РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 67, № 3, 2021

Посвящается 70-летию президента РУДН В. М. Филиппова

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3
http://journals.rudn.ru/cmfd

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print)
4 выпуска в год
http://journals.rudn.ru/cmfd
Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.
Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.
Индексируется в международных базах данных научных публикаций *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.
Полный текст журнала размещен в базах данных компании *EBSCO Publishing* на платформе *EBSCOhost*.
Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты. Объем статьи, занимающий целый том, должен составлять 140–190 страниц в стиле нашего журнала.

Правила оформления статей, архив публикаций и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала: http://journals.rudn.ru/cmfd, http://www.mathnet.ru/cmfd.

Редактор: ***Е. М. Варфоломеев***
Компьютерная верстка: ***Е. М. Варфоломеев***

Адрес редакции:
115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Подписано в печать 23.06.2021. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.
Усл. печ. л. 22,32. Тираж 150 экз. Заказ 640.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов» (РУДН)
117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН
115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 67, No. 3, 2021
Dedicated to 70th anniversary of the President of the RUDN University V. M. Filippov

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3
http://journals.rudn.ru/cmfd

Founded in 2003
Founder: PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS
Published by the Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print)
4 issues per year
http://journals.rudn.ru/cmfd
Reviewed in *MathSciNet* and *Zentralblatt Math*.
The full texts can be found in the *EBSCOhost* databases by *EBSCO Publishing*.
Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results. Occupying the whole volume, an article should make up 140–190 pages in the format of the journal.

Guidelines for authors, archive of issues, and other information can be found at the journal's website: http://journals.rudn.ru/cmfd, http://www.mathnet.ru/eng/cmfd.

Editor: ***E. M. Varfolomeev***
Computer design: ***E. M. Varfolomeev***

Address of the Editorial Office:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Print run 150 copies.

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

Printed at RUDN Publishing House:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 3 (2021). С. 423–426
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-423-426

ВЛАДИМИР МИХАЙЛОВИЧ ФИЛИППОВ

Владимир Михайлович Филиппов родился 15 апреля 1951 г. в городе Урюпинске Волгоградской области. В 1973 г. он с отличием окончил факультет физико-математических и естественных наук УДН им. П. Лумумбы по специальности «Математика». В 1973–1975 гг. — аспирант Университета; в 1976–1979 гг. — председатель Совета молодых ученых; в 1979-1980 гг. — ассистент кафедры высшей математики; в 1980–1987 гг. — начальник Научного управления; в 1983-1984 гг. был командирован для научной работы в Свободный университет Брюсселя (Бельгия); в 1985–2000 гг. — заведующий кафедрой математического анализа; с 2000 г. по настоящее время — заведующий кафедрой сравнительной образовательной политики; 1989–1993 гг. — декан факультета физико-математических и естественных наук; 1993–1998 гг. — ректор РУДН. С 1998 по 2004 г. — министр общего и профессионального образования, министр образования РФ.

В 2004-2005 гг. — помощник Председателя Правительства РФ в области образования и культуры. С 2005 г. по 2020 г. — ректор РУДН, в феврале 2020 г. избран президентом РУДН, с 2013 г. — Председатель ВАК.

В 1980 г. Владимир Михайлович защитил кандидатскую диссертацию в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР по специальности 01.01.01 — математический анализ (научный руководитель — член-корреспондент АН СССР, профессор Л. Д. Кудрявцев), а в 1986 г. там же — докторскую диссертацию на тему «Квазиклассические решения обратных задач вариационного исчисления в неэйлеровых классах функционалов и функциональных пространствах». В 1987 г. Министерством высшего образования СССР ему присвоено ученое звание профессора по кафедре математического анализа.

В. М. Филиппов — академик Российской академии образования; Почетный доктор ряда ведущих российских и зарубежных университетов; член Рабочей группы (1993–1997 гг.) Совета Европы и ЮНЕСКО по разработке Лиссабонской Конвенции; президент Международного оргкомитета ЮНЕСКО (2007–2009 гг.) по проведению Всемирной конференции по высшему образованию; член Комитета по образованию Совета Европы (с 2010 г.); с 2010 г. — член и председатель (в 2012–2014 гг.) Комиссии по образованию ЮНЕСКО (Программы «Образование для всех»); член Комиссии ЮНЕСКО (с 2015 г.) Программы «Образование-2030» — представитель стран Центральной и Восточной Европы; ректор Сетевого университета СНГ (с 2010 г.); председатель (с 2015 г.) Координационного совета ректоров Сетевого университета стран ШОС (Шанхайской организации сотрудничества); вице-президент Евразийской ассоциации университетов (с 1995 г.); член Президиума Совета ректоров вузов Москвы и Московской области (с 1993 г.); в 1995–2015 гг. — член Управляющего совета Института информационных технологий в образовании (ЮНЕСКО), Наблюдательного совета CEPES — Европейского центра высшего образования ЮНЕСКО (Бухарест, Румыния); с февраля 2013 г. председатель ВАК — Высшей аттестационной комиссии Министерства высшего образования и науки РФ.

В. М. Филиппов начал свою работу в должности ректора, когда в УДН было около 7 тысяч студентов, аспирантов и стажеров из 109 стран мира. Дальнейшее развитие Университета требовало огромного постоянного внимания, принятия многих непростых решений. По его инициативе и поддержке были созданы, в частности, факультет гуманитарных и социальных наук, экономический, филологический и юридический факультеты, Институт иностранных языков, Институт гостиничного бизнеса и туризма, Математический институт имени С. М. Никольского, а также десятки новых кафедр и департаментов. Количество специальностей и направлений подготовки в РУДН увеличилось за время его ректорства с 35 до более 70.

К 2020 г. Университет достиг высшего уровня своего развития. В настоящее в РУДН более 32 тысяч обучающихся из 160 стран мира.

В мировом рейтинге университетов QS World University Rankings РУДН занял в 2021 г. 326 место. По ряду предметных областей РУДН вошел в лидеры мирового высшего образования: в TOP-100 по современным языкам; в TOP-150 по лингвистике; в TOP-200 по праву; в TOP-250 по математике. Все это — результат десятков лет неустанной работы В. М. Филиппова, его любви к делу и к родному Университету.

Трудно перечислить все то, что было сделано В. М. Филипповым в сложные для страны годы на посту министра образования РФ: стабилизация финансово-экономического положения в системе российского образования после дефолта августа 1998 г.; проведение, после 12-летнего перерыва, Всероссийского съезда работников образования в Кремле; повышение автономии российских школ — перевод школ страны в юридические лица, создание попечительских и наблюдательных советов школ; оптимизация сети сельских школ, реализация программ «Школьный автобус» и компьютеризации сельских российских школ; модернизация лабораторной, библиотечной и физкультурно-спортивной базы школ и высших учебных заведений.

Научные интересы В. М. Филиппова связаны с обратными задачами вариационного исчисления, а также с теорией функциональных пространств.

В кандидатской диссертации В. М. Филипповым была решена задача построения интегрального экстремального вариационного принципа для уравнения теплопроводности — задача, которая не решалась в течение столетия. В своих дальнейших исследованиях он разработал общую теорию построения экстремальных вариационных принципов для широких классов дифференциальных уравнений с непотенциальными (в классическом понимании) операторами. В. М. Филиппов показал, что все предшествующие попытки построения вариационных принципов для непотенциальных операторов «терпели неудачу» потому, что математики и механики традиционно ограничивались функционалами типа Эйлера—Лагранжа. Расширив классы функционалов, В. М. Филиппов ввел новую шкалу функциональных пространств, обобщающих пространства С. Л. Соболева и тем самым существенно расширил область применения вариационных методов. В 1984 г. известный физик, лауреат Нобелевской премии И. Р. Пригожин, понимая уникальность полученных В. М. Филипповым результатов, в том числе — для физиков, представил доклад В. М. Филиппова в Королевскую академию наук Бельгии. Результаты В. М. Филиппова по вариационным принципам для непотенциальных операторов достаточно полно представлены в монографиях [9, 10].

В. М. Филиппов отмечен следующими наградами: орден Дружбы, орден Почета, ордена «За заслуги перед Отечеством» III и IV степеней, орден Почетного легиона (Франция), орден «Командор»

(Бельгия), орден Короны Короля (Бельгия); премия Президента РФ в области образования; премия Правительства РФ в области образования; благодарности Президента РФ; медали «За заслуги в социально-трудовой сфере РФ», «За заслуги в развитии Олимпийского движения в России», «За укрепление боевого содружества», Святого благоверного князя Даниила Московского, а также ряд других медалей, премий и наград отраслевых министерств и ведомств, субъектов Российской Федерации.

Он является автором более 250 научных и научно-методических работ, в том числе 30 монографий, 2 из которых переведены и изданы в США Американским математическим обществом.

Владимир Михайлович обладает редким достоинством: он всегда старается помочь людям в трудную минуту, причем часто делает это так, что те даже не догадываются, откуда пришла помощь.

Российские математики вместе с многотысячным интернациональным коллективом Российского университета дружбы народов желают В. М. Филиппову доброго здоровья и многих лет творческой жизни на благо науки и образования.

А. И. Аптекарев, Д. Е. Апушкинская, О. В. Бесов, В. И. Буренков, В. В. Власов, Р. В. Гамкрелидзе, М. Л. Гольдман, Г. В. Демиденко, В. Г. Задорожний, В. В. Козлов, Г. Г. Лазарева, С. П. Новиков, В. М. Савчин, В. А. Садовничий, А. Л. Скубачевский, А. П. Солдатов, Д. В. Трещев, М. А. Ragusa, H.-O. Walther.

СПИСОК ИЗБРАННЫХ ПУБЛИКАЦИЙ

1. *Филиппов В. М.* Вариационный метод решения краевых задач математической физики и функциональные пространства// Дифф. уравн. — 1979. — *15*, № 11. — С. 2056–2065.
2. *Филиппов В. М.* Вариационный метод решения краевых задач для волнового уравнения// Дифф. уравн. — 1984. — *20*, № 11. — С. 1961–1968.
3. *Филиппов В. М.* Об одном общем подходе к симметризации дифференциальных операторов// Дифф. уравн. — 1985. — *21*, № 3. — С. 539–541.
4. *Филиппов В. М.* О вариационном принципе для гипоэллиптических уравнений с постоянными коэффициентами// Дифф. уравн. — 1986. — *22*, № 2. — С. 338–343.
5. *Филиппов В. М.* К вариационному методу в пространствах с доминирующей смешанной производной// Тр. МИАН. — 1987. — *180*. — С. 224-225.
6. *Филиппов В. М.* О полуограниченных решениях обратных задач вариационного исчисления// Дифф. уравн. — 1987. — *23*, № 9. — С. 1599–1607.
7. *Филиппов В. М.* Обобщение вариационного принципа А. Вандербауведа// Дифф. уравн. — 1994. — *30*, № 4. — С. 692–698.
8. *Филиппов В. М., Савчин В. М., Будочкина С. А.* О существовании вариационных принципов для эволюционных дифференциально-разностных уравнений// Тр. МИАН. — 2013. — *283*. — С. 25–39.
9. *Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г.* Вариационные принципы для непотенциальных операторов// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. — 1992. — *40*. — С. 3–176.
10. *Filippov V. M.* Variational principles for nonpotential operators. — Providence: Am. Math. Soc., 1989.

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-423-426

Vladimir Mikhailovich Filippov

REFERENCES

1. V. M. Filippov, "Variatsionnyy metod resheniya kraevykh zadach matematicheskoy fiziki i funktsional'nye prostranstva" [Variational method for solving boundary-value problems of mathematical physics and functional spaces], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1979, **15**, No. 11, 2056–2065 (in Russian).
2. V. M. Filippov, "Variatsionnyy metod resheniya kraevykh zadach dlya volnovogo uravneniya" [Variational method for solving boundary-value problems for the wave equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1984, **20**, No. 11, 1961–1968 (in Russian).
3. V. M. Filippov, "Ob odnom obshchem podkhode k simmetrizatsii differentsial'nykh operatorov" [On one general approach to symmetrization of differential operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1985, **21**, No. 3, 539–541 (in Russian).
4. V. M. Filippov, "O variatsionnom printsipe dlya gipoellipticheskikh uravneniy s postoyannymi koeffitsientami" [On the variational principle for hypoelliptic equations with constant coefficients], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1986, **22**, No. 2, 338–343 (in Russian).
5. V. M. Filippov, "K variatsionnomu metodu v prostranstvakh s dominiruyushchey smeshannoy proizvodnoy" [On a variational method in spaces with a dominant mixed derivative], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1987, **180**, 224-225 (in Russian).
6. V. M. Filippov, "O poluogranichennykh resheniyakh obratnykh zadach variatsionnogo ischisleniya" [Semi-bounded solutions of inverse problems in the calculus of variations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1987, **23**, No. 9, 1599–1607 (in Russian).
7. V. M. Filippov, "Obobshchenie variatsionnogo printsipa A. Vanderbauveda" [Generalization of the A. Vanderbauved variational principle], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1994, **30**, No. 4, 692–698 (in Russian).
8. V. M. Filippov, V. M. Savchin, and S. A. Budochkina, "O sushchestvovanii variatsionnykh printsipov dlya evolyutsionnykh differentsial'no-raznostnykh uravneniy" [On the existence of variational principles for evolutionary differential-difference equations], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2013, **283**, 25–39 (in Russian).
9. V. M. Filippov, V. M. Savchin, and S. G. Shorokhov, "Variatsionnye printsipy dlya nepotentsial'nykh operatorov" [Variational principles for nonpotential operators], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. probl. mat. Nov. dostizh.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math. New Adv.], 1992, **40**, 3–176 (in Russian).
10. V. M. Filippov, *Variational Principles for Nonpotentional Operators*, Am. Math. Soc., Providence, 1989.

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 3 (2021). С. 427–441
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-427-441 УДК 517.53

СЛАБЫЕ И СИЛЬНЫЕ АСИМПТОТИКИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ С «ПЕРЕМЕННЫМ» ВЕСОМ

© 2021 г. **А. И. АПТЕКАРЕВ**

Аннотация. Рассматриваются последовательности ортогональных многочленов с «переменными» (*varying*), т. е. зависящими от номера многочлена, весами. Получены расширения классов применимости известных асимптотических формул для больших номеров.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Пусть $P_n(x) = x^n + \ldots$ — последовательность ($n \in \mathbb{Z}_+$) многочленов, ортогональных по мере $\sigma(x)$ на отрезке $\Delta \subset \mathbb{R}$ ($\operatorname{supp}\sigma = \Delta$):

$$\int\limits_{\Delta} P_n(x)x^\nu\, d\sigma(x) = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.1}$$

Асимптотическая теория ортогональных многочленов достаточно глубоко изучена и имеет широкое применение. Известен ряд асимптотических формул, которые с разной точностью описывают эти многочлены при больших n. Естественно, что для улучшения точности представления многочлена приходится накладывать более ограничительные условия на меры ортогональности.

Так называемые формулы *слабой асимптотики* справедливы для достаточно общих последовательностей $\{P_n(x)\}$. Эти асимптотики выражаются в виде слабой сходимости последовательности мер. Существуют два типа слабых асимптотик.

Дискретную вероятностную меру χ_{P_n}, равнораспределенную в нулях $P_n(x) = \prod\limits_{j=1}^{n}(x - x_{j,n})$,

$$\chi_{P_n}(x) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\delta(x - x_{j,n}) \tag{1.2}$$

называют мерой, *считающей нули* ортогонального многочлена P_n (*zero counting measure*). Эти меры слабо сходятся при $n \to \infty$:

$$\chi_{P_n}(x) \xrightarrow{\ *\ } \lambda(x) \tag{1.3}$$

к *экстремальной мере* λ, минимизирующей энергию E_μ логарифмического потенциала V вероятностных мер μ с носителем на Δ (т. е. носителе меры ортогональности σ):

$$\exists!\ \lambda: \quad E_\mu := \int\limits_\Delta \int\limits_\Delta \ln \frac{d\mu(z)d\mu(t)}{|z-t|} \quad \longrightarrow \quad \inf_{\mu\geqslant 0,\, \operatorname{supp}\mu=\Delta,\, |\mu|=1}. \tag{1.4}$$

Эту меру также называют *равновесной мерой*, так как

$$V_\lambda(x) := \int\limits_\Delta \ln \frac{\lambda(t)}{x-t} = \omega, \quad \forall x \in \Delta, \tag{1.5}$$

где ω — *постоянная Робена*. Отметим, что в рассматриваемой ситуации (ортогональность на отрезке) слабая сходимость мер (1.3) влечет равномерную сходимость потенциалов

$$-\frac{1}{n}\ln|P_n(x)| = V_{\chi_{P_n}}(x) \rightrightarrows V_\lambda(x), \quad x \in K \Subset \Omega := \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta,$$

что эквивалентно асимптотике корня n-й степени:

$$|P_n(x)|^{1/n} \rightrightarrows \exp\{-V_\lambda(x)\} \tag{1.6}$$

и, в свою очередь, приводит к главному члену асимптотики $P_n(z)$ при $n \to \infty$:

$$P_n(z) = O(\exp\{-n\mathcal{V}_\lambda(z)\}),$$

где $\mathcal{V} = V + i\widetilde{V}$, а $\widetilde{V}$ — функция, гармонически сопряженная к V. Заметим также, что соотношение равновесия (1.5) позволяет выразить главный член асимптотики:

$$\exp\{-n\mathcal{V}_\lambda(z)\} = \left(\frac{\Phi_\Delta(z)}{\alpha}\right)^n, \qquad \alpha = e^\omega > 0, \tag{1.7}$$

где $\Phi_\Delta(z)$ — функция, конформно отображающая внешность отрезка Δ на внешность единичного круга

$$|\Phi_\Delta(z)| = 1, \quad z \in \Delta; \qquad \Phi_\Delta(z)|_{z\to\infty} = \alpha z + \dots,$$

а $\alpha^{-1} = e^{-\omega}$ — емкость отрезка Δ ($= \dfrac{1}{4}$ его длины). Наконец, отметим, что слабая асимптотика (1.3) имеет место для очень широкого класса мер ортогональности $\sigma \in \operatorname{Reg}$, называемого «*регулярные меры*» (детали см. в [35]), который даже включает в себя некоторые сингулярные меры. В частности, просто формируемым общим достаточным условием принадлежности меры ортогональности $\sigma \in \operatorname{Reg}$ является ее абсолютная непрерывность с положительным почти всюду на Δ весом:

$$d\sigma(x) = f(x)\,dx, \quad f(x) > 0, \quad x \in \Delta \quad \text{п.в.} \tag{1.8}$$

Другая формула слабой асимптотики связана с вероятностной мерой

$$p_n^2(x)d\sigma(x), \tag{1.9}$$

где $\{p_n\}$ — последовательность ортонормированных на Δ многочленов

$$\int\limits_\Delta p_n(x)\,p_m(x)\,d\sigma(x) = \delta_{n,m}, \tag{1.10}$$

которые связаны с (1.1) следующим образом:

$$p_n(z) = \gamma_n P_n(z) = \gamma_n(z^2 + \dots), \qquad \frac{1}{\gamma_n^2} := \inf_{Q_n(x)=x^n+\dots} \int\limits_\Delta |Q_n(x)|^2\,d\sigma(x). \tag{1.11}$$

Как доказал Е. А. Рахманов [12,13,32,33], при выполнении условия (1.8) для $\Delta = [a,b]$ справедливо

$$p_n^2(x)\,d\sigma(x) \quad \overset{*}{\longrightarrow} \quad d\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \tag{1.12}$$

где λ — та же самая равновесная мера (1.4), что и в правой части слабой асимптотики (1.3). Заметим, что считающая нули дискретная мера (1.2) и абсолютно непрерывная мера (1.9) — антиподы. Если первая из них вся равно распределена в нулях ортогонального многочлена, то производная второй зануляется в этих нулях. Тем не менее, они имеют одинаковый слабый предел. Из слабой сходимости (1.12) выводится более точная, чем асимптотика корня n-й степени (1.6), формула асимптотики отношения ортогональных многочленов (1.1):

$$\frac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)} \quad \rightrightarrows \quad \frac{1}{\alpha}\Phi_\Delta(z), \quad z \in K \Subset \Omega, \tag{1.13}$$

а также доказывается существование и явный вид пределов при $n \to \infty$ коэффициентов a_n, b_n рекуррентных соотношений для ортонормированных многочленов (1.10):

$$a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x) = xp_n. \tag{1.14}$$

Как мы уже отмечали выше, уточнение асимптотических формул (1.6), (1.13) обуславливает сужение класса (1.8) мер ортогональности. Следующий по точности тип асимптотик, так называемые *сильные асимптотики*, или *асимптотики типа Сегё*, справедливы при выполнении

$$\sigma \in S(\Delta): \quad \int\limits_a^b \ln\sigma'(x)\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} > -\infty, \quad \Delta = [a,b] \tag{1.15}$$

— так называемого условия Сегё. Это условие, как и (1.8), накладывает ограничения на нули веса $f(x) = \sigma'(x)$ и не позволяет весу «зануляться», например, экспоненциальным образом, разрешая алгебраические «зануления».

При выполнении условия Сегё (1.15) справедливы (см. [14, 36]) следующие формулы (при $n \to \infty$).

- Внешняя асимптотика

$$\frac{P_n(z)}{(\alpha\Phi_\Delta(z))^n} \rightrightarrows F_{\mathring{f}}(z), \quad z \in K \Subset \Omega, \tag{1.16}$$

где F — нормированная функция Сегё:

$$F_{\mathring{f}}(z) = \frac{D_{\mathring{f}}(\infty)}{D_{\mathring{f}}(z)}, \qquad D_f: \quad \begin{cases} D_f, D_f^{-1} \in H(\Omega), \\ |D_f|^2 = f \quad \text{на} \quad \Delta, \\ D_f(\infty) > 0 \end{cases} \tag{1.17}$$

для так называемого *тригонометрического веса*

$$\mathring{f}(z) := \sqrt{(x-a)(b-x)}f, \quad f := \sigma'. \tag{1.18}$$

Решение краевой задачи в (1.17) имеет вид

$$D_f(z) = \exp\left\{\sqrt{(a-z)(z-b)}\frac{1}{2\pi}\int\limits_a^b \frac{\ln f(x)\,dx}{(z-x)\sqrt{(x-a)(b-x)}}\right\}. \tag{1.19}$$

- Асимптотика старшего коэффициента для (1.10), (1.11)

$$\gamma_n = \frac{4^n}{\sqrt{\pi}(b-a)^n D_f(\infty)}. \tag{1.20}$$

- Асимптотика $L_{2,f}$ нормы на отрезке

$$\left\|\frac{P_n(x)}{\alpha_n} - \left\{\Phi_\Delta^n(x)F_{\mathring{f}}(x) + \overline{\Phi_\Delta^n(x)F_{\mathring{f}}(x)}\right\}\right\|_{L_{2,f}} = o(1). \tag{1.21}$$

Дальнейшее уточнение сильных асимптотик требует больше ограничений на веса ортогональности, чем (1.15). Например, потребовав строгую положительность, непрерывность и гладкость типа Дини—Липшица для тригонометрического веса $\mathring{f}$, С. Н. Бернштейн в [6] доказал равномерную асимптотику на отрезке, т. е. стремление к нулю в формуле (1.21) идет не в $L_{2,f}(\Delta)$ норме, а в норме $C(\Delta)$. Из недавних достижений отметим разработанную П. Дейфтом с соавторами [23] технику получения глобальных асимптотических разложений для многочленов, ортогональных относительно аналитических, не обращающихся в нуль, весов. Также отметим давно известную открытую проблему о справедливости при условии Сегё (1.15) асимптотики (1.21) не только в норме $L_{2,f}$, но и в смысле сходимости почти всюду на отрезке Δ. Эту гипотезу Т. Тао назвал *нелинейной теоремой Карлесона*, см. [30].

Настоящая работа посвящена асимптотическому анализу при больших n последовательности многочленов $P_n(z) = z^n + \dots$, ортогональных на отрезке $\Delta = [a, b]$ относительно так называемых «переменных» (*varying*) весов, когда вес f_n тоже зависит от номера (степени) многочлена $\{P_n\}$:

$$\int\limits_{\Delta} P_n(x) x^\nu f_n(x)\, dx = 0, \quad \nu = 0, \dots, n-1, \tag{1.22}$$

т. е. речь идет об обобщении (1.1), где $d\sigma(x) = f(x)dx$ не зависит от номера n.

Последовательности многочленов, удовлетворяющих (1.22), играют большую роль в современном анализе. В частности, к конструкциям типа (1.22) приводят так называемые *совместно* (*multiply*) *ортогональные* многочлены (см., например, [16]). В свою очередь, эти многочлены удовлетворяют рекуррентным соотношениям, обобщающим (1.14), коэффициенты которых служат потенциалами для дискретных операторов Шрёдингера на решетках и графах-деревьях (см. [4,5,19–22]). Поэтому основной интерес в данной статье представляет слабая асимптотика (1.12) абсолютно непрерывных мер, порождаемых нормированными многочленами

$$p_n(x) = \frac{1}{\gamma_n} P_n(x): \quad \int\limits_{\Delta} p_n^2(x) f_n(x)\, dx = 1. \tag{1.23}$$

Целью настоящей работы является расширение известного общего класса переменных весов $\{f_n\}$, в котором слабая асимптотика меры $p_n^2 f_n\, dx$ имеет место.

В следующем разделе мы введем необходимые понятия, в терминах которых будет сформулирован результат А. А. Гончара и Е. А. Рахманова [9, 26] о слабой сходимости считающей нули многочленов (1.22) меры χ_{P_n}, см. (1.2). Также здесь мы определим общий класс переменных весов $\{f_n\}$, введенный В. Тотиком в [37, 38], для которых им были исследованы асимптотики, обсуждаемые во введении, а также приведем его формулировку теоремы о слабой асимптотике меры $p_n^2 f_n\, dx$ и наше ее расширение. Затем мы посвятим раздел формулировкам теорем Тотика о сильной асимптотике и доказательству их переформулировок, с помощью которых мы в заключительном разделе передокажем их, а также докажем слабую асимптотику $p_n^2 f_n\, dx$, но уже в расширенном классе переменных весов $\{f_n\}$.

2. Слабые асимптотики многочленов, ортогональных с переменным весом

Среди приложений, мотивировавших исследования слабых асимптотик многочленов, ортогональных с переменным весом, можно выделить подход А. А. Гончара к моделированию наилучших рациональных аппроксимаций посредством многоточечных аппроксимаций Паде [7, 24], а также интерес к гипотезе Фройда о скорости роста коэффициентов рекуррентных соотношений (1.14) для многочленов, ортогональных относительно экспоненциальных весов $e^{-|x|^\alpha}$, $\alpha > 0$, доказанной в итоге Е. Б. Саффом с соавторами [28]. В результате для описания слабого предела мер χ_{P_n} многочленов (1.22) были предложены экстремальные задачи для энергии логарифмического потенциала $V^\mu(x)$ мер μ, $\operatorname{supp}\mu \in \Delta$, во внешнем поле $Q(x)$:

$$E_\mu^Q := \int\limits_{\Delta}\int\limits_{\Delta} \ln \frac{d\mu(x) d\mu(t)}{|x-t|} + 2\int\limits_{\Delta} Q(x), \tag{2.1}$$

где поле Q предполагается непрерывным на отрезке $\Delta \subseteq \mathbb{R}$. В случае бесконечного Δ поле в окрестности бесконечности должно расти быстрее логарифма: $(Q(x) - \ln|x|) \to \infty$, $|x| \to \infty$.

Известно (см. [8, 25, 29], а также более поздние детальные монографии [11, 31, 34]):

$$\exists!\ \lambda^Q: \quad E_\mu^Q \longrightarrow \inf_{\mu \geqslant 0,\, \|\mu\|=1,\, \operatorname{supp}\mu = \Delta}. \tag{2.2}$$

В отличие от экстремальной меры (1.4), минимизирующей энергию (2.1) в отсутствие внешнего поля ($Q \equiv 0$), носитель меры λ^Q не обязан совпадать с отрезком Δ, и соотношения (1.5) превращаются в

$$V_{\lambda^Q}(x) + Q(x) \begin{cases} = \omega_n, & x \in \Delta^* := \operatorname{supp}\lambda^Q, \\ \geqslant \omega_n, & x \in \Delta \setminus \Delta^*. \end{cases} \tag{2.3}$$

Замечание 2.1. Для выпуклых вниз внешних полей Q носитель Δ^* тоже оказывается отрезком $\Delta^* \subseteq \Delta$, и в соотношениях равновесия на $\Delta \setminus \Delta^*$ нестрогое неравенство $\geqslant$ превращается в строгое. Примером выпуклых вниз полей являются потенциалы мер, сосредоточенных на отрезках, не пересекающихся с Δ.

Вернемся к многочленам $P_n(x)$, ортогональным относительно переменного веса $f_n(x)$, см. (1.22). Следуя [38], положим

$$f_n(x) =: w_n^{2n}(x) u^2(x), \quad x \in \Delta := [a, b]. \tag{2.4}$$

Рассмотрим экстремальную задачу (2.2) во внешнем поле

$$Q := -\ln w_n, \quad \lambda^Q =: \mu_{w_n}, \tag{2.5}$$

где через μ_{w_n} мы обозначим экстремальную меру в поле w_n. Из теоремы Гончара—Рахманова (см. [8, с. 121]) следует, что непрерывность w_n на отрезке Δ влечет слабую сходимость меры, считающей нули P_n:

$$\chi_{P_n}(x) \xrightarrow{*} \mu_{w_n}(x). \tag{2.6}$$

Таким образом, для весов, не зависящих от n, слабая сходимость (2.6) превращается в сходимость (1.3) к мере, имеющей постоянный потенциал на отрезке Δ. Также отметим, что ортогональность относительно переменных весов вида (2.4) и влияние внешнего поля на распределение нулей P_n приводят к качественно новым эффектам, когда нули P_n не заполняют весь отрезок Δ — носитель меры ортогональности, а заполняет лишь его часть $\Delta^* \subseteq \Delta$, $\Delta^* = \operatorname{supp} \mu_{w_n}$. Нетрудно доказать, что

$$w_n^2(x) = (b - x) \quad \Rightarrow \quad \Delta^* = (a^*, b^*), \quad \text{где} \quad a^* = a, \quad b^* = b - \frac{1}{9}(b - a).$$

Аналогично асимптотике корня n-й степени (1.6), для многочленов $P_n(x)$ (1.22), (2.4) в случае, когда Δ^* — отрезок, имеем

$$|P_n(x)|^{1/n} \underset{x \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta^*}{\rightrightarrows} \exp\{-V_{\mu_{w_n}}(x)\}. \tag{2.7}$$

Перейдем теперь к слабым асимптотикам типа (1.12) для ортонормированных многочленов $\{p_n\}$ с переменным весом (1.23).

Первый результат в этом направлении получил Г. Лопес Лагомасино [10, 27]. Для многочленов $p_n(x)$, ортонормированных на $\Delta = [a, b]$ относительно переменной меры

$$d\sigma_n(x) = \frac{d\sigma(x)}{|T_{2n}(x)|}, \tag{2.8}$$

где $d\sigma$ удовлетворяет условию

$$\sigma' > 0 \quad \text{п.в. на} \quad \Delta,$$

а $\{T_{2n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — произвольная последовательность многочленов таких, что

$$T_{2n}(x) := \prod_{\nu=1}^{k} (x - x_{\nu,2n}), \quad k \leqslant 2n, \quad \{x_{\nu,2n}\} \subset \widetilde{\Delta} \Subset \mathbb{R},$$

и $\widetilde{\Delta} \cap \Delta = \varnothing$, справедливо

$$p_n^2(x)\, d\sigma_n(x) \underset{n \to \infty}{\xrightarrow{*}} \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{(x - a)(b - x)}} = d\lambda(x). \tag{2.9}$$

Таким образом, переменная мера (2.8) удовлетворяет условию (1.8), и для нее сохраняется слабая асимптотика (1.12), доказанная Е. А. Рахмановым для мер из класса (1.8), не зависящих от параметра n. Однако надо отметить, что этот замечательный результат до сих пор остается единственным, устанавливающим справедливость слабой сходимости (1.12), (2.9) для общего класса переменных мер ортогональности σ, удовлетворяющих условию (1.12):

$$\sigma_n' > 0 \quad \text{п.в. на} \quad \Delta. \tag{2.10}$$

До сих пор наиболее общий класс переменных мер σ_n, сохраняющий слабую сходимость (2.9), был рассмотрен В. Тотиком в [37, 38]. Меры, составляющие этот класс, удовлетворяют следующим условиям.

- Мера σ_n сосредоточена на отрезке Δ, она абсолютно непрерывна с весом (2.4):
$$d\sigma_n(x) = f_n(x)\,dx, \quad f_n(x) = w_n^{2n}(x)u^2(x), \quad x \in \Delta := [a, b],$$
где w_n положительна и непрерывна, а u удовлетворяет условию Сегё (1.15) на Δ:
$$w_n > 0, \quad w_n \in C(\Delta), \quad u \in S(\Delta). \tag{2.11}$$
- Экстремальная мера μ_{w_n} в задаче (2.2), (2.5) абсолютно непрерывна, ее носителем является отрезок $\Delta^* := \operatorname{supp}\mu_{w_n}$,
$$d\mu_{w_n}(x) = v_n(x)\,dx, \quad x \in \Delta^* = [a^*, b^*] \subseteq \Delta,$$
в точках которого справедлива оценка для $\mu'_{w_n} = v_n$:
$$\frac{1}{A}(x-a^*)^{\beta_0}(b^*-x)^{\beta_0} \leqslant v_n(x) \leqslant A(x-a^*)^{\beta}(b^*-x)^{\beta}, \quad x \in [a^*, b^*] \tag{2.12}$$
для некоторых констант A, $\beta > -1$ и β_0.
- Носители равновесной меры μ_{w_n} и меры ортогональности σ_n должны совпадать:
$$\operatorname{supp}\mu_{w_n} := \Delta^* = \operatorname{supp}\sigma_n := \Delta. \tag{2.13}$$

При выполнении этих трех условий слабая сходимость (2.9) доказана в [37, теорема 14.1]. Отметим, что класс переменных весов (2.8) включается в класс Тотика.

В настоящей работе мы ссужаем ограничение (2.13) условий Тотика, добавляя требование:

- допускается несовпадение носителей σ_n и μ_{w_n}:
$$\Delta^* \subset \Delta.$$

В этом случае внешнее поле задачи (2.2) должно быть выпукло вниз на отрезке Δ:
$$Q := -\ln w(x): \quad Q''(x) > 0, \quad x \in \Delta. \tag{2.14}$$
Отметим, что разрешение строгого включения в $\Delta^* \subsetneq \Delta$ при выполнении условия (2.14) существенно расширяет класс Тотика. Например, условию (2.14) удовлетворяют w_n, для которых внешние поля $Q = -\ln w_n$ являются логарифмическими потенциалами мер $\tilde{\mu}$ с компактными носителями $\widetilde{\Delta}$, не пересекающимися с Δ:
$$Q = V_{\widetilde{\mu}}, \quad \operatorname{supp}\widetilde{\mu} =: \widetilde{\Delta} \Subset \mathbb{R}: \ \widetilde{\Delta} \cap \Delta = \varnothing.$$
В частности, в качестве w_n можно взять вес Лопеса—Лагамасино (2.8), но многочлен T переместить из знаменателя в числитель, при этом условие $\deg T \leqslant 2n$ можно заменить на $\exists\,\delta > 0$: $\deg T \leqslant \dfrac{1}{\delta}\,n$.

Теорема 2.1. *Пусть $\{p_n\}$ — последовательность ортонормированных многочленов* (1.23) *на отрезке* $\Delta := [a, b]$:
$$\int_\Delta p_n(x)\,p_m(x) f_n(x)\,dx = \delta_{n,m} \quad \forall\, m \leqslant n$$
с переменным весом (2.4):
$$f_n(x) = w_n^{2n}(x)u^2(x),$$
удовлетворяющим условию (2.11):
$$w_n > 0, \quad w_n \in C(\Delta), \quad \int_\Delta \frac{\ln u(x)\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} > -\infty.$$
Пусть μ_{w_n} — экстремальная мера задачи (2.2), (2.5) *с носителем* $\operatorname{supp}\mu_{w_n} = \Delta^* \subseteq \Delta$, *удовлетворяющая условию* (2.12), *причем в случае $\Delta^* \neq \Delta$ дополнительно выполняется* (2.14), *т. е. функция $\ln\dfrac{1}{w(x)}$ выпукла вниз на Δ. Тогда имеет место слабый предел*
$$p_n^2(x)\,f_n(x)\,dx \ \xrightarrow[n\to\infty]{*} \ \frac{1}{\pi}\,\frac{dx}{\sqrt{(x-a^*)(b^*-x)}}\bigg|_{\Delta^*}. \tag{2.15}$$

Заметим, что допредельные меры в левой части (2.15) и предельная мера в правой части имеют разные носители при $\Delta^* \neq \Delta$.

Доказательство теоремы 2.1 мы приведем в конце статьи. Оно существенно будет опираться на формулы сильной асимптотики Тотика, которые мы обсудим в следующем разделе.

3. Сильные асимптотики многочленов, ортогональных с переменным весом

Во введении мы сформулировали сильные асимптотики для многочленов, ортогональных относительно не зависящего от n веса f: внешнюю (1.16), старшего коэффициента (1.20) и в $L_{2,f}$ норме на Δ. Приведем аналогичные формулы из [37] для переменного веса f_n, удовлетворяющего условиям Тотика (2.11), (2.12), (2.13). Одновременно приводимые формулы Тотика будем преобразовывать к удобному для нас виду.

Для внешней асимптотики ортонормированных с переменным весом f_n на $\Delta = [a, b]$ многочленов имеем (см. [37, теорема 14.3])

$$p_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Phi_\Delta^n(z) \left(D_{\mathring{f}}(z)\right)^{-1} (1 + o(1)), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta = \Omega. \tag{3.1}$$

Напомним, что D_f — функция Сегё, определялась в (1.17) краевой задачей:

$$D_f: \quad \begin{cases} D_f, D_f^{-1} \in H(\Omega), \\ |D_f|^2 = f \quad \text{на} \quad \Delta, \\ D_f(\infty) > 0. \end{cases}$$

Тригонометрический вес (см. (1.18)) $\mathring{f}(x) := \sqrt{(x-a)(b-x)}\, f(x)$, а Φ_Δ есть функция, отображающая Ω во внешность единичного круга, которая также определялась в (1.7) через комплексный потенциал $\mathcal{V}_\lambda$ равновесной без внешнего поля меры λ:

$$\Phi_\Delta(z) := \alpha_\Delta \exp\{-\mathcal{V}_\lambda(z)\}, \quad \Phi_\Delta(\infty) = \alpha_\Delta\, z + \dots, \quad \alpha_\Delta = e^{\omega_\Delta} > 0.$$

Аналогично, с учетом (2.3), определим функцию

$$\Phi_{\Delta,w_n}(z) := \exp\left\{-V_{\mu_{w_n}}(z) + \omega_n\right\}, \quad \Phi_{\Delta,w_n}(\infty) = \alpha_{\Delta,w_n}\, z + \dots. \tag{3.2}$$

Модули обеих функций, ввиду соотношений равновесия (1.5) и (2.3), удовлетворяют краевым условиям:

$$|\Phi_\Delta| = 1, \quad |\Phi_{\Delta,w_n}| = w_n \quad \text{на} \quad \Delta,$$

здесь также учли (2.13). Заметим, что функция

$$\mathcal{D} := \frac{\Phi_{\Delta,w_n} D_{w_n^2}}{\Phi_\Delta} \equiv 1. \tag{3.3}$$

Действительно, она удовлетворяет краевой задаче:

$$\mathcal{D}: \quad \begin{cases} \mathcal{D}, \mathcal{D}^{-1} \in H(\mathbb{C} \setminus \Delta), \\ |\mathcal{D}| = 1 \quad \text{на} \quad \Delta, \quad \mathcal{D}(\infty) > 0. \end{cases}$$

Отсюда, применяя к $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^{-1}$ принцип максимума модуля, заключаем, что $\mathcal{D} \equiv 1$, и с учетом мультипликативности функции Сегё

$$D_{\mathring{f}_n} = D_{w_n^{2n}} D_{u^2} D_{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

получаем

Предложение 3.1. *Формула* (3.1) *из* [37, теорема 14.3] *при* $n \to \infty$ *эквивалентна формуле*

$$p_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \Phi_{\Delta,w_n}^n(z) \left[D^{-1}_{u^2\sqrt{(x-a)(b-x)}}(z) + o(1)\right]. \tag{3.4}$$

Теперь обратимся к формуле для асимптотики старшего коэффициента γ_n для ортонормированного с весом f_n многочлена p_n. Имеем (см. [37, теорема 13.1])

$$\gamma_n = \frac{2^n(1 + o(1))}{\sqrt{\pi} G(w_n)^n G(u)}, \tag{3.5}$$

где

$$G(f) := \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\ln f(x)\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\right\}.$$

Сравнив выражение для $G(f)$ с явным видом (1.19) для функции Сегё $D_f(z)$, заключаем, что

$$G(f) = D_{f^2}(\infty),$$

и, следовательно, с учетом (3.3),

$$G(w_n) = D_{w_n^2}(\infty) = \Phi_\Delta(\infty)/\Phi_{\Delta,w_n}(\infty) = 2\alpha_{\Delta,w_n},$$

получаем

Предложение 3.2. *Формула* (3.5) *из* [37, теорема 13.1] *при* $n\to\infty$ *эквивалентна формуле*

$$\gamma_n = \frac{(1+o(1))}{\alpha^n_{\Delta,w_n}\sqrt{\pi}D_{u^2}(\infty)}. \tag{3.6}$$

Можем сформулировать следующее следствие предложений 3.1 и 3.2.

Следствие 3.1. *Для многочленов* $P_n(z) = z^n + \dots$, *ортогональных с весом* f_n, *справедливо*

$$P_n(z) = \frac{1}{\gamma_n}p_n(z) = \left(\alpha_{\Delta,w_n}\Phi_{\Delta,w_n}(z)\right)^n\left(F_\Delta(z)+o(1)\right) \quad \text{при} \quad n\to\infty, \tag{3.7}$$

равномерно на компактах $K\Subset\Omega$, *где* F_Δ — *нормированная функция Сегё* (1.17):

$$F_\Delta(z) := \frac{D_{\mathring{u}^2}(\infty)}{D_{\mathring{u}^2}(z)}, \quad \mathring{u}^2(x) = \sqrt{(x-a)(b-x)}\,u^2(x). \tag{3.8}$$

Наконец, рассмотрим асимптотику на отрезке Δ в норме $L_2[-1,1]$. Справедливо (см. [37, теорема 14.2]) при $n\to\infty$

$$\left\|p_n(x)w_n^n(x)u(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos\left((n+1/2)\arccos x - \pi/4 + n\Gamma_{w_n}(x)+\Gamma_u(x)\right)}{\sqrt[4]{(x-a)(b-x)}}\right\|_{L_2[-1,1]} = o(1), \tag{3.9}$$

где

$$\Gamma_f(x) = \frac{1}{\pi}\int_\Delta \frac{\ln f(\xi)-\ln f(x)}{\xi - x}\left(\frac{(x-a)(b-x)}{(\xi-a)(b-\xi)}\right)^{1/2}d\xi.$$

Запишем эту формулу применительно к многочленам $P_n(x)$ со старшим коэффициентом 1. Имеем на Δ

$$p_n w_n^n u = \frac{P_n\gamma_n u}{|\Phi_{\Delta,w_n}|^n} \simeq \frac{P_n}{|\alpha_{\Delta,w_n}\Phi_{\Delta,w_n}|^n}\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{u}{D_{u^2}(\infty)},$$

откуда при $n\to\infty$ получаем

$$\left\|\frac{P_n(x)}{|\alpha_{\Delta,w_n}\Phi_{\Delta,w_n}(x)|^n} - \frac{\sqrt{2}D_{u^2}(\infty)}{u\sqrt[4]{(x-a)(b-x)}}\cos\left((n+\frac{1}{2})\arccos x - \frac{\pi}{4} + n\Gamma_{w_n}(x)+\Gamma_u(x)\right)\right\|_{L_{2,u^2}[a,b]} = o(1).$$

Заметим, что из (3.8) следует

$$\frac{\sqrt{2}\,D_{u^2}(\infty)}{u(x)\sqrt[4]{(x-a)(b-x)}} = 2|F_\Delta(x)|,$$

а из (3.3) имеем

$$\arccos x + \Gamma_{w_n}(x) = \arg\left(x+\sqrt{1-x^2}\right) - \arg D_{w_n^2} = \arg\Phi_{\Delta,w_n}(x),$$

$$\frac{1}{2}\arccos x - \frac{\pi}{4} + \Gamma_u(x) = \arg F_\Delta.$$

Таким образом, справедливо

Предложение 3.3. *Для эквивалентных формулам* (3.9) *на отрезке* $[a,b]$ *имеем при* $n\to\infty$

$$\left\|\frac{P_n(x)}{|\alpha_{\Delta,w_n}\Phi_{\Delta,w_n}(x)|^n}-\mathcal{F}_{\Delta,w_n}(x)\right\|_{L_{2,u^2}[a,b]}=o(1) \tag{3.10}$$

где

$$\mathcal{F}_{\Delta,w_n}(x):=\left(\frac{\Phi_{\Delta,w_n}(x)}{|\Phi_{\Delta,w_n}(x)|}\right)^n F_\Delta(x)+\overline{\left(\frac{\Phi_{\Delta,w_n}(x)}{|\Phi_{\Delta,w_n}(x)|}\right)^n F_\Delta(x)}. \tag{3.11}$$

4. Асимптотики при наличии зон сталкивания равновесной меры

В этом разделе мы сформулируем и докажем асимптотики для многочленов, ортогональных с переменными весами, не удовлетворяющими условию (2.13), которое при этом заменяется на (2.14). Справедлива

Теорема 4.1. *Пусть* $P_n(x)=x^n+\dots$, $n\in\mathbb{Z}_+$ — *последовательность многочленов, ортогональных на отрезке* Δ *с переменным весом* $f_n:=w_n^{2n}u^2$, *удовлетворяющим условиям теоремы* 2.1, *т. е.* (2.11), (2.12) *выполнены, а вместо* (2.13) *требуется* (2.14): *выпуклость вниз поля* $Q=-\ln w_n(z)$ *в экстремальной задаче для равновесной меры* μ_{w_n}. *Тогда*

$$\left\|\frac{P_n(x)}{|\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)|^n}-\mathcal{F}_{\Delta^*,w_n}(x)\right\|_{L_{2,u^2}(\Delta^*)}=o(1). \tag{4.1}$$

Замечание 4.1. В случае невыполнения (2.13) условие (2.14) обеспечивает то, что носитель μ_{w_n} является отрезком $\Delta^*=[a^*,b^*]$, не совпадающим с отрезком Δ, носителем меры ортогональности $d\sigma_n(x)=f_n(x)\,dx$:

$$\Delta\setminus\Delta^*=\varnothing.$$

Поэтому, в отличие от (3.10), норма L_{2,u^2} берется на отрезке $\Delta^*\subset\Delta$, и все функции, определяющие в (4.1) асимптотику, строятся по ограничению переменного веса на носитель равновесной меры:

$$f_n|_{\Delta^*}=\chi_{\Delta_n}f_n.$$

Действительно, выпуклость внешнего поля (2.14) влечет строгое неравенство на $\Delta\setminus\Delta^*$ в соотношениях равновесия (2.3):

$$V_{\mu_{w_n}}(x)-\ln w_n(x)\begin{cases}=\omega_n, & x\in\Delta^*:=\operatorname{supp}\mu_{w_n},\\ >\omega_n, & x\in\Delta\setminus\Delta^*.\end{cases} \tag{4.2}$$

Так как соотношения равновесия единственным образом определяют меру μ_{w_n} и константу равновесия ω_n, то мера μ_{w_n} является экстремальной мерой для задач (4.2), рассмотренных на любом отрезке $\widetilde{\Delta}$: $\Delta^*\subseteq\widetilde{\Delta}\subseteq\Delta$ с внешним полем $-\ln w_n|_{\widetilde{\Delta}}$. Тем самым, для любого многочлена $\widetilde{P}_n(x)=x^n+\dots$, ортогонального на $\widetilde{\Delta}$ с весом $f_n|_{\widetilde{\Delta}}$, по теореме Гончара—Рахманова (см. (2.6), (2.7)) имеем

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\widetilde{P}_n(x)}{|\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)|^n}\right\|^2_{L_{2,u^2}(\Delta\setminus\Delta^*)}&\simeq\left\|\frac{P_n(x)}{|\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)|^n}\right\|^2_{L_{2,u^2}(\Delta\setminus\Delta^*)}\simeq O\left(e^{-2n(V_{\mu_{w_n}}+\omega_n)}w_n^{2n}\right)\simeq\\ &\simeq O(\delta^n),\quad \exists\,\delta\in(0,1).\end{aligned} \tag{4.3}$$

В том числе (4.3) справедливо и для $\widetilde{P}_n=:P_n^*$, ортогонального на Δ^* с весом $f_n|_{\Delta^*}$. Кроме того, для этого многочлена P_n^* ввиду [37, теорема 14.2] и предложения 3.3 имеем

$$\left\|\frac{P_n^*(x)}{|\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)|^n}-\mathcal{F}_{\Delta^*,w_n}(x)\right\|_{L_{2,u^2}(\Delta^*)}=o(1). \tag{4.4}$$

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы 4.1.

Доказательство теоремы 4.1. Мы будем следовать подходу из [1, 2, 15, 17, 39]. Распишем левую часть (4.1):

$$\left\|\frac{P_n(x)}{|\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)|^n}-\mathcal{F}_{\Delta^*,w_n}(x)\right\|^2_{L_{2,u^2}(\Delta^*)}=$$
$$=\int\limits_{\Delta^*}\frac{P_n^2(x)\,u^2(x)\,dx}{|\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)|^{2n}}-2\mathrm{Re}\int\limits_{\Delta^*}\frac{P_n(x)}{|\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)|^n}\overline{\mathcal{F}_{\Delta^*,w_n}(x)}\,u^2(x)dx+\int\limits_{\Delta^*}|\mathcal{F}_{\Delta^*,w_n}(x)|^2\,u^2dx=$$
$$=:I_1(P_n)-2\mathrm{Re}\,I_2(P_n)+I_3. \tag{4.5}$$

Рассмотрим $I_1(P_n)$. С учетом соотношений равновесия (2.3), (3.2) на Δ^* имеем

$$I_1(P_n)=\int\limits_{\Delta^*}\frac{P_n^2(x)\,w_n^{2n}u^2(x)\,dx}{\alpha^{2n}_{\Delta^*,w_n}}=\int\limits_{\Delta}\frac{P_n^2(x)\,f_n(x)\,dx}{\alpha^{2n}_{\Delta^*,w_n}}-\int\limits_{\Delta\setminus\Delta^*}\frac{P_n^2(x)\,f_n(x)\,dx}{\alpha^{2n}_{\Delta^*,w_n}}=:I_{1,1}(P_n)-I_{1,2}(P_n).$$

Экстремальное свойство ортогональных многочленов (*monic*) дает

$$I_{1,1}(P_n)\leqslant I_{1,1}(P_n^*),$$

при этом ввиду (4.3) существует $\delta\in(0,1)$ такое, что

$$I_{1,2}(P_n)\simeq I_{1,2}(P_n^*)=O(\delta^n).$$

Таким образом,

$$I_1(P_n)\lesssim I_1(P_n^*). \tag{4.6}$$

Перейдем к $I_2(P_n)$. Имеем

$$I_2(P_n)=\int\limits_{\Delta^*}\frac{P_n(x)}{|\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)|^n}\left\{\overline{\left(\frac{\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)}{|\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)|}\right)^n\mathcal{F}_{\Delta^*}(x)}+\left(\frac{\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)}{|\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)|}\right)^n\mathcal{F}_{\Delta^*}(x)\right\}u^2(x)dx=$$
$$=\int\limits_{\Delta^*}\frac{P_n(x)}{(\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x))^n_{(+)}}\overline{(\mathcal{F}_{\Delta^*}(x))_{(+)}}\,u^2(x)dx+\int\limits_{\Delta^*}\frac{P_n(x)}{(\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x))^n_{(-)}}\overline{(\mathcal{F}_{\Delta^*}(x))_{(-)}}\,u^2(x)dx=$$
$$=\oint\limits_{\Delta^*}\frac{P_n(\xi)}{(\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(\xi))^n}\,\overline{(\mathcal{F}_{\Delta^*}(\xi))}\,u^2(\xi)\,|d\xi|,$$

где через $(\Psi(\xi))_{(+/-)}$ обозначены верхние/нижние предельные граничные значения функции $\Psi(\xi)$, $\xi=x\pm iy$, $y\to\infty$. Обратимся к воспроизводящему свойству нормированной функции Сегё (3.8), (1.17) (см. [39, с. 165]):

$$\forall\,H(z)\in H_{2,\rho}(\overline{\mathbb{C}}\setminus\Delta^*),\quad H(\infty)=\frac{1}{\nu}\oint\limits_{\Delta^*}H(\xi)\overline{F(\xi)}\rho(\xi)|d\xi|,$$

где

$$\nu=\oint\limits_{\Delta^*}|F(\xi)|^2\rho(\xi)|d\xi|,\quad F(z):=\frac{D_{\mathring{\rho}}(\infty)}{D_{\mathring{\rho}}(z)},\quad \begin{cases} D_{\mathring{\rho}},D_{\mathring{\rho}}^{-1}\in H(\overline{\mathbb{C}}\setminus\Delta^*),\\ |D_{\mathring{\rho}}|^2=\rho\sqrt{(x-a^*)(b^*-x)}\quad\text{на}\quad\Delta^*,\\ D_{\mathring{\rho}}(\infty)>0.\end{cases}$$

Отсюда (так как $\Phi_{\Delta^*,w_n}(z)$ имеет непрерывные граничные значения на Δ^*, и полагая $\rho:=u^2$) получаем

$$I_2(P_n)=\frac{P_n(\infty)}{(\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(\infty))^n}\,\nu=\nu.$$

Следовательно, так как $P_n^*(z)$ — тоже многочлен, со старшим коэффициентом единица (*monic*), получаем

$$I_2(P_n)=I_2(P_n^*). \tag{4.7}$$

В итоге, подставляя (4.7) и (4.6) в (4.5), получаем

$$\left\|\frac{P_n(x)}{|\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)|^n}-\mathcal{F}_{\Delta^*,w_n}(x)\right\|_{L_{2,u^2}(\Delta^*)}\lesssim\left\|\frac{P_n^*(x)}{|\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)|^n}-\mathcal{F}_{\Delta^*,w_n}(x)\right\|_{L_{2,u^2}(\Delta^*)},$$

что с учетом (4.4) доказывает теорему. □

Обратимся теперь к асимптотике старшего коэффициента ортонормированного относительно переменного веса многочлена в случае, когда условие (2.13) заменяется условием (2.14).

Теорема 4.2. *В условиях теоремы* 2.1 *имеет место следующая асимптотика старшего коэффициента* (3.6):

$$\gamma_n = \frac{1+o(1)}{\alpha_{\Delta^*,w_n}\sqrt{\pi}\,D_{u^2}(\infty)}. \tag{4.8}$$

Доказательство теоремы 4.2. Справедливость теоремы сразу следует из (3.6) и экстремального свойства ортогональных многочленов. Имеем

$$\frac{1}{\alpha^{2n}_{\Delta^*,w_n}\gamma_n^2} = \frac{1}{\alpha^{2n}_{\Delta^*,w_n}}\int\limits_{\Delta} P_n^2(x)\,w_n^{2n}u^2(x)\,dx \leqslant \frac{1}{\alpha^{2n}_{\Delta^*,w_n}}\int\limits_{\Delta}\left(P_n^*(x)\right)^2\,w_n^{2n}u^2(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_{\Delta}\frac{\left(P_n^*(x)\right)^2u^2(x)\,dx}{\alpha^{2n}_{\Delta^*,w_n}\left|\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)\right|^{2n}} \simeq \frac{1}{\alpha^{2n}_{\Delta^*,w_n}}\int\limits_{\Delta^*}\left(P_n^*(x)\right)^2\,w_n^{2n}u^2(x)\,dx.$$

Теорема доказана. □

Перейдем к равномерной асимптотике ортогональных относительно переменного веса многочленов вне носителя равновесной меры Δ^* в случае замены (2.13) на (2.14).

Теорема 4.3. *В условиях теоремы* 2.1 *имеет место внешняя асимптотика*

$$\frac{P_n(z)}{\left(\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(z)\right)^n} \rightrightarrows F_{\Delta^*}(z) \quad \textit{равномерно по} \quad z\in K\Subset\overline{\mathbb{C}}\setminus\Delta^*. \tag{4.9}$$

Доказательство теоремы 4.3. Так как многочлены P_n и P_n^* имеют одинаковую L_{2,u^2}-асимптотику на Δ^* (см. (4.4) и (4.1)), имеем

$$\left\|\frac{P_n(x)-P_n^*(x)}{\left(\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)\right)^n}\right\|_{L_{2,u^2}(\Delta^*)} = o(1).$$

Отсюда с помощью интегральной формулы Коши можно получить

$$\left\|\frac{P_n(x)-P_n^*(x)}{\left(\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)\right)^n}\right\|_{C(K)} = o(1), \quad K\Subset\overline{\mathbb{C}}\setminus\Delta^*,$$

что с учетом следствия 3.1 (см. (3.7)) дает (4.9). Теорема доказана. □

Наконец, приведем доказательство теоремы 2.1.

Доказательство теоремы 2.1. Для упрощения обозначений (не ограничивая общности) мы будем считать, что $\Delta^* := [-1,1]\subset\Delta$. Из [37, теорема 14.2], см. (3.9), и предложения 3.3, см. (3.10), вытекает

$$\left\|p_n(x)f_n^{1/2}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}\cos\Big(n\arg\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)+\arg F_{\Delta^*}(x)\Big)\right\|_{L_{2,u^2}(\Delta^*)} = o(1).$$

Отсюда по неравенству треугольника $\forall h\in C(\Delta^*)$ получаем

$$\int\limits_{\Delta^*}p_n^2(x)f_n(x)h(x)\,dx-\frac{2}{\pi}\int\limits_{\Delta^*}\frac{h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\cos^2\Big(n\arg\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)+\arg F_{\Delta^*}(x)\Big) = o(1).$$

Ввиду (4.3) в полученном выражении первый интеграл можно расширить на все Δ. Во втором интеграле сделаем замену

$$\arg\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)=\theta, \quad \frac{d\arg\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)}{dx}=d\theta,$$
$$x=\Psi(\theta), \quad dx=\Psi'(\theta)\,d\theta.$$

В результате имеем

$$\int\limits_{\Delta} p_n^2(x) f_n(x) h(x)\,dx \simeq \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{h(\Psi(\theta))}{\sqrt{1-\Psi^2(\theta)}} \cos^2\Big(n\theta+\widetilde{\gamma}(\theta)\Big)\Psi'(\theta)\,d\theta, \quad \widetilde{\gamma}(\theta) := \arg\Big(F_{\Delta^*}(x(\theta))\Big).$$

Воспользуемся леммой:

Лемма 4.1 (см. [3, лемма 2.1]). *Пусть* $g \in C(\mathbb{R})$, $g(\theta+\pi) = g(\theta)$, $H \in L^1(0,\pi)$, $\widetilde{\gamma} < \mathrm{const}$ *п.в. на* $[0,\pi]$. *Тогда при* $n \to \infty$ *справедливо*

$$\int\limits_0^{\pi} g(n\theta+\gamma)H(\theta)\,d\theta \to \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} g(\theta)\,d\theta \int\limits_0^{\pi} H(\theta)\,d\theta.$$

Таким образом, при $n \to \infty$

$$\int\limits_{\Delta} p_n^2(x)\, f_n(x)\, h(x)\,dx \to \frac{2}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi} \frac{h(\Psi(\theta))\Psi'(\theta)\,d\theta}{\sqrt{1-\Psi^2(\theta)}} \int\limits_0^{\pi} \cos^2(\theta)\,d\theta.$$

Последний интеграл равен $\pi/2$, а в оставшемся интеграле делаем обратную замену. В итоге получаем

$$\int\limits_{\Delta} p_n^2(x)\, f_n(x)\, h(x)\,dx \to \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad n \to \infty.$$

Теорема 2.1 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аптекарев А.И.* Асимптотика полиномов совместной ортогональности в случае Анджелеско// Мат. сб. — 1988. — *136*, № 1. — С. 56–84.
2. *Аптекарев А.И.* Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для систем Никишина// Мат. сб. — 1999. — *190*, № 5. — С. 3–44.
3. *Аптекарев А.И., Буяров В.С., Дегеза И.С.* Асимптотическое поведение L_p-норм и энтропии для общих ортогональных многочленов// Мат. сб. — 1994. — *185*, № 8. — С. 3–30.
4. *Аптекарев А.И., Денисов С.А., Ятцелев М.Л.* Дискретный оператор Шрёдингера на графе-дереве, потенциалы Анжелеско и их возмущения// Тр. МИАН. — 2020. — *311*. — С. 5–13.
5. *Аптекарев А.И., Лысов В.Г.* Многоуровневая интерполяция системы Никишина и ограниченность матриц Якоби на бинарном дереве// Усп. мат. наук. — 2021. — *76*, № 4. — С. 179–180.
6. *Бернштейн С.Н.* О многочленах, ортогональных на конечном отрезке// В сб.: «Собрание сочинений. Т. 2. Конструктивная теория функций [1931–1953]». — М.: Изд-во АН СССР, 1954. — С. 7–106.
7. *Гончар А.А.* О скорости рациональной аппроксимации некоторых аналитических функций// Мат. сб. — 1978. — *105*, № 2. — С. 147–163.
8. *Гончар А.А., Рахманов Е.А.* О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа// Тр. МИАН. — 1981. — *157*. — С. 31–48.
9. *Гончар А.А., Рахманов Е.А.* Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов// Мат. сб. — 1984. — *125*, № 1. — С. 117–127.
10. *Лопес Г.Л.* Об асимптотике отношения ортогональных многочленов и сходимости многоточечных аппроксимаций Паде// Мат. сб. — 1985. — *128*, № 2. — С. 216–228.
11. *Никишин Е.М., Сорокин В.Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. — М.: Наука, 1988.
12. *Рахманов Е.А.* Об асимптотике отношения ортогональных многочленов// Мат. сб. — 1977. — *103*, № 2. — С. 237–252.
13. *Рахманов Е.А.* Об асимптотике отношения ортогональных многочленов. II// Мат. сб. — 1982. — *118*, № 1. — С. 104–117.
14. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. — М.: Физматгиз, 1962.
15. *Aptekarev A.I.* Asymptotics of simultaneously orthogonal polynomials in the Angelesco case// Sb. Math. — 1989. — *64*, № 1. — С. 57–84.
16. *Aptekarev A.I.* Multiple orthogonal polynomials// J. Comput. Appl. Math. — 1998. — *99*, № 1-2. — С. 423–447.
17. *Aptekarev A.I.* Strong asymptotics of multiply orthogonal polynomials for Nikishin systems// Sb. Math. — 1999. — *190*, № 5. — С. 631–669.

18. *Aptekarev A. I., Buyarov V. S., Dehesa J. S.* Asymptotic behavior of the L_p-norms and the entropy for general orthogonal polynomials// Russian Acad. Sci. Sb. Math. — 1995. — *82*, № 2. — С. 373–395.
19. *Aptekarev A. I., Denisov S. A., Yattselev M. L.* Discrete Schrödinger operator on a tree, Angelesco potentials, and their perturbations// Proc. Steklov Inst. Math. — 2020. — *311*. — С. 1–9.
20. *Aptekarev A. I., Denisov S. A., Yattselev M. L.* Self-adjoint Jacobi matrices on trees and multiple orthogonal polynomials// Trans. Am. Math. Soc. — 2020. — *373*, № 2. — С. 875–917.
21. *Aptekarev A. I., Lysov V. G.* Multilevel interpolation of a Nikishin system and boundedness of the Jacobi matrices on a binary tree// Russ. Math. Surv. — 2021. — *76*. — DOI: 10.1070/RM10017.
22. *Avni N., Breuer J., Simon B.* Periodic Jacobi matrices on trees// Adv. Math. — 2020. — *370*. — 107241.
23. *Deift P.* Orthogonal polynomials and random matrices: a Riemann—Hilbert approach. — Providence: Am. Math. Soc., 1999.
24. *Gonchar A. A.* On the speed of rational approximation of some analytic functionss// Sb. Math. — 1978. — *34*, № 2. — С. 131–145.
25. *Gonchar A. A., Rakhmanov E. A.* On the convergence of simultaneous Pade approximants for systems of functions of Markov type// Proc. Steklov Inst. Math. — 1983. — *157*. — С. 31–50.
26. *Gonchar A. A., Rakhmanov E. A.* Equilibrium measure and the distribution of zeros of extremal polynomials// Sb. Math. — 1986. — *53*, № 1. — С. 119–130.
27. *Lopes G. L.* On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials and convergence of multipoint Padé approximants// Sb. Math. — 1987. — *56*, № 1. — С. 207–219.
28. *Lubinsky D. S., Mhaskar H. N., Saff E. B.* A proof of Freud's conjecture for exponential weights// Constructive Approx. — 1988. — *4*. — С. 65–83.
29. *Mhaskar H. N., Saff E. B.* Extremal problems for polynomials with exponential weights// Trans. Am. Math. Soc. — 1984. — *285*. — С. 203–234.
30. *Muscalu C., Tao T., Thiele C.* Multi-linear multipliers associated to simplexes of arbitrary length// ArXiv. — 2007. — 0712.2420 [math.CA].
31. *Nikishin E. M., Sorokin V. N.* Rational approximations and orthogonality. — Providence: Am. Math. Soc., 1991.
32. *Rakhmanov E. A.* On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials// Sb. Math. — 1977. — *32*, № 2. — С. 199–213.
33. *Rakhmanov E. A.* On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials. II// Sb. Math. — 1983. — *46*, № 3. — С. 105–117.
34. *Saff E. B., Totik V.* Logarithmic potentials with external fields. — Berlin: Springer, 1997.
35. *Stahl H., Totik V.* General orthogonal polynomials. — New York: Cambridge University Press, 1992.
36. *Szegö G.* Orthogonal polynomials. — Providence: Am. Math. Soc., 1939.
37. *Totik V.* Weighted approximation with varying weight. — New York: Springer, 1994.
38. *Totik V.* Othogonal polynomials with respect to varying weights// J. Comput. Appl. Math. — 1998. — *99*, № 1-2. — С. 373–385.
39. *Widom H.* Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane// Adv. Math. — 1969. — *3*. — С. 127–232.

А. И. Аптекарев
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия
E-mail: aptekaa@keldysh.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-427-441 UDC 517.53

Weak and Strong Asymptotics of Orthogonal Polynomials with «Varying» Weight

© 2021 **A. I. Aptekarev**

Abstract. We consider sequences of orthogonal polynomials with varying weights, i.e., depending on the number of the polynomial. We obtain extensions of applicability classes of well-known asymptotic formulas for large numbers.

REFERENCES

1. A. I. Aptekarev, "Asimptotika polinomov sovmestnoy ortogonal'nosti v sluchae Andzhelesko" [Asymptotics of simultaneously orthogonal polynomials in the Angelesco case], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1988, **136**, No. 1, 56–84 (in Russian).
2. A. I. Aptekarev, "Sil'naya asimptotika mnogochlenov sovmestnoy ortogonal'nosti dlya sistem Nikishina" [Strong asymptotics of multiply orthogonal polynomials for Nikishin systems], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1999, **190**, No. 5, 3–44 (in Russian).
3. A. I. Aptekarev, V. S. Buyarov, and I. S. Degeza, "Asimptoticheskoe povedenie L_p-norm i entropii dlya obshchikh ortogonal'nykh mnogochlenov" [Asymptotic behavior of the L_p-norms and the entropy for general orthogonal polynomials], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1994, **185**, No. 8, 3–30 (in Russian).
4. A. I. Aptekarev, S. A. Denisov, and M. L. Yattselev, "Diskretnyy operator Shredingera na grafe-dereve, potentsialy Anzhelesko i ikh vozmushcheniya" [Discrete Schrödinger operator on a tree, Angelesco potentials, and their perturbations], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2020, **311**, 5–13 (in Russian).
5. A. I. Aptekarev and V. G. Lysov, "Mnogourovnevaya interpolyatsiya sistemy Nikishina i ogranichennost' matrits Yakobi na binarnom dereve" [Multilevel interpolation of a Nikishin system and boundedness of the Jacobi matrices on a binary tree], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2021, **76**, No. 4, 179–180 (in Russian).
6. S. N. Bernshteyn, "O mnogochlenakh, ortogonal'nykh na konechnom otrezke" [On orthogonal polynomials on a finite segment], In: *Sobranie sochineniy. T. 2. Konstruktivnaya teoriya funktsiy [1931–1953]* [Collected Works. Vol. 2. Constructive Function Theory [1931–1953]], AN SSSR, Moscow, 1954, pp. 7–106 (in Russian).
7. A. A. Gonchar, "O skorosti ratsional'noy approksimatsii nekotorykh analiticheskikh funktsiy" [On the speed of rational approximation of some analytic functions], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1978, **105**, No. 2, 147–163 (in Russian).
8. A. A. Gonchar and E. A. Rakhmanov, "O skhodimosti sovmestnykh approksimatsiy Pade dlya sistem funktsiy markovskogo tipa" [On the convergence of simultaneous Pade approximations for systems of functions of Markov type], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1981, **157**, 31–48 (in Russian).
9. A. A. Gonchar and E. A. Rakhmanov, "Ravnovesnaya mera i raspredelenie nuley ekstremal'nykh mnogochlenov" [Equilibrium measure and the distribution of zeros of extremal polynomials], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1984, **125**, No. 1, 117–127 (in Russian).
10. G. L. Lopes, "Ob asimptotike otnosheniya ortogonal'nykh mnogochlenov i skhodimosti mnogotochechnykh approksimatsiy Pade" [On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials and convergence of multipoint Padé approximations], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1985, **128**, No. 2, 216–228 (in Russian).
11. E. M. Nikishin and V. N. Sorokin, *Ratsional'nye approksimatsii i ortogonal'nost'* [Rational Approximations and Orthogonality], Nauka, Moscow, 1988 (in Russian).
12. E. A. Rakhmanov, "Ob asimptotike otnosheniya ortogonal'nykh mnogochlenov" [On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1977, **103**, No. 2, 237–252 (in Russian).

13. E. A. Rakhmanov, “Ob asimptotike otnosheniya ortogonal’nykh mnogochlenov. II” [On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials. II], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1982, **118**, No. 1, 104–117 (in Russian).
14. G. Szegö, *Ortogonal’nye mnogochleny* [Orthogonal Polynomials], Fizmatgiz, Moscow, 1962 (Russian translation).
15. A. I. Aptekarev, “Asymptotics of simultaneously orthogonal polynomials in the Angelesco case,” *Sb. Math.*, 1989, **64**, No. 1, 57–84.
16. A. I. Aptekarev, “Multiple orthogonal polynomials,” *J. Comput. Appl. Math.*, 1998, **99**, No. 1-2, 423–447.
17. A. I. Aptekarev, “Strong asymptotics of multiply orthogonal polynomials for Nikishin systems,” *Sb. Math.*, 1999, **190**, No. 5, 631–669.
18. A. I. Aptekarev, V. S. Buyarov, and J. S. Dehesa, “Asymptotic behavior of the L_p-norms and the entropy for general orthogonal polynomials,” *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 1995, **82**, No. 2, 373–395.
19. A. I. Aptekarev, S. A. Denisov, and M. L. Yattselev, “Discrete Schrödinger operator on a tree, Angelesco potentials, and their perturbations,” *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2020, **311**, 1–9.
20. A. I. Aptekarev, S. A. Denisov, and M. L. Yattselev, “Self-adjoint Jacobi matrices on trees and multiple orthogonal polynomials,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 2020, **373**, No. 2, 875–917.
21. A. I. Aptekarev and V. G. Lysov, “Multilevel interpolation of a Nikishin system and boundedness of the Jacobi matrices on a binary tree,” *Russ. Math. Surv.*, 2021, **76**, DOI: 10.1070/RM10017.
22. N. Avni, J. Breuer, and B. Simon, “Periodic Jacobi matrices on trees,” *Adv. Math.*, 2020, **370**, 107241.
23. P. Deift, *Orthogonal polynomials and random matrices: a Riemann—Hilbert approach*, Am. Math. Soc., Providence, 1999.
24. A. A. Gonchar, “On the speed of rational approximation of some analytic functions,” *Sb. Math.*, 1978, **34**, No. 2, 131–145.
25. A. A. Gonchar and E. A. Rakhmanov, “On the convergence of simultaneous Pade approximants for systems of functions of Markov type,” *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1983, **157**, 31–50.
26. A. A. Gonchar and E. A. Rakhmanov, “Equilibrium measure and the distribution of zeros of extremal polynomials,” *Sb. Math.*, 1986, **53**, No. 1, 119–130.
27. G. L. Lopes, “On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials and convergence of multipoint Padé approximants,” *Sb. Math.*, 1987, **56**, No. 1, 207–219.
28. D. S. Lubinsky, H. N. Mhaskar and E. B. Saff, “A proof of Freud’s conjecture for exponential weights,” *Constructive Approx.*, 1988, **4**, 65–83.
29. H. N. Mhaskar and E. B. Saff, “Extremal problems for polynomials with exponential weights,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1984, **285**, 203–234.
30. C. Muscalu, T. Tao, and C. Thiele, “Multi-linear multipliers associated to simplexes of arbitrary length,” *ArXiv*, 2007, 0712.2420 [math.CA].
31. E. M. Nikishin and V. N. Sorokin, *Rational Approximations and Orthogonality*, Am. Math. Soc., Providence, 1991.
32. E. A. Rakhmanov, “On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials,” *Sb. Math.*, 1977, **32**, No. 2, 199–213.
33. E. A. Rakhmanov, “On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials. II,” *Sb. Math.*, 1983, **46**, No. 3, 105–117.
34. E. B. Saff and V. Totik, *Logarithmic Potentials with External Fields*, Springer, Berlin, 1997.
35. H. Stahl and V. Totik, *General Orthogonal Polynomials*, Cambridge University Press, New York, 1992.
36. G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, Am. Math. Soc., Providence, 1939.
37. V. Totik, *Weighted Approximation with Varying Weight*, Springer, New York, 1994.
38. V. Totik, “Othogonal polynomials with respect to varying weights,” *J. Comput. Appl. Math.*, 1998, **99**, No. 1-2, 373–385.
39. H. Widom, “Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane,” *Adv. Math.*, 1969, **3**, 127–232.

A. I. Aptekarev
Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
E-mail: aptekaa@keldysh.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 3 (2021). С. 442–454
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-442-454 УДК 519.63

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТЕФАНА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РАСЧЕТАМ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОЛЬФРАМА ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

© 2021 г. **Д. Е. АПУШКИНСКАЯ, Г. Г. ЛАЗАРЕВА**

Аннотация. В работе представлено численное решение задачи Стефана для расчета температуры образца вольфрама, нагреваемого лазерным импульсом. Математическое моделирование проводится для анализа натурных экспериментов, где наблюдается мгновенный нагрев пластинки до 9000 K за счет воздействия на её поверхность теплового потока и последующее охлаждение. Задача характеризуется нелинейными коэффициентами и граничными условиями. Важную роль играет учет испарения металла с нагреваемой поверхности. Для реализации выбран метод сплошного счета с использованием формулировки уравнения теплопроводности в единообразной форме во всей области с применением дельта-функции Дирака, основанный на подходе А. А. Самарского. Численный метод имеет второй порядок аппроксимации по пространству, интервал сглаживания коэффициентов составляет 5 K. В результате получены распределения температуры на поверхности и в поперечном сечении образца в процессе охлаждения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Явления плавления и затвердевания имеют место в разнообразных природных и технологических процессах, от таяния айсбергов в полярных морях или застывания вулканической лавы до производства мороженого или стали. Главной особенностью этих процессов являются априорно неизвестные, как правило, движущиеся границы раздела фаз. Такие границы принято называть *свободными*.

Для того, чтобы произошел фазовый переход материала из твердого состояния в жидкое, необходимо подвести к образцу тепловую энергию для разрыва связей, удерживающих ионы в кристаллической решетке. При обратном переходе из жидкого агрегатного состояния в твердое энергия берется из жидкой фазы и направляется на замедление движения ионов и дальнейшей их организации в стабильную решетчатую структуру.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект № 19-01-00422.

Этот интуитивно простой физический процесс описывается математически с помощью классической задачи о фазовых переходах, так называемой задачи Стефана. Решение такой задачи заключается в нахождении поля температур и определении координат границ раздела фаз.

Первые подробные исследования задачи Стефана были проделаны в работах французских ученых Г. Ламе и Б. П. Клапейрона [24] и словенского физика и металлурга Й. Стефана [28], имя которого и получила задача. Обе публикации были посвящены процессу эволюции льда в полярных морях. Качественный скачок в изучении задачи Стефана произошел в середине 70-х годов XX века, когда задачи со свободными границами выделились в отдельный раздел математики (см. [9] и приведенную там библиографию). В 1973 году Г. Дюво [15] осуществил редукцию многомерной однофазной задачи Стефана к параболическому вариационному неравенству. Это позволило значительно упростить доказательство теоремы о существовании и единственности обобщенных решений, а также получить ряд аналитических результатов о качественных свойствах решений и свободных границ [11–13, 18]. Вариационная формулировка также была установлена и для двухфазной задачи Стефана [17], но полученные результаты по свойствам свободных границ в двухфазном случае оказались слабее, чем в однофазном. Отметим также, что псевдопараболические вариационные неравенства облегчили создание численных методов для решения задач Стефана в многомерных случаях [22, 23].

Помимо аналитических методов, при решении однофазной и двухфазной задач Стефана широко используются методы конечных элементов [4], конечных разностей [30] и интегральные методы [1]. Возможно использование конечно-разностных методов на адаптивной *quadtree* сетке, что приводит к значительному повышению точности вблизи границ раздела фаз [26]. Некоторые из указанных численных методов входят в специальные математические пакеты. Вычислительные комплексы ANSYS FLUENT, STAR-CD, PHOENICS, развивающиеся в течении последних 30 лет, основаны на эффективных численных алгоритмах, обладают удобным интерфейсом и мощными графическими средствами для визуализации результатов. В случае существенного вклада не только диффузионного, но и конвекционного переноса тепла определяется поле скоростей в жидкой фазе, получаемое из решения уравнения Навье—Стокса (см., например, [14, 19, 21]).

Сложность решаемых инженерных задач ограничена практически только характеристиками компьютера пользователя. Тем не менее, новые поисковые исследовательские задачи требуют построения алгоритмов и программ для моделирования процессов с новыми наборами коэффициентов и их соотношений. В этом случае используются два подхода к численному решению. Первый подход состоит в явном выделении расположения границ между фазами. Точное определение ячейки или узла, через которые проходит межфазная граница, часто реализуется с использованием неравномерных и/или динамических сеток [2]. Наиболее известны метод ловли границы в узел пространственной сетки (*variable time stepping*) и метод выпрямления фронтов (*front-fixing method*). Второй подход состоит в использовании методов сквозного счета, при использовании которых начально-краевая задача решается во всей расчетной области без выделения области фазового перехода. При решении ряда многомерных задач Стефана исключение детального вычисления координат границ между фазами становится основным преимуществом. Реализация таких методов состоит в изменении формы записи исходного уравнения и сглаживания разрывных коэффициентов [3, 5, 6]. Такой подход предпочтителен в случае решения задач, не требующих высокой точности вычисления координат свободных границ. Дополнительных усилий требует минимизация влияния значений параметров сглаживания на погрешность численного решения. В популярных инженерных пакетах программ, основанных на конечно-объемных методах, часто используются методы сквозного счета функций уровня (*level set method*) и фазового поля (*phase field method*). Выполнение закона сохранения тепла гарантируется использованием консервативных разностных схем.

В настоящей работе представлены метод и результаты моделирования с помощью двухфазной задачи Стефана процесса плавления и испарения вольфрама при облучении его импульсным электронным пучком. Сравнение экспериментально измеренной на установке BETA (см. [29]) зависимости радиуса расплавленной области от времени с расчетными данными, полученными одним из методов сквозного счета, показало хорошее соответствие. Представленная модель позволяет правильно интерпретировать процессы нагрева, испарения и остывания при импульсном тепловом воздействии, что дает необходимые и важные результаты для развития ITER и других экспериментальных термоядерных реакторов.

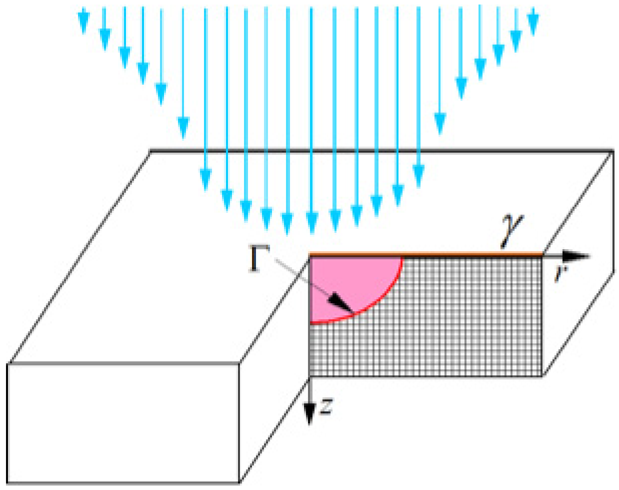


Рис. 1. Схема вольфрамовой мишени с вырезанной четвертью. Голубыми стрелками обозначено направление воздействия импульсного излучения лазера. Область расплава вольфрама выделена розовым цветом, Γ — свободная граница между жидкой и твердой фазами, γ — область теплового воздействия.

2. Постановка задачи

В качестве материала для конструирования диверторных пластин установки ITER предлагается вольфрам, который имеет температуру плавления $T_m = 3695$ К. На экспериментальном стенде Beam of Electrons for materials Test Applications (BETA), созданного в ИЯФ СО РАН [29], проводилось натурное моделирование нагрева вольфрамовой мишени мощным осесимметричным субмиллисекундным пучком электронов [27]. Образец (прямоугольный параллелепипед) имел размеры 25 мм $\times$ 25 мм и типичную толщину 4 мм. В экспериментах происходил мгновенный нагрев пластинки до 9000 К за счет воздействия на её поверхность теплового потока и последующее охлаждение. Распределение плотности мощности нагрева измерялось с помощью рентгеновской визуализации [7]. Именно сочетание высоких плотности мощности воздействия и скорости нагрева привело к необходимости создания новых моделей и программ.

Для расчета распространения температуры с нагреваемой поверхности вглубь образца решается задача Стефана в аксиально-симметричной постановке. Поскольку импульсное воздействие лазера на образец продолжалось несколько десятков микросекунд, то образец нагревался на глубину несколько сотен микрон. Поэтому в качестве области моделирования мы выбираем поперечное сечение образца (см. заштрихованный прямоугольник на рис. 1), т. е. рассматриваем двумерную область

$$\mathcal{D} := \{(r,z) : r \in [r_0, r_{max}],\ z \in [z_0, z_{max}]\}, \tag{2.1}$$

где $r_0 = z_0 = 0$, $r_{max} = 12$ мм, $z_{max} = 3$ мм. Обозначим через γ часть внешней границы $\partial\mathcal{D}$ области $\mathcal{D}$, которая подвергается тепловому воздействию. Свободную границу между расплавом и твердым вольфрамом обозначим через Γ (см. рис. 1). Тогда задача Стефана принимает вид:

$$\begin{cases} c(T)\rho(T)\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(T)\dfrac{\partial T}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T)\dfrac{\partial T}{\partial z}\right) \quad \text{в } \mathcal{D}, \\ (\mathbf{n}, \nabla T)\big|_{\gamma} = \dfrac{W(t,r) - N(t,r)}{\lambda(T)}, \\ (\mathbf{n}, \nabla T) = 0 \qquad \text{на } \partial\mathcal{D} \setminus \gamma, \\ T = T_0 \qquad \text{при } t = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $T(t,r,z)$ — температура, $c(T)$ — удельная теплоемкость, $\rho(T)$ — плотность, $\lambda(T)$ — теплопроводность, $W(t,r)$ — мощность теплового потока на γ, $N(t,r)$ — мощность испарения на γ, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к $\partial\mathcal{D}$, а T_0 — начальная температура.

Распределение мощности по поверхности теплового потока задается формулой

$$W(t,r) = W_{\max}(t)\exp\{-Ar^2\}, \qquad A = 0{,}03088523\,\text{мм}^{-2}, \tag{2.3}$$

а значение $W_{\max}$ определено экспериментально. Так как распределение (2.3) близко к нормальному, то вблизи оси симметрии особенностей решения системы (2.2) не возникает, как и в других задачах такого типа.

На границе контакта твердой и жидкой сред температура предполагается непрерывной. Кроме того, поскольку фазовый переход сопровождается выделением/поглощением определенного количества тепла, то тепловой поток на границе фазового перехода будет разрывен и равен произведению энтальпии фазового перехода на нормальную компоненту скорости движения границы раздела фаз. Таким образом, условия на свободной границе Γ имеют вид

$$[T]\big|_{\Gamma} = 0, \qquad \left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial t}\right]\bigg|_{\Gamma} = L_m v_n, \tag{2.4}$$

где L_m — энтальпия фазового перехода, а v_n — нормальная составляющая скорости движения границы фазового перехода.

3. Численное моделирование

Напомним, что нагреваемый образец имел размеры 25 мм $\times$ 25 мм и толщину 4 мм, а область моделирования представляла собой поперечное сечение образца размером 12 мм $\times$ 3 мм (см. рис. 1). Что касается времени, то численное моделирование продолжалось до того момента, когда было произведено последнее измерение температуры поверхности.

Для удобства вычислений, в уравнениях (2.2)–(2.4) был выполнен переход к безразмерным переменным, определенным следующим образом:

$$r^* = \frac{r}{r_0}, \quad \lambda^* = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad c^* = \frac{c}{c_0}, \quad t^* = \frac{t}{t_0} = \frac{\lambda_0 t}{\rho_0 c_0 r_0^2}, \quad T^* = \frac{T}{T_0}, \quad W^* = \frac{\lambda_0 T_0 W}{r_0},$$

где r_0, λ_0, ρ_0, c_0 и T_0 — это характерные значения параметров, которые приведены в таблице 1.

Таблица 1

Параметр	Типичное значение	Ед. измерения
r_0	10^{-1}	мм
t_0	10^{2}	мкс
λ_0	10^{-1}	Вт/мм $\cdot$ К
ρ_0	10^{-5}	кг/мм^3
c_0	10^{8}	Вт $\cdot$ мкс/кг $\cdot$ К
T_0	10^{3}	К
W_0	10^{3}	Вт/мм^2

Точнее говоря, мы, не меняя обозначений, считаем величины в уравнениях (2.2)–(2.4) безразмерными, а для получения результатов в физических величинах после проведения необходимых вычислений домножаем результаты на соответствующие характерные значения параметров.

Для построения эффективного вычислительного алгоритма чрезвычайно важное значение имеет тот факт, что задача Стефана допускает обобщенную формулировку (см. [5]), при которой условия (2.4) на свободной границе включаются в первое из уравнений (2.2). Затем коэффициенты полученного уравнения сглаживаются (см. [3]). В результате происходит исключение вычисления координат свободных границ и уравнение теплопроводности во всей области формулируется в единообразной форме с применением дельта-функции Дирака. Точнее говоря, в первом из уравнений (2.2) в множителе при производной по времени появляется дополнительное слагаемое, содержащее теплоту плавления

$$L_m = 51{,}1 \cdot 10^5\ \frac{\text{Вт}\cdot\text{мкс}}{\text{мм}^3},$$

действующую на интервале сглаживания, и уравнение теплопроводности принимает вид:

$$(c(T)\rho(T) + L_m\delta(T,\varepsilon))\,\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right). \tag{3.1}$$

Здесь множитель $\delta(T,\varepsilon)$ действует на узком интервале сглаживания $[T_m-\varepsilon, T_m+\varepsilon]$, $\varepsilon = 5\,\mathrm{K}$, и вычисляется следующим образом:

$$\delta(T,\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}, & |T-T_m| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & |T-T_m| > \varepsilon. \end{cases}$$

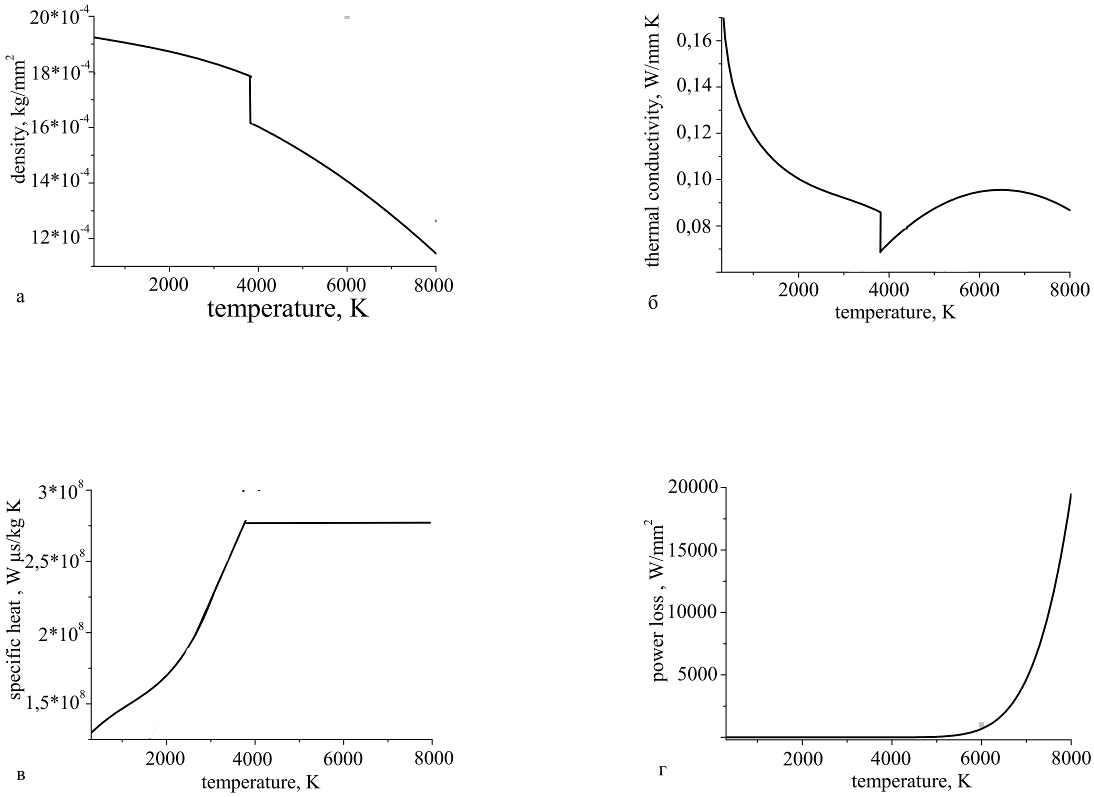


Рис. 2. Графики зависимости от температуры плотности испарения (а), теплопроводности (б), удельной теплоемкости (в), мощности испарения (г), которые использовались при численном моделировании.

Заметим, что измерение теплофизических характеристик тугоплавких металлов является сложной задачей. Многие справочники и статьи дают приблизительные или теоретически предсказанные зависимости с оценкой точности менее 10%. Поэтому плотность $\rho(T)$ (см. рис. 2а), теплопроводность $\lambda(T)$ (см. рис. 2б), удельная теплоемкость $c(T)$ (см. рис. 2в) и мощность поверхностного испарения $N(t)$ (см. рис. 2г), стоящие в коэффициентах уравнения (3.1), учитывались согласно зависимостям от температуры материала в диапазоне $300\,\mathrm{K} \leqslant T \leqslant 8000\,\mathrm{K}$. Все эти функции имеют разрывы или теряют гладкость при температуре плавления вольфрама $T_m = 3695\,\mathrm{K}$.

Зависимости от температуры для теплопроводности $\lambda(T)$ и теплоемкости $c(T)$ твердого вольфрама взяты из [16]. Оценки теплопроводности жидкого вольфрама взяты из работ [20, 27]. Зависимость теплопроводности от температуры была скорректирована в процессе моделирования [25].

В двумерной области $\mathcal{D}$ (см. определение (2.1)) была введена равномерная прямоугольная сетка. Размер расчетной области соответствует размерам образцов, но постановка задачи в цилиндрической геометрии предполагает рассмотрение пластинки в форме шайбы. Такое предположение не вносит существенного влияния на результат, так как распределение мощности по поверхности теплового потока имеет максимальные значения в центре образца и убывает пропорционально радиусу. Разогрев образца происходит в центре пластинки и не достигает ее краев. Образец прогревается на глубину, не превышающую 1 мм. Таким образом основное внимание при расчете должно быть уделено граничным условиям на нагреваемой поверхности и на оси симметрии.

Граничное условие на нагреваемой поверхности γ (второе из уравнений (2.2)) в цилиндрической геометрии принимает вид

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{W(t,r) - N(t,r)}{\lambda(T)}.$$

Оно зависит от трех нелинейных коэффициентов.

Напомним, что распределение мощности по поверхности теплового потока задается формулой (2.3), где $A = 1/a^2 = 0{,}03088523$ мм$^{-2}$ — постоянная, характеризующая величину радиуса пучка a, который имеет одно значение для каждой серии экспериментов и используется при расчете граничного условия для задачи (2.2). На каждом временном шаге численного моделирования значение переменной $W_{\max}(t)$ берется из файла экспериментальных данных, индивидуального для каждого эксперимента.

Потеря мощности на процесс испарения учитывается в виде

$$N(T\big|_\gamma) = L_e \frac{1}{S}\frac{dm}{dt},$$

где $\dfrac{1}{S}\dfrac{dm}{dt}$ — скорость испарения массы m на единицу площади поверхности S, а L_e — энтальпия парообразования. Потеря мощности рассчитывается по следующим формулам:

$$\begin{gathered} L_e = 4{,}482 \cdot 10^{12} \ \frac{\text{Вт} \cdot \text{мкс}}{\text{кг}}, \\ \frac{1}{S}\frac{dm}{dt} = P(T\big|_\gamma)\sqrt{\frac{M}{2\pi R T\big|_\gamma}} = \exp\left(26{,}19104 - \frac{83971{,}3\ \text{K}}{T\big|_\gamma}\right)\sqrt{\frac{0{,}184\,\text{K}}{2\pi 8{,}314 T\big|_\gamma}} \cdot 10^{-12} \ \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2 \cdot \text{мкс}}. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Здесь $T\big|_\gamma$ — температура на поверхности γ, R — универсальная газовая постоянная, а $P(T\big|_\gamma)$ — давление насыщенного пара. Вывод уравнения (3.2) и обоснование пренебрежения излучением температуры поверхностью в энергетическом балансе более подробно представлены в работе [29].

Поскольку уравнение теплопроводности (3.1) традиционно аппроксимируется со вторым порядком точности по пространству, граничное условие на оси $\left.\dfrac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0} = 0$ в цилиндрической системе координат целесообразно аппроксимировать с тем же порядком точности следующим образом. Если значение во втором узле по радиусу разложить в ряд Тейлора

$$T_{2k}^{n+1} = T_{1k}^{n+1} + h\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0}^{n+1} + \frac{h^2}{2}\left.\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right|_{r=0}^{n+1} + O(h^3),$$

то граничное условие на оси можно представить в виде:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0}^{n+1} = \frac{T_{2k}^{n+1} - T_{1k}^{n+1}}{h} - \frac{h}{2}\left.\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right|_{r=0}^{n+1} + O(h^2). \tag{3.3}$$

Далее из уравнения (3.1) можно выразить вторую производную по радиусу:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \left(c(T)\rho(T) + L_m\delta(T,\varepsilon)\right)\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right). \tag{3.4}$$

Расписав левую часть уравнения (3.4) в виде

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right), \tag{3.5}$$

заметим, что вблизи оси симметрии решение практически постоянно, а теплопроводность $\lambda(T)$ ограничена. Поэтому применив к первому слагаемому в правой части (3.5) правило Лопиталя

$$\lim_{r\to 0}\left(\frac{1}{r}\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right),$$

получим

$$2\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\left(c(T)\rho(T)+L_m\delta(T,\varepsilon)\right)\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right).$$

Из последнего соотношения следует равенство

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}=\frac{1}{2\lambda(T)}\left(\left(c(T)\rho(T)+L_m\delta(T,\varepsilon)\right)\frac{\partial T}{\partial t}-2\frac{\partial\lambda(T)}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right),$$

которое после подстановки в граничное условие (3.3) дает выражение

$$\left(1-2\frac{\partial\lambda(T)}{\partial r}\right)\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=0}^{n+1}=\frac{T_{2k}^{n+1}-T_{1k}^{n+1}}{h}-\frac{h}{4\lambda(T)}\left(c(T)\rho(T)+L_m\delta(T,\varepsilon)\right)\frac{\partial T}{\partial t}\bigg|_{r=0}^{n+1}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right)\bigg|_{r=0}^{n+1}+O(h^2).$$

Таким образом, итоговая система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases}
\dfrac{T_{ik}^{n+1}-T_{ik}^{n}}{\tau}=\dfrac{1}{r_ih^2C_{ik}^n}\left[r_{i+1/2}L_{ik}^n\left(T_{i+1\,k}^{n+1}-T_{ik}^{n+1}\right)-r_{i-1/2}L_{ik}^n\left(T_{ik}^{n+1}-T_{i-1\,k}^{n+1}\right)\right]+\\
\qquad+\dfrac{1}{C_{ik}^n}\left[L_{ik+1/2}^n\left(T_{i\,k+1}^{n+1}-T_{ik}^{n+1}\right)-L_{ik-1/2}^n\left(T_{ik}^{n+1}-T_{i\,k-1}^{n+1}\right)\right],\\
C_{ik}^n=c(T_{ik}^n)\rho(T_{ik}^n)+L_m\delta(T_{ik}^n,\varepsilon),\\
L_{ik}^n=\lambda(T_{ik}^n),\\
\dfrac{T_{i,3}^{n+1}-4T_{i,2}^{n+1}+3T_{i,1}^{n+1}}{2h}=\dfrac{W_i^{n+1}-N_i^{n+1}}{L_{i,1}^{n+1}},\\
W_i^{n+1}=W_{\max}(t^{n+1})\exp\left(-Ar_i^2\right),\\
\dfrac{T_{i,N_z-2}^{n+1}-4T_{i,N_z}^{n+1}+3T_{i,N_z-1}^{n+1}}{2h}=0,\\
\dfrac{T_{2k}^{n+1}-T_{1k}^{n+1}}{h}-\dfrac{h}{4L_{1k}^n}\left\{C_{1k}^n\dfrac{T_{2k}^{n+1}-T_{2k}^n}{\tau}+\dfrac{1}{h}\left(L_{1\,k+1/2}^n\left(T_{i\,k+1}^{n+1}-T_{ik}^n\right)-\right.\right.\\
\qquad\left.\left.-L_{1\,k-1/2}^n\left(T_{ik}^{n+1}-T_{i\,k-1}^{n+1}\right)\right)\right\}=0,\\
\dfrac{T_{N_r-2,k}^{n+1}-4T_{N_r,k}^{n+1}+3T_{N_r-1,k}^{n+1}}{2h}=0,\\
T_{ik}^0=T_0.
\end{cases}\tag{3.6}$$

Здесь индексы i и k принимают соответственно значения $i=2,\ldots,N_r-1$ и $k=2,\ldots,N_z-1$.

Предложенная схема решения (3.6) имеет второй порядок аппроксимации по пространству и позволяет не выделять границу фазовых превращений. Расчет температуры во внутренних точках расчетной области реализуется с использованием схемы, стабилизирующей поправки, и метода прогонки [8], а коэффициенты рассчитываются по значениям температуры с предыдущего слоя. Уравнение теплопроводности (3.1) имеет дивергентный вид, что позволяет использовать консервативные схемы. Решение системы (3.6) с постоянными коэффициентами протестировано на известных аналитических решениях, с переменными коэффициентами протестировано на экспериментальных данных. При тестировании также учитывался известный факт, что разогрев образца вольфрама с плотностью мощности 10^3 Вт/мм^2 в течение 1000 мкс приводит к разогреву образца до 2000 К.

Предложенный алгоритм экономичен и прост в реализации, может быть использован для моделирования плавления других тугоплавких металлов.

4. Результаты численных расчетов

На основе схемы (3.6) производился расчет распределения температуры в поперечном сечении вольфрамовой пластинки. Таким образом учитывался прогрев вглубь материала, что и определяло температуру на поверхности наряду с падающей энергией и испарением, которые задаются граничным условием. Угловая симметрия лазерного импульса определяла угловую симметрию распределения температуры. Мгновенный нагрев пластинки до 9000 K за счет воздействия на её поверхность теплового потока и последующее охлаждение сопровождались возникновением и исчезновением области расплава (см. рис. 3).

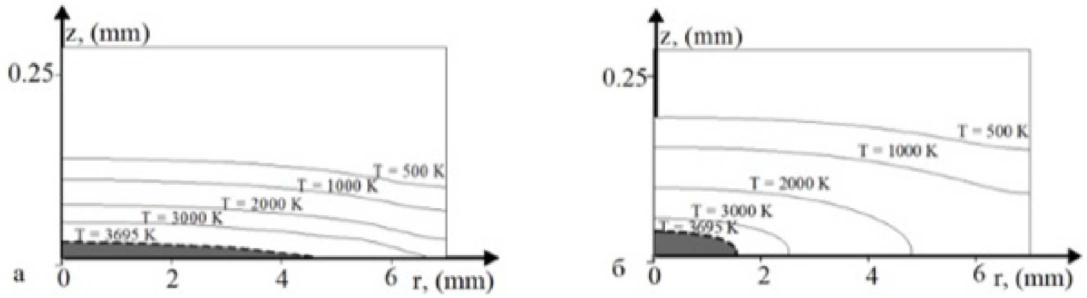


Рис. 3. Изолинии температуры в поперечном сечении образца в процессе охлаждения в моменты времени 80 мкс (а) и 160 мкс (б), изолиния при температуре плавления выделена пунктиром, область расплава серым цветом.

Область расплава в расчетах определяется по изолинии температуры, которая соответствует температуре плавления. На рис. 3 приведены изолинии температуры для типичного эксперимента. Изолиния, соответствующая температуре плавления, на рис. 3 выделена пунктиром, а область расплава отмечена серым цветом. Расчетная область на рисунке сильно растянута в осевом направлении, так как глубина прогрева мала по сравнению с радиусом расплава. На рис. 3а видно, что расплав в процессе нагрева в момент времени 80 мкс от момента начала воздействия имеет радиус около 4,5 мм и глубину около 0,02 мм. В процессе охлаждения (см. рис. 3б) область расплава сужается до 1,5 мм, но прогрев вглубь пластинки продолжается, глубина расплавленной области увеличивается в два раза к моменту времени 160 мкс. Сравнение других изолиний на рис. 3а и 3б показывает, что в два раза увеличивается глубина разогретой области. Можно сделать вывод, что во время поверхностного охлаждения происходит разогрев вглубь пластинки, что означает смену знака скорости разогрева.

Область расплава и температуру поверхности возможно фиксировать в ходе экспериментов. Например, анализ влияния испарения на процесс нагрева был проведен на основе измерений радиуса расплавленной области [10]. Результаты расчетов показали полное совпадение динамики расчетного и экспериментального радиуса расплава в случае учета испарения на границе пластинки вольфрама. Из экспериментальных данных известно, что за счет постоянного процесса испарения образец не разогревается выше 9000 K. Процесс испарения вносит свой вклад в разогрев вещества начиная с 2000 K, то есть при температурах много ниже температуры плавления.

На рис. 4а представлена временная зависимость максимума плотности мощности нагрева электронным пучком, которая является входными данными для расчета выстрелов 679, 680 и 681. На рис. 4б представлены графики температуры поверхности для этих экспериментов. Моменты, для которых выводятся результаты расчета, соответствуют времени измерения. Эти моменты времени на графике 4а обозначены заштрихованными прямоугольниками, ширина основания которых равна времени экспозиции измерительного прибора. Графики используются при анализе измерений и планировании экспериментов.

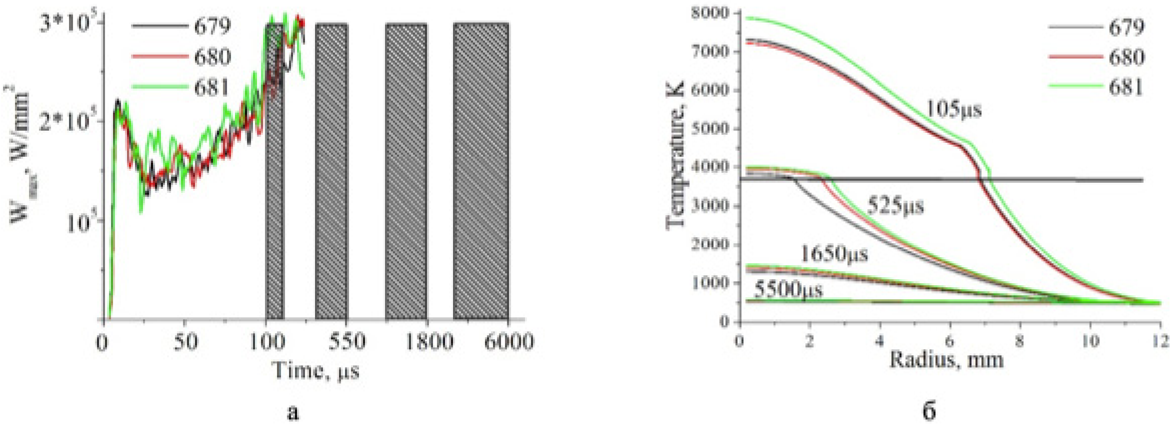


Рис. 4. Динамика плотности мощности в центре зоны воздействия и моменты измерения (а), графики температуры поверхности (б). Данные приведены для выстрелов 679, 680 и 681.

Результаты расчета радиального распределения температуры по поверхности образца (рис. 4) полностью согласуются с экспериментальными данными и аналитическими оценками из работы [10].

Разработка дискретной модели позволяет проводить расчеты для экспериментов с большим временем задержки между измерениями и большим временем экспозиции. На рис. 4а показаны моменты измерения 100–110 мкс, 500–550 мкс, 1500–1800 мкс, 5000–6000 мкс для со временем экспозиции 10, 50, 300 и 1000 мкс. То есть первый калибровочный кадр был сделан в интервале от 100 до 110 мкс со временем экспозиции 10 мкс.

Графики температуры поверхности были рассчитаны для моментов времени 105 мкс, 525 мкс, 1650 мкс и 5500 мкс (рис. 4б). Например, первый калибровочный кадр был сделан в интервале от 100 до 110 мкс со временем экспозиции 10 мкс, соответствующий ему расчет был сделан для момента времени 105 мкс. Продолжительность нагрева составила 124 мкс, 132 мкс и 130 мкс при воздействиях 679, 680 и 681 соответственно. Небольшие отличия результатов обусловлены разной энергией и длительностью воздействия. В результате нагрева температура образцов приближается к 8000 K. После окончания воздействия материал остывает, температура поверхности снижается до 4000 K, глубина распространения тепла в объеме образца составляет менее четверти миллиметра. На графике прямая линия в точке плавления показывает площадь расплава.

Из многочисленных контрпримеров хорошо известно, что вторые производные от температуры T по пространственным переменным r и z, так же как и первая производная от T по времени, могут иметь скачок на свободной границе. Подчеркнем, что графики на рис. 4б как раз показывают изменение характера температурной кривой в точках раздела расплава и твердой фазы, что является следствием свойств решения задачи Стефана (2.2). Спад ожидаемой кривизны обусловлен в первую очередь потерями энергии на испарение.

5. Выводы

Представленное численное решение задачи Стефана для расчета температуры образца вольфрама, нагреваемого импульсным электронным пучком, показывает хорошее соответствие как с результатами натурного эксперимента, так и с аналитическими фактами теории задач со свободными границами.

Разработанный алгоритм решения задачи Стефана в дальнейшем послужит основой для расчета тока в образце, который рассматривается как возможный источник наблюдаемого в эксперименте вращения вещества. Предложенный алгоритм отличается простотой и экономичностью. Он может быть применен к моделированию процесса плавления других тугоплавких металлов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнян Р. В.* Интегральные уравнения задачи Стефана и их приложение при моделировании оттаивания грунта// В сб.: «Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н. Э. Баумана». — М.: МГТУ, 2015. — № 10. — С. 347–419.
2. *Бреславский П. В., Мажукин В. И.* Алгоритм численного решения гидродинамического варианта задачи Стефана при помощи динамически адаптирующихся сеток// Мат. модел. — 1991. — *3*, № 10. — С. 104–115.
3. *Будак Б. М., Соловьева Е. Н., Успенский А. Б.* Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задач Стефана// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1965. — *5*, № 5. — С. 828–840.
4. *Лаевский М. Ю., Калинкин А. А.* Двухтемпературная модель гидратосодержащей породы// Мат. модел. — 2010. — *22*, № 4. — С. 23–31.
5. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Вычислительная теплопередача. — М.: Едиториал УРСС, 2003.
6. *Самарский А. А., Моисеенко Б. Д.* Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1965. — *5*, № 5. — С. 816–827.
7. *Талуц С. Г.* Экспериментальное исследование теплофизических свойств переходных металлов и сплавов на основе железа при высоких температурах// Дисс. д.ф.-м.н. — Екатеринбург, 2001.
8. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. — Новосибирск: Наука, 1967.
9. *Apushkinskaya D.* Free boundary problems. Regularity properties near the fixed boundary. — Cham: Springer, 2018.
10. *Arakcheev A. S., Apushkinskaya D. E., Kandaurov I. V., Kasatov A. A., Kurkuchekov V. V., Lazareva G. G., Maksimova A. G., Popov V. A., Snytnikov A. V., Trunev Yu. A., Vasilyev A. A., Vyacheslavov L. N.* Two-dimensional numerical simulation of tungsten melting under pulsed electron beam// Fusion Eng. Design. — 2018. — *132*. — С. 13–17.
11. *Caffarelli L. A.* The smoothness of the free surface in a filtration problem// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1976. — *63*. — С. 77–86.
12. *Caffarelli L. A.* The regularity of elliptic and parabolic free boundaries// Bull. Am. Math. Soc. — 1976. — *82*. — С. 616–618.
13. *Caffarelli L. A.* The regularity of free boundaries in higher dimensions// Acta Math. — 1977. — *139*, № 3-4. — С. 155–184.
14. *Chen H., Min C., Gibou F.* A numerical scheme for the Stefan problem on adaptive Cartesian grids with supralinear convergence rate// J. Comp. Phys. — 2009. — *228*. — С. 5803–5818.
15. *Duvaut G.* Résolution d'un problème de Stefan (fusion d'un bloc de glace à zéro degré)// C. R. Math. Acad. Sci. Paris. — 1973. — *276*. — С. 1461–1463.
16. *Davis J. W., Smith P. D.* ITER material properties handbook// J. Nucl. Mater. — 1996. — *233*. — С. 1593–1596.
17. *Duvaut G.* Two phases Stefan problem with varying specific heat coefficients// An. Acad. Brasil. Ciênc. — 1975. — *47*. — С. 377–380.
18. *Friedman A., Kinderlehrer D.* A one phase Stefan problem// Indiana Univ. Math. J. — 1975. — *25*, № 11. — С. 1005-1035.
19. *Groot R.* Second order front tracking algorithm for Stefan problem on a regular grid// J. Comp. Phys. — 2018. — *372*. — С. 956–971.
20. *Ho C. Y., Powell R. W., Liley P. E.* Thermal conductivity of elements// J. Phys. Chem. Ref. Data. — 1972. — *1*. — С. 279.
21. *Huang J. M., Shelley M., Stein D.* A stable and accurate scheme for solving the Stefan problem coupled with natural convection using the immersed boundary smooth extension method// J. Comp. Phys. — 2021. — *432*. — 110162.
22. *Ichikawa Y., Kikuchi N.* A one-phase multi-dimensional Stefan problem by the method of variational inequalities// Internat. J. Numer. Methods Engrg. — 1979. — sl 14. — С. 1197–1220.
23. *Ichikawa Y., Kikuchi N.* Numerical methods for a two-phase Stefan problem by variational inequalities// Internat. J. Numer. Methods Engrg. — 1979. — sl 14. — С. 1221–1239.
24. *Lamé G., Clapeyron B. P.* Mémoire sur la solidification parrefroidissement d'um globe solide// Ann. Chem. Phys. — 1831. — *47*. — С. 250–256.
25. *Lazareva G. G., Arakcheev A. S., Kandaurov I. V., Kasatov A. A., Kurkuchekov V. V., Maksimova A. G., Popov V. A., Shoshin A. A., Snytnikov A. V., Trunev Yu. A., Vasilyev A. A., Vyacheslavov L. N.* Calculation of heat sink around cracks formed under pulsed heat load// J. Phys. Conf. Ser. — 2017. — *894*. — 012120.
26. *Oberman A. M., Zwiers I.* Adaptive finite difference methods for nonlinear elliptic and parabolic partial defferential equations with free boundaries// J. Sci. Comput. — 2012. — *68*. — С. 231–251.

27. *Pottlacher G.* Thermal conductivity of pulse-heated liquid metals at melting and in the liquid phase// J. Non-Crystal. Solids. — 1999. — *250*. — С. 177–181.
28. *Stefan J.* Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere// Sitzungsber. Österreich. Akad. Wiss. Math. Naturwiss. Kl. Abt. 2, Math. Astron. Phys. Meteorol. Tech. — 1889. — *98*. — С. 965–983.
29. *Vyacheslavov L., Arakcheev A., Burdakov A., Kandaurov I., Kasatov A., Kurkuchekov V., Mekler K., Popov V., Shoshin A., Skovorodin D., Trunev Y., Vasilyev A.* Novel electron beam based test facility for observation of dynamics of tungsten erosion under intense ELM-like heat loads// AIP Conf. Proc. — 2016. — *1771*. — 060004.
30. *Wu Z.-C., Wang Q.-C.* Numerical approach to Stefan problem in a two-region and limited space// Thermal Sci. — 2012. — *16*, № 5. — С. 1325–1330.

Д. Е. Апушкинская
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: apushkinskaya_de@pfur.ru

Г. Г. Лазарева
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: lazareva_gg@pfur.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-442-454 UDC 519.63

Algorithm for the Numerical Solution of the Stefan Problem and Its Application to Calculations of the Temperature of Tungsten under Impulse Action

© 2021 **D. E. Apushkinskaya, G. G. Lazareva**

Abstract. In this paper, we present the numerical solution of the Stefan problem to calculate the temperature of the tungsten sample heated by the laser pulse. Mathematical modeling is carried out to analyze field experiments, where an instantaneous heating of the plate to 9000 K is observed due to the effect of a heat flow on its surface and subsequent cooling. The problem is characterized by nonlinear coefficients and boundary conditions. An important role is played by the evaporation of the metal from the heated surface. Basing on Samarskii's approach, we choose to implement the method of continuous counting considering the heat conductivity equation in a uniform form in the entire domain using the Dirac delta function. The numerical method has the second order of approximation with respect to space, the interval of smoothing of the coefficients is 5 K. As a result, we obtain the temperature distributions on the surface and in the cross section of the sample during cooling.

REFERENCES

1. R. V. Arutyunyan, "Integral'nye uravneniya zadachi Stefana i ikh prilozhenie pri modelirovanii ottaivaniya grunta" [Integral equations of the Stefan problem and their application in modeling of soil thawing], In: *Nauka i obrazovanie* [Science and Education], MGTU, Moscow, 2015, No. 10, 347–419 (in Russian).
2. P. V. Breslavskiy and V. I. Mazhukin, "Algoritm chislennogo resheniya gidrodinamicheskogo varianta zadachi Stefana pri pomoshchi dinamicheski adaptiruyushchikhsya setok" [Algorithm for numerical solution of the hydrodynamic version of the Stefan problem using dynamically adapting grids], *Mat. model.* [Math. Model.], 1991, **3**, No. 10, 104–115 (in Russian).

3. B. M. Budak, E. N. Solov'eva, and A. B. Uspenskiy, "Raznostnyy metod so sglazhivaniem koeffitsientov dlya resheniya zadach Stefana" [Difference method with smoothing of coefficients for solving Stefan's problems], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 1965, **5**, No. 5, 828–840 (in Russian).
4. M. Yu. Laevskiy and A. A. Kalinkin, "Dvukhtemperaturnaya model' gidratosoderzhashchey porody" [Two-temperature model of a hydrate-bearing rock], *Mat. model.* [Math. Model.], 2010, **22**, No. 4, 23–31 (in Russian).
5. A. A. Samarskii and P. N. Vabishchevich, *Vychislitel'naya teploperedacha* [Computational Heat Transfer], URSS, Moscow, 2003 (in Russian).
6. A. A. Samarskii and B. D. Moiseenko, "Ekonomichnaya skhema skvoznogo scheta dlya mnogomernoy zadachi Stefana" [Economical pass-through numerical scheme for multidimensional Stefan problem], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 1965, **5**, No. 5, 816–827 (in Russian).
7. S. G. Taluts, "Eksperimental'noe issledovanie teplofizicheskikh svoystv perekhodnykh metallov i splavov na osnove zheleza pri vysokikh temperaturakh" [Experimental study of thermophysical properties of transition metals and iron-based alloys at high temperatures], *Doctoral Thesis*, Ekaterinburg, 2001 (in Russian).
8. N. N. Yanenko, *Metod drobnykh shagov resheniya mnogomernykh zadach matematicheskoy fiziki* [Fractional Steps Method for Solving Multidimensional Problems of Mathematical Physics], Nauka, Novosibirsk, 1967 (in Russian).
9. D. Apushkinskaya, *Free Boundary Problems. Regularity Properties Near the Fixed Boundary*, Springer, Cham, 2018.
10. A. S. Arakcheev, D. E. Apushkinskaya, I. V. Kandaurov, A. A. Kasatov, V. V. Kurkuchekov, G. G. Lazareva, A. G. Maksimova, V. A. Popov, A. V. Snytnikov, Yu. A. Trunev, A. A. Vasilyev, and L. N. Vyacheslavov, "Two-dimensional numerical simulation of tungsten melting under pulsed electron beam," *Fusion Eng. Design*, 2018, **132**, 13–17.
11. L. A. Caffarelli, "The smoothness of the free surface in a filtration problem," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1976, **63**, 77–86.
12. L. A. Caffarelli, "The regularity of elliptic and parabolic free boundaries," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1976, **82**, 616–618.
13. L. A. Caffarelli, "The regularity of free boundaries in higher dimensions," *Acta Math.*, 1977, **139**, No. 3-4, 155–184.
14. H. Chen, C. Min, and F. Gibou, "A numerical scheme for the Stefan problem on adaptive Cartesian grids with supralinear convergence rate," *J. Comp. Phys.*, 2009, **228**, 5803–5818.
15. G. Duvaut, "Résolution d'un problème de Stefan (fusion d'un bloc de glace à zéro degré)," *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 1973, **276**, 1461–1463.
16. J. W. Davis and P. D. Smith, "ITER material properties handbook," *J. Nucl. Mater.*, 1996, **233**, 1593–1596.
17. G. Duvaut, "Two phases Stefan problem with varying specific heat coefficients," *An. Acad. Brasil. Ciênc.*, 1975, **47**, 377–380.
18. A. Friedman and D. Kinderlehrer, "A one phase Stefan problem," *Indiana Univ. Math. J.*, 1975, **25**, No. 11, 1005-1035.
19. R. Groot, "Second order front tracking algorithm for Stefan problem on a regular grid," *J. Comp. Phys.*, 2018, **372**, 956–971.
20. C. Y. Ho, R. W. Powell, and P. E. Liley, "Thermal conductivity of elements," *J. Phys. Chem. Ref. Data*, 1972, **1**, 279.
21. J. M. Huang, M. Shelley, and D. Stein, "A stable and accurate scheme for solving the Stefan problem coupled with natural convection using the immersed boundary smooth extension method," *J. Comp. Phys.*, 2021, **432**, 110162.
22. Y. Ichikawa and N. Kikuchi, "A one-phase multi-dimensional Stefan problem by the method of variational inequalities," *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 1979, sl 14, 1197–1220.
23. Y. Ichikawa and N. Kikuchi, "Numerical methods for a two-phase Stefan problem by variational inequalities," *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 1979, sl 14, 1221–1239.
24. G. Lamé and B. P. Clapeyron, "Mémoire sur la solidification parrefroidissement d'um globe solide," *Ann. Chem. Phys.*, 1831, **47**, 250–256.
25. G. G. Lazareva, A. S. Arakcheev, I. V. Kandaurov, A. A. Kasatov, V. V. Kurkuchekov, A. G. Maksimova, V. A. Popov, A. A. Shoshin, A. V. Snytnikov, Yu. A. Trunev, A. A. Vasilyev, and L. N. Vyacheslavov, "Calculation of heat sink around cracks formed under pulsed heat load," *J. Phys. Conf. Ser.*, 2017, **894**, 012120.
26. A. M. Oberman and I. Zwiers, "Adaptive finite difference methods for nonlinear elliptic and parabolic partial defferential equations with free boundaries," *J. Sci. Comput.*, 2012, **68**, 231–251.

27. G. Pottlacher, “Thermal conductivity of pulse-heated liquid metals at melting and in the liquid phase,” *J. Non-Crystal. Solids*, 1999, **250**, 177–181.
28. J. Stefan, “Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere,” *Sitzungsber. Österreich. Akad. Wiss. Math. Naturwiss. Kl. Abt. 2, Math. Astron. Phys. Meteorol. Tech.*, 1889, **98**, 965–983.
29. L. Vyacheslavov, A. Arakcheev, A. Burdakov, I. Kandaurov, A. Kasatov, V. Kurkuchekov, K. Mekler, V. Popov, A. Shoshin, D. Skovorodin, Y. Trunev, and A. Vasilyev, “Novel electron beam based test facility for observation of dynamics of tungsten erosion under intense ELM-like heat loads,” *AIP Conf. Proc.*, 2016, **1771**, 060004.
30. Z.-C. Wu and Q.-C. Wang, “Numerical approach to Stefan problem in a two-region and limited space,” *Thermal Sci.*, 2012, **16**, No. 5, 1325–1330.

D. E. Apushkinskaya
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: apushkinskaya_de@pfur.ru

G. G. Lazareva
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: lazareva_gg@pfur.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 3 (2021). С. 455–471
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-455-471 УДК 517.98

О ВЫЧИСЛЕНИИ НОРМЫ МОНОТОННОГО ОПЕРАТОРА В ИДЕАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2021 г. **Э. Г. БАХТИГАРЕЕВА, М. Л. ГОЛЬДМАН**

Аннотация. Работа содержит доказательство общих результатов о вычислении норм монотонных операторов, действующих из одного идеального пространства в другое при условии согласования свойств выпуклости и вогнутости оператора и норм в идеальных пространствах.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Работа посвящена обоснованию некоторых общих результатов о вычислении нормы монотонного оператора, действующего из одного нормированного (в более общем варианте — квазинормированного) идеального пространства в другое и обладающего свойством выпуклости, которое согласовано со свойствами выпуклости и вогнутости (квази)норм идеальных пространств. Понятие идеального пространства измеримых функций обобщает конструкцию банахова функционального пространства, введенную К. Беннеттом и Р. Шарпли [6]. Общие вопросы теории идеальных структур и банаховых функциональных пространств рассмотрены в книгах Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [1], С. Г. Крейна, Ю. И. Петунина и Е. М. Семенова [2], а также Й. Берга и Й. Лефстрема [7] и Х. Трибеля [3].

В данной работе мы используем определения и общие свойства идеальных пространств, представленные в работе [4]. Здесь отметим, что (квази)норма $\|\cdot\|_X$ в идеальном пространстве X обладает свойствами монотонности: если функция f измерима и $|f| \leqslant g \in X$, то $f \in X$, $\|f\|_X \leqslant \|g\|_X$; также $\|f\|_X < \infty \Rightarrow |f| < \infty$ почти всюду и, кроме того, если $0 \leqslant f_m \leqslant f_{m+1}$, $f_m \to f$ $(m \to \infty)$ почти всюду, то $\|f\|_X = \lim\limits_{m\to\infty} \|f_m\|_X$ (свойство Фату). В [4] доказано, в частности, что идеальное пространство полно, т. е. является (квази)банаховым, а также описаны идеальные оболочки для конусов функций со свойствами монотонности.

В данной работе при обосновании результатов о вычислении нормы оператора мы обобщаем и модифицируем подход, развитый в работе В. И. Буренкова и М. Л. Гольдмана [8]. Мы приводим также пример применения общих формул при вычислении нормы интегрального оператора. Ряд приложений доказанных здесь общих результатов в теории весовых пространств Лоренца и при вычислении ассоциированных норм на конусах функций со свойствами монотонности приведен в работе [5]. Отметим, что некоторые другие подходы к задачам такого типа развиты в работах А. Гогатишвили и В. Д. Степанова [9,10].

Структура работы такова. В разделе 2 сформулированы основные определения и приведены результаты о вычислении нормы оператора на конусе убывающих неотрицательных функций в идеальном пространстве как в невырожденном случае, так и при наличии вырождения (теорема 2.1). Леммы, необходимые для доказательства этой теоремы, рассмотрены в разделе 3. Раздел 4 содержит доказательство теоремы 2.1 и некоторых ее следствий. В разделе 5 приведены обобщения полученных результатов на более общие конусы функций с условиями монотонности (теорема 5.1). В разделе 6 рассмотрен пример применения общих результатов для вычисления нормы интегрального оператора со свойством выпуклости.

2. Общие теоремы о нормах операторов на конусах функций со свойствами монотонности

Пусть $(M,\varSigma_M,\beta)$, $(N,\varSigma_N,\gamma)$ — пространства с неотрицательными σ-аддитивными полными мерами β,γ; $S(M,\varSigma_M,\beta)$, $S(N,\varSigma_N,\gamma)$ — пространства вещественнозначных измеримых функций.

Говорят, что норма в идеальном пространстве $X\subset S(M,\varSigma_M,\beta)$ является *порядково непрерывной*, если

$$\{x_m\in X, m\in\mathbb{N};\ 0\leqslant x_m\downarrow 0\quad \beta-\text{a.e.}\}\Rightarrow \|x_m\|_X\downarrow 0. \tag{2.1}$$

Идеальное пространство $X\subset S(M,\varSigma_M,\beta)$ называется *l_p-вогнутым* для некоторого $p\in\mathbb{R}_+$, если

$$\left(\sum_m \|x_m\|_X^p\right)^{1/p}\leqslant \left\|\left(\sum_m |x_m|^p\right)^{1/p}\right\|_X. \tag{2.2}$$

Идеальное пространство $Y\subset S(N,\varSigma_N,\gamma)$ называется *l_q-выпуклым* для некоторого $q\in\mathbb{R}_+$, если

$$\left\|\left(\sum_m |y_m|^q\right)^{1/q}\right\|_Y\leqslant \left(\sum_m \|y_m\|_Y^q\right)^{1/q}. \tag{2.3}$$

Это означает, что сходимость рядов в правой части (2.2) или (2.3) влечет сходимость рядов в левой части, и выполняются соответствующие неравенства.

Отметим, что любое нормированное идеальное пространство l_1-выпуклое, и l_q-выпуклость для $0<q<1$ приводит к неравенству треугольника в следующем виде:

$$\|f+g\|_Y\leqslant \left(\|f\|_Y^q+\|g\|_Y^q\right)^{1/q}\leqslant 2^{1/q-1}\left(\|f\|_Y+\|g\|_Y\right). \tag{2.4}$$

Действительно, согласно неравенству Йенсена для $0<q<1$

$$|f+g|\leqslant |f|+|g|\leqslant \left(|f|^q+|g|^q\right)^{1/q}.$$

Далее, применение (2.3) и неравенства Гёльдера (для двух слагаемых) влечёт

$$\|f+g\|_Y\leqslant \left\|\left(|f|^q+|g|^q\right)^{1/q}\right\|_Y\leqslant \left(\|f\|_Y^q+\|g\|_Y^q\right)^{1/q}\leqslant 2^{1/q-1}\left(\|f\|_Y+\|g\|_Y\right).$$

Отметим также, что пространство $Y=L_q(N,\gamma)$, $0<q<\infty$, является l_ρ-выпуклым для любого $\rho\in(0,q]$ (см. лемму 4.1 ниже), и оно l_p-вогнутое для любого $p\in[q,\infty)$.

Рассмотрим конус $D\subset X$ неотрицательных функций с условием

$$f,g\in D;\ \alpha,\beta\geqslant 0\Rightarrow \alpha f+\beta g\in D.$$

Оператор $T:D\to Y$ называется *l_r-выпуклым* при $0<r<\infty$, если $\forall f_m\in D$, $m\in\mathbb{Z}$ таких, что $\left(\sum\limits_m f_m^r\right)^{1/r}\in D$,

$$\left|T\left[\left(\sum_m f_m^r\right)^{1/r}\right]\right|\leqslant \left(\sum_m |Tf_m|^r\right)^{1/r} \tag{2.5}$$

почти всюду на M; и $\forall f\in D$; $\alpha\geqslant 0\Rightarrow T[\alpha f]=\alpha T[f]$.

Отметим, что l_1-выпуклость оператора T совпадает с сублинейностью:

$$\left|T\left[\left(\sum_m f_m\right)\right]\right| \leqslant \left(\sum_m |Tf_m|\right).$$

Оператор T называется *монотонным*, если

$$\{f, g \in D;\, 0 \leqslant f \leqslant g \quad \beta - \text{a.e.}\} \Rightarrow \{0 \leqslant Tf \leqslant Tg \quad \gamma - \text{a.e.}\}. \tag{2.6}$$

Примером l_r-выпуклого монотонного оператора является оператор

$$T\,[f] = (L[f^r])^{1/r},$$

где L — сублинейный монотонный оператор. Более того, эта формула иллюстрирует соответствие между l_r-выпуклым и сублинейным операторами.

Мы будем рассматривать случай $M = J := (a, b)$, $-\infty \leqslant a, b \leqslant \infty$, с неотрицательной борелевской мерой β и сужениями оператора на следующие конусы неотрицательных убывающих непрерывных слева функций на $J := (a, b)$:

$$\Omega = \{g \in X : 0 \leqslant g \downarrow;\, g(t) = g(t - 0),\, t \in (a, b)\},$$
$$\dot{\Omega} = \left\{g \in \Omega : \lim_{t \to b-0} g(t) = 0\right\}. \tag{2.7}$$

Определим нормы сужений оператора:

$$\|T\|_\Omega = \sup\{\|T[g]\|_Y : g \in \Omega,\, \|g\|_X \leqslant 1\}, \tag{2.8}$$

$$\|T\|_{\dot{\Omega}} = \sup\left\{\|T[g]\|_Y : g \in \dot{\Omega},\, \|g\|_X \leqslant 1\right\}. \tag{2.9}$$

Обозначим

$$\dot{\Omega}_0 := \left\{\chi_{(a,t]} : a < t < b\right\},\ \Omega_0 := \dot{\Omega}_0 \bigcup \chi_{(a,b)}; \tag{2.10}$$

$$F(x, t) = T\left[\chi_{(a,t]}\right](x),\ a < t < b; \quad F(x, b) = T\left[\chi_{(a,b)}\right](x). \tag{2.11}$$

Теорема 2.1. *Пусть* $0 < p \leqslant q \leqslant r < \infty$; $X \subset S(J, \beta)$ — *идеальное* l_p-*вогнутое пространство с порядково непрерывной (квази)нормой*; $Y \subset S(N, \gamma)$ — *идеальное* l_q-*выпуклое пространство, и* $T : \Omega \to Y$ — l_r-*выпуклый монотонный оператор.*

1. *Тогда справедливы соотношения*

$$\|T\|_{\dot{\Omega}} = \|T\|_{\dot{\Omega}_0} := \sup_{a<t<b}\left[\|F(\cdot, t)\|_Y \|\chi_{(a,t]}(\cdot)\|_X^{-1}\right]. \tag{2.12}$$

2. *При выполнении дополнительного условия невырожденности*

$$\|\chi_{(a,b)}\|_X = \infty \tag{2.13}$$

справедливы соотношения

$$\|T\|_\Omega = \|T\|_{\dot{\Omega}} = \|T\|_{\dot{\Omega}_0} := \sup_{a<t<b}\left[\|F(\cdot, t)\|_Y \|\chi_{(a,t]}(\cdot)\|_X^{-1}\right]. \tag{2.14}$$

3. *При наличии вырождения*

$$\|\chi_{(a,b)}\|_X < \infty \tag{2.15}$$

справедливы соотношения

$$\|T\|_\Omega = \|T\|_{\Omega_0} := \max\left\{\|T\|_{\dot{\Omega}_0}, \|F(\cdot, b)\|_Y \|\chi_{(a,b)}(\cdot)\|_X^{-1}\right\}, \tag{2.16}$$

см. (2.11).

Замечание 2.1. Отметим, что в невырожденном случае (2.13)

$$\|\chi_{(a,b)}\|_X = \infty \Rightarrow \Omega = \dot{\Omega},$$

так как

$$\left\{0 \leqslant g \downarrow,\, \lim_{t \to b-0} g(t) > 0\right\} \Rightarrow g \notin X. \tag{2.17}$$

Это означает, что в случае (2.13) справедливо равенство $\|T\|_\Omega = \|T\|_{\dot\Omega}$. Поэтому для вычисления $\|T\|_\Omega$ применима формула (2.12). Таким образом, справедливо соотношение (2.14), и часть 2 теоремы 2.1 следует из ее части 1.

Замечание 2.2. При доказательстве теоремы 2.1 мы сначала докажем общее утверждение, составляющее часть 3 этой теоремы. Затем отметим те упрощения (весьма значительные), которые возникают в этом рассуждении при доказательстве части 1 теоремы, причем независимо от выполнения или нарушения условия невырожденности (2.13). Эти упрощения связаны с тем, что в части 1 теоремы рассматривается конус $\dot\Omega$ вместо общего конуса Ω, см. (2.7).

3. Леммы

Лемма 3.1. *Пусть* $0 < q < s < \infty$; ω, ψ — *неотрицательные функции на* (a,b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, $\omega\uparrow$, $\psi\downarrow$; $\omega, \psi, \psi' \in C(a,b)$, $\psi(a) > \psi(b)$. *Определим*

$$\omega(a) := \lim_{t\to a+0}\omega(t),\ \omega(b) := \lim_{t\to b-0}\omega(t),\ \psi(a) := \lim_{t\to a+0}\psi(t),\ \psi(b) := \lim_{t\to b-0}\psi(t).$$

Если $\psi(b) = 0$, *то полагаем* $C := 0$. *Если* $\psi(b) > 0$, *то полагаем, что выполнено условие* $C := \omega(b)\psi(b) < \infty$. *Для* $r \in [q,s]$ *введем оператор*

$$A_r(a,b) = \left\{\int\limits_{(a,b)} \omega(t)^r \left(-d\left[\psi(t)^r\right]\right)\right\}^{1/r}. \tag{3.1}$$

Тогда

$$\left\{C^s + A_s(a,b)^s\right\}^{1/s} \leqslant \left\{C^q + A_q(a,b)^q\right\}^{1/q}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Полагаем $A_q(a,b) < \infty$.

1. Вначале рассмотрим случай $b \in (a,\infty]$, $\psi(b) = 0$.

$$A_s(a,b)^s = \int\limits_{(a,b)} \omega^s\left(-d\left[(\psi^q)^{s/q}\right]\right) = \frac{s}{q}\int\limits_{(a,b)} \omega^s\psi^{s-q}\left(-d\left[\psi^q\right]\right) = \frac{s}{q}\int\limits_{(a,b)} [\omega\psi]^{s-q}\omega^q\left(-d\left[\psi^q\right]\right).$$

Отметим, что возрастание ω^q вместе с условием $\psi(b) = 0$ влечёт

$$[\omega(t)\psi(t)]^{s-q} \leqslant \left[\int\limits_{[t,b)} \omega(\tau)^q\left(-d\left[\psi(\tau)^q\right]\right)\right]^{s/q-1},\ t\in(a,b).$$

Поэтому

$$A_s(a,b)^s \leqslant \frac{s}{q}\int\limits_{(a,b)} \left[\int\limits_{[t,b)} \omega(\tau)^q\left(-d\left[\psi(\tau)^q\right]\right)\right]^{s/q-1} \omega(t)^q\left(-d\left[\psi(t)^q\right]\right) =$$

$$= \int\limits_{(a,b)} \left(-d\left[\left(\int\limits_{[t,b)} \omega(\tau)^q\left(-d\left[\psi(\tau)^q\right]\right)\right)^{s/q}\right]\right) = \left[\int\limits_{(a,b)} \omega^q\left(-d\left[\psi^q\right]\right)\right]^{s/q} = A_q(a,b)^s.$$

2. Теперь пусть $b \in \mathbb{R}_+$, $\psi(b) > 0$, $C = \omega(b)\psi(b) < \infty$. Мы продолжаем функции ω, ψ на $[b, b+1)$ так, что $\omega(\tau) = \omega(b)$, $\tau \in [b, b+1)$; $\psi(\tau)\downarrow$, $\psi(b+1) = 0$. Далее применяем результат, полученный на первом шаге, на интервале $(a, b+1)$ и получаем

$$A_s(a,b+1) \leqslant A_q(a,b+1). \tag{3.3}$$

Далее,

$$A_s(a,b+1)^s = A_s(a,b)^s + \int\limits_{[b,b+1)} \omega(t)^s\left(-d\left[\psi(t)^s\right]\right) =$$

$$= A_s(a,b)^s + \omega(b)^s \int\limits_{[b,b+1)} (-d\,[\psi(t)^s]) = A_s(a,b)^s + \omega(b)^s\psi(b)^s.$$

Аналогично, $A_q(a,b+1)^q = A_q(a,b)^q + \omega(b)^q\psi(b)^q$, и (3.3) приводит к (3.2).

3. Рассмотрим последний случай $b=\infty$, $\psi(\infty)>0$. Для этого применим полученное выше неравенство в случае $b<\infty$, $\psi(b)>0$:

$$\{\omega(b)^s\psi(b)^s + A_s(a,b)^s\}^{1/s} \leqslant \{\omega(b)^q\psi(b)^q + A_q(a,b)^q\}^{1/q}.$$

Затем перейдем к пределу при $b\to+\infty$. Тогда

$$\{\omega(\infty)^s\psi(\infty)^s + A_s(a,\infty)^s\}^{1/s} \leqslant \{\omega(\infty)^q\psi(\infty)^q + A_q(a,\infty)^q\}^{1/q}.$$

□

Замечание 3.1. Оценка (3.2) остается верной в случае замены C константой $D\in(C,\infty)$.

Доказательство. При $A,B>0$, $0<q<s<\infty$ рассмотрим функцию $\varphi(x) = (x^s+A^s)^{1/s}(x^q+B^q)^{-1/q}, x\in\mathbb{R}_+$.

1. Если $A\leqslant B$, то $\varphi(x)\leqslant (x^s+B^s)^{1/s}(x^q+B^q)^{-1/q}\leqslant 1$, $x\in\mathbb{R}_+$.
2. Пусть $A>B$. Тогда $\varphi(0)=AB^{-1}>1$. Более того,

$$\varphi'(x) = (x^s+A^s)^{1/s-1}(x^q+B^q)^{-1/q-1}x^{q-1}(x^{s-q}B^q - A^s).$$

Таким образом, функция φ убывает от $\varphi(0)>1$ до $\varphi(x_1)<1$, $x_1=(A^sB^{-q})^{1/(s-q)}$, затем возрастает до $\varphi(+\infty)=1$. Поэтому если $\varphi(x_0)\leqslant 1$ для некоторого $x_0>0$, то $\varphi(x)\leqslant 1$ для всех $x\geqslant x_0$. Далее, обозначим $A=A_s(a,b)$, $B=A_q(a,b)$ и заметим, что согласно (3.2)

$$\varphi(C) = (C^s + A_s(a,b)^s)^{1/s}\,(C^q + A_q(a,b)^q)^{-1/q}\leqslant 1.$$

Поэтому для любого $D\geqslant C$ имеем $\varphi(D)\leqslant 1$. □

Лемма 3.2. *Пусть*

$$\omega_m,\,\psi_m\geqslant 0,\ m\in\mathbb{Z};\ \omega_m\uparrow,\ \psi_m\downarrow.$$

Определим

$$\omega_\infty = \lim_{m\to+\infty}\omega_m,\ \psi_\infty = \lim_{m\to+\infty}\psi_m,\ C:=\omega_\infty\cdot\psi_\infty. \tag{3.4}$$

Здесь мы полагаем, что

$$\psi_\infty = 0 \Rightarrow C=0;\ \psi_\infty>0\Rightarrow C<\infty.$$

Тогда при $0<q<s<\infty$

$$\left\{C^s + \sum_{m\in\mathbb{Z}}\omega_m^s\left(\psi_m^s - \psi_{m+1}^s\right)\right\}^{1/s} \leqslant \left\{C^q + \sum_{m\in\mathbb{Z}}\omega_m^q\left(\psi_m^q - \psi_{m+1}^q\right)\right\}^{1/q}. \tag{3.5}$$

Оценка (3.5) *остается верной при замене* C *константой* $D\in(C,\infty)$.

Доказательство. Введем функцию $\psi\in C^1(\mathbb{R}_+)$, $0\leqslant\psi\downarrow$; $\psi(2^m)=\psi_m, m\in\mathbb{Z}$.

Далее, для $n\in\mathbb{N}$ введем функцию $\omega(n,\cdot)\in C(\mathbb{R}_+)$ на $[2^m,2^{m+1}]$, $m\in\mathbb{Z}$, следующим образом:

$$\omega(n,t) = \begin{cases}\omega_m,\ 2^m\leqslant t\leqslant 2^{m+1}-2^{m-1}/n;\\ \text{линейная при } 2^{m+1}-2^{m-1}/n\leqslant t\leqslant 2^{m+1}.\end{cases}$$

Отметим, что

$$\psi(\infty):=\lim_{t\to+\infty}\psi(t) = \lim_{m\to+\infty}\psi_m = \psi_\infty.$$

Если $\psi_\infty=0$, то полагаем $C=0$. Далее, если $\omega_\infty = \lim\limits_{m\to+\infty}\omega_m<\infty$, то имеем $\omega(n,\infty) = \lim\limits_{t\to+\infty}\omega(n,t) = \omega_\infty<\infty$ (ω_∞ не зависит от $n\in\mathbb{N}$), и мы полагаем $C:=\omega(n,\infty)\psi(\infty) = \omega_\infty\psi_\infty<\infty$. Согласно (3.2) справедливо неравенство

$$I_n := \left\{C^s + \int\limits_{\mathbb{R}_+}\omega(n,t)^s\,(-d\,[\psi(t)^s])\right\}^{1/s} \leqslant J_n := \left\{C^q + \int\limits_{\mathbb{R}_+}\omega(n,t)^q\,(-d\,[\psi(t)^q])\right\}^{1/q}.$$

Отметим, что $\{\omega(n,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ — убывающая последовательность, и

$$\lim_{n\to+\infty}\omega(n,t)=\omega(\infty,t)=\omega_m,\ t\in[2^m,2^{m+1}),\quad m\in\mathbb{Z}.$$

Поэтому по теореме Леви о монотонной сходимости можно перейти к пределу при $n\to+\infty$ в последнем неравенстве, что влечёт

$$I_\infty:=\left\{C^s+\int\limits_{\mathbb{R}_+}\omega(\infty,t)^s\left(-d\left[\psi(t)^s\right]\right)\right\}^{1/s}\leqslant J_\infty:=\left\{C^q+\int\limits_{\mathbb{R}_+}\omega(\infty,t)^q\left(-d\left[\psi(t)^q\right]\right)\right\}^{1/q}.$$

Но

$$I_\infty:=\left\{C^s+\sum_{m\in\mathbb{Z}}\int\limits_{[2^m,2^{m+1})}\omega(\infty,t)^s\left(-d\left[\psi(t)^s\right]\right)\right\}^{1/s}=\left\{C^s+\sum_{m\in\mathbb{Z}}\omega_m^s\int\limits_{[2^m,2^{m+1})}\left(-d\left[\psi(t)^s\right]\right)\right\}^{1/s},$$

что совпадает с левой частью (3.5). Аналогично,

$$J_\infty=\left\{C^q+\sum_{m\in\mathbb{Z}}\omega_m^q\int\limits_{[2^m,2^{m+1})}\left(-d\left[\psi(t)^q\right]\right)\right\}^{1/q}=\left\{C^q+\sum_{m\in\mathbb{Z}}\omega_m^q\left(\psi_m^q-\psi_{m+1}^q\right)\right\}^{1/q}.$$

Эти суждения приводят к (3.5). □

Следствие 3.1. *Пусть*

$$\omega_m,\,\psi_m\geqslant 0,\ m\in\{0,1,\dots,m_0+1\},\ \omega_m\uparrow,\ \psi_m\downarrow,\ C=\omega_{m_0+1}\cdot\psi_{m_0+1}. \tag{3.6}$$

Тогда при $0<q\leqslant s<\infty$

$$\left\{C^s+\sum_{m=0}^{m_0}\omega_m^s\left(\psi_m^s-\psi_{m+1}^s\right)\right\}^{1/s}\leqslant\left\{C^q+\sum_{m=0}^{m_0}\omega_m^q\left(\psi_m^q-\psi_{m+1}^q\right)\right\}^{1/q}. \tag{3.7}$$

Оценка (3.7) *верна при* $m_0=\infty$ *с константой*

$$C=\omega_\infty\cdot\psi_\infty,\quad \omega_\infty=\lim_{m\to+\infty}\omega_m,\quad \psi_\infty=\lim_{m\to+\infty}\psi_m;\quad \infty\cdot 0:=0.$$

Эта оценка остается справедливой в случае замены C *константой* $D\in(C,\infty)$.

Действительно, в (3.5) полагаем $\omega_m=0$, $\psi_m=\psi_0$, $m\leqslant -1$; если $m_0<\infty$,

$$\omega_m=\omega_{m_0+1},\quad \psi_m=\psi_{m_0+1},\quad m\geqslant m_0+2,$$

тогда (3.5) влечет (3.7).

Замечание 3.2. Мы получили дискретные оценки (3.5) и (3.7) как следствия интегральной оценки (3.2). Для приложений полезно показать, что (3.2), в свою очередь, можно получить из дискретных оценок. Для этого достаточно потребовать, чтобы ω была непрерывной слева, а ψ — непрерывной справа на (a,b). Для полноты изложения приведем соответствующее утверждение.

Лемма 3.3. *Пусть* $0<q<s<\infty$; ω,ψ — *неотрицательные функции на* (a,b); $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$, $\omega\uparrow$, $\psi\downarrow$; ω *непрерывна слева на* (a,b), ψ *непрерывна справа на* (a,b); $\psi(b)<\psi(a)<\infty$. *Определим*

$$\omega(a):=\lim_{t\to a+0}\omega(t),\quad \omega(b):=\lim_{t\to b-0}\omega(t),\quad \psi(a):=\lim_{t\to a+0}\psi(t),\quad \psi(b):=\lim_{t\to b-0}\psi(t).$$

Если $\psi(b)=0$, *полагаем* $C:=0$. *Если* $\psi(b)>0$, *требуем, чтобы* $C:=\omega(b)\psi(b)<\infty$. *При* $r\in[q,s]$ *введем* $A_r(a,b)$ *формулой* (3.1). *Тогда выполнена оценка* (3.2).

Доказательство.

1. Сначала мы получим некоторые полезные равенства для интеграла Лебега—Стилтьеса (в рассматриваемом здесь случае он совпадает с интегралом Римана—Стилтьеса). Для любого $r \in \mathbb{R}_+$, $a \leqslant t < \tau < b$ и убывающей на (a,b) непрерывной справа в точке t (отметим, что в точке $t = a$ это происходит автоматически, так как $\psi(a) = \psi(a+0)$) функции ψ выполнено равенство

$$\int\limits_{(t,\tau]} (-d\,[\psi^r]) = \psi(t)^r - \psi(\tau)^r. \tag{3.8}$$

Действительно,

$$\int\limits_{(t,\tau]} (-d\,[\psi^r]) = \lim_{\rho\to t+0} \int\limits_{[\rho,\tau]} (-d\,[\psi^r]) = \lim_{\rho\to t+0} [\psi(\rho)^r - \psi(\tau)^r] = \psi(t)^r - \psi(\tau)^r.$$

Здесь мы используем равенство

$$\int\limits_{[\rho,\tau]} (-d\,[\psi^r]) = \psi(\rho)^r - \psi(\tau)^r. \tag{3.9}$$

Это следует из определения интеграла Римана—Стилтьеса, поскольку все интегральные суммы интеграла по отрезку $[\rho,\tau]$ совпадают с правой частью этой формулы. Таким образом, выполнено (3.8).

Переходя к пределу в этой формуле при $t = a$, $\tau \to b-0$, получаем

$$\int\limits_{(a,b)} (-d\,[\psi(t)^r]) = \psi(a)^r - \psi(b)^r. \tag{3.10}$$

Для любого $r \in \mathbb{R}_+$, $a < t < \tau \leqslant b$ и убывающей на (a,b) непрерывной слева в точке τ (отметим, что в точке $\tau = b$ это происходит автоматически, так как $\psi(b) = \psi(b-0)$) функции ψ выполнено равенство

$$\int\limits_{[t,\tau)} (-d\,[\psi(t)^r]) = \psi(t)^r - \psi(\tau)^r. \tag{3.11}$$

Действительно,

$$\int\limits_{[t,\tau)} (-d\,[\psi(t)^r]) = \lim_{\rho\to\tau-0} \int\limits_{[t,\rho]} (-d\,[\psi(t)^r]) = \lim_{\rho\to\tau-0} [\psi(t)^r - \psi(\rho)^r] = \psi(t)^r - \psi(\tau)^r.$$

Более того, если функция ψ непрерывна слева в точке τ и непрерывна справа в точке t, то

$$\int\limits_{(t,\tau)} (-d\,[\psi(t)^r]) = \psi(t)^r - \psi(\tau)^r. \tag{3.12}$$

Применяя (3.11), мы приходим к

$$\int\limits_{(t,\tau)} (-d\,[\psi(t)^r]) = \lim_{\rho\to t+0} \int\limits_{[\rho,\tau)} (-d\,[\psi(t)^r]) = \lim_{\rho\to t+0} [\psi(\rho)^r - \psi(\tau)^r] = \psi(t)^r - \psi(\tau)^r.$$

Положим, что $A_q(a,b) < \infty$ (в противном случае в (3.2) нечего доказывать). Если $\omega(a) > 0$, это предположение влечёт $\psi(a) < \infty$. Действительно, функция ω возрастает на (a,b), таким образом, $\omega(t) \geqslant \omega(a)$, $t \in (a,b)$, и

$$A_q(a,b)^q = \int\limits_{(a,b)} \omega^q\,(-d\,[\psi^q]) \geqslant \omega(a)^q \int\limits_{(a,b)} (-d\,[\psi^q]) = \omega(a)^q\,[\psi(a)^q - \psi(b)^q]\,.$$

Случай $\omega(a) = 0$ будет рассмотрен на пятом шаге ниже.

2. Вначале рассмотрим случай $0 < \omega(a) = \omega(b)$. Тогда $\omega(t) = \omega(b)$, $t \in [a, b)$, поэтому формула (3.10) с $r = s$ и $r = q$ приводит к равенству:

$$A_s^s = \omega(b)^s \int\limits_{(a,b)} (-d\,[\psi(t)^s]) = \omega(b)^s \left[\psi(a)^s - \psi(b)^s\right],$$

$$\{\omega(b)^s \psi(b)^s + A_s^s\}^{1/s} = \omega(b)\psi(a) = \left\{\omega(b)^q \psi(b)^q + A_q^q\right\}^{1/q}.$$

3. Пусть $0 < \omega(a) < \omega(b) < \infty$. При $1 < d < \omega(b)/\omega(a)$ выберем $t_m \in [a, b)$ следующим образом: $t_0 = a$, $t_1 = \sup\{t > a : \omega(t) \leqslant d\omega(a)\}$,

$$\begin{aligned} &t_{m+1} = \sup\{t > a : \omega(t) \leqslant d\omega(t_m + 0)\}, \; m = 1, 2, \ldots, m_0 - 1; \\ &\omega(t_{m_0} + 0) < \omega(b) \leqslant d\omega(t_{m_0} + 0). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} &1. \quad t_{m+1} > t_m, \; m = 0, 1, \ldots, m_0; \\ &2. \quad \omega(t_m + 0) \leqslant \omega(t) \leqslant d\omega(t_m + 0), t \in \delta_m := (t_m, t_{m+1}], \\ &m = 0, 1, \ldots, m_0 - 1; \\ &3. \quad \omega(t) > d\omega(t_m + 0), \; \forall t \in (t_{m+1}, b); \; m = 0, 1, \ldots, m_0 - 1. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Таким образом, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m_0} < t_{m_0+1} := b$.

Теперь получим оценки для A_s^s, A_q^q. Обозначим $\delta_m := (t_m, t_{m+1}]$, $m = 0, 1, \ldots, m_0 - 1$, $\delta_{m_0} = (t_{m_0}, t_{m_0+1})$.

$$A_s^s = \int\limits_{(a,b)} \omega^s\,(-d\,[\psi^s]) = \sum_{m=0}^{m_0-1} \int\limits_{\delta_m} \omega^s\,(-d\,[\psi^s]) + \int\limits_{(t_{m_0},b)} \omega^s\,(-d\,[\psi^s]).$$

Функция ω^s возрастает, так что

$$A_s^s \leqslant \sum_{m=0}^{m_0-1} \omega(t_{m+1})^s \int\limits_{\delta_m} (-d\,[\psi^s]) + \omega(b)^s \int\limits_{(t_{m_0},b)} (-d\,[\psi^s]) = \sum_{m=0}^{m_0} \omega(t_{m+1})^s \left[\psi(t_m)^s - \psi(t_{m+1})^s\right] \leqslant$$

$$\leqslant d^s \sum_{m=0}^{m_0} \omega(t_m + 0)^s \left[\psi(t_m)^s - \psi(t_{m+1})^s\right].$$

На втором шаге мы учли, что ψ непрерывна справа на (a, b) и $\psi(b - 0) = \psi(b)$, так что формулы (3.8) при $0 \leqslant m \leqslant m_0 - 1$ и (3.12) при $m = m_0$ применимы. Тогда, согласно (3.12) с $t = t_{m_0}$, $\tau = b$, $r = s$ получаем

$$\int\limits_{(t_{m_0},b)} (-d\,[\psi^s]) = \psi(t_{m_0})^s - \psi(b)^s = \psi(t_{m_0})^s - \psi(t_{m_0+1})^s.$$

На последнем шаге мы применяем (3.13). Обозначим

$$\omega_m := \omega(t_m + 0), \quad \psi_m := \psi(t_m), \quad m = 0, \ldots, m_0; \quad \omega_{m_0+1} := \omega(b), \quad \psi_{m_0+1} := \psi(b).$$

Тогда

$$A_s^s \leqslant d^s \sum_{m=0}^{m_0} \omega_m^s \left[\psi_m^s - \psi_{m+1}^s\right]. \tag{3.15}$$

Аналогично,

$$A_q^q = \int\limits_{(a,b)} \omega^q\,(-d\,[\psi^q]) = \sum_{m=0}^{m_0-1} \int\limits_{\delta_m} \omega^q\,(-d\,[\psi^q]) + \int\limits_{(t_{m_0},b)} \omega^q\,(-d\,[\psi^q]),$$

$$A_q^q = \sum_{m=0}^{m_0} \int\limits_{\delta_m} \omega^q\,(-d\,[\psi^q]) \geqslant \sum_{m=0}^{m_0} \omega(t_m + 0)^q \left[\psi(t_m)^q - \psi(t_{m+1})^q\right],$$

так что
$$A_q^q \geqslant \sum_{m=0}^{m_0} \omega_m^q \left[\psi_m^q - \psi_{m+1}^q\right]. \tag{3.16}$$
Теперь применим (3.7) с $C = \omega_{m_0+1} \cdot \psi_{m_0+1} = \omega(b)\psi(b)$ и получим
$$\{\omega(b)^s\psi(b)^s + A_s^s\}^{1/s} \leqslant \left\{d^s\omega(b)^s\psi(b)^s + d^s \sum_{m=0}^{m_0} \omega_m^s \left[\psi_m^s - \psi_{m+1}^s\right]\right\}^{1/s} \leqslant$$
$$\leqslant d\left\{\omega(b)^q\psi(b)^q + \sum_{m=0}^{m_0} \omega_m^q \left[\psi_m^q - \psi_{m+1}^q\right]\right\}^{1/q} \leqslant d\left\{\omega(b)^q\psi(b)^q + A_q^q\right\}^{1/q}.$$
Таким образом,
$$\{\omega(b)^s\psi(b)^s + A_s^s\}^{1/s} \leqslant d\left\{\omega(b)^q\psi(b)^q + A_q^q\right\}^{1/q}.$$
В последнем неравенстве все слагаемые в $\{\}$ не зависят от $d > 1$. Тогда переход к пределу при $d \to 1+0$ приводит к (3.2).

4. Пусть $0 < \omega(a) < \omega(b) = \infty$. В этом случае мы полагаем, что $\psi(b) = 0$, $C = 0$. Для любого $d > 1$ определим t_m, $m \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$ формулами (3.13) со свойствами (3.14) для $m \in \mathbb{N}_0$ (в этом случае $m_0 = \infty$). Таким образом, выполнены оценки (3.15), (3.16). Более того, здесь $\psi_\infty = \psi(b) = 0$. Применение (3.7) с $C = 0$, $m_0 = \infty$ влечёт
$$A_s \leqslant dA_q,\ \forall d > 1 \Rightarrow A_s \leqslant A_q.$$

5. Осталось рассмотреть случай $\omega(a) = 0$, $\psi(a) \leqslant \infty$. Без ограничения общности считаем, что $\omega(\delta) > 0$, $\psi(\delta) < \infty$, $\delta \in (a, b)$. Для любого $\delta \in (a, b)$ верна оценка
$$\{\omega(b)^s\psi(b)^s + A_s^s(\delta, b)\}^{1/s} \leqslant \left\{\omega(b)^q\psi(b)^q + A_q^q(\delta, b)\right\}^{1/q}, \tag{3.17}$$
которая была доказана выше (с δ вместо a). Отметим, что $A_r(\delta, b) \to A_r(a, b)$ $(\delta \to a+0)$ при $r = q$, $r = s$.

Таким образом, мы получаем (3.2), переходя к пределу при $\delta \to a + 0$ в (3.17). □

4. Доказательство теоремы 2.1. Следствия

4.1. Доказательство теоремы 2.1.

1. Докажем часть 3 этой теоремы, т. е. получим формулу (2.16). Пусть
$$a < t_m < t_{m+1} < b, \quad m \in \mathbb{Z}; \quad \lim_{m\to-\infty} t_m = a, \quad \lim_{m\to+\infty} t_m = b.$$

Для функции $g \in \Omega$ рассмотрим ее «ступенчатую мажоранту» $\tilde{g}$:
$$\tilde{g}(u) = \sum_m g(t_m)\chi_{\Delta_m}(u); \quad \Delta_m = (t_m, t_{m+1}], \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{4.1}$$
Отметим, что для любого $u \in (a, b)$, $s > 0$, выполнено $\chi_{\Delta_m}(u)^s = \chi_{\Delta_m}(u)$, и
$$\tilde{g}(u) = \left(\sum_m g(t_m)^s \chi_{\Delta_m}(u)^s\right)^{1/s}, \tag{4.2}$$
так как слагаемые в (4.1) не пересекаются, и для каждого $u \in (a, b)$ только одно слагаемое не равно нулю. Обозначим
$$B := \lim_{u\to b-0} g(u); \quad 0 \leqslant c_m(s) = (g(t_{m-1})^s - g(t_m)^s)^{1/s}. \tag{4.3}$$
Тогда для любого $u \in (a, b)$, $s > 0$,
$$\tilde{g}(u) = \left(\sum_m c_m(s)^s \chi_{(a,t_m]}(u)^s + B^s \chi_{(a,b)}(u)^s\right)^{1/s}, \tag{4.4}$$

Равенство (4.4) следует из (4.2) после применения преобразования Абеля в форме

$$\sum_{m=l}^{n} e_m\,(d_{m+1}-d_m) = \sum_{m=l}^{n}(e_m-e_{m+1})\,d_{m+1} + e_{n+1}d_{n+1} - e_l d_l, \tag{4.5}$$

если мы положим

$$e_m = g(t_m)^s, \quad d_m = \chi_{(a,t_m]}(u)^s = \chi_{(a,t_m]}(u)$$

и учтём, что

$$\lim_{n\to+\infty}(e_{n+1}d_{n+1}) = \lim_{n\to+\infty}\left(g(t_{n+1})^s\chi_{(a,t_{n+1}]}(u)^s\right) = B^s\chi_{(a,b)}(u)^s;$$

$$\lim_{l\to-\infty}(e_l d_l) = \lim_{l\to-\infty}\left(g(t_l)^s\chi_{(a,t_l]}(u)^s\right) = 0.$$

Далее, переходя к пределу в (4.5) при $n\to+\infty$, $l\to-\infty$ и используя равенство

$$\sum_m (e_m-e_{m+1})\,d_{m+1} = \sum_m (e_{m-1}-e_m)\,d_m,$$

получаем (4.4).

Согласно (4.4) с $s=r$ имеем $\tilde g(u) = (f(u)^r + h(u)^r)^{1/r}$;

$$f(u) = \left(\sum_m c_m(r)^r\chi_{(a,t_m]}(u)^r\right)^{1/r}; \quad h(u) = B\chi_{(a,b)}(u).$$

Здесь $0\leqslant g\leqslant\tilde g$, и для монотонного l_r-выпуклого оператора T выполнено:

$$0\leqslant T[g]\leqslant T[\tilde g]\leqslant (T[f]^r + T[h]^r)^{1/r}.$$

Далее, согласно (2.5) с $f_m = c_m(r)\chi_{(a,t_m]}(u)$, $m\in\mathbb{Z}$,

$$T[f]^r\leqslant\sum_m c_m(r)^r T\left[\chi_{(a,t_m]}\right]^r; \quad T[h]^r = B^r T\left[\chi_{(a,b)}\right]^r.$$

Поэтому

$$0\leqslant T[g](x)\leqslant T[\tilde g](x)\leqslant\left\{\sum_m c_m(r)^r F(x,t_m)^r + B^r F(x,b)^r\right\}^{1/r}. \tag{4.6}$$

При $0<q<r$ мы применяем следствие 3.1 леммы 3.2 с $s=r$, $\omega_m = F(x,t_m)\uparrow$, $\psi_m = g(t_{m-1})\downarrow$. Таким образом,

$$c_m(r)^r = g(t_{m-1})^r - g(t_m)^r = \psi_m^r - \psi_{m+1}^r;$$
$$c_m(q)^q = g(t_{m-1})^q - g(t_m)^q = \psi_m^q - \psi_{m+1}^q.$$

Здесь $A = \lim\limits_{m\to+\infty}\omega_m = \lim\limits_{m\to+\infty}F(x,t_m) := F_0(x,b)$; $B = \lim\limits_{m\to-\infty}\psi_m = g(b-0)$, см. (4.3). Отметим, что $\chi_{(a,t]}\leqslant\chi_{(a,b)}$, $t\in(a,b)$. Поэтому

$$F(x,t)\leqslant F(x,b),\ t\in(a,b) \quad\Rightarrow\quad F_0(x,b)\leqslant F(x,b). \tag{4.7}$$

Итак,

$$C\equiv AB = F_0(x,b)B\leqslant F(x,b)B\equiv D,$$

и мы приходим к (3.5) с $s=r$ и заменой C на D в наших обозначениях:

$$\left\{\sum_m c_m(r)^r F(x,t_m)^r + B^r F(x,b)^r\right\}^{1/r}\leqslant\left\{\sum_m c_m(q)^q F(x,t_m)^q + B^q F(x,b)^q\right\}^{1/q}.$$

Согласно (4.6) имеем

$$0\leqslant T[g](x)\leqslant\left\{\sum_m\left[g(t_{m-1})^q - g(t_m)^q\right]F(x,t_m)^q + B^q F(x,b)^q\right\}^{1/q}. \tag{4.8}$$

Отметим, что в случае $q=r$ (4.8) совпадает с (4.6).

Неравенство (4.8) и l_q-выпуклость пространства Y влекут

$$\|T[g]\|_Y \leqslant \left\{ \sum_m [g(t_{m-1})^q - g(t_m)^q] \, \|F(\cdot, t_m)\|_Y^q + B^q \|F(\cdot, b)\|_Y^q \right\}^{1/q}$$

для любого $g \in \Omega$. Применим оценки

$$\|F(\cdot, t_m)\|_Y = \|T[\chi_{(a,t_m]}]\|_Y \leqslant \|T\|_{\dot{\Omega}_0} \|\chi_{(a,t_m]}\|_X \leqslant \|T\|_{\Omega_0} \|\chi_{(a,t_m]}\|_X,$$
$$\|F(\cdot, b)\|_Y \leqslant \|T\|_{\Omega_0} \|\chi_{(a,b)}\|_X$$

и получим

$$\|T[g]\|_Y \leqslant \|T\|_{\Omega_0} \left\{ \sum_m [g(t_{m-1})^q - g(t_m)^q] \, \|\chi_{(a,t_m]}]\|_X^q + B^q \|\chi_{(a,b)}\|_X^q \right\}^{1/q}.$$

При $p \leqslant q$ отсюда согласно следствию 3.1 леммы 3.2 с q вместо s и p вместо q имеем

$$\|T[g]\|_Y \leqslant \|T\|_{\Omega_0} \left\{ \sum_m [g(t_{m-1})^p - g(t_m)^p] \, \|\chi_{(a,t_m]}]\|_X^p + B^p \|\chi_{(a,b)}\|_X^p \right\}^{1/p}.$$

Поэтому

$$\|T[g]\|_Y \leqslant \|T\|_{\Omega_0} \left\{ \sum_m c_m(p)^p \|\chi_{(a,t_m]}\|_X^p + B^p \|\chi_{(a,b)}\|_X^p \right\}^{1/p}.$$

Рассмотрим неотрицательные функции

$$\varphi_m = c_m(p) \chi_{(a,t_m]}; \quad \varphi = \left(\sum_m \varphi_m^p \right)^{1/p}; \quad \zeta = B\chi_{(a,b)}.$$

Тогда

$$\|T[g]\|_Y \leqslant \|T\|_{\Omega_0} \left\{ \sum_m \|\varphi_m\|_X^p + \|\zeta\|_X^p \right\}^{1/p}.$$

l_p-вогнутость пространства X влечёт

$$\left\{ \sum_m \|\varphi_m\|_X^p + \|\zeta\|_X^p \right\}^{1/p} \leqslant \left\| \left(\sum_m \varphi_m^p + \zeta^p \right)^{1/p} \right\|_X,$$

так что для $g \in \Omega$ справедливо неравенство

$$\|T[g]\|_Y \leqslant \|T\|_{\Omega_0} \left\| \left(\sum_m \varphi_m^p + \zeta^p \right)^{1/p} \right\|_X =$$
$$= \|T\|_{\Omega_0} \left\| \left(\sum_m c_m(p)^p \chi_{(a,t_m]}^p + B^p \chi_{(a,b)}^p \right)^{1/p} \right\|_X = \|T\|_{\Omega_0} \|\tilde{g}\|_X.$$

На последнем шаге применяем равенство (4.4) при $s = p$. Следовательно, для любого $g \in \Omega$ мы получаем неравенство

$$\|T[g]\|_Y \leqslant \|T\|_{\Omega_0} \|\tilde{g}\|_X, \tag{4.9}$$

где $\tilde{g}$ — «ступенчатая мажоранта» (4.1).

Далее, для $n = 1, 2, 3, \ldots$ строим последовательности $\{t_m(n)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ таким образом, что соответствующие ступенчатые функции $\tilde{g}_n$ вида (4.1) образуют невозрастающую последовательность, всюду стремящуюся к заданной функции $g \in \Omega$. По свойству порядковой непрерывности (квази)нормы в пространстве X имеем

$$\|\tilde{g}_n\|_X \to \|g\|_X \ (n \to \infty).$$

Теперь воспользуемся неравенством (4.9) с $\tilde{g}_n$ вместо $\tilde{g}$ и перейдём к пределу при $n \to \infty$. В результате получаем неравенство

$$\|T[g]\|_Y \leqslant \|T\|_{\Omega_0} \|g\|_X, \quad g \in \Omega, \tag{4.10}$$

так что $\|T\|_\Omega \leqslant \|T\|_{\Omega_0}$. Обратное очевидно, потому что при предположении (2.15) имеет место вложение $\Omega_0 \subset \Omega$. Таким образом, получаем равенство (2.16).

2. В условиях части 1 теоремы 2.1 имеем

$$g \in \dot{\Omega} \Rightarrow B := \lim_{t \to b-0} g(t) = 0.$$

Поэтому достаточно положить $B = 0$ (соответственно, $\psi = 0$) в приведенных выше рассуждениях. При этом все слагаемые, содержащие функцию $\chi_{(a,b)}$, имеют множитель $B = 0$ и, следовательно, пропадают независимо от выполнения или нарушения условия невырожденности (2.13). В итоге получим $\|T\|_{\dot{\Omega}_0}$ вместо $\|T\|_{\Omega_0}$ в (4.9), (4.10), так что $\|T\|_{\dot{\Omega}} \leqslant \|T\|_{\dot{\Omega}_0}$. Обратное очевидно, так как имеет место вложение $\dot{\Omega}_0 \subset \dot{\Omega}$. Следовательно, мы приходим к (2.12).

Замечание 4.1. Итак, доказаны часть 1 и часть 3 теоремы 2.1. С учетом замечания 2.1 видим, что теорема 2.1 полностью доказана.

Замечание 4.2. Во многих случаях имеет место равенство (4.7):

$$F_0(x, b) = F(x, b) \quad \gamma - \text{п.в.}, \tag{4.11}$$

что приводит к $\|T\|_{\Omega_0} = \|T\|_{\dot{\Omega}_0}$ согласно (2.12).

Например, (4.11) выполняется для любого ограниченного линейного оператора $T : X \to Y$. Действительно, для любого $\{t_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$; $t_m \uparrow b$ $(m \uparrow +\infty)$

$$\|F(\cdot, b) - F(\cdot, t_m)\|_Y = \left\|T\left[\chi_{(a,b)} - \chi_{(a,t_m]}\right]\right\|_Y \leqslant \|T\| \left\|\chi_{(t_m,b)}\right\|_X \to 0 \, (m \uparrow +\infty).$$

Здесь мы учитываем, что $\chi_{(t_m,b)} \downarrow 0 \, (m \uparrow +\infty)$, а идеальное пространство X имеет порядково непрерывную (квази)норму. Далее,

$$0 \leqslant F(x, b) - F_0(x, b) \leqslant F(x, b) - F(x, t_m), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, для идеального пространства Y имеем

$$\|F(\cdot, b) - F_0(\cdot, b)\|_Y \leqslant \|F(\cdot, b) - F(\cdot, t_m)\|_Y.$$

Это влечёт $\|F(\cdot, b) - F_0(\cdot, b)\|_Y = 0 \Rightarrow (4.11)$.

Замечание 4.3. Есть случаи, когда равенство (4.11) не выполнено. Например, рассмотрим случай $N = J = (a, b)$, $T_0[g](x) = g(b-0)\chi_J(x)$, $g \in G$. Тогда

$$T_0[g](x) = 0, \quad g \in \dot{\Omega}_0 \Rightarrow \|T_0\|_{\dot{\Omega}_0} = 0; \quad T_0[\chi_J] = \chi_J \Rightarrow \|T_0\|_{\Omega_0} = \frac{\|\chi_J\|_Y}{\|\chi_J\|_X} > 0.$$

4.2. Следствия.

Следствие 4.1. *Пусть* $0 < p \leqslant min\{q, r\} < \infty$; $X \subset S(J, \beta)$ *— идеальное* l_p*-вогнутое пространство с порядково непрерывной* (*квази*)*нормой, и выполнено условие* (2.13). *Пусть* $Y = L_q(N, \gamma)$, *и* T *—* l_r*-выпуклый монотонный оператор. Тогда выполнено равенство* (2.14).

Следствие 4.2. *Пусть* $0 < p \leqslant min\{q, r\} < \infty$; $X \subset S(J, \beta)$ *— идеальное* l_p*-вогнутое пространство с порядково непрерывной* (*квази*)*нормой, и выполнено условие* (2.15). *Пусть* $Y = L_q(N, \gamma)$, *и* T *—* l_r*-выпуклый монотонный оператор. Тогда выполнено равенство* (2.16).

Для доказательства этих следствий нам понадобится лемма о свойствах выпуклости пространств Лебега.

Лемма 4.1. *Пусть* $0 < q < \infty$. *Тогда* $Y = L_q(N, \gamma)$ *— идеальное* l_ρ*-выпуклое пространство для любых* $\rho \in (0, q]$.

Доказательство. Обозначим
$$A = \left\| \left(\sum_m |y_m|^\rho \right)^{1/\rho} \right\|_Y . \tag{4.12}$$
Покажем,что
$$A \leqslant \left(\sum_m \|y_m\|_Y^\rho \right)^{1/\rho} . \tag{4.13}$$
При $\rho = q$ имеем
$$A^q = \int\limits_N \sum_m |y_m|^q d\gamma = \sum_m \int\limits_N |y_m|^q d\gamma = \sum_m \|y_m\|_Y^q,$$
так что (4.13) является равенством. Пусть теперь $0 < \rho < q$. Тогда
$$A^q = \int\limits_N \left(\sum_m |y_m|^\rho \right) \left(\sum_l |y_l|^\rho \right)^{q/\rho - 1} d\gamma = \sum_m \int\limits_N |y_m|^\rho \left(\sum_l |y_l|^\rho \right)^{\frac{q-\rho}{\rho}} d\gamma.$$
Затем применим неравенство Гёльдера к каждому члену со степенями $p = q/\rho > 1$ и $p' = q/(q-\rho)$, $1/p + 1/p' = 1$, и получим
$$A^q \leqslant \sum_m \left(\int\limits_N |y_m|^q d\gamma \right)^{\rho/q} \left(\int\limits_N \left(\sum_l |y_l|^\rho \right)^{q/\rho} d\gamma \right)^{\frac{q-\rho}{q}} = A^{q-\rho} \sum_m \left(\int\limits_N |y_m|^q d\gamma \right)^{\rho/q} .$$
Поэтому
$$A^\rho \leqslant \sum_m \left(\int\limits_N |y_m|^q d\gamma \right)^{\rho/q} = \sum_m \|y_m\|_Y^\rho .$$
Таким образом, получаем неравенство (4.13), что означает l_ρ-выпуклость идеального пространства $Y = L_q(N, \gamma)$. □

Доказательство следствий 4.1 *и* 4.2. Обозначим $\rho = min\,\{q, r\}$. Тогда $p \leqslant \rho \leqslant r$. Согласно лемме 4.1 пространство $Y = L_q(N, \gamma)$ — l_ρ-выпуклое, и мы можем применить теорему 2.1 с ρ вместо q. Таким образом, выполнено равенство (4.13) для $Y = L_q(N, \gamma)$. Доказательство следствия 4.2 аналогично. □

5. Обобщение условий монотонности

Аналогичные результаты справедливы для конусов функций со свойствами монотонности относительно заданной положительной функции $k \in C(J)$. Определим
$$\Omega_k \equiv \Omega(X, k) = \{g \in X : g \geqslant 0,\ g(t)/k(t) \downarrow;\ g(t) = g(t-0),\ t \in (a, b)\} , \tag{5.1}$$
$$\dot\Omega_k \equiv \dot\Omega(X, k) = \{g \in \Omega_k :\ g(t)/k(t) \to 0, t \to b - 0\} \tag{5.2}$$
(в этих обозначениях при $k(t) \equiv 1$ имеем: $\Omega_1 = \Omega$, $\dot\Omega_1 = \dot\Omega$, см. (2.7)). Обозначим
$$\begin{aligned} &\dot\Omega_{k,0} \equiv \dot\Omega_0(X, k) = \left\{ k\chi_{(a,t]} : a < t < b \right\} , \\ &\Omega_{k,0} \equiv \Omega_0(X, k) = \dot\Omega_{k,0} \cup \left\{ k\chi_{(a,b)} \right\} . \end{aligned} \tag{5.3}$$

Теорема 5.1. *Пусть* $0 < p \leqslant q \leqslant r < \infty$; $X \subset S(J, \beta)$ — *идеальное* l_p*-вогнутое пространство с порядково непрерывной (квази)нормой;* $Y \subset S(N, \gamma)$ — *идеальное* l_q*-выпуклое пространство, и* $T : \Omega_k \to Y$ — l_r*-выпуклый монотонный оператор.*

1. *Тогда справедливы соотношения*
$$\|T\|_{\dot\Omega_k} = \|T\|_{\dot\Omega_{k,0}} := \sup_{a<t<b} \left[\|F_k(\cdot, t)\|_Y \|k(\cdot)\chi_{(a,t]}(\cdot)\|_X^{-1} \right] , \tag{5.4}$$

где
$$F_k(x, t) = T[k\chi_{(a,t]}](x), \quad a < t < b. \tag{5.5}$$

2. *При выполнении дополнительного условия невырожденности*

$$\|k\chi_{(a,b)}\|_X = \infty \tag{5.6}$$

справедливы соотношения

$$\|T\|_{\Omega_k} = \|T\|_{\dot{\Omega}_k} = \|T\|_{\dot{\Omega}_{k,0}} = \sup_{a<t<b} \left[\|F_k(\cdot,t)\|_Y \|k(\cdot)\chi_{(a,t]}(\cdot)\|_X^{-1}\right]. \tag{5.7}$$

3. *При наличии вырождения*

$$\|k\chi_{(a,b)}\|_X < \infty \tag{5.8}$$

справедливы соотношения

$$\|T\|_{\Omega_k} = \|T\|_{\Omega_{k,0}} := \max\left\{\|T\|_{\dot{\Omega}_{k,0}}, \|F_k(\cdot,b)\|_Y \|k\chi_{(a,b)}(\cdot)\|_X^{-1}\right\}, \tag{5.9}$$

где

$$F_k(x,b) = T[k\chi_{(a,b)}](x). \tag{5.10}$$

Замечание 5.1. Отметим, что в невырожденном случае

$$\|k\chi_{(a,b)}\|_X = \infty \quad \Rightarrow \quad \Omega_k = \dot{\Omega}_k, \tag{5.11}$$

так как

$$\left\{0 \leqslant g/k \downarrow, \lim_{t\to b-0}[g(t)/k(t)] > 0\right\} \quad \Rightarrow \quad g \notin X. \tag{5.12}$$

Это означает, что в случае (5.6) справедливо равенство $\|T\|_{\Omega_k} = \|T\|_{\dot{\Omega}_k}$. Поэтому для вычисления $\|T\|_{\Omega_k}$ применима формула (5.4). Таким образом, справедливо соотношение (5.7), и часть 2 теоремы 5.1 следует из ее части 1.

Доказательство. Формально эта теорема более общая, чем теорема 2.1, но мы можем легко свести её к теореме 2.1.

Рассмотрим l_r-выпуклый монотонный оператор $T : \Omega(X,k) \to Y$. Определим

$$X_k := \{f \in S(J,\beta) : kf \in X\} = \{f = g/k : g \in X\}, \quad \|f\|_{X_k} = \|g\|_X. \tag{5.13}$$

Тогда у нас есть эквивалентность:

$$g \in \Omega(X,k) \quad \Leftrightarrow \quad f = g/k \in \Omega(X_k,1); \quad \|f\|_{X_k} = \|kf\|_X. \tag{5.14}$$

см. (5.1), (5.2), (5.13). Поэтому

$$\|T\|_{\Omega(X,k)} = \sup\left\{\frac{\|T[g]\|_Y}{\|g\|_X} : 0 \neq g \in \Omega(X,k)\right\} = \sup\left\{\frac{\|T[kf]\|_Y}{\|f\|_{X_k}} : 0 \neq f \in \Omega(X_k,1)\right\}.$$

Отметим, что X_k, как и X, является идеальным l_p-вогнутым пространством с порядково непрерывной (квази)нормой, а оператор

$$T_k : \Omega(X_k,1) \to Y; \quad T_k[f] := T[kf], \quad f \in \Omega(X_k,1),$$

— l_r-выпуклый вместе с оператором T. Замечание 5.1 при этом примет вид замечания 2.1. Таким образом, применима теорема 2.1, и мы получаем все утверждения теоремы 5.1. □

6. Приложения. Вычисление нормы интегрального оператора на конусе функций со свойством монотонности

Рассмотрим здесь одно приложение общих результатов, приведенных в разделах 2–5, а именно: вычисление нормы интегрального оператора на конусе функций со свойством монотонности. В нашей статье [5] представлено множество других приложений этих общих результатов в теории весовых пространств Лоренца, при вычислении ассоциированных норм на конусах монотонных функций и т. д.

Пусть $K = K(x,\tau)$ — неотрицательная измеримая функция переменных $(x,\tau) \in N \otimes J$, где $(N;\gamma)$ и $(J;\mu)$ — пространства с неотрицательной σ-конечной σ-аддитивной мерой γ и неотрицательной борелевской мерой μ на $J = (a,b)$.

$$T_{r\mu}[f](x) = \left(\int\limits_{(a,b)} K(x,\tau)|f(\tau)|^r d\mu(\tau) \right)^{1/r}, \quad r \in (0,\infty). \tag{6.1}$$

Это l_r-выпуклый монотонный оператор. При $r = 1$ его сужение на множество неотрицательных μ-измеримых функций совпадает с сужением линейного интегрального оператора

$$T[f](x) = \int\limits_{(a,b)} K(x,\tau)f(\tau)d\mu(\tau). \tag{6.2}$$

Здесь применимы результаты разделов 2–5. В частности, для сужения оператора $T_{r\mu}$ на конус Ω_k применение теоремы 5.1 дает следующие результаты.

Теорема 6.1. *Пусть* $0 < p \leqslant q \leqslant r < \infty$; $X \subset S(J,\beta)$ — *идеальное* l_p-*вогнутое пространство с порядково непрерывной* (*квази*)*нормой*; $Y \subset S(N,\gamma)$ — l_q-*выпуклое идеальное пространство, и*

$$\|k\chi_{(a,b)}\|_X = \infty. \tag{6.3}$$

Тогда

$$\|T_{r\mu}\|_{\Omega_k} = \|T_{r\mu}\|_{\dot{\Omega}_{k,0}} := \sup_{a<t<b} \left\{ \|T_{r\mu}[k\chi_{(a,t]}]\|_Y \|k\chi_{(a,t]}\|_X^{-1} \right\}. \tag{6.4}$$

Здесь

$$T_{r\mu}[k\chi_{(a,t]}](x) = \int\limits_{(a,t]} K(x,\tau)k(\tau)^r d\mu(\tau), \quad x \in N. \tag{6.5}$$

В случае

$$\|k\chi_{(a,b)}\|_X < \infty \tag{6.6}$$

имеем $\|T_{r\mu}\|_{\dot{\Omega}_k} = \|T_{r\mu}\|_{\dot{\Omega}_{k,0}}$ (*см.* (6.4)),

$$\|T_{r\mu}\|_{\Omega_k} = \max \left\{ \|T_{r\mu}\|_{\dot{\Omega}_{k,0}}; \quad \|T_{r\mu}[k\chi_{(a,b)}]\|_Y \|k\chi_{(a,b)}\|_X^{-1} \right\}. \tag{6.7}$$

Замечание 6.1. Для сужения на конус $\Omega = \Omega_1$ неотрицательных убывающих непрерывных слева функций необходимо принять $k(\tau) = 1$ в (6.3)–(6.7).

Замечание 6.2. В случае $Y = L_q(N,\gamma)$ результаты теоремы 6.1 остаются верными, если $0 < p \leqslant \min\{q,r\} < \infty$, см. следствия 4.1 и 4.2.

Замечание 6.3. В качестве конкретизации оператора (6.1) рассмотрим случай, когда $(N,\gamma) = (J,\gamma)$ с неотрицательной мерой Бореля γ на $J = (a,b)$, и $T_{r\mu}$ совпадает с обобщенным оператором типа Харди

$$A_{r\mu}[f](x) = \left(\int\limits_{(a,x]} |f(\tau)|^r d\mu(\tau) \right)^{1/r}, \quad x \in (a,b). \tag{6.8}$$

Тогда

$$A_{r\mu}[k\chi_{(a,t]}](x) = \left(\int\limits_{(a,x]} k(\tau)^r d\mu(\tau) \right)^{1/r}, \quad x \leqslant t,$$

$$A_{r\mu}[k\chi_{(a,t]}](x) = \left(\int\limits_{(a,t]} k(\tau)^r d\mu(\tau) \right)^{1/r}, \quad x > t, \tag{6.9}$$

и мы имеем равенства в случае (6.3):

$$\|A_{r\mu}\|_{\Omega_k} = \|A_{r\mu}\|_{\dot{\Omega}_{k,0}} := \sup_{a<t<b} \left\{ \left\|A_{r\mu}[k\chi_{(a,t]}]\right\|_Y \left\|k\chi_{(a,t]}\right\|_X^{-1} \right\}; \tag{6.10}$$

в случае (6.6) формула (6.10) остается верной для $\|A_{r\mu}\|_{\dot{\Omega}_k}$, но

$$\|A_{r\mu}\|_{\Omega_k} = \max \left\{ \|A_{r\mu}\|_{\dot{\Omega}_{k,0}}; \quad \left\|A_{r\mu}[k\chi_{(a,b)}]\right\|_Y \left\|k\chi_{(a,b)}\right\|_X^{-1} \right\}. \tag{6.11}$$

Благодарности

Исследование (все разделы, кроме раздела 6) выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00087) в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук. Результаты раздела 6 получены в Российском университете дружбы народов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984.
2. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. — М.: Наука, 1978.
3. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.
4. *Bakhtigareeva E.G., Goldman M.L.* Construction of an optimal envelope for a cone of nonnegative functions with monotonicity properties// Proc. Steklov Inst. Math. — 2016. — *293*. — С. 37–55.
5. *Bakhtigareeva E.G., Goldman M.L.* Calculation of the norms for monotone operators on the cones of functions with monotonicity properties// Lobachevskii J. Math. — 2021. — *42*, № 5. — С. 857–874.
6. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of operators. — Boston: Acad. Press, 1988.
7. *Berg J., Löfström J.* Interpolation spaces. An Introduction. — Berlin: Springer, 1976.
8. *Burenkov V.I., Goldman M.L.* Calculation of the norm of a positive operator on the cone of monotone functions// Proc. Steklov Inst. Math. — 1995. — *210*. — С. 47–65.
9. *Gogatishvili A., Stepanov V.D.* Reduction theorems for weighted integral inequalities on the cone of monotone functions// J. Math. Anal. Appl. — 2013. — *68*, № 4. — С. 597–664.
10. *Gogatishvili A., Stepanov V.D.* Reduction theorems for operators on the cone of monotone functions// Russ. Math. Surv. — 2013. — *405*, № 1. — С. 156–172.

Э.Г. Бахтигареева
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: bakhtigareeva-eg@rudn.ru

М.Л. Гольдман
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: seulydia@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-455-471 UDC 517.98

On Calculation of the Norm of a Monotone Operator in Ideal Spaces

© 2021 **E. G. Bakhtigareeva, M. L. Goldman**

Abstract. This paper contains the proof of general results on the calculation of the norms of monotone operators acting from one ideal space to another under matching convexity and concavity properties of the operator and the norms in ideal spaces.

REFERENCES

1. L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).
2. S. G. Kreyn, Yu. I. Petunin, and E. M. Semenov, *Interpolyatsiya lineynykh operatorov* [Interpolation of Linear Operators], Nauka, M., 1978 (in Russian).
3. Kh. Tribel', *Teoriya interpolyatsii. Funktsional'nye prostranstva. Differentsial'nye operatory* [Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators], Mir, Moscow, 1980 (Russian translation).
4. E. G. Bakhtigareeva and M. L. Goldman, "Construction of an optimal envelope for a cone of nonnegative functions with monotonicity properties," *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, **293**, 37–55.
5. E. G. Bakhtigareeva and M. L. Goldman, "Calculation of the norms for monotone operators on the cones of functions with monotonicity properties," *Lobachevskii J. Math.*, 2021, **42**, No. 5, 857–874.
6. C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Acad. Press, Boston, 1988.
7. J. Berg and J. Löfström, *Interpolation Spaces. An Introduction*, Springer, Berlin, 1976.
8. V. I. Burenkov and M. L. Goldman, "Calculation of the norm of a positive operator on the cone of monotone functions," *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1995, **210**, 47–65.
9. A. Gogatishvili and V. D. Stepanov, "Reduction theorems for weighted integral inequalities on the cone of monotone functions," *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, **68**, No. 4, 597–664.
10. A. Gogatishvili and V. D. Stepanov, "Reduction theorems for operators on the cone of monotone functions," *Russ. Math. Surv.*, 2013, **405**, No. 1, 156–172.

E. G. Bakhtigareeva
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: bakhtigareeva-eg@rudn.ru

M. L. Goldman
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: seulydia@yandex.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 3 (2021). С. 472–482
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-472-482 УДК 517.518

О НЕРАВЕНСТВЕ ГЕЛЬДЕРА В ЛЕБЕГОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ПЕРЕМЕННЫМ ПОРЯДКОМ СУММИРУЕМОСТИ

© 2021 г. **В. И. БУРЕНКОВ, Т. В. ТАРАРЫКОВА**

Аннотация. В статье вводится новый вариант определения квази-нормы (в частности, нормы) в лебеговых пространствах с переменным порядком суммируемости и с его помощью доказывается аналог неравенства Гельдера для таких пространства, более общий и более точный по сравнению с известными ранее.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В последние три десятилетия проявляется значительный интерес к изучению лебеговых пространств с переменным порядком суммируемости, представляющих интерес как с точки зрения развития теории функциональных пространств (см., например, [1, 6–8, 10, 11, 13, 14, 16, 17]), так и с точки зрения применений к теории дифференциальных и интегральных уравнений (см., например, [2, 4, 12, 15]).

Историю вопроса и подробное изложение теории лебеговых пространствах с переменным порядком суммируемости можно найти в книгах [9, 12]. Одной из первых работ в этом направлении была статья [5].

Всюду в этой статье $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — это измеримое по Лебегу множество, а $p, q : \Omega \to (0, \infty]$ — измеримые по Лебегу функции.

В случае, когда $p : \Omega \to (0, \infty)$, стандартное определение лебеговых пространств с переменным порядком суммируемости $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ имеет следующий вид: $f \in L_{p(\cdot)}(\Omega)$, если $f : \Omega \to \mathbb{C}$, f измерима по Лебегу на Ω и

$$\|f\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int\limits_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} dx \leqslant 1\right\} < \infty. \tag{1.1}$$

В случае, когда $p : \Omega \to [1, \infty]$, О. Ковачик и Й. Ракосник [13, с. 593] дополнили это определение и дали следующее определение. Пусть $\Omega_\infty = \{x \in \Omega : p(x) = \infty\}$. Тогда $f \in L^{KR}_{p(\cdot)}(\Omega)$, если $f : \Omega \to \mathbb{C}$, f измерима по Лебегу на Ω и

$$\|f\|^{KR}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\infty} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} dx + \left\|\frac{f}{\lambda}\right\|_{L_\infty(\Omega_\infty)} \leqslant 1\right\} < \infty. \tag{1.2}$$

Отметим, что $L^{KR}_{p(\cdot)}(\Omega) = L_{p(\cdot)}(\Omega \setminus \Omega_\infty) \cap L_\infty(\Omega_\infty)$, это нормированное пространство с нормой $\|f\|^{KR}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)}$ и

$$\max\left\{\|f\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega\setminus\Omega_\infty)}, \|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)}\right\} \leqslant \|f\|^{KR}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega\setminus\Omega_\infty)} + \|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)}. \tag{1.3}$$

В частности, если $p : \Omega \to [1, \infty)$, то

$$\|f\|^{KR}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} = \|f\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega\setminus\Omega_\infty)}, \tag{1.4}$$

а если $p(x) = \infty$ для любых $x \in \Omega$, то

$$\|f\|^{KR}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} = \|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)}. \tag{1.5}$$

В [13, с. 594-595] доказан приводимый ниже вариант неравенства Гельдера для пространств $L_{p(\cdot)}(\Omega)$. Пусть $\Omega_1 = \{x \in \Omega : p(x) = 1\}, \Omega_* = \Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_\infty)$; $p_* = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega_*} p(x)$, $p^* = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega_*} p(x)$, если meas $\Omega_* > 0$, и $p_* = p^* = 1$, если meas $\Omega_* = 0$. Считается также, что $\dfrac{1}{\infty} = 0$.

Теорема 1.1. *Пусть* $p : \Omega \to [1, \infty]$. *Тогда*

$$\int\limits_\Omega |f(x)g(x)|dx \leqslant K^{(1)}_{p(\cdot)} \|f\|^{KR}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} \|g\|^{KR}_{L_{p'(\cdot)}(\Omega)} \tag{1.6}$$

для любых $f \in L_{p(\cdot)}(\Omega)$, $g \in L_{p'(\cdot)}(\Omega)$, *где*

$$K^{(1)}_{p(\cdot)} = \|\chi_{\Omega_1}\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\chi_{\Omega_*}\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\chi_{\Omega_\infty}\|_{L_\infty(\Omega)} + \frac{1}{p_*} - \frac{1}{p^*}, \tag{1.7}$$

χ_G *обозначает характеристическую функцию множества* G, *а* $p'(\cdot)$ — *показатель, сопряженный к* $p(\cdot)$: $p'(x) = \dfrac{p(x)}{p(x)-1}$, *если* $1 < p(x) < \infty$, $p'(x) = \infty$, *если* $p(x) = 1$, *и* $p'(x) = 1$, *если* $p(x) = \infty$.

В [9, с. 27-28] неравенство (1.6) доказано с немного большей постоянной

$$K^{(2)}_{p(\cdot)} = \|\chi_{\Omega_1}\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\chi_{\Omega_\infty}\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\chi_{\Omega_*}\|_{L_\infty(\Omega)}\Big(1 + \frac{1}{\underline{p}} - \frac{1}{\overline{p}}\Big) \tag{1.8}$$

вместо $K^{(1)}_{p(\cdot)}$, где $\underline{p} = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p(x)$, $\overline{p} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p(x)$. (Если meas $\Omega_1 =$ meas $\Omega_\infty = 0$, то $K^{(2)}_{p(\cdot)} = K^{(1)}_{p(\cdot)}$, а если meas $\Omega_1 > 0$ или meas $\Omega_\infty > 0$, то может оказаться, что $\underline{p} < p_*$ или $\overline{p} > p^*$, и тогда $K^{(2)}_{p(\cdot)} > K^{(1)}_{p(\cdot)}$.)

Таким образом, $\dfrac{1}{p_*} - \dfrac{1}{p^*} \leqslant K^{(1)}_{p(\cdot)} \leqslant K^{(2)}_{p(\cdot)} \leqslant 4$. Если $p : \Omega \to (1, \infty)$, то $K^{(2)}_{p(\cdot)} = K^{(1)}_{p(\cdot)} = 1 + \dfrac{1}{\underline{p}} - \dfrac{1}{\overline{p}}$ и неравенство (1.6) принимает вид

$$\int\limits_\Omega |f(x)g(x)|dx \leqslant \Big(1 + \frac{1}{\underline{p}} - \frac{1}{\overline{p}}\Big) \|f\|^{KR}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} \|g\|^{KR}_{L_{p'(\cdot)}(\Omega)}. \tag{1.9}$$

В [9, с. 28-29] также доказано приводимое далее следствие из неравенства (1.6) $\big($с $K^{(2)}_{p(\cdot)}$ вместо $K^{(1)}_{p(\cdot)}\big)$.

Следствие 1.1. *Пусть* $p, q : \Omega \to [1, \infty]$, *для любых* $x \in \Omega$ $p(x) \leqslant q(x)$, $r(x) = \dfrac{p(x)q(x)}{q(x)-p(x)}$, *если* $p(x) < q(x) < \infty$, $r(x) = 1$, *если* $p(x) < q(x) = \infty$, *и* $r(x) = \infty$, *если* $p(x) = q(x)$. *Тогда*

$$\|fg\|^{KR}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant K^{(3)}_{p(\cdot),q(\cdot)} \|f\|^{KR}_{L_{q(\cdot)}(\Omega)} \|g\|^{KR}_{L_{r(\cdot)}(\Omega)} \tag{1.10}$$

для любых $f \in L_{q(\cdot)}(\Omega)$ *и* $g \in L_{r(\cdot)}(\Omega)$, *где*

$$K^{(3)}_{p(\cdot),q(\cdot)} = K^{(2)}_{s(\cdot)} + 1, \tag{1.11}$$

а $s(x) = \dfrac{q(x)}{p(x)}$, *если* $p(x) < \infty, q(x) < \infty$, $s(x) = 1$, *если* $p(x) = q(x)$, *и* $s(x) = \infty$, *если* $p(x) < \infty$, $q(x) = \infty$.

Целью данной работы является введение нового варианта определения квази-нормы (в частности, нормы) в пространствах $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ и доказательство с его помощью более общих и более точных аналогов неравенства Гельдера для этих пространств по сравнению с неравенствами (1.6) и (1.10).

2. Основные результаты

В данной статье, в отличие от [13], мы будем пользоваться определением (1.1) пространств $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ и в случае, когда $p : \Omega \to (0,\infty]$, считая, что $a^\infty = 0$ для $0 \leqslant a < 1$, $1^\infty = 1$, $a^\infty = \infty$ для $a > 1$ и что интеграл по множеству нулевой лебеговой меры равен 0 для любой функции $\varphi : \Omega \to [0,\infty]$. Соответственно, для $p : \Omega \to (0,\infty]$ мы говорим, что $f \in L^{BT}_{p(\cdot)}(\Omega)$. если $f : \Omega \to \mathbb{C}$, f измерима по Лебегу на Ω и

$$\|f\|^{BT}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int\limits_\Omega \Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{p(x)} dx\right\} < \infty. \tag{2.1}$$

Отметим, что $L^{BT}_{p(\cdot)}(\Omega) = L_{p(\cdot)}(\Omega\backslash\Omega_\infty)\cap L_\infty(\Omega_\infty)$, это квази-нормированное пространство с квази-нормой $\|f\|^{BT}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)}$ (нормой, если $p(x) \geqslant 1$ на Ω). Таким образом, пространства $L^{BT}_{p(\cdot)}(\Omega)$ и $L^{KR}_{p(\cdot)}(\Omega)$ совпадают как множества.

Мы также будем пользоваться следующим обозначением. Для любого измеримого по Лебегу множества $G \subset \Omega$ и $\lambda > 0$

$$\rho_\lambda(p(\cdot), f, G) = \int\limits_G \Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{p(x)} dx,$$

в частности,

$$\rho_\lambda(p(\cdot), f, \Omega_\infty) = \int\limits_{G_\infty} \Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{\infty} dx.$$

Если $\|f\|_{L_\infty(\Omega)} < \infty$, то для любого $\lambda > \|f\|_{L_\infty(\Omega)}$ неравенство $\dfrac{|f(x)|}{\lambda} < 1$ выполняется на некотором подмножестве $G_\lambda \subset \Omega_\infty$ полной меры и

$$\rho_\lambda(p(\cdot), f, \Omega_\infty) = \int\limits_{G_\lambda} \Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{\infty} dx = 0,$$

а при $\lambda < \|f\|_{L_\infty(\Omega)}$ существует такое подмножество $H_\lambda \subset \Omega$ положительной меры, что $|f(x)| > \lambda$ для любых $x \in H_\lambda$ и

$$\rho_\lambda(p(\cdot), f, \Omega) = \int\limits_\Omega \Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{p(x)} dx \geqslant \int\limits_{H_\lambda} \Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{\infty} dx = \infty.$$

В этих обозначениях

$$\|f\|^{BT}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf\{\lambda > 0 : \rho_\lambda(p(\cdot), f, \Omega) \leqslant 1\}.$$

Лемма 2.1. *Пусть* $p : \Omega \to (0,\infty]$. *Тогда для любой функции* $f \in L^{BT}_{p(\cdot)}(\Omega) = L_{p(\cdot)}(\Omega \setminus \Omega_\infty) \cap L_\infty(\Omega_\infty)$ *справедливо равенство*

$$\|f\|^{BT}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} = \max\{\|f\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega\backslash\Omega_\infty)}, \|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)}\}. \tag{2.2}$$

Доказательство.

1. Пусть $\sigma : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — невозрастающая функция и $\lambda_0 > 0$. Если $\sigma(\lambda_0) \leqslant 1$, то

$$\{\lambda \geqslant \lambda_0 : \sigma(\lambda) \leqslant 1\} = [\lambda_0, \infty), \quad \{\lambda > \lambda_0 : \sigma(\lambda) \leqslant 1\} = (\lambda_0, \infty),$$

а если $\sigma(\lambda_0) > 1$, то $\lambda_0 \notin \{\lambda \geqslant \lambda_0 : \sigma(\lambda) \leqslant 1\}$ и

$$\{\lambda \geqslant \lambda_0 : \sigma(\lambda) \leqslant 1\} = \{\lambda > \lambda_0 : \sigma(\lambda) \leqslant 1\}.$$

В обоих случаях

$$\inf\{\lambda \geqslant \lambda_0 : \sigma(\lambda) \leqslant 1\} = \inf\{\lambda > \lambda_0 : \sigma(\lambda) \leqslant 1\}. \tag{2.3}$$

2. Как отмечено выше, если $\lambda < \|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)}$, то $\int\limits_{\Omega_\infty} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^\infty dx = \infty$, а если $\lambda > \|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)}$, то $\int\limits_{\Omega_\infty} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^\infty dx = 0$, поэтому с учетом равенства (2.3) имеем

$$\begin{aligned}\|f\|^{BT}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} &= \inf\Big\{\lambda > 0 : \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\infty} \Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{p(x)} dx + \int\limits_{\Omega_\infty} \Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{\infty} dx \leqslant 1\Big\} = \\ &= \inf\Big\{\lambda \geqslant \|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)} : \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\infty} \Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{p(x)} dx + \int\limits_{\Omega_\infty} \Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{\infty} dx \leqslant 1\Big\} = \\ &= \inf\Big\{\lambda > \|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)} : \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\infty} \Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{p(x)} dx + \int\limits_{\Omega_\infty} \Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{\infty} dx \leqslant 1\Big\} = \\ &= \inf\Big\{\lambda > \|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)} : \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\infty} \Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{p(x)} dx \leqslant 1\Big\} = \\ &= \inf\{\lambda > \|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)} : \rho_\lambda(p(\cdot), f, \Omega\setminus\Omega_\infty) \leqslant 1\}.\end{aligned}$$

3. Пусть $\|f\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega\setminus\Omega_\infty)} \leqslant \|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)}$. Тогда $\rho_\lambda(p(\cdot), f, \Omega\setminus\Omega_\infty) \leqslant 1$ для любого $\lambda > \|f\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega\setminus\Omega_\infty)}$, а значит, и для любого $\lambda > \|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)}$. Поэтому

$$\{\lambda > \|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)} : \rho_\lambda(p(\cdot), f, \Omega\setminus\Omega_\infty) \leqslant 1\} = (\|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)}, \infty)$$

и согласно п. 2

$$\|f\|^{BT}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} = \|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)}. \tag{2.4}$$

4. Пусть $\|f\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega\setminus\Omega_\infty)} > \|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)}$. Тогда $\rho_\lambda(p(\cdot), f, \Omega\setminus\Omega_\infty) > 1$ для любого $\lambda < \|f\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega\setminus\Omega_\infty)}$, и с учетом равенства (2.3)

$$\begin{aligned}&\{\lambda > \|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)} : \rho_\lambda(p(\cdot), f, \Omega\setminus\Omega_\infty) \leqslant 1\} = \\ &= \{\lambda \geqslant \|f\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega\setminus\Omega_\infty)} : \rho_\lambda(p(\cdot), f, \Omega\setminus\Omega_\infty) \leqslant 1\} = \\ &= \{\lambda > \|f\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega\setminus\Omega_\infty)} : \rho_\lambda(p(\cdot), f, \Omega\setminus\Omega_\infty) \leqslant 1\} = (\|f\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega\setminus\Omega_\infty)}, \infty).\end{aligned}$$

Поэтому согласно п. 2

$$\|f\|^{BT}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} = \|f\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega\setminus\Omega_\infty)}. \tag{2.5}$$

Равенства (2.4) и (2.5) означают, что выполняется равенство (2.2). □

Замечание 2.1. Если $p(x) = \infty$ для любых $x \in \Omega$, то согласно (2.2)

$$\|f\|^{BT}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} = \|f\|_{L_\infty(\Omega)}. \tag{2.6}$$

Замечание 2.2. Пусть $p : \Omega \to [1, \infty]$. Тогда $\|f\|^{BT}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)}$ является нормой на $L_{p(\cdot)}(\Omega)$, эквивалентной норме $\|f\|^{KR}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)}$. Действительно, согласно (1.3) и (2.2)

$$\frac{1}{2}\|f\|^{KR}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \|f\|^{BT}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \|f\|^{KR}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)}. \tag{2.7}$$

Замечание 2.3. Пусть $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_\infty$, $\Omega_1 \cap \Omega_\infty = \varnothing$, $\operatorname{meas}\Omega_1 < \infty$, $\operatorname{meas}\Omega_\infty > 0$, $a_1, a_2 \geqslant 0$; $p(x) = 1$, $f(x) = a_1$ на Ω_1; $p(x) = \infty$, $f(x) = a_\infty$ на Ω_∞.

Тогда

$$\begin{aligned}\|f\|^{KR}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} &= \inf\Big\{\lambda > 0 : \int\limits_{\Omega_1} \frac{a_1}{\lambda} dx + \Big\|\frac{a_\infty}{\lambda}\Big\|_{L_\infty(\Omega_\infty)} \leqslant 1\Big\} = \\ &= \inf\{\lambda > 0 : a_1 \operatorname{meas}\Omega_1 + a_\infty \leqslant \lambda\} = a_1 \operatorname{meas}\Omega_1 + a_\infty\end{aligned}$$

и

$$\|f\|^{BT}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} = \max\{\|f\|_{L_1(\Omega_1)}, \|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)}\} = \max\{a_1 \operatorname{meas}\Omega_1, a_\infty\}.$$

Если $a_1, a_\infty > 0$, то

$$\|f\|^{BT}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} < \|f\|^{KR}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)},$$

причем если $a_1 \operatorname{meas}\Omega_1 = a_\infty$, то $\|f\|^{KR}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} = 2\|f\|^{BT}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)}$ и левое неравенство в (2.7) обращается в равенство.

Если же $a_1 = 0$ или $a_\infty = 0$, то правое неравенство в (2.7) обращается в равенство.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, α, X, Y — неотрицательные измеримые на Ω функции,

$$\alpha(x) \leqslant 1, \quad \int\limits_\Omega X(x)\,dx \leqslant 1, \quad \int\limits_\Omega Y(x)\,dx \leqslant 1,$$

$\underline{\alpha} = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} \alpha(x)$, $\overline{\alpha} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \alpha(x)$.

В приводимых ниже рассуждениях мы будем часто пользоваться следующим простым неравенством:

$$\int\limits_\Omega (\alpha(x)X(x) + (1-\alpha(x))Y(x))\,dx \leqslant 1 + \overline{\alpha} - \underline{\alpha}. \tag{2.8}$$

При $\alpha(x) = 0$ или $\alpha(x) = 1$ может встретиться произведение $0\cdot\infty$. В этом случае мы считаем, что $0\cdot\infty = 0$. Если Ω_1 и Ω_2 — не пересекающиеся измеримые по Лебегу подмножества Ω,

$$X(x) = 0 \ \text{ на } \ \Omega\setminus\Omega_1, \int\limits_{\Omega_1} X(x)\,dx = 1; \quad Y(x) = 0 \ \text{ на } \ \Omega\setminus\Omega_2, \int\limits_{\Omega_2} Y(x)\,dx = 1,$$

и $\alpha(x) = \overline{\alpha}$ на Ω_1, $\alpha(x) = \underline{\alpha}$ на Ω_2, то неравенство (2.8) обращается в равенство.

Теорема 2.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое по Лебегу множество; $p, q : \Omega \to (0, \infty]$ — измеримые по Лебегу функции такие, что*

- *для любых $x \in \Omega$ $0 < p(x) \leqslant q(x) \leqslant \infty$;*
- *$r(x) = \dfrac{p(x)q(x)}{q(x)-p(x)}$, если $p(x) < q(x) < \infty$, $r(x) = p(x)$, если $p(x) < q(x) = \infty$, и $r(x) = \infty$, если $p(x) = q(x)$;*
- *$m = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} \dfrac{p(x)}{q(x)}$, $M = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \dfrac{p(x)}{q(x)}$, $\underline{p} = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p(x)$.*

Если $\underline{p} > 0$, то

$$\|fg\|^{BT}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant (1 + M - m)^{\frac{1}{\underline{p}}} \|f\|^{BT}_{L_{q(\cdot)}(\Omega)} \|g\|^{BT}_{L_{r(\cdot)}(\Omega)} \tag{2.9}$$

для любых $f \in L^{BT}_{q(\cdot)}(\Omega)$ и $g \in L^{BT}_{r(\cdot)}(\Omega)$.

Доказательство.

Шаг 1. Пусть сначала $0 < p(x) < q(x) < \infty$ для любых $x \in \Omega$, при этом $\Omega_* = \Omega$. Воспользуемся неравенством Юнга

$$ab \leqslant \frac{a^s}{s} + \frac{b^{s'}}{s'},$$

где $a, b \geqslant 0$, $s > 1$ и $s' = \dfrac{s}{s-1}$. Пусть

$$\lambda > \|f\|^{BT}_{L_{q(\cdot)}(\Omega)}, \quad \mu > \|g\|^{BT}_{L_{r(\cdot)}(\Omega)}. \tag{2.10}$$

Полагая $s = \dfrac{q(x)}{p(x)}$, $a = \Big(\dfrac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{p(x)}$ и $b = \Big(\dfrac{|g(x)|}{\mu}\Big)^{p(x)}$, получим, что $s' = \dfrac{q(x)}{q(x)-p(x)} = \dfrac{r(x)}{p(x)}$ и

$$\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\cdot\frac{|g(x)|}{\mu}\Big)^{p(x)} \leqslant \frac{p(x)}{q(x)}\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{q(x)} + \Big(1 - \frac{p(x)}{q(x)}\Big)\Big(\frac{|g(x)|}{\mu}\Big)^{r(x)}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega}\Big(\frac{|f(x)g(x)|}{\lambda\mu}\Big)^{p(x)}dx \leqslant \int\limits_{\Omega}\bigg(\frac{p(x)}{q(x)}\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{q(x)} + \Big(1-\frac{p(x)}{q(x)}\Big)\Big(\frac{|g(x)|}{\mu}\Big)^{r(x)}\bigg)dx. \tag{2.11}$$

Согласно (2.10) и определению пространств $L^{BT}_{q(\cdot)}(\Omega)$ и $L^{BT}_{r(\cdot)}(\Omega)$ имеем

$$\int\limits_{\Omega}\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{q(x)}dx \leqslant 1, \quad \int\limits_{\Omega}\Big(\frac{|g(x)|}{\mu}\Big)^{r(x)}dx \leqslant 1.$$

В силу неравенства (2.8) с

$$\alpha(x)=\frac{p(x)}{q(x)}, \quad X(x)=\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{q(x)}, \quad Y(x)=\Big(\frac{|g(x)|}{\mu}\Big)^{r(x)}$$

из неравенства (2.11) следует, что

$$\int\limits_{\Omega}\Big(\frac{|f(x)g(x)|}{\lambda\mu}\Big)^{p(x)}dx \leqslant 1+M-m.$$

Значит, поскольку $(1+M-m)^{-\frac{p(x)}{\underline{p}}} \leqslant (1+M-m)^{-1}$ для почти всех $x\in\Omega$,

$$\int\limits_{\Omega}\bigg(\frac{|f(x)|\cdot|g(x)|}{(1+M-m)^{\frac{1}{\underline{p}}}\lambda\mu}\bigg)^{p(x)}dx \leqslant \int\limits_{\Omega}\frac{1}{(1+M-m)}\Big(\frac{|f(x)|\cdot|g(x)|}{\lambda\mu}\Big)^{p(x)}dx \leqslant 1$$

и

$$\|fg\|^{BT}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant (1+M-m)^{\frac{1}{\underline{p}}}\lambda\mu. \tag{2.12}$$

Взяв инфимум по всем рассматриваемым λ и μ, получим неравенство (2.9).

Шаг 2. Пусть теперь $0<p(x)\leqslant q(x)<\infty$ для любых $x\in\Omega$, $G_1=\{x\in\Omega: p(x)<q(x)\}$, $G_2=\{x\in\Omega: p(x)=q(x)\}$ и выполняются неравенства (2.10). Согласно неравенству (2.8) с Ω, замененным на G_1, и с учетом того, что для почти всех $x\in G_2$ согласно равенству (2.6)

$$|g(x)| \leqslant \|g\|_{L_\infty(G_2)} = \|g\|^{BT}_{L_{r(\cdot)}(G_2)} \leqslant \|g\|^{BT}_{L_{r(\cdot)}(\Omega)}, \tag{2.13}$$

следовательно, $\dfrac{|g(x)|}{\mu}<1$, получим, что

$$\int\limits_{\Omega}\Big(\frac{|f(x)g(x)|}{\lambda\mu}\Big)^{p(x)}dx = \int\limits_{G_1}\Big(\frac{|f(x)g(x)|}{\lambda\mu}\Big)^{p(x)}dx + \int\limits_{G_2}\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{p(x)}\Big(\frac{|g(x)|}{\mu}\Big)^{p(x)}dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{G_1}\bigg(\frac{p(x)}{q(x)}\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{q(x)} + \Big(1-\frac{p(x)}{q(x)}\Big)\Big(\frac{|g(x)|}{\mu}\Big)^{r(x)}\bigg)dx + \int\limits_{G_2}\frac{p(x)}{q(x)}\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{q(x)}dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega}\bigg(\frac{p(x)}{q(x)}\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{q(x)} + \Big(1-\frac{p(x)}{q(x)}\Big)\Big(\frac{|g(x)|}{\mu}\Big)^{r(x)}\bigg)dx. \tag{2.14}$$

Далее, используя неравенство (2.8), с учетом неравенств (2.10), как в шаге 1, получим неравенство (2.12) и, значит, и неравенство (2.9).

Шаг 3. Пусть далее $0<p(x)\leqslant q(x)\leqslant\infty$ и $p(x)<\infty$ для любых $x\in\Omega$, $G_3=\{x\in\Omega,\ q(x)<\infty\}$, $G_4=\{x\in\Omega,\ q(x)=\infty\}$ и выполняются неравенства (2.10). Согласно неравенству (2.14) с Ω, замененным на G_3, и с учетом того, что для почти всех $x\in G_4$ согласно равенству (2.6)

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_{L_\infty(G_4)} = \|f\|^{BT}_{L_{q(\cdot)}(G_4)} \leqslant \|f\|^{BT}_{L_{q(\cdot)}(\Omega)}, \tag{2.15}$$

следовательно, $\dfrac{|f(x)|}{\lambda}<1$, получим, что

$$\int\limits_{\Omega}\Big(\frac{|f(x)g(x)|}{\lambda\mu}\Big)^{p(x)}dx = \int\limits_{G_3}\Big(\frac{|f(x)g(x)|}{\lambda\mu}\Big)^{p(x)}dx + \int\limits_{G_4}\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{p(x)}\Big(\frac{|g(x)|}{\mu}\Big)^{p(x)}dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{G_3} \Big(\frac{p(x)}{q(x)}\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{q(x)} + \Big(1-\frac{p(x)}{q(x)}\Big)\Big(\frac{|g(x)|}{\mu}\Big)^{r(x)}\Big)\,dx + \int\limits_{G_4} \Big(1-\frac{p(x)}{q(x)}\Big)\Big(\frac{|g(x)|}{\mu}\Big)^{r(x)}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega} \Big(\frac{p(x)}{q(x)}\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{q(x)} + \Big(1-\frac{p(x)}{q(x)}\Big)\Big(\frac{|g(x)|}{\mu}\Big)^{r(x)}\Big)\,dx. \tag{2.16}$$

Далее, используя неравенство (2.8), с учетом неравенств (2.10), как в шаге 1, получим неравенство (2.12) и, значит, неравенство (2.9).

Шаг 4. Пусть, наконец, $0 < p(x) \leqslant q(x) \leqslant \infty$ для любых $x \in \Omega$, $G_5 = \{x \in \Omega,\ p(x) < \infty\}$, $G_6 = \{x \in \Omega,\ p(x) = q(x) = \infty\}$ и выполняются неравенства (2.10). Согласно неравенству (2.16) с Ω, замененным на G_5, и с учетом того, что на G_6 $q(x) = r(x) = \infty$ и что согласно равенству (2.15) с G_4, замененным на G_5, и (2.13) с G_2, замененным на G_6, для почти всех $x \in G_6$

$$|f(x)| \leqslant \|f\|^{BT}_{L_q(\Omega)}, \quad |g(x)| \leqslant \|g\|^{BT}_{L_{r(\cdot)}(\Omega)},$$

получим, что

$$\int\limits_{G_6} \Big(\frac{|f(x)g(x)|}{\lambda\mu}\Big)^{p(x)}\,dx \leqslant \int\limits_{G_6} \Big(\frac{\|f\|_{L_q(\Omega)}}{\lambda}\cdot\frac{\|g\|_{L_r(\Omega)}}{\mu}\Big)^{\infty}\,dx = 0$$

и

$$\int\limits_{\Omega} \Big(\frac{|f(x)g(x)|}{\lambda\mu}\Big)^{p(x)}\,dx = \int\limits_{G_5} \Big(\frac{|f(x)g(x)|}{\lambda\mu}\Big)^{p(x)}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{G_5} \Big(\frac{p(x)}{q(x)}\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{q(x)} + \Big(1-\frac{p(x)}{q(x)}\Big)\Big(\frac{|g(x)|}{\mu}\Big)^{r(x)}\Big)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega} \Big(\frac{p(x)}{q(x)}\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{q(x)} + \Big(1-\frac{p(x)}{q(x)}\Big)\Big(\frac{|g(x)|}{\mu}\Big)^{r(x)}\Big)\,dx$$

(здесь, в дополнение к принятым ранее соглашениям, мы считаем, что $\dfrac{\infty}{\infty} = 1$). Далее, используя неравенство (2.8), с учетом неравенств (2.10), как в шаге 1, получим неравенство (2.12) и, значит, неравенство (2.9). □

Отметим некоторые частные случаи неравенства (2.9).

Если $1 \leqslant p(x) \leqslant \infty$ для любого $x \in \Omega$, то

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \Big(1 + \frac{1}{\underline{p}} - \frac{1}{\overline{p}}\Big)\|f\|^{BT}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)}\|g\|^{BT}_{L_{p'(\cdot)}(\Omega)}. \tag{2.17}$$

Если в теореме 1.1 $\operatorname{meas}\Omega_1 > 0$ или $\operatorname{meas}\Omega_\infty > 0$ и $\operatorname{meas}\Omega_* > 0$, то постоянная в неравенстве (2.17) меньше постоянной в неравенстве (1.6), которая в этом случае равна $3 + \dfrac{1}{p_*} - \dfrac{1}{p^*}$.

Если же в теореме 1.1 $\operatorname{meas}\Omega_1 = \operatorname{meas}\Omega_\infty = 0$, $\operatorname{meas}\Omega_* > 0$, то $p_* = \underline{p}$, $p^* = \overline{p}$ и постоянная в неравенстве (2.17) совпадает с постоянной в неравенстве (1.6), принимающем вид (1.9), но и в этом случае неравенство (2.17) точнее неравенства (2.12), так как согласно неравенству (2.7)

$$\|f\|^{BT}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)}\|g\|^{BT}_{L_{p'(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \|f\|^{KR}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)}\|g\|^{KR}_{L_{p'(\cdot)}(\Omega)}.$$

Если $0 < p(x) \leqslant \infty$ для любого $x \in \Omega$, $c \geqslant 1$, $c' = \dfrac{c}{c-1}$, если $c > 1$, $c' = \infty$, если $c = 1$, то

$$\|fg\|^{BT}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \|f\|^{BT}_{L_{cp(\cdot)}(\Omega)}\|g\|^{BT}_{L_{c'p(\cdot)}(\Omega)}, \tag{2.18}$$

в частности,

$$\|fg\|^{BT}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \|f\|^{BT}_{L_{2p(\cdot)}(\Omega)}\|g\|^{BT}_{L_{2p(\cdot)}(\Omega)}, \tag{2.19}$$

$$\|fg\|^{BT}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \|f\|^{BT}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)}\|g\|^{BT}_{L_\infty(\Omega)}. \tag{2.20}$$

Если $\operatorname{meas}\Omega < \infty$, $0 < p(x) \leqslant q(x) \leqslant \infty$ и $\underline{p} > 0$, то

$$\|f\|^{BT}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant (1 + M - m)^{\frac{1}{\underline{p}}} \|1\|^{BT}_{L_{r(\cdot)}(\Omega)} \|f\|^{BT}_{L_{q(\cdot)}(\Omega)}, \tag{2.21}$$

где при $\underline{r} > 0$, $\overline{r} < \infty$

$$\|1\|^{BT}_{L_{r(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \begin{cases} (\operatorname{meas}\Omega)^{\frac{1}{\overline{r}}}, & \text{если } \operatorname{meas}\Omega \leqslant 1, \\ (\operatorname{meas}\Omega)^{\frac{1}{\underline{r}}}, & \text{если } \operatorname{meas}\Omega > 1. \end{cases}$$

Действительно, пусть $\operatorname{meas}\Omega \leqslant 1$. Так как $\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^{r(x)} \leqslant \left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^{\overline{r}}$ при $0 < \lambda \leqslant 1$, то

$$\left\{0 < \lambda \leqslant 1 : \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\overline{r}} dx \leqslant 1\right\} \subset \left\{0 < \lambda \leqslant 1 : \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{r(x)} dx \leqslant 1\right\}$$

и

$$\|1\|^{BT}_{L_{r(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \inf\left\{0 < \lambda \leqslant 1 : \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{r(x)} dx \leqslant 1\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \inf\left\{0 < \lambda \leqslant 1 : \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\overline{r}} dx \leqslant 1\right\} = \inf\left\{0 < \lambda \leqslant 1 : \lambda \geqslant (\operatorname{meas}\Omega)^{\frac{1}{\overline{r}}}\right\} = (\operatorname{meas}\Omega)^{\frac{1}{\overline{r}}}.$$

Аналогично рассматривается случай, когда $\operatorname{meas}\Omega > 1$.

3. Примеры

1. Пусть Ω_1, Ω_2 — не пересекающиеся измеримые по Лебегу множества конечной меры, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $0 < p_1, p_2 < \infty, 0 \leqslant a_1, a_2 < \infty$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1, & \text{если } x \in \Omega_1, \\ a_2, & \text{если } x \in \Omega_2, \end{cases} \qquad p(x) = \begin{cases} p_1, & \text{если } x \in \Omega_1, \\ p_2, & \text{если } x \in \Omega_2. \end{cases}$$

В этом случае

$$\|\varphi\|^{BT}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int\limits_{\Omega} \left(\frac{|\varphi(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} dx \leqslant 1\right\} =$$

$$= \inf\left\{\lambda > 0 : \left(\frac{a_1}{\lambda}\right)^{p_1} \operatorname{meas}\Omega_1 + \left(\frac{a_2}{\lambda}\right)^{p_2} \operatorname{meas}\Omega_2 \leqslant 1\right\} = \lambda_*,$$

где λ_* — единственный положительный корень уравнения

$$t_1\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)^{p_1} + t_2\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)^{p_2} - 1 = 0, \tag{3.1}$$

где

$$t_1 = a_1^{p_1} \operatorname{meas}\Omega_1, \quad t_2 = a_2^{p_2} \operatorname{meas}\Omega_2. \tag{3.2}$$

2. Пусть в примере 1 $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, тогда (3.1) — квадратное уравнение и

$$\|\varphi\|^{BT}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} = \frac{1}{2}\Big(\sqrt{t_2^2 + 4t_1} + t_2\Big).$$

В этом случае $p'(x) = 2$, если $x \in \Omega_1$, и $p'(x) = \infty$, если $x \in \Omega_2$. Пусть $0 < b_1, b_2 < \infty$ и

$$\psi(x) = \begin{cases} b_1, & \text{если } x \in \Omega_1, \\ b_2, & \text{если } x \in \Omega_2. \end{cases}$$

Согласно формуле (2.2)

$$\|\psi\|^{BT}_{L_{p'(\cdot)}(\Omega)} = \max\left\{\|b_1\|_{L_2(\Omega_1)}, \|b_2\|_{L_\infty(\Omega_2)}\right\} = \max\left\{b_1\sqrt{\operatorname{meas}\Omega_1}, b_2\right\} = \max\{\tau_1, \tau_2\},$$

где

$$\tau_1 = b_1\sqrt{\operatorname{meas}\Omega_1}, \quad \tau_2 = b_2.$$

Кроме того,

$$\int_\Omega |\varphi(x)\psi(x)|\,dx = a_1b_1 \operatorname{meas}\Omega_1 + a_2b_2 \operatorname{meas}\Omega_2 = \sqrt{t_1}\,\tau_1 + t_2\tau_2.$$

Пусть $C > 0$. Рассмотрим для определенной выше функции $p(x)$ неравенство

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \leqslant C\|f\|^{BT}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)}\|g\|^{BT}_{L_{p'(\cdot)}(\Omega)}, \tag{3.3}$$

выполняющееся для любых $f \in L^{BT}_{q(\cdot)}(\Omega)$ и $g \in L^{BT}_{r(\cdot)}(\Omega)$. В этом случае $\underline{p} = 1, \overline{p} = 2$ и согласно неравенству (2.17) $C \leqslant 1{,}5$. С другой стороны, выбирая в (3.3) $f = \varphi$ и $g = \psi$, имеем

$$C \geqslant \sup_{t_1,t_2,\tau_1,\tau_2>0} \frac{2(\sqrt{t_1}\,\tau_1 + t_2\tau_2)}{\left(\sqrt{t_2^2 + 4t_1} + t_2\right)\max\{\tau_1,\tau_2\}} = \sup_{t_1,t_2>0} \frac{2(\sqrt{t_1} + t_2)}{\sqrt{t_2^2+4t_1} + t_2} = \max_{\xi>0} \frac{2(1+\xi)}{\sqrt{\xi^2+4}+\xi} = 1{,}25.$$

Отметим еще, что согласно неравенству (2.7) из неравенства (2.17) следует, что для рассматриваемой функции $p(x)$

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \leqslant 1{,}5\,\|f\|^{KR}_{L_{p(\cdot)}(\Omega)}\|g\|^{KR}_{L_{p'(\cdot)}(\Omega)}$$

для любых $f \in L_{p(\cdot)}(\Omega)$ и $g \in L_{p'(\cdot)}(\Omega)$, в то время как из неравенства (1.6) следует только, что это неравенство выполняется с постоянной 2 (вместо 1,5).

В заключение, авторы благодарят рецензента за тщательное чтение статьи и ряд замечаний, которые были учтены авторами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бандалиев Р. А.* О структурных свойствах весового пространства $L_{p(x),\omega}$ для $0 < p(x) < 1$// Мат. заметки. — 2014. — *95*, № 4. — С. 492–506.
2. *Жиков В. В.* Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1986. — *50*, № 4. — С. 675–710.
3. *Рабинович В. С., Самко С. Г.* Сингулярные интегральные операторы в весовых пространствах Лебега с переменными показателями на сложных карлесоновских кривых// Функц. анализ и его прилож. — 2012. — *46*, № 1. — С. 87–92.
4. *Самко С. Г., Умарханджиев С. М.* О регуляризации одного многомерного интегрального уравнения в пространствах Лебега с переменным показателем// Мат. заметки. — 2013. — *93*, № 1. — С. 575–585.
5. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(t)}([0,1])$// Мат. заметки. — 1979. — *26*, № 4. — С. 613–632.
6. *Bandaliev R. A.* On Hardy-type inequalities in weighted variable exponent spaces $L_{p(x),\omega}$ for $0 < p(x) < 1$// Eurasian Math. J. — 2013. — *4*, № 4. — С. 5–16.
7. *Bandaliev R. A., Hasanov S. G.* On denseness of $C_0^\infty(\Omega)$ and compactness in $L_{p(x)}(\Omega)$ for $0 < p(x) < 1$// Moscow Math. J. — 2018. — *18*, № 1. — С. 1–13.
8. *Bendaoud S. A., Senouci A.* Inequalities for weighted Hardy operators in weighted variable exponent Lebesgue space with $0 < p(x) < 1$// Eurasian Math. J. — 2018. — *9*, № 1. — С. 30–39.
9. *Cruz-Uribe D., Fiorenza A.* Variable Lebesgue spaces. Foundations and harmonic analysis. — Basel: Birkhäuser, 2013.
10. *Cruz-Uribe D., Fiorenza A., Neugebauer C.* The maximal function on variable L_p spaces// Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. — 2003. — *28*. — С. 223–238.
11. *Diening L.* Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L_{p(\cdot)}$// Math. Inequal. Appl. — 2004. — *7*, № 2. — С. 245–254.
12. *Diening L., Harjulehto P., Hasto P., Ruzhichka M.* Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. — Berlin: Springer, 2011.
13. *Kovachik O., Rakosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$// Czechoslovak Math. J. — 1991. — *41*, № 4. — С. 592–618.
14. *Nekvinda A.* Hardy—Littlewood maximal operator on $L^{p(x)}(M_n)$// Math. Inequal. Appl. — 2004. — *1*, № 2. — С. 255–266.
15. *Ruzhichka M.* Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory. — Berlin: Springer, 2000.
16. *Samko S.* Convolution type operators in $L_{p(x)}$// Integral Transforms Spec. Funct. — 1998. — *7*, № 1-2. — С. 123–144.

17. *Senouci A., Zanou A.* Some integral inequalities for quasimonotone functions in weighted variable exponent Lebesgue space with $0 < p(x) < 1$// Eurasian Math. J. — 2020. — *11*, № 4. — С. 58–65.

В. И. Буренков
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия;
Cardiff University, Cardiff, UK
E-mail: Burenkov@cardiff.ac.uk

Т. В. Тарарыкова
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия;
Cardiff University, Cardiff, UK
E-mail: tararykovat@cardiff.ac.uk

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-472-482 UDC 517.518

On Holder's Inequality in Lebesgue Spaces with Variable Order of Summability

© 2021 **V. I. Burenkov, T. V. Tararykova**

Abstract. In this paper, we introduce a new version of the definition of a quasi-norm (in particular, a norm) in Lebesgue spaces with variable order of summability. Using it, we prove an analogue of Hölder's inequality for such spaces, which is more general and more precise than those known earlier.

REFERENCES

1. R. A. Bandaliev, "O strukturnykh svoystvakh vesovogo prostranstva $L_{p(x),\omega}$ dlya $0 < p(x) < 1$" [Structural properties of the weighted space $L_{p(x),\omega}$ for $0 < p(x) < 1$], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2014, **95**, No. 4, 492–506 (in Russian).
2. V. V. Zhikov, "Usrednenie funktsionalov variatsionnogo ischisleniya i teorii uprugosti" [Averaging of functionals of the calculus of variations and the elasticity theory], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1986, **50**, No. 4, 675–710 (in Russian).
3. V. S. Rabinovich and S. G. Samko, "Singulyarnye integral'nye operatory v vesovykh prostranstvakh Lebega s peremennymi pokazatelyami na slozhnykh karlesonovskikh krivykh" [Singular integral operators in weighted Lebesgue spaces with variable indices on complex Carleson curves], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2012, **46**, No. 1, 87–92 (in Russian).
4. S. G. Samko and S. M. Umarkhadzhiev, "O regulyarizatsii odnogo mnogomernogo integral'nogo uravneniya v prostranstvakh Lebega s peremennym pokazatelem" [On the regularization of a multidimensional integral equation in Lebesgue spaces with variable index], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2013, **93**, No. 1, 575–585 (in Russian).
5. I. I. Sharapudinov, "O topologii prostranstva $L^{p(t)}([0,1])$" [On the topology of the space $L^{p(t)}([0,1])$], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1979, **26**, No. 4, 613–632 (in Russian).
6. R. A. Bandaliev, "On Hardy-type inequalities in weighted variable exponent spaces $L_{p(x),\omega}$ for $0 < p(x) < 1$," *Eurasian Math. J.*, 2013, **4**, No. 4, 5–16.
7. R. A. Bandaliev and S. G. Hasanov, "On denseness of $C_0^\infty(\Omega)$ and compactness in $L_{p(x)}(\Omega)$ for $0 < p(x) < 1$," *Moscow Math. J.*, 2018, **18**, No. 1, 1–13.
8. S. A. Bendaoud and A. Senouci, "Inequalities for weighted Hardy operators in weighted variable exponent Lebesgue space with $0 < p(x) < 1$," *Eurasian Math. J.*, 2018, **9**, No. 1, 30–39.

9. D. Cruz-Uribe and A. Fiorenza, *Variable Lebesgue Spaces. Foundations and Harmonic Analysis*, Birkhäuser, Basel, 2013.
10. D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, and C. Neugebauer, "The maximal function on variable L_p spaces," *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 2003, **28**, 223–238.
11. L. Diening, "Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L_{p(.)}$," *Math. Inequal. Appl.*, 2004, **7**, No. 2, 245–254.
12. L. Diening, P. Harjulehto, P. Hasto, and M. Ruzhichka, *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Springer, Berlin, 2011.
13. O. Kovachik and J. Rakosnik, "On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$," *Czechoslovak Math. J.*, 1991, **41**, No. 4, 592–618.
14. A. Nekvinda, "Hardy–Littlewood maximal operator on $L^{p(x)}(M_n)$," *Math. Inequal. Appl.*, 2004, **1**, No. 2, 255–266.
15. M. Ruzhichka, *Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory*, Springer, Berlin, 2000.
16. S. Samko, "Convolution type operators in $L_{p(x)}$," *Integral Transforms Spec. Funct.*, 1998, **7**, No. 1-2, 123–144.
17. A. Senouci and A. Zanou, "Some integral inequalities for quasimonotone functions in weighted variable exponent Lebesgue space with $0 < p(x) < 1$," *Eurasian Math. J.*, 2020, **11**, No. 4, 58–65.

V. I. Burenkov
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia;
Cardiff University, Cardiff, UK
E-mail: `Burenkov@cardiff.ac.uk`

T. V. Tararykova
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia;
Cardiff University, Cardiff, UK
E-mail: `tararykovat@cardiff.ac.uk`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 3 (2021). С. 483–506
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-483-506 УДК 517.929 + 517.968.7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ С ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ ОПЕРАТОРАМИ РЕШЕНИЙ НА ОТКРЫТЫХ ОБЛАСТЯХ В $C((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$ И ПРОЦЕССЫ ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

© 2021 г. **Х.-О. ВАЛЬТЕР**

Аннотация. Для автономных дифференциальных уравнений с запаздыванием $x'(t)=f(x_t)$ мы строим непрерывный полупоток непрерывно дифференцируемых операторов решений $x_0\mapsto x_t$, $t\geqslant 0$ на открытых множествах пространства Фреше $C((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$. Для неавтономных уравнений это дает непрерывный процесс дифференцируемых операторов решения. В качестве приложения мы получаем процессы, которые включают все решения интегродифференциальных уравнений Вольтерра $x'(t)=\int\limits_0^t k(t,s)h(x(s))ds$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В этой статье мы рассматриваем начальную задачу

$$x'(t) = f(x_t), \tag{1.1}$$
$$x_0 = \phi\in U \tag{1.2}$$

для непрерывно дифференцируемого отображения $f:U\to\mathbb{R}^n$ на открытом подмножестве U пространства Фреше $C=C((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$ непрерывных отображений $(-\infty,0]\to\mathbb{R}^n$ с топологией локально равномерной сходимости. Решение уравнения (1.1) на интервале $I\subset\mathbb{R}$ является таким непрерывным отображением $x:(-\infty,0]+I\to\mathbb{R}^n$, что все сегменты $x_t:(-\infty,0]\ni s\mapsto x(t+s)\in\mathbb{R}^n$,

$t \in I$ принадлежат U, а $x|_I$ дифференцируемо и удовлетворяет уравнению (1.1) для всех $t \in I$. Решение начальной задачи (1.1)-(1.2) является решением на некотором интервале $I = [0, t_x)$, $0 < t_x \leqslant \infty$, которое удовлетворяет $x_0 = \phi$. Уравнение (1.1) обобщает известные автономные дифференциальные уравнения с запаздыванием или функционально-дифференциальные уравнения с запаздыванием (см. [2, 3]), где U — подмножество банахова пространства $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, $r > 0$, и охватывает примеры с неограниченным запаздыванием, включая случаи переменного запаздывания, зависящего от неизвестной функции. В части I (разделы 2–5) ниже мы покажем, что начальная задача (1.1)-(1.2) корректна и максимальные решения $x = x^\phi$ определяют непрерывный полупоток Σ на U равенством

$$\Sigma(t, \phi) = x_t^\phi,$$

где все операторы решения $\Sigma(t, \cdot)$ непрерывно дифференцируемы и их производные определяются как решения вариационных уравнений.

В части II (разделы 6-7) мы рассматриваем неавтономные уравнения

$$x'(t) = g(t, x_t), \tag{1.3}$$

где $g : \mathbb{R} \times C \supset V \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируема. В разделе 6 результаты части I дают непрерывный процесс непрерывно дифференцируемых операторов решения.

Среди приложений распространены интегродифференциальные уравнения Вольтерра

$$x'(t) = \int_0^t k(t, s) h(x(s)) ds, \quad t > 0, \tag{1.4}$$

где $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{n \times n}$, а $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируема. Уравнение (1.4) может быть рассмотрено как неавтономное дифференциальное уравнение с неограниченным максимальным запаздыванием, зависящим от времени $d(t) = t$ в момент времени $t > 0$, так как $x'(t)$ зависит от значений x при $t - t = 0 < s < t$ [6]. В разделе 7 мы ищем такое непрерывно дифференцируемое отображение $g : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}^n$, чтобы решения уравнения (1.4) также являлись решениями уравнения (1.3), которое, в свою очередь, описывает процесс объединения всех решений интегродифференциального уравнения Вольтерра.

Построение полупотока Σ, связанного с уравнением (1.1), является упрощенной версией конструкции из [14]. Оно проводится известным образом через интегральное уравнение для решений начальной задачи (1.1)-(1.2) с начальными данными в виде параметров. Однако, используя пространство Фреше C как пространство состояний, необходимо действовать аккуратно. Для этого мы вводим понятие непрерывной дифференцируемости. Результат будет представлен в двух вариантах, соответственно, в смысле непрерывной дифференцируемости (1) по Микалю и Бастиани и (2) в смысле Фреше. Вкратце опишем C^1_{MB}-гладкость в случае (1) и C^1_F-гладкость в случае (2). Для непрерывного отображения $f : V \supset U \to W$, где V и W — топологические векторные пространства, $U \subset V$ открыто, C^1_{MB}-гладкость означает, что существуют все производные по направлениям

$$Df(u)v = \lim_{0 \neq t \to 0} \frac{1}{t}(f(u + tv) - f(u))$$

и что отображение

$$U \times V \ni (u, v) \mapsto Df(u)v \in W$$

непрерывно. Под C^1_F-гладкостью будем понимать существование всех производных по направлению, а также что всякое отображение $Df(u) : V \to W$, $u \in U$ линейно и непрерывно, и что отображение $Df : U \ni u \mapsto Df(u) \in L_c(V, W)$ непрерывно в силу топологии β равномерной сходимости на ограниченных множествах векторного пространства $L_c(V, W)$ непрерывных линейных отображений $V \to W$.

В случае банахового пространства C^1_F-гладкость эквивалентна известной непрерывной дифференцируемости, основанной на производных по Фреше, а для конечномерных пространств C^1_F-гладкость и C^1_{MB}-гладкость, естественно, эквивалентны. В общем случае C^1_F-гладкость является более сильным свойством. Подробнее о C^1_{MB}-гладких, но C^1_F-негладких отображений см., например, [16].

Мотивация для получения результатов в обоих случаях заключается в том, что при работе с исчислением в топологических векторных пространствах C^1_{MB}-гладкость кажется довольно распространенной, тогда как в нашем приложении к интегродифференциальному уравнению Вольтерра мы получаем соответствующее уравнение (1.3) с отображением g, которое на самом деле C^1_F-гладкое.

Автономные уравнения вида (1.1), которые получаются из интегродифференциальных уравнений Вольтерра (1.4), как и выше, через уравнение вида (1.3), являются дифференциальными уравнениями с неограниченным запаздыванием, зависящим от неизвестной функции, которые частично «хорошие», в отличие от примеров дискретного запаздывания, как

$$x'(t) = F(x(t-d)), \quad d = d(x(t)),$$

где F и $d : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ непрерывно дифференцируемы. В последнем случае непрерывно дифференцируемые операторы решения существуют на многообразии пространства Фреше $C^1 = C^1((-\infty, 0], \mathbb{R})$ непрерывно дифференцируемых отображений $(-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, наделенном топологией локально-равномерной сходимости отображений и их производных [14, 17]. Этот случай схож со случаем ограниченного запаздывания, когда уравнения с дискретным запаздыванием, зависящим от неизвестной функции, определяют непрерывно дифференцируемый оператор решения на многообразиях банаховых пространств $C^1([-r, 0, \mathbb{R}^n)$, $r > 0$, в то время как другие уравнения, особенно с ограниченным распределенным запаздыванием, зависящим от неизвестной функции, определяют хорошие операторы решения на открытых подмножествах пространства состояний $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, $r > 0$, которые известны из уравнений с постоянным запаздыванием (см. примеры в [7]).

Детали аппарата анализа, основанного на C^1_{MB}-гладкости, можно найти в [4, разделы I.1–I.4]. После дополнительного раздела 8 мы приводим простые дополнительные факты о C^1_F-гладкости. Доказательства приведены в [17].

Необходимо предупредить читателя, что гипотезы о непрерывной дифференцируемости являются ограничивающими, возможно, удивительным образом: из C^1_{MB}-гладкости отображения $f : C \supset U \to \mathbb{R}^n$ следует, что f имеет *локально ограниченное запаздывание* в следующем смысле:

(lbd) *Для любого $\phi \in U$ существует окрестность $N \subset U$ ϕ, $d > 0$, такая, что для любых χ, ψ из N таких, что*

$$\chi(t) = \psi(t) \quad \text{для всех} \quad t \in [-d, 0],$$

имеем $f(\chi) = f(\psi)$.

Это утверждение можно доказать аналогично [14, утверждение 1.1].

Приведем также очевидное преимущество пространств Фреше C по сравнению с банаховыми пространствами непрерывных функций $(-\infty, 0] \to \mathbb{R}^n$, которые использовались как пространства состояний (см. [5, 8, 11, 13]): пространство C не исключает отрезки решений в силу роста или условий интегрируемости на $-\infty$. Напомним, что линейное автономное дифференциальное уравнение с постоянным запаздыванием в общем случае может иметь решения с произвольно быстрым экспоненциальным ростом на $-\infty$.

Подробнее о дифференциальных уравнениях с запаздыванием с областями решения в пространствах Фреше отображений $(-\infty, 0] \to \mathbb{R}^n$ см. [11, 12].

Обозначения и предварительные соображения. Через $\mathbb{R}^{n \times n}$ обозначим векторное пространство $n \times n$-матриц с вещественными элементами. Основные свойства топологических векторных пространств можно найти в [10]. Произведения топологических векторных пространств всегда снабжены топологией произведения. Для равномерной непрерывности нам понадобится следующее утверждение.

Утверждение 1.1 (см. [17, утверждение 2.1]). *Пусть T — топологическое пространство, W — топологическое векторное пространство, M — метрическое пространство с метрикой d, $g : T \times M \supset U \to W$ непрерывно, $U \supset \{t\} \times K$, $K \subset M$ компактно. Тогда g равномерно непрерывно на $\{t\} \times K$ в следующем смысле: для всякой окрестности N точки 0 из W найдутся окрестность T_N точки t в T и $\epsilon > 0$ такие, что для всех $t' \in T_N$, всех $\hat{t} \in T_N$, всех $k \in K$, и всех $m \in M$ таких, что*

$$d(m, k) < \epsilon \quad \textit{and} \quad (t', k) \in U, \quad (\hat{t}, m) \in U$$

справедливо

$$g(t', k) - g(\hat{t}, m) \in N.$$

Векторное пространство непрерывных линейных отображений $V \to W$ между топологическими векторными пространствами обозначим через $L_c(V, W)$. Множества

$$U_{N,B} = \{A \in L_c(V, W) : AB \subset N\},$$

где N — окрестность точки 0 в W, а $B \subset V$ ограничено, образуют локальную базу в $0 \in L_c(V, W)$ в топологии β равномерной сходимости на ограниченных множествах.

Пространство Фреше F — локально-выпуклое топологическое векторное пространство, полное и метризуемое. Топология на нем задается системой полунорм $|\cdot|_j$, $j \in \mathbb{N}$, которые являются разделяющими в том смысле, что если $|v|_j = 0$ для любого $j \in \mathbb{N}$, то $v = 0$. Множества

$$N_{j,k} = \left\{ v \in F : |v|_j < \frac{1}{k} \right\}, \quad j \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad k \in \mathbb{N},$$

образуют локальную базу в нуле. Если последовательность полунорм возрастает, то множества

$$N_j = \left\{ v \in F : |v|_j < \frac{1}{j} \right\}, \quad j \in \mathbb{N},$$

образуют локальную базу в нуле.

Произведения пространств Фреше, замкнутые подпространства пространств Фреше, а также банаховы пространства — являются пространствами Фреше.

Для некоторой кривой и непрерывного отображения c интервала $I \subset \mathbb{R}$ положительной длины в пространство Фреше F определим *касательный вектор* $t \in I$ формулой

$$c'(t) = \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{1}{h}(c(t+h) - c(t)),$$

если этот предел существует. Согласно [4, глава I], назовем кривую *непрерывно дифференцируемой* если в каждой ее точке существует касательный вектор, а отображение

$$c' : I \ni t \mapsto c'(t) \in F$$

непрерывно.

Для непрерывного отображения $f : V \supset U \to F$, где V и F — пространства Фреше, а $U \subset V$ открыто, при $u \in U, v \in V$ *производную по направлению* определим формулой

$$Df(u)v = \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{1}{h}(f(u + hv) - f(u)),$$

если этот предел существует. Если для $u \in U$ все производные по направлению $Df(u)v$, $v \in V$ существуют, то отображение $Df(u) : V \ni v \mapsto Df(u)v \in F$ называется *производной функции* f в точке u.

Для непрерывного отображения $f : U \to F$, где V, W, F — пространства Фреше, $U \subset V \times W$ открыто, определим стандартным способом *частные производные*. Например, $D_1 f(v, w) : V \to F$ определяется формулой

$$D_1 f(v, w)\hat{v} = \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{1}{h}(f(v + h\hat{v}, w) - f(v, w)).$$

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими пространствами Фреше: для $n \in \mathbb{N}$ и $T \geqslant 0$, $C_T = C((-\infty, T], \mathbb{R}^n)$ обозначает пространство Фреше непрерывных отображений $(-\infty, T] \to \mathbb{R}^n$ с полунормами, определенными формулами

$$|\phi|_{T,j} = \max_{T-j \leqslant t \leqslant T} |\phi(t)|, \quad \phi \in C_T \quad \text{и} \quad j \in \mathbb{N},$$

которые образуют топологию локально равномерной сходимости. Аналогично рассмотрим пространство $C_\infty = C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, в котором

$$|\phi|_{\infty,j} = \max_{-j \leqslant t \leqslant j} |\phi(t)|.$$

В случае, если $T = 0$, используем обозначение $C = C_0$, $|\cdot|_j = |\cdot|_{0,j}$. В разделе 7, посвященном интегродифференциальным уравнениям Вольтерра, нам потребуется пространство Фреше C^1_∞

непрерывно дифференцируемых отображений $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с полунормами, определенными формулой $|\phi|_{\infty,1,j} = |\phi|_{\infty,j} + |\phi'|_{\infty,j}$. Пространство C^1 является аналогичным пространством непрерывно дифференцируемых отображений $(-\infty, 0] \to \mathbb{R}^n$.

В дальнейшем нам потребуются следующие банаховы пространства: при $n \in \mathbb{N}$ и $T > 0$ C_{0T} обозначает банахово пространство непрерывных отображений $[0,T] \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$|\phi| = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} |\phi(t)|,$$

где $C_{0T,0}$ — замкнутое подпространство всех $\phi \in C_{0T}$ таких, что $\phi(0) = 0$.

Оценочные отображения

$$E_T : C_T \times (-\infty, T] \to C \quad \text{и} \quad E_\infty : C_\infty \times \mathbb{R} \to C,$$

заданные по формуле $(\phi, t) \mapsto \phi_t$, непрерывны (см. [14, утверждение 3.1]) и линейны по первому аргументу. Отображение

$$Ev_{\infty,1} : C^1_\infty \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad Ev_{\infty,1}(\phi, t) = \phi(t),$$

является C^1_F-гладким вместе с

$$DEv_{\infty,1}(\phi, t)(\hat{\phi}, t_*) = \hat{\phi}(t) + t_*\phi'(t)$$

как композиция отображения E^{10}_∞ из утверждения 8.8 (см. [17, утверждение 10.1 (iii)]), являющегося C^1_F-гладким, с отображением $C \ni \phi \mapsto \phi(0) \in \mathbb{R}^n$, которое является линейным и непрерывным. Формула производной также следует из утверждения 8.8 ([17, утверждение 10.1 (iii)]).

Для $0 \leqslant S < T \leqslant \infty$ отображение продолжения $P_{ST} : C_S \to C_T$, которое задается формулой $(P_{ST}\phi)(t) = \phi(t)$ при $t \leqslant S$ и $(P_{ST}\phi)(t) = \phi(S)$ при $t > S$, предполагается линейным и непрерывным. То же самое выполнено для $Z_T : C_{0T,0} \to C_T$, которое задается формулой

$$(Z_T\phi)(t) = \phi(t) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad (Z_T\phi)(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \leqslant 0.$$

Отображения

$$I_T : C_{0T} \to C_{0T,0}, \quad (I_T\phi)(t) = \int_0^t \phi(s)ds,$$

и

$$J_T : C_{0T,0} \times C \ni (\chi, \phi) \mapsto P_{0T}\phi + Z_T\chi \in C_T$$

предполагаются линейными и непрерывными.

Переформулируем начальную задачу (1.1)-(1.2) как задачу о неподвижной точке следующим образом: предположим, что x — решение уравнения (1.1) на $[0,T]$ для некоторого $T > 0$, причем $x_0 = \phi \in U$. Тогда $[0,T] \ni s \to x_s \in C$ непрерывно (используем $x_s = E_T(x, s)$) и

$$x(t) - \phi(0) = \int_0^t f(x_s)ds \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T].$$

Определим $\eta \in C_{0T,0}$ по формуле $\eta(t) = x(t) - \phi(0)$. Тогда

$$x_{|(-\infty,T]} = Z_T\eta + P_{0T}\phi,$$

и

$$\eta(t) = \int_0^t f((Z_T\eta)_s + (P_{0T}\phi)_s)ds \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.5}$$

что является уравнением неподвижной точки для $\eta \in C_{0T,0}$ с параметром $\phi \in U \subset C$.

Часть I

В следующих разделах 2–5 мы рассмотрим открытое множество $U \subset C$ и отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$, являющееся C^1_*-гладким, где $* = MB$ или $* = F$.

2. Оператор подстановки

Пусть в этом разделе $T > 0$. Положим

$$\mathrm{dom}_T = \{\xi \in C_T : \xi_t \in U \text{ для всех } t \in [0,T]\}$$

и пусть $F_T : C_T \supset \mathrm{dom}_T \to C_{0T}$ задается формулой

$$F_T(\xi)(t) = f(\xi_t) \qquad (= f(E_T(\xi, t))).$$

Утверждение 2.1. dom_T *открыто, а* F_T *непрерывно.*

Доказательство.

1. (Открытость.) Пусть $\phi \in \mathrm{dom}_T$. В силу непрерывности E_T для любого $t \in [0,T]$ существуют открытые окрестности N_t точки ϕ в C_T и V_t точки t в $\mathbb{R}$, такие что $\psi_s = E_T(\psi, s) \in U$ для любого $\psi \in N_t$, $s \in V_t \cap [0,T]$. В силу компактности существует конечное подмножество $\tau \subset [0,T]$ такое, что $[0,T] \subset \bigcup\limits_{t\in\tau} V_t$. Тогда $\bigcap\limits_{t\in\tau} N_t$ является окрестностью ϕ в dom_T.

2. (Непрерывность.) Пусть заданы $\phi \in \mathrm{dom}_T$ и $\epsilon > 0$. Применим утверждение 1.1 к непрерывному отображению

$$\mathrm{dom}_T \times [0,T] \ni (\psi, t) \mapsto f(E_T(\psi, t)) \in \mathbb{R}^n$$

и к компактному множеству $\{\phi\} \times [0,T]$. Отсюда следует, что существует окрестность V точки ϕ в dom_T такая, что для всех $\psi \in V$ и $t \in [0,T]$

$$\epsilon > |f(E_T(\psi, t)) - f(E_T(\phi, t))|.$$

Следовательно, $\epsilon > |F_T(\psi) - F_T(\phi)|$. □

Поскольку J_T непрерывно, мы заключаем, что множество

$$\mathcal{O}_T = \{(\eta, \phi) \in C_{0T,0} \times C : J_T(\eta, \phi) \in \mathrm{dom}_T\}$$

открыто. Уравнение неподвижной точки (1.5) выглядит следующим образом:

$$\eta = (I_T \circ F_T)(J_T(\eta, \phi)) \tag{2.1}$$

для $(\eta, \phi) \in \mathcal{O}_T$.

Утверждение 2.2. F_T *является* C^1_**-гладким, причем* $(DF_T(\phi)\chi)(t) = Df(\phi_t)\chi_t$.

Доказательство.

1. Случай $* = MB$.

1.1. Определим

$$\Delta : \mathrm{dom}_T \times C_T \to C_{0T}$$

формулой $\Delta(\phi, \chi)(t) = Df(\phi_t)\chi_t$. Это выражение имеет смысл, поскольку для всех ϕ, χ из C_T отображение

$$[0,T] \ni t \mapsto Df(E_T(\phi, t))E_T(\chi, t) \in \mathbb{R}^n$$

непрерывно в силу непрерывности E_T и гипотезы о том, что f является C^1_{MB}-гладким.

Докажем, что Δ непрерывна: пусть заданы $\phi \in \mathrm{dom}_T$ и $\chi \in C_T$. Пусть также $\epsilon > 0$. Заметим, что для всех $\psi \in \mathrm{dom}_T$ и всех $\rho \in C_T$ мы имеем

$$|\Delta(\psi, \rho) - \Delta(\phi, \chi)| = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} |Df(\psi_t)\rho_t - Df(\phi_t)\chi_t)|.$$

Отображение

$$\mathrm{dom}_T \times C_T \times [0,T] \ni (\psi, \rho, t) \mapsto Df(\psi_t))\rho_t \in \mathbb{R}^n$$

непрерывно (см. замечания выше), следовательно, оно равномерно непрерывно на компакте $\{\phi\} \times \{\chi\} \times [0,T]$. Существует окрестность N_ϵ точки (ϕ, χ) из $\mathrm{dom}_T \times C_T$ такая, что для всех $(\psi, \rho) \in N_\epsilon$ и всех $t \in [0,T]$

$$|Df(\psi_t)\rho_t - Df(\phi_t)\chi_t| < \epsilon.$$

Отсюда следует, что для всех $(\psi, \rho) \in N_\epsilon$

$$|\Delta(\psi, \rho) - \Delta(\phi, \chi)| \leqslant \epsilon.$$

1.2. (Производные по направлению.) Пусть заданы $\phi \in \mathrm{dom}_T$, $\chi \in C_T$. Выберем $r > 0$ так, чтобы $\phi + [-r, r]\chi \in \mathrm{dom}_T$. Для $0 < |h| < r$

$$\left|\frac{1}{h}(F_T(\phi + h\chi) - F_T(\phi)) - \Delta(\phi, \chi)\right| = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\frac{1}{h}(f(\phi_t + h\chi_t) - f(\phi_t)) - Df(\phi_t)\chi_t\right| =$$

$$= \max_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\frac{1}{h}\int\limits_0^1 Df(\phi_t + \theta h\chi_t)h\chi_t d\theta - Df(\phi_t)\chi_t\right| = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int\limits_0^1 \left[Df(\phi_t + \theta h\chi_t) - Df(\phi_t)\right]\chi_t d\theta\right|.$$

Отображение

$$[0, T] \times (-r, r) \times [0, 1] \ni (t, h, \theta) \mapsto Df(\phi_t + \theta h\chi_t)\chi_t \in \mathbb{R}^n$$

непрерывно (в силу равенства $Df(\phi_t + \theta h\chi_t)\chi_t = Df(E_T(\phi + \theta h\chi, t))E_T(\chi, t)$, непрерывности E_T и гипотезы о том, что f is C^1_{MB}-гладкое), следовательно, оно равномерно непрерывно на компакте $[0, T] \times \{0\} \times [0, 1]$. Пусть $\epsilon > 0$. Тогда существует $\delta_\epsilon \in (0, r)$ такое, что для всех $t \in [0, T]$, $h \in (-\delta_\epsilon, \delta_\epsilon)$, $\theta \in [0, 1]$ будем иметь

$$\epsilon > |Df(\phi_t + \theta h\chi_t)\chi_t - Df(\phi_t + \theta \cdot 0 \cdot \chi_t)\chi_t| = |Df(\phi_t + \theta h\chi_t)\chi_t - Df(\phi_t)\chi_t|.$$

Отсюда следует, что для $0 < |h| < \delta_\epsilon$

$$\left|\frac{1}{h}(F_T(\phi + h\chi) - F_T(\phi)) - \Delta(\phi, \chi)\right| < \epsilon.$$

Таким образом, $DF_T(\phi)\chi$ существует и равно $\Delta(\phi, \chi)$. Используя шаг 1.1, мы получаем, что F_T является C^1_{MB}-гладким.

2. В случае $* = F$ получаем, что f является C^1_{MB}-гладким по утверждению 8.2 (см. [17, следствие 3.2 (i)]), а F_T также является C^1_{MB}-гладким в силу шага 1 выше. Снова по утверждению 8.2 (см. [17, следствие 3.2 (i)]) нам осталось показать, что отображение

$$C_T \supset \mathrm{dom}_T \ni \phi \mapsto DF_T(\phi) \in L_c(C_T, C_{0T})$$

непрерывно в топологии β равномерной сходимости на ограниченных подмножествах C_T. По замечанию 8.1, для этого надо сделать следующее: имея заданные $\xi \in \mathrm{dom}_T$, окрестность V точки 0 из C_{0T} и ограниченное подмножество $B \subset C_T$, нам нужно найти такую окрестность N точки ξ из dom_T, что для всех $\tilde\xi \in N$ и всех $\hat\xi \in B$

$$[DF_T(\tilde\xi) - DF_T(\xi)]\hat\xi \in V.$$

Предположим, что $V = \{\phi \in C_{0T} : |\phi| < \delta\}$ для некоторого $\delta > 0$. Тогда соотношение выше следует из неравенства

$$\delta > |\{[DF_T(\tilde\xi) - DF_T(\xi)]\hat\xi\}(t)| = |Df(\tilde\xi_t)\hat\xi_t - Df(\xi_t)\hat\xi_t|. \tag{2.2}$$

для всех $\tilde\xi \in N$, всех $\hat\xi \in B$ и всех $t \in [0, T]$.

2.1. Пусть теперь даны $\xi \in \mathrm{dom}_T$, ограниченное множество $B \subset C_T$ и $\delta > 0$. Докажем, что

$$B_C = \{E_T(\hat\xi, t) \in C : \hat\xi \in B, 0 \leqslant t \leqslant T\}$$

ограничено. Пусть $j \in \mathbb{N}$. Нам необходимо показать, что полунорма $|\cdot|_j$ ограничена на B_C. Выберем целое $k \geqslant j + T$. Полунорма $|\cdot|_{T,k}$ на C_T ограничена на B. Для каждого $\hat\xi \in B$ и каждого $t \in [0, T]$ и в силу

$$|E_T(\hat\xi, t)|_j = \max_{-j\leqslant s\leqslant 0}|\hat\xi(t + s)| \leqslant \max_{-j\leqslant w\leqslant T}|\hat\xi(w)| \leqslant |\hat\xi|_{T,k}$$

получаем, что $|\cdot|_j$ ограничено на B_C.

2.2. Для каждого $\tilde\xi \in \mathrm{dom}_T$, $\hat\xi \in B$, и $t \in [0, T]$ имеем

$$\{Df(\tilde\xi_t) - Df(\xi_t)\}\hat\xi_t = \{Df(E_T(\tilde\xi, t)) - Df(E_T(\xi, t))\}E_T(\hat\xi, t),$$

причем $E_T(\hat\xi, t) \in B_C$. Поскольку f C^1_F-гладко, а E_T непрерывно, композиция

$$Q : C_T \times \mathbb{R} \supset \mathrm{dom}_T \times [0, T] \ni (\tilde\xi, t) \mapsto Df(E_T(\tilde\xi, t)) \in L_c(C, \mathbb{R}^n)$$

непрерывна в топологии β на $L_c(C,\mathbb{R}^n)$. Пусть $W = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \delta\}$. Множество

$$U_{W,B_C} = \{A \in L_c(C,\mathbb{R}^n) : AB_C \subset W\}$$

является окрестностью точки 0 из $L_c(C,\mathbb{R}^n)$ в топологии β. Применим утверждение 1.1 (см. [17, утверждение 2.1]) к отображению Q и компакту $\{\xi\} \times [0,T]$. Отсюда следует, что существует окрестность N точки ξ из $\mathrm{dom}_T \subset C_T$ такая, что для каждого $\tilde{\xi} \in N$ и для всех $t \in [0,T]$ разница

$$Q(\tilde{\xi},t) - Q(\xi,t) = Df(E_T(\tilde{\xi},t)) - Df(E_T(\xi,t))$$

вложена в U_{W,B_C}. То есть

$$\mathbb{R}^n \supset W \ni \{Df(E_T(\tilde{\xi},t)) - Df(E_T(\xi,t))\}\hat{\beta} = \{Df(\tilde{\xi}_t) - Df(\xi_t)\}\hat{\beta}_t \tag{2.3}$$

для всех $\tilde{\xi} \in N$, всех $t \in [0,T[]$ и всех $\hat{\beta} \in B_C \subset C$. Для каждого $\tilde{\xi} \in N$, $t \in [0,T[]$ и $\hat{\xi} \in B$ имеем $(\hat{\beta} =)\ \hat{\xi}_t \in B_C$. Используя соотношение (2.3), мы получаем неравенство (2.2). □

Отсюда следует, что отображение $B_T : \mathcal{O}_T \to C_{0T,0}$, которое задается формулой

$$B_T(\eta,\phi) = (I_T \circ F_T)(J_T(\eta,\phi)),$$

является C^1_*-гладким.

3. Равномерные сжатия и локальные решения

Для того, чтобы показать, что некоторые ограничения на B_T при достаточно малом $T > 0$ являются равномерными сжатиями, заметим сначала, что при $T > 0$ и $(\eta,\phi),(\hat{\eta},\phi) \in \mathcal{O}_T$ имеем

$$\begin{aligned}
|B_T(\hat{\eta},\phi) - B_T(\eta,\phi)| &= |I_T(F_T(J_T(\hat{\eta},\phi))) - I_T(F_T(J_T(\eta,\phi)))| = \\
&= |I_T\{F_T(J_T(\hat{\eta},\phi)) - F_T(J_T(\eta,\phi))\}| = \\
&\leqslant T \max_{0\leqslant t\leqslant T} |\{F_T(J_T(\hat{\eta},\phi)) - F_T(J_T(\eta,\phi))\}(t)|
\end{aligned}$$

и для всех $t \in [0,T]$

$$\{F_T(J_T(\hat{\eta},\phi)) - F_T(J_T(\eta,\phi))\}(t) = f((P_{0T}\phi)_t + (Z_T\hat{\eta})_t) - f((P_{0T}\phi)_t + (Z_T\eta)_t).$$

В случае, когда отрезок между аргументами f принадлежит U, последнее слагаемое равняется

$$\int_0^1 Df((P_{0T}\phi)_t + (Z_T\eta)_t + \theta[(Z_T\hat{\eta})_t - (Z_T\eta)_t])[(Z_T\hat{\eta})_t - (Z_T\eta)_t]d\theta.$$

Утверждение 3.1. *Пусть $\phi \in \mathrm{dom}_T$. Существует $T = T_\phi > 0$, окрестность $V = V_\phi$ точки ϕ из dom_T, $\epsilon = \epsilon_\phi > 0$ и $j = j_\phi \in \mathbb{N}$ такие, что для всех $S \in (0,T]$, всех $\chi \in V$, всех η и $\tilde{\eta}$ из $C_{0S,0}$ таких, что $|\eta| < \epsilon$ и $|\tilde{\eta}| < \epsilon$, а также всех $w \in [0,S]$ и всех $\theta \in [0,1]$ выполнено*

$$(P_{0S}\chi)_w + (Z_S\eta)_w + \theta[(Z_S\tilde{\eta})_w - (Z_S\eta)_w] \in U \tag{3.1}$$

и

$$|Df((P_{0S}\chi)_w + (Z_S\eta)_w + \theta[(Z_S\tilde{\eta})_w - (Z_S\eta)_w])[(Z_S\tilde{\eta})_w - (Z_S\eta)_w)] \leqslant 2j\,|\tilde{\eta} - \eta|.$$

Доказательство.

1. Пусть $\phi \in U$. Так как f C^1_{MB}-гладко, отображение $U \times C \ni (\chi,\eta) \mapsto Df(\chi)\eta \in \mathbb{R}^n$ непрерывно. Тогда существуют окрестности V' точки ϕ из U и N точки 0 из C такие, что

$$|Df(\chi)\eta| = |Df(\chi)\eta - Df(\phi)0| < 1 \quad \text{для всех} \quad \chi \in V', \eta \in N.$$

Существует $j = j_N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\left\{\zeta \in C : |\zeta|_j < \frac{1}{j}\right\} \subset N.$$

2. В силу непрерывности отображения

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto E_\infty(P_{0\infty}\phi,t) \in C$$

в точке $t = 0$ с учетом $E_\infty(P_{0\infty}\phi, 0) = \phi$ существует $T > 0$ такое, что $E_\infty(P_{0\infty}\phi, t) \in V'$ для всех $t \in [0, T]$. Непрерывное отображение

$$\alpha : C \times C_{0T,0} \times [0, T] \ni (\chi, \eta, t) \mapsto E_\infty(P_{0\infty}\chi, t) + E_T(Z_T\eta, t) \in C$$

удовлетворяет $\alpha(\phi, 0, t) = E_\infty(P_{0\infty}\phi, t) \in V'$ для всех $t \in [0, T]$ и равномерно непрерывно на компакте $\{\phi\} \times \{0\} \times [0, T]$. Отсюда следует, что существуют окрестность V точки ϕ из V' и $\epsilon > 0$ такие, что

$$E_\infty(P_{0\infty}\chi, t) + E_T(Z_T\eta, t) = \alpha(\chi, \eta, t) \in V'$$

для всех $\chi \in V$, $\eta \in C_{0T,0}$, $|\eta| < \epsilon$, и $t \in [0, T]$. Заметим, что $E_\infty(P_{0\infty}\chi, t) = E_T(P_{0T}\chi, t)$ для описанных выше χ и t.

3. Пусть $0 < S < T$ и $\chi \in V$, $\eta \neq \tilde\eta$ из $C_{0S,0}$ такие, что $|\eta| < \epsilon$ и $|\tilde\eta| < \epsilon$. Пусть $0 \leqslant w \leqslant S$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Тогда

$$|P_{ST}\eta| \leqslant |\eta| < \epsilon \quad \text{и} \quad |P_{ST}\tilde\eta| \leqslant |\tilde\eta| < \epsilon.$$

В силу выпуклости,

$$|P_{ST}\eta + \theta[P_{ST}\tilde\eta - P_{ST}\eta]| < \epsilon.$$

Выбор V и ϵ на шаге 2 дает

$$V' \ni E_\infty(P_{0\infty}\chi, w) + E_T(Z_T(P_{ST}\eta + \theta[P_{ST}\tilde\eta - P_{ST}\eta]), w).$$

В силу $0 \leqslant w \leqslant S$,

$$E_T(Z_TP_{ST}\eta, w) = (Z_S\eta)_w, \qquad E_T(Z_TP_{ST}\tilde\eta, w) = (Z_S\tilde\eta)_w$$

и

$$\begin{gathered} E_T(Z_T(P_{ST}\eta + \theta[P_{ST}\tilde\eta - P_{ST}\eta]), w) = \\ = E_T(Z_TP_{ST}\eta, w) + \theta[E_T(Z_TP_{ST}\tilde\eta, w) - E_T(Z_TP_{ST}\eta, w)] = \\ = (Z_S\eta)_w + \theta[(Z_S\tilde\eta)_w - (Z_S\eta)_w]. \end{gathered}$$

Используя это и тот факт, что $E_\infty(P_{0\infty}\chi, w) = (P_{0S}\chi)_w$, мы получаем

$$U \supset V' \ni (P_{0S}\chi)_w + (Z_S\eta)_w + \theta[(Z_S\tilde\eta)_w - (Z_S\eta)_w].$$

4. Для

$$\zeta = \frac{1}{2j|\eta - \tilde\eta|}(\tilde\eta - \eta) \in C_{0S,0}$$

имеем

$$\begin{aligned} |(Z_S\zeta)_w|_j &= \max_{-j \leqslant t \leqslant 0} |(Z_S\zeta)(w + t)| = \max_{w-j \leqslant s \leqslant w} |(Z_S\zeta)(s)| \leqslant \\ &\leqslant \max_{0 \leqslant s \leqslant S} |(Z_S\zeta)(s)| = \max_{0 \leqslant s \leqslant S} |\zeta(s)| = |\zeta| < \frac{1}{j}, \end{aligned}$$

следовательно, $(Z_S\zeta)_w \in N$. Используя это и результаты шага 3, мы получаем

$$\begin{gathered} 1 > |Df((P_{0S}\chi)_w + (Z_S\eta)_w + \theta[(Z_S\tilde\eta)_w - (Z_S\eta)_w])(Z_S\zeta)_w| = \\ = |Df((P_{0S}\chi)_w + (Z_S\eta)_w + \theta[(Z_S\tilde\eta)_w - (Z_S\eta)_w])\frac{1}{2j|\eta - \tilde\eta|}(Z_S(\tilde\eta - \eta))_w| = \\ = |Df((P_{0S}\chi)_w + (Z_S\eta)_w + \theta[(Z_S\tilde\eta)_w - (Z_S\eta)_w])\frac{1}{2j|\eta - \tilde\eta|}((Z_S\tilde\eta)_w - (Z_S\eta)_w)|, \end{gathered}$$

откуда следует оценка в утверждении. □

Пусть даны $\phi \in U$, $T = T_\phi > 0$, выпуклая окрестность $V = V_\phi$ точки ϕ из U, $\epsilon = \epsilon_\phi > 0$ и $j = j_\phi \in \mathbb{N}$ из утверждения 3.1.

Утверждение 3.2. *Для каждого $S \in (0, T)$, $\chi \in V$, η и $\tilde\eta$ из $C_{0S,0}$ таких, что $|\eta| < \epsilon$ и $|\tilde\eta| < \epsilon$, выполнено*

$$(\eta, \chi) \in \mathcal{O}_S\ (\tilde\eta, \chi) \in \mathcal{O}_S \quad \text{и} \quad |B_S(\tilde\eta, \chi) - B_S(\eta, \chi)| \leqslant 2jS|\tilde\eta - \eta|.$$

Доказательство. Пусть $S \in (0,T)$, $\chi \in V$, η и $\tilde\eta$ из $C_{0S,0}$ такие, что $|\eta| < \epsilon$ и $|\tilde\eta| < \epsilon$. Соотношение (3.1) для $0 \leqslant w \leqslant S$, где $\theta = 0$ и $\theta = 1$, дает $(\eta,\chi) \in \mathcal{O}_S$ и $(\tilde\eta,\chi) \in \mathcal{O}_S$. Более того, для каждого $\theta \in [0,1]$,

$$\mathrm{dom}_S \ni P_{0S}\chi + Z_S\eta + \theta[Z_S\tilde\eta - Z_S\eta] = J_S(\eta,\chi) + \theta[J_S(\tilde\eta,\chi) - J_s(\eta,\chi)]. \tag{3.2}$$

Имеем, что

$$\begin{aligned} |B_S(\tilde\eta,\chi) - B_S(\eta,\chi)| &= |I_S[F_S(J_S(\tilde\eta,\chi)) - F_S(J_S(\eta,\chi))]| \leqslant \\ &\leqslant S \max_{0\leqslant w\leqslant S} |F_S(J_S(\tilde\eta,\chi))(w) - F_S(J_S(\eta,\chi))(w)| = \\ &= S|F_S(J_S(\tilde\eta,\chi)) - F_S(J_S(\eta,\chi))|. \end{aligned}$$

Поскольку F_S C^1_{MB}-гладкая, из соотношения (3.2) для всех $\theta \in [0,1]$ мы получаем, что последнее слагаемое равно

$$S\left|\int_0^1 DF_S(J_S(\eta,\chi) + \theta[J_S(\tilde\eta,\chi) - J_S(\eta,\chi)])[J_S(\tilde\eta,\chi) - J_S(\eta,\chi)]d\theta\right| =$$

$$= S\left|\int_0^1 DF_S(P_{0S}\chi + Z_S\eta + \theta[Z_S\tilde\eta - Z_S\eta])[Z_S\tilde\eta - Z_S\eta]d\theta\right| \leqslant$$

$$\leqslant S \max_{0\leqslant\theta\leqslant 1}\big(\max_{0\leqslant w\leqslant S} |Df((P_{0S}\chi)_w + (Z_S\eta)_w + \theta[(Z_S\tilde\eta)_w - (Z_S\eta)_w])[(Z_S\tilde\eta)_w - (Z_S\eta)_w]|\big) \leqslant$$

$$\leqslant S\cdot 2j\cdot|\tilde\eta - \eta| \qquad \text{(в силу утверждения 3.1).}$$

□

Утверждение 3.3. $\lim\limits_{S\searrow 0} B_S(0,\phi) = 0$.

Доказательство. Используем

$$|B_S(0,\phi)| = |I_S(F_S(J_S(0,\phi)))| \leqslant S|F_S(J_S(0,\phi))| = S \max_{0\leqslant w\leqslant S}|f((P_{0S}\phi)_w)| \leqslant S \max_{0\leqslant w\leqslant T}|f((P_{0T}\phi)_w)|.$$

□

Утверждение 3.4. *Существует $S_\phi \in (0,T_\phi)$ и открытая окрестность W_ϕ точки ϕ в V_ϕ такая, что для всех $\chi \in W_\phi$, всех $S \in (0,S_\phi]$, всех $\eta \in C_{0S,0}$ и $\tilde\eta \in C_{0S,0}$ таких, что $|\eta| \leqslant \frac{\epsilon_\phi}{2}$ и $|\tilde\eta| \leqslant \frac{\epsilon_\phi}{2}$, выполнено*

$$(\eta,\chi) \in \mathcal{O}_S,\ (\tilde\eta,\chi) \in \mathcal{O}_S,$$

$$|B_S(\eta,\chi)| < \frac{\epsilon_\phi}{2} \quad \textit{и} \quad |B_S(\tilde\eta,\chi) - B_S(\eta,\chi)| \leqslant \frac{1}{2}|\tilde\eta - \eta|.$$

Доказательство.

1. Выберем $S_\phi \in (0,T_\phi)$ так, чтобы

$$|B_S(0,\phi)| < \frac{\epsilon_\phi}{8} \quad \text{для всех} \quad S \in (0,S_\phi],$$

что возможно в силу утверждения 3.3, а также

$$2jS_\phi < \frac{1}{2}.$$

Так как B_{S_ϕ} непрерывна, то существует открытая окрестность W_ϕ точки ϕ в V_ϕ такая, что для всех $\chi \in W_\phi$

$$|B_{S_\phi}(0,\chi) - B_{S_\phi}(0,\phi)| < \frac{\epsilon_\phi}{8}.$$

2. Пусть теперь задано $S \in (0,S_\phi]$. Для каждого $\chi \in W_\phi$ и $t \in [0,S]$

$$B_S(0,\chi)(t) = \int_0^t f((P_{0S}\chi)_w)dw = \int_0^t f((P_{0S_\phi}\chi)_w)dw = B_{S_\phi}(0,\chi)(t).$$

Используя это (для χ и ϕ), получим

$$|B_S(0,\chi) - B_S(0,\phi)| \leqslant |B_{S_\phi}(0,\chi) - B_{S_\phi}(0,\phi)| < \frac{\epsilon_\phi}{8}.$$

3. Пусть заданы $\chi \in W_\phi$, $\eta \in C_{0S,0}$, $\tilde{\eta} \in C_{0S,0}$ так, что $|\eta| \leqslant \frac{\epsilon_\phi}{2}$ и $|\tilde{\eta}| \leqslant \frac{\epsilon_\phi}{2}$. По утверждению 3.2

$$|B_S(\tilde{\eta},\chi) - B_S(\eta,\chi)| \leqslant 2jS|\tilde{\eta}-\eta| \leqslant \frac{1}{2}\tilde{\eta}-\eta|.$$

Более того,

$$\begin{aligned} |B_S(\eta,\chi)| &\leqslant |B_S(\eta,\chi) - B_S(0,\chi)| + |B_S(0,\chi) - B_S(0,\phi)| + |B_S(0,\phi)| < \\ &< \frac{1}{2}|\eta| + \frac{\epsilon_\phi}{8} + \frac{\epsilon_\phi}{8} \leqslant \frac{1}{2}\frac{\epsilon_\phi}{2} + \frac{2\epsilon_\phi}{8} = \frac{\epsilon_\phi}{2}. \end{aligned}$$

□

Пусть задано $S \in (0, S_\phi]$. В случае $* = MB$ результат о равномерном сжатии [14, теорема 7.2] можно применить к отображению

$$\{\eta \in C_{0S,0} : |\eta| < \epsilon_\phi\} \times W_\phi \ni (\eta,\chi) \mapsto B_S(\eta,\chi) \in C_{0S,0},$$

где $M = M_\phi = \{\eta \in C_{0S,0} : |\eta| \leqslant \frac{\epsilon_\phi}{2}\}$. В случае $* = F$ теорему 8.7 (см. [17, теорема 5.2]) можно применить к такому же отображению и на том же самом множестве M. Это следует из того, что соотношение

$$B_S(\eta,\chi) = \eta \in M, \quad \chi \in W_\phi$$

определяет отображение

$$W_\phi \ni \chi \mapsto \eta_\chi \in C_{0S,0},$$

которое является C^1_*-гладким. Так как отображения P_{0S} и Z_S линейны и непрерывны, то отображение

$$\Sigma_\phi : W_\phi \ni \chi \mapsto P_{0S}\chi + Z_S\eta_\chi \in C_S$$

является C^1_*-гладким. Используя это и непрерывные линейные отображения $E_S(\cdot,t) : C_S \to C$, $0 \leqslant t \leqslant S$, получим, что каждое отображение

$$W_\phi \ni \chi \mapsto E_S(\Sigma_\phi(\chi),t) \in C, \quad 0 \leqslant t \leqslant S,$$

является C^1_*-гладким. Отображение

$$[0,S] \times W_\phi \ni (t,\chi) \mapsto E_S(\Sigma_\phi(\chi),t) \in C$$

непрерывно.

Утверждение 3.5. *Пусть заданы $S \in (0, S_\phi]$ и $\chi \in W_\phi$. Отображение $x = x^{(\chi)} = \Sigma_\phi(\chi)$ является решением уравнения* (1.1) *на* $[0,S]$, *причем* $x_0 = \chi$.

Доказательство. $x = \Sigma_\phi(\chi) \in C_S$ непрерывно, причем

$$x_0 = \Sigma_\phi(\chi)_0 = (P_{0S}\chi)_0 + (Z_S\eta_\chi)_0 = \chi + 0 = \chi.$$

При $0 \leqslant t \leqslant S$

$$\begin{aligned} x(t) &= (P_{0S}\chi)(t) + (Z_S\eta_\chi)(t) = \chi(0) + \eta_\chi(t) = \\ &= \chi(0) + B_S(\eta_\chi,\chi)(t) = \chi(0) + \int_0^t f((P_{0S}\chi + Z_S\eta_\chi)_w)dw = \\ &= \chi(0) + \int_0^t f(E_S(\Sigma_\phi(\chi),w))dw. \end{aligned}$$

Последнее подынтегральное выражение непрерывно. Это следует из того, что сужение $x|_{[0,S]}$ непрерывно дифференцируемо, причем $(x|_{[0,S]})'(t) = f((\Sigma_\phi(\chi))_t) = f(x_t)$ при всех $t \in [0,S]$. □

Из замечаний перед утверждением 3.5 можно видеть, что все отображения

$$W_\phi \ni \chi \mapsto x_t^{(\chi)} \in C, \quad 0 \leqslant t \leqslant S,$$

являются C^1_*-гладкими, и что непрерывно отображение

$$[0,S] \times W_\phi \ni (t,\chi) \mapsto x_t^{(\chi)} \in C.$$

Утверждение 3.6 (единственность). *Пусть x — решение уравнения* (1.1) *на интервале I и $\tilde{x}$ — решение уравнения* (1.1) *на интервале $\tilde{I}$, причем интервалы одинаковой длины, и* $0 = \min I = \min \tilde{I}$, $x_0 = \tilde{x}_0$. *Тогда $x(t) = \tilde{x}(t)$ на $I \cap \tilde{I}$.*

Доказательство.

1. Докажем, что существует $\tau > 0$ такое, что $[0,\tau] \subset I \cap \tilde{I}$ и $x(t) = \tilde{x}(t)$ для всех $t \leqslant \tau$. Пусть $\phi = x_0$ $(= \tilde{x}_0 \in U)$. Рассмотрим $T_\phi, \epsilon_\phi, S_\phi$ такие же, как в утверждении 3.4. В силу непрерывности существует $\tau = S \in (0, S_\phi] \cap I \cap \tilde{I}$ такое, что при $0 \leqslant t \leqslant S$

$$|x(t) - \phi(0)| < \frac{\epsilon_\phi}{2} \quad \text{и} \quad |\tilde{x}(t) - \phi(0)| < \frac{\epsilon_\phi}{2}.$$

Введем

$$\begin{aligned} y &= x|_{(-\infty,S]} - P_{0S}\phi, \quad \eta = y|_{[0,S]} \in C_{0S,0}, \\ \tilde{y} &= \tilde{x}|_{(-\infty,S]} - P_{0S}\phi, \quad \tilde{\eta} = \tilde{y}|_{[0,S]} \in C_{0S,0}. \end{aligned}$$

Тогда

$$|\eta| < \frac{\epsilon_\phi}{2} \quad \text{и} \quad |\tilde{\eta}| < \frac{\epsilon_\phi}{2},$$

и при $0 \leqslant t \leqslant S$

$$B_S(\eta,\phi)(t) = \int_0^t f((P_{0S}\phi)_w + (Z_S\eta)_w)dw = \int_0^t f(x_w)dw = x(t) - \phi(0) = \eta(t).$$

Следовательно, $B_S(\eta,\phi) = \eta$. Аналогично, $B_S(\tilde{\eta},\phi) = \tilde{\eta}$. Согласно утверждению 3.4

$$|\tilde{\eta} - \eta| = |B_S(\tilde{\eta},\phi) - B_S(\eta,(\phi)| \leqslant \frac{1}{2}|\tilde{\eta} - \eta|,$$

что дает $\tilde{\eta} = \eta$ и, следовательно, $\tilde{x}(t) = x(t)$ на $[0,S] = [0,\tau]$.

2. Интервал $J = I \cap \tilde{I}$ имеет положительную длину, причем $\min J = 0$. Предположим, что $x(u) \neq \tilde{x}(u)$ для некоторого $u \in J$. Тогда $0 < u$ и, по непрерывности, $t_J = \inf\{t \in J : x(t) \neq \tilde{x}(t)\} < u \leqslant \sup J$. На $(-\infty, t_J]$ имеем $x(t) = \tilde{x}(t)$, поскольку каждая окрестность t_J содержит $t > t_J$ в J, причем $x(t) \neq \tilde{x}(t)$. Непрерывно дифференцируемая функция $y : (-\infty, \sup J - t_J) \to \mathbb{R}^n$, заданная формулой $y(t) = x(t + t_J)$, удовлетворяет

$$y'(t) = x'(t + t_J) = f(x_{t+t_J}) = f(y_t)$$

для $0 \leqslant t < \sup J - t_J$ (с правой производной в точке $t = 0$). Аналогично, функция $\tilde{y} : (-\infty, \sup J - t_J) \to \mathbb{R}^n$, заданная формулой $y(t) = \tilde{x}(t+t_J)$, является решением уравнения (1.1) на $[0, \sup J - t_J)$ и $y_0 = \tilde{y}_0$. Из шага 1 доказательства получаем, что $y(t) = \tilde{y}(t)$ на интервале $[0,\tau]$, где $0 < \tau < \sup J - t_J$. Отсюда следует, что $x(t) = \tilde{x}(t)$ на $[t_J, t_J + \tau]$, что противоречит определению t_J. □

4. Полупоток непрерывно дифференцируемых операторов решений

Теперь будем действовать, как в [14, раздел 5], приводя доказательства для удобства читателя. Максимальное решение начальной задачи (1.1)-(1.2), заданное начальным условием $x_0 = \phi \in U$, определяется следующим образом. Положим

$$t_\phi = \sup\{t > 0 : \text{существует решение уравнения (1.1) на } [0,t] \text{ с } x_0 = \phi\} \leqslant \infty.$$

В силу утверждения 3.5 выполнено $0 < t_\phi$. Используя утверждение 3.6, мы получаем решение x^ϕ уравнения (1.1) на $[0, t_\phi)$, причем $x_0^\phi = \phi$ в силу

$$x^\phi(t) = x(t)$$

для $0 < t < t_\phi$, где x — любое решение уравнения (1.1) на $[0, t']$, где $t < t' < t_\phi$ и $x_0 = \phi$.

Легко проверить, что всякое решение уравнения (1.1) на некотором интервале I положительной длины с $\min I = 0$ и $x_0 = \phi$ является сужением x^ϕ.

Положим

$$\Omega = \{(t, \phi) \in [0, \infty) \times U : t < t_\phi\}$$

и определим $\Sigma : \Omega \to U$ формулой $\Sigma(t, \phi) = x_t^\phi$.

Утверждение 4.1 (полупоток). *$\{0\} \times U \subset \Omega$, $\Sigma(0, \phi) = \phi$ для всех $\phi \in U$, и если $(t, \phi) \in \Omega$ и $(s, \Sigma(t, \phi)) \in \Omega$, то*

$$(s + t, \phi) \in \Omega \quad и \quad \Sigma(s, \Sigma(t, \phi)) = \Sigma(s + t, \phi).$$

Доказательство. Для каждого $\phi \in U$, $0 < t_\phi$ $(0, \phi) \in \Omega$ и $\Sigma(0, \phi) = x_0^\phi = \phi$. Пусть $(t, \phi) \in \Omega$ и $(s, \Sigma(t, \phi)) \in \Omega$. Пусть $x = x^\phi$, $\psi = x_t$, $y = x^\psi$. Определим $\xi : (-\infty, s + t] \to \mathbb{R}^n$ формулой $\xi(u) = y(u - t)$. Для $u \leqslant t$ получим

$$\xi(u) = y(u - t) = \psi(u - t) = x_t(u - t) = x(u).$$

В частности, $\xi_0 = \phi$ и $\xi'(u) = f(\xi_u)$ для $0 \leqslant u \leqslant t$ (с правой производной в точке $u = 0$). При $t < u \leqslant t + s$

$$\xi'(u) = y'(u - t) = f(y_{u-t}) = f(\xi_u).$$

Отсюда следует, что ξ является сужением x^ϕ. Следовательно, $s + t < t_\phi$, или $(s + t, \phi) \in \Omega$, и

$$\Sigma(s + t, \phi) = \xi_{s+t} = y_s = \Sigma(s, \psi) = \Sigma(s, \Sigma(t, \phi)).$$

□

Для $t \geqslant 0$ и $\Omega_t = \{\phi \in U : (t, \phi \in \Omega\} \neq \varnothing$ рассмотрим оператор решения

$$\Sigma_t : \Omega_t \to U,$$

заданный формулой $\Sigma_t(\phi) = \Sigma(t, \phi)$.

Утверждение 4.2. *Для каждого $(t, \phi) \in \Omega$ существует открытая окрестность $N \subset U$ точки ϕ и $\epsilon > 0$, причем $[0, t + \epsilon) \times N \subset \Omega$, $\Sigma|_{[0,t+\epsilon)\times N}$ непрерывна и $\Sigma_t|_N$ является C^1_*-гладкой.*

Доказательство.

1. Пусть задана $(t, \phi) \in \Omega$. В силу замечаний после утверждения 3.5 получаем, что точка $t = 0$ содержится во множестве

$$\begin{aligned} A \;=\; \{&s \in [0, t_\phi) : \text{существует открытая окрестность } V_s \subset U \text{ точки } \phi \\ &\text{и } \epsilon_s > 0 \text{ где } [0, s + \epsilon_s) \times V_s \subset \Omega,\ \Sigma|_{[0,s+\epsilon_s)\times V_s} \text{ непрерывна,} \\ &\text{и } \Sigma_s|_{V_s}\ C^1_* - \text{гладкая}\}. \end{aligned}$$

Пусть $t_A = \sup A \leqslant t_\phi$. Остается доказать, что $t_A = t_\phi$.

2. Пусть $t_A < t_\phi$. Положим $\psi = \Sigma(t_A, \phi)$. Снова в силу замечаний после утверждения 3.5 существуют открытая окрестность $W \subset U$ точки ψ и $\tau > 0$ такое, что $[0, \tau] \times W \subset \Omega$, для которых $\Sigma|_{[0,\tau]\times W}$ непрерывна и все $\Sigma_u|_W$, $0 \leqslant u \leqslant \tau$, являются C^1_*-гладкими. Линия потока $[0, t_\phi) \ni s \mapsto x_s^\phi \in U$ непрерывна (заметим, что $x_s^\phi = E_u(x^\phi|_{(-\infty,u]}, s)$ при $0 \leqslant s < u < t_\phi$, а E_u непрерывна). Отсюда следует, что существует

$$t_0 \in A \cap \left(t_A - \frac{\tau}{2}, t_A\right) \quad \text{где} \quad x_{t_0}^\phi \in W.$$

Из $t_0 \in A$ получаем, что найдутся открытая окрестность $N_0 \subset U$ точки ϕ и $\epsilon_0 > 0$ такие, что $[0, t_0 + \epsilon_0) \times N_0 \subset \Omega$, причем $\Sigma|_{[0,t_0+\epsilon_0)\times N_0}$ непрерывна, и $\Sigma_{t_0}|_{N_0}$ C^1_*-гладкая. В силу непрерывности и $x_{t_0}^\phi \in W$ получаем $\Sigma_{t_0}(N_0) \subset W$. При $t_0 < u < t_A + \dfrac{\tau}{2}$ и $\chi \in N_0$,

$$0 < u - t_0 < \tau \quad \text{и} \quad \Sigma_{t_0}(\chi) \in W,$$

что дает $(u, \chi) = ((u - t_0) + t_0, \chi) \in \Omega$ и

$$\Sigma(u, \chi) = \Sigma(u - t_0, \Sigma(t_0, \chi)).$$

Отсюда следует, что $\Sigma|_{(t_0, t_A+\frac{\tau}{2})\times N_0}$ непрерывна, что в сочетании с непрерывностью сужения $\Sigma|_{[0,t_0+\epsilon_0)\times N_0}$ доказывает, что сужение Σ на $\left[0, t_A + \dfrac{\tau}{2}\right) \times N_0$ непрерывно.

3. При $u = t_A + \dfrac{\tau}{4}$ и $\chi \in N_0$,

$$\Sigma(u,\chi) = \Sigma(u - t_0, \Sigma(t_0,\chi)) = \Sigma_{u-t_0} \circ \Sigma_{t_0}(\chi),$$

где $0 < u - t_0 < \tau$. Напомним, что $\Sigma_{t_0}(N_0) \subset W$. Отсюда следует, что $\Sigma_u|_{N_0}$ C^1_*-гладкая. В сочетании с результатами шага 2 доказательства заключаем, что $u > t_A$ принадлежит A, что противоречит тому, что $t_A = \sup A$. □

Следствие 4.3. *Полупоток Σ непрерывен, каждое множество Ω_t, $t \geqslant 0$, открыто в X_f, и каждый оператор решения Σ_t, где $t \geqslant 0$ и $\Omega_t \neq \varnothing$, является C^1_*-гладким.*

Доказательство. Пусть даны $t \geqslant 0$ и $\phi \in \Omega_t$. Тогда $(t,\phi) \in \Omega$, и для выбранного N в силу утверждения 4.2 мы получаем $N \subset \Omega_t$. Это показывает, что $\Omega_t \subset U$ — открытое подмножество C. Дальнейшие рассуждения очевидным образом вытекают из утверждения 4.2. □

5. Линеаризованные операторы решений и вариационное уравнение

Для $\phi \in U$ производные $D\Sigma_t(\phi) : C \to C$, $0 \leqslant t < t_\phi$, задаются вариационным уравнением. Для доказательства нам потребуется следующая версия утверждения 5.5 из [14].

Утверждение 5.1. *Пусть $\phi \in U$, $0 \leqslant t < t_\phi$, $\hat\phi \in C$ и $s \leqslant 0$. Тогда*

$$\begin{aligned} (D\Sigma_t(\phi)\hat\phi)(s) &= \hat\phi(t+s) \quad \text{если} \quad t+s \leqslant 0,\\ (D\Sigma_t(\phi)\hat\phi)(s) &= (D\Sigma_{t+s}(\phi)\hat\phi)(0) \quad \text{если} \quad 0 \leqslant t+s. \end{aligned}$$

Доказательство. Каждое линейное отображение

$$ev_s : C \ni \psi \mapsto \psi(s) \in \mathbb{R}^n, \quad s \leqslant 0,$$

непрерывно. Пусть $\phi \in U$, $0 \leqslant t < t_\phi$, $\hat\phi \in C$, $s \leqslant 0$. Тогда

$$\begin{aligned} (D\Sigma_t(\phi)\hat\phi)(s) &= ev_s(D\Sigma_t(\phi)\hat\phi) = D(ev_s \circ \Sigma_t)(\phi)\hat\phi =\\ &= D\{\Omega_t \ni \tilde\phi \mapsto x_t^{\tilde\phi}(s) \in \mathbb{R}^n\}(\phi)\hat\phi =\\ &= D\{\Omega_t \ni \tilde\phi \mapsto x^{\tilde\phi}(t+s) \in \mathbb{R}^n\}(\phi)\hat\phi. \end{aligned}$$

В случае $0 \leqslant t+s$ множество $\Omega_t \subset \Omega_{t+s}$ есть открытая окрестность ϕ в U и

$$\begin{aligned} D\{\Omega_t \ni \tilde\phi \mapsto x^{\tilde\phi}(t+s) \in \mathbb{R}^n\}(\phi)\hat\phi &= D\{\Omega_t \ni \tilde\phi \mapsto x_{t+s}^{\tilde\phi}(0) \in \mathbb{R}^n\}(\phi)\hat\phi =\\ &= D(ev_0 \circ \Sigma_{t+s})(\phi)\hat\phi =\\ &= ev_0(D\Sigma_{t+s}(\phi)\hat\phi) = (D\Sigma_{t+s}(\phi)\hat\phi)(0), \end{aligned}$$

в то время как в случае $t+s \leqslant 0$

$$\begin{aligned} D\{\Omega_t \ni \tilde\phi \mapsto x^{\tilde\phi}(t+s) \in \mathbb{R}^n\}(\phi)\hat\phi &= D\{\Omega_t \ni \tilde\phi \mapsto \tilde\phi(t+s) \in \mathbb{R}^n\}(\phi)\hat\phi =\\ &= D\,ev_{t+s}(\phi)\hat\phi = ev_{t+s}(\hat\phi) = \hat\phi(t+s). \end{aligned}$$

□

Теперь мы следуем [14, раздел 6]. Для $\phi \in U$ определим отображение $v^{\phi,\hat\phi} : (-\infty, t_\phi) \to \mathbb{R}^n$ формулой

$$\begin{aligned} v^{\phi,\hat\phi}(t) &= (D\Sigma_t(\phi)\hat\phi)(0) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < t_\phi,\\ v^{\phi,\hat\phi}(t) &= \hat\phi(t) \quad \text{при} \quad t < 0. \end{aligned}$$

Утверждение 5.2. *Пусть даны* $\phi \in U$ *и* $\hat{\phi} \in C$. *Рассмотрим отображение* $v = v^{\phi,\hat{\phi}}$. *Для каждого* $t \in [0, t_\phi)$

$$v_t = D\Sigma_t(\phi)\hat{\phi} \in C.$$

В частности, $v_0 = \hat{\phi}$. *Отображение* v *непрерывно, сужение* $v : (-\infty, t_\phi) \to \mathbb{R}^n$ *на интервале* $[0, t_\phi)$ *дифференцируемо, и*

$$v'(t) = Df(x_t^\phi)v_t \quad \textit{для каждого} \quad t \in [0, t_\phi)$$

с правой производной в точке $t = 0$.

Доказательство.

1. Пусть $\phi \in U$, $\hat{\phi} \in C$, $0 \leqslant t < t_\phi$. Для $s \leqslant 0$, $0 \leqslant t + s$ по утверждению 5.1 имеем

$$v_t(s) = v(t+s) = (D\Sigma_{t+s}(\phi)\hat{\phi})(0) = (D\Sigma_t(\phi)\hat{\phi})(s),$$

а при $s \leqslant 0$, $t + s < 0$

$$v_t(s) = v(t+s) = \hat{\phi}(t+s) = (D\Sigma_t(\phi)\hat{\phi})(s).$$

Объединяя это, получим $v_t = D\Sigma_t(\phi)\hat{\phi}$. Заметим, что $D\Sigma_0(\phi)\hat{\phi} = \hat{\phi}$. Из того, что каждая область $v_t = D\Sigma_t(\phi)\hat{\phi}$, $0 \leqslant t < t_\phi$, принадлежит C, вытекает, что v непрерывна.

2. Пусть даны $t > 0$ и $\Omega_t \neq \varnothing$. Для $\phi \in \Omega_t$ рассмотрим отображение

$$\eta^\phi : [0, t] \ni s \mapsto x^\phi(s) - \phi(0) \in \mathbb{R}^n.$$

Заметим, что $\eta^\phi \in C_{0t,0}$ и

$$P_{0t}\phi + Z_t\eta^\phi = x^\phi|_{(-\infty,t]},$$

откуда вытекает, что

$$(P_{0t}\phi + Z_t\eta^\phi)_s = x_s^\phi \in U \quad \text{при} \quad 0 \leqslant s \leqslant t.$$

Отсюда следует, что $P_{0t}\phi + Z_t\eta^\phi \in \mathrm{dom}_t$. Тогда (η^ϕ, ϕ) принадлежит области $\mathcal{O}_t$ отображения B_t. Отображение $Y_t : \Omega_t \ni \phi \mapsto \eta^\phi \in C_{0t,0}$ удовлетворяет

$$\begin{aligned} Y_t(\phi)(s) &= \eta^\phi(s) = x^\phi(s) - \phi(0) = \int_0^s f(x_u^\phi)du = \int_0^s f((P_{0t}\phi + Z_t\eta^\phi)_u)du = \\ &= \int_0^s f(E_t(P_{0t}\phi + Z_tY_t(\phi), u))du = I_t(F_t(P_{0t}\phi + Z_tY_t(\phi)))(s) \end{aligned}$$

для всех $\phi \in \Omega_t$ и $s \in [0, t]$, следовательно,

$$Y_t(\phi) = I_t(F_t(J_t(Y_t(\phi), \phi))) \qquad (= B_t(Y_t(\phi), \phi)) \quad \text{для всех} \quad \phi \in \Omega_t. \tag{5.1}$$

3. Докажем, что отображение Y является C_*^1-гладким и

$$v^{\phi,\hat{\phi}}(s) = (DY_t(\phi)\hat{\phi})(s) + (P_{0t}\hat{\phi})(s) \quad \text{для всех} \quad s \in [0, t], \phi \in \Omega_t, \hat{\phi} \in C.$$

В силу шага 2 имеем $(Y_t(\phi), \phi) \in \mathcal{O}_t$ для всех $\phi \in \Omega_t$. С помощью оператора сдвига

$$\Delta_t : C \to C_t, \quad (\Delta_t\phi)(s) = \phi(s-t),$$

и оператора сужения

$$R_t : C_t \to C_{0t}, \quad R_t\chi = \chi|_{[0,t]},$$

которые являются линейными и непрерывными, получим

$$Y_t(\phi) = R_t(\Delta_t \circ \Sigma_t(\phi) - P_{0t}\phi) \quad \text{для всех} \quad \phi \in \Omega_t.$$

Это доказывает, что отображение Y_t является C_*^1-гладким и для всех $\phi \in \Omega_t$, $\hat{\phi} \in C$, $s \in [0, t]$,

$$\begin{aligned} (DY_t(\phi)\hat{\phi})(s) &= (R_t\Delta_t D\Sigma_t(\phi)\hat{\phi})(s) - (R_tP_{0t}\hat{\phi})(s) = \\ &= (D\Sigma_t(\phi)\hat{\phi})(s-t) - \hat{\phi}(0) = \\ &= (D\Sigma_s(\phi)\hat{\phi})(0) - \hat{\phi}(0) = \quad \text{(см. утверждение 5.1)} \\ &= v^{\phi,\hat{\phi}}(s) - \hat{\phi}(0) = v^{\phi,\hat{\phi}}(s) - P_{0t}\hat{\phi}(s). \end{aligned}$$

Для всех $s \leqslant t$ и $\phi \in \Omega_t$, $\hat{\phi} \in C$ мы получаем

$$(P_{0t}\hat{\phi})(s) + (Z_t DY_t(\phi)\hat{\phi})(s) = v^{\phi,\hat{\phi}}(s). \tag{5.2}$$

4. Дифференцирование уравнения (5.1) дает

$$DY_t(\phi)\hat{\phi} = I_t DF_t(J_t(Y_t(\phi),\phi))J_t(DY_t(\phi)\hat{\phi},\hat{\phi}) \qquad \text{для всех} \quad \phi \in \Omega_t, \hat{\phi} \in C. \tag{5.3}$$

Для таких ϕ и $\hat{\phi}$, а также для любого $s \in [0,t]$

$$\begin{aligned} v^{\phi,\hat{\phi}}(s) &= (DY_t(\phi)\hat{\phi})(s) + \hat{\phi}(0) = \quad \text{(см. шаг 3)} \\ &= \int_0^s Df((P_{0t}\phi)_u + (Z_tY_t(\phi))_u)((P_{0t}\hat{\phi})_u + (Z_tDY_t(\phi)\hat{\phi})_u)du + \hat{\phi}(0) = \\ &\qquad \text{(в силу уравнения (5.3) и утверждения 2.2)} \\ &= \int_0^s Df(x_u^{\phi})v_u^{\phi,\hat{\phi}}du + \hat{\phi}(0) \quad \text{(в силу уравнения (5.2)).} \end{aligned}$$

Дифференцирование при $t > 0$ дает

$$(v^{\phi,\hat{\phi}})'(t) = Df(x_t^{\phi})v_t^{\phi,\hat{\phi}}.$$

В точке $s = 0$ мы получаем

$$(v^{\phi,\hat{\phi}})'(0) = Df(x_0^{\phi})v_0^{\phi,\hat{\phi}} = Df(\phi)\hat{\phi}$$

с правой производной. □

Часть II

6. Процессы для неавтономных дифференциальных уравнений с запаздыванием

В этом разделе удобно использовать обозначение $C_n = C((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$. Пусть заданы множество $V \subset \mathbb{R} \times C_n$ и отображение $g : V \to \mathbb{R}^n$. Решение уравнения (1.3),

$$x'(t) = g(t, x_t),$$

на интервале $I \subset \mathbb{R}$ является отображением $x : (-\infty,0] + I \to \mathbb{R}^n$ таким, что $(t,x_t) \in V$ для всех $t \in I$, ограничение $x|_I$ дифференцируемо, а уравнение (1.3) выполняется для всех $t \in I$ (в случае, когда I имеет минимум t_0 с правой производной в t_0). Для $(t_0,\phi) \in V$ решение начальной задачи

$$x'(t) = g(t,x_t) \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0, \quad x_{t_0} = \phi, \tag{6.1}$$

является решением x уравнения (1.3) на некотором интервале $[t_0,t_e)$, $t_0 < t_e \leqslant \infty$, которое удовлетворяет $x_{t_0} = \phi$.

Обозначим через $p_n : C_{n+1} \to C_n$ непрерывное линейное отображение, исключающее первый компонент. Для V и g, как указано выше, определим область

$$U_g = \{\psi \in C_{n+1} : (\psi_1(0), p_n\psi) \in V\}$$

и отображение $f_g : C_{n+1} \supset U_g \to \mathbb{R}^{n+1}$ формулой

$$f_g(\psi) = (1, g(\psi_1(0), p_n\psi)),$$

так что автономное дифференциальное уравнение

$$y'(t) = f_g(y_t), \tag{6.2}$$

записанное в компонентах $y = (y_1,z) = (r,z)$, сводится к системе

$$\begin{aligned} r'(t) &= 1, \\ z'(t) &= g(r(t), z_t). \end{aligned}$$

Для заданного $t \in \mathbb{R}$ определим $t_* \in C_1$ по формуле $t_*(u) = t + u$.

Утверждение 6.1.

1. *Если* $x : (-\infty, t_x) \to \mathbb{R}^n$ *является решением на* $[t_0, t_x)$ *начальной задачи* (6.1), *тогда отображение* $(-\infty, t_x - t_0) \ni s \mapsto (s + t_0, x(s + t_0)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *является решением на* $[0, t_x - t_0)$ *начальной задачи*
$$r'(s) = 1 \quad \textit{для} \quad s \geqslant 0, \quad r_0 = t_{0*}, \tag{6.3}$$
$$z'(s) = g(r(s), z_s) \quad \textit{для} \quad s \geqslant 0, \quad z_0 = \phi. \tag{6.4}$$
2. *Если* $y = (r, z)$ *является решением на* $[0, t_y)$ *начальной задачи* (6.3)-(6.4), *тогда* $x : (-\infty, t_0 + t_y) \to \mathbb{R}^n$, *заданное формулой* $x(\tau) = z(\tau - t_0)$, *является решением на* $[t_0, t_0 + t_y)$ *начальной задачи* (6.1).

Доказательство.

1. Пусть дано решение $x : (-\infty, t_x) \to \mathbb{R}^n$ на $[t_0, t_x)$ начальной задачи (6.1). Определим $y : (-\infty, t_x - t_0) \to \mathbb{R}^{n+1}$, $y = (r, z)$ с $z : (-\infty, t_x - t_0) \to \mathbb{R}^n$ и $r = y_1$ соотношениями
$$r(t) = t + t_0 \quad \text{при} \quad t < t_x - t_0,$$
$$z(t) = x(t + t_0) \quad \text{для всех} \quad t < t_x - t_0.$$
Для $0 \leqslant t < t_x - t_0$ мы получаем $(y_1(t), z_t) = (r(t), z_t) = (t + t_0, x_{t+t_0}) \in V$. Это дает $y_t \in U_g$ для $0 \leqslant t < t_x - t_0$. Очевидно, $r'(s) = 1$ для $0 \leqslant s < t_x - t_0$ (с правой производной при $s = 0$) и $r_0 = t_{0*}$. Также для $u \leqslant 0$
$$z_0(u) = z(u) = x(u + t_0) = x_{t_0}(u) = \phi(u),$$
следовательно, $z_0 = \phi$. Для $0 \leqslant s < t_x - t_0$ мы получаем
$$z'(s) = x'(s + t_0) = g(s + t_0, x_{s+t_0}) = g(r(s), z_s)$$
с правой производной при $s = 0$.

2. Пусть дано решение $y = (r, z)$ на $[0, t_y)$ начальной задачи (6.3)-(6.4), и определим $x : (-\infty, t_0 + t_y) \to \mathbb{R}^n$ как $x(\tau) = z(\tau - t_0)$. Имеем $r(s) = s + t_0$ для $0 \leqslant s < t_y$. Для $t_0 \leqslant \tau < t_0 + t_y$ из $y_{\tau - t_0} \in U_g$ получаем, что $(\tau, x_\tau) = (r(\tau - t_0), z_{\tau - t_0})$ принадлежит V. Также
$$x'(\tau) = z'(\tau - t_0) = g(r(\tau - t_0), z_{\tau - t_0}) = g(\tau, x_\tau)$$
(с правыми производными в t_0 и в 0, соответственно), а при $u \leqslant 0$
$$x_{t_0}(u) = x(t_0 + u) = z(t_0 + u - t_0) = z(u) = \phi(u).$$
□

Предположим теперь, что V открыто, а g C^1_*-гладко. Тогда $U_g \subset C_{n+1}$ открыто как прообраз V при непрерывном линейном отображении, а отображение $f_g : C_{n+1} \supset U_g \to \mathbb{R}^{n+1}$ является C^1_*-гладким. Отсюда следует, что решения уравнения (6.2) определяют непрерывный полупоток $\Sigma_g : [0, \infty) \times C_{n+1} \supset \Omega_g \to C_{n+1}$ на U_g, со всеми C^1_*-гладкими операторами решения. Множество
$$\mathrm{dom} : \{(t, t_0, \phi) \in \mathbb{R}^2 \times C_n : t_0 \leqslant t, \ (t - t_0, t_{0*}, \phi) \in \Omega_g\}$$
является открытым подмножеством множества $\{(t, t_0) \in \mathbb{R}^2 : t_0 \leqslant t\} \times C_n$, поскольку оно является прообразом Ω_g при непрерывном отображении в $[0, \infty) \times C_{n+1}$, и *процесс* $P : \{(t, t_0) \in \mathbb{R}^2 : t_0 \leqslant t\} \times C_n \supset \mathrm{dom} \to C_n$, заданный формулой
$$P(t, t_0, \phi) = p_n \Sigma_g(t - t_0, t_{0*}, \phi)$$
непрерывен. Для каждого $t \geqslant t_0$ с $\varnothing \neq \Omega_{g, t - t_0} \subset U_g \subset C_{n+1}$ непустое множество
$$\mathrm{dom}_{t, t_0} = \{\phi \in C_n : (t, t_0, \phi) \in \mathrm{dom}\} = \{\phi \in C_n : (t_{0*}, \phi) \in \Omega_{g, t - t_0}\}$$
открыто, и отображение
$$P(t, t_0, \cdot) : C_n \supset \mathrm{dom}_{t, t_0} \to C_n$$
является C^1_*-гладким.

Следствие 6.2 (максимальные решения, единственность). *Для каждого* $(t, t_0, \phi) \in \mathrm{dom}$ *существует решение* $x = x^{t_0, \phi}$ *начальной задачи* (6.1) *такое, что любое другое решение той же начальной задачи является ограничением* x, *и* $P(t, t_0, \phi) = x_t$.

Доказательство.

1. Пусть задано $(t, t_0, \phi) \in \mathrm{dom}$. Первая часть утверждения следует из результатов для автономного уравнения (6.2) с помощью утверждения 6.1.

2. Имеем $t_0 \leqslant t$ и $(t - t_0, t_{0*}, \phi) \in \Omega_g$. Пусть $y : (-\infty, t_y) \to \mathbb{R}^{n+1}$ обозначает максимальное решение начальной задачи

$$y'(s) = f_g(y_s) \quad \text{при} \quad s \geqslant 0, \quad y_0 = (t_{0*}, \phi), \tag{6.5}$$

и запишем $y = (r, z)$ с $r = y_1$. Тогда

$$P(t, t_0, \phi) = p_n \Sigma_g(t - t_0, t_{0*}, \phi) = z_{t-t_0}.$$

Утверждение 6.1 говорит, что $\tilde{x} : (-\infty, t_0 + t_y) \to \mathbb{R}^n$, заданное по формуле

$$\tilde{x}(\tau) = z(\tau - t_0),$$

является решением на $[t_0, t_0 + t_y)$ задачи (6.1). Согласно первой части утверждения $\tilde{x}$ является ограничением максимального решения x начальной задачи (6.1), поэтому

$$P(t, t_0, \phi) = z_{t-t_0} = \tilde{x}_t = x_t.$$

□

Следствие 6.3. *Для всех* $(t_0, \phi) \in V$, $(t_0, t_0, \phi) \in \mathrm{dom}$ *и* $P(t_0, t_0, \phi) = \phi$, *и для всех* $t_0 \leqslant t \leqslant s$ *с* $(t, t_0, \phi) \in \mathrm{dom}$ *и* $(s, t, P(t, t_0, \phi)) \in \mathrm{dom}$ *выполнено*

$$(s, t_0, \phi) \in \mathrm{dom} \quad \textit{и} \quad P(s, t_0, \phi) = P(s, t, P(t, t_0, \phi)).$$

Доказательство.

1. Для $(t_0, \phi) \in V$ имеем $(t_{0*}, \phi) \in U_g$, следовательно, $(0, t_{0*}, \phi) \in \Omega_g$. Из этого следует, что $(t_0, t_0, \phi) \in \mathrm{dom}$ и $P(t_0, t_0, \phi) = p_n \Sigma_g(0, t_{0*}, \phi) = \phi$.

2. Предположим, что $t_0 \leqslant t \leqslant s$, $(t, t_0, \phi) \in \mathrm{dom}$ и $(s, t, P(t, t_0, \phi)) \in \mathrm{dom}$. Тогда $(t - t_0, t_{0*}, \phi) \in \Omega_g$. Поскольку решение начальной задачи (6.3) задается выражением $r(s) = s + t_0$, мы видим, что первый компонент r_{t-t_0} $\Sigma_g(t - t_0, t_{0*}, \phi)$ удовлетворяет

$$r_{t-t_0}(u) = r(t - t_0 + u) = (t - t_0 + u) + t_0 = t + u = t_*(u) \quad \text{для всех} \quad u \leqslant 0,$$

или $r_{t-t_0} = t_*$. Из этого следует, что

$$\Sigma_g(t - t_0, t_{0*}, \phi) = (t_*, P(t, t_0, \phi)).$$

Используя это и $(s, t, P(t, t_0, \phi)) \in \mathrm{dom}$, получаем

$$(s - t, \Sigma_g(t - t_0, t_{0*}, \phi)) = (s - t, t_*, P(t, t_0, \phi)) \in \Omega_g.$$

Теперь свойства Σ_g дают

$$(s - t_0, t_{0*}, \phi) = ((s - t) + (t - t_0), t_{0*}, \phi) \in \Omega_g,$$

следовательно, $(s, t_0, \phi) \in \mathrm{dom}$ и

$$\begin{aligned} P(s, t_0, \phi) &= p_n \Sigma_g(s - t_0, t_{0*}, \phi) = p_n \Sigma(s - t, \Sigma(t - t_0, t_{0*}, \phi)) = \\ &= p_n \Sigma_g(s - t, t_*, P(t, t_0, \phi)) = P(s, t, P(t, t_0, \phi)). \end{aligned}$$

□

7. Интегродифференциальные уравнения Вольтерра

Рассмотрим интегродифференциальное уравнение Вольтерра (1.4),

$$x'(t) = \int_0^t k(t, s) h(x(s)) ds$$

с непрерывно дифференцируемыми $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{n \times n}$ и $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Для $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{n \times n}$, заданного как $K(t, s) = k(t, t + s)$, мы можем написать

$$x'(t) = \int_{-t}^0 k(t, t + s) h(x(t + s)) ds = \int_{-t}^0 K(t, s) h(x_t(s)) ds, \tag{7.1}$$

где $x_t \in C$. Решение уравнения (7.1) должно быть непрерывным отображением $x : (-\infty, t_e) \to \mathbb{R}^n$, $0 < t_e \leqslant \infty$, ограничение которого на интервал $(0, t_e)$ дифференцируемо и удовлетворяет уравнению (7.1). Мы ищем такое отображение $g : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}^n$, чтобы каждое решение уравнения (7.1) также являлось решением на $(0, t_e)$ уравнения (1.3),

$$x'(t) = g(t, x_t).$$

Чтобы избежать сложных рассуждений с отрезками решений, мы используем *нечетное продолжающее отображение*

$$P_o : C \to C_\infty,$$

заданное как $P_o\phi(s) = \phi(s)$ для $s \leqslant 0$ и $P\phi(s) = 2\phi(0) - \phi(-s)$ для $0 < s$. Отображение P_o линейно и непрерывно. Мы могли бы также использовать постоянное продолжение для данной цели. Нечетное продолжение имеет преимущество в том, что оно определяет непрерывное линейное отображение $C^1 \to C^1_\infty$. Это играет роль при рассмотрении неавтономных уравнений с дискретным запаздыванием, таких как *уравнение пантографа*

$$x'(t) = a\, x(\lambda t) + b\, x(t)$$

с $0 < \lambda < 1$.

Далее рассмотрим оператор подстановки

$$S_H : C_\infty \ni \phi \mapsto H \circ \phi \in C_\infty,$$

который определен для каждого непрерывного отображения $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, оператор линейного интегрирования

$$I : C_\infty \to C^1_\infty,$$

заданный как $(I\psi)(u) = \int\limits_{-u}^{0} K(u,s)\psi(s)ds$, и оператор

$$J : C^1_\infty \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,$$

заданный как

$$J(\psi, t) = \int\limits_{-t}^{0} K(t,s)\psi(s)ds = Ev_{\infty,1}(I\psi, t).$$

Определим $g : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$g(t, \phi) = J((S_h \circ P_o)(\phi), t) = \int\limits_{-t}^{0} K(t,s)h((P_o\phi)(s))ds$$

и заметим, что для каждого решения $x : (-\infty, t_e) \to \mathbb{R}^n$ уравнения (7.1) при всех $t \in (0, t_e)$ имеем

$$g(t, x_t) = \int\limits_{-t}^{0} K(t,s)h((P_o x_t)(s))ds = \int\limits_{-t}^{0} K(t,s)h(x_t(s))ds.$$

Чтобы показать, что отображение g является C^1_F-гладким, напомним, что оценочное отображение $Ev_{\infty,1}$ является C^1_F-гладким. Следовательно, отображение J является C^1_F-гладким, если линейное отображение I непрерывно. Отсюда следует, что отображение g является C^1_F-гладким при условии, что I непрерывно, а S_h является C^1_F-гладким. Следующие предложения устанавливают эти оставшиеся свойства гладкости.

Утверждение 7.1. *Линейное отображение I непрерывно.*

Доказательство. Воспользуемся соотношениями

$$|I\psi|_{\infty,j} = \max_{-j \leqslant u \leqslant j} \left| \int\limits_{-u}^{0} K(u,s)\psi(s)ds \right| \leqslant |j| \max_{-j \leqslant u \leqslant j, -j \leqslant s \leqslant j} |K(u,s)||\psi|_{\infty,j},$$

$$\begin{aligned}(I\psi)'(u) &= -K(u,u)\psi(u) + \int\limits_{-u}^{0} \partial_1 K(u,s)\psi(s)ds,\\ |(I\psi)'|_{\infty,j} &\leqslant \max_{-j\leqslant u\leqslant j}|K(u,u)||\psi|_{\infty,j} + |j| \max_{-j\leqslant u\leqslant j, -j\leqslant s\leqslant j}|\partial_1 K(u,s)||\psi|_{\infty,j}\end{aligned}$$

для всех $j \in \mathbb{N}$ и $\psi \in C_\infty$. □

Утверждение 7.2. *Если $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывно, то и отображение S_H непрерывно. В случае, когда H непрерывно дифференцируемо, отображение S_H является C^1_F-гладким, с*

$$(DS_H(\phi)\chi)(t) = DH(\phi(t))\chi(t).$$

Доказательство.

1. Для $j \in \mathbb{N}$ зададим

$$N_j = \left\{\phi \in C_\infty : |\phi|_{\infty,j} < \frac{1}{j}\right\}.$$

Пусть H непрерывно. Пусть $\phi \in C_\infty$. Для непрерывности S_H в ϕ нужно, чтобы для каждого $j \in \mathbb{N}$ существовал $k \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $\chi \in C_\infty$ с $\chi \in \phi + N_k$ имеем $S_H(\chi) \in S_H(\phi) + N_j$. Пусть задано $j \in \mathbb{N}$. Выберем компактную окрестность W точки $\phi([-j,j])$. Поскольку H равномерно непрерывно на W, существует $\delta > 0$ такое, что $|H(y) - H(x)| < \dfrac{1}{j}$ для всех x, y в W таких, что $|y - x| < \delta$. Выберем $k \in \mathbb{N}$ с $k \geqslant j$ и $\dfrac{1}{k} < \delta$ и $\chi([-j,j]) \subset W$ для всех $\chi \in C_\infty$ с $|\chi - \phi|_{\infty,k} < \dfrac{1}{k}$ (или, что эквивалентно, $\chi \in \phi + N_k$). Для таких χ и всех $s \in [-j,j]$ получаем

$$|H(\chi(s)) - H(\phi(s))| < \frac{1}{j},$$

следовательно, $S_H(\chi) \in S_H(\phi) + N_j$.

2. Пусть H непрерывно дифференцируемо.

2.1. (Существование производных по направлениям.) Пусть даны $\phi \in C_\infty$ и $\chi \in C_\infty$. Определим $A(\phi,\chi) \in C_\infty$ как $A(\phi,\chi)(s) = DH(\phi(s))\chi(s)$. Достаточно показать, что для любого $j \in \mathbb{N}$ выполнено

$$|t^{-1}(S_H(\phi + t\chi) - S_H(\phi)) - A(\phi,\chi)|_{\infty,j} \to 0 \quad \text{при} \quad 0 \neq t \to 0.$$

Пусть задано $j \in \mathbb{N}$. Для всех действительных $t \neq 0$

$$\begin{aligned}&|t^{-1}(S_H(\phi + t\chi) - S_H(\phi)) - A(\phi,\chi)|_{\infty,j} =\\ &= \max_{-j\leqslant s\leqslant j}|t^{-1}(H(\phi(s) + t\chi(s)) - H(\phi(s))) - DH(\phi(s))\chi(s)| =\\ &= \max_{-j\leqslant s\leqslant j}\left|\int\limits_0^1 (DH(\phi(s) + ut\chi(s))\chi(s) - DH(\phi(s))\chi(s))du\right| \leqslant\\ &\leqslant \max_{-j\leqslant s\leqslant j}\max_{|v|\leqslant|t|}|DH(\phi(s) + v\chi(s)) - DH(\phi(s)||\chi(s)| \leqslant\\ &\leqslant |\chi|_{\infty,j}\max_{-j\leqslant s\leqslant j}\max_{|v|\leqslant|t|}|DH(\phi(s) + v\chi(s)) - DH(\phi(s)|.\end{aligned}$$

Так как DH непрерывен, мы можем использовать рассуждения из шага 1 доказательства и вывести из предыдущей оценки, что

$$\lim_{0\neq t\to 0}|t^{-1}(S_H(\phi + t\chi) - S_H(\phi)) - A(\phi,\chi)|_{\infty,j} = 0.$$

2.2. Каждое отображение $DS_H(\phi) : C_\infty \ni \chi \mapsto A(\phi,\chi) \in C_\infty$, $\phi \in C_\infty$, линейно. Непрерывность следует из оценок $|A(\phi,\chi)|_{\infty,j} \leqslant \max\limits_{-j\leqslant s\leqslant j}|DH(\phi(s))||\chi|_{\infty,j}$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и всех $\chi \in C_\infty$.

2.3. Осталось показать, что $DS_H : C_\infty \ni \phi \mapsto DS_H(\phi) \in L_c(C_\infty, C_\infty)$ непрерывно относительно топологии β на $L_c(C_\infty, C_\infty)$. Пусть $B \subset C_\infty$ ограничено и пусть $j \in \mathbb{N}$. Согласно замечанию 8.1 (см. [17, замечание 2.2 (iii)]) мы должны найти целое число $k \geqslant j$ такое, что

$$DS_H(\psi)\chi - DS_H(\phi)\chi = A(\psi,\chi) - A(\phi,\chi) \in N_j \quad \text{для всех} \quad \psi \in \phi + N_k \quad \text{и} \quad \chi \in B.$$

Согласно [10, теорема 1.37], $b_j = \sup_{\chi \in B} |\chi|_{\infty,j} < \infty$. Используя рассуждения из шага 1 доказательства, можно найти целое число $k \geqslant j$ такое, что для всех $\psi \in \phi + N_k$ имеем

$$\max_{-j \leqslant s \leqslant j} |DH(\psi(s)) - DH(\phi(s))| < \frac{1}{jb_j}.$$

Для таких ψ и всех $\chi \in B$ получаем

$$\begin{aligned} |A(\psi,\chi) - A(\phi,\chi)|_{\infty,j} &\leqslant \max_{-j \leqslant s \leqslant j} |DH(\psi(s)) - DH(\phi(s))||\chi|_{\infty,j} \leqslant \\ &\leqslant \max_{-j \leqslant s \leqslant j} |DH(\psi(s)) - DH(\phi(s))|b_j < \frac{1}{j}, \end{aligned}$$

или

$$A(\psi,\chi) - A(\phi,\chi) \in N_j \quad \text{для всех} \quad \psi \in \phi + N_k \quad \text{и} \quad \chi \in B.$$

□

Следствие 7.3. *Отображение $g : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}^n$, заданное как $g(t,\phi) = J((S_h \circ P_o)(\phi), t)$, является C^1_F-гладким.*

Результаты предыдущего раздела применяются к неавтономному уравнению (1.3) с g из предыдущего следствия и дают непрерывный процесс операторов решения $P(t,t_0)$, которые определены на открытых подмножествах C, и которые являются C^1_F-гладкими.

8. Приложение: Равномерная сходимость непрерывных линейных отображений на ограниченных подмножествах, C^1_F-гладкость

Пусть V, W — топологические векторные пространства над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. На $L_c = L_c(V,W)$ топология β равномерной сходимости на ограниченных множествах определяется следующим образом. Для окрестности N точки 0 в W и ограниченного множества $B \subset V$ окрестность $U_{N,B}$ точки 0 в L_c определяется как

$$U_{N,B} = \{A \in L_c : TB \subset N\}.$$

Каждое конечное пересечение таких множеств U_{N_j,B_j}, $j \in \{1,\ldots,J\}$, содержит множество того же вида из-за вложения

$$\bigcap_{j=1}^{J} U_{N_j,B_j} \supset \left\{T \in L_c : T\left(\bigcup_{j=1}^{J} B_j\right) \subset \bigcap_{j=1}^{J} N_j\right\}$$

в силу того, что конечные объединения ограниченных множеств ограничены, а конечные пересечения окрестностей 0 являются окрестностями 0. Тогда топология β — это множество всех $O \subset L_c$ обладающих таким свойством, что для каждого $A \in O$ существует окрестность N точки 0 в W и ограниченное множество $B \subset V$ с $A + U_{N,B} \subset O$.

Мы называем отображение A из топологического пространства T в L_c *β-непрерывным* в точке $t \in T$, если оно непрерывно в t относительно топологии β на L_c.

Замечание 8.1 (см. [17, замечание 2.2 (iii)]). Чтобы проверить β-непрерывность отображения $A : T \to L_c$, где T — топологическое пространство, в некоторой точке $t \in T$ нужно показать, что для ограниченного подмножества $B \subset V$ и окрестности N точки 0 в W существует такая окрестность N_t точки t в T, что для всех $s \in N_t$ мы имеем $(A(s) - A(t))(B) \subset N$.

В случае, если T имеет счетные базы окрестностей, отображение A β-непрерывно в $t \in T$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности $T \ni t_j \to t$ имеем $A(t_j) \to A(t)$. Для $A(t_j) \to A(t)$ нам нужно, чтобы для ограниченного подмножества $B \subset V$ и окрестности N точки 0 в W существовало $J \in \mathbb{N}$ такое, что

$$(A(t_j) - A(t))(B) \subset N \quad \text{для всех целых чисел} \quad j \geqslant J.$$

Утверждение 8.2 (см. [17, следствие 3.2 (i)]). *Пусть F и G — пространства Фреше, $U \subset F$ открыто. Отображение $g : U \to G$ является C^1_F-гладким тогда и только тогда, когда оно является C^1_{MB}-гладким с β-непрерывным $U \ni u \mapsto Dg(u) \in L_c(F,G)$.*

Непрерывные линейные отображения $L : F \to G$ между пространствами Фреше являются C^1_F-гладкими, поскольку они C^1_{MB}-гладкие с постоянной производной $DL(u) = L$ для всех $u \in F$, и дифференцирование $g \mapsto Dg$ C^1_F-отображений $U \to G$ линейно.

Следующие два утверждения включены для удобства, но не используются в разделах 2–7.

Утверждение 8.3 (см. [17, следствие 3.2 (ii)]). *В случае, если E — конечномерное нормированное пространство, каждое C^1_{MB}-отображение $g : E \supset U \to G$ является C^1_F-гладким.*

Для случаев отображений в бесконечномерных банаховых пространствах, которые являются C^1_{MB}-гладкими, но не C^1_F-гладкими, см. [16].

Утверждение 8.4 (см. [17, утверждение 4.2]). *Для банаховых пространств F and G и $U \subset F$ открытое отображение $g : F \supset U \to G$ является C^1_F-гладким тогда и только тогда, когда существует непрерывное отображение $D_g : U \to L_c(F, G)$ такое, что для любых $u \in U$ и*

$$\begin{gathered} \text{для каждого } \epsilon > 0 \text{ существует } \delta > 0 \text{ такое, что} \\ |g(v) - g(u) - D_g(u)(v-u)| \leqslant \epsilon|v-u| \quad \text{для всех} \quad v \in U \quad \text{с} \quad |v-u| < \delta. \end{gathered} \tag{F}$$

В этом случае $D_g(u)v$ является производной по направлению $Dg(u)v$ для всех $u \in U, v \in F$.

Утверждение 8.5 (правило цепи, см. [17, утверждение 4.3]). *Если $g : F \supset U \to G$ и $h : G \supset V \to H$ являются C^1_F-отображениями, с $g(U) \subset V$, тогда также $h \circ g$ является C^1_F-отображением.*

Утверждение 8.6 (см. [17, утверждение 4.4]). *Пусть даны пространства Фреше F_1, F_2, G. Для непрерывного отображения $g : F_1 \times F_2 \supset U \to G$, где U — открытое множество, следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Для всех $(u_1, u_2) \in U$ и всех $v_k \in F_k$, $k \in \{1, 2\}$, g имеет частную производную $D_k g(u_1, u_2)v_k \in G$, все отображения*

$$D_k g(u_1, u_2) : F_k \to G, \quad (u_1, u_2) \in U, \quad k \in \{1, 2\},$$

линейны и непрерывны, и отображения

$$U \ni (u_1, u_2) \mapsto D_k g(u_1, u_2) \in L_c(F_k, G), \quad k \in \{1, 2\},$$

β-непрерывны.

2. *g является C^1_F-гладким.*

В таком случае для всех $(u_1, u_2) \in U$, $v_1 \in F_1$, $v_2 \in F_2$

$$Dg(u_1, u_2)(v_1, v_2) = D_1 g(u_1, u_2)v_1 + D_2 g(u_1, u_2)v_2.$$

Теорема 8.7 (см. [17, теорема 5.2]). *Пусть заданы пространство Фреше T, банахово пространство B, открытые множества $V \subset T$ и $O_B \subset B$, а также C^1_F-отображение $A : V \times O_B \to B$. Предположим, что для замкнутого множества $M \subset O_B$ выполнено $A(V \times M) \subset M$, а A — равномерное сжатие в том смысле, что существует $k \in [0, 1)$ такое, что*

$$|A(t, x) - A(t, y)| \leqslant k|x - y|$$

для всех $t \in V, x \in O_B$, $y \in O_B$. Тогда отображение $g : V \to B$, заданное как $g(t) = A(t, g(t)) \in M$, является C^1_F-гладким.

Утверждение 8.8 (см. [17, утверждение 10.1 (iii)] для $T = \infty$). *Отображение*

$$E^{10}_\infty : C^1_\infty \times \mathbb{R} \to C, \quad E^{10}_\infty(\phi, t) = \phi_t,$$

является C^1_F-гладким и

$$\begin{aligned} D_1 E^{10}_\infty(\phi, t)\hat{\phi} &= \hat{\phi}_t, \\ D_2 E^{10}_\infty(\phi, t)t_* &= t_*(\phi')_t. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bastiani A.* Applications différentiables et varietés de dimension infinie// J. Anal. Math. — 1964. — *13.* — С. 1–114.
2. *Diekmann O., van Gils S. A., Verduyn Lunel S. M., Walther H.-O.* Delay equations: functional-, complex- and nonlinear analysis. — New York: Springer, 1995.
3. *Hale J. K., Verduyn Lunel S. M.* Introduction to Functional Differential Equations. — New York: Springer, 1993.
4. *Hamilton R. S.* The inverse function theorem of Nash and Moser// Bull. Am. Math. Soc. (N.S.). — 1982. — *7.* — С. 65–222.
5. *Hino Y., Murakami S., Naito T.* Functional Differential Equations with Infinite Delay. — Berlin: Springer, 1991.
6. *Krisztin T. Личное общение.*
7. *Krisztin T., Walther H. O.* Smoothness issues in differential equations with state-dependent delay// Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. — 2017. — *49.* — С. 95–112.
8. *Matsunaga H., Murakami S., Nagabuchi Y., Nguyen V. M.* Center manifold theorem and stability for integral equations with infinite delay// Funkcial. Ekvac. — 2015. — *58.* — С. 87–134.
9. *Michal A. D.* Differential calculus in linear topological spaces// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1938. — *24.* — С. 340–342.
10. *Rudin W.* Functional analysis. — New York: McGraw-Hill, 1973.
11. *Schumacher K.* Existence and continuous dependence for functional-differential equations with unbounded delay// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1978. — *67.* — С. 315–335.
12. *Sengadir T.* Semigroups on Fréchet spaces and equations with infinite delay// Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. — 2007. — *117.* — С. 71–84.
13. *Walther H.-O.* Differential equations with locally bounded delay// J. Differ. Equ. — 2012. — *252.* — С. 3001–3039.
14. *Walther H. O.* Semiflows for differential equations with locally bounded delay on solution manifolds in the space $C^1((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$// Topol. Methods Nonlinear Anal. — 2016. — *48.* — С. 507–537.
15. *Walther H. O.* Local invariant manifolds for delay differential equations with state space in $C^1((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$// Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2016. — *85.* — С. 1–29.
16. *Walther H. O.* Maps which are continuously differentiable in the sense of Michal and Bastiani but not of Fréchet// Contemp. Math. Fundam. Directions. — 2017. — *63.* — С. 543–556.
17. *Walther H. O.* Differentiability in Fréchet spaces and delay differential equations// Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2019. — *13.* — С. 1–44.

Hans-Otto Walther
Mathematisches Institut, Universität Gießen, Gießen, Germany
E-mail: Hans-Otto.Walther@math.uni-giessen.de

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-483-506 UDC 517.929 + 517.968.7

Delay Differential Equations with Differentiable Solution Operators on Open Domains in $C((-\infty, 0], \mathbb{R}^n)$ and Processes for Volterra Integro-Differential Equations

© 2021 **H.-O. Walther**

Abstract. For autonomous delay differential equations $x'(t) = f(x_t)$ we construct a continuous semiflow of continuously differentiable solution operators $x_0 \mapsto x_t$, $t \geqslant 0$, on open subsets of the Fréchet space $C((-\infty, 0], \mathbb{R}^n)$. For nonautonomous equations this yields a continuous process of differentiable solution operators. As an application, we obtain processes which incorporate all solutions of Volterra integro-differential equations $x'(t) = \int_0^t k(t,s)h(x(s))ds$.

REFERENCES

1. A. Bastiani, "Applications différentiables et varietés de dimension infinie," *J. Anal. Math.*, 1964, **13**, 1–114.
2. O. Diekmann, S. A. van Gils, S. M. Verduyn Lunel, and H.-O. Walther, *Delay equations: functional-, complex- and nonlinear analysis*, Springer, New York, 1995.
3. J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer, New York, 1993.
4. R. S. Hamilton, "The inverse function theorem of Nash and Moser," *Bull. Am. Math. Soc. (N.S.)*, 1982, **7**, 65–222.
5. Y. Hino, S. Murakami, and T. Naito, *Functional Differential Equations with Infinite Delay*, Springer, Berlin, 1991.
6. T. Krisztin, *Personal communication*.
7. T. Krisztin and H. O. Walther, "Smoothness issues in differential equations with state-dependent delay," *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, 2017, **49**, 95–112.
8. H. Matsunaga, S. Murakami, Y. Nagabuchi, and V. M. Nguyen, "Center manifold theorem and stability for integral equations with infinite delay," *Funkcial. Ekvac.*, 2015, **58**, 87–134.
9. A. D. Michal, "Differential calculus in linear topological spaces," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1938, **24**, 340–342.
10. W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.
11. K. Schumacher, "Existence and continuous dependence for functional-differential equations with unbounded delay," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1978, **67**, 315–335.
12. T. Sengadir, "Semigroups on Fréchet spaces and equations with infinite delay," *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 2007, **117**, 71–84.
13. H.-O. Walther, "Differential equations with locally bounded delay," *J. Differ. Equ.*, 2012, **252**, 3001–3039.
14. H. O. Walther, "Semiflows for differential equations with locally bounded delay on solution manifolds in the space $C^1((-\infty, 0], \mathbb{R}^n)$," *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 2016, **48**, 507–537.
15. H. O. Walther, "Local invariant manifolds for delay differential equations with state space in $C^1((-\infty, 0], \mathbb{R}^n)$," *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2016, **85**, 1–29.
16. H. O. Walther, "Maps which are continuously differentiable in the sense of Michal and Bastiani but not of Fréchet," *Contemp. Math. Fundam. Directions*, 2017, **63**, 543–556.
17. H. O. Walther, "Differentiability in Fréchet spaces and delay differential equations," *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2019, **13**, 1–44.

Hans-Otto Walther
Mathematisches Institut, Universität Gießen, Gießen, Germany
E-mail: Hans-Otto.Walther@math.uni-giessen.de

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 3 (2021). С. 507–525
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-507-525 УДК 517.968.72

ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С ЯДРАМИ, ПРЕДСТАВИМЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ СТИЛТЬЕСА

© 2021 г. **В. В. ВЛАСОВ, Н. А. РАУТИАН**

Аннотация. Исследуются абстрактные вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения с ядрами интегральных операторов, представимых интегралами Стилтьеса. Представленные результаты базируются на подходе, связанном с исследованием однопараметрических полугрупп для линейных эволюционных уравнений. Приводится метод сведения исходной начальной задачи для модельного интегро-дифференциального уравнения с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в расширенном функциональном пространстве. Доказывается существование сжимающей C_0-полугруппы. Получена оценка экспоненциального убывания полугруппы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В работе проводится исследование абстрактного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Указанное уравнение является операторной моделью линейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных, возникающего в теории вязкоупругости

$$u_{tt}(x,t) = \rho^{-1}\left[\mu \Delta u(x,t) + (\mu+\lambda)/3 \cdot \mathrm{grad}(\mathrm{div} u(x,t))\right] -$$

Работа выполнена в рамках Программы развития Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Математические методы анализа сложных систем» при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований РФФИ (проект № 20-01-00288 А)..

$$-\int_0^t K_1(t-\tau)\rho^{-1}\mu\left[\Delta u(x,\tau)+1/3\cdot\mathrm{grad}(\mathrm{div}u(x,\tau))\right]d\tau-$$

$$-\int_0^t K_2(t-\tau)\rho^{-1}\lambda\left[1/3\cdot\mathrm{grad}(\mathrm{div}u(x,\tau))\right]d\tau+f(x,t),$$

где $u=\vec{u}(x,t)\in\mathbb{R}^3$ — вектор малых перемещений вязкоупругой изотропной среды, заполняющей ограниченную область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$с гладкой границей ρ; постоянная плотность $\rho>0$; λ,μ — положительные параметры (коэффициенты Ламе), см. [3, 13, 20]. Будем предполагать, что на границе области Ω выполнены условия Дирихле $u|_{\partial\Omega}=0$. Функции ядер интегральных операторов $K_1(t)$, $K_2(t)$ — положительные невозрастающие суммируемые функции, характеризующие наследственные свойства среды. Предполагается, что ядра интегральных операторов представимы интегралами Стилтьеса, определенными ниже.

В настоящее время существует обширная литература, посвященная исследованию вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений и связанных с ними задач, возникающих в многочисленных приложениях (см., например, работы [2, 3, 7–10, 12–22, 24, 25] и их библиографию).

Представленные в данной работе результаты являются продолжением и развитием исследований, опубликованных в работах [2, 16, 22, 24, 25], посвященных спектральному анализу оператор-функций, являющихся символами вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений.

Подход к исследованию вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений, связанный с применением теории полугрупп, развивался в работах [12, 14, 15, 21, 22].

2. Определения. Обозначения. Постановка задачи

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — самосопряженный положительный оператор: $A^*=A\geqslant\kappa_0 I$ $(\kappa_0>0)$, действующий в пространстве H, имеющий ограниченный обратный. Путь B — самосопряженный неотрицательный оператор, действующий в пространстве H с областью определения $D(B)$, такой, что $D(A)\subseteq D(B)$, удовлетворяющий неравенствам $\|Bx\|\leqslant\kappa\|Ax\|$, $\kappa>0$ для любого $x\in\mathrm{Dom}(A)$, I — тождественный оператор в пространстве H.

Рассмотрим следующую задачу для интегро-дифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+=(0,\infty)$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+(A+B)\,u(t)-\int_0^t K_1(t-s)Au(s)ds-\int_0^t K_2(t-s)Bu(s)ds=f(t),\quad t\in\mathbb{R}_+,\quad t\in\mathbb{R}_+,\tag{2.1}$$

$$u(+0)=\varphi_0,\quad u^{(1)}(+0)=\varphi_1,\tag{2.2}$$

Предположим, что ядра интегральных операторов $K_i(t)$, $i=1,2$ имеют следующее представление:

$$K_i(t)=\int_0^{+\infty}e^{-t\tau}d\mu_i(\tau),\quad i=1,2.\tag{2.3}$$

где $d\mu_i$, $(i=1,2)$ — положительные меры, которым соответствуют возрастающие, непрерывные справа функции распределения μ_i, соответственно. Интеграл понимается в смысле Стилтьеса (см., например, [11]). Кроме того, будем считать, что выполнены условия

$$\int_0^{+\infty}\frac{d\mu_i(\tau)}{\tau}<1,\quad i=1,2.\tag{2.4}$$

Введем следующее обозначение:

$$M_i(t):=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t\tau}d\mu_i(\tau)}{\tau},\quad t\geqslant 0,\quad i=1,2.\tag{2.5}$$

Положим

$$A_0 := \left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau}\right) A + \left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau}\right) B. \tag{2.6}$$

Из самосопряженности операторов A и B и условий (2.4) следует, что оператор A_0 является самосопряженным и положительным.

Отметим, что задачи вида (2.1), (2.2) являются операторными моделями задач, возникающих в теории вязкоупругости (см. [3, 13]) и теплофизике (см. [8, 12, 17, 19]). Результаты о спектральном анализе уравнения (2.1) в случае, когда ядра $K_i(t)$ представляют собой убывающие экспоненты, изложены в монографии [2].

Замечание 2.1. Из свойств операторов A и B и неравенства Гайнца (см. [5]) следует, что оператор A_0 является обратимым, операторы $Q_1 := A^{1/2}A_0^{-1/2}$, $Q_2 := B^{1/2}A_0^{-1/2}$ допускают ограниченное замыкание в H, а A_0^{-1} — ограниченный оператор.

Определение 2.1. Будем называть вектор-функцию $u(t)$ *классическим решением* задачи (2.1), (2.2), если $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, H)$, $Au(t)$, $Bu(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$, $u(t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) для каждого значения $t \in \mathbb{R}_+$ и начальному условию (2.2).

Через Ω_k обозначим пространства $L^2_{\mu_k}(\mathbb{R}_+, H)$ вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со значениями в H, снабженные нормами

$$||u||_{\Omega_k} = \left(\int_0^{+\infty} ||u(s)||^2_H d\mu_k(s)\right)^{1/2}.$$

3. Сведение исходной задачи к дифференциальному уравнению первого порядка

Применяя формулу интегрирования по частям к интегралам в левой части уравнения (2.1), получаем уравнение следующего вида:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + A_0u(t) + \int_0^t \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau} d\mu_1(\tau)\right) A\frac{du(s)}{ds} ds + \int_0^t \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau} d\mu_2(\tau)\right) B\frac{du(s)}{ds} ds =$$
$$= f(t) - \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_1(\tau)A + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_2(\tau)B\right)\varphi_0. \tag{3.1}$$

Заметим, что $A = A_0^{1/2}Q_1^*Q_1A_0^{1/2}$, $B = A_0^{1/2}Q_1^*Q_1A_0^{1/2}$; тогда уравнение (3.1) формально можно переписать в виде

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + A_0^{1/2}\left[A_0^{1/2}u(t) + \sum_{k=1}^{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_k^*\left(\int_0^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_kA_0^{1/2}\frac{du(s)}{ds} ds\right) d\mu_k(\tau)\right] = f_1(t),$$

где

$$f_1(t) = f(t) - \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_1(\tau)A + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_2(\tau)B\right)\varphi_0. \tag{3.2}$$

Введем новые переменные

$$v(t) := u'(t), \quad \xi_0(t) := A_0^{1/2}u(t),$$

$$\xi_k(t,\tau) = \int_0^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_kA_0^{1/2}\frac{du(s)}{ds} ds, \quad t > 0, \quad k = 1, 2, \quad \tau \in \bigcup_{k=1}^{2} \operatorname{supp}\mu_k. \tag{3.3}$$

Тогда задача (2.1), (2.2) формально может быть приведена к следующей начальной задаче для системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} + A_0^{1/2}\left[\xi_0(t) + \sum\limits_{k=1}^{2}\int\limits_0^\infty \dfrac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k^* \xi_k(t,\tau)d\mu_k(\tau)\right] = f_1(t), \\ \dfrac{d\xi_0(t)}{dt} = A_0^{1/2}v(t), \\ \dfrac{d\xi_1(t,\tau)}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{\tau}}Q_1A_0^{1/2}v(t) - \tau\xi_1(t,\tau), \\ \dfrac{d\xi_2(t,\tau)}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{\tau}}Q_2A_0^{1/2}v(t) - \tau\xi_2(t,\tau), \end{cases} \tag{3.4}$$

где $t > 0$, $f_1(t)$ определяется формулой (3.2), $\tau \in \bigcup\limits_{k=1}^{2} \operatorname{supp}\mu_k$,

$$v(t)|_{t=0} = \varphi_1, \quad \xi_0(t)|_{t=0} = A_0^{1/2}\varphi_0, \quad \xi_k(t,\tau)|_{t=0} = 0, \quad k = 1,2. \tag{3.5}$$

Теперь, во-первых, мы должны превратить задачу (3.4), (3.5) в начальную задачу в некотором расширенном функциональном пространстве, в котором эта задача будет корректной; во-вторых, мы должны установить соответствие (не только формальное) между решением задачи (3.4), (3.5) и решением исходной задачи (2.1), (2.2).

4. Задача Коши в расширенном функциональном пространстве. Формулировка результатов

Сначала определим оператор $\tau\xi(\tau)$, присутствующий в третьем уравнении системы (3.4).

Рассмотрим сильно непрерывную мультипликативную полугруппу $L_k(t)$ в пространстве Ω_k (см. [15, с. 65]): $L_k(t)\xi(\tau) = e^{t\tau}\xi(\tau)$, $\xi(\tau) \in \Omega_k$, $t \geqslant 0$, $\tau \in \operatorname{supp}\mu_k$. Известно, что линейный оператор $\mathbb{T}_k\xi(\tau) = \tau\xi(\tau)$ в пространстве Ω_k с областью определения

$$D(T_k) = \{\xi \in \Omega_k : \tau\xi(\tau) \in \Omega_k\} \tag{4.1}$$

является генератором полугруппы $L_k(t)$ (см. [15, с. 65]).

Замечание 4.1.

1. Для любого $\xi(\tau) \in \Omega_k$ при $t \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_0^{+\infty} \left\| \frac{e^{-t\tau}}{\sqrt{\tau}}\xi(\tau)\right\|_H d\mu_k(\tau) \leqslant \left(\int\limits_0^\infty \frac{e^{-2t\tau}d\mu_k(\tau)}{\tau}\right)^{1/2} ||\xi(\tau)||_{\Omega_k}. \tag{4.2}$$

2. Для любого $\xi \in D(T_k)$ справедливо неравенство

$$\left|\langle \tau\xi(\tau), \xi(\tau)\rangle_{\Omega_k}\right| \leqslant ||\tau\xi(\tau)||_{\Omega_k}||\xi(\tau)||_{\Omega_k}. \tag{4.3}$$

Действительно, достаточно применить неравенство Гельдера к интегралам в левой части неравенств (4.2), (4.3).

Введем операторы $\mathbb{B}_k : H \to \Omega_k$ $(k = 1,2)$, действующие следующим образом:

$$\mathbb{B}_k v = \frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_k v \quad k = 1,2, \quad \tau \in \operatorname{supp}\mu_k.$$

тогда сопряженные операторы имеют следующий вид: $\mathbb{B}_k^* : \Omega_k \to H$ $(k = 1,2)$,

$$\mathbb{B}_k^*\xi(\tau) = Q_k^* \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}}\xi(\tau)d\mu_k(\tau), \quad k = 1,2.$$

Действительно, для любых $v \in D(\mathbb{B}_k)$, $\xi(\tau) \in \Omega_k$ справедлива цепочка равенств

$$\langle \mathbb{B}_k v, \xi(\tau)\rangle_{\Omega_k} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k v, \xi(\tau)\right\rangle_{\Omega_k} = \int\limits_0^{+\infty} \left\langle \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k v, \xi(\tau)\right\rangle_H d\mu_k(\tau) =$$

$$= \left\langle v, Q_k^* \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi(\tau) d\mu_k(\tau)\right\rangle_H = \langle v, \mathbb{B}_k^* \xi(\tau)\rangle_H.$$

Введем гильбертово пространство $\mathbb{H} = H \oplus H \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{2} \Omega_k\right)$, снабженное нормой

$$\|(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))\|_{\mathbb{H}}^2 = ||v||_H^2 + ||\xi_0||_H^2 + \sum_{k=1}^{2} ||\xi_k(\tau)||_{\Omega_k}^2, \ \tau \in \bigcup_{k=1}^{2} \operatorname{supp} \mu_k,$$

которое будем называть расширенным гильбертовым пространством.

Введем линейный оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с областью определения

$$D(\mathbb{A}) = \left\{(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \mathbb{H} : v \in H_{1/2},\ \xi_0 + Q_k^* \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi_k(\tau) d\mu_k(\tau) \in H_{1/2},\right.$$

$$\left. \xi_k(\tau) \in D(T_k), k = 1, 2\right\} =$$

$$= \{(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \mathbb{H} : v \in H_{1/2},\ \xi_0 + \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \in H_{1/2},\ \xi_k(\tau) \in D(T_k),\ k = 1, 2\},$$

действующий следующим образом:

$$\mathbb{A}(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))^T =$$

$$= \left(-A_0^{1/2}\left[\xi_0 + \sum_{k=1}^{2} Q_k^* \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi_k(\tau) d\mu_k(\tau)\right],\ A_0^{1/2} v,\ Q_k A_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\tau}} v(t) - \tau \xi_k(t, \tau),\ k = 1, 2\right)^T =$$

$$= \left(-A_0^{1/2}\left[\xi_0 + \sum_{k=1}^{2} \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau)\right],\ A_0^{1/2} v,\ \mathbb{B}_k A_0^{1/2} v(t) - \mathbb{T}_k \xi_k(t, \tau),\ k = 1, 2\right)^T.$$

Таким образом, оператор $\mathbb{A}$ можно записать в виде следующей операторной матрицы:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -A_0^{1/2} & -A_0^{1/2}\mathbb{B}_1^* & -A_0^{1/2}\mathbb{B}_2^* \\ A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{B}_1 A_0^{1/2} & 0 & -\mathbb{T}_1 & 0 \\ \mathbb{B}_2 A_0^{1/2} & 0 & 0 & -\mathbb{T}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I & -\mathbb{B}_1^* & -\mathbb{B}_2^* \\ I & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{B}_1 & 0 & -\mathbb{T}_1 & 0 \\ \mathbb{B}_2 & 0 & 0 & -\mathbb{T}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Введем гильбертово пространство $\mathbb{H}_0 = H \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{2} \Omega_k\right)$ и следующие операторы: $\mathbb{B} := (I, \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)^T : H \to \mathbb{H}_0$, $\mathbb{B}^* := (I, \mathbb{B}_1^*, \mathbb{B}_2^*) : \mathbb{H}_0 \to H$ и $\mathbb{T} : \mathbb{H}_0 \to \mathbb{H}_0$, где

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{T}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{T}_2 \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Введем 4-х компонентные векторы вида

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \xi_2(t, \tau)) \in \mathbb{H}, \quad z = (v_0, \xi_{00}, \xi_{10}(\tau), \xi_{20}(\tau)) \in \mathbb{H}.$$

Теперь мы можем переписать систему (3.4), (3.5) в виде дифференциального уравнения первого порядка в расширенном функциональном пространстве. Рассмотрим следующую задачу Коши в пространстве $\mathbb{H}$

$$\frac{d}{dt}Z(t) = \mathbb{A}Z(t), \tag{4.5}$$

$$Z(0) = z. \tag{4.6}$$

Определение 4.1. Вектор $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), \xi_2(t,\tau)) \in \mathbb{H}$ называется *классическим решением* задачи (4.5), (4.6), если $v(t)$, $\xi_0(t) \in C^1((0,+\infty), H)$, $\xi_k(t,\tau) \in C^1((0,+\infty), H)$, $k = 1,2$, по переменной t для любого $\tau \in \bigcup\limits_{k=1}^{2} \operatorname{supp}\mu_k$, $Z(t) \in C([0,+\infty), D(\mathbb{A}))$, вектор $Z(t)$ удовлетворяет уравнению (4.5) для любого $t \in \mathbb{R}_+$ и начальному условию (4.6).

Определение 4.2 (см. [5])**.** Линейный оператор A с областью определения, плотной в гильбертовом пространстве, называется *диссипативным*, если $\operatorname{Re}(Ax, x) \leqslant 0$ при $x \in D(A)$, и *максимально диссипативным*, если он диссипативен и не имеет нетривиальных диссипативных расширений.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* (2.4). *Тогда оператор* $\mathbb{A}$ *в пространстве* $\mathbb{H}$ *с плотной областью определения* $D(\mathbb{A})$ *является максимально диссипативным.*

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* (2.4). *Тогда линейный оператор* $\mathbb{A}$ *является генератором сжимающей* C_0*-полугруппы* $S(t) = e^{t\mathbb{A}}$ *в пространстве* $\mathbb{H}$, *при этом решение задачи* (4.5), (4.6) *представимо в виде* $Z(t) = S(t)z$, $t > 0$, *и для любого* $z \in D(\mathbb{A})$ *справедливо энергетическое равенство*:

$$\frac{d}{dt}||S(t)z||^2_{\mathbb{H}} = -2\left(\int\limits_0^{+\infty} \tau||\xi_1(t,\tau)||^2_H d\mu_1(\tau) + \int\limits_0^{+\infty} \tau||\xi_2(t,\tau)||^2_H d\mu_2(\tau)\right). \tag{4.7}$$

Доказательства этих теорем проводятся аналогично доказательствам теорем 1 и 2 из работы [22].

5. Экспоненциальная устойчивость полугруппы $S(t)$

Перед формулировкой теоремы о об экспоненциальной устойчивости сформулируем два утверждения, необходимых для формулировки и доказательства этой теоремы.

Утверждение 5.1. *Существует такое* $\gamma > 0$, *что для всех* $p > 0$ *справедливо неравенство*

$$-\int\limits_0^{+\infty} \tau e^{-p\tau} d\mu_k(\tau) + \gamma\int\limits_0^{+\infty} e^{-p\tau} d\mu_k(\tau) \leqslant 0. \tag{5.1}$$

Из утверждения 5.1 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 5.2. *Пусть* $\xi_k(t,\tau) \in \Omega_k$, $k = 1,2$ *для всех* $t,\tau > 0$, *тогда существует такое* $\gamma > 0$, *что справедливо неравенство*

$$-\int\limits_0^{+\infty} \tau||\xi_k(t,\tau)||^2_H d\mu_k(\tau) + \gamma\int\limits_0^{+\infty} ||\xi_k(t,\tau)||^2_H d\mu_k(\tau) \leqslant 0. \tag{5.2}$$

Приведем результат об экспоненциальной устойчивости полугруппы $S(t)$, $t \geqslant 0$.

Теорема 5.1. *Пусть* $S(t)z$ *— решение задачи* (4.5), (4.6) *при* $t > 0$, *и пусть выполнены условия* (2.4). *Тогда справедливо неравенство*

$$\|S(t)z\|_{\mathbb{H}} \leqslant \sqrt{3}\|z\|_{\mathbb{H}} e^{-\omega t} \tag{5.3}$$

для любого $z \in \mathbb{H}$. *При этом* $\omega = \max\limits_{\beta>0} \omega_\beta$, $\omega_\beta = \dfrac{1}{6}\min\left\{\dfrac{\gamma}{\gamma_1(\beta)}; \dfrac{1}{\gamma_2(\beta)}\right\}$,

$$\gamma_1(\beta) := \max_{k=1,2}\left\{\frac{3}{M(\beta)}\left[(3 + M_k(\beta) + (2\lambda_0)^{-1})\left\|Q_k^{-1}\right\|^2 + M_k(0)\left(1 + \frac{2}{3}M(\beta)\right)\|Q_k\|^2\right] + \frac{1}{2}\right\},$$

$$\gamma_2(\beta) := \frac{3}{M(\beta)} \max\left\{1,\ \frac{2}{\lambda_0} \cdot \max_{k=1,2} \left\{||Q_k^{-1}||^2 M_k(\beta)\right\}\right\} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}},$$

где $\gamma > 0$ *определяется неравенством* (5.1),

$$\lambda_0 = \inf_{\substack{\|x\|=1,\\ x\in D(A_0)}} (A_0x, x), \quad M_k(\beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\beta\tau} d\mu_k(\tau)}{\tau},\ k = 1,2, \quad M(\beta) := \sum_{k=1}^{2} M_k(\beta).$$

6. Корректная разрешимость

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \mathbb{A} Z(t) + F(t), \tag{6.1}$$

$$Z(0) = z. \tag{6.2}$$

Будем предполагать, что вектор-функция $F(t)$ имеет вид $F(t) := (f_1(t), 0, 0, 0)$, $f_1(t) = f(t) - (M_1(t)A + M_2(t)B)\,\varphi_0$, где $M_k(t)$, $k = 1, 2$ определяются формулами (2.5), вектор имеет вид $z = \left(\varphi_1, A_0^{1/2}\varphi_0, 0, 0\right)$.

Теорема 6.1. *Пусть выполнены условия* (2.4) *и одно из следующих условий*:

а). *вектор-функция* $A_0^{1/2} f(t) \in C\left([0,+\infty), H\right)$ *и векторы* $\varphi_0 \in H_{3/2}$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$;

б). *вектор-функция* $f(t) \in C^1\left([0,+\infty), H\right)$, *функции* $M_k(t) \in C^1\left([0,+\infty)\right)$, $k = 1, 2$, *векторы* $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$.

Тогда задача (6.1), (6.2) *имеет единственное классическое решение* $Z(t) = (v(t),\ \xi_0(t),\ \xi_1(t,\tau),\ \xi_2(t,\tau))$, *где* $v(t) := u'(t)$, $\xi_0(t) := A_0^{1/2} u(t)$, $u(t)$ — *классическое решение задачи* (2.1), (2.2), *и справедлива оценка*

$$E(t) := \frac{1}{2}\left(\left\|u'(t)\right\|_H^2 + \left\|A_0^{1/2} u(t)\right\|_H^2\right) \leqslant \frac{1}{2}\left\|Z(t)\right\|_{\mathbb{H}}^2 \leqslant$$

$$\leqslant d\left[\left(\|\varphi_1\|_H^2 + \left\|A_0^{1/2}\varphi_0\right\|_H^2\right) e^{-2\omega t} + \left(\int_0^t e^{-\omega(t-s)} ||f(s) - (M_1(s)A + M_2(s)B)\varphi_0||_H ds\right)^2\right] \tag{6.3}$$

с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1, *и постоянной* ω, *определенной в формулировке теоремы* 5.1.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 3 из работы [22].

7. Спектральный анализ оператора $\mathbb{A}$

Преобразование Лапласа сильного решения задачи (2.1), (2.2) с начальными условиями $u(+0) = 0$, $u^{(1)}(+0) = 0$ имеет представление

$$\hat{u}(\lambda) = L^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda).$$

Здесь оператор-функция $L(\lambda)$ является символом уравнения (2.1) и имеет вид

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A + B - \hat{K}_1(\lambda)A - \hat{K}_2(\lambda)B, \tag{7.1}$$

где $\hat{K}_i(\lambda)$, $i = 1, 2$ — преобразования Лапласа ядер $K_i(t)$, $i = 1, 2$, соответственно, имеющие представления

$$\hat{K}_i(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_i(\tau)}{\lambda + \tau}, \quad i = 1, 2, \tag{7.2}$$

$\hat{f}(\lambda)$ — преобразование Лапласа вектор-функции $f(t)$, I — тождественный оператор в пространстве H.

Определение 7.1. Множество значений $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *резольвентным множеством* $R(L)$ оператор-функции $L(\lambda)$, если для любого $\lambda \in R(L)$ оператор-функция $L^{-1}(\lambda)$ существует и ограничена. Множество $\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{C}\backslash R(L) | L(\lambda)\, \textit{существует}\}$ называется *спектром* оператор-функции $L(\lambda)$.

Обозначим через $\sigma(\mathbb{A})$, $\sigma(\mathbb{T})$ спектры операторов $\mathbb{A}$ и $\mathbb{T}$, соответственно.

Теорема 7.1. *Пусть выполнены условия* (2.4). *Тогда* $\sigma(\mathbb{A})\backslash\sigma(\mathbb{T}) \subseteq \sigma(L)$, *невещественная часть спектра оператора* $\mathbb{A}$ *совпадает с невещественной частью спектра оператор-функции* L *и симметрична относительно вещественной оси.*

Структура и локализация спектра оператор-функции $L(\lambda)$ изучалась в работах [24, 25].

8. Доказательство теоремы 5.1

Перед тем как приступить к доказательству теоремы 5.1, докажем утверждения 5.1 и 5.2.

Доказательство утверждения 5.1. Разобьем следующий интеграл в сумму двух интегралов:

$$-\int\limits_0^{+\infty} \tau e^{-p\tau} d\mu_k(\tau) = -\int\limits_0^1 \tau e^{-p\tau} d\mu_k(\tau) - \int\limits_1^{+\infty} \tau e^{-p\tau} d\mu_k(\tau) =: I_1(p) + I_2(p),$$

Легко видеть, что

$$I_2(p) \leqslant -\int\limits_1^{+\infty} e^{-p\tau} d\mu_k(\tau).$$

По теореме о среднем существует такое $\xi \in (0,1)$, что

$$-\int\limits_0^1 \tau e^{-p\tau} d\mu_k(\tau) = -\xi \int\limits_0^1 e^{-p\tau} d\mu_k(\tau).$$

Таким образом, выбирая $\gamma = \xi/2$, получаем оценку (5.1). □

Доказательство утверждения 5.2. Из утверждения 5.1 следует существование такого $\gamma > 0$, что для всех $p > 0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(-\tau e^{-p\tau} ||\xi_k(t,\tau)||_H^2 + \gamma e^{-p\tau} ||\xi_k(t,\tau)||_H^2\right) d\mu_k(\tau) \leqslant 0.$$

Кроме того,

$$\lim_{p\to 0+} \left(-\tau e^{-p\tau} ||\xi_k(t,\tau)||_H^2 + \gamma e^{-p\tau} ||\xi_k(t,\tau)||_H^2\right) = -\tau ||\xi_k(t,\tau)||_H^2 + \gamma ||\xi_k(t,\tau)||_H^2.$$

Следовательно, по теореме Фату, справедливо неравенство

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(-\tau ||\xi_k(t,\tau)||_H^2 + \gamma ||\xi_k(t,\tau)||_H^2\right) d\mu_k(\tau) \leqslant 0,$$

из которого вытекает неравенство (5.2), т. к. $\xi_k(t,\tau) \in \Omega_k$, $k = 1, 2$, для всех $t, \tau > 0$. □

Замечание 8.1.

1. Для любого $\xi(\tau) \in \Omega_k$ при $\beta \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_0^{+\infty} \left\| \frac{e^{-\tau\beta/2}}{\sqrt{\tau}} \xi(\tau) \right\|_H d\mu_k(\tau) \leqslant \left(\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-\beta\tau} d\mu_k(\tau)}{\tau} \right)^{1/2} ||\xi(\tau)||_{\Omega_k}. \tag{8.1}$$

2. Для любого $\xi \in D(T_k)$ справедливо неравенство

$$\left| \langle \tau\xi(\tau), \xi(\tau) \rangle_{\Omega_k} \right| \leqslant ||\tau\xi(\tau)||_{\Omega_k} ||\xi(\tau)||_{\Omega_k}. \tag{8.2}$$

Действительно, достаточно применить неравенство Гельдера к интегралам в левой части неравенств (8.1), (8.2).

Доказательство теоремы 5.1. Учитывая сильную непрерывность полугруппы $S(t)$, достаточно доказать неравенство (5.3) для любого $z \in D(\mathbb{A})$. Фиксируем $z = (v_0, \xi_{00}, \xi_{10}(\tau), \xi_{20}(\tau)) \in D(\mathbb{A})$ для любого $\tau > 0$ и обозначим $S(t)z = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), \xi_2(t,\tau)) \in D(\mathbb{A})$.

Введем обозначение (энергию)

$$E(t) := \frac{1}{2}\,\|S(t)z\|^2_{\mathbb{H}}. \tag{8.3}$$

Принимая во внимание энергетическое равенство (4.7) и утверждение 5.2, получаем следующую оценку:

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\sum_{k=1}^{2}\int_0^{+\infty}\tau||\xi_k(t,\tau)||^2_H d\mu_k(\tau) \leqslant -\gamma\sum_{k=1}^{2}\int_0^{+\infty}||\xi_k(t,\tau)||^2_H d\mu_k(\tau) = -\gamma\sum_{k=1}^{2}||\xi_k(t,\tau)||^2_{\Omega_k}. \tag{8.4}$$

Для заданного $\beta \geqslant 0$ рассмотрим следующие функционалы:

$$\Phi_1(t,\beta) = -\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta\tau}\left\langle A^{-1/2}v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}}\xi_1(t,\tau)\right\rangle_H d\mu_1(\tau) + \int_0^{+\infty} e^{-\beta\tau}\left\langle B^{-1/2}v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}}\xi_2(t,\tau)\right\rangle_H d\mu_2(\tau)\right),$$

$$\Phi_2(t) = \left\langle A_0^{-1/2}v(t), \xi_0(t)\right\rangle_H.$$

Отметим, что при сделанных предположениях функционалы $\Phi_1(t,\beta)$ и $\Phi_2(t)$ принимают вещественные значения. □

Утверждение 8.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1. *Тогда справедливы неравенства*

$$|\Phi_1(t,\beta)| \leqslant \max\left\{1;\ 2\max_{k=1,2}\left\{\frac{1}{\lambda_0}||Q_k^{-1}||^2 M_k(\beta)\right\}\ \right\}E(t), \tag{8.5}$$

$$|\Phi_2(t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}E(t), \tag{8.6}$$

где $\lambda_0 = \inf\limits_{\substack{\|x\|=1,\\ x\in \mathrm{Dom}(A_0)}} (A_0x, x)$.

Доказательство. Согласно замечанию 8.1, при $k = 1,2$ имеют место оценки

$$\int_0^{+\infty}\left\|\frac{e^{-\beta\tau/2}}{\sqrt{\tau}}\xi(\tau)\right\|_H d\mu_k(\tau) \leqslant \left(\int_0^{\infty}\frac{e^{-\beta\tau}d\mu_k(\tau)}{\tau}\right)^{1/2}||\xi(\tau)||_{\Omega_k} = \sqrt{M_k(\beta)}||\xi(\tau)||_{\Omega_k}. \tag{8.7}$$

Таким образом, справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
|\Phi_1(t,\beta)| \leqslant \Bigg(\int_0^{+\infty} e^{-\beta\tau}\left|\left\langle A^{-1/2}v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}}\xi_1(t,\tau)\right\rangle_H\right| d\mu_1(\tau) + \\
+ \int_0^{+\infty} e^{-\beta\tau}\left|\left\langle B^{-1/2}v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}}\xi_2(t,\tau)\right\rangle_H\right| d\mu_2(\tau)\Bigg) = \\
= \Bigg(\int_0^{+\infty} e^{-\beta\tau}\left|\left\langle (Q_1^{-1})^* A_0^{-1/2}v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}}\xi_1(t,\tau)\right\rangle_H\right| d\mu_1(\tau) + \\
+ \int_0^{+\infty} e^{-\beta\tau}\left|\left\langle (Q_2^{-1})^* A_0^{-1/2}v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}}\xi_2(t,\tau)\right\rangle_H\right| d\mu_2(\tau)\Bigg) \leqslant
\end{aligned}$$

$$\leqslant ||v(t)||_H \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} ||Q_k^{-1}|| \int_0^\infty \left\| \frac{e^{-\beta\tau/2}}{\sqrt{\tau}} \xi_k(t,\tau) \right\|_H d\mu_k(\tau) \leqslant$$

$$\leqslant ||v(t)||_H \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} ||Q_k^{-1}|| \left(\int_0^\infty \frac{e^{-\beta\tau} d\mu_k(\tau)}{\tau} \right)^{1/2} ||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left[||v(t)||_H^2 + \left(\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} ||Q_k^{-1}|| \sqrt{M_k(\beta)} ||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k} \right)^2 \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left[||v(t)||_H^2 + 2 \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\lambda_0} ||Q_k^{-1}||^2 M_k(\beta) ||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2 \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left[||v(t)||_H^2 + 2 \cdot \max_{k=1,2} \left\{ \frac{1}{\lambda_0} ||Q_k^{-1}||^2 M_k(\beta) \right\} \sum_{k=1}^{2} ||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2 \right] \leqslant$$

$$\leqslant \max \left\{ 1;\ 2 \cdot \max_{k=1,2} \left\{ \frac{1}{\lambda_0} ||Q_k^{-1}||^2 M_k(\beta) \right\} \right\} E(t);$$

$$|\Phi_2(t)| \leqslant \left\| A_0^{-1/2} v(t) \right\|_H \|\xi_0(t)\|_H \leqslant \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \left(||v(t)||_H^2 + \|\xi_0(t)\|_H^2 \right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} E(t),$$

где $\lambda_0 = \inf\limits_{\substack{\|x\|=1,\\ x \in \mathrm{Dom}(A_0)}} (A_0 x, x)$. □

Лемма 8.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1. *Тогда для любого* $\beta \geqslant 0$ *справедливо неравенство*

$$\frac{d}{dt} \Phi_1(t) \leqslant M(\beta) \left[\frac{||\xi_0||_H^2}{12} - \frac{||v||_H^2}{2} \right] + \sum_{k=1}^{2} \tilde{c}_k ||\xi_k||_{\Omega_k}^2, \tag{8.8}$$

где $\tilde{c}_k := (3 + M_k(\beta) + (2\lambda_0)^{-1}) \left\| Q_k^{-1} \right\|^2 + M_k(0) \|Q_k\|^2$, $M(\beta) := \sum\limits_{k=1}^{2} M_k(\beta)$.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\frac{d}{dt} \Phi_1(t,\beta) = - \int_0^\infty e^{-\beta\tau} \left\langle A^{-1/2} \frac{d}{dt} v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi_k(t,\tau) \right\rangle_H d\mu_1(\tau) -$$

$$- \int_0^\infty e^{-\beta\tau} \left\langle B^{-1/2} \frac{d}{dt} v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi_2(t,\tau) \right\rangle_H d\mu_2(\tau) - \int_0^\infty e^{-\beta\tau} \left\langle A^{-1/2} v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{d}{dt} \xi_k(t,\tau) \right\rangle_H d\mu_1(\tau) -$$

$$- \int_0^\infty e^{-\beta\tau} \left\langle B^{-1/2} v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{d}{dt} \xi_2(t,\tau) \right\rangle_H d\mu_2(\tau). \tag{8.9}$$

Оценим теперь выражения в правой части последнего равенства (8.9), используя уравнение (4.5) и замечание 8.1. Для первых двух слагаемых имеем

$$- \int_0^\infty e^{-\beta\tau} \left\langle A^{-1/2} \frac{d}{dt} v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi_1(t,\tau) \right\rangle_H d\mu_1(\tau) - \int_0^\infty e^{-\beta\tau} \left\langle B^{-1/2} \frac{d}{dt} v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi_2(t,\tau) \right\rangle_H d\mu_2(\tau) =$$

$$= - \sum_{i=1}^{2} \int_0^\infty e^{-\beta\tau} \left\langle \left(Q_i^{-1}\right)^* A_0^{-1/2} \frac{d}{dt} v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi_i(t,\tau) \right\rangle_H d\mu_i(\tau) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \int_0^\infty e^{-\beta\tau} \left\langle \left(Q_i^{-1}\right)^* \xi_0(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi_i(t,\tau) \right\rangle_H d\mu_i(\tau) +$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_0^\infty e^{-\beta\tau}\left\langle \left(Q_i^{-1}\right)^*\sum_{k=1}^{2}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_k^*\xi_k(t,\tau)d\mu_k(\tau),\frac{1}{\sqrt{\tau}}\xi_i(t,\tau)\right\rangle_H d\mu_i(\tau)=$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\left\langle \left(Q_i^{-1}\right)^*\xi_0(t),\int_0^\infty e^{-\beta\tau}\frac{1}{\sqrt{\tau}}\xi_i(t,\tau)d\mu_i(\tau)\right\rangle_H+$$

$$+\left\langle \sum_{k=1}^{2}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_k^*\xi_k(t,\tau)d\mu_k(\tau),\sum_{i=1}^{2}\int_0^\infty e^{-\beta\tau}\frac{1}{\sqrt{\tau}}\left(Q_i^{-1}\right)\xi_i(t,\tau)d\mu_i(\tau)\right\rangle_H\leqslant$$

$$\leqslant\|\xi_0(t)\|_H\sum_{i=1}^{2}\left\|Q_i^{-1}\right\|\int_0^\infty\frac{e^{-\beta\tau/2}}{\sqrt{\tau}}\|\xi_i(t,\tau)\|_H d\mu_i(\tau)+$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{2}\left\|Q_i^{-1}\right\|\int_0^\infty\frac{e^{-\beta\tau/2}}{\sqrt{\tau}}\|\xi_i(t,\tau)\|_H d\mu_i(\tau)\right)\left(\sum_{k=1}^{2}\|Q_k\|\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\tau}}\|\xi_k(t,\tau)\|_H d\mu_k(\tau)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\|\xi_0(t)\|_H\sum_{k=1}^{2}\left\|Q_k^{-1}\right\|\left(\int_0^\infty\frac{e^{-\beta\tau}d\mu_k(\tau)}{\tau}\right)^{1/2}\|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}+$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{2}\left\|Q_i^{-1}\right\|\left(\int_0^\infty\frac{e^{-\beta\tau}d\mu_i(\tau)}{\tau}\right)^{1/2}\|\xi_i(t,\tau)\|_{\Omega_i}\right)\left(\sum_{k=1}^{2}\|Q_k\|\left(\int_0^\infty\frac{d\mu_k(\tau)}{\tau}\right)^{1/2}\|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{2}2\frac{\sqrt{M_k(\beta)}}{2\sqrt{3}}\|\xi_0(t)\|_H\sqrt{3}\left\|Q_k^{-1}\right\|\|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{2}\left\|Q_i^{-1}\right\|\sqrt{M_i(\beta)}\|\xi_i(t,\tau)\|_{\Omega_i}\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{2}\|Q_k\|\sqrt{M_k(0)}\|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}\right)^2\right]\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{M_k(\beta)}{12}\|\xi_0(t)\|_H^2+3\left\|Q_k^{-1}\right\|^2\|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}^2\right)+\sum_{k=1}^{2}\left(M_k(\beta)\left\|Q_k^{-1}\right\|^2+M_k(0)\|Q_k\|^2\right)\|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{2}\left[\frac{M_k(\beta)}{12}\|\xi_0(t)\|_H^2+\left((3+M_k(\beta))\left\|Q_k^{-1}\right\|^2+M_k(0)\|Q_k\|^2\right)\|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}^2\right].\quad(8.10)$$

Приступим к оценке вторых двух слагаемых в формуле (8.9).

$$-\int_0^\infty e^{-\beta\tau}\left\langle A^{-1/2}v(t),\frac{1}{\sqrt{\tau}}\frac{d}{dt}\xi_k(t,\tau)\right\rangle_H d\mu_1(\tau)-\int_0^\infty e^{-\beta\tau}\left\langle B^{-1/2}v(t),\frac{1}{\sqrt{\tau}}\frac{d}{dt}\xi_2(t,\tau)\right\rangle_H d\mu_2(\tau)=$$

$$=-\sum_{k=1}^{2}\int_0^\infty e^{-\beta\tau}\left\langle \left(Q_k^{-1}\right)^*A_0^{-1/2}v(t),\frac{1}{\sqrt{\tau}}\frac{d}{dt}\xi_k(t,\tau)\right\rangle_H d\mu_k(\tau)=$$

$$=-\sum_{k=1}^{2}\int_0^{+\infty} e^{-\beta\tau}\left\langle \left(Q_k^{-1}\right)^*A_0^{-1/2}v(t),\frac{1}{\tau}Q_kA_0^{1/2}v(t)\right\rangle_H d\mu_k(\tau)+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\int_0^\infty e^{-\beta\tau}\left\langle \left(Q_k^{-1}\right)^*A_0^{-1/2}v(t),\frac{1}{\sqrt{\tau}}\tau\xi_k(t,\tau)\right\rangle_H d\mu_k(\tau)\leqslant$$

$$\leqslant -||v(t)||_H^2 \sum_{k=1}^{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta\tau} d\mu_k(\tau)}{\tau} + ||v(t)||_H \sum_{k=1}^{2} \int_0^{\infty} e^{-\beta\tau} \tau ||Q_k^{-1}||_H \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} ||\xi_k(t,\tau)||_H \frac{1}{\sqrt{\tau}} d\mu_k(\tau) \leqslant$$

$$\leqslant -||v(t)||_H^2 M(\beta) + \frac{||v(t)||_H}{\sqrt{\lambda_0}} \sum_{k=1}^{2} ||Q_k^{-1}||_H \int_0^{\infty} ||\xi_k(t,\tau)||_H \frac{e^{-\beta\tau/2}}{\sqrt{\tau}} d\mu_k(\tau) \leqslant$$

$$\leqslant -||v(t)||_H^2 M(\beta) + \frac{||v(t)||_H}{\sqrt{\lambda_0}} \sum_{k=1}^{2} ||Q_k^{-1}||_H \sqrt{M_k(\beta)} ||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k} \leqslant$$

$$\leqslant -||v(t)||_H^2 M(\beta) + 2\sum_{k=1}^{2} \left[\frac{\sqrt{M_k(\beta)}}{\sqrt{2}} ||v(t)||_H \frac{||Q_k^{-1}||_H}{\sqrt{2\lambda_0}} ||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k} \right] \leqslant$$

$$\leqslant -||v(t)||_H^2 M(\beta) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2} M_k(\beta) ||v(t)||_H^2 + \sum_{k=1}^{2} \left[\frac{||Q_k^{-1}||_H^2}{2\lambda_0} ||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2 \right] \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{1}{2} ||v(t)||_H^2 M(\beta) + \sum_{k=1}^{2} \left[\frac{||Q_k^{-1}||_H^2}{2\lambda_0} ||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2 \right]. \quad (8.11)$$

Объединяя оценки (8.10) и (8.11), получаем неравенство (8.8). □

Лемма 8.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1. *Тогда справедливо неравенство*

$$\frac{d}{dt}\Phi_2(t) \leqslant ||v(t)||_H^2 - \frac{3}{4} ||\xi_0(t)||_H^2 + 2\sum_{k=1}^{2} ||Q_k||^2 M_k(0) ||\xi_k(t)||_{\Omega_k}^2. \quad (8.12)$$

Доказательство. Утверждение вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$\frac{d}{dt}\Phi_2(t) = \frac{d}{dt}\left\langle A_0^{-1/2} v(t), \xi_0(t) \right\rangle_H = \left\langle A_0^{-1/2} \frac{d}{dt} v(t), \xi_0(t) \right\rangle_H + \left\langle A_0^{-1/2} v(t), \frac{d}{dt}\xi_0(t) \right\rangle_H =$$

$$= -||\xi_0(t)||_H^2 - \sum_{k=1}^{2} \left\langle \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k^* \xi_k(t,\tau) d\mu_k(\tau), \xi_0(t) \right\rangle_H + \left\langle A_0^{-1/2} v(t), A_0^{1/2} v(t) \right\rangle_H \leqslant$$

$$\leqslant ||v(t)||_H^2 - ||\xi_0(t)||_H^2 + ||\xi_0(t)||_H \sum_{k=1}^{2} \|Q_k\| \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \|\xi_k(t,\tau)\|_H d\mu_k(\tau) \leqslant$$

$$\leqslant ||v(t)||_H^2 - ||\xi_0(t)||_H^2 + 2\frac{||\xi_0(t)||_H}{2} \sum_{k=1}^{2} ||Q_k|| \sqrt{M_k(0)} \|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k} \leqslant$$

$$\leqslant ||v(t)||_H^2 - ||\xi_0(t)||_H^2 + \frac{||\xi_0(t)||_H^2}{4} + \left(\sum_{k=1}^{2} ||Q_k|| \sqrt{M_k(0)} \|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k} \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant ||v(t)||_H^2 - \frac{3}{4} ||\xi_0(t)||_H^2 + 2\sum_{k=1}^{2} ||Q_k||^2 M_k(0) \, \|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}^2.$$

□

Определим вектор-функцию

$$\Phi(t) := \frac{3}{M(\beta)} \Phi_1(t) + \Phi_2(t),$$

для которой, согласно леммам 8.1 и 8.2, справедливо неравенство

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \frac{3}{M(\beta)} \frac{d}{dt}\Phi_1(t) + \frac{d}{dt}\Phi_2(t) \leqslant \frac{||\xi_0||_H^2}{4} - \frac{3||v||_H^2}{2} + \sum_{k=1}^{2} \frac{3}{M(\beta)} \tilde{c}_k ||\xi_k||_{\Omega_k}^2 -$$

$$-\frac{3}{4}||\xi_0(t)||_H^2 + ||v(t)||_H^2 + 2\sum_{k=1}^{2} M_k(0)||Q_k||^2||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}||\xi_0(t)||_H^2 - \frac{1}{2}||v(t)||_H^2 + \sum_{k=1}^{2}\left(\frac{3}{M(\beta)}\tilde{c}_k + 2M_k(0)||Q_k||^2\right)||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2. \quad (8.13)$$

Введем обозначение

$$c_k := \frac{3}{M(\beta)}\tilde{c}_k + 2M_k(0)||Q_k||^2 =$$

$$= \frac{3}{M(\beta)}\left[(3 + M_k(\beta) + (2\lambda_0)^{-1})\left\|Q_k^{-1}\right\|^2 + M_k(0)\|Q_k\|^2\right] + 2M_k(0)||Q_k||^2 =$$

$$= \frac{3}{M(\beta)}\left[(3 + M_k(\beta) + (2\lambda_0)^{-1})\left\|Q_k^{-1}\right\|^2 + M_k(0)\|Q_k\|^2\right] + 2M_k(0)||Q_k||^2. \quad (8.14)$$

Из неравенства (8.13), в свою очередь, вытекает оценка

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) + E(t) \leqslant \sum_{k=1}^{2}\left(c_k + \frac{1}{2}\right)||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2 \leqslant \gamma_1\sum_{k=1}^{2}||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2, \quad (8.15)$$

где $\gamma_1 := \max\limits_{k=1,2}\left(c_k + \frac{1}{2}\right)$, вектор-функция $E(t)$ определена формулой (8.3). Из утверждения 8.1 получаем оценку

$$|\Phi(t)| \leqslant \frac{3}{M(\beta)}|\Phi_1(t)| + |\Phi_2(t)| \leqslant \gamma_2 E(t), \quad (8.16)$$

где

$$\gamma_2 := \left[\frac{3}{M(\beta)}\max\left\{1,\ 2\cdot\max_k\left\{\frac{1}{\lambda_0}||Q_k^{-1}||^2 M_k(\beta)\right\}\right\} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\right].$$

Положим

$$\varepsilon := \min\left\{\frac{\gamma}{2\gamma_1};\frac{1}{2\gamma_2}\right\}$$

и рассмотрим вектор-функцию $\Psi(t) := E(t) + \varepsilon\Phi(t)$.

Утверждение 8.2. *В принятых обозначениях справедливо неравенство*

$$\frac{1}{2}E(t) \leqslant \Psi(t) \leqslant \frac{3}{2}E(t). \quad (8.17)$$

Доказательство.

1. Пусть $\varepsilon = \frac{\gamma}{2\gamma_1}$, тогда $\frac{\gamma}{2\gamma_1} \leqslant \frac{1}{2\gamma_2}$, и, следовательно, согласно неравенству (8.16) имеем

$$\frac{1}{2}E(t) = E(t) - \frac{1}{2\gamma_2}\gamma_2 E(t) \leqslant E(t) - \varepsilon\gamma_2 E(t) \leqslant E(t) + \varepsilon\Phi(t) =$$

$$= \Psi(t) \leqslant E(t) + \varepsilon\gamma_2 E(t) \leqslant E(t) + \frac{1}{2\gamma_2}\gamma_2 E(t) = \frac{3}{2}E(t)$$

2. Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2\gamma_2}$. Тогда согласно неравенству (8.16) имеем

$$\frac{1}{2}E(t) = E(t) - \varepsilon\gamma_2 E(t) \leqslant \Psi(t) \leqslant E(t) + \varepsilon\gamma_2 E(t) = \frac{3}{2}E(t).$$

□

В свою очередь, из неравенств (8.4) и (8.16) вытекает оценка

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) = \frac{d}{dt}E(t) + \varepsilon\frac{d}{dt}\Phi(t) \leqslant -\frac{\gamma}{2}\sum_{k=1}^{N}||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2 + \varepsilon\left(\gamma_1\sum_{k=1}^{N}||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2 - E(t)\right).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\Psi(t)+\varepsilon E(t)\leqslant -\frac{\gamma}{2}\sum_{k=1}^{N}||\xi_k(t,\tau)||^2_{\Omega_k}+\varepsilon\gamma_1\sum_{k=1}^{N}||\xi_k(t,\tau)||^2_{\Omega_k}. \tag{8.18}$$

Рассмотрим два случая:

1. Если $\varepsilon=\dfrac{\gamma}{2\gamma_1}$, то согласно (8.18) получим

$$\frac{d}{dt}\Psi(t)+\varepsilon E(t)\leqslant 0. \tag{8.19}$$

2. Если же $\varepsilon=\dfrac{1}{2\gamma_2}$, то $\dfrac{1}{2\gamma_2}\leqslant\dfrac{\gamma}{2\gamma_1}$, и, следовательно, согласно (8.18) будем иметь (8.19).

В соответствии с утверждением 8.2, получаем неравенство

$$\varepsilon E(t)\geqslant\frac{2}{3}\varepsilon\Psi(t). \tag{8.20}$$

Полагая $\omega=\dfrac{\varepsilon}{3}$, из неравенств (8.19) и (8.20) получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\Psi(t)+2\omega\Psi(t)\leqslant 0. \tag{8.21}$$

Из утверждения 5.2 следует, что функция $\Psi(t)>0$ непрерывна на при $t\geqslant 0$ и дифференцируема при $t>0$. Проводя рассуждения, аналогичные доказательству леммы Гронуолла—Беллмана (см. [1, с. 46]), получаем

$$\int_0^t\frac{d\Psi(s)}{\Psi(s)}+2\omega t\leqslant 0. \tag{8.22}$$

Из неравенства (8.22) получаем

$$\Psi(t)\leqslant\Psi(0)e^{-2\omega t}. \tag{8.23}$$

Окончательно, учитывая утверждение 5.2 и неравенство (8.23), получаем неравенство (5.3):

$$\|S(t)z\|^2_{\mathbb{H}}=2E(t)\leqslant 4\Psi(t)\leqslant 4\Psi(0)e^{-2\omega t}\leqslant 6E(0)e^{-2\omega t}=3\,\|z\|^2_{\mathbb{H}}\,e^{-2\omega t}.$$

Теорема 5.1 доказана.

9. Доказательство теоремы 7.1

Перед тем как перейти к доказательству теоремы 7.1, сформулируем и докажем следующее предложение.

Предложение 9.1. *Пусть $\tilde H_k$ $(k=1,2)$ — гильбертовы пространства. Предположим, что $A_{11}^{-1}\in L(\tilde H_1)$, $A_{22}^{-1}\in L(\tilde H_2)$, $A_{12}\in L(\tilde H_2,\tilde H_1)$, $A_{21}\in L(\tilde H_1,\tilde H_2)$, $D_1:=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$, $D_1^{-1}\in L(\tilde H_1)$, и рассмотрим линейный оператор*

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix},$$

определенный в пространстве $\tilde H_1\oplus\tilde H_2$. Тогда оператор $\mathcal{A}^{-1}\in L\left(\tilde H_1\oplus\tilde H_2\right)$.

Доказательство. Если выполнены условия предложения 9.1, то легко проверить, что справедливо представление (факторизация типа Шура—Фробениуса, см. [6])

$$\mathcal{A}^{-1}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}^{-1}=\left[\begin{pmatrix}I&A_{12}A_{22}^{-1}\\0&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_1&0\\0&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&0\\A_{22}^{-1}A_{21}&I\end{pmatrix}\right]^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}D_1^{-1}&-D_1^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}\\-A_{22}^{-1}A_{21}D_1^{-1}&A_{22}^{-1}\left[I+A_{21}D_1^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}\right]\end{pmatrix}\in L\left(\tilde H_1\oplus\tilde H_2\right). \tag{9.1}$$

Это и доказывает предложение. □

Доказательство теоремы 7.1. Оператор $\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}$ представим в виде следующего произведения:

$$\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -\lambda I & -A_0^{1/2} & -A_0^{1/2}\mathbb{B}_1^* & -A_0^{1/2}\mathbb{B}_2^* \\ A_0^{1/2} & -\lambda I & 0 & 0 \\ \mathbb{B}_1 A_0^{1/2} & 0 & -\mathbb{T}_1 - \lambda I & 0 \\ \mathbb{B}_2 A_0^{1/2} & 0 & 0 & -\mathbb{T}_2 - \lambda I \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda A_0^{-1} & -I & -\mathbb{B}_1^* & -\mathbb{B}_2^* \\ I & -\lambda I & 0 & 0 \\ \mathbb{B}_1 & 0 & -\mathbb{T}_1 - \lambda I & 0 \\ \mathbb{B}_2 & 0 & 0 & -\mathbb{T}_2 - \lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} =$$

$$=: \mathbb{A}_0 \mathbb{A}_1(\lambda) \mathbb{A}_0, \quad (9.2)$$

где $\mathbb{A}_0$ — обратимый оператор в пространстве $\mathbb{H}$, т. е. $\mathbb{A}_0^{-1} \in L(\mathbb{H})$. Применяя обозначения предложения 9.1 к оператор-функции $\mathbb{A}_1(\lambda)$, имеем $\tilde{H}_1 = H$, $\mathbb{H} = \tilde{H}_1 \oplus \tilde{H}_2 = H \oplus \mathbb{H}_0$, где $\mathbb{H}_0 := H \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{2} \Omega_k \right)$, $A_{11} = -\lambda A_0^{-1}$, $A_{12} = (-I, -\mathbb{B}_1^*, -\mathbb{B}_2^*)$, $A_{21} = (I, \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)^T$, $D_1 =: M(\lambda) = -\lambda A_0^{-1} - \lambda^{-1} I - \sum_{k=1}^{2} \mathbb{B}_k^* (\mathbb{T}_k + \lambda I)^{-1} \mathbb{B}_k$,

$$A_{22} = \begin{pmatrix} -\lambda I & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{T}_1 - \lambda I & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbb{T}_2 - \lambda I \end{pmatrix}.$$

Проводя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 3 из работы [22], можно показать, что введенные операторы удовлетворяют условиям предложения 9.1 для всех λ, т. е. $\lambda \neq 0$, $\lambda \notin \sigma(M(\lambda))$, $\lambda \notin \sigma(\mathbb{T}_k + \lambda I)$, $k = 1, 2$, и оператор-функция $\mathbb{A}_1(\lambda)$ допускает представление

$$\mathbb{A}_1(\lambda) = \begin{pmatrix} I & \lambda^{-1} & \mathbb{B}_1^*(\mathbb{T}_1 + \lambda I)^{-1} & \mathbb{B}_1^*(\mathbb{T}_1 + \lambda I)^{-1} \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} M(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\mathbb{T}_1 + \lambda I) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\mathbb{T}_2 + \lambda I) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda^{-1} & I & 0 & 0 \\ -(\mathbb{T}_1 + \lambda I)^{-1}\mathbb{B}_1 & 0 & I & 0 \\ -(\mathbb{T}_2 + \lambda I)^{-1}\mathbb{B}_1 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad (9.3)$$

где оператор-функция $M(\lambda)$ выражается через символ $L(\lambda)$ уравнения (2.1) следующим образом:

$$M(\lambda) := -\lambda A_0^{-1} - \lambda^{-1} I - \sum_{k=1}^{2} \mathbb{B}_k^* (\mathbb{T}_k + \lambda I)^{-1} \mathbb{B}_k = -\lambda^{-1} A_0^{-1/2} L(\lambda) A_0^{-1/2},$$

а $L(\lambda)$ определяется формулой (7.1). Таким образом, $\sigma(M(\lambda)) = \sigma(L(\lambda))$, кроме того, $\sigma(\mathbb{T}_k) = \operatorname{supp}\mu_k$, $k = 1, 2$. Следовательно, согласно представлению (9.3), $\sigma(\mathbb{A}) = \sigma(L) \cup \{0\} \cup \operatorname{supp}\mu_1 \cup \operatorname{supp}\mu_2$. Кроме того, $\sigma(L(\lambda)) = \sigma(M(\lambda)) \in \{\lambda \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}\lambda < 0\}$, $L^*(\lambda) = L(\bar{\lambda})$ для любого $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$, следовательно, невещественная часть спектра оператор-функции $L(\lambda)$ симметрична относительно вещественной оси и совпадает с невещественной частью спектра оператора $\mathbb{A}$. □

10. Пример

Рассмотрим ядра интегральных операторов следующего вида:

$$K_1(t) = \sum_{j=1}^{N} a_j \mathit{Э}_{\alpha-1}(-\beta_j, t), \quad K_2(t) = \sum_{j=1}^{N} b_j \mathit{Э}_{\alpha-1}(-\beta_j, t)$$

где $0 < \alpha < 1$, $c_j > 0$, $\beta_j > 0$, $j = 1, \ldots, N$,

$$Э_{\alpha-1}(-\beta_j, t) := t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_j)^n t^{n\alpha}}{\Gamma[(n+1)\alpha]}, \quad j = 1, \ldots, N$$

— функции Работнова (см. [9]), $\Gamma(\cdot)$ — гамма функции Эйлера.

Рассмотрим преобразование Лапласа функции $Э_{\alpha-1}(-\beta_i, t)$:

$$\hat{Э}_{\alpha-1}(-\beta_i, t) = \frac{1}{\lambda^\alpha + \beta_i},$$

где λ^α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ — главная ветвь многозначной функции $f(\lambda) = \lambda^\alpha$, $\lambda \in \mathbb{C}$, с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси: $\lambda^\alpha = |\lambda|^\alpha e^{i\alpha \arg \lambda}$, $-\pi < \arg \lambda < \pi$. Применяя обратное преобразование Лапласа к главной ветви многозначной функции $\hat{Э}_{\alpha-1}(-\beta_i, t)$, получаем следующее интегральное представление (см. [9]):

$$Э_{\alpha-1}(-\beta_j, t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{\lambda^\alpha + \beta_j} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau} d\tau}{\tau^\alpha + 2\beta_j \cos \pi\alpha + \beta_j^2 \tau^{-\alpha}}.$$

Положим

$$d\mu_1(\tau) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{a_j}{\tau^\alpha + 2\beta_j \cos \pi\alpha + \beta_j^2 \tau^{-\alpha}} \right) d\tau,$$

$$d\mu_2(\tau) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{b_j}{\tau^\alpha + 2\beta_j \cos \pi\alpha + \beta_j^2 \tau^{-\alpha}} \right) d\tau.$$

Тогда

$$M_1(t) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \sum_{j=1}^{N} \int_0^{+\infty} \frac{a_j e^{-t\tau} d\tau}{\tau(\tau^\alpha + 2\beta_j \cos \pi\alpha + \beta_j^2 \tau^{-\alpha})} = \sum_{j=1}^{N} a_j \left(\frac{1}{\beta_j} - \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{\lambda(\lambda^\alpha + \beta_j)} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{a_j}{\beta_j} - a_j \int_0^t Э_{\alpha-1}(-\beta_j, s) ds \right) = \sum_{j=1}^{N} a_j \int_t^{+\infty} Э_{\alpha-1}(-\beta_j, s) ds,$$

$$M_2(t) = \sum_{j=1}^{N} b_j \int_t^{+\infty} Э_{\alpha-1}(-\beta_j, s) ds,$$

а условия (2.4) примут вид

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{a_j}{\beta_j} < 1, \quad \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j}{\beta_j} < 1.$$

Введем новые переменные

$$v(t) := u'(t), \quad \xi_0(t) := A_0^{1/2} u(t),$$

$$\xi_j(t, \tau) = \int_0^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_j A_0^{1/2} \frac{du(s)}{ds} ds, \quad t > 0, \quad \tau > 0, \quad j = 1, 2.$$

Тогда задача (2.1), (2.2) формально может быть приведена к следующей начальной задаче для системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} + A_0^{1/2}\left[\xi_0(t) + \dfrac{\sin\pi\alpha}{\pi}\sum\limits_{j=1}^{N}\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{(a_jQ_1^*\xi_1(t,\tau)+b_jQ_2^*\xi_2(t,\tau))\,d\tau}{\sqrt{\tau}(\tau^\alpha+2\beta_k\cos\pi\alpha+\beta_k^2\tau^{-\alpha})}\right] = f_1(t), \\ \dfrac{d\xi_0(t)}{dt} = A_0^{1/2}v(t), \\ \dfrac{d\xi_1(t,\tau)}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{\tau}}Q_1A_0^{1/2}v(t) - \tau\xi_1(t,\tau), \\ \dfrac{d\xi_2(t,\tau)}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{\tau}}Q_2A_0^{1/2}v(t) - \tau\xi_2(t,\tau), \end{cases}$$

где $t > 0$, $\tau > 0$,

$$v(t)|_{t=0} = \varphi_1, \quad \xi_0(t)|_{t=0} = A_0^{1/2}\varphi_0, \quad \xi_k(t,\tau)|_{t=0} = 0, \quad k = 1,2,$$

$$f_1(t) = f(t) - \sum_{j=1}^{N}\left(\left(\int\limits_t^{+\infty}\mathcal{Э}_{\alpha-1}(-\beta_j,s)ds\right)(a_jA+b_jB)\varphi_0\right).$$

Оценка (6.3) принимает следующий вид:

$$E(t) := \frac{1}{2}\left(\left\|u'(t)\right\|_H^2 + \left\|A_0^{1/2}u(t)\right\|_H^2\right) \leqslant \frac{1}{2}\left\|Z(t)\right\|_{\mathbb{H}}^2 \leqslant d\left[\left(\|\varphi_1\|_H^2 + \left\|A_0^{1/2}\varphi_0\right\|_H^2\right)e^{-2\omega t} + \right.$$
$$\left. + \left(\int\limits_0^t e^{-\omega(t-s)}\left\|f(s) - \sum_{j=1}^{N}\left(\int\limits_s^{+\infty}\mathcal{Э}_{\alpha-1}(-\beta_j,\tau)d\tau\right)(a_jA+b_jB)\varphi_0\right\|_H ds\right)^2\right].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1954.
2. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.
3. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. — М.: Наука, 1970.
4. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
5. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989.
7. *Локшин А. А., Суворова Ю. В.* Математическая теория распространения волн в средах с памятью. — М.: МГУ, 1982.
8. *Лыков А. В.* Некоторые проблемные вопросы теории тепломассопереноса// В сб.: «Проблемы тепло- и массопереноса». — Минск: Наука и техника, 1976. — С. 9–82.
9. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. — М.: Наука, 1977.
10. *Санчес Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. — М.: Мир, 1984.
11. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 5. — М.: Наука, 1974.
12. *Amendola G., Fabrizio M., Golden J. M.* Thermodynamics of materials with memory. Theory and applications. — New-York—Dordrecht—Heidelberg—London: Springer, 2012.
13. *Christensen R. M.* Theory of viscoelasticity. An introduction. — New York—London: Academic Press, 1971.
14. *Dafermos C. M.* Asymptotic stability in viscoelasticity// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1970. — *37.* — С. 297–308.
15. *Engel K.-J., Nagel R.* One-parameter semigroup for linear evolution equations. — New York: Springer, 1999.
16. *Eremenko A., Ivanov S.* Spectra of the Gurtin—Pipkin type equations// SIAM J. Math. Anal. — 2011. — *43.* — С. 2296–2306.
17. *Gurtin M. E., Pipkin A. C.* General theory of heat conduction with finite wave speed// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1968. — *31.* — С. 113–126.
18. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint problems for viscous fluids. — Basel: Birkhäuser, 2003.

19. *Miller R. K.* An integrodifferencial equation for rigid heat conductors with memory// J. Math. Anal. — 1978. — *66*. — С. 313–332.
20. *Munoz Rivera J. E., Naso M. G., Vegni F. M.* Asymptotic behavior of the energy for a class of weakly dissipative second-order systems with memory// J. Math. Anal. Appl. — 2003. — *286*. — С. 692–704.
21. *Pata V.* Stability and exponential stability in linear viscoelasticity // Milan J. Math. — 2009. — *77*. — С. 333–360.
22. *Rautian N. A.* Semigroups generated by Volterra integro-differential equations// Differ. Equ. — 2020. — *56*, № 9. — С. 1193–1211.
23. *Tretter C.* Spectral theory of block operator matrices and applications. — Imperial College Press: London, 2008.
24. *Vlasov V. V., Rautian N. A.* Spectral analysis of integrodifferential equations in Hilbert spaces// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2019. — *239*, № 5. — С. 771–787.
25. *Vlasov V. V., Rautian N. A.* On Volterra integro-differential equations with kernels representable by Stieltjes integrals// Differ. Equ. — 2021. — *57*, № 4. — С. 517–532.

В. В. Власов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;
Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия
E-mail: victor.vlasov@math.msu.ru

Н. А. Раутиан
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;
Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия
E-mail: nadezhda.rautian@math.msu.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-507-525 UDC 517.968.72

Semigroups of Operators Generated by Integro-Differential Equations with Kernels Representable by Stieltjes Integrals

© 2021 **V. V. Vlasov, N. A. Rautian**

Abstract. Abstract Volterra integro-differential equations with kernels of integral operators representable by Stieltjes integrals are investigated. The presented results are based on the approach related to the study of one-parameter semigroups for linear evolution equations. We present the method of reduction of the original initial-value problem for a model integro-differential equation with operator coefficients in a Hilbert space to the Cauchy problem for a first-order differential equation in an extended function space. The existence of the contractive C_0-semigroup is proved. An estimate for the exponential decay of the semigroup is obtained.

REFERENCES

1. R. Bellman, *Teoriya ustoychivosti resheniy differentsial'nykh uravneniy* [Stability Theory of Differential Equations], IL, Moscow, 1954 (Russian translation).
2. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral'nyy analiz funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equations], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).
3. A. A. Il'yushin and B. E. Pobedrya, *Osnovy matematicheskoy teorii termovyazkouprugosti* [Fundamentals of the Mathematical Theory of Thermoviscoelasticity], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).

4. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
5. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in a Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
6. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of Function Theory and Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
7. A. A. Lokshin and Yu. V. Suvorova, *Matematicheskaya teoriya rasprostraneniya voln v sredakh s pamyat'yu* [Mathematical Theory of Wave Propagation in Media With Memory], MGU, Moscow, 1982 (in Russian).
8. A. V. Lykov, "Nekotorye problemnye voprosy teorii teplomassoperenosa" [Some problematic issues of the theory of heat and mass transfer], In: *Problemy teplo- i massoperenosa* [Heat and Mass Transfer Problems], Nauka i tekhnika, Minsk, 1976, pp. 9–82 (in Russian).
9. Yu. N. Rabotnov, *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of Hereditary Rigid Body Mechanics], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
10. E. Sanchez-Palencia, *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy* [Non-Homogeneous Media and Vibration Theory], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
11. V. I. Smirnov, *Kurs vysshey matematiki. T. 5* [Higher Mathematics Course. Vol. 5], Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).
12. G. Amendola, M. Fabrizio, and J. M. Golden, *Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications*, Springer, New-York—Dordrecht—Heidelberg—London, 2012.
13. R. M. Christensen, *Theory of Viscoelasticity. An Introduction*, Academic Press, New York–London, 1971.
14. C. M. Dafermos, "Asymptotic stability in viscoelasticity," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1970, **37**, 297–308.
15. K.-J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroup for Linear Evolution Equations*, Springer, New York, 1999.
16. A. Eremenko and S. Ivanov, "Spectra of the Gurtin–Pipkin type equations," *SIAM J. Math. Anal.*, 2011, **43**, 2296–2306.
17. M. E. Gurtin and A. C. Pipkin, "General theory of heat conduction with finite wave speed," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1968, **31**, 113–126.
18. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-Adjoint Problems for Viscous Fluids*, Birkhäuser, Basel, 2003.
19. R. K. Miller, "An integrodifferencial equation for rigid heat conductors with memory," *J. Math. Anal.*, 1978, **66**, 313–332.
20. J. E. Munoz Rivera, M. G. Naso, and F. M. Vegni, "Asymptotic behavior of the energy for a class of weakly dissipative second-order systems with memory," *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, **286**, 692–704.
21. V. Pata, "Stability and exponential stability in linear viscoelasticity," *Milan J. Math.*, 2009, **77**, 333–360.
22. N. A. Rautian, "Semigroups generated by Volterra integro-differential equations," *Differ. Equ.*, 2020, **56**, No. 9, 1193–1211.
23. C. Tretter, *Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications*, London, Imperial College Press, 2008.
24. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Spectral analysis of integrodifferential equations in Hilbert spaces," *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2019, **239**, No. 5, 771–787.
25. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "On Volterra integro-differential equations with kernels representable by Stieltjes integrals," *Differ. Equ.*, 2021, **57**, No. 4, 517–532.

V. V. Vlasov
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;
Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia
E-mail: victor.vlasov@math.msu.ru

N. A. Rautian
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;
Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia
E-mail: nadezhda.rautian@math.msu.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 3 (2021). С. 526–534
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-526-534 УДК 517.958

УЛУЧШЕННЫЙ КРИТЕРИЙ РАЗРУШЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ МАГНИТОГИДРОДИНАМИКИ С ЭФФЕКТАМИ ХОЛЛА И СКОЛЬЖЕНИЯ ИОНОВ

© 2021 г. **С. ГАЛА, М. А. РАГУЗА**

Аннотация. В $\mathbb{R}^3$ рассматривается магнитогидродинамическая система с эффектами Холла и скольжения ионов. Основной результат работы — достаточное условие регулярности на отрезке времени $[0, T]$. Для давления этот результат выражен в терминах норм в однородных пространствах Бесова $\dot{B}^0_{\infty,\infty}$, для градиента магнитного поля — в терминах BMO-норм, а именно:

$$\int\limits_0^T \left(\|\nabla\pi(t)\|^{\frac{2}{3}}_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} + \|\nabla B(t)\|^2_{BMO} \right) dt < \infty.$$

Этот результат улучшает результат работы [3].

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение и основные результаты

Магнитогидродинамика (МГД) имеет дело с взаимодействием между потоком жидкости и магнитным полем. Основные уравнения МГД — это уравнения Навье—Стокса, описывающие динамику сжимаемых жидкостей, и уравнения Максвелла, описывающие электромагнитные явления. В настоящей работе рассматривается следующая задача Коши для уравнений МГД несжимаемой жидкости с эффектом Холла и ионным скольжением в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \partial_t u + (u\cdot\nabla)u + \nabla\pi = (\nabla\times B)\times B + \mu\Delta u, \\ \partial_t B + \nabla\times(u\times B) + \sigma\nabla\times((\nabla\times B)\times B) = \kappa\nabla\times[B\times(B\times(\nabla\times B))] + \eta\Delta B, \\ \nabla\cdot u = \nabla\cdot B = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad B(x,0) = B_0(x). \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь неотрицательные параметры μ и η связаны со свойствами материалов: μ обозначает коэффициент кинематической вязкости жидкости, а η — число, обратное к магнитному числу Рейнольдса. Коэффициенты $\kappa \geqslant 0$ и σ — постоянные. Математическая теория уравнений МГД с эффектом Холла и ионным скольжением имеет большое значение для математики и физики — этой теории посвящено большое количество публикаций (см., например, [3, 4] и имеющуюся там библиографию).

Математическая теория указанной выше системы имеет важные приложения в гидромеханике и материаловедении. В последнее время она привлекает значительное внимание исследователей (см., например, [6–8]). Физический смысл u — скорость движения жидкости, π — давление, B — магнитное поле, а $u_0(x)$ и $B_0(x)$ — заданные начальная скорость и начальное магнитное поле (соответственно), удовлетворяющие соотношениям $\nabla \cdot u_0 = 0$ и $\nabla \cdot B_0 = 0$ в смысле обобщенных функций. По сравнению с классическими уравнениями МГД вязкой несжимаемой жидкости, система (1.1) содержит два дополнительных слагаемых: $\nabla \times ((\nabla \times B) \times B)$ — это так называемое слагаемое Холла, а $\nabla \times [B \times (B \times (\nabla \times B))]$ описывает ионное скольжение. Для удобства, мы нормируем здесь коэффициент вязкости и коэффициент магнитной диффузии так, чтобы каждый был равен единице.

Система (1.1) описывает такие физические явления, как магнитное пересоединение в космической плазме, формирование звезд, нейтронные звезды, генераторы тока. При $\sigma = \kappa = 0$ система (1.1) сводится к классическим уравнениям МГД; при $\kappa = 0$ — к системе МГД Холла.

В [8], для случая малых данных доказано глобальное существование сильных решений в ограниченной области. Этим обусловлена важность изучения критерия глобальной регулярности и структуры возможных особенностей сильных решений. В [3] доказано существование сильных решений, локальных по времени. В [3] для (1.1) предложены различные критерии регулярности в терминах поля скоростей, магнитного поля, давления и их производных; в частности, доказано, что, если (u, π, B) удовлетворяет одному из условий

$$\left\{\begin{array}{c} u \in L^{\frac{2q}{q-3}}(0,T;L^q(\mathbb{R}^3)), \quad 3 < q < \infty, \\ \nabla\pi \in L^{\frac{2s}{3s-3}}(0,T;L^s(\mathbb{R}^3)), \quad 3 < s \leqslant \infty, \\ \nabla\pi \in L^{\frac{2}{3}}(0,T;BMO(\mathbb{R}^3)), \end{array}\right. \tag{1.2}$$

а

$$B \in L^\infty(0,T;L^\infty(\mathbb{R}^3)),\ \nabla B \in L^{\frac{2s}{s-3}}(0,T;L^s(\mathbb{R}^3)), \quad \text{где } \ 3 < s \leqslant \infty \tag{1.3}$$

и $0 < T < \infty$, то решение (u, B) можно продолжить и на значения времени, превосходящие T. Здесь BMO обозначает пространство функций ограниченной средней осцилляции (см. [9]).

В [4] результаты [3] обобщены на случай критического пространства Бесова $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$ и на пространства мультипликаторов. Несмотря на большие усилия математиков, в глобальном случае вопрос о разрушении гладких решений трехмерных уравнений МГД за конечное время остается одной из самых значительных нерешенных проблем прикладного анализа. Читателей, интересующихся дальнейшим прогрессом в этой области, отсылаем к [1, 6, 7] (см. также имеющуюся там библиографию).

Из работ [3, 4] ясно, что для компонент давления и магнитного поля решения задачи (1.1) является актуальной задача определения критерия разрушения. Наша основная цель — улучшить и обобщить результаты [3,4] о регулярности, а также рассмотреть основной механизм возможного разрушения сильных решений задачи (1.1) в терминах критических пространств Бесова $\dot{B}^0_{\infty,\infty}$, сняв условие $B \in L^\infty(0,T;L^\infty(\mathbb{R}^3))$, наложенное на магнитное поле в работе [3].

Чтобы корректно сформулировать критерий разрушения решений (*blow-up*), нужно ввести следующие понятия функционального анализа. Напомним, что *однородное пространство Бесова* $\dot{B}^0_{\infty,\infty}$ определяется следующим образом. Пусть $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — диадическое разбиение единицы Литтлвуда—Пэли, где носителем преобразования Фурье является кольцо $\left\{\xi \in \mathbb{R}^3 : 2^{j-1} \leqslant |\xi| < 2^j\right\}$ (см., например, [2, 9]). Тогда

$$f \in \dot{B}^0_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3) \ \ \textit{тогда и только тогда, когда} \ \ \sup_{j\in\mathbb{Z}} \|\varphi_j * f\|_{L^\infty} = \|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} < \infty.$$

Следующий результат о вложении хорошо известен (ср. [9, с. 244]):

$$L^\infty(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow BMO(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}^0_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3). \tag{1.4}$$

Теперь можно привести наш результат:

Теорема 1.1. *Пусть (u, B) — локальное сильное решение системы* (1.1) *с начальными данными $(u_0, B_0) \in H^2(\mathbb{R}^3)$ и $\nabla \cdot u_0 = \nabla \cdot B_0 = 0$. Тогда (u, B) можно продолжить в область $\{t > T\}$, если*

$$\nabla\pi \in L^{\frac{2}{3}}(0,T;\dot{B}^0_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3)) \quad \textit{и} \quad \nabla B \in L^2(0,T;BMO(\mathbb{R}^3)) \tag{1.5}$$

при $0 < T < \infty$.

Замечание 1.1. Сравним (1.5) с соответствующими результатами $(1.2)_2$ и $(1.2)_3$ для полей давлений. В силу вложения (1.4) наш результат, представленный здесь, улучшает предыдущие результаты $(1.2)_2$ и $(1.2)_3$. Отметим также, что наш критерий регулярности (1.5) охватывает и предельный случай $s = \infty$ в $(1.2)_2$, а также обобщает его на более широкие пространства $\dot{B}^0_{\infty,\infty}$. Кроме того, снято условие $B \in L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^3))$, ранее наложенное на магнитное поле.

Замечание 1.2. Предельный случай $s = \infty$ условия (1.3), наложенного на магнитное поле, является более сложным. Поэтому мы уточним на случай пространств BMO результаты, полученные ранее в критических пространствах Лебега:

$$\nabla B \in L^2(0, T; BMO(\mathbb{R}^3)).$$

Замечание 1.3. Если корректность глобальной задачи не имеет места, то развитие теории разрушения решений приобретает особую важность (как для теории, так и для приложений). Для уравнений Эйлера и Навье—Стокса для несжимаемой жидкости, согласно хорошо известному критерию Биля—Като—Майды (см. [1]), любое решение u является гладким вплоть то момента T, если

$$\int_0^T \|\nabla \times u(\cdot, t)\|_{L^\infty} \, dt < \infty.$$

В [5] критерий Биля—Като—Майды несколько улучшен в предположении, что

$$\int_0^T \|\nabla \times u(\cdot, t)\|_{BMO} \, dt < \infty.$$

В настоящей работе критерий типа Биля—Като—Майды получен для разрушения гладких решений задачи Коши для магнитогидродинамической системы Холла; критерий выражен в терминах давления и магнитного поля.

В дальнейшем нам понадобится следующая оценка давления из $(1.1)_1$. Поскольку $\nabla \cdot u = \nabla \cdot B = 0$, справедливо равенство

$$\nabla \times (u \times B) = (B \cdot \nabla)u - (u \cdot \nabla)B.$$

Следуя [10], применим оператор $\nabla\mathrm{div}$ к обоим частям $(1.1)_1$ и используем тождество

$$(\nabla \times B) \times B = (B \cdot \nabla)B - \nabla \left(\frac{|B|^2}{2} \right).$$

Получим, что

$$\nabla \left(\pi + \frac{|B|^2}{2} \right) = (-\Delta)^{-1} \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\nabla (u_i u_j - B_i B_j) \right)$$

(здесь мы использовали то, что $\nabla \cdot u = \nabla \cdot B = 0$). Тогда из неравенства Кальдерона—Зигмунда следует, что

$$\|\nabla \pi\|_{L^q} \leqslant C \, \|(u \cdot \nabla)u\|_{L^q} + C \, \|(B \cdot \nabla)B\|_{L^q}, \quad 1 < q < \infty. \tag{1.6}$$

Замечание 1.4. Принимая во внимание условие $(1.2)_1$, накладываемое на скорость роста, а также оценку (1.6), есть основания ожидать, что регулярности сильных решений можно добиться, наложив подходящие условия на рост давления.

2. Доказательство теоремы 1.1

Данный раздел посвящен доказательству теоремы 1.1. Существование и единственность локального сильного решения доказаны в [3], поэтому достаточно установить априорные оценки для (u, B) при любом $T > 0$. Ключевой шаг доказательства — установить ограниченность $\|u(\cdot, t)\|_{L^4}$ и $\|B(\cdot, t)\|_{L^4}$, используя классический критерий типа Серрина для трехмерных уравнений МГД.

Доказательство. Скалярно умножим $(1.1)_1$ на u, проинтегрируем результат этого умножения по частям и учтем свойство бездивергентности. Получим, что

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2 &= \int\limits_{\mathbb{R}^3}((\nabla\times B)\times B)\cdot u dx=\\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^3}((B\cdot\nabla)B-\frac{1}{2}\nabla|B|^2)\cdot u dx=\int\limits_{\mathbb{R}^3}(B\cdot\nabla)B\cdot u dx. \qquad (2.1)\end{aligned}$$

Аналогично, скалярно умножая $(1.1)_2$ на B и используя свойство бездивергентности, получаем, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|B\|_{L^2}^2+\|\nabla B\|_{L^2}^2+\|B\times(\nabla\times B)\|_{L^2}^2=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\nabla\times(u\times B)\cdot B dx=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^3}[(B\cdot\nabla)u-(u\cdot\nabla)B]\cdot B dx=\int\limits_{\mathbb{R}^3}(B\cdot\nabla)u\cdot B dx=-\int\limits_{\mathbb{R}^3}(B\cdot\nabla)B\cdot u dx; \qquad (2.2)$$

здесь применено следующее свойство сокращения:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}\nabla\times((\nabla\times B)\times B)\cdot B dx=\int\limits_{\mathbb{R}^3}((\nabla\times B)\times B)\cdot(\nabla\times B)dx=0.$$

Складывая (2.1) и (2.2), легко получаем равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u\|_{L^2}^2+\|B\|_{L^2}^2)+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla B\|_{L^2}^2+\|B\times(\nabla\times B)\|_{L^2}^2=0,$$

доказывающее неравенство

$$\|(u,B)\|_{L^\infty(0,T;L^2)}+\|(u,B)\|_{L^2(0,T;H^1)}\leqslant C. \qquad (2.3)$$

Теперь, чтобы получить L^4-оценку для u и B, умножим $(1.1)_1$ на $|u|^2 u$, учтем свойство бездивергентности и проинтегрируем получившееся равенство. Получим соотношение

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^4}^4+\int\limits_{\mathbb{R}^3}|u|^2|\nabla u|^2 dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla|u|^2\right|^2 dx=\\ =&\int\limits_{\mathbb{R}^3}((B\cdot\nabla)B-\frac{1}{2}\nabla|B|^2)\cdot|u|^2 u dx-\int\limits_{\mathbb{R}^3}u|u|^2\cdot\nabla\pi dx=\\ =&\ K_1+K_2. \qquad (2.4)\end{aligned}$$

Аналогично, умножая $(1.1)_2$ на $|B|^2 B$, находим, что

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|B\|_{L^4}^4+\int\limits_{\mathbb{R}^3}|B|^2|\nabla B|^2 dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla|B|^2\right|^2 dx=\\ =&\int\limits_{\mathbb{R}^3}(B\cdot\nabla)u\cdot|B|^2 B dx+\int\limits_{\mathbb{R}^3}(B\times(\nabla\times B))\cdot\nabla\times(|B|^2 B)dx+\\ &+\int\limits_{\mathbb{R}^3}[((\nabla\times B)\times B)\times B]\cdot(\nabla\times(|B|^2 B))dx=\\ =&\ K_3+K_4+K_5. \qquad (2.5)\end{aligned}$$

Объединяя (2.4) и (2.5), получаем равенство

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left(\|u\|_{L^4}^4+\|B\|_{L^4}^4\right)+\||u|\,|\nabla u|\|_{L^2}^2+\||B|\,|\nabla B|\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}(\left\|\nabla|u|^2\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla|B|^2\right\|_{L^2}^2)=\sum_{m=1}^{5}K_m. \qquad (2.6)$$

Далее рассматриваем каждое слагаемое правой части (2.6) по отдельности.

Применяя к слагаемому K_1 неравенства Гельдера и Янга, получаем, что

$$\begin{aligned} K_1 &\leqslant C\int\limits_{\mathbb{R}^3} |B|\,|\nabla B|\,|u|^3\,dx \leqslant C\left\||u|^3\right\|_{L^{\frac{4}{3}}}\left\|\nabla|B|^2\right\|_{L^4}\leqslant \\ &\leqslant C\|u\|_{L^4}^3\|B\|_{L^4}\|\nabla B\|_{BMO}\leqslant \\ &\leqslant C\left(\|u\|_{L^4}^3+\|B\|_{L^4}^4\right)\|\nabla B\|_{BMO}\leqslant \\ &\leqslant C\left(\|u\|_{L^4}^3+\|B\|_{L^4}^4\right)(1+\|\nabla B\|_{BMO}^2); \end{aligned} \tag{2.7}$$

здесь использован следующий факт (см. [5]):

$$\left\|\nabla|B|^2\right\|_{L^4}\leqslant C\,\||B|\,\nabla B\|_{L^4}\leqslant C\,\|B\|_{L^4}\|\nabla B\|_{BMO}\,.$$

Чтобы оценить $K_2=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\nabla\pi\cdot|u|^2\,udx$, разобъем K_2 на три слагаемых следующим образом:

$$\nabla\pi=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\varphi_j*\nabla\pi=\sum_{j<-N}\varphi_j*\nabla\pi+\sum_{j=-N}^{N}\varphi_j*\nabla\pi+\sum_{j>N}\varphi_j*\nabla\pi;$$

здесь использовано разбиение Литтлвуда—Пэли, а натуральное N будет определено ниже. Применяя это разбиение к K_2, получаем оценку

$$\begin{aligned} K_2 &\leqslant \left|\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_{j<-N}\varphi_j*\nabla\pi\cdot|u|^2\,udx\right|+\left|\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_{j=-N}^{N}\varphi_j*\nabla\pi\cdot|u|^2\,udx\right|+\left|\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_{j>N}\varphi_j*\nabla\pi\cdot|u|^2\,udx\right|= \\ &= K_{21}+K_{22}+K_{23}. \end{aligned}$$

Используя неравенство Бернштейна (см. [2])

$$\|\varphi_j*f\|_{L^q}\leqslant C2^{3j(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|\varphi_j*f\|_{L^p}\,,\quad 1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty, \tag{2.8}$$

где положительная постоянная C не зависит ни от f, ни от j, и применяя неравенство Гельдера, выводим соотношение

$$\begin{aligned} K_{21} &\leqslant \sum_{j<-N}\|\varphi_j*\nabla\pi\|_{L^4}\|u\|_{L^4}^3\leqslant \\ &\leqslant C\|u\|_{L^4}^3\sum_{j<-N}2^{3j(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})}\|\varphi_j*\nabla\pi\|_{L^2}\leqslant \\ &\leqslant C\|u\|_{L^4}^3\left(\sum_{j<-N}2^{\frac{3}{2}j}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j<-N}\|\varphi_j*\nabla\pi\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant \\ &\leqslant C2^{-\frac{3}{4}N}\|u\|_{L^4}^3\|\nabla\pi\|_{L^2}\leqslant \\ &\leqslant C2^{-\frac{3}{4}N}\|u\|_{L^4}^3(\|(u\cdot\nabla)u\|_{L^2}+\|(\nabla\times B)\times B\|_{L^2})= \\ &= C\left(2^{-\frac{3}{2}N}\|u\|_{L^4}^6\right)^{\frac{1}{2}}\left(\|(u\cdot\nabla)u\|_{L^2}^2+\|(\nabla\times B)\times B\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant \\ &\leqslant C\left(2^{-N}\|u\|_{L^4}^4\right)^{\frac{6}{4}}+\frac{1}{8}\|(u\cdot\nabla)u\|_{L^2}^2+\frac{1}{8}\|(\nabla\times B)\times B\|_{L^2}^2\,. \end{aligned}$$

Используя неравенства Гельдера и Янга, получаем следующую оценку на K_{22}:

$$\begin{aligned} K_{22} &\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_{j=-N}^{N}|\varphi_j*\nabla\pi|\,|u|^3\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_{j=-N}^{N}|\varphi_j*\nabla\pi|^{\frac{1}{2}}\,|\varphi_j*\nabla\pi|^{\frac{1}{2}}\,|u|^3\,dx= \\ &= \sum_{j=-N}^{N}\left\||\varphi_j*\nabla\pi|^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^\infty}\left\||\varphi_j*\nabla\pi|^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^4}\|u\|_{L^4}^3= \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|u\|_{L^4}^3 \left(\sum_{j=-N}^{N} \|\varphi_j * \nabla\pi\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}} \|\varphi_j * \nabla\pi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \right) \leqslant \\
&\leqslant C \|u\|_{L^4}^3 \left(\sup_{j\in\mathbb{Z}} \|\varphi_j * \nabla\pi\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}} \right) \left(\sum_{j=-N}^{N} \|\varphi_j * \nabla\pi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \right) \leqslant \\
&\leqslant CN^{\frac{3}{4}} \|u\|_{L^4}^3 \|\nabla\pi\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla\pi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \leqslant \\
&\leqslant CN^{\frac{3}{4}} \|u\|_{L^4}^3 \|\nabla\pi\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}^{\frac{1}{2}} (\|(u\cdot\nabla)u\|_{L^2} + \|(\nabla\times B)\times B\|_{L^2})^{\frac{1}{2}} \leqslant \\
&\leqslant CN \|u\|_{L^4}^4 \|\nabla\pi\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{8} \|(u\cdot\nabla)u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{8} \|(\nabla\times B)\times B\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}
$$

С помощью неравенств Бернштейна, Гельдера и Соболева получаем следующую оценку на K_{23}:

$$
\begin{aligned}
K_{23} &\leqslant \sum_{j>N} \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi_j * \nabla\pi|\, |u|^3\, dx \leqslant \\
&\leqslant \sum_{j>N} \|\varphi_j * \nabla\pi\|_{L^{\frac{12}{7}}} \|u\|_{L^4} \left\| |u|^2 \right\|_{L^6} \leqslant \\
&\leqslant C \|u\|_{L^4} \left\| \nabla |u|^2 \right\|_{L^2} \sum_{j>N} 2^{-\frac{j}{4}} \|\varphi_j * \nabla\pi\|_{L^2} \leqslant \\
&\leqslant C \|u\|_{L^4} \left\| \nabla |u|^2 \right\|_{L^2} \left(\sum_{j>N} 2^{-\frac{j}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j>N} \|\varphi_j * \nabla\pi\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \\
&\leqslant C 2^{-\frac{N}{4}} \|u\|_{L^4} \left\| \nabla |u|^2 \right\|_{L^2} \|\nabla\pi\|_{L^2} \leqslant \\
&\leqslant C \left(2^{-N} \|u\|_{L^4}^4 \right)^{\frac{1}{4}} (\|(u\cdot\nabla)u\|_{L^2} + \|(\nabla\times B)\times B\|_{L^2})^2 \leqslant \\
&\leqslant C \left(2^{-N} \|u\|_{L^4}^4 \right)^{\frac{1}{4}} \left(\|(u\cdot\nabla)u\|_{L^2}^2 + \|(\nabla\times B)\times B\|_{L^2}^2 \right).
\end{aligned}
$$

Подставляя оценки K_{21}, K_{22}, K_{23} в разбиение K_2, получаем, что

$$
\begin{aligned}
K_2 \leqslant{}& \left(C2^{-N} \|u\|_{L^4}^4 \right)^{\frac{6}{4}} + \frac{1}{4} \|(u\cdot\nabla)u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \|(\nabla\times B)\times B\|_{L^2}^2 + \\
&+ CN \|u\|_{L^4}^4 \|\nabla\pi\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}^{\frac{2}{3}} + \left(C2^{-N} \|u\|_{L^4}^4 \right)^{\frac{1}{4}} \left(\|u\cdot\nabla u\|_{L^2}^2 + \|(\nabla\times B)\times B\|_{L^2}^2 \right). \quad (2.9)
\end{aligned}
$$

Теперь выберем и зафиксируем такое натуральное N, что $C2^{-N} \|u\|_{L^4}^4 \approx \dfrac{1}{4}$, т. е.

$$
N = \left[\frac{\ln C + \ln(\|u\|_{L^4}^4 + e)}{\ln 4} \right] + 1,
$$

где $[a]$ обозначает целую часть a. Тогда, подставляя N в (2.9), приходим к неравенству

$$
K_2 \leqslant C + C\left(\ln C + \ln(\|u\|_{L^4}^4 + e) \right) \|\nabla\pi\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}^{\frac{2}{3}} \|u\|_{L^4}^4 + \frac{1}{8} \|(u\cdot\nabla)u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{8} \|(\nabla\times B)\times B\|_{L^2}^2 . \quad (2.10)
$$

Для K_3, используя интегрирование по частям, а также неравенства Гельдера и Янга, можно вывести оценку

$$
K_3 = \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} B_i \partial_i u \cdot |B|^2 B dx = -\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} B_i u \partial_i (|B|^2 B) dx =
$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_{\mathbb{R}^3} u\,|B|^2\,(B\cdot\nabla)B dx - \int_{\mathbb{R}^3} B\cdot u\cdot\sum_{i=1}^{3} B_i\partial_i B^2 dx \leqslant \\
&\leqslant C\,\|(B\cdot\nabla)B\|_{L^4}\,\|u\|_{L^4}\,\left\||B|^2\right\|_{L^2} \leqslant \\
&\leqslant C\,\|B\|_{L^4}^3\,\|u\|_{L^4}\,\|\nabla B\|_{BMO} \leqslant \\
&\leqslant C\left(\|u\|_{L^4}^3 + \|B\|_{L^4}^4\right)(1+\|\nabla B\|_{BMO}^2).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Точно так же получаем следующие оценки на K_4 и K_5:

$$\begin{aligned}
K_4 &= \int_{\mathbb{R}^3}((B\times(\nabla\times B)))(\nabla\,|B|^2\times B)dx \leqslant \\
&\leqslant C\,\|B\times(\nabla\times B)\|_{L^4}\,\left\|\nabla\,|B|^2\right\|_{L^4}\|B\|_{L^2} \leqslant \\
&\leqslant C\,\|B\|_{L^4}^2\,\|\nabla B\|_{BMO}^2 \leqslant C\left(1+\|B\|_{L^4}^4\right)\|\nabla B\|_{BMO}^2
\end{aligned} \tag{2.12}$$

(здесь использовано двойное неравенство

$$\|B\times(\nabla\times B)\|_{L^4} \leqslant C\,\||B|\,\nabla B\|_{L^4} \leqslant C\,\|B\|_{L^4}\,\|\nabla B\|_{BMO}\,,$$

известное из [5]),

$$\begin{aligned}
K_5 &= \int_{\mathbb{R}^3}[((\nabla\times B)\times B)\times B](\nabla\,|B|^2\times B)dx \leqslant \\
&\leqslant C\,\|B\times(\nabla\times B)\|_{L^4}\left\|\nabla\,|B|^2\right\|_{L^4}\left\||B|^2\right\|_{L^2} \leqslant \\
&\leqslant C\,\|B\|_{L^4}^4\,\|\nabla B\|_{BMO}^2\,.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Подставив оценки слагаемых K_m $(m=1,2,\dots,5)$ в (2.6), получим неравенство

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left(\|u\|_{L^4}^4+\|B\|_{L^4}^4\right)+\frac{1}{2}\,\||u|\,|\nabla u|\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\,\||B|\,|\nabla B|\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla\,|u|^2\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla\,|B|^2\right\|_{L^2}^2 \leqslant \\
&\leqslant C + C\left(\ln C+\ln(\|u\|_{L^4}^4+e)\right)\|\nabla\pi\|_{\dot B^0_{\infty,\infty}}^{\frac{2}{3}}\,\|u\|_{L^4}^4 + C(1+\|\nabla B\|_{BMO}^2)\left(\|B\|_{L^4}^4+\|u\|_{L^4}^4\right).
\end{aligned}$$

Оно сводится к неравенству

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\|u\|_{L^4}^4+\|B\|_{L^4}^4\right) &\leqslant C + C(1+\|\nabla B\|_{BMO}^2)\left(\|B\|_{L^4}^4+\|u\|_{L^4}^4\right)+ \\
&\quad + C\,\|\nabla\pi\|_{\dot B^0_{\infty,\infty}}^{\frac{2}{3}}\ln(\|u\|_{L^4}^4+\|B\|_{L^4}^4+e)\left(\|B\|_{L^4}^4+\|u\|_{L^4}^4\right)
\end{aligned}$$

для всех $0\leqslant t<T$.

Для наглядности введем обозначение

$$F(t)=e+\|u(\cdot,t)\|_{L^4}^4+\|B(\cdot,t)\|_{L^4}^4\,.$$

Таким образом, имеем оценку

$$\frac{dF}{dt}(t)\leqslant C(1+\|\nabla B\|_{BMO}^2)F(t)+CF(t)\,\|\nabla\pi\|_{\dot B^0_{\infty,\infty}}^{\frac{2}{3}}\ln(F(t))+C.$$

Используя неравенство Гронуолла, получаем, что следующая оценка справедлива при $0\leqslant t\leqslant T$:

$$F(t)\leqslant (F(0)+CT)\exp\left(C\int_0^T\|\nabla\pi(\tau)\|_{\dot B^0_{\infty,\infty}}^{\frac{2}{3}}\ln F(\tau)d\tau\right)\exp\left(\int_0^T 1+\|\nabla B(\tau)\|_{BMO}^2\,d\tau\right). \tag{2.14}$$

Логарифмируя обе части неравенства (2.14), приходим к оценке

$$\ln F(t)\leqslant \ln\left(F(0)+CT\right)+C\int_0^T\|\nabla\pi(\tau)\|_{\dot B^0_{\infty,\infty}}^{\frac{2}{3}}\ln F(\tau)d\tau+\int_0^T\left\{1+\|\nabla B(\tau)\|_{BMO}^2\right\}d\tau.$$

Применяя неравенство Гронуолла еще раз, получаем, что

$$\ln F(t) \leqslant \ln\left(F(0) + CT\right) \int_0^T \|\nabla\pi(\tau)\|^{\frac{2}{3}}_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\, d\tau < \infty$$

для любого $0 \leqslant t \leqslant T$. Отсюда следует, что

$$(u, B) \in L^\infty(0, T; L^4(\mathbb{R}^3)) \subset L^8(0, T; L^4(\mathbb{R}^3)). \tag{2.15}$$

Из (2.15) и (1.2) делаем вывод, что решение (u, B) можно продолжить за точку $t = T$, что завершает доказательство теоремы 1.1. □

3. Благодарности

Работа выполнена во время пребывания первого автора в университете города Катания (Италия). Он хотел бы поблагодарить этот университет за гостеприимство и поддержку. Работа выполнена при частичной поддержке программы Piano della Ricerca 2016–2018 — Linea di intervento 2: «Metodi variazionali ed equazioni di erenziali». Работа выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Beale J., Kato T., Majda A.* Remarks on breakdown of smooth solutions for the three-dimensional Euler equations// Commun. Math. Phys. — 1984. — *94.* — С. 61–66.
2. *Chemin J.-Y.* Perfect incompressible fluids. — New York: Clarendon Press & Oxford University Press, 1998.
3. *Fan J., Jia X., Nakamura G., Zhou Y.* On well-posedness and blowup criteria for the magnetohydrodynamics with the Hall and ion-slip effects// Z. Angew. Math. Phys. — 2015. — *66.* — С. 1695–1706.
4. *Gala S., Ragusa M. A.* On the blow-up criterion of strong solutions for the MHD equations with the Hall and ion-slip effects in $\mathbb{R}^3$// Z. Angew. Math. Phys. — 2016. — *67.* — С. 18.
5. *Kozono H., Taniuchi Y.* Bilinear estimates in BMO and the Navier—Stokes equations// Math. Z. — 2000. — *235.* — С. 173–194.
6. *Maiellaro M.* Uniqueness of MHD thermodiffusive mixture flows with Hall and ion-slip effects// Meccanica. — 1977. — *12.* — С. 9–14.
7. *Mulone G., Salemi F.* Some continuous dependence theorems in MHD with Hall and ion-slip currents in unbounded domains// Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli. — 1988. — *55.* — С. 139–152.
8. *Mulone G., Solonnikov V. A.* On an initial boundary-value problem for the equation of magnetohydrodynamics with the Hall and ion-slip effects// J. Math. Sci. (N.Y.). — 1997. — *87.* — С. 3381–3392.
9. *Triebel H.* Theory of function spaces. — Basel: Birkhäuser, 1983.
10. *Zhou Y.* Regularity criteria for the 3D MHD equations in terms of the pressure// Int. J. Nonlinear Mech. — 2006. — *41.* — С. 1174–1180.

Sadek Gala
Ecole Normale Supérieure of Mostaganem, Mostaganem, Algeria;
Università di Catania, Catania, Italy
E-mail: sadek.gala@gmail.com

Maria Alessandra Ragusa
Università di Catania, Catania, Italy;
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: maragusa@dmi.unict.it

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-526-534 UDC 517.958

An Improved Blow-Up Criterion for the Magnetohydrodynamics with the Hall and Ion-Slip Effects

© 2021 **S. Gala, M. A. Ragusa**

Abstract. In this work, we consider the magnetohydrodynamics system with the Hall and ion-slip effects in $\mathbb{R}^3$. The main result is a sufficient condition for regularity on a time interval $[0,T]$ expressed in terms of the norm of the homogeneous Besov space $\dot{B}^0_{\infty,\infty}$ with respect to the pressure and the $BMO-$norm with respect to the gradient of the magnetic field, respectively

$$\int_0^T \left(\|\nabla\pi(t)\|^{\frac{2}{3}}_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} + \|\nabla B(t)\|^2_{BMO}\right) dt < \infty,$$

which can be regarded as improvement of the result in [3].

REFERENCES

1. J. Beale, T. Kato, and A. Majda, "Remarks on breakdown of smooth solutions for the three-dimensional Euler equations," *Commun. Math. Phys.*, 1984, **94**, 61–66.
2. J.-Y. Chemin, *Perfect Incompressible Fluids*, Clarendon Press & Oxford University Press, New York, 1998.
3. J. Fan, X. Jia, G. Nakamura, and Y. Zhou, "On well-posedness and blowup criteria for the magnetohydrodynamics with the Hall and ion-slip effects," *Z. Angew. Math. Phys.*, 2015, **66**, 1695–1706.
4. S. Gala and M. A. Ragusa, "On the blow-up criterion of strong solutions for the MHD equations with the Hall and ion-slip effects in $\mathbb{R}^3$," *Z. Angew. Math. Phys.*, 2016, **67**, 18.
5. H. Kozono and Y. Taniuchi, "Bilinear estimates in BMO and the Navier—Stokes equations," *Math. Z.*, 2000, **235**, 173–194.
6. M. Maiellaro, "Uniqueness of MHD thermodiffusive mixture flows with Hall and ion-slip effects," *Meccanica*, 1977, **12**, 9–14.
7. G. Mulone and F. Salemi, "Some continuous dependence theorems in MHD with Hall and ion-slip currents in unbounded domains," *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli*, 1988, **55**, 139–152.
8. G. Mulone and V. A. Solonnikov, "On an initial boundary-value problem for the equation of magnetohydrodynamics with the Hall and ion-slip effects," *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 1997, **87**, 3381–3392.
9. H. Triebel, *Theory of Function Spaces*, Birkhäuser, Basel, 1983.
10. Y. Zhou, "Regularity criteria for the 3D MHD equations in terms of the pressure," *Int. J. Nonlinear Mech.*, 2006, **41**, 1174–1180.

S. Gala
Ecole Normale Supérieure of Mostaganem, Mostaganem, Algeria;
Università di Catania, Catania, Italy
E-mail: `sadek.gala@gmail.com`

M. A. Ragusa
Università di Catania, Catania, Italy;
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: `maragusa@dmi.unict.it`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 3 (2021). С. 535–548
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-535-548 УДК 517.925.44

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2021 г. **Г. В. ДЕМИДЕНКО, А. В. ДУЛЕПОВА**

Аннотация. В работе исследуется движение перевернутого маятника, точка подвеса которого совершает высокочастотные колебания вдоль прямой, составляющей малый угол с вертикалью. Доказано, что при выполнении некоторых условий на функцию, описывающую колебания точки подвеса маятника, возникает периодическое движение маятника, и оно является асимптотически устойчивым.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

В настоящей работе исследуется вопрос об устойчивости движения перевернутого маятника, точка подвеса которого совершает высокочастотные колебания вдоль прямой, составляющей с вертикалью малый угол α. Предполагается, что закон движения точки подвеса описывается функцией $f(\omega t)$, $\omega \gg 1$, где

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m}(a_k \sin(kt) + b_k \cos(kt)). \tag{0.1}$$

Задачи такого типа обычно исследуются методом усреднения, основы которого были заложены Н. Н. Боголюбовым [1]. С помощью этого метода решено большое число теоретических и прикладных задач, связанных с нелинейными дифференциальными уравнениями, содержащими осциллирующие коэффициенты. Развитию метода усреднения и применению его к различным задачам посвящено ряд монографий (см., например, [3, 4, 8]).

В нашей работе для решения указанной задачи мы будем применять подход, основанный на использовании дифференциального матричного уравнения Ляпунова, изложенный в монографии [5]. В частности, будем использовать критерий асимптотической устойчивости решений систем линейных уравнений с периодическими коэффициентами, формулируемый в терминах разрешимости краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова [6].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10086).

1. Периодические колебания перевернутого маятника

Уравнение движения маятника, точка подвеса которого осциллирует по закону, определяемому функцией $f(\omega t)$, вдоль прямой, наклоненной под углом α, имеет следующий вид:

$$\varphi'' + \varepsilon\varphi' + \frac{g + \omega^2\, f''(s)|_{s=\omega t}\cos\alpha}{l}\sin\varphi + \frac{\omega^2 f''(s)|_{s=\omega t}\sin\alpha}{l}\cos\varphi = 0, \tag{1.1}$$

где $\varphi = \varphi(t)$ — угол отклонения маятника от нижнего вертикального положения равновесия, ε — коэффициент трения, g — ускорение свободного падения, l — длина маятника, и в силу (0.1)

$$f''(s)|_{s=\omega t} = -\sum_{k=1}^{m} k^2(a_k\sin(k\omega t) + b_k\cos(k\omega t)).$$

Как сказано, мы рассматриваем движение в предположении, что частота колебаний достаточно высокая. Будем предполагать, что $\omega > 0$ такое, что выполнены следующие условия:

$$2gl < \omega^2\left(\sum_{k=1}^{m} k^2(a_k^2 + b_k^2)\right), \tag{1.2}$$

$$\frac{\omega}{l}\left(\sum_{k=1}^{m}(|a_k| + |b_k|)\right) \leqslant \Delta < \infty, \quad \Delta = \mathrm{const}, \tag{1.3}$$

$$0 \leqslant \alpha < \frac{c}{\omega^2}, \quad c = \mathrm{const}\,. \tag{1.4}$$

Введем малый параметр $\mu = \dfrac{1}{\omega}$. Тогда, осуществив переход к «быстрому» времени $\tau = \omega t$ и сдвиг по углу на π с сохранением обозначения, т. е. $\varphi := \varphi + \pi$, представим уравнение движения маятника (1.1) в виде

$$\hat\varphi'' + \varepsilon\mu\hat\varphi' - \frac{\mu^2 g + f''(\tau)\cos\alpha}{l}\sin\hat\varphi - \frac{f''(\tau)\sin\alpha}{l}\cos\hat\varphi = 0, \tag{1.5}$$

где $\hat\varphi(\tau) = \varphi(\tau\mu)$. Перепишем его в виде системы

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}\tilde\varphi_1\\ \tilde\varphi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -\varepsilon\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde\varphi_1\\ \tilde\varphi_2\end{pmatrix}\left(\begin{matrix}0\\ \dfrac{\mu^2 g + f''(\tau)\cos\alpha}{l}\sin\tilde\varphi_1 + \dfrac{f''(\tau)\sin\alpha}{l}\cos\tilde\varphi_1\end{matrix}\right), \tag{1.6}$$

где $\tilde\varphi_1 = \hat\varphi$, $\tilde\varphi_2 = \hat\varphi'$, $f'' = f''(\tau) = -\sum\limits_{k=1}^{m} k^2(a_k\sin(k\tau) + b_k\cos(k\tau))$.

Вначале рассмотрим почти линейное приближение ($\sin\tilde\varphi_1 \approx \tilde\varphi_1$) системы (1.6)

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}\tilde\varphi_1\\ \tilde\varphi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ \dfrac{\mu^2 g + f''(\tau)\cos\alpha}{l} & -\varepsilon\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde\varphi_1\\ \tilde\varphi_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \dfrac{f''(\tau)\sin\alpha}{l}\cos\tilde\varphi_1\end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Вводя обозначение $\tilde\varphi = \begin{pmatrix}\tilde\varphi_1\\ \tilde\varphi_2\end{pmatrix}$, будем записывать систему (1.7) в виде

$$\frac{d\tilde\varphi}{d\tau} = A_{lin}(\tau,\mu)\tilde\varphi + F_{lin}(\tau,\tilde\varphi,\mu).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия* (1.2)–(1.4). *Существует* ω_0 *такое, что система* (1.7) *имеет единственное* 2π*-периодическое решение* $\tilde\varphi_{lin}(\tau,\mu)$ *при* $\mu = \dfrac{1}{\omega} \in \left(0, \dfrac{1}{\omega_0}\right)$, *и выполнена оценка*

$$\|\tilde\varphi_{lin}(\tau,\mu)\| \leqslant c_{lin}\cdot\mu, \quad c_{lin} = \mathrm{const}\,. \tag{1.8}$$

Доказательство. С использованием линейного невырожденного преобразования

$$\tilde\varphi = Qu, \quad Q = Q(\tau,\mu) \tag{1.9}$$

систему (1.7) можно переписать в виде

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = [(Q^{-1})' + Q^{-1}A_{lin}(\tau,\mu)]Q\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} + Q^{-1}F_{lin}(\tau, Qu, \mu)$$

или

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = U(\tau,\mu)\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} + \tilde{F}_{lin}(\tau, u, \mu).$$

По аналогии с [7] в качестве невырожденной матрицы $Q = Q(\mu, \tau)$ возьмем матрицу вида

$$Q = \begin{pmatrix}1+\mu a(\tau,\mu) & 0\\ \mu b(\tau,\mu) & \mu\end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

где $a(\tau,\mu), b(\tau,\mu)$ — 2π-периодические функции по τ. Тогда элементы матрицы $U = U(\tau,\mu)$ имеют вид

$$u_{11} = \frac{\mu(b(\tau,\mu) - a'(\tau,\mu))}{1+\mu a(\tau,\mu)}, \quad u_{12} = \frac{\mu}{1+\mu a(\tau,\mu)},$$

$$u_{21} = -\mu\biggl(-\frac{g}{l} + \varepsilon b(\tau,\mu) - \mu\frac{g}{l}a(\tau,\mu) - \frac{1}{\mu}\frac{f''(\tau)a(\tau,\mu)\cos\alpha}{l} +$$

$$+ \frac{b(\tau,\mu)(b(\tau,\mu) - a'(\tau,\mu))}{1+\mu a(\tau,\mu)}\biggr) - b'(\tau,\mu) + \frac{1}{\mu}\frac{f''(\tau)\cos\alpha}{l},$$

$$u_{22} = -\mu\left(\varepsilon + \frac{b(\tau,\mu)}{1+\mu a(\tau,\mu)}\right).$$

Выберем функции $a(\tau,\mu), b(\tau,\mu)$ так, чтобы

$$a'(\tau,\mu) - b(\tau,\mu) \equiv 0, \quad b'(\tau,\mu) - \frac{1}{\mu}\frac{f''(\tau)\cos\alpha}{l} \equiv 0. \tag{1.11}$$

Следовательно, получаем систему

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \mu\left(U_1(\mu) + U_2(\tau,\mu) + \mu^2 U_3(\tau,\mu)\right)\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix}0\\ \dfrac{1}{\mu}\dfrac{f''(\tau)}{l}\sin\alpha\cos[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1]\end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

где

$$U_1(\mu) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ \dfrac{g}{l} - I(\mu) & -\varepsilon\end{pmatrix}, \quad I(\mu) = -\frac{1}{\mu}\frac{\cos\alpha}{2\pi l}\int\limits_0^{2\pi} f''(s)a(s,\mu)ds, \tag{1.13}$$

$$U_2(\tau,\mu) = \begin{pmatrix}0 & -\mu a(\tau,\mu)\\ -\varepsilon b(\tau,\mu) + \mu\dfrac{g}{l}a(\tau,\mu) + \dfrac{1}{\mu}\dfrac{f''(\tau)a(\tau,\mu)\cos\alpha}{l} + I(\mu) & (\mu a(\tau,\mu) - 1)b(\tau,\mu)\end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

$$U_3(\tau,\mu) = \begin{pmatrix}0 & \dfrac{a^2(\tau,\mu)}{1+\mu a(\tau,\mu)}\\ 0 & \dfrac{-a^2(\tau,\mu)b(\tau,\mu)}{1+\mu a(\tau,\mu)}\end{pmatrix}.$$

Теперь выберем функции $a(\tau,\mu), b(\tau,\mu)$, удовлетворяющие условию (1.11), таким образом, чтобы выполнялось

$$\int\limits_0^{2\pi} a(s,\mu)ds = 0, \quad \int\limits_0^{2\pi} b(s,\mu)ds = 0.$$

А именно, учитывая выражение (0.1) для функции $f(\tau)$, положим

$$a(\tau,\mu) = \frac{1}{\mu}\frac{\cos\alpha}{l}f(\tau), \quad b(\tau,\mu) = \frac{1}{\mu}\frac{\cos\alpha}{l}f'(\tau). \tag{1.15}$$

Тогда, учитывая определение (0.1), нетрудно показать, что при любом μ выполняется равенство

$$\int_0^{2\pi} U_2(s,\mu)ds = 0. \tag{1.16}$$

Действительно, для элементов $u_{11}^{(2)}, u_{12}^{(2)}, u_{21}^{(2)}$ матрицы $U_2(\tau,\mu)$ это очевидно в силу выбора функций $a(\tau,\mu), b(\tau,\mu)$ и определения интеграла $I(\mu)$. Для элемента $u_{22}^{(2)}$ это вытекает из (0.1) и цепочки равенств

$$\int_0^{2\pi} a(s,\mu)b(s,\mu)ds = \frac{1}{\mu^2}\frac{\cos^2\alpha}{l^2}\int_0^{2\pi} f(s)f'(s)ds = \frac{1}{\mu^2}\frac{\cos^2\alpha}{2l^2}(f^2(2\pi)-f^2(0)) = 0.$$

□

Приведем хорошо известное утверждение, которое потребуется нам в дальнейшем.

Лемма 1.1. *Пусть $B(\tau)$ — T-периодическая матрица, и ни один из мультипликаторов системы*

$$\frac{dy}{d\tau} = B(\tau)y \tag{1.17}$$

не лежит на единичной окружности. Тогда краевая задача

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{d\tau} = B(\tau)y + F(\tau), \quad 0 < \tau < T, \\ y(0) = y(T) \end{cases} \tag{1.18}$$

имеет единственное решение для любой непрерывной T-периодической вектор-функции $F(\tau)$, при этом справедлива оценка

$$\|y(\tau)\| \leqslant c \cdot \max_s \|F(s)\|, \quad c = \mathrm{const}. \tag{1.19}$$

Установим следующее утверждение.

Лемма 1.2. *Пусть $Y(2\pi,\mu)$ — матрица монодромии системы*

$$\frac{dy}{d\tau} = \mu\left(U_1(\mu) + U_2(\tau,\mu) + \mu^2 U_3(\tau,\mu)\right)y. \tag{1.20}$$

Тогда существует число $\mu_1 > 0$ такое, что при всех $\mu \in (0,\mu_1)$ справедлива оценка

$$\|(I - Y(2\pi,\mu))^{-1}\| \leqslant \frac{\tilde{c}}{\mu}, \quad \mu \in (0,\mu_1), \quad \tilde{c} = \mathrm{const}. \tag{1.21}$$

Доказательство. Сначала покажем, что при достаточно малых значениях параметра μ спектр матрицы $U_1(\mu)$ лежит строго в левой полуплоскости.

Отметим, что в силу условия (1.2) имеем

$$2gl\mu^2 < \left(\sum_{k=1}^m k^2(a_k^2 + b_k^2)\right). \tag{1.22}$$

Выпишем теперь определитель матрицы $U_1(\mu)$. Из определений (0.1), (1.13) имеем

$$\det U_1(\mu) = -\frac{g}{l} - \frac{1}{\mu}\frac{\cos\alpha}{2\pi l}\int_0^{2\pi} f''(s)a(s,\mu)ds =$$

$$= -\frac{g}{l} + \frac{1}{\mu^2}\frac{\cos^2\alpha}{2\pi l^2}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=1}^m k^2(a_k^2\sin^2(ks) + b_k^2\cos^2(ks))\right)ds =$$

$$= -\frac{g}{l} + \frac{1}{\mu^2}\frac{\cos^2\alpha}{2l^2}\left(\sum_{k=1}^m k^2(a_k^2 + b_k^2)\right).$$

Третье равенство справедливо в силу того, что интегралы от всех остальных попарных произведений синусов и косинусов нулевые.

Поскольку выполнено условие (1.4) на малость угла α, то существует такое значение параметра μ', что $\cos\alpha$ достаточно близок к единице при $\mu \in (0, \mu')$; тем самым, в силу условия (1.22), определитель матрицы $U_1(\mu)$ положителен. А поскольку след этой матрицы равен $-\varepsilon < 0$, то при $\mu \in (0, \mu')$ ее спектр лежит в левой полуплоскости.

Учитывая теперь, что для 2π-периодической матрицы $U_2(\tau, \mu)$ выполнено равенство (1.16), получим, что согласно результатам из [6] существует $\mu'' \in (0, \mu']$ такое, что нулевое решение системы

$$\frac{dy}{d\tau} = \mu(U_1(\mu) + U_2(\tau, \mu))y \tag{1.23}$$

асимптотически устойчиво при $\mu \in (0, \mu'')$. А так как перед матрицей $U_3(\tau, \mu)$ в (1.20) стоит множитель μ^2, то из результатов, полученных в [6], следует, что существует $\mu_0 \in (0, \mu''])$ такое, что нулевое решение системы (1.20) асимптотически устойчиво при всех $\mu \in (0, \mu_0)$. Таким образом, спектр матрицы монодромии данной системы лежит строго внутри единичного круга. Следовательно, обратная матрица $(I - Y(2\pi, \mu))^{-1}$ существует.

Замечание. Коэффициенты матриц $U_1(\mu), U_2(\tau, \mu), U_3(\tau, \mu)$ являются ограниченными, несмотря на наличие множителя $\dfrac{1}{\mu}$ перед некоторыми элементами этих матриц, а также в выражениях для $a(\tau, \mu), b(\tau, \mu)$. Ограниченность обеспечивается условием (1.3). А именно,

$$|a(\tau, \mu)| = \left| \frac{1}{\mu} \frac{\cos\alpha}{l} \left(\sum_{k=1}^{m} (a_k \sin(k\tau) + b_k \cos(k\tau)) \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{\omega \cos\alpha}{l} \left(\sum_{k=1}^{m} (a_k \sin(k\tau) + b_k \cos(k\tau)) \right) \right| \leqslant \frac{\omega}{l} \left(\sum_{k=1}^{m} (|a_k| + |b_k|) \right) \leqslant \Delta < \infty.$$

Аналогичные оценки справедливы для величин $b(\tau, \mu)$ и $\dfrac{1}{\mu} \dfrac{f''(\tau)}{l}$.

Для доказательства оценки (1.21) рассмотрим формулу

$$I - Y(2\pi, \mu) = -\int\limits_0^{2\pi} \frac{d}{ds} Y(s, \mu) ds$$

и перепишем ее с учетом (1.20) в следующем виде:

$$I - Y(2\pi, \mu) = -\int\limits_0^{2\pi} \mu \left(U_1(\mu) + U_2(s, \mu) + \mu^2 U_3(s, \mu) \right) Y(s, \mu) ds =$$

$$= -\mu \int\limits_0^{2\pi} \left(U_1(\mu) + U_2(s, \mu) + \mu^2 U_3(s, \mu) \right) (Y(s, \mu) - I) ds -$$

$$- \mu \int\limits_0^{2\pi} \left(U_1(\mu) + U_2(s, \mu) + \mu^2 U_3(s, \mu) \right) ds.$$

А учитывая равенство (1.16), имеем

$$I - Y(2\pi, \mu) = -\mu 2\pi U_1(\mu) \Bigg(I + \frac{\mu^2}{2\pi} U_1^{-1}(\mu) \int\limits_0^{2\pi} U_3(s, \mu) ds +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(I + U_1^{-1}(\mu) U_2(s, \mu) + \mu^2 U_1^{-1}(\mu) U_3(s, \mu) \right) (Y(s, \mu) - I) ds \Bigg). \tag{1.24}$$

Поскольку $Y(s,\mu)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{d\tau} = \mu\left(U_1(\mu) + U_2(\tau,\mu) + \mu^2 U_3(\tau,\mu)\right) Y, \\ Y|_{\tau=0} = I, \end{cases}$$

то из теоремы о непрерывной зависимости решений от параметров следует, что $Y(s,\mu)$ равномерно сходится к I на $[0,2\pi]$ при μ, стремящемся к нулю. Таким образом, мы можем выбрать столь малое $\mu_1 \in (0,\mu_0]$, что

$$r(\mu) = \frac{1}{2\pi}\Bigg\| \mu^2 U_1^{-1}(\mu) \int\limits_0^{2\pi} U_3(s,\mu)ds +$$

$$+ \int\limits_0^{2\pi} \left(I + U_1^{-1}(\mu)U_2(s,\mu) + \mu^2 U_1^{-1} U_3(s,\mu)\right)(Y(s,\mu) - I)ds \Bigg\| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \mu \in (0,\mu_1). \tag{1.25}$$

Тогда в силу теоремы фон Неймана оператор

$$K(\mu) := I + \frac{\mu^2}{2\pi} U_1^{-1}(\mu) \int\limits_0^{2\pi} U_3(s,\mu)ds +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(I + U_1^{-1}(\mu)U_2(s,\mu) + \mu^2 U_1^{-1}(\mu) U_3(s,\mu)\right)(Y(s,\mu) - I)ds$$

обратим. С учетом представления оператора $K^{-1}(\mu)$ в виде ряда Неймана и оценки (1.25) имеем

$$\|K^{-1}(\mu)\| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} r^j(\mu) \leqslant 2, \quad \mu \in (0,\mu_1).$$

Таким образом, с учетом равенства (1.24)

$$\|\left(I - Y(2\pi,\mu)\right)^{-1}\| \leqslant 2\frac{\|U_1^{-1}(\mu)\|}{\mu 2\pi} = \frac{\|U_1^{-1}(\mu)\|}{\mu\pi}, \quad \mu \in (0,\mu_1).$$

Лемма 1.2 доказана. □

Из лемм 1.1, 1.2 вытекает, что при $\mu \in (0,\mu_1)$ система

$$\frac{dy}{d\tau} = \mu\bar{U}(\tau,\mu)y + F(\tau,\mu), \quad \bar{U}(\tau,\mu) = U_1(\mu) + U_2(\tau,\mu) + \mu^2 U_3(\tau,\mu), \tag{1.26}$$

имеет единственное 2π-периодическое решение $y(\tau,\mu)$ при любой непрерывной 2π-периодической вектор-функции $F(\tau,\mu)$.

Используя явную формулу решения для задачи (1.18)

$$y(\tau) = Y(\tau)[I - Y(T)]^{-1} \int\limits_0^T Y(T)Y^{-1}(s)F(s)ds + \int\limits_0^{\tau} Y(\tau)Y^{-1}(s)F(s)ds,$$

где $Y(\tau)$ — матрицант системы (1.17), и неравенство (1.21), для решения $y(\tau,\mu)$ системы (1.26) нетрудно получить оценку

$$\|y(\tau,\mu)\| \leqslant \frac{c_0}{\mu} \cdot \max_s \|F(s,\mu)\|, \quad c_0 = \text{const}, \quad \mu \in (0,\mu_1).$$

Отсюда следует, что оператор

$$\left(\frac{d}{d\tau} \circ I - \mu\bar{U}(\tau,\mu)\right), \quad \mu \in (0,\mu_1),$$

имеет ограниченный обратный в пространстве непрерывных 2π-периодических вектор-функций, при этом справедливо неравенство

$$\left\| \left(\frac{d}{d\tau} \circ I - \mu \bar{U}(\tau, \mu) \right)^{-1} \right\| \leqslant \frac{c_0}{\mu}. \tag{1.27}$$

Задача о нахождении 2π-периодических решений системы (1.26) эквивалентна построению решений краевой задачи

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{d\tau} = \mu \bar{U}(\tau, \mu) y + F(\tau, \mu), \quad 0 < \tau < 2\pi, \\ y|_{\tau=0} = y|_{\tau=2\pi}. \end{cases}$$

А решение этой задачи при $\mu \in (0, \mu_1)$ представимо в виде

$$y(\tau, \mu) = \int_0^{2\pi} G(\tau, s, \mu) F(s, \mu) ds,$$

где $G(\tau, s, \mu)$ — матрица Грина. Таким образом, задача о нахождении 2π-периодических решений системы (1.12) эквивалентна построению решений следующего интегрального уравнения:

$$u(\tau, \mu) = \mu \int_0^{2\pi} G(\tau, s, \mu) [\mu g(s, u(s, \mu), \mu)] ds, \tag{1.28}$$

где

$$g(\tau, u, \mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\mu^3} \dfrac{f''(\tau) \sin \alpha}{l} \cos[(1 + \mu a(\tau, \mu)) u_1] \end{pmatrix}. \tag{1.29}$$

Уравнение (1.28) можно переписать в виде

$$u(\tau, \mu) = \mu \left(\frac{d}{d\tau} \circ I - \mu \bar{U}(\tau, \mu) \right)^{-1} \circ [\mu g(\tau, u(\tau, \mu), \mu)], \tag{1.30}$$

или

$$u = A_\mu(u). \tag{1.31}$$

В силу оценки (1.27) оператор

$$\mu \left(\frac{d}{d\tau} \circ I - \mu \bar{U}(\tau, \mu) \right)^{-1}, \quad \mu \in (0, \mu_1)$$

является ограниченным в пространстве непрерывных 2π-периодических вектор-функций, а так как вектор-функция $g = g(\tau, u, \mu)$ является 2π-периодической по τ и достаточно гладкой по u, то можно доказать следующую лемму.

Лемма 1.3. *Существуют $\mu_{lin} \in (0, \mu_1]$ такое, что при $\mu \in (0, \mu_{lin})$ оператор A_μ удовлетворяет принципу сжимающих отображений в пространстве непрерывных 2π-периодических вектор-функций $C_{2\pi}$.*

Доказательство. Для произвольных u^1, u^2 из $C_{2\pi}$ и $\mu \in (0, \mu_1)$ имеем

$$\begin{aligned} \|A_\mu(u^1) - A_\mu(u^2)\| &= \|\mu^2 \left(\frac{d}{d\tau} \circ I - \mu \bar{U}(\tau, \mu) \right)^{-1} \left(g(\tau, u^1, \mu) - g(\tau, u^2, \mu) \right) \| \leqslant \\ &\leqslant \|\mu \left(\frac{d}{d\tau} \circ I - \mu \bar{U}(\tau, \mu) \right)^{-1} \| \cdot \|\mu \left(g(\tau, u^1, \mu) - g(\tau, u^2, \mu) \right) \| \leqslant \\ &\leqslant c_0 \mu L_g \cdot \|u^1 - u^2\|, \end{aligned}$$

где L_g — константа Липшица вектор-функции $g(\tau, u, \mu)$ по второму аргументу и

$$\|u\| = \max_{s \in [0, 2\pi]} \|u(s)\|.$$

Для константы Липшица справедлива оценка

$$L_g \leqslant \sup_{\substack{u\in C_{2\pi},\ \tau\in[0,2\pi],\\ \mu\in(0,\mu_1)}} \|g_u(\tau,u,\mu)\|,$$

где

$$g_u(\tau,u,\mu)=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ -(1+\mu a(\tau,\mu))\dfrac{1}{\mu^3}\dfrac{f''(\tau)\sin\alpha}{l}\sin[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1] & 0\end{pmatrix}.$$

С учетом условий (1.3), (1.4) и соотношений (1.15) получаем

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{u\in C_{2\pi},\ \tau\in[0,2\pi],\\ \mu\in(0,\mu_1)}} \|g_u(\tau,u,\mu)\| &= \sup_{\substack{u\in C_{2\pi},\ \tau\in[0,2\pi],\\ \mu\in(0,\mu_1)}} \left|(1+\mu a(\tau,\mu))\frac{1}{\mu^3}\frac{f''(\tau)\sin\alpha}{l}\sin[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1(\tau)]\right| \leqslant\\ &\leqslant \sup_{\substack{u\in C_{2\pi},\ \tau\in[0,2\pi],\\ \mu\in(0,\mu_1)}} \left|(1+\mu a(\tau,\mu))\frac{c}{\mu}\frac{f''(\tau)}{l}\sin[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1(\tau)]\right| \leqslant\\ &\leqslant (1+\mu_1\Delta_1)c\Delta_2,\end{aligned}$$

где Δ_1, Δ_2 — константы.

Положим

$$\mu_{lin}=\min\left\{\mu_1, \frac{1}{2c_0c\Delta_2\cdot(1+\mu_1\Delta_1)}\right\}. \tag{1.32}$$

Тогда в силу сказанного получаем, что при $\mu\in(0,\mu_{lin})$ оператор A_μ является сжимающим в пространстве $C_{2\pi}$. Лемма доказана. □

В силу леммы 1.3 по принципу сжимающих отображений уравнение (1.30) имеет единственное 2π-периодическое решение $u(\tau,\mu)$ при любом $\mu\in(0,\mu_{lin})$. Следовательно, и система (1.7) имеет единственное 2π-периодическое решение $\tilde\varphi_{lin}(\tau,\mu)$. Полагаем $\omega_0=\dfrac{1}{\mu_{lin}}$.

Покажем теперь оценку (1.8). Следуя рассуждениям из доказательства принципа сжимающих отображений, зафиксируем некоторый элемент $u^1\in C_{2\pi}$ и рассмотрим последовательность $\{u^k\}_{k=1}^\infty$:

$$u^1,\quad u^2=A_\mu(u^1),\quad u^3=A_\mu(u^2),\dots$$

Как известно,

$$u^k\to u,\quad k\to\infty,$$

где u есть решение уравнения (1.31). Рассмотрим теперь следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}&\|u^2-u^1\|=\|A_\mu(u^1)-u^1\|=d,\\ &\|u^3-u^2\|=\|A_\mu(u^2)-A_\mu(u^1)\|\leqslant\frac12\|u^2-u^1\|=\frac d2,\\ &\dots\\ &\|u^k-u^{k-1}\|=\|A_\mu(u^{k-1})-A_\mu(u^{k-2})\|\leqslant\frac12\|u^{k-1}-u^{k-2}\|=\frac{d}{2^{k-2}}.\end{aligned}$$

Отсюда вытекает

$$\begin{aligned}\|u^{k+l}-u^k\|&\leqslant\|u^{k+l}-u^{k+l-1}\|+\|u^{k+l-1}-u^{k+l-2}\|+\dots+\|u^{k+1}-u^k\|\leqslant\\ &\leqslant d\left(\frac{1}{2^{k+l-2}}+\frac{1}{2^{k+l-3}}+\dots+\frac{1}{2^{k-1}}\right)\leqslant\frac{d}{2^{k-1}}\left(1+\frac12+\dots\right)\leqslant\frac{d}{2^{k-2}}.\end{aligned}$$

Поэтому переходя к пределу при $l\to\infty$, получим оценку

$$\|u-u^k\|\leqslant\frac{d}{2^{k-2}}.$$

В частности,

$$\|u-u^1\|\leqslant 2d.$$

Возьмем $u^1 = 0$. В силу (1.27), (1.29), (1.30) получаем

$$\|u\| \leqslant 2d = 2\|A_\mu(0)\| \leqslant c_1\mu.$$

Отсюда в силу (1.9) вытекает оценка (1.8):

$$\|\tilde{\varphi}_{lin}\| \leqslant \|Q\| \cdot \|u\| = \|Q\|c_1\mu = c_{lin}\mu.$$

Учитывая определения (1.10), (1.15), константу c_{lin} в оценке (1.8) можно указать явно.

Теорема 1.1 доказана.

Рассмотрим теперь исходную нелинейную систему (1.6). Для нее справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия* (1.2)–(1.4), $\omega_0 = \dfrac{1}{\mu_{lin}}$, *где* μ_{lin} *определено в* (1.32). *Тогда существует* $\omega_1 \geqslant \omega_0$ *такое, что система* (1.6) *имеет единственное* 2π*-периодическое решение*

$$\overline{\varphi}(\tau,\mu) = \begin{pmatrix} \overline{\varphi}_1(\tau,\mu) \\ \overline{\varphi}_2(\tau,\mu) \end{pmatrix}$$

при $\mu = \dfrac{1}{\omega} \in \left(0, \dfrac{1}{\omega_1}\right)$, *и выполнена оценка*

$$\|\overline{\varphi}(\tau,\mu)\| \leqslant \bar{c}\mu, \quad \bar{c} = \text{const}\,. \tag{1.33}$$

Доказательство. Используя тривиальное равенство $\sin\tilde{\varphi}_1 = \sin\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_1$, после замены (1.9), (1.10), (1.15) перепишем систему (1.6) в следующем виде:

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mu\bar{U}(\tau,\mu)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\mu}\dfrac{f''(\tau)\sin\alpha}{l}\cos[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1] \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\mu\dfrac{g}{l} + \dfrac{1}{\mu}\dfrac{f''(\tau)\cos\alpha}{l}\right)(\sin[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1] - (1+\mu a(\tau,\mu))u_1) \end{pmatrix}. \tag{1.34}$$

Аналогично доказательству теоремы 1.1 задача о нахождении 2π-периодических решений системы (1.34) эквивалентна построению решений уравнения

$$u(\tau,\mu) = \mu\left(\frac{d}{d\tau}\circ I - \mu\bar{U}(\tau,\mu)\right)^{-1} \circ F(\tau, u(\tau,\mu),\mu), \tag{1.35}$$

где

$$F(\tau,u,\mu) = \mu g(\tau,u(\tau,\mu),\mu) + \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\dfrac{g}{l} + \dfrac{1}{\mu^2}\dfrac{f''(\tau)\cos\alpha}{l}\right)(\sin[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1] - (1+\mu a(\tau,\mu))u_1) \end{pmatrix},$$

или в операторном виде

$$u = \mathcal{A}_\mu(u).$$

Покажем, что данный оператор $\mathcal{A}_\mu$ удовлетворяет принципу сжимающих отображений в шаре достаточно малого радиуса пространства $C_{2\pi}$.

С учетом определения вектор-функции F для произвольных u^1, $u^2 \in C_{2\pi}$ имеем

$$\|F(\tau,u^1,\mu) - F(\tau,u^2,\mu)\| \leqslant \|\mu(g(\tau,u^1(\tau,\mu),\mu) - g(\tau,u^2(\tau,\mu),\mu))\| +$$
$$+ \left|\left(\frac{g}{l} + \frac{1}{\mu^2}\frac{f''(\tau)\cos\alpha}{l}\right)(\sin w_1^1(\tau,\mu) - w_1^1(\tau,\mu) - \sin w_1^2(\tau,\mu) + w_1^2(\tau,\mu))\right|,$$

где

$$w^i(\tau,\mu) = (1+\mu a(\tau,\mu))u^i(\tau,\mu), \quad i = 1,2.$$

Пусть u^1, u^2 принадлежат шару

$$B_\mu(0) = \{u \in C_{2\pi} : \|u\| \leqslant \tilde{c}\mu\}\,.$$

Тогда, учитывая представление (опускаем для краткости аргументы)

$$\sin w_1^1 - w_1^1 - \sin w_1^2 + w_1^2 = -(w_1^1 - w_1^2)\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \cos(\lambda''\lambda'(w_1^2+\lambda(w_1^1-w_1^2)))\lambda'[w_1^2+\lambda(w_1^1-w_1^2)]^2 d\lambda'' d\lambda' d\lambda,$$

получим

$$\begin{aligned}|\sin w_1^1 - w_1^1 - \sin w_1^2 + w_1^2| \leqslant |w_1^2+\lambda(w_1^1-w_1^2)|^2|w_1^1-w_1^2| \leqslant \\ \leqslant (4|w_1^2|^2 + 4|w_1^1 w_1^2| + |w_1^1|^2)|w_1^1 - w_1^2| \leqslant \\ \leqslant |1+\mu a(\tau,\mu)|^3(4|u_1^2|^2 + 4|u_1^1 u_1^2| + |u_1^1|^2)|u_1^1-u_1^2| \leqslant \\ \leqslant |1+\mu a(\tau,\mu)|^3(4\|u^2\|^2 + 4\|u^1\|\|u^2\| + \|u^1\|^2)\|u^1-u^2\| \leqslant |1+\mu a(\tau,\mu)|^3 9\tilde{c}^2\mu^2\|u^1-u^2\|.\end{aligned}$$

Выберем $\mu_2' \in (0,\mu_1]$ таким, чтобы

$$\max_{\tau\in[0,2\pi]}|1+\mu a(\tau,\mu)|^3 \leqslant 2, \quad \mu \in (0,\mu_2').$$

Тогда

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{g}{l}+\frac{1}{\mu^2}\frac{f''(\tau)\cos\alpha}{l}\right)(\sin[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1^1] - (1+\mu a(\tau,\mu))u_1^1 - \right.\\ \left. - \sin[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1^2] + (1+\mu a(\tau,\mu))u_1^2)\right| \leqslant \\ \leqslant 18\tilde{c}^2\mu \max_{\tau\in[0,\mathcal{T}]}\left|\mu\frac{g}{l}+\frac{1}{\mu}\frac{f''(\tau)\cos\alpha}{l}\right|\|u^1-u^2\|.\end{aligned}$$

Для всех $\mu \in (0,\mu_2')$ справедлива оценка

$$\max_{\tau\in[0,2\pi]}\left|\mu\frac{g}{l}+\frac{1}{\mu}\frac{f''(\tau)\cos\alpha}{l}\right| \leqslant \mu_2'\frac{g}{l} + \max_{\tau\in[0,2\pi]}|\frac{1}{\mu}\frac{f''(\tau)\cos\alpha}{l}| \leqslant \mu_2'\frac{g}{l}+\Delta_2.$$

А для оператора $\mathcal{A}_\mu$ в нуле имеем

$$\|\mathcal{A}_\mu(0)\| \leqslant \mu c_0 c\Delta_2.$$

Теперь выберем константу $\tilde{c}$ так, чтобы $2c_0c\Delta_2 \leqslant \tilde{c}$, тогда

$$\|\mathcal{A}_\mu(0)\| \leqslant \mu\frac{\tilde{c}}{2},$$

и положим

$$\mu_2 = \min\left\{\mu_2', \frac{1}{4c_0c\Delta_2\cdot(1+\mu_1\Delta_1)}, \frac{1}{72c_0\tilde{c}^2(\mu_2'\frac{g}{l}+\Delta_2)}\right\}. \tag{1.36}$$

Тогда, очевидно, при $\mu\in(0,\mu_2]$ имеем

$$\|\mathcal{A}_\mu(u^1)-\mathcal{A}_\mu(u^2)\| \leqslant \frac{1}{2}\|u^1-u^2\|,$$

и для любого u из шара $B_\mu(0)$ выполняется неравенство

$$\|\mathcal{A}_\mu(u)\| \leqslant \|\mathcal{A}_\mu(u)-\mathcal{A}_\mu(0)\| + \|\mathcal{A}_\mu(0)\| \leqslant \frac{1}{2}\|u\| + \frac{1}{2}\tilde{c}\mu \leqslant \tilde{c}\mu.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{A}_\mu$ является сжимающим в шаре $B_\mu(0)$, и по принципу сжимающих отображений существует единственное 2π-периодическое решение $\overline{u}(\tau,\mu)$ уравнения (1.35) при $\mu\in(0,\mu_2)$. Следовательно, существует единственное 2π-периодическое решение $\overline{\varphi}(\tau,\mu)$ исходной нелинейной системы (1.6). Полагаем $\omega_1 = \dfrac{1}{\mu_2}$.

Доказательство оценки (1.33) проводится по аналогии с доказательством оценки (1.8) из теоремы 1.1. Теорема 1.2 доказана. □

2. Устойчивость периодического решения

Этот раздел посвящен исследованию устойчивости 2π-периодического решения $\overline{\varphi}(\tau,\mu)$ системы (1.6), существование которого при $\mu \in (0,\mu_2)$ доказано в предыдущем разделе.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* (1.2)–(1.4), $\omega_1 = \dfrac{1}{\mu_2}$, *где* μ_2 *определено в* (1.36). *Тогда существует* $\omega_{st} \geqslant \omega_1$ *такое, что* 2π*-периодическое решение системы* (1.6)

$$\overline{\varphi}(\tau,\mu) = \begin{pmatrix} \overline{\varphi}_1(\tau,\mu) \\ \overline{\varphi}_2(\tau,\mu) \end{pmatrix}$$

при $\mu = \dfrac{1}{\omega} \in \left(0, \dfrac{1}{\omega_{st}}\right)$ *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Воспользуемся стандартной техникой: сделав замену

$$z(\tau,\mu) = \tilde{\varphi}(\tau,\mu) - \overline{\varphi}(\tau,\mu), \tag{2.1}$$

перейдем от исследования устойчивости решения $\overline{\varphi}(\tau,\mu)$ системы (1.6) к исследованию устойчивости *нулевого* решения системы

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\varepsilon\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ v_1(\tau,\mu)(\sin(z_1+\overline{\varphi}_1) - \sin\overline{\varphi}_1) - v_2(\tau,\mu)(\cos(z_1+\overline{\varphi}_1) - \cos\overline{\varphi}_1) \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где

$$v_1(\tau,\mu) = \frac{\mu^2 g}{l} + \frac{f''(\tau)}{l}\cos\alpha, \quad v_2(\tau,\mu) = -\frac{f''(\tau)}{l}\sin\alpha. \tag{2.3}$$

В дальнейшем мы будем использовать следующие формулы:

$$\sin(z_1+\overline{\varphi}_1) - \sin\overline{\varphi}_1 = z_1 - \overline{\varphi}_1^2 I_1 z_1 - \tilde{I}_1 z_1^2, \tag{2.4}$$

где

$$I_1 = \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \lambda' \cos(\lambda''\lambda'(\lambda z_1 + \overline{\varphi}_1))d\lambda d\lambda' d\lambda'', \tag{2.5}$$

$$\tilde{I}_1 = \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \lambda'(\lambda^2 z_1 + 2\lambda\overline{\varphi}_1)\cos(\lambda''\lambda'(\lambda z_1 + \overline{\varphi}_1))d\lambda d\lambda' d\lambda'', \tag{2.6}$$

$$\cos(z_1+\overline{\varphi}_1) - \cos\overline{\varphi}_1 = -\overline{\varphi}_1 I_2 z_1 - \tilde{I}_2 z_1^2, \tag{2.7}$$

где

$$I_2 = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \cos(\lambda'(\lambda z_1 + \overline{\varphi}_1))d\lambda d\lambda', \tag{2.8}$$

$$\tilde{I}_2 = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \lambda\cos(\lambda'(\lambda z_1 + \overline{\varphi}_1))d\lambda d\lambda'. \tag{2.9}$$

Формулы (2.4), (2.7) позволяют переписать систему (2.2) в виде

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v_1(\tau,\mu)(1-\overline{\varphi}_1^2 I_1) + v_2(\tau,\mu)\overline{\varphi}_1 I_2 & -\varepsilon\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ (-v_1(\tau,\mu)\tilde{I}_1 + v_2(\tau,\mu)\tilde{I}_2)z_1^2 \end{pmatrix} = A^z(\tau,\mu)z + F^z(\tau,z,\mu). \tag{2.10}$$

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v_1(\tau,\mu)(1-\overline{\varphi}_1^2 I_1) + v_2(\tau,\mu)\overline{\varphi}_1 I_2 & -\varepsilon\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Сделав замену
$$z = Qu,$$
где матрица $Q = Q(\tau,\mu)$ определяется соотношениями (1.10), (1.15), и учитывая обозначения (2.3), получим следующую систему для вектор-функции $u = u(\tau,\mu)$:
$$\frac{du}{d\tau} = \mu(U_1(\mu) + U_2(\tau,\mu) + \mu\tilde{U}_3(\tau,\mu))u. \tag{2.12}$$
Здесь матрицы $U_1(\mu)$, $U_2(\tau,\mu)$ определяются формулами (1.13), (1.4), а матрица $\tilde{U}_3(\tau,\mu)$ имеет вид
$$\tilde{U}_3(\tau,\mu) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\mu a^2(\tau,\mu)}{1+\mu a(\tau,\mu)} \\ u_{21}^{(3)} & \dfrac{-\mu a^2(\tau,\mu)b(\tau,\mu)}{1+\mu a(\tau,\mu)} \end{pmatrix},$$
где
$$u_{21}^{(3)} = \frac{1+\mu a(\tau,\mu)}{\mu^2}\left(\overline{\varphi}_1^2 I_1\left[\frac{-\mu g}{l} - \frac{1}{\mu}\frac{f''(\tau)\cos\alpha}{l}\right] - \overline{\varphi}_1 I_2 \frac{1}{\mu}\frac{f''(\tau)}{l}\sin\alpha\right).$$
В силу условий (1.3), (1.4) на коэффициенты функции f и малость угла α, оценки (1.33) для решения $\overline{\varphi}(\tau,\mu)$, а также определений (2.5), (2.8), все элементы матрицы $\tilde{U}_3(\tau,\mu)$ являются ограниченными при $\mu \in (0,\mu_2)$ и не имеют особенностей при $\mu \to 0$.

Напомним, что значение μ_2 было выбрано так, что при $\mu \in (0,\mu_2)$ нулевое решение системы
$$\frac{du}{d\tau} = \mu(U_1(\mu) + U_2(\tau,\mu))u,$$
было асимптотически устойчиво. А поскольку перед матрицей $\tilde{U}_3(\tau,\mu)$ в (2.12) находится коэффициент μ, то из результатов [6] вытекает, что существует $\mu_{st} \in (0,\mu_2]$ такое, что при $\mu \in (0,\mu_{st})$ нулевое решение системы (2.12) асимптотически устойчиво. Как следствие, нулевое решение линейной системы (2.11) также асимптотически устойчиво при $\mu \in (0,\mu_{st})$. Полагаем $\omega_{st} = \dfrac{1}{\mu_{st}}$.

Рассмотрим теперь систему (2.10). В силу определений (2.6), (2.9) имеем
$$\max_{\substack{\tau\in[0,2\pi],\\ \mu\in[0,\mu_{st}]}} \|F^z(\tau,z,\mu)\| \leqslant p\|z\|^2, \quad p = \mathrm{const}.$$
Обозначим через $H(\tau,\mu)$ решение краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова
$$\begin{cases} \dfrac{dH}{d\tau} + HA^z(\tau,\mu) + (A^z(\tau,\mu))^* H = -C(\tau), \quad 0 < \tau < 2\pi, \\ H(0,\mu) = H(2\pi,\mu) > 0, \end{cases}$$
где $C(\tau)$ — эрмитова положительно определенная матрица с непрерывными элементами на $[0,2\pi]$. Эрмитово решение $H(\tau,\mu)$ существует, поскольку нулевое решение системы (2.11) асимптотически устойчиво (см. [6]).

Учитывая условия на $H(\tau,\mu)$ и $F^z(\tau,z,\mu)$, получаем
$$\mathrm{Re}\,\langle H(\tau,\mu)F^z(\tau,z,\mu),z\rangle \leqslant \|H(\tau,\mu)\|\|F^z(\tau,z,\mu)\|\|z\| \leqslant p\|H(\tau,\mu)\|\frac{\langle H(\tau,\mu)z,z\rangle^{\frac{3}{2}}}{(h_1(\tau,\mu))^{\frac{3}{2}}}, \quad \tau > 0,$$
где $h_1(\tau,\mu)$ — минимальное собственное число матрицы $H(\tau,\mu)$. То есть система (2.10) относится к классу систем вида
$$\frac{dx}{d\tau} = \mathcal{A}(\tau)x + \mathcal{F}(\tau,x), \quad \tau > 0,$$
где $\mathcal{A}(\tau)$ — матрица с непрерывными 2π-периодическими элементами, $\mathcal{F}(\tau,x)$ — вещественнозначная гладкая вектор-функция такая, что $\mathcal{F}(\tau,0) = 0$, и удовлетворяющая условию вида
$$\mathrm{Re}\,\langle H(\tau)\mathcal{F}(\tau,x),x\rangle \leqslant q\,\langle H(\tau)x,x\rangle^{1+\gamma}, \quad \tau \geqslant 0,\ q \geqslant 0,\ \gamma > 0.$$
Тогда, как следует из результатов [7], нулевое решение системы (2.10) асимптотически устойчиво.

Отсюда вытекает асимптотическая устойчивость нулевого решения приведенной системы (2.2) при $\mu \in (0,\mu_{st})$. Следовательно, в силу (2.1) 2π-периодическое решение $\overline{\varphi}(\tau,\mu)$ исходной системы (1.6) также асимптотически устойчиво. Теорема 2.1 доказана. $\square$

Из теорем 1.2, 2.1 при соответствующих оценках на параметр $\mu = \dfrac{1}{\omega}$, коэффициенты функции $f(t)$ и угол α вытекает следующая теорема об устойчивости движения перевернутого маятника, точка подвеса которого совершает высокочастотные колебания, определяемые функцией (0.1), вдоль прямой, составляющей малый угол α с вертикалью.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* (1.2)–(1.4). *Обозначим* $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. *Тогда при* $\omega > \omega_{st}$ *уравнение* (1.1) *имеет единственное* T*-периодическое решение* $\Phi(t)$, *и оно является асимптотически устойчивым.*

Отметим, что при $f(t) = a \sin t$ условие (1.2) имеет вид

$$\sqrt{2gl} < \omega a.$$

Как известно, при $\alpha = 0$ это неравенство является условием устойчивости верхнего положения равновесия маятника при высокочастотных гармонических колебаниях малой амплитуды $\left(\dfrac{a}{l} \ll 1\right)$ точки подвеса. Строгое доказательство этого факта было установлено Н. Н. Боголюбовым [2].

Заключение. В работе исследуется движение перевернутого маятника, точка подвеса которого совершает высокочастотные колебания вдоль прямой, составляющей малый угол с вертикалью. Используя результаты из [6, 7], а также принцип сжимающих отображений, мы доказали, что при выполнении определенных условий на частоту колебаний и на функцию, описывающую колебания точки подвеса маятника, возникает периодическое движение маятника, и оно является асимптотически устойчивым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. — Киев: Изд-во АН УССР, 1945.
2. *Боголюбов Н. Н.* Теория возмущений в нелинейной механике// Сб. тр. Ин-та строительной механики АН УССР. — 1950. — *14*. — С. 9–34.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы теории нелинейных колебаний. — М.: Физматлит, 1963.
4. *Бурд В. Ш.* Метод усреднения на бесконечном промежутке и некоторые задачи теории колебаний. — Ярославль: ЯрГУ, 2013.
5. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
6. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами// Сиб. мат. ж. — 2001. — *42*, № 2. — С. 332–348.
7. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений квазилинейных периодических систем дифференциальных уравнений// Сиб. мат. ж. — 2004. — *45*, № 6. — С. 1271–1284.
8. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П.* Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики. — Киев: Наукова Думка, 1983.

Г. В. Демиденко
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
E-mail: `demidenk@math.nsc.ru`

А. В. Дулепова
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
E-mail: `nasty731@gmail.com`

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-535-548 UDC 517.925.44

On Periodic Solutions of One Second-Order Differential Equation

© 2021 **G. V. Demidenko, A. V. Dulepova**

Abstract. In this paper, we investigate the movement of an inverted pendulum, the suspension point of which performs high-frequency oscillations along a line making a small angle with the vertical. We prove that under certain conditions on the function describing the oscillations of the suspension point of the pendulum, a periodic motion of the pendulum arises, and it is asymptotically stable.

REFERENCES

1. N. N. Bogolyubov, *O nekotorykh statisticheskikh metodakh v matematicheskoy fizike* [On some statistical methods in mathematical physics], AN USSR, Kiev, 1945 (in Russian).
2. N. N. Bogolyubov, “Teoriya vozmushcheniy v nelineynoy mekhanike” [Teoriya vozmushcheniy v nelineynoy mekhanike], *Sb. tr. In-ta stroitel'noy mekhaniki AN USSR* [Proc. Inst. Struct. Mech. Acad. Sci. Ukr. SSR], 1950, **14**, 9–34 (in Russian).
3. N. N. Bogolyubov and Yu. A. Mitropol'skiy, *Asimptoticheskie metody teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic Methods of the Theory of Nonlinear Oscillations], Fizmatlit, Moscow, 1963 (in Russian).
4. V. Sh. Burd, *Metod usredneniya na beskonechnom promezhutke i nekotorye zadachi teorii kolebaniy* [The method of averaging over an infinite interval and some problems in the theory of oscillations], YarGU, Yaroslavl', 2013 (in Russian).
5. Yu. L. Daletskii and M. G. Kreyn, *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Stability of Solutions of Differential Equations in a Banach Space], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
6. G. V. Demidenko and I. I. Matveeva, “Ob ustoychivosti resheniy lineynykh sistem s periodicheskimi koeffitsientami” [On the stability of solutions to linear systems with periodic coefficients], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 2001, **42**, No. 2, 332–348 (in Russian).
7. G. V. Demidenko and I. I. Matveeva, “Ob ustoychivosti resheniy kvazilineynykh periodicheskikh sistem differentsial'nykh uravneniy” [On the stability of solutions of quasilinear periodic systems of differential equations], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 2004, **45**, No. 6, 1271–1284 (in Russian).
8. Yu. A. Mitropol'skii and G. P. Khoma, *Matematicheskoe obosnovanie asimptoticheskikh metodov nelineynoy mekhaniki* [Mathematical Justification of Asymptotic Methods of Nonlinear Mechanics], Naukova Dumka, Kiev, 1983 (in Russian).

G. V. Demidenko
Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia
E-mail: demidenk@math.nsc.ru

A. V. Dulepova
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
E-mail: nasty731@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 3 (2021). С. 549–563
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-549-563 УДК 517.97

О РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

© 2021 г. **В. Г. ЗАДОРОЖНИЙ, Л. Ю. КАБАНЦОВА**

Аннотация. Получены явные формулы для решения системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Находится решение системы с начальными условиями. Приведены примеры расчетов, показывающие истинность утверждений. Более сложной для решения оказалась задача нахождения математического ожидания решения системы дифференциальных уравнений в частных производных, коэффициенты которых являются случайными процессами. Рассмотрен пример с гауссовыми коэффициентами.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Решения скалярных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка могут быть записаны в квадратурах [1, 4, 8–10]. Содержательная теория и некоторые применения таких уравнений со многими переменными рассмотрены благодаря тесной связи с системами обыкновенных дифференциальных уравнений в [8]. Большой вклад в развитие теории дифференциальных уравнений первого порядка внес С. Н. Кружков [7]. Системы дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных изучены в меньшей степени.

Пусть $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, Y — вещественное n-мерное пространство. Мы рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a_1(t)A\frac{\partial y}{\partial z} + a_2(t)\frac{\partial y}{\partial x} + a_3(t)y + b(t,z,x). \tag{1.1}$$

Здесь a_1, a_2, a_3 — заданные функции, $y : T\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to Y$ — искомая функция, A — линейный оператор, действующий в пространстве Y, а $b : T\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to Y$ — заданное отображение.

Базис в пространстве Y может быть выбран таким образом, чтобы матрица, соответствующая оператору A, имела верхний треугольный вид. При этом систему уравнений можно последовательно интегрировать, решая скалярные линейные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка. Этим способом можно находить решение и линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянным оператором

$$y' = Ay, \tag{1.2}$$

где $y : T \to Y$. Однако во многих случаях (см. [6, с. 76]) удобнее использовать фундаментальную операторную функцию

$$\Phi(t) = \exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}.$$

Решение системы уравнений (1.2) с начальным условием $y(t_0) = y_0$ записывается в виде $y(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)y_0$.

Оказывается, решение системы дифференциальных уравнений (1.1) можно записать аналогичным образом.

Более сложной является задача нахождения математического ожидания решения линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, коэффициенты которой являются случайными процессами. Эта задача сводится к детерминированной системе дифференциальных уравнений с обычными и вариационными производными, для которой удается получить явную формулу решения и выписать математическое ожидание решения с использованием характеристического функционала случайных коэффициентов.

2. Операторные функции

Пусть E обозначает оператор тождественного преобразования в пространстве Y. Рассмотрим операторную функцию

$$Y_k(t,z) = d_k \left(zE + \int_{t_0}^{t} a(s)ds A \right)^k, \tag{2.1}$$

где $z \in \mathbb{C}$, a — заданная функция на отрезке $[t_0, t_1]$.

Теорема 2.1. *Пусть a — непрерывная функция на $[t_0,t_1]$, тогда существуют производные $\dfrac{\partial Y_k}{\partial t}$, $\dfrac{\partial Y_k}{\partial z}$ и Y_k является решением уравнения*

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = a(t)A\frac{\partial Y}{\partial z}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть $\triangle z$ — приращение переменной z. По формуле бинома Ньютона [2, с. 163]

$$\left(zE + \triangle zE + A\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \right)^k = \sum_{m=0}^{k} C_k^m \left(zE + A\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \right)^{k-m} \triangle z^m E^m,$$

где $C_k^m = \dfrac{k!}{m!(k-m)!}$.

При этом

$$\frac{1}{\triangle z}\left(Y_k(t,z+\triangle z) - Y_k(t,z)\right) = \frac{1}{\triangle z}\left[\sum_{m=0}^{k} C_k^m \left(zE + A\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \right)^{k-m} \triangle z^m E^m - \left(zE + A\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \right)^k \right] =$$

$$= \frac{1}{\triangle z}\left[k\left(zE + A\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \right)^{k-1} \triangle zE + \sum_{m=2}^{k} C_k^m \left(zE + A\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \right)^{k-m} \triangle z^m E^m \right].$$

Переходя к пределу при $\triangle z \to 0$, получаем

$$\frac{\partial Y_k(t,z)}{\partial z} = kd_k \left(zE + A\int_{t_0}^{t} a(s)ds \right)^{k-1}. \tag{2.3}$$

Пусть теперь $\triangle t$ — приращение переменной t. Воспользовавшись теоремой о среднем значении [5, с. 353] и формулой бинома Ньютона, находим

$$A\int_{t_0}^{t+\triangle t} a(s)\,ds = A\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds + A\int_{t}^{t+\triangle t} a(s)\,ds = A\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds + a(t)A\triangle t + o(\triangle t),$$

здесь $o(\triangle t)$ — бесконечно малая высшего порядка относительно $\triangle t$.

$$\frac{1}{\triangle t}\left(Y_k(t+\triangle t,z) - Y_k(t,z)\right) = \frac{1}{\triangle t}\left[\left(zE+A\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds + a(t)A\triangle t + o(\triangle t)\right)^k - \left(zE+A\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)^k\right] =$$

$$= \frac{1}{\triangle t}k\left(zE + A\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)^{k-1}(a(t)A\triangle t+o(\triangle t)) + \frac{1}{\triangle t}\sum_{m=2}^{k} C_k^m \left(zE + A\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)^{k-m}(a(t)A\triangle t+o(\triangle t))^m.$$

Переходя к пределу при $\triangle t \to 0$, получаем

$$\frac{\partial Y_k(t,z)}{\partial t} = kd_k a(t)A \left(zE + A\int_{t_0}^{t} a(s)ds \right)^{k-1}. \tag{2.4}$$

Подстановка (2.3), (2.4) в уравнение (2.2) показывает, что (2.1) является решением (2.2). □

Рассмотрим операторную функцию

$$Y(t,z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(zE + \int_{t_0}^{t} a(s)dsA \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(t,z). \tag{2.5}$$

Подставим (2.5) в уравнение (2.2), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial Y_k(t,z)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} a(t)A\frac{\partial Y_k(t,z)}{\partial z}. \tag{2.6}$$

Поскольку в (2.6) записано равенство степенных рядов по переменной z и Y_k удовлетворяет равенствам (2.2), то $Y(t,z)$ является решением уравнения (2.2).

Таким образом, если функция $y(z)$ дифференцируема по $z \in \mathbb{C}$ и функция $a(t)$ непрерывна на $[t_0,t_1]$, то

$$Y(t,z) = y\left(zE + A\int_{t_0}^{t} a(s)ds \right) \tag{2.7}$$

является решением уравнения (2.2), причем выполняется начальное условие $Y(t_0,z) = y(zE) = y(z)E$. Отметим, что формула (2.7) для решения линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (2.2) нам ранее не встречалась.

3. Система дифференциальных уравнений со специальными начальными условиями

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a_1(t)A\frac{\partial y}{\partial z} + a_2(t)\frac{\partial y}{\partial x} + a_3(t)y \tag{3.1}$$

с начальным условием

$$y(t_0, z, x) = y_0(z)y_1(x)\xi. \tag{3.2}$$

Здесь $t_0 \in \mathbb{R}$ задано, $y_0 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, y_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ — известные функции, $\xi \in Y$.

Введем в рассмотрение операторную функцию

$$\Phi(t, z, x) = y_0\left(zE + A\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds\right) y_1\left(x + \int\limits_{t_0}^{t} a_2(s)\,ds\right). \tag{3.3}$$

Теорема 3.1. *Пусть a_1, a_2, a_3 — непрерывные функции на $[t_0, t_1]$, $y_0(z), y_1(x)$ — дифференцируемые функции, $\xi \in Y$, тогда*

$$y(t, z, x) = \Phi(t, z, x)\exp(\int\limits_{t_0}^{t} a_3(s)\,ds)\xi \tag{3.4}$$

является решением задачи (3.1), (3.2).

Доказательство. Проверим выполнение начального условия (3.2):

$$y(t_0, z, x) = \Phi(t_0, z, x)\xi = y_0(zE)y_1(x)\xi = y_0(z)Ey_1(x)\xi = y_0(z)y_1(x)\xi.$$

Воспользовавшись тем, что $y_0\left(zE + A\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds\right)$ дифференцируемо и удовлетворяет уравнению (2.2), находим

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left[a_1(t)A\frac{\partial y_0\left(zE + A\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds\right)}{\partial z} y_1\left(x + \int\limits_{t_0}^{t} a_2(s)\,ds\right)\exp(\int\limits_{t_0}^{t} a_3(s)\,ds) + \right.$$

$$+ y_0\left(zE + A\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds\right) a_2(t)\frac{\partial y_1\left(x + \int\limits_{t_0}^{t} a_2(s)\,ds\right)}{\partial x}\exp(\int\limits_{t_0}^{t} a_3(s)\,ds) +$$

$$\left. + y_0\left(zE + A\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds\right) y_1\left(x + \int\limits_{t_0}^{t} a_2(s)\,ds\right) a_3(t)\exp(\int\limits_{t_0}^{t} a_3(s)\,ds)\right]\xi.$$

Подставив это выражение и (3.4) в (3.1), получаем равенство, т. е. (3.4) является решением задачи (3.1), (3.2). □

4. Система дифференциальных уравнений с более общими начальными условиями

Для уравнения (1.1) более естественно начальное условие вида

$$y(t_0, z, x) = y_0(z)y_1(x), \tag{4.1}$$

где y_0 — векторная функция $y_0 : \mathbb{C} \to Y$, $y_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$.

Пусть $\{e_j\}, j = 1, \ldots, n$ — базис в Y, тогда $y_0(z) = \sum\limits_{j=1}^{n} y_{0j}(z)e_j$. Пусть

$$\Phi_j(t, z, x) = y_{0j}\left(zE + A\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds\right) y_1\left(x + \int\limits_{t_0}^{t} a_2(s)\,ds\right), \quad j = 1, \ldots .n.$$

Теорема 4.1. *Пусть* a_1, a_2, a_3 — *непрерывные функции на* $[t_0, y_1]$, $y_0 : \mathbb{C} \to Y$, $y_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ — *дифференцируемые отображения, тогда*

$$y(t,z,x) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(t,z,x) \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} a_3(s)\,ds\right) e_j \tag{4.2}$$

является решением уравнения (3.1) *с начальным условием* (4.1).

Доказательство. Уравнение (3.1) является линейным однородным дифференциальным уравнением. Решение уравнения, у которого начальное условие является конечной линейной комбинацией, является линейной комбинацией решений, соответствующих каждому слагаемому, следовательно, (4.2) — решение задачи (3.1), (4.1). ☐

Замечание 4.1. Если в начальном условии (4.1) $y_0 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $y_1 : \mathbb{C} \to Y$, то $y_1(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} y_{1j}(x) e_j$. Пусть

$$\Phi_{j1}(t,z,x) = y_0\left(zE + A\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds\right) y_{1j}\left(x + \int\limits_{t_0}^{t} a_2(s)\,ds\right), \quad j = 1,\ldots,n.$$

Тогда решение задачи (3.1), (4.1) имеет вид

$$y(t,z,x) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_{j1}(t,z,x) \exp(\int\limits_{t_0}^{t} a_3(s)\,ds) e_j.$$

5. Линейное неоднородное уравнение

Теорема 5.1. *Пусть в уравнении* (1.1) *функции* $a_1, a_2, a_3 : T \to \mathbb{C}$ *непрерывны,* $y_0 : \mathbb{C} \to Y$, $y_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ — *дифференцируемые отображения,* $b : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to Y$ *непрерывная по* t *и дифференцируемая по* z *и* x *функция* $b(t,z,x) = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j(t,z,x) e_j$, *тогда*

$$\begin{gathered} y(t,z,x) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(t,z,x) \exp(\int\limits_{t_0}^{t} a_3(s)\,ds) e_j + \\ + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{t_0}^{t} b_j\left(s, zE + A\int\limits_{s}^{t} a_1(\tau)\,d\tau, x + \int\limits_{s}^{t} a_2(\tau)\,d\tau\right) \exp(\int\limits_{s}^{t} a_3(\tau)\,d\tau)\,ds\, e_j \end{gathered} \tag{5.1}$$

является решением задачи Коши (1.1), (4.1).

Доказательство. Первое слагаемое — это решение линейного однородного уравнения (3.1) с начальным условием (4.1). Поскольку уравнение (1.1) линейное, то достаточно доказать, что второе слагаемое в (5.1) является решением линейного неоднородного уравнения (1.1). Пусть D_m обозначает частную производную функции y по переменной с номером m.

Вычислим производную:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{t_0}^{t} b_j\left(s, zE + A\int\limits_{s}^{t} a_1(\tau)\,d\tau, x + \int\limits_{s}^{t} a_2(\tau)\,d\tau\right) \exp(\int\limits_{s}^{t} a_3(\tau)\,d\tau)\,ds\, e_j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_j(t, zE, x) e_j + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{t_0}^{t} a_1(t) A D_2 b_j\left(s, zE + A\int\limits_{s}^{t} a_1(\tau)\,d\tau, x + \int\limits_{s}^{t} a_2(\tau)\,d\tau\right) \exp(\int\limits_{s}^{t} a_3(\tau)\,d\tau)\,ds\, e_j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{t_0}^{t} a_2(t) D_3 b_j\left(s, zE + A\int\limits_{s}^{t} a_1(\tau)\,d\tau, x + \int\limits_{s}^{t} a_2(\tau)\,d\tau\right) \exp(\int\limits_{s}^{t} a_3(\tau)\,d\tau)\,ds\, e_j +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int_{t_0}^{t} b_j\left(s, zE + A\int_{s}^{t} a_1(\tau)\,d\tau, x + \int_{s}^{t} a_2(\tau)\,d\tau\right)\exp(\int_{s}^{t} a_3(\tau)\,d\tau)a_3(t)\,ds\,e_j.$$

Легко видеть, что это выражение равно правой части уравнения (1.1), в которую подставлено второе слагаемое выражения (5.1). □

6. Математическое ожидание решения линейной системы дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами

Пусть $L_1(T)$ — пространство суммируемых функций на отрезке T с нормой $\|v\| = \int_T |v(t)|dt$, $\psi : L_1(T) \to \mathbb{C}$ — функционал, $h \in L_1(T)$ — приращение переменной v.

Определение 6.1. Если

$$\psi(v+h) - \psi(v) = \int_T \varphi(t,v)h(t)\,dt + o(h),$$

где $o(h)$ — бесконечно малая высшего порядка относительно h, и интеграл (Лебега) является линейным ограниченным функционалом по переменной h, тогда отображение $\varphi : T \times L_1(T) \to \mathbb{C}$ называется *вариационной производной функционала ψ в точке v* и обозначается $\dfrac{\delta\psi(v)}{\delta v(t)}$.

Вариационное дифференцирование аналогично обычному дифференцированию.

Пусть $\varepsilon(t,\omega)$ обозначает случайный процесс (ω — случайное событие; см. [3]). В дальнейшем случайный процесс обозначается просто $\varepsilon(t)$, а $E[\varepsilon]$ обозначает математическое ожидание случайного процесса ε.

Определение 6.2 (см. [3, с. 30])**.** Функционал

$$\psi(v) = E[\exp(i\int_T \varepsilon(s)v(s)\,ds)],$$

где $v \in L_1(T), i = \sqrt{-1}$, называется *характеристическим функционалом случайного процесса ε.*

Отметим, что с помощью характеристического функционала можно находить моментные функции случайного процесса, например (см. [3]),

$$\left.\frac{\delta\psi(v)}{\delta v(t)}\right|_{v=0} = iE[\varepsilon(t)],$$

$$\left.\frac{\delta^2\psi(v)}{\delta v(t)\delta v(\tau)}\right|_{v=0} = -E[\varepsilon(t)\varepsilon(\tau)].$$

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \varepsilon(t)A\frac{\partial y}{\partial z} + b(t,z), \tag{6.1}$$

$$y(t_0,z) = y_0(z), \tag{6.2}$$

где $t \in T \subset \mathbb{R}$, t_0 задано, $y : T \times \mathbb{R} \to Y$ — искомое отображение, $b : T \times \mathbb{R} \to Y$ — случайный векторный процесс, A — постоянный оператор, действующий в пространстве Y, Y — конечномерное пространство со скалярным произведением $< \cdot,\cdot >$, ε — случайный процесс, $y_0(z)$ — случайный векторный процесс. Будем считать, что процессы ε и b заданы характеристическим функционалом, т. е. считаем известным

$$\psi(v_1,v_2) = E\left[\exp(i\int_T \varepsilon(s)v_1(s)\,ds + i\int_T\int_{\mathbb{R}} < b(s_1,s_2), v_2(s_1,s_2) > ds_2\,ds_1)\right].$$

Здесь $< \cdot,\cdot >$ обозначает скалярное произведение в Y.

Введем обозначение

$$w=\exp(i\int\limits_T \varepsilon(s)v_1(s)\,ds+i\int\limits_T\int\limits_{\mathbb{R}} < b(s_1,s_2),v_2(s_1,s_2)>ds_2\,ds_1).$$

Умножим уравнение (6.1) на w и возьмем математическое ожидание полученного равенства. Находим

$$E\left[\frac{\partial y}{\partial t}w\right]=E\left[\varepsilon(t)A\frac{\partial y}{\partial z}w\right]+E[b(t,z)w]. \tag{6.3}$$

Введем обозначение

$$\widetilde{y}(t,z,v_1,v_2)=E[y(t,z)w].$$

Уравнение (6.3) (формально) можно записать с помощью $\widetilde{y}$. Имеем

$$\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial t}=-iA\frac{\delta}{\delta v_1(t)}\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial z}-i\frac{\delta\psi}{\delta v_2(t,z)}. \tag{6.4}$$

Умножив начальные условие (6.2) на w и вычислив математическое ожидание полученного равенства, получим

$$E[y(t_0,z)w]=E[y_0(z)w]=E[y_0(z)]E[w]=E[y_0(z)]\psi(v_1,v_2).$$

Здесь мы предполагаем, что y_0 не зависит от ε и b. Последнее равенство запишем в виде

$$\widetilde{y}(t_0,z,v_1,v_2)=E[y_0(z)]\psi(v_1,v_2). \tag{6.5}$$

Определение 6.3. *Математическим ожиданием $E[y(t,z)]$ решения задачи Коши* (6.1), (6.2) называется $\widetilde{y}(t,z,0,0)$, где $\widetilde{y}(t,z,v_1,v_2)$ — решение задачи (6.4), (6.5) в некоторой окрестности точки $v_1=0$, $v_2=0$.

Таким образом, для нахождения математического ожидания $E[y(t,z)]$ решения задачи (6.1), (6.2) достаточно найти решение $\widetilde{y}(t,z,v_1,v_2)$ неслучайной (детерминированной) задачи (6.4), (6.5) в малой окрестности точки $v_1=0$, $v_2=0$.

7. Решение уравнения с обычной и вариационной производными

Пусть $F_z(g(z))(\xi)$ обозначает преобразование Фурье функции g по переменной z (см. [12]).

Применив преобразование Фурье по переменной z к уравнениям (6.4), (6.5), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}F_z(\widetilde{y})=-\xi A\frac{\delta}{\delta v_1(t)}F_z(\widetilde{y})-iF_z(\frac{\delta\psi}{\delta v_2(t,z)}), \tag{7.1}$$

$$F_z(\widetilde{y})(t_0,\xi,v_1,v_2)=F_z(E[y_0(z)])(\xi)\psi(v_1,v_2). \tag{7.2}$$

Уравнение (7.1) похоже на уравнение (1.1), но вместо частной производной по z в уравнении (7.1) стоит вариационная производная $\dfrac{\delta}{\delta v_1(t)}$.

Пусть $\chi(t_0,t,s)$ — функция переменной $s\in\mathbb{R}$, определенная следующим образом: $\chi(t_0,t,s)=\operatorname{sign}(s-t_0)$ при s, принадлежащем отрезку $[\min\{t_0,t\},\max\{t_0,t\}]$, и $\chi(t_0,t,s)=0$ при s, не принадлежащих отрезку.

Рассмотрим отображение $g_k:L_1(T)\to\mathbb{R}$,

$$g_k(v)=\int\limits_T\dots\int\limits_T B_k(s_1,s_2,\dots,s_k)v(s_1)\dots v(s_k)\,ds_1\dots ds_k,$$

где B_k — непрерывная, симметричная по любой паре переменных функция.

Теорема 7.1. *Пусть a — непрерывная на отрезке $[t_0,t_1]=T$ функция, A — линейный оператор, действующий в Y. Тогда существует частная производная по переменной t отображения*

$$\Phi_k(t,v)=\int\limits_T\dots\int\limits_T B_k(s_1,s_2,\dots,s_k)(v(s_1)E+a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A)\dots(v(s_k)E+a(s_k)\chi(t_0,t,s_k)A)\,ds_1\dots ds_k$$

и справедливо равенство

$$\frac{\partial\Phi_k(t,v)}{\partial t}=a(t)Ak\int_T\ldots\int_T B_k(s_1,s_2,\ldots,s_{k-1},t)(v(s_1)E+a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A)\times$$
$$\times\ldots\times(v(s_{k-1})E+a(s_{k-1})\chi(t_0,t,s_{k-1})A)\,ds_1\ldots ds_{k-1}. \quad (7.3)$$

Доказательство. Пусть $\triangle t$ — приращение переменной t, тогда, используя формулу бинома Ньютона и симметричность функции B_k, получаем

$$\frac{1}{\triangle t}(\Phi_k(t+\triangle t,v)-\Phi_k(t,v))=$$
$$=\frac{1}{\triangle t}\int_T\ldots\int_T B_k(s_1,\ldots,s_k)[(v(s_1)E+a(s_1)\chi(t_0,t+\triangle t,s_1)A)\ldots(v(s_k)E+a(s_k)\chi(t_0,t+\triangle t,s_k)A)-$$
$$-(v(s_1)E+a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A)\ldots(v(s_k)E+a(s_k)\chi(t_0,t,s_k)A)]\,ds_1\ldots ds_k=$$
$$=\frac{1}{\triangle t}\int_T\ldots\int_T B_k(s_1,\ldots,s_k)\sum_{m=0}^{k}C_k^m\Big[(v(s_1)E+a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A)\ldots(v(s_{k-m})E+a(s_{k-m})\chi(t_0,t,s_{k-m})A)\times$$
$$\times(a(s_{k-m+1})\chi(t,t+\triangle t,s_{k-m+1}))\ldots(a(s_k)\chi(t,t+\triangle t,s_k))-$$
$$-(v(s_1)E+a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A)\ldots(v(s_k)E+a(s_k)\chi(t_0,t,s_k)A)\Big]\,ds_1\ldots ds_k=$$
$$=\frac{k}{\triangle t}\int_T\ldots\int_T B_k(s_1,\ldots,s_k)(v(s_1)E+a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A)\ldots(v(s_{k-1})E+a(s_{k-1})\chi(t_0,t,s_{k-1})A)\times$$
$$\times(a(s_k)\chi(t,t+\triangle t,s_k)A)\,ds_1\ldots ds_k+$$
$$+\frac{1}{\triangle t}\int_T\ldots\int_T B_k(s_1,\ldots,s_k)\sum_{m=2}^{k}C_k^m(v(s_1)E+a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A)\ldots(v(s_{k-m})E+a(s_{k-m})\chi(t_0,t,s_{k-m})A)\times$$
$$\times A^{k-m}a(s_{k-m+1})\chi(t,t+\triangle t,s_{k-m+1})\ldots a(s_k)\chi(t,t+\triangle t,s_k)\,ds_1\ldots ds_k. \quad (7.4)$$

Согласно теореме о среднем значении [11, с. 113], при непрерывной функции f

$$\frac{1}{\triangle t}\int_T f(s_k)Aa(s_k)\chi(t,t+\triangle t,s_k)\,ds_k=\frac{1}{\triangle t}\int_t^{t+\triangle t}f(s_k)Aa(s_k)\,ds_k\to Aa(t)f(t)$$

при $\triangle t\to 0$. Переходя к пределу в равенстве (7.4) при $\triangle t\to 0$, получаем (7.3). □

Теорема 7.2. *В условиях теоремы* 7.1 *существует частная вариационная производная* $\dfrac{\delta_p\Phi_k(t,v)}{\delta v(t)}$ *и справедливо равенство*

$$\frac{\delta_p\Phi(t,v)}{\delta v(t)}=k\int_T\ldots\int_T B_k(s_1,\ldots,s_{k-1},t)(v(s_1)E+a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A)\times$$
$$\times\ldots\times(v(s_{k-1})E+a(s_{k-1})\chi(t_0,t,s_{k-1})A)ds_1\ldots ds_{k-1}. \quad (7.5)$$

Доказательство. Пусть h — приращение переменной v, тогда

$$\Phi_k(t,v+h)-\Phi_k(t,v)=$$
$$=\int_T\ldots\int_T B_k(s_1,\ldots,s_k)[(v(s_1)E+a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A+h(s_1)E)\ldots(v(s_k)E+$$
$$+a(s_k)\chi(t_0,t,s_k)A+h(s_k)E)-(v(s_1)E+a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A)\ldots(v(s_k)E+a(s_k)\chi(t_0,t,s_k)A)]\,ds_1\ldots ds_k=$$
$$=k\int_T\ldots\int_T B_k(s_1,\ldots,s_k)(v(s_1)E+a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A)\ldots(v(s_{k-1})E+a(s_{k-1})\chi(t_0,t,s_{k-1})A)h(s_k)E\,ds_1\ldots ds_k+$$

$$+\int\limits_T \ldots \int\limits_T B_k(s_1,\ldots,s_k)\sum_{m=2}^{k} C_k^m (v(s_1)E + a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A)\times$$
$$\times \ldots \times (v(s_{k-m})E + a(s_{k-m})\chi(t_0,t,s_{k-m}))h(s_{k-m+1})\ldots h(s_k)E\,ds_1\ldots ds_k. \quad (7.6)$$

Последнее слагаемое является бесконечно малой величиной высшего порядка относительно h. Согласно определению вариационной производной из (7.6) следует существование $\dfrac{\delta_p\Phi(t,v)}{\delta v(t)}$ и ее представление в виде (7.5). □

Замечание 7.1. Из соотношений (7.3), (7.5) следует, что Φ_k удовлетворяет операторному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial\Phi_k(t,v)}{\partial t} = a(t)A\frac{\delta_p\Phi_k(t,v)}{\delta v(t)}. \quad (7.7)$$

Пусть теперь $\Phi(t,v) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\Phi_k(t,v)$. Поскольку $\Phi_k, k=0,1,\ldots$ удовлетворяют уравнению (7.7), то Φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\Phi(t,v)}{\partial t} = a(t)A\frac{\delta_p\Phi(t,v)}{\delta v(t)}.$$

Теорема 7.3. *Пусть функционал $\psi(v_1,v_2)$ разлагается в ряд*

$$\psi(v_1,v_2) = \sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_T\ldots\int\limits_T \psi_k(s_1,\ldots,s_k,v_2)v_1(s_1)\ldots v_1(s_k)\,ds_1\ldots ds_k, \quad \psi_{00}=1, \quad (7.8)$$

где ψ_{km} — симметрические по любой паре переменных функции, имеющие вариационные производные по переменной v_2. Тогда

$$F_z(\widetilde{y})(t,\xi,v_1,v_2) = F_z(E[y_0])(\xi)\psi(v_1E-\xi\chi(t_0,t)A,v_2) - i\int\limits_{t_0}^{t} F_z\left(\frac{\delta_p\psi(v_1E-\xi\chi(s,t)A,v_2)}{\delta v_2(s,z)}\right)ds$$

является решением задачи (7.1), (7.2).

Доказательство. Легко видеть, что условие (7.2) выполняется. Переменная v_2 в уравнении (7.1) является параметром. Отображение $\psi(v_1E-\xi\chi(t_0,t)A,v_2)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\psi(v_1E-\xi\chi(t_0,t)A,v_2)}{\partial t} = -\xi A\frac{\delta_p\psi(v_1E-\xi\chi(t_0,t)A,v_2)}{\delta v_1(t)}.$$

Используя это равенство, находим

$$\frac{\partial F_z(\widetilde{y})(t,\xi,v_1,v_2)}{\partial t} = -\xi A\frac{\delta_p\psi(v_1E-\xi\chi(t_0,t)A,v_2)}{\delta v_1(t)}F_z(E[y_0])(\xi) -$$

$$-iF_z\left(\frac{\delta_p\psi(v_1E,v_2)}{\delta v_2(t,z)}\right) - i\int\limits_{t_0}^{t} F_z\left(\frac{\delta^2\psi(v_1E-\xi\chi(s,t)A,v_2)\xi A}{\delta v_1(t)\delta v_2(s,z)}\right)ds.$$

Далее,

$$\frac{\delta_p F_z(\widetilde{y})(t,\xi,v_1,v_2)}{\delta v_1(t)} = \frac{\delta_p\psi(v_1E-\xi\chi(t_0,t)A,v_2)}{\delta v_1(t)}F_z(E[y_0])(\xi) - i\int\limits_{t_0}^{t} F_z\left(\frac{\delta^2\psi(v_1E-\xi\chi(s,t)A,v_2)}{\delta v_1(t)\delta v_2(s,z)}\right)ds.$$

Подстановкой этих выражений в (7.1) убеждаемся, что (7.8) является решением уравнения (7.1). □

8. Математическое ожидание решения задачи (6.1), (6.2)

Для нахождения среднего значения решения задачи (6.1), (6.2) нужно найти отображение $\widetilde{y}(t,z,v_1,v_2)$. Это можно сделать, вычислив обратное преобразование Фурье F_ξ^{-1} выражения (7.8). Поскольку преобразование Фурье от произведения равно свертке преобразований Фурье сомножителей (см. [12, с. 154]), то

$$\widetilde{y}(t,z,v_1,v_2)=F_\xi^{-1}\psi(v_1E-\xi\chi(t_0,t)A,v_2))*E[y_0(z)]-i\int\limits_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}\left(F_z\left(\frac{\delta_p\psi(v_1E-\xi\chi(s,t)A,v_2)}{\delta v_2(s,z)}\right)\right)ds. \quad (8.1)$$

Здесь $*$ обозначает свертку по переменной z.

Теорема 8.1. *Пусть характеристический функционал $\psi(v_1,v_2)$ разлагается в степенной ряд вида* (7.8)*, тогда*

$$E[y(t,z)]=F_\xi^{-1}\psi(-\xi\chi(t_0,t)A,0))*E[y_0(z)]-i\int\limits_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}\left(F_z\left(\frac{\delta_p\psi(-\xi\chi(s,t)A,0)}{\delta v_2(s,z)}\right)\right)ds \quad (8.2)$$

является математическим ожиданием решения задачи (6.1)*,* (6.2).

Доказательство. Поскольку $E[y(t,z)]=\widetilde{y}(t,z,0,0)$, то утверждение получается подстановкой $v_1=0$, $v_2=0$ в (8.1). □

9. Частные случаи

Пусть процессы ε и b независимы, тогда $\psi(v_1,v_2)=\psi_\varepsilon(v_1)\psi_b(v_2)$, где ψ_ε,ψ_b — характеристические функционалы для ε и b соответственно. При этом

$$\frac{\delta_p\psi(-\xi\chi(s,t)A,0)}{\delta v_2(s,z)}=\psi_\varepsilon(-\xi\chi(s,t)A)\frac{\delta_p\psi_b(0)}{\delta_p v_2(s,z)}=i\psi_\varepsilon(-\xi\chi(s,t)A)E[b(s,z)].$$

Среднее значение $E[y(t,z)]$ решения задачи (6.1), (6.2) имеет вид

$$E[y(t,z)]=F_\xi^{-1}\psi_\varepsilon(-\xi\chi(t_0,t)A))*E[y_0(z)]+\int\limits_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}(\psi_\varepsilon(-\xi\chi(s,t)A)F_z(E[b(s,z)]))ds=$$

$$=F_\xi^{-1}(\psi_\varepsilon(-\xi\chi(t_0,t)A))*E[y_0(z)]+\int\limits_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}(\psi_\varepsilon(-\xi\chi(s,t)A))*E[b(s,z)]ds.$$

Отметим, что для нахождения математического ожидания $E[y(t,z)]$ нужно знать характеристический функционал процесса ε и только математическое ожидание процесса b.

Пусть процессы ε и b независимы и ε — гауссов случайный процесс с характеристическим функционалом

$$\psi_\varepsilon(v_1)=\exp(i\int\limits_T E[\varepsilon(s)]v_1(s)ds-\frac{1}{2}\int\limits_T\int\limits_T(E[\varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)]-E[\varepsilon(s_1)]E[\varepsilon(s_2)])v_1(s_1)v_1(s_2)ds_1ds_2).$$

При этом находим

$$E[y(t,z)]=F_\xi^{-1}(\exp(-i\int\limits_{t_0}^{t}\xi E[\varepsilon(s)]A\,ds-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t}\xi^2A^2(E[\varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)]-E[\varepsilon(s_1)]E[\varepsilon(s_2)])ds_1ds_2)*E[y_0(z)]))+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}(\exp(-i\int\limits_{s}^{t}\xi E[\varepsilon(\tau)]Ad\tau-\frac{1}{2}\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{s}^{t}\xi^2A^2(E[\varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)]-E[\varepsilon(s_1)]E[\varepsilon(s_2)])ds_1ds_2)*E[b(s,z)]))ds.$$

Приведем еще один пример. Пусть процессы ε и b независимы и процесс ε имеет равномерное распределение с характеристическим функционалом

$$\psi_\varepsilon(v_1) = \frac{\sin \int\limits_T a(s)v_1(s)ds}{\int\limits_T a(s)v_1(s)ds} \exp\left(i\int\limits_T E[\varepsilon(s)]v_1(s)ds\right), \quad a(s) \geqslant 0.$$

Аналогично вычисляя, получаем

$$E[y(t,z)] = F^{-1}\left(\frac{\sin\xi\int\limits_{t_0}^t a(s)Ads}{\xi\int\limits_{t_0}^t a(s)Ads}\exp\left(i\xi\int\limits_{t_0}^t E[\varepsilon(s)]Ads\right)\right) * E[y_0(z)] +$$

$$+\int\limits_{t_0}^t F^{-1}\left(\frac{\sin\xi\int\limits_s^t a(\tau)Ad\tau}{\xi\int\limits_s^t a(\tau)Ad\tau}\exp\left(i\xi\int\limits_s^t E[\varepsilon(\tau)]Ad\tau\right)\right) * E[b(s,z)]ds.$$

Выражение

$$\frac{\sin\xi\int\limits_{t_0}^t a(s)Ads}{\xi\int\limits_{t_0}^t a(s)Ads}$$

обозначает сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(\xi\int\limits_{t_0}^t a(s)A)^{k-1}}{k!}.$$

10. Примеры

Пример 10.1. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial y_1}{\partial t} = 2(t-1)\frac{\partial y_1}{\partial z} + (t-1)\frac{\partial y_2}{\partial z} + (t^2+1)\frac{\partial y_1}{\partial x} + y_1 + t^2zx^3,$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial t} = 2(t-1)\frac{\partial y_2}{\partial z} + (t^2+1)\frac{\partial y_2}{\partial x} + y_2 + tz^2x$$

с начальными условиями

$$y_1(0,z,x) = z^2,$$

$$y_2(0,z,x) = x^2z.$$

Задача имеет вид (1.1), (4.1), где $a_1(t) = t-1$, $a_2(t) = t^2+1$, $a_3(t) = 1$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b(t,z,x) = \begin{pmatrix} t^2zx^3 \\ tz^2x \end{pmatrix}, \quad y(0,z,x) = \begin{pmatrix} z^2 \\ x^2z \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

По формуле (5.1) выпишем решение системы:

$$y\,(t,z,x) = e^t\left(zE + A\left(\frac{t^2}{2}-t\right)\right)^2 e_1 + e^t\left(zE + A\left(\frac{t^2}{2}-t\right)\right)\left(x+\frac{t^3}{3}+t\right)^2 e_2 +$$

$$+\int\limits_0^t [e^{t-s}s^2\left(zE + A\left(\frac{t^2}{2}-\frac{s^2}{2}-t+s\right)\right)\left(x+\frac{t^3}{3}-\frac{s^3}{3}+t-s\right)^3 e_1 +$$

$$+ e^{t-s}s\left(zE + A\left(\frac{t^2}{2}-\frac{s^2}{2}-t+s\right)\right)^2\left(x+\frac{t^3}{3}-\frac{s^3}{3}+t-s\right)e_2]\,ds. \quad (10.1)$$

$$zE + A\left(\frac{t^2}{2} - \frac{s^2}{2} - t + s\right) = \begin{pmatrix} z + t^2 - s^2 - 2t + 2s & \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{s^2}{2} - t + s \\ 0 & z + t^2 - s^2 - 2t + 2s \end{pmatrix},$$

$$\left(zE + A\left(\frac{t^2}{2} - \frac{s^2}{2} - t + s\right)\right)^2 = \begin{pmatrix} (z+t^2-s^2-2t+2s)^2 & (z+t^2-s^2-2t+2s)(t^2-s^2-2t+2s) \\ 0 & (z + t^2 - s^2 - 2t + 2s)^2 \end{pmatrix}.$$

Подставляя эти выражения в (10.1), после интегрирования и упрощающих преобразования находим

$$y_1 = -206313024 + 206313024e^t - 208491824t + 2178800e^t t - 103705016t^2 - 1630292e^t t^2 -$$
$$-33516680t^3 - 327933e^t t^3 - 7808856t^4 - (45455e^t t^4)/6 - 1371960t^5 + (15475e^t t^5)/3 - 183816t^6 +$$
$$+327e^t t^6 - 18384t^7 + (260e^t t^7)/9 - 1272t^8 - (299e^t t^8)/18 - 48t^9 + (2e^t t^9)/9 - (4e^t t^{10})/27 +$$
$$+(2e^t t^{11})/27 + 1029552x - 1029552e^t x + 1051816tx - 22264e^t tx + 521572t^2 x + 15466e^t t^2 x +$$
$$+165004t^3 x + 2253e^t t^3 x + 36456t^4 x + 499/3e^t t^4 x + 5736t^5 x - 299/3e^t t^5 x + 612t^6 x + 36t^7 x -$$
$$-4/3e^t t^7 x + 2/3e^t t^8 x - 3816x^2 + 3816e^t x^2 - 4056tx^2 + 239e^t tx^2 - 1998t^2 x^2 - 299/2e^t t^2 x^2 -$$
$$-600t^3 x^2 - 6e^t t^3 x^2 - 114t^4 x^2 - 4e^t t^4 x^2 - 12t^5 x^2 + 2e^t t^5 x^2 + 12x^3 - 12e^t x^3 + 16tx^3 - 4e^t tx^3 + 8t^2 x^3 +$$
$$+2e^t t^2 x^3 + 2t^3 x^3 + 1604348z - 1604348e^t z + 1589378tz + 14966e^t tz + 787354t^2 z - 148e^t t^2 z +$$
$$+255070t^3 z + 14959/3e^t t^3 z + 59534t^4 z - 278/3e^t t^4 z + 10368t^5 z + 7/3e^t t^5 z + 1338t^6 z - 46/3e^t t^6 z +$$
$$+120t^7 z + 2/3e^t t^7 z + 6t^8 z + 2/27e^t t^9 z - 14950xz + 14950e^t xz - 14672txz - 278e^t txz - 7204t^2 xz +$$
$$+7e^t t^2 xz - 2268t^3 xz - 92e^t t^3 xz - 492t^4 xz + 4e^t t^4 xz - 72t^5 xz - 6t^6 xz + 2/3e^t t^6 xz + 138x^2 z -$$
$$-138e^t x^2 z + 132tx^2 z + 6e^t tx^2 z + 63t^2 x^2 z + 18t^3 x^2 z + 2e^t t^3 x^2 z + 3t^4 x^2 z - 2x^3 z + 2e^t x^3 z - 2tx^3 z -$$
$$-t^2 x^3 z + e^t z^2,$$

$$y_2 = 8016 - 8016e^t + 8656t - 640e^t t + 4336t^2 + 312e^t t^2 + 1288t^3 + 54e^t t^3 + 240t^4 - (31e^t t^4)/3 + 24t^5 -$$
$$-(e^t t^5)/3 - (2e^t t^6)/3 + (e^t t^7)/9 + (e^t t^8)/9 - 48x + 48e^t x - 56tx + 8e^t tx - 32t^2 x - 4e^t t^2 x - 8t^3 x -$$
$$-2e^t t^3 x - 1/3e^t t^4 x + 2/3e^t t^5 x - 2e^t tx^2 + e^t t^2 x^2 - 344z + 344e^t z - 380tz + 36e^t tz - 184t^2 z - 23e^t t^2 z -$$
$$-52t^3 z + 2/3e^t t^3 z - 8t^4 z - 2/3e^t t^4 z + 2/3e^t t^5 z + 1/9e^t t^6 z + 4xz - 4e^t xz + 8txz - 2e^t txz + 4t^2 xz +$$
$$+2e^t t^2 xz + 2/3e^t t^3 xz + e^t x^2 z + 10z^2 - 10e^t z^2 + 9tz^2 + e^t tz^2 + 4t^2 z^2 + t^3 z^2 + 1/3e^t t^3 z^2 - xz^2 + e^t xz^2 - txz^2.$$

Пример 10.2. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial y_1}{\partial t} = 2(t-1)\frac{\partial y_1}{\partial z} + (t-1)\frac{\partial y_2}{\partial z} + (t^2+1)\frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{1}{1+t}y_1 + t^2 zx^3,$$
$$\frac{\partial y_2}{\partial t} = 2(t-1)\frac{\partial y_2}{\partial z} + (t^2+1)\frac{\partial y_2}{\partial x} + \frac{1}{1+t}y_2 + tz^2 x$$

с начальными условиями

$$y_1(0,z,x) = z^2,$$
$$y_2(0,z,x) = x^2 z.$$

Задача имеет вид (1.1), (4.1), где $a_1(t) = t-1$, $a_2(t) = t^2+1$, $a_3(t) = \dfrac{1}{1+t}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b(t,z,x) = \begin{pmatrix} t^2 zx^3 \\ tz^2 x \end{pmatrix}, \quad y(0,z,x) = \begin{pmatrix} z^2 \\ x^2 z \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

По формуле (5.1) выпишем решение системы:

$$y(t,z,x) = (zE + A(\frac{t^2}{2} - t))^2(t+1)e_1 + (zE + A(\frac{t^2}{2} - t))(x + \frac{t^3}{3} + t)^2(t+1)e_2 +$$
$$+ \int_0^t [s^2(zE + A(\frac{t^2}{2} - \frac{s^2}{2} - t + s))(x + \frac{t^3}{3} - \frac{s^3}{3} + t - s)^3\frac{t+1}{s+1}e_1 +$$
$$+ s(zE + A(\frac{t^2}{2} - \frac{s^2}{2} - t + s))^2(x + \frac{t^3}{3} - \frac{s^3}{3} + t - s)\frac{t+1}{s+1}e_2]\,ds. \quad (10.2)$$

Подставляя полученные раннее выражения в (10.2), после интегрирования и упрощающих преобразования, находим

$$y_1 = (1+t)(-t+t^2/2)(t+t^3/3+x)^2 + (1+t)(-2t+t^2+z)^2 + 1/3(1+t)\{1/840t(-618t^6+413t^7+$$
$$+14t^4(533+96x-16z) - 2520(4+3x)(-3+z) + 70t^5(-52+7z) - 420t(-114+3x(-15+z)+22z)-$$
$$-70t^3(132+33x+26z) + 420t^2(5-30x+5z+4xz)) - (-3-2t+t^2)(4+3t+t^3+3x)(-3-2t+t^2+z)\times$$
$$\times \ln(1+t)\} + (1+t)(-(1073t^{12})/41580 + (207t^{13})/40040 - (t^9(17133+17226x-1043z))/68040+$$
$$+t^{10}(-71/3402+3x/56-3z/140) + t^{11}(2801/93555+3z/440) - 1/27t(4+3x)^3(-3+z)+$$
$$+1/54t^2(4+3x)^2(58-14z+3x(1+z)) - (t^6(-3780+1377x^2+401z-27x(-95+6z)))/1620+$$
$$+(t^8(21095-2298z+81x(67+21z)))/22680 - 1/162t^3(162x^3-27x^2(-15+z)+18x(-69+7z)+$$
$$+8(-249+43z)) + 1/324t^4(1940+81x^3-636z-27x^2(-20+9z)-18x(-67+45z)) + (t^5(11434-$$
$$-2838z+27x^2(37+18z)-18x(-578+57z)))/1620 + (t^7(2187x^2-270x(-7+9z)-$$
$$-11(79+408z)))/11340 + 1/27(4+3t+t^3+3x)^3(-3-2t+t^2+z)\ln(1+t),$$
$$y_2 = (1+t)(t+t^3/3+x)^2(-2t+t^2+z) + 1/3(1+t)(-(103t^7)/140 + (59t^8)/120 + t(4+3x)(-3+z)^2+$$
$$+1/60t^5(533+96x-32z) + 1/6t^6(-26+7z) - 1/12t^4(132+33x+52z-9z^2) + t^2(57-22z+$$
$$+x(45/2-3z)+z^2) + t^3(5/2+5z+z^2/3+x(-15+4z)) - (4+3t+t^3+3x)(-3-2t+t^2+z)^2\ln(1+t).$$

11. Заключение

Явные формулы решений дифференциальных уравнений позволят провести анализ качественного поведения системы. В статье получены формулы для решения систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с начальными условиями. Реальные динамические системы подвержены случайным возмущениям, которые можно учитывать в математических моделях, коэффициенты которых являются случайными процессами. Скалярные дифференциальные уравнения первого порядка со случайными коэффициентами применены для анализа модели переноса в атмосфере (см. [13]).

Отметим, что первые интегралы (даже нелинейных) систем обыкновенных дифференциальных уравнений удовлетворяют линейным системам дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. В данной статье получены формулы для математического ожидания решения линейных систем дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных со случайными коэффициентами. Для приложений важна общая формула для математического ожидания (8.2). Для ее применения достаточно знать характеристический функционал ψ. Мы рассмотрели наиболее распространенный вариант, когда ψ_ε определяет гауссов случайный процесс ε.

Авторы благодарны А. Л. Скубачевскому за конструктивное обсуждение темы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боровских А. В., Перов А. И.* Дифференциальные уравнения: учебник и практикум для академического бакалавриата. — М.: Юрайт, 2017.
2. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — М.: Наука, 1986.
3. *Задорожний В. Г.* Методы вариационного анализа. — М.—Ижевск: РХД, 2006.
4. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. — М.: Физматлит, 2003.
5. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х.* Математический анализ: учебник для академического бакалавриата. — М.: Юрайт, 2018.
6. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: URSS, 2010.
7. *Кружков С. Н.* Нелинейные уравнения с частными производными. Ч. 2. Уравнения первого порядка. — М.: МГУ, 1970.
8. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964.
9. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: ГИФМЛ, 1961.
10. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М.: Либроком, 2013.
11. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. — М.: Наука, 1970.
12. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. — М.: Физматлит, 1965.

13. *Zadorozhniy V. G., Semenov M. E., Selavesyuk N. T., Ulshin I. I., Nozhkin V. S.* Statistical characteristics of solutions of the system of the stochastic transfer model// Math. Models Comput. Simul. — 2021. — *13*, № 1. — С. 11–25.

В. Г. Задорожний
Воронежский государственный университет, Москва, Россия
E-mail: zador@amm.vsu.ru

Л. Ю. Кабанцова
Воронежский государственный университет, Москва, Россия
E-mail: dlju@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-549-563 UDC 517.97

On Solution of First-Order Linear Systems of Partial Differential Equations

© 2021 **V. G. Zadorozhniy, L. Yu. Kabantsova**

Abstract. Explicit formulas for the first-order partial differential equations system solving were obtained. Solution found for the system with initial conditions. Calculation examples establishing statements truth mentioned. Searching for partial differential equations system solution mathematical expectation became more difficult issue as partial differential equations system with random processes coefficients were covered. Gaussian coefficients and uniformly distributed random process cases examples has been reviewed.

REFERENCES

1. A. V. Borovskikh and A. I. Perov, *Differentsial'nye uravneniya: uchebnik i praktikum dlya akademicheskogo bakalavriata* [Differential Equations: Textbook and Workshop for Academic Bachelors], Yurayt, Moscow, 2017 (in Russian).
2. I. N. Bronshteyn and K. A. Semendyaev, *Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya vtuzov* [A Guide to Mathematics for Engineers and Students of Higher Educational Technical Institutions], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
3. V. G. Zadorozhniy, *Metody variatsionnogo analiza* [Variational Analysis Methods], RKhD, Moscow–Izhevsk, 2006 (in Russian).
4. V. F. Zaytsev and A. D. Polyanin, *Spravochnik po differentsial'nym uravneniyam s chastnymi proizvodnymi pervogo poryadka* [First-Order Partial Differential Equations Handbook], Fizmatlit, Moscow, 2003 (in Russian).
5. V. A. Il'in, V. A. Sadovnichiy, and B. Kh. Sendov, *Matematicheskiy analiz: uchebnik dlya akademicheskogo bakalavriata* [Mathematical Analysis: Textbook for Academic Bachelors], Yurayt, Moscow, 2018 (in Russian).
6. E. A. Coddington and N. Levinson, *Teoriya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Theory of Ordinary Differential Equations], URSS, Moscow, 2010 (Russian translation).
7. S. N. Kruzhkov, *Nelineynye uravneniya s chastnymi proizvodnymi. Ch. 2. Uravneniya pervogo poryadka* [Nonlinear Partial Differential Equations. Vol. 2. First-Order Equations], MGU, Moscow, 1970 (in Russian).
8. R. Courant, *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations], Mir, Moscow, 1964 (Russian translation).
9. I. G. Petrovskii, *Lektsii ob uravneniyakh s chastnymi proizvodnymi* [Lectures on Partial Differential Equations], GIFML, Moscow, 1961 (in Russian).

10. A. F. Filippov, *Sbornik zadach po differentsial'nym uravneniyam* [Collection of Tasks on Differential Equations], Librokom, Moscow, 2013 (in Russian).
11. G. M. Fikhtengol'ts, *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. II* [Differential and Integral Calculus Course. Vol. II], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
12. G. E. Shilov, *Matematicheskiy analiz. Vtoroy spetsial'nyy kurs* [Mathematical Analysis. Second Special Course], Fizmatlit, Moscow, 1965 (in Russian).
13. V. G. Zadorozhniy, M. E. Semenov, N. T. Selavesyuk, I. I. Ulshin, and V. S. Nozhkin, "Statistical characteristics of solutions of the system of the stochastic transfer model," *Math. Models Comput. Simul.*, 2021, **13**, No. 1, 11–25.

V. G. Zadorozhniy
Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: zador@amm.vsu.ru

L. Yu. Kabantsova
Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: dlju@yandex.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 3 (2021). С. 564–575
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-564-575 УДК 517.956

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

© 2021 г. **Б. Д. КОШАНОВ, А. П. СОЛДАТОВ**

Аннотация. Для эллиптического уравнения $2l$-го порядка с постоянными старшими вещественными коэффициентами в бесконечной области, содержащей внешность некоторого круга и ограниченной достаточно гладким контуром, рассмотрена обобщенная задача Неймана. Она заключается в задании нормальных производных (k_j-1)-го порядков, где $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_l \leqslant 2l$; при $k_j = j$ она переходит в задачу Дирихле, а при $k_j = j+1$ — в задачу Неймана. При некоторых предположениях относительно коэффициентов уравнения на бесконечности получено необходимое и достаточное условие фредгольмовости этой задачи и приведена формула ее индекса в гельдеровских пространствах.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В области D на плоскости, ограниченной простым гладким контуром Γ, рассмотрим эллиптическое уравнение $2l$-го порядка

$$\sum_{r=0}^{2l} a_r \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l-r}\partial y^r} + \sum_{0\leqslant r\leqslant k\leqslant 2l-1} a_{rk}(z)\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-r}\partial y^r} = f(z), \quad z = x+iy \in D, \tag{1.1}$$

с постоянными старшими коэффициентами $a_r \in \mathbb{R}$.

Исходя из набора $1 = k_1 < \ldots < k_l \leqslant 2l$ натуральных чисел, задача Неймана для этого уравнения определяется краевыми условиями

$$\left.\frac{\partial^{k_j-1} u}{\partial n^{k_j-1}}\right|_\Gamma = f_j, \quad j = 1,\ldots,l, \tag{1.2}$$

где $n = n_1 + in_2$ означает единичную внешнюю нормаль.

Здесь и ниже под нормальной производной $(\partial/\partial n)^k$ порядка k понимается граничный оператор

$$\left(n_1\frac{\partial}{\partial x} + n_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^k = \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r} n_1^{k-r} n_2^r \frac{\partial^k}{\partial x^{k-r}\partial y^r},$$

и аналогичный смысл имеет граничный оператор $(\partial/\partial e)^k$ по отношению к единичному касательному вектору

$$e = e_1 + ie_2 = i(n_1 + in_2). \tag{1.3}$$

Постановка конкретной задачи (1.1), (1.2) при $k_{j+1} - k_j \equiv 1$ для полигармонического уравнения восходит к А. В. Бицадзе [1], где при $k_1 \geqslant 2$ она названа обобщенной задачей Неймана. Это название в дальнейшем сохраняем и для произвольного набора показателей k_j, вводя для задачи обозначение $\mathcal{N}$. Символ $\mathcal{N}_0$ сохраняем для задачи, когда все младшие коэффициенты a_{rk} в (1.1) равны нулю, т. е. для уравнения $L_a u = f$, определяемого дифференциальным оператором

$$L_a = \sum_{r=0}^{2l} a_r \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l-r} \partial y^r} \tag{1.4}$$

с постоянными коэффициентами.

В конечной односвязной области D задача $\mathcal{N}$ подробно исследовалась в работах [4, 5, 10, 11, 13]. В [4, 5] эта задача изучалась задача в классе

$$\{u \in C^{2l}(D) \cap C^{2l-1,\mu}(\overline{D}), \quad L_a u \in C^{\mu}(\overline{D})\}.$$

В более узком стандартном классе $C^{2l,\mu}(\overline{D})$, включая случай многосвязной области, эта задача была рассмотрена в [10] (см. также [13]). В обоих классах условия фредгольмовости и формула индекса выглядят одинаково. Другая форма критерия фредгольмовости задачи, удобная для использования, приведена в [11].

Чтобы сформулировать этот критерий, обозначим ν_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, все различные корни в верхней полуплоскости характеристического многочлена

$$\chi(z) = a_{2l} \prod_{k=1}^{m} (z - \nu_k)^{l_k} \prod_{k=1}^{m} (z - \overline{\nu}_k)^{l_k}$$

так, что сумма кратностей $l_1 + \ldots + l_m$ этих корней равна l. Условие эллиптичности заключается в том, что $a_{2l} \neq 0$ и корни характеристического многочлена $\chi(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{2l} z^{2l}$ не лежат на вещественной оси. Введем дробно-линейные по z функции

$$\omega(e, \nu) = \frac{-e_2 + e_1 \nu}{e_1 + e_2 \nu}, \quad 1 \leqslant j \leqslant l, \tag{1.5}$$

где зависимость от единичного касательного вектора $e = e_1 + ie_2$ к контуру Γ, фигурирующему в (1.3), указана явно.

Исходя из l-вектор-функции $g(\zeta) = (g_1(\zeta), \ldots, g_l(\zeta))$, аналитической в окрестности точек $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$, введем блочную $l \times l$-матрицу

$$W_g(\zeta_1, \ldots, \zeta_m) = (W_g(\zeta_1), \ldots, W_g(\zeta_m)), \tag{1.6}$$

где матрица $W_g(\zeta_k) \in \mathbb{C}^{l \times l_k}$ составлена из векторов-столбцов

$$g(\zeta_k), g'(\zeta_k), \ldots, \frac{1}{(l_k - 1)!} g^{(l_k - 1)}(\zeta_k).$$

В этих обозначениях условие

$$\det W_g[\omega(e, \nu_1), \ldots, \omega(e, \nu_m)] \neq 0, \quad e \in \mathbb{T}, \tag{1.7}$$

где $g(\zeta) = (\zeta^{k_1 - 1}, \ldots, \zeta^{k_l - 1})$ и $\mathbb{T}$ означает единичную окружность, необходимо и достаточно для фредгольмовости задачи $\mathcal{N}$ в классе $C^{2l,\mu}(\overline{D})$.

Как обычно, фредгольмовость и индекс задачи понимаются по отношению к ее оператору, который ограничен

$$C^{2l,\mu}(\overline{D}) \to C^{\mu}(\overline{D}) \times \prod_{j=1}^{l} C^{2l - k_j + 1,\mu}(\Gamma).$$

Как будет показано ниже, этот индекс определяется целым числом

$$\varkappa_0 = \frac{1}{2\pi} [\arg \det W_g[\omega(e, \nu_1), \ldots, \omega(e, \nu_m)]]\big|_{\mathbb{T}}, \tag{1.8}$$

приращение непрерывной ветви аргумента окружности на $\mathbb{T}$ берется против часовой стрелки.

Очевидно, условие (1.7) зависит только от набора k_1, $k_2, \ldots, k_l$. Следовательно, при фиксированных k_j при выполнении этого условия задача $\mathcal{N}$ фредгольмова в любой конечной области D с достаточно гладкой границей.

С точки зрения общей эллиптической теории [7] задача $\mathcal{N}$ фредгольмова в пространстве $C^{2l,\mu}(\overline{D})$ тогда и только тогда, когда ее краевые условия удовлетворяют так называемому *условию дополнительности* (или *условию Шапиро—Лопатинского*). В этом случае говорят также (см. [15]), что краевые условия (1.2) *накрывают* дифференциальный оператор L_a, фигурирующий в (1.4). В работе [11] показано, что это условие равносильно (1.7), так что центр тяжести переносится на исследование формулы индекса (1.8). Поэтому в этой статье дано более явное описание формулы индекса при некоторых дополнительных предположениях относительно корней характеристического уравнения.

В данной работе рассмотрим случай бесконечной области. В этом случае поведение решения уравнения (1.1) и его коэффициентов на бесконечности необходимо требуют дополнительного описания. Отметим, что для неоднородного эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами исследованию характера этого поведения посвящены многочисленные работы (см. например, [2, 3, 6, 14]).

Пусть область D бесконечна и ограничена контуром $\Gamma \in C^{2l,\nu}$, связные компоненты которого обозначим $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n$. Следуя [9], введем пространство Гельдера $C^{\mu}_{\lambda}(\overline{D}, \infty)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, функций со степенным поведением $O(|z|^{\lambda})$ на бесконечности. Более точно, при $\lambda = 0$ оно состоит из ограниченных функций φ, для которых $\psi(z) = |z|^{\mu}\varphi(z)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем μ. Относительно нормы

$$|\varphi| = \sup_{z\in D} |\varphi(z)| + \sup_{z_1\neq z_2} \frac{|\psi(z_1) - \psi(z_2)|}{|z_1 - z_2|^{\mu}}$$

это пространство банахово, причем оно является банаховой алгеброй по умножению. В общем случае произвольного λ банахово пространство $C^{\mu}_{\lambda}(\overline{D}, \infty)$ определим как класс функций φ, для которых $(1+|z|)^{-\lambda}\varphi(z) \in C^{\mu}_{0}(\overline{D}, \infty)$, снабженный перенесенной нормой. Соответствующие банаховы пространства $C^{n,\mu}_{\lambda}(\overline{D}, \infty)$ дифференцируемых функций определим индуктивно условиями

$$\varphi \in C^n(D) \cap C^{n-1,\mu}_{\lambda}(\overline{D}, \infty), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y} \in C^{n-1,\mu}_{\lambda-1}(\overline{D}, \infty).$$

Оно является банаховым относительно соответствующей нормы.

Поскольку в дальнейшем бесконечная область D фиксирована, пространства $C^{n,\mu}_{\lambda}(\overline{D}, \infty)$ всюду ниже обозначаем кратко $C^{n,\mu}_{\lambda}$. В более общей ситуации конечного множества особых точек они были детально изучены в [9]. В частности, при этом произведение функций ограничено как билинейное отображение $C^{n,\mu}_{\lambda'} \times C^{n,\mu}_{\lambda''} \to C^{n,\mu}_{\lambda'+\lambda''}$.

Задачу $\mathcal{N}$ рассмотрим в классе $C^{2l,\mu}_{\lambda}$, $-1 < \lambda < 0$, функций, исчезающих на бесконечности. Для нее справедлив следующий результат.

Теорема 1.1. *Пусть бесконечная область D ограничена контуром Γ класса $C^{2l,\nu}$, $\mu < \nu < 1$, состоящим из компонент $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n$, младшие коэффициенты уравнения* (1.1) *удовлетворяют требованию*

$$a_{rk} \in C^{\mu}_{k-2l-0}(\overline{D}, \infty) = \cup_{\varepsilon>0} C^{\mu}_{k-2l-\varepsilon} \tag{1.9}$$

и выполнено условие (1.7).

Тогда задача $\mathcal{N}$ фредгольмова в классе $C^{2l,\mu}_{\lambda}$, $-1 < \lambda < 0$, и в обозначениях (1.8) *ее индекс дается формулой*

$$\varkappa = 2(n+1)\left[\varkappa_0 + 2\sum_{i<j} l_i l_j\right] - l(2l-1). \tag{1.10}$$

Обозначим $\mathcal{N}_0$ задачу с коэффициентами $a_{rk} = 0$ в (1.1). Следующая лемма показывает, что с точки зрения фредгольмовой теории можно ограничиться этой задачей.

Лемма 1.1. *Задачи $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}_0$ в классе $C^{2l,\mu}_{\lambda}$, $-1 < \lambda < 0$, фредгольмово эквивалентны, и их индексы совпадают.*

Доказательство. В силу известных свойств фредгольмовых операторов (см. [8, 9]) достаточно убедиться, что оператор

$$Mu = \sum_{0\leqslant r\leqslant k\leqslant 2l-1} a_{rk}(z)\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-r}\partial y^r}$$

компактен $C^{2l,\mu}_\lambda \to C^\mu_{\lambda-2l}$.

Предполагая для определенности $0 \notin \overline{D}$, рассмотрим в D весовую функцию $\rho_\nu(z) = |z|^\nu$ порядка ν, которая принадлежит $C^{n,\mu}_\nu$ для любого натурального n и $\nu \in \mathbb{R}$. При этом оператор умножения $\varphi \to \rho_\nu\varphi$ ограничен $C^{n,\mu}_\lambda \to C^{n,\mu}_{\lambda+\nu}$. По условию (1.9) существует столь малое $\varepsilon > 0$, что $-a^{-1}_{2l}a_{rk} = \rho_{k-2l-\varepsilon}a^0_{rk}$ с некоторыми $a^0_{rk} \in C^\mu_0$. Соответственно можем записать

$$Mu = \sum_{0\leqslant r\leqslant k\leqslant 2l-1} a^0_{rk}M_{rk}u, \quad M_{rk}u = \rho_{k-2l-\varepsilon}\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-r}\partial y^r}.$$

Очевидно, оператор M_{rk} ограничен $C^{2l,\mu}_\lambda \to C^{1,\mu}_{\lambda-2l-\varepsilon}$. С другой стороны, как установлено в [9], вложение $C^{1,\mu}_{\nu-\varepsilon} \subseteq C^\mu_\nu$ компактно. В результате приходим и к компактности исходного оператора $M:\ C^{2l,\mu}_\lambda \to\to C^\mu_{\lambda-2l}$. ☐

Отметим, что задача $\mathcal{N}_0$ для уравнения $L_a u = 0$ в случае конечной области D изучена в [5]. Совершенно аналогично она может быть изучена и в рассматриваемом случае бесконечной области. Это следует из того, что любое решение $u(z)$ этого уравнения, которое при $|z| \to \infty$ стремится к нулю и первые производные которого имеют поведение $O(|z|^{\lambda-1})$ с некоторым $-1 < \lambda < 0$, автоматически принадлежит классу $C^{2l}_\lambda(\overline{D}_0, \infty)$ в области $\overline{D}_0 = \{|z| \geqslant r\} \subseteq D$. Поэтому в случае существования ограниченного оператора $L^{(-1)}_a : C^\mu_{\lambda-2l} \to C^{2l,\mu}_\lambda$, который является правым обратным к L_a в смысле тождества

$$L_a L^{(-1)}_a \varphi = \varphi, \quad \varphi \in C^\mu_{\lambda-2l},$$

задача $\mathcal{N}_0$ может быть сведена к случаю $L_a u = 0$. Однако вопрос существования этого оператора открыт даже для простейшего случая $L_a = \Delta$ оператора Лапласа. В самом деле, в этом случае свойством (1.10) обладает оператор свертки с фундаментальным решением, однако неизвестно, будет ли этот оператор ограничен $C^\mu_{\lambda-2l} \to C^{2l,\mu}_\lambda$.

Доказательство теоремы 1.1 осуществляется в следующем разделе 2 по схеме, использованной в [10] для конечной области. Она заключается в эквивалентной редукции задачи $\mathcal{N}_0$ к задаче Римана—Гильберта для соответствующей эллиптической системы первого порядка.

2. Задача Римана—Гильберта

Обозначим для краткости X банахово пространство $(C^{1,\mu}_{\lambda-2l+1})^{2l}$ вектор-функций $U = (U_1, \dots, U_{2l})$ и его замкнутое подпространство X_0, выделяемое условиями

$$\frac{\partial U_j}{\partial y} = \frac{\partial U_{j+1}}{\partial x}, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2l-1. \tag{2.1}$$

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{D}u = \left(\frac{\partial^{2l-1}u}{\partial^{2l-j}x\partial^{j-1}y},\ 1 \leqslant j \leqslant 2l\right),$$

который, очевидно, ограничен $C^{2l}_\lambda \to X_0$. Его ядро $\ker\mathcal{D}$ представляет собой пересечение C^{2l}_λ с классом P_{2l-2} всех многочленов степени не выше $2l-2$ и, следовательно, нулевое. Образ $\operatorname{im}\mathcal{D}$ этого оператора обозначим $\mathcal{X}_0$.

Лемма 2.1. *Подпространство $\mathcal{X}_0 \subseteq X_0$ замкнуто и имеет конечную коразмерность, равную*

$$\dim(X_0/\mathcal{X}_0) = nl(2l-1), \tag{2.2}$$

где $n+1$ есть число связных компонент контура Γ.

Доказательство. Пусть подобласть $D_0 \subseteq D$ конечна и односвязна. Тогда уравнение $\mathcal{D}u = U$ с правой частью $U \in [C^{2l-1}(\overline{D}_0)]^{2l}$, удовлетворяющей условию (2.1), всегда разрешимо и его решение определяется последовательным интегрированием вдоль дуги, соединяющей произвольную точку $z \in D_0$ с фиксированной точкой z_0. Например, для $l = 1$

$$u(z) = \int_{z_0}^{z} U_1 dx + U_2 dy.$$

Аналогично для $l = 2$ следует положить

$$u_{1,j}(z) = \int_{z_0}^{z} U_j dx + U_{j+1} dy, \quad 1 \leqslant j \leqslant 3,$$

$$u_{2,j}(z) = \int_{z_0}^{z} u_{1,j} dx + u_{2,j+1} dy, \quad j = 1, 2; \quad (\mathcal{D}^{(-1)}U)(z) = \int_{z_0}^{z} u_{2,1} dx + u_{2,2} dy,$$

и т. д.

Согласно [9, теорема 2.10.1] аналогичный факт справедлив и в случае, когда $D_0 = \{|z| > R\} \subseteq D$ представляет собой внешность круга. Более точно, уравнение $\mathcal{D}u = U$ с правой частью $U \in [C^{2l-1}_{\lambda-2l+1}(\overline{D}_0, \infty)]^{2l}$, удовлетворяющей условию (2.1), всегда разрешимо в классе $C^{2l}_{\lambda}(\overline{D}_0, \infty)$. Здесь роль z_0 играет бесконечно удаленная точка, т. е. интегрирование ведется вдоль луча $\{sz, \ s \geqslant 1\}$.

По отношению к исходной области D решением уравнения $\mathcal{D}u = U$ с правой частью $U \in X_0$ служит многозначная функция u, принадлежащая классу $C^{2l,\mu}$ в конечных односвязных подобластях D_0 и классу $C^{2l,\mu}_{\lambda}(\overline{D}_0, \infty)$ во внешности круга. При обходе связных компонент контура она получает приращение в виде некоторого многочлена $p \in P_{2l-2}$. Этот факт можем выразить следующим образом. Пусть Γ состоит из простых контуров $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n$. Соединим внутри $D \setminus \{z_0\}$ контуры Γ_0 и Γ_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, дугой L_j, считая эти дуги попарно непересекающимися. Тогда в области $D_0 = D \setminus (L_1 \cup \ldots \cup L_n)$ решение u рассматриваемого уравнения однозначно. Предполагая дуги L_j ориентируемыми, для односторонних предельных значений $u_j^{\pm}$ на L_j функции u будем иметь соотношения

$$u_j^+ - u_j^- = p_j\big|_{L_j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

с некоторыми $p_j \in P_{2l-2}$, причем аналогичные соотношения выполняются и для частных производных функций u и p_j до порядка $k-1$ включительно. Очевидно, отображение $U \to (p_1, \ldots, p_n)$ переводит пространство X на все $(P_{2l-2})^n$, и класс $\mathcal{X}_0$ описывается условиями $p_1 = \ldots = p_n = 0$ в этих соотношениях. Поскольку $\dim P_{2l-2} = l(2l-1)$, отсюда следует равенство (2.2). $\square$

Обратимся к уравнению (1.1) с коэффициентами $a_{rk} = 0$. Пользуясь обратным оператором $\mathcal{D}^{-1} : \mathcal{X}_0 \to C^{2l,\mu}_{\lambda}$, это уравнение вместе с соотношениями (2.1), определяющими пространство $X_0 \supseteq \mathcal{X}_0$, можем записать в форме эллиптической системы первого порядка для вектора $U \in \mathcal{X}_0$. Она определяется дифференциальным оператором

$$L_A U = \frac{\partial U}{\partial y} - A \frac{\partial U}{\partial x}, \quad U \in X, \tag{2.3}$$

с постоянной $2l \times 2l$-матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_{2l}^{-1}a_0 & -a_{2l}^{-1}a_1 & -a_{2l}^{-1}a_2 & \ldots & -a_{2l}^{-1}a_{2l-1} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, этот оператор ограничен $X \to Y$, где для краткости положено $Y = (C^{\mu}_{\lambda-2l})^{2l}$. В пространстве Y вектор-функций $F = (F_1, \ldots, F_{2l})$ выделим подпространство Y_0 по условиям $F_1 = \ldots = F_{2l-1} = 0$. В частности, подпространство $X_0 \subseteq X$, выделяемое условиями (2.1), можно трактовать как прообраз

$$X_0 = L_A^{-1}(Y_0). \tag{2.4}$$

В принятых обозначениях упомянутая выше эллиптическая система первого порядка для вектора $U \in \mathcal{X}_0$ запишется в виде

$$L_A U = F \tag{2.5}$$

с вектором $F = (0, \ldots, 0, f) \in Y_0$.

Отметим следующее важное свойство оператора L_A.

Лемма 2.2. *Оператор L_A допускает правый обратный, т. е. такой ограниченный линейный оператор $L_A^{(-1)} : Y \to X$, что $L_A L_A^{(-1)} F = F$ для всех $F \in Y$. В частности, подпространство $X_0 \subseteq X$ дополняемо, т. е. $X = X_0 \oplus X_1$ для некоторого замкнутого подпространства $X_1 \subseteq X$.*

Доказательство. Хорошо известно, что собственные значения матрицы A совпадают с корнями характеристического многочлена χ уравнения (1.1). В частности, для любого ненулевого комплексного числа $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ матрица $\xi_A = \xi_1 1 + \xi_2 A$ обратима. Исходя из $2l$-вектор-функции $\varphi \in C^\mu_{\lambda-1}(\mathbb{C}, \infty)$, заданной на всей плоскости, рассмотрим интеграл

$$(T\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{D^\pm} (t - z)^{-1}_A \varphi(t) d_2 t, \quad z \in D^\pm, \tag{2.6}$$

где $d_2 t$ означает элемент площади. В случае скалярной матрицы $A = i$ с точностью до множителя $2i$ интеграл $T\varphi$ представляет собой классический интеграл Помпейю. Поэтому естественно в общем случае матрицы A этот интеграл называть обобщенным интегралом Помпейю.

Также легко проверяется, что при дополнительном условии $\varphi^1 \in C^1$ функция $U = T\varphi$ также непрерывно дифференцируема и удовлетворяет неоднородной системе

$$L_A(T\varphi) = \varphi. \tag{2.7}$$

В действительности этот факт справедлив и для функций φ, локально удовлетворяющих условию Гельдера (см., например, [9, лемма 3.4.2]).

Более точное поведение этих интегралов вблизи контура Γ изучено в [9] для более общих ядер, однородных степени -1, в терминах пространств Гельдера C^μ и $C^{1,\mu}$. В частности, оператор T ограничен $C^\mu_{\lambda-1}(\mathbb{C}, \infty) \to C^{1,\mu}_\lambda(\mathbb{C}, \infty)$, $-1 < \lambda < 0$, и, следовательно, служит правым обратным к L_A в указанных пространствах.

Применим его к построению правого обратного $L_A^{(-1)} : C^\mu_{\lambda-2l} \to C^{1,\mu}_{\lambda-2l+1}$ в области D. Не ограничивая общности, можно считать, что $0 \notin \overline{D}$, так что для любого целого k матрица-функция $H_k(z) = z^k_A$ бесконечно дифференцируема в области D. При $k = -1$ она уже использовалась в (2.6). Согласно [9], однородная степени нуль функция $|z|^{-k} H_k(z)$ принадлежит $C^{n,\mu}_0$, так что оператор умножения $F \to H_k F$ осуществляет изоморфизм $C^{n,\mu}_\nu \to C^{n,\mu}_{\nu+k}$. Легко видеть, что матрица-функция H_k удовлетворяет однородному уравнению $L_A H_k = 0$, т. е.

$$\frac{\partial H_k}{\partial y} - A \frac{\partial H_k}{\partial x} = 0.$$

Кроме того, ее значения $H_k(z)$ коммутируют с A, так что

$$L_A(H_k F) = H_k L F \tag{2.8}$$

для любой вектор-функции F.

Введем теперь оператор $L_A^{(-1)}$ по формуле

$$(L_A^{(-1)} F)(z) = H_{-2l+1}(z)[T(H_{2l-1} F)^*](z), \quad z \in D,$$

который, очевидно, ограничен $C^\mu_{\lambda-2l} \to C^{1,\mu}_{\lambda-2l+1}$. В силу (2.7), (2.8) он действительно является правым обратным к L_A, что осуществляется прямой проверкой:

$$[L_A(L_A^{(-1)} F)](z) = H_{-2l+1}(z)(H_{2l-1} F)^*(z) = F(z), \quad z \in D.$$

Что касается второго утверждения леммы, то запишем $Y = Y_0 \oplus Y_1$, где Y_1 состоит из векторов $F = (F_1, \ldots, F_{2l-1}, 0)$, и положим $X_1 = L_A^{(-1)}(Y_1)$. В силу равенства $L_A L_A^{(-1)} = 1$ подпространство X_1 замкнуто. Если $U \in X_0 \cap X_1$, то по определению $U = L_A^{(-1)} F$ для некоторого $F \in Y_1$ и $L_A U \in Y_0$. Но тогда $F = L_A U \in Y_0 \cap Y_1$ и, значит, $F = 0$ и $U = L_A^{(-1)} F = 0$. С другой стороны, для $U \in X$

запишем $L_A = F_{(0)} + F_{(1)}$ с $F_{(k)} \in Y_k$. Тогда $U_{(1)} = L_A^{(-1)} F_{(1)} \in X_1$ и $L_A(U - U_{(1)}) = F_{(0)}$, так что $U_{(0)} = U - U_{(1)} \in X_0$. Следовательно, $X = X_0 \oplus X_1$. $\square$

Обратимся к краевому условию (1.2) задачи $\mathcal{N}_0$. Аналогично [5], порядки дифференцирования в краевом условии (1.2) можем выровнять с помощью видоизмененного оператора касательного дифференцирования на контуре Γ. Напомним, что он состоит из связных компонент $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. Для функции $\varphi \in C^1(\Gamma)$ положим

$$d\varphi = \varphi' + d^0\varphi, \quad (d^0\varphi)\big|_{\Gamma_i} = \frac{1}{|\Gamma_i|}\int\limits_{\Gamma_i} \varphi(t)d_1t,$$

где штрих означает дифференцирование по параметру длины дуги, $|\Gamma_i|$ — длина контура Γ_i и d_1t означает элемент длины дуги. Смысл этого определения в том, что оператор d обратим $C^1(\Gamma) \to C(\Gamma)$. Действуя на j-ое уравнение краевого условия (1.2), его можем записать в виде

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial e}\right)^{2l-k_j}\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{k_j-1} u + c_j^0 u\right]\Big|_\Gamma = d^{k-k_j} f_j,$$

где

$$c_j^0 u = \sum_{0\leqslant r\leqslant s\leqslant 2l-2} c_{rsj}^0 \frac{\partial^s u}{\partial^{s-r}x\partial^r y} + d^0\left(\frac{\partial^{k_j-1}u}{\partial n^{k_j-1}}\right)$$

с некоторыми $c_{rsj}^0 \in C^{1,\nu}(\Gamma)$. По отношению к $l \times 2l$-матрице-функции $C = (C_{jk}) \in C^{1,\nu}(\Gamma)$, элементы которой определяются из соотношений

$$\sum_{k=1}^{2l} C_{jk}(t)z^{k-1} = [e_1(t) + e_2(t)z]^{2l-k_j}[-e_2(t) + e_1(t)z]^{k_j-1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant l, \tag{2.9}$$

аналогично предыдущему, эти краевые условия можем представить в виде

$$CU^+ + C^0U = f^0, \tag{2.10}$$

где знак + указывает на граничное значение функций, оператор $C^0 = c^0\mathcal{D}^{-1}$ ограничен $\mathcal{X}_0 \to [C^{1,\mu}(\Gamma)]^l$ и положено $f_j^0 = d^{k-k_j} f_j$. Поскольку операторы c_j^0 ограничены $C_\lambda^{2l,\mu} \to C^{2,\mu}(\Gamma)$, в действительности оператор C^0 компактен $\mathcal{X}_0 \to [C^{1,\mu}(\Gamma)]^l$.

В результате получаем задачу (2.5), (2.10) в классе $\mathcal{X}_0$, которая эквивалентна задаче $\mathcal{N}_0$ и которую обозначим символом $\mathcal{R}_0$. Целесообразно ее распространить на более широкий класс X, на котором оператор C^0 не определен. Это препятствие можно обойти следующим образом. В силу лемм 2.1, 2.2 существует проектор P банахова пространства X на его замкнутое подпространство $\mathcal{X}_0$. С помощью него можем рассмотреть обобщенную задачу Римана—Гильберта

$$L_AU = f^1, \quad (CU^+ + C^0PU)\big|_\Gamma = f^0 \tag{2.11}$$

в классе X, где для единообразия положено $f^1 = F$. Эту задачу в классах X и X_0 обозначим, соответственно, R и R_0, а в классе $\mathcal{X}_0$ она переходит в задачу $\mathcal{R}_0$.

Следующая лемма устанавливает связь между индексами этих задач.

Лемма 2.3. *Если задача R фредгольмова, то фредгольмовы и задачи R_0, $\mathcal{R}_0$, причем индексы этих задач связаны соотношениями*

$$\operatorname{ind} R_0 - \operatorname{ind} \mathcal{R}_0 = nl(2l-1), \quad \operatorname{ind} R = \operatorname{ind} R_0. \tag{2.12}$$

Доказательство. Пусть для краткости $Z = [C^{1,\mu}(\Gamma)]^l$. Тогда операторы задач R, R_0 и $\mathcal{R}_0$, которые обозначим теми же символами, действуют, соответственно, $X \to Y \times Z$, $X_0 \to Y_0 \times Z$ и $\mathcal{X}_0 \to Y_0 \times Z$.

Предположим, что задача R фредгольмова. Тогда по определению ядро $\ker R$, т. е. класс решений $U \in X$ однородной задачи, конечномерно и существуют такие линейно независимые функционалы $(y_i^*, z_i^*) \in Y^* \times Z^*$, $1 \leqslant i \leqslant s$, что в обозначениях (2.11) условия «ортогональности»

$$y_i^*(f^1) + z_i^*(f^0) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant s, \tag{2.13}$$

необходимы и достаточны для разрешимости неоднородной задачи R. При этом разность между размерностью $\dim(\ker R)$ и s определяет индекс $\operatorname{ind} R$ задачи.

В силу (2.4) ядро $\ker R_0$ задачи R_0 совпадает с $\ker R$, а функционалы (y_i^*, z_i^*) непрерывны и на $Y_0 \times Z$, поэтому с учетом (2.4) условия (2.13) достаточны и для разрешимости задачи R_0 с правыми частями $(f^1, f^0) \in Y_0 \times Z$. Однако, вообще говоря, эти функционалы, рассматриваемые как элементы $Y_0^* \times Z^*$, не являются линейно независимыми.

Однако в рассматриваемой ситуации их линейная независимость обеспечивается леммой 2.2. В самом деле, на основании этой леммы функционалы y_i^* и z_i^* связаны соотношением

$$y_i^*(f^1) = -z_i^*[(C^+ + C^0 P)(L_A^{(-1)} f^0)], \quad 1 \leqslant i \leqslant s. \tag{2.14}$$

Поэтому пусть для некоторой линейной комбинации линейный функционалов (y_i^*, z_i^*) выполняется тождество

$$\sum_1^s \lambda_i [y_i^*(f^1) + z_i^*(f^0)] = 0, \quad (f^1, f^0) \in Y^0 \times Z,$$

так что, в частности, линейные функционалы z_i^* линейно зависимы. Но тогда в силу (2.14) этим свойством обладают и (y_i^*, z_i^*), что невозможно.

Таким образом, задача R_0 фредгольмова и ее индекс совпадает с индексом задачи R. Согласно лемме 2.1 оператор R_0 получен расширением $\mathcal{R}_0$ на $nl(2l-1)$ измерений, поэтому на основании известных свойств фредгольмовых операторов (см. [8,9]) отсюда следует фредгольмовость оператора $\mathcal{R}_0$ и первое равенство в (2.12). $\square$

Совместно с леммами 1.1, 2.3 следующая теорема о фредгольмовой разрешимости задачи R приводит к справедливости теоремы 1.1.

Теорема 2.1. *В предположении* (1.7) *задача R фредгольмова в классе X и в обозначениях* (1.8) *ее индекс дается формулой*

$$\operatorname{ind} R = 2(n+1)\varkappa_0 + 2(n+1)\sum_{j=1}^m l_j(2l - l_j) - 2l(2l-1) - (n+1)l. \tag{2.15}$$

Доказательство. Аналогично (1.6) введем $2l \times l$-матрицу $B = W_h(\nu_1, \dots, \nu_m)$ по отношению к $2l$-вектору $h(z) = (1, z, \dots, z^{2l-1})$. Вместе с комплексно сопряженной $\overline{B}$ она образует $2l \times 2l$-матрицу $\widetilde{B} = (B\,\overline{B})$. Как показано в [5], эта матрица обратима и приводит матрицу A в (2.3) к жордановой блочно-диагональной форме:

$$\widetilde{B}^{-1} A \widetilde{B} = \operatorname{diag}(J, \overline{J}), \quad J = \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_m), \tag{2.16}$$

где $J_k \in \mathbb{C}^{l \times l_k}$ является клеткой Жордана, отвечающей корню ν_k характеристического многочлена. Исходя из $l \times 2l$-матрицы $C(t)$, фигурирующей в (2.9), (2.10), составим $l \times l$-матрицу-функцию $C(t)B$ на Γ.

Как и при доказательстве леммы 2.2, без ограничения общности можно считать, что точка $z = 0$ лежит вне замкнутой области $\overline{D}$. Рассмотрим матрицу-функцию $H(z) = z_A^{1-2l}$, уже встречающуюся в этой лемме. Оператор умножения $V \to HV$ на эту функцию осуществляет изоморфизм пространства $C_\lambda^{1,\mu}$ на $X = C_{\lambda-2l+1}^{1,\mu}$. Поэтому подстановка $U = H\widetilde{U}$ сводит задачу (2.11) к эквивалентной задаче

$$L_A \widetilde{U} = \widetilde{F}, \quad (CH^+)\widetilde{U}^+ + C^0(H\widetilde{U}) = f^0 \tag{2.17}$$

в классе $C_\lambda^{1,\mu}$ с соответствующей правой частью $\widetilde{F} = H^{-1}F \in C_{\lambda-1}^\mu$. Согласно [12, теорема 4] в предположении

$$\det[\widetilde{C}(t)B] \neq 0, \quad t \in \Gamma, \tag{2.18}$$

задача (2.17) фредгольмова в классе $C_\lambda^{1,\mu}$ и ее индекс дается формулой

$$\operatorname{ind} \widetilde{R} = -\frac{1}{\pi}[\arg\det(CH^+B)]\big|_\Gamma - (n+1)l,$$

где приращение непрерывной ветви аргумента на контуре Γ осуществляется в направлении, оставляющем область D слева.

В силу (2.16) имеем равенство $z_A B = B z_J$ с матрицей $(x+iy)_J = x1 + yJ$, так что $HB = Bz_J^{1-2l}$. Поэтому (2.18) равносильно

$$\det[C(t)B] \neq 0, \quad t \in \Gamma, \tag{2.19}$$

и предыдущая формула переходит в

$$\operatorname{ind}\widetilde{R} = -\frac{1}{\pi}[\arg\det(CB)]\big|_\Gamma - \frac{1}{\pi}[\arg\det(t_J^{1-2l})]\big|_\Gamma - (n+1)l. \tag{2.20}$$

Очевидно,

$$\det z_J = \prod_{j=1}^m (x+\nu_j y)^{(1-2l)l_j}.$$

По условию, точка $z=0$ лежит внутри одного из $n+1$ простых контуров, составляющих Γ (пусть она лежит внутри Γ_0). Тогда

$$\frac{1}{2\pi}[\arg\det(t_J^{1-2l})]_{\Gamma_0} = (2l-1)l, \quad \frac{1}{2\pi}[\arg\det(t_J^{1-2l})]_{\Gamma_j} = 0,\ 1\leqslant j\leqslant n, \tag{2.21}$$

где учтено, что положительное по отношению к D направление на Γ осуществляется по часовой стрелке.

Матрицу $C(t)B$ можно записать в форме

$$C(t)B = W_p(\nu_1,\dots,\nu_m),$$

где в обозначениях (1.5) вектор $p(z)=p(e,z)$ определяется компонентами $p_j(e,z) = (e_1 + e_2 z)^{2l-1}[\omega(e,z)]^{k_j-1}$. Как показано в [4], отсюда

$$\det[C(t)B] = \prod_{j=1}^m (e_1+e_2\nu_j)^{l_j(2l-l_j)} \det W_g[\omega(e,\nu_1),\dots,\omega(e,\nu_m)],$$

где в правой части равенства под $e\in\mathbb{T}$ понимается единичный касательный к Γ вектор $e(t)$. В частности, условие (2.19) равносильно (1.7).

Поскольку при движении на Γ в положительном направлении (т. е. по часовой стрелке) вектор $e(t)$ меняется на $\mathbb{T}$ по часовой стрелке, можем написать

$$-\frac{1}{\pi}[\arg\det W_g[\omega(e,\nu_1),\dots,\omega(e,\nu_m)]]\big|_\Gamma = 2(n+1)\varkappa_0,$$

$$\frac{1}{2\pi}\arg(e_1+\nu_j e_2)\big|_\Gamma = \sum_{j=0}^n \frac{1}{2\pi}\arg(e_1+\nu_j e_2)\big|_{\Gamma_j} = -n-1.$$

Следовательно,

$$-\frac{1}{\pi}[\arg\det(CB)]\big|_\Gamma = 2(n+1)\varkappa_0 + 2(n+1)\sum_{j=1}^m l_j(2l-l_j).$$

Подстановка этого равенства вместе с (2.21) в (2.20) приводит к справедливости формулы (2.16). $\square$

3. Заключительные замечания

Результат, аналогичный теореме 1.1, справедлив и для случая конечной области с той разницей, что для индекса имеем выражение

$$\varkappa = 2(n-1)\left[\varkappa_0 + 2\sum_{i<j} l_i l_j\right], \tag{3.1}$$

которое в случае $n=0$ односвязной области D полностью совпадает с формулой, приведенной в [4]. Отметим в этой связи, что в формуле индекса, указанной в работе [11], допущена ошибка вместе с соответствующим пробелом в ее доказательстве. Этот пробел легко восполнить с помощью приведенных выше рассуждений.

Итак, пусть область D конечна и ограничена контуром $\Gamma\in C^{2l,\nu}$, составленным из простых контуров $\Gamma_0,\dots,\Gamma_m$. При этом предполагается, что контур Γ_0 является внешним и охватывает остальные компоненты. Рассмотрим задачу $\mathcal{N}$ в классе $C^{2l,\mu}(\overline{D})$ для уравнения (1.1) с коэффициентами $a_{r,k}\in C^\mu(\overline{D})$. Как и выше, с ней свяжем задачу $\mathcal{R}$ в классе $X=C^{1,\mu}(\overline{D})$ для системы (2.3), определяемой краевым условием (2.11). Тогда аналогом леммы 2.3 здесь является следующая связь между индексами $\varkappa$ и $\operatorname{ind} R$ этих задач:

$$\varkappa = (1-n)l(2l-1) + \operatorname{ind} R. \tag{3.2}$$

Согласно [12, теорема 1] в предположении (2.19) задача R фредгольмова и ее индекс дается формулой

$$\operatorname{ind} R = -\frac{1}{\pi}[\arg\det(CB)]\big|_\Gamma - (n-1)l. \tag{3.3}$$

Поскольку контур Γ_0 ориентирован против часовой стрелки, а контуры $\Gamma_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n,$ — по часовой стрелке, предыдущие рассуждения дают равенство

$$-\frac{1}{\pi}[\arg\det(CB)]\big|_\Gamma = 2(n-1)\varkappa_0 + 2(n-1)\sum_{j=1}^m l_j(2l-l_j),$$

которое совместно с (3.2) и (3.3) приводит к формуле (3.1).

Как показано в [4], для следующих частных случаев корней характеристического уравнения и набора порядков $k_1, \ldots, k_l$ величина $\varkappa_0$ в (1.8) вычисляется явно:

$$\varkappa_0 = \begin{cases} -2\sum\limits_{i<j} l_i l_j, & k_{j+1} - k_j \equiv 1, \\ 0, & m = 1. \end{cases}$$

Отметим еще, что теорему 2 работы [11] можно переформулировать следующим образом.

Теорема 3.1. *Условие* (1.7) *равносильно тому, что рациональная функция*

$$R(\zeta) = (\det W_g)[\gamma_1(\zeta), \ldots, \gamma_m(\zeta)], \quad \gamma_k(\zeta) = \frac{\nu_k - \zeta}{1 + \nu_k \zeta},$$

не имеет вещественных нулей на расширенной действительной прямой $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, *и при выполнении этого условия величина* $-2\varkappa_0$ *совпадает с числом нулей этой функции в нижней полуплоскости, взятое с учетом их кратности.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А. В.* О некоторых свойствах полигармонических функций// Дифф. уравн. — 1988. — *24*, № 5. — С. 825–831.
2. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* О периодических решениях параболического уравнения второго порядка во внешних областях// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1985. — *4*. — С. 38–47.
3. *Кошанов Б. Д., Кулимбек Ж. К.* Поведение решений уравнения Пуассона и бигармонического уравнения// Мат. ж. — 2016. — *16*, № 1. — С. 118–134.
4. *Кошанов Б., Солдатов А. П.* Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения на плоскости// Дифф. уравн. — 2016. — *52*, № 12. — С. 1666–1681.
5. *Малахова Н. А., Солдатов А. П.* Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения высокого порядка// Дифф. уравн. — 2008. — *44*, № 8. — С. 1077–1083.
6. *Матевосян О. А.* О единственности решения первой краевой задачи теории упругости для неограниченных областей// Усп. мат. наук. — 1993. — *48*, № 6. — С. 159-160.
7. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. — М.: Наука, 1991.
8. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи—Зингера об индексе. — М.: Мир, 1970.
9. *Солдатов А. П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *63*, № 1. — С. 1–179.
10. *Солдатов А. П.* Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения на плоскости в многосвязной области// Владикавказ. мат. ж. — 2017. — *19*, № 3. — С. 51–58.
11. *Солдатов А. П.* О фредгольмовости и индексе обобщенной задачи Неймана// Дифф. уравн. — 2020. — *56*, № 2. — С. 217–225.
12. *Солдатов А. П., Чернова О. В.* Задача Римана—Гильберта для эллиптических систем первого порядка на плоскости с постоянными старшими коэффициентами// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. — 2018. — *149*. — С. 95–102.
13. *Koshanov B. D., Soldatov A. P.* About the generalized Dirichlet—Neumann problem for an elliptic equation of high order// AIP Conference Proceedings. — 2018. — *1997*. — 020013.

14. *Matevossian O. A.* On solutions of the Neumann problem for the biharmonic equation in unbounded domains// Math. Notes. — 2015. — *98*. — С. 990–994.
15. *Schechter M.* General boundary value problems for elliptic partial differential equations// Commun. Pure Appl. Math. — 1950. — *12*. — С. 467–480.

Б. Д. Кошанов
Институт математики и математического моделирования Министерства образования и науки Республики Казахстан, Алматы, Казахстан
E-mail: koshanov@list.ru

А. П. Солдатов
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, Москва, Россия
E-mail: soldatov48@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-564-575 UDC 517.956

On the Solvability of the Generalized Neumann Problem for a Higher-Order Elliptic Equation in an Infinite Domain

© 2021 **B. D. Koshanov, A. P. Soldatov**

Abstract. We consider the generalized Neumann problem for a $2l$th-order elliptic equation with constant real higher-order coefficients in an infinite domain containing the exterior of some circle and bounded by a sufficiently smooth contour. It consists in specifying of the $(k_j - 1)$th-order normal derivatives where $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_l \leqslant 2l$; for $k_j = j$ it turns into the Dirichlet problem, and for $k_j = j + 1$ into the Neumann problem. Under certain assumptions about the coefficients of the equation at infinity, a necessary and sufficient condition for the Fredholm property of this problem is obtained and a formula for its index in Hölder spaces is given.

REFERENCES

1. A. V. Bitsadze, “O nekotorykh svoystvakh poligarmonicheskikh funktsiy” [Some properties of polyharmonic functions], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1988, **24**, No. 5, 825–831 (in Russian).
2. V. A. Kondrat’ev and O. A. Oleynik, “O periodicheskikh resheniyakh parabolicheskogo uravneniya vtorogo poryadka vo vneshnikh oblastyakh” [On periodic solutions of a second-order parabolic equation in outer domains], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 1985, **4**, 38–47 (in Russian).
3. B. D. Koshanov and Zh. K. Kulimbek, “Povedenie resheniy uravneniya Puassona i bigarmonicheskogo uravneniya” [Behavior of solutions of the Poisson equation and the biharmonic equation], *Mat. zh.* [Math. J.], 2016, **16**, No. 1, 118–134 (in Russian).
4. B. Koshanov and A. P. Soldatov, “Kraevaya zadacha s normal’nymi proizvodnymi dlya ellipticheskogo uravneniya na ploskosti” [Boundary-value problem with normal derivatives for an elliptic equation on a plane], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2016, **52**, No. 12, 1666–1681 (in Russian).
5. N. A. Malakhova and A. P. Soldatov, “Ob odnoy kraevoy zadache dlya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka” [On a boundary-value problem for a higher-order elliptic equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2008, **44**, No. 8, 1077–1083 (in Russian).

6. O. A. Matevosyan, “O edinstvennosti resheniya pervoy kraevoy zadachi teorii uprugosti dlya neogranichennykh oblastey” [On the uniqueness of the solution of the first boundary-value problem of elasticity theory for unbounded domains], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1993, **48**, No. 6, 159-160 (in Russian).
7. S. A. Nazarov and B. A. Plamenevskii, *Ellipticheskie zadachi v oblastyakh s kusochno gladkoy granitsey* [Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries], Nauka, Moscow, 1991 (in Russian).
8. R. Palais, *Seminar po teoreme At'i—Zingera ob indekse* [Seminar on the Atiyah–Singer Index Theorem], Mir, Moscow, 1970 (Russian translation).
9. A. P. Soldatov, “Singulyarnye integral'nye operatory i ellipticheskie kraevye zadachi” [Singular integral operators and elliptic boundary-value problems], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **63**, No. 1, 1–179 (in Russian).
10. A. P. Soldatov, “Ob odnoy kraevoy zadache dlya ellipticheskogo uravneniya na ploskosti v mnogosvyaznoy oblasti” [On one boundary-value problem for an elliptic equation on a plane in a multiply connected domain], *Vladikavkaz. mat. zh.* [Vladikavkaz. Math. J.], 2017, **19**, No. 3, 51–58 (in Russian).
11. A. P. Soldatov, “O fredgol'movosti i indekse obobshchennoy zadachi Neymana” [On the Fredholm property and the index of the generalized Neumann problem], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2020, **56**, No. 2, 217–225 (in Russian).
12. A. P. Soldatov and O. V. Chernova, “Zadacha Rimana—Gil'berta dlya ellipticheskikh sistem pervogo poryadka na ploskosti s postoyannymi starshimi koeffitsientami” [The Riemann–Hilbert problem for first-order elliptic systems on a plane with constant higher-order coefficients], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee pril.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2018, **149**, 95–102 (in Russian).
13. B. D. Koshanov and A. P. Soldatov, “About the generalized Dirichlet—Neumann problem for an elliptic equation of high order,” *AIP Conference Proceedings*, 2018, **1997**, 020013.
14. O. A. Matevossian, “On solutions of the Neumann problem for the biharmonic equation in unbounded domains,” *Math. Notes*, 2015, **98**, 990–994.
15. M. Schechter, “General boundary value problems for elliptic partial differential equations,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1950, **12**, 467–480.

B. D. Koshanov
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: koshanov@list.ru

A. P. Soldatov
Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
E-mail: soldatov48@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 3 (2021). С. 576–595
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-576-595 УДК 517.929

ОБ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2021 г. **А. Л. СКУБАЧЕВСКИЙ, Н. О. ИВАНОВ**

Аннотация. В работе рассматривается вторая краевая задача для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами на интервале $(0, d)$. Исследован вопрос существования обобщенного решения. Получены условия на правую часть уравнения, обеспечивающие гладкость обобщенных решений на всем интервале $(0, d)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Обобщенные решения первой краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа на конечном интервале впервые рассматривались в работах [2, 3]. Было показано, что решения такой задачи обладают целым рядом принципиально новых свойств. Например, гладкость обобщенных решений может нарушаться во внутренних точках интервала даже при бесконечно дифференцируемой правой части. В работах [4, 15] были получены условия на правые части уравнения, обеспечивающие гладкость обобщенных решений первой краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений на всем интервале. Вопрос о нахождении таких условий в случае второй краевой задачи является открытым. В работах [10, 14] в случаях как первой, так и второй краевых задач были получены условия на коэффициенты дифференциально-разностного уравнения, при выполнении которых гладкость обобщенных решений дифференциально-разностного уравнения сохраняется на всем интервале для любой правой части. Краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений возникают во многих важных приложениях, в частности, в задаче об успокоении системы управления с последействием [6, 8, 11, 12, 15].

Первый автор был поддержан РФФИ, грант № 20-01-00288.

В настоящей работе исследуется вопрос о разрешимости второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами на интервале $(0, d)$, а также получены условия на правую часть уравнения, при выполнении которых гладкость обобщенных решений сохраняется на всем интервале $(0, d)$.

Рассматривается задача

$$-\big(R_Q u'\big)' = f(x), \quad x \in Q, \tag{1}$$

$$(R_Q u')(0) = (R_Q u')(d) = 0. \tag{2}$$

Здесь $Q = (0, d)$, $d = n+\theta$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leqslant 1$, $f \in L_2(Q)$ — комплекснозначная функция, разностный оператор R_Q будет определен позже.

Статья построена следующим образом. В разделе 1 описываются разностные операторы R_Q, действующие на интервале Q. В разделе 2 излагаются некоторые известные результаты из вариационной теории абстрактных краевых задач, необходимые в дальнейшем. В разделе 3 исследуется вопрос существования обобщенного решения задачи (1), (2). Разделы 4 и 5 посвящены гладкости обобщенных решений задачи (1), (2). В дальнейшем в неравенствах через c, c_i и k_j будем обозначать положительные постоянные, которые не зависят от функций, входящих в неравенства, если не оговорены другие условия на эти константы.

1. Разностные операторы на интервале Q

Введем операторы $R : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, $I_Q : L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R})$ и $P_Q : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(Q)$ следующим образом:

$$(Ru)(x) = \sum_{j=-n}^{n} a_j(x) u(x+j), \tag{1.3}$$

$$(I_Q v)(x) = v(x), \quad x \in Q; \quad (I_Q v)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus Q; \tag{1.4}$$

$$(P_Q v)(x) = v(x), \quad x \in Q; \tag{1.5}$$

где $a_j(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ — комплекснозначные функции. Сдвиги аргументов $x \mapsto x + j$ оператора R могут отображать точки интервала Q в $\mathbb{R} \setminus Q$. С учетом этих отображений краевые условия для уравнения (1) следует задавать не только на границе Q, но и на множестве $\mathbb{R} \setminus Q$. Для рассмотрения однородных краевых условий вводится оператор I_Q, который является оператором продолжения нулем функции из $L_2(Q)$ в $\mathbb{R} \setminus Q$. Для изучения дифференциально-разностного уравнения не на всем множестве $\mathbb{R}$, а только лишь на интервале $Q = (0, d)$, вводится оператор P_Q, являющийся оператором сужения функции из $L_2(\mathbb{R})$ на Q.

Введем также оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ по формуле

$$R_Q = P_Q R I_Q. \tag{1.6}$$

Лемма 1.1. *$I_Q^* = P_Q$, $P_Q^* = I_Q$, т. е. для всех $u \in L_2(Q)$, $v \in L_2(\mathbb{R})$ имеем*

$$(I_Q u, v)_{L_2(\mathbb{R})} = (u, P_Q v)_{L_2(Q)}.$$

Доказательство следует из (1.4), (1.5).

Лемма 1.2. *Операторы $R : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ ограниченные;*

$$(R^* u)(x) = \sum_{j=-n}^{n} \overline{a_j(x-j)} u(x-j), \quad R_Q^* = P_Q R^* I_Q.$$

Доказательство следует из леммы 1.1.

Лемма 1.3. *Если оператор $R : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ самосопряженный, то самосопряженным является и оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$.*

Доказательство следует из лемм 1.1 и 1.2.

Введенные операторы используются для изучения краевой задачи (1), (2).

Рассмотрим разбиение интервала $Q = (0, d)$ на подынтервалы, которые образуются из этого интервала выбрасыванием орбит его концов, порождаемых группой целочисленных сдвигов. Другими словами, указанные подынтервалы являются связными компонентами множества

$(0,d) \setminus (\{j\}_1^n \cup \{d-j\}_1^n)$. В зависимости от значения θ получим один или два класса непересекающихся подынтервалов. Если $\theta = 1$, то получим один класс непересекающихся подынтервалов $Q_{1k} = (k-1,k)$ при $k = 1,\dots,n+1$; если же $0 < \theta < 1$, то мы рассматриваем два класса непересекающихся подынтервалов: $Q_{1k} = (k-1, k-1+\theta)$ при $k = 1,\dots,n+1$ и $Q_{2k} = (k-1+\theta, k)$ при $k = 1,\dots,n$. Отметим, что все подынтервалы одного класса получаются друг из друга сдвигом на некоторое целое число.

Пример 1.1. Пусть $d = 2$. Тогда $n = 1$, $\theta = 1$. Получим один класс подынтервалов $Q_{11} = (0,1)$ и $Q_{12} = (1,2)$ (рис. 1).

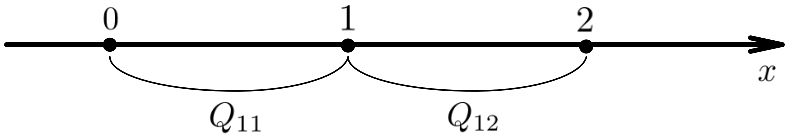


Рис. 1. $\theta = 1$

Пример 1.2. Пусть $d = e$. Тогда $n = 2$, $\theta = e - 2$. Получим два класса подынтервалов $Q_{11} = (0, e-2)$, $Q_{12} = (1, e-1)$, $Q_{13} = (2, e)$ и $Q_{21} = (e-2, 1)$, $Q_{22} = (e-1, 2)$ (рис. 2).

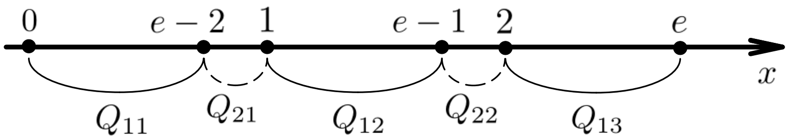


Рис. 2. $\theta = e - 2$

Через $L_2\Big(\bigcup\limits_k Q_{sk}\Big)$ обозначим подпространство функций из $L_2(Q)$, равных нулю вне $\bigcup\limits_k Q_{sk}$, $k = 1,\dots,N(s)$, где $N(1) = n+1$, $N(2) = n$; $s = 1,2$, если $0 < \theta < 1$; $s = 1$, если $\theta = 1$. Очевидно, $L_2\Big(\bigcup\limits_k Q_{1k}\Big) = L_2(Q)$, если $\theta = 1$. Обозначим через $P_s : L_2(Q) \to L_2\Big(\bigcup\limits_k Q_{sk}\Big)$ оператор ортогонального проектирования функций на $L_2\Big(\bigcup\limits_k Q_{sk}\Big)$ в пространстве $L_2(Q)$.

Очевидно,
$$L_2(Q) = \bigoplus_s L_2\Big(\bigcup_k Q_{sk}\Big). \tag{1.7}$$
Заметим, что при $\theta = 1$ оператор $P_1 : L_2(Q) \to L_2\Big(\bigcup\limits_k Q_{1k}\Big)$ является единичным оператором. Здесь, как и ранее, $Q_{1k} = (k-1,k)$ при $k = 1,\dots,n+1$.

Из определений введенных операторов и подынтервалов вытекает следующая лемма.

Лемма 1.4. *Пространство функций* $L_2\Big(\bigcup\limits_k Q_{sk}\Big)$ *есть инвариантное подпространство оператора* R_Q.

Построим изоморфизм гильбертовых пространств
$$U_s : L_2\Big(\bigcup_k Q_{sk}\Big) \to L_2^N(Q_{s1}),$$
определив вектор-функцию $(U_s u)(x)$ следующим равенством:
$$(U_s u)_k(x) = u(x+k-1),\ x \in Q_{sk},\ k = 1,\dots,N; \tag{1.8}$$
$$L_2^N(Q_{s1}) = \prod_{k=1}^N L_2(Q_{s1}),$$

где $N = n+1$ при $s = 1$; $N = n$ при $s = 2$.

Обозначим через $R_s = R_s(x)$, $x \in \overline{Q}_{s1}$, матрицу порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами

$$r_{ij}^s(x) = a_{j-i}(x+i-1), \quad x \in \mathbb{R}; \quad i,j = 1,\dots,N(s). \tag{1.9}$$

Таким образом, матрица $R_1 = R_1(x)$ имеет вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0(x) & a_1(x) & \dots & a_n(x) \\ a_{-1}(x+1) & a_0(x+1) & \dots & a_{n-1}(x+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-n}(x+n) & a_{-n+1}(x+n) & \dots & a_0(x+n) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

а матрица $R_2 = R_2(x)$ имеет вид

$$R_2 = \begin{pmatrix} a_0(x) & a_1(x) & \dots & a_{n-1}(x) \\ a_{-1}(x+1) & a_0(x+1) & \dots & a_{n-2}(x+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-n+1}(x+n-1) & a_{-n+2}(x+n-1) & \dots & a_0(x+n-1) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, матрица R_2 может быть получена из матрицы R_1 вычеркиванием последней строки и последнего столбца. В дальнейшем будем рассматривать матрицы $R_1(x)$ при $x \in \overline{Q}_{11}$, а $R_2(x)$ при $x \in \overline{Q}_{21}$.

Лемма 1.5. *Оператор $R_{Qs} = U_s R_Q U_s^{-1} : L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$ является оператором умножения на квадратную матрицу $R_s(x)$.*

Доказательство. Положим $V \in L_2^N(Q_{s1})$ и обозначим $u = U_s^{-1}V \in L_2\Big(\bigcup\limits_k Q_{sk}\Big)$. В силу (1.8) и (1.9) получим

$$(R_{Qs}V)_i(x) = \big(U_s R_Q U_s^{-1} V\big)_i(x) = (U_s R_Q u)_i(x) = (R_Q u)(x+i-1) =$$
$$= \sum_l a_l(x+i-1)u(x+i-1+l) = \sum_{j=1}^N r_{ij}^s(x)\,(U_s u)_j(x) = \sum_{j=1}^N r_{ij}^s(x) V_j(x), \quad x \in \overline{Q}_{s1}.$$

Здесь $u(x+i-1+l) = 0$ при $x+i-1+l \notin (0,d)$. $\square$

Пусть $A : H \to H$ — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Назовем оператор A *положительным* (*неотрицательным*), если $(Ax,x) > 0$ ($(Ax,x) \geqslant 0$) для всех $x \in H$, $x \neq 0$. Назовем оператор A *положительно определенным*, если $(Ax,x) > c_1(x,x)$ для всех $x \in H$. В случае оператора умножения на эрмитову матрицу в конечномерном пространстве понятия положительного и положительно определенного операторов совпадают.

Лемма 1.6. *Оператор $R_Q + R_Q^* : L_2(Q) \to L_2(Q)$ является положительно определенным тогда и только тогда, когда матрицы $R_s(x) + R_s^*(x)$ положительно определены для всех $x \in \overline{Q}_{s1}$, $s = 1$, если $\theta = 1$; $s = 1,2$, если $0 < \theta < 1$; $R_s^*(x)$ — эрмитово сопряженные матрицы.*

Определение 1.1. Будем говорить, что дифференциально-разностное уравнение (1) удовлетворяет *условию сильной эллиптичности*, если матрицы $R_s(x) + R_s^*(x)$ положительно определены для всех $x \in \overline{Q}_{s1}$, $s = 1$, если $\theta = 1$; $s = 1,2$, если $0 < \theta < 1$.

Очевидно, условие сильной эллиптичности для уравнения (1) эквивалентно выполнению неравенства

$$\operatorname{Re}(R_s Y, Y) \geqslant c\|Y\|^2 \tag{1.10}$$

для всех $x \in \overline{Q}_{s1}$, s и $Y \in \mathbb{C}^{N(s)}$, где $s = 1,2$, если $0 < \theta < 1$, и $s = 1$, если $\theta = 1$; $c > 0$ не зависит от x и Y; $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot,\cdot\|$ — скалярное произведение и норма в $\mathbb{C}^{N(s)}$ соответственно. Далее будем предполагать, что уравнение (1) удовлетворяет условию сильной эллиптичности.

Замечание 1.1. По своим свойствам и методам исследования краевые задачи для обыкновенных функционально-дифференциальных уравнений находятся значительно ближе к краевым задачам для эллиптических дифференциальных уравнений, чем к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [15]). Например, если R_Q — оператор умножения на вещественную гладкую функцию $k(x) \neq 0$, то уравнение (1) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение, соответствующий дифференциальный оператор будет самосопряженным, а его спектр — вещественным, дискретным и полуограниченным. Если же коэффициенты оператора R_Q — вещественные числа, а матрицы R_s $(s = 1, 2)$ симметричные, невырожденные, но не знакоопределенные, то соответствующий дифференциально-разностный оператор в уравнении (1) будет самосопряженным, а его спектр вещественным и дискретным, но не будет полуограниченным (см. [15, пример 23.2]). Таким образом, термин «сильно эллиптическое дифференциально-разностное уравнение» представляется оправданным.

Определение 1.2. Краевую задачу (1), (2) будем называть *второй краевой задачей* для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения.

Пусть $W_2^k(Q)$ — пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2(Q)$, имеющих все обобщенные производные вплоть до k-ого порядка из $L_2(Q)$. Скалярное произведение для $u, v \in W_2^k(Q)$ вводится по формуле

$$(u, v)_{W_2^k(Q)} = \sum_{i=0}^{k} \int_0^d u^{(i)} \overline{v^{(i)}} dx.$$

Лемма 1.7. *Пусть* $\det R_s(x) \neq 0$ *при* $x \in \overline{Q}_{s1}$, $s = 1, 2$, *если* $0 < \theta < 1$, *и* $\det R_1(x) \neq 0$ *при* $x \in \overline{Q}_{11}$, *если* $\theta = 1$. *Тогда оператор* $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ *имеет ограниченный обратный. Пусть, кроме того,* $w \in W_2^k(Q_{sj})$ $(s = 1, 2;\ j = 1, \dots, N(s)$, *если* $0 < \theta < 1$, *и* $s = 1$, $j = 1, \dots, n+1$, *если* $\theta = 1)$. *Тогда* $R_Q^{-1} w \in W_2^k(Q_{si})$ *и*

$$\|R_Q^{-1} w\|_{W_2^k(Q_{si})} \leqslant c_0 \sum_{j=1}^{N(s)} \|w\|_{W_2^k(Q_{sj})}, \tag{1.11}$$

где $c_0 > 0$ *не зависит от* w.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.12 из [15, гл. 1, §2].

2. Некоторые сведения из вариационной теории краевых задач

Ниже мы изложим некоторые определения и результаты, содержащиеся в [9, гл. 2, §9]. Пусть V и H — гильбертовы пространства, причем V непрерывно и плотно вложено в H. Пространство H совпадает со своим антидвойственным, и если V' антидвойственно к V, то поскольку V плотно в H, можно отождествить H с подпространством пространства V'. Таким образом, $V \subset H \subset V'$.

Обозначим через $(\cdot, \cdot)$ скалярное произведение в H, а через $|\cdot|$ норму в H. Если $f \in V'$, а $v \in V$, то действие антилинейного функционала f на v мы обозначим через $\langle f, v \rangle$. В случае $f \in H$, $v \in V$ мы имеем $\langle f, v \rangle = (f, v)$.

Обозначим через $(\cdot, \cdot)_V$ и $\|\cdot\|_V$ скалярное произведение в пространстве V и норму в V соответственно.

Пусть $b(u, v)$ — полуторалинейная непрерывная форма в $V \times V$.

Определение 2.1. Полуторалинейная непрерывная форма $b(u, v)$ в $V \times V$ называется V*-эллиптической*, если

$$\operatorname{Re} b(u, u) \geqslant \alpha \|u\|_V^2 \tag{2.1}$$

для любого $u \in V$, где $\alpha > 0$ не зависит от u.

Рассмотрим следующую задачу: найти элемент $u \in V$ такой, что

$$b(u, v) = \langle f, v \rangle \tag{2.2}$$

для любого $v \in V$, где $f \in V'$.

В силу непрерывности полуторалинейной формы $b(u,v)$ в $V\times V$ мы можем представить ее в виде

$$b(u,v)=\langle Au,v\rangle\,,\quad u,v\in V, \tag{2.3}$$

где $A:V\to V'$ — линейный ограниченный оператор. Тогда задача нахождения решения $u\in V$, удовлетворяющего тождеству (2.2), эквивалентна линейному операторному уравнению вида

$$Au=f. \tag{2.4}$$

Отметим, что в случае краевых задач для сильно эллиптических дифференциальных уравнений абстрактные задачи (2.2) и (2.4) служат эквивалентными определениями обобщенных решений. В разделе 3 мы используем эти формулировки для определения обобщенных решений второй краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения.

Лемма 2.1. *Пусть полуторалинейная форма $b(u,v)$ является V-эллиптической. Тогда для любого $f\in V'$ существует единственное решение $u\in V$ тождества* (2.2)*, при этом*

$$\|u\|_V\leqslant c_0\|f\|_{V'}, \tag{2.5}$$

где $c_0>0$ не зависит от f.

Наряду с задачей о нахождении решения тождества (2.2) рассмотрим следующую задачу: найти элемент $u\in V$ такой, что

$$b(u,v)+\lambda(u,v)=\langle f,v\rangle \tag{2.6}$$

для любого $v\in V$, где $\lambda\in\mathbb{C}$ задано.

Определение 2.2. Полуторалинейная непрерывная форма $b(u,v)$ в $V\times V$ называется *V-коэрцитивной*, если существуют константы $\lambda_0\in\mathbb{R}$ и $\alpha>0$ такие, что

$$\operatorname{Re}b(u,u)+\lambda_0|u|^2\geqslant\alpha\|u\|_V^2 \tag{2.7}$$

для любого $u\in V$.

Из леммы 2.1 вытекает

Следствие 2.1. *Пусть полуторалинейная форма $b(u,v)$ является V-коэрцитивной. Тогда при $\lambda\in\mathbb{C}$ таком, что $\operatorname{Re}\lambda\geqslant\lambda_0$, для любого $f\in V'$ существует единственное решение $u\in V$ тождества* (2.6)*, при этом*

$$\|u\|_V\leqslant c_\lambda\|f\|_{V'}, \tag{2.8}$$

где $c_\lambda>0$ не зависит от f.

Эквивалентное изложение абстрактного подхода к исследованию краевых задач для сильно эллиптических дифференциальных уравнений можно найти также в [5, гл. VI].

3. Разрешимость второй краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения

Введем в $W_2^1(0,d)\times W_2^1(0,d)$ полуторалинейную форму по формуле

$$b_R(u,v)=\left(R_Qu',v'\right)_{L_2(0,d)}.$$

Лемма 3.1. *Существует постоянная $c_1>0$ такая, что выполнено неравенство*

$$|b_R(u,v)|\leqslant c_1\|u\|_{W_2^1(0,d)}\|v\|_{W_2^1(0,d)},\quad u,v\in W_2^1(0,d), \tag{3.1}$$

где $c_1>0$ не зависит от u и v. При этом для каждого $c_3>0$ существует $c_2>0$ такое, что для любой функции $u\in W_2^1(0,d)$ выполнено неравенство типа Гординга

$$\operatorname{Re}b_R(u,u)+c_3\|u\|^2_{L_2(0,d)}\geqslant c_2\|u\|^2_{W_2^1(0,d)}. \tag{3.2}$$

Доказательство. В силу ограниченности оператора $R_Q:L_2(0,d)\to L_2(0,d)$ (лемма 1.2) и неравенства Коши—Буняковского получим неравенство (3.1). Покажем, что для $u\in W_2^1(0,d)$ выполняется оценка

$$\operatorname{Re}\left(R_Qu',u'\right)_{L_2(0,d)}\geqslant c\|u'\|^2_{L_2(0,d)}.$$

Используя введенный по формуле (1.8) изоморфизм U_s и неравенство (1.10), получим

$$\operatorname{Re}\left(R_Q u', u'\right)_{L_2(Q)} = \operatorname{Re}\sum_s \left(R_s(U_s P_s u)', (U_s P_s u)'\right)_{L_2^N(Q_{s1})} \geqslant$$

$$\geqslant c\sum_s \left((U_s P_s u)', (U_s P_s u)'\right)_{L_2^N(Q_{s1})} = c\|u'\|^2_{L_2(Q)}. \tag{3.3}$$

□

Из (3.3) следует неравенство (3.2).

Замечание 3.1. Из неравенства (3.3) следует, что

$$\operatorname{Re} b_R(u,u) \geqslant c\|u'\|^2_{L_2(0,d)}, \qquad u \in W_2^1(0,d).$$

В силу леммы 3.1 полуторалинейная форма $b_R(u,v)$, $u,v \in W_2^1(Q)$, является $W_2^1(Q)$-коэрцитивной, при этом для любого $\lambda_0 > 0$ существует $\alpha > 0$ такое, что неравенство (2.7) выполняется при всех $u \in W_2^1(Q)$. Дадим теперь определение обобщенного решения задачи (1), (2), предполагая, что $f \in L_2(Q)$.

Определение 3.1. Функцию $u \in W_2^1(Q)$ будем называть *обобщенным решением* задачи (1), (2), если для всех $v \in W_2^1(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$b_R(u,v) = (f,v)_{L_2(Q)}. \tag{3.4}$$

Из раздела 2 следует, что форму $b_R(u,v)$ можно представить в виде

$$b_R(u,v) = \langle A_R u, v\rangle, \quad u,v \in W_2^1(Q), \tag{3.5}$$

где $A_R : W_2^1(Q) \to (W_2^1(Q))'$ — линейный ограниченный оператор. Таким образом, можно дать следующее определение обобщенного решения задачи (1), (2), эквивалентное определению (3.1).

Определение 3.2. Функцию $u \in W_2^1(Q)$ будем называть *обобщенным решением* задачи (1), (2), если

$$A_R u = f. \tag{3.6}$$

Теорема 3.1. *Если уравнение* (1) *удовлетворяет условию сильной эллиптичности, то вторая краевая задача* (1), (2) *разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\int_0^d f(x)dx = 0, \tag{3.7}$$

при этом существует единственное обобщенное решение $u \in W_2^1(Q)$ задачи (1), (2)*, удовлетворяющее условию*

$$\int_0^d u(x)dx = 0. \tag{3.8}$$

Доказательство. 1. Рассмотрим операторное уравнение

$$(A_R + \lambda_0 I)u = f, \tag{3.9}$$

где $\operatorname{Re}\lambda_0 > 0$.

Введем неограниченный оператор $\mathcal{A}_R : L_2(Q) \supset D(\mathcal{A}_R) \to L_2(Q)$ с областью определения $D(\mathcal{A}_R) = \left\{u \in W_2^1(Q) : A_R u \in L_2(Q)\right\}$, действующий по формуле

$$\mathcal{A}_R u = A_R u, \quad u \in D(\mathcal{A}_R).$$

В силу $W_2^1(Q)$-коэрцитивности формы $b_R(u,v)$, следствия 2.1 и непрерывности вложения $L_2(Q)$ в $\left(W_2^1(Q)\right)'$ существует ограниченный обратный оператор $(\mathcal{A}_R + \lambda_0 I)^{-1} : L_2(Q) \to L_2(Q)$, при этом

$$\|u\|_{W_2^1(Q)} \leqslant k_1\|f\|_{L_2(Q)}. \tag{3.10}$$

Таким образом, спектр оператора $\mathcal{A}_R$ принадлежит множеству $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$. Кроме того, в силу компактности вложения $W_2^1(Q)$ в $L_2(Q)$ и оценки (3.10) оператор $(\mathcal{A}_R + \lambda_0 I)^{-1} : L_2(Q) \to L_2(Q)$

компактный. Поэтому в силу теоремы 6.29 из [5, гл. III, §6] спектр $\sigma(\mathcal{A}_R)$ состоит из изолированных собственных значений конечной кратности, а оператор $R(\lambda, \mathcal{A}_R) : L_2(Q) \to L_2(Q)$ компактный при $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_R)$.

2. Определим сопряженную форму

$$b_R^*(u,v) = \overline{b_R(v,u)}, \quad u,v \in W_2^1(Q).$$

Аналогично тождеству (2.3) мы получаем

$$b_R^*(u,v) = \langle \widetilde{A}_R u, v\rangle, \quad u,v \in W_2^1(Q), \tag{3.11}$$

где $\widetilde{A}_R : W_2^1(Q) \to \big(W_2^1(Q)\big)'$ — линейный ограниченный оператор.

Введем неограниченный оператор $\widetilde{\mathcal{A}}_R : L_2(Q) \supset D(\widetilde{\mathcal{A}}_R) \to L_2(Q)$ с областью определения $D(\widetilde{\mathcal{A}}_R) = \{u \in W_2^1(Q) : \widetilde{A}_R u \in L_2(Q)\}$, действующий по формуле

$$\widetilde{\mathcal{A}}_R u = \widetilde{A}_R u, \quad u \in D(\widetilde{\mathcal{A}}_R).$$

Из определений операторов $\mathcal{A}_R$ и $\widetilde{\mathcal{A}}_R$ следует, что

$$(\mathcal{A}_R u, v)_{L_2(Q)} = b_R(u,v) = \overline{b_R^*(v,u)} = (u, \widetilde{\mathcal{A}}_R v)_{L_2(Q)}, \quad u \in D(\mathcal{A}_R), v \in D(\widetilde{\mathcal{A}}_R).$$

Следовательно, $\widetilde{\mathcal{A}}_R \subset \mathcal{A}_R^*$ и $\mathcal{A}_R \subset (\widetilde{\mathcal{A}}_R)^*$.

Аналогично части 1 доказательства можно показать, что спектр $\sigma(\widetilde{\mathcal{A}}_R)$ состоит из изолированных собственных значений конечной кратности. Таким образом, в силу леммы 13 из [1, гл. XIV, §6] следует, что $\widetilde{\mathcal{A}}_R = \mathcal{A}_R^*$.

3. Докажем, что оператор $\mathcal{A}_R$ фредгольмов и $\operatorname{ind}\mathcal{A}_R = 0$. Напомним, что оператор $\mathcal{A}_R$ называется фредгольмовым, если он замкнут, имеет замкнутый в $L_2(Q)$ образ $\mathcal{R}(\mathcal{A}_R)$, а его ядро $\mathcal{N}(\mathcal{A}_R)$ и коядро $\mathcal{R}(\mathcal{A}_R)^\perp$ конечномерны, при этом по определению $\operatorname{ind}\mathcal{A}_R = \dim\mathcal{N}(\mathcal{A}_R) - \operatorname{codim}\mathcal{R}(\mathcal{A}_R)$.

Пусть $\lambda_0 < 0$. Тогда $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A}_R)$. Как показано выше, оператор $(\mathcal{A}_R - \lambda_0 I)^{-1} : L_2(Q) \to L_2(Q)$ — компактный. Поэтому оператор $\mathcal{A}_R(\mathcal{A}_R - \lambda_0 I)^{-1} = I + \lambda_0(\mathcal{A}_R - \lambda_0 I)^{-1}$ является каноническим фредгольмовым оператором с нулевым индексом. Следовательно, оператор $\mathcal{A}_R$ фредгольмов и $\operatorname{ind}\mathcal{A}_R = 0$.

4. Если $v \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_R)$ и $w \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_R^*)$, то в силу (3.3), (3.5) и (3.11) $v'(x) = w'(x) = 0$ почти всюду на $(0,d)$. Следовательно, $v(x) \equiv \mathrm{const}$ и $w(x) \equiv \mathrm{const}$ почти всюду на $(0,d)$. Для существования решения задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы $(f,w)_{L_2(Q)} = 0$, при этом существует единственное обобщенное решение $u \in W_2^1(Q)$ задачи (1), (2), удовлетворяющее условию $\int\limits_0^d u(x)dx = 0$. □

Из доказательства теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.1. *Пусть уравнение* (1) *удовлетворяет условию сильной эллиптичности. Тогда оператор* $\mathcal{A}_R$ *фредгольмов,* $\operatorname{ind}\mathcal{A}_R = 0$, $\dim\mathcal{N}(\mathcal{A}_R) = 1$ *и* $1 \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_R)$.

4. Гладкость обобщенных решений второй краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения на подынтервалах

Докажем, что гладкость обобщенных решений задачи (1), (2) сохраняется на подынтервалах Q_{sk}.

Теорема 4.1. *Пусть выполняется условие сильной эллиптичности* (1.10), $u \in W_2^1(0,d)$ — *решение операторного уравнения* (3.9) *с* $\operatorname{Re}\lambda_0 > 0$ *и* $f \in L_2(0,d)$. *Тогда* $u \in W_2^2(Q_{sk})$ $(s = 1, 2;$ $k = 1, \dots, N(s)$, $N(1) = n+1$, $N(2) = n$, *если* $0 < \theta < 1$; $s = 1$; $k = 1, \dots, n+1$, *если* $\theta = 1)$, *при этом справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_2^2(Q_{sj})} \leqslant c_4 \|f\|_{L_2(0,d)}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Подставляя $b_R(u,v) = (R_Q u', v')_{L_2(0,d)}$ в интегральное тождество

$$b_R(u,v) + \lambda_0(u,v)_{L_2(0,d)} = (f,v)_{L_2(0,d)},$$

получим

$$\int\limits_0^d R_Q u' \overline{v}' dx = \int\limits_0^d f_0 \overline{v} dx, \tag{4.2}$$

где $f_0 = f - \lambda_0 u$.

В силу (3.10)

$$\|f_0\|_{L_2(0,d)} \leqslant c_1 \|f\|_{L_2(0,d)}. \tag{4.3}$$

Пусть s — фиксированное число. В интегральном тождестве (4.2) предположим, что $v \in C_0^\infty\Big(\bigcup\limits_k Q_{sk}\Big)$, а в случае $0 < \theta < 1$ положим дополнительно, что $v(x) = 0$ при $x \notin \bigcup\limits_k Q_{sk}$. Из равенства (1.8) и леммы 1.5 вытекает, что

$$\int\limits_{Q_{s1}} \big(R_s U_s P_s u', U_s v'\big)\, dx = \int\limits_{Q_{s1}} (U_s P_s f_0, U_s v)\, dx,$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^N$, $N = N(s)$. Следовательно, вектор-функция $U_s P_s u \in W_2^{1,N}(Q_{s1})$ является обобщенным решением системы N обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-\big(R_s U_s P_s u'\big)'(x) = (U_s P_s f_0)(x), \quad x \in Q_{s1}, \tag{4.4}$$

где $W_2^{1,N}(Q_{s1}) = \prod\limits_{j=1}^N W_2^1(Q_{s1})$.

Поскольку $U_s P_s f_0 \in L_2^N(Q_{s1})$, то $R_s U_s P_s u' \in W_2^{1,N}(Q_{s1})$. Из неравенства (1.10) следует, что $\det R_s(x) \neq 0$, $x \in \overline{Q}_{s1}$, при этом по условию элементы матрицы $R_s(x)$ — бесконечно дифференцируемые функции. Таким образом, $U_s P_s u' \in W_2^{1,N}(Q_{s1})$ и $U_s P_s u \in W_2^{2,N}(Q_{s1})$, т. е. $u \in W_2^2(Q_{sk})$, $k = 1, \ldots, N(s)$.

Применяя формулу Лейбница к левой части равенства (4.4), имеем

$$R_s(x) U_s P_s u''(x) = F(x), \quad x \in Q_{s1}, \tag{4.5}$$

где $F(x) = U_s P_s f_0(x) - R_s'(x) U_s P_s u'(x) \in L_2^N(Q_{s1})$.

Из неравенств (4.3) и (3.10) следует, что

$$\|F\|_{L_2^N(Q_{s1})} \leqslant c_2 \|f\|_{L_2(Q)}. \tag{4.6}$$

Поскольку $\det R_s(x) \neq 0$, $x \in \overline{Q}_{s1}$, из (4.5) и (4.6) следует, что

$$\|u''\|_{L_2(Q_{sj})} \leqslant c_3 \|f\|_{L_2(Q)}. \tag{4.7}$$

Наконец, из неравенств (4.7) и (3.10) вытекает оценка (4.1). □

Из теоремы 4.1 следует, что обобщенное решение $u(x)$ задачи (1), (2) также обладает соответствующей гладкостью на подынтервалах Q_{sk}. Однако, поскольку в силу теоремы 3.1 это решение не является единственным, оценка (4.1) уже не имеет места. Таким образом, мы получаем следующий результат.

Следствие 4.1. *Пусть выполняется условие сильной эллиптичности* (1.10), *а* $u \in W_2^1(0,d)$ — *решение операторного уравнения* (3.6), *т. е. функция* u *является обобщенным решением задачи* (1), (2), *где* $f \in L_2(0,d)$. *Тогда* $u \in W_2^2(Q_{sk})$ ($s = 1, 2$; $k = 1, \ldots, N(s)$, $N(1) = n+1$, $N(2) = n$, *если* $0 < \theta < 1$; $s = 1$; $k = 1, \ldots, n+1$, *если* $\theta = 1$).

Докажем теперь, что, если $u(x)$ — обобщенное решение задачи (1), (2), то уравнение (1) выполняется почти всюду на $(0,d)$, и справедливы краевые условия (2).

Следствие 4.2. *Пусть имеет место неравенство* (1.10), *а* $u \in W_2^1(0,d)$ — *обобщенное решение задачи* (1), (2), *где* $f \in L_2(0,d)$. *Тогда* $R_Q u' \in W_2^1(0,d)$, *уравнение* (1) *удовлетворяется почти всюду на* $(0,d)$, *при этом выполняются краевые условия* (2).

Доказательство.

1. Полагая, что в интегральном тождестве (3.4) $v \in C_0^\infty(0,d)$, и используя определение обобщенной производной в пространстве распределений $D'(0,d)$, получим

$$\left\langle -(R_Q u')', v\right\rangle = (f,v)_{L_2(0,d)}.$$

Поскольку $f \in L_2(0,d)$, а $v \in C_0^\infty(0,d)$ — произвольная функция, имеем

$$-(R_Q u')'(x) = f(x) \tag{4.8}$$

почти всюду на $(0,d)$ и $(R_Q u')' \in L_2(0,d)$, т. е.

$$R_Q u' \in W_2^1(0,d). \tag{4.9}$$

2. Положим теперь, что в интегральном тождестве (3.4) $v \in W_2^1(0,d)$ — произвольная функция. Из (4.9) следует, что $R_Q u' \in C[0,d]$. Тогда, интегрируя по частям левую часть равенства (3.4), получим

$$-\int_0^d (R_Q u')'\overline{v}dx + (R_Q u')(d)\overline{v}(d) - (R_Q u')(0)\overline{v}(0) = \int_0^d f\overline{v}dx.$$

Отсюда и из (4.8) вытекает равенство

$$(R_Q u')(d)\overline{v}(d) - (R_Q u')(0)\overline{v}(0) = 0. \tag{4.10}$$

Поскольку $v \in W_2^1(0,d)$ — произвольная функция, тождество (4.10) влечет за собой выполнение равенств

$$(R_Q u')(0) = (R_Q u')(d) = 0.$$

□

5. Гладкость обобщенных решений второй краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения на интервале целой длины

Для того, чтобы сформулировать результат о гладкости обобщенных решений на интервале целой длины $d = n+1$, докажем вначале вспомогательные результаты, а перед этим введем некоторые обозначения.

Рассмотрим блочную матрицу $\mathbf{R}_1$ порядка $(n+2)\times(2n+2)$ вида

$$\mathbf{R}_1 = \left(\widetilde{R}_1 | \widetilde{R}_2\right),$$

где $\widetilde{R}_1$, $\widetilde{R}_2$ — матрицы порядка $(n+2)\times(n+1)$, которые имеют вид

$$\widetilde{R}_1 = \begin{pmatrix} R_1(0) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ R_1(1) \end{pmatrix},$$

при этом 0 обозначает нулевую строку длины $n+1$. Другими словами,

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} a_0(0) & a_1(0) & \dots & a_n(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{-1}(1) & a_0(1) & \dots & a_{n-1}(1) & a_0(1) & a_1(1) & \dots & a_n(1) \\ a_{-2}(2) & a_{-1}(2) & \dots & a_{n-2}(2) & a_{-1}(2) & a_0(2) & \dots & a_{n-1}(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-n}(n) & a_{-n+1}(n) & \dots & a_0(n) & a_{-n+1}(n) & a_{-n+2}(n) & \dots & a_1(n) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{-n}(n+1) & a_{-n+1}(n+1) & \dots & a_0(n+1) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\mathbf{R}_1^1$ ($\mathbf{R}_1^2$) матрицу порядка $(n+2)\times(2n+1)$, полученную из матрицы $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого (последнего) столбца соответственно, а через $\mathbf{R}_1^0$ матрицу порядка $(n+2)\times 2n$, полученную из $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого и последнего столбцов.

Замечание 5.1. Первые $n+1$ столбцов матрицы $\mathbf{R}_1$ используются для описания линейных комбинаций правых производных решения в точках $0,1,\dots,n$, а последние $n+1$ столбцов матрицы $\mathbf{R}_1$ — для описания линейных комбинаций левых производных решения в точках $1,2,\dots,n+1$. Первая строка матрицы $\mathbf{R}_1$ задает линейную комбинацию значений правых производных в точках $0,1,\dots,n$, соответствующую краевому условию $(R_Q u')(0) = 0$, а последняя строка этой матрицы задает линейную комбинацию значений левых производных в точках $1, 2, \dots, n+1$, соответствующую краевому условию $(R_Q u')(d) = 0$, см. (5.26). Строки матрицы $\mathbf{R}_1$ с номерами $2, \dots, n$ задают равенства $(R_Q u')(i+0) = (R_Q u')(i-0)$, $i = 1, \dots, n$, вытекающие из уравнения (1) и условия $f \in L_2(0, d)$, см. (5.18). Матрицы $\mathbf{R}_1^1$, $\mathbf{R}_1^2$ и $\mathbf{R}_1^0$ используются для подсчета числа линейно независимых функций, которым должна быть ортогональна правая часть уравнения (1), чтобы обеспечить выполнение равенств $u'(i+0) = u'(i-0)$, $i = 1, \dots, n$, т. е. гладкость обобщенных решений на всем интервале.

Будем предполагать далее, что выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{n} (|a_k(0)| + |a_{-k}(n+1)|) \neq 0. \tag{5.1}$$

Замечание 5.2. Из условий (1.10), (5.1) следует, что рассматриваемое дифференциально-разностное уравнение (1) является уравнением нейтрального типа в точке $x = 0+0$ или в точке $x = n+1-0$.

Действительно, из (1.10) следует, что

$$a_0(0) \neq 0, \tag{5.2}$$

$$a_0(n+1) \neq 0. \tag{5.3}$$

Из (5.1) следует существование числа m, $1 \leqslant m \leqslant n$, такого, что либо

$$a_m(0) \neq 0, \tag{5.4}$$

либо

$$a_{-m}(n+1) \neq 0. \tag{5.5}$$

Пусть, например, выполнено неравенство (5.4). Обозначим через M, $m \leqslant M \leqslant n$, наибольшее число такое, что $a_M(0) \neq 0$. Тогда в точке $x = 0+0$ уравнение (1) с точностью до производных первого порядка примет вид

$$a_M(0)u''(x+M) + \dots + a_0(0)u''(x) + \dots = f(x). \tag{5.6}$$

Сделаем замену переменных $x + M = y$. Тогда уравнение (5.6) примет канонический вид в точке $y = M+0$

$$a_M(0)u''(y) + \dots + a_0(0)u''(y-M) + \dots = f(y-M). \tag{5.7}$$

Поскольку $a_M(0) \neq 0$ и в силу (5.2) $a_0(0) \neq 0$, то уравнение (5.6) имеет нейтральный тип в точке $x = 0+0$ (см. [13, гл. II]). В случае выполнения неравенства (5.5) аналогично можно показать, что уравнение (1) имеет нейтральный тип в точке $x = n+1-0$. В силу теоремы 4.1 $u \in W_2^2(Q_{1k})$, $k = 1, \dots, n+1$. Поскольку мы рассматриваем уравнение (1) в достаточно малой правой полуокрестности точки $x = 0$, наши рассуждения являются обоснованными.

Лемма 5.1. *Пусть выполнены условия* (1.10) *и* (5.1). *Тогда* $\operatorname{rank} \boldsymbol{R}_1 = n+2$ *и* $\operatorname{rank} \boldsymbol{R}_1^0 \geqslant n+1$.

Доказательство. 1. Докажем, что $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1 = n+2$. Рассмотрим минор M_{n+2} порядка $n+2$ матрицы $\mathbf{R}_1$, составленный из первого столбца этой матрицы, а также $(n+2)$-го, ..., $(2n+2)$-го столбцов. В силу условия (1.10) $M_{n+2} = a_0(0) \det R_1(1) \neq 0$. Следовательно, $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1 = n+2$.

2. Докажем теперь справедливость неравенства $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 \geqslant n+1$. В силу условия (5.1) либо выполняется неравенство (5.4), либо справедливо неравенство (5.5). Кроме того, в силу (1.10) $\det R_2(1) \neq 0$. Тогда $(n+1)$-ая строка матрицы порядка $(n+1) \times n$, полученной из матрицы $R_1(1)$ вычеркиванием последнего столбца, равна нетривиальной линейной комбинации строк матрицы $R_2(1)$ порядка $n \times n$. С другой стороны, $(n+2)$-ая строка матрицы порядка $(n+2) \times n$, полученная из матрицы $\widetilde{R}_1$ вычеркиванием первого столбца, является нулевой. Следовательно, она равна тривиальной линейной комбинации строк матрицы $R_2(1)$. Таким образом, $(n+2)$-ая строка матрицы $\mathbf{R}_1^0$ не может быть равна линейной комбинации второй, третьей, ..., $(n+1)$-ой строк этой матрицы. Это означает, что $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 \geqslant n+1$. $\square$

Рассмотрим матричное уравнение
$$\mathbf{R}_1\Phi = 0, \tag{5.8}$$
где $\Phi := (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, -\psi_1, -\psi_2, \dots, -\psi_{n+1})^T$.

Обозначим $H_1 := (a_0(0), a_{-1}(1), \dots, a_{-n}(n), 0)^T$ и $H_2 := (0, a_n(1), \dots, a_1(n), a_0(n+1))^T$. Перенося в уравнении (5.8) члены $\varphi_0 H_1$ и $-\psi_{n+1}H_2$ в правую часть, получим
$$\mathbf{R}_1^0\Phi^0 = -\varphi_0 H_1 + \psi_{n+1}H_2, \tag{5.9}$$
где $\Phi^0 := (\varphi_1, \dots, \varphi_n, -\psi_1, \dots, -\psi_n)^T$.

В формулировке следующего вспомогательного результата мы будем предполагать, что $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = n+1$, при этом $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2 = n+2$. Обозначим через $P_{\mathbf{R}_1^0}$ оператор ортогонального проектирования в $\mathbb{C}^{n+2}$ на $\mathcal{R}(\mathbf{R}_1^0)$, т. е. на образ оператора умножения на матрицу $\mathbf{R}_1^0$. В силу условия $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = n+1$ коразмерность $\mathcal{R}(\mathbf{R}_1^0)$ равна 1. Поэтому ненулевые векторы $(I-P_{\mathbf{R}_1^0})H_1$ и $(I-P_{\mathbf{R}_1^0})H_2$ линейно зависимы. Таким образом, существует число $0 \neq \alpha_H \in \mathbb{C}$ такое, что
$$(I - P_{\mathbf{R}_1^0})H_2 = \alpha_H(I - P_{\mathbf{R}_1^0})H_1, \tag{5.10}$$
при этом в силу (1.10) $a_0(0) \neq 0$ и $a_0(n+1) \neq 0$. Следовательно, векторы H_1 и H_2 линейно независимы.

В силу теоремы Кронекера—Капелли система уравнений (5.9) совместна тогда и только тогда, когда
$$\varphi_0 = \alpha_H\psi_{n+1}, \tag{5.11}$$
поскольку это равенство эквивалентно тому, что $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^e = n+1$, где $\mathbf{R}_1^e$ — расширенная матрица системы (5.9).

Итак, мы получили следующий результат.

Лемма 5.2. *Пусть выполнены условия* (1.10) *и* (5.1). *Пусть, кроме того,* $\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^0 = n+1$, *при этом* $\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^1 = \operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^2 = n+2$. *Тогда система уравнений* (5.9) *совместна тогда и только тогда, когда справедливо равенство* (5.11).

Докажем теперь, что в случае ортогональности правой части уравнения (1) в пространстве $L_2(0,d)$ конечному числу некоторых линейно независимых функций существует обобщенное решение задачи (1), (2), принадлежащее пространству $W_2^2(0,d)$, т. е. обладающее соответствующей гладкостью.

Предположим, что выполняются следующие условия:
$$\sum_{k=1}^{n}|a_{-k}(k)| \neq 0, \quad \sum_{k=1}^{n}|a_k(n+1-k)| \neq 0. \tag{5.12}$$

Замечание 5.3. Если коэффициенты $a_k(x)$ не зависят от x, то условие (5.1) следует из условий (5.12).

Обозначим через $G_j^1 = G_j^1(x)$ ($G_j^2 = G_j^2(x)$) j-й столбец матрицы порядка $n \times (n+1)$, полученной из матрицы $R_1 = R_1(x)$ вычеркиванием первой (последней) строки ($j = 1, \dots, n+1$). Из условий (5.12) следует, что $G_1^1(0) \neq 0$ и $G_{n+1}^2(1) \neq 0$.

Из следствий 4.1, 4.2 вытекает, что
$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}_R) = \big\{&u \in W_2^1(0,d) : R_Q u' \in W_2^1(0,d),\ u \in W_2^2(Q_{1k}),\ k = 1, \dots, n+1, \\ &(R_Q u')(0) = (R_Q u')(d) = 0\big\}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Пусть $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ — ограниченный оператор с областью определения $D(A_R^0) = \left\{u \in W_2^2(0,d) : R_Q u' \in W_2^1(0,d), (R_Q u')(0) = (R_Q u')(d) = 0\right\}$, действующий по формуле $A_R^0 u = A_R u$, $u \in D(A_R^0)$. Из (5.13) получим
$$D(A_R^0) = D(\mathcal{A}_R) \cap W_2^2(0,d). \tag{5.14}$$

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия* (1.10) *и* (5.1)*, а* $\theta = 1$. *Предположим, что столбцы* $G_1^1(0)$, $G_{n+1}^2(1)$ *линейно независимы. Тогда оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $1 \in \mathcal{N}(A_R^0)$ *и* $\dim\mathcal{N}(A_R^0) = 1$. *Если к тому же* $\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^0 = \operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^1 = \operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^2$, *то* $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0) = 3$; *если же* $\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^0 < \max\left\{\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^1, \operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^2\right\}$, *то* $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

Доказательство.

1. Очевидно, функция $u(x) \equiv 1$ принадлежит $D(A_R^0)$. В силу следствия 3.1 выполнено $1 \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_R)$ и $\dim \mathcal{N}(\mathcal{A}_R) = 1$. Таким образом, поскольку $D(A_R^0) \subset D(\mathcal{A}_R)$, мы заключаем, что пространство $\mathcal{N}(A_R^0)$ одномерно и состоит из констант.

2. Из части 1 доказательства теоремы 3.1 следует, что операторное уравнение

$$(\mathcal{A}_R + \lambda_0 I)u = f \quad (\operatorname{Re}\lambda_0 > 0) \tag{5.15}$$

имеет единственное решение $u_f \in D(\mathcal{A}_R)$ для любого $f \in L_2(0,d)$. В силу (5.14) это решение u_f принадлежит $D(A_R^0)$ тогда и только тогда, когда

$$u_f \in W_2^2(0,d). \tag{5.16}$$

Таким образом, $\mathcal{N}(A_R^0 + \lambda_0 I) = \{0\}$, а условие принадлежности правой части уравнения (5.15) образу $\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I)$ выражается соотношением (5.16). Перепишем это соотношение в виде условий ортогональности правой части уравнения (5.15) некоторым функциям из $L_2(0,d)$.

По условию $\theta = 1$. Тогда $d = n+1$ и разбиение интервала $(0,d)$ состоит из одного семейства подынтервалов $Q_{1k} = (k-1,k)$, $k = 1,\dots,n+1$. В силу (5.13) и теоремы вложения $u_f \in W_2^2(Q_{1k}) \subset C^1(\overline{Q}_{1k})$, $k = 1,\dots,n+1$. Поэтому определены значения производной $u_f'(x)$ на концах подынтервалов $\overline{Q}_{1k}$. Обозначим

$$\varphi_k = u_f'(k+0), \quad k = 0,\dots,n; \qquad \psi_k = u_f'(k-0), \quad k = 1,\dots,n+1.$$

Условие (5.16) можно переписать в виде

$$u_f'(k+0) = u_f'(k-0), \quad k = 1,\dots,n,$$

т. е.

$$\varphi_k = \psi_k, \quad k = 1,\dots,n. \tag{5.17}$$

С другой стороны, поскольку $u \in D(\mathcal{A}_R)$, из (5.13) следует, что

$$(R_Q u_f')(k+0) = (R_Q u_f')(k-0), \quad k = 1,\dots,n. \tag{5.18}$$

В силу равенств (1.8) и леммы 1.5 соотношения (5.18) примут вид

$$\sum_{j=1}^{n+1} r_{i+1,j}^1(0)\varphi_{j-1} = \sum_{j=1}^{n+1} r_{i,j}^1(1)\psi_j, \quad i = 1,\dots,n. \tag{5.19}$$

Из равенств (1.9) следует, что $r_{i,j}^1(1) = r_{i+1,j+1}^1(0)$. Равенства (5.19) можно переписать следующим образом:

$$r_{i+1,1}^1(0)\varphi_0 - r_{i,n+1}^1(1)\psi_{n+1} = \sum_{j=1}^{n}(r_{i,j}^1(1)\psi_j - r_{i+1,j+1}^1(0))\varphi_j = \sum_{j=1}^{n} r_{i,j}^1(1)(\psi_j - \varphi_j), \quad i = 1,\dots,n. \tag{5.20}$$

Если выполняются равенства (5.17), из (5.20) следует, что

$$\varphi_0 G_1^1(0) - \psi_{n+1} G_{n+1}^2(1) = 0. \tag{5.21}$$

По условию столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{n+1}^2(1)$ линейно независимы. Следовательно,

$$\varphi_0 = 0,$$
$$\psi_{n+1} = 0,$$

т. е.

$$u_f'(0+0) = 0, \tag{5.22}$$

$$u_f'(n+1-0) = 0. \tag{5.23}$$

Таким образом, из условия (5.16) вытекает справедливость равенств (5.22), (5.23). С другой стороны, из равенств (5.22), (5.23), равенств (5.20) и невырожденности матрицы $R_2(1)$ (см. (1.10)) следуют равенства (5.17), т. е. условие (5.16).

В силу теоремы вложения $C^1(\overline{Q}_{1j}) \subset W_2^2(\overline{Q}_{1j})$, $j = \overline{1, n+1}$. Таким образом, из неравенства (4.1) следует, что $u_f'(0+0)$ и $u_f'(n+1-0)$ являются линейными ограниченными функционалами, зависящими от $f \in L_2(0,d)$. По теореме Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве существуют (определенные единственным образом) функции $g_1, g_2 \in L_2(0,d)$ такие, что

$$\begin{aligned} u_f'(0+0) &= (f, g_1)_{L_2(0,d)}, \\ u_f'(n+1-0) &= (f, g_2)_{L_2(0,d)}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Следовательно, равенства (5.22), (5.23) примут вид

$$(f, g_i)_{L_2(0,d)} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{5.25}$$

3. Исследуем теперь, при каких условиях функции g_1, g_2 линейно независимы (то есть $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 2$) и при каких условиях они линейно зависимы, но $|g_1(x)| + |g_2(x)| \neq 0$ на множестве положительной меры (т. е. $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 1$).

Для этого вначале перепишем равенство

$$(R_Q u')(0) = (R_Q u')(d) = 0 \tag{5.26}$$

в виде

$$\sum_{j=1}^{n+1} r_{1,j}^1(0)\varphi_{j-1} = 0, \tag{5.27}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} r_{n+1,j}^1(1)\psi_j = 0. \tag{5.28}$$

В силу (5.13) функция $u \in W_2^1(0,d)$ такая, что $u \in W_2^2(Q_{1k})$, $k = 1, \ldots, n+1$, принадлежит $D(\mathcal{A}_R)$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства (5.19), (5.27) и (5.28), которые можно переписать в виде матричного уравнения (5.8).

3а. Рассмотрим случай $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^1 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^2$. Докажем, что функции g_1, g_2 линейно независимы. Пусть $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 = 0$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, т. е. $\alpha_1 (f, g_1)_{L_2(0,d)} + \alpha_2 (f, g_2)_{L_2(0,d)} = 0$ для любого $f \in L_2(0,d)$. Докажем, что тогда $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Для того, чтобы установить справедливость последних равенств, достаточно показать, что существуют функции $f_1, f_2 \in L_2(0,d)$, обладающие свойством

$$(f_j, g_i)_{L_2(0,d)} = \delta_{ij}, \tag{5.29}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Докажем, например, что существует функция $f_1 \in L_2(0,d)$ такая, что $(f_1, g_1)_{L_2(0,d)} = 1$ и $(f_1, g_2)_{L_2(0,d)} = 0$.

Другими словами, нужно построить функцию $f_1 \in L_2(0,d)$, для которой

$$u_{f_1}'(0+0) := \widetilde{\varphi}_0 = 1, \quad u_{f_1}'(n+1-0) := \widetilde{\psi}_{n+1} = 0. \tag{5.30}$$

Введем $2n$-мерный вектор $\Phi^0 := (\varphi_1, \ldots, \varphi_n, -\psi_1, \ldots, -\psi_n)^T$ с неизвестными координатами. Полагая в (5.9) $\varphi_0 = \widetilde{\varphi}_0 = 1$ и $\psi_{n+1} = \widetilde{\psi}_{n+1} = 0$ (см. (5.30)), получим

$$\mathbf{R}_1^0 \Phi^0 = -H_1, \tag{5.31}$$

где $H_1 = (a_0(0), a_{-1}(1), \ldots, a_{-n}(n), 0)^T$. Из условия $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^2$ и теоремы Кронекера—Капелли следует, что система уравнений (5.31) разрешима. Обозначим через $\widetilde{\Phi}^0 := (\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_n, -\widetilde{\psi}_1, \ldots, -\widetilde{\psi}_n)^T$ решение системы (5.31).

Докажем, что существует функция $f_1 \in L_2(0,d)$ такая, что решение уравнения (5.15) u_{f_1} удовлетворяет условию (5.30) и $u_{f_1}'(j+0) = \widetilde{\varphi}_j$, $u_{f_1}'(j-0) = \widetilde{\psi}_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Введем функцию

$$w(x) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (x-j)\widetilde{\varphi}_j \xi(x-j), & x \in \displaystyle\bigcup_{j=0}^{n} \Big(j, j+\frac{1}{2}\Big), \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} (x-j)\widetilde{\psi}_j \xi(x-j), & x \in \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n+1} \Big(j-\frac{1}{2}, j\Big), \end{cases}$$

где $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ — вещественнозначная функция, $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$, $\xi(x) = 1$, $x \in [-1/8,\ 1/8]$, $\operatorname{supp}\xi \subset [-1/4,\ 1/4]$, $\widetilde{\varphi}_0 = 1$, $\widetilde{\psi}_{n+1} = 0$, а числа $\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_n, \widetilde{\psi}_1, \ldots, \widetilde{\psi}_n$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (5.31). По построению $w \in D(\mathcal{A}_R)$. Положим $f_1 := (\mathcal{A}_R + \lambda_0 I)w$. Тогда, полагая $u_{f_1} := w$, получим равенства (5.30).

Аналогично, используя условие $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1$, можно построить функцию $f_2 \in L_2(0,d)$, для которой

$$u'_{f_2}(0+0) = 0, \quad u'_{f_2}(n+1-0) = 1.$$

Таким образом, мы доказали, что в случае $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2$ оператор $A_R^0 + \lambda_0 I$ фредгольмов, $\dim\mathcal{N}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 0$ и $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 2$.

3b. Заметим, что в силу леммы 5.1 помимо изученного в пункте 3a случая возможен лишь случай $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = n+1 < \max\left\{\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1, \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2\right\} = n+2$.

Пусть вначале $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = n+1$, при этом либо $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1 = n+2$, $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2 = n+1$, либо $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1 = n+1$, $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2 = n+2$. Не ограничивая общности, будем предполагать, что $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2 = n+2$, $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1 = n+1$. Тогда в силу теоремы Кронекера—Капелли система линейных алгебраических уравнений (5.9) несовместна, если для некоторого $f_1 \in L_2(0,d)$ выполняются равенства $u'_{f_1}(0+0) = (f_1, g_1) \neq 0$, т. е. для указанного $f_1 \in L_2(0,d)$ и $\lambda_0 > 0$ уравнение (5.15) не имеет решения $u_{f_1} \in D(\mathcal{A}_R)$ такого, что $u'_{f_1}(0+0) \neq 0$. Таким образом, для $\lambda_0 > 0$ и всех $f \in L_2(0,d)$ мы имеем $(f, g_1)_{L_2(0,d)} = u'_f(0+0) = 0$, т. е. $g_1 = 0$. С другой стороны, $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1 = n+1 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0$. Поэтому в силу теоремы Кронекера—Капелли система уравнений (5.9) совместна для любых $f \in L_2(0,d)$. Аналогично части 3a доказательства можно показать, что существует функция $f_2 \in L_2(0,d)$ такая, что $(f_2, g_2)_{L_2(0,d)} = u'_{f_2}(n+1-0) = \widetilde{\psi}_{n+1} = 1$, т. е. $g_2 \neq 0$. Таким образом, оператор $A_R^0 + \lambda_0 I$ фредгольмов, $\dim\mathcal{N}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 0$ и $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 1$.

Точно так же рассматривается случай $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2 = n+1$, $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1 = n+2$.

3c. Пусть теперь $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = n+1$, при этом $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2 = n+2$. В силу леммы 5.2 система уравнений (5.9) совместна для любой $f \in L_2(0,d)$ тогда и только тогда, когда справедливо равенство (5.11). Аналогично части 3a доказательства можно показать, что существует функция $f_2 \in L_2(0,d)$ такая, что $u'_{f_2}(n+1-0) = (f_2, g_2)_{L_2(0,d)} = 1$. Таким образом, уравнение (5.15) разрешимо тогда и только тогда, когда $g_1 = \alpha_H g_2 \neq 0$. При этом $u_f \in W_2^2(0,d)$ в том и только в том случае, когда $(f, g_2)_{L_2(0,d)} = 0$. Следовательно, оператор $A_R^0 + \lambda_0 I$ фредгольмов, $\dim\mathcal{N}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 0$ и $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 1$.

4. Остается доказать фредгольмовость оператора A_R^0 и свойства его индекса. Действительно, $A_R^0 = A_R^0 + \lambda_0 I - \lambda_0 I$. Таким образом, оператор A_R^0 является суммой фредгольмова оператора $A_R^0 + \lambda_0 I : W_2^2(0,d) \to L_2(0,d)$ и компактного оператора $-\lambda_0 I : W_2^2(0,d) \to L_2(0,d)$. Поэтому в силу [7, теорема 16.4] оператор $A_R^0 : W_2^2(0,d) \to L_2(0,d)$ является фредгольмовым и $\operatorname{ind} A_R^0 = \operatorname{ind}(A_R^0 + \lambda_0 I)$.

С другой стороны, в силу пункта 1 доказательства пространство $\mathcal{N}(A_R^0)$ одномерно и состоит из констант. Поэтому $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0) = \operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I) + 1$. Следовательно, если $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2$, то $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0) = 3$, а если $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 < \max\left\{\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1, \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2\right\}$, то $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0) = 2$. □

Пример 5.1. Рассмотрим оператор $R_Q : L_2(0,3) \to L_2(0,3)$, где $Q = (0,3)$, $(Ru)(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x+1) + a_{-1} u(x-1) + a_2 u(x+2) + a_{-2} u(x-2)$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2$. Тогда $n = 2$, $\theta = 1$, а матрица R_1 имеет вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_{-1} & a_0 & a_1 \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $G_1^1 = (a_{-1}, a_{-2})^T$ и $G_3^2 = (a_2, a_1)^T$. Матрица $\mathbf{R}_1$ определяется по формуле

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_{-1} & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_{-2} & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Будем предполагать, что оператор R_Q удовлетворяет условию (1.10), а столбцы G_1^1 и G_3^2 линейно независимы. Докажем, что тогда

$$\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^1 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^2 = 4. \tag{5.32}$$

Заметим, что, поскольку коэффициенты a_j постоянные, из линейной независимости столбцов G_1^1 и G_3^2 следует выполнение условия (5.1).

Очевидно,

$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_0 & a_1 \\ a_{-1} & a_0 & a_{-1} & a_0 \\ 0 & 0 & a_{-2} & a_{-1} \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{R}_1^1(\mathbf{R}_1^2)$ порядка 4×5 получается из матрицы $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого (последнего) столбца. Поэтому для доказательства равенств (5.32) достаточно показать, что

$$\det \mathbf{R}_1^0 \neq 0.$$

Действительно,

$$\det \mathbf{R}_1^0 = (a_1 a_{-1} - a_0^2)(a_1 a_{-1} - a_2 a_{-2}) = -\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_{-1} & a_0 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a_{-1} & a_2 \\ a_{-2} & a_1 \end{pmatrix}.$$

Из условия (1.10) следует, что матрица

$$\begin{pmatrix} 2a_0 & a_1 + a_{-1} \\ a_1 + a_{-1} & 2a_0 \end{pmatrix}$$

положительно определена. Поэтому

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_{-1} & a_0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

С другой стороны,

$$\det \begin{pmatrix} a_{-1} & a_2 \\ a_{-2} & a_1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

поскольку столбцы этой матрицы $G_1^1 = (a_{-1}, a_{-2})^T$ и $G_3^2 = (a_2, a_1)^T$ по условию линейно независимы.

Таким образом, в силу теоремы 5.1 оператор $A_R^0 : W_2^2(0,3) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,3)$ фредгольмов, $1 \in \mathcal{N}(A_R^0)$ и $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 1$, при этом $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A_R^0) = 3$. Следовательно, $\operatorname{ind} A_R^0 = -2$.

Замечание 5.4. Остается открытым вопрос: всегда ли в случае $\theta = 1$ при выполнении условия (1.10) и линейной независимости столбцов G_1^1 и G_3^2 справедливо равенство (5.32) или есть примеры, когда равенство (5.32) не выполняется?

Далее в этом разделе мы будем предполагать, что столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{n+1}^2(1)$ линейно зависимы. В силу условий (5.12) $G_1^1(0) \neq 0$, $G_{n+1}^2(1) \neq 0$ и существует такое $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$, что

$$G_{n+1}^2(1) = \alpha G_1^1(0). \tag{5.33}$$

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия* (1.10), (5.1) *и* (5.12). *Предположим, что столбцы* $G_1^1(0)$ *и* $G_{n+1}^2(1)$ *линейно зависимы. Тогда оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $1 \in \mathcal{N}(A_R^0)$ *и* $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 1$, *при этом справедливы следующие утверждения*:

1. *Если* $\operatorname{rank} \boldsymbol{R}_1^0 = \operatorname{rank} \boldsymbol{R}_1^1$ *или* $\operatorname{rank} \boldsymbol{R}_1^0 = \operatorname{rank} \boldsymbol{R}_1^2$, *то* $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A_R^0) = 2$.
2. *Если* $\operatorname{rank} \boldsymbol{R}_1^0 = n+1$, $\operatorname{rank} \boldsymbol{R}_1^1 = \operatorname{rank} \boldsymbol{R}_1^2 = n+2$ *и* $\alpha \neq \alpha_H$ (*см.* (5.11)), *то* $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A_R^0) = 2$.
3. *Если* $\operatorname{rank} \boldsymbol{R}_1^0 = n+1$, $\operatorname{rank} \boldsymbol{R}_1^1 = \operatorname{rank} \boldsymbol{R}_1^2 = n+2$ *и* $\alpha = \alpha_H$, *то* $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

Доказательство.

1. Аналогично части 1 доказательства теоремы 5.1 мы заключаем, что пространство $\mathcal{N}(A_R^0)$ одномерно и состоит из констант.

2. Из части 1 доказательства теоремы 3.1 следует также, что операторное уравнение (5.15) имеет единственное решение $u_f \in D(\mathcal{A}_R)$ для любого $f \in L_2(0,d)$. В силу (5.14) это решение u_f принадлежит $D(A_R^0)$ тогда и только тогда, когда

$$u_f \in W_2^2(0,d). \tag{5.34}$$

Таким образом, $\mathcal{N}(A_R^0 + \lambda_0 I) = \{0\}$, а условие принадлежности правой части уравнения

$$(\mathcal{A}_R + \lambda_0 I)u = f \tag{5.35}$$

образу $\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I)$ выражается соотношением (5.34). Перепишем это соотношение в виде условий ортогональности правой части уравнения (5.35) некоторым функциям из $L_2(0,d)$.

Сохраняя обозначения, введенные в доказательстве теоремы 5.1, для любого решения $u_f \in D(\mathcal{A}_R)$ уравнения (5.35) получим следующие равенства (см. (5.20)):

$$r^1_{i+1,1}(0)\varphi_0 - r^1_{i,n+1}(1)\psi_{n+1} = \sum_{j=1}^n (r^1_{i,j}(1)\psi_j - r^1_{i+1,j+1}(0))\varphi_j = \sum_{j=1}^n r^1_{i,j}(1)(\psi_j - \varphi_j), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.36}$$

Если выполняются равенства (5.17), из (5.36) следует, что

$$\varphi_0 G_1^1(0) - \psi_{n+1} G_{n+1}^2(1) = 0. \tag{5.37}$$

В силу (5.12) и (5.33) $G_1^1(0) \neq 0$, $G_{n+1}^2(1) \neq 0$ и существует такое $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$, что $G_{n+1}^2(1) = \alpha G_1^1(0)$. Таким образом, из (5.37) получим $(\varphi_0 - \alpha\psi_{n+1})G_1^1(0) = 0$, т. е.

$$\varphi_0 = \alpha\psi_{n+1}. \tag{5.38}$$

Другими словами, из условий (5.12) и (5.33) следует, что для получения решения уравнения (5.35), удовлетворяющего условию гладкости (5.34), правая часть уравнения (5.35) должна удовлетворять равенству

$$(f, g)_{L_2(0,d)} = 0, \tag{5.39}$$

где $g = g_1 - \alpha g_2$, а функции g_1 и g_2 определяются равенствами $(f, g_1)_{L_2(0,d)} = u_f'(0+0) = \varphi_0$ и $(f, g_2)_{L_2(0,d)} = u_f'(n+1-0) = \psi_{n+1}$.

Обратно, пусть выполняется равенство (5.39). Тогда $\varphi_0 - \alpha\psi_{n+1} = 0$, т. е.

$$\varphi_0 G_1^1(0) = \alpha\psi_{n+1} G_1^1(0) = \psi_{n+1} G_{n+1}^2(1).$$

Следовательно, справедливо равенство (5.37). Отсюда и из (5.36) в силу невырожденности матрицы $R_2(1)$ следует (5.17). Таким образом, если столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{n+1}^2(1)$ линейно зависимы, то соотношение (5.34) выполняется тогда и только тогда, когда функция f ортогональна в $L_2(0,d)$ функции $g = g_1 - \alpha g_2 \in L_2(0,d)$.

3. Рассмотрим вопрос о том, когда $g \neq 0$. Из доказательства теоремы 5.1 следует, что условия (5.18), (5.26) можно переписать в виде матричного уравнения (5.8).

3a. Рассмотрим случай, когда $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1$ или $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2$. Не ограничивая общности, будем предполагать, что $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2$. Докажем, что $g \neq 0$.

Для этого достаточно доказать существование функции $f_0 \in L_2(0,d)$ такой, что $(f_0, g_1)_{L_2(0,d)} = 1$ и $(f_0, g_2)_{L_2(0,d)} = 0$, т. е. $(f_0, g)_{L_2(0,d)} = 1$. Другими словами, достаточно построить функцию $f_0 \in L_2(0,d)$, для которой

$$u_{f_0}'(0+0) := \widetilde{\varphi}_0 = 1, \quad u_{f_0}'(n+1-0) := \widetilde{\psi}_{n+1} = 0. \tag{5.40}$$

Введем $2n$-мерный вектор $\Phi^0 := (\varphi_1, \ldots, \varphi_n, -\psi_1, \ldots, -\psi_n)^T$ с неизвестными координатами. Обозначим $H_1 := (a_0(0), a_{-1}(1), \ldots, a_{-n}(n), 0)^T$. Полагая в (5.9) $\varphi_0 = \widetilde{\varphi}_0 = 1$ и $\psi_{n+1} = \widetilde{\psi}_{n+1} = 0$, получим

$$\mathbf{R}_1^0 \Phi^0 = -H_1. \tag{5.41}$$

Из условия $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2$ и теоремы Кронекера—Капелли следует, что система уравнений (5.41) разрешима. Обозначим через $\widetilde{\Phi}^0 := (\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_n, -\widetilde{\psi}_1, \ldots, -\widetilde{\psi}_n)^T$ решение системы (5.41).

Докажем, что существует функция $f_0 \in L_2(0,d)$ такая, что при $f = f_0$ решение уравнения (5.35) u_{f_0} удовлетворяет условию (5.40) и $u_{f_0}'(j+0) = \widetilde{\varphi}_j$, $u_{f_0}'(j-0) = \widetilde{\psi}_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Введем функцию

$$w(x) := \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{n}(x-j)\widetilde{\varphi}_j\xi(x-j), & x \in \bigcup\limits_{j=0}^{n}\Big(j, j+\dfrac{1}{2}\Big), \\ \sum\limits_{j=1}^{n+1}(x-j)\widetilde{\psi}_j\xi(x-j), & x \in \bigcup\limits_{j=1}^{n+1}\Big(j-\dfrac{1}{2}, j\Big), \end{cases}$$

где $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ — вещественнозначная функция, $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$, $\xi(x) = 1$, $x \in [-1/8,\ 1/8]$, $\operatorname{supp}\xi \subset [-1/4,\ 1/4]$, $\widetilde{\varphi}_0 = 1$, $\widetilde{\psi}_{n+1} = 0$, а числа $\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_n$, $\widetilde{\psi}_1, \ldots, \widetilde{\psi}_n$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (5.41).

По построению $w \in D(\mathcal{A}_R)$. Положим $f_0 := (\mathcal{A}_R + \lambda_0 I)w$. Полагая $u_{f_0} := w$, получим равенства (5.40). Таким образом, мы доказали, что в случае $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2$ выполняется соотношение $g \neq 0$. Следовательно, оператор $A_R^0 + \lambda_0 I$ фредгольмов, $\dim\mathcal{N}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 0$ и $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 1$.

3b. Пусть теперь $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0 = n+1$ и при этом $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2 = n+2$. В силу леммы 5.2 система уравнений (5.9) совместна для любой $f \in L_2(0,d)$ тогда и только тогда, когда справедливо равенство (5.11). С другой стороны, $u_f \in W_2^2(0,d)$ в том и только в том случае, когда выполняется равенство (5.38).

Рассмотрим вначале случай $\alpha \neq \alpha_H$. В силу (5.24) условие (5.38) можно записать в виде $(f,g)_{L_2(0,d)} = \varphi_0 - \alpha\psi_{n+1} = u_f'(0+0) - \alpha u_f'(n+1-0) = 0$. Докажем, что $g \neq 0$. Для этого достаточно доказать существование функции $f_1 \in L_2(0,d)$ такой, что $(f_1, g_1)_{L_2(0,d)} = \alpha_H$ и $(f_1, g_2)_{L_2(0,d)} = 1$. Другими словами, достаточно построить функцию $f_1 \in L_2(0,d)$, для которой

$$u_{f_1}'(0+0) := \widetilde{\varphi}_0 = \alpha_H, \quad u_{f_1}'(n+1-0) := \widetilde{\psi}_{n+1} = 1. \tag{5.42}$$

Тогда $(f_1, g)_{L_2(0,d)} = (f_1, g_1 - \alpha g_2)_{L_2(0,d)} = (f_1, g_1 - \alpha_H g_2)_{L_2(0,d)} + (f_1, (\alpha_H - \alpha)g_2)_{L_2(0,d)} = (\alpha_H - \alpha)(f_1, g_2)_{L_2(0,d)} = \alpha_H - \alpha \neq 0$.

Введем $2n$-мерный вектор $\Phi^0 := (\varphi_1, \ldots, \varphi_n, -\psi_1, \ldots, -\psi_n)^T$ с неизвестными координатами. Полагая в (5.9) $\varphi_0 = \widetilde{\varphi}_0 = \alpha_H$ и $\psi_{n+1} = \widetilde{\psi}_{n+1} = 1$, получим

$$\mathbf{R}_1^0\Phi^0 = -\alpha_H H_1 + H_2. \tag{5.43}$$

Из условия (5.11) и леммы 5.2 следует, что система уравнений (5.43) разрешима. Обозначим через $\widetilde{\Phi}^0 := (\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_n, -\widetilde{\psi}_1, \ldots, -\widetilde{\psi}_n)^T$ решение системы (5.43).

Аналогично части 3a можно доказать существование функции $f_1 \in L_2(0,d)$ такой, что при $f = f_1$ решение уравнения (5.35) u_{f_1} удовлетворяет условию (5.42) и $u_{f_1}'(j+0) = \widetilde{\varphi}_j$, $u_{f_1}'(j-0) = \widetilde{\psi}_j$, $j = 1, \ldots, n$. Следовательно, $g \neq 0$. Таким образом оператор $A_R^0 + \lambda_0 I$ фредгольмов, $\dim\mathcal{N}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 0$ и $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 1$.

Рассмотрим, наконец, случай $\alpha = \alpha_H$. В этом случае для любой $f \in L_2(0,d)$ решение уравнения (5.35) u_f удовлетворяет системе уравнений (5.9). Поэтому в силу леммы 5.2 и равенства $\alpha = \alpha_H$ справедливо равенство (5.38), которое гарантирует, что $u_f \in W_2^2(0,d)$ для любых $f \in L_2(0,d)$. Таким образом, оператор $A_R^0 + \lambda_0 I$ имеет ограниченный обратный $(A_R^0 + \lambda_0 I)^{-1} : L_2(0,d) \to D(A_R^0)$. Следовательно, $\dim\mathcal{N}(A_R^0 + \lambda_0 I) = 0$ и $\mathcal{R}(A_R^0 + \lambda_0 I) = L_2(0,d)$.

4. Доказательство свойств оператора A_R^0 следует из [7, теорема 16.4] и следствия 3.1. $\square$

Авторы благодарят рецензентов за ряд замечаний, способствовавших улучшению работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. — М.: Мир, 1966.
2. *Каменский А. Г.* Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально-разностными операторами// Дифф. уравн. — 1976. — *12.* — С. 815–824.
3. *Каменский Г. А., Мышкис А. Д.* Постановка краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами в старших членах// Дифф. уравн. — 1974. — *10.* — С. 409–418.
4. *Каменский Г. А., Мышкис А. Д., Скубачевский А. Л.* О гладких решениях краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа// Укр. мат. ж. — 1985. — *37*, № 5. — С. 581–585.

5. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
6. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. Линейные системы. — М.: Наука, 1968.
7. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховых пространствах. — М.: Наука, 1971.
8. *Кряжимский А. В., Максимов В. И., Осипов Ю. С.* О позиционном моделировании в динамических системах// Прикл. мат. мех. — 1983. — *47*, № 6. — С. 883–890.
9. *Лионс Ж. Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
10. *Неверова Д. А., Скубачевский А. Л.* О классических и обобщенных решениях краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами// Мат. заметки. — 2013. — *94*, № 5. — С. 702–719.
11. *Осипов Ю. С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием// Дифф. уравн. — 1965. — *1*, № 5. — С. 605–618.
12. *Скубачевский А. Л.* К задаче об успокоении системы управления с последействием// Докл. РАН. — 1994. — *335*, № 2. — С. 157–160.
13. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971.
14. *Neverova D. A.* Generalized and classical solutions to the second and third boundary-value problem for differential-difference equations// Functional Differential Equations. — 2014. — *21*. — С. 47–65.
15. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

А. Л. Скубачевский
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия;
Центр фундаментальной и прикладной математики МГУ, Москва, Россия
E-mail: `skublector@gmail.com`

Н. О. Иванов
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: `noivanov1@gmail.com`

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-576-595 UDC 517.929

On Generalized Solutions of the Second Boundary-Value Problem for Differential-Difference Equations with Variable Coefficients

© 2021 **A. L. Skubachevskii, N. O. Ivanov**

Abstract. We consider the second boundary-value problem for a second-order differential-difference equation with variable coefficients on the interval $(0, d)$. We investigate the existence of a generalized solution and obtain conditions on the right-hand side of the equation which ensure the smoothness of generalized solutions on the entire interval $(0, d)$.

REFERENCES

1. N. Dunford and J. Schwartz, *Lineynye operatory. Spektral'naya teoriya. Samosopryazhennye operatory v gil'bertovom prostranstve* [Linear Operators. Part II: Spectral Theory. Self-Adjoint Operators in Hilbert Space], Mir, Moscow, 1966 (Russian translation).

2. A. G. Kamenskii, “Kraevye zadachi dlya uravneniy s formal’no simmetrichnymi differentsial’no-raznostnymi operatorami” [Boundary-value problems for equations with formally symmetric differential-difference operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1976, **12**, 815–824 (in Russian).
3. G. A. Kamenskii and A. D. Myshkis, “Postanovka kraevykh zadach dlya differentsial’nykh uravneniy s otklonyayushchimisya argumentami v starshikh chlenakh” [Formulation of boundary-value problems for differential equations with deviating arguments in higher-order terms], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1974, **10**, 409–418 (in Russian).
4. G. A. Kamenskii, A. D. Myshkis, and A. L. Skubachevskii, “O gladkikh resheniyakh kraevoy zadachi dlya differentsial’no-raznostnogo uravneniya neytral’nogo tipa” [On smooth solutions of a boundary-value problem for a differential-difference equation of neutral type], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 1985, **37**, No. 5, 581–585 (in Russian).
5. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
6. N. N. Krasovskii, *Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineynye sistemy* [Motion Control Theory. Linear Systems], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
7. S. G. Kreyn, *Lineynye uravneniya v banakhovykh prostranstvakh* [Linear Equations in Banach Spaces], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
8. A. V. Kryazhimskii, V. I. Maksimov, and Yu. S. Osipov, “O pozitsionnom modelirovanii v dinamicheskikh sistemakh” [On positional modeling in dynamic systems], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1983, **47**, No. 6, 883–890 (in Russian).
9. J.-L. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Non-Homogeneous Boundary-Value Problems and Their Applications], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
10. D. A. Neverova and A. L. Skubachevskii, “O klassicheskikh i obobshchennykh resheniyakh kraevykh zadach dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy s peremennymi koeffitsientami” [On classical and generalized solutions of boundary-value problems for differential-difference equations with variable coefficients], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2013, **94**, No. 5, 702–719 (in Russian).
11. Yu. S. Osipov, “O stabilizatsii upravlyaemykh sistem s zapazdyvaniem” [On the stabilization of controlled systems with delay], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1965, **1**, No. 5, 605–618 (in Russian).
12. A. L. Skubachevskii, “K zadache ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem” [On the damping problem for a control system with aftereffect], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1994, **335**, No. 2, 157–160 (in Russian).
13. L. E. El’sgol’ts and S. B. Norkin, *Vvedenie v teoriyu differentsial’nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom* [Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
14. D. A. Neverova, “Generalized and classical solutions to the second and third boundary-value problem for differential-difference equations,” *Funct. Differ. Equ.*, 2014, **21**, 47–65.
15. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.

A. L. Skubachevskii
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia;
Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: `skublector@gmail.com`

N. O. Ivanov
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: `noivanov1@gmail.com`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 3 (2021). С. 596–608
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-596-608 УДК 517.9

БИВАРИАЦИОННОСТЬ, СИММЕТРИИ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

© 2021 г. **В. М. ФИЛИППОВ, В. М. САВЧИН, С. А. БУДОЧКИНА**

Аннотация. Подразумевая под бивариационной системой любую систему уравнений, порожденную двумя разными гамильтоновыми действиями, мы устанавливаем связь между их вариационными симметриями. Для диссипативной задачи мы показываем эффективность использования неклассических гамильтоновых действий для построения приближенных решений с высокой точностью. Для заданного операторного уравнения с второй производной по времени мы исследуем его потенциальность, строим соответствующий функционал и находим необходимые и достаточные условия того, что оператор S является генератором симметрии построенного функционала. Теоретические результаты иллюстрируются примерами.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Краевые задачи с непотенциальными операторами описывают многие физические явления (см. [13]). Для их вариационного анализа нужен соответствующий функционал — гамильтоново действие. Возможна ситуация, когда такого действия не найдется среди классических функционалов, но оно существует (при определенных условиях) в так называемых неэйлеровых классах функционалов. Множество работ посвящено построению функционалов для различных типов уравнений и их систем: для обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, дифференциально-разностных уравнений, стохастических дифференциальных уравнений (см., например, [4, 5, 7–9, 12, 13, 16, 17, 19–23]). Возможна и ситуация, когда существуют два (или более) альтернативных функционала, порождающих заданную задачу. Соответственно, возникает вопрос о связи их вариационных симметрий (см. [3]). Главная цель настоящей работы — установить эту связь для общих операторных уравнений и показать возможность эффективного использования альтернативных гамильтоновых действий для построения (с высокой точностью) приближенных решений конкретной диссипативной задачи. Впервые интерес к таким результатам был обоснован в [13]. В качественном анализе конечномерных систем симметрии широко используются (см. [2]). Развитие таких идей для бесконечномерных систем является актуальной и интересной задачей (см. [1, 4, 6, 10, 11, 18]).

Вариационные принципы играют важную роль в развитии различных областей физики. Наиболее отчетливо это можно заметить на примерах из механики — как классической, так и квантовой.

В течение долгого времени все преимущества вариационных принципов использовались только для узкого класса так называемых потенциальных линейных операторов. Чтобы обобщить их на новые обширные классы нелинейных уравнений (операторы которых, вообще говоря, непотенциальны), требуется ввести неэйлеровы функционалы (см. [13]). Это может привести к ситуации, когда заданная система порождается разными гамильтоновыми действиями.

В настоящей работе используются понятия и методы нелинейного функционального анализа и современного вариационного исчисления.

2. Бивариационность и симметрия

Рассмотрим операторное уравнение

$$N(u) = 0, \qquad u \in D(N), \tag{2.1}$$

где $N : D(N) \subset U \to V$ — оператор, дифференцируемый в смысле Гато, U и V — линейные нормированные пространства над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел, $D(N)$ — область определения оператора N. Будем считать, что $D(N)$ — выпуклое множество, $\overline{D(N)} = U$ и $U \subseteq V$.

Предположим, что оператор $N(2.1)$ потенциален на $D(N)$ относительно билинейной формы

$$\Phi(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Это означает, что существует такой функционал $F_N : D(F_N) = D(N) \to \mathbb{R}$, что его дифференциал Гато $\delta F_N[u,h] = \Phi(N(u),h)$ $\forall u \in D(N)$, $\forall h \in D(N'_u)$, где N'_u — производная Гато оператора N в точке $u \in D(N)$. Функционал F_N, называемый *гамильтоновым действием*, можно найти по формуле

$$F_N[u] = \int\limits_0^1 \Phi(N(\tilde{u}(\lambda)), u - u_0)d\lambda + \mathrm{const}, \tag{2.3}$$

где $\tilde{u}(\lambda) = u_0 + \lambda(u - u_0)$, u_0 — фиксированный элемент $D(N)$.

Определение 2.1. Оператор $N : D(N) \subset U \to V$ называется *B-потенциальным* на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы (2.2), если существуют такой функционал $G_N : D(G_N) = D(N) \to \mathbb{R}$ и такой линейный оператор $B : D(B) \subset V \to V$, что

$$\delta G_N[u,h] = \Phi(N(u), Bh) \quad \forall u \in D(N),\ \forall h \in D(N'_u, B) \equiv D(N'_u) \cap D(B).$$

Если $B = I$ — тождественный оператор, то оператор N является потенциальным. Функционал $G_N[u]$ можно найти по формуле (см. [13])

$$G_N[u] = \int\limits_0^1 \langle N(\tilde{u}(\lambda)), B(u - u_0)\rangle\, d\lambda + \mathrm{const}\,. \tag{2.4}$$

Определение 2.2. Обратимый линейный оператор $M_u : D(M_u) \subset R(N) \to V$ (зависящий, вообще говоря, от u) называется *вариационным мультипликатором* для оператора $N : D(N) \subset U \to V$, если оператор $\tilde{N} = M_u N$ потенциален на множестве $D(N)$ относительно данной билинейной формы.

Следствие 2.1. *Если оператор N уравнения* (2.1) *B-потенциален на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы* (2.2)*, то сопряженный оператор B^** (*если он существует, см.* [14]) *можно считать вариационным мультипликатором.*

Определение 2.3. Операторное уравнение (2.1) называется *бивариационным* на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы (2.2), если существуют такие функционалы $F_{i,N} : D(F_{i,N}) = D(N) \to \mathbb{R}$ и операторы $B_i : D(B_i) \subset V \to V$, что

$$\delta F_{i,N}[u,h] = \Phi(N(u), B_i h) \quad \forall u \in D(N), \quad \forall h \in D(N'_u, B_i),\ i = 1, 2.$$

В дальнейшем нам потребуется следующая теорема.

Теорема 2.1 (см. [4]). *Пусть оператор* $N : D(N) \subset U \to V$ *и билинейная форма* $\Phi(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ *таковы, что для любых фиксированных элементов* $u \in D(N)$, $g, h \in D(N'_u, B)$ *функция* $\psi(\varepsilon) = \Phi(N(u + \varepsilon h), Bg)$ *принадлежит классу* $C^1[0, 1]$. *Тогда для того, чтобы* N *был* B*-потенциальным на выпуклом множестве* $D(N)$ *относительно* Φ, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\Phi(N'_u h, Bg) = \Phi(N'_u g, Bh) \quad \forall u \in D(N), \quad \forall g, h \in D(N'_u, B). \tag{2.5}$$

Рассмотрим на $D(N)$ инфинитезимальное преобразование

$$\bar{u} = u + \varepsilon S(u), \tag{2.6}$$

где $S : D(N) \to D(N'_u)$ — дифференцируемый в смысле Гато оператор, называемый *генератором преобразования*, а $\overline{R(S)} = U$.

Определение 2.4. Функционал $F : D(F) = D(N) \subset U \to \mathbb{R}$ называется *инвариантным* относительно преобразования (2.6), если справедливо соотношение

$$F[u + \varepsilon S(u)] = F[u] + r(u, \varepsilon S(u)) \quad \forall u \in D(N), \tag{2.7}$$

где r таково, что $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{r(u, \varepsilon S(u))}{\varepsilon} = 0$.

В этом случае преобразование (2.6) называется *симметрией функционала* $F[u]$, а оператор S называется *генератором симметрии*.

Предположим, что оператор N или оператор $\tilde{N} = M_u N$, где M_u — вариационный мультипликатор, потенциален и B-потенциален ($B \neq I$) относительно билинейной формы (2.2). Тогда у нас есть два различных гамильтоновых действия $F_N[u]$ и $G_N[u]$.

Теорема 2.2. *Функционал* (2.4) *инвариантен относительно преобразования* (2.6) *тогда и только тогда, когда*

$$\Phi(N(u), BS(u)) = 0 \quad \forall u \in D(N). \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть функционал (2.4) инвариантен относительно преобразования (2.6). Тогда, используя формулу

$$N(u + \varepsilon h) = N(u) + \varepsilon N'_u h + r(u, \varepsilon h), \quad u \in D(N),$$

получаем соотношение

$$G_N[u + \varepsilon S(u)] = G_N[u] + \varepsilon \int_0^1 [\Phi(N(\tilde{u}(\lambda)), BS(u)) + \Phi(N'_{\tilde{u}(\lambda)} \lambda S(u), B(u - u_0))] d\lambda + r(u, \varepsilon S(u)).$$

Следовательно, (2.7) можно записать в виде

$$\int_0^1 [\Phi(N(\tilde{u}(\lambda)), BS(u)) + \Phi(N'_{\tilde{u}(\lambda)} \lambda S(u), B(u - u_0)))] d\lambda = 0 \quad \forall u \in D(N). \tag{2.9}$$

В силу B-потенциальности оператора N имеем соотношение

$$\Phi(N'_{\tilde{u}(\lambda)} \lambda S(u), B(u - u_0)) = \Phi(N'_{\tilde{u}(\lambda)}(u - u_0), \lambda BS(u)) \quad \forall u \in D(N).$$

Учитывая это соотношение, из (2.9) получаем, что

$$\int_0^1 [\Phi(N(\tilde{u}(\lambda)), BS(u)) + \Phi(\lambda N'_{\tilde{u}(\lambda)}(u - u_0), BS(u))] d\lambda = 0 \quad \forall u \in D(N). \tag{2.10}$$

Поскольку

$$\Phi(\lambda N'_{\tilde{u}(\lambda)}(u - u_0), BS(u)) = \frac{d}{d\lambda} \Phi(\lambda N(\tilde{u}(\lambda)), BS(u)) - \Phi(N(\tilde{u}(\lambda)), BS(u)),$$

из (2.10) следует, что

$$\Phi(N(u), BS(u)) = 0 \quad \forall u \in D(N).$$

Этим доказана необходимость условия (2.8). Рассуждая в обратную сторону, можно доказать его достаточность. $\square$

Следствие 2.2. *Если функционал F_N инвариантен относительно преобразования $\bar{u} = u + \varepsilon S_1(u)$, а функционал $G_N[u]$ инвариантен относительно преобразования $\bar{u} = u + \varepsilon S_2(u)$, то функционал F_N инвариантен относительно преобразования $\bar{u} = u + \varepsilon(\alpha_1 S_1(u) + \alpha_2 BS_2(u))$ $\forall \alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.*

Доказательство. Справедливы соотношения

$$\Phi(N(u), S_1(u)) = 0 \quad \forall u \in D(N),$$

$$\Phi(N(u), BS_2(u)) = 0 \quad \forall u \in D(N).$$

Следовательно,

$$\Phi(N(u), \alpha_1 S_1(u) + \alpha_2 BS_2(u)) = 0 \quad \forall u \in D(N),\ \forall \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2.$$

Таким образом, функционал F_N инвариантен относительно преобразования

$$\bar{u} = u + \varepsilon(\alpha_1 S_1(u) + \alpha_2 BS_2(u_1)).$$

□

3. Операторное уравнение с второй производной по времени и вариационными симметриями

Рассмотрим операторное уравнение

$$N(u) \equiv P_{2u,t} u_{tt} + P_{3u,t} u_t^2 + P_{1u,t} u_t + Q(t, u) = 0, \tag{3.1}$$

$$u \in D(N) \subseteq U \subseteq V, \quad t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}; \quad u_t \equiv D_t u \equiv \frac{d}{dt} u, \qquad u_{tt} \equiv \frac{d^2}{dt^2} u,$$

где $\forall t \in [t_0, t_1]$, $\forall u \in U_1$, $P_{iu,t} : U_1 \to V_1$ $(i = \overline{1,3})$ — линейные операторы, $Q : [t_0, t_1] \times U_1 \to V_1$ — произвольный оператор, $D(N)$ — область определения оператора N,

$$D(N) = \{u \in U : u|_{t=t_0} = \varphi_1,\ u|_{t=t_1} = \varphi_2,\ u_t|_{t=t_0} = \varphi_3,\ u_t|_{t=t_1} = \varphi_4,\ \varphi_i \in U_1,\ i = \overline{1,4}\}, \tag{3.2}$$

$U = C^2([t_0, t_1]; U_1)$, $V = C([t_0, t_1]; V_1)$, U_1, V_1 — линейные нормированные пространства, $U_1 \subseteq V_1$.

Предположим, что для любого $t \in (t_0, t_1)$ и любых $g(t), u(t) \in U_1$ функции $P_{1u,t} g(t)$, $P_{3u,t} g(t)$ непрерывно дифференцируемы. Предположим, что $P_{2u,t} g(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на (t_0, t_1). Функция $u \in D(N)$ называется *решением задачи* (3.1), если она удовлетворяет уравнению (3.1).

Далее мы будем писать

$$N(u) \equiv P_{2u} u_{tt} + P_{3u} u_t^2 + P_{1u} u_t + Q(u) = 0,$$

имея в виду, что операторы P_{1u}, P_{2u}, P_{3u} и Q могут зависеть еще и от t; символ $(\ldots)^*$ обозначает оператор, сопряженный к $(\ldots)$.

Рассмотрим такую билинейную форму

$$\Phi(\cdot, \cdot) \equiv \int_{t_0}^{t_1} \langle \cdot, \cdot \rangle \, dt : V \times V \to \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

что билинейное отображение $\Phi_1(\cdot, \cdot) \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\langle v_1(t), v_2(t) \rangle = \langle v_2(t), v_1(t) \rangle \qquad \forall v_1(t), v_2(t) \in V_1,$$

$$D_t \langle v(t), g(t) \rangle = \langle D_t v(t), g(t) \rangle + \langle v(t), D_t g(t) \rangle \ \ \forall v, g \in C^1([t_0, t_1]; V_1).$$

Теорема 3.1. *Если D_t кососимметрична на $D(N'_u, B)$, то оператор N уравнения* (3.1) *является B-потенциальным на $D(N)$ относительно билинейной формы* (3.3) *тогда и только тогда, когда $\forall u \in D(N)$, $\forall t \in [t_0, t_1]$ на $D(N'_u, B)$ выполняются следующие условия*:

$$B^* P_{2u} - P_{2u}^* B = 0, \tag{3.4}$$

$$u_t P_{3u}^* B - P_{2u}^{*\prime}(B(\cdot); u_t) + B^* P_{3u}(u_t(\cdot)) = 0, \tag{3.5}$$

$$-2 \frac{\partial}{\partial t}(P_{2u}^* B) + P_{1u}^* B + B^* P_{1u} = 0, \tag{3.6}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}(P^*_{2u}B)+\frac{\partial}{\partial t}(P^*_{1u}B)+B^*Q'_u-Q'^*_uB=0, \tag{3.7}$$

$$P^{*\prime}_{1u}(B(\cdot);u_t)+B^*P'_{1u}(u_t;\cdot)-[P'_{1u}(u_t;\cdot)]^*B+2u_t\frac{\partial}{\partial t}(P^*_{3u}B)-2\frac{\partial}{\partial t}P^{*\prime}_{2u}(B(\cdot);u_t)=0, \tag{3.8}$$

$$B^*P'_{2u}(u_{tt};\cdot)-P^{*\prime}_{2u}(B(\cdot);u_{tt})-[P'_{2u}(u_{tt};\cdot)]^*B+2u_{tt}P^*_{3u}B=0, \tag{3.9}$$

$$-P^{*\prime\prime}_{2u}(B(\cdot);u_t;u_t)+B^*P'_{3u}(u_t^2;\cdot)-[P'_{3u}(u_t^2;\cdot)]^*B+2u_tP^{*\prime}_{3u}(B(\cdot);u_t)=0. \tag{3.10}$$

Доказательство. Используя (3.1), получаем соотношение

$$N'_uh=2P_{3u}(u_th_t)+P'_{3u}(u_t^2;h)+P_{2u}h_{tt}+P'_{2u}(u_{tt};h)+P_{1u}h_t+P'_{1u}(u_t;h)+Q'_uh.$$

В этом случае условие (2.5) можно записать в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\left\langle 2P_{3u}(u_th_t)+P'_{3u}(u_t^2;h)+P_{2u}h_{tt}+P'_{2u}(u_{tt};h)+P_{1u}h_t+P'_{1u}(u_t;h)+Q'_uh,Bg\right\rangle dt=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left\langle 2P_{3u}(u_tg_t)+P'_{3u}(u_t^2;g)+P_{2u}g_{tt}+P'_{2u}(u_{tt};g)+P_{1u}g_t+P'_{1u}(u_t;g)+Q'_ug,h\right\rangle dt,$$

то есть — в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}(\langle 2B^*P_{3u}(u_th_t)+B^*P'_{3u}(u_t^2;h)+B^*P_{2u}h_{tt}+B^*P'_{2u}(u_{tt};h)+B^*P_{1u}h_t+$$

$$+B^*P'_{1u}(u_t;h)+B^*Q'_uh,g>-<-2D_t(u_tP^*_{3u}Bh)+[P'_{3u}(u_t^2;\cdot)]^*Bh+D_t^2(P^*_{2u}Bh)+$$

$$+[P'_{2u}(u_{tt};\cdot)]^*Bh-D_t(P^*_{1u}B_uh)+[P'_{1u}(u_t;\cdot)]^*Bh+Q'^*_uBh,g\rangle)dt=0 \tag{3.11}$$

$$\forall u\in D(N),\quad \forall g,h\in D(N'_u,B).$$

Вычислим вторую производную Гато:

$$D_t^2(P^*_{2u}Bh)=D_t(D_t(P^*_{2u}Bh))=D_t\left(P^*_{2u}Bh_t+\frac{\partial}{\partial t}(P^*_{2u}B)h+P^{*\prime}_{2u}(Bh;u_t)\right)=$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(P^*_{2u}B)h+2\frac{\partial}{\partial t}P^{*\prime}_{2u}(Bh;u_t)+2\frac{\partial}{\partial t}(P^*_{2u}B)h_t+P^{*\prime\prime}_{2u}(Bh;u_t;u_t)+2P^{*\prime}_{2u}(Bh_t;u_t)+$$

$$+P^{*\prime}_{2u}(Bh;u_{tt})+P^*_{2u}Bh_{tt}. \tag{3.12}$$

Далее,

$$D_t(P^*_{1u}Bh)=\frac{\partial}{\partial t}(P^*_{1u}B)h+P^{*\prime}_{1u}(Bh;u_t)+P^*_{1u}Bh_t, \tag{3.13}$$

$$D_t(u_tP^*_{3u}Bh)=u_{tt}P^*_{3u}Bh+u_t\frac{\partial}{\partial t}(P^*_{3u}B)h+u_tP^{*\prime}_{3u}(Bh;u_t)+u_tP^*_{3u}Bh_t. \tag{3.14}$$

Из (3.11)–(3.14) следует, что

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\Biggl\langle 2B^*P_{3u}(u_th_t)+B^*P'_{3u}(u_t^2;h)+B^*P_{2u}h_{tt}+B^*P'_{2u}(u_{tt};h)+B^*P_{1u}h_t+$$

$$+B^*P'_{1u}(u_t;h)+B^*Q'_uh-\frac{\partial^2}{\partial t^2}(P^*_{2u}B)h-2\frac{\partial}{\partial t}P^{*\prime}_{2u}(Bh;u_t)-2\frac{\partial}{\partial t}(P^*_{2u}B)h_t-$$

$$-P^{*\prime\prime}_{2u}(Bh;u_t;u_t)-2P^{*\prime}_{2u}(Bh_t;u_t)-P^{*\prime}_{2u}(Bh;u_{tt})-P^*_{2u}Bh_{tt}-$$

$$-[P'_{2u}(u_{tt};\cdot)]^*Bh+2u_{tt}P^*_{3u}Bh+2u_t\frac{\partial}{\partial t}(P^*_{3u}B)h+2u_tP^{*\prime}_{3u}(Bh;u_t)+2u_tP^*_{3u}Bh_t-$$

$$-[P'_{3u}(u_t^2;\cdot)]^*Bh+P^*_{1u}Bh_t+\frac{\partial}{\partial t}(P^*_{1u}B)h+P^{*\prime}_{1u}(Bh;u_t)-[P'_{1u}(u_t;\cdot)]^*Bh-Q'^*_uBh,g\Biggr\rangle dt=0.$$

Таким образом, условие (3.11) представляется в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle (B^*P_{2u} - P_{2u}^*B)\, h_{tt} + (2B^*P_{3u}(u_t(\cdot)) + B^*P_{1u} + 2u_tP_{3u}^*B -$$
$$- 2\frac{\partial}{\partial t}(P_{2u}^*B) - 2P_{2u}^{*\prime}(B(\cdot);u_t) + P_{1u}^*B)\, h_t + B^*P_{3u}^{\prime}(u_t^2;h) +$$
$$+ B^*P_{2u}^{\prime}(u_{tt};h) + B^*P_{1u}^{\prime}(u_t;h) + B^*Q_u^{\prime}h + 2u_{tt}P_{3u}^*Bh + 2u_t\frac{\partial}{\partial t}(P_{3u}^*B)h +$$
$$+ 2u_tP_{3u}^{*\prime}(Bh;u_t) - [P_{3u}^{\prime}(u_t^2;\cdot)]^*Bh - \frac{\partial^2}{\partial t^2}(P_{2u}^*B)h - 2\frac{\partial}{\partial t}P_{2u}^{*\prime}(Bh;u_t) -$$
$$- P_{2u}^{*\prime\prime}(Bh;u_t;u_t) - P_{2u}^{*\prime}(Bh;u_{tt}) - [P_{2u}^{\prime}(u_{tt};\cdot)]^*Bh + \frac{\partial}{\partial t}(P_{1u}^*B)h + P_{1u}^{*\prime}(Bh;u_t) -$$
$$-[P_{1u}^{\prime}(u_t;\cdot)]^*Bh - Q_u^{\prime *}Bh, g\rangle\, dt = 0 \quad \forall u \in D(N), \quad \forall g, h \in D(N_u^{\prime}, B).$$

Оно тождественно выполняется тогда и только тогда, когда

$$(B^*P_{2u} - P_{2u}^*B)\, h_{tt} + (2B^*P_{3u}(u_t(\cdot)) + B^*P_{1u} + 2u_tP_{3u}^*B - 2\frac{\partial}{\partial t}(P_{2u}^*B) -$$
$$- 2P_{2u}^{*\prime}(B(\cdot);u_t) + P_{1u}^*B)\, h_t + B^*P_{3u}^{\prime}(u_t^2;h) + B^*P_{2u}^{\prime}(u_{tt};h) + B^*P_{1u}^{\prime}(u_t;h) +$$
$$+ B^*Q_u^{\prime}h + 2u_{tt}P_{3u}^*Bh + 2u_t\frac{\partial}{\partial t}(P_{3u}^*B)h + 2u_tP_{3u}^{*\prime}(Bh;u_t) -$$
$$- [P_{3u}^{\prime}(u_t^2;\cdot)]^*Bh - \frac{\partial^2}{\partial t^2}(P_{2u}^*B)h - 2\frac{\partial}{\partial t}P_{2u}^{*\prime}(Bh;u_t) - P_{2u}^{*\prime\prime}(Bh;u_t;u_t) -$$
$$- P_{2u}^{*\prime}(Bh;u_{tt}) - [P_{2u}^{\prime}(u_{tt};\cdot)]^*Bh + \frac{\partial}{\partial t}(P_{1u}^*B)h + P_{1u}^{*\prime}(Bh;u_t) -$$
$$- [P_{1u}^{\prime}(u_t;\cdot)]^*Bh - Q_u^{\prime *}Bh = 0 \quad \forall u \in D(N), \quad \forall h \in D(N_u^{\prime}, B).$$

Чтобы это равенство было справедливо, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (3.4)–(3.10). □

Теорема 3.2. *Если $D_t^* = -D_t$ на $D(N_u^{\prime}, B)$, а оператор N, заданный формулой* (3.1)*, B-потенциален относительно билинейной формы* (3.3) *на множестве $D(N)$, заданном формулой* (3.2)*, то функционал F_N представляется в виде*

$$F_N[u] = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \langle R_{3u}(u_tu), Bu_t\rangle + \langle R_{2u}u_t, Bu_t\rangle + \langle R_1(u), Bu_t\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B^*R_{2u})u, u_t \right\rangle + K[u] \right\} dt, \tag{3.15}$$

где

$$\Phi(R_1(u), Bu_t) = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \left\langle -P_{1\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0), B\frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right\rangle d\lambda dt,$$

$$\Phi(R_{2u}u_t, Bu_t) = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \left\langle -P_{2\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0t}), B\frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right\rangle d\lambda dt,$$

$$\Phi(R_{3u}(u_tu), Bu_t) = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \left\langle -P_{3\tilde{u}(\lambda)}\left(\frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}(u-u_0)\right), B\frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right\rangle d\lambda dt,$$

$$K[u] = \int_0^1 \left[\langle Q(\tilde{u}(\lambda)), B(u-u_0)\rangle + \lambda \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B^*P_{1\tilde{u}(\lambda)})(u-u_0), u-u_0 \right\rangle - \right.$$
$$\left. - \lambda \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2}(B^*P_{2\tilde{u}(\lambda)})(u-u_0), u-u_0 \right\rangle \right] d\lambda,$$

а u_0 — фиксированный элемент $D(N)$.

Доказательство теоремы 3.2 аналогично доказательству [5, теорема 2].

Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований

$$\tilde{G}: \begin{cases} \overline{t} = t + \varepsilon\varphi(t,u), \\ \overline{u}(\overline{t}) = u(t) + \varepsilon\psi(t,u), \end{cases} \tag{3.16}$$

где φ, ψ — некоторые операторы.

Используя преобразование (3.16), можно определить функцию $\overline{u}(t,\varepsilon)$ следующим образом:

$$\overline{u} = u + \varepsilon S(u), \tag{3.17}$$

где $S(u) = \psi(t,u) - u_t\varphi(t,u)$.

Определение 3.1. Функционал (3.15) называется *инвариантным относительно преобразования* (3.17), если

$$F_N[u + \varepsilon S(u)] = F_N[u] + r(u, \varepsilon S(u)) \quad \forall T_1 : t_0 \leqslant T_1 \leqslant t_1, \tag{3.18}$$

где r таково, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{r(u,\varepsilon S(u))}{\varepsilon} = 0$.

Теорема 3.3. *Преобразование* (3.17) *является симметрией функционала* (3.15) *тогда и только тогда, когда*

$$\langle N(u), BS(u)\rangle + D_t\Bigg\{\langle R_{3u}(u_t u), BS(u)\rangle + \langle R_{3u}(uS(u)), Bu_t\rangle + \langle R_{2u}u_t, BS(u)\rangle +$$
$$+ \langle R_{2u}S(u), Bu_t\rangle + \langle R_1(u), BS(u)\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B^* R_{2u})u, S(u)\right\rangle\Bigg\} = 0 \quad \forall u \in W,\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

Доказательство теоремы 3.3 аналогично доказательству [1, теорема 1].

4. Пример

Рассмотрим следующее уравнение в частных производных:

$$N(u) \equiv u_{tt} + 2\beta v(t)u_{tx} + u_{xxxx} + v^2(t)u_{xx} + \beta v'(t)u_x = 0, \tag{4.1}$$
$$(x,t) \in Q_T = (a,b) \times (0,T).$$

Определим $D(N)$ следующим образом:

$$D(N) = \{u \in U = C^{2,4}_{t,x}(\overline{Q_T}) : u|_{t=0} = \phi_1(x),\ u|_{t=T} = \phi_2(x)\ (x \in (a,b)), \tag{4.2}$$
$$u|_{x=a} = \psi_1(t),\ u|_{x=b} = \psi_2(t),\ u_x|_{x=a} = \psi_3(t),\ u_x|_{x=b} = \psi_4(t)\ (t \in (0,T))\},$$

где $\phi_i, \psi_j (i = 1,2,\ j = \overline{1,4})$ — заданные непрерывные функции.

Отметим, что оператор N, заданный уравнением (4.1), потенциален в области (4.2) относительно классической билинейной формы

$$\Phi(v,g) = \int_0^T\int_a^b v(x,t)g(x,t)\,dxdt.$$

Уравнение (4.1) — это частный случай уравнения (3.1). Действительно, в этом случае справедливы равенства

$$P_2 = I, \qquad P_1 = 2\beta v(t)D_x, \qquad P_1^* = -2\beta v(t)D_x, \qquad \frac{\partial P_1^*}{\partial t} = -2\beta v'(t)D_x,$$
$$P_3 = 0, \qquad Q'_u = D_x^4 + v^2(t)D_x^2 + \beta v'(t)D_x, \qquad Q'^*_u = D_x^4 + v^2(t)D_x^2 - \beta v'(t)D_x$$

и импликации (3.4) $\Longrightarrow I - I = 0$, (3.5) $\Longrightarrow 0 = 0$, (3.6) $\Longrightarrow 2\beta v(t)D_x - 2\beta v(t)D_x = 0$, (3.7) $\Longrightarrow$ $-2\beta v'(t)D_x + D_x^4 + v^2(t)D_x^2 + \beta v'(t)D_x - D_x^4 - v^2(t)D_x^2 + \beta v'(t)D_x = 0$, (3.8) $\Longrightarrow 0 = 0$, (3.9) $\Longrightarrow 0 = 0$, (3.10) $\Longrightarrow 0 = 0$.

Согласно теореме 3.2, справедливы соотношения

$$R_2 = -\frac{1}{2}I,\ R_1 = -\beta v(t)D_x,\ K[u] = \frac{1}{2}\int_a^b \left\{u_{xx}^2 - v(t)u_x^2\right\}dx,$$

где I — тождественный оператор.

Таким образом, соответствующий функционал есть

$$F_N[u] = \frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_a^b \{-u_t^2 - 2\beta v(t)u_x u_t + u_{xx}^2 - v(t)u_x^2\}\,dxdt. \tag{4.3}$$

Отметим, что если $u \in C^{2,\infty}_{t,x}(\overline{Q_T})$, то операторы

$$S_k(u) = \frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

являются генераторами симметрий функционала (4.3).

Соответствующие первые интегралы равны

$$I_k[u] = \int\limits_a^b \left(u \cdot \frac{\partial^{2k+2}u}{\partial^{2k+1}\partial t} + (-1)^{k+1}\beta v(t)\left(\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x^{k+1}}\right)^2\right)dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

5. Альтернативные лагранжианы и численные решения диссипативной задачи

Продемонстрируем (численно) работу вариационного метода на простом линейном обыкновенном дифференциальном уравнении с непотенциальным оператором.

Рассмотрим следующую задачу:

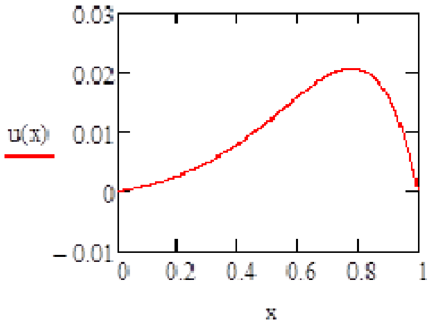
$$N(u) \equiv \frac{d^2u}{dx^2} - 4\frac{du}{dx} + x^3 = 0,$$
$$u(0) = u(1) = 0. \tag{5.1}$$

Через $D(N) = \{u \in C^2[0,1] : u(0) = u(1) = 0\}$ обозначим область определения оператора N.

График точного решения

$$u(x) = \frac{25}{128(e^4-1)}(1 - e^{4x}) + \frac{1}{16}(x^4 + x^3) + \frac{3}{64}x^2 + \frac{3}{128}x$$

задачи (5.1) имеет вид:



Сам оператор (5.1) не является потенциальным относительно классической билинейной формы

$$\Phi(\nu, g) = \int\limits_0^1 \nu(x)g(x)dx. \tag{5.2}$$

Однако существует такой вариационный мультипликатор (а именно, $M(x) = e^{-4x}$), что оператор $\tilde{N}(u) = M(x)N(u)$ потенциален относительно билинейной формы (5.2).

Соответствующий функционал для $\tilde{N}(u)$ имеет вид

$$F_{\tilde{N}}[u] = \int\limits_0^1 e^{-4x}\left[u(x)x^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2\right]dx.$$

Применяя метод Ритца (см. [15]), находим три приближенных решения задачи (5.1), имеющих следующий вид:

$$\tilde{u}(x) = x(1-x)\left[\sum_{i=0}^{\infty}(c_i x^i)\right].$$

Первое решение равно

$$u_1(x) = 0{,}02117x(1-x),$$

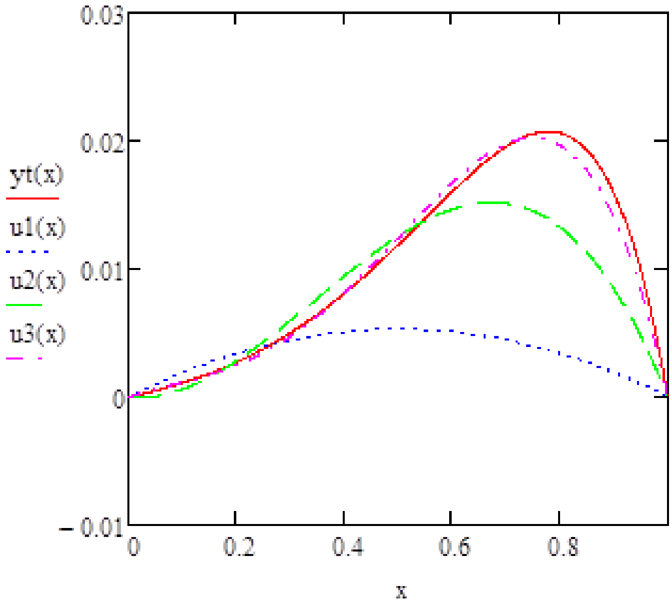
второе решение

$$u_2(x) = x(1-x)(-0{,}00429 + 0{,}10889x),$$

и третье решение

$$u_3(x) = x(1-x)(0{,}2158x^2 - 0{,}03699x + 0{,}01416).$$

График точного решения и графики вышеуказанных приближенных решений имеют вид:



Выберем вспомогательный оператор B вида $Bu(x) = u(1-x)$ и рассмотрим сверточную билинейную форму

$$\Phi_1(\nu, g) = \int_0^1 \nu(1-x)g(x)dx.$$

Оператор N, заданный формулой (5.1), потенциален относительно этой билинейной формы, а соответствующий функционал есть

$$G_N[u] = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}u'(x)u'(1-x) - 2u(1-x)u'(x) + x^3 u(1-x)\right] dx, \tag{5.3}$$

где $u'(x) = \dfrac{du(x)}{dx}$.

Применяя метод Ритца из [15], находим три приближенных решения задачи (5.1).

Первое приближенное решение равно

$$u_{s_1}(x) = \frac{x(1-x)}{10},$$

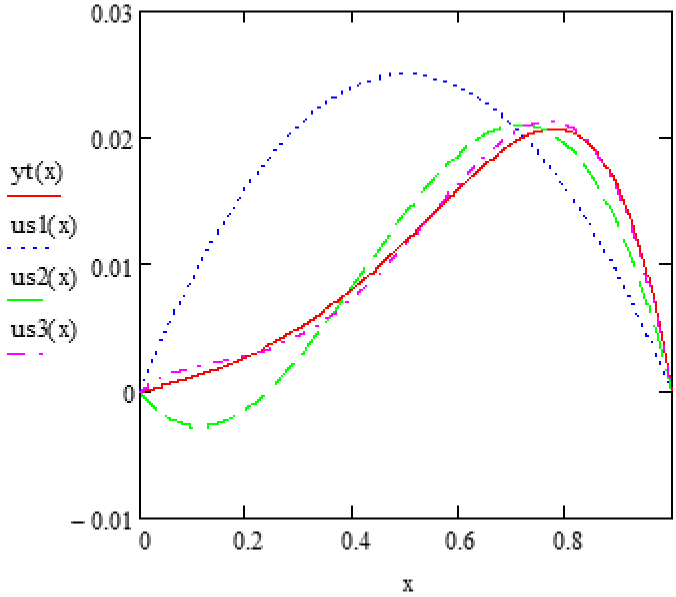
второе приближенное решение

$$u_{s_2}(x) = x(1-x)\left(\frac{29x}{133} - \frac{1}{19}\right),$$

и третье приближенное решение

$$u_{s_3}(x) = x(1-x)\left(\frac{73x^2}{232} - \frac{x}{8} + \frac{7}{232}\right).$$

Графики точного решения и приближенных решений, найденных с помощью функционала (5.3), имеют вид



Оценим отклонения приближенных решений от точного по норме пространства L_2:

$$I(f) = \left[\int_0^1 (f(x))^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Вначале рассмотрим приближенные решения, найденные с помощью классической билинейной формы. Их отклонения от точного решения $u(x)$ равны $I_1 = 0{,}009469$, $I_2 = 0{,}003695$ и $I_3 = 0{,}00076$ соответственно.

Отклонения от точного решения $u(x)$ приближенных решений, найденных с помощью сверточной билинейной формы, равны $I_{s_1} = 0{,}1029$, $I_{s_2} = 0{,}002513$ и $I_{s_3} = 0{,}000539$ соответственно.

6. Заключение

Задача о построении функционала, множество критических (экстремальных или стационарных) точек которого совпадает с множеством решений заданного уравнения, остается важной и актуальной. Ее решение может быть не единственным. Поэтому для ее исследования могут использоваться различные гамильтоновы действия, порождающие данную систему. Представляет интерес исследование их свойств.

Мы устанавливаем связь между вариационными симметриями двух разных гамильтоновых действий, порождающих одну ту же систему. Для заданного эволюционного операторного уравнения второго порядка найдены необходимые и достаточные условия существования непрямых решений обратной задачи вариационного исчисления. Задача сводится к поиску вспомогательного оператора, удовлетворяющего выведенным уравнениям. При данных условиях возможно получить непрямые вариационные формулировки данных проблем в рамках неэйлеровых классов функционалов. Их использование для поиска приближенных решений указанных задач и первых интегралов эволюционных систем интересно и актуально.

7. Благодарности

Настоящая работа выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН и при частичной поддержке РФФИ, грант № 19-08-00261а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Будочкина С. А., Савчин В. М.* Вариационные симметрии эйлеровых и неэйлеровых функционалов// Дифф. уравн. — 2011. — *47*, № 6. — С. 811–818.
2. *Козлов В. В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. — Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. ун-та, 1995.
3. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989.
4. *Савчин В. М.* Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. — М.: РУДН, 1991.
5. *Савчин В. М., Будочкина С. А.* О существовании вариационного принципа для операторного уравнения со второй производной по «времени»// Мат. заметки. — 2006. — *80*, № 1. — С. 87–94.
6. *Савчин В. М., Будочкина С. А.* Симметрии и первые интегралы в механике бесконечномерных систем// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 2. — С. 169–171.
7. *Филиппов В. М.* Вариационные принципы для непотенциальных операторов. — М.: РУДН, 1985.
8. *Филиппов В. М.* О вариационном принципе для гипоэллиптических уравнений с постоянными коэффициентами// Дифф. уравн. — 1986. — *22*, № 2. — С. 338–343.
9. *Филиппов В. М.* О полуограниченных решениях обратных задач вариационного исчисления// Дифф. уравн. — 1987. — *23*, № 9. — С. 1599–1607.
10. *Budochkina S. A.* Symmetries and first integrals of a second order evolutionary operator equation// Eurasian Math. J. — 2012. — *3*, № 1. — С. 18–28.
11. *Budochkina S. A.* On connection between variational symmetries and algebraic structures// Ufa Math. J. — 2021. — *13*, № 1. — С. 46–55.
12. *Filippov V. M., Savchin V. M., Budochkina S. A.* On the existence of variational principles for differential-difference evolution equations// Proc. Steklov Inst. Math. — 2013. — *283*. — С. 20–34.
13. *Filippov V. M., Savchin V. M., Shorokhov S. G.* Variational principles for nonpotential operators// J. Math. Sci. (N.Y.). — 1994. — *68*, № 3. — С. 275–398.
14. *Marchuk G. I.* Construction of adjoint operators in non-linear problems of mathematical physics// Sb. Math. — 1998. — *189*, № 10. — С. 1505–1516.
15. *Mikhlin S. G.* Numerical performance of variational methods. — Groningen: Wolters-Noordhoff Publ., 1965.
16. *Popov A. M.* Potentiality conditions for differential-difference equations// Differ. Equ. — 1998. — *34*, № 3. — С. 423–426.
17. *Popov A. M.* Inverse problem of the calculus of variations for systems of differential-difference equations of second order// Math. Notes. — 2002. — *72*, № 5. — С. 687–691.
18. *Savchin V. M., Budochkina S. A.* Invariance of functionals and related Euler–Lagrange equations// Russ. Math. — 2017. — *61*, № 2. — С. 49–54.
19. *Tleubergenov M. I., Azhymbaev D. T.* On the solvability of stochastic Helmholtz problem// J. Math. Sci. — 2021. — *253*. — С. 297–305.
20. *Tleubergenov M. I., Ibraeva G. T.* On inverse problem of closure of differential systems with degenerate diffusion// Eurasian Math. J. — 2019. — *10*, № 2. — С. 93–102.
21. *Tleubergenov M. I., Ibraeva G. T.* On the solvability of the main inverse problem for stochastic differential systems// Ukr. Math. J. — 2019. — *71*, № 1. — С. 157–165.
22. *Tonti E.* On the variational formulation for linear initial value problems// Ann. Mat. Pura Appl. — 1973. — *95*. — С. 331–359.
23. *Tonti E.* Variational formulation for every nonlinear problem// Int. J. Eng. Sci. — 1984. — *22*, № 11-12. — С. 1343–1371.

В. М. Филиппов
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: v.filippov@rudn.ru

В. М. Савчин
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: savchin-vm@rudn.ru

С. А. Будочкина
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: budochkina-sa@rudn.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-596-608 UDC 517.9

Bi-Variationality, Symmetries and Approximate Solutions

© 2021 **V. Filippov, V. Savchin, S. Budochkina**

Abstract. By a bi-variational system we mean any system of equations generated by two different Hamiltonian actions. A connection between their variational symmetries is established. The effective use of the nonclassical Hamiltonian actions for the construction of approximate solutions with the high accuracy for the given dissipative problem is demonstrated. We also investigate the potentiality of the given operator equation with the second-order time derivative, construct the corresponding functional and find necessary and sufficient conditions for the operator S to be a generator of symmetry of the constructed functional. Theoretical results are illustrated by some examples.

REFERENCES

1. S. A. Budochkina and V. M. Savchin, "Variatsionnye simmetrii eylerovykh i neeylerovykh funktsionalov" [Variational symmetries of Euler and non-Euler functionals], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], **47**, No. 6, 811–818 (2011).
2. V. V. Kozlov, *Simmetrii, topologiya i rezonansy v gamil'tonovoy mekhanike* [Symmetries, Topology and Resonances in the Hamiltonian Mechanics], Udmurt State University Press, Izhevsk (1995).
3. P. Olver, *Prilozheniya grupp Li k differentsial'nym uravneniyam* [Applications of Lie Groups to Differential Equations], Mir, Moscow (1989).
4. V. M. Savchin, *Matematicheskie metody mekhaniki beskonechnomernykh nepotentsial'nykh sistem* [Mathematical Methods of the Mechanics of Infinite Dimensional Systems], Peoples' Friendship University Press, Moscow (1991).
5. V. M. Savchin and S. A. Budochkina, "O sushchestvovanii variatsionnogo printsipa dlya operatornogo uravneniya so vtoroy proizvodnoy po «vremeni»" [On the existence of a variational principle for an operator equation with the second derivative with respect to «time»], *Mat. zametki* [Math. Notes], **80**, No. 1, 87–94 (2006).
6. V. M. Savchin and S. A. Budochkina, "Simmetrii i pervye integraly v mekhanike beskonechnomernykh sistem" [Symmetries and first integrals in the mechanics of infinite-dimensional systems], *Dokl. RAN* [Dokl. Math.], **425**, No. 2, 169–171 (2009).
7. V. M. Filippov, *Variatsionnye printsipy dlya nepotentsial'nykh operatorov* [Variational Principles for Nonpotential Operators], Peoples' Friendship University Press, Moscow (1985).
8. V. M. Filippov, "O variatsionnom printsipe dlya gipoellipticheskikh uravneniy s postoyannymi koeffitsientami" [The variational principle for hypoelliptic equations with constant coefficients], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], **22**, No. 2, 338–343 (1986).
9. V. M. Filippov, "O poluogranichennykh resheniyakh obratnykh zadach variatsionnogo ischisleniya" [Semibounded solutions of inverse problems of the calculus of variations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], **23**, No. 9, 1599–1607 (1987).
10. S. A. Budochkina, "Symmetries and first integrals of a second order evolutionary operator equation," *Eurasian Math. J.*, **3**, No. 1, 18–28 (2012).
11. S. A. Budochkina, "On connection between variational symmetries and algebraic structures," *Ufa Math. J.*, **13**, No. 1, 46–55 (2021).
12. V. M. Filippov, V. M. Savchin, and S. A. Budochkina, "On the existence of variational principles for differential-difference evolution equations," *Proc. Steklov Inst. Math.*, **283**, 20–34 (2013).
13. V. M. Filippov, V. M. Savchin, and S. G. Shorokhov, "Variational principles for nonpotential operators," *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **68**, No. 3, 275–398 (1994).

14. G. I. Marchuk, “Construction of adjoint operators in non-linear problems of mathematical physics,” *Sb. Math.*, **189**, No. 10, 1505–1516 (1998).
15. S. G. Mikhlin, *Numerical Performance of Variational Methods*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen (1965).
16. A. M. Popov, “Potentiality conditions for differential-difference equations,” *Differ. Equ.*, **34**, No. 3, 423–426 (1998).
17. A. M. Popov, “Inverse problem of the calculus of variations for systems of differential-difference equations of second order,” *Math. Notes*, **72**, No. 5, 687–691 (2002).
18. V. M. Savchin and S. A. Budochkina, “Invariance of functionals and related Euler–Lagrange equations,” *Russ. Math.*, **61**, No. 2, 49–54 (2017).
19. M. I. Tleubergenov and D. T. Azhymbaev, “On the solvability of stochastic Helmholtz problem,” *J. Math. Sci.*, **253**, 297–305 (2021).
20. M. I. Tleubergenov and G. T. Ibraeva, “On inverse problem of closure of differential systems with degenerate diffusion,” *Eurasian Math. J.*, **10**, No. 2, 93–102 (2019).
21. M. I. Tleubergenov and G. T. Ibraeva, “On the solvability of the main inverse problem for stochastic differential systems,” *Ukr. Math. J.*, **71**, No. 1, 157–165 (2019).
22. E. Tonti, “On the variational formulation for linear initial value problems,” *Ann. Mat. Pura Appl.*, **95**, 331–359 (1973).
23. E. Tonti, “Variational formulation for every nonlinear problem,” *Int. J. Eng. Sci.*, **22**, No. 11-12, 1343–1371 (1984).

Vladimir Filippov
Department of Comparative Educational Policy,
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: `v.filippov@rudn.ru`

Vladimir Savchin
S. M. Nikol’skii Institute of Mathematics,
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: `savchin-vm@rudn.ru`

Svetlana Budochkina
S. M. Nikol’skii Institute of Mathematics,
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: `budochkina-sa@rudn.ru`