) Если подтурнир, соответствующий трем вершинам S^{m-1}, является сильным, то грань, натянутая на эти вершины, имеет внутреннюю неподвижную точку. Однако имеются примеры, когда T_5 — сильный, но соответствующая грань не имеет внутренних неподвижных точек. Известно [18], что если T_{2k+1} — сильный, то существует подтурнир T_{2k-1}, который также является сильным. Верно ли, что из существования неподвижной точки с $2k+1$ ненулевыми координатами следует существование неподвижной точки с $2k-1$ ненулевыми координатами?
2) Для вольтерровских операторов, как правило, множество предельных точек траектории бесконечно. Верно ли, что из $|\omega(x^0)| = \infty$ следует, что предел средних по Чезаро

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V^k(x_0)$$

не существует?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ганиходжаев Р. Н.* Исследование по теории квадратичных стохастических операторов// Дисс. д.ф.-м.н. — Ташкент: ИМ АН РУз, 1993.
2. *Ганиходжаев Р. Н., Абдурахманова Р. Э.* Описание квадратичных автоморфизмов конечно-мерного симплекса// Узб. мат. ж. — 2002. — № 1. — С. 7–16.
3. *Ганиходжаев Р. Н., Журабоев А. М.* Множество равновестных состояний квадратичных стохастических операторов типа V_π// Узб. мат. ж. — 1998. — № 3. — С. 23–27.
4. *Ганиходжаев Р. Н., Каримов А. З.* О числе вершин множества бистохастических операторов// Узб. мат. ж. — 1999. — № 6. — С. 29–35.
5. *Ганиходжаев Р. Н., Сабуров М. Х.* Обобщенная модель нелинейных операторов вольтерровского типа и функции Ляпунова// Журн. СФУ. Сер. Мат. Физ. — 2008. — *1*, № 2. — С. 188–196.
6. *Ганиходжаев Р. Н., Саримсаков А. Т.* Математическая модель каолиции биологических систем// Докл. АН УзССР. — 1992. — № 3. — С. 14–17.
7. *Ганиходжаев Р. Н., Таджиева М. А., Эшмаматова Д. Б.* Динамические свойства квадратичных гомеоморфизмов конечномерного симплекса// Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прилож. — 2018. — *144*. — С. 104–109.
8. *Ганиходжаев Р. Н., Эшмаматова Д. Б.* Квадратичные автоморфизмы симплекса и асимптотическое поведение их траекторий// Владикавказ. мат. ж. — 2006. — *8*, № 2. — С. 12–28.
9. *Ганиходжаев Р. Н., Эшниязов А. И.* Бистохастические квадратичные операторы// Узб. мат. ж. — 2004. — № 3. — С. 29–34.
10. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984.
11. *Харди Г. Х., Литтльвуд Д. И., Полиа Г.* Неравенства. — М.: Мир, 1948.
12. *Ferchichi M. R., Yousfi A.* On some attractors of a two-dimensional quadratic map// Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. — 2019. — *9*, № 1. — С. 87–103.
13. *Ganikhodzhaev R. N.* Quadratic stochastic operators, Lyapunov function and tournaments// Sb. Math. — 1993. — *76*, № 2. — С. 489–506.
14. *Ganikhodzhaev R. N.* A chart of fixed points and Lyapunov functions for a class of discrete dynamical systems// Math. Notes. — 1994. — *56*, № 5-6. — С. 1125–1131.
15. *Ganikhodzhaev R. N., Mukhamedov F. M., Rozikov U. A.* Quadratic stochastic operators: Results and open problems// Infin. Dimens. Anal. Quantum. Probab. Relat. — 2011. — *14*, № 2. — С. 279–335.
16. *Galor O.* Discrete dynamical systems. — Berlin: Springer, 2007.
17. *Gard T. C., Hallam T. G.* Persistence in food webs. I. Lotka—Volterra food chains// Bull. Math. Biol. — 1979. — *41*, № 6. — С. 877–891.
18. *Harary F.* Graph theory. — Reading, etc.: Addison-Wesley, 1969.
19. *Hofbauer J., Sigmund K.* The theory of evolution and dynamical systems: Mathematical aspects of selection. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.
20. *Hofbauer J., Sigmund K.* Evolutionary games and population dynamics. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.
21. *Jamilov U. U.* The dynamics of Lotka—Volterra operators on S^2// Abst. Conf. «New Results of Mathematics and Their Applications», Samarkand, May 14-15, 2018. — С. 108–110.
22. *Jenks R. D.* Homogeneous multidimensional differential systems for mathematical models// J. Differ. Equ. — 1968. — *4*, № 4. — С. 549–565.
23. *Moon J. W.* Topics on tournaments. — New York, etc.: Holt, Rinehart and Winston, 1968.

М. А. Таджиева
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: mohbonut@mail.ru

Д. Б. Эшмаматова
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: 24dil@mail.ru

Р. Н. Ганиходжаев
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-4-783-794 UDC 517.98

Volterra-type Quadratic Stochastic Operators with a Homogeneous Tournament

© 2021 **M. A. Tadzhieva, D. B. Eshmamatova, R. N. Ganikhodzhaev**

Abstract. As is known [1], each quadratic stochastic operator of Volterra type acting on a finite-dimensional simplex defines a certain tournament, the properties of which make it possible to study the asymptotic behavior of the trajectories of this Volterra operator. In this paper, we introduce the concept of a homogeneous tournament and study the dynamic properties of Volterra operators corresponding to homogeneous tournaments in the simplex S^4.

REFERENCES

1. R. N. Ganikhodzhaev, "Issledovanie po teorii kvadratichnykh stokhasticheskikh operatorov" [Research on the theory of quadratic stochastic operators] *Doctoral Thesis*, IM AN RUz, Tashkent, 1993.
2. R. N. Ganikhodzhaev and R. E. Abdurakhmanova, "Opisanie kvadratichnykh avtomorfizmov konechnomernogo simpleksa" [Description of quadratic automorphisms of a finite-dimensional simplex], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 2002, No. 1, 7–16 (in Russian).
3. R. N. Ganikhodzhaev and A. M. Zhuraboev, "Mnozhestvo ravnovestnykh sostoyaniy kvadratichnykh stokhasticheskikh operatorov tipa V_π" [The set of equilibrium states of quadratic stochastic operators of type V_π], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 1998, No. 3, 23–27 (in Russian).
4. R. N. Ganikhodzhaev and A. Z. Karimov, "O chisle vershin mnozhestva bistokhasticheskikh operatorov" [On the number of vertices of the set of bistochastic operators], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 1999, No. 6, 29–35 (in Russian).
5. R. N. Ganikhodzhaev and M. Kh. Saburov, "Obobshchennaya model' nelineynykh operatorov vol'terrovskogo tipa i funktsii Lyapunova" [Generalized model of nonlinear Volterra-type operators and Lyapunov functions], *Zhurn. SFU. Ser. Mat. Fiz.* [J. SFU. Ser. Math. Phys.], 2008, **1**, No. 2, 188–196 (in Russian).
6. R. N. Ganikhodzhaev and A. T. Sarimsakov, "Matematicheskaya model' kaolitsii biologicheskikh sistem" [Mathematical model of the caolition of biological systems], *Dokl. AN UzSSR* [Rep. Acad. Sci. Uzb. SSR], 1992, No. 3, 14–17 (in Russian).
7. R. N. Ganikhodzhaev, M. A. Tadzhieva, and D. B. Eshmamatova, "Dinamicheskie svoystva kvadratichnykh gomeomorfizmov konechnomernogo simpleksa" [Dynamical properties of quadratic homeomorphisms of a finite-dimensional simplex], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. mat. i ee prilozh.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2018, **144**, 104–109 (in Russian).
8. R. N. Ganikhodzhaev and D. B. Eshmamatova, "Kvadratichnye avtomorfizmy simpleksa i asimptoticheskoe povedenie ikh traektoriy" [Quadratic simplex automorphisms and asymptotic behavior of their trajectories], *Vladikavkaz. mat. zh.* [Vladikavkaz. Math. J.], 2006, **8**, No. 2, 12–28 (in Russian).
9. R. N. Ganikhodzhaev and A. I. Eshniyazov, "Bistokhasticheskie kvadratichnye operatory" [Bistochastic quadratic operators], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 2004, No. 3, 29–34 (in Russian).
10. L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).
11. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Neravenstva* [Inequalities], Mir, Moscow, 1948 (Russian translation).
12. M. R. Ferchichi and A. Yousfi, "On some attractors of a two-dimensional quadratic map," *Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ.*, 2019, **9**, No. 1, 87–103.
13. R. N. Ganikhodzhaev, "Quadratic stochastic operators, Lyapunov function and tournaments," *Sb. Math.*, 1993, **76**, No. 2, 489–506.

14. R. N. Ganikhodzhaev, “A chart of fixed points and Lyapunov functions for a class of discrete dynamical systems,” *Math. Notes*, 1994, **56**, No. 5-6, 1125–1131.
15. R. N. Ganikhodzhaev, F. M. Mukhamedov, and U. A. Rozikov, “Quadratic stochastic operators: Results and open problems,” *Infin. Dimens. Anal. Quantum. Probab. Relat.*, 2011, **14**, No. 2, 279–335.
16. O. Galor, *Discrete dynamical systems*, Springer, Berlin, 2007.
17. T. C. Gard and T. G. Hallam, “Persistence in food webs. I. Lotka–Volterra food chains,” *Bull. Math. Biol.*, 1979, **41**, No. 6, 877–891.
18. F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley, Reading, etc., 1969.
19. J. Hofbauer and K. Sigmund, *The theory of evolution and dynamical systems: Mathematical aspects of selection*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.
20. J. Hofbauer and K. Sigmund, *Evolutionary games and population dynamics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
21. U. U. Jamilov, “The dynamics of Lotka–Volterra operators on S^2,” *Abst. Conf. New Results of Mathematics and Their Applications, Samarkand, May* 14-15, 2018, pp. 108–110.
22. R. D. Jenks, “Homogeneous multidimensional differential systems for mathematical models,” *J. Differ. Equ.*, 1968, **4**, No. 4, 549–565.
23. J. W. Moon, *Topics on tournaments*, Holt, Rinehart and Winston, New York, etc., 1968.

M. A. Tadzhieva
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: mohbonut@mail.ru

D. B. Eshmamatova
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: 24dil@mail.ru

R. N. Ganikhodzhaev
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan