РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 67, № 2, 2021

Посвящается памяти профессора Н. Д. Копачевского

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2
http://journals.rudn.ru/cmfd

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print)
4 выпуска в год
http://journals.rudn.ru/cmfd
Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.
Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.
Индексируется в международных базах данных научных публикаций *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.
Полный текст журнала размещен в базах данных компании *EBSCO Publishing* на платформе *EBSCOhost*.
Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты. Объем статьи, занимающий целый том, должен составлять 140–190 страниц в стиле нашего журнала.

Правила оформления статей, архив публикаций и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала: http://journals.rudn.ru/cmfd, http://www.mathnet.ru/cmfd.

Редактор: *Е. М. Варфоломеев*
Компьютерная верстка: *Е. М. Варфоломеев*

Адрес редакции:
115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Подписано в печать 01.03.2021. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.
Усл. печ. л. 27,44. Тираж 125 экз. Заказ 211.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов» (РУДН)
117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН
115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 67, No. 2, 2021

Dedicated to the memory of Professor N. D. Kopachevsky

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2

http://journals.rudn.ru/cmfd

Founded in 2003

Founder: PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS
Published by the Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print)
4 issues per year
http://journals.rudn.ru/cmfd
Reviewed in *MathSciNet* and *Zentralblatt Math*.
The full texts can be found in the *EBSCOhost* databases by *EBSCO Publishing*.
Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results. Occupying the whole volume, an article should make up 140–190 pages in the format of the journal.

Guidelines for authors, archive of issues, and other information can be found at the journal's website: http://journals.rudn.ru/cmfd, http://www.mathnet.ru/eng/cmfd.

Editor: *E. M. Varfolomeev*
Computer design: *E. M. Varfolomeev*
Address of the Editorial Office:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru
Print run 125 copies.
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia
Printed at RUDN Publishing House:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 2 (2021)

СОДЕРЖАНИЕ

Памяти Николая Дмитриевича Копачевского, математика и человека (*В. И. Войтицкий, М. А. Муратов, Ю. С. Пашкова, П. А. Старков, Т. А. Суслина, Д. О. Цветков*) 193
Правосторонняя обратимость двучленных функциональных операторов и градуированная дихотомия (*А. Б. Антоневич*) 208
Индексы дефекта блочных матриц Якоби: обзор (*В. С. Будыка, М. М. Маламуд, К. А. Мирзоев*) 237
Исследование интегродифференциальных уравнений методами спектральной теории (*В. В. Власов, Н. А. Раутиан*) 255
Стохастический лагранжев подход к вязкой гидродинамике (*Ю. Е. Гликлих*) 285
О представлениях групп и алгебр в пространствах с индефинитной метрикой (*Э. В. Киссин, В. С. Шульман*) 295
О построении вариационного принципа для некоторого класса дифференциально-разностных операторных уравнений (*И. А. Колесникова*) 316
Уравнения, связанные со случайными процессами: полугрупповой подход и преобразование Фурье (*И. В. Мельникова, У. А. Алексеева, В. А. Бовкун*) 324
О разрешимости линейной параболической задачи с нелокальными краевыми условиями (*О. В. Солонуха*) 349
Асимптотика спектра вариационных задач, возникающих в теории колебаний жидкости (*Т. А. Суслина*) 363
Прямые и обратные задачи спектрального анализа для дифференциальных операторов произвольных порядков с неинтегрируемыми регулярными особенностями (*В. А. Юрко*) . . . 408

CONTENTS

In Memory of Nikolay Dmitrievich Kopachevsky, a Mathematician and a Human (*V. I. Voytitsky, M. A. Muratov, Yu. S. Pashkova, P. A. Starkov, T. A. Suslina, D. O. Tsvetkov*) 193
Right-Sided Invertibility of Binomial Functional Operators and Graded Dichotomy (*A. B. Antonevich*) 208
Deficiency Indices of Block Jacobi Matrices: Survey (*V. Budyka, M. Malamud, K. Mirzoev*) . . 237
Investigation of Integrodifferential Equations by Methods of Spectral Theory (*V. V. Vlasov, N. A. Rautian*) 255
Stochastic Lagrange Approach to Viscous Hydrodynamics (*Yu. E. Gliklikh*) 285
On Representations of Groups and Algebras in Spaces with Indefinite Metric (*E. V. Kissin, V. S. Shulman*) 295
On the Construction of a Variational Principle for a Certain Class of Differential-Difference Operator Equations (*I. A. Kolesnikova*) 316
Equations Related to Stochastic Processes: Semigroup Approach and Fourier Transform (*I. V. Melnikova, U. A. Alekseeva, V. A. Bovkun*) 324
On Solvability of a Linear Parabolic Problem with Nonlocal Boundary Conditions (*O. V. Solonukha*) 349
Asymptotics of the Spectrum of Variational Problems Arising in the Theory of Fluid Oscillations (*T. A. Suslina*) 363
Direct and Inverse Problems of Spectral Analysis for Arbitrary-Order Differential Operators with Nonintegrable Regular Singularities (*V. A. Yurko*) 408

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 2 (2021). С. 193–207

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-193-207

ПАМЯТИ НИКОЛАЯ ДМИТРИЕВИЧА КОПАЧЕВСКОГО, МАТЕМАТИКА И ЧЕЛОВЕКА

© 2021 г. **В. И. ВОЙТИЦКИЙ, М. А. МУРАТОВ, Ю. С. ПАШКОВА, П. А. СТАРКОВ, Т. А. СУСЛИНА, Д. О. ЦВЕТКОВ**

Аннотация. Статья посвящена научной и педагогической деятельности Николая Дмитриевича Копачевского (1940–2020) — известного математика, заведующего кафедрой математического анализа Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, организатора и руководителя Крымской осенней математической школы-симпозиума (КРОМШ).

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Краткая научная биография Н. Д. Копачевского 193
2. Научно-педагогическая деятельность. Работа с учениками 196
Список литературы 199

1. Краткая научная биография Н. Д. Копачевского

18 мая 2020 года ушел из жизни Николай Дмитриевич Копачевский — известный отечественный математик, доктор физико-математических наук, профессор, почетный работник сферы образования Российской Федерации, заведующий кафедрой математического анализа Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, организатор и бессменный руководитель Крымской осенней математической школы-симпозиума (КРОМШ).

Николай Дмитриевич Копачевский родился 25 марта 1940 года в городе Симферополе. Когда началась война, его отец, Дмитрий Николаевич, ушел на фронт, а Коля с мамой и бабушкой попали в оккупацию. Его мать расстреляли фашисты, и маленький Коля остался на руках его тети, Дины Лазаревны, которая воспитала его, несмотря на трудное военное и послевоенное время.

Еще в школьные годы Николай Дмитриевич увлекся математикой, которой в дальнейшем посвятил всю свою жизнь.

По окончании школы Николай Дмитриевич поступил в Харьковский авиационный институт (ХАИ), который окончил с отличием в 1963 году, получив одним из первых в СССР новую специальность инженера-конструктора ядерных авиадвигателей. Математическое дарование Николая Дмитриевича проявилось уже в студенческие годы. Куратором потока, на котором он учился, был знаменитый математик Анатолий Дмитриевич Мышкис. Под его руководством Николай Дмитриевич начал работать уже со второго курса (см. [32, 62]). Наряду с учебой в ХАИ Николай Дмитриевич с начальных курсов регулярно посещает лекции известных математиков В. А. Марченко, Н. И. Ахиезера, И. М. Глазмана, Б. Я. Левина в Харьковском государственном университете.

Помимо учебы Николай Дмитриевич играл в ведущих волейбольных командах Харькова, тренировался в команде мастеров высшей лиги СССР «Буревестник».

По окончании ХАИ Николай Дмитриевич был принят инженером в Физико-технический институт низких температур (ФТИНТ), в отдел прикладной математики, возглавляемый Анатолием Дмитриевичем Мышкисом.

В начале 60-х годов в связи с первым полетом человека в космос и началом космической эры возник ряд прикладных задач, требовавших построения новых математических моделей. Одной из таких задач была проблема поведения жидкого топлива в баке космической ракеты в условиях невесомости.

По инициативе первого директора ФТИНТ академика Б. И. Веркина, с согласия академика С. П. Королева, к изучению данной проблематики была привлечена группа молодых исследователей под руководством А. Д. Мышкиса. Перед ними стояла задача определения форм равновесия, условий устойчивости, описания тепловой конвекции, малых движений жидкости в условиях, близких к состоянию невесомости.

Подобными задачами чуть позже стали заниматься в Вычислительном центре АН СССР (Москва) в отделе Н. Н. Моисеева и в Институте математики АН УССР (Киев) в отделе И. А. Луковского. Эти группы активно и плодотворно сотрудничали, и в 1976 году по материалам работы сотрудников ФТИНТ вышла первая в мире монография по гидромеханике невесомости [9]. Вскоре эта книга была переиздана во многих странах мира, см. [77]. В 1992 году вышла вторая монография [8], отражающая современное развитие этой тематики.

Изучением проблемы малых движений и собственных колебаний в группе А. Д. Мышкиса стал заниматься Николай Дмитриевич. Вдохновленный современными идеями функционального анализа, он решил привлечь к решению поставленной задачи широко применяющиеся в квантовой механике методы теории линейных самосопряжённых операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Этот подход полностью себя оправдал и составил материал кандидатской диссертации Николая Дмитриевича «О малых колебаниях жидкости в сосуде в условиях, близких к невесомости», защищенной им в Харькове в 1966 году. В диссертации было проведено исследование идеальной жидкости, установлена теорема о разрешимости эволюционной задачи, спектральная задача сведена к исследованию линейного операторного пучка в гильбертовом пространстве, на основании свойств операторов потенциальной и кинетической энергии установлены спектральные свойства задачи, а также условия устойчивости равновесных форм жидкости, методом Ритца были вычислены вещественные собственные значения и собственные функции задачи. Частично эти результаты отражены в одной из первых статей Николая Дмитриевича [41] (совместной с А. Д. Мышкисом).

Большое влияние на выбор операторной методики исследований оказал Селим Григорьевич Крейн, глава Воронежской школы функционального анализа, который стал старшим товарищем и вторым учителем Николая Дмитриевича. Их знакомство произошло в 1965 году на заседании Харьковского математического общества, где Селим Григорьевич рассказывал о серии работ, посвященных гидродинамике тяжелой вязкой жидкости. В частности, в докладе был упомянут нелинейный операторный пучок, позже названный пучком С. Г. Крейна. Результаты исследования данной (несамосопряженной) задачи, отраженные в работах Н.К. Аскерова и Г.И. Лаптева, а также работы М.Г. Крейна и Х. Лангера по спектральной теории операторных пучков, убедили Николая Дмитриевича в плодотворности и перспективности методов теории линейных операторов, сформировали почву для дальнейших исследований.

Под влиянием работ С. Г. Крейна Николай Дмитриевич начал изучение поведения вязкой жидкости, а также систем несмешивающихся жидкостей с учетом сил поверхностного натяжения и вращения. Уже первая статья [42] по этой тематике показала, что учёт сил поверхностного натяжения существенно меняет структуру спектра задачи, а именно, вместо двух ветвей положительных собственных значений с предельными точками в нуле и на бесконечности остается одна ветвь с предельной точкой на бесконечности. Как известно, пучок С. Г. Крейна имеет не более конечного числа невещественных собственных значений. Тот же результат был получен для вязкого самогравитирующего шара. Отметим, что для вязкой капиллярной жидкости в произвольной области вопрос о числе невещественных собственных значений не решен до сих пор.

Материалы работ Николая Дмитриевича [19–26, 43, 46, 65], написанных в 70-е годы, стали основой докторской диссертации «Теория малых колебаний жидкостей с учетом сил поверхностного натяжения и вращения», защищенной в Москве в 1980 году в Вычислительном центре АН СССР.

Официальные оппоненты — выдающиеся математики О. А. Ладыженская и Ф. Л. Черноусько — высоко оценили результаты Николая Дмитриевича.

После защиты докторской диссертации по предложению С. Г. Крейна началась их совместная работа над монографией «Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи» [40]. Третьим автором книги стал вьетнамский математик Нго Зуй Кан. В 1981 году Нго Зуй Кан защитил докторскую диссертацию под руководством С. Г. Крейна, вторым научным консультантом выступал Николай Дмитриевич. Монография вышла в 1989 году и по сегодняшний день является одной из немногих книг, в которых в полной мере отражена методика применения теории линейных операторов к задачам гидродинамики, разработанная Селимом Григорьевичем и Николаем Дмитриевичем. В 2001 и 2003 годах в многотомной серии И. Ц. Гохберга «Operator Theory: Advances and Applications» вышла двухтомная монография Н. Д. Копачевского и С. Г. Крейна «Operator approach to linear problems of hydrodynamics» [68, 69], представляющая собой расширенный вариант монографии [40].

В 1981 году Николай Дмитриевич с супругой Валентиной Георгиевной возвращается в родной Крым. С этого момента он является заведующим кафедрой математического анализа Симферопольского государственного университета — Таврического национального университета — Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского.

Во время работы в Симферополе Николай Дмитриевич продолжает сотрудничество с С. Г. Крейном и другими ведущими специалистами в области функционального анализа, среди которых А. С. Маркус, В. И. Мацаев, М. С. Агранович, Т. Я. Азизов.

А. С. Маркуса и В. И. Мацаева Николай Дмитриевич считал своими учителями в области спектральной теории операторов и операторных пучков. На основе известной монографии А. С. Маркуса [61] было написано учебное пособие [31], которое посвящено приложению общих результатов теории оператор-функций к исследованию операторного пучка С. Г. Крейна. В частности, Николаем Дмитриевичем был получен интересный результат о p-базисности системы собственных элементов, отвечающей одной из двух ветвей положительных собственных значений пучка С. Г. Крейна (см. [27]). Обобщение этого результата на случай произвольной голоморфной оператор-функции с операторными коэффициентами из классов Шаттена—фон Неймана получено совместно с его учеником В. А. Гринштейном (см. [16]). Позднее Николай Дмитриевич с учениками исследовали свойства полиномиальных пучков, возникающих в теории вращающихся жидкостей, конвективных движений в жидкостях, колебаний гидросистем, систем с диссипацией энергии и пр. Частично эти результаты отражены в статьях [2, 3, 5, 17, 28, 30, 44, 64].

Результаты Михаила Семеновича Аграновича по теории эллиптических уравнений, краевых задач и задач сопряжения в липшицевых областях и приложениям оказали существенное влияние на тематику исследований Николая Дмитриевича, проводимых с начала двухтысячных годов (см. [12, 29, 33, 39, 45, 60]) и послуживших основой монографии «Абстрактная формула Грина и некоторые её приложения» [34], вышедшей в 2016 году.

Николай Дмитриевич одним из первых стал использовать методы теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой для решения проблем гидродинамики и активно применял новые результаты в этой области. Этому способствовала многолетняя дружба и научное сотрудничество с Т. Я. Азизовым. В 2014 году в результате их совместных исследований вышли монография «Приложения индефинитной метрики» [7] и серия статей и пособий [1, 6, 63].

С 1990 года Николай Дмитриевич Копачевский — идейный вдохновитель и руководитель международной конференции «Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (КРОМШ). Школа сохранила традиции Воронежской зимней математической школы, организованной С. Г. Крейном. В течение более чем тридцати лет КРОМШ проходит с большим успехом, собирая замечательных математиков и отличаясь неизменно высоким научным уровнем. Несомненной заслугой Николая Дмитриевича являлась и удивительная душевная атмосфера на этой Школе. Постоянными участниками КРОМШ стали многие известные математики, специалисты в области функционального анализа, дифференциальных уравнений, прикладной математики из России, Украины, Белоруссии, Узбекистана, Казахстана, Израиля, Германии, Польши, Англии, Франции, Швеции, Японии, США и других стран.

Кроме прикладных задач, Николай Дмитриевич активно исследовал многие фундаментальные проблемы теории нелинейных оператор-функций, теории интегродифференциальных уравнений

Вольтерра, общей теории граничных задач и задач сопряжения. В последние годы Николай Дмитриевич с учениками активно занимался исследованием малых движений сочлененных маятников с жидким наполнением, вязкоупругих жидкостей и систем несмешивающихся жидкостей, многокомпонентными задачами сопряжения в липшицевых областях, обобщениями абстрактной формулы Грина для задач сопряжения и полуторалинейных форм.

Достижения Николая Дмитриевича были отмечены наградами и премиями: он являлся заслуженным деятелем науки и техники Украины (1992), лауреатом государственной премии Украины 2013 года (в составе авторского коллектива) за цикл научных работ по гидромеханике «Закономерности волно-вихревых процессов в сплошной среде», лауреатом премии имени В.И. Вернадского (2001), кавалером Ордена «За заслуги» 3-й степени (2008), почетным работником сферы образования Российской Федерации (2020), членом экспертного совета ВАК России. Николай Дмитриевич был членом редколлегий научных журналов «Современная математика. Фундаментальные направления», «Таврический вестник информатики и математики», «Динамические системы».

2. Научно-педагогическая деятельность. Работа с учениками

В Симферополе помимо научной работы Николай Дмитриевич активно занялся педагогической деятельностью. Он читал лекции по ряду классических математических дисциплин, разработал более десяти новых спецкурсов для студентов и аспирантов математических специальностей, среди которых выделим следующие:

- «Операторные методы математической физики»,
- «Операторные методы линейной гидродинамики»,
- «Спектральная теория операторных пучков»,
- «Колебания жидкости в условиях невесомости»,
- «Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве»,
- «Абстрактная формула Грина»,
- «Интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве».

Материалы этих спецкурсов были изданы в виде учебно-научных пособий.

Все годы Николай Дмитриевич был бессменным руководителем еженедельного научного семинара по теории операторов и приложениям кафедры математического анализа. Семинар воспитал многих кандидатов наук, ставших преподавателями университета и других Крымских вузов.

Под руководством Николая Дмитриевича сформировалась научная школа «Операторные методы в механике сплошных сред», защищены 22 кандидатские и две докторские диссертации. Основные направления научных исследований школы Николая Дмитриевича Копачевского связаны с проблемами малых движений идеальной, вязкой, вязкоупругой жидкостей, баротропного газа, систем жидкостей с условиями капиллярности, релаксации, стратификации в неподвижном, вращающемся или колеблющемся сосуде. В работах Николая Дмитриевича и его учеников отражена главная методика научной школы — сведение задачи в частных производных к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения в гильбертовом пространстве. Использование современных достижений функционального анализа и математической физики позволило получить важные для приложений результаты о полноте и базисности собственных функций, о локализации и асимптотике собственных значений, о существовании сильных или слабых решений краевых задач.

Николай Дмитриевич всегда уделял большое внимание ученикам, к каждому из которых он относился с большим вниманием и отеческой заботой. Работа с Николаем Дмитриевичем подразумевала регулярные консультации, живое общение, активное участие в семинарах и конференциях, совместное написание тезисов и статей.

В конце 70-х годов первым его учеником стал сотрудник ФТИНТ Н.К. Радякин, в диссертации которого были решены некоторые задачи, связанные с малыми колебаниями капиллярной жидкости (см. [47–49], [КД 1]).

В начале 80-х годов научные интересы Николая Дмитриевича были обращены на исследование стратифицированной жидкости в ограниченном сосуде. Данная проблематика возникает при изучении волновых процессов в океанах и морях (а также при изучении колебаний криогенных жидкостей и нефти), где плотность жидкости в состоянии покоя не является постоянной, а зависит от высоты по закону Вяйсяля—Брендта. Силы плавучести обусловливают наличие внутренних волн и другие интересные физические эффекты, наблюдающиеся в подобных жидкостях. Эта задача вошла в кандидатскую диссертацию второго ученика Николая Дмитриевича — А. Н. Темнова (теперь доцент МГТУ им. Н. Э. Баумана), которая была успешно защищена в 1984 году в Институте механики АН СССР в Москве (см. [51–54], [КД 2]).

Дальнейшее развитие эта тематика нашла в период работы Николая Дмитриевича в Крыму. Так, в статье [4] и в диссертации [КД 3] следующего ученика Николая Дмитриевича — А. В. Андронова — рассматривались вопросы, связанные с колебаниями стратифицированной жидкости в контейнере с упругими днищами. В работах [72, 73] и диссертации С. И. Смирновой [КД 5] исследовался случай, когда переменная плотность для идеальной жидкости изменяется не вдоль некоторой оси (как в случае стратифицированной жидкости), а более сложным образом, учитывающим, например, действие неоднородного потенциального поля и поля центробежных сил.

При исследовании реальных задач о колебаниях стратифицированной жидкости важным аспектом является учет не только непрерывного изменения плотности жидкости вдоль вертикальной координаты, но и возможных скачков плотности. Такие скачки (быстрые изменения плотности от одного значения к другому) встречаются на некоторых глубинах в морях и океанах. Подобные модели, содержащие системы стратифицированных жидкостей, рассматривались в работах Николая Дмитриевича с Т. П. Темченко и М. Ю. Царьковым [55], с Б. М. Вронским и Т. П. Темченко [13], а также в статьях с Д. О. Цветковым [56, 75]. Полученные в них результаты стали основой диссертаций [КД 4], [КД 12].

В диссертации Ю. С. Пашковой [КД 7] изучались спектральные и эволюционные задачи, связанные с малыми движениями жидкости в сосуде, ограниченной упругой мембраной (см. также [70, 71]).

Исследование малых колебаний гидродинамических систем, содержащих в ограниченных областях жидкость и газ, нашли свое отражение в работах с Б. М. Вронским [14] и с Э. Л. Газиевым [15, 66], став материалом их диссертаций [КД 19] и [КД 21].

Системы из идеальных и вязких однородных жидкостей рассматривались в кандидатской диссертации Д. А. Закоры [КД 9]. Далее, в диссертации М. А. Солдатова [КД 10], а также в более поздних работах с Д. О. Цветковым [57–59] рассматривались задачи, в которых на свободной поверхности жидкости (однородной или стратифицированной) имеются как участки чистой воды, так и участки крошёного льда (так называемая задача о флотации), либо упругого льда (упругий лёд моделируется упругой пластиной).

Начиная с конца 50-ых годов в Советском Союзе активно изучались проблемы малых движений твердого тела с полостью, целиком или частично заполненной жидкостью. К подобным задачам одним из первых подключился С. Г. Крейн, эта тематика исследований отражена в докторской диссертации Нго Зуй Кана. Проблемы малых движений маятника с жидкостями около оси изучались в кандидатской диссертации [КД 6] сирийского ученика Вадиаа Али. Малые колебания маятников около сферического шарнира, а также систем сочлененных маятников, изучались в совместных статьях с Э. И. Батыром и О. А. Дудик [10, 11]. В последнее время совместно с З. З. Ситшаевой и В. И. Войтицким рассматривались общие задачи для системы сочлененных маятников, полости в которых частично заполнены однородными жидкостями либо системами однородных жидкостей (см. [35–38, 76]).

Абстрактные подходы к исследованию краевых задач сопряжения отражены в кандидатских диссертациях П. А. Старкова [КД 11], В. И. Войтицкого [КД 15], О. А. Андроновой [КД 16], К. А. Коваль (Радомирской) [КД 22] (см. [12, 33, 45]), а также в работе последней аспирантки Николая Дмитриевича — А. Р. Якубовой (см. [60]).

В диссертации Е. А. Плохой (Сёмкиной) [КД 20] изучались полные интегродифференциальные уравнения Вольтерра, неразрешенные относительно старшей производной. Задачи для вязкоупругой жидкости рассматривались в диссертациях Л. Д. Орловой [КД 8], а также А. В. Яковлева [КД 13], в последнее время к этой тематике исследований подключились Е. А. Плохая и Д. А. Закора (см. [18, 50, 74]).

Мы перечислили лишь основные задачи, которые Николай Дмитриевич исследовал с учениками, защитившими кандидатские диссертации. Многие результаты остались за рамками данной статьи.

***

Подводя итог, отметим многогранность научного творчества Николая Дмитриевича. Во всех работах чётко отражена главная методика научной школы Николая Дмитриевича (именуемой «Операторные методы в механике сплошных сред») — сведение задачи в частных производных к задаче Коши для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве в терминах линейных операторов либо операторных матриц. Используя результаты спектральной теории самосопряжённых или несамосопряженных операторов, функционального анализа, вариационных методов математической физики, спектральной теории оператор-функций, операторных матриц, индефинитной метрики, дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, удалось доказать важные для приложений результаты о полноте и базисности собственных функций, о локализации и асимптотике собственных значений, о существовании сильных или слабых решений краевых задач.

Николай Дмитриевич оставил большое научное наследие. За период почти 60-летней насыщенной научной деятельности он с соавторами написал около 300 научных работ, более 15 учебных пособий, издал 8 монографий (полный список трудов доступен на сайте `http://nikolay-d-kopachevsky.com`).

Неоценимую поддержку в жизни и работе Николаю Дмитриевичу оказывала его супруга Валентина Георгиевна, с которой он прожил 47 лет в любви и согласии. Валентина Георгиевна прекрасно понимала Николая Дмитриевича и делала всё для его плодотворной научной работы. Интересы и увлечения Николая Дмитриевича были чрезвычайно разнообразными: волейбол, плавание, прыжки в воду с Крымских скал, туризм. Но главной для него всегда оставалась математика. Ученики, коллеги и друзья Николая Дмитриевича знали его как человека, преданного своей профессии, увлеченного, любящего жизнь во всех её проявлениях, никогда не скрывавшего своей гражданской позиции, доброжелательного к окружающим. Все, кому посчастливилось знать Николая Дмитриевича Копачевского, навсегда сохранят память об этом замечательном математике и человеке.

Список кандидатских диссертаций, защищенных под руководством Н. Д. Копачевского

[КД 1] Радякин Николай Константинович (совместное руководство с А. Д. Мышкисом), год защиты 1979. Тема диссертации: «Малые колебания капиллярной жидкости, вращающейся в частично заполненном сосуде».

[КД 2] Темнов Александр Николаевич, год защиты 1984. Тема диссертации: «Колебания стратифицированной жидкости в ограниченном объеме».

[КД 3] Андронов Андрей Валентинович, год защиты 1987. Тема диссертации: «Малые колебания идеальной жидкости в контейнере с упругими днищами».

[КД 4] Темченко Татьяна Петровна, год защиты 1989. Тема диссертации: «Спектральные и эволюционные задачи колебаний многослойных стратифицированных жидкостей».

[КД 5] Смирнова Светлана Ивановна, год защиты 1994. Тема диссертации: «Малые движения и собственные колебания идеальной неоднородной несжимаемой жидкости».

[КД 6] Вадиаа Али (Сирия), год защиты 1994. Тема диссертации: «Применение методов спектрального анализа оператор-функций в задаче о колебаниях маятника с полостью, заполненной жидкостью».

[КД 7] Пашкова Юлия Сергеевна, год защиты 1996. Тема диссертации: «Колебания жидкости в сосуде, ограниченной упругой мембраной, и общие вопросы эволюции гидродинамических систем».

[КД 8] Орлова Лариса Дмитриевна (совместное руководство с Т. Я. Азизовым), год защиты 1996. Тема диссертации: «Математические вопросы теории колебаний вязкоупругой и релаксирующей жидкости».

[КД 9] Закора Дмитрий Александрович, год защиты 2001. Тема диссертации: «Операторный подход к проблеме малых движений частично диссипативных гидросистем».

[КД 10] Солдатов Максим Александрович, год защиты 2003. Тема диссертации: «Математические аспекты теории колебаний жидкости в бассейне, частично покрытом льдом».

[КД 11] Старков Павел Александрович, год защиты 2004. Тема диссертации: «Операторный подход к задачам сопряжения».

[КД 12] Цветков Денис Олегович, год защиты 2005. Тема диссертации: «Математические проблемы теории колебаний стратифицированной жидкости».

[КД 13] Яковлев Алексей Викторович, год защиты 2005. Тема диссертации: «Операторный подход к проблеме малых движений вязкоупругих сред».

[КД 14] Тышкевич Дмитрий Леонидович, год защиты 2008. Тема диссертации: «Об ортогонализации систем векторов и разложении типа Вольда в линейных пространствах с внутренним произведением».

[КД 15] Войтицкий Виктор Иванович, год защиты 2010. Тема диссертации: «Краевые задачи со спектральным параметром в уравнениях и краевых условиях».

[КД 16] Андронова Ольга Андреевна, год защиты 2010. Тема диссертации: «Начально-краевые и спектральные задачи с поверхностной и внутренней диссипацией энергии».

[КД 17] Дудик Ольга Александровна, год защиты 2011. Тема диссертации: «Малые движения маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью».

[КД 18] Батыр Эльдар Ибраимович, год защиты 2011. Тема диссертации: «Малые колебания сочлененных гиростатов».

[КД 19] Вронский Борис Михайлович, год защиты 2014. Тема диссертации: «Малые движения и собственные колебания системы “жидкость—газ”».

[КД 20] Сёмкина Екатерина Владимировна, год защиты 2014. Тема диссертации: «О некоторых классах интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра в гильбертовом пространстве».

[КД 21] Газиев Эскендер Линурович, год защиты 2014. Тема диссертации: «Задачи статики, устойчивости и малых колебаний гидросистемы “жидкость—баротропный газ” в условиях, близких к невесомости».

[КД 22] Радомирская Карина Александровна, год защиты 2018. Тема диссертации: «Операторный подход к краевым, спектральным и начально-краевым задачам сопряжения».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д.* Введение в теорию пространств Понтрягина: специальный курс лекций. — Симферополь: ООО «Форма», 2008.
2. *Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д., Орлова Л.Д.* Эволюционная и спектральная задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости// Тр. СПб. Мат. об-ва. — 1998. — *6*. — С. 5–33.
3. *Андронов А.В., Копачевский Н.Д.* Самосопряженные операторные пучки, порожденные задачами о колебаниях идеальной вращающейся жидкости// Деп. в УкрНИИНТИ. — Киев, 1986. — *12.0.86*, № 1667-УК-86.
4. *Андронов А.В., Копачевский Н.Д.* Малые колебания идеальной стратифицированной жидкости в контейнере с упругим днищем// В сб.: «Задачи гидромеханики и тепломассобмена со свободными границами». — Новосибирск: НГУ, 1987. — С. 16–25.
5. *Андронова О.А., Копачевский Н.Д.* О линейных задачах с поверхностной диссипацией энергии// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — *29*. — С. 11–28.
6. *Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д.* Введение в теорию пространств Крейна. Специальный курс лекций. — Симферополь: ООО «Форма», 2010.
7. *Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д.* Приложения индефинитной метрики. — Симферополь: ДИАЙПИ, 2014.
8. *Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д.* Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости. — Киев: Наукова думка, 1992.
9. *Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д.* Гидромеханика невесомости. — М.: Наука, 1976.
10. *Батыр Э.И., Дудик О.А., Копачевский Н.Д.* Малые колебания тел с полостями, заполненными несжимаемой вязкой жидкостью// Изв. вузов. Северо-кавказ. рег. Естеств. науки. — 2009. — *S*. — С. 15–29.
11. *Батыр Э.И., Копачевский Н.Д.* Малые движения и нормальные колебания системы сочлененных гиростатов// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2013. — *49*. — С. 5–88.

12. *Войтицкий В.И., Копачевский Н.Д., Старков П.А.* Многокомпонентные задачи сопряжения и вспомогательные абстрактные краевые задачи// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *34*. — С. 5–44.
13. *Вронский Б.М., Копачевский Н.Д., Темченко Т.П.* Колебания частично диссипативных гидросистем// В сб.: «XII школа по теории операторов в функциональных пространствах». — Тамбов, 1987. — С. 40.
14. *Вронский Б.М., Копачевский Н.Д.* Об одной оценке оператор-функции// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В.И. Вернадского. Сер. физ.-мат. науки. — 2010. — *23*, № 1. — С. 51–54.
15. *Газиев Э.Л., Копачевский Н.Д., Ситшаева З.З.* Об обращении оператора потенциальной энергии в проблеме собственных колебаний системы «капиллярная жидкость—газ»// Динам. сист. — 2014. — *4*, № 1-2. — С. 9–18.
16. *Гринштейн В.А.* Базисность части системы собственных векторов голоморфной оператор-функции// Мат. заметки. — 1991. — *50*, № 1. — С. 142–144.
17. *Закора Д.А., Копачевский Н.Д.* О малых движениях и нормальных колебаниях гидросистемы «вязкая жидкость + система идеальных жидкостей»// Мат. физ. анал. геом. — 2002. — *9*, № 3. — С. 420–426.
18. *Закора Д.А., Копачевский Н.Д.* К проблеме малых колебаний системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд (модельная задача)// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2020. — *66*, № 2. — С. 182–208.
19. *Копачевский Н.Д.* О свободных колебаниях жидкости, вращающейся в цилиндрическом сосуде в условиях невесомости// Мех. жидкости и газа. — 1972. — № 4. — С. 3–9.
20. *Копачевский Н.Д.* Гидродинамика в слабых гравитационных полях. О плоских колебаниях идеальной жидкости в прямоугольном канале// Мех. жидкости и газа. — 1972. — № 5. — С. 3–13.
21. *Копачевский Н.Д.* О колебаниях несмешивающихся жидкостей// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1973. — *13*, № 5. — С. 1249–1263.
22. *Копачевский Н.Д.* О колебаниях капиллярной вязкой вращающейся жидкости// Докл. АН СССР. — 1974. — *219*, № 5. — С. 1065–1068.
23. *Копачевский Н.Д.* Задача Коши для малых движений идеальной капиллярной вращающейся жидкости// Докл. АН СССР. — 1974. — *219*, № 6. — С. 1310–1313.
24. *Копачевский Н.Д.* Применение метода С.Л. Соболева в задаче о колебаниях идеальной капиллярной вращающейся жидкости// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1976. — *16*, № 2. — С. 426–439.
25. *Копачевский Н.Д.* О существовании поверхностных волн в задаче о нормальных колебаниях идеальной жидкости, вращающейся в частично заполненном сосуде// Функц. анализ и его прилож. — 1978. — *12*, № 2. — С. 84–85.
26. *Копачевский Н.Д.* Нормальные колебания системы тяжелых вязких вращающихся жидкостей// Докл. АН УССР. Сер. А. — 1978. — № 7. — С. 586–590.
27. *Копачевский Н.Д.* О свойствах базисности системы собственных и присоединенных векторов самосопряженного операторного пучка $I - \lambda A - \lambda^{-1}B$// Функц. анализ и его прилож. — 1981. — *15*, № 2. — С. 77–78.
28. *Копачевский Н.Д.* Обращение теоремы Лагранжа об устойчивости малых колебаний капиллярной вязкой жидкости// Докл. АН СССР. — 1990. — *314*, № 1. — С. 71–73.
29. *Копачевский Н.Д.* Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и её приложениях к задаче Стокса// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2004. — № 2. — С. 52–80.
30. *Копачевский Н.Д.* К проблеме малых движений и нормальных колебаний капиллярной вязкой жидкости в равномерно вращающемся сосуде// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — *29*. — С. 71–102.
31. *Копачевский Н.Д.* Спектральная теория операторных пучков: специальный курс лекций. — Симферополь: ООО «Форма», 2009.
32. *Копачевский Н.Д.* Мой дорогой учитель А.Д. Мышкис (к 90-летию со дня рождения)// Журн. мат. физ. анал. и геом. — 2010. — *6*, № 2. — С. 1–17.
33. *Копачевский Н.Д.* Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и полуторалинейных форм// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *57*. — С. 71–107.
34. *Копачевский Н.Д.* Абстрактная формула Грина и некоторые её приложения. — Симферополь: ООО «Форма», 2016.
35. *Копачевский Н.Д., Войтицкий В.И.* О малых движениях физического маятника с полостью, заполненной системой трех однородных несмешивающихся вязких жидкостей// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2018. — № 3. — С. 22–45.
36. *Копачевский Н.Д., Войтицкий В.И.* О колебаниях сочлененных маятников с полостями, заполненными однородными жидкостями// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2019. — *65*, № 3. — С. 434–512.
37. *Копачевский Н.Д., Войтицкий В.И.* О малых колебаниях трех сочлененных маятников с полостями, заполненными однородными идеальными жидкостями// Сиб. электрон. мат. изв. — 2020. — *17*. — С. 260–299.

38. *Копачевский Н.Д., Войтицкий В.И., Ситшаева З.З.* О колебаниях двух сочлененных маятников, содержащих полости, частично заполненные несжимаемой жидкостью// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2017. — *63*, № 4. — С. 627–677.
39. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г.* Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи// Укр. мат. вестн. — 2004. — *1*, № 1. — С. 69–97.
40. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
41. *Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д.* Гидродинамика в слабых силовых полях. О малых колебаниях вязкой жидкости в потенциальном поле массовых сил// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1966. — *6*, № 6. — С. 1054–1063.
42. *Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д.* О свободных колебаниях жидкого самогравитирующего шара с учетом вязких и капиллярных сил// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1968. — *8*, № 6. — С. 1291–1305.
43. *Копачевский Н.Д., Нго Зуй Кан.* Об одной задаче теории свободной конвекции// Докл. АН СССР. — 1980. — *251*, № 6. — С. 1334–1337.
44. *Копачевский Н.Д., Пивоварчик В.Н.* О достаточном условии неустойчивости конвективных движений жидкости в открытом сосуде// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1993. — *33*, № 1. — С. 101–118.
45. *Копачевский Н.Д., Радомирская К.А.* Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения и их приложения// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *61*. — С. 67–102.
46. *Копачевский Н.Д., Радякин Н.К.* Свободные колебания двух капиллярных жидкостей, вращающихся в цилиндрическом сосуде// Мех. жидкости и газа. — 1976. — № 5. — С. 97–104.
47. *Копачевский Н.Д., Радякин Н.К.* Две задачи о нормальных колебаниях системы из маловязких капиллярных жидкостей// В сб.: «Вопросы мат. физ. и функц. анал.». — Киев: Наукова думка, 1976. — С. 93–110.
48. *Копачевский Н.Д., Радякин Н.К.* О малых колебаниях идеальной капиллярной жидкости, вращающейся в осесимметричном сосуде// В сб.: «Вопросы вычисл. мат. и тех.». — Киев: Наукова думка, 1976. — С. 3–25.
49. *Копачевский Н.Д., Радякин Н.К.* Свободные колебания двух капиллярных жидкостей, вращающихся в цилиндрическом сосуде// Мех. жидкости и газа. — 1976. — *5*. — С. 97–104.
50. *Копачевский Н.Д., Сёмкина Е.В.* О малых движениях гидросистем, содержащих вязкоупругую жидкость// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. — 2019. — *172*. — С. 48–90.
51. *Копачевский Н.Д., Темнов А.Н.* Колебания идеальной стратифицированной жидкости, полностью заполняющей сосуд// Деп. в ВИНИТИ. — Москва, 1982. — *02.03.82*, № 892-82.
52. *Копачевский Н.Д., Темнов А.Н.* Колебания идеальной стратифицированной жидкости, частично заполняющей сосуд// Деп. в ВИНИТИ. — Москва, 1982. — *28.12.82*, № 6398-82.
53. *Копачевский Н.Д., Темнов А.Н.* Свободные колебания идеальной стратифицированной жидкости в сосуде// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1984. — *24*, № 1. — С. 109–123.
54. *Копачевский Н.Д., Темнов А.Н.* Колебания стратифицированной жидкости в бассейне произвольной формы// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1986. — *26*, № 5. — С. 734–755.
55. *Копачевский Н.Д., Темченко Т.П., Царьков М.Ю.* Колебания системы слоев стратифицированной жидкости в цилиндрическом контейнере// Деп. в УкрНИИНТИ. — Симферополь, 1985. — *03.06.85*, № 1203.
56. *Копачевский Н.Д., Цветков Д.О.* Колебания стратифицированной жидкости// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — *29*. — С. 103–130.
57. *Копачевский Н.Д., Цветков Д.О.* Малые движения идеальной стратифицированной жидкости в бассейне, покрытом льдом// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2018. — *64*, № 3. — С. 573–590.
58. *Копачевский Н.Д., Цветков Д.О.* Задача Коши, порожденная колебаниями стратифицированной жидкости, частично покрытой льдом// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2018. — № 1. — С. 31–39.
59. *Копачевский Н.Д., Цветков Д.О.* Малые движения идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, полностью покрытой крошеным льдом// Уфимск. мат. ж. — 2018. — *18*, № 3. — С. 44–59.
60. *Копачевский Н.Д., Якубова А.Р.* О некоторых задачах, порожденных полуторалинейной формой// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2017. — *63*, № 2. — С. 278–315.
61. *Маркус А.С.* Введение в спектральную теогрию полиномиальных операторных пучков. — Кишинёв: Штиинца, 1986.
62. *Мышкис А.Д.* Советские математики. Мои воспоминания. — М.: Либроком, 2009.
63. *Azizov T.Ya., Hardt V., Kopachevsky N.D., Mennicken R.* On the problem of small motions and normal oscillations of a viscous fluid in a partially filled container// Math. Nachr. — 2003. — *248-249*. — С. 3–39.

64. *Azizov T. Ya., Kopachevsky N. D., Suhocheva L. I.* On eigenvalues of selfadjont pencils with a parameter// В сб.: «Proc. OT16 Conference». — Bucharest: Theta Foundation, 1997. — С. 37–50.
65. *Babskii V. G., Kopachevskii N. D., Myshkis A. D., Slobozhanin L. A., Tyuptsov A. D.* On some unsolved problems of zero-gravity hydromechanics// Nonlinear Anal. — 1980. — *4*, № 3. — С. 607–621.
66. *Gaziev E. L., Kopachevsky N. D.* Small motions and eigenoscillations of a «fluid-barotropic gas» hydrosystem// J. Math. Sci. (N.Y.) — 2013. — *192*, № 4. — С. 389–416.
67. *Gohberg I., Goldberg S.* Basic Operator Theory. — Boston—Basel—Berlin: Birkhäuser, 1981.
68. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Self-Adjoint Problems for an Ideal Fluid. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2001.
69. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Non-Self-Adjoint Problems for Viscous Fluids. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2003.
70. *Kopachevsky N. D., Mennicken R., Pashkova Yu. S., Tretter C.* Complete second-order linear differential operator equations in Hilbert space and applications in hydrodynamics// Trans. Am. Math. Soc. — 2004. — *356*, № 12. — С. 4737–4766.
71. *Kopachevsky N. D., Pashkova Ju. S.* Small oscillations of a viscous fluid in a vessel bounded by an elastic membrane// Russ. J. Math. Phys. — 1998. — *5*, № 4. — С. 459–472.
72. *Kopachevsky N. D., Smirnova S. I.* Oscillations of a cylindrically inhomogeneous rotating fluid in a container of special form// Спектр. и эволюц. задачи. — 1994. — *3*. — С. 45–47.
73. *Kopachevsky N. D., Smirnova S. I.* Proper oscillations of a cylindrically inhomogeneous fluid between coaxial cylinders// Спектр. и эволюц. задачи. — 1994. — *3*. — С. 44–45.
74. *Kopachevsky N. D., Syomkina E. V.* Linear Volterra integro-differential second-order equations unresolved with respect to the highest derivative// Eurasian Math. J. — 2013. — *4*, № 4. — С. 64–87.
75. *Kopachevsky N. D., Tsvetkov D. O.* Oscillations of stratificated fluids// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2010. — *164*, № 4. — С. 574–602.
76. *Kopachevsky N. D., Voytitsky V. I., Sitshaeva Z. Z.* On two hydromechanical problems inspired by works of S. Krein// В сб.: «Differential Equations, Mathematical Physics, and Applications. Selim Grigorievich Krein Centennial». — Providence: AMS, 2019. — С. 219–238.
77. *Myshkis A. D., Babskii V. G., Kopachevskii N. D., Slobozhanin L. A., Tyuptsov A. D.* Low-Gravity Fluid Mechanics. — Berlin, etc.: Springer-Verlag, 1987.

В. И. Войтицкий
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия
E-mail: victor.voytitsky@gmail.com
М. А. Муратов
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия
E-mail: mustafa_muratov@mail.ru
Ю. С. Пашкова
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия

П. А. Старков
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия
E-mail: pastarwork@gmail.com
Т. А. Суслина
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: t.suslina@spbu.ru
Д. О. Цветков
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия
E-mail: tsvetdo@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-193-207

In Memory of Nikolay Dmitrievich Kopachevsky, a Mathematician and a Human

© 2021 **V. I. Voytitsky, M. A. Muratov, Yu. S. Pashkova, P. A. Starkov, T. A. Suslina, D. O. Tsvetkov**

Abstract. This paper is dedicated to the scientific and pedagogical activities of Nikolay Dmitrievich Kopachevsky (1940–2020) — a well-known mathematician, head of the Department of Mathematical Analysis of the V. I. Vernadsky Crimean Federal University, organizer and head of the Crimean Autumn Mathematical School-Symposium (KROMSH).

REFERENCES

1. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevsky, *Vvedenie v teoriyu prostranstv Pontryagina: spetsial'nyi kurs lektsiy* [Introduction to the Theory of Pontryagin Spaces: a Special Course of Lectures], Forma, Simferopol', 2008 (in Russian).
2. T. Ya. Azizov, N. D. Kopachevsky, and L. D. Orlova, "Evolyutsionnaya i spektral'naya zadachi, porozhdennye problemoy malykh dvizheniy vyazkouprugoy zhidkosti" [Evolution and spectral problems generated by the problem of small motions of a viscoelastic fluid], *Tr. SPb. Mat. ob-va* [Proc. Saint Petersburg Math. Soc.], 1998, **6**, 5–33 (in Russian).
3. A. V. Andronov and N. D. Kopachevsky, "Samosopryazhennye operatornye puchki, porozhdennye zadachami o kolebaniyakh ideal'noy vrashchayushcheysya zhidkosti" [Self-adjoint operator pencils generated by problems on the oscillations of an ideal rotating fluid], UkrNIINTI, Kiev, 1986, **12.0.86**, No. 1667-YK-86.
4. A. V. Andronov and N. D. Kopachevsky, "Malye kolebaniya ideal'noy stratifitsirovannoy zhidkosti v konteynere s uprugim dnishchem" [Small oscillations of an ideal stratified fluid in a container with a elastic bottom], In: *Zadachi gidromekhaniki i teplomassobmena so svobodnymi granitsami* [Problems of Hydromechanics and Heat and Mass Transfer with Free Boundaries], NGU, Novosibirsk, 1987, pp. 16–25 (in Russian).
5. O. A. Andronova and N. D. Kopachevsky, "O lineynykh zadachakh s poverkhnostnoy dissipatsiey energii" [On linear problems with surface energy dissipation], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2008, **29**, 11–28 (in Russian).
6. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevsky, *Vvedenie v teoriyu prostranstv Kreyna. Spetsial'nyi kurs lektsiy* [Introduction to the Theory of Kreyn Spaces. Special Course of Lectures], Forma, Simferopol', 2010 (in Russian).
7. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevsky, *Prilozheniya indefinitnoy metriki* [Applications of Indefinite Metric], DIAYPI, Simferopol', 2014 (in Russian).
8. V. G. Babsky, M. Yu. Zhukov, N. D. Kopachevsky, A. D. Myshkis, L. A. Slobozhanin, and A. D. Tyuptsov, *Metody resheniya zadach gidromekhaniki dlya usloviy nevesomosti* [Methods for Solving Problems of Hydromechanics for Zero Gravity Conditions], Naukova dumka, Kiev, 1992 (in Russian).
9. V. G. Babsky, N. D. Kopachevsky, A. D. Myshkis, L. A. Slobozhanin, and A. D. Tyuptsov, *Gidromekhanika nevesomosti* [Zero Gravity Hydromechanics], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
10. E. I. Batyr, O. A. Dudik, and N. D. Kopachevsky, "Malye kolebaniya tel s polostyami, zapolnennymi neszhimaemoy vyazkoy zhidkost'yu" [Small oscillations of bodies with cavities filled with an incompressible viscous fluid], *Izv. vuzov. Severo-kavkaz. reg. Estestv. nauki* [Bull. Higher Edu. Inst. North-Caucasian Reg. Nat. Sci.], 2009, **S**, 15–29 (in Russian).
11. E. I. Batyr and N. D. Kopachevsky, "Malye dvizheniya i normal'nye kolebaniya sistemy sochlenennykh girostatov" [Small motions and normal oscillations in systems of connected gyrostats], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2013, **49**, 5–88 (in Russian).
12. V. I. Voytitsky, N. D. Kopachevsky, and P. A. Starkov, "Mnogokomponentnye zadachi sopryazheniya i vspomogatel'nye abstraktnye kraevye zadachi" [Multicomponent conjugation problems and auxiliary

abstract boundary-value problems], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **34**, 5–44 (in Russian).

13. B. M. Vronsky, N. D. Kopachevsky, and T. P. Temchenko, “Kolebaniya chastichno dissipativnykh gidrosistem” [Oscillations of partially dissipative hydraulic systems], In: *XII shkola po teorii operatorov v funktsional’nykh prostranstvakh* [XII School on the Theory of Operators in Function Spaces], Tambov, 1987, pp. 40 (in Russian).
14. B. M. Vronsky and N. D. Kopachevsky, “Ob odnoy otsenke operator-funktsii” [On one estimate of an operator function], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. fiz.-mat. nauki* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ. Ser. Phys.-Math. Sci.], 2010, **23**, No. 1, 51–54 (in Russian).
15. E. L. Gaziev, N. D. Kopachevsky, and Z. Z. Sitshaeva, “Ob obrashchenii operatora potentsial’noy energii v probleme sobstvennykh kolebaniy sistemy «kapillyarnaya zhidkost’—gaz»” [On the inversion of the operator of potential energy in the problem of eigen oscillations of the system «capillary fluid – gas»], *Dinam. sist.* [Dynam. syst.], 2014, **4**, No. 1-2, 9–18 (in Russian).
16. V. A. Grinshteyn, “Bazisnost’ chasti sistemy sobstvennykh vektorov golomorfnoy operator-funktsii” [Basis property of a part of the system of eigenvectors of a holomorphic operator function], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1991, **50**, No. 1, 142–144 (in Russian).
17. D. A. Zakora and N. D. Kopachevsky, “O malykh dvizheniyakh i normal’nykh kolebaniyakh gidrosistemy «vyazkaya zhidkost’ + sistema ideal’nykh zhidkostey»” [On small motions and normal oscillations of the hydraulic system «viscous fluid + system of ideal fluids»], *Mat. fiz. anal. geom.* [Math. Phys. Anal. Geom.], 2002, **9**, No. 3, 420–426 (in Russian).
18. D. A. Zakora and N. D. Kopachevsky, “K probleme malykh kolebaniy sistemy iz dvukh vyazkouprugikh zhidkostey, zapolnyayushchikh nepodvizhnyi sosud (model’naya zadacha)” [To the problem on small oscillations of a system of two viscoelastic fluids filling immovable vessel: model problem], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2020, **66**, No. 2, 182–208 (in Russian).
19. N. D. Kopachevsky, “O svobodnykh kolebaniyakh zhidkosti, vrashchayushcheysya v tsilindricheskom sosude v usloviyakh nevesomosti” [On free oscillations of a fluid rotating in a cylindrical vessel under zero gravity], *Mekh. zhidkosti i gaza* [Mech. Fluid Gas], 1972, No. 4, 3–9 (in Russian).
20. N. D. Kopachevsky, “Gidrodinamika v slabykh gravitatsionnykh polyakh. O ploskikh kolebaniyakh ideal’noy zhidkosti v pryamougol’nom kanale” [Hydrodynamics in weak gravitational fields. On plane oscillations of an ideal fluid in a rectangular channel], *Mekh. zhidkosti i gaza* [Mech. Fluid Gas], 1972, No. 5, 3–13 (in Russian).
21. N. D. Kopachevsky, “O kolebaniyakh nesmeshivayushchikhsya zhidkostey” [On oscillations of immiscible fluids], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 1973, **13**, No. 5, 1249–1263 (in Russian).
22. N. D. Kopachevsky, “O kolebaniyakh kapillyarnoy vyazkoy vrashchayushcheysya zhidkosti” [On oscillations of a capillary viscous rotating fluid], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1974, **219**, No. 5, 1065–1068 (in Russian).
23. N. D. Kopachevsky, “Zadacha Koshi dlya malykh dvizheniy ideal’noy kapillyarnoy vrashchayushcheysya zhidkosti” [Cauchy problem for small motions of an ideal capillary rotating fluid], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1974, **219**, No. 6, 1310–1313 (in Russian).
24. N. D. Kopachevsky, “Primenenie metoda S. L. Soboleva v zadache o kolebaniyakh ideal’noy kapillyarnoy vrashchayushcheysya zhidkosti” [Application of Sobolev’s method to the problem of oscillations of an ideal capillary rotating fluid], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 1976, **16**, No. 2, 426–439 (in Russian).
25. N. D. Kopachevsky, “O sushchestvovanii poverkhnostnykh voln v zadache o normal’nykh kolebaniyakh ideal’noy zhidkosti, vrashchayushcheysya v chastichno zapolnennom sosude” [On the existence of surface waves in the problem of normal vibrations of an ideal fluid rotating in a partially filled vessel], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1978, **12**, No. 2, 84–85 (in Russian).
26. N. D. Kopachevsky, “Normal’nye kolebaniya sistemy tyazhelykh vyazkikh vrashchayushchikhsya zhidkostey” [Normal oscillations of a system of heavy viscous rotating fluids], *Dokl. AN USSR. Ser. A* [Rep. Acad. Sci. Uzb. SSR. Ser. A], 1978, No. 7, 586–590 (in Russian).
27. N. D. Kopachevsky, “O svoystvakh bazisnosti sistemy sobstvennykh i prisoedinennykh vektorov samosopryazhennogo operatornogo puchka $I - \lambda A - \lambda^{-1}B$” [Basis properties of a system of eigenvectors and associated vectors of the self-adjoint operator pencil $I - \lambda A - \lambda^{-1}B$], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1981, **15**, No. 2, 77–78 (in Russian).
28. N. D. Kopachevsky, “Obrashchenie teoremy Lagranzha ob ustoychivosti malykh kolebaniy kapillyarnoy vyazkoy zhidkosti” [Inversion of the Lagrange theorem on the stability of small oscillations of a capillary viscous fluid], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1990, **314**, No. 1, 71–73 (in Russian).

29. N. D. Kopachevsky, “Ob abstraktnoy formule Grina dlya troyki gil’bertovykh prostranstv i ee prilozheniyakh k zadache Stoksa” [On the abstract Green formula for a triple of Hilbert spaces and its applications to the Stokes problem], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2004, No. 2, 52–80 (in Russian).
30. N. D. Kopachevsky, “K probleme malykh dvizheniy i normal’nykh kolebaniy kapillyarnoy vyazkoy zhidkosti v ravnomerno vrashchayushchemsya sosude” [Problem on small motions and normal oscillations of capillary viscous liquids in rotating vessels], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2008, **29**, 71–102 (in Russian).
31. N. D. Kopachevsky, *Spektral’naya teoriya operatornykh puchkov: spetsial’nyi kurs lektsiy* [Spectral Theory of Operator Pencils: a Special Course of Lectures], Forma, Simferopol’, 2009 (in Russian).
32. N. D. Kopachevsky, “Moy dorogoy uchitel’ A. D. Myshkis (k 90-letiyu so dnya rozhdeniya)” [My dear teacher A. D. Myshkis (on the occasion of his 90th birthday)], *Zhurn. mat. fiz. anal. i geom.* [J. Math. Phys. Anal. Geom.], 2010, **6**, No. 2, 1–17 (in Russian).
33. N. D. Kopachevsky, “Ob abstraktnoy formule Grina dlya troyki gil’bertovykh prostranstv i polutoralineynykh form” [Abstract Green formulas for triples of Hilbert spaces and sesquilinear forms], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **57**, 71–107 (in Russian).
34. N. D. Kopachevsky, *Abstraktnaya formula Grina i nekotorye ee prilozheniya* [Abstract Green’s Formula and Some of Its Applications], Forma, Simferopol’, 2016 (in Russian).
35. N. D. Kopachevsky and V. I. Voytitsky, “O malykh dvizheniyakh fizicheskogo mayatnika s polost’yu, zapolnennoy sistemoy trekh odnorodnykh nesmeshivayushchikhsya vyazkikh zhidkostey” [On small motions of a physical pendulum with a cavity filled with a system of three homogeneous immiscible viscous fluids], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2018, No. 3, 22–45 (in Russian).
36. N. D. Kopachevsky and V. I. Voytitsky, “O kolebaniyakh sochlenennykh mayatnikov s polostyami, zapolnennymi odnorodnymi zhidkostyami” [On oscillations of connected pendulums with cavities filled with homogeneous fluids], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2019, **65**, No. 3, 434–512 (in Russian).
37. N. D. Kopachevsky and V. I. Voytitsky, “O malykh kolebaniyakh trekh sochlenennykh mayatnikov s polostyami, zapolnennymi odnorodnymi ideal’nymi zhidkostyami” [On small vibrations of three connected pendulums with cavities filled with homogeneous ideal fluids], *Sib. elektron. mat. izv.* [Siberian Electron. Math. Bull.], 2020, **17**, 260–299 (in Russian).
38. N. D. Kopachevsky, V. I. Voytitsky, and Z. Z. Sitshaeva, “O kolebaniyakh dvukh sochlenennykh mayatnikov, soderzhashchikh polosti, chastichno zapolnennye neszhimaemoy zhidkost’yu” [On oscillations of two connected pendulums containing cavities partially filled with incompressible fluid], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2017, **63**, No. 4, 627–677 (in Russian).
39. N. D. Kopachevsky and S. G. Kreyn, “Abstraktnaya formula Grina dlya troyki gil’bertovykh prostranstv, abstraktnye kraevye i spektral’nye zadachi” [Abstract Green formula for a triple of Hilbert spaces, abstract boundary value and spectral problems], *Ukr. mat. vestn.* [Ukr. Math. Bull.], 2004, **1**, No. 1, 69–97 (in Russian).
40. N. D. Kopachevsky, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: evolyutsionnye i spektral’nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolution and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
41. N. D. Kopachevsky and A. D. Myshkis, “Gidrodinamika v slabykh silovykh polyakh. O malykh kolebaniyakh vyazkoy zhidkosti v potentsial’nom pole massovykh sil” [Hydrodynamics in weak force fields. On small oscillations of a viscous fluid in a potential field of mass forces], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 1966, **6**, No. 6, 1054–1063 (in Russian).
42. N. D. Kopachevsky and A. D. Myshkis, “O svobodnykh kolebaniyakh zhidkogo samogravitiruyushchego shara s uchetom vyazkikh i kapillyarnykh sil” [On free oscillations of a liquid self-gravitating ball with allowance for viscous and capillary forces], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 1968, **8**, No. 6, 1291–1305 (in Russian).
43. N. D. Kopachevsky and Ngo Zuy Kan, “Ob odnoy zadache teorii svobodnoy konvektsii” [On one problem in the theory of free convection], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1980, **251**, No. 6, 1334–1337 (in Russian).
44. N. D. Kopachevsky and V. N. Pivovarchik, “O dostatochnom uslovii neustoychivosti konvektivnykh dvizheniy zhidkosti v otkrytom sosude” [On a sufficient condition for the instability of convective fluid motions in an open vessel], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 1993, **33**, No. 1, 101–118 (in Russian).
45. N. D. Kopachevsky and K. A. Radomirskaya, “Abstraktnye smeshannye kraevye i spektral’nye zadachi sopryazheniya i ikh prilozheniya” [Abstract mixed boundary-value and spectral conjugation problems and

their applications], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **61**, 67–102 (in Russian).
46. N. D. Kopachevsky and N. K. Radyakin, "Svobodnye kolebaniya dvukh kapillyarnykh zhidkostey, vrashchayushchikhsya v tsilindricheskom sosude" [Free oscillations of two capillary fluids rotating in a cylindrical vessel], *Mekh. zhidkosti i gaza* [Mech. Fluid Gas], 1976, No. 5, 97–104 (in Russian).
47. N. D. Kopachevsky and N. K. Radyakin, "Dve zadachi o normal'nykh kolebaniyakh sistemy iz malovyazkikh kapillyarnykh zhidkostey" [Two problems on normal oscillations of a system of low-viscosity capillary fluids], In: *Voprosy mat. fiz. i funkts. anal.* [Issues of Math. Phys. and Funct. Anal.], Naukova dumka, Kiev, 1976, pp. 93–110 (in Russian).
48. N. D. Kopachevsky and N. K. Radyakin, "O malykh kolebaniyakh ideal'noy kapillyarnoy zhidkosti, vrashchayushcheysya v osesimmetrichnom sosude" [On small oscillations of an ideal capillary fluid rotating in an axisymmetric vessel], In: *Voprosy vychisl. mat. i tekh.* [Issues of Comput. Math. and Tech.], Naukova dumka, Kiev, 1976, pp. 3–25 (in Russian).
49. N. D. Kopachevsky and N. K. Radyakin, "Svobodnye kolebaniya dvukh kapillyarnykh zhidkostey, vrashchayushchikhsya v tsilindricheskom sosude" [Free oscillations of two capillary fluids rotating in a cylindrical vessel], *Mekh. zhidkosti i gaza* [Mech. Fluid Gas], 1976, **5**, 97–104 (in Russian).
50. N. D. Kopachevsky and E. V. Semkina, "O malykh dvizheniyakh gidrosistem, soderzhashchikh vyazko-upruguyu zhidkost"' [On small motions of hydraulic systems containing a viscoelastic fluid], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee pril.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2019, **172**, 48–90 (in Russian).
51. N. D. Kopachevsky and A. N. Temnov, "Kolebaniya ideal'noy stratifitsirovannoy zhidkosti, polnost'yu zapolnyayushchey sosud" [Oscillations of an ideal stratified fluid completely filling a vessel], VINITI, Moskva, 1982, **02.03.82**, No. 892-82.
52. N. D. Kopachevsky and A. N. Temnov, "Kolebaniya ideal'noy stratifitsirovannoy zhidkosti, chastichno zapolnyayushchey sosud" [Oscillations of an ideal stratified fluid partially filling a vessel], VINITI, Moskva, 1982, **28.12.82**, No. 6398-82.
53. N. D. Kopachevsky and A. N. Temnov, "Svobodnye kolebaniya ideal'noy stratifitsirovannoy zhidkosti v sosude" [Free oscillations of an ideal stratified fluid in a vessel], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 1984, **24**, No. 1, 109–123 (in Russian).
54. N. D. Kopachevsky and A. N. Temnov, "Kolebaniya stratifitsirovannoy zhidkosti v basseyne proizvol'noy formy" [Oscillations of a stratified fluid in a free-form pool], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 1986, **26**, No. 5, 734–755 (in Russian).
55. N. D. Kopachevsky, T. P. Temchenko, and M. Yu. Tsar'kov, "Kolebaniya sistemy sloev stratifitsirovannoy zhidkosti v tsilindricheskom konteynere" [Oscillations of a system of layers of a stratified fluid in a cylindrical container], UkrNIINTI, Simferopol', 1985, **03.06.85**, No. 1203.
56. N. D. Kopachevsky and D. O. Tsvetkov, "Kolebaniya stratifitsirovannoy zhidkosti" [Oscillations of stratified fluids], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2008, **29**, 103–130 (in Russian).
57. N. D. Kopachevsky and D. O. Tsvetkov, "Malye dvizheniya ideal'noy stratifitsirovannoy zhidkosti v basseyne, pokrytom l'dom" [Small motions of an ideal stratified fluid in a basin covered with ice], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2018, **64**, No. 3, 573–590 (in Russian).
58. N. D. Kopachevsky and D. O. Tsvetkov, "Zadacha Koshi, porozhdennaya kolebaniyami stratifitsirovannoy zhidkosti, chastichno pokrytoy l'dom" [The Cauchy problem generated by oscillations of a stratified fluid partially covered with ice], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2018, No. 1, 31–39 (in Russian).
59. N. D. Kopachevsky and D. O. Tsvetkov, "Malye dvizheniya ideal'noy stratifitsirovannoy zhidkosti so svobodnoy poverkhnost'yu, polnost'yu pokrytoy kroshenym l'dom" [Small motions of an ideal stratified fluid with a free surface completely covered with crushed ice], *Ufimsk. mat. zh.* [Ufa Math. J.], 2018, **18**, No. 3, 44–59 (in Russian).
60. N. D. Kopachevsky and A. R. Yakubova, "O nekotorykh zadachakh, porozhdennykh polutoralineynoy formoy" [On some problems generated by a sesquilinear form], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2017, **63**, No. 2, 278–315 (in Russian).
61. A. S. Markus, *Vvedenie v spektral'nuyu teogriyu polinomial'nykh operatornykh puchkov* [Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils], Shtiintsa, Kishinev, 1986 (in Russian).
62. A. D. Myshkis, *Sovetskie matematiki. Moi vospominaniya* [Soviet Mathematicians. My Memories], Librokom, Moscow, 2009 (in Russian).
63. T. Ya. Azizov, V. Hardt, N. D. Kopachevsky, and R. Mennicken, "On the problem of small motions and normal oscillations of a viscous fluid in a partially filled container," *Math. Nachr.*, 2003, **248-249**, 3–39.

64. T. Ya. Azizov, N. D. Kopachevsky, and L. I. Suhocheva, “On eigenvalues of selfadjont pencils with a parameter,” In: *Proc OT16 Conference*, Theta Foundation, Bucharest, pp. 37–50 (1997).
65. V. G. Babskii, N. D. Kopachevskii, A. D. Myshkis, L. A. Slobozhanin, and A. D. Tyuptsov, “On some unsolved problems of zero-gravity hydromechanics,” *Nonlinear Anal.*, 1980, **4**, No. 3, 607–621.
66. E. L. Gaziev and N. D. Kopachevsky, “Small motions and eigenoscillations of a «fluid-barotropic gas» hydrosystem,” *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2013, **192**, No. 4, 389–416.
67. I. Gohberg and S. Goldberg, *Basic Operator Theory*, Birkhäuser, Boston—Basel—Berlin, 1981.
68. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Self-Adjoint Problems for an Ideal Fluid*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 2001.
69. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Non-Self-Adjoint Problems for Viscous Fluids*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 2003.
70. N. D. Kopachevsky, R. Mennicken, Yu. S. Pashkova, and C. Tretter, “Complete second-order linear differential operator equations in Hilbert space and applications in hydrodynamics,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 2004, **356**, No. 12, 4737–4766.
71. N. D. Kopachevsky and Yu. S. Pashkova, “Small oscillations of a viscous fluid in a vessel bounded by an elastic membrane,” *Russ. J. Math. Phys.*, 1998, **5**, No. 4, 459–472.
72. N. D. Kopachevsky and S. I. Smirnova, “Oscillations of a cylindrically inhomogeneous rotating fluid in a container of special form,” *Spectral Evolution Probl.*, 1994, **3**, 45–47.
73. N. D. Kopachevsky and S. I. Smirnova, “Proper oscillations of a cylindrically inhomogeneous fluid between coaxial cylinders,” *Spectral Evolution Probl.*, 1994, **3**, 44–45.
74. N. D. Kopachevsky and E. V. Syomkina, “Linear Volterra integro-differential second-order equations unresolved with respect to the highest derivative,” *Eurasian Math. J.*, 2013, **4**, No. 4, 64–87.
75. N. D. Kopachevsky and D. O. Tsvetkov, “Oscillations of stratificated fluids,” *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2010, **164**, No. 4, 574–602.
76. N. D. Kopachevsky, V. I. Voytitsky, and Z. Z. Sitshaeva, “On two hydromechanical problems inspired by works of S. Krein,” In: *Differential Equations, Mathematical Physics, and Applications. Selim Grigorievich Krein Centennial*, AMS, Providence, 2019, pp. 219–238.
77. A. D. Myshkis, V. G. Babskii, N. D. Kopachevskii, L. A. Slobozhanin, and A. D. Tyuptsov, *Low-Gravity Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, etc., 1987.

V. I. Voytitsky
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: victor.voytitsky@gmail.com

M. A. Muratov
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: mustafa_muratov@mail.ru

Yu. S. Pashkova
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia

P. A. Starkov
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: pastarwork@gmail.com

T. A. Suslina
Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia
E-mail: t.suslina@spbu.ru

D. O. Tsvetkov
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: tsvetdo@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 2 (2021). С. 208–236

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-208-236 УДК 517.98

ПРАВОСТОРОННЯЯ ОБРАТИМОСТЬ ДВУЧЛЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ГРАДУИРОВАННАЯ ДИХОТОМИЯ

© 2021 г. **А. Б. АНТОНЕВИЧ**

Аннотация. В работе приведен обзор исследований правосторонней обратимости двучленных функциональных операторов. Известно, что обратимость двучленных функциональных операторов равносильна существованию дихотомии решений однородного уравнения. Основной результат заключается во введении нового свойства решений однородного уравнения, названного градуированной дихотомией, и доказательстве того, что существование градуированной дихотомии равносильно правосторонней обратимости рассматриваемых операторов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение . . . 208
2. Общие подходы к исследованию правосторонней обратимости . . . 209
3. Операторы взвешенного сдвига и методы их исследования . . . 213
4. Операторы, порожденные отображениями типа Морса—Смейла . . . 220
5. Операторы, порожденные произвольными отображениями . . . 229
6. Краевые задачи для разностных уравнений . . . 231
Список литературы . . . 233

Памяти Николая Дмитриевича Копачевского. Изложенные в работе результаты неоднократно докладывались на Крымской осенней математической школе, организованной и руководимой Николаем Дмитриевичем.

1. Введение

При исследовании задачи об ограниченных на полуоси оси решениях системы m дифференциальных уравнений
$$\frac{du}{dt} - A(t)u(t) = f(t),$$
О. Перроном было обнаружено, что такое свойство имеет место тогда и только тогда, когда множество решений однородной системы *допускает дихотомию* [29]. Это значит, что существует разложение пространства $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$ и положительные постоянные C и γ такие, что для решений однородной системы выполнены неравенства
$$\|u(t)\| \leqslant Ce^{-\gamma(t-\tau)}\|u(\tau)\| \quad \text{при } u(0) \in E^s,\ t \geqslant \tau;$$
$$\|u(t)\| \geqslant Ce^{\gamma(t-\tau)}\|u(\tau)\| \quad \text{при } u(0) \in E^u,\ t \geqslant \tau.$$
При этом на всей прямой существование дихотомии равносильно существованию и единственности ограниченного решения. Различные обобщения этого результата были предметом многочисленных исследований (см. [9, 12, 14, 17]).

Аналогичные связи разрешимости с дихотомией решений однородного уравнения имеют место для двучленных функциональных уравнений вида
$$A(x)u(\alpha(x)) - u(x) = f(x), \quad u \in F(X), \tag{1.1}$$

где $A(x)$ — заданная матрица-функция, $\alpha : X \mapsto X$ заданное обратимое отображение, и уравнение рассматривается в банаховом пространстве $F(X)$, состоящем из вектор-функций на множестве X (см. [1,10,15,26]).

Однако для функциональных уравнений возможна качественно другая картина разрешимости, когда для любой правой части решение уравнения существует, но не единственно. В операторной терминологии это означает существование правого обратного для оператора, определенного левой частью уравнения.

В данной работе изложены основные результаты о правосторонней обратимости двучленных функциональных операторов в пространствах $L_2(X,\mu)$, полученные в серии работ А. Б. Антоневича, Ю. Маковской, А. А. Ахматовой, Е. В. Пантелеевой, О. А. Архипенко, А. Шукура, и приведены схемы их доказательств. Принципиально новым в этих исследованиях является то, что обнаружена связь правосторонней обратимости с новым, ранее не встречавшимся, свойством решений однородного уравнения, которое предложено называть *градуированной дихотомией*.

2. Общие подходы к исследованию правосторонней обратимости

2.1. Гиперболические и правосторонне гиперболические операторы. Пусть B есть ограниченный обратимый оператор в банаховом пространстве F. Пусть $R(B) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(B)\}$, где $\sigma(B)$ — спектр оператора, есть спектральный радиус оператора B, $r(B) = \min\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(B)\} = \frac{1}{R(B^{-1})}$.

Если $|\lambda| > R(B)$, то резольвента $R(B;\lambda) = (B - \lambda I)^{-1}$ представляется в виде ряда по отрицательным степеням λ и положительным степеням B:

$$R(B;\lambda) = -\sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1}. \tag{2.1}$$

Если $|\lambda| < r(B)$, то резольвента представляется в виде ряда по неотрицательным степеням λ и положительным степеням обратного оператора B^{-1}:

$$R(B;\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1}. \tag{2.2}$$

Если резольвента определена при других значениях λ, то она имеет более сложный вид. В частности, известно следующее утверждение (например, [20, лемма 2.2]).

Теорема 2.1. *Если операторы $B - \lambda I$ обратимы на окружности $|\lambda| = r$, где $r(B) < r < R(B)$, то в окрестности этой окружности резольвента представляется в виде ряда Лорана*

$$R(\lambda, B) = -\sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P + \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1}(I - P), \tag{2.3}$$

где P — проектор Рисса, который связан с резольвентой формулой

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R^+(B;\lambda)d\lambda. \tag{2.4}$$

Проектор Рисса коммутирует с B, задает разложение $F = F^+ \oplus F^-$ пространства в прямую сумму инвариантных подпространств и, соответственно, задает разложение оператора $B = B^+ \oplus B^-$ такое, что $R(B^-) < r$, $R((B^+)^{-1}) < \frac{1}{r}$.

Без ограничения общности, заменив B на оператор $\frac{1}{r}B$, можно свести исследование к случаю $r = 1$. Оператор называется *гиперболическим*, если единичная окружность не пересекается с его спектром. В этом случае получаем, что $R(B^-) < 1$, $R((B^+)^{-1}) < 1$.

При исследовании правосторонней обратимости имеет место ряд родственных утверждений.

Правосторонней резольвентой для оператора B в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ будем называть операторнозначную функцию $R^+(B;\lambda)$, аналитически зависящую от $\lambda \in \Omega$, такую, что $R^+(B;\lambda)$ есть правый обратный к $B - \lambda I : (B - \lambda I)R^+(B;\lambda) = I$.

Если оператор $B - \lambda I$ необратим и существует правосторонняя резольвента, то таких резольвент много: операторнозначная функция $R_1^+(B;\lambda) = R^+(B;\lambda) + N(\lambda)$ является правосторонней резольвентой тогда и только тогда, когда разность $N(\lambda) = R_1^+(B;\lambda) - R^+(\lambda, B)$ удовлетворяет условию $(B - \lambda)N(\lambda) = 0$, т. е. образ оператора $N(\lambda)$ принадлежит ядру оператора $B - \lambda I$.

Аналогом теоремы 2.1 является следующее утверждение (см. [27]).

Теорема 2.2. *Если для оператора B существует правосторонняя резольвента $R^+(\lambda, B)$, определенная в некотором открытом кольце, содержащем единичную окружность, то ее разложение в ряд Лорана в этом кольце однозначно определяется по коэффициенту P при $\frac{1}{\lambda}$, который связан с резольвентой той же формулой, что и проектор Рисса $P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=1} R^+(B;\lambda)d\lambda$, а разложение имеет вид, аналогичный* (2.3):

$$R^+(\lambda, B) = -\sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P + \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1}(I - P). \tag{2.5}$$

Оператор P перестановочен с B тогда и только тогда, когда $R^+(\lambda, B)$ является (*двусторонней*) *резольвентой, тогда P есть проектор Рисса. Если P есть произвольный оператор, для которого ряд* (2.5) *сходится, то сумма ряда является одной из правосторонних резольвент.*

Оператор, для которого существует правосторонняя резольвента, определенная в некотором открытом кольце, содержащем единичную окружность, будем назвать *правосторонне гиперболическим*.

Проанализируем структуру построенных резольвент. При $|\lambda| \leqslant R(B)$ операторный ряд (2.1) расходится, но для некоторых $f \in F$ аналитическая вектор-функция

$$R^+(B;\lambda)f = -\sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} f, \tag{2.6}$$

определенная при $|\lambda| > R(B)$, аналитически продолжается на более широкую область $Res^+(f)$. При этом равенство $(B - \lambda I)R^+(B;\lambda)f = f$ сохраняется в $Res^+(f)$, т. е. при $\lambda \in Res^+(f)$ существует решение $u = R^+(B;\lambda)f$ уравнения

$$(B - \lambda I)u = f. \tag{2.7}$$

В частности, если ряд в (2.6) абсолютно сходится при некотором λ_0, где $|\lambda_0| < R(B)$, то он абсолютно сходится при $|\lambda| \geqslant |\lambda_0|$ и задает аналитическое продолжение при таких λ.

Аналогично, при $|\lambda| \geqslant r(B)$ операторный ряд (2.2) расходится, но для некоторых $f \in F$ функция

$$R^-(B;\lambda)f = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1} f \tag{2.8}$$

аналитически продолжается на некоторую область $Res^-(f)$, и при $\lambda \in Res^-(f)$ существует решение $u = R^-(B;\lambda)f$ уравнения (2.7).

Напомним, что равенство $E = E_1 + E_2$, где E — векторное пространство, E_1 и E_2 — его векторные подпространства, означает, что каждый элемент из E представляется в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$, но при этом допускается, что такое представление не единственно. Если $E = E_1 + E_2$, то подпространства E_1 и E_2 называются *трансверсальными*. Равенство $E = E_1 \oplus E_2$ означает, что представление $x = x_1 + x_2$ единственно. Если E — банахово пространство, то равенство $E = E_1 \oplus E_2$ предполагает дополнительно, что подпространства E_1 и E_2 замкнуты.

Для каждого $r \in (r(B), R(B))$ обозначим через $F^+(r)$ подпространство в F, состоящее из таких f, что ряд (2.6) сходится при $|\lambda| > r$, и обозначим через $F^-(r)$ подпространство, состоящее из таких f, что ряд (2.8) сходится при $|\lambda| < r$.

Теорема 2.3. *Пусть $r(B) \leqslant r^- < 1 < r^+ \leqslant R(B)$ и $K = \{\lambda : r^- < |\lambda| < r^+\}$. Операторы $B - \lambda I$ обратимы справа для всех $\lambda \in K$ тогда и только тогда, когда выполнено условие трансверсальности*

$$F^+(r^+) + F^-(r^-) = F. \tag{2.9}$$

При этом ряд Лорана (2.5) *сходится в кольце K и задает правостороннюю резольвенту тогда и только тогда, когда образ оператора P принадлежит подпространству $F^+(r^-)$, а образ оператора $I - P$ принадлежит подпространству $F^-(r^+)$.*

Таким образом, при исследовании правосторонней обратимости некоторого класса операторов нужно выяснить, для каких из них выполнено условие трансверсальности (2.9), а для построения правосторонней резольвенты требуется найти оператор P, удовлетворяющий условиям теоремы 2.3.

В общем случае оператор P может не быть проектором, но наиболее простую структуру имеют правосторонние резольвенты, порожденные проекторами P. Задание такого проектора равносильно построению подпространств $W^{\pm} \subset F^{\pm}$ таких, что $F = W^{+} \oplus W^{-}$.

Основное содержание данной работы заключается в построении таких проекторов для операторов взвешенного сдвига.

2.2. Локализация в C^*-алгебрах. Исследование операторов часто удается упростить с помощью т. н. локализации. Метод локализации в общей постановке заключается в построении по каждому оператору B из заданного класса $\mathcal{B}$ некоторого семейства вспомогательных операторов, называемых *локальными представителями*, таких, что свойства B описываются с помощью вспомогательных операторов. Эффективность этого метода определяется тем, что вспомогательные операторы обычно устроены более просто и могут быть исследованы достаточно детально.

Например, при исследовании эллиптических дифференциальных операторов в качестве локальных представителей берутся дифференциальные операторы с постоянными, т. н. замороженными, коэффициентами.

Построения локальных представителей обычно согласовано с умножением операторов и поэтому связано с представлениями банаховых алгебр, порожденных рассматриваемым классом операторов. Теория представлений наиболее развита для C^*-алгебр операторов в гильбертовых пространствах (см. [13, 18]). Ниже рассматриваются методы локализации для таких алгебр.

Пусть $\mathcal{B}$ есть произвольная C^*-алгебра, т. е. банахова алгебра с инволюцией, для элементов b которой выполнено условие $\|bb^*\| = \|b\|^2$.

Представлением π алгебры $\mathcal{B}$ называется гомоморфизм этой алгебры в алгебру $LB(H_\pi)$ операторов в гильбертовом пространстве H_π, при котором единица переходит в единичный оператор. Образы $\pi(B)$ элемента $b \in \mathcal{B}$ при различных представлениях рассматриваются как его локальные представители.

Представление π называется *неприводимым*, если в H_π нет нетривиальных подпространств, инвариантных относительно всех операторов $\pi(b)$, $b \in \mathcal{B}$. Образы элемента b при неприводимых представлениях обычно являются простейшими операторами, к анализу которых можно свести исследование b.

Построение метода локализации заключается в нахождении таких наборов представлений (π_τ), $\tau \in \Gamma$, при которых свойства оператора b можно описать с помощью свойств его образов $\pi_\tau(b)$.

Говорят, что семейство представлений (π_τ), $\tau \in \Gamma$, *разделяет* точки алгебры $\mathcal{B}$, если для любого $b \in \mathcal{B}$, $b \neq 0$, существует такое представление из этого семейства, что $\pi_\tau(b) \neq 0$.

При любом представлении образ обратимого элемента является обратимым. Но при некоторых представлениях образ необратимого элемента может оказаться обратимым.

Говорят, что семейство представлений (π_τ), $\tau \in \Gamma$, образует *достаточный набор представлений* алгебры $\mathcal{B}$, если для любого необратимого элемента $b \in \mathcal{B}$ существует такое представление π_τ из этого семейства, что оператор $\pi_\gamma(b)$ необратим.

Для любого множества представлений $\pi_\tau, \tau \in \Gamma$, определяется представление $\pi = \bigoplus\limits_\gamma \pi_\tau$, действующее в прямой сумме гильбертовых пространств $H = \bigoplus H_\pi$, которое называется их *прямой суммой*. При этом представлении $\pi(b) = \bigoplus\limits_\tau \pi_\tau(b)$, т. е. этот оператор является блочно-диагональным. Обозначим алгебру всех ограниченных блочно-диагональных операторов $\mathrm{Diag}(\bigoplus H_\pi)$ и отметим, что в общем случае $\pi(\mathcal{B})$ есть часть $\mathrm{Diag}(\bigoplus H_\pi)$.

Представление π называется *точным*, если $\ker \pi = \{0\}$. При точном представлении алгебра $\mathcal{B}$ изоморфна своему образу $\pi(\mathcal{B})$.

Лемма 2.1. *Если семейство представлений $\{\pi_\gamma,\ \gamma \in \Gamma_0\}$, разделяет точки алгебры $\mathcal{B}$, то прямая сумма представлений $\pi = \bigoplus\limits_\gamma \pi_\gamma$ является точным представлением и, следовательно, представление π задает изоморфизм исходной алгебры с ее образом $\pi(\mathcal{B})$.*

Это утверждение позволяет свести исследование обратимости элемента $b \in \mathcal{B}$ к исследованию его образов при представлениях π_γ. При этом используется следующее свойство, называемое *наполненностью* операторных C^*-алгебр.

Если у оператора b из C^*-алгебры $\mathcal{B}$ операторов в гильбертовом пространстве H существует обратный b^{-1} в H, то этот обратный также принадлежит $\mathcal{B}$.

Лемма 2.2. *Пусть семейство представлений (π_τ), $\tau \in \Gamma_0$, разделяет точки алгебры $\mathcal{B}$. Элемент b обратим тогда и только тогда, когда все элементы $\pi_\tau(b)$, $\tau \in \Gamma_0$, обратимы, и нормы обратных ограничены в совокупности: существует такая постоянная C, что для всех $\gamma \in \Gamma_0$ выполнено $\|[\pi_\tau(b)]^{-1}\| \leqslant C$.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Если нормы обратных $\pi_\gamma(b)$, $\gamma \in \Gamma_0$, ограничены в совокупности, то у диагонального оператора $\pi(b)$ существует обратный $\pi(b)^{-1}$ в алгебре $\mathrm{Diag}(\bigoplus H_\pi)$. В силу наполненности подалгебры $\pi(\mathcal{B})$ этот обратный принадлежит $\pi(\mathcal{B})$. □

Заметим, что в рассматриваемом случае семейства представлений, разделяющего точки алгебры $\mathcal{B}$, для элементов $b \in \mathcal{B}$ выполняется включение $\Sigma(b) \supset \bigcup\limits_{\pi\in\Gamma_0} \Sigma(\pi(b))$, а равенство может не выполняться.

Исследование обратимости b с помощью семейства представлений, разделяющих точки, представляет собой *слабый метод локализации*: для получения обратимости, кроме проверки обратимости операторов $\pi_\tau(b)$, нужны оценки норм обратных операторов, что требует детальных вычислений.

В случае достаточного набора представлений метод локализации оказывается сильным в том смысле, что для его применения не нужно находить оценки норм операторов $[\pi_\tau(b)]^{-1}$.

Предложение 2.1. *Пусть семейство представлений (π_τ), $\tau \in \Gamma$, образует достаточный набор представлений C^*-алгебры $\mathcal{B}$. Элемент $b \in \mathcal{B}$ обратим тогда и только тогда, когда операторы $\pi_\tau(b)$ обратимы для каждого $\tau \in \Gamma$. В частности, имеет место равенство $\sigma(b) = \bigcup\limits_{\tau\in\Gamma} \sigma(\pi_\tau(b))$.*

Рассмотренные конструкции и утверждения связаны с доказательством одного из основных результатов теории C^*-алгебр, известного как вторая теорема Гельфанда — Наймарка (см. [18, теорема 3.4.1]). Эта теорема утверждает, что каждая абстрактная C^*-алгебра $\mathcal{B}$ допускает точное представление — изоморфна некоторой алгебре операторов в гильбертовом пространстве. Доказательство заключается в проверке того, что прямая сумма всех неприводимых представлений является точным представлением, но в этом доказательстве используется только то, что неприводимые представления разделяют точки алгебры. Однако известно, что семейство всех неприводимых представлений C^*-алгебры $\mathcal{B}$ не только разделяет точки, но и образует достаточный набор представлений. Это следует, например, из [18, теорема 5.1.13]. Таким образом, конструкция, использованная в доказательстве теоремы Гельфанда — Наймарка, является сильным методом локализации. Кроме того, если два представления эквивалентны, то обратимость $\pi_\tau(b)$ для одного из них эквивалентна обратимости образа для второго представления и зависит только от класса эквивалентных представлений. Множество всех классов неприводимых представлений называется *спектром алгебры* и обозначается $Sp(\mathcal{B})$.

Теорема 2.4. *Элемент b из C^*-алгебры $\mathcal{B}$ обратим тогда и только тогда, когда его образы при всех неприводимых представлениях обратимы. В частности, для любого $b \in \mathcal{B}$ имеет место равенство $\sigma(b) = \bigcup\limits_{\pi\in Sp(\mathcal{B})} \sigma(\pi(b))$.*

При исследовании правосторонней обратимости имеют место аналогичные утверждения, но появляются отличия, связанные с тем, что у C^*-алгебр нет свойства наполненности относительно правосторонней обратимости — если $\mathcal{B}$ есть C^*-алгебра операторов в гильбертовом пространстве H и у оператора $b \in \mathcal{B}$ существует правый обратный R в H, то может оказаться, что R не принадлежит $\mathcal{B}$.

Лемма 2.3. *Пусть B есть ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве H, B^* — сопряженный к B. Оператор B правосторонне обратим тогда и только тогда, когда оператор BB^* обратим. При этом оператор R является правым обратным к B тогда и только тогда, когда он представляется в виде*

$$R = (I - Q)B^*(BB^*)^{-1}, \tag{2.10}$$

где Q есть проектор на ядро оператора B.

Если проектор Q ортогональный, то R — правый обратный с минимальной нормой $\|R\| = \sqrt{\|(BB^*)^{-1}\|}$, и такой оператор R принадлежит C^*-алгебре $\mathcal{B}$, порожденной оператором B.

Доказательство. Если оператор BB^* обратим, то формула (2.10) задает оператор R, который является правым обратным к B, так как $BR = BB^*(BB^*)^{-1} - BQ[B^*(BB^*)^{-1}] = I$.

Пусть $BR = I$. Требуется получить для R представление (2.10).

Оператор B в гильбертовом правосторонне обратим тогда и только тогда, когда его образ $\operatorname{Im} B$ совпадает со всем пространством H. Это свойство эквивалентно тому, что $\ker B^* = \{0\}$ и образ $\operatorname{Im} B^*$ замкнут, откуда $\operatorname{Im} B^* = \ker B^{\perp}$.

Поэтому $BB^*(H) = B(\operatorname{Im} B^*) = B(\ker B^{\perp}) = H$, т. е. образ оператора BB^* совпадает со всем пространством. В силу самосопряженности оператора BB^* отсюда следует его обратимость.

Если $BR = I$, то $\ker R = \{0\}$ и оператор $RB = P$ является проектором, так как $(RB)^2 = RB$. При этом $\ker P = \ker B$, и если $x = Ry$, то $Px = RBRy = x$. Следовательно, P есть проектор на $\operatorname{Im}(R)$, осуществляющий разложение $H = \operatorname{Im}(R) \oplus \ker B$, а $I - P$ есть проектор на $\ker B$.

Пусть x есть решение уравнения $Bx = y$ и Q есть проектор на $\ker B$. Векторы вида $x' = x - Qx$ также являются решениями этого уравнения, причем такие решения имеют наименьшую норму тогда и только тогда, когда проектор Q ортогональный.

Далее $RBB^* = PB^*$, и в силу обратимости BB^* получаем требуемое представление правого обратного $R = PB^*(BB^*)^{-1}$.

Для правосторонне обратимого B имеем равенство $\ker B^*B = \ker B$. Известно, что спектр BA может отличаться от спектра AB только на точку 0. Поскольку оператор BB^* обратим, а оператор B^*B необратим, получаем, что 0 есть изолированная точка спектра оператора B^*B. Поэтому соответствующий проектор Рисса принадлежит алгебре $\mathcal{B}$ и задает разложение $H = \ker B \oplus \operatorname{Im} B^* = \ker B^*B \oplus \operatorname{Im} B^*B$. В силу самосопряженности B^*B такой проектор ортогональный. □

Из этой леммы следует, в частности, наполненность операторных C^*-алгебр относительно правосторонней обратимости в следующей формулировке: *если для оператора $B \in \mathcal{B}$ существует правый обратный в H, то существует и правый обратный, принадлежащий $\mathcal{B}$.*

Из сказанного выше получаем аналог теоремы 2.4, который лежит в основе дальнейшего исследования.

Теорема 2.5. *Пусть $\mathcal{B}$ есть C^*-алгебра операторов в гильбертовом пространстве и семейство представлений (π_γ), $\gamma \in \Gamma$, образует достаточный набор представлений C^*-алгебры $\mathcal{B}$. Оператор $b \in \mathcal{B}$ обратим справа тогда и только тогда, когда операторы $\pi_\gamma(b)$ обратимы справа для всех $\gamma \in \Gamma$.*

Доказательство. Правосторонняя обратимость оператора B эквивалентна обратимости оператора bb^*. Обратимость оператора bb^* эквивалентна обратимости операторов всех операторов $\pi_\tau(b)\pi_\tau(b)^*$, что, в свою очередь, эквивалентно правосторонней обратимости операторов $\pi_\tau(b)$. □

3. Операторы взвешенного сдвига и методы их исследования

3.1. Операторы взвешенного сдвига и ассоциированные линейные расширения. Прежде чем применять сформулированные выше утверждения к операторам взвешенного сдвига, приведем более детальное описание таких операторов и их свойств.

Пусть задано обратимое непрерывное отображение $\alpha : X \mapsto X$ топологического пространства X и задано банахово пространство $F(X)$ функций на X со значениями в $\mathbb{C}^m$. *Оператором взвешенного сдвига* в $F(X)$ будем называть линейный ограниченный оператор, действующий по формуле

$$Bu(x) = A_0(x)u(\alpha(x)), \quad u \in F(X). \tag{3.1}$$

В первую очередь возникает вопрос об условиях, при которых это выражение задает ограниченный оператор в $F(X)$.

Если $F(X)$ есть пространство $C(X)$ непрерывных ограниченных функций на X, отображение α непрерывно, и матрица-функция $A_0(x)$ непрерывна, то очевидно, что оператор (3.1) ограничен. Но в других пространствах функций условия ограниченности таких операторов имеют более сложный вид, и получение таких условий является предметом отдельных исследований (например [21]).

Ниже мы рассматриваем операторы в пространствах $L_2(X,\mu)$, где μ есть полная σ-аддитивная мера на X, определенная на некоторой σ-алгебре измеримых подмножеств, содержащей борелевские множества, такая, что мера каждого открытого множества положительна. Заметим, что мера μ не предполагается конечной. Приведем условия ограниченности оператора вида (3.1) в $L_p(X,\mu)$ (см. [1]). Эти условия не используют непрерывность отображения α, которое существенно в дальнейшем исследовании.

Говорят, что для меры μ и отображения $\alpha : X \mapsto X$ выполнено *условие согласования*, если $\alpha^{-1}(\omega)$ измеримо для каждого измеримого подмножества ω и выполнено соотношение

$$\mu(\alpha^{-1}(\omega)) = 0 \ \leftrightarrow\ \mu(\omega) = 0. \tag{3.2}$$

В этом случае также говорят, что отображение α сохраняет класс меры μ, а мера называется *квазиинвариантной*.

Поскольку пространство $L_p(X,\mu)$ состоит из классов эквивалентных функций, условие согласования является необходимым для корректного задания операторов взвешенного сдвига в таких пространствах — в противном случае образы эквивалентных функций могут не быть эквивалентными.

Рассмотрим меру, определенную выражением $\mu_\alpha(\omega) = \mu(\alpha^{-1}(\omega))$. Из условия 3.2 следует, что μ_α и μ взаимно абсолютно непрерывны. Поэтому существует производная Радона—Никодима — такая функция $\varrho(x)$, что $\mu(\alpha^{-1}(\omega)) = \int_\omega \varrho(x)d\mu$, причем $\varrho(x) \neq 0$ почти всюду.

Для производной Радона—Никодима выполнено равенство

$$\int_X u(\alpha(x))\varrho(\alpha^{-1}(x))d\mu = \int_X u(x)\varrho(x)d\mu_\alpha = \int_X u(x)d\mu,$$

из которого следует, что оператор

$$T_\alpha u(x) = \left[\varrho(\alpha^{-1}(x))\right[^{-1/p} u(\alpha(x)) \tag{3.3}$$

является изометрическим и обратимым в пространстве $L_p(X,\mu)$, в частности, в пространстве $L_2(X,\mu)$ — унитарным.

Оператор B вида (3.1) в пространствах $L_p(X,\mu)$ и $L_p(X,\mu;\mathbb{C}^m)$ удобно записывать в стандартной форме

$$B = AT_\alpha, \quad \text{где} \quad A(x) = \varrho(\alpha^{-1}(x))^{1/p}A_0(x). \tag{3.4}$$

Такая запись позволяет описывать свойства оператора B с помощью матрицы-функции A, которая называется *приведенным коэффициентом*.

Лемма 3.1. *Оператор* (3.4) *ограничен в пространстве $L_p(X,\mu)$ тогда и только тогда, когда приведенный коэффициент A принадлежит пространству $L_\infty(X,\mu)$, и при этом $\|B\| = \|A\|_\infty$.*

Заметим, что приведенный коэффициент A зависит не только от заданной меры, но и от рассматриваемого p, поэтому спектральные свойства операторов, заданных одним и тем же выражением (3.1) в пространствах $L_p(X,\mu)$, могут быть разными при разных p. Но операторы с одинаковыми приведенными коэффициентами имеют обычно при разных p близкие свойства. В частности, полученные ниже результаты для операторов в пространстве $L_2(X,\mu)$ переносятся на операторы в пространствах $L_p(X,\mu)$.

Укажем некоторые условия на X, μ и отображение α, естественные при анализе рассматриваемых операторов. Всюду ниже считаем, что X есть компактное отделимое пространство.

Топологическое пространство X называется *α-связным*, если его нельзя разложить на непересекающиеся непустые замкнутые α-инвариантные подмножества.

Если $X = X_1 \cup X_2$, где X_1 и X_2 — непересекающиеся непустые замкнутые α-инвариантные подмножества, то исследование оператора сводится к рассмотрению операторов в $L_p(X_1,\mu)$ и $L_p(X_2,\mu)$. Поэтому естественным является предположение, что пространство X является α-связным.

Особым является случай, когда отображение α периодическое. Если на некотором открытом множестве X_1 отображение является периодическим, то исследование оператора сводится к рассмотрению операторов в $L_p(X_1,\mu)$ и $L_p(X \setminus X_1,\mu)$. Поэтому считаем, что *множество непериодических точек плотно в X*, что исключает случай существования таких открытых подмножеств.

Лемма 3.2. *Если множество непериодических точек плотно в X, то спектр оператора взвешенного сдвига инвариантен относительно вращений вокруг точки* 0.

В частности, если оператор $B - I$ обратим (обратим справа), то при $|\lambda| = 1$ операторы $B - \lambda I$ также обратимы (обратимы справа).

Это утверждение позволяет использовать утверждения о гиперболических и правосторонне гиперболических операторах.

Вспомогательным объектом, с помощью которого удается описывать свойства оператора $B - I$, является *ассоциированное с оператором отображение* β, которое задается следующим образом.

Произведение $E = X \times \mathbb{C}^m$ рассматривается как векторное расслоение над X с естественной проекцией [19]; слоем E_x над точкой $x \in X$ является множество $E_x = \{(x, \xi) : \xi \in \mathbb{C}^m\} = \{x\} \times \mathbb{C}^m$, изоморфное $\mathbb{C}^m$. В каждом слое определена норма $\|(x, \xi)\| := \|\xi\|_{\mathbb{C}^m}$.

Ассоциированное с оператором B отображение $\beta_B : E \mapsto E$ задается формулой

$$\beta_B(x, \xi) = \left(\alpha^{-1}(x), A(\alpha^{-1}(x))\xi\right), \quad x \in X, \quad \xi \in \mathbb{C}^m. \tag{3.5}$$

Если рассматривается фиксированный оператор B, то для упрощения обозначений вместо β_B будем писать β.

При отображении β слой над точкой x линейно отображается в слой над точкой $\alpha^{-1}(x)$, действующие таким образом отображения называются *линейными расширениями отображения* α^{-1} на векторное расслоение E (см. [10]).

Поясним природу этого отображения. Пусть $u(x)$ есть решение однородного уравнения в пространстве всех функций на X; обозначим $u(x) = \xi$, $u(\alpha^{-1}(x)) = \eta$. Если однородное уравнение записать в виде $A(\alpha^{-1}(x)u(x) = u(\alpha^{-1}(x)$, то получаем, что $\eta = A(\alpha^{-1}(x))\xi$, т. е. отображение β задает связь между значениям решения однородного уравнения в точке $\alpha^{-1}(x)$ со значением в точке x. Таким образом, возможность исследования свойств оператора B с помощью ассоциированного с ним линейного расширения β есть аналог отмеченных выше для дифференциальных уравнений связей разрешимости с поведением решений однородного уравнения.

Ниже считаем, что матрица-функция $A(x)$ обратима; тогда существует обратное отображение, которое действует по формуле

$$\beta^{-1}(x, \xi) = (\alpha(x), A^{-1}(x)\xi), \quad x \in X, \quad \xi \in \mathbb{C}^m, \tag{3.6}$$

и является линейным расширением отображения α.

Конструкция линейного расширения согласована с умножением операторов. В частности, линейное расширение, соответствующее оператору B^n, есть β^n.

3.2. Гиперболический подход к исследованию спектра оператора взвешенного сдвига. Согласно лемме 3.2 обратимость оператора $B - I$ равносильна гиперболичности B, а гиперболичность — существованию разложения (2.3). Основной результат при исследовании гиперболичности операторов взвешенного сдвига B формулируется с помощью линейного расширения β и аналогичен классическим утверждениям о существовании дихотомии для дифференциальных уравнений.

Введем ряд понятий, часть из которых будет использована только в последующих разделах.

Каждое подмножество $K \subset E = X \times \mathbb{C}^m$ разбивается на слои $K_x = K \cap E_x$. Подмножество $K \subset E$ называется *векториальным,* если для любого x слой K_x является векторным подпространством в E_x и измеримо зависит от x. Векториальное подмножество $K \subset E$ называется *векториальным подрасслоением,* если слои K_x имеют одинаковую размерность и измеримо зависят от x. Векториальное подмножество $K \subset E$ называется *векторным подрасслоением,* если слои K_x имеют одинаковую размерность и непрерывно зависят от x.

Каждое векториальное подмножество может быть задано с помощью измеримой проекторнозначной функции $p(x)$, проектирующей E_x на K_x, причем эта функция может быть разрывной и размерность слоя K_x может быть разной для разных x. Поскольку здесь не предполагается, что проекторы $p(x)$ ортогональны, существует много таких $p(x)$. В случае векторного подрасслоения проекторнозначная функция $p(x)$ может быть выбрана непрерывной.

Подмножество $K \subset E$ называется *локально устойчивым в положительном направлении* (*вперед*) относительно β над множеством X_0, если существуют $C > 0$ и $\gamma < 1$ такие, что для всех $(x, \xi) \in K, x \in X_0$, и таких $k \geqslant 0$, при которых $\alpha^{-k}(x)] \in X_0$ выполняется неравенство

$$\|\beta^k(x, \xi)\| \leqslant C\gamma^k \|(x, \xi)\|. \tag{3.7}$$

Подмножество $K \subset E$ называется *устойчивым в положительном направлении* (*вперед*) относительно β над множеством X_0, если неравенство (3.7) выполнено для всех $k \geqslant 0$.

Аналогично, подмножество $K \subset E$ называется *локально устойчивым в отрицательном направлении* (*назад*) относительно β над множеством X_0, если существуют $C > 0$ и $\gamma < 1$ такие, что для всех $(x, \xi) \in K$, $x \in X_0$ и таких $k \geqslant 0$, при которых $\alpha^k(x) \in X_0$, выполняется неравенство

$$\|\beta^{-k}(x, \xi)\| \leqslant C\gamma^k \|(x, \xi)\|. \tag{3.8}$$

Подмножества $K \subset E$ называется *устойчивым в отрицательном направлении* (*назад*) относительно β, если неравенство (3.8) выполнено для всех $k \geqslant 0$.

Подмножество подмножество K называют *неустойчивым* в положительном направлении над множеством X_0, если $\alpha^{-1}(X_0) \subset X_0$ и существуют $C > 0$ и $\gamma < 1$ такие, что

$$\|\beta^k(x, \xi)\| \geqslant \frac{C}{\gamma^k}\|(x, \xi)\|, \quad k \geqslant 0. \tag{3.9}$$

Если множество X_0 двусторонне инвариантно, то устойчивость подмножества K в отрицательном направлении равносильна неустойчивости в положительном направлении, но в дальнейшем существенно то, что общем случае это разные понятия, т. к. неустойчивость не есть отрицание устойчивости.

Векториальные подмножества V^+ и V^- называются *трансверсальными*, если $E_x = V_x^+ + V_x^-$ для всех x. Если $E_x = V_x^+ \bigoplus V_x^-$, то в слое E_x существует проектор $p(x)$ на V_x^+ с ядром E_x^-. Будем говорить, что E есть прямая сумма векториальных подмножеств V^+ и V^- над X_0 (обозначаем $E = V^+ \bigoplus V^-$), если для каждого $x \in X_0$ выполнено $E_x = V_x^+ \bigoplus V_x^-$ и существует постоянная C такая, что $\|p(x)\| \leqslant C$ для всех $x \in X_0$.

Если подмножества V^+ и V^- являются векторными подрасслоениями над X, то в силу компактности X и непрерывности $p(x)$ условие ограниченности норм проекторов $p(x)$ выполнено автоматически. Для векториальных подмножеств $\|p(x)\|$ зависит от взаимного расположения подпространств,

Приведем необходимые понятия и факты о взаимном расположении подпространств для интересующего нас случая, когда L и M суть векторные подпространства конечномерного гильбертова пространства $H = \mathbb{C}^m$ (см. [11]).

Пусть Q_L есть ортогональный проектор на подпространство L. Расстояние от вектора ξ до подпространства L есть $d(\xi, L) = \min\{\|\xi - \eta\| : \eta \in L\} = \|\xi - Q_L\xi\|$.

Отклонением подпространства M от подпространства L называется число $\Theta(M, L) = \max\{d(\xi, L) : \|\xi\| = 1\} = \max\{\|\xi - Q_L\xi\| : \|\xi\| = 1\}$. Это число есть $\sin[\varphi(M, L)]$, где $\varphi(M, L)$ — наибольший угол между вектором из M и его проекцией на L. Вектор $0 \neq \xi \in M$, ортогональный к L, существует тогда и только тогда, когда $\Theta(M, L) = 1$.

Число $d(L, M) = \max\{\Theta(M, L), \Theta(L, M)\} = \|Q_L - Q_M\|$ задает метрику на множестве всех подпространств в H. Множество $G(d, m)$ подпространств фиксированной размерности d в $\mathbb{C}^m$ называется *многообразием Грассмана*. Если $d(M, L) < 1$, то проектор Q_L задает изоморфизм между M и L, и при этом $\cos[\varphi(M, L)]\|\xi\| \leqslant \|Q_L\xi\| \leqslant \|\xi\|$.

Лемма 3.3. *Пусть M_0 есть подпространство в L. Если $d(M, M_0) < 1$, то проектор Q_L задает изоморфизм между M и его проекцией на L.*

Доказательство. Из $d(M, M_0) < 1$ следует, что в M нет векторов, ортогональных к M_0. Тем более нет векторов, ортогональных к L, т. е. проектор Q_L инъективно отображает M в L. ☐

Число $\rho(M, L) = d(M, L^\perp)$ называется *раствором* между M и L. Это синус наименьшего угла между векторами из M и векторами из L.

Если $H = L \oplus M$, то норма проектора p, задающего это разложение, есть $\frac{1}{\rho(M,L)}$. В частности, если для векториальных подмножеств V^+ и V^- выполнено $E_x = V_x^+ \bigoplus V_x^-$, то они задают разложение в прямую сумму тогда и только тогда, когда $\rho(V_x^+, V_x^-) \geqslant \rho_0 > 0$.

Дихотомией линейного расширения β называется разложение $E = E^+ \bigoplus E^-$ в прямую сумму векторных подрасслоений, где E^+ устойчиво в положительном направлении, а E^- — устойчиво в отрицательном направлении. Если такое разложение существует, то оно единственно и векторные подрасслоения $E^\pm$ инвариантны относительно β. Линейное расширение, для которого существует дихотомия, называется *гиперболическим*. Для гиперболического линейного расширения подрасслоения E^+ и E^- могут быть описаны следующим образом:

$$E^+ = \{(x, \xi) \in E : \beta^n(x, \xi) \to 0 \ \text{ при } \ n \to +\infty\}, \tag{3.10}$$

$$E^- = \{(x,\xi) \in E : \beta^n(x,\xi) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to -\infty\}. \tag{3.11}$$

Такие подмножества определены для произвольных линейных расширений, но в общем случае это не подрасслоения, а векториальные подмножества. Именно эти векториальные подмножества играют существенную роль в дальнейшем исследовании.

Условия обратимости оператора $B - I$ формулируются следующим образом (см. [1]).

Теорема 3.1. *Пусть выполнены указанные выше условия, в частности, множество непериодических точек отображения α всюду плотно в X и приведенный коэффициент $A(x)$ является непрерывной обратимой матричнозначной функцией. Оператор $B-I$ обратим тогда и только тогда, когда линейное расширение β гиперболическое.*

Доказательство. Пусть расширение β гиперболическое и P есть оператор умножения на проекторнозначную функцию $p(x)$, задающую дихотомию. Тогда ряд (2.3) сходится в силу наложенных условий и задает резольвенту, определенную в окрестности единичной окружности.

Если оператор $B - I$ обратим, то B гиперболический и определен проектор Рисса P. Далее из условия перестановочности соответствующего оператора P с B и его степенями получаем, что P есть оператор умножения на непрерывную проекторнозначную функцию $p(x)$, которая задает искомую дихотомию для β. $\square$

Так как при произвольном λ имеем $B - \lambda I = \lambda(\frac{1}{\lambda}B - I)$, свойства $B - \lambda I$ получаем, применяя теорему к оператору $\frac{1}{\lambda}B$, для которого соответствующее линейное расширение есть $\beta_\lambda = \lambda\beta$.

Динамическим спектром линейного расширения β называется множество чисел λ, при которых β_λ не является гиперболическим.

Следствие 3.1. *При сделанных предположениях спектр оператора $B = AT_\alpha$ в пространстве $L_2(X;\mathbb{C}^m)$ совпадает с динамическим спектром линейного расширения β. При этом спектр оператора B состоит не более чем из m колец, которые могут вырождаться в окружности.*

Скалярный случай $m = 1$ особый, так как тогда векторное расслоение E одномерно и при дихотомии либо все E устойчиво в положительном направлении, либо все E устойчиво в отрицательном. Согласно следствию 3.1 спектр оператора B при $m = 1$ есть кольцо $\sigma(B) = \{\lambda : r(B) \leqslant |\lambda| \leqslant R(B)\}$, где $R(B)$ есть спектральный радиус оператора B, а $r(B) = [R(B^{-1})]^{-1}$.

Пусть ν есть нормированная мера на X. Средним геометрическим функции $a \in C(X)$ называется число $S_\nu(a) = \exp \int_X \ln |a(x)| d\nu$.

Теорема 3.2 (см. [1, 15, 26]). *Спектральный радиус оператора взвешенного сдвига задается выражением $R(aT_\alpha) = \max\{S_\nu(a) : \nu \in M_\alpha(X)\}$, где $M_\alpha(X)$ есть множество всех борелевских нормированных мер ν на X, инвариантных и эргодических относительно α, а число $r(B)$ задается выражением $r(aT_\alpha) = \min\{S_\nu(a) : \nu \in M_\alpha(X)\}$.*

3.3. Траекторный подход — локализация с помощью сужений на траектории. Локализация, описанная выше для произвольных операторных алгебр, для алгебр, порожденных операторами взвешенного сдвига, осуществляется с помощью следующей конструкции [1, 26].

Пусть $\mathcal{B}$ есть C^*-алгебра, порожденная операторами взвешенного сдвига с заданным отображением α в пространстве $L_2(X, \mathbb{C}^m)$. Она является замыканием в пространстве линейных ограниченных операторов незамкнутой подалгебры $\mathcal{B}_0$, состоящей из конечных сумм вида

$$B = \sum_{-N}^{N} A_j T_\alpha^j, \quad A_j \in C(X, \mathbb{C}^{m\times m}). \tag{3.12}$$

Пусть $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^m)$ есть пространство двусторонних последовательностей $u = (u(k)), k \in \mathbb{Z}$, векторов из $\mathbb{C}^m$ с нормой $\|u\| = (\sum\limits_k \|u(k)\|^2)^{1/2}$. Через T обозначим оператор сдвига, действующий в этом пространстве по формуле $(Tu)(k) = u(k+1)$.

Зафиксируем точку $\tau \in X$. По матрице-функции $A(x)$ построим последовательность матриц $A_{j,\tau}(k) = A_j(\alpha^k(\tau))$, составленную из значений $A(x)$ на траектории точки τ.

Оператору (3.12) поставим в соответствие оператор B_τ, действующий в $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^m)$ по формуле

$$B_\tau = \sum_{j=-N}^{N} A_{j,\tau} T^j. \tag{3.13}$$

Оператор B_τ построен с помощью значений коэффициента A на траектории точки τ, что поясняет название «траекторный подход». В частности, оператору взвешенного сдвига $B = AT_\alpha$ при этой конструкции соответствует дискретный оператор взвешенного сдвига $B_\tau = A_\tau T$, действующий в $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^m)$ по формуле
$$(B_\tau u)(k) = A(\alpha^k(\tau))u(k+1). \tag{3.14}$$

Лемма 3.4. *Для любого $\tau \in X$ отображение $B \to B_\tau$ продолжается до представления π_τ алгебры $\mathcal{B}$ в пространство $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^m)$.*

Основной результат траекторного подхода содержится в следующем утверждении.

Теорема 3.3. *Оператор B из алгебры $\mathcal{B}$ обратим тогда и только тогда, когда все операторы B_τ обратимы. Оператор B из алгебры $\mathcal{B}$ обратим справа тогда и только тогда, когда все операторы B_τ обратимы справа.*

Доказательство этой теоремы состоит из следующих шагов.

Если точка τ не является периодической, то представление π_τ неприводимо. При этом любое бесконечномерное неприводимое представление алгебры $\mathcal{B}$ эквивалентно некоторому представлению π_τ, соответствующему непериодической точке.

Представление π_τ, соответствующее периодической точке τ, приводимо и разлагается в семейство конечномерных неприводимых представлений. При этом любое конечномерное представление порождается одним из (приводимых) представлений, соответствующих некоторой периодической точке.

Из этого следует, что семейство представлений π_τ, $\tau \in X$ образует достаточный набор, и утверждение теоремы получаем из теоремы 2.5.

Заметим, что если точки τ_1 и τ_2 принадлежат одной траектории, то соответствующие операторы подобны. Поэтому если подмножество $X_0 \subset X$ содержит хотя бы одну точку из каждой траектории, то достаточно проверить условие для $\tau \in X_0$.

Теорема 3.3 применима ко всем операторам из рассматриваемой алгебры, в частности, к многочленным операторам вида (3.12). Но в общем случае для таких операторов построенные локальные представители также являются достаточно сложными для анализа. Но если $B = AT_\alpha$ есть оператор взвешенного сдвига, то локальные представители являются дискретными операторами взвешенного сдвига и более доступны для исследования. Это позволяет, например, получить из теорем 3.1 и 3.3 следствие.

Следствие 3.2. *Пусть $B = AT_\alpha$ есть оператор взвешенного сдвига, и B_τ — его локальные представители. Если при всех τ линейные расширения β_τ, ассоциированные с B_τ, гиперболические, то β также является гиперболическим.*

Из гиперболичности β_τ следует выполнение неравенств вида (3.7) для каждой траектории, но при этом постоянные C и γ могут быть разными для разных τ. Следствие утверждает, что существуют постоянные, при которых неравенства вида (3.7) выполнены сразу для всех траекторий.

3.4. Градуированная гиперболичность линейного расширения. Будем говорить, что линейное расширение линейное расширение β *градуировано гиперболическое*, если существует разложение в прямую сумму векториальных подмножеств $E = W^+ \oplus W^-$, где W^+ устойчиво вперед, а W^- устойчиво назад над X. Такое разложение расслоения будем называть *градуированной дихотомией* линейного расширения β; оно задается с помощью ограниченной проекторнозначной функции $p(x)$.

В отличие от случая гиперболичности, таких разложений может быть много, причем наиболее существенно то, что ранги проекторов $p(x)$ могут быть разными для разных x. Поэтому пространство X разбивается на конечное число измеримых подмножеств X_j таких, что над X_j ранги проекторов $p(x)$ одинаковы и сужения $W^\pm$ на X_j суть векториальные подрасслоения. Кроме того, не предполагается, что векториальные подмножества W^+ и W^- инвариантны и их слои $W_x^\pm$ на каждом X_j непрерывно зависят от x, хотя в примерах такие дополнительные свойства выполнены. Из сказанного следует, что для построения градуированной дихотомии надо построить разбиение $X = \coprod\limits_{j=1}^{p} X_j$ на измеримые подмножества и над каждым X_j построить разложение на векториальные подрасслоения.

Если существует градуированная дихотомия, то из определения следует, что при всех x слой $W_x^{\pm}$ принадлежит $E_x^{\pm}$ и $E_x = E_x^+ + E_x^-$, т. е. условие трансверсальности E^+ и E^- необходимо для существования градуированной дихотомии.

Теорема 3.4. *Пусть для линейного расширения β, ассоциированного с оператором $B = AT_\alpha$, существует градуированная дихотомия, $p(x)$ есть соответствующая проекторнозначная функция и P есть оператор умножения на $p(x)$. Тогда ряд* (2.5) *сходится в некотором кольце, содержащем единичную окружность, и его сумма является правосторонней резольвентой для оператора B.*

Теорема 3.4 утверждает, что существование градуированной дихотомии для линейного расширения β, ассоциированного с оператором $B = AT_\alpha$, достаточно для существования правосторонней резольвенты и, в частности, правосторонней обратимости оператора $B - I$. Поскольку трансверсальность является необходимой для существования градуированной дихотомии, задача построения правосторонней резольвенты распадается на два вопроса:

1) является ли условие трансверсальности необходимым и достаточным для правосторонней обратимости $B - I$?
2) как построить градуированную дихотомию для β при условии трансверсальности?

Ответы на эти вопросы получены ниже для операторов, порожденных т. н. отображениями типа Морса—Смейла, имеющими сравнительно простые динамические свойства.

3.5. Градуированная дихотомия линейного расширения, ассоциированного с дискретным оператором взвешенного сдвига. Градуированная дихотомия для β порождает градуированную дихотомию над каждой траекторией с теми же постоянными C и γ, а также, соответственно, для линейных расширений β_τ, ассоциированных с дискретными операторами взвешенного сдвига B_τ.

Пусть $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^m$ и β — линейное расширение, ассоциированное с дискретным оператором взвешенного сдвига. Обсудим, как может быть построена градуированная дихотомия для такого β, и, в частности, поясним необходимость рассмотрения подрасслоений разных размерностей. Рассмотрим множества

$$E^+(C,\gamma) = \{(n,\xi) \in E^+ : \|\beta^k(n,\xi)\| \leqslant C\gamma^k \|(n,\xi)\|, k \geqslant 0\}, \tag{3.15}$$

$$E^-(C,\gamma) = \{(n,\xi) \in E^- : \|\beta^{-k}(n,\xi)\| \leqslant C\gamma^k \|(n,\xi)\|, k \geqslant 0\}. \tag{3.16}$$

Чтобы разложение $E_n = W_n^+ \oplus W_n^-$ задавало градуированную дихотомию, подпространство W_n^+ должно быть подмножеством слоя $E^+(C,\gamma)_n$, а W_n^+ — слоя $E^-(C,\gamma)_n$. Сложности с выбором требуемых $W_n^{\pm}$ связаны с тем, что слои $E^{\pm}(C,\gamma)_n$ могут не быть векторными подпространствами. Проведенные ниже построения основаны на том, что эти слои имеют следующую специальную структуру. Существуют целые $n_1 < n_2 < \ldots < n_p$, где $p \leqslant m$, такие, что слой $E^+(C,\gamma)_n$ совпадает с E_x^+ при $n \leqslant n_1$ и является векторным подпространством размерности d_1. При $n_1 < n$ слой $E^+(C,\gamma)_n$ не является векторным подпространством, но при $n_1 < n \leqslant n_2$ содержит некоторое множество векторных подпространств меньшей размерности d_2. Для каждого из таких n можно выбрать одно из таких подпространств V_n^{2+}, причем достаточно выбрать $V_{n_2}^{2+}$, а остальные можно задать с помощью условия инвариантности, положив $V_n^{2+} = \beta^{-1}(V_{n+1}^{2+})$. Заметим, что с помощью этого условия выделяются подпространства V_n^{2+} не только при $n_1 < n \leqslant n_2$, но и при всех n, т. е. задается подрасслоение V^{2+} над всем $\mathbb{Z}$.

Далее, при $n_2 < n \leqslant n_3$ слои $E^+(C,\gamma)_n$ содержат векторные подпространства еще меньшей размерности d_3, и из них можно выбрать одно из подпространств V_n^{3+}, причем достаточно выбрать $V_{n_3}^{3+}$, а остальные задать с помощью условия инвариантности, и т. д. В результате получаем устойчивое вперед векториальное множество V^+, составленное при $n_j < n \leqslant n_{j+1}$ из выбранных слоев V_n^{j+}, имеющее ступенчатую структуру — с ростом n размерности слоев убывают в точках n_j, которые будем называть *точками переключения*. При этом в E^+ возникает градуировка — цепочка вложенных инвариантных подрасслоений $V^{p+} \subset \ldots \subset V^{2+} \subset V^{1+} = E^+$ таких, что V^{j+} устойчиво вперед при $n \leqslant n_j$.

Аналогично в $E^-(C,\gamma)$ можно построить устойчивое назад векториальное множество V^-, у которого размерности слоев V_n^- возрастают с ростом n, и $V_n^- = E_n^-$ при достаточно больших n.

При таком построении может оказаться, что выделенные подпространства V_n^+ и V_n^- не задают разложение слоя E_n. Поэтому далее используется то, что при заданном n слой $E^+(C,\gamma)_n$ содержит не одно, а целое семейство подпространств, слой $E^-(C,\gamma)_n$ также содержит семейство подпространств, и центральным моментом построения является выбор искомых подпространств $W_n^{\pm}$ из этих семейств.

При построении W_n^+ и W_n^- играет роль подрасслоение со слоями $E_n^+\cap E_n^-$. Так как при больших по модулю отрицательных n слой V_n^+ совпадает с E_n^+, все подпространство $E_n^+\cap E_n^-$ принадлежит этому слою, и тогда можно положить $W_n^+=E_n^+$, а в качестве W_n^- взять дополнение к $E_n^+\cap E_n^-$ в подпространстве E_n^-. Аналогично, при больших положительных n слой V_n^- совпадает с E_n^-, все подпространство $E_n^+\cap E_n^-$ принадлежит слою V_n^-, и можно положить $W_n^-=E_n^-$, а в качестве W_n^+ взять дополнение к $E_n^+\cap E_n^-$ в подпространстве E_n^+. А при промежуточных значениях n приходится выбирать подпространства $E_n^{\pm}$ так, что часть подпространства $E_n^+\cap E_n^-$ попадает в слой V_n^+, а часть — в слой V_n^-. Такой выбор является наиболее сложным местом рассматриваемой конструкции, и он проведен ниже с использованием свойств отображений типа Морса—Смейла.

Заметим, что для рассматриваемого β можно построить градуированную дихотомию с одной точкой переключения. Например, можно, как выше, при $n\leqslant n_1$ положить $W_n^+=E_n^+$ и в качестве W_n^- взять дополнение к $E_n^+\cap E_n^-$ в подпространстве E_n^-. А при $n>n_1$ положить $W_n^-=E_n^-$ и в качестве W_n^+ взять дополнение к $E_n^+\cap E_n^-$ в E_n^+. Такие подпространства задают градуированную дихотомию для β с одной точкой переключения n_1, но требуемые неравенства выполнены с некоторой постоянной C_1, большей, чем C. Поэтому именно требование, чтобы для всех траекторий неравенство выполнялось с одной постоянной C, приводит к необходимости нескольких переключений.

4. Операторы, порожденные отображениями типа Морса—Смейла

4.1. Условие правосторонней обратимости. Обратимое непрерывное отображение $\alpha: X\to X$ будем называть отображением *типа Морса—Смейла*, если у него существует конечное число неподвижных точек $\tau_1,\dots,\tau_p$, а траектория каждой точки x стремится при $n\to+\infty$ к одной из неподвижных точек $\omega^+(x)$ и стремится к неподвижной точке $\omega^-(x)$ при $n\to-\infty$. В классическом определении диффеоморфизма Морса—Смейла есть дополнительные условия (см. [20]), но в рассматриваемых вопросах существенны только указанные свойства. Ниже предполагается, что α является отображением типа Морса—Смейла. Используются множества $E^{\pm}$, заданные (3.10) и (3.11), и следующие понятия и обозначения.

Обозначим через $d(x)$ количество (с учетом кратности) собственных значений матрицы $A(x)$, модули которых меньше 1. Если матрица $A(x)$ гиперболическая, то слой E_x разлагается в прямую сумму инвариантных подпространств $E_x=V_x^+\oplus V_x^-$, где $\dim V_x^+=d(x)$, $\dim V_x^-=m-d(x)$.

Пусть точка τ неподвижная. Множество $\mathrm{Bas}^+(\tau)=\{x\in X:\alpha^n(x)\to\tau \text{ при } n\to+\infty\}$ называется *бассейном*, или *областью притяжения* точки τ при действии α.

Соответственно, множество $\mathrm{Bas}^-(\tau)=\{x\in X:\alpha^{-n}(x)\to\tau \text{ при } n\to+\infty\}$ называется бассейном точки τ при действии α^{-1}.

Определение отображения типа Морса—Смейла равносильно тому, что

$$X=\coprod_j \mathrm{Bas}^+(\tau_j)=\coprod_j \mathrm{Bas}^-(\tau_j).$$

Неподвижная точка τ называется *притягивающей,* если существует окрестность $U(\tau)\subset\mathrm{Bas}^+(\tau)$. Неподвижная точка τ называется *отталкивающей,* если существует окрестность $U(\tau)\subset\mathrm{Bas}^-(\tau)$. Неподвижная точка τ называется *притягивающе-отталкивающей,* если существует окрестность $U(\tau)\subset[\mathrm{Bas}^+(\tau)\cap\mathrm{Bas}^-(\tau)]$. Неподвижная точка τ называется *седловой,* если для любой окрестности $U(\tau)$ множество $U(\tau)\setminus[\mathrm{Bas}^+(\tau)\cap\mathrm{Bas}^-(\tau)]\neq\varnothing$. Иначе говоря, в любой окрестности седловой точки существуют траектории $\alpha^n(x)$, которые покидают эту окрестность при $n\to+\infty$ и при $n\to-\infty$.

Исследование начнем со доказательства леммы, описывающей свойства линейного расширения β в окрестности неподвижной точки.

Лемма 4.1. *Пусть α есть отображение типа Морса—Смейла, точка τ неподвижная и матрица $A(\tau)$ гиперболическая. Тогда в достаточно малой окрестности U точки τ существует* *непрерывная проекторнозначная функция $p(x)$, задающая над U разложение $E = V^+ \oplus V^-$ в прямую сумму подрасслоений, при котором V^+ — локально устойчивое вперед подрасслоение размерности $d(\tau)$, а V^- — локально устойчивое назад подрасслоение размерности $m - d(\tau)$.*

При этом над пересечением $\mathrm{Bas}^-(\tau) \cap U$ подрасслоение V^+ совпадает с E^+ и определено однозначно, оно является (глобально) устойчивым вперед и неустойчивым назад, а над пересечением $\mathrm{Bas}^+(\tau) \cap U$ является неустойчивым вперед. Аналогично, над пересечением $\mathrm{Bas}^-(\tau) \cap U$ подрасслоение V^- совпадает с E^- и определено однозначно, оно является (глобально) устойчивым назад и неустойчивым вперед, а над пересечением $\mathrm{Bas}^+(\tau) \cap U$ является неустойчивым назад.

Доказательство. Построим одно из требуемых разложений. Возьмем $\gamma_1 < 1$ такое, что матрица $A(\tau)$ не имеет собственных значений, удовлетворяющих условию $\gamma_1 < |\lambda| < 1/\gamma_1$, и пусть $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma < 1$. В силу непрерывности $A(x)$ существует окрестность точки τ, в которой у всех матриц $A(x)$ нет собственных значений, лежащих в кольце $\{\lambda : \gamma_2 < |\lambda| < 1/\gamma_2\}$. Тогда проекторы Рисса

$$p(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1} [A(x) - \lambda I]^{-1} d\lambda$$

задают разложение $E_x = V_x^+ \oplus V_x^-$ в прямую сумму векторных подрасслоений над этой окрестностью. В окрестности можно выбрать базисы $e_k(x)$ в слоях E_x, непрерывно зависящие от x, в которых матрицы $A(x)$ приводятся в блочно-диагональному виду $\widetilde{A}(x) = S(x)A(x)S^{-1}(x) = \mathrm{Diag}\{A^+(x), A^-(x)\}$, где модули собственных значений матриц $A^+(x)$ меньше γ_2, а модули собственных значений матриц $A^-(x)$ больше $1/\gamma_2$.

Для получения требуемых оценок воспользуемся следующим известным приемом.

На слое E_τ существует скалярное произведение, относительно которого подпространства V_τ^+ и V_τ^- ортогональны, и при этом в соответствующей норме $\|A^+(\tau)\| < \gamma < 1$ и $\|(A^-(\tau))^{-1}\| < \gamma$. Зададим это же скалярное произведение на остальных слоях E_x. Тогда в достаточно малой окрестности имеем $\|A^+(x)\| \leqslant \gamma$. Поэтому, если $\xi \in V^+x$ и точки $x, \alpha^{-1}(x), \alpha^{-n+1}(x)$ принадлежат такой окрестности, то $\|\beta^n(x,\xi)\| = \|A^+(\alpha^n(x))A^+(\alpha^{n-1}(x)) \cdots (x)A^+(x)\xi\| \leqslant \gamma^n \|\xi\|$.

Аналогично, если $\xi \in V_x^-$ и точки $x, \alpha(x), \alpha^n(x)$ принадлежат окрестности, то $\|\beta^{-n}(x,\xi)\| = \|A^-(\alpha^n(x))A^-(\alpha^{n-1}(x)) \cdots (x)A(x)\xi\| \leqslant \gamma^n \|\xi\|$.

После перехода к исходной норме, в силу эквивалентности нормы с исходной, получаем требуемые оценки с некоторыми константами C и тем же γ.

Если $\alpha^{-n}(x) \to \tau$ при $n \to +\infty$ и $\xi \in V_x^+$, то $\|\beta^n(x,\xi)\| \to 0$ и, значит, $V^+x \subset E_x^+$. При этом, если $\xi \notin V_x^+$, то $\|\beta^n(x,\xi)\| \to \infty$. Отсюда получаем равенство $V_x^+ = E_x^+$ для $x \in \mathrm{Bas}^-(\tau)$.

Аналогично, для $x \in \mathrm{Bas}^+(\tau)$ получаем, что $V_x^- = E_x^-$. □

Заметим, что для x, не принадлежащих $\mathrm{Bas}^\pm(\tau)$, только конечное число точек траектории принадлежит окрестности U, поэтому очевидно выполнение требуемых неравенств с некоторыми константами C, зависящими от количества точек траектории, принадлежащих окрестности. В утверждении леммы существенно то, что соответствующие неравенства с одной и той же константой C выполнены для всех траекторий, независимо от количества точек траектории, принадлежащих окрестности.

Перейдем к получению условий правосторонней обратимости оператора $B - I$. Согласно теореме 3.3 таким условием является правосторонняя обратимость всех операторов $B_\tau - I$ в пространствах двусторонних последовательностей $l_2(\mathbb{Z}; \mathbb{C}^m)$, возникающих при применении траекторного подхода, т. е. заданных (3.14). В случае отображений типа Морса—Смейла коэффициенты в операторе дискретного взвешенного сдвига B_τ имеют пределы $A(\alpha^k(\tau)) \to A(\omega^\pm(x))$ при $k \to \pm\infty$, т. е. это операторы вида

$$(Bu)(k) := A(k)u(k+1), \tag{4.1}$$

у которых коэффициенты имеют пределы $\lim\limits_{k\to\pm\infty} A(k) = A(\pm\infty)$. Эффективность применения траекторного подхода здесь определяется тем, что такие операторы устроены достаточно просто и могут быть детально исследованы.

Заметим, что пространство $\mathbb{Z}$ не является компактным, но операторы (4.1) можно считать частным случаем операторов взвешенного сдвига на компактных пространства, если вместо $\mathbb{Z}$ рассматривать расширенное пространство $\widetilde{Z} = \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$, которое является компактным. Тогда условие существования пределов есть условие непрерывности коэффициента A как функции на $\widetilde{Z}$, и соответствующее отображение действует по формуле

$$\alpha(x) = \begin{cases} x+1, & x \in \mathbb{Z}; \\ \pm\infty, & x = \pm\infty. \end{cases} \tag{4.2}$$

В частности, применима лемма 4.1.

Лемма 4.2. *Оператор $B - I$, где B — дискретный оператор взвешенного сдвига вида* (4.1)*, обратим справа в пространстве $l_2(\mathbb{Z};\mathbb{C}^m)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие трансверсальности*

$$E_x^+ + E_x^- = E_x \ \ \text{для всех } x \in \widetilde{Z}. \tag{4.3}$$

При этом оператор $B - I$ обратим тогда и только тогда, когда также выполнено условие $E_x^+ \cap E_x^- = \{0\}$ для всех x.

Доказательство. Многие свойства операторов вида (4.1) хорошо известны. Прежде всего, ядро оператора $B - I$ и ядро сопряженного оператора $B^* - I$ всегда конечномерны, кроме того, образ такого оператора замкнут (т. е. оператор является фредгольмовым) тогда и только тогда, когда матрицы $A(\pm\infty)$ не имеют собственных значений с модулем 1, т. е. являются гиперболическими. Это условие эквивалентно выполнению условия трансверсальности (4.3) при $x = \pm\infty$. Известна также формула индекса $\operatorname{ind}(B-I) = \dim\ker(B-I) - \dim\ker(B^*-I) = d(+\infty) - d(\infty)$, $d(\pm\infty)$ есть число собственных значений (с учетом алгебраической кратности) матрицы $A(\tau_k)$, модули которых меньше 1.

В силу условия гиперболичности применима лемма 4.1: из нее следует, что E^+ есть векториальное подмножество, инвариантное относительно действия β, которое над $\mathbb{Z}\cup\{-\infty\}$ является векторным подрасслоением с размерностью слоя $d(-\infty)$ и в точке $+\infty$ имеет размерность слоя $d(+\infty)$.

Аналогично, E^- есть векториальное подмножество, инвариантное относительно действия β^{-1}, которое над $\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}$ является векторным подрасслоением с размерностью слоя $m - d(+\infty)$ и в точке $-\infty$ имеет размерность слоя $m - d(-\infty)$.

Кроме того, из леммы 4.1 получаем, что если $(x,\xi) \in E_x^+$, то при $n \to +\infty$ последовательность векторов $\beta^n(x,\xi)$ стремится к нулю с экспоненциальной скоростью, а если $(x,\xi) \in E_x^-$, то последовательность векторов $\beta^n(x,\xi)$ стремится к нулю с экспоненциальной скоростью при $n \to -\infty$. Решение $u(k)$ однородного уравнения $A(k)u(k+1) - u(k) = 0$ в пространстве всех последовательностей однозначно определяется по начальному условию $u(0)$, а из экспоненциального убывания получаем, что это решение принадлежит пространству $l_2(\mathbb{Z};\mathbb{C}^m)$ тогда и только тогда, когда $u(0) \in E_0^+ \cap E_0^-$. Поэтому $\dim\ker(B-I) = \dim(E_0^+ \cap E_0^-)$.

Далее заметим, что фредгольмов оператор обратим справа только тогда, когда $\dim\ker(B-I) = \operatorname{ind}(B-I)$. Поскольку фредгольмов оператор может быть обратим справа только тогда, когда его индекс неотрицательный, неравенство $d(-\infty) \geqslant d(-\infty)$ есть еще одно необходимое условие правосторонней обратимости. Поэтому $\dim E_0^+ + \dim E_0^- = d(-\infty) + (m - d(+\infty)) \geqslant m$. Для алгебраической суммы подпространств выполнено равенство $\dim(E_1+E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$. Поэтому равенство $\dim\ker(B-I) = \operatorname{ind}(B-I)$ равносильно тому, что $\dim(E_0^+ + E_0^-) = m$, т. е. $E_0^+ + E_0^- = E_0$. Кроме того, в силу инвариантности E^+ и E^- относительно действия β условие трансверсальности выполнено при всех x. Таким образом, условие трансверсальности (4.3) необходимо и достаточно для правосторонней обратимости оператора $B - I$. □

В скалярном случае свойства дискретного оператора $B - I$ описываются в явном виде.

Следствие 4.1. *Пусть $Bu(k) = a(k)u(k+1)$ есть оператор в пространстве скалярных последовательностей такой, что существуют пределы $a(\pm\infty)$. Тогда условие $|a(\pm\infty)| \neq 1$ необходимо и достаточно для односторонней обратимости оператора $B - I$. При этом*:

1) *если $|a(\pm\infty)| > 1$ или $|a(\pm\infty)| < 1$, то оператор $B - I$ обратим*;
2) *если $|a(-\infty)| < 1 < |a(+\infty)|$, то оператор $B - I$ обратим справа*;
3) *если $|a(+\infty)| < 1 < |a(-\infty)|$, то оператор $B - I$ обратим слева.*

Теперь можно сформулировать основной результат об условиях правосторонней обратимости.

Теорема 4.1. *Пусть $B = AT_\alpha$ есть оператор взвешенного сдвига вида, порожденный отображением типа Морса—Смейла, и пусть $E^\pm$ — подмножества в $E = X \times \mathbb{C}^m$, заданные формулами* (3.10) *и* (3.11). *Оператор $B - I$ обратим справа тогда и только тогда, когда выполнено условие трансверсальности*

$$E_x^+ + E_x^- = E_x \quad \text{для всех } x \in X. \tag{4.4}$$

При выполнении этого условия операторы $B - \lambda I$ обратимы справа при всех λ из некоторого кольца, содержащего единичную окружность.

Доказательство. Согласно теореме (3.3) оператор $B - I$ обратим справа тогда и только тогда, когда обратимы справа все операторы $B_\tau - I$, $\tau \in X$. Согласно лемме 4.2, это эквивалентно трансверсальности подпространств $E_x^\pm$ в точках каждой траектории и, следовательно, для всех $x \in X$. □

Обратим внимание на то, что размерность пересечения $E_x^+ \cap E_x^-$ может быть разной для x из разных траекторий, в частности, некоторые из операторов $B_\tau - I$ могут быть обратимыми и тогда $E_x^+ \cap E_x^- = 0$ на всей траектории точки τ.

Второй основной результат касается построения правосторонних резольвент.

Теорема 4.2. *Если линейное расширение β порождено отображением типа Морса—Смейла и векториальные подмножества E^+ и E^- трансверсальны над X, то для β существует градуированная дихотомия, с помощью которой может быть построена правосторонняя резольвента.*

Эта общая теорема была получена в итоге серии работ, в которых постепенно усложнялся вид рассматриваемых операторов и, соответственно, усложнялись используемые конструкции.

4.2. Операторы в пространствах скалярных функций. В случае операторов в пространствах скалярных функций условия правосторонней обратимости дискретных операторов, описанные в следствии 4.1, имеют явный вид, что позволяет записать условие правосторонней обратимости $B - I$ также в явном виде. Однако существуют отображения типа Морса—Смейла, для которых эти условия не могут быть выполненными ни при каком коэффициенте a. Поэтому один из вопросов заключается в получении условий на динамику отображения, при которых возможна правосторонняя обратимость.

Динамика отображения типа Морса—Смейла описывается *графом Смейла* $GS(\alpha)$. Это ориентированный граф, множеством вершин которого является множество $S = \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$ всех неподвижных точек; ориентированное ребро (τ_k, τ_l) включается в граф, если существует точка x, для которой $\omega^-(x) = \tau_k$, $\omega^+(x) = \tau_l$. С использованием понятия бассейна это свойство равносильно тому, что $\mathrm{Bas}^+(\tau_l) \cap \mathrm{Bas}^-(\tau_k) \neq \varnothing$.

Разбиение множества вершин $S = S^- \coprod S^+$ будем называть *ориентированным вправо*, если в графе нет ребер, соединяющее точку $\tau_k \in S^-$ с точкой $\tau_l \in S^+$ и ориентированных влево. Заметим, что если граф содержит цикл, то при ориентированном разбиении все вершины цикла принадлежат либо S^+, либо S^-. В частности, если граф $GS(\alpha)$ является циклом, то такого разбиения не существует.

В скалярном случае коэффициент $A(x)$ является скалярной функцией, будем обозначать его через $a(x)$. По непрерывной функция a и числу λ построим подмножества вершин графа

$$S^-(a, \lambda) = \{\tau_k : |a(\tau_k)| < |\lambda|\}, \qquad S^+(a, \lambda) = \{\tau_k : |a(\tau_k)| > |\lambda|\}.$$

Теорема 4.3. *Пусть α есть отображение типа Морса—Смейла, $a(x) \neq 0$ для всех x и $B = aT_\alpha$ — соответствующий оператор взвешенного сдвига в пространстве скалярных функций. Оператор $B - \lambda I$ обратим справа тогда и только тогда, когда множества $S^-(a, \lambda)$ и $S^+(a, \lambda)$ задают разбиение графа $GS(\alpha)$, ориентированное вправо.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что множества $S^-(a, \lambda)$ и $S^+(a, \lambda)$ задают разбиение графа $GS(\alpha)$ тогда и только тогда, когда выполнено необходимое условие правосторонней обратимости $|\lambda| \neq |a(\tau_k)|$. Согласно следствию 4.1 получаем, что если обе точки $\omega^\pm(\tau)$ принадлежат S^- или обе точки принадлежат S^+, то локальный представитель $B_\tau - \lambda$ обратим. А если $\omega^-(\tau) \in S^-$, $\omega^+(\tau) \in S^+$, то оператор $B_\tau - \lambda$ обратим справа. При этом условие того, что множества $S^-(a, \lambda)$ и

$S^+(a,\lambda)$ задают разбиение графа $GS(\alpha)$, ориентированное вправо, есть запись условия, что среди операторов $B_\tau-\lambda$ нет операторов, обратимых слева, но необратимых справа. Таким образом, условие теоремы есть условие правосторонней обратимости всех локальных представителей $B_\tau-\lambda$. □

Из теоремы 4.3 следует, что необходимое и достаточное условие на динамику отображения, при которых оператор $B-\lambda I$ может быть односторонне обратимым, заключается в существовании ориентированного разбиения графа Смейла.

Эта теорема позволяет описать свойства операторов $B-\lambda I$ для разных точек спектра. Согласно теореме 3.2 спектр оператора взвешенного сдвига $B=aT_\alpha$, порожденного отображением типа Морса—Смейла в пространстве скалярных функций $L_2(X,\mu)$, есть кольцо $\sigma(B)=\{\lambda : r(B)\leqslant |\lambda|\leqslant R(B)\}$, где $R(B)=\max\limits_k\{|a(\tau_k)|\}$, $r(B)=\min\limits_k\{|a(\tau_k)|\}$.

Из теоремы 4.3 следует, что если $|\lambda|=|a(\tau_k)|$, то оператор $B-\lambda I$ не является односторонне обратимым. Дополнение в спектре к множеству окружностей $S_k=\{[\lambda : |\lambda|=|a(\tau_k)|\}$ есть объединение открытых колец K_j, и исследовать надо свойства операторов для λ из этих колец. При этом множества $S^\pm(a,\lambda)$ одинаковы для всех λ из фиксированного кольца K_j. Следовательно, операторы $B-\lambda I$ одновременно обратимы или не обратимы справа для всех λ из K_j.

Перейдем к построению правосторонних резольвент.

Пусть B есть дискретный оператор взвешенного сдвига и $|a(-\infty)|<1<|a(+\infty)|$. При $|a(-\infty)|<\gamma<1<1/\gamma<|a(+\infty)|$ множество $E^+(C,\gamma)=\{(n,\xi)\in E^+ : \|\beta^k(n,\xi)\|\leqslant C\gamma^k\|(n,\xi)\|, k\geqslant 0\}$ имеет простую структуру. А именно, существует такое N^+, что слои $E^+(C,\gamma)_n=E_n$ при $n\leqslant N^+$ и $E^+((C,\gamma))_n=\{0\}$ при $n=N^++1$. Соответственно, множество $E^-(C,\gamma)=\{(n,\xi)\in E^- : \|\beta^{-k}(n,\xi)\|\leqslant C\gamma^k\|(n,\xi)\|, k\geqslant 0\}$ устроено аналогично: существует такое N^-, что $E^+((C,\gamma))_n=E_n$ при $n\geqslant N^-$ и $E^+(C,\gamma)_n=\{0\}$ при $n=N^--1$.

При достаточно большом C получаем, что $N^-\leqslant N^+$ и, более того, для любого N существует C, при котором $N^-\leqslant N\leqslant N^+$. Тогда, если взять

$$W_n^+=\begin{cases}E_n, & n\leqslant N,\\ \{0\}, & n>N,\end{cases}\qquad W_n^-=\begin{cases}\{0\}, & n\leqslant N,\\ E_n, & n>N,\end{cases}$$

получаем градуированную дихотомию для β.

Это позволяет построить правосторонние резольвенты для B с помощью операторов P_N умножения на последовательности

$$p_N(k)=\begin{cases}1, & k\leqslant N,\\ 0, & k>N.\end{cases}\tag{4.5}$$

При таком P_N ряд (2.5) сходится и его сумма $R_N^+(\lambda)$ является правосторонней резольвентой для B, а формула $u=R_N^+f$ задает решение уравнения $(B-\lambda I)u=f$, удовлетворяющее условию $u(N)=0$.

Построение правых обратных для оператора $B-\lambda I$ на X связано с построением правых обратных для дискретных операторов $B_\tau-\lambda I$, у которых нормы ограничены в совокупности. Это другая формулировка отмеченного в пункте 3.5 условия, что постоянные C и γ, входящие в определение градуированной гиперболичности для линейных расширений β_τ, должны быть общими для всех τ.

При заданном λ для резольвент $R_N^+(\lambda)$ дискретного оператора получаем, что $\|R_N^+\|\to\infty$ при $N\to\pm\infty$, и при каком-то значении N получаем правый обратный указанного вида с наименьшей нормой. Приведенная ниже конструкция фактически содержит выбор для каждого τ такого значения $N(\tau)$, что нормы правых обратных вида $R_{N(\tau)}^+$ ограничены в совокупности. Это приводит к построению требуемой правосторонней резольвенты, у которой соответствующий оператор P является проектором.

Заметим, что для дискретного оператора взвешенного сдвига можно построить резольвенту с наименьшей нормой, но такая резольвента имеет более сложный вид, и соответствующий оператор P не является проектором. Действительно, как отмечено в лемме 2.3, решение уравнения $(B-\lambda I)u=f$, имеющее наименьшую норму, задается как проекция произвольного решения u на ортогональное дополнение к ядру оператора.

Ядро оператора $B-\lambda$ одномерно и порождено последовательностью

$$\omega_\lambda = \frac{1}{\|\widetilde{\omega}\|}\widetilde{\omega}, \qquad \text{где } \widetilde{\omega}(k) = \begin{cases} \lambda^k \Big[\prod\limits_{j=0}^{k-1} a(j)\Big]^{-1}, & k \geqslant 0, \\ \lambda^{-k} \prod\limits_{j=k}^{-1} a(j), & k < 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Поэтому проекция на ядро задается формулой $Qu =< u, \omega_\lambda > \omega_\lambda$, а правосторонняя резольвента с наименьшей нормой задается выражением $R^+(\lambda)f = R_0^+ f - < R_0^+ f,\ \omega_\lambda > \omega_\lambda$.

Лемма 4.3. *Если разбиение множества вершин графа Смейла $S = S^- \coprod S^+$ ориентированно вправо, то существует открытое множество X^+, содержащее S^+ и инвариантное относительно действия α.*

Теорема 4.4. *Пусть $K = \{\lambda : r^- < |\lambda| < r^+\}$ есть одно из указанных выше открытых колец K_j, лежащих в спектре оператора $B = aT_\alpha$, такое, что соответствующее ему разбиение $S = S^- \coprod S^+$ ориентировано вправо, и пусть X^+ есть открытая окрестность множества S^+, инвариантная относительно действия α.*

Если P есть оператор умножения на функцию $p(x) = \begin{cases} 1, & x \in X^+ \\ 0, & x \in X^- = X \setminus X^+ \end{cases}$, то ряд (2.5) *сходится и его сумма является правосторонней резольвентой для оператора B.*

Пример 4.1. Пусть $X = [0,1]\times[0,1]$ есть квадрат на плоскости и отображение задано формулой $\alpha : (x_1, x_2) \to (\alpha_0(x_1), \alpha_0(x_2))$, где $\alpha_0 : [0,1] \to [0,1]$ такое дифференцируемое отображение отрезка, что $\alpha_0(0) = 0, \alpha_0(1) = 1$ и $\alpha_0(x) > x$ для $0 < x < 1$. Тогда α есть отображение типа Морса—Смейла, неподвижными точками у которого являются вершины квадрата $\{\tau_1 = (0,0),\ \tau_2 = (1,0),\ \tau_3 = (1,1),\ \tau_4 = (0,1)$. При этом точка τ_1 является отталкивающей, точка τ_3 притягивающей, а точки τ_2 и τ_4 — седловые. Граф содержит пять ребер и у него существует четыре ориентированных вправо разбиения. В качестве соответствующих множеств X^+ можно взять, в зависимости от вида S^+, множества $X^+ = (1/2,1] \times (1/2,1]$ при $S^+ = \{\tau_3\}$; $X^+ = (1/2,1] \times [0,1]$ при $S^+ = \{\tau_2, \tau_3\}$; $X^+ = [0,1] \times (1/2,1]$ при $S^+ = \{\tau_3, \tau_4\}$; $X^+ = X \setminus [0,1/2] \times [0,1/2]$ при $S^+ = \{\tau_2, \tau_3, \tau_4\}$.

В этом примере спектр оператора B разбивается на три кольца, в которых свойства $B - \lambda I$ зависят от того, как упорядочены в порядке возрастания числа $|a(\tau_k)|$, здесь возможны $4! = 24$ случая. Таким образом, даже в этом простом примере для разных коэффициентов a возможно достаточно большое число вариантов.

Результаты этого раздела опубликованы в [4, 24, 25].

4.3. Операторы, порожденные отображениями с простейшей динамикой. В пространствах вектор-функций сначала рассмотрим операторы взвешенного сдвига для одного подкласса отображений типа Морса — Смейла.

Будем говорить, что отображение $\alpha : X \to X$ имеет *простейшую динамику*, если у него существуют только две неподвижные точки τ_1 и τ_2, а траектории остальных точек стремятся к τ_2 при $n \to +\infty$ и стремятся к τ_1 при $n \to -\infty$.

Например, отображение (4.2), соответствующее всем локальным представителям B_τ, имеет простейшую динамику, и, следовательно, еще одним достоинством метода локализации является то, что он сводит исследование операторов, порожденных разными отображениями типа Морса—Смейла, к рассмотрению операторов, порожденных одним отображением с простейшей динамикой.

Первые результаты, связанные с правосторонней обратимостью, относятся к операторам, порожденным непрерывными обратимыми отображениями отрезка $[0,1]$ в себя, такими, что $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = 1$ и при этом $\alpha(x) > x$ для $0 < x < 1$. Это модельный пример отображения типа Морса—Смейла с простейшей динамикой. Такие операторы в пространствах скалярных функций были рассмотрены ранее в [16, 28].

Операторы $B = AT_\alpha$, порожденные таким же отображением отрезка в пространствах вектор-функций $L_p([0,1], \mathbb{C}^m)$, были рассмотрены в [2], причем исследовался более общий вопрос о замкнутости образа оператора $B - I$, что равносильно нормальной разрешимости функциональных уравнений вида (1.1). Приведем основной результаты этой работы, которая послужила базой для дальнейших исследований правосторонней обратимости. Доказательства ряда утверждений в [2] были получены с помощью прямых вычислений, но в дальнейшем было обнаружено, что часть из них является следствием общих теорем.

Напомним, что здесь мы рассматриваем векторное расслоение $E = [0,1] \times \mathbb{C}^m$, линейное расширение β, заданное формулой (3.5), ассоциированное с оператором $B = AT_\alpha$, и векториальные подмножества $E^\pm$ в E, заданные формулами (3.10) и (3.11). В рассматриваемом случае $E^\pm$ являются векторными подрасслоениями над $(0,1)$, инвариантными относительно действия β.

Подрасслоения E^+ и E^- будем называть *когерентными*, если $d(x) := \dim(E_x^+ \cap E_x^-) = \mathrm{const}$ для $x \in (0,1)$. Поскольку $d(\alpha(x)) = d(x)$, выполнения этого условия достаточно требовать на каком-либо промежутке вида $[x_0, \alpha(x_0))$. Для трансверсальных подрасслоений условие когерентности выполнено автоматически.

Основным результатом работы [2] является следующее утверждение.

Теорема 4.5. *Пусть $B = AT_\alpha$ — оператор взвешенного сдвига, порожденный модельным отображением отрезка с простейшей динамикой. Образ оператора $B - I$ замкнут тогда и только тогда, когда матрицы $A(0)$ и $A(1)$ гиперболичны и подрасслоения E^+ и E^- когерентны.*

Построение градуированной дихотомии в случае отображения с простейшей динамикой. Пусть $B = AT_\alpha$ — оператор взвешенного сдвига, порожденный отображением с простейшей динамикой, и пусть выполнено условие трансверсальности. Требуется построить разложение $E = W^+ \oplus W^-$, где векториальное подмножество W^+ устойчиво вперед, а W^- устойчиво назад.

В рассматриваемом случае отображения с простейшей динамикой $\alpha^{-n}(x) \to \tau_1$ при $n \to +\infty$ для всех $x \neq \tau_2$. Поэтому, согласно лемме 4.1, над замкнутой окрестностью $U(\tau_1)$ существует разложение $E = E^+ \oplus V^-$, при котором над этой окрестностью E^+ устойчиво вперед, а V^- неустойчиво вперед. При этом для любого $N > 0$ подрасслоение E^+ устойчиво вперед (с другой постоянной C) над образом $X_N^+ = \bigcup\limits_{j=0}^{N} \alpha^j(U(\tau_1))$ для любого $N > 0$. Здесь над X_N^+ неравенство выполняется с другой постоянной C_N, эти постоянные возрастают с ростом N, и E^+ не является устойчивым вперед над всем бассейном $\mathrm{Bas}^-(\tau_1) = X \setminus \tau_2$.

Аналогично, над окрестностью $U(\tau_2)$ и над множеством $X_N^- = \bigcup\limits_{j=0}^{N} \alpha^{-j} jU(\tau_))$ подрасслоение E^- устойчиво назад, а V^- неустойчиво назад.

Из неустойчивости вперед множества V^- не следует, что оно устойчиво назад, так как неустойчивость вперед означает выполнение оценок только для тех n, при которых точки $\alpha^n(x)$ принадлежат окрестности $U(\tau_1)$, а для устойчивости назад нужно выполнение таких же оценок для всех $n > 0$. При больших n точки $\alpha^n(x)$ принадлежат окрестности $U(\tau_2)$, а над этой окрестностью требуемые оценки, согласно той же лемме, выполнены только для векторов из E^-. Поэтому V_x^- над $U(\tau_1)$ нужно выбрать так, чтобы образы $\beta^{-n}(V_x^-)$ при больших n принадлежали E^-. В силу инвариантности E^- это выполнено, если $V_x^- \subset E_x^-$.

Так как очевидно, что $E_x^+ \cap E_x^- \subset E_x^+$, в качестве W^- над X_N^+ можно взять любое подпространство в E_x^-, дополнительное к $E_x^+ \cap E_x^-$, причем такие дополнения можно выбрать даже непрерывно зависящими от x.

Аналогично, если W^+ есть любое подрасслоение над множеством X_N^- в E_x^+, дополнительное к $E_x^+ \cap E_x^-$, получаем разложение $E = W^+ \oplus E^-$ над X_N^-, при котором W_x^+ устойчиво вперед, а E^- устойчиво назад.

Далее воспользуемся следующим свойством отображений типа Морса—Смейла.

Лемма 4.4. *Если $\alpha : X \to X$ есть отображение типа Морса—Смейла и замкнутое множество $X_0 \subset X$ не содержит неподвижных точек, то существует такое число N, что для любой траектории количество точек, лежащих в X_0, не превосходит N.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда для любого N существует точка x_N такая, что количество точек ее траектории, лежащих в X_0, больше N. Так как X_0 компактно, у множества таких точек существует предельная точка x_∞, и количество точек ее траектории, лежащих в X_0, бесконечно. Поэтому у множества таких точек траектории существует предельная точка $x^* \in X_0$.

Но, по определению отображения типа Морса—Смейла, предельная точка любой траектории есть неподвижная точка и $x^* \notin X_0$. $\square$

Пусть $X_0 = X \setminus [U(\tau_1) \cup U(\tau_2)]$ и N есть число, существование которого утверждается в лемме 4.4. Тогда $X_N^+ \cup X_N^- = X$, и если взять, например, множества $X_1 = X_N^+$, $X_2 = X \setminus X_N^+$, то над ними получаем гиперболические разложения.

Пример 4.2. Для конкретности уточним детали построения для модельного примера отображения отрезка. В этом примере множества вида X_N^+ суть отрезки вида $[0, \alpha(x_0)]$, где $x_0 < 1$. Подпространства W_x^- мы задавали как подпространства в E_x^-, дополнительные к пересечению $E_x^+ \cap E_x^-$. Эти подпространства можно выбрать при $x \in [\alpha_{-1}(x_0, x_0]$ так, что они непрерывно зависят от x, и выполнено условие $\beta(W^-_{\alpha^{-1}(x_0)}) = W^-_{x_0}$. Для остальных $x \in (0, \alpha^{-1}(x_0)]$ подпространства W_x^- можно однозначно задать с помощью условия инвариантности $W^-_{\alpha(x)} = \beta(W_x^-)$.

При такой конструкции получаем, что проекторнозначная функция $p(x)$, задающая построенное разложение, непрерывно зависит от x на $(0, x_0]$, при этом ее предел при $x \to 0$ есть $p(0)$, следовательно, она непрерывна на $[0, \alpha(x_0)]$.

Аналогично, проекторнозначная функция $p(x)$ над $[x_0, 1]$, задающая разложение $E_x = W_x^+ \oplus E_x^-$, может быть построена непрерывной.

Проверим, что построенное таким образом подрасслоение W_x^- над $[0, x_0]$ является устойчивым назад. Пусть $x \in (0, x_0]$ и $\nu(x) = \max\{n : \alpha^n(x) \in (0, \alpha(x_0)]\}$. Если $y \leqslant \alpha(x_0)$ и $(y, \eta) \in W_y^-$, то, в силу неустойчивости вперед, выполнено неравенство $\beta^n(y, \eta) \geqslant C\gamma^{-n}\|(y, \eta)\|$. Если положить $(x, \xi) = \beta^n(y, \eta)$, то при $n \leqslant \nu(x)$ получаем требуемое неравенство $\beta^{-n}(x, \xi) \leqslant 1/C\gamma^n\|(x, \xi)\|$. По построению $(x, \xi) \in W_x^- \subset E_x^-$. При $n > \nu(x)$ в силу инвариантности E^- относительно β^{-1} имеем $\beta^{-n}(x, \xi) \in E^-_{\alpha^n(x)}$, и в силу устойчивости назад E^- при $x \geqslant x_0$ получаем требуемое $\beta^{-n}(x, \xi) \leqslant 1/C\gamma^{\nu(x)}\|\beta^{-\nu(x)}(x, \xi)\| \leqslant 1/C\gamma^{\nu(x)}C_1\gamma^{n-\nu(x)}\|(x, \xi)\| = C_2\gamma^n\|(x, \xi)\|$.

Аналогично проверяется устойчивость вперед подрасслоения W_x^+ над $[x_0, 1]$.

При описанной конструкции получаем гиперболическое разложение над $[x_0, 1]$ и гиперболическое разложение над $[0, x_0)$. Это качественно разные разложения, и при переходе через точку x_0 происходит переключение режима — переход от одного разложения к другому, при котором ранги матриц $p(x)$ изменяются.

Пример 4.3. Рассмотрим оператор на отрезке $[0, 2]$, порожденный несколько более сложным отображением, у которого точки 0, 1 и 2 неподвижные, и которое сдвигает остальные точки вправо. Здесь точка 1 *притягивающе-отталкивающая*. При выполнении условия трансверсальности проекторнозначную функцию $p(x)$, задающую локально гиперболическое разложение, можно построить на каждом из отрезков $[0, 1]$ и $[1, 2]$ по описанному выше правилу. При этом из конструкции видно, что построенная матрица-функция $p(x)$ непрерывна в неподвижной точке 1, а уменьшение размерности слоя W_x^+ происходит в некоторой точке $x_0 \in (0, 1)$ и в точке $x_1 \in (1, 2)$.

В этом примере имеем два переключения режима, причем эти переключения происходят вне окрестностей неподвижных точек, так как в достаточно малой окрестности неподвижной точки размерность слоев W_x^+ диктуются разложением коэффициента $A(\tau)$ в этой точке.

Результаты этого раздела опубликованы в [5–7].

4.4. Конструкция градуированной дихотомии в случае модельного отображения квадрата. С помощью леммы 4.4 построение градуированной дихотомии можно свести к построению разложения в окрестности $U(\tau_k)$ каждой неподвижной точки. При этом в окрестностях притягивающих и отталкивающих точек такие разложения строятся как в случае простейшей динамики, а основную сложность представляет построение разложения в окрестности седловой точки.

Пусть τ есть седловая точка и $E_x = V_x^+ \oplus V_x^-$ есть разложение в ее окрестности, построенное в лемме 4.1. Это не есть требуемое разложение, так как такое разложение локально устойчиво, а требуется (глобальная) устойчивость. В частности, для устойчивости вперед W^+ нужно выполнение условия $W_x^+ \subset E_x^+$, что не выполнено для всех V_x^+, для устойчивости назад W^- нужно выполнение условия $W_x^- \subset E_x^-$. Требуемое разложение получаем, если в качестве W_x^+ взять проекции подпространств V_x^+ на E_x^+, а в качестве W_x^- взять проекции подпространств V_x^- на E_x^-. При этом проекции могут не быть ортогональными и имеется определенный произвол в их построении, за счет которого можно построить подпространства, удовлетворяющие дополнительным условиям, например, инвариантные. В достаточно малой окрестности точки τ расстояния $d(W_x^{\pm}, V_x^{\pm})$ малы, поэтому из того, что подпространства V_x^+ и V_x^- взаимно дополнительны, следует, что подпространства W_x^+ и W_x^- также взаимно дополнительны, причем для раствора этих подпространств имеет место оценка снизу, обеспечивающая ограниченность соответствующих проекторов $p(x)$.

Такая конструкция в общем случае довольно громоздкая, но качественные отличия от случая простейшей динамики проявляются уже при построении градуированной дихотомии в случае отображения из примера 4.1, у которого точка τ_1 отталкивающая, точка τ_3 притягивающая и точки τ_2 и τ_4 — седловые.

Опишем конструкцию для этого примера более детально. Рассмотрим достаточно малую окрестность U_1 отталкивающей точки τ_1, для конкретности возьмем квадрат вида $U_1 = \{(x_1, x_2) : 0 \leqslant x_1 \leqslant \delta_1, 0 \leqslant x_2 \leqslant \delta_1\}$ с малым δ_1. Согласно лемме 4.1, в этой окрестности E_x^+ является устойчивым вперед векторным подрасслоением размерности $d(\tau_1)$, и полагаем $W_x^+ = E_x^+$, а в качестве W^- можно взять любое подрасслоение в E_x^-, дополнительное к $E_x^+ \cap E_x^-$. Здесь можно построить подпространства $W_x^{\pm}$ по указанному правилу над разностью $U_1 \setminus \alpha^{-1}(U_1)$, а над $\alpha^{-1}(U_1)$ задать их условия инвариантности $W_x^{\pm} = \beta^n(W_{\alpha^{-n}(x)}^{\pm})$. При этом можно выбрать $W_x^{\pm}$ даже непрерывно зависящими от x. Далее можем построить требуемое разложение над образом этой окрестности $\alpha^N(U_1)$ при любом $N > 0$. Образ $\alpha^N(U_1)$ в нашем примере является квадратом вида $X_1 = \{(x_1, x_2) : 0 \leqslant x_1 \leqslant 1 - \delta, 0 \leqslant x_2 \leqslant 1 - \delta\}$, где за счет выбора достаточно большого N можем получить квадрат со сколь угодно малым δ.

Аналогично, исходя из малой окрестности притягивающей точки τ_3, строится разложение над любым квадратом вида $X_4 = \{(x_1, x_2) : \delta \leqslant x_1 \leqslant 1, \delta \leqslant x_2 \leqslant 1\}$.

Пусть X_{14} есть наименьшее замкнутое инвариантное подмножество, содержащее пересечение $X_1 \cap X_4$. Это компактное множество, на котором отображение α имеет две неподвижные точки и имеет простейшую динамику. Над этим множеством требуемое разложение получаем с помощью уже построенных. Например, при $x \in X_{14} \cap X_1$ можно взять построенные выше подпространства над X_1, а при $x \in X_{14} \setminus X_1$ можно взять построенные выше подпространства над X_2.

Множество X_{14} не содержит окрестности седловых точек, а именно, построение разложений над окрестностями седловых точек представляет основную сложность.

Рассмотрим седловую точку τ_2. Пусть $E_x = V_x^+ \oplus V_x^-$ есть разложение в окрестности точки τ_2, построенное в лемме 4.1, и $q(x)$ — проекторы, задающие это разложение. Как уже отмечалось, это не есть требуемое разложение.

Обозначим $O(t, s) = \{(x_1, x_2) : t \leqslant x_1 < \alpha(t),\ 0 \leqslant x_2 \leqslant s\}$. При $s = 0$ это полуинтервалы на оси x_1. Также рассмотрим отрезки на сторонах квадрата $\widehat{O}_1(t) = \{(x_1, 0) : t \leqslant x_1 \leqslant 1\}$, $\widehat{O}_2(s) = \{(1, x_2) :\ 0 \leqslant x_2 \leqslant s\}$. Обратим внимание на то, что

$$\dim E_x^- = \begin{cases} d(\tau_3), & x_2 > 0, \\ d(\tau_2), & x_2 = 0, \end{cases}$$

и подпространства E_x^- имеют скачок в точках $x \in O(t, 0)$, в то время как подпространства E_x^+ непрерывно зависят от x.

При $x \in \widehat{O}_1(t)$ подпространство $W_x^- = V_x^- = E_x^-$ определено однозначно. Как и выше, для таких x в качестве W_x^+ можно взять любое подрасслоение в E_x^+, дополнительное к $E_x^+ \cap E_x^-$, и его можно выбрать непрерывно зависящим от x. Поэтому для заданного $\varepsilon > 0$ при t, достаточно близких к 1, выполнено $d(W_x^+, V_x^+) \leqslant \varepsilon$ и $\Theta(V_x^+, E_x^+) \leqslant \varepsilon$. При достаточно малом s на прямоугольнике $O(t, s)$ выполнено неравенство $\Theta(V_x^+, E_x^+) \leqslant 2\varepsilon$, из которого, согласно лемме 3.3, следует, что ортогональные проекции подпространств V_x^+ на подпространства E_x^+ имеют размерность $d(\tau_2)$, эти ортогональные проекции возьмем в качестве W_x^+ на $O(t, s)$. Здесь также получаем, что $d(W_x^+, V_x^+) \leqslant 2\varepsilon$.

Над образами $\alpha^n(O(t, s))$ множества $O(t, s)$ определяем подпространства W_x^+ из условия инвариантности — полагаем $W_x^+ = \beta^n(W_{\alpha^{-n}(x)}^+)$.

Проверим, что построенное семейство W^+ подпространств W_x^+ является локально устойчивым вперед. Для $(x, \xi) \in W_x^+$ рассмотрим разложение $\xi = \eta + \nu$, где $\eta = q(x)\xi \in V_x^+$, $\nu = \xi - \eta \in V_x^-$.

Из ограниченности в совокупности проекторов $q(x)$ следует, что $\|\eta\| \leqslant C\|\xi\|$, а из условия $d(W_x^+, V_x^+) \leqslant 2\varepsilon$ следует, что $\|\xi\| \leqslant C_1\|\eta\|$.

Далее получаем оценки $\|\beta^{-n}(x,\eta)\| \geqslant \gamma^{-n}\|(x,\eta)\| \geqslant \frac{1}{C_1}\gamma^{-n}\|(x,\xi)\|$ и $\|\beta^{-n}(x,\nu)\| \leqslant \gamma^n\|(x,\nu)\| \leqslant C\gamma^n\|(x,\xi)\|$, из которых следует, что $\|\beta^{-n}(x,\xi)\| \geqslant \|\beta^{-n}(x,\eta)\| - \|\beta^{-n}(x,\nu)\| \geqslant \frac{1-CC_1\gamma^2}{C_1}\gamma^{-n}\|(x,\xi)\|$.

Из этого неравенства получаем локальную устойчивость вперед для W^+. Поскольку $(x,\xi) \in E_x^+$, получаем и глобальную устойчивость вперед. Кроме того, для тех n, при которых $\alpha^n(x) \in U(\tau_2)$, после нормировки получаем, что $\frac{1}{\|\beta^{-n}(x,\xi)\|}\|\beta^{-n}(x,\xi) - \beta^{-n}(x,\eta)\| \leqslant C_2\gamma^n$. А из этого неравенства следует, что $d(W_x^+, V_x^+) \leqslant C_2\gamma^n$ для таких x. Точки из $x \in \alpha^n(O(t,s))$ принадлежат окрестности точки $\widehat{x} \in \widehat{O}_2(s) \cap U(\tau_2)$ только при достаточно больших n. Поэтому из полученного неравенства следует, что при стремлении $x = (x_1, x_2)$ к точке $\widehat{x} \in \widehat{O}_2(s) \cap U(\tau_2)$ подпространства W_x^+ стремятся к $V_{\widehat{x}}^+$. В частности, при $x \to \tau_2$ подпространства W_x^+ стремятся к $V_{\tau_2}^+$.

Аналогично, с заменой α и β на обратные, строится устойчивое назад семейство подпространств W_x^-. При $x \to \tau_2 = (1,0)$ построенные подпространства W_x^- стремятся к $V_{\tau_2}^-$.

Таким образом, в достаточно малой окрестности точки τ_2 построенные подпространства W_x^+ близки к $V_{\tau_2}^+$, подпространства W_x^- близки к $V_{\tau_2}^-$. Поэтому из того, что подпространства V_x^+ и V_x^- взаимно дополнительны, следует, что близкие к ним подпространства W_x^+ и W_x^- также взаимно дополнительны, что и требовалось.

Проведенное построение включает в себя построение градуированной дихотомии над траекторией каждой точки $x \in X$. Сопоставим полученный результат с вопросами, отмеченными в пункте 3.5. Пусть точка x из малой окрестности точки τ_1 такова, что при $n_1(x) < n \leqslant n_2(x)$ точки траектории $\alpha^n(x)$ принадлежат построенной окрестности точки τ_2, а затем стремятся к точке τ_3. При этом для разных x разность $n_2(x) - n_1(x)$ может быть сколь угодно большой. Если проследить за видом устойчивых слоев W_x^+ вдоль траектории $\alpha^n(x)$, то получаем, что имеется две точки переключения: при $n \leqslant n_1(x)$ это подпространства размерности $d(\tau_1)$, затем при $n_1(x) < n \leqslant n_2(x)$ это подпространства меньшей размерности $d(\tau_2)$, а при $n > n_2(x)$ — еще меньшей размерности $d(\tau_3)$. Отметим, что при $n_1(x) < n \leqslant n_2(x)$ связь разложения в точках $\alpha^n(x)$ с разложением в точке τ_2 определяется тем, что матрицы $A(\alpha^n(x))$ близки в матрице $A(\tau_2)$. Существенным шагом конструкции является также выбор для каждого x точек переключения $n_1(x)$ и $n_2(x)$, обеспечивающий выполнение требуемых неравенств для всех x с одними и теми же постоянными C и γ, независимо от величины $n_2(x) - n_1(x)$.

5. Операторы, порожденные произвольными отображениями

Операторы взвешенного сдвига в пространствах скалярных функций, порожденные произвольными обратимыми отображениями, были рассмотрены в [3, 4, 23].

Как уже отмечалось, существуют отображения, для которых при любом коэффициенте a оператор $aT_\alpha - \lambda I$ не является односторонне обратимым при всех спектральных значениях λ. Поэтому в первую очередь нужно описать класс отображений, при которых возможна правосторонняя обратимость.

Замкнутое инвариантное множество $A \subset X$ называется *аттрактором* для отображения α, если существует такая окрестность U этого множества, что $\alpha(U) \subset U$ и $A = \bigcap\limits_{n\geqslant 0} \alpha^n(U)$. Отображение, у которого существует нетривиальный аттрактор, будем называть *отображением с разделимой динамикой*. У такого отображения может существовать много различных аттракторов. Среди отображений типа Морса—Смейла разделимую динамику имеют те, у которых граф Смейла допускает ориентированное разбиение, и каждое такое разбиение задает свой аттрактор.

Основными результатами [4] являются следующие теоремы.

Теорема 5.1. *Функции a, при которых оператор $aT\alpha - I$ необратим, но обратим справа, существуют тогда и только тогда, когда отображение α имеет разделимую динамику.*

Теорема 5.2. *Пусть отображение α имеет разделимую динамику. Оператор $aT\alpha - I$ обратим справа тогда и только тогда, когда существует такой аттрактор A, что для всех эргодических мер ν, носители которых принадлежат A, средние геометрические $S_\nu(a) > 1$,* *а для эргодических мер ν, носители которых принадлежат $X \setminus A$, средние геометрические $S_\nu(a) < 1$.*

При выполнении этого условия правосторонняя резольвента для оператора $aT\alpha$ строится с помощью проектора P, действующего как оператор умножения на характеристическую функцию окрестности U аттрактора A.

Для операторов в пространствах вектор-функций справедлива теорема 3.4, утверждающая, что при любом отображении существование градуированной дихотомии достаточно для построения правосторонней резольвенты. Необходимость этого условия пока доказана только для некоторых модельных примеров с динамикой, более сложной, чем у отображений типа Морса—Смейла. Приведем один из таких результатов, полученный в магистерской диссертации Н. В. Солопова.

Пример 5.1. Пусть $X = \{z : 1 \leqslant |z| \leqslant 2\}$ есть кольцо на комплексной плоскости. Запишем z в полярных координатах: $z = re^{it}$, и пусть $s = r - 1$. Зададим отображение этого кольца в себя, действующее во введенных координатах по формуле

$$\alpha(z) = \left[1 + s + [s(1-s)]^2\right] \exp\left[i\left(t + \frac{1}{10}\sin^2 t + s(1-s)\right)\right]. \tag{5.1}$$

Сначала опишем динамику этого отображения.

Окружности $S_1 = \{z : |z| = 1\}$ и $S_2 = \{z : |z| = 2\}$ являются замкнутыми инвариантными подмножествами. Отображение $f(s) = s + [s(1-s)]^2$ отрезка $[0,1]$ имеет простейшую динамику — траектория каждой точки $s_0 \in (0,1)$ при действии f стремится к 1 и при действии обратного отображения стремится к 0. Поэтому окружность S_2 является аттрактором для α, а окружность S_1 — аттрактором для обратного отображения, и α есть отображение с разделимой динамикой.

На S_1 отображение действует по формуле $\alpha(t) = \exp\left[i\left(t + \frac{1}{10}\sin^2 t\right)\right]$. У этого отображения точки ± 1 являются неподвижными, причем при $0 < t < \pi$, т. е. на верхней полуокружности, траектории точек стремятся к -1, а при $\pi < t < 2\pi$ траектории точек стремятся к 1. Аналогично отображение действует на S_2, неподвижными являются точки ± 2.

Траектория $z_n = \alpha^n(z_0)$ каждой точки $z_0 = (s_0, t_0)$, где $0 < s_0 < 1$, стремится к наружной окружности S_2 при $n \to +\infty$ и стремится к внутренней окружности S_1 при $n \to -\infty$. Покажем, что такая траектория не имеет предела при $n \to +\infty$.

Координаты точек $z_n = (s_n, t_n)$ задаются выражениями $s_n = f(s_{n-1}) = +s_{n-1} + [s_{n-1}(1-s_{n-1})]^2$, $t_n = t_{n-1} + \frac{1}{10}\sin^2 t_{n-1} + s_{n-1}(1 - s_{n-1})$. Как сказано выше, $s_n \to 1$ при $n \to +\infty$. Покажем, что последовательность t_n неограничено возрастает. Без ограничения общности можем считать, что $s_0 \geqslant 1/2$. Обозначив $h_k = 1 - s_k$ получаем оценку $t_n - t_{n-1} = \frac{1}{10}\sin^2 t_{n-1} + s_{n-1}(1-s_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}h_{n-1}$, откуда следует, что $t_n \geqslant t_0 + \frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{n-1} h_k$.

Здесь отображение f подобрано таким образом, что h_k медленно сходятся к нулю и суммы $\sum\limits_{k=0}^{n-1} h_k$ неограничено возрастают. Последовательность h_k построена по правилу $h_k = \varphi(h_{k-1})$, где $\varphi(h) = h - [h(1-h)]^2 = h - h^2 + 2h^3 - h^4$. При малых h поведение итераций определяется первыми членами $h - h^2$ разложения функции φ. Такие же первые члены разложения имеет функция $\psi(h) = \frac{h}{h+1}$, для которой последовательность итерации имеет более простой вид, например, при $h_0' = 1/2$ получаем члены гармонического ряда $h_k' = 1/k$. Отсюда получаем, что суммы $\sum\limits_{k=0}^{n-1} h_k$ также неограниченно возрастают, последовательность t_n неограничено возрастает и, следовательно, последовательность z_n не имеет предела.

Геометрический смысл этого утверждения в том, что рассматриваемая траектория z_n не стремится к какой-либо точке, а «накручивается» на окружность $|z| = 2$ бесконечное число раз. Особенность поведения данной траектории заключается в том, что она «зависает» в окрестности точки $z = 2$, т. е. имеется большой отрезок траектории, лежащий в окрестности данной точки. Далее траектория совершает обход полуокружности и затем зависает уже над точкой $z = -2$. Далее процесс повторяется, и при этом количество точек траектории, находящихся в окрестностях точек $z = \pm 2$, с каждым оборотом вокруг окружности увеличивается.

Аналогично при $n \to -\infty$ траектория приближаются к внутренней окружности $|z| = 1$, также совершая бесконечное число витков и «зависая» вблизи точек $z = \pm 1$.

Рассмотрим оператор AT_α, порожденный отображением (5.1) в пространстве вектор-функций $L_2(X, \mathbb{C}^m)$. Основной результат заключается в том, что утверждения теорем 4.1 и 4.2 справедливы и для таких операторов.

Опишем основные шаги доказательства. При переходе к дискретным операторам получаем, что последовательность их коэффициентов имеет сложное поведение и их анализ затруднен. Но на граничных окружностях отображение α имеет более простую динамику и является отображением типа Морса—Смейла. При этом граф Смейла этого отображения окружности является циклом. Поэтому операторы $B_\tau - I$, соответствующие точкам этих окружностей, должны быть обратимы, из чего следует, что действие β на обеих окружностях должно быть гиперболическим — над ними существуют разложения $E_z = E_z^+ \oplus E_z^-$.

Для дальнейшего используется нелокальный аналог леммы 4.1, который требует более сложного доказательства.

Лемма 5.1. *Пусть линейное расширение β является гиперболическим над окружностью S_1. Тогда в достаточно малой окрестности U этой окружности τ существует непрерывная проекторнозначная функция $p(x)$, задающая разложения $E = V^+ \oplus V^-$ в прямую сумму подрасслоений, при котором V^+ — устойчивое вперед подрасслоение, совпадающее с E^+, а W^- — локально устойчивое назад подрасслоение.*

Аналогичное разложение имеет место в окрестности окружности S_2.

Следующим шагом является проверка того, что, аналогично лемме 4.2, условие трансверсальности множеств E^+ и E^- необходимо и достаточно для правосторонней обратимости дискретных операторов $B_\tau - I$, несмотря на то, что у них последовательность коэффициентов имеет более сложное поведение.

Далее, при условии трансверсальности, искомая градуированная дихотомия строится аналогично конструкции для отображения с простейшей динамикой. При $s \leqslant 1/2$ возьмем $W^+ = E^+$, а в качестве W^- возьмем подрасслоение в E^-, дополнительное к $E^+ \cap E^-$. При $s \leqslant 1/2$ возьмем $W^- = E^-$, а в качестве W^+ возьмем подрасслоение в E^+, дополнительное к $E^+ \cap E^-$.

6. Краевые задачи для разностных уравнений

Если оператор A обратим справа, то уравнение $Au = f$ имеет решение для всех f, но решение не является единственным. Такая картина разрешимости типична для дифференциальных уравнений, и для них обычно к уравнению добавляются условия, обеспечивающие единственность решения. Ввиду того, что в основополагающих работах такие условия задавались с помощью значений искомой функции на границе области, их называют краевыми условиями, но в дальнейшем рассматривались и более сложные нелокальные условия, зависящие и от значений функции во внутренних точках области определения. С общей точки зрения такое условие есть требование, чтобы решение принадлежало заданному подпространству.

Для функциональных уравнений в случае правосторонней обратимости соответствующих операторов $B - \lambda I$ также возникает вопрос о постановке краевых задач и их разрешимости. Для модельных операторов взвешенного сдвига вида он был рассмотрен в [8, 22]. Изложим основные результаты этих работ.

I. Рассмотрим дискретный оператор взвешенного сдвига $Bu(k) = a(k)u(k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, где $a = (a(k))$ — числовая последовательность, у которой существуют пределы $\lim\limits_{k\to\pm\infty} a(k) := a(\pm\infty)$.

Согласно следствию 4.1, оператор $B - \lambda I$ правосторонне обратим тогда и только тогда, когда $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$. При этом правосторонняя резольвента, построенная с помощью проектора (4.5), дает решение уравнения, удовлетворяющее условию $u(N) = 0$.

Более общая краевая задача заключается в том, чтобы найти решение уравнения, удовлетворяющее условию $u \in L$, где L — заданное замкнутое векторное подпространство. Поскольку пространство решений однородного уравнения одномерно, в качестве L следует рассматривать подпространства коразмерности 1. В $l_2(\mathbb{Z})$ каждое такое подпространство имеет вид

$$L_\eta = \{u :< u, \eta >\equiv \sum u(k)\overline{\eta(k)} = 0\}, \quad \eta \in l_2(\mathbb{Z}), \quad \|\eta\| = 1. \tag{6.1}$$

Обратим внимание на то, что это условие нелокально — оно связывает значения $u(k)$ в разных точках. Таким образом, получаем общую постановку краевой задачи: найти решение разностного уравнения

$$a(k)u(k+1) - \lambda u(k) = f(k), \quad \text{принадлежащее подпространству} \quad L_\eta. \tag{6.2}$$

Ее решение эквивалентно построению правосторонней резольвенты $R^+(B,\lambda)$, состоящей из операторов, образы которых совпадают с подпространством L_η. *Спектром краевой задачи* называется множество λ, при которых нет существования и единственности решения.

При сделанных предположениях подпространство $\ker(B - \lambda I)$ одномерно. Если

$$\omega(k) = \begin{cases} \left[\prod\limits_{j=0}^{k-1} a(j)\right]^{-1}, & k \geqslant 0, \\ \prod\limits_{j=k}^{-1} a(j), & k < 0, \end{cases}$$

то последовательность $\omega_\lambda(k) = \omega(k)\lambda^k$ порождает $\ker(B - \lambda I)$. Поэтому однородная задача при заданном λ имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $\omega_\lambda \in L_\eta$, т. е. $<\omega_\lambda, \eta>= 0$. Это скалярное произведение задает аналитическую функцию переменной λ, представленную рядом Лорана $Q_\eta(\lambda) = <\omega_\lambda, \eta> = \sum\limits_k \eta_k \omega(k)\lambda^k$. Таким образом, необходимым условием корректности задачи при заданном λ является $Q_\eta(\lambda) \neq 0$. Далее прямыми вычислениями проверим, что это условие и достаточно.

Операторнозначная функция $R(B;\lambda)f = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1}(I - P_0)f - \sum\limits_{-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P_0 f$, где P_0 — оператор умножения на последовательность $p_0(k)$, определенную (4.5), задает одно из решений уравнения $(B - \lambda I)u = f$, а именно, удовлетворяющее условию $u(0) = 0$. Решение, принадлежащее L_η, будем искать в виде $u = R(B;\lambda)f + \Psi_\lambda(f)\omega_\lambda$. Из условия $< u, \eta >= 0$ получаем, что

$$\Psi_\lambda(f) = \frac{1}{Q_\eta(\lambda)} < R(B;\lambda)f, \eta >= \frac{1}{Q_\eta(\lambda)} < f, R^*(B;\lambda)\eta > .$$

Заметим, что последовательность $\xi_\lambda = R^*(B;\lambda)\eta$ может быть записана в явном виде. Так как $\frac{1}{Q_\eta(\lambda)}\omega_\lambda = \frac{1}{<\omega_\lambda, \eta>}\omega_\lambda$ и не изменяется при умножении ω_λ на постоянную, можем считать, что $\|\omega_\lambda\| = 1$.

Теорема 6.1. *Краевая задача* (6.2) *корректна тогда и только тогда, когда* $|a(+\infty)| < |\lambda| < |a(-\infty)|$ *и* $Q_\eta(\lambda) \neq 0$. *Правосторонняя резольвента, задающая решение этой задачи, имеет вид*

$$R_\eta(B;\lambda)f = R(B;\lambda)f + \frac{\Phi_\lambda(f)}{Q_\eta(\lambda)}\omega_\lambda, \tag{6.3}$$

где $\Phi_\lambda(f) = <f, \xi_\lambda>$, $\xi_\lambda = R^*(B;\lambda)\eta$.

Таким образом, согласно теореме 6.1, спектр краевой задачи есть множество нулей аналитической функции $Q_\eta(\lambda)$, лежащих в кольце $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$ и, следовательно, представляет собой конечное или счетное дискретное множество. Если числа $\eta_k\omega(k)$ убывают достаточно быстро, то эта функция аналитически продолжается на окрестность кольца и может иметь только конечное число нулей. Но если числа $\eta_k\omega(k)$ медленно убывают на бесконечности, то число нулей функции $Q_\eta(\lambda)$ в кольце может быть бесконечным.

Заметим, что резольвента (6.3) краевой задачи является правосторонней резольвентой для оператора B, но она имеет более сложную структуру, чем построенные выше.

II. При анализе краевых задач

$$a(x)u(x+1) - \lambda u(x) = f(x), \quad u \in L \subset L_2(\mathbb{R}), \tag{6.4}$$

для разностного уравнения на прямой появляется ряд отличий и новых вопросов. При условии, что $|a(+\infty)| < |\lambda| < |a(-\infty)|$, оператор правосторонне обратим, но, в отличие от дискретного случая, имеет бесконечномерное ядро. Поэтому в первую очередь надо выяснить, для каких бесконечномерных подпространств L краевая задача может оказаться корректной. Условие заключается в том, чтобы существовали λ, при котором L является дополнительным подпространством к $\ker(B - \lambda I)$. Но, ввиду бесконечномерности $\ker(B - \lambda I)$, это условие трудно проверить для произвольного L.

В [8] рассмотрены краевые задачи, в которых подпространства L имеют специальный вид. Это подпространства, которые при локализации соответствуют подпространствам вида (6.1) для соответствующих дискретных операторов.

Пусть $X = \mathbb{Z} \times [0, 1]$, где на каждом отрезке задана мера Лебега. Отображение $J : L_2(\mathbb{R}) \ni u \to w \in L_2(X)$, $(Ju)(k, \tau)u(k, \tau) = u(k + \tau)$ является изоморфизмом гильбертовых пространств. Это позволяет рассмотреть $L_2(\mathbb{R})$ как пространство функций на $[0, 1]$ со значениями в $l_2(\mathbb{Z})$, и при таком представлении оператор B переходит в операторнозначную функцию B_τ, $\tau \in [0, 1]$, где B_τ есть оператор дискретного взвешенного сдвига, полученный при локализации оператора B.

Рассмотрим подпространства L, заданные так, что в $L_2(X)$ для каждого τ выполнено краевое условие вида (6.1). Это подпространства вида $L = \{u(k, \tau) : \sum\limits_k u(k, \tau)\overline{\eta(k, \tau)} = 0\}$, где $\sum\limits_k |\eta(k, \tau)|^2 = 1$ для всех τ. Естественно потребовать, что $\eta(k, \tau)$ измеримо зависит от τ, и тогда функция $\eta(k + \tau) = \eta(k, \tau)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R})$.

При реализации L как пространства в $L_2(\mathbb{R})$ получаем, что это условие вида

$$\sum_k u(k + \tau)\eta(k + \tau) = 0 \text{ при всех } \tau \in [0, 1]. \tag{6.5}$$

При фиксированном τ значения $u(k+\tau)$ не определены, и надо обосновать, что подпространство L задано корректно и замкнуто, поскольку замкнутость является необходимым условием корректной разрешимости задачи.

Пусть $\psi(x)$ есть ограниченная измеримая функция на $\mathbb{R}$, периодическая с периодом 1. Тогда при выполнении (6.5) имеем $\sum\limits_k \psi(k + \tau)u(k + \tau)\overline{\eta(k + \tau)} = 0$ при всех $\tau \in [0, 1]$, и условие (6.5) эквивалентно тому, что $\int_0^1 \sum\limits_k \psi(k + \tau)u(k + \tau)\overline{\eta(k + \tau)}d\tau = 0$ для всех ψ.

При переходе к представлению в $L_2(X)$ получаем, что выполнение этого условия равносильно тому, что $\int_X u(k, \tau)\Psi(k, \tau)d\mu = 0$ для любой функции вида $\Psi(k, \tau) = \psi(\tau)\overline{\eta(k, \tau)}$.

Полученное описание подпространства L заключается в том, что это ортогональное дополнение к множеству функций Ψ и, следовательно, является замкнутым подпространством.

Записав для каждого τ по формуле 6.3 резольвенту соответствующей краевой задачи, получаем выражение, которое может служить кандидатом на формулу для резольвенты краевой задачи — если решение существует, то оно задается формулой

$$[R_\eta(B; \lambda)f](k, \tau) = \Big[\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1}(I - P_0)f - \sum_{-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1}P_0 f\Big] + \frac{\Phi_\lambda(f)}{Q_{\eta,\tau}(\lambda)}\omega_{\lambda,\tau}, \tag{6.6}$$

где $\Phi_\lambda(f)$ есть отображение, ставящее в соответствие функции f из $L_2(X)$ функцию от τ по формуле $\Phi_\lambda(f) =< f_\tau, \xi_{\lambda,\tau} >_{l_2}$, где $\xi_{\lambda,\tau} = R^*(B; \lambda)\eta$. Здесь функция, заданная выражением в квадратной скобке, принадлежит $L_2(X)$, и надо только выяснить, при каких λ функция $g(k, \tau) = \frac{\Phi_{\lambda,\tau}(f)}{Q_{\eta,\tau}(\lambda)}\omega_{\lambda,\tau}$ принадлежит $L_2(X)$ при любом $f \in L_2(X)$. Пусть $|Q_{\eta,\tau}(\lambda) \geqslant d(\lambda) > 0$ для почти всех τ при заданном λ. Так как $\|\omega_{\lambda,\tau}\|_{l_2} = 1$, имеем

$$\int_X |g|^2 d\mu = \int_0^1 |\frac{\Phi_{\lambda,\tau}(f)}{Q_{\eta,\tau}(\lambda)}|^2 d\tau \leqslant \frac{1}{d}\int_0^1 | < f_\tau, \xi_{\lambda,\tau} >_{l_2} |^2 d\tau \leqslant \frac{\|\xi\|^2}{d}\|f\|^2.$$

Теорема 6.2. *Краевая задача* (6.4) *корректна тогда и только тогда, когда* $|a(+\infty)| < |\lambda| < |a(-\infty)|$ *и* $\operatorname{ess\,inf}\limits_\tau |Q_{\eta,\tau}(\lambda)| > 0$, *ее резольвента задается* (6.6).

В частности, если $Q_{\eta,\tau}(\lambda)$ непрерывна как функция двух переменных τ и λ, то спектр краевой задачи есть множество нулей этой функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения. Операторный подход. — Минск: Университетское, 1988.
2. *Антоневич А. Б.* Когерентная локальная гиперболичность линейного расширения и существенные спектры оператора взвешенного сдвига на отрезке// Функц. анализ и его прилож. — 2005. — *39*, № 1. — С. 52–69.

3. *Антоневич А. Б., Ахматова А. А.* Спектральные свойства дискретных операторов взвешенного сдвига// Тр. инст. мат. — 2012. — *20*, № 1. — С. 14–21.
4. *Антоневич А. Б., Ахматова А. А., Маковска Ю.* Отображения с разделимой динамикой и спектральные свойства порожденных ими операторов// Мат. сб. — 2015. — *206*, № 3. — С. 3–34.
5. *Антоневич А. Б., Пантелеева Е. В.* Правосторонние резольвенты дискретных операторов взвешенного сдвига с матричными весами// Пробл. физ., мат. и техн. — 2013. — *16*, № 3. — С. 45–54.
6. *Антоневич А. Б., Пантелеева Е. В.* Правосторонняя гиперболичность операторов, порождённых отображениями типа Морса—Смейла// Вестн. Гродненского ГУ им. Я. Купалы. Сер. 2. Мат. Физ. Инф., выч. техн. и управл. — 2014. — *170*, № 1. — С. 65–72.
7. *Антоневич А. Б., Пантелеева Е. В.* Корректные краевые задачи, правосторонняя гиперболичность и экспоненциальная дихотомия// Мат. заметки. — 2016. — *100*, № 1. — С. 13–29.
8. *Архипенко О. А.* Краевые задачи для разностных уравнений// Тр. БГТУ. Сер. 3. Физ.-мат. науки и информ. — 2018. — *206*, № 1. — С. 12–18.
9. *Баскаков А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных соотношений// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 1. — С. 77–128.
10. *Бронштейн И. У.* Неавтономные динамические системы. — Кишинев: Штиинца, 1984.
11. *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ в задачах. — М.: Наука, 1969.
12. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. А.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
13. *Диксмье Ж.* C^*-алгебры и их представления. — М.: Наука, 1974.
14. *Жиков В. В.* Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения// Изв. АН. Сер. Мат. — 1976. — *40*, № 6. — С. 1380–1408.
15. *Латушкин Ю. Д., Степин А. М.* Операторы взвешенного сдвига и линейные расширения динамических систем// Усп. мат. наук. — 1991. — *46*, № 2. — С. 95–165.
16. *Мардиев Р.* Критерий полунетеровости одного класса сингулярных интегральных операторов с некарлемановским сдвигом// Докл. АН УзССР. — 1985. — *2*, № 2. — С. 5–7.
17. *Массера Х. Л., Шеффер Х. Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. — М.: Мир, 1970.
18. *Мерфи Дж.* C^*-алгебры и теория операторов. — М.: Факториал, 1997.
19. *Мищенко А. С.* Векторные расслоения и их применения. — М.: Наука, 1984.
20. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. — М.: Мир, 1975.
21. *Стевич С., Чен Р., Чжоу З.* Взвешенные композиционные операторы, действующие из одного пространства Блоха в полидиске в другое// Мат. сб. — 2010. — *201*, № 2. — С. 131–160.
22. *Шукур Али А., Архипенко О. А.* Резольвента краевой задачи для разностного уравнения// Пробл. физ., мат. и техн. — 2016. — *28*, № 3. — С. 70–75.
23. *Akhmatova A., Antonevich A.* On operators generated by maps with separable dynamics// Proc. Conf. «Geometric Methods in Physics», XXXI Workshop, June 24–30, 2012, Poland. — Basel: Birkhäuser, 2013. — C. 171–178.
24. *Antonevich A., Jakubowska (Makowska) Ju.* On spectral properties of weighted shift operators generated by mappings with saddle points// Complex Anal. Oper. Theory. — 2008. — *2*, № 2. — С. 215–240.
25. *Antonevich A., Jakubowska (Makowska) Ju.* Weighted translation operators generated by mappings with saddle points: a model class// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2010. — *164*, № 4. — С. 497–517.
26. *Antonevich A., Lebedev A.* Functional differential equations: I.C*-theory. — Harlow: Longman Scientific & Technical, 1994.
27. *Antonevich A. B., Panteleeva E. V.* Right-side hyperbolic operators// Sci. Publ. State Univ. Novi Pazar. Ser. A. — 2014. — № 1. — С. 1–9.
28. *Karlovich A. Yu., Karlovich Yu. I.* One-sided invertibility of binomial functional operators with a shift in rearrangement-invariant spaces// Integral Equ. Oper. Theory. — 2002. — *42*, № 2. — С. 201–228.
29. *Perron O.* Die Stabilitatsfrage bei Differentialgleichungen// Math. Z. — 1930. — *32*, № 5. — С. 703–738.

А. Б. Антоневич
Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
E-mail: antonevich@bsu.by

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-208-236 UDC 517.98

Right-Sided Invertibility of Binomial Functional Operators and Graded Dichotomy

© 2021 **A. B. Antonevich**

Abstract. In this paper, we consider the right-sided invertibility problem for binomial functional operators. It is known that such operators are invertible iff there exists dichotomy of solutions of the homogeneous equation. New property of solutions of the homogeneous equation named graded dichotomy is introduced and it is proved that right-sided invertibility of binomial functional operators is equivalent to existence of graded dichotomy.

REFERENCES

1. A. B. Antonevich, *Lineynye funktsional'nye uravneniya. Operatornyi podkhod* [Linear Functional Equations. Operator Approach], Universitetskoe, Minsk, 1988 (in Russian).
2. A. B. Antonevich, "Kogerentnaya lokal'naya giperbolichnost' lineynogo rasshireniya i sushchestvennye spektry operatora vzveshennogo sdviga na otrezke" [Coherent local hyperbolicity of a linear extension and essential spectra of a weighted shift operator on a segment], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2005, **39**, No. 1, 52–69 (in Russian).
3. A. B. Antonevich and A. A. Akhmatova, "Spektral'nye svoystva diskretnykh operatorov vzveshennogo sdviga" [Spectral properties of discrete operators of weighted shift], *Tr. inst. mat.* [Proc. Inst. Math.], 2012, **20**, No. 1, 14–21 (in Russian).
4. A. B. Antonevich, A. A. Akhmatova, and Yu. Makovska, "Otobrazheniya s razdelimoy dinamikoy i spektral'nye svoystva porozhdennykh imi operatorov" [Mappings with separable dynamics and spectral properties of the operators generated by them], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2015, **206**, No. 3, 3–34 (in Russian).
5. A. B. Antonevich and E. V. Panteleeva, "Pravostoronnie rezol'venty diskretnykh operatorov vzveshennogo sdviga s matrichnymi vesami" [Right-hand resolvents of discrete weighted shift operators with matrix weights], *Probl. fiz., mat. i tekhn.* [Probl. Phys. Math. Tech.], 2013, **16**, No. 3, 45–54 (in Russian).
6. A. B. Antonevich and E. V. Panteleeva, "Pravostoronnyaya giperbolichnost' operatorov, porozhdennykh otobrazheniyami tipa Morsa—Smeyla" [Right-hand hyperbolicity of operators generated by mappings of Morse–Smale type], *Vestn. Grodnenskogo GU im. Ya. Kupaly. Ser. 2. Mat. Fiz. Inf., vych. tekhn. i upravl.* [Bull. Grodno State Univ. Ya. Kupala. Ser. 2. Math. Phys. Inf. Comp. Tech. Control], 2014, **170**, No. 1, 65–72 (in Russian).
7. A. B. Antonevich and E. V. Panteleeva, "Korrektnye kraevye zadachi, pravostoronnyaya giperbolichnost' i eksponentsial'naya dikhotomiya" [Correct boundary-value problems, right-sided hyperbolicity and exponential dichotomy], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2016, **100**, No. 1, 13–29 (in Russian).
8. O. A. Arkhipenko, "Kraevye zadachi dlya raznostnykh uravneniy" [Boundary-value problems for difference equations], *Tr. BGTU. Ser. 3. Fiz.-mat. nauki i inform.* [Proc. BGTU. Ser. 3. Phys.-Math. Sci. Inf.], 2018, **206**, No. 1, 12–18 (in Russian).
9. A. G. Baskakov, "Issledovanie lineynykh differentsial'nykh uravneniy metodami spektral'noy teorii raznostnykh operatorov i lineynykh sootnosheniy" [Investigation of linear differential equations by methods of spectral theory of difference operators and linear relations], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2013, **68**, No. 1, 77–128 (in Russian).
10. I. U. Bronshteyn, *Neavtonomnye dinamicheskie sistemy* [Nonautonomous Dynamical Systems], Shtiintsa, Kishinev, 1984 (in Russian).
11. I. M. Glazman and Yu. I. Lyubich, *Konechnomernyi lineynyi analiz v zadachakh* [Finite-Dimensional Linear Analysis in Problems], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).

12. Yu. L. Daletskiy and M. A. Kreyn, *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Stability of solutions of differential equations in a Banach space], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
13. J. Dixmier, *C^*-algebry i ikh predstavleniya* [C^*-Algebras and Their Representations], Nauka, Moscow, 1974 (Russian translation).
14. V. V. Zhikov, "Nekotorye voprosy dopustimosti i dikhotomii. Printsip usredneniya" [Some questions of admissibility and dichotomy. Averaging principle], *Izv. AN. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1976, **40**, No. 6, 1380–1408 (in Russian).
15. Yu. D. Latushkin and A. M. Stepin, "Operatory vzveshennogo sdviga i lineynye rasshireniya dinamicheskikh sistem" [Weighted shift operators and linear extensions of dynamical systems], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1991, **46**, No. 2, 95–165 (in Russian).
16. R. Mardiev, "Kriteriy poluneterovosti odnogo klassa singulyarnykh integral'nykh operatorov s nekarlemanovskim sdvigom" [A criterion for the semi-Noetherian property of a class of singular integral operators with a non-Carleman shift], *Dokl. AN UzSSR* [Rep. Acad. Sci. Uzb. SSR], 1985, **2**, No. 2, 5–7 (in Russian).
17. J. L. Massera and J. J. Schäffer, *Lineynye differentsial'nye uravneniya i funktsional'nye prostranstva* [Linear Differential Equations and Function Spaces], Mir, Moscow, 1970 (Russian translation).
18. G. J. Murphy, *C^*-algebry i teoriya operatorov* [C^*-Algebras and Operator Theory], Faktorial, Moscow, 1997 (Russian translation).
19. A. S. Mishchenko, *Vektornye rassloeniya i ikh primeneniya* [Vector Stratifications and Their Applications], Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).
20. Z. Nitecki, *Vvedenie v differentsial'nuyu dinamiku* [An Introduction to Differential Dynamics], Mir, Moscow, 1975 (Russian translation).
21. C. Stevich, R. Chen, and Z. Chzhou, "Vzveshennye kompozitsionnye operatory, deystvuyushchie iz odnogo prostranstva Blokha v polidiske v drugoe" [Weighted composition operators acting from one Bloch space in a polydisk into another], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2010, **201**, No. 2, 131–160 (in Russian).
22. A. Shukur Ali and O. A. Arkhipenko, "Rezol'venta kraevoy zadachi dlya raznostnogo uravneniya" [Resolvent of a boundary-value problem for a difference equation], *Probl. fiz., mat. i tekhn.* [Probl. Phys. Math. Tech.], 2016, **28**, No. 3, 70–75 (in Russian).
23. A. Akhmatova and A. Antonevich, "On operators generated by maps with separable dynamics," Proc. Conf. *Geometric Methods in Physics*, XXXI Workshop, June 24–30, 2012, Poland, Birkhäuser, Basel, 2013, pp. 171–178.
24. A. Antonevich and Ju. Jakubowska (Makowska), "On spectral properties of weighted shift operators generated by mappings with saddle points," *Complex Anal. Oper. Theory*, 2008, **2**, No. 2, 215–240.
25. A. Antonevich and Ju. Jakubowska (Makowska), "Weighted translation operators generated by mappings with saddle points: a model class," *J. Math. Sci.* (*N.Y.*), 2010, **164**, No. 4, 497–517.
26. A. Antonevich and A. Lebedev, *Functional differential equations: I.C^*-theory*, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1994.
27. A. B. Antonevich and E. V. Panteleeva, "Right-side hyperbolic operators," *Sci. Publ. State Univ. Novi Pazar. Ser. A*, 2014, No. 1, 1–9.
28. A. Yu. Karlovich and Yu. I. Karlovich, "One-sided invertibility of binomial functional operators with a shift in rearrangement-invariant spaces," *Integral Equ. Oper. Theory*, 2002, **42**, No. 2, 201–228.
29. O. Perron, "Die Stabilitatsfrage bei Differentialgleichungen," *Math. Z.*, 1930, **32**, No. 5, 703–738.

A. B. Antonevich
Belarusian State University, Minsk, Belarus
E-mail: antonevich@bsu.by

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 2 (2021). С. 237–254

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-237-254 УДК 517.984

ИНДЕКСЫ ДЕФЕКТА БЛОЧНЫХ МАТРИЦ ЯКОБИ: ОБЗОР

© 2021 г. **В. С. БУДЫКА, М. М. МАЛАМУД, К. А. МИРЗОЕВ**

Аннотация. Работа является обзорной. Ее основной объект — бесконечные симметричные блочные матрицы Якоби $\mathbf{J}$ с $m \times m$-матричными элементами. Обсуждаются результаты, в которых общие блочные матрицы Якоби являются самосопряженными или могут иметь максимальные либо промежуточные индексы дефекта. Также обсуждаются условия, гарантирующие дискретность спектра матриц Якоби $\mathbf{J}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение . . . 237
2. Условия самосопряженности блочных матриц Якоби . . . 240
3. Блочные матрицы Якоби с максимальными индексами дефекта . . . 243
4. Матрицы Якоби с промежуточными индексами дефекта . . . 244
5. Дискретность спектра блочных матриц Якоби . . . 244
6. Индексы дефекта и дискретность спектра некоторых классов матриц Якоби . . . 246
Список литературы . . . 251

Посвящается памяти нашего друга, коллеги и блестящего математика Н. Д. Копачевского.

1. Введение

Пусть $\Sigma(\cdot) = \Sigma(\cdot)^*$ — неубывающая, непрерывная слева $m \times m$ матричная функция на прямой $\mathbb{R}$, имеющая бесконечное число точек роста. Предположим, что функция $\Sigma(\cdot)$ нормирована следующим образом: $\Sigma(t-0) = \Sigma(t)$ и $\lim\limits_{t\to-\infty} \Sigma(t) = 0$. Стандартным образом эта функция порождает $m \times m$ матричную меру на прямой.

Следуя М. Г. Крейну [2, 3] (см. также [4, 5]), предполагаем, что эта мера конечна и порождает матричную проблему моментов на прямой, т. е. существуют следующие матричные интегралы Римана—Стилтьеса:

$$S_n := \int_{-\infty}^{\infty} t^n d\Sigma(t), \qquad n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{1.1}$$

Отсюда следует, что последовательность матриц $\{S_n\}_0^\infty (\subset \mathbb{C}^{m\times m})$ положительна в следующем смысле: для любой последовательности векторов $\xi_j = \operatorname{col}\bigl(\xi_{j,1}, \xi_{j,2}, \dots, \xi_{j,m}\bigr) \in \mathbb{C}^m$, $j \in \mathbb{N}_0$, и любого многочлена $R(t) = \sum\limits_{j=0}^{n} \xi_j t^j$ с векторными коэффициентами $R(t) (\in \mathbb{C}[t] \otimes \mathbb{C}^m)$ имеем

$$\sum_{j,k=0}^{n} \xi_k^* S_{j+k} \xi_j = \sum_{j,k=0}^{n} \langle S_{j+k}\xi_j, \xi_k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\left\langle \Sigma(t)\left(\sum_0^n \xi_j t^j\right), \sum_0^n t^k \xi_k \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} R^*(t) d\Sigma(t) R(t) \geqslant 0, \tag{1.2}$$

где $\langle x, y\rangle$ обозначает скалярное произведение в пространстве $\mathbb{C}^m$.

Это неравенство доказывает достаточность в следующем классическом результате.

Теорема 1.1 (см. [3, 5]). *Необходимым и достаточным условием разрешимости матричной проблемы моментов* (1.1) *является условие положительности*

$$\sum_{j,k=0}^{n} \xi_k^* S_{j+k} \xi_j \geqslant 0, \qquad \xi_j \in \mathbb{C}^m, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.3}$$

Схема доказательства. Кратко наметим идею доказательства достаточности. С этой целью для каждой пары векторных многочленов $R(t) = \sum_0^n \xi_j t^j$, $Q(t) = \sum_0^n \eta_k t^k (\in \mathbb{C}[t] \otimes \mathbb{C}^m)$, где $\xi_j, \eta_k \in \mathbb{C}^m$, положим

$$\langle R(t), Q(t) \rangle_S = \left\langle \sum_0^n \xi_j t^j, \sum_0^n \eta_k t^k \right\rangle_S := \sum_{j,k=0}^{n} \eta_k^* S_{j+k} \xi_j = \sum_{j,k=0}^{n} \langle S_{j+k} \xi_j, \eta_k \rangle, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.4}$$

Более того, для простоты положим, что неравенство в (1.3) является строгим, т. е. $\langle R(t), R(t) \rangle_S > 0$ для любых $R \in \mathbb{C}[t] \otimes \mathbb{C}^m \setminus \{\mathbb{O}\}$. Тогда из (1.4) и (1.3) следует, что билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ определяет скалярное произведение в $\mathbb{C}[t] \otimes \mathbb{C}^m$. Таким образом, векторное пространство $\mathfrak{H}'_S := \mathbb{C}[t] \otimes \mathbb{C}^m$ становится предгильбертовым пространством. Пополняя его, приходим к гильбертову пространству $\mathfrak{H}_S$. $\square$

Далее определим оператор умножения A' на $\mathbb{C}[t] \otimes \mathbb{C}^m$, полагая

$$A' : R(t) = \sum_0^n \xi_j t^j \to t R(t) = \sum_0^n \xi_j t^{j+1}. \tag{1.5}$$

Легко видеть, что оператор A' является симметричным: $\langle A'R, Q \rangle_S = \langle R, A'Q \rangle_S$, и потому допускает замыкание $A = \overline{A'}$ в $\mathfrak{H}_S$. Можно легко доказать, что индексы дефекта оператора A конечны и выполнено $n_+(A),\ n_-(A) \leqslant m$.

Если $n_+(A) = n_-(A)$, то оператор A допускает самосопряженное расширение $\widetilde{A} = \widetilde{A}^*$ в $\mathfrak{H}_S$. Иначе такое расширение может быть найдено среди расширений оператора A в более широком пространстве $\widetilde{\mathfrak{H}}_S \supset \mathfrak{H}_S$. Пусть $E_{\widetilde{A}}(t)$ — (ортогональная) спектральная функция (разложение единицы) оператора $\widetilde{A}$, т. е. $\widetilde{A} = \int_{\mathbb{R}} t\, dE_{\widetilde{A}}(t)$. Пусть $P_{\mathcal{H}}$ — ортопроектор в $\mathfrak{H}_S$ на подпространство $\mathcal{H} := \mathbb{C}^m$ постоянных векторных многочленов, и пусть $\Sigma_{\widetilde{A}}(t) := P_{\mathcal{H}} E_{\widetilde{A}}(t) \restriction \mathcal{H}$. Тогда из (1.4) и (1.5) следует, что для любой пары постоянных векторов $\xi, \eta \in \mathcal{H} (= \mathbb{C}^m)$ выполнено

$$\begin{aligned} \langle S_{j+k} \xi, \eta \rangle &= \left\langle \xi t^j, \eta t^k \right\rangle_S = \left\langle \widetilde{A}^j \xi, \widetilde{A}^k \eta \right\rangle_S = \left\langle \widetilde{A}^{j+k} \xi, \eta \right\rangle_S = \\ &= \int_{\mathbb{R}} t^{j+k}\, d(E_{\widetilde{A}}(t)\xi, \eta) = \int_{\mathbb{R}} t^{j+k}\, d(\Sigma_{\widetilde{A}}(t)\xi, \eta), \quad j,k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Тогда $m \times m$ мера $\Sigma(t) = \Sigma_{\widetilde{A}}(t)$ является решением матричной проблемы моментов (1.1). Можно доказать, что любое матричное решение $\Sigma(t)$ задачи (1.1) допускает единственное представление $\Sigma(t) = \Sigma_{\widetilde{A}}(t)$ с некоторым самосопряженным расширением $\widetilde{A} = \widetilde{A}^*$ оператора A и справедлива эквивалентность $\Sigma_{\widetilde{A}_1}(t) = \Sigma_{\widetilde{A}_2}(t) \Longleftrightarrow \widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_2$. $\square$

Ассоциируем с мерой Σ гильбертовы пространства $L^2(\Sigma; \mathcal{H})$ и $L^2_{\mathrm{mat}}(\Sigma; \mathcal{H})$ вектор-функций и матричных функций, соответственно (см. [5, 28]). В дальнейшем будем полагать, что мера Σ такая, что $(R, R)_{L^2_{\mathrm{mat}}(\Sigma;\mathcal{H})} := \int_{\mathbb{R}} R(t)\, d\Sigma(t) R^*(t) > 0$ для любого матричного многочлена $R(t) = \sum_0^n C_j t^j \in \mathbb{C}[t] \otimes \mathbb{C}^{m \times m}$, где C_n обратимы. Используя это условие и применяя ортогонализацию (см. [5]), можно определить последовательность «ортонормальных» матричных многочленов $\{P_j(t)\}_0^\infty (\subset L^2_{\mathrm{mat}}(\Sigma; \mathcal{H}))$, где $P_0(t) = \mathbb{I}_m$ и выполнено

$$(P_j, P_k)_{L^2_{\mathrm{mat}}(\Sigma;\mathcal{H})} := \int_{\mathbb{R}} P_j(t)\, d\Sigma(t) P_k^*(t) = \delta_{jk} \mathbb{I}_m, \qquad \deg P_j(t) = j, \quad j,k \in \mathbb{N}_0. \tag{1.7}$$

Система $\{P_j(t)\}_0^\infty$ не обязательно полна в $L^2_{\mathrm{mat}}(\Sigma; \mathcal{H})$. Обозначим через $\widetilde{L}^2(\Sigma; \mathcal{H})$ и $\widetilde{L}^2_{\mathrm{mat}}(\Sigma; \mathcal{H})$ подпространства в $L^2(\Sigma; \mathcal{H})$ и $L^2_{\mathrm{mat}}(\Sigma; \mathcal{H})$, порожденные векторными и матричными многочленами, соответственно. Видно, что последовательность $\{P_j(t)\}_0^\infty$ образует «ортонормальный базис» в $\widetilde{L}^2_{\text{mat}}(\Sigma;\mathcal{H})$. Следовательно, полагая $P_{-1}=0$ и используя «ортогональные» соотношения (1.7), получаем, что

$$tP_j(t)=\sum_k C_{j,k}P_k(t)=C_{j,j-1}P_{j-1}(t)+C_{j,j}P_j(t)+C_{j,j+1}P_{j+1}(t),\qquad C_{j,k}\in\mathbb{C}^{m\times m},\tag{1.8}$$

где матричные коэффициенты $C_{j,k}$ при $|j-k|\leqslant 1$ даются формулами

$$\mathcal{A}_j:=C_{j,j}=\int_{\mathbb{R}}tP_j(t)\,d\Sigma(t)P_j^*(t),\quad \mathcal{B}_j:=C_{j,j+1}=\int_{\mathbb{R}}t\,P_j(t)d\Sigma(t)P_{j+1}^*(t),$$
$$C_{j,j-1}=\int_{\mathbb{R}}t\,P_j(t)d\Sigma(t)P_{j-1}^*(t)=\mathcal{B}_{j-1}^*,$$

и $C_{j,k}=(tP_j,P_k)_{L^2_{\text{mat}}(\Sigma;\mathcal{H})}=0$ при $|j-k|>1$. Следовательно, матричное представление оператора A (1.5) в базисе $\{P_j(t)\}_0^\infty$ в $\widetilde{L}^2_{\text{mat}}(\Sigma;\mathcal{H})$ дается блочной матрицей Якоби

$$\mathbf{J}=\begin{pmatrix}\mathcal{A}_0 & \mathcal{B}_0 & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots\\ \mathcal{B}_0^* & \mathcal{A}_1 & \mathcal{B}_1 & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots\\ \mathbb{O}_m & \mathcal{B}_1^* & \mathcal{A}_2 & \mathcal{B}_2 & \mathbb{O}_m & \dots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix},\tag{1.9}$$

где $\mathcal{A}_j=\mathcal{A}_j^*\in\mathbb{C}^{m\times m}$ — $m\times m$-матричные элементы, а элементы $\mathcal{B}_j\in\mathbb{C}^{m\times m}$ обратимы, $j\in\mathbb{N}_0$.

Согласно М. Г. Крейну (см. [2,3]), матрица $\mathbf{J}$ также называется матрицей Якоби с матричными элементами.

Пусть $l^2_0(\mathbb{N};\mathbb{C}^p)$ — линеал конечных последовательностей в пространстве $l^2(\mathbb{N};\mathbb{C}^m)$. Отображение $l^2_0(\mathbb{N};\mathbb{C}^m)\ni f\to\mathbf{J}f$ определяет линейный симметричный, но не замкнутый оператор $\mathbf{J}^0$. Замыкание оператора $\mathbf{J}^0$ определяет минимальный замкнутый симметричный оператор $\mathbf{J}_{\min}$ в $l^2(\mathbb{N};\mathbb{C}^p)$. В дальнейшем будем отождествлять минимальный оператор $\mathbf{J}_{\min}$ с матрицей $\mathbf{J}$ вида (1.9) и писать $\mathbf{J}_{\min}=\mathbf{J}$. Также полагаем $\mathbf{J}_{\max}=\mathbf{J}^*$.

Наконец, введем преобразование Фурье

$$\mathcal{F}:l^2_0(\mathbb{N};\mathbb{C}^m)\to\widetilde{L}^2(\Sigma;\mathcal{H}),\qquad \xi=\{\xi_j\}_0^\infty\to\mathcal{F}[\xi](t):=\widehat{\xi}(t)=\sum_0^\infty P_j^*(t)\xi_j\tag{1.10}$$

и заметим, что в силу (1.7) формулы $\xi_j=\int_{\mathbb{R}}P_j(t)\,d\Sigma(t)\widehat{\xi}(t)$, $j\in\mathbb{N}_0$, позволяют восстановить векторные коэффициенты $\xi_j(\in\mathbb{C}^m)$ из $\widehat{\xi}(t)$. Используя (1.10), (1.5) и (1.8), приходим к тождеству

$$A\mathcal{F}[\xi](t)=\sum_0^\infty tP_j(t)^*\xi_j=\sum_0^\infty[P_{j-1}^*(t)B_{j-1}+P_j^*(t)\mathcal{A}_j+P_{j+1}^*(t)B_j^*]\xi_j=\mathcal{F}[\mathbf{J}\xi](t),$$

означающему, что оператор $\mathbf{J}$ унитарно эквивалентен оператору $A=\overline{A'}$ (1.5), следовательно, $n_\pm(\mathbf{J})=n_\pm(A)$.

Оператор $\mathbf{J}=\mathbf{J}_{\min}$ симметричен, $\mathbf{J}\subset\mathbf{J}^*$, хотя не обязательно самосопряжен, т. е. индексы дефекта $n_\pm(\mathbf{J}):=\dim\mathfrak{N}_{\pm i}(\mathbf{J}):=\dim\ker(\mathbf{J}^*\mp iI)$ могут быть нетривиальными. Вообще говоря, $0\leqslant n_\pm(\mathbf{J})\leqslant m$ (см. [2,3,5]). Кроме того, есть еще одно ограничение: индексы достигают максимального значения только одновременно, т. е. $n_+(\mathbf{J})=m\iff n_-(\mathbf{J})=m$ (см. [1]). В работах [16,17] показано, что также справедливо обратное утверждение: для любой пары чисел $\{n_-,n_+\}$, удовлетворяющих неравенству $0\leqslant n_-,n_+<m$ либо $n_\pm=m$, существует блочная матрица Якоби $\mathbf{J}$ с $n_\pm(\mathbf{J})=n_\pm$.

Согласно М. Крейну [2,3] ассоциируем с матрицей $\mathbf{J}$ разностное матричное выражение

$$(LV)_n=\mathcal{B}_{n-1}^*V_{n-1}+\mathcal{A}_nV_n+\mathcal{B}_nV_{n+1},\qquad V_0=\mathbb{I}_m,\ V_{-1}=\mathbb{O}_m,\quad V_n\in\mathbb{C}^{m\times m},\ n\in\mathbb{N}_0.\tag{1.11}$$

Известно (см. [2,3,5]), что решение задачи Коши $(LV)_n=zV_n$ при начальных условиях (1.11) является последовательностью матричных многочленов $\{P_n(z)\}_0^\infty$. Последовательно находим

$$P_0(z)=\mathbb{I}_m,\quad P_1(z)=\mathcal{B}_0^{-1}(z\mathbb{I}_m-\mathcal{A}_0),\quad P_2(z)=\mathcal{B}_1^{-1}((z\mathbb{I}_m-\mathcal{A}_1)P_1(z)\mathcal{B}_0),\quad \dots.\tag{1.12}$$

Из (1.11) и (1.12) следует, что последовательность $\{P_n(z)\}_0^\infty$, будучи матричным решением системы (1.8), образует ортогональную систему в $L^2_{\text{mat}}(\Sigma;\mathcal{H})$ (см. (1.7)) с мерой $\Sigma(t):=P_{\mathcal{H}}E_{\mathbf{J}}(t)\restriction\mathcal{H}$, являющейся сужением любой спектральной (не обязательно ортогональной) меры $E_{\mathbf{J}}(t)$ блочной матрицы Якоби $\mathbf{J}$.

М. Крейном [2] (см. также [5]) было показано, что для любых $z \in \mathbb{C}_{\pm}$ существует матричный предел $H(z) = \lim\limits_{k\to\infty} \Big(\sum\limits_{n=0}^{k} P_n^*(\overline{z}) P_n(z) \Big)^{-1}$, где $\operatorname{rank}(H(z)) = n_{\pm}(\mathbf{J})$. Также им было установлено, что с каждой матрицей Якоби $\mathbf{J}$ ассоциирована некоторая матричная проблема моментов, и эта проблема имеет единственное (нормализованное) решение, если $n_-(\mathbf{J}) \cdot n_+(\mathbf{J}) = 0$. Более того, этот случай известен как определенный случай матричной проблемы моментов. Если $n_{\pm}(\mathbf{J}) = m$ (см. [2]), то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^*(\overline{z}) P_n(z) =: H^{-1}(z), \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{1.13}$$

равномерно сходится на компактных подмножествах в $\mathbb{C}$. Заметим, что в этом случае дефектное подпространство есть $\mathfrak{N}_z := \ker(\mathbf{J}^* - zI) = \{\{P_n(z)h\}_0^{\infty} : h \in \mathbb{C}^p\}$.

Тогда говорят, что для матрицы $\mathbf{J}$ (и соответствующей матричной проблемы моментов) имеет место вполне неопределенный случай (см. [2, 3] и [5, гл. VII, §2]). В этом случае для каждого матричного решения Σ соответствующей проблемы моментов (1.1) ряд (1.13) определяет воспроизводящее ядро подпространства $\widetilde{L}^2_{\mathrm{mat}}(\Sigma; \mathcal{H})$ целых матричных функций, порожденных матричными многочленами $\{P_n(z)\}_0^{\infty}$ в $L^2(\mathbb{R}; \Sigma)$. Известно (см. [2, 3] и [4] при $m = 1$), что подпространство $\widetilde{L}^2_{\mathrm{mat}}(\Sigma; \mathcal{H})$ состоит из целых матричных функций минимального экспоненциального типа: $\lim\limits_{|z|\to\infty} \frac{\ln \|H^{-1}(z)\|}{|z|} = 0$.

Задача вычисления индексов дефекта матриц Якоби является первой главной проблемой, естественным образом возникающей в спектральной теории как таких матриц, так и соответствующих проблем моментов. М.Г. Крейном (см. [2, 3]) было установлено, что матричная проблема моментов, ассоциированная с матрицей Якоби $\mathbf{J}$, имеет единственное решение (нормализованное в определенном смысле) тогда и только тогда, когда одно из чисел n_- или n_+ равно нулю. Этот вопрос привлекает существенное внимание, в частности, в течение последних двадцати лет (см., например, [2, 3, 6–12, 16–18, 20–26, 30]). Особенно выделим недавние работы [31] ($m = 1$) и [7–10] ($m \geqslant 1$), где были найдены новые различные условия самосопряженности блочных матриц Якоби.

В недавних работах [8–11] были установлены некоторые условия дискретности блочных матриц Якоби. Они покрывают ряд предыдущих результатов в скалярном случае ($m = 1$) (см. [13, 14, 19]).

Мы посвящаем эту работу нашему другу, коллеге и замечательному математику Николаю Дмитриевичу Копачевскому, который ушел из жизни 18 мая 2020 г. Он был создателем и душой Крымской осенней математической школы-симпозиума с 1990 г. Эта школа была замечательным математическим явлением с исключительно теплой и неповторимой атмосферой. Каждый из нас провел в ней много незабываемых минут.

2. Условия самосопряженности блочных матриц Якоби

В скалярном случае ($m = 1$) первое условие самосопряженности матрицы Якоби $\mathbf{J}$ получено Карлеманом (см. [4, 5]) и в настоящее время широко известно. Этот результат был обобщен на матричный случай Березанским [5, теорема VII.2.9] и выглядит так.

Теорема 2.1 (см. [5], тест Карлемана)**.** *Предположим, что*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|\mathcal{B}_j\|^{-1} = +\infty. \tag{2.1}$$

Тогда (*минимальный*) *оператор Якоби* $\mathbf{J}$ *самосопряжен, т. е.* $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\min} = \mathbf{J}_{\max} = \mathbf{J}^*$.

Условие (2.1) не является необходимым для самосопряженности оператора $\mathbf{J}$ даже в скалярном случае ($m = 1$). Для демонстрации этого факта рассмотрим блочную матрицу Якоби:

$$\mathbf{J}' = \begin{pmatrix} 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b_0 & 0 & b_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b_0 & 0 & b_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & b_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Утверждение 2.1. *Пусть $\mathbf{J}'$ — матрица Якоби вида* (2.2) *с произвольной последовательностью $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Тогда матрица $\mathbf{J}'$ является самосопряженной, т. е. $n_\pm(\mathbf{J}') = 0$.*

Доказательство. Из уравнений (1.11) при $\mathcal{A}_n = 0$ и $\mathcal{B}_n = b_n$ или из выражений (1.12) следует, что $P_{2j-1}(0) = Q_{2j}(0) = 0$, $P_{2j}(0) = (-1)^j b_{2j-1}^{-1} b_{2j-2} b_{2j-3}^{-1} \dots b_1^{-1} b_0$, $Q_{2j+1}(0) = (-1)^j b_{2j}^{-1} b_{2j-1} b_{2j-2}^{-1} \dots b_1 b_0^{-1}$. Учитывая эти соотношения и вид матрицы (2.2), получаем $P_{2j}(0) = (-1)^j$, $Q_{2j+1}(0) = (-1)^j$ и, следовательно, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(P_n^2(0) + Q_n^2(0)) = \infty$. Согласно [4, с. 108], это соотношение эквивалентно самосопряженности матрицы $\mathbf{J}'$ (см. также [27, утверждение 10] для доказательства этого результата методами теории расширений). ☐

Однако условие (2.1) является точным для некоторых классов матриц Якоби. Более точно, Березанским было показано (см. [5, теорема VII.1.5] и [4, гл. I, с. 39]), что если $m = 1$ и условие (2.1) нарушено, то при определенных дополнительных предположениях об элементах $\mathcal{A}_n$ и $\mathcal{B}_n$ оператор $\mathbf{J}$ удовлетворяет $n_\pm(\mathbf{J}) = 1$. Матричный вариант этого результата, а также его обобщения будут рассмотрены в разделе 3.

Следующий результат о самосопряженности был впервые получен Петропулу и Веласкесом [31] в скалярном случае. Далее он был обобщен на матричный случай Бройтигам и Мирзоевым [7, теоремы 12–16].

Теорема 2.2 (см. [7])**.** *Оператор Якоби $\mathbf{J}$, индуцированный матрицей Якоби* (1.9)*, самосопряжен, если элементы $\mathcal{A}_n$ обратимы и выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

(i) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\|\mathcal{B}_n\| F_{1,n}} = \infty$, $F_{1,n} = \|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_n\| + \|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_{n-1}^*\|$;

(ii) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\|\mathcal{B}_n\| F_{2,n}} = \infty$, *где* $F_{2,n} = \|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_{n-1}^*\|\big(\|\mathcal{A}_{n-1}^{-1}\mathcal{B}_{n-2}^*\| + \|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_{n-1}\|\big) + \|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_n\|\big(\|\mathcal{A}_{n+1}^{-1}\mathcal{B}_n^*\| + \|\mathcal{A}_{n+1}^{-1}\mathcal{B}_{n+1}\|\big)$;

(iii) *если существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что при $n \geqslant N-1$ имеем* $\|\mathcal{A}_{n-1}^{-1}\mathcal{B}_{n-1}\|^2 + \|\mathcal{A}_{n+1}^{-1}\mathcal{B}_n^*\|^2 < \frac{1}{2}$, $n \geqslant N$;

(iv) *если существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что при $n \geqslant N-2$ имеем* $\|\mathcal{A}_{n-1}^{-1}\mathcal{B}_{n-1}\|^2\big(\|\mathcal{A}_{n-2}^{-1}\mathcal{B}_{n-2}\|^2 + \|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_{n-1}^*\|^2\big) + \|\mathcal{A}_{n+1}^{-1}\mathcal{B}_n^*\|^2\big(\|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_n\|^2 + \|\mathcal{A}_{n+2}^{-1}\mathcal{B}_{n+1}^*\|^2\big) < \frac{1}{4}$, $n \geqslant N$.

Доказательство этого результата в [7] существенно опирается на технику матричных ортогональных многочленов второго рода. Последние определяются как последовательность $\{Q_n(\cdot)\}_1^\infty$, образующая второе матричное решение разностной системы (1.11), удовлетворяющее начальным условиям $Q_0(\cdot) := \mathbb{O}_m$, $Q_1(\cdot) := \mathcal{B}_0^{-1}$.

Следующий результат о самосопряженности был получен недавно первыми двумя авторами в [9, 10]. Он расширяет и усиливает теорему 2.2.

Теорема 2.3 (см. [9, 10])**.** *Пусть $\mathbf{J}$ — блочная матрица Якоби вида* (1.9)*, и пусть $\mathcal{A} := \operatorname{diag}\{\mathcal{A}_0, \dots, \mathcal{A}_n, \dots\}$ — ее блочно-диагональная часть с $\ker\mathcal{A} = \{0\}$. Положим также, что при некотором $N \in \mathbb{N}_0$*

$$a_1(N) := \sup_{n\geqslant N}\Big(\|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_n\| + \|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_{n-1}^*\|\Big) < \infty, \tag{2.3}$$

$$a_2(N) := \sup_{n\geqslant N}\Big(\|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_n\| + \|\mathcal{A}_{n+2}^{-1}\mathcal{B}_{n+1}^*\|\Big) < \infty. \tag{2.4}$$

Если $a_1(N)a_2(N) \leqslant 1$, то оператор $\mathbf{J}$ существенно самосопряжен в $\operatorname{dom}\mathcal{A}(\subset l^2(\mathbb{N}_0;\mathbb{C}^m))$. При этом $\mathbf{J}$ самосопряжен в $\operatorname{dom}\mathbf{J} = \operatorname{dom}\mathcal{A}$, если неравенство строгое: $a_1(N)a_2(N) < 1$.

Доказательство этой теоремы основано на тесте Шура и теореме Като—Реллиха.

Следствие 2.1 (см. [9,10]). *Пусть выполнены условия теоремы* 2.3. *Пусть также выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

(i) $a_1(N) \leqslant 1$ *и* $a_2(N) \leqslant 1$,
(ii) $a_1(N) \leqslant 1$ *и* $a_2(N) < 1$ ($a_1(N) < 1$ *и* $a_2(N) \leqslant 1$).

Тогда (*минимальный*) *блочный оператор Якоби* $\mathbf{J}$ *самосопряжен.*

Следствие 2.2 (см. [9,10]). *Пусть* $\mathbf{J}$ — *блочная матрица Якоби вида* (1.9), *пусть* $\mathcal{A} := \operatorname{diag}\{\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_n, \ldots\}$, $\ker \mathcal{A} = \{0\}$, *и пусть* $s \in [1; +\infty)$. *Положим также, что для некоторого* $N \in \mathbb{N}_0$ *выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

$$\text{(i)}\quad b_1(N,s) := \sup_{n \geqslant N} \Big(\|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_n\|^s + \|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_{n-1}^*\|^s \Big) \leqslant \frac{1}{2^{s-1}}; \tag{2.5}$$

$$\text{(ii)}\quad b_2(N,s) := \sup_{n \geqslant N} \Big(\|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_n\|^s + \|\mathcal{A}_{n+2}^{-1}\mathcal{B}_{n+1}^*\|^s \Big) \leqslant \frac{1}{2^{s-1}}; \tag{2.6}$$

$$\text{(iii)}\quad \sup_{n \geqslant N} \|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_n\| \leqslant \frac{1}{2}, \qquad \sup_{n \geqslant N} \|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_{n-1}^*\| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{2.7}$$

Тогда оператор $\mathbf{J}$ *существенно самосопряжен в* $\operatorname{dom} \mathcal{A}$. *При этом* $\mathbf{J}$ *самосопряжен в* $\operatorname{dom} \mathbf{J} = \operatorname{dom} \mathcal{A}$, *если неравенства* (2.5) *и* (2.6) *строгие.*

Замечание 2.1.

(i) Заметим, что в соответствии с неравенством о степенных средних функции $b_1(N,s)$ и $b_2(N,s)$ монотонно возрастают по s, т. е. $s_1 < s_2 \Longrightarrow b_j(N,s_1) < b_j(N,s_2)$, $j \in \{1,2\}$, следовательно, условия (2.5) и (2.6) становятся более ограничительными при возрастании s. В частности, условия (2.5) и (2.6) более ограничительны, чем условия (2.3) и (2.4), соответственно.
(ii) Следствие 2.2 (ii) при $s = 2$ в случае строгого неравенства в (2.6) было доказано другим методом в [7] (теорема 2.2 (iii)).

Наконец, перейдем к недавним результатам по самосопряженности оператора $\mathbf{J}$, полученным недавно Свидерским [33].

Теорема 2.4 (см. [33, теорема 1]). *Положим* $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathcal{B}_n^{-1}\| = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathcal{B}_n^{-1}\mathcal{A}_n\| = 0$, *а также*[1] $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\|[\mathcal{B}_{n+1}\mathcal{B}_{n+1}^* - \mathcal{B}_n^*\mathcal{B}_n]^-\|}{\|\mathcal{B}_n\|^2} < \infty$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\|\mathcal{B}_n\mathcal{A}_{n+1} - \mathcal{A}_n\mathcal{B}_n\|}{\|\mathcal{B}_n\|^2} < \infty$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\|\mathcal{B}_n\|^2} = \infty$. *Тогда оператор Якоби* $\mathbf{J}$ *самосопряжен.*

Далее при $m = 1$ рассмотрим оператор Якоби $\mathbf{J}$, ассоциированный с последовательностями вида

$$\mathcal{B}_{kN+i} = \beta_i \tilde{\mathcal{B}}_k, \quad \mathcal{A}_{kN+i} = \alpha_i \tilde{\mathcal{B}}_k, \quad (i = 0, 1, \ldots, N-1;\ k \geqslant 0), \tag{2.8}$$

где α и β — N-периодические последовательности и $\tilde{\mathcal{B}}$ — положительная последовательность. Последовательности α и β называются *модулирующими последовательностями*. Оказывается, что спектральные свойства оператора $\mathbf{J}$ зависят от следа такой матрицы:

$$\mathcal{F}(0) := \prod_{i=1}^{N} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\beta_{n-1}}{\beta_n} & -\frac{\alpha_i}{\beta_i} \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Следующая теорема показывает, что в такой постановке оператор $\mathbf{J}$ всегда будет самосопряженным, независимо от последовательности $\tilde{\mathcal{B}}$.

Теорема 2.5 (см. [32, теорема A]). *Пусть* $m = 1$, *и пусть число* N *положительно. Положим* $\mathcal{F}(0) = \gamma\mathbb{I}$ *для некоторого* $|\gamma| = 1$, *где матрица* $\mathcal{F}(0)$ *определена в* (2.9). *Тогда оператор* $\mathbf{J}$, *ассоциированный с последовательностями* (2.8), *всегда самосопряжен и* $0 \notin \sigma_p(\mathbf{J})$.

[1] Для любого оператора $X = X^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ положим $X^- = XE_X(-\infty, 0)$ где $E_X(-\infty,0)$ — спектральная проекция.

3. Блочные матрицы Якоби с максимальными индексами дефекта

В этой главе будут даны некоторые недавние результаты о матрицах $\mathbf{J}$ с максимальными индексами дефекта $n_\pm(\mathbf{J}) = m$. Первый результат в этом направлении был получен Березанским (см. [5, гл. VII, теорема 1.5]) и гласит следующее.

Теорема 3.1 (см. [5]). *Пусть $m = 1$ и пусть $\mathbf{J}$ — скалярная матрица Якоби* (1.9) *с элементами $a_n = \mathcal{A}_n \in \mathbb{R}$ и $b_n = \mathcal{B}_n \in \mathbb{R}$, $b_n > 0$. Положим $|a_n| \leqslant C$ и $b_{n-1} \cdot b_{n+1} \leqslant b_n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $n_\pm(\mathbf{J}) = 1$ при нарушении условия Карлемана* (2.1), *т. е.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^{-1} < +\infty$.

Следующий результат получен Костюченко и Мирзоевым под влиянием теоремы 3.1 и может считаться ее далеко идущим обобщением.

Теорема 3.2 (см. [24, теорема 4]). *Положим, что $\|\mathcal{A}_n\| \leqslant C$, $n \in \mathbb{N}_0$ и*

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \|\mathcal{B}_j^{*-1}\mathcal{B}_{j+1}{\mathcal{B}_{j+2}^{*}}^{-1}\dots\mathcal{B}_{j+2s-1}{\mathcal{B}_{j+2s}^{*}}^{-1}\| < +\infty.$$

Тогда индексы дефекта оператора Якоби $\mathbf{J}$ максимальны, т. е. $n_\pm(\mathbf{J}) = m$.

Положим, что обобщенная симметричная матрица Якоби $\mathbf{J}_k^{(0)}$ имеет только две ненулевых диагонали. А именно, пусть элементы $\mathcal{C}_{ij}$ этой матрицы удовлетворяют следующим условиям: $\mathcal{C}_{ij} = 0$, если $|i-j| \neq k$, $\mathcal{C}_{i,i+k} = \mathcal{B}_i$, и $\mathcal{C}_{ij} = \mathcal{C}_{ji}^*$, $i, j \in \mathbb{N}_0$, где k — известное положительное целое число и $\mathcal{B}_i$ — последовательность обратимых $m \times m$ матриц.

Теорема 3.3 (см. [25, теорема 1.1]). *Матрица Якоби $\mathbf{J}_k^{(0)}$ имеет максимальные индексы дефекта тогда и только тогда, когда матричные элементы $\mathcal{B}_i$ удовлетворяют условиям* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|\mathcal{B}_{(2j-1)k+s}^{-1}\mathcal{B}_{(2j-2)k+s}^{*}\dots\mathcal{B}_{k+s}^{-1}\mathcal{B}_s^*\|^2 < +\infty$ *при $s = 0, 1, \dots, 2k-1$.*

Следующий результат является прямым обобщением теоремы Березанского 3.1 на случай блочных матриц и совпадает с ней при $m = 1$ и $k = 1$.

Следствие 3.1 (см. [25, следствие 1.3]). *Положим, что неравенства $\|\mathcal{B}_{j-k}\|\cdot\|\mathcal{B}_{j+k}\| \leqslant \|\mathcal{B}_j^{-1}\|^{-2}$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|\mathcal{B}_j\|^{-1} < +\infty$ выполнены, начиная с некоторого $j > k$. Тогда матрица Якоби $\mathbf{J}_k^{(0)}$ имеет максимальные индексы дефекта.*

Согласно [26], введем матрицы $\mathcal{C}_n$, полагая $\mathcal{C}_0 := \mathcal{B}_1^{*-1}$, $\mathcal{C}_1 := \mathbb{I}_m$, и

$$\mathcal{C}_n = \begin{cases} (-1)^j\mathcal{B}_{2j-1}^{-1}\mathcal{B}_{2j}^{*}\dots\mathcal{B}_2^{*}\mathcal{B}_1^{-1}, & \text{если } n = 2j, \\ (-1)^j\mathcal{B}_{2j}^{-1}\mathcal{B}_{2j-1}^{*}\dots\mathcal{B}_2^{-1}\mathcal{B}_1^{*}, & \text{если } n = 2j+1, \end{cases} \qquad j \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Теорема 3.4 (см. [26]). *Пусть последовательность $\{\mathcal{C}_n\}_0^\infty$ задана выражением* (3.1). *Если выполнены условия*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|\mathcal{C}_n\|^2 < +\infty \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \|\mathcal{C}_n^*\mathcal{A}_n\mathcal{C}_n\| < +\infty, \tag{3.2}$$

то для матрицы $\mathbf{J}$ вида (1.9) *имеет место вполне неопределенный случай, т. е. $n_\pm(\mathbf{J}) = m$.*

Следствие 3.2 (см. [26, следствие 1]). *Пусть элементы матрицы $\mathbf{J}$ удовлетворяют условиям* $\|\mathcal{B}_{n-1}\|\cdot\|\mathcal{B}_{n+1}\| \leqslant \|\mathcal{B}_n^{-1}\|^{-2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}_n\|^{-1} < +\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{A}_n\|\cdot\|\mathcal{B}_n\|^{-1} < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда $n_\pm(\mathbf{J}) = m$.*

Следствие 3.2 является обобщением теоремы, полученной Березанским (см. [5, гл. VIII, §1, п. 2, теорема 1.5]) о вполне неопределенности матриц Якоби со скалярными элементами.

Теорема 3.5 (см. [26, теорема 1]). *Пусть элементы матрицы $\mathbf{J}$ удовлетворяют условиям* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\|\mathcal{C}_n\|^2 < +\infty$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} n\|\mathcal{C}_{2n+i}^*\mathcal{A}_{2n+i}\mathcal{C}_{2n+i}\| < \frac{1}{2}$ $(i = 0, 1)$. *Тогда для блочной матрицы Якоби $\mathbf{J}$ имеет место вполне неопределенный случай, т. е. $n_\pm(\mathbf{J}) = m$.*

4. Матрицы Якоби с промежуточными индексами дефекта

В этом разделе представлены некоторые результаты о промежуточных индексах дефекта блочных матриц Якоби $\mathbf{J}$. Сначала отметим, что в соответствии с результатом, полученным Дюкаревым [16], для любой допустимой пары неотрицательных целых чисел $n_\pm \leqslant m$ существует блочная матрица Якоби $\mathbf{J}$, где $n_\pm(\mathbf{J}) = \mathbf{n}_\pm$.

Следующий результат принадлежит Костюченко и Мирзоеву [24, теорема 3] (см. также недавнюю работу [7]).

Теорема 4.1 (см. [7, 24]). *Пусть выполнено одно из условий*:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}_n^{-1}\| = +\infty$; (ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}_{n+1}^{-1}\mathcal{A}_{n+1}\mathcal{B}_n^{-1}\| = +\infty$;

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}_{n+1}^{-1}(\mathcal{A}_{n+2}\mathcal{B}_{n+1}^{-1}\mathcal{A}_{n+1} - \mathcal{B}_{n+1}^*)\mathcal{B}_n^{-1}\| = +\infty$.

Тогда индексы дефекта оператора Якоби $\mathbf{J}$ *не являются максимальными.*

В случае $m = 1$ условие (i) теоремы 4.1 совпадает с условием Карлемана (2.1), а условие (ii) совпадает с условием Денниса—Уолла (см. [4, гл. I, Дополнения и задачи, 2, с. 37]). В работе [7] можно найти другие более громоздкие формулы, обеспечивающие то же утверждение.

Следующий результат был получен Дюкаревым в [17].

Теорема 4.2 (см. [17, теорема 2]). *Пусть целые числа* $m \geqslant 1$ *и* $m_1 \geqslant 0$ *удовлетворяют условию* $0 \leqslant m_1 \leqslant m$, *а диагональные элементы матриц* $\widetilde{\mathcal{B}}_n$ *и* $\mathcal{R}_n$ *определяются формулами*

$$\widetilde{\mathcal{B}}_n = \operatorname{diag}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{n+1}}_{m_1}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m-m_1}\Bigg), \quad n \geqslant 0 \quad \textit{и} \quad \mathcal{R}_0 = \mathbb{I}_m, \quad \mathcal{R}_n = \sqrt{\mathbb{I}_m + \widetilde{\mathcal{B}}_{n-1}^2}, \quad n \geqslant 1.$$

Далее, пусть блоки $\mathcal{A}_n$ *и* $\mathcal{B}_n$ *матриц Якоби* $\mathbf{J}_{\mathrm{Dyuk}}$(1.9) *имеют вид* $\mathcal{A}_n = \mathbb{O}_m$, $n \geqslant 0$, $\mathcal{B}_0 = \widetilde{\mathcal{B}}_0$, $\mathcal{B}_n = \widetilde{\mathcal{B}}_{n-1}^{-1}\mathcal{R}_n\widetilde{\mathcal{B}}_n^{-1}$, $n \geqslant 1$. *Тогда* $n_\pm(\mathbf{J}_{\mathrm{Dyuk}}) = m_1$.

5. Дискретность спектра блочных матриц Якоби

В этом разделе представлены недавние результаты о дискретности спектра блочных матриц Якоби.

Теорема 5.1 (см. [32, теорема B]). *Пусть* $m = 1$, *и пусть выполнены предположения теоремы* 2.5. *Если* $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k}{\widetilde{\mathcal{B}}_k} = 0$, *то* $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathbf{J}) = \varnothing$.

Заключение теоремы 5.1 было известно только при $\alpha_n \equiv 0$ и $\beta_n \equiv 1$. В частности, это доказали Домбровски и Педерсен [15].

Как обычно, через $\mathcal{S}_p(\mathfrak{H})$ обозначим идеал Неймана—Шатена в $\mathfrak{H}$.

Теорема 5.2 (см. [9, 10]). *Пусть* $\mathbf{J}$ — *минимальный оператор Якоби, ассоциированный с блочной матрицей Якоби* (1.9) *в* $l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m)$, *и пусть* $\mathcal{A} := \operatorname{diag}\{\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n, \ldots\}$, $\ker\mathcal{A} = \{0\}$. *Предположим, что* $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$ *и* $p \in (0, \infty]$. *Пусть также* $a_1(N)$ *и* $a_2(N)$ *определены в* (2.3) *и* (2.4), *соответственно, и пусть выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

(i) $\sqrt{a_1(N)a_2(N)} < 1$;

(ii) $a_1(N) \leqslant 1$ *и* $a_2(N) < 1$ ($a_1(N) < 1$ *и* $a_2(N) \leqslant 1$);

(iii) *для некоторых* $N \in \mathbb{N}_0$ *и* $s \in [1; +\infty)$

$$\sup_{n\geqslant N}\Big(\|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_n\|^s + \|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_{n-1}^*\|^s\Big) < \frac{1}{2^{s-1}}; \tag{5.1}$$

(iv) *для некоторых* $N \in \mathbb{N}_0$ *и* $s \in [1; +\infty)$

$$\sup_{n\geqslant N}\Big(\|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_n\|^s + \|\mathcal{A}_{n+2}^{-1}\mathcal{B}_{n+1}^*\|^s\Big) < \frac{1}{2^{s-1}}; \tag{5.2}$$

(v) *для некоторого* $N \in \mathbb{N}_0$

$$\sup_{n \geqslant N} \|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_n\| < \frac{1}{2}, \qquad \sup_{n \geqslant N} \|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_{n-1}^*\| < \frac{1}{2}. \tag{5.3}$$

Тогда оператор $\mathbf{J}$ *самосопряжен и* $\mathbf{J}^{-1} \in \mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$.

Как обычно, обозначим модуль матрицы $\mathcal{A}_n$ через $|\mathcal{A}_n| := \sqrt{\mathcal{A}_n^2}$.

Теорема 5.3 (см. [10])**.** *Пусть* $\mathbf{J}$ — *минимальный оператор Якоби, ассоциированный с блочной матрицей Якоби вида* (1.9) *в* $l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m)$*, и пусть* $\mathcal{A} := \operatorname{diag}\{\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n, \ldots\} (= \mathcal{A}^*)$.

(1) *Положим* $0 \in \rho(\mathcal{A})$, $s \in [1; +\infty)$, *и пусть выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

(i) $$\limsup_{n\to\infty} \Big(\big\| |\mathcal{A}_n|^{-1/2} \cdot \mathcal{B}_n \cdot |\mathcal{A}_{n+1}|^{-1/2} \big\| + \big\| |\mathcal{A}_{n+2}|^{-1/2} \cdot \mathcal{B}_{n+1}^* \cdot |\mathcal{A}_{n+1}|^{-1/2} \big\| \Big) < 1; \tag{5.4}$$

(ii) $$\limsup_{n\to\infty} \Big(\big\| |\mathcal{A}_n|^{-1/2} \cdot \mathcal{B}_n \cdot |\mathcal{A}_{n+1}|^{-1/2} \big\|^s + \big\| |\mathcal{A}_n|^{-1/2} \cdot \mathcal{B}_{n-1}^* \cdot |\mathcal{A}_{n-1}|^{-1/2} \big\|^s \Big) < \frac{1}{2^{s-1}}; \tag{5.5}$$

(iii) $$\limsup_{n\to\infty} \big\| |\mathcal{A}_{n+1}|^{-1/2} \cdot \mathcal{B}_n^* \cdot |\mathcal{A}_n|^{-1/2} \big\| < \frac{1}{2}. \tag{5.6}$$

Тогда оператор $\mathbf{J}$ *является симметричным в* $l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m)$ *с равными индексами дефекта и допускает самосопряженное расширение* $\widetilde{\mathbf{J}} = \widetilde{\mathbf{J}}^*$ *с* $0 \in \rho(\widetilde{\mathbf{J}})$.

(2) *Если, кроме того,* $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$ *для некоторого* $p \in (0; \infty]$, *то резольвента любого самосопряженного расширения лежит в классе* $\mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$, *в частности,* $\widetilde{\mathbf{J}}^{-1} \in \mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$. *Более того, если* $\mathbf{J} = \mathbf{J}^*$, *то* $\mathbf{J}^{-1} \in \mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$.

(3) *Если оператор* $\mathcal{A}$ *имеет дискретный спектр, то любое самосопряженное расширение оператора* $\mathbf{J}$, *включая* $\widetilde{\mathbf{J}}$, *также имеет дискретный спектр. В частности, если* $\mathbf{J} = \mathbf{J}^*$, *то его спектр дискретен.*

В скалярном случае пункт (iii) теоремы 5.3 представляет собой результат Кожухари и Янаса [14] (см. также [13]).

Следствие 5.1 (см. [13, 14])**.** *Пусть* $m = 1$, *и пусть* $\mathbf{J}$ — *скалярная матрица Якоби вида* (1.9) *с элементами* $a_n = \mathcal{A}_n \in \mathbb{R}$ *и* $b_n = \mathcal{B}_n \in \mathbb{C}$. *Положим также, что*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty \qquad \text{и} \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{|b_n|^2}{|a_n a_{n+1}|} < \frac{1}{4}. \tag{5.7}$$

Если $\mathbf{J} = \mathbf{J}^*$, *то его спектр дискретен.*

Замечание 5.1.

(i) Следствие 5.1 было получено Кожухари и Янасом [14] другим способом. Иначе говоря, условие дискретности в скалярном случае можно найти в [13]. Если $\mathbf{J} \neq \mathbf{J}^*$, то $n_\pm(\mathbf{J}) = 1$ и каждое самосопряженное расширение $\mathbf{J}$ дискретно. В этом случае условия (5.7) теряют силу для дискретности.

(ii) В скалярном случае ($m = 1$) дискретность спектра матрицы Якоби $\mathbf{J} = \mathbf{J}^*$ была доказана Янасом и Набоко в [19] с использованием другого метода при условиях $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n^2 + b_{n-1}^2}{a_n^2} < \frac{1}{2}$, $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что первое условие означает дискретность диагональной части $\mathcal{A}$ матрицы $\mathbf{J}$, а второе условие совпадает с условием (5.1) для $s = 2$.

(iii) В скалярном случае ($m = 1$) другое условие дискретности матрицы Якоби $\mathbf{J}$ было установлено Свидерски в недавней работе [32, теорема B (c)].

(iv) Следует отметить, что условия (5.4)–(5.6) не гарантируют самосопряженности матрицы $\mathbf{J}$ в общем случае. Более того, для любых значений $k \leqslant m$ существуют матрицы Якоби $\mathbf{J}$ с нетривиальными индексами $n_+(\mathbf{J}) = n_-(\mathbf{J}) = k$, удовлетворяющие (5.6). Простые примеры таких матриц $\mathbf{J}$ естественным образом возникают в связи с операторами Дирака с точечными взаимодействиями (см. утверждение 6.4 ниже).

6. Индексы дефекта и дискретность спектра некоторых классов матриц Якоби

В этом разделе, следуя недавним работам [9–11], рассмотрим самосопряженность и дискретность некоторых классов блочных матриц Якоби. В [9–11, 20, 21, 23] показано, что определенные спектральные свойства матриц Якоби этих классов строго коррелируют со свойствами операторов Шредингера и Дирака с точечными взаимодействиями.

6.1. Матрицы Якоби классов $\mathcal{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H},m)$ и $\mathcal{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H},m)$. Обозначим через $\mathcal{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H},m)$ класс блочных матриц Якоби вида

$$\mathbf{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1^2}\widetilde{\alpha}_1 & \frac{1}{r_1r_2d_2}\mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \frac{1}{r_1r_2d_2}\mathbb{I}_m & \frac{1}{r_2^2}\widetilde{\alpha}_2 & \frac{1}{r_2r_3d_3}\mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \frac{1}{r_2r_3d_3}\mathbb{I}_m & \frac{1}{r_3^2}\widetilde{\alpha}_3 & \frac{1}{r_3r_4d_4}\mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & -\frac{1}{r_3r_4d_4}\mathbb{I}_m & \frac{1}{r_4^2}\widetilde{\alpha}_4 & \frac{1}{r_4r_5d_5}\mathbb{I}_m & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Здесь $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}(\subset\mathbb{R}_+)$, $r_n := \sqrt{d_n+d_{n+1}}$, и

$$\widetilde{\alpha}_n := \alpha_n + \Big(\frac{1}{d_n}+\frac{1}{d_{n+1}}\Big)\mathbb{I}_m, \qquad \alpha_n=\alpha_n^*\subset\mathbb{C}^{m\times m}, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{6.1}$$

Применяя теоремы 5.2 и 5.3 к матрицам $\mathbf{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$, получаем следующие два результата.

Теорема 6.1 (см. [9, 10]). *Пусть* $\mathcal{A} := \operatorname{diag}\big\{\frac{\widetilde{\alpha}_1}{r_1^2},\frac{\widetilde{\alpha}_2}{r_2^2},\dots\big\}$, *где* $\widetilde{\alpha}_n$ *определено в* (6.1) *и* $\ker\mathcal{A}=\{0\}$. *Положим также, что выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

$$\text{(i)} \quad \limsup_{n\to\infty}\frac{r_n}{k_n}\big\|\widetilde{\alpha}_n^{-1}\big\| < \frac{1}{2}, \quad k_n := \min\{r_{n-1}d_n; r_{n+1}d_{n+1}\}; \tag{6.2}$$

$$\text{(ii)} \quad \limsup_{n\to\infty} r_n^s\Big(\frac{1}{r_{n-1}^sd_n^s}+\frac{1}{r_{n+1}^sd_{n+1}^s}\Big)\big\|\widetilde{\alpha}_n^{-1}\big\|^s < \frac{1}{2^{s-1}}, \quad s\in[1;+\infty); \tag{6.3}$$

$$\text{(iii)} \quad \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{r_{n+1}^s}\left(\frac{r_n^s}{d_{n+1}^s}\big\|\widetilde{\alpha}_n^{-1}\big\|^s+\frac{r_{n+2}^s}{d_{n+2}^s}\big\|\widetilde{\alpha}_{n+2}^{-1}\big\|^s\right) < \frac{1}{2^{s-1}}, \quad s\in[1;+\infty). \tag{6.4}$$

Тогда матрица Якоби $\mathbf{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ является самосопряженной, а ее спектр дискретен.

Кроме того, если какое-либо из условий (6.2), (6.3), (6.4) *выполняется при замене знака неравенства на знак равенства, то матрица $\mathbf{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ будет самосопряженной.*

Теорема 6.2 (см. [10]). *Пусть диагональ* $\mathcal{A}^{(1)} := \operatorname{diag}\big\{\frac{\widetilde{\alpha}_1}{r_1^2},\frac{\widetilde{\alpha}_2}{r_2^2},\dots\big\}$ *матрицы Якоби* $\mathbf{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *имеет дискретный спектр,* $\ker\mathcal{A}^{(1)}=\{0\}$, *и пусть* $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{1}{d_{n+1}}\big\||\widetilde{\alpha}_n|^{-1/2}\cdot|\widetilde{\alpha}_{n+1}|^{-1/2}\big\| < \frac{1}{2}$. *Тогда*:

(1) $n_+(\mathbf{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) = n_-(\mathbf{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) \leqslant m$, *и спектр любого самосопряженного расширения матрицы* $\mathbf{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *дискретен. В частности, матрица* $\mathbf{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *имеет дискретный спектр, когда она самосопряжена.*

(2) *Если, кроме того,* $\{d_n\}_1^\infty\notin l^2(\mathbb{N})$, *то матрица* $\mathbf{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *самосопряжена и дискретна.*

Обозначим через $\mathcal{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H},m)$ множество, состоящее из блочных матриц Якоби вида

$$\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H}) = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_p & \frac{1}{d_1^2}\mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \frac{1}{d_1^2}\mathbb{I}_p & -\frac{1}{d_1^2}\mathbb{I}_p & \frac{1}{d_1^{3/2}d_2^{1/2}}\mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & \frac{1}{d_1^{3/2}d_2^{1/2}}\mathbb{I}_p & \frac{\alpha_1}{d_2} & \frac{1}{d_2^2}\mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \frac{1}{d_2^2}\mathbb{I}_p & -\frac{1}{d_2^2}\mathbb{I}_p & \frac{1}{d_2^{3/2}d_3^{1/2}}\mathbb{I}_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \frac{1}{d_2^{3/2}d_3^{1/2}}\mathbb{I}_p & \frac{\alpha_2}{d_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Применяя снова теоремы 5.2 и 5.3 к матрицам $\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$, приходим к следующим результатам.

Теорема 6.3 (см. [10,11]). *Пусть диагональная матрица* $\mathcal{A}' := \operatorname{diag}\left\{\frac{\alpha_1}{d_2}, \frac{\alpha_2}{d_3}, \dots\right\}$ (*часть диагонали* $\mathcal{A}^{(2)}$ *матрицы* $\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})(\in \mathcal{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H}, m))$ *имеет дискретный спектр,* $\ker \mathcal{A}' = \{0\}$, *и пусть*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\left\||\alpha_n|^{-1/2}\right\|}{d_n^{1/2}} < \frac{1}{2}, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{\left\||\alpha_n|^{-1/2}\right\|}{d_{n+1}^{1/2}} < \frac{1}{2}. \tag{6.5}$$

Тогда:

(1) $n_+(\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) = n_-(\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) \leqslant m$, *и спектр любого самосопряженного расширения матрицы* $\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *дискретен. В частности, матрица* $\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *имеет дискретный спектр, когда она самосопряжена.*

(2) *Если, кроме того,* $\{d_n\}_1^\infty \notin l^2(\mathbb{N})$, *тогда матрица* $\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *самосопряжена и ее спектр дискретен.*

Утверждение 6.1 (см. [10]). *Пусть* $\{d_n\}_{n=1}^\infty \in l^{2p}(\mathbb{N})$ *при* $p \in (\frac{1}{2}, \infty]$, $\mathcal{A}' := \operatorname{diag}\left\{\frac{\alpha_1}{d_2}, \frac{\alpha_2}{d_3}, \dots\right\}$, *и пусть выполнены условия* (6.5). *Если также* $(\mathcal{A}')^{-1} \in \mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$, *то справедливы следующие утверждения*:

(i) $n_+(\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) = n_-(\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) \leqslant m$;

(ii) $(\widetilde{\mathbf{J}}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H}) - i\mathbb{I})^{-1} \in \mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$ *для любого самосопряженного расширения* $\widetilde{\mathbf{J}}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *матрицы* $\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$.

Более того, если $\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H}) = \left(\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})\right)^*$, *то* $(\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H}) - i\mathbb{I})^{-1} \in \mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$.

6.2. Матрицы Якоби классов $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}, m)$ и $\mathcal{J}_{X,\beta}(\mathbf{D}, m)$. Обозначим через $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}, m)$ класс блочных матриц Якоби вида

$$\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_m & \frac{\nu(d_1)}{d_1^2}\mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \frac{\nu(d_1)}{d_1^2}\mathbb{I}_m & -\frac{\nu(d_1)}{d_1^2}\mathbb{I}_m & \frac{\nu(d_1)}{d_1^{3/2}d_2^{1/2}}\mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \frac{\nu(d_1)}{d_1^{3/2}d_2^{1/2}}\mathbb{I}_m & \frac{\alpha_1}{d_2} & \frac{\nu(d_2)}{d_2^2}\mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \frac{\nu(d_2)}{d_2^2}\mathbb{I}_m & -\frac{\nu(d_2)}{d_2^2}\mathbb{I}_m & \frac{\nu(d_2)}{d_2^{3/2}d_3^{1/2}}\mathbb{I}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \frac{\nu(d_2)}{d_2^{3/2}d_3^{1/2}}\mathbb{I}_m & \frac{\alpha_2}{d_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

Здесь $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}(\subset \mathbb{R}_+)$, $\alpha = \{\alpha_n\}_1^\infty \subset \mathbb{C}^{m\times m}$, $\alpha_n = \alpha_n^*$ и $\nu(x) := \frac{1}{\sqrt{1+(c^2x^2)^{-1}}} = \frac{cx}{\sqrt{1+c^2x^2}}$.

Далее, обозначим через $\mathcal{J}_{X,\beta}(\mathbf{D}, m)$ класс блочных матриц Якоби вида

$$\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D}) := \begin{pmatrix} \mathbb{O}_m & \frac{\nu(d_1)}{d_1^2}\mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \frac{\nu(d_1)}{d_1^2}\mathbb{I}_m & -\frac{\nu^2(d_1)}{d_1^3}(\beta_1 + d_1\mathbb{I}_m) & \frac{\nu(d_1)}{d_1^{3/2}{d_2}^{1/2}}\mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \frac{\nu(d_1)}{d_1^{3/2}{d_2}^{1/2}}\mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \frac{\nu(d_2)}{d_2^2}\mathbb{I}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \frac{\nu(d_2)}{d_2^2}\mathbb{I}_m & -\frac{\nu^2(d_2)}{d_2^3}(\beta_2 + d_2\mathbb{I}_m) & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \frac{\nu(d_2)}{d_2^{3/2}d_3^{1/2}}\mathbb{I}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

6.2.1. Матрицы из классов $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}, m)$ и $\mathcal{J}_{X,\beta}(\mathbf{D}, m)$ с максимальными индексами дефекта. Сначала обсудим условия на матрицы из класса $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}, m)$, при которых они имеют максимальные индексы дефекта.

Теорема 6.4 (см. [8,10,12]). *Пусть* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ — *минимальный оператор Якоби, ассоциированный с матрицей Якоби вида* (6.6). *Также пусть последовательность* $\alpha := \{\alpha_n\}_1^\infty (\subset \mathbb{C}^{m\times m})$

самосопряженных матриц удовлетворяет условию

$$\sum_{n=2}^{\infty} d_n \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{c}\,\|\alpha_k\|_{\mathbb{C}^{m\times m}}\right)^2 < +\infty. \tag{6.8}$$

Тогда оператор $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ имеет максимальные индексы дефекта, $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})) = m$.

Следствие 6.1 (см. [10]). *Пусть $\mathbf{J}_{X,0}$ — минимальный оператор Якоби, ассоциированный с матрицей Якоби (6.6) с нулевой последовательностью $\{\alpha_n\}_1^\infty \equiv \mathbb{O}$. Тогда оператор $\mathbf{J}_{X,0}$ имеет максимальные индексы дефекта тогда и только тогда, когда $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N})$.*

Аналогичные результаты справедливы для матриц из класса $\mathcal{J}_{X,\beta}(\mathbf{D}, m)$.

Теорема 6.5 (см. [8,10]). *Пусть $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$ — минимальный оператор Якоби, ассоциированный в $l^2(\mathbb{N}_0;\mathbb{C}^m)$ с матрицей (6.7). Предположим, что последовательность $\beta := \{\beta_n\}_1^\infty (\subset \mathbb{C}^{m\times m})$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=2}^{\infty} d_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 + c\,\|\beta_k\|_{\mathbb{C}^{m\times m}})^2 < +\infty. \tag{6.9}$$

Тогда индексы дефекта матрицы Якоби $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$ максимальны, т. е. $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})) = m$.

Следствие 6.2 (см. [10]). *Индексы дефекта матрицы $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$ максимальны при $\{d_n\}_1^\infty \in l^1(\mathbb{N})$ и $\{\beta_n\}_1^\infty \in l^1(\mathbb{N};\mathbb{C}^{m\times m})$.*

Следствие 6.3 (см. [10]). *Индексы дефекта матрицы Якоби $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$ максимальны, если $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n}(1 + c\|\beta_n\|_{\mathbb{C}^{m\times m}})^2 < 1$. В частности, $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})) = m$, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

(i) $\limsup_{n\to\infty}(d_{n+1}/d_n) = 0$ *и* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\beta_n\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} < \infty$;

(ii) $\limsup_{n\to\infty}(d_{n+1}/d_n) =: (1/d)$ *при* $d > 1$ *и* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\beta_n\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} < c(\sqrt{d} - 1)$.

Замечание 6.1. При $\beta = \mathbb{O}_m$ следствие 6.1 справедливо, если матрицу Якоби $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ заменить на $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$.

Считая, что $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$, естественно заменить последовательность $\{\nu(d_n)\}$ в (6.7) на эквивалентную последовательность $\{cd_n\}$ и получить следующую матрицу:

$$\mathbf{J}'_{X,\beta}(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_p & \frac{c}{d_1}\mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \frac{c}{d_1}\mathbb{I}_p & -\frac{c^2}{d_1}(\beta_1 + d_1\mathbb{I}_p) & \frac{c}{(d_1 d_2)^{1/2}}\mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & \frac{c}{(d_1 d_2)^{1/2}}\mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p & \frac{c}{d_2}\mathbb{I}_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \frac{c}{d_2}\mathbb{I}_p & -\frac{c^2}{d_2}(\beta_2 + d_2\mathbb{I}_p) & \dots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \frac{c}{(d_2 d_3)^{1/2}}\mathbb{I}_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

Утверждение 6.2 (см. [8,10]). *Пусть матрицы Якоби $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$ и $\mathbf{J}'_{X,\beta}(\mathbf{D})$ заданы формулами (6.7) и (6.10), соответственно. Пусть также $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{d_{n-1}^2}{d_n} = 0$. Тогда*:

(i) $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})) = n_\pm(\mathbf{J}'_{X,\beta}(\mathbf{D}))$;

(ii) *в частности, если последовательность $\beta := \{\beta_n\}_1^\infty (\subset \mathbb{C}^{m\times m})$ удовлетворяет условию (6.9), то $n_\pm(\mathbf{J}'_{X,\beta}(\mathbf{D})) = m$.*

6.2.2. Самосопряженность и дискретность спектра матриц из класса $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}, m)$.

Теорема 6.6 (см. [10,11]). *Пусть $\{d_n\}_{n=1}^\infty \notin l^1(\mathbb{N})$. Пусть также спектр диагональной матрицы $\mathcal{A}' := \operatorname{diag}\left\{\frac{\alpha_1}{d_2}, \frac{\alpha_2}{d_3}, \dots\right\}$ дискретен и выполнено условие*

$$\limsup_{n\to\infty} \||\alpha_n|^{-1/2}\| < \frac{1}{2\sqrt{c}}. \tag{6.11}$$

Тогда оператор Якоби $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ самосопряжен в $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$ и его спектр дискретен.

Отметим, что теперь условие (5.6) превращается в условие (6.11).

Теорема 6.7 (см. [10]). *Пусть диагональная часть* $\mathcal{A}' := \operatorname{diag}\left\{\frac{\alpha_1}{d_2}, \frac{\alpha_2}{d_3}, \dots\right\}$ *дискретна, и пусть* $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1(\mathbb{N})$. *Если условие* (6.11) *выполнено, то* $n_+(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})) = n_-(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})) \leqslant m$, *и спектр каждого самосопряженного расширения оператора* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ *дискретен. В частности, если* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}) = \mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})^*$, *то спектр этого оператора дискретен.*

Утверждение 6.3 (см. [10]). *Пусть* $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1(\mathbb{N})$, *и пусть* $\mathcal{A}' := \operatorname{diag}\left\{\frac{\alpha_1}{d_2}, \frac{\alpha_2}{d_3}, \dots\right\}$. *Предположим, что* $(\mathcal{A}')^{-1} \in \mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$. *Кроме того, если выполнено условие* (6.11), *то резольвента любого самосопряженного расширения* $\widetilde{\mathbf{J}}_{X,\alpha}$ *оператора* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ *принадлежит классу* $\mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$. *Более того, если* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}) = (\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}))^*$, *то* $(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}) - i\mathbb{I})^{-1} \in \mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$.

Теорема 6.4 позволяет построить *симметричный, но не самосопряженный* оператор Якоби $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$, который в то же время удовлетворяет условию (5.6) (см. замечание 5.1 (iv)).

Утверждение 6.4 (см. [10]). *Пусть* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ — *минимальный оператор Якоби, ассоциированный с матрицей* (6.6), *и пусть* $d_n = \frac{C_1}{(1+r)^{2(n-1)}n^2}$ *и* $\alpha_n = rc\mathbb{I}_m$, *где* $r > 4$. *Тогда* $n_{\pm}(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})) = m$ *и каждое самосопряженное расширения оператора* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ *имеет дискретный спектр. В то же время матрица* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ *удовлетворяет условию* (6.11).

Замечание 6.2. В утверждении 6.4 условия (5.4)–(5.6) трансформируются в условие (6.11). При этом теорема 5.3 не гарантирует самосопряженности матрицы Якоби $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ даже в скалярном случае ($m = 1$).

6.2.3. Сравнение различных результатов о вполне неопределенности. Сначала покажем, что матрицы $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ никогда не удовлетворяют условиям теоремы 3.4, тем самым предоставляя новый класс матриц Якоби с максимальными индексами дефекта $n_{\pm}(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})) = m$.

Утверждение 6.5 (см. [8,10]). *Пусть* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ — *матрица Якоби вида* (6.6), *и пусть* $\mathcal{C}_n$ — *матрицы вида* (3.1), *составленные из элементов матрицы* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$. *Тогда второй ряд в* (3.2) *расходится, следовательно, матрица* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ *не удовлетворяет условиям теоремы* 3.4.

В то же время теорема 6.4 описывает широкий подкласс класса $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}, m)$ с максимальными индексами дефекта $n_{\pm}(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})) = m$.

Замечание 6.3. Очевидно, утверждение 6.5 представляет интерес только в случае $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1(\mathbb{N})$. Действительно, если $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \notin l^1(\mathbb{N})$, то в силу теста Карлемана (2.1) $n_{\pm}(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})) = 0$.

Далее опишем область применимости теоремы 3.4 к матрицам $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$.

Утверждение 6.6 (см. [8,10]). *Пусть* $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1(\mathbb{N})$. *Пусть* $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$ — *матрица Якоби вида* (6.7), *а* $\mathcal{C}_n$ — *матрицы вида* (3.1), *составленные из элементов матрицы* $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$. *Тогда второй ряд в* (3.2) *сходится тогда и только тогда, когда* $\{\beta_n\}_1^{\infty} \in l^1(\mathbb{N}; \mathbb{C}^{m\times m})$.

Замечание 6.4. Утверждение 6.6 показывает, что условия теоремы 3.4 в сравнении с условиями теоремы 6.5 являются слишком ограничительными для того, чтобы их можно было применить к матрицам Якоби $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$, удовлетворяющим условию (6.9). Условия утверждения 6.6 совпадают с условиями следствия 6.2. Однако условия следствия 6.3, а следовательно, и теоремы 6.5, значительно слабее, чем условия утверждения 6.6. Для демонстрации этого факта рассмотрим простые примеры:

(i) Пусть $d_n = 2^{-n^2}$ и $\|\beta_n\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} = 1$. Очевидно, условия следствия 6.3 (i) выполнены и $n_{\pm}(\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})) = m$. В то же время $\{\beta_n\}_1^{\infty} \notin l^1(\mathbb{N}; \mathbb{C}^{m\times m})$, и условия следствия 6.2 (утверждения 6.6) нарушены.

(ii) Пусть $d_n = 2^{-n}$ и $\|\beta_n\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} = 2^{-1}c(\sqrt{2} - 1)$. Тогда матрица $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$ удовлетворяет условиям следствия 6.3 (ii) при $d = 2$, следовательно, $n_{\pm}(\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})) = m$. В то же время $\{\beta_n\}_1^{\infty} \notin l^1(\mathbb{N}; \mathbb{C}^{m\times m})$, и условия следствия 6.2 (утверждения 6.6) нарушены.

Таким образом, следствие 6.3 гарантирует равенства $n_{\pm}(\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})) = m$ для матриц $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$, описанных выше, в то время как эти матрицы не удовлетворяют условиям теоремы 3.4.

Далее, сравним результаты о матрицах $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ и $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$ с теоремой 3.1 при $m=1$ и следствием 3.1 при $m>1$.

Утверждение 6.7 (см. [10]). *Пусть $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ и $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$ — блочные матрицы Якоби, удовлетворяющие условиям теорем* 6.4 *и* 6.5, *соответственно. Положим также, что $\beta_n=-d_n$, т. е. матрица $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$ имеет нулевую диагональ. Тогда $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}))=n_\pm(\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D}))=m$, а матрицы $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ и $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$ никогда не удовлетворяют условиям следствия* 3.1.

Замечание 6.5. Отметим, что теоремы 6.4 и 6.5 описывают новые классы блочных матриц Якоби $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D},m)$ и $\mathcal{J}_{X,\beta}(\mathbf{D},m)$ с максимальными индексами дефекта. Эти матрицы не удовлетворяют условиям Костюченко—Мирзоева и Березанского (см. теорему 3.4 и следствие 3.1).

6.2.4. Матрицы с промежуточными индексами дефекта. Вместе с условием (2.1) естественно рассмотреть следующий вариант условия Карлемана:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\|\mathcal{B}_j^{-1}\|=\infty. \tag{6.12}$$

В скалярном случае оба условия совпадают. Покажем, что при выполнении условия (6.12) для каждого $p<m$ существуют блочные матрицы Якоби $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})\in\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D},m)$, удовлетворяющие условию (6.12) с индексами $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}))=p$.

Утверждение 6.8 (см. [10]). *Пусть $\{d_n^{(1)}\}_1^\infty\in l^1(\mathbb{N})$, $\{d_n^{(2)}\}_1^\infty\notin l^1(\mathbb{N})$ и $d_n^{(1)}\geqslant 0$, $d_n^{(2)}\geqslant 0$, $n\in\mathbb{N}$. Пусть также $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(d_{n-1}^{(1)})^2}{d_n^{(1)}}=0$, $m=m_1+m_2$, $m_1,m_2\in\mathbb{N}$, и пусть внедиагональные блочные элементы матрицы $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ допускают представления $\mathcal{B}_n=\mathcal{B}_n^{(1)}\oplus\mathcal{B}_n^{(2)}$, где*

$$\mathcal{B}_n^{(1)}=\begin{cases}\frac{c}{d_{j+1}^{(1)}}\mathbb{I}_{m_1}, & n=2j,\\ \frac{c}{\sqrt{d_{j+1}^{(1)}d_{j+2}^{(1)})}}\mathbb{I}_{m_1}, & n=2j+1,\end{cases}\qquad \mathcal{B}_n^{(2)}=\begin{cases}\frac{c}{d_{j+1}^{(2)}}\mathbb{I}_{m_2}, & n=2j,\\ \frac{c}{\sqrt{d_{j+1}^{(2)}d_{j+2}^{(2)}}}\mathbb{I}_{m_2}, & n=2j+1,\end{cases}$$

$$\mathcal{A}_n=\begin{cases}\frac{\alpha_j}{d_{j+1}^{(1)}}, & n=2j,\\ -\frac{c}{d_{j+1}^{(1)}}\mathbb{I}_m, & n=2j+1.\end{cases}$$

Положим также, что $\alpha_n:=\alpha_n^{(1)}\oplus\alpha_n^{(2)}$, где последовательность $\{\alpha_n^{(1)}\}\subset\mathbb{C}^{m_1\times m_1}$ и удовлетворяют условию (6.8), *в то время как последовательность $\{\alpha_n^{(2)}\}\subset\mathbb{C}^{m_2\times m_2}$ является произвольной. Тогда*:

(i) *матрица $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ удовлетворяет условию* (6.12);
(ii) $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}))=m_1$;
(iii) *кроме того, если $d_n^{(2)}\geqslant d_n^{(1)}$ при достаточно больших n и выполнено условие* (6.11), *то каждое самосопряженное расширение оператора $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ имеет дискретный спектр.*

Доказательство извлекается из теоремы 6.4, теста Карлемана (2.1) и теоремы 5.3.

Наконец, следуя [8,10], рассмотрим еще одно приложение теоремы 6.5 (и утверждения 6.2).

Утверждение 6.9 (см. [8,10]). *Пусть $\mathbf{J}'_{X,\beta}(\mathbf{D})(\in\mathcal{J}_{X,\beta}(\mathbf{D},m_1))$ — блочная матрица Якоби с элементами $\beta_n=-d_n\mathbb{I}_{m_1}$ и $d_n=\frac{c}{(n+1)\sqrt{n^2+1}}$, $n\geqslant 1$. Пусть $m=m_1+m_2$, и пусть $\widehat{\mathbf{J}}'_{X,\beta}(\mathbf{D})$ — блочная матрица Якоби с $m\times m$-элементами $\mathcal{B}_n=\mathcal{B}_n^{(1)}\oplus\mathcal{B}_n^{(2)}$,*

$$\mathcal{B}_n^{(1)}=\begin{cases}\frac{c}{d_{j+1}}\mathbb{I}_{m_1}, & n=2j,\\ \frac{c}{\sqrt{d_{j+1}d_{j+2}}}\mathbb{I}_{m_1}, & n=2j+1,\end{cases}\qquad \mathcal{B}_n^{(2)}=\sqrt{2}\mathbb{I}_{m_2},\qquad \mathcal{A}_n=\mathbb{O}_m.$$

Тогда $n_\pm(\widehat{\mathbf{J}}'_{X,\beta}(\mathbf{D}))=n_\pm(\mathbf{J}'_{X,\beta}(\mathbf{D}))=m_1$.

Интересно отметить, что блочная матрица Якоби $\widehat{\mathbf{J}}'_{X,\beta}(\mathbf{D})$, построенная в утверждении 6.9, незначительно отличается от матрицы Якоби $\mathbf{J}_{\mathrm{Dyuk}}$, построенной в теореме 4.2 Дюкаревым [17] в рамках совершенно другого подхода. В частности, имеем $n_\pm(\mathbf{J}_{\mathrm{Dyuk}})=n_\pm(\widehat{\mathbf{J}}'_{X,\beta}(\mathbf{D}))=m_1$.

Замечание 6.6. Еще одно утверждение о промежуточных индексах дефекта блочных матриц Якоби может быть найдено в [8, утверждение 2] и [10, раздел 8].

Приложения матриц Якоби $\mathbf{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ и $\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ к операторам Шредингера с δ-взаимодействиями можно найти в работах [20–22] (скалярный случай, $m=1$) и работах [7, 9, 10, 23] (случай $m>1$).

Приложения матриц Якоби $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ и $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$ к операторам Дирака с δ-взаимодействиями содержатся в работах [12] ($m=1$) и [8–11] (матричный случай, $m>1$).

Отметим также, что в работе [29] матрицы Якоби применяются к исследованию индексов дефекта дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами.

Благодарности. Разделы 2–4 написаны при поддержке РНФ (грант № 20-11-20261). Разделы 5, 6 поддержаны Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коган В. И.* Об операторах, порожденных $\mathbb{I}_p$-матрицами, в случае максимальных индексов дефекта// Теор. функций, функц. анализ. и их прилож. — 1970. — *11.* — С. 103–107.
2. *Крейн М. Г.* Бесконечные J-матрицы и матричная проблема моментов// Докл. АН СССР. — 1949. — *69*, № 2. — С. 125–128.
3. *Крейн М. Г.* Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m)// Укр. мат. ж. — 1949. — *1*, № 2. — С. 3–66.
4. *Akhiezer N. I.* The classical moment problem and some related questions in analysis. — Edinburgh—London: Oliver & Boyd Ltd, 1965.
5. *Berezansky Ju. M.* Expansions in eigenfunctions of self-adjoint operators. — Providence: AMS, 1968.
6. *Braeutigam I. N., Mirzoev K. A.* Deficiency numbers of operators generated by infinite Jacobi matrices// Dokl. Math. — 2016. — *93*, № 2. — С. 170–174.
7. *Braeutigam I. N., Mirzoev K. A.* On deficiency numbers of operators generated by Jacobi matrices with operator elements// St. Petersburg Math. J. — 2019. — *30*, № 4. — С. 621–638.
8. *Budyka V. S., Malamud M. M.* On the deficiency indices of block Jacobi matrices related to Dirac operators with point interactions// Math. Notes. — 2019. — *106.* — С. 1009–1014.
9. *Budyka V. S., Malamud M. M.* Self-adjointness and discreteness of the spectrum of block Jacobi matrices// Math. Notes. — 2020. — *108.* — С. 445–450.
10. *Budyka V. S., Malamud M. M.* Deficiency indices of Jacobi matrices and Dirac operators with point interactions on a discrete set// ArXiv. — 2021. — 2012.15578.
11. *Budyka V. S., Malamud M. M., Posilicano A.* To spectral theory of one-dimensional matrix Dirac operators with point matrix interactions// Dokl. Math. — 2018. — *97.* — С. 115–121.
12. *Carlone R., Malamud M., Posilicano A.* On the spectral theory of Gesztesy—Šeba realizations of 1-D Dirac operators with point interactions on a discrete set// J. Differ. Equ. — 2013. — *254*, № 9. — С. 3835–3902.
13. *Chihara T.* Chain sequences and orthogonal polynomials// Trans. Am. Math. Soc. — 1962. — *104.* — С. 1–16.
14. *Cojuhari P., Janas J.* Discreteness of the spectrum for some unbounded matrices// Acta Sci. Math. — 2007. — *73.* — С. 649–667.
15. *Dombrowski J., Pedersen S.* Orthogonal polynomials, spectral measures, and absolute continuity// J. Comput. Appl. Math. — 1995. — *65.* — С. 115–124.
16. *Dyukarev Yu. M.* Deficiency numbers of symmetric operators generated by block Jacobi matrices// Sb. Math. — 2006. — *197*, № 8. — С. 1177–1203.
17. *Dyukarev Yu. M.* Examples of block Jacobi matrices generating symmetric operators with arbitrary possible values of the deficiency numbers// Sb. Math. — 2010. — *201*, № 12. — С. 1791–1800.
18. *Dyukarev Yu. M.* On conditions of complete indeterminacy for the matricial hamburger moment problem// В сб.: «Complex Function Theory, Operator Theory, Schur Analysis and Systems Theory». — Cham: Birkhäuser, 2020. — С. 327–353.
19. *Janas J., Naboko S.* Multithreshold spectral phase transition for a class of Jacobi matrices// Oper. Theory Adv. Appl. — 2001. — *124.* — С. 267–285.
20. *Kostenko A. S., Malamud M. M.* One-dimensional Schrödinger operator with δ-interactions// Funct. Anal. Appl. — 2010. — *44*, № 2. — С. 151–155.
21. *Kostenko A. S., Malamud M. M.* 1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set// J. Differ. Equ. — 2010. — *249*, № 2. — С. 253–304.
22. *Kostenko A. S., Malamud M. M.* 1-D Schröodinger operators with local point interactions: a review// Proc. Sympos. Pure Math. — 2013. — *87.* — С. 232–262.

23. *Kostenko A. S., Malamud M. M., Natyagailo D. D.* Matrix Schrödinger operator with δ-interactions// Math. Notes. — 2016. — *100*, № 1. — С. 49–65.
24. *Kostyuchenko A. G., Mirzoev K. A.* Three-term recurrence relations with matrix coefficients. The completely indefinite case// Math. Notes. — 1998. — *63*, № 5-6. — С. 624–630.
25. *Kostyuchenko A. G., Mirzoev K. A.* Generalized Jacobi matrices and deficiency numbers of ordinary differential operators with polynomial coefficients// Funct. Anal. Appl. — 1999. — *33*. — С. 25–37.
26. *Kostyuchenko A. G., Mirzoev K. A.* Complete indefiniteness tests for Jacobi matrices with matrix entries// Funct. Anal. Appl. — 2001. — *35*. — С. 265–269.
27. *Malamud M. M.* On a formula of the generalized resolvents of a nondensely defined Hermitian operator// Ukr. Math. J. — 1992. — *44*. — С. 1522–1547.
28. *Malamud M. M., Malamud S. M.* Spectral theory of operator measures in Hilbert space// St. Petersbg. Math. J. — 2004. — *15*, № 3. — С. 323–373.
29. *Mirzoev K. A., Konechnaya N. N., Safonova T. A., Tagirova R. N.* Generalized Jacobi matrices and spectral analysis of differential operators with polynomial coefficients// J. Math. Sci. (N.Y.) — 2021. — *252*, № 2. — С. 213–224.
30. *Mirzoev K. A., Safonova T. A.* On the deficiency index of the vector-valued Sturm—Liouville operator// Math. Notes. — 2016. — *99*, № 2. — С. 290–303.
31. *Petropoulou E., Velázquez L.* Self-adjointness of unbounded tridiagonal operators and spectra of their finite truncations// J. Math. Anal. Appl. — 2014. — *420*. — С. 852–872.
32. *Świderski G.* Periodic perturbations of unbounded Jacobi matrices III: The soft edge regime// J. Approx. Theory. — 2018. — *233*. — С. 1–36.
33. *Świderski G.* Spectral properties of block Jacobi matrices// Constr. Approx. — 2018. — *48*, № 2. — С. 301–335.

Будыка Виктория Сергеевна
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия;
Донецкая академия управления и государственной службы, Донецк
E-mail: budyka.vik@gmail.com

Маламуд Марк Михайлович
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: malamud3m@gmail.com

Мирзоев Карахан Агахан оглы
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия;
Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия
E-mail: mirzoev.karahan@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-237-254 UDC 517.984

Deficiency Indices of Block Jacobi Matrices: Survey

© 2021 **V. Budyka, M. Malamud, K. Mirzoev**

Abstract. The paper is a survey and concerns with infinite symmetric block Jacobi matrices $\mathbf{J}$ with $m \times m$-matrix entries. We discuss several results on general block Jacobi matrices to be either self-adjoint or have maximal as well as intermediate deficiency indices. We also discuss several conditions for $\mathbf{J}$ to have discrete spectrum.

REFERENCES

1. V. I. Kogan, “Ob operatorakh, porozhdennykh $\mathbb{I}_p$-matritsami, v sluchae maksimal’nykh indeksov defekta” [Operators that are generated by $\mathbb{I}_p$-matrices in the case of maximal deficiency indices] *Teor. Funkts., Funkts. Anal. Prilozh.* [Theor. Funct. Funct. Anal. Appl], 1970, **11**, 103–107 (in Russian).
2. M. G. Krein, “Beskonechnye J-matritsy i matrichnaya problema momentov” [Infinite J-matrices and the matrix moment problem] *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1949, **69**, No. 2, 125–128 (in Russian).
3. M. G. Krein, “Osnovnye polozheniya teorii predstavleniya ermitovykh operatorov s indeksom defekta (m, m)” [The fundamental propositions of the theory of Hermitian operators with deficiency index (m, m),” *Ukr. Mat. Zh.* [Ukr. Math. J.], 1949, **1**, No. 2, 3–66 (in Russian).
4. N. I. Akhiezer, *The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Analysis*, Oliver & Boyd Ltd, Edinburgh—London, 1965.
5. Ju. M. Berezansky, *Expansions in Eigenfunctions of Self-Adjoint Operators*, AMS, Providence, 1968.
6. I. N. Braeutigam and K. A. Mirzoev, “Deficiency numbers of operators generated by infinite Jacobi matrices,” *Dokl. Math.*, 2016, **93**, No. 2, 170–174.
7. I. N. Braeutigam and K. A. Mirzoev, “On deficiency numbers of operators generated by Jacobi matrices with operator elements,” *St. Petersburg Math. J.*, 2019, **30**, No. 4, 621–638.
8. V. S. Budyka and M. M. Malamud, “On the deficiency indices of block Jacobi matrices related to Dirac operators with point interactions,” *Math. Notes*, 2019, **106**, 1009–1014.
9. V. S. Budyka and M. M. Malamud, “Self-adjointness and discreteness of the spectrum of block Jacobi matrices,” *Math. Notes*, 2020, **108**, 445–450.
10. V. S. Budyka and M. M. Malamud, “Deficiency indices of Jacobi matrices and Dirac operators with point interactions on a discrete set,” *ArXiv*, 2021, 2012.15578.
11. V. S. Budyka, M. M. Malamud, and A. Posilicano, “To spectral theory of one-dimensional matrix Dirac operators with point matrix interactions,” *Dokl. Math.*, 2018, **97**, 115–121.
12. R. Carlone, M. Malamud, and A. Posilicano, “On the spectral theory of Gesztesy—Šeba realizations of 1-D Dirac operators with point interactions on a discrete set,” *J. Differ. Equ.*, 2013, **254**, No. 9, 3835–3902.
13. T. Chihara, “Chain sequences and orthogonal polynomials,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1962, **104**, 1–16.
14. P. Cojuhari and J. Janas, “Discreteness of the spectrum for some unbounded matrices,” *Acta Sci. Math.*, 2007, **73**, 649–667.
15. J. Dombrowski and S. Pedersen, “Orthogonal polynomials, spectral measures, and absolute continuity,” *J. Comput. Appl. Math.*, 1995, **65**, 115–124.
16. Yu. M. Dyukarev, “Deficiency numbers of symmetric operators generated by block Jacobi matrices,” *Sb. Math.*, **197**, 2006, No. 8, 1177–1203.
17. Yu. M. Dyukarev, “Examples of block Jacobi matrices generating symmetric operators with arbitrary possible values of the deficiency numbers,” *Sb. Math.*, 2010, **201**, No. 12, 1791–1800.
18. Yu. M. Dyukarev, “On conditions of complete indeterminacy for the matricial hamburger moment problem,” In: *Complex Function Theory, Operator Theory, Schur Analysis and Systems Theory*, Birkhäuser, Cham, 2020, pp. 327–353.
19. J. Janas and S. Naboko, “Multithreshold spectral phase transition for a class of Jacobi matrices,” *Oper. Theory Adv. Appl.*, 2001, **124**, 267–285.
20. A. S. Kostenko and M. M. Malamud, “One-dimensional Schrödinger operator with δ-interactions,” *Funct. Anal. Appl.*, 2010, **44**, No. 2, 151–155.
21. A. S. Kostenko and M. M. Malamud, “1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set,” *J. Differ. Equ.*, 2010, **249**, No. 2, 253–304.
22. A. S. Kostenko and M. M. Malamud, “1-D Schröodinger operators with local point interactions: a review,” *Proc. Sympos. Pure Math.*, 2013, **87**, 232–262.
23. A. S. Kostenko, M. M. Malamud, and D. D. Natyagailo, “Matrix Schrödinger operator with δ-interactions,” *Math. Notes*, 2016, **100**, No. 1, 49–65.
24. A. G. Kostyuchenko and K. A. Mirzoev, “Three-term recurrence relations with matrix coefficients. The completely indefinite case,” *Math. Notes*, 1998, **63**, No. 5-6, 624–630.
25. A. G. Kostyuchenko and K. A. Mirzoev, “Generalized Jacobi matrices and deficiency numbers of ordinary differential operators with polynomial coefficients,” *Funct. Anal. Appl.*, 1999, **33**, 25–37.
26. A. G. Kostyuchenko and K. A. Mirzoev, “Complete indefiniteness tests for Jacobi matrices with matrix entries,” *Funct. Anal. Appl.*, 2001, **35**, 265–269.
27. M. M. Malamud, “On a formula of the generalized resolvents of a non-densely defined Hermitian operator,” *Ukr. Math. J.*, 1992, **44**, 1522–1547.
28. M. M. Malamud and S. M. Malamud, “Spectral theory of operator measures in Hilbert space,” *St. Petersbg. Math. J.*, 2004, **15**, No. 3, 323–373.

29. K. A. Mirzoev, N. N. Konechnaya, T. A. Safonova, and R. N. Tagirova, “Generalized Jacobi matrices and spectral analysis of differential operators with polynomial coefficients,” *J. Math. Sci.* (*N.Y.*), 2021, **252**, No. 2, 213–224.
30. K. A. Mirzoev and T. A. Safonova, “On the deficiency index of the vector-valued Sturm—Liouville operator,” *Math. Notes*, 2016, **99**, No. 2, 290–303.
31. E. Petropoulou and L. Velázquez, “Self-adjointness of unbounded tridiagonal operators and spectra of their finite truncations,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2014, **420**, 852–872.
32. G. Świderski, “Periodic perturbations of unbounded Jacobi matrices III: The soft edge regime,” *J. Approx. Theory*, 2018, **233**, 1–36.
33. G. Świderski, “Spectral properties of block Jacobi matrices,” *Constr. Approx.*, 2018, **48**, No. 2, 301–335.

Viktoriya S. Budyka
Peoples Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia;
Donetsk Academy of Management and Public Administration, Donetsk
E-mail: `budyka.vik@gmail.com`

Mark M. Malamud
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: `malamud3m@gmail.com`

Karahan A. Mirzoev
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;
Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia
E-mail: `mirzoev.karahan@mail.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 2 (2021). С. 255–284

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-255-284 УДК 517.968.72

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

© 2021 г. **В. В. ВЛАСОВ, Н. А. РАУТИАН**

Аннотация. В работе приводится обзор результатов, посвященных исследованию интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Указанные уравнения являются операторными моделями интегродифференциальных уравнений с частными производными, возникающих в многочисленных приложениях: в теории вязкоупругости, в теории распространения тепла в средах с памятью (уравнения Гуртина—Пипкина), теории усреднения. Наиболее интересные и глубокие результаты обзора посвящены спектральному анализу оператор-функций, являющихся символами изучаемых интегродифференциальных уравнений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение 255
2. Разрешимость 256
3. Спектральный анализ 265
4. Представление решений 270
5. Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегродифференциальными уравнениями, и их свойства 273
Список литературы 276

1. Введение

В статье приводится обзор результатов, посвященных исследованию интегродифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве, полученных авторами в цикле работ [4–21,41–44,72,82–85], также в монографии [12]. Исследуемые уравнения представляют собой операторные обобщения интегродифференциальных уравнений с частными производными, возникающих в различных приложениях: в теории вязкоупругости, в теории распространения тепла в средах с памятью (уравнения Гуртина—Пипкина), теории усреднения.

Отличительной особенностью представленного подхода является использование методов спектральной теории операторов и оператор-функций при исследовании интегродифференциальных уравнений, а также использование методов комплексного анализа и теории полугрупп. Кратко поясним основные этапы этого подхода на идейном уровне. Изучаемые уравнения представляют собой абстрактное волновое уравнение, возмущенное вольтерровыми интегральными операторами, поэтому при их исследовании естественно использовать преобразование Лапласа. С помощью него мы получаем выражение для преобразования Лапласа искомого решения, выраженное через символ уравнения, преобразование Лапласа правой части уравнения и начальные данные задачи.

Доказательства результатов о корректной разрешимости опираются на оценки оператор-функций, являющихся символами уравнений в пространствах Харди в правой полуплоскости, а

Работа выполнена в рамках Программы развития Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Математические методы анализа сложных систем» при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00288А).

также теорему Пэли—Винера. На этом пути мы получаем результаты о корректной разрешимости начальных задач для интегродифференциальных уравнений в весовых пространствах Соболева на положительной полуоси. Результаты о разрешимости опубликованы в статьях [4–21], а также в главе 3 монографии [12].

Спектральный анализ исследуемых интегродифференциальных уравнений — это прежде всего изучение локализации и структуры спектров оператор-функций, являющихся символами упомянутых уравнений, а также получение их оценок в правой и соответственно в левой полуплоскости. В свою очередь, на этой основе с использованием процедуры контурного интегрирования при обращении преобразования Лапласа получаются результаты о представлении сильных решений в виде суммы рядов по экспонентам, отвечающих точкам спектра оператор-функций.

Структура статьи следующая.

Первый раздел содержит введение, характеризующее общий подход авторов к исследованию рассматриваемых интегродифференциальных уравнений.

Во втором разделе предлагаемой статьи мы приводим формулировки результатов о корректной разрешимости. При этом теоремы 2.1–2.4 посвящены рассмотрению интегродифференциальных уравнений с ядрами, представимыми рядами экспонент с положительными коэффициентами, в теореме 2.5 рассматривается ядро, представимое интегралом Стилтьеса. Корректная разрешимость уравнений с ядрами, имеющих интегрируемую особенность в нуле и представимых в виде суммы функций Работнова с положительными коэффициентами, рассматривается в теоремах 2.6 и 2.7. Интегродифференциальные уравнения, возникающие в теории вязкоупругости, исследуются в теоремах 2.8–2.10.

В третьем разделе статьи представлены утверждения о локализации и структуре спектра оператор-функций, являющихся символами изучаемых уравнений (теоремы 3.7–3.13). На наш взгляд это наиболее интересные, глубокие и трудные результаты статьи. Особый интерес представляет случай оператор-функций с двумя некоммутирующими операторами (теоремы 3.8–3.13).

В четвертом разделе статьи получено представление сильных решений упомянутых уравнений в виде рядов по экспонентам, отвечающим точкам спектра оператор-функций, являющихся символами рассматриваемых уравнений (теоремы 4.1–4.7). Указанные результаты установлены на основании результатов третьего раздела о локализации спектра и проведении процедуры контурного интегрирования при обращении преобразования Лапласа. В свою очередь, используя полученные представления сильных решений, мы получаем их оценки (теоремы 4.8–4.10).

В пятом разделе статьи представлен полугрупповой подход при исследовании исходных интегродифференциальных уравнений в случае некоммутирующих операторных коэффициентов при наиболее слабых ограничениях на ядра интегральных операторов (теоремы 5.1–5.5). Предлагаемый метод является естественным обобщением и развитием метода, предложенного Н. Д. Копачевским, а также метода, предложенного в монографии [50].

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — самосопряженный положительный оператор, $A^* = A$, действующий в пространстве H, имеющий компактный обратный.

Превратим область определения $\mathrm{Dom}(A^\beta)$ оператора A^β, $\beta > 0$ в гильбертово пространство H_β, введя на $\mathrm{Dom}(A^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A^β.

Через $W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^n)$ обозначим пространство Соболева вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ со значениями в H с нормой $\|u\|_{W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^n)} \equiv \left(\int_0^\infty e^{-2\gamma t}\left(\left\|u^{(n)}(t)\right\|^2_H + \|A^n u(t)\|^2_H\right)dt\right)^{1/2}$, $\gamma \geqslant 0$.

Подробнее о пространствах $W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^n)$, см. монографию [34, глава 1]. Для $n = 0$ полагаем $W^0_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^0) = L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, где через $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ обозначено пространство измеримых функций со значениями в пространстве H, снабженное нормой $\|f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} = \left(\int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t}\|f(t)\|^2{}_H dt\right)^{1/2}$.

2. Разрешимость

2.1. Интегродифференциальные уравнения Гуртина—Пипкина с ядрами, представимыми рядами убывающих экспонент и интегралами Стилтьеса. На полуоси $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ рассмотрим следующую задачу для интегродифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \int_0^t K(t-s)A^2 v(s)ds = q(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.1}$$

$$v(+0) = \psi_0. \tag{2.2}$$

При этом предполагается, что скалярная функция $K(t)$ допускает представление

$$K(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j t}, \tag{2.3}$$

где числа $c_j > 0$, $\gamma_{j+1} > \gamma_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, $\gamma_j \to +\infty$ $(j \to +\infty)$, и предполагается, что

$$K(0) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} < \infty. \tag{2.4}$$

Одновременно рассмотрим следующую задачу для интегродифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + K(0)A^2u(t) + \int_0^t K'(t-s)A^2u(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.5}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \tag{2.6}$$

Замечание. Если $f(t) = q'(t)$, $\varphi_0 = \psi_0$ и $\varphi_1 = q(0)$, то задача (2.5), (2.6) получается из задачи (2.1), (2.2) дифференцированием по переменной t.

Условие (2.4) в рассматриваемом случае означает, что ядро $K'(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$. Если к условию (2.4) добавить условие

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j < +\infty, \tag{2.7}$$

то ядро $K'(t)$ принадлежит пространству $W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

На полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ рассмотрим также следующую задачу для интегродифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \alpha A^2v(t) + \int_0^t K(t-s)A^2v(s)ds = q(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \tag{2.8}$$

$$v(+0) = \psi_0, \tag{2.9}$$

где параметр $\alpha > 0$. Предполагается, что скалярная функция $K(t)$ допускает представление $K(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu(\tau)$, где $d\mu$ — положительная мера, которой соответствует возрастающая, непрерывная справа функция распределения μ. Интеграл понимается в смысле Стилтьеса. Мы также предполагаем, что выполнено следующее условие:

$$\int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < \infty \tag{2.10}$$

и что носитель μ принадлежит интервалу $(d_0, +\infty)$, $d_0 > 0$.

Одновременно рассмотрим следующую задачу для интегродифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \alpha A^2 \frac{du(t)}{dt} + K(0)A^2u(t) + \int_0^t K'(t-s)A^2u(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.11}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1, \tag{2.12}$$

где параметр $\alpha > 0$. Слагаемое $\alpha A^2 u_t$ соответствует мгновенному трению Кельвина—Фойгта.

Символом уравнения (2.11) является оператор-функция $\mathcal{L}(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda\big(\alpha + \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\tau(\lambda+\tau)}\big)A^2$.

Определение 2.1. Вектор-функцию v назовем *сильным решением задачи* (2.1)*,* (2.2), если она принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A^2)$ для некоторого $\gamma \geqslant 0$, удовлетворяет уравнению (2.1) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$, а также начальному условию (2.2).

Определение 2.2. Вектор-функцию u назовем *сильным решением задачи* (2.5)*,* (2.6), если она принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)$ для некоторого $\gamma \geqslant 0$, удовлетворяет уравнению (2.5) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$, а также начальным условиям (2.6).

В следующих теоремах приводятся результаты о корректной разрешимости задач (2.1), (2.2) и (2.5), (2.6).

Теорема 2.1. *Пусть вектор-функция* $Aq'(t) \in L_{2,\gamma_1}(\mathbb{R}_+, H)$ *при некотором* $\gamma_1 \geqslant 0$, $q(0) = 0$ *и выполнено условие* (2.4)*. Тогда*:

1) *если выполнено условие* (2.7) *и* $\psi_0 \in H_2$, *то для любого* $\gamma > \gamma_1$ *задача* (2.1), (2.2) *однозначно разрешима в пространстве* $W^1_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, A^2\right)$ *и для ее решения справедлива оценка*
$$\|v\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leqslant d\big(\left\|Aq'(t)\right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \left\|A^2\psi_0\right\|_H \big)$$
с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* q *и вектора* ψ_0;
2) *если условие* (2.7) *не выполнено и* $\psi_0 \in H_3$, *то для любого* $\gamma > \gamma_1$ *задача* (2.1), (2.2) *однозначно разрешима в пространстве* $W^1_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, A^2\right)$ *и для ее решения справедлива оценка*
$$\|v\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leqslant d\big(\left\|Aq'(t)\right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \left\|A^3\psi_0\right\|_H \big)$$
с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* q *и вектора* ψ_0.

Теорема 2.2. *Пусть вектор-функция* $Af(t) \in L_{2,\gamma_2}(\mathbb{R}_+, H)$ *при некотором* $\gamma_2 \geqslant 0$ *и выполнено условие* (2.4). *Тогда*:

1) *если выполнено условие* (2.7) *и* $\varphi_0 \in H_2$, $\varphi_1 \in H_1$, *то для любого* $\gamma > \gamma_2$ *задача* (2.5), (2.6) *однозначно разрешима в пространстве* $W^2_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, A^2\right)$ *и для ее решения справедлива оценка*
$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leqslant d\big(\|Af\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \left\|A^2\varphi_0\right\|_H + \|A\varphi_1\|_H \big)$$
с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0 *и* φ_1;
2) *если условие* (2.7) *не выполнено и* $\varphi_0 \in H_3$, $\varphi_1 \in H_2$, *то для любого* $\gamma > \gamma_2$ *задача* (2.5), (2.6) *однозначно разрешима в пространстве* $W^2_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, A^2\right)$ *и для ее решения справедлива оценка*
$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leqslant d\big(\|Af\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \left\|A^3\varphi_0\right\|_H + \left\|A^2\varphi_1\right\|_H \big)$$
с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0 *и* φ_1.

Перейдем к задаче (2.8), (2.9).

Теорема 2.3. *Пусть вектор-функция* $q(t) \in L_{2,\gamma_1}(\mathbb{R}_+, H)$ *при некотором* $\gamma_1 \geqslant 0$ *и выполнено условие* (2.10). *Тогда для любого* $\gamma > \gamma_1$ *существует единственная вектор-функция* $v(t) \in W^1_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, A^2\right)$, *которая удовлетворяет уравнению* (2.8) *почти всюду на полуоси* $\mathbb{R}_+$ *и начальному условию* (2.9). *Кроме того, справедлива оценка*
$$\|v\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leqslant d\big(\|q(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A\psi_0\|_H \big) \tag{2.13}$$
с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* q *и вектора* ψ_0.

В свою очередь, для задачи (2.11), (2.12) справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4. *Пусть вектор-функция* $f(t) \in L_{2,\gamma_2}(\mathbb{R}_+, H)$ *при некотором* $\gamma_2 \geqslant 0$ *и выполнено условие* (2.10). *Тогда для любого* $\gamma > \gamma_2$ *существует единственная вектор-функция* $u(t) \in W^2_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, A^2\right)$ *такая, что* $A^2u_t(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, *которая удовлетворяет уравнению* (2.11) *почти всюду на полуоси* $\mathbb{R}_+$ *и начальному условию* (2.12). *Кроме того, справедлива оценка*
$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} + \left\|A^2u_t(t)\right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant d\big(\|f(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \left\|A^2\varphi_0\right\|_H + \|A\varphi_1\|_H \big) \tag{2.14}$$
с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0 *и* φ_1.

На полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ рассмотрим следующую задачу для интегродифференциального уравнения первого порядка:
$$\frac{du(t)}{dt} + \int_0^t \mathcal{K}(t-s)A^2u(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.15}$$
$$u(+0) = \varphi. \tag{2.16}$$
Предполагается, что скалярная функция $\mathcal{K}(t)$ допускает представление $\mathcal{K}(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-t\tau}}{\tau}d\mu(\tau)$, где $d\mu$ — положительная мера, которой соответствует возрастающая, непрерывная справа функция распределения μ. Интеграл понимается в смысле Стилтьеса. Мы предполагаем, что выполнено следующее условие:
$$\mathcal{K}(0) = \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < \infty, \tag{2.17}$$
где носитель μ принадлежит полуоси $(d_1, +\infty)$, $d_1 > 0$. В ряде случаев будет также существенно использоваться условие
$$-\mathcal{K}^{(1)}(0) = \int_0^\infty d\mu(\tau) \equiv \operatorname{Var}\mu\big|_0^\infty < +\infty. \tag{2.18}$$

Символом уравнения (2.15) является оператор-функция $\mathcal{L}(\lambda) = \lambda I + \hat{\mathcal{K}}(\lambda)A^2$, где $\mathcal{K}\hat{(}\lambda) = \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\tau(\lambda+\tau)}$ — преобразование Лапласа ядра $\mathcal{K}(t)$.

Вначале приведем результат о корректной разрешимости задачи (2.15), (2.16).

Определение 2.3. Вектор-функцию u назовем *сильным решением задачи* (2.15), (2.16), если она принадлежит пространству $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$ для некоторого $\gamma \geqslant 0$, удовлетворяет уравнению (2.8) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$, а также начальному условию (2.16).

Теорема 2.5. *Пусть вектор-функция* $Af^{(1)}(t) \in L_{2,\gamma_1}(\mathbb{R}_+, H)$ *при некотором* $\gamma_1 \geqslant 0$, $f(0) = 0$ *и выполнено условие* (2.10). *Тогда*:

1) *если выполнено условие* (2.18) *и* $\varphi \in H_2$, *то для любого* $\gamma > \gamma_1$ *задача* (2.15), (2.16) *однозначно разрешима в пространстве* $W^1_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, A^2\right)$ *и для ее решения справедлива оценка*
$$\|u\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leqslant d\big(\|Af^{(1)}(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A^2\varphi\|_H\big)$$
с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* f *и вектора* φ;
2) *если условие* (2.18) *не выполнено и* $\varphi \in H_3$, *то для любого* $\gamma > \gamma_1$ *задача* (2.15), (2.16) *однозначно разрешима в пространстве* $W^1_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, A^2\right)$ *и для ее решения справедлива оценка*
$$\|u\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leqslant d\big(\|Af^{(1)}(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A^3\varphi\|_H\big)$$
с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* q *и вектора* φ.

Отметим, что доказательства теорем 2.1–2.5 опубликованы в статьях [11, 13, 84], а также в главе 3 монографии [12].

2.2. Интегродифференциальные уравнения Гуртина—Пипкина с дробно-экспоненциальными ядрами. Рассмотрим следующую задачу для интегродифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$:
$$\frac{d^2u}{dt^2} + A^2u - \int_0^t K\,(t-s)A^2u\,(s)\,ds = f\,(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.19}$$
$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1, \tag{2.20}$$
где A — самосопряженный положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий компактный обратный.

Скалярная функция $K\,(t)$ имеет представление
$$K\,(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j R_j\,(t)\,, \tag{2.21}$$
в котором $c_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, функции $R_j\,(t)$ — дробно-экспоненциальные функции Работнова (см. [39, гл. I]), которые имеют следующий вид:
$$R_j(t) = t^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta_j)^n t^{n\alpha}}{\Gamma[(n+1)\alpha]}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{2.22}$$
где $\Gamma(\cdot)$ — гамма функция Эйлера. При этом предполагается, что последовательность $\{\beta_j\}$ удовлетворяет следующим условиям: $0 < \beta_j < \beta_{j+1},$, $j \in \mathbb{N}$, $\beta_j \to +\infty$, $j \to +\infty$. Кроме того, выполнены условия
$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j}{\beta_j} < 1, \tag{2.23}$$
$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j < +\infty. \tag{2.24}$$
Преобразование Лапласа функции $R_j(t)$ имеет вид $\hat{R}_j(\lambda) = \frac{1}{\lambda^\alpha+\beta_j}$ (см. [39, гл. I]). При этом под λ^α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ понимается главная ветвь многозначной функции $f(\lambda) = \lambda^\alpha$, $\lambda \in \mathbb{C}$ с разрезом по отрицательной действительной полуоси $\lambda^\alpha = |\lambda|^\alpha e^{i\alpha\arg\lambda}$, $-\pi < \arg\lambda < \pi$.

Рассматривая преобразование Лапласа уравнения (2.19) при однородных начальных условиях, получаем уравнение $L(\lambda)\hat{u}(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$, где оператор-функция
$$L\,(\lambda) = \lambda^2 I + A^2 - \hat{K}(\lambda)A^2 \tag{2.25}$$

является символом этого уравнения, а $\hat{u}(\lambda)$ и $\hat{f}(\lambda)$ — преобразование Лапласа вектор-функций $u(t)$ и $f(t)$, соответственно, а $\hat{K}(\lambda)$ — преобразование Лапласа ядра $K(t)$, имеющие представление $\hat{K}(\lambda) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\lambda^\alpha + \beta_j}$, $0 < \alpha \leqslant 1$.

Определение 2.4. Будем называть вектор-функцию *u сильным решением задачи* (2.19), (2.20), если она принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)$ для некоторого $\gamma \geqslant 0$, удовлетворяет уравнению (2.19) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$ и начальному условию (2.20).

Определение 2.5. Будем называть вектор-функцию *u обобщенным решением задачи* (2.19), (2.20), если она принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)$, удовлетворяет начальному условию (2.20) и для некоторого $\gamma \geqslant 0$ удовлетворяет тождеству

$$\Big\langle A\Big[u(t) - \int_0^t K(t-s)u(s)ds\Big], Av(t)\Big\rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} - \big\langle u'(t), v'(t)\big\rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \\ + 2\gamma\big\langle u'(t), v(t)\big\rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} = \langle f(t), v(t)\rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + (\varphi_1, v(0))_H \quad (2.26)$$

при всех $v(t) \in W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)$, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)e^{-2\gamma t} = 0$.

Следующая теорема дает достаточные условия корректной разрешимости задачи (2.19), (2.20).

Теорема 2.6. *Предположим, что вектор-функция* $Af(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ *для некоторого* $\gamma_0 > 0$, *ядро* $K(t)$ *представимо в виде* (2.21), (2.22) *с постоянной* α $(0 < \alpha < 1)$, *а также выполняются условия* (2.23), (2.24); *кроме того,* $\varphi_0 \in H_3$, $\varphi_1 \in H_2$. *Тогда существует такое* $\gamma_1 > \gamma_0$, *что для всех* $\gamma \geqslant \gamma_1$ *задача* (2.19), (2.20) *имеет единственное решение, принадлежащее пространству* $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)$ *и удовлетворяющее неравенству*

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+,A^2)} \leqslant d\big(\|Af\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \big\|A^3\varphi_0\big\|_H + \big\|A^2\varphi_1\big\|_H\big)$$

с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Теорема 2.7. *Предположим, что вектор-функция* $f(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ *для некоторого* $\gamma_0 > 0$, *ядро* $K(t)$ *представимо в виде* (2.21), (2.22) *с постоянной* α $(0 < \alpha < 1)$, *а также выполняется условие* (2.23); *кроме того,* $\varphi_0 \in H_2$, $\varphi_1 \in H$. *Тогда существует такое* $\gamma_1 > \gamma_0$, *что для всех* $\gamma \geqslant \gamma_1$ *задача* (2.19), (2.20) *имеет единственное обобщенное решение в пространстве* $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+,A^2)} \leqslant d\big(\|f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \big\|A^2\varphi_0\big\|_H + \|A\varphi_1\|_H\big) \quad (2.27)$$

с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Отметим, что доказательства теорем 2.6, 2.7 приведены в статьях [14, 15].

На полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A^2u - \int_0^t K(t-s)A^2u(s)\,ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (2.28)$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(0) = \varphi_1. \quad (2.29)$$

Скалярная функция $K(t)$ допускает представление

$$K(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j R_j(t), \quad (2.30)$$

в котором $R_j(t)$ — дробно-экспоненциальные функции, которые имеют вид

$$R_j(t) = \frac{t^{-\alpha}e^{-\beta_j t}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \quad (2.31)$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма функция Эйлера. При этом предполагается, что последовательности $\{c_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ удовлетворяют следующим условиям: $0 < \beta_j < \beta_{j+1},$, $j \in \mathbb{N}$, $\beta_j \to +\infty$, $j \to +\infty$. Кроме того, выполнены условия

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\beta_j{}^\theta} < 1, \quad \theta = 1 - \alpha, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} c_j < +\infty. \quad (2.32)$$

Как известно (см. [39]), преобразование Лапласа функции $R_j(t)$ имеет вид $\hat{R}_j(\lambda) = \frac{1}{(\lambda+\beta_j)^{1-\alpha}}$. При этом под $(\lambda+\beta_j)^{1-\alpha}$ понимается главная ветвь многозначной функции $f(\lambda) = (\lambda+\beta_j)^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$ с разрезом по полуоси $(-\infty, -\beta_j)$, т. е. $(\lambda+\beta_j)^{1-\alpha} = |\lambda+\beta_j|^{(1-\alpha)} e^{i(1-\alpha)\arg(\lambda+\beta_j)}$, $-\pi < \arg\lambda < \pi$.

Определение 2.6. Вектор-функцию $u(t)$ назовем *сильным решением задачи* (2.28), (2.29), если для некоторого $\gamma > 0$ она принадлежит пространству $W^2_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, A^2\right)$ и удовлетворяет уравнению (2.28) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$, а также начальному условию (2.29).

В следующей теореме приводится результат о корректной разрешимости задачи (2.28), (2.29).

Теорема 2.8. *Предположим, что вектор-функция* $Af(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ *для некоторого* $\gamma_0 > 0$, *ядро* $K(t)$ *представимо в виде* (2.30), (2.31) *с постоянной* α *такой, что* $0 < \alpha \leqslant 1/2$, *а также выполняются условия* (2.32). *Тогда существует такое* $\gamma_1 > \gamma_0$, *что для всех* $\gamma > \gamma_1$, $\varphi_0 \in H_3$, $\varphi_1 \in H_2$ *задача* (2.28), (2.29) *однозначно разрешима в пространстве* $W^2_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, A^2\right)$ *и для ее решения выполнена оценка*

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leqslant d\big(\|Af\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \left\|A^3\varphi_0\right\|_H + \left\|A^2\varphi_1\right\|_H\big) \tag{2.33}$$

с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0 *и* φ_1.

Приведем результат о корректной разрешимости задачи (2.28), (2.29) в пространстве Соболева $W^2_{2,\gamma}\left((0,T), A^2\right)$ на конечном интервале $(0,T)$, $T > 0$, снабженном нормой

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}((0,T),A^2)} \equiv \Big(\int_0^T e^{-2\gamma t}\big(\left\|u^{(2)}(t)\right\|^2_H + \left\|A^2 u(t)\right\|^2_H\big)dt\Big)^{1/2}, \quad \gamma \geqslant 0.$$

Теорема 2.9. *Предположим, что вектор-функция* $Af(t) \in L_{2,\gamma_0}((0,T), H)$ *для некоторого* $\gamma_0 > 0$, *ядро* $K(t)$ *представимо в виде* (2.30), (2.31) *с постоянной* α *такой, что* $0 < \alpha \leqslant 1/2$, *а также выполняются условия* (2.32); *кроме того,* $\varphi_0 \in H_3$, $\varphi_1 \in H_2$. *Тогда существует такое* $\gamma_1 > \gamma_0$, *что для всех* $\gamma \geqslant \gamma_1$ *задача* (2.28), (2.29) *имеет единственное решение, принадлежащее пространству* $W^2_{2,\gamma}\left((0,T), A^2\right)$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}((0,T),A^2)} \leqslant d(T)\big(\|Af\|_{L_{2,\gamma}((0,T),H)} + \left\|A^3\varphi_0\right\|_H + \left\|A^2\varphi_1\right\|_H\big) \tag{2.34}$$

с постоянной $d(T)$, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

По теореме о следах (см. [34, гл. I]) из теоремы 2.9 вытекает следствие.

Следствие 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.9. *Тогда решение* $u(t)$ *задачи* (2.28), (2.29) *удовлетворяет неравенству*

$$\sup_{t\in[0,T]}\left\|A^{3/2}u(t)\right\|_H + \sup_{t\in[0,T]}\left\|A^{1/2}u^{(1)}(t)\right\|_H \leqslant d_1(T)\big(\|Af\|_{L_{2,\gamma}((0,T),H)} + \left\|A^3\varphi_0\right\|_H + \left\|A^2\varphi_1\right\|_H\big)$$

с постоянной $d_1(T)$, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Доказательства теорем 2.8 и 2.9 приведены в статье [85].

Здесь уместно отметить, что разрешимость уравнений типа Гуртина—Пипкина в функциональных пространствах, заданных на конечных конечном интервале $(0,T)$, изучалась Л. Пандолфи в работе [73] (см. там соответствующую библиографию).

Ряд интересных результатов о корректной разрешимости функционально-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева установлен А. Л. Скубачевским в работах [47, 48].

2.3. Интегродифференциальные уравнения, возникающие в теории вязкоупругости с ядрами, представимыми рядами экспонент и интегралами Стилтьеса. Данный раздел посвящен изучению интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами более общего вида. Рассматриваемые уравнения представляют собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Эти уравнения могут быть реализованы как интегродифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в теории вязкоупругости (см. [50, 63–66]), а также, в частном случае, как интегродифференциальные уравнения Гуртина—Пипкина (см. [35, 61, 69]), которые описывают процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью; кроме того, указанные уравнения возникают в задачах усреднения в многофазных средах (закон Дарси) (см. [22, 23, 45, 46, 82]).

Пусть A — самосопряженный положительный оператор, $A^* = A \geqslant \kappa_0 I$ ($\kappa_0 > 0$), действующий в пространстве H, имеющий компактный обратный. Пусть B — симметрический оператор $(Bx, y) = (x, By)$, действующий в пространстве H с областью определения $\mathrm{Dom}\,(B)$ ($\mathrm{Dom}\,(A) \subseteq \mathrm{Dom}\,(B)$), неотрицательный, $(Bx, x) \geqslant 0$ для любых $x, y \in \mathrm{Dom}\,(B)$ и удовлетворяющий неравенству $\|Bx\| \leqslant \kappa \|Ax\|$, $0 < \kappa < 1$ для любого $x \in \mathrm{Dom}\,(A)$, а I — тождественный оператор в пространстве H.

Рассмотрим следующую задачу для интегродифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) + Bu(t) - \int_0^t K(t-s)Au(s)ds - \int_0^t Q(t-s)Bu(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.35}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \tag{2.36}$$

Предположим, что ядра интегральных операторов $K(t)$ и $Q(t)$ имеют следующие представления: $K(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\gamma_k t}$, $Q(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\gamma_k t}$, где коэффициенты $a_k > 0$, $b_k \geqslant 0$, $\gamma_{k+1} > \gamma_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\gamma_k \to +\infty$ ($k \to +\infty$). Кроме того, будем считать, что выполнены условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\gamma_k} < 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\gamma_k} < 1. \tag{2.37}$$

Условие (2.37) означает, что $K(t), Q(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$, $\|K\|_{L_1} < 1$, $\|Q\|_{L_1} < 1$. Если к условиям (2.37) добавить также условия

$$K(0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty, \quad Q(0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty, \tag{2.38}$$

то ядра $K(t)$ и $Q(t)$ будут принадлежать пространству $W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

Интегродифференциальное уравнение (2.35) представляет собой абстрактную форму динамического уравнения вязкоупругости, в котором операторы A и B порождаются дифференциальными выражениями $A = -\rho^{-1}\mu\left(\Delta u + \frac{1}{3}\mathrm{grad}(\mathrm{div} u)\right)$, $B = -\frac{1}{3}\rho^{-1}\lambda \cdot \mathrm{grad}(\mathrm{div} u)$, где $u = \vec{u}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ — вектор перемещений вязкоупругой наследственной изотропной среды, среда заполняет ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, ρ — постоянная плотность, $\rho > 0$, коэффициенты Ламе λ, μ — положительные постоянные, $K(t)$, $Q(t)$ — функции релаксации, характеризующие наследственные свойства среды. На границе области $\partial\Omega$ выполняется краевое условие Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.39}$$

В качестве пространства H рассматривается пространство трехмерных вектор-функций $L_2(\Omega)$. Область определения $\mathrm{Dom}(A)$ принадлежит векторному пространству Соболева $W_2^2(\Omega)$ и естественно выделяется краевым условием (2.39). Условия (2.37) имеет конкретный физический смысл (подробнее см. [26, 39]).

В случае, когда оператор $B = 0$ и самосопряженный положительный оператор A может быть реализован как $Ay = -y''(x)$, где $x \in (0, \pi)$, $y(0) = y(\pi) = 0$, либо как $Ay = -\Delta y$ с условиями Дирихле в ограниченной области с достаточно гладкой границей, уравнение (2.35) представляет собой абстрактную форму уравнения Гуртина—Пипкина, описывающего процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью.

Другой класс приложений — это задачи усреднения в многофазных средах, где одной из фаз является упругая (или вязкоупругая) среда, а другой — вязкая (сжимаемая или несжимаемая) жидкость (подробнее см. [22, 23, 45, 46, 51, 82]). Задача усреднения состоит в том, чтобы построить эффективную (усредненную) модель такой двухфазной среды, когда отдельные включения той или иной фазы быстро чередуются при изменении пространственных переменных. Предварительные исследования показывают, что одномерная модель распространения колебаний в такой усредненной (гомогенизированной) среде в абстрактной форме может быть записана как операторное уравнение, рассматриваемое в данной работе.

Следует также отметить, что уравнения рассматриваемого вида возникают в физических задачах. К уравнениям, близким по форме к рассматриваемым в этой статье, относится ряд уравнений и систем уравнений, возникающих в кинетической теории газов. В этих задачах интегральные слагаемые играют роль вязкости. Такое операторное представление вязкости возникает при выводе уравнений газовой динамики непосредственно из законов взаимодействия молекул.

Рассматривая преобразование Лапласа уравнения (2.35) при однородных начальных условиях, получаем оператор-функцию

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A + B - \hat{K}(\lambda)A - \hat{Q}(\lambda)B, \tag{2.40}$$

которая является символом этого уравнения. Здесь $\hat{K}(\lambda)$ и $\hat{Q}(\lambda)$ — преобразования Лапласа ядер $K(t)$ и $Q(t)$, соответственно, имеющие представления

$$\hat{K}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(\lambda + \gamma_k)}, \quad \hat{Q}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(\lambda + \gamma_k)}. \tag{2.41}$$

Далее устанавливается корректная разрешимость начальной задачи для уравнения (2.35) в весовых пространствах Соболева на положительной полуоси и исследуется вопрос о локализации спектра для оператор-функции $L(\lambda)$, являющейся символом указанного уравнения.

Введем обозначения: $a := \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $b := \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, $A_0 := A + B$. Согласно известному результату [27, с. 361], оператор A_0 является самосопряженным и положительным. Превратим область определения $\mathrm{Dom}(A_0^\beta)$ оператора A_0^β, $\beta > 0$ в гильбертово пространство H_β, введя на $\mathrm{Dom}(A_0^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A_0^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A_0^β.

Замечание 2.1. Из свойств операторов A и B следует, что оператор A_0 является обратимым, операторы AA_0^{-1}, BA_0^{-1} — ограниченные, а оператор A_0^{-1} — компактный.

Через $W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A_0)$ обозначим пространство Соболева вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ со значениями в H с нормой $\|u\|_{W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+,A_0)} \equiv \left(\int_0^\infty e^{-2\gamma t}\left(\|u^{(n)}(t)\|_H^2 + \|A_0^{n/2}u(t)\|_H^2\right)dt\right)^{1/2}$, $\gamma \geqslant 0$.

Подробнее о пространствах $W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A_0)$ см. в монографии [34, гл. 1]. При $n = 0$ полагаем $W_{2,\gamma}^0(\mathbb{R}_+, A_0) \equiv L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, при $\gamma = 0$ будем писать $W_{2,0}^n = W_2^n$.

Определение 2.7. Будем называть вектор-функцию u *сильным решением задачи* (2.35), (2.36), если она принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A_0)$ для некоторого $\gamma \geqslant 0$ ($A_0 = A + B$), удовлетворяет уравнению (2.35) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$ и начальному условию (2.36).

Следующая теорема дает достаточное условие корректной разрешимости задачи (2.35), (2.36).

Теорема 2.10. *Пусть выполнено условие* (2.38)*,* $f'(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ *для некоторого* $\gamma_0 \geqslant 0$ *и* $f(0) = 0$; *кроме того,* $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$. *Тогда существует такое* $\gamma_1 \geqslant \gamma_0$, *что для любого* $\gamma > \gamma_1$ *задача* (2.35), (2.36) *имеет единственное решение в пространстве* $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A_0)$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+,A_0)} \leqslant d\left(\|f'(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A_0\varphi_0\|_H + \left\|A_0^{1/2}\varphi_1\right\|_H \right), \tag{2.42}$$

где константа d *не зависит от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Рассмотрим следующую задачу для интегродифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) + Bu(t) - \int_0^t K(t-s)Au(s)ds - \int_0^t Q(t-s)Bu(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.43}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \tag{2.44}$$

$$u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \tag{2.45}$$

Предположим, что ядра интегральных операторов $K(t)$ и $Q(t)$ имеют следующие представления: $K(t) = \int_0^\infty e^{-t\tau}d\mu(\tau)$, $Q(t) = \int_0^\infty e^{-t\tau}d\eta(\tau)$, где $d\mu$ и $d\eta$ — положительные меры, которым соответствуют возрастающие, непрерывные справа функции распределения μ и η, соответственно. Интеграл понимается в смысле Стилтьеса. Кроме того, будем считать, что выполнены условия

$$\int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < 1, \quad \int_0^\infty \frac{d\eta(\tau)}{\tau} < 1. \tag{2.46}$$

Условия (2.46) означают, что $K(t), Q(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$, $\|K\|_{L_1} < 1$, $\|Q\|_{L_1} < 1$. Если к условиям (2.46) добавить также условия

$$K(0) = \int_0^\infty d\mu(\tau) \equiv \operatorname{Var} \mu|_0^\infty < +\infty, \quad Q(0) = \int_0^\infty d\eta(\tau) \equiv \operatorname{Var} \eta|_0^\infty < +\infty, \tag{2.47}$$

причем носители μ и η принадлежат полуоси $(d_0, +\infty)$, $d_0 > 0$, тогда ядра $K(t)$ и $Q(t)$ будут принадлежать пространству $W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

Преобразование Лапласа сильного решения задачи (2.43), (2.44) с начальными условиями $u(+0) = 0$, $u^{(1)}(+0) = 0$ имеет представление $\hat{u}(\lambda) = L^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda)$. Здесь оператор-функция $L(\lambda)$ является символом уравнения (2.43) и имеет следующий вид:

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A + B - \hat{K}(\lambda)A - \hat{Q}(\lambda)B, \tag{2.48}$$

где $\hat{K}(\lambda)$ и $\hat{Q}(\lambda)$ — преобразования Лапласа ядер $K(t)$ и $Q(t)$, соответственно, имеющие представления $\hat{K}(\lambda) = \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\lambda+\tau}$, $\hat{Q}(\lambda) = \int_0^\infty \frac{d\eta(\tau)}{\lambda+\tau}$, $\hat{f}(\lambda)$ — преобразование Лапласа вектор-функции $f(t)$, I — тождественный оператор в пространстве H.

Определение 2.8. Будем называть вектор-функцию u *сильным решением задачи* (2.43)–(2.45), если она принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A_0)$ для некоторого $\gamma \geqslant 0$ $(A_0 = A + B)$, удовлетворяет уравнению (2.1) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$ и начальному условию (2.44).

Определение 2.9. Вектор-функцию $u\,(t) \in W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$ назовем *обобщенным* (*слабым*) *решением задачи* (2.43)–(2.45), если $u\,(t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$-\left\langle u^{(1)}(t), v^{(1)}(t)\right\rangle_{L_{2,\gamma}} + \left\langle (A+B)^{1/2}u\,(t), (A+B)^{1/2}v\,(t)\right\rangle_{L_{2,\gamma}} + 2\gamma\left\langle u^{(1)}(t), v\,(t)\right\rangle_{L_{2,\gamma}} -$$
$$-\left\langle \int_0^t K\,(t-s)\,(A+B)^{-1/2}Au\,(s)\,ds, (A+B)^{1/2}v\,(t)\right\rangle_{L_{2,\gamma}} -$$
$$-\left\langle \int_0^t Q\,(t-s)\,(A+B)^{-1/2}Bu\,(s)\,ds, (A+B)^{1/2}v\,(t)\right\rangle_{L_{2,\gamma}} - \langle f\,(t), v\,(t)\rangle_{L_{2,\gamma}} - \langle \varphi_1, v\,(0)\rangle = 0$$

для любой вектор-функции $v\,(t) \in W_{2,\gamma}^1\left(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2}\right)$, а также условию (2.2).

Отметим, что по определению пространства $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$ вектор функции $u^{(1)}(t)$ и $A_0^{1/2}u(t)$ принадлежат пространству $L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$, поскольку норма в этом пространстве определяется как $\|u\|_{W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})} \equiv \left(\int_0^\infty e^{-2\gamma t}\left(\|u^{(1)}(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2}u(t)\|_H^2\right)dt\right)^{1/2}$, $\gamma \geqslant 0$.

Следующие теоремы дают нам достаточное условие корректной разрешимости задачи (2.43)–(2.45).

Теорема 2.11. *Пусть выполнены условия* (2.46), (2.47), $f'(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ *для некоторого* $\gamma_0 \geqslant 0$ *и* $f(0) = 0$; *кроме того,* $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$. *Тогда существует такое* $\gamma_1 \geqslant \gamma_0$, *что для любого* $\gamma > \gamma_1$ *задача* (2.43)–(2.45) *имеет единственное решение в пространстве* $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A_0)$, *удовлетворяющее неравенству* $\|u\|_{W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A_0)} \leqslant d\left(\|f'(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} + \|A_0\varphi_0\|_H + \|A_0^{1/2}\varphi_1\|_H\right)$, *где константа* d *не зависит от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Теорема 2.12. *Пусть выполнены условия* (2.46), (2.47), $f(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ *для некоторого* $\gamma_0 \geqslant 0$, *а также* $\varphi_0 \in H_{1/2}$, $\varphi_1 \in H$. *Тогда существует такое* $\gamma_1 \geqslant \gamma_0$, *что для любого* $\gamma > \gamma_1$ *задача* (2.43)–(2.45) *имеет обобщенное решение в пространстве* $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$, *для которого справедлива оценка* $\|u\|_{W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})} \leqslant d\left(\|f(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} + \|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H + \|\varphi_1\|_H\right)$, *где константа* d *не зависит от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Доказательства теорем 2.10–2.12 опубликованы в статьях [11, 84], а также в главе 3 монографии [12].

Уместно отметить, что в работах [17, 44] получены результаты о корректной разрешимости и получены оценки классических решений задачи вида (2.43)–(2.45), основанные на применении теории полугрупп к исследованию интегродифференциальных уравнений.

3. Спектральный анализ

3.1. Интегродифференциальные уравнения Гуртина—Пипкина с ядрами, представимыми рядами убывающих экспонент и интегралами Стилтьеса. Рассмотрим оператор-функцию $L(\lambda) := \lambda^2 I + \lambda \hat{K}(\lambda) A^2$, где $\hat{K}(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k(\lambda+\gamma_k)}$ — преобразование Лапласа функции $K(t)$, I — единичный оператор, действующий в пространстве H. Собственные значения оператора A удовлетворяют строгим неравенствам $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n \ldots$; $a_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Заметим, что оператор-функция $L(\lambda)$ является символом (аналогом характеристического квазиполинома) уравнения (2.5), в то же время оператор-функция $\lambda^{-1} L(\lambda)$ является символом уравнения (2.1).

Рассмотрим сужение $l_n(\lambda) := (L(\lambda)e_n, e_n) = \lambda^2 + a_n^2 \lambda \hat{K}(\lambda)$ оператор-функции $L(\lambda)$ на одномерное подпространство, натянутое на вектор e_n, где $Ae_n = a_n e_n$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Таким образом, получаем счетный набор мероморфных функций $l_n(\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$.

Перейдем к вопросу о структуре спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда выполнено условие

$$\sup_k \{\gamma_k(\gamma_{k+1} - \gamma_k)\} = +\infty. \tag{3.1}$$

Отметим, что условие (3.1) использовалось С. А. Ивановым в работе [65] при изучении нулей мероморфных функций вида $l_n(\lambda)/\lambda$ в случае $a_n = n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (2.4) *и* (3.1). *Тогда нули мероморфной функции $l_n(\lambda)$ представляют собой счетную серию действительных нулей $\{\lambda_{k,n} | k \in \mathbb{N}\}$, удовлетворяющих неравенствам*

$$\ldots - \gamma_{k+1} < x_{k+1} < \lambda_{k+1,n} < -\gamma_k < \ldots < -\gamma_1 < \lambda_{1,n}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

где x_k — действительные нули функции $\lambda \hat{K}(\lambda)$, причем $\lambda_{1,n} = x_1 = 0$, $\lambda_{k,n} = x_k + O\Big(\frac{1}{a_n^2}\Big)$, $a_n \to +\infty$, а также пару комплексно-сопряженных нулей $\lambda_n^{\pm}$, $\lambda_n^{+} = \overline{\lambda_n^{-}}$, асимптотически представимых в следующем виде:

1) *если выполнено условие* (2.7), *то*

$$\lambda_n^{\pm} = \pm i \left(\sqrt{K(0)} \cdot a_n + O\left(\frac{1}{a_n}\right)\right) - \frac{1}{2K(0)} \sum_{k=1}^{\infty} c_k + O\left(\frac{1}{a_n^2}\right), \ a_n \to +\infty; \tag{3.3}$$

2) *если условие* (2.7) *не выполнено, то*

$$\lambda_n^{\pm} = \pm i \Theta(\{c_k\}, \{\gamma_k\}) a_n + \Phi(a_n, c_k, \gamma_k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.4}$$

где $\Theta(\{c_k\}, \{\gamma_k\})$ — некоторая положительная постоянная, зависящая от последовательностей $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\operatorname{Re}\Phi(a_n, c_k, \gamma_k) = O(a_n)$, $\operatorname{Im}\Phi(a_n, c_k, \gamma_k) = o(a_n)$ при $a_n \to +\infty$, причем $\lim\limits_{a_n \to \infty} \operatorname{Re}\Phi(a_n, c_k, \gamma_k) = -\infty$.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* (2.4) *и* (3.1). *Тогда спектр оператор-функции $L(\lambda)$ совпадает с замыканием объединения множества нулей функций $\{l_n(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$, т. е. представим в виде $\sigma(L) := \overline{\{\lambda_{k,n} | k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\lambda_n^{\pm} | n \in \mathbb{N}\}}$, причем $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_{k,n} = x_k$, где x_k — действительные нули функции $\lambda \hat{K}(\lambda)$.*

Приведем результат о распределении нулей функции $l_n(\lambda)$ в случае, когда ядро $K(t)$ представимо в виде конечного числа экспонент. Рассмотрим функцию

$$l_{n,N}(\lambda) := \lambda^2 + a_n^2 \lambda \hat{K}_N(\lambda), \tag{3.5}$$

где $\hat{K}_N(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{c_k}{\gamma_k(\lambda+\gamma_k)}$. Этот результат представляет интерес, так как в случае выполнения условий (2.4) и (2.7) асимптотика нулей функции $l_n(\lambda)$ получается из асимптотики нулей функции $l_{n,N}(\lambda)$ предельным переходом при $N \to +\infty$.

Лемма 3.1. *Нули мероморфной функции $l_{n,N}(\lambda)$ представляют собой серию действительных нулей $\{\mu_{k,n} | k \in \mathbb{N}\}$ таких, что $\ldots - \gamma_k < \mu_{k,n} < y_k < -\gamma_{k-1} < \ldots < -\gamma_1 < \mu_{1,n}$, $k = 2, \ldots, N$, где*

y_k — *действительные нули функции* $\lambda\hat{K}_N(\lambda)$, *причем* $\mu_{1,n} = y_1 = 0$, $\mu_{k,n} = y_k + O\Big(\frac{1}{a_n^2}\Big)$, *а также пару комплексно-сопряженных нулей* $\mu_n^{\pm}$, $\mu_n^{+} = \overline{\mu_n^{-}}$, *асимптотически представимых в виде*

$$\mu_n^{\pm} = \pm i\left(\sqrt{K_N(0)}\cdot a_n + O\left(\frac{1}{a_n}\right)\right) - \frac{1}{2K_N(0)}\sum_{k=1}^{N} c_k + O\left(\frac{1}{a_n^2}\right),\ a_n \to +\infty. \tag{3.6}$$

Следующая теорема представляет асимптотику комплексных нулей функции $l_n(\lambda)$ при $a_n \to +\infty$ в случае, когда не выполнено условие (2.7), а последовательности $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеют асимптотические представления $c_k = \frac{\mathcal{A}}{k^{\alpha}} + O\Big(\frac{1}{k^{\alpha+1}}\Big)$, $\gamma_k = \mathcal{B}k^{\beta} + O\left(k^{\beta-1}\right)$, при $k \to +\infty$, где $c_k > 0$, $\gamma_{k+1} > \gamma_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, константы $\mathcal{A} > 0$, $\mathcal{B} > 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $\alpha + \beta > 1$.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия* (2.4) *и* (3.1). *Тогда комплексно-сопряженные нули* $\lambda_n^{\pm}$, $\lambda_n^{+} = \overline{\lambda_n^{-}}$ *функции* $l_n(\lambda)$ *асимптотически представимы в виде*

$$\lambda_n^{\pm} = \pm i\sqrt{K(0)}\cdot a_n - \frac{D\mathcal{A}}{\beta\mathcal{B}^{1-r}(\sqrt{K(0)})^{1+r}}a_n^{1-r} + O(a_n^{1-2r}), \qquad \text{если } 0 < r < \frac{1}{2}, \tag{3.7}$$

$$\lambda_n^{\pm} = \pm i\sqrt{K(0)}\cdot a_n - \frac{D\mathcal{A}}{\beta\mathcal{B}^{1-r}(\sqrt{K(0)})^{1+r}}a_n^{1-r} + O(1), \qquad \text{если } \frac{1}{2} \leqslant r < 1, \tag{3.8}$$

$$\lambda_n^{\pm} = \pm i\sqrt{K(0)}\cdot a_n - \frac{1}{2K(0)}\frac{\mathcal{A}}{\beta}\ln a_n + O(1), \qquad \text{если } \ r = 1, \tag{3.9}$$

при $n \to +\infty$, *где* $r := \frac{\alpha+\beta-1}{\beta}$, *константа* D *зависит от* r *и определяется следующим образом*: $D := \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi r)}e^{-i(r+1)\frac{\pi}{2}}$.

Замечание 3.1. В случае $c_k = \frac{1}{k^{\alpha}}$, $\gamma_k = k^{\beta}$, $a_n = n$ асимптотика комплексных нулей $\lambda_n^{\pm}$ получена С. А. Ивановым [63].

Доказательства теорем 3.1–3.3 и леммы 3.1 приведены в главе 3 монографии [12], а также в статье [7].

Исследованием задач для дифференциальных и интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами (со слагаемым, соответствующим мгновенному трению Кельвина—Фойгта) занимались многие авторы. Ограничимся здесь упоминанием работы [36], в которой исследовались указанные задачи (без интегральных слагаемых) для абстрактных дифференциальных уравнений, и работы [38], в которой рассмотрены интегродифференциальные уравнения.

Замечание 3.2. Для меры $d\mu$ с компактным носителем и ядра вида $\mathcal{K}(t) = \int_{d_0}^{d_1}\frac{e^{-t\tau}}{\tau}d\mu(\tau)$, $0 < d_0 < d_1 < +\infty$ показано А.И. Еременко и С.А. Ивановым, что спектр оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$ может содержать лишь конечное число комплексных собственных значений. При этом возможна ситуация, когда комплексная часть спектра отсутствует (см. [60]). Кроме того, в работе [60] авторы поставили вопрос о структуре невещественного спектра в случае некомпактного носителя меры. В работе [53] А.В. Давыдов и Ю.А. Тихонов дали полный ответ на поставленный вопрос и привели соответствующие примеры.

В следующей лемме приведена оценка оператор-функции $\mathcal{L}^{-1}(\lambda)$ в области $\Omega_{\alpha,R}$, не содержащей спектра оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$.

Лемма 3.2. *Для любых* $\alpha > 0$ *и* $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *найдется такое* $R = R(\alpha,\theta) > 0$, *что в области* $\Omega_{\alpha,R} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > R\} \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda - \pi| > \theta\}$ *справедлива оценка*

$$|\lambda|\ \left\|A^2\mathcal{L}^{-1}(\lambda)\right\| + |\lambda|^2\left\|\mathcal{L}^{-1}(\lambda)\right\| \leqslant \mathrm{const}. \tag{3.10}$$

Следствие 3.1. *Из оценки* (3.10) *вытекает оценка для оператор-функции* $\mathcal{M}(\lambda) = \lambda^{-1}\mathcal{L}(\lambda)$, *являющейся символом уравнения* (2.8):

$$\left\|A^2\mathcal{M}^{-1}(\lambda)\right\| + |\lambda|\left\|\mathcal{M}^{-1}(\lambda)\right\| \leqslant \mathrm{const}, \quad \lambda \in \Omega_{\alpha,R}. \tag{3.11}$$

Отметим, что оценка вида (3.11) известна для функционально-дифференциального уравнения параболического типа (см. [4, гл. 1] и соответствующую библиографию).

Теорема 3.4. *Пусть выполнены условия* (2.17), (2.18) *и мера* $d\mu$ *имеет компактный носитель. Тогда для достаточно больших* a_n *невещественные собственные значения* $\lambda_n^{\pm}$ ($\lambda_n^- = \overline{\lambda_n^+}$) *оператор-функции* $\mathcal{L}(\lambda)$ *имеют следующую асимптотику*:

$$\lambda_n^{\pm} = \pm i\sqrt{\mathcal{K}(0)}a_n + \frac{\mathcal{K}'(0)}{2\mathcal{K}(0)} + O\Big(\frac{1}{a_n}\Big),\ a_n \to +\infty. \tag{3.12}$$

Приведем результат о локализации спектра оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$ в случае, когда мера $d\mu$ имеет компактный носитель.

Теорема 3.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.4 *и мера* $d\mu$ *имеет компактный носитель, принадлежащий отрезку* $[d_1, d_2]$, $0 < d_1 < d_2$. *Тогда найдется такое число* y_0, $0 < y_0 < d_1$, *что спектр оператор-функции* $\mathcal{L}(\lambda)$ *представим в виде* $\sigma(\mathcal{L}) := \sigma_R \cup \sigma_I$, *где* σ_R *и* σ_I — *вещественная и невещественная части спектра оператор-функции* $\mathcal{L}(\lambda)$, *соответственно, причем* $\sigma_R \subset [-d_2, -d_1 + y_0]$, $\sigma_I = \overline{\Big\{\lambda_n^{\pm} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, \lambda_n^- = \overline{\lambda_n^+} | n \in \mathbb{N}\Big\}}$, *где* $\lambda_n^{\pm}$ — *невещественные собственные значения оператор-функции* $\mathcal{L}(\lambda)$, *имеющие асимптотическое представление* (3.12).

Доказательства теорем 3.5–3.5 приведены в статье [10].

3.2. Интегродифференциальные уравнения Гуртина—Пипкина с ядрами Работнова. Обозначим через a_j собственные значения оператора A ($Ae_j = a_j e_j$), занумерованные в порядке возрастания: $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots, a_n \to +\infty$ ($n \to +\infty$). Соответствующие собственные векторы $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ образуют ортонормированный базис пространства H. Рассмотрим сужение оператор-функции $L(\lambda)$ (см. (2.25)) на одномерное подпространство, натянутое на вектор e_n:

$$l_n(\lambda) = (L(\lambda)e_n, e_n) = \lambda^2 + a_n^2\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda^{\alpha} + \beta_k}\right), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Перейдем к изучению структуры спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда выполнены условия (2.23), (2.24).

Теорема 3.6. *Пусть выполнено условие* (2.23). *Тогда спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *лежит в открытой левой полуплоскости.*

Замечание 3.3. Если выполнено условие $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{c_j}{\beta_j} > 1$, то в правой полуплоскости имеется бесконечное число вещественных собственных значений оператор-функции $L(\lambda)$. Таким образом, условие (2.23) является необходимым условием устойчивости задачи (2.19), (2.20).

Теорема 3.7. *Пусть выполнены условия* (2.23) *и* $c_j = 0$ *для всех* j, *больших некоторого* $N \in \mathbb{N}$. *Тогда для каждого достаточно большого* $n \in \mathbb{N}$ *существует два невещественных комплексно-сопряженных нуля* ${\lambda_n}^+ = \bar{\lambda}_n^-$ *функции* $l_n(\lambda)$, *имеющих следующую асимптотику*:

$$\lambda_n^{\pm} = -\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)a_n^{1-\alpha}\frac{Q}{2} \pm i a_n\Big(1 - \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)a_n^{-\alpha}\frac{Q}{2}\Big) + o\left(a_n^{1-\alpha}\right), \quad n \to +\infty, \tag{3.13}$$

где $Q = \sum\limits_{j=1}^{N} c_j$.

Здесь уместно сделать важное замечание.

Замечание 3.4. При $\alpha = 1$ асимптотическая формула (3.13) переходит в асимптотическую формулу (3.3) при $K(0) = 1$.

Доказательства теорем 3.6–3.7 приведены в статьях [14,15].

3.3. Интегродифференциальные уравнения, возникающие в теории вязкоупругости с ядрами, представимыми рядами экспонент и интегралами Стилтьеса. Перейдем к изучению структуры спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда выполнены условия (2.37), (2.38), а также условие

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\gamma_k^2(\gamma_{k+1} - \gamma_k) = +\infty. \tag{3.14}$$

Существует предел

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\gamma_k - \gamma_{k-1}}{\gamma_k} = 0. \tag{3.15}$$

Замечание 3.5. Условие (3.15) выполняется в случае степенного поведения последовательности $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$, т. е. когда $\gamma_k \simeq k^{\alpha}$, $\alpha > 0$. В этом случае $\frac{\gamma_k - \gamma_{k-1}}{\gamma_k} \sim \frac{\alpha}{k} \to 0$ $(k \to \infty)$. В задачах усреднения в многофазных средах последовательности $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ являются последовательностями собственных значений некоторых вспомогательных эллиптических задач и поэтому имеют степенную асимптотику (подробнее см. [22, 23, 82]). В свою очередь, условие (3.15) не выполняется, если последовательность $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ ведет себя как геометрическая прогрессия со знаменателем больше единицы, т. е. $\gamma_k = cq^k$, $q > 1$, $c > 0$. Подобное поведение членов последовательности γ_k реже встречается в приложениях.

Теорема 3.8. *Пусть выполнены условия* (2.37), (2.38), (3.14), (3.15). *Тогда спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ (2.40) *принадлежит объединению интервалов* $\Delta_k = (-\gamma_k, \tilde{p}_k) \subset (-\gamma_k, -\gamma_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$ $(\gamma_0 = 0)$ *и полосы* $\{\lambda \in \mathbb{C} | \alpha_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \alpha_2\}$, *где* $\tilde{p}_k = \max\{p_k(\tau'), p_k(\tau'')\}$, $p_k(\tau)$ — *вещественные корни уравнения*

$$\Phi_\tau(p) := \tau \sum_{k=1}^{\infty} a_k (p + \gamma_k)^{-1} + (1-\tau) \sum_{k=1}^{\infty} b_k (p+\gamma_k)^{-1} = 1 \quad (0 \leqslant \tau \leqslant 1),$$

принадлежащие интервалам $(-\gamma_k, -\gamma_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$ $(\gamma_0 = 0)$, $\tau' := \left\| A^{-1/2} A_0 A^{-1/2} \right\|^{-1}$, $\tau'' := \left\| A_0^{-1/2} A A_0^{-1/2} \right\|$, $0 < \tau' < \tau'' \leqslant 1$,

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} \sup_{\|f\|=1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((a_k A + b_k B) f, f)}{((A+B)f, f)}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} \inf_{\|f\|=1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((a_k A + b_k B) f, f)}{\left((A + B + \gamma_k^2 I) f, f\right)}, \quad f \in D(A).$$

Замечание 3.6. Согласно лемме 2.1 из работы [49], оператор $A^{-1/2} B A^{-1/2}$ допускает ограниченное замыкание в пространстве H. Отсюда следует, что оператор $A^{-1/2} A_0 A^{-1/2} = I + A^{-1/2} B A^{-1/2}$ допускает ограниченное замыкание в H. В свою очередь, в силу упомянутой леммы 2.1 из работы [49] и в силу самосопряженности оператора $A_0 = A + B$, оператор $A_0^{-1/2} A A_0^{-1/2}$ также допускает ограниченное замыкание в пространстве H. Таким образом, величины τ' и τ'', фигурирующие в формулировке теоремы 3.8, определены корректно.

Теорема 3.9. *Невещественный спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *симметричен относительно вещественной оси и состоит из собственных значений конечной алгебраической кратности, причем для любого* $\varepsilon > 0$ *в области* $\Omega_\varepsilon := \mathbb{C} \backslash \{\lambda : \alpha_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \alpha_2, |\operatorname{Im}\lambda| < \varepsilon\}$ *собственные значения являются изолированными, т. е. не имеют точек накопления.*

Отметим, что оператор-функция вида (2.40) в случае конечного числа слагаемых в представлении (2.41) ($a_k = b_k = 0$, $k > N$, $N \in \mathbb{N}$) изучалась в [37]. Теоремы 3.8, 3.9 представляют собой естественное развитие результатов работы [37].

Доказательства теорем 3.8–3.9 приведены в статье [11].

Перейдем к изучению структуры спектра оператор-функции $L(\lambda)$ (см. (2.48)) в случае, когда выполнены условия (2.46), (2.47).

Теорема 3.10. *Пусть выполнены условия* (2.46), (2.47). *Тогда спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *лежит в открытой левой полуплоскости* $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ *и справедливо неравенство* $\left\| A^{1/2} L^{-1}(\lambda) A^{1/2} \right\| \leqslant \text{const}$, $\operatorname{Re}\lambda > \gamma > 0$.

Условия (2.46) являются существенными для устойчивости задачи (2.43)–(2.45).

Замечание 3.7. При нарушении условия (2.46), т. е. при выполнении неравенства

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} > 1, \tag{3.16}$$

в правой полуплоскости может оказаться бесконечное число вещественных собственных значений оператор-функции $L(\lambda)$.

Поясним это замечание, рассмотрев следующий частный случай: функция $\eta(\tau) = 0$, оператор $B = 0$, а функция $\mu(\tau)$ — ступенчатая функция, имеющая представление $\mu(\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \chi[\gamma_j, \gamma_{j+1})$, где $\chi[\gamma_j, \gamma_{j+1})$ — характеристические функции полуинтервалов $[\gamma_j, \gamma_{j+1})$, $0 < \gamma_j < \gamma_{j+1}$, $\gamma_j \to +\infty$

$(j \to +\infty)$. В этом случае условие (3.16) примет вид $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} > 1$. При этом оператор-функция $L(\lambda)$ будет иметь вид $L(\lambda) = \lambda^2 I + A - \widehat{K}(\lambda)$, где $\widehat{K}(\lambda) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\lambda+\gamma_j}$. В силу сделанных предположений относительно оператора A, собственные векторы $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$, отвечающие собственным значениям a_j $(Ae_j = a_j e_j)$, образуют ортонормированный базис пространства H. При этом $a_j \to +\infty$ $(j \to +\infty)$.

Рассмотрим скалярные функции $l_n(\lambda) = (L(\lambda) e_n, e_n) = \lambda^2 + a_n - a_n \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\lambda+\gamma_j}$, являющиеся сужениями оператор-функции $L(\lambda)$ на одномерные подпространства, натянутые на собственные векторы e_n. Тогда уравнение $l_n(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, может быть записано в виде $\varphi_n(x) = \psi(x)$, где $\varphi_n(x) = \frac{x^2}{a_n} + 1$, $\psi(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{x+\gamma_j}$. Заметим, что функция $\psi(x)$ на полуоси $[0, +\infty)$ является монотонно убывающей и достигающей своего максимума на полуоси $[0, +\infty)$ при $x = 0$, равного $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} > 1$. Поэтому график функции $\psi(x)$ пересекается с графиками парабол $\varphi_n(x)$ при положительных значениях x_n, являющихся собственными значениями оператор-функции $L(\lambda)$. При этом с ростом n нули x_n будут стремиться к точке x^*, являющейся решением уравнения $\psi(x) = 1$ при положительных x, поскольку $a_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$.

В случае $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} = 1$ точка $\lambda = 0$ является собственным значением оператор-функции $L(\lambda)$ бесконечной кратности.

Теорема 3.11. *Пусть выполнены условия* (2.46), (2.47) *и носители мер* $\mu(\tau)$, $\nu(\tau)$ *принадлежат отрезку* $[d_1, d_2]$, *где* $0 < d_1 < d_2 < +\infty$. *Тогда для любого сколь угодно малого* $\theta_0 > 0$ *существует такое число* $R_0 > 0$, *что спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *принадлежит множеству* $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0, |\lambda| < R_0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \alpha_2\}$, *где* $\alpha_1 = \alpha_0 - \theta_0$, $R_0 \geqslant \max(d_2, -\alpha_0 + \theta_0)$,

$$\alpha_0 = -\frac{1}{2} \sup_{\|f\|=1} \frac{((K(0)A + Q(0)B)f, f)}{((A+B)f, f)}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} \inf_{\|f\|=1} \frac{((K(0)A + Q(0)B)f, f)}{\left((A + B + d_2^2 I)f, f\right)}, \quad f \in D(A).$$

При этом существует такое $\gamma_0 > 0$, *что для оператор-функции* $L^{-1}(\lambda)$ *на множестве* $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < -R_0\} \cup \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > \gamma_0\}$ *справедлива оценка* $\left\|L^{-1}(\lambda)\right\| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|\lambda||\operatorname{Re}\lambda|}$.

Утверждение 3.1. *Величина* α_0 *допускает оценку* $\alpha_0 \geqslant -\frac{1}{2}\left\|A_0^{-1/2}\,(K(0)A + Q(0)B)\,A_0^{-1/2}\right\|$.

Теорема 3.12. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.11. *Тогда невещественная часть спектра оператор-функции* $L(\lambda)$ *симметрична относительно вещественной оси и состоит из собственных значений конечной алгебраической кратности, причем для любого* $\varepsilon > 0$ *в области* $\Omega_\varepsilon := \Omega \backslash \{\lambda : |\operatorname{Im}\lambda| < \varepsilon\}$ *собственные значения являются изолированными, т. е. не имеют точек накопления.*

Доказательства теорем 3.11 и 3.12 приведены в статье [84].

Отметим также, что оператор-функция вида (2.25) в случае, когда ядра интегральных операторов являются суммами дробно-экспоненциальных функций (функций Работнова) с положительными коэффициентами, изучалась в [12, 13].

Обозначим через $N(\mu; L(\lambda))$ кратность характеристического числа $\lambda = \mu$ оператор-функции $L(\lambda)$. Введем $\nu(r; \Omega; L(\lambda))$ — функцию распределения характеристических чисел оператор-функции $L(\lambda)$. Предполагая $L(\lambda)$ аналитической оператор-функцией в области Ω, положим $\nu(r; \Omega; L(\lambda)) = \sum\limits_{\mu \in \Omega, |\mu| < r} N(\mu; L(\lambda))$. Причем, если в области $\Omega \cap \{\lambda : |\lambda| < r\}$ лежит бесконечное число характеристических чисел $L(\lambda)$ либо $N(\mu; L(\lambda)) = \infty$ хотя бы в одной точке $\mu \in \Omega$ с $|\mu| < r$, то $\nu(r; \Omega; L(\lambda)) = \infty$. Обозначим область $\Psi_{\theta,\eta} = \{\lambda : |\lambda| > \eta, |\arg\lambda| < \theta\}$, $\pi/2 < \theta < \pi$, причем здесь $-\pi < \arg\lambda \leqslant \pi$. В дальнейшем соотношение $\nu_1(t) \sim \nu_2(t)$ означает, что $\frac{\nu_1(t)}{\nu_2(t)} \to 1$ при $t \to \infty$.

Следуя [40], через Re обозначим множество таких неубывающих функций $\nu(r)$, определенных при достаточно больших вещественных r, что для каждой функции $\nu(r) \in \mathrm{Re}$ существует постоянная $a > 1$, для которой $\nu(ar) \geqslant 2\nu(r)$ при достаточно больших r. Пусть Im — множество неубывающих функций $\nu(r)$, обладающих свойством: для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\nu(r + \delta r) \leqslant (1 + \varepsilon)\nu(r)$.

Обозначим через $P(\lambda)$ оператор-функцию вида $P(\lambda) = \lambda^2 I + A + B$. Используя [40, теорема 2.1] и теорему 3.11, получаем следующий результат.

Теорема 3.13. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.11, $\nu(r; \Psi_{\theta,\eta}; P(\lambda)) \in \mathrm{Re} \cap \mathrm{Im}$. *Тогда спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *в области* $\Psi_{\theta,\eta}$ *состоит из дискретных точек спектра и справедливо соотношение* $\nu(r; \Psi_{\theta,\eta}; P(\lambda)) \sim \nu(r; \Psi_{\theta,\eta}; L(\lambda))$.

Обозначим через $N(r, A_0^{1/2})$ число собственных чисел оператора $A_0^{1/2}$ (посчитанных с учетом кратности), меньших, чем r.

Следствие 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.13. *Тогда* $\nu(r, \Psi_{\theta,\eta}, L(\lambda)) \sim 2N(r, A_0^{1/2})$.

Утверждение следствия немедленно вытекает из теоремы 3.13 и соотношения $P(\lambda) = \lambda^2 I + A_0 = (\lambda I - iA_0^{1/2})(\lambda I + iA_0^{1/2})$.

Доказательство теоремы 3.13 приведено в недавней статье [18].

4. Представление решений

4.1. Интегродифференциальные уравнения Гуртина—Пипкина с ядрами, представимыми рядами убывающих экспонент и интегралами Стилтьеса. Далее приводятся результаты о представлении решения задачи (2.5), (2.6) в виде суммы ряда по экспонентам, отвечающим точкам спектра оператор-функции $L(\lambda)$.

Теорема 4.1. *Пусть* $f(t) = 0$ *при* $t \in \mathbb{R}_+$, *вектор-функция* $u(t) \in W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$, $\gamma > 0$ *является сильным решением задачи* (2.5), (2.6) *и выполнены условия* (2.4), (3.1). *Тогда для любого* $t \in \mathbb{R}_+$ *решение* $u(t)$ *задачи* (2.5), (2.6) *представимо в виде суммы ряда*

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{1n} + \lambda_n^+ \varphi_{0n})\, e^{\lambda_n^+ t} e_n}{l_n'(\lambda_n^+)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{1n} + \lambda_n^- \varphi_{0n})\, e^{\lambda_n^- t} e_n}{l_n'(\lambda_n^-)} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{1n} + \lambda_{k,n}\varphi_{0n})\, e^{\lambda_{k,n} t}}{l_n'(\lambda_{k,n})} \right) e_n, \quad (4.1)$$

сходящегося по норме пространства H, *где* $\lambda_{k,n}$ — *действительные нули мероморфной функции* $l_n(\lambda)$, *удовлетворяющие неравенствам* (3.2), $\lambda_n^\pm$ — *пара комплексно-сопряженных нулей*, $\lambda_n^+ = \overline{\lambda_n^-}$, *асимптотически представимых в виде* (3.3), *если выполнено условие* (2.7), *или в виде* (3.4), *если условие* (2.7) *не выполнено.*

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1 *и* $\varphi_0 \in H_2$, $\varphi_1 \in H_1$. *Тогда ряд, полученный из* (4.1) p*-кратным почленным дифференцированием по* t *при* $p = 0, 1, 2$, *сходится в пространстве* H_{2-p} *равномерно по* t *на любом отрезке* $[t_0, T]$, *где* $0 < t_0 < T < +\infty$. *При этом для всех* $t \in [t_0, T]$ *справедливы оценки* $\left\| \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{(p)}(t) e_n \right\|^2_{H_{2-p}} \leqslant d(\|A\varphi_1\|^2 + \|A^2\varphi_0\|^2)$, $p = 0, 1, 2$, *с константой* d, *не зависящей от вектор-функций* φ_1 *и* φ_0.

Кроме того, в случае конечного числа слагаемых в (2.3) (*т. е.* $c_j = 0$ *для* $j > N$, $N \in \mathbb{N}$), *можно положить* $t_0 = 0$.

Теорема 4.3. *Пусть вектор-функция* $f(t) \in C([0, T], H)$ *для любого* $T > 0$, *вектор-функция* $u(t) \in W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$ *при некотором* $\gamma > 0$ *является сильным решением задачи* (2.5), (2.6) *и выполнены условия* (2.4), (3.1), $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. *Тогда для любого* $t \in \mathbb{R}_+$ *решение* $u(t)$ *задачи* (2.5), (2.6) *представимо в виде суммы ряда*

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t, \lambda_n^+) e_n + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t, \lambda_n^-) e_n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \omega_n(t, \lambda_{kn}) \right) e_n, \quad (4.2)$$

сходящегося по норме пространства H, *где* $\omega_n(t, \lambda) = \frac{\int_0^t f_n(\tau) e^{\lambda(t-\tau)} d\tau}{l_n'(\lambda)}$.

Теорема 4.4. *Пусть вектор-функция* $f(t) \in W^2_{2,\gamma^*}(\mathbb{R}_+, A)$ *при некотором* $\gamma^* \geqslant 0$, *вектор-функция* $u(t) \in W^2_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, A^2\right)$, $\gamma > \gamma^*$ *является сильным решением задачи* (2.5), (2.6) *и выполнены условия* (2.4), (3.1), $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \gamma_j^{-3/2} < \infty$. *Тогда ряд, полученный из* (4.2) *p-кратным почленным дифференцированием по t при* $p = 0, 1, 2$, *сходится в пространстве* H_{2-p} *равномерно по t на любом отрезке* $[t_0, T]$, *где* $t_0 < T < +\infty$ ($t_0 = 0$ *при* $p = 1, 2$ *и* $t_0 > 0$ *при* $p = 0$), *причем* $\omega_n^{(p)}(t, \lambda) = l_n'(\lambda)^{-1}\left[\left((p-1)f_n'(0) + \lambda^{(p-1)} f_n(0)\right) e^{\lambda t} + \int_0^t f_n^{(p)}(\tau) e^{\lambda(t-\tau)} d\tau\right]$ *и для всех* $t \in [t_0, T]$ *справедливы следующие оценки*:

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) e_n\right\|^2_{H_2} \leqslant d\left\|A^2 f(t)\right\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+,H)},$$

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(p)}(t) e_n\right\|^2_{H_{2-p}} \leqslant d\big(\left\|A^{2-p} f^{(p)}(t)\right\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+,H)} + \left\|A^{2-p} f(0)\right\|^2_H + (p-1)\left\|f'(0)\right\|^2_H\big), \quad p = 1, 2.$$

На основе теоремы 3.5 о структуре спектра оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$ получим представление решения задачи (2.15), (2.16). Отметим, что в случае, когда ядро $\mathcal{K}(t)$ представимо в виде суммы ряда убывающих экспонент с положительными коэффициентами, результаты о представлении решений получены в работах [9, 43, 83] и подытожены в третьей главе монографии [12].

На комплексной плоскости рассмотрим контур $\Gamma = C_1 \cup \Gamma^+ \cup C_2 \cup \Gamma^-$, где

$$C_1 = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = -d_1 + y_0 e^{i\varphi}, -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}, \quad \Gamma^+ = \left\{x + iy \in \mathbb{C} \,|\, -d_2 \leqslant x \leqslant -d_1,\, y = y_0,\, y_0 > 0\right\},$$

$$C_2 = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = -d_2 + y_0 e^{i\varphi}, \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2}\right\}, \quad \Gamma^- = \left\{x + iy \in \mathbb{C} \,|\, -d_2 \leqslant x \leqslant -d_1,\, y = -y_0,\, y_0 > 0\right\},$$

обходимый по часовой стрелке.

Теорема 4.5. *Пусть в уравнении* (2.15) $f(t) \equiv 0$ *и выполнены условия теоремы* 3.5. *Тогда сильное решение задачи* (2.15), (2.16) *представимо в виде*

$$u(t) = u_I(t) + u_R(t), \tag{4.3}$$

где $u_I(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}\left[\frac{\exp(\lambda_n^+ t)}{l_n^{(1)}(\lambda_n^+)}\right] \varphi_n e_n$, $u_R(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mathcal{L}^{-1}(\lambda)\varphi e^{\lambda t} d\lambda$, λ_n^+ — *невещественные собственные значения оператор-функции* $\mathcal{L}(\lambda)$, *имеющие асимптотическое представление* (3.12).

Теорема 4.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.5. *Тогда существует такое* $y_0 > 0$, $0 < y_0 < d_1$, *что для вектор-функций* $u_I(t)$ *и* $u_R(t)$ *справедливы оценки* $\|u_I(t)\|_H \leqslant C_1 e^{\kappa t}\|\varphi\|_H$, $\|u_R(t)\|_H \leqslant C_2 \eta(t)\left\|A^{-2}\varphi\right\|_H$, *где* $\kappa = \sup\limits_{n \in N} \operatorname{Re}\lambda_n^+$, $C_j > 0$ — *некоторые положительные константы*, $j = 1, 2$,

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2r_0^2(y_0)}{{y_0}^2}\xi^2(t) + 2\pi^2\mu^2(y_0)\left(e^{-2(d_1-y_0)t} + e^{-2(d_2-y_0)t}\right)\right]^{1/2},$$

$$\xi(t) = \frac{e^{d_2 t} - e^{d_1 t}}{t}, \quad r_0(y_0) = \left(\int_{d_1}^{d_2} \frac{d\mu(\tau)}{\tau(\tau^2 + y_0^2)}\right)^{-1}, \quad \mu(y_0) = \left(\int_{d_1}^{d_2} \frac{d\mu(\tau)}{\tau((d_2 - d_1 + y_0)^2 + y_0^2)}\right)^{-1}.$$

Теорема 4.7. *Пусть в задаче* (2.15), (2.16) $\varphi = 0$ *и выполнены условия теорем* 2.5 *и* 3.5. *Тогда сильное решение задачи* (2.15), (2.16) *представимо в виде*

$$u(t) = w_I(t) + w_R(t), \tag{4.4}$$

где

$$w_I(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t \left[\frac{\exp(\lambda_n^+(t-\tau))}{l_n^{(1)}(\lambda_n^+)} + \frac{\exp(\lambda_n^-(t-\tau))}{l_n^{(1)}(\lambda_n^-)}\right] f_n(\tau) d\tau\right) e_n,$$

$$w_R(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^t \left(\int_\Gamma \mathcal{L}^{-1}(\lambda) e^{\lambda(t-\tau)} d\lambda\right) f(\tau) d\tau,$$

$\lambda_n^\pm$ — *невещественные собственные значения оператор-функции* $\mathcal{L}(\lambda)$, *имеющие асимптотическое представление* (3.12).

Отметим, что в представлении решений (4.3), (4.4) ряды $u_I(t)$, $w_I(t)$, соответствующие невещественной части спектра оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$, по своей структуре и характеру поведения близки к представлению в виде ряда Фурье решения волнового уравнения и в этом смысле имеют волновой характер поведения. В свою очередь, члены $u_R(t)$, $w_R(t)$, соответствующие вещественной части спектра оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$, в указанном смысле близки к решению уравнения теплопроводности. Уместно отметить, что функция $u_R(t)$ является бесконечно дифференцируемой. Таким образом, решения задачи (2.15), (2.16) по своим свойствам занимают промежуточное положение между решениями волнового уравнения и уравнения теплопроводности.

Отметим, что доказательства теорем 4.5–4.7 приведены в статье [10].

4.2. Интегродифференциальные уравнения Гуртина—Пипкина с ядрами Работнова. Сформулируем результат о представлении сильного решения задачи (2.19)–(2.20). Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{K}_n(\tau) = \frac{a_n^2\big(\hat{K}_-(-\tau) - \hat{K}_+(-\tau)\big)}{\big(\tau^2 + a_n^2\big(1 - \hat{K}_+(-\tau)\big)\big)\big(\tau^2 + a_n^2\big(1 - \hat{K}_-(-\tau)\big)\big)}, \quad \hat{K}_\pm(-\tau) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\tau^\alpha e^{\pm i\pi\alpha} + \beta_k}.$$

Теорема 4.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.2, $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $f(t) \equiv 0$. *Тогда сильное решение задачи* (2.19)–(2.20) *представимо в виде* $u(t) = u_I(t) + u_R(t)$, $t > 0$, *где вектор-функция* $u_I(t)$ *представима в виде*

$$u_I(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\omega_n(t, \lambda_n^+) + \omega_n(t, \lambda_n^-)\big)\, e_n, \quad \omega_n(t, \lambda) = \frac{(\varphi_{1n} + \lambda\varphi_{0n})\, e^{\lambda t}}{l_n^{(1)}(\lambda)}, \tag{4.5}$$

а вектор-функция $u_R(t)$ *представима в виде*

$$u_R(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{Rn}(t) e_n, \quad u_{Rn}(t) = \int_0^\infty e^{-t\tau} \mathcal{K}_n(\tau)\, (-\tau\varphi_{0n} + \varphi_{1n}) d\tau, \tag{4.6}$$

при этом ряды (4.5), (4.6) *сходятся по норме пространства* H, *а* $\lambda_n^\pm$ — *невещественные собственные значения оператор-функции* $L(\lambda)$, $\varphi_{kn} = (\varphi_k, e_n)$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2$.

В нижеследующих теоремах 4.8 и 4.9 приведены оценки вектор-функций $u_I(t)$ и $u_R(t)$. Отметим, что компонента $u_I(t)$ соответствует невещественным собственным значениям $\lambda_n^\pm$ и отвечает за волновой характер поведения решений. Компонента $u_R(t)$ отвечает за поведение оператор-функции $L^{-1}(\lambda)$ на разрезе отрицательной полуоси.

Обозначим через P_n ортопроектор на подпространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\{e_j\}_{j=1}^n$, а через Q_n ортопроектор на подпространство, ортогональное подпространству P_nH, т. е. $Q_n = I - P_n$, а пространство H представимо в виде ортогональной суммы $H = P_nH \oplus Q_nH$. Приведем результаты об оценке проекций вектор-функции $u_I(t)$ на подпространства Q_nH и P_nH.

Теорема 4.9. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.8. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют такое натуральное число* n_0, *что для вектор-функции* $u_I(t)$, *определенной соотношением* (4.5), *выполнены оценки*

$$\|Q_{n_0} u_I(t)\| \leqslant \theta_1 \big\|Q_{n_0} e^{-kA^{1-\alpha}t}\varphi_0\big\| + \theta_2 \big\|Q_{n_0} e^{-kA^{1-\alpha}t} A^{-1}\varphi_1\big\|, \quad t > 0, \tag{4.7}$$

$$0 < k = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\sum_{j=1}^{N} c_j - \varepsilon,$$

$$\|P_{n_0} u_I(t)\| \leqslant \theta_3 e^{-\delta t}\left\{\|P_{n_0}\varphi_0\| + \big\|P_{n_0}A^{-1}\varphi_1\big\|\right\}, \quad t > 0, \tag{4.8}$$

с некоторыми положительными постоянными δ, θ_1, θ_2, θ_3, *не зависящими от векторов* φ_0, φ_1.

Следствие 4.1. *Пусть вектор-функция* $u_I(t)$ *определена соотношением* (4.5), *где* $\lambda_n^\pm$ *для каждого достаточно большого* $n \in \mathbb{N}$ *имеют асимптотику* (3.13), *векторы* $\varphi_0 \in H_p$, $\varphi_1 \in H_{p-1}$, $p \in \mathbb{N}$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* $n_0 \in \mathbb{N}$, *что выполнены следующие оценки*

$$\|A^p Q_{n_0} u_I(t)\| \leqslant \theta_4 \big\|Q_{n_0} e^{-kA^{1-\alpha}t} A^p\varphi_0\big\| + \theta_5 \big\|Q_{n_0} e^{-kA^{1-\alpha}t} A^{p-1}\varphi_1\big\|, \quad t > 0, \tag{4.9}$$

$$0 < k = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\sum_{j=1}^{N} c_j - \varepsilon,$$

$$\|A^p P_{n_0} u_I(t)\| \leqslant \theta_6 e^{-\delta t}\left\{\|P_{n_0} A^p \varphi_0\| + \left\|P_{n_0} A^{p-1}\varphi_1\right\|\right\}, \quad t > 0, \tag{4.10}$$

с некоторыми положительными постоянными δ, θ_4, θ_5, θ_6, *не зависящими от векторов* φ_0, φ_1.

Заметим, что в формулировке следствия 4.1 не предполагается, что вектор-функция u является решением задачи (2.19)–(2.20), т. е. разложение (4.5) носит абстрактный характер. Тем не менее, при выполнении условий теоремы 4.8 оценки (4.9), (4.10) можно применить к решению задачи (2.19)–(2.20), причем случаю сильного решения соответствует $p = 3$, а случаю обобщенного решения соответствует $p = 2$.

Кроме того, в случае реализации оператора A как самосопряженного дифференциального оператора в частных производных по пространственным переменным, оценки (4.9), (4.10) можно рассматривать как оценки компоненты u_I решения u соответствующей начально-краевой задачи для интегродифференциального уравнения в частных производных, отвечающей за волновой характер поведения.

Оценки (4.7), (4.8) показывают, что компонента решения $u_I(t)$, отвечающая невещественной части спектра, экспоненциально убывает.

Теорема 4.10. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.8. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *вектор-функция* $u_R(t)$, *определяемая соотношением* (4.6)*, допускает оценку*

$$\|u_R(t)\|^2 \leqslant e^{-2\varepsilon t}\left\{k_1\left\|A^{-\alpha}\varphi_0\right\|^2 + k_2\left\|A^{-1-\alpha}\varphi_1\right\|^2\right\} + k_3\left\{\varepsilon^{2(2+\alpha)}\left\|A^{-2}\varphi_0\right\|^2 + \varepsilon^{2(1+\alpha)}\left\|A^{-2}\varphi_1\right\|^2\right\},$$

$t > 0$, *с постоянными* k_1, k_2, k_3, *не зависящими от векторов* φ_0, φ_1.

Отметим, что доказательства теорем 4.8–4.10 приведены в статье [16].

5. Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегродифференциальными уравнениями, и их свойства

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — самосопряженный положительный оператор, $A^* = A \geqslant \kappa_0 I$ ($\kappa_0 > 0$), действующий в пространстве H, имеющий ограниченный обратный. Путь B — симметрический оператор, $(Bx, y) = (x, By)$, действующий в пространстве H с областью определения $\mathrm{Dom}(B)$ $(\mathrm{Dom}(A) \subseteq \mathrm{Dom}(B))$, неотрицательный: $(Bx, x) \geqslant 0$ для любых $x, y \in \mathrm{Dom}(B)$, и удовлетворяющий неравенству $\|Bx\| \leqslant \kappa \|Ax\|$, $0 < \kappa < 1$ для любого $x \in \mathrm{Dom}(A)$, а I — тождественный оператор в пространстве H.

Рассмотрим следующую задачу для интегродифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + (A + B)\,u(t) - \sum_{k=1}^{m}\int_0^t R_k(t-s)\,(a_k A + b_k B)\,u(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{5.1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \tag{5.2}$$

Предположим, что функции $R_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered} R_k(t) - \text{положительные невозрастающие функции,} \\ R_k(t) \in L_1(\mathbb{R}_+),\ \lim_{t\to+\infty} R_k(t) = 0,\ k = 1, \ldots, m. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Кроме того, будем предполагать, что выполнены следующие условия: $\sum\limits_{k=1}^{m}\left(a_k\int_0^{+\infty} R_k(s)ds\right) < 1$, $\sum\limits_{k=1}^{m}\left(b_k\int_0^{+\infty} R_k(s)ds\right) < 1$. Положим $M_k(t) = \int_t^{+\infty} R_k(s)ds = \int_0^{+\infty} R_k(t+s)ds$, $k = 1, \ldots, m$. Пусть

$$A_0 = \left(1 - \sum_{k=1}^{m}\left(a_k\int_0^{+\infty} R_k(s)ds\right)\right)A + \left(1 - \sum_{k=1}^{m}\left(b_k\int_0^{+\infty} R_k(s)ds\right)\right)B, \quad A_k = a_k A + b_k B.$$

Из известного результата (см. [27, с. 361]) вытекает, что операторы A_0, A_k являются самосопряженными и положительными для всех $k = 1, \ldots, m$.

Отметим, что задачи вида (5.1), (5.2) являются операторными моделями задач, возникающих в теории вязкоупругости (см. [50, 63–66]) и теплофизике (см. [35, 61, 69]). Спектральный анализ уравнения (5.1) в случае, когда ядра $R_k(t)$ представляют собой убывающие экспоненты или функции Работнова (см. [39]), проводился в работах [4–21, 82–85].

Представленные в данной работе результаты являются продолжением и развитием исследований, опубликованных в работах [4–21].

Превратим область определения $\mathrm{Dom}(A_0^\beta)$ оператора A_0^β, $\beta > 0$ в гильбертово пространство H_β, введя на $\mathrm{Dom}(A_0^\beta)$ норму, эквивалентную норме графика оператора A_0^β.

Замечание 5.1. Из свойств операторов A и B, согласно [27–52, 54–67], следует, что операторы A_0, A_k являются обратимыми для всех $k = 1, \dots, m$, операторы $Q_k := A_k^{1/2} A_0^{-1/2}$ — допускают ограниченное замыкание в H для всех $k = 1, \dots, m$, а A_0^{-1} — ограниченный оператор.

Определение 5.1. Будем называть вектор-функцию $u(t)$ *классическим решением задачи* (5.1), (5.2), если $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, H)$, $Au(t)$, $Bu(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$, $u(t)$ удовлетворяет уравнению (5.1) для каждого значения $t \in \mathbb{R}_+$ и начальному условию (5.2).

5.1. Полугруппа в расширенном функциональном пространстве. Через Ω_k обозначим весовое пространство $L^2_{r_k}(\mathbb{R}_+, H)$ вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со значениями в H, снабженное нормой $||u||_{\Omega_k} = \left(\int_0^{+\infty} r_k(s)||u(s)||_H^2 ds\right)^{1/2}$, $r_k(\tau) := R_k^{-1}(\tau) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $k = 1, \dots, m$.

Рассмотрим сильно непрерывную полугруппу $L_k(t)$ левых сдвигов в пространстве Ω_k (см. [59, с. 33], [74]): $L_k(t)\xi(\tau) = \xi(t+\tau)$, $t > 0$. Известно, что линейный оператор $T_k\xi(\tau) = \partial\xi(\tau)/\partial\tau$ в пространстве Ω_k с областью определения $D(T_k) = \{\xi \in \Omega_k : \partial\xi(\tau)/\partial\tau \in \Omega_k\}$ является генератором полугруппы $L_k(t)$ (см. [59, с. 66]).

Введем гильбертово пространство $\mathbb{H} = H \oplus H \oplus \left(\bigoplus\limits_{k=1}^{m} \Omega_k\right)$ с нормой $\|(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \dots, \xi_m(\tau))\|_{\mathbb{H}}^2 = ||v||_H^2 + ||\xi_0||_H^2 + \sum\limits_{k=1}^{m} ||\xi_k||_{\Omega_k}^2$, $\tau > 0$, которое будем называть *расширенным гильбертовым пространством*.

Введем линейный оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с областью определения $D(\mathbb{A}) = \Big\{(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \dots, \xi_m(\tau)) \in \mathbb{H} : v \in H_{1/2},\ \xi_0 + \sum\limits_{k=1}^{m} Q_k^* \int_0^{+\infty} \xi_k(\tau)d\tau \in H_{1/2},\ \xi_k(\tau) \in D(T_k),\ k = 1, \dots, m\Big\}$, действующий следующим образом:

$$\mathbb{A}(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \dots, \xi_m(\tau)) = \Big(-A_0^{1/2}\Big[\xi_0 + \sum_{k=1}^{m} Q_k^* \int_0^{+\infty} \xi_k(\tau)d\tau\Big],\ A_0^{1/2}v,\ R_k(\tau)Q_kA_0^{1/2}v + T_k\xi_k(\tau),\ k = \overline{1,m}\Big).$$

Введем два $(2+m)$-компонентных вектора вида $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), \dots, \xi_m(t,\tau)) \in \mathbb{H}$ и $z = (v_0, \xi_{00}, \xi_{10}(\tau), \dots, \xi_{m0}(\tau)) \in \mathbb{H}$.

Рассмотрим следующую задачу Коши в пространстве $\mathbb{H}$:

$$\frac{d}{dt}Z(t) = \mathbb{A}Z(t), \tag{5.4}$$

$$Z(0) = z. \tag{5.5}$$

Определение 5.2. Вектор $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), \dots, \xi_m(t,\tau)) \in \mathbb{H}$ называется *классическим решением задачи* (5.4), (5.5), если $v(t), \xi_0(t) \in C^1([0,+\infty), H)$, $\xi_k(t,\tau) \in C^1([0,+\infty), H)$ для любого $\tau > 0$, $k = 1, \dots, m$, $Z(t) \in C([0,+\infty), D(\mathbb{A}))$, вектор $Z(t)$ удовлетворяет уравнению (5.4) для любого $t \in \mathbb{R}_+$и начальному условию (5.5).

Теорема 5.1. *Оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с плотной областью определения $D(\mathbb{A})$ является максимально диссипативным, т. е. $(\mathbb{A}Z, Z) \leqslant 0$ для всех $Z \in D(\mathbb{A})$ и оператор $\mathbb{A}$ не имеет нетривиальных диссипативных расширений.*

Теорема 5.2. *Линейный оператор $\mathbb{A}$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы $S(t) = e^{t\mathbb{A}}$ в пространстве $\mathbb{H}$, при этом решение задачи* (5.4), (5.5) *представимо в виде $Z(t) = S(t)z$, $t > 0$, и для любого $z \in D(\mathbb{A})$ справедливо энергетическое равенство*:

$$\frac{d}{dt}||S(t)z||_{\mathbb{H}}^2 = -\sum_{k=1}^{m}\left(\lim_{\tau\to 0+} r_k(\tau)||\xi_k(t,\tau)||_H^2 + \int_0^{+\infty} r'_k(\tau)||\xi_k(t,\tau)||_H^2 d\tau\right).$$

5.2. Экспоненциальная устойчивость. Предположим, что определенные выше функции $R_k(\tau)$ дифференцируемы при $\tau \in (0, +\infty)$, а также для некоторого $\gamma > 0$ и для любого $\tau > 0$ удовлетворяют условиям

$$R_k'(\tau) + \gamma R_k(\tau) \leqslant 0. \tag{5.6}$$

Условие (5.6) хорошо известно в литературе (см., например, [50]). Можно показать, что ядра $R_k(t)$, заданные в виде убывающих экспонент $R_k(t) = e^{-\beta_k t}$, $0 < \beta_k < \beta_{k+1}$, $k = 1, \ldots, m$ или функций Работнова $R_k(t) = \mathit{Э}_{\alpha-1}(-\beta_k, t) := t^{\alpha-1} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-\beta_k)^n t^{n\alpha}}{\Gamma[(n+1)\alpha]}$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta_k < \beta_{k+1}$, $k = 1, \ldots, m$, где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, удовлетворяют условию (5.6).

Теорема 5.3. *Пусть функции* $R_k(\tau) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *удовлетворяют условиям* (5.3), (5.6) *для некоторого* $\gamma > 0$ *и любого* $\tau > 0$ *для всех* $k = 1, \ldots, m$. *Тогда существуют такие постоянные* $\theta > 1$ *и* $\omega > 0$, *что для любого* $z \in \mathbb{H}$ *справедливо неравенство* $\|S(t)z\|_{\mathbb{H}} \leqslant \theta \|z\|_{\mathbb{H}} e^{-\omega t}$.

Отметим, что доказательства теорем 5.1 и 5.2 приведены в статье [44].

5.3. Корректная разрешимость. Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \mathbb{A} Z(t) + F(t), \tag{5.7}$$

$$Z(0) = z. \tag{5.8}$$

Будем предполагать, что вектор-функция $F(t)$ имеет вид $F(t) := (f_1(t), \underbrace{0, \ldots, 0}_{m+1})$, $f_1(t) = f(t) - \sum\limits_{k=1}^{m} M_k(t) A_k \varphi_0$, вектор имеет вид $z = (\varphi_1, A_0^{1/2}\varphi_0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m})$.

Теорема 5.4. *Пусть функции* $R_k(\tau) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *удовлетворяют условиям* (5.3) *и выполнены следующие условия*:

1) *вектор-функция* $A_0^{1/2} f(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$, *функция* $M_k(t) \in C(\mathbb{R}_+)$, *вектор* $\varphi_0 \in H_{3/2}$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$; *или*
2) *вектор-функция* $f(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$, *функция* $M_k(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $k = 1, \ldots, m$, *вектор* $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$.

Тогда задача (5.7)-(5.8) *имеет единственное классическое решение* $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), \ldots, \xi_m(t,\tau))$, *где* $v(t) := u'(t)$, $\xi_0(t) := A_0^{1/2} u(t)$, $u(t)$ — *классическое решение задачи* (5.1), (5.2) *и справедлива оценка* $\|Z(t)\|_{\mathbb{H}} \leqslant d\Big(\|z\|_{\mathbb{H}} + \int_0^t \|F(s)\|_{\mathbb{H}} ds\Big)$ *с постоянной* d, *не зависящей от вектор-функции* F *и векторов* φ_0, φ_1.

Если, кроме того, функции $R_k(\tau)$ *удовлетворяют также и условию* (5.6), *тогда справедлива оценка* $\|Z(t)\|_{\mathbb{H}} \leqslant d\Big(\|z\|_{\mathbb{H}} e^{-\omega t} + \int_0^t e^{-\omega(t-s)} \|F(s)\|_{\mathbb{H}} ds\Big)$ *с постоянной* d, *не зависящей от вектор-функции* F, *векторов* φ_0, φ_1 *и постоянной* ω, *определенной в формулировке теоремы* 5.3.

Теорема 5.5. *Пусть функции* $R_k(\tau) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *удовлетворяют условиям* (5.3) *и выполнены следующие условия*:

1) *вектор-функция* $A_0^{1/2} f(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$, *функция* $M_k(t) \in C(\mathbb{R}_+)$, *вектор* $\varphi_0 \in H_{3/2}$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$; *или*
2) *вектор-функция* $f(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$, *функция* $M_k(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $k = 1, \ldots, m$, *вектор* $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$.

Тогда задача (5.1), (5.2) *имеет единственное классическое решение* $u(t)$ *и справедлива оценка*

$$E_1(t) := \frac{1}{2}\Big(\big\|u'(t)\big\|_H^2 + \big\|A_0^{1/2} u(t)\big\|_H^2\Big) \leqslant$$
$$\leqslant d\left[\Big(\|\varphi_1\|_H^2 + \big\|A_0^{1/2}\varphi_0\big\|_H^2\Big) + \sum_{k=1}^{m} \left(\int_0^t \left(\int_s^{+\infty} R_k(p)\,dp\right) ds\right)^2 \|A_k \varphi_0\|_H^2 + \left(\int_0^t ||f(s)||\,ds\right)^2\right].$$

с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Более того, если функции $R_k(\tau)$ *удовлетворяют также и условию* (5.6), *тогда справедлива следующая оценка*:

$$E_1(t) := \frac{1}{2}\Big(\left\|u'(t)\right\|_H^2 + \left\|A_0^{1/2}u(t)\right\|_H^2\Big) \leqslant d\Bigg[\Big(\left\|\varphi_1\right\|_H^2 + \left\|A_0^{1/2}\varphi_0\right\|_H^2\Big)e^{-2\omega t} + \\ + \sum_{k=1}^{m}\left(\int_0^t e^{-\omega(t-s)}\left(\int_s^{+\infty} R_k(p)dp\right)ds\right)^2 \left\|A_k\varphi_0\right\|_H^2 + \left(\int_0^t e^{-\omega(t-s)}||f(s)||ds\right)^2\Bigg]$$

с постоянной d, не зависящей от вектор-функции f, векторов φ_0, φ_1 и постоянной ω, определенной в формулировке теоремы 5.3.

Отметим, что доказательства теорем 5.4 и 5.5 приведены в статье [44].

Замечание 5.2. Вследствие ограничений объема статьи мы не можем привести здесь формулировки результатов, посвященных исследованию интегродифференциальных уравнений вида

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A^2u\,(t) - \int_0^t K\,(t-s)A^{\theta}u\,(s)\,ds = f\,(t)$$

с параметром $\theta \in (0,1)$.

К уравнениям такого вида могут быть сведены задачи, возникающие в ряде приложений. Мы отсылаем читателя к статьям [5, 6, 75], в которых приведено доказательство корректной разрешимости начальных задач для указанных уравнений, а также проведен подробный спектральный анализ оператор-функций, являющихся их символами.

Библиографический комментарий. Следует отметить, что проблемой разрешимости и спектрального анализа вольтерровых интегродифференциальных уравнений на протяжении многих лет занималось большое число исследователей. В рамках одной статьи невозможно охватить все многообразие задач для вольтерровых интегродифференциальных уравнений. Мы ставим перед собой существенно более скромную задачу. Мы постараемся указать наиболее близкие к предмету нашего исследования задачи, а именно, мы остановимся на абстрактных интегродифференциальных уравнениях, т. е. на интегродифференциальных уравнениях с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве, к которым сводятся интегродифференциальные уравнения в частных производных, возникающих в задачах вязкоупругости и задачах теплофизики. Однако и при этом значительном сужении тематики количество работ в этом направлении очень велико.

Ограничимся здесь указанием монографий [12,50,66] (см. также приведенную в них библиографию), циклом работ Н. Д. Копачевского и его учеников Д. А. Закоры и Е. В. Семкиной [24–32,67], а также циклом работ авторов [4–21, 41–44, 75–79, 82–85]. Кроме того, мы приводим ряд ссылок на работы С. А. Иванова [60, 63–65], M. C. Dafermos [52], P. Devis [55, 56], Di Blasio [57, 58], W. Desch, R. Miller [54], R. Miller [68–70], J. Munoz Rivera [71], L. Pandolfi [73], J. Prüss [76–78], V. V. Vlasov и J. Wu [86], близкие к предмету рассмотрения настоящей статьи. Здесь уместно также упомянуть монографии по тематике функционально-дифференциальных уравнений А. Л. Скубачевского [47, 48] и J. Wu [87], идейно близких к теории интегродифференциальных уравнений, поскольку изучаемые интегродифференциальные уравнения описывают процессы в средах с памятью. Ряд интересных примеров неустойчивых функционально-дифференциальных уравнений приведен в работе [62].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д., Орлова Л. Д.* Эволюционные и спектральные задачи, порождаемые проблемой малых движений вязкоупругой жидкости// Тр. СПб. Мат. об-ва. — 1988. — *6*. — С. 5–33.
2. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д., Орлова Л. Д.* Операторный подход к исследованию гидродинамической модели Олдройта// Мат. заметки. — 1999. — *65*, № 6. — С. 924–928.
3. *Андронова О. А., Копачевский Н. Д.* О линейных задачах с поверхностной диссипацией энергии// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — *29*. — С. 11–28.
4. *Власов В. В., Медведев Д. А., Раутиан Н. А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ. — М.: МГУ, 2011.
5. *Власов В. В., Перез Ортиз Р.* Спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости и теплофизике// Мат. заметки. — 2015. — *98*, № 4. — С. 630–634.
6. *Власов В. В., Перез Ортиз Р., Раутиан Н. А.* Исследование вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений с ядрами, зависящими от параметра// Дифф. уравн. — 2018. — *54*, № 3. — С. 369–386.

7. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ абстрактных гиперболических интегродифференциальных уравнений// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2011. — *28.* — С. 75–113.
8. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Исследование интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости// Изв. вузов. Сер. Мат. — 2012. — *6.* — С. 56–60.
9. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ и представление решений абстрактных интегродифференциальных уравнений// Докл. РАН. — 2014. — *454*, № 2. — С. 141–144.
10. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* О свойствах решений интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории тепломассообмена// Тр. Моск. мат. об-ва. — 2014. — *75*, № 2. — С. 219–243.
11. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *58.* — С. 22–42.
12. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.
13. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Корректная разрешимость вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве// Дифф. уравн. — 2016. — *52*, № 9. — С. 1168–1177.
14. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Исследование операторных моделей, возникающих в теории вязкоупругости// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2018. — *64*, № 1. — С. 60–73.
15. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Корректная разрешимость и представление решений интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости// Дифф. уравн. — 2019. — *55*, № 4. — С. 574–587.
16. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ и представление решений интегро-дифференциальных уравнений с дробно-экспоненциальными ядрами// Тр. Моск. мат. об-ва. — 2019. — *80*, № 2. — С. 197–220.
17. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями// Дифф. уравн. — 2020. — *56*, № 8. — С. 1122–1126.
18. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Исследование вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса// Дифф. уравн. — 2021 (принято к печати).
19. *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике// Докл. РАН. — 2010. — *434*, № 1. — С. 12–15.
20. *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2011. — *39.* — С. 36–65.
21. *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2012. — *45.* — С. 43–61.
22. *Жиков В. В.* Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости// Мат. сб. — 2000. — *191* — № 7. — С. 31–72.
23. *Жиков В. В.* О двухмасштабной сходимости// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2003. — *23.* — С. 149–187.
24. *Закора Д. А.* Модель сжимаемой жидкости Олдройта// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *61.* — С. 41–66.
25. *Закора Д. А., Копачевский Н. Д.* О спектральной задаче, связанной с интегро-дифференциальным уравнением второго порядка// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. — 2004. — № 2. — С. 2–18.
26. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. — М.: Наука, 1970.
27. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
28. *Копачевский Н. Д.* Задача Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. — 2001. — *16.* — С. 139–152.
29. *Копачевский Н. Д.* Вольтерровы интегродифференциальные уравнения в гильбертовом пространстве. Специальный курс лекций. — Симферополь: «Бондаренко О. А.», 2012.
30. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
31. *Копачевский Н. Д., Орлова Л. Д., Пашкова Ю. С.* Дифференциально-операторные и интегро-дифференциальные уравнения в проблеме малых колебаний гидродинамических систем// Уч. зап. Симф. гос. ун-та. — 1995. — *41*, № 2. — С. 96–108.

32. *Копачевский Н. Д., Семкина Е. В.* Об интегро-дифференциальных уравнениях Вольтерра второго порядка, неразрешенных относительно старшей производной// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. физ.-мат. науки. — 2013. — *26*, № 1. — С. 52–79.
33. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
34. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
35. *Лыков А. В.* Некоторые проблемные вопросы теории тепломассопереноса// В сб.: «Проблемы тепло- и массопереноса». — Минск: Наука и техника, 1976. — С. 9–82.
36. *Милославский А. И.* Об устойчивости некоторых классов эволюционных уравнений// Сиб. мат. ж. — 1985. — *26*. — С. 118–132.
37. *Милославский А. И.* Спектральные свойства операторного пучка, возникающего в вязкоупругости// Деп. в Укр. НИИНТИ. — Харьков, 13.07.87. — № 1229-УК87. — С. 53.
38. *Милославский А. И.* О спектре неустойчивости операторного пучка// Мат. заметки. — 1991. — *49*, № 4. — С. 88–94.
39. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. — М.: Наука, 1977.
40. *Радзиевский Г. В.* Асимптотика распределения характеристических чисел оператор-функций, аналитических в угле// Мат. сб. — 1980. — *112*, № 3. — С. 396–420.
41. *Раутиан Н. А.* Об ограниченности одного класса интегральных операторов дробного типа// Мат. сб. — 2009. — *200*, № 12. — С. 81–106.
42. *Раутиан Н. А.* О представлении решений интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве// Сб. тр. межд. конф. «Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения». — МЭСИ, 2011. — С. 116–134.
43. *Раутиан Н. А.* О структуре и свойствах решений интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике// Мат. заметки. — 2011. — *90*, № 3. — С. 474–477.
44. *Раутиан Н. А.* Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями// Дифф. уравн. — 2020. — *56*, № 9. — С. 1226–1244.
45. *Сандраков Г. В.* Многофазные осредненные модели диффузии для задач с несколькими параметрами// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2007. — *71*, № 6. — С. 119–72.
46. *Санчес Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. — М.: Мир, 1984.
47. *Скубачевский А. Л.* Эллиптические задачи с нелокальными условиями в близи границы// Мат. сб. — 1986. — *129*, № 2. — С. 279–302.
48. *Скубачевский А. Л.* Об одном классе функционально-дифференциальных операторов, удовлетворяющих гипотезе Като// Алгебра и анализ. — 2018. — *30*, № 2. — С. 249–273.
49. *Шкаликов А. А.* Сильно демпфированные пучки операторов и разрешимость соответствующих операторно-дифференциальных уравнений// Мат. сб. — 1988. — *177*, № 1. — С. 96–118.
50. *Amendola G., Fabrizio M., Golden J. M.* Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications. — New York—Dordrecht—Heidelberg—London: Springer, 2012.
51. *Biot M. A.* Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media// J. Acoust. Soc. Am. — 1962. — *34*. — С. 1254–1264.
52. *Dafermos C. M.* Asymptotic stability in viscoelasticity// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1970. — *37*. — С. 297–308.
53. *Davydov A. V., Tikhonov Y. A.* Study of Kelvin—Voigt models arising in viscoelasticity// Differ. Equ. — 2018. — *54*, № 12. — С. 1620–1635.
54. *Desch W., Miller R. K.* Exponential stabilization of Volterra integrodifferential equations in Hilbert space// J. Differ. Equ. — 1987. — *70*. — С. 366–389.
55. *Devis P. L.* Hyperbolic integrodifferential equations// Proc. Am. Math. Soc. — 1975. — *47*. — С. 155–160.
56. *Devis P. L.* On the hyperbolicity of the equations of the linear theory of heat conduction for materials with memory// SIAM J. Appl. Math. — 1976. — *30*. — С. 75–80.
57. *Di Blasio G.* Parabolic Volterra equations of convolution type// J. Integral Equ. Appl. — 1994. — *6*. — С. 479–508.
58. *Di Blasio G., Kunisch K., Sinestrari E.* L^2-regularity for parabolic partial integrodifferential equations with delays in the highest order derivatives// J. Math. Anal. Appl. — 1984. — *102*. — С. 38–57.
59. *Engel K.-J., Nagel R.* One-parameter semigroup for linear evolution equations. — New York—Berlin—Heidelberg: Springer, 1999.
60. *Eremenko A., Ivanov S.* Spectra of the Gurtin—Pipkin type equations// SIAM J. Math. Anal. — 2011. — *43*. — С. 2296–2306.
61. *Gurtin M. E., Pipkin A. C.* General theory of heat conduction with finite wave speed// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1968. — *31*. — С. 113–126.

62. *Ismagilov R. S., Rautian N. A., Vlasov V. V.* Examples of very unstable linear partial functional differential equations// arXiv. — 1402.4107v1.
63. *Ivanov S. A.* «Wave type» spectrum of the Gurtin—Pipkin equation of the second order// arXiv. — 1002.2831.
64. *Ivanov S., Pandolfi L.* Heat equations with memory: lack of controllability to the rest// J. Math. Anal. Appl. — 2009. — *355*. — С. 1–11.
65. *Ivanov S. A., Sheronova T. L.* Spectrum of the heat equation with memory// arXiv. — 0912.1818v1.
66. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Non-self-adjoint problems for viscous fluids. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2003.
67. *Kopachevsky N. D., Syomkina E. V.* Linear Volterra integro-differential second-order equations unresolved with respect to the highest derivative// Eurasian Math. J. — 2013. — *4*, № 4. — С. 64–87.
68. *Miller R. K.* Volterra integral equations in a Banach space// Funkcialaj Ekvac. — 1975. — *18*. — С. 163–194.
69. *Miller R. K.* An integrodifferencial equation for rigid heat conductors with memory// J. Math. Anal. — 1978. — *66*. — С. 313–332.
70. *Miller R. K., Wheeler R. L.* Well-posedness and stability of linear Volterra integrodifferential equations in abstract spaces// Funkcialaj Ekvac. — 1978. — *21*. — С. 279–305.
71. *Munoz Rivera J. E., Naso M. G., Vegni F. M.* Asymptotic behavior of the energy for a class of weakly dissipative second-order systems with memory// J. Math. Anal. Appl. — 2003. — *286*. — С. 692–704.
72. *Myshkis A. D., Vlasov V. V.* On an analogy between the classifications of functional differential equations and partial differential equations// Funct. Differ. Equ. — 2009. — *16*, № 3. — С. 545–560.
73. *Pandolfi L.* The controllability of the Gurtin—Pipkin equations: a cosine operator approach// Appl. Math. Optim. — 2005. — *52*. — С. 143–165.
74. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications of partial differential equations. — New York etc.: Springer, 1983.
75. *Perez Ortiz R., Vlasov V. V.* Correct solvability of Volterra integrodifferential equations in Hilbert space// Electron. J. Qual. Theory Differ Equ. — 2016. — *31*. — С. 1–17.
76. *Prüss J.* On linear Volterra equations of parabolic type in Banach spaces// Trans. Am. Math. Soc. — 1987. — *301*, № 2. — С. 691–721.
77. *Prüss J.* Bounded solutions of Volterra equations// SIAM J. Math. Anal. — 1988. — *19*, № 1. — С. 133–149.
78. *Prüss J.* Evolutionary integral equations and applications. — Basel—Baston—Berlin: Birkhäuser, 1993.
79. *Rautian N. A.* Well-posedness of Volterra integro-differential equations with fractional exponential kernels// В сб.: «Differential and Difference Equations with Applications». — Cham: Springer, 2020. — С. 517–533.
80. *Shapiro J.* Composition Operators and Classical Function Theory. — New York: Springer, 1993.
81. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel: Birkhäuser, 1997.
82. *Vlasov V. V., Gavrikov A. A., Ivanov S. A., Knyaz'kov D. Yu., Samarin V. A., Shamaev A. S.* Spectral properties of combined media// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2010. — *164*, № 6. — С. 948–963.
83. *Vlasov V. V., Rautian N. A.* Spectral analysis and representations of solutions of abstract integro-differential equations in Hilbert space// В сб.: «Concrete operators, spectral theory, operators in harmonic analysis and approximation», IWOTA 11, Sevilla, Spain, July 3–9, 2011. — Basel: Birkhäuser/Springer, 2014. — С. 517–535.
84. *Vlasov V. V., Rautian N. A.* Spectral analysis of integrodifferential equations in Hilbert spaces// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2019. — *239*, № 6. — С. 771–787.
85. *Vlasov V. V., Rautian N. A.* A study of operator models arising in problems of hereditary mechanics// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2020. — *244*, № 2. — С. 170–182.
86. *Vlasov V. V., Wu J.* Solvability and spectral analysis of abstract hyperbolic equations with delay// Funct. Differ. Equ. — 2009. — *16*, № 4. — С. 751–768.
87. *Wu J.* Theory and applications of partial functional differential equations. — New York: Springer, 1996.

В. В. Власов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: victor.vlasov@math.msu.ru

Н. А. Раутиан
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: nadezhda.rautian@math.msu.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-255-284 UDC 517.968.72

Investigation of Integrodifferential Equations by Methods of Spectral Theory

© 2021 **V. V. Vlasov, N. A. Rautian**

Abstract. This paper provides a survey of results devoted to the study of integrodifferential equations with unbounded operator coefficients in a Hilbert space. These equations are operator models of integrodifferential partial differential equations arising in numerous applications: in the theory of viscoelasticity, in the theory of heat propagation in media with memory (Gurtin–Pipkin equations), and averaging theory. The most interesting and profound results of the survey are devoted to the spectral analysis of operator functions that are symbols of the integrodifferential equations under study.

REFERENCES

1. T. Ya. Azizov, N. D. Kopachevsky, and L. D. Orlova, "Evolyutsionnye i spektral'nye zadachi, porozhdaemye problemoy malykh dvizheniy vyazkouprugoy zhidkosti" [Evolution and spectral problems generated by the problem of small motions of a viscoelastic fluid], *Tr. SPb. Mat. ob-va* [Proc. Saint Petersburg Math. Soc.], 1988, **6**, 5–33 (in Russian).
2. T. Ya. Azizov, N. D. Kopachevsky, and L. D. Orlova, "Operatornyi podkhod k issledovaniyu gidrodinamicheskoy modeli Oldroyta" [Operator approach to the study of the Oldroyd hydrodynamic model], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1999, **65**, No. 6, 924–928 (in Russian).
3. O. A. Andronova and N. D. Kopachevsky, "O lineynykh zadachakh s poverkhnostnoy dissipatsiey energii" [On linear problems with surface energy dissipation], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2008, **29**, 11–28 (in Russian).
4. V. V. Vlasov, D. A. Medvedev, and N. A. Rautian, *Funktsional'no-differentsial'nye uravneniya v prostranstvakh Soboleva i ikh spektral'nyi analiz* [Functional Differential Equations in Sobolev Spaces and Their Spectral Analysis], MGU, Moscow, 2011 (in Russian).
5. V. V. Vlasov and R. Perez Ortiz, "Spektral'nyi analiz integrodifferentsial'nykh uravneniy, voznikayushchikh v teorii vyazkouprugosti i teplofizike" [Spectral analysis of integrodifferential equations arising in the theory of viscoelasticity and thermophysics], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2015, **98**, No. 4, 630–634 (in Russian).
6. V. V. Vlasov, R. Perez Ortiz, and N. A. Rautian, "Issledovanie vol'terrovykh integro-differentsial'nykh uravneniy s yadrami, zavisyashchimi ot parametra" [Investigation of Volterra integrodifferential equations with kernels depending on a parameter], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2018, **54**, No. 3, 369–386 (in Russian).
7. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Korrektnaya razreshimost' i spektral'nyi analiz abstraktnykh giperbolicheskikh integrodifferentsial'nykh uravneniy" [Correct solvability and spectral analysis of abstract hyperbolic integrodifferential equations], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2011, **28**, 75–113 (in Russian).
8. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Issledovanie integrodifferentsial'nykh uravneniy, voznikayushchikh v teorii vyazkouprugosti" [Study of integrodifferential equations arising in the theory of viscoelasticity], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2012, **6**, 56–60 (in Russian).
9. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Spektral'nyi analiz i predstavlenie resheniy abstraktnykh integrodifferentsial'nykh uravneniy" [Spectral analysis and representation of solutions of abstract integrodifferential equations], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2014, **454**, No. 2, 141–144 (in Russian).
10. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "O svoystvakh resheniy integrodifferentsial'nykh uravneniy, voznikayushchikh v teorii teplomassoobmena" [Properties of solutions of integro-differential equations arising in the theory of heat and mass transfer], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 2014, **75**, No. 2, 219–243 (in Russian).

11. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, “Korrektnaya razreshimost’ i spektral’nyi analiz integrodifferentsial’nykh uravneniy, voznikayushchikh v teorii vyazkouprugosti” [Well-posedness and spectral analysis of integro-differential equations arising in viscoelasticity theory], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **58**, 22–42 (in Russian).
12. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral’nyi analiz funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equations], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).
13. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, “Korrektnaya razreshimost’ vol’terrovykh integro-differentsial’nykh uravneniy v gil’bertovom prostranstve” [Correct solvability of Volterra integrodifferential equations in a Hilbert space], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2016, **52**, No. 9, 1168–1177 (in Russian).
14. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, “Issledovanie operatornykh modeley, voznikayushchikh v teorii vyazkouprugosti” [Investigation of operator models arising in viscoelasticity theory], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2018, **64**, No. 1, 60–73 (in Russian).
15. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, “Korrektnaya razreshimost’ i predstavlenie resheniy integro-differentsial’nykh uravneniy, voznikayushchikh v teorii vyazkouprugosti” [Correct solvability and representation of solutions of integrodifferential equations arising in the theory of viscoelasticity], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2019, **55**, No. 4, 574–587 (in Russian).
16. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, “Spektral’nyi analiz i predstavlenie resheniy integro-differentsial’nykh uravneniy s drobno-eksponentsial’nymi yadrami” [Spectral analysis and representation of solutions of integrodifferential equations with fractional-exponential kernels], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 2019, **80**, No. 2, 197–220 (in Russian).
17. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, “O svoystvakh polugrupp, porozhdaemykh vol’terrovymi integro-differentsial’nymi uravneniyami” [Properties of semigroups generated by Volterra integrodifferential equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2020, **56**, No. 8, 1122–1126 (in Russian).
18. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, “Issledovanie vol’terrovykh integro-differentsial’nykh uravneniy s yadrami, predstavimymi integralami Stilt’esa” [Investigation of Volterra integrodifferential equations with kernels representable by Stieltjes integrals], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2021, to be published (in Russian).
19. V. V. Vlasov, N. A. Rautian, and A. S. Shamaev, “Razreshimost’ i spektral’nyi analiz integro-differentsial’nykh uravneniy, voznikayushchikh v teplofizike i akustike” [Solvability and spectral analysis of integrodifferential equations arising in thermophysics and acoustics], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2010, **434**, No. 1, 12–15 (in Russian).
20. V. V. Vlasov, N. A. Rautian, and A. S. Shamaev, “Spektral’nyi analiz i korrektnaya razreshimost’ abstraktnykh integrodifferentsial’nykh uravneniy, voznikayushchikh v teplofizike i akustike” [Spectral analysis and correct solvability of abstract integrodifferential equations arising in thermophysics and acoustics], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2011, **39**, 36–65 (in Russian).
21. V. V. Vlasov, N. A. Rautian, and A. S. Shamaev, “Issledovanie operatornykh modeley, voznikayushchikh v zadachakh nasledstvennoy mekhaniki” [Analysis of operator models arising in problems of hereditary mechanics], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2012, **45**, 43–61 (in Russian).
22. V. V. Zhikov, “Ob odnom rasshirenii i primenenii metoda dvukhmasshtabnoy skhodimosti” [An extension and application of the two-scale convergence method], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2000, **191** — No. 7, 31–72 (in Russian).
23. V. V. Zhikov, “O dvukhmasshtabnoy skhodimosti” [On two-scale convergence], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2003, **23**, 149–187 (in Russian).
24. D. A. Zakora, “Model’ szhimaemoy zhidkosti Oldroyta” [Oldroyd model for compressible fluids], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **61**, 41–66 (in Russian).
25. D. A. Zakora and N. D. Kopachevsky, “O spektral’noy zadache, svyazannoy s integro-differentsial’nym uravneniem vtorogo poryadka” [On a spectral problem associated with a second-order integrodifferential equation], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ.], 2004, No. 2, 2–18 (in Russian).
26. A. A. Il’yushin and B. E. Pobedrya, *Osnovy matematicheskoy teorii termovyazkouprugosti* [Fundamentals of the Mathematical Theory of Thermoviscoelasticity], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
27. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
28. N. D. Kopachevsky, “Zadacha Koshi dlya lineynogo integro-differentsial’nogo uravneniya v gil’bertovom prostranstve” [Cauchy problem for a linear integrodifferential equation in a Hilbert space], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ.], 2001, **16**, 139–152 (in Russian).

29. N. D. Kopachevsky, *Vol'terrovy integrodifferentsial'nye uravneniya v gil'bertovom prostranstve. Spetsial'nyi kurs lektsiy* [Volterra Integrodifferential Equations in Hilbert Space. Special Course of Lectures], Bondarenko, Simferopol', 2012 (in Russian).
30. N. D. Kopachevsky, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike. Evolyutsionnye i spektral'nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics. Evolution and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
31. N. D. Kopachevsky, L. D. Orlova, and Yu. S. Pashkova, "Differentsial'no-operatornye i integro-differentsial'nye uravneniya v probleme malykh kolebaniy gidrodinamicheskikh sistem" [Differential-operator and integrodifferential equations in the problem of small oscillations of hydrodynamic systems], *Uch. zap. Simf. gos. un-ta* [Sci. Notes Simferopol State Univ.], 1995, **41**, No. 2, 96–108 (in Russian).
32. N. D. Kopachevsky and E. V. Semkina, "Ob integro-differentsial'nykh uravneniyakh Vol'terra vtorogo poryadka, nerazreshennykh otnositel'no starshey proizvodnoy" [On second-order Volterra integrodifferential equations, unresolved with respect to the higher derivative], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. fiz.-mat. nauki* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ. Ser. Phys.-Math. Sci.], 2013, **26**, No. 1, 52–79 (in Russian).
33. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
34. J.-L. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Non-Homogeneous Boundary-Value Problems and Their Applications], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
35. A. V. Lykov, "Nekotorye problemnye voprosy teorii teplomassoperenosa" [Some problematic issues of the theory of heat and mass transfer], In: *Problemy teplo- i massoperenosa* [Problems of Heat and Mass Transfer], Nauka i tekhnika, Minsk, 1976, pp. 9–82 (in Russian).
36. A. I. Miloslavskiy, "Ob ustoychivosti nekotorykh klassov evolyutsionnykh uravneniy" [On the stability of some classes of evolution equations], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1985, **26**, 118–132 (in Russian).
37. A. I. Miloslavskiy, "Spektral'nye svoystva operatornogo puchka, voznikayushchego v vyazkouprugosti" [Spectral properties of an operator beam arising in viscoelasticity], *Ukr. NIINTI*, Khar'kov, 13.07.87, No. 1229-UK87, 53 (in Russian).
38. A. I. Miloslavskiy, "O spektre neustoychivosti operatornogo puchka" [On the spectrum of instability of an operator beam], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1991, **49**, No. 4, 88–94 (in Russian).
39. Yu. N. Rabotnov, *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of Hereditary Solid Body Mechanics], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
40. G. V. Radzievskiy, "Asimptotika raspredeleniya kharakteristicheskikh chisel operator-funktsiy, analiticheskikh v ugle" [Asymptotics of the distribution of characteristic numbers of operator functions analytic in an angle], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1980, **112**, No. 3, 396–420 (in Russian).
41. N. A. Rautian, "Ob ogranichennosti odnogo klassa integral'nykh operatorov drobnogo tipa" [On the boundedness of a class of integral operators of fractional type], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2009, **200**, No. 12, 81–106 (in Russian).
42. N. A. Rautian, "O predstavlenii resheniy integrodifferentsial'nykh uravneniy s neogranichennymi operatornymi koeffitsientami v gil'bertovom prostranstve" [On representation of solutions of integrodifferential equations with unbounded operator coefficients in a Hilbert space], Proc. Int. Conf. *Qualitative Theory of Differential Equations and Applications*, MESI, Moscow, 2011, pp. 116–134 (in Russian).
43. N. A. Rautian, "O strukture i svoystvakh resheniy integrodifferentsial'nykh uravneniy, voznikayushchikh v teplofizike i akustike" [On the structure and properties of solutions of integrodifferential equations arising in thermophysics and acoustics], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2011, **90**, No. 3, 474–477 (in Russian).
44. N. A. Rautian, "Polugruppy, porozhdaemye vol'terrovymi integro-differentsial'nymi uravneniyami" [Semigroups generated by Volterra integrodifferential equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2020, **56**, No. 9, 1226–1244 (in Russian).
45. G. V. Sandrakov, "Mnogofaznye osrednennye modeli diffuzii dlya zadach s neskol'kimi parametrami" [Multiphase averaged diffusion models for problems with multiple parameters], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2007, **71**, No. 6, 119–72 (in Russian).
46. E. Sanchez-Palencia, *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy* [Non-Homogeneous Media and Vibration Theory], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
47. A. L. Skubachevskiy, "Ellipticheskie zadachi s nelokal'nymi usloviyami v blizi granitsy" [Elliptic problems with nonlocal conditions near the boundary], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1986, **129**, No. 2, 279–302 (in Russian).
48. A. L. Skubachevskiy, "Ob odnom klasse funktsional'no-differentsial'nykh operatorov, udovletvoryayushchikh gipoteze Kato" [On a class of functional differential operators satisfying the Kato hypothesis], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2018, **30**, No. 2, 249–273 (in Russian).

49. A. A. Shkalikov, "Sil'no dempfirovannye puchki operatorov i razreshimost' sootvetstvuyushchikh operator-no-differentsial'nykh uravneniy" [Strongly damped operator pencils and the solvability of the corresponding operator-differential equations], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1988, **177**, No. 1, 96–118 (in Russian).
50. G. Amendola, M. Fabrizio, and J. M. Golden, *Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications*, Springer, New York—Dordrecht—Heidelberg—London, 2012.
51. M. A. Biot, "Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media," *J. Acoust. Soc. Am.*, 1962, **34**, 1254–1264.
52. C. M. Dafermos, "Asymptotic stability in viscoelasticity," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1970, **37**, 297–308.
53. A. V. Davydov and Y. A. Tikhonov, "Study of Kelvin—Voigt models arising in viscoelasticity," *Differ. Equ.*, 2018, **54**, No. 12, 1620–1635.
54. W. Desch, R. K. Miller, "Exponential stabilization of Volterra integrodifferential equations in Hilbert space," *J. Differ. Equ.*, 1987, **70**, 366–389.
55. P. L. Devis, "Hyperbolic integrodifferential equations," *Proc. Am. Math. Soc.*, 1975, **47**, 155–160.
56. P. L. Devis, "On the hyperbolicity of the equations of the linear theory of heat conduction for materials with memory," *SIAM J. Appl. Math.*, 1976, **30**, 75–80.
57. G. Di Blasio, "Parabolic Volterra equations of convolution type," *J. Integral Equ. Appl.*, 1994, **6**, 479–508.
58. G. Di Blasio, K. Kunisch, and E. Sinestrari, "L^2-regularity for parabolic partial integrodifferential equations with delays in the highest order derivatives," *J. Math. Anal. Appl.*, 1984, **102**, 38–57.
59. K.-J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroup for Linear Evolution Equations*, Springer, New York—Berlin—Heidelberg, 1999.
60. A. Eremenko and S. Ivanov, "Spectra of the Gurtin—Pipkin type equations," *SIAM J. Math. Anal.*, 2011, **43**, 2296–2306.
61. M. E. Gurtin and A. C. Pipkin, "General theory of heat conduction with finite wave speed," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1968, **31**, 113–126.
62. R. S. Ismagilov, N. A. Rautian, and V. V. Vlasov, " Examples of very unstable linear partial functional differential equations," *arXiv*, 1402.4107v1.
63. S. A. Ivanov, "«Wave type» spectrum of the Gurtin—Pipkin equation of the second order," *arXiv*, 1002.2831.
64. S. Ivanov and L. Pandolfi, "Heat equations with memory: lack of controllability to the rest," *J. Math. Anal. Appl.*, 2009, **355**, 1–11.
65. S. A. Ivanov and T. L. Sheronova, "Spectrum of the heat equation with memory," *arXiv*, 0912.1818v1.
66. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Non-Self-Adjoint Problems for Viscous Fluids*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 2003.
67. N. D. Kopachevsky and E. V. Syomkina, "Linear Volterra integro-differential second-order equations unresolved with respect to the highest derivative," *Eurasian Math. J.*, 2013, **4**, No. 4, 64–87.
68. R. K. Miller, "Volterra integral equations in a Banach space," *Funkcialaj Ekvac.*, 1975, **18**, 163–194.
69. R. K. Miller, "An integrodifferencial equation for rigid heat conductors with memory," *J. Math. Anal.*, 1978, **66**, 313–332.
70. R. K. Miller and R. L. Wheeler, "Well-posedness and stability of linear Volterra integrodifferential equations in abstract spaces," *Funkcialaj Ekvac.*, 1978, **21**, 279–305.
71. J. E. Munoz Rivera, M. G. Naso, and F. M. Vegni, "Asymptotic behavior of the energy for a class of weakly dissipative second-order systems with memory," *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, **286**, 692–704.
72. A. D. Myshkis and V. V. Vlasov, "On an analogy between the classifications of functional differential equations and partial differential equations," *Funct. Differ. Equ.*, 2009, **16**, No. 3, 545–560.
73. L. Pandolfi, "The controllability of the Gurtin—Pipkin equations: a cosine operator approach," *Appl. Math. Optim.*, 2005, **52**, 143–165.
74. A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications of partial differential equations*, Springer, New York etc., 1983.
75. R. Perez Ortiz and V. V. Vlasov, "Correct solvability of Volterra integrodifferential equations in Hilbert space," *Electron. J. Qual. Theory Differ Equ.*, 2016, **31**, 1–17.
76. J. Prüss, "On linear Volterra equations of parabolic type in Banach spaces," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1987, **301**, No. 2, 691–721.
77. J. Prüss, "Bounded solutions of Volterra equations," *SIAM J. Math. Anal.*, 1988, **19**, No. 1, 133–149.
78. J. Prüss, *Evolutionary Integral Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel—Baston—Berlin, 1993.
79. N. A. Rautian, "Well-posedness of Volterra integro-differential equations with fractional exponential kernels," In: *Differential and Difference Equations with Applications*, Springer, Cham, 2020, pp. 517–533.
80. J. Shapiro, *Composition Operators and Classical Function Theory*, Springer, New York, 1993.
81. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel, 1997.

82. V. V. Vlasov, A. A. Gavrikov, S. A. Ivanov, and D. Yu. Knyaz'kov, V. A. Samarin, A. S. Shamaev, "Spectral properties of combined media," *J. Math. Sci.* (*N.Y.*), 2010, **164**, No. 6, 948–963.
83. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Spectral analysis and representations of solutions of abstract integro-differential equations in Hilbert space," In: *Concrete operators, spectral theory, operators in harmonic analysis and approximation*, IWOTA 11, Sevilla, Spain, July 3–9, 2011, Birkhäuser/Springer, Basel, 2014, pp. 517–535.
84. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Spectral analysis of integrodifferential equations in Hilbert spaces," *J. Math. Sci.* (*N.Y.*), 2019, **239**, No. 6, 771–787.
85. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "A study of operator models arising in problems of hereditary mechanics," *J. Math. Sci.* (*N.Y.*), 2020, **244**, No. 2, 170–182.
86. V. V. Vlasov and J. Wu, "Solvability and spectral analysis of abstract hyperbolic equations with delay," *Funct. Differ. Equ.*, 2009, **16**, No. 4, 751–768.
87. J. Wu, *Theory and applications of partial functional differential equations*, Springer, New York, 1996.

V. V. Vlasov
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: victor.vlasov@math.msu.ru

N. A. Rautian
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: nadezhda.rautian@math.msu.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 2 (2021). С. 285–294

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-285-294 УДК 519.216

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ЛАГРАНЖЕВ ПОДХОД К ВЯЗКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

© 2021 г. **Ю. Е. ГЛИКЛИХ**

Аннотация. Работа представляет собой обзор результатов автора с модификациями и предварительными сведениями по использованию стохастического анализа на соболевских группах диффеоморфизмов плоского n-мерного тора для описания движения вязких жидкостей (неслучайных). Основная идея состоит в замене ковариантных производных на группах диффеоморфизмов в уравнениях, введенных Д. Эбином и Дж. Марсденом для описания идеальных жидкостей, на так называемые производные в среднем случайных процессов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение 285
2. Производные в среднем 286
3. Группы диффеоморфизмов 288
4. Вязкая гидродинамика 290
5. Возможные обобщения на неньютоновские жидкости 292
Список литературы 293

1. Введение

Эта статья посвящена памяти Н. Д. Копачевского, в творчестве которого очень заметную роль играла гидродинамика. Эта работа является обзором лагранжева подхода к гидродинамике, инициированного известными работами В. И. Арнольда [2] и затем Д. Эбина и Дж. Марсдена [5]. В [5] на языке бесконечномерной геометрии групп соболевских диффеоморфизмов компактных многообразий была очень красиво описана гидродинамика идеальных несжимаемых жидкостей. В частности, было показано, что поток идеальной несжимаемой жидкости с нулевой внешней силой описывается уравнением геодезической слабой римановой метрики на группе сохраняющих объем диффеоморфизмов.

В работах автора было показано, что потоки вязкой несжимаемой жидкости описываются стохастическими аналогами уравнений Эбина и Марсдена, в которых обычная ковариантная производная на группе диффеоморфизмов заменяется так называемыми производными в среднем случайных процессов, введенными в 60-х годах XX века Э. Нельсоном (см. [10–12]) для нужд созданной им стохастической механики (вариант квантовой механики). Хотя конструкция основана на применении стохастического анализа, результаты удается получить для детерминированных (не случайных) вязких жидкостей. Обзор этих результатов (см. [6–9]) вместе со всеми предварительными сведениями и существенными модификациями и является основной целью настоящей работы. В работе также содержатся новые результаты.

В отличие от Эбина и Марсдена, мы рассматриваем гидродинамику только на плоском n-мерном торе. Напомним, что плоский тор получается факторизацией n-мерного евклидова пространства по целочисленной решетке, при которой риманова метрика на торе наследуется из евклидовой метрики пространства.

Работа поддержана грантом РФФИ № 18-01-00048.

2. Производные в среднем

Для простоты изложения мы опишем теорию производных в среднем для процессов в $\mathbb{R}^n$. Однако из-за того, что геометрия на торе наследуется из $\mathbb{R}^n$, это изложение без изменений применяется на торе.

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ в $\mathbb{R}^n$ (где мы фиксируем σ-алгебру борелевских множеств), $t \in [0,T]$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и такой, что $\xi(t)$ принадлежит пространству $L_1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ при всех t. Такой процесс определяет три семейства σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{F}$:

1) «прошлое» $\mathcal{P}_t^\xi$, порожденное прообразами борелевских множеств из $\mathbb{R}^n$ при всех отображениях $\xi(s) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ для $0 \leqslant s \leqslant t$;
2) «будущее» $\mathcal{F}_t^\xi$, порожденное прообразами борелевских множеств из $\mathbb{R}^n$ при всех отображениях $\xi(s) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ для $t \leqslant s \leqslant T$;
3) «настоящее» $\mathcal{N}_t^\xi$, порожденное прообразами борелевских множеств из $\mathbb{R}^n$ при отображении $\xi(t) : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

Все перечисленные семейства предполагаются полными, т. е. содержащими все множества вероятности нуль. Для удобства мы обозначаем через E_t^ξ условное математическое содержание $E(\cdot|\mathcal{N}_t^\xi)$ относительно «настоящего» $\mathcal{N}_t^\xi$ для $\xi(t)$. Следуя Э. Нельсону, введем следующие понятия производных в среднем:

Определение 2.1.

1) *Производная в среднем справа* $D\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайный элемент вида
$$D\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t+\triangle t) - \xi(t)}{\triangle t} \right), \tag{2.1}$$
где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, а символ $\triangle t \to +0$ означает, что $\triangle t$ стремится к нулю 0 и $\triangle t > 0$.
2) *Производная в среднем слева* $D_*\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайный элемент
$$D_*\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t) - \xi(t-\Delta t)}{\Delta t} \right), \tag{2.2}$$
где (как и в пункте 1) предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, а символ $\Delta t \to +0$ означает, что $\Delta t \to 0$ и $\Delta t > 0$.

Замечание 2.1. Если $\xi(t)$ — марковский процесс, то очевидным образом E_t^ξ можно заменить на $E(\cdot|\mathcal{P}_t^\xi)$ в (2.1) и $E(\cdot|\mathcal{F}_t^\xi)$ в (2.2). В первых работах Нельсона предлагались два варианта определения производных в среднем: как в определении 2.1 и с условными математическими ожиданиями относительно «прошлого» и «будущего», как выше, которые совпадают для марковских процессов. Мы не предполагаем, что $\xi(t)$ — марковский процесс, и даем определения с условными математическими ожиданиями относительно «настоящего», принимая во внимание физический принцип локальности: производная должна определяться состоянием системы в «настоящий» момент времени, а не в прошлом и в будущем. Тем не менее, производные относительно прошлого и будущего также возникают во многих задачах для немарковских процессов. Мы называем их *$\mathcal{P}$-производной в среднем* и *$\mathcal{F}$-производной в среднем* и обозначаем символами $D^{\mathcal{P}}$ и $D_*^{\mathcal{F}}$, соответственно. Изучению уравнений и включений с подобными производными в среднем посвящена работа [4].

Мы также используем следующие обобщения понятий производных в среднем справа и слева:

Определение 2.2. *Производная справа* $D^\xi\eta(t)$ процесса $\eta(t)$ относительно процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайный элемент вида $D^\xi\eta(t) = \lim\limits_{\triangle t \to +0} E_t^\xi\big(\frac{\eta(t+\triangle t)-\eta(t)}{\triangle t}\big)$, а *производная слева* $D_*^\xi\eta(t)$ процесса $\eta(t)$ относительно $\xi(t)$ имеет вид $D_*^\xi\eta(t) = \lim\limits_{\Delta t \to +0} E_t^\xi\big(\frac{\eta(t)-\eta(t-\Delta t)}{\Delta t}\big)$, где пределы полагаются существующими в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, а $\triangle t \to +0$ означает, что $\triangle t$ стремится к 0 и $\triangle t > 0$.

Следующая производная в среднем строится как небольшая модификация одной идеи Нельсона. Введем дифференциальный оператор D_2, который действует на L_1-случайный процесс $\xi(t)$, $t \in [0,T]$, по правилу $D_2\xi(t) = \lim\limits_{\triangle t \to +0} E_t^\xi \left(\frac{(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))^*}{\triangle t} \right)$, где $(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))$ рассматривается как вектор-столбец (вектор в $\mathbb{R}^n$), а $(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))^*$ — это вектор строка (транспонированный или сопряженный вектор), а предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Подчеркнем, что матричное произведение столбца слева и строки справа — это матрица, так что $D_2\xi(t)$ является симметрической неотрицательно определенной матричной функцией на $[0,T]\times\mathbb{R}^n$.

Определение 2.3. D_2 называется *квадратичной производной в среднем.*

Замечание 2.2. Из свойств условного математического ожидания следует, что существуют измеримые по Борелю отображения $a(t,x)$, $a_*(t,x)$ и $\alpha(t,x)$ из $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ и в $\bar{\mathrm{S}}_+$, соответственно, такие, что $D\xi(t) = a(t,\xi(t))$, $D_*\xi(t) = a_*(t,\xi(t))$ и $D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(t))$. Следуя [1], мы называем $a(t,x)$, $a_*(t,x)$ и $\alpha(t,x)$ *регрессиями*. Напомним стандартное обозначение регрессии:

$$a(t,x) = \lim_{\triangle t \to +0} E\left(\frac{\xi(t+\triangle t)-\xi(t)}{\triangle t} \mid \xi(t) = x \right).$$

Для $a_*(t,x)$ и $\alpha(t,x)$ обозначения аналогичны. Подобные обозначения мы будем использовать ниже.

Напомним, что процесс Ито — это процесс $\xi(t)$ вида $\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t A(s)dw(s)$, где первый интеграл — интеграл Лебега, а второй — интеграл Ито, $A(t) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, зависящий от t, а $w(t)$ — винеровский процесс в $\mathbb{R}^k$.

Определение 2.4. Процесс Ито $\xi(t)$ называется процессом *диффузионного типа*, если $a(t)$ и $A(t)$ не упреждают относительно $\mathcal{P}_t^\xi$ и винеровский процесс $w(t)$ подчинен $\mathcal{P}_t^\xi$. Если $a(t) = a(t,\xi(t))$ и $A(t) = A(t,\xi(t))$, где $a(t,x)$ и $A(t,x)$ — измеримые по Борелю отображения из $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и в $L(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n)$, соответственно, то процесс Ито называется *диффузионным процессом.*

Принимая во внимание свойства условного математического ожидания и тот факт, что $\mathcal{N}_t^\xi$ является σ-подалгеброй в $\mathcal{P}_t^\xi$, легко видеть, что для любого мартингала $\eta(t)$ относительно $\mathcal{P}_t^\xi$ выполняется равенство $D^\xi\eta(t) = 0$. Поскольку для процесса диффузионного типа интеграл Ито $\int_0^t A(s)dw(s)$ является мартингалом относительно $\mathcal{P}_t^\xi$, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.1 (см. [3]). *Для процесса Ито диффузионного типа $\xi(t)$ производная в среднем справа $D\xi(t)$ существует и равна $E_t^\xi(a(t))$. В частности, если $\xi(t)$ — диффузионный процесс, $D\xi(t) = a(t,\xi(t))$.*

Теорема 2.2 (см. [3]). *Пусть $\xi(t)$ — процесс диффузионного типа. Тогда $D_2\xi(t) = E_t^\xi[\alpha(t)]$, где $\alpha(t) = A(t)A^*(t)$. В частности, если $\xi(t)$ — диффузионный процесс, то $D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(t))$, где $\alpha(t,x) = A(t,x)A^*(t,x)$ — коэффициент диффузии.*

Теорема 2.3. *Для процесса диффузионного типа $\xi(t)$ равенство $D_2\xi(t) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $A = 0$, и, таким образом, $\xi(t)$ является неслучайным* (*детерминированным*) *процессом.*

Определение 2.5. Производная $D_S = \frac{1}{2}(D + D_*)$ называется *симметрической производной в среднем*. Производная $D_A = \frac{1}{2}(D - D_*)$ называется *антисимметрической производной в среднем.*

Рассмотрим векторы $v^\xi(t,x) = \frac{1}{2}(a(t,x) + a_*(t,x))$ и $u^\xi(t,x) = \frac{1}{2}(a(t,x) - a_*(t,x))$.

Определение 2.6. $v^\xi(t) = v^\xi(t,\xi(t)) = D_S\xi(t)$ называется *текущей скоростью* процесса $\xi(t)$; $u^\xi(t) = u^\xi(t,\xi(t)) = D_A\xi(t)$ называется *осмотической скоростью* процесса $\xi(t)$.

Физический смысл текущей и осмотической скоростей состоит в следующем. Пусть $\xi(t)$ описывает движение физического процесса, скажем, движение частицы (кредо автора состоит в том, что все физические процессы — случайные с малой дисперсией, так что обычно можно исключить из рассмотрения их стохастичность). Тогда текущая скорость v^ξ — это как раз та характеристика, которую мы обычно рассматриваем как физическую скорость, а осмотическая скорость u^ξ показывает насколько быстро частица «диффундирует» в окружающий континуум, т. е. насколько быстро нарастает «случайность».

Пусть $Y(t,m)$, $t \in [0,l]$ — гладкое зависящее от времени векторное поле на $\mathbb{R}^n$. Определим производные в среднем справа DY и слева D_*Y поля Y вдоль $\xi(t)$ следующим образом:

$$DY(t,\xi(t)) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi \frac{Y(t+\Delta t, \xi(t+\Delta t)) - Y(t,\xi(t))}{\Delta t},$$
$$D_*Y(t,\xi(t)) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi \frac{Y(t,\xi(t)) - Y(t-\Delta t, \xi(t-\Delta t))}{\Delta t}.$$

Предположим, что ξ имеет коэффициент диффузии $\sigma^2 I$. Тогда соответствующие регрессии DY и D_*Y выражаются формулами

$$DY = \left(\tfrac{\sigma^2}{2}\Delta + X\cdot\nabla + \tfrac{\partial}{\partial t}\right)Y \quad \text{и} \quad D_*Y = \left(\tfrac{-\sigma^2}{2}\Delta + X_*\cdot\nabla + \tfrac{\partial}{\partial t}\right)Y, \tag{2.3}$$

где Δ — оператор Лапласа, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ ($(x^1,\dots,x^n)$ — координаты в $\mathbb{R}^n$), и точка обозначает скалярное произведение $\mathbb{R}^n$.

Производные второго порядка $DD\xi(t)$ и $D_*D_*\xi(t)$ мы описываем как первые производные D от регрессии (т. е. векторного поля) $D\xi$ и, соответственно, D_* от регрессии (векторного поля) $D_*\xi$.

Замечание 2.3. . В случае, когда ξ имеет коэффициент диффузии $\sigma^2 I$, обозначим регрессию $D_*\xi$ символом Y. Тогда по второй формуле (2.3) мы получаем

$$D_*D_*\xi = \left(\frac{-\sigma^2}{2}\Delta + Y\cdot\nabla + \frac{\partial}{\partial t}\right)Y, \tag{2.4}$$

где правая часть формулы (2.4) совпадает с левой частью уравнения Бюргерса.

3. Группы диффеоморфизмов

Здесь мы опишем некоторые свойства групп соболевских диффеоморфизмов на плоском n-мерном торе (см. подробности в [5] а также их развитие в [7]).

Пусть $\mathcal{T}^n$ — плоский n-мерный тор и $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ — его группа соболевских диффеоморфизмов класса $H^s (s > n/2+1)$. Напомним, что для $s > n/2+1$ отображения из H^s имеют гладкость C^1.

$\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ является гильбертовым многообразием и группой относительно суперпозиции с единицей $e = id$. Касательное пространство $T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ — это пространство всех H^s-векторных полей на $\mathcal{T}^n$. Мы обозначаем через β подпространство в $T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$, состоящее из бездивергентных H^s-векторных полей на $\mathcal{T}^n$.

Касательное расслоение $T\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ — это множество H^s-отображений из $\mathcal{T}^n$ в $T\mathcal{T}^n$ такое, что проекции на $\mathcal{T}^n$ дают отображения из $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.

В любом $T_f\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ можно определить L^2-скалярное произведение по формуле

$$(X,Y) = \int_{\mathcal{T}^n} \langle X(m), Y(m)\rangle_{f(m)} \mu(dm). \tag{3.1}$$

Семейство этих скалярных произведений образует так называемую *слабую риманову метрику* на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. В частности, в $T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ скалярное произведение (3.1) принимает вид

$$(X,Y)_e = \int_{\mathcal{T}^n} \langle X(m), Y(m)\rangle_m \mu(dm). \tag{3.2}$$

Правый сдвиг $R_f : \mathcal{D}^s(T^n) \to \mathcal{D}^s(T^n)$, где $R_f(\Theta) = \Theta\circ f$ при $\Theta, f \in \mathcal{D}^s(T^n)$, является C^∞-гладким отображением. Касательное отображение к правому сдвигу имеет вид $TR_f(X) = X\circ f$ при $X \in T\mathcal{D}^s(T^n)$.

С другой стороны, левый сдвиг $L_f : \mathcal{D}^s(T^n) \to \mathcal{D}^s(T^n)$, где $L_f(\Theta) = f\circ\Theta$ при $\Theta, f \in \mathcal{D}^s(T^n)$, только непрерывен. Зафиксируем вектор $x \in \mathbb{R}^n$ и обозначим через $l_x : T^n \to T^n$ отображение $l_x(m) = m + x$ по модулю факторизации по целочисленной решетке пространства $\mathbb{R}^n$. Отметим, что левый сдвиг Ll_x C^∞-гладок.

Напомним, что $T\mathcal{T}^n = \mathcal{T}^n \times \mathbb{R}^n$. Введем операторы $B : T\mathcal{T}^n \to \mathbb{R}^n$ — проекции на второй сомножитель в $\mathcal{T}^n \times \mathbb{R}^n$, и $A(m) : \mathbb{R}^n \to \mathcal{T}^n_m$ — обратный к B линейный изоморфизм $\mathbb{R}^n$ на касательное пространство к $\mathcal{T}^n$ в $m \in \mathcal{T}^n$.

Введем $Q_{g(m)} = A(g(m))\circ B$, где $g \in \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$, $m \in \mathcal{T}^n$. Для каждого $Y \in T_f\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ мы получаем, что $Q_gY = A(g(m)) \circ B(Y(m)) \in T_g\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ при всех $f \in \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.

Лемма 3.1. *Верны соотношения* $TR_{g^{-1}}(Q_gX) = Q_e(TR_{g^{-1}}X)$, $TR_g(Q_{g^{-1}}X) = Q_e(TR_gX)$.

Лемма 3.2. Q_g *является параллельным переносом в* $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ *относительно связности Леви-Чивиты метрики* (3.1)

Доказательства лемм 3.1 и 3.2 можно найти, например, в [7].

Таким образом, для гладкого векторного поля $Y(t)$ вдоль гладкой кривой $g(t)$ в $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ ковариантная производная в момент времени t^* определяется как $\frac{\bar D}{dt}Y(t)|_{t=t^*} = \frac{d}{dt}(Q_{g(t^*)}Y(t))|_{t=t^*}$. Напомним, что (см. [7]) *геодезическая* — это гладкая кривая $g(t)$ в $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ такая, что

$$\frac{\bar D}{dt}\dot g(t) = 0. \tag{3.3}$$

Для такой кривой $g(t)$ построим вектор $v(t) \in T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ по формуле $v(t) = \dot g(t) \circ g^{-1}(t)$.

Лемма 3.3. *Если $g(t)$ — геодезическая, то кривая $R_fg(t)$ — также геодезическая.*

Лемма 3.4. *Пусть $g(t)$ — геодезическая и $x \in \mathbb{R}^n$ — некоторый вектор. Тогда $l_xg(t)$ — геодезическая.*

Рассмотрим оператор $\bar A : \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n) \times \mathbb{R}^n \to T\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ такой, что $\bar A_e$ совпадает с введенным выше A, и для каждого $g \in \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ отображение $\bar A_g : \mathbb{R}^n \to T_g\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ получается из $\bar A_e$ правым сдвигом, т. е. для $X \in \mathbb{R}^n$: $\bar A_g(X) = TR_g \circ A_e(X) = (A \circ g)(X)$. Каждое правоинвариантное векторное поле $\bar A(X)$ является C^∞-гладким на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ для каждого $X \in \mathbb{R}^n$.

Для любой точки $m \in T^n$ обозначим через $exp_m : T_mT^n \to T^n$ отображение, которое переводит вектор $X \in T_mT^n$ в точку $m + X$ по модулю факторизации по целочисленной решетке на T^n. Семейство таких отображений порождает отображение $\overline{exp} : T_e\mathcal{D}^s(T^n) \to \mathcal{D}^s(T^n)$, которое переводит вектор $X \in T_e\mathcal{D}^s(T^n)$ в $e + X \in \mathcal{D}^s(T^n)$, где $e + X$ — диффеоморфизм T^n вида: $(e + X)(m) = m + X(m)$.

Рассмотрим суперпозицию $\overline{exp} \circ \bar A_e : \mathbb{R}^n \to \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. По построению для произвольного $X \in \mathbb{R}^n$ мы получаем, что $\overline{exp} \circ \bar A_e(X)(m) = m + X$, т. е. тот же самый вектор X добавляется к каждой точке m.

Пусть $w(t)$ — винеровский процесс в $\mathbb{R}^n$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Построим случайный процесс

$$W^{(\sigma)}(t) = \overline{exp} \circ \bar A_e(\sigma w(t)) \tag{3.4}$$

в $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. По построению, для $\omega \in \Omega$ соответствующая выборочная траектория $W^{(\sigma)}_\omega(t)$ — это диффеоморфизм вида $W^{(\sigma)}_\omega(t)(m) = m + \sigma w_\omega(t)$. Отметим, что для заданного $\omega \in \Omega$ и заданного $t \in \mathbb{R}$ мы получаем, что $w(t)_\omega$ — постоянный вектор в $\mathbb{R}^n$. Это означает, что для заданного ω и t действие $W^{(\sigma)}_\omega(t)$ совпадает с $l_{w(s)_\omega}$.

Пусть $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ — группа соболевских сохраняющих объем H^s-диффеоморфизмов на $\mathcal{T}^n$ $(s > n/2 + 1)$, подгруппа и гильбертово подмногообразие $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ (см. [5, 7]). Так же как для $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$, можно ввести правый сдвиг и левый сдвиг. Первый — C^∞-гладкий, а второй — непрерывен.

Касательное пространство к $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ в единице $e = id$ обозначается через $T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Это пространство всех бездивергентных H^s-векторных полей на $\mathcal{T}^n$. Касательное пространство в $\eta \in \mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ состоит из суперпозиций $X \circ \eta$, где $X \in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Отметим, что касательное отображение к правому сдвигу имеет ту же форму, как просто для правого сдвига: $TR_gX = X \circ g$, $X \in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$.

Правоинвариантное векторное поле $\bar X$ на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ порождено единственным вектором $X \in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ по формуле $\bar X_g = TR_gX = X \circ g$. Отметим, что $\bar X$ является C^k-гладким тогда и только тогда, когда X как вектор на $\mathcal{T}^n$ принадлежит соболевскому классу H^{s+k}. В частности, $\bar X$ C^∞-гладко тогда и только тогда, когда X C^∞-гладко.

Отметим, что поле операторов A можно рассматривать как отображение $A : \mathbb{R}^n \to T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$.

Но $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ мы используем слабую риманову метрику, которая является сужением (3.1) на касательное расслоение $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Рассмотрим ортогональную проекцию $P : H^s \to T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ относительно скалярного произведения (3.2). Из разложения Ходжа (см., например, [5, 7]) вытекает, что эта проекция существует и ядро P является пространством всех градиентов. Так что для произвольного $Y \in H^s$ имеет место представление

$$P(Y) = Y - \operatorname{grad} p, \tag{3.5}$$

где p — некоторая H^{s+1}-функция на $\mathcal{T}^n$ (единственная с точностью до аддитивной константы).

Ковариантная производная на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ вводится формулой $\frac{\tilde{D}}{dt} = P\frac{\bar{D}}{dt}$.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\tilde{D}}{dt}\dot{g}(t) = \bar{F}(t, g(t), \dot{g}(t)) \tag{3.6}$$

на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Если F достаточно гладко, для любого начального данного $g(0) = e$ и $\dot{g}(0) = u_0 \in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ уравнение (3.6) имеет решение, корректно определенное на некотором интервале $t \in [0, T]$. Это решение описывает поток идеальной несжимаемой жидкости на $\mathcal{T}^n$ под действием внешней силы F. Если $F = 0$, это геодезическая связности Леви-Чивиты метрики (3.2) и она описывает поток в отсутствие внешних сил. Ниже, если не сказано противное, мы имеем дело с $g(t)$ в случае $F = 0$.

Замечание 3.1. Используя оператор P и формулу (3.5), мы получаем следующую модификацию формулы (2.4). Как и в замечании 2.3, в случае, когда ξ имеет коэффициент диффузии $\sigma^2 I$, обозначим регрессию $D_*\xi$ символом Y. Тогда $PD_*D_*\xi = \left(\frac{-\sigma^2}{2}\Delta + Y\cdot\nabla + \frac{\partial}{\partial t}\right)Y - \operatorname{grad} p$, где правая часть совпадает с левой частью уравнения Навье—Стокса.

4. Вязкая гидродинамика

Основная идея предлагаемого описания вязкой гидродинамики состоит в использовании на группах диффеоморфизмов стохастических уравнений — аналогов (3.3) и (3.6) — в которых для сжимаемых жидкостей $\frac{\bar{D}}{dt}$ заменяется на D_*D_*, а для несжимаемых — $\frac{\tilde{D}}{dt}$ на PD_*D_*. Осуществляется переход к эйлерову описанию, т. е. соответствующие объекты правыми сдвигами переносятся в касательные пространства в единицах групп, и при этом условное математическое ожидание превращается в обычное (безусловное) математическое ожидание. Затем показывается, что полученные детерминированные векторные поля на торе удовлетворяют различным вариантам уравнения Бюргерса или Навье—Стокса, соответственно. Отметим, что мы строим указанные процессы (решения уравнений) на группах диффеоморфизмов с помощью случайных возмущений потоков пылевидной материи или идеальной несжимаемой жидкости.

Здесь мы предполагаем, что $s > n/2 + 2$. Так что диффеоморфизмы из $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ имеют гладкость C^2, также как и векторные поля из $T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ на торе. Везде ниже мы используем один и тот же стохастический процесс $W^{(\sigma)}(t)$, построенный из выбранного нами винеровского процесса $w(t)$ в $\mathbb{R}^n$ по формуле (3.4).

Пусть $g(t)$ — решение уравнения (3.3) на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ с начальным условием $g(0) = e$ и $\dot{g}(0) = v_0 \in T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Это решение существует на некотором интервале $t \in [0, T]$. Рассмотрим $v(t) = \dot{g}(t) \circ g^{-1}(t) \in T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Этот бесконечномерный вектор может быть также описан как векторное поле на $\mathcal{T}^n$, которое мы обозначим $v(t, m)$.

Рассмотрим случайный процесс $\eta(t) = W^{(\sigma)}(t) \circ g(t)$ на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. В конечномерном представлении $\eta(t)$ является случайным диффеоморфизмом на $\mathcal{T}^n$ вида $\eta(t, m) = g(t, m) + \sigma w(t)$. Построим дополнительный случайный процесс $\xi(t) = \eta(T - t)$, или, в конечномерном описании, $\xi(t, m) = g(T - t, m) + \sigma w(T - t)$. Поскольку $w(t)$ — мартингал относительно его собственного «прошлого», из свойств относительного математического ожидания мы выводим, что $D_*\xi(t) = \dot{g}(T - t, m) = v(T - t, g(T - t, m))$ и поэтому $D_*D_*\xi(t) = \frac{\bar{D}}{ds}\dot{g}(s)|_{s=T-t} = 0$ на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.

Рассмотрим случайный процесс $\xi_t(s) = \xi(s) \circ \xi^{-1}(t) = W^{(\sigma)}(T - s) \circ g(T - s) \circ g^{-1}(T - t) \circ (W^{(\sigma)}(T - t))^{-1}$. Отметим, что случайный диффеоморфизм $(W^{(\sigma)}(T - t))^{-1}$ действует по правилу $(W^{(\sigma)}(T - t))^{-1}(m) = m - \sigma w(T - t)$. При $s = t$ мы получаем $\xi_t(t) = \xi(t) \circ \xi^{-1}(t) = W^{(\sigma)}(T - t) \circ g(T - t) \circ g^{-1}(T - t) \circ (W^{(\sigma)}(T - t))^{-1} = e$. По построению, $m = \xi(t, \xi^{-1}(t, m)) = g(T - t, \xi^{-1}(t, m)) + \sigma w(T - t)$. Тогда $g(T - t, \xi^{-1}(t, m)) = m - \sigma w(T - t)$, так что $\xi^{-1}(t, m) = g^{-1}(T - t, m - \sigma w(T - t))$. Следовательно, $\xi_t(s, m) = \xi(s, g^{-1}(T - t, m - \sigma w(T - t)) = g(T - s, g^{-1}(T - t, m - \sigma w(T - T)) + \sigma w(T - t)$.

Отметим, что $\xi_t(t, m) = m - \sigma w(T - t) + \sigma w(T - t) = m$, т. е. $\xi_t(t) = e \in \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Тогда σ-алгебра «настоящее» $\mathcal{N}^\xi_t$ тривиальна, и это означает, что условное математическое ожидание относительно этой σ-алгебры совпадает с обычным математическим ожиданием. Таким образом, принимая во внимание соотношения между $v(t)$ и $g(t)$ и определение D_*, мы получаем, что $D_*\xi_t(s) = E(v(T-t, m-\sigma w(T-t))) = E(Q_e T\mathbb{R}^{-1}_{W^{(\sigma)}(T-t)} v(T-t))$.

Введем на $\mathcal{T}^n$ векторное поле $V(t,m) = E(v(t, m-\sigma w(t)))$ (в бесконечномерном описании $V(t) = E(Q_e T\mathbb{R}^{-1}_{W^{(\sigma)}(t)} v(t))$).

Теорема 4.1. *$V(T-t,m)$ удовлетворяет уравнению Бюргерса*

$$\frac{d}{dt}V(T-t,m) + (V(T-t,m)\cdot\nabla)V(T-t,m) - \frac{\sigma^2}{2}\nabla^2 V(T-t,m) = 0, \tag{4.1}$$

где ∇^2 — оператор Лапласа—Бельтрами, который на плоском торе совпадает с обычным лапласианом.

Доказательство. Выберем $t\in[0,T]$ и $\omega\in\Omega$ и рассмотрим кривую $\zeta_{t,\omega}(s)$, $s\in[0,T]$, зависящую от параметра ω, вида

$$\zeta_{t,\omega}(s) = R^{-1}_{W^{(\sigma)}_\omega(T-t)} g(T-s, g^{-1}(T-t)) = g(T-s, g^{-1}(T-t, m-\sigma w(T))). \tag{4.2}$$

Отметим, что $\zeta_{t,\omega}(s)$ задана по аналогии с $\xi_{t,\omega}(s)$, введенной выше, но в формуле для $\xi_{t,\omega}(s)$ имеется дополнительный стохастический член $\sigma w(T-s)$. Таким образом, мы можем рассматривать $\zeta_{t,\omega}(s)$ как гладкую кривую с начальным условием $\zeta_{t,\omega}(t) = \mathbb{R}^{-1}_{W^{(\sigma)}_\omega(T-t)} e = (W^{(\sigma)}_\omega(T-t))^{-1}$. Отметим, что $\frac{d}{ds} l_{(\sigma w_\omega(T-t))}\zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t} = Q_e \frac{d}{ds}\zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t} = -Q_e T R^{-1}_{W^{(\sigma)}_\omega(T-t)} v(T-t)$.

Поскольку $g(T-s)$ — геодезическая, по лемме 3.4 кривая $\zeta_{t,\omega}(s)$ — тоже геодезическая при почти всех $\omega\in\Omega$. Напомним, что действие $W^{(\sigma)}_\omega(t)$ совпадает с действием $l_{\sigma w(t)_\omega}$. Значит, $W^{(\sigma)}_\omega(t)\zeta_{t,\omega}(s) = l_{\sigma w(T-t)_\omega}\zeta_{t,\omega}(s)$ тоже геодезическая. Итак, $\frac{\bar D}{ds}\frac{d}{ds} l_{\sigma w(s)_\omega}\zeta_{t,\omega}(s) = 0$.

Напомним, что $EQ_e T\mathbb{R}^{-1}_{W_\omega(T-t)} v(T-t) = V(T-t)$ и $D_*\xi_t(s) = V(T-t)$. Из этого мы выводим, что $D_*D_*\xi_t(s)_{|s=t} = D_*V(T-t,\xi_t(s))_{|s=t} = -E\big(\frac{\bar D}{ds}\frac{d}{ds} l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t}\big) = 0$. Но поскольку $D_*\xi_t(s)_{|s=t} = V(T-t)$, по формуле (2.4) мы получаем, что $D_*D_*\xi_t(s)_{|s=t}$ совпадает с левой частью уравнения (4.1). □

Теперь перейдем к случаю несжимаемых жидкостей.

Пусть $g(t)$ — решение уравнения (3.6) с $F=0$. Рассмотрим $u(t) = \dot g(t)\circ g^{-1}(t) \in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Этот бесконечномерный вектор можно также представить как бездивергентное векторное поле на $\mathcal{T}^n$, которое мы обозначим $u(t,m)$. Напомним (см., например, [5]), что $u(t,m)$ удовлетворяет уравнению Эйлера без внешней силы: $\frac{\partial u}{\partial t} = -P((u\cdot\nabla)u)$, которое после применения формулы (3.5) принимает обычный вид $\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u - \operatorname{grad} p = 0$.

Рассмотрим введенный выше процесс $W^{(\sigma)}(t)$. По построению он принимает значения в $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Таким образом, на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ мы можем повторить приведенную выше конструкцию для $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$, т. е. определить $\eta(t) = W^{(\sigma)}(t)\circ g(t)$, где $t\in[0,T]$ и $\xi(t) = \eta(T-t)$ (т. е. в конечномерных обозначениях $\xi(t,m) = g(T-t,m) + \sigma w(T-t)$). Легко видеть, что $D_*\xi(t) = \dot g(T-t,m) = u(T-t, g(T-t,m))$, и, таким образом, $\bar P D_*D_*\xi(t) = \frac{\tilde D}{ds}\dot g(s)_{|s=T-t} = 0$ на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$.

Так же, как выше, процесс $\xi_t(s) = \xi(s)\circ\xi^{-1}(t)$ обладает свойством $\xi_t(t) = e$. Его конечномерное описание в точности аналогично случаю $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.

Введем на $\mathcal{T}^n$ векторное поле $U(t,m) = E\big(u(t, m-\sigma w(t))\big)$ (прямой аналог $V(t,m)$). Мы также обозначим это поле как бесконечномерный вектор $U(t) = E\big(Q_e T R^{-1}_{W^{(\sigma)}(t)} u(t)\big)$.

Лемма 4.1. *Векторное поле $U(t,m)$ бездивергентно.*

Доказательство. По построению, для элементарного события $\omega\in\Omega$ диффеоморфизм $(W(t)_\omega)^{-1}$ представляет собой сдвиг тора целиком на постоянный вектор. Следовательно, Q_e, примененное к $TR^{-1}_{W(t)_\omega} u(t)$, означает параллельный перенос на торе бездивергентного векторного поля $u(t)$ целиком на тот же самый постоянный вектор назад. Так что $Q_e T R^{-1}_{W(t)} u(t)$ — случайное бездивергентное векторное поле на торе. Следовательно его математическое ожидание бездивергентно. □

Итак, $U(t) \in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Легко показать, что $D_*\xi_t(s)_{|s=t} = U(T-t)$.

Введем $\zeta_{t,\omega}(s)$ аналогично формуле (4.2). Отметим, что на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ оператор l_x не переводит геодезические в геодезические. Так что мы имеем

$$PD_*D_*\xi_t(s)_{|s=t} = PD_*U(T-t,\xi_t(s))_{|s=t} = -PE(\frac{\bar{D}}{ds}\frac{d}{ds}l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t}) \neq 0.$$

Следовательно, нет аналога теоремы 4.1. Принимая во внимание формулу (3.5), мы можем доказать только следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Поле $U(T-t)$ удовлетворяет уравнению Навье—Стокса*

$$\frac{d}{dt}U(T-t,m)+(U(T-t,m)\cdot\nabla)U(T-t,m)-\frac{\sigma^2}{2}\nabla^2U(T-t,m)-\operatorname{grad}p = -PE(\frac{\bar{D}}{ds}\frac{d}{ds}l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t})$$

с внешней силой $-PE(\frac{\bar{D}}{ds}\frac{d}{ds}l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t})$.

Отметим, что сила $-PE(\frac{\bar{D}}{ds}\frac{d}{ds}l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t})$ однозначно восстанавливается по каждому потоку $g(t)$ идеальной несжимаемой жидкости с использованием формулы (4.2) и ковариантной производной. Таким образом, если рассмотреть в $T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ уравнение $PD_*D_*\xi_t(s)_{|s=t} = PE(\frac{\bar{D}}{ds}\frac{d}{ds}l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t})$, оно предыдущими рассуждениями преобразуется в уравнение Навье—Стокса с нулевой внешней силой

$$\frac{d}{dt}U(T-t,m)+(U(T-t,m)\cdot\nabla)U(T-t,m)-\frac{\sigma^2}{2}\nabla^2U(T-t,m)-\operatorname{grad}p = 0.$$

5. Возможные обобщения на неньютоновские жидкости

Здесь мы рассмотрим жидкости, у которых в уравнениях Бюргерса и Навье—Стокса вязкий член описывается не оператором Лапласа с коэффициентом вязкости, а другим оператором чисто второго порядка $\mathfrak{B}(t)$ с симметрической положительно определенной матрицей, не зависящей от пространственных переменных, но, возможно, зависящей от времени. В этот класс операторов входит, например, случай с оператором Лапласа, но с коэффициентом диффузии, зависящим от времени, а также случай, когда вязкий член описывается суммой оператора Лапласа и еще какого-то оператора.

Из того, что матрица оператора $\mathfrak{B}(t)$ симметрична и положительно определена, нетрудно увидеть, что существует оператор $\mathbf{B}(t)$, также не зависящий от пространственных переменных, но, возможно, зависящий от времени, такой, что $\mathfrak{B}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{B}^*(t)$.

Используя оператор $\mathbf{B}(t)$, мы заменим винеровский процесс $W^{(\sigma)}$ на группах диффеоморфизмов, использованный в предыдущем разделе, на процесс

$$W(t) = \overline{exp}\circ\bar{A}_e\left(\int_0^t \mathbf{B}(s)dw(s)\right). \tag{5.1}$$

По построению, для $\omega\in\Omega$ соответствующая выборочная траектория $W_\omega(t)$ — это диффеоморфизм вида $W_\omega(t)(m) = m + \int_0^t \mathbf{B}(s)dw(s)_\omega$. Отметим, что для заданного $\omega\in\Omega$ и заданного $t\in\mathbb{R}$ мы получаем, что $\int_0^t \mathbf{B}(s)dw(s)_\omega$ — постоянный вектор в $\mathbb{R}^n$. Это означает, что для заданного ω и t действие $W_\omega(t)$ совпадает с $l_{\int_0^t \mathbf{B}(s)dw(s)_\omega}$.

Как и в предыдущем разделе, мы предполагаем, что $s > n/2+2$. Везде ниже мы используем один и тот же стохастический процесс $W(t)$, построенный из выбранного нами винеровского процесса $w(t)$ в $\mathbb{R}^n$ по формуле (5.1).

Пусть $g(t)$ — решение уравнения (3.3) на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ с начальным условием $g(0) = e$ и $\dot{g}(0) = v_0 \in T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Это решение существует на некотором интервале $t\in[0,T]$. Рассмотрим $v(t) = \dot{g}(t)\circ g^{-1}(t) \in T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Этот бесконечномерный вектор может быть также описан как векторное поле на $\mathcal{T}^n$, которое мы обозначим $v(t,m)$.

Рассмотрим случайный процесс $\eta(t) = W(t)\circ g(t)$ на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. В конечномерном представлении $\eta(t)$ является случайным диффеоморфизмом на $\mathcal{T}^n$ вида $\eta(t,m) = g(t,m)+\int_0^t \mathbf{B}(s)dw(s)$. Построим дополнительный случайный процесс $\xi(t) = \eta(T-t)$, или, в конечномерном описании, $\xi(t,m) = g(T-t,m)+\int_0^{T-t}\mathbf{B}(s)dw(s)$. Поскольку $\int_0^t \mathbf{B}(s)dw(s)$ — мартингал относительно его собственного «прошлого», из свойств условного математического ожидания мы выводим, что $D_*\xi(t) = \dot{g}(T-t,m) = v(T-t,g(T-t,m))$ и поэтому $D_*D_*\xi(t) = \frac{\bar{D}}{ds}\dot{g}(s)|_{s=T-t} = 0$ на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.

Рассмотрим случайный процесс $\xi_t(s) = \xi(s)\circ\xi^{-1}(t) = W(T-s)\circ g(T-s)\circ g^{-1}(T-t)\circ(W(T-t))^{-1}$. Отметим, что случайный диффеоморфизм $(W(T-t))^{-1}$ действует по правилу $(W(T-t))^{-1}(m) = m - \int_0^{T-t}\mathbf{B}(s)dw(s)$. При $s=t$ мы получаем $\xi_t(t) = \xi(t)\circ\xi^{-1}(t) = W(T-t)\circ g(T-t)\circ g^{-1}(T-t)\circ (W(T-t))^{-1} = e$. По построению $m = \xi(t,\xi^{-1}(t,m)) = g(T-t,\xi^{-1}(t,m)) + \int_0^{T-t}\mathbf{B}(s)dw(s)$. Тогда $g(T-t,\xi^{-1}(t,m)) = m - \int_0^{T-t}\mathbf{B}(s)dw(s)$, так что $\xi^{-1}(t,m) = g^{-1}(T-t, m-\int_0^{T-t}\mathbf{B}(s)dw(s))$. Следовательно, $\xi_t(s,m) = \xi(s,g^{-1}(T-t,m-\int_0^{T-t}\mathbf{B}(s)dw(s)) = g(T-s,g^{-1}(T-t,m-\int_0^{T-t}\mathbf{B}(s)dw(s)) + \int_0^{T-t}\mathbf{B}(s)dw(s)$.

Отметим, что $\xi_t(t,m) = m - \int_0^{T-t}\mathbf{B}(s)dw(s) + \int_0^{T-t}\mathbf{B}(s)w(s) = m$, т. е. $\xi_t(t) = e$ на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Тогда σ-алгебра «настоящее» $\mathcal{N}_t^\xi$ тривиальна, и это означает, что условное математическое ожидание относительно этой σ-алгебры совпадает с обычным математическим ожиданием. Таким образом, принимая во внимание соотношения между $v(t)$ и $g(t)$ и определение D_*, мы получаем, что $D_*\xi_t(s) = E(v(T-t,m-\int_0^{T-t}\mathbf{B}(s)dw(s))) = E(Q_eT\mathbb{R}^{-1}_{W(T-t)}v(T-t))$.

Введем на $\mathcal{T}^n$ векторное поле $V(t,m) = E(v(t,m-\int_0^t\mathbf{B}(s)dw(s)))$ (в бесконечномерном описании $V(t) = E(Q_eT\mathbb{R}^{-1}_{W(t)}v(t))$).

Теорема 5.1. *$V(T-t,m)$ удовлетворяет следующему аналогу уравнения Бюргерса:*
$$\frac{\partial}{\partial t}V(T-t,m) + (V(T-t,m)\cdot\nabla)V(T-t,m) - \frac{1}{2}\mathfrak{B}(t)V(T-t,m) = 0,$$
где $\mathfrak{B}(t)$ — дифференциальный оператор второго порядка $\mathfrak{B}(t) = \mathfrak{B}^{ij}(t)\frac{\partial}{\partial x^i\partial x^j}$ с матрицей $(\mathfrak{B}^{ij})(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{B}^*(t)$.

Доказательство теоремы 5.1 в точности аналогично доказательству теоремы 4.1 с заменой $W^{(\sigma)}$ на W.

Переход к случаю несжимаемых жидкостей также аналогичен тому, что описано в предыдущем разделе, с заменой $W^{(\sigma)}$ на W. Получается аналог уравнения Навье—Стокса с вязким членом вида $-\frac{1}{2}\mathfrak{B}(t)U(T-t,m)$: $\frac{\partial}{\partial t}U(T-t,m) + (U(T-t,m)\cdot\nabla)U(T-t,m) - \frac{1}{2}\mathfrak{B}(t)U(T-t,m) - \operatorname{grad} p = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Партасарати К.* Введение в теорию вероятностей и теорию меры. — М.: Мир, 1988.
2. *Arnol'd V.* Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits// Ann. Inst. Fourier. — 1966. — *16*, № 1. — С. 319–361.
3. *Azarina S. V., Gliklikh Yu. E.* Differential inclusions with mean derivatives// Dyn. Syst. Appl. — 2007. — *16*, № 1. — С. 49–71.
4. *Azarina S. V., Gliklikh Yu. E.* Stochastic differential equations and inclusions with mean derivatives relative to the past// Int. J. Differ. Equ. — 2009. — *4*, № 1. — С. 27–41.
5. *Ebin D. G., Marsden J.* Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid// Ann. Math. — 1970. — *92*, № 1. — С. 102–163.
6. *Gliklikh Yu. E.* Solutions of Burgers—Reynolds and Navier—Stokes equations via stochastic perturbations of inviscid flows// J. Nonlinear Math. Phys. — 2010. — *17*, Suppl. 1. — С. 15–29.
7. *Gliklikh Yu. E.* Global and stochastic analysis with applications to mathematical physics. — London: Springer, 2011.
8. *Gliklikh Yu. E., Zalygaeva M. E.* Non-Newtonian fluids and stochastic analysis on the groups of diffeomorphisms// Appl. Anal. — 2015. — *94*, № 6. — С. 1116–1127.
9. *Gliklikh Yu. E., Zalygaeva M. E.* On derivation of Oskolkov's equations for noncompressible viscous Kelvin—Voight fluid by stochastic analysis on the groups of diffeomorphisms// Glob. Stoch. Anal. — 2019. — *6*, № 2. — С. 69–77.
10. *Nelson E.* Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics// Phys. Rev. — 1966. — *150*, № 4. — С. 1079–1085.
11. *Nelson E.* Dynamical theory of Brownian motion. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1967.
12. *Nelson E.* Quantum fluctuations. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1985.

Ю. Е. Гликлих
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: `yeg@math.vsu.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-285-294 UDC 519.216

Stochastic Lagrange Approach to Viscous Hydrodynamics

© 2021 **Yu. E. Gliklikh**

Abstract. The work is a survey of the author's results with modifications and preliminary information on the use of stochastic analysis on Sobolev groups of diffeomorphisms of a flat n-dimensional torus to describe the motion of viscous fluids (nonrandom ones). The main idea is to replace the covariant derivatives on the groups of diffeomorphisms in the equations introduced by D. Ebin and J. Marsden to describe ideal fluids by the so-called mean derivatives of random processes.

REFERENCES

1. K. Partasarati, *Vvedenie v teoriyu veroyatnostey i teoriyu mery* [Introduction to Probability and Measure Theory], Mir, Moscow, 1988 (Russian translation).
2. V. Arnol'd, "Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits," *Ann. Inst. Fourier*, 1966, **16**, No. 1, 319–361.
3. S. V. Azarina and Yu. E. Gliklikh, "Differential inclusions with mean derivatives," *Dyn. Syst. Appl.*, 2007, **16**, No. 1, 49–71.
4. S. V. Azarina and Yu. E. Gliklikh, "Stochastic differential equations and inclusions with mean derivatives relative to the past," *Int. J. Differ. Equ.*, 2009, **4**, No. 1, 27–41.
5. D. G. Ebin and J. Marsden, "Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid," *Ann. Math.*, 1970, **92**, No. 1, 102–163.
6. Yu. E. Gliklikh, "Solutions of Burgers—Reynolds and Navier—Stokes equations via stochastic perturbations of inviscid flows," *J. Nonlinear Math. Phys.*, 2010, **17**, Suppl. 1, 15–29.
7. Yu. E. Gliklikh, *Global and stochastic analysis with applications to mathematical physics*, Springer, London, 2011.
8. Yu. E. Gliklikh and M. E. Zalygaeva, "Non-Newtonian fluids and stochastic analysis on the groups of diffeomorphisms," *Appl. Anal.*, 2015, **94**, No. 6, 1116–1127.
9. Yu. E. Gliklikh and M. E. Zalygaeva, "On derivation of Oskolkov's equations for noncompressible viscous Kelvin—Voight fluid by stochastic analysis on the groups of diffeomorphisms," *Glob. Stoch. Anal.*, 2019, **6**, No. 2, 69–77.
10. E. Nelson, "Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics," *Phys. Rev.*, 1966, **150**, No. 4, 1079–1085.
11. E. Nelson, *Dynamical theory of Brownian motion*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1967.
12. E. Nelson, *Quantum fluctuations*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1985.

Yu. E. Gliklikh
Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: yeg@math.vsu.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 2 (2021). С. 295–315

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-295-315 УДК 817

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ГРУПП И АЛГЕБР В ПРОСТРАНСТВАХ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

© 2021 г. **Э. В. КИССИН, В. С. ШУЛЬМАН**

Аннотация. Работа содержит обзор имеющихся результатов о структуре J-симметричных алгебр операторов в пространствах Понтрягина и Крейна, а также о представлениях групп и *-алгебр в этих пространствах.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение . . . 295
2. Классификация J-симметричных алгебр . . . 296
3. Представления *-алгебр . . . 300
4. J-унитарные представления групп . . . 304
Список литературы . . . 307

Светлой памяти Николая Дмитриевича Копачевского,
замечательного Математика и Человека.

1. Введение

Теория пространств с индефинитной метрикой возникла в работах Понтрягина, Соболева, Филлипса в связи с потребностями теории уравнений в частных производных. С тех пор круг ее приложений в математической физике и общей теории операторов чрезвычайно расширился. О многих из них можно теперь узнать из прекрасных книг Т. Я. Азизова и Н. Д. Копачевского [1, 2] и, в особенности, [3]. Кроме того, теория алгебр, групп, алгебр Ли операторов в пространствах Крейна стала популярна у физиков-теоретиков в связи с индефинитными моделями полевых теорий — см. например работу [4] и цитируемую там литературу. В нашей работе говорится почти исключительно о результатах самой теории операторно-алгебраических систем в пространствах с индефинитной метрикой, а также о связи этих результатов с некоторыми другими задачами функционального анализа; приложения требуют отдельного обзора (или, скорее, обзоров).

Полвека тому назад был опубликован обзор [34], написанный Р. С. Исмагиловым и М. А. Наймарком, математиками, стоявшими у истоков данной теории. Дав настоящей работе такое же название, мы хотели подчеркнуть, что она является продолжением этого обзора.

Напомним основные определения. Пространство с *индефинитной метрикой* — это линейное пространство H, снабженное полуторалинейной формой $x, y \mapsto [x, y]$, которая не является знакоопределенной. Вектор $x \in H$ называется *положительным* (*отрицательным*, *неположительным*, *нейтральным*), если $[x, x] > 0$ (соответственно, $[x, x] < 0$, $[x, x] \leqslant 0$, $[x, x] = 0$); подпространство $L \subset H$ называется *положительным* (*неположительным*, *отрицательным*, *нейтральным*), если все его ненулевые элементы положительны (соответственно, неположительны, отрицательны, нейтральны). Далее, H называется *пространством Крейна*, если оно раскладывается в прямую сумму двух своих подпространств, $H = H_1 + H_2$, где H_1 положительно, H_2 отрицательно, причем H_1 является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(x, y) = [x, x]$, а H_2

является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(x, y) = -[x, x]$. Продолжая скалярное произведение на все H по билинейности, мы превратим H в гильбертово пространство. Разложение $H = H_1 + H_2$ не единственно, поэтому и скалярное произведение вводится по разному, но топология от этого не зависит: все эти скалярные произведения эквивалентны. В частности, корректно говорить о непрерывности линейного оператора. В дальнейшем, все рассматриваемые линейные операторы предполагаются непрерывными; как обычно, алгебру всех таких операторов мы обозначаем $B(H)$.

Если одно из подпространств H_1, H_2 (обычно отрицательное) конечномерно, $\dim(H_2) = k < \infty$, то мы говорим, что H — *пространство Понтрягина* индекса индефинитности k, или, более коротко, пространство Π_k. Не исключен и случай, когда обе компоненты конечномерны, тогда индекс индефинитности — это $\min\{\dim H_1, \dim H_2\}$. В любом случае, индекс индефинитности совпадает с максимальной размерностью нейтрального подпространства.

Исходная индефинитная форма выражается через скалярное произведение формулой $[x, y] = (Jx, y)$, где $J = 1 - 2P$, P — проектор на H_2 параллельно H_1, поэтому символ J используется для подчеркивания индефинитности формы. Так, подпространство $L^{\perp} = \{x \in H : [x, y] = 0$ для всех $y \in L\}$ называется *J-ортогональным дополнением* подпространства $L \subset H$; оператор $T^{\sharp}$, определенный равенством $[T^{\sharp}x, y] = [x, Ty]$, называется *$J$-сопряженным* к оператору T; соответственно, T называется *J-самосопряженным*, если $T^{\sharp} = T$, и *J-унитарным*, если $T^{\sharp} = T^{-1}$. Семейство операторов E называется *J-симметричным*, если с каждым своим элементом оно содержит его J-сопряженный.

Первый глубокий результат этой теории, теорема Понтрягина—Соболева, полученный Понтрягиным [35] (а ранее Соболевым [36] для $k = 1$), гласит, что любой J-самосопряженный оператор в Π_k имеет неположительное инвариантное подпространство размерности k. Затем М. Г. Крейн [16] доказал аналогичный результат для J-унитарных операторов, применив принцип неподвижной точки (в [34] подробнее говорится об истории этого замечательного доказательства, работающего и для операторов в пространстве Крейна при некоторых условиях компактности, и о связанных с ним работах И. С. Иохвидова). Уже сравнительно недавно В. И. Ломоносов [71] нашел удивительно короткое и элементарное доказательство максимально общего варианта теоремы Понтрягина—Соболева (см. также работу Э. В. Киссина, В. С. Шульмана и Ю. В. Туровского [70], где это доказательство приведено с подробностями, отсутствовавшими в оригинальном варианте). В ряде работ получены важные обобщения теоремы Понтрягина—Соболева на неограниченные операторы, о них можно узнать, например, из работы А. А. Шкаликова [39] и приведенных в ней ссылок.

Теоремы об инвариантных подпространствах играют первостепенную роль при изучении структуры операторно-алгебраических систем — они обеспечивают возможность триангуляции (а иногда и диагонализации) системы, поэтому в дальнейшем тексте об теоремах этого рода — но не для одного оператора, а для всей алгебры, группы и т. д. — речь будет идти постоянно. Наше изложение разбито на три части — в первой рассматриваются алгебры операторов в пространствах с индефинитной метрикой, во второй — представления алгебр в этих пространствах, и в последней — представления групп.

2. Классификация J-симметричных алгебр

Первый результат о «коллективных» инвариантных подпространствах в пространствах с индефинитной метрикой был получен М. А. Наймарком [29], доказавшим, что любое коммутативное семейство J-унитарных операторов в Π_k имеет неположительное инвариантное подпространство размерности k. Отсюда, как замечено в [29], следует аналогичный результат для семейств J-самосопряженных операторов и, более общим образом, для коммутативных J-симметричных семейств операторов в Π_k. Далее, Р. С. Исмагилов [12] установил, что всякая неприводимая J-симметричная алгебра операторов в пространстве H типа Π_k плотна в $B(H)$ относительно слабой операторной топологии WOT (а также сильной, ультрасильной и ультраслабой топологий). Этот результат существенно усиливает теорему Наймарка, поскольку коммутативная алгебра не может быть плотной в $B(H)$. Отметим, что доказательство в [12] не использует теорем Понтрягина—Соболева и Крейна: оно основано на сильном результате Шварца [85] о существовании инвариантного подпространства у любого возмущения эрмитова оператора оператором из класса Шэттена (в данном случае можно ограничиться возмущениями операторами конечного ранга).

Теорему Исмагилова можно переформулировать, сказав, что единственная неприводимая WOT-замкнутая J-симметричная алгебра в Π_k — это алгебра $B(H)$. Что можно сказать о неприводимых J-симметричных алгебрах, замкнутых по норме? Этот вопрос рассматривался в работе А. И. Логинова и В. С. Шульмана [24], где показано, что любая такая алгебра A содержит алгебру $K(H)$ всех компактных операторов в H и, как следствие, совпадает (как алгебра, но не как *-алгебра) с некоторой C*-алгеброй. Схема доказательства:

1) Если в A есть хоть один ненулевой компактный оператор, то утверждение следует из известной теоремы В. И. Ломоносова [26].
2) Доказывается, что если замкнутая алгебра, порожденная J-самосопряженным оператором в Π_k, не содержит ненулевых компактных операторов, то она имеет инвариантное k-мерное отрицательное подпространство, и потому топологически *-эквивалентна некоторой C*-алгебре.
3) По (весьма тонкой) теореме И. Кунца [53], всякая банахова *-алгебра, у которой эрмитовы элементы порождают C*-эквивалентные алгебры, является C*-эквивалентной.
4) Из результата В. С. Шульмана [42] (см. следующий раздел) следует, что C*-эквивалентные J-симметричные алгебры в Π_k не могут быть неприводимыми.

J-симметричная алгебра операторов называется *невырожденной*, если она не имеет нейтральных инвариантных подпространств. В той же работе [12] Р. С. Исмагилов показал, что если A — невырожденная J-симметричная алгебра операторов в пространстве H типа Π_k, то H раскладывается в прямую J-ортогональную сумму инвариантных подпространств $H = H_0 \oplus H_1 \oplus \ldots \oplus H_n$ таких, что H_0 положительно, остальные H_i либо отрицательные, либо вида Π_m, сужение алгебры A на H_0 является $*$-алгеброй, а сужения на остальные слагаемые неприводимы. В работе В. И. Либерзона и В. С. Шульмана [19] классифицированы все WOT-замкнутые невырожденные алгебры в Π_k.

Описание невырожденных алгебр, замкнутых по норме, дано в книге Э. Киссина и В. С. Шульмана [67, теорема 13.7]; оно основано на результатах работы [24].

Вырожденные алгебры устроены значительно сложнее. Понятно, что если алгебра $A \subset B(H)$ вырождена, то среди ее нейтральных инвариантных подпространств имеется подпространство L наибольшей размерности. Подпространство $L^\perp \supset L$ также инвариантно, так что фактор-пространство $L^\perp/L$ получает естественную структуру пространства Π_m, где $m < k$. В этом пространстве действует невырожденная операторная алгебра $\widehat{A}$, индуцированная A. Поскольку, как мы видели, невырожденные алгебры мало отличаются от *-алгебр, во многих задачах можно, избегая не слишком существенных усложнений, считать, что скалярное произведение в $L^\perp/L$ неотрицательно, т. е. что $\dim L = k$. Такие алгебры называются *базовыми* (*ground*). Однако в общем случае редукция к базовым алгебрам — непростая задача. Некоторые результаты этого рода будут отмечены ниже.

Пусть A — базовая алгебра в H, L — инвариантное подпространство размерности k. Выберем кососвязное с L нейтральное подпространство M (это означает, что эрмитова форма $[x, y]$ невырождена на $L \times M$, или, что то же, есть базисы $e_1, \ldots, e_k$ в L и $e'_1, \ldots, e'_k$ в M такие, что $[e_i, e'_j] = \delta_{i,j}$). Тогда подпространство $\mathfrak{H} = L^\perp \cap M^\perp$ естественно изоморфно $L^\perp/L$; оно положительно и

$$H = L + \mathfrak{H} + M. \tag{2.1}$$

В соответствии с этим разложением, элементы алгебры A записываются верхнетреугольными блок-матрицами $T = (T_{ij})_{i,j=1}^3$.

Задача состоит в описании базовых алгебр в терминах более простых алгебраических объектов, связанных с компонентами треугольного разложения — это естественно, поскольку сами компоненты имеют более простую природу. Действительно, в «основной компоненте» $A_{22} := \{T_{22} : T \in A\}$ мы имеем дело с симметричной алгеброй операторов в гильбертовом пространстве, компоненты A_{11}, A_{13} и A_{33} действуют в k-мерных пространствах, компоненты A_{12} и A_{23} состоят из операторов ранга не выше k. Первые результаты на этом пути получил М. А. Наймарк [30], построивший модели различных классов коммутативных алгебр. Его модели были упрощены А. И. Логиновым [21], показавшим затем в работе [22], как можно удобно описывать равномерно замкнутые коммутативные алгебры в пространствах типа Π_1. Для некоммутативных алгебр М. А. Наймарком [33] были предложены модели, основанные на использовании максимальных коммутативных подалгебр коммутанта A' алгебры A. Такой подход был весьма плодотворен в теории симметричных алгебр в гильбертовом пространстве, поскольку теорема фон Неймана о бикоммутанте давала необходимую информацию об A'. В ситуации пространств Понтрягина такая информация отсутствовала и, в частности, не были исследованы алгебры с тривиальным коммутантом (такие алгебры называются *операторно неприводимыми*). Вопрос о строении операторно неприводимых JW^*-алгебр в Π_k был одним из нескольких, поставленных в конце обзора Р. С. Исмагилова и М. А. Наймарка [34]; его решение для случая $k = 1$ было дано в работе В. И. Либерзона и В. С. Шульмана [18]. Более подробные обсуждения вышеупомянутых работ М. А. Наймарка и А. И. Логинова, а также все необходимые ссылки имеются в [34].

В работе В. С. Шульмана [41] была получена классификация замкнутых по операторной норме J-симметричных алгебр в пространствах типа Π_1, не являющихся невырожденными (а следовательно, базовых). В разложении (2.1) пространства L и M теперь одномерны: $L = \mathbb{C}\xi$, $M = \mathbb{C}\eta$, $[\xi, \eta] = 1$. Произвольный оператор $T \in A$ записывается верхнетреугольной операторной матрицей (T_{ij}), где $T_{11} = \lambda(T)1_L$, $T_{33} = \mu(T)1_M$, $T_{13} = \gamma(T)\xi \otimes \eta$, $T_{12} = y_T \otimes \xi$, $y_T \in \mathfrak{H}$, $T_{23} = \eta \otimes x_T$, $x_T \in \mathfrak{H}$, поэтому мы будем писать:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda(T) & y_T & \gamma(T) \\ 0 & T_{22} & x_T \\ 0 & 0 & \mu(T) \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Отображения $\lambda : T \mapsto \lambda_T$ и $\mu : T \mapsto \mu_T$ — линейные мультипликативные функционалы на A, а $T \mapsto T_{22}$ — *-представление алгебры A в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$.

Положим $A^0 = \{T \in A : \lambda(T) = \mu(T) = 0\}$, $K_A = \{T \in A : TL^{[\perp]} \subset L\}$, $F_A = \{T \in A^0 : T_{22} = 0\}$.

Определение. Алгебра A относится к:

- *типу* M^0, если $K_A = 0$;
- *типу* M^1, если $0 \neq K_A \subset A^0$;
- *типу* M^2, если K_A не содержится в A^0 и $\mu = \lambda$; если при этом $F_A = 0$, то пишем $A \in M^{2a}$, в противном случае $A \in M^{2b}$;
- *типу* M^3, если K_A не содержится в A^0 и $\mu \neq \lambda$; если при этом $F_A = 0$, то пишем $A \in M^{3a}$; в противном случае $A \in M^{3b}$.

Легко проверить, что каждая базовая алгебра попадает в один из этих классов.

В [41] дается подробное описание замкнутых по операторной норме алгебр каждого класса. При этом алгебры всех классов, кроме M^1, описываются в привычных терминах (C*-алгебра, замкнутое подпространство гильбертова пространств, набор чисел). Мы не будем приводить эти описания; кроме [41], их можно найти, например, в книге [67]. Наибольший интерес представляет класс M^1; тут ключевым элементом описание является понятие **-замкнутого квазивектора* операторной алгебры.

Пусть Q — *-алгебра операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Ее *квазивектором* называется отображение $p : Q \to \mathfrak{H}$, удовлетворяющее условию $p(TS) = Tp(S)$ для всех $T, S \in Q$. Квазивектор называется **-замкнутым*, если Q полна относительно нормы $\|T\|_p = \|T\| + \|p(T)\| + \|p(T^*)\|$; аналогично определяется WOT *-замкнутые квазивекторы.

Непрерывные квазивекторы описываются просто: они задаются векторами $x \in \mathfrak{H}$ по формуле $p(T) = Tx$ (такие квазивекторы будем называть *простыми*). Более тонкий пример: пусть R — положительный инъективный оператор из Q' такой, что для некоторого вектора $x \in \mathfrak{H}$ выполнено условие $Qx \subset R\mathfrak{H}$, тогда отображение $p : T \mapsto R^{-1}Tx$ является *-замыкаемым квазивектором (т. е. p *-замкнут на пополнении Q по норме $\| \cdot \|_p$). В [41] показано, что этот класс примеров универсален: любой *-замкнутый квазивектор задается таким способом. Квазивекторы можно задавать и в терминах прямых операторных интегралов простых квазивекторов, а также в терминах их бесконечных прямых сумм.

Теперь мы можем описать, как устроены алгебры из класса M^1. Всякая такая алгебра A задается набором, состоящим из *-алгебры Q операторов в $\mathfrak{H}$, ее *-замкнутого квазивектора p, подпространства W, инвариантного для Q и ортогонального к $p(Q)$, а также замкнутого инволютивного антилинейного оператора V с областью определения $D\perp(p(Q) + R)$. Алгебра A обозначается $M^1(Q, p, W, D, V)$. Произвольный оператор из A определяется выбором оператора $T \in Q$, векторов

$x, y \in W$, $u \in D$ и чисел $\lambda, \gamma \in \mathbb{C}$ и записывается матрицей

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & p(B^*) + y + Vu & \gamma \\ 0 & \lambda 1_{\mathfrak{H}} + B & p(B) + x + u \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

С каждым *-замкнутым квазивектором p алгебры Q можно связать двойственный квазивектор p'. Он определен на подалгебре Q'_p коммутанта Q' алгебры Q, которая определена как множество тех операторов $R \in Q'$, для которых отображение $T \mapsto Rp(T)$ непрерывно на A. Квазивектор p' задан условиями: $Rp(T) = Tp'(R)$ и $p'(R) \in \overline{Q\mathfrak{H}}$ для всех $T \in Q$, $R \in Q'_p$. Нетрудно доказать, что $Q \subset (Q'_p)'_{p'}$ и p'' продолжает p. На самом деле, справедлив следующий результат.

*Пусть p — WOT *-замкнутый квазивектор операторной алгебры Q, и пусть E — ортопроектор на $\ker Q$. Тогда алгебра Q'_p WOT-плотна в Q', $(Q'_p)'_{p'} = Q + \mathbb{C}E$ и $p'' = p \oplus 0_{E\mathfrak{H}}$.*

Как следствие, в [41] получена теорема о бикоммутанте для WOT *-замкнутых J-симметричных алгебр в Π_1: для каждого из шести типов описаны те алгебры, для которых имеет место совпадение с бикоммутантом. Как заметил С. Н. Литвинов [20], из этого описания можно вывести, что всякая WOT-замкнутая унитальная базовая алгебра операторов в пространстве типа Π_1, имеющая разделяющий вектор, совпадает со своим бикоммутантом.

Основной целью работы С. Н. Литвинова [20] было построение Π_1-аналога теории Томиты—Такесаки. Потребность в индефинитном варианте этой теории в теории полевых алгебр Вайтмана—Вичмана и общей релятивистской квантовой теории поля подробно обосновывается в работах К. Ю. Дадашяна и С. С. Хоружего [4–7]. Как показано в [4–7], построение такого аналога наталкивается на препятствия спектрального характера для модулярного оператора. В частности, неизвестно, справедливо ли, что слабо замкнутая J-симметричная алгебра операторов в Π_k, имеющая циклический и разделяющий вектор, антиизоморфна своему коммутанту. Однако С. Н. Литвинову удалось показать, что при $k = 1$ ответ на этот вопрос положителен. Фактически, в [20] аналог теории Томиты—Такесаки построен полностью — определена модулярная группа и доказано, что справедлив Π_1-аналог фундаментальной теоремы Томиты:

Теорема (см. [20]). *Пусть A — слабо замкнутая J-симметричная алгебра операторов в пространстве H типа Π_1, имеющая циклический и разделяющий вектор. Пусть A' — коммутант алгебры A. Тогда существует антилинейная инволюция $j : H \to H$ такая, что $A' = jAj$.*

В более поздней статье В. С. Шульмана [87] этот результат был получен как следствие аналогичного утверждения о квазивекторах:

Теорема (см. [87]). *Пусть квазивектор p *-алгебры $Q \subset B(\mathfrak{H})$ WOT *-слабо замкнут, инъективен и его образ плотен в $\mathfrak{H}$. Тогда существует антилинейная инволюция j на $\mathfrak{H}$ такая, что $jQj = Q'_p$ и $p'(jTj) = jp(T)$ для любого $T \in Q$.*

Теория двойственности квазивекторов получила дальнейшее развитие в работах В. С. Шульмана [45] и А. И. Логинова и В. С. Шульмана [25], посвященных векторнозначной двойственности для модулей над банаховыми алгебрами и ее приложениям — в частности, к теории замкнутых мультипликаторов W*-алгебр, теории разложения нормальных весов, теории левых гильбертовых алгебр и теории коммутационных систем А. Ван Дайла [95].

В работах С. Ш. Машариповой и В. И. Чилина [27, 51, 52] построенная в [41] классификация использовалась для изучения функционального исчисления от самосопряженных операторов в Π_1; эта задача имеет глубокую связь со спектральной теорией J-самосопряженных операторов, построенной в работах М. Г. Крейна, его учеников и сотрудников. В работе тех же авторов [28] для J-симметричных алгебр операторов в Π_1 был доказан аналог теоремы плотности Капланского. Для алгебр операторов в Π_k теорема плотности Капланского и ее спектральный вариант[1] доказаны в работах Тонга [92, 94]. Структура идеалов J-симметричных алгебр в Π_k изучалась Янгом [96, 97].

В замечательной работе [15] Р. С. Исмагилов переформулировал одно из следствий теоремы о двойственности квазивекторов в терминах определенных им *алгебр Наймарка*.

[1]Любой оператор T из слабого замыкания алгебры A аппроксимируется операторами из A, спектральные радиусы которых не превосходят $r(T)$.

Определение. Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, $\widetilde{\mathfrak{H}}$ — его дуальное пространство. Прямую сумму $N(\mathfrak{H}) = B(\mathfrak{H})\oplus\mathfrak{H}\oplus\widetilde{\mathfrak{H}}$ можно рассмотреть как инволютивную банахову алгебру относительно произведения $(T_1, x_1, y_1)(T_2, x_2, y_2) = (T_1T_2, T_1x_2, T_2^*y_1)$, инволюции $(T, x, y)^* = (T^*, y, x)$ и нормы $\|(T, x, y)\| = \|T\| + \|x\| + \|y\|$. Любая замкнутая *-подалгебра алгебры $N(\mathfrak{H})$ называется *алгеброй Наймарка*.

Следствие. *Пусть L — алгебра Наймарка. Если для любого вектора $h \in \mathfrak{H}$ подпространство $\{Th+x : (T, x, y) \in L\}$ плотно в $\mathfrak{H}$, то $L = L_0\oplus\mathfrak{H}\oplus\widetilde{\mathfrak{H}}$, где L_0 — некоторая C^*-алгебра операторов в $\mathfrak{H}$.*

Этот результат был использован в [15] для получения важного критерия неприводимости унитарных представлений групп токов.

Вариант классификации *коммутативных* J-симметричных (не обязательно замкнутых) алгебр в Π_1, удачно соединяющий и упрощающий модели М. А. Наймарка [30], А. И. Логинова [21] и В. С. Шульмана [41], был предложен О. Я. Бендерским, С. Н. Литвиновым и В. И. Чилиным [47]. Модели для коммутативных замкнутых по норме алгебр в Π_k построены в работах Тонга [91, 93].

В работах И. Фанга, Х. Янга и С. Лю [100, 101] были построены аналоги рассмотренной выше классификации J-симметричных алгебр в Π_1 для пространств Понтрягина с произвольным индексом индефинитности. Здесь, как и в [41], алгебры разбиваются на 6 классов и достаточно прозрачно и компактно параметризуются, однако при существенном ограничении: рассматриваются лишь алгебры, замкнутые относительно отображения угловой проекции $T \mapsto T_{13}$ («условие $A(1, 3)$»). Исследованию наиболее интересного класса I, соответствующего классу M^1 из [41], посвящена работа Янга [98]. Наиболее поздняя из этой серии работа Янга [99] не переведена с китайского, а ее абстракт не дает представления о результатах — в частности, неясно, удалось ли автору преодолеть ограничение $A(1, 3)$.

3. Представления *-алгебр

Под *представлением* топологической *-алгебры A в пространстве H типа Крейна или Понтрягина мы будем всегда подразумевать ее непрерывный инволютивный гомоморфизм в алгебру $B(H)$ с инволюцией $T \mapsto T^\sharp$. Если необходимо это подчеркнуть, мы говорим о J-симметричном представлении. Термин **-представление* используется, когда речь идет об инволютивном гомоморфизме в алгебру операторов в гильбертовом пространстве со стандартной инволюцией $T \mapsto T^*$.

На представления естественно переносятся определения, введенные выше для алгебр операторов — например, мы называем подпространства, инвариантные для образа представления, инвариантными для представления, и соответственно определяем невырожденные представления, базовые представления и т. д.

Нетрудно показать, что для J-симметричного представления $\pi : A \to B(H)$ следующие условия эквивалентны:

1) *π подобно *-представлению*;
2) *$\pi(A)$ имеет инвариантные подпространства H_1, H_2 такие, что H_1 положительно, H_2 отрицательно и $H_1 + H_2 = H$.*

Если H — пространство типа Π_k, то условие 2) можно записать в виде

3) *$\pi(A)$ имеет инвариантное отрицательное подпространство размерности k.*

Разумеется, информация о структуре J-симметричных алгебр во многих случаях позволяет делать заключения о свойствах представлений. Например, теорема Р. С. Исмагилова показывает, что любое неприводимое Π_k-представление *-алгебры (или группы) вполне неприводимо, а теорема М. А. Наймарка [29] влечет утверждение о том, что любое J-симметричное представление коммутативной *-алгебры в пространстве Π_k имеет k-мерное неположительное инвариантное подпространство. В работе Р. С. Исмагилова [12] этот результат получил следующее усиление:

Теорема. *Если *-алгебра A имеет полную* (*т. е. отделяющую*) *систему неприводимых *-представлений, размерности которых не превосходят числа $d < \infty$, то любое ее представление в пространстве Π_k имеет инвариантное подпространство размерности $\leqslant kd$, J-ортогональное дополнение которого неотрицательно.*

В работе В. С. Шульмана [42] было доказано, что всякое представление C*-алгебры в Π_k подобно *-представлению. Заметим, что до сих пор неизвестно, любой ли гомоморфизм C*-алгебры в $B(H)$ подобен *-представлению (*проблема подобия*); в [42] показано, что перенос результата с Π_k-представлений на представления в любых пространствах Крейна равносилен решению проблемы подобия.

Напомним, что банахова *-алгебра называется *эрмитовой*, если все ее самосопряженные элементы имеют вещественные спектры. Это достаточно широкий класс алгебр, но за его рамками находятся, например, групповые алгебры локально компактных групп, не являющихся аменабельными (см. недавнюю работу Самеи и Виерсмы [83]). Несколько расширяя эти рамки, будем называть банахову *-алгебру A *почти эрмитовой*, если элементы с вещественным спектром плотны в (вещественном) пространстве всех ее самосопряженных элементов.

Теорема (Э. В. Киссин, А. И. Логинов и В. С. Шульман, см. [65]). *Любое Π_k-представление почти эрмитовой алгебры A имеет k-мерное неположительное инвариантное подпространство. Если, к тому же, A не имеет нетривиальных конечномерных представлений и обладает ограниченной аппроксимативной единицей, то любое ее Π_k-представление подобно *-представлению.*

В частности, почти эрмитовы алгебры не имеют неприводимых Π_k-представлений. Для эрмитовых алгебр это следствие можно существенно усилить: они не имеют операторно неприводимых Π_k-представлений (Э. В. Киссин и В. С. Шульман [67]).

Класс эрмитовых *-алгебр включает дифференциальные алгебры Блакадара—Кунца [48] (см. также близкую конструкцию в работе Э. В. Киссина и В. С. Шульмана [66]); J-симметричные представления специального класса дифференциальных алгебр — областей определения замкнутых дифференцирований — рассматривались в работах Киссина [59–64] и Наказато [73] в связи с задачами расширения симметрических операторов, имплементирующих замкнутые *-дифференцирования C*-алгебр (т. е. в связи с некоммутативной динамикой). Дадим необходимые определения.

Пусть A — банахова *-алгебра, π — ее *-представление в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Линейное отображение δ плотной подалгебры $\mathcal{D}(\delta)$ в пространство $B(\mathfrak{H})$ называется дифференцированием, *согласованным* с π, если $\delta(a^*) = \delta(a)^*$ и $\delta(ab) = \pi(a)\delta(b) + \delta(a)\pi(b)$ для всех $a, b \in \mathcal{D}(\delta)$. Вводя на $\mathcal{D}(\delta)$ норму $\|a\|_\delta = \|a\| + \|\delta(a)\|$, мы превратим $\mathcal{D}(\delta)$ в нормированную алгебру (банахову, если дифференцирование замкнуто).

Симметрический оператор T в $\mathfrak{H}$ с областью определения $\mathcal{D}(T)$ *имплементирует* δ, если $\mathcal{D}(T)$ инвариантно относительно $\pi(A)$ и $\delta(a)x = i(T\pi(a)x - \pi(a)Tx)$ для всех $a \in \mathcal{D}(\delta)$, $x \in \mathcal{D}(T)$. Задача расширения симметрического оператора, имплементирующего δ, до максимального диссипативного оператора, также имплементирующего δ, естественно возникает в теории неограниченных дифференцирований C*-алгебр и обобщает задачу расширения оператора, коммутирующего с данной *-алгеброй операторов (случай $\delta = 0$). С другой стороны, уже Филлипс [37, 38] показал, что эту задачу можно трактовать как задачу расширения A-инвариантного нейтрального подпространства в пространстве Крейна $H = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ с формой $[x, y] = (x_1, y_2) + (x_2, y_1)$ до A-инвариантного максимального неположительного подпространства. Рассматривая в том же ключе общий случай, определим, следуя Оте [76], представление π_δ *-алгебры $\mathcal{D}(\delta)$ в H, полагая $\pi_\delta(a)(x \oplus y) = (\pi(a)x + \delta(a)y) \oplus \pi(a)y$. Легко проверить, что такое представление J-симметрично и его инвариантные нейтральные подпространства соответствуют графикам имплементирующих операторов. На этом пути Киссину [59] удалось усилить некоторые важные результаты Браттели и Робинсона [49,50] о расширении имплементирующих операторов и упростить их доказательства. Подробнее об этих и близких результатах см. главу 27 книги [67].

Задача расширения имплементирующего оператора допускает и другой вариант использования индефинитной метрики. Именно, если симметрический оператор S имплементирует δ, а S^* — оператор, сопряженный к S, то на пространстве $\mathcal{D}(S^*)$ можно определить скалярное произведение $(x, y)_0 = (x, y) + (S^*x, S^*y)$ и полуторалинейную форму $\{x, y\} = \operatorname{Im}((S^*x, y) + (x, S^*y))$, которая тривиальна на $\mathcal{D}(S)$ и потому определяет индефинитное скалярное произведение $[x, y]$ на дефектном пространстве $N(S)$, которое можно отождествить с ортогональным дополнением к $\mathcal{D}(S)$ в $\mathcal{D}(S^*)$. Как известно, $N(S) = N_+(S) + N_-(S)$, причем S^* действует на $N_+(S)$ умножением на i, а на $N_-(S)$ умножением на $-i$, поэтому $N(S)$ — пространство Крейна и $N(S) = N_+(S) + N_-(S)$ — стандартное разложение на положительную и отрицательную части.

Пространства $\mathcal{D}(S^*)$ и $\mathcal{D}(S)$ инвариантны относительно исходного представления π алгебры $D(\delta)$, а потому в $N(S)$ естественно индуцируется представление этой алгебры, которое мы обозначим π^δ. В отличие от π_δ, представление π^δ во многих важных случаях (когда хотя бы один из индексов дефекта оператора конечен) действует в пространстве Понтрягина, что, разумеется, значительно облегчает его использование.

В частности, Киссин, Логинов и Шульман [65] доказали, что в этом случае исходная C*-алгебра имеет конечномерные представления и имплементирующий оператор S продолжается до максимального диссипативного оператора, также имплементирущего δ; ранее Киссин [60] получил эти результаты в случае конечности обоих индексов.

В коммутативном случае продолжимость до максимального диссипативного была установлена Филлипсом [38]. Возможность получения результата Филлипса с помощью представлений в дефектных подпространствах впервые была замечена в работе Мули и Йоргенсена [58] о коммутационных соотношениях Вейля. Дополнительные результаты и примеры можно найти в главах 28-29 книги [67].

Вернемся к общей ситуации. Поскольку вопрос о неприводимых Π_k-представлениях допускает достаточно полный анализ для широкого класса алгебр, на первый план выходит задача о разложении произвольного представления на более простые части. Тут возможны различные постановки. Разумеется, идеальный вариант — разложение представления в прямую сумму, или интеграл неприводимых представлений, но его редко удается получить. Рассмотрим другие, более реалистичные подходы.

Представление π называется П-*неразложимым*, если его нельзя представить в виде прямой суммы двух Π_k-представлений (с $k \neq 0$). Ясно, что каждое Π_k-представление раскладывается в конечную прямую сумму П-неразложимых; основной интерес здесь представляют критерии П-неразложимости. Далее, нейтральное подпространство L, инвариантное относительно представления π алгебры A, называется *расщепляющим*, если существует кососвязное с L подпространство M такое, что $L+M$ инвариантно. Π_k-представление называется *расщепимым*, если оно имеет расщепляющее подпространство L размерности k. Эквивалентное условие: L является инвариантно дополняемым в $L^\perp$. Представление называется *аппроксимативно расщепимым*, если оно имеет максимальное неположительное инвариантное подпространство L такое, что $L = \cap_n(H_n \cap L^\perp)$, где H_n — убывающая последовательность невырожденных инвариантных подпространств. Наконец, важную роль играют разложения в полупрямые суммы, введенные в рассмотрение, по существу, уже в первых работах Наймарка; их определение удобно формулировать в терминах так называемых двойных расширений.

Заметим, что если L — максимальное нейтральное подпространство, инвариантное для представления π в H, то $L^\perp = L + \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство. Естественным образом, π индуцирует в L представление λ, а в $\mathfrak{H}$ — *-представление τ, поэтому сужение $\pi|_{L^\perp}$ представления π на $L^\perp$ является расширением λ с помощью τ. Точно так же π — это расширение представления $\pi|_{L^\perp}$ с помощью представления $\widetilde{\lambda}$ алгебры A представления в M, которое можно считать сопряженным к λ, отождествляя M с L^* с помощью формы $[\cdot,\cdot]$: $\widetilde{\lambda}(a) = \widetilde{\lambda}(a^*)^*$.

В матричной записи, соответствующей разложению $H = L + \mathfrak{H} + M$, это выглядит аналогично (2.2):

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} \lambda(a) & p(a) & \gamma(a) \\ 0 & \tau(a) & \widetilde{p}(a) \\ 0 & 0 & \widetilde{\lambda}(a) \end{pmatrix}.$$

Здесь $p : A \to B(\mathfrak{H}, L)$ — 1-коцикл, определяющий первое расширение, $\widetilde{p} : A \to B(M, \mathfrak{H})$ — отображение, поточечно сопряженное к p (т. е. $\widetilde{p}(a) = p(a^*)^*$), $\gamma : A \to B(M, L)$ — отображение, дополняющее $\widetilde{p}$ до 1-коцикла со значениями в $B(M, L^\perp) = B(M, \mathfrak{H} + L)$, который определяет второе расширение. Следующее обозначение подчеркивает природу π как двойного расширения: $\pi = ee(\lambda, \tau, p, \gamma)$.

Термин «1-коцикл» связан с тем, что для любой пары представлений π_1, π_2 алгебры A в пространствах X_1, X_2 пространство $B(X_2, X_1)$ получает естественную структуру A-бимодуля: $aTb = \pi_1(a)T\pi_2(b)$. Теперь, как обычно, коцепи — это полилинейные отображения из A^n в

$B(X_2, X_1)$, операторы кограницы d_k задаются стандартной формулой, пространства k-коциклов $\mathcal{Z}_k$ — это ядра операторов d_k, а пространства кограниц $\mathcal{B}_k$ — образы d_{k-1}. Наконец, когомологии — это фактор-пространства $\mathcal{H}_k = \mathcal{Z}_k/\mathcal{B}_k$. В частности, тот факт, что p — это 1-коцикл (точнее, (λ, τ))-1-коцикл), означает просто равенство $p(ab) = \lambda(a)p(b) + a\tau(b)$. Если p является кограницей, то первое расширение тривиально (изоморфно прямой сумме представлений), и вообще, два расширения эквивалентны, если соответствующие коциклы когомологичны (т. е. их разность — кограница). Вопрос о том, продолжается ли первое расширение до двойного, был поставлен и решен, вместе с рядом других задач, Р. С. Исмагиловым [14] (в контексте представлений групп); для этого необходимо и достаточно, чтобы 2-коцепь $(a, b) \to p(a)\widetilde{p}(b)$ была кограницей относительно пары представлений $\lambda, \widetilde{\lambda}$. Коциклы, удовлетворяющие этому условию, мы будем называть *нейтральными*.

Единственность продолжения равносильна тривиальности группы первых $(\lambda, \widetilde{\lambda})$-когомологий.

Следующий результат, опубликованный впервые в [67, лемма 19.30], основан на идеях работы Р. С. Исмагилова о представлениях группы Лоренца [13]: если алгебра редуктивна и ее первая группа когомологий $\mathcal{H}^1(\alpha, \rho)$ равна нулю для всех неприводимых конечномерных представлений α и неприводимых *-представлений ρ, то любое ее представление в пространстве Понтрягина является прямой суммой базового представления и конечного числа неприводимых представлений.

Ответ на вопрос об аппроксимативной расщепляемости базового представления π может быть дан в терминах 1-коцикла p: для этого в коммутанте образа представления τ должна существовать возрастающая к единице последовательность проекторов Q_n такая, что все коциклы $a \mapsto p(a)Q_n$ являются кограницами. В [67, теоремы 20.26 и 20.27] показано, что при некоторых естественных ограничениях на A аппроксимативная расщепляемость эквивалентна замыкаемости коцикла p.

Для двойных расширений разложимость в полупрямую сумму влечет аппроксимативную разложимость; обратное верно, если $A = A^2$ (см. [67, предложение 21.18 и его обсуждение]).

В работе В. С. Шульмана [46] была предложена когомологически оснащенная версия теоремы Стайнспринга и основанная на ней ГНС-конструкции для представлений *-алгебр в пространствах с индефинитной метрикой. Чтобы сформулировать эти результаты, введем необходимые определения.

Пусть λ — представление алгебры A в гильбертовом пространстве L. Линейное отображение $\gamma : A \to B(L)$ (т. е. 1-коцепь в $(\lambda, \widetilde{\lambda})$-когомологии) называется *λ-диссипацией*, если его кограница $d\gamma$ — вполне положительное отображение (напомним, что билинейное отображение $\Phi : A \times A \to B(L)$ называется *вполне положительным*, если $\sum\limits_{i,j}(\Phi(a_i^*, a_j)\xi_i, \xi_j) \geqslant 0$ для любых $a_i \in A, \xi_i \in L$).

Теорема (о факторизации). *Пусть $\Phi : A \times A \to L$ — вполне положительный 2-коцикл, тогда существуют и единственны гильбертово пространство $\mathfrak{H}_\Phi$, *-представление π_Φ алгебры A в $\mathfrak{H}_\Phi$ и 1-коцикл $p_\Phi : A \to B(L, \mathfrak{H}_\Phi)$ такие, что $\overline{p_\Phi(A)L} = \mathfrak{H}_\Phi$ и $\Phi(a, b) = p_\Phi(a^*)^* p_\Phi(b)$ для любых $a, b \in A$.*

Напомним, что классическая ГНС-конструкция состоит в построении *-представления алгебры по положительному функционалу; легко видеть, что положительные функционалы — это в точности λ-диссипации при $\lambda = 0$ и одномерном K. В следующей теореме J-симметричное представление строится по произвольной λ-диссипации.

Теорема. *Пусть $\gamma : A \to B(L)$ — некоторая λ-диссипация, $\Phi = d\gamma$, и пусть пространство $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\Phi$, *-представление $\pi = \pi_\Phi$ алгебры A в $\mathfrak{H}_\Phi$ и 1-коцикл $p = p_\Phi : A \to B(L, \mathfrak{H}_\Phi)$ построены по Φ в соответствии с теоремой о факторизации. Тогда пространство $H = L + \mathfrak{H} + L$ с индефинитным скалярным произведением $[\xi_1 + z_1 + \eta_1, \xi_2 + z_2 + \eta_2] = (\xi_1, \eta_2)_{\mathcal{H}} + (z_1, z_2)_{\mathfrak{H}} + (\xi_2, \eta_1)_{\mathcal{H}}$ является пространством Крейна (пространством Π_k, если $\dim L = k < \infty$) и представление $n_{\lambda,\gamma}$ алгебры A в H, заданное формулой $n_{\lambda,\gamma}(a)(\xi + z + \eta) = (\widetilde{\lambda}(a)\xi + p(a)z + \gamma(a)\eta) + (\pi(a)z + p(a)\eta) + \lambda(a)\eta$, J-симметрично.*

Обратно, всякое базовое представление банаховой *-алгебры в Π_k является J-унитарно эквивалентным прямой сумме некоторого «ГНС-представления» $n_{\lambda,\gamma}$ и *-представления.

Многие следствия этой теоремы, а также другие результаты гомологического характера о представлениях в Π_k можно найти в главах 19 и 21 книги Э. В. Киссина и В. С. Шульмана [67].

В частности, там доказано, что при некоторых дополнительных условиях неразложимые в полупрямую сумму ГНС-представления соответствуют крайним лучам в конусе λ-диссипаций.

4. J-унитарные представления групп

Из теоремы М. А. Наймарка [29] следует, что любое J-унитарное представление коммутативной группы в Π_k имеет k-мерное инвариантное неположительное подпространство. В [31] М. А. Наймарк перенес этот результат на все связные разрешимые группы. В работе К. Сакаи [78] было доказано, что утверждение переносится на все связные аменабельные группы. Так как группа движений M_n пространства $\mathbb{R}_n$ аменабельна, то, разумеется, утверждение верно и для нее; К. Сакаи [81] показал, что если сужение J-унитарного представления π группы M_n в Π_1 на подгруппу вращений $SO(n)$ содержит каждое свое неприводимое подпредставление с конечной кратностью, то π разлагается в прямую сумму $\pi_1[+]\pi_2$, первое из которых действует в $(n+2)$-мерном подпространстве типа Π_1, а второе унитарно. При $n=2$ аналогичный результат получен в той же работе для представлений в Π_k. Аналогичные задачи для представлений коммутативных групп рассматривались в работе [79] того же автора. В этих работах существенно использовалась теория когомологий и, в частности, результаты А. Гишарде [55].

Важную роль в теории J-унитарных представлений сыграли работы Р. С. Исмагилова [11, 13] о представлениях группы Лоренца. С одной стороны, теория представлений группы Лоренца тесно связана с задачами релятивистской физики и изучение ее представлений в Π_k вполне согласуется с общим интересом физиков-теоретиков к индефинитным моделям фазовых пространств физических систем. С другой стороны, полупростые группы Ли образуют класс, до некоторой степени противоположный классу аменабельных групп, что в индефинитном случае сказывается уже в том, что они имеют неприводимые представления в Π_k. В [13] полностью описаны неприводимые J-унитарные представления группы Лоренца в пространствах Крейна; доказательства основывались на классических результатах И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка [8], а также Д. П. Желобенко [9]. В частности, было установлено, что все они действуют в пространствах Понтрягина. Показано также, что любое J-унитарное представление в Π_k раскладывается в прямую сумму базового представления и конечного числа неприводимых. Результаты работы [13] подробно изложены в главе 25 книги [67], где также получена некоторая дополнительная информация об аппроксимативном разложении базовых представлений.

Именно с этих работ Р. С. Исмагилова в теории J-унитарных представлений начал применяться когомологический подход. Здесь, также как и в более поздних работах Сакаи, использовались классические определения когомологических понятий, *когомологии представлений*. В работах В. С. Киссина и В. С. Шульмана [68, 69] использовались *когомологии пар представлений* — аналогичные тем, что вводились выше для алгебр ((λ,ρ)-когомологии, $(\lambda,\widetilde{\lambda})$-когомологии и т. д.). Эта модификация не принципиальна, но технически иногда удобна; кроме того, терминология не требует переделки при переходе от представлений групп к представлениям групповых алгебр.

В [68, 69] изучались J-унитарные представления связных нильпотентных групп. Как следует из сказанного ранее, здесь можно ограничиться рассмотрением двойных расширений $ee(\lambda,U,p,\gamma)$, где λ — представление в L, U — унитарное представление в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, p — нейтральный (λ,U)-коцикл, а γ — согласованная с p λ-диссипация. Важную роль в их исследовании играет следующий результат более общего характера, полученный в [68].

Теорема. *Пусть λ и U — представления связной нильпотентной группы G. Если*
$$Sp(\lambda(h))\cap Sp(U(h))=\varnothing \tag{4.1}$$
для некоторого $h\in G$, то $\mathcal{H}^1(\lambda,U)=0$.

Пусть χ — характер связной нильпотентной (в дальнейшем эти условия подразумеваются) группы G, т. е. мультипликативный функционал на G. Будем говорить, что χ *присоединен* к представлению λ, если $\lambda(g)x=\chi(g)x$ для некоторого вектора $x\neq 0$ и всех $g\in G$. Множество всех характеров, присоединенных к λ, обозначим $\operatorname{sign}(\lambda)$. Будем называть представление λ *монотетическим*, если $\operatorname{sign}(\lambda)$ одноточечное.

Обозначим через $\mathcal{Z}^1_\nu(\lambda,U)$ множество всех нейтральных (λ,U)-коциклов. В [68] показано, что если λ монотетично и соответствующий характер слабо содержится в представлении U, то $\mathcal{Z}^1_\nu(\lambda,U)$

плотно в пространстве $\mathcal{Z}^1(\lambda, U)$ всех (λ, U)-коциклов относительно топологии равномерной сходимости на компактах.

Нетрудно показать, что коцикл, когомологичный нейтральному, нейтрален, поэтому естественно определяется множество $\mathcal{H}^1_\nu(\lambda, U)$ нейтральных 1-когомологий. Оно не всегда является подгруппой в $\mathcal{H}^1(\lambda, U)$ и может быть весьма сложно устроено даже в случае, когда $\lambda = \iota$, тривиальное представление, а $U = \iota_m$, представление единичными операторами в $\mathbb{C}^m$. В [69] дано полное описание нейтральных (ι, ι_m)-коциклов произвольной связной нильпотентной группы. Для важного случая группы Гейзенберга T_n, т. е. группы верхнетреугольных $n \times n$-матриц с единицами на диагонали, это описание выглядит следующим образом.

Пусть A — такая $m \times (n-1)$ матрица, что для матрицы $B = A^*A = (b_{ij})$ выполнены условия: $\operatorname{Im} b_{ij} = 0$ при $|i-j| > 1$, тогда $\xi(g) = A(g_{12}, \ldots, g_{n-1,n})^T$ — нейтральный (ι, ι_m)-коцикл, и все нейтральные коциклы имеют такой вид.

В [69] неразложимые Π_k-представления связных нильпотентных групп разбиты на 4 класса, три из которых содержат только конечномерные представления (их исследование значительно облегчает упомянутая выше классификация нейтральных (ι, ι_m)-коциклов), а четвертый состоит из двойных расширений $\mathfrak{ee}(\lambda, U, \xi, \gamma)$ таких, что все характеры из $\operatorname{sign}(\lambda)$ унитарны и $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^\Omega \oplus \mathfrak{H}^0$, где:

а) $\mathfrak{H}^\Omega, \mathfrak{H}^0$ — U-инвариантные подпространства, $\dim \mathfrak{H}^\Omega \leqslant n_G \dim L$ и $\dim \mathfrak{H}^0 = \infty$;
б) $\operatorname{sign}(U|_{\mathfrak{H}^\Omega}) \subseteq \operatorname{sign}(\lambda)$;
в) $U|_{\mathfrak{H}^0}$ не является спектрально дизъюнктным (в смысле (4.1)) с каждым характером χ из $\operatorname{sign}(\lambda)$.

В заключение заметим, что пример, построенный в [69], обнаружил неожиданный эффект: неразложимое Π_k-представление связной нильпотентной группы может не быть монотетичным (для коммутативных групп это не так).

Перейдем теперь к изучению ограниченных Π_k-представлений произвольных групп.

Как уже говорилось, в работе М. Г. Крейна [16] существование максимального неположительного подпространства (сокращенно MNPS), инвариантного для J-унитарного оператора, было доказано с помощью применения теоремы Шаудера—Тихонова о неподвижной точке. Нас будет интересовать обобщение этого подхода на группы операторов, поэтому опишем конструкцию более подробно.

Каждый J-унитарный оператор U естественно определяет (биективное) преобразование множества всех MNPS. С другой стороны, каждому MNPS L соответствует сжимающий оператор $W = W_L : H_- \to H_+$ такой, что L является его графиком. Таким образом, U определяет отображение ϕ_U замкнутого единичного шара $\mathcal{B}_1(H_-, H_+)$ в пространстве $\mathcal{B}(H_-, H_+)$ в себя. Это отображение непосредственно выписывается через элементы блок-матрицы оператора U, соответствующие разложению $H = H_1 \oplus H_2$, где $H_1 = H_-$, $H_2 = H_+$: $\phi_U(W) = (U_{21} + U_{22}W)(U_{11} + U_{12}W)^{-1}$.

В [16] было показано, что если «уголок» U_{12} оператора U компактен, то «дробно-линейное» отображение ϕ_U WOT-непрерывно; так как шар $\mathcal{B}_1(H_-, H_+)$ WOT-компактен, то теорема о неподвижной точке обеспечивает существование оператора W такого, что $\phi_U(W) = W$. Это означает, что график этого оператора — MNPS, инвариантное для U.

Заметим, что для операторов в Π_k условие компактности уголка выполняется автоматически, так что теорема Крейна влечет существование инвариантного MNPS для любого J-унитарного оператора в Π_k.

Поскольку нас интересует наличие MNPS, инвариантного для всех элементов некоторой группы J-унитарных операторов, развитие этого подхода требует получения удобных результатов об общих неподвижных точках семейств отображений. Результаты такого рода хорошо известны для групп аффинных преобразований (теоремы Маркова, Какутани, Рыль-Нарджевского), однако дробно-линейные преобразования ϕ_U аффинными не являются. Вопрос о существовании общей неподвижной точки для коммутативной группы дробно-линейных преобразований был впервые поставлен и решен Дж. Хельтоном [57]:

Теорема. *Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства, причем $\dim H_1 < \infty$. Тогда любое коммутативное семейство дробно-линейных преобразований замкнутого единичного шара пространства $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ имеет общую неподвижную точку.*

Доказательство в [57] использовало теорему М. А. Наймарка. В работе [56] Хельтон доказал (основываясь на рассмотрении дробно-линейных преобразований), что коммутативная группа J-унитарных операторов на пространстве Крейна $H_1 \oplus H_2$ имеет инвариантное MNPS, если она содержит компактное возмущение оператора вида $A \oplus B$, где спектры слагаемых не пересекаются. Это существенно обобщает теорему Наймарка, поскольку в пространстве Π_k единичный оператор является компактным возмущением оператора $J = (-1) \oplus 1$.

В работе В. С. Шульмана [43] было замечено, что для вещественных пространств Π_1 все дробно-линейные отображения обладают свойством «квазиаффинности»: они переводят любой отрезок в отрезок. Там же было получено обобщение на квазиаффинные отображения теоремы Какутани о существовании неподвижной точки у любой равностепенно непрерывной группы аффинных отображений, и как следствие — доказательство существования инвариантного MNPS у ограниченной группы J-унитарных операторов в вещественном пространстве Π_1. Далее, А. И. Логинов [23] получил важное обобщение теоремы Маркова: любое коммутативное семейство квазиаффинных отображений компактного выпуклого подмножества локально выпуклого пространства имеет неподвижную точку.

Перенос основного результата работы [43] на комплексные Π_1-пространства был осуществлен в работе В. С. Шульмана [44], где использовалось модифицированное понятие выпуклости для подмножеств единичного шара гильбертова пространства. Соответственно, было установлено, что ограниченная группа J-унитарных операторов в комплексном пространстве Π_1 имеет инвариантное отрицательное подпространство.

Общая (т. е. относящаяся к пространствам Понтрягина произвольного индекса индефинитности) теорема о неподвижных точках групп дробно-линейных отображений была получена в работах М. И. Островского, Л. Туровской и В. С. Шульмана [74, 75].

Теорема. *Пусть $\dim H_2 = k < \infty$, и пусть группа G дробно-линейных преобразований открытого единичного шара $\mathfrak{B}$ пространства $\mathcal{B}(H_2, H_1)$ имеет хотя бы одну орбиту, отделенную от границы шара (т. е. $\sup_{\phi \in G} \|\phi(K)\| < 1$ для некоторого $K \in \mathfrak{B}$). Тогда найдется точка $K_0 \in \mathfrak{B}$ такая, что $\phi(K_0) = K_0$ для всех $\phi \in G$.*

Отсюда можно сделать вывод, что всякое ограниченное J-унитарное представление группы в Π_k имеет k-мерное инвариантное отрицательное подпространство.

Как следует из сказанного ранее, приведенный результат влечет подобие любого ограниченного J-унитарного Π_k-представления π любой группы G унитарному представлению. В работе Э. Киссина, Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [70] замечено, что константа подобия (т. е. точная нижняя грань чисел $\|V\|\|V^{-1}\|$ по всем операторам V, реализующим подобие) не превосходит $2C^2 + 1$, где $C = \sup_{g \in G} \|\pi(g)\|$. Тот факт, что полученная оценка не зависит от числа отрицательных квадратов, делает естественным предположение, что результат справедлив и для случая $k = \infty$ (т. е. для представлений в пространствах Крейна). Однако в [70] показано, что это неверно.

Доказательство теоремы о неподвижных точках в [74] существенно использовало глубокий результат Шафрира [86] о гиперболичности метрики Каратеодори в $\mathfrak{B}$ (эта работа переведена с иврита на английский и помещена в [74] как приложение). Напротив, подход в [75] основан на весьма общих фактах о неподвижных точках групп изометрий в метрических пространствах. Чтобы их сформулировать, напомним, что метрическое пространство $(\mathcal{X}, d)$ называется *b-компактным* (см. [90]), если любое центрированное семейство шаров $E_{a,r} = \{x \in X : d(a, x) \leqslant r\}$ имеет непустое пересечение. Подмножество $M \subset \mathcal{X}$ называется *b-выпуклым*, если оно является пересечением некоторого семейства шаров. Точка $a \in M$ называется *диаметральной*, если $\sup\{d(a, x) : x \in M\} = \operatorname{diam}(M)$. Если любое неодноточечное b-выпуклое подмножество пространства $\mathcal{X}$ имеет недиаметральную точку, то говорят, что $\mathcal{X}$ имеет нормальную структуру.

Теорема (см. [75])**.** *Пусть метрическое пространство $(\mathcal{X}, d)$ b-выпукло и имеет нормальную структуру. Если некоторая группа изометрий пространства $(\mathcal{X}, d)$ имеет ограниченную орбиту, то она имеет и неподвижную точку x_0, которая принадлежит пересечению всех b-выпуклых множеств, содержащих O.*

В нашем случае эта теорема применяется к пространству $(\mathfrak{B}, \rho)$, где ρ — метрика Каратеодори в $\mathfrak{B}$; так как дробно-линейные преобразования биголоморфны, то они сохраняют ρ. Разумеется, для такого применения потребовалось сначала доказать, что пространство $(\mathfrak{B}, \rho)$ b-выпукло и имеет нормальную структуру, однако это существенно проще гиперболичности.

Одно из приложений этого результата относится к теории квази-положительно определенных функций на группе. Следуя М. Г. Крейну [17], скажем, что функция ϕ на группе G является *квази-положительно определенной* индекса k, если $\phi(g^{-1}) = \overline{\phi(g)}$ при $g \in G$, и для любого набора элементов $g_1, \ldots, g_n \in G$ квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \phi(g_i^{-1}g_j)z_i\overline{z_j}$ имеет не более k отрицательных квадратов.

Теорема (Е. В. Киссин, Ю. В. Туровский, В. С. Шульман, см. [70]). *Любая ограниченная квази-положительно определенная функция индекса k на группе представима в виде разности $\phi_1 - \phi_2$, где функции ϕ_i положительно определенные, причем φ_2 имеет ранг k (т. е. ранги всех матриц $(\phi_2(g_i^{-1}g_j))_{i,j=1}^{n}$ не превосходят k).*

Ранее Сакаи [80], доказал этот результат для аменабельных групп. Ограниченные квази-положительно определенные функции на коммутативных группах подробно изучались в связи с задачами теории вероятностей (см. статью Сасвари [84] и цитируемые там источники).

Авторы выражают искреннюю благодарность В. И. Чилину за внимательное чтение рукописи и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д.* Введение в теорию пространств Понтрягина. Приложения индефинитной метрики. Специальный курс лекций. — Симферополь: ООО «Форма», 2008.
2. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д.* Введение в теорию пространств Крейна. Приложения индефинитной метрики. Специальный курс лекций. — Симферополь: ООО «Форма», 2010.
3. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д.* Приложения индефинитной метрики. — Симферополь: ДИАЙПИ, 2014.
4. *Дадашян К. Ю., Хоружий С. С.* О полевых алгебрах в квантовой теории с индефинитной метрикой, I// Теор. мат. физ. — 1983. — *54*, № 1. — С. 57–77.
5. *Дадашян К. Ю., Хоружий С. С.* О полевых алгебрах в квантовой теории с индефинитной метрикой, II// Теор. мат. физ. — 1985. — *2*, № 1. — С. 30–44.
6. *Дадашян К. Ю., Хоружий С. С.* О полевых алгебрах в квантовой теории с индефинитной метрикой, III// Теор. мат. физ. — 1987. — *70*, № 2. — С. 181–191.
7. *Дадашян К. Ю., Хоружий С. С.* О полевых алгебрах в квантовой теории с индефинитной метрикой, IV// Теор. мат. физ. — 1987. — *72*, № 3. — С. 340–351.
8. *Гельфанд И. М., Наймарк М. А.* Унитарные представления классических групп// Тр. МИАН. — 1950. — *36*. — С. 3–288.
9. *Желобенко Д. П.* Описание одного класса представлений группы Лоренца// Докл. АН СССР. — 1958. — *121*, № 4. — С. 586–590.
10. *Иохвидов И. С.* Унитарные операторы в пространствах с индефинитной метрикой// Заметки НИИ мат. и мех. Харьков. ун-та. — 1949. — *21*. — С. 79–86.
11. *Исмагилов Р. С.* Описание унитарных представлений группы Лоренца в пространстве с индефинитной метрикой// Докл. АН СССР. — 1964. — *158*, № 2. — С. 268–270.
12. *Исмагилов Р. С.* Кольца операторов в пространствах с индефинитной метрикой// Докл. АН СССР. — 1966. — *171*, № 2. — С. 269–271.
13. *Исмагилов Р. С.* Унитарные представления группы Лоренца в пространствах с индефинитной метрикой// Изв. АН СССР. — 1966. — *30*, № 3. — С. 497–522.
14. *Исмагилов Р. С.* О задаче расширения представлений// Мат. заметки. — 1984. — *35*, № 1. — С. 99–106.
15. *Исмагилов Р. С.* О неприводимости представлений группы токов// Функц. анализ и его прилож. — 1994. — *28*. — С. 21–30.
16. *Крейн М. Г.* Об одном применении принципа неподвижной точки в теории линейных преобразований пространств с индефинитной метрикой// Усп. мат. наук. — 1950. — *5*, № 2. — С. 180–190.
17. *Крейн М. Г.* Об интегральном представлении непрерывной эрмитово-индефинитной функции с конечным числом отрицательных квадратов// Докл. АН СССР. — 1959. — *125*, № 1. — С. 31–34.
18. *Либерзон В. И., Шульман В. С.* Операторно-неприводимые алгебры операторов в пространстве Понтрягина Π_1// Изв. АН СССР. — 1971. — *35*, № 5. — С. 1159–1170.
19. *Либерзон В. И., Шульман В. С.* Невырожденные операторные алгебры в пространствах с индефинитной метрикой// Изв. АН СССР. — 1973. — *37*, № 3. — С. 533–538.

20. *Литвинов С. Н.* Бициклические WJ*-алгебры в пространстве Понтрягина типа Π_1// Функц. анализ и его прилож. — 1992. — *26*, № 3. — С. 46–54.
21. *Логинов А. И.* О коммутативных симметричных алгебрах операторов в пространствах Понтрягина// Изв. АН СССР. — 1969. — *33*, № 3. — С. 559–569.
22. *Логинов А. И.* Полные коммутативные симметричные операторные алгебры в пространстве Понтрягина Π_1// Мат. сб. — 1971. — *84*, № 4. — С. 575–582.
23. *Логинов А. И.* Одно обобщение теоремы Маркова—Какутани о неподвижной точке// Функц. анализ и его прилож. — 1980. — *14*, № 2. — С. 65–66.
24. *Логинов А. И., Шульман В. С.* Неприводимые J-симметричные алгебры операторов в пространствах с индефинитной метрикой// Докл. АН СССР. — 1978. — *240*, № 1. — С. 21–23.
25. *Логинов А. И., Шульман В. С.* Векторнозначная двойственность для модулей над банаховыми алгебрами// Изв. АН СССР. — 1993. — *57*, № 4. — С. 3–35.
26. *Ломоносов В. И.* Об инвариантных подпространствах семейства операторов, коммутирующих с вполне непрерывным// Функц. анализ и его прилож. — 1973. — *7*, № 3. — С. 55–56.
27. *Машарипова С. Ш., Чилин В. И.* Функциональное исчисление в симметричных операторных алгебрах в пространстве Понтрягина Π_1// Докл. АН Узбек. ССР. — 1994. — *14*. — С. 10–12.
28. *Машарипова С. Ш., Чилин В. И.* Теорема плотности Капланского для симметричных операторных алгебр в Π_1// Узбек. мат. ж. — 1996. — *2*. — С. 68–75.
29. *Наймарк М. А.* О перестановочных унитарных операторах в пространстве Π_k// Докл АН СССР. — 1963. — *149*. — С. 1261–1263.
30. *Наймарк М. А.* О коммутативных алгебрах операторов в пространстве Π_k// Докл АН СССР. — 1965. — *161*, № 4. — С. 767–770.
31. *Наймарк М. А.* Об унитарных представлениях разрешимых групп в пространствах с индефинитной метрикой// Изв. АН СССР. — 1963. — *27*. — С. 1181–1185.
32. *Наймарк М. А.* О структуре унитарных представлений локально компактных групп в пространствах Понтрягина Π_1// Изв. АН СССР. — 1965. — *29*, № 4. — С. 689–770.
33. *Наймарк М. А.* О структуре унитарных представлений локально компактных групп и симметричных представлений в пространствах Понтрягина Π_k// Изв. АН СССР. — 1966. — *30*, № 5. — С. 1111–1132.
34. *Наймарк М. А., Исмагилов Р. С.* Представления групп и алгебр в пространствах с индефинитной метрикой// Итоги науки и техн. Сер. Мат. Мат. анализ. — 1969. — *1968*. — С. 73–105.
35. *Понтрягин Л. С.* Эрмитовы операторы в пространствах с индефинитной метрикой// Изв. АН СССР. — 1944. — *8*. — С. 243–280.
36. *Соболев С. Л.* О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью// Журн. прикл. мех. и техн. физ. — 1949. — № 1. — С. 55–60.
37. *Филлипс Р. С.* Расширение дуальных подпространств, инвариантных относительно алгебры// Математика. — 1964. — *8*, № 6. — С. 81–108.
38. *Филлипс Р. С.* Диссипативные операторы и гиперболические системы операторов в частных производных// Математика. — 1962. — *6*, № 4. — С. 11–70.
39. *Шкаликов А. А.* О существовании инвариантных подпространств у диссипативных операторов в пространствах с индефинитной метрикой// Тр. МИАН. — 2005. — *248*. — С. 294–303.
40. *Штраус В. А.* Функциональное представление алгебры, порожденной самосопряженным оператором в пространстве Понтрягина// Функц. анализ и его прилож. — 1986. — *20*, № 1. — С. 91-92.
41. *Шульман В. С.* Банаховы симметричные алгебры операторов в пространстве типа Π_1// Мат. сб. — 1972. — *89*, № 2. — С. 264–279.
42. *Шульман В. С.* О представлениях С*-алгебр в пространствах с индефинитной метрикой// Мат. заметки. — 1977. — *22*. — С. 583–592.
43. *Шульман В. С.* Одна теорема о неподвижной точке// Функц. анализ и его прилож. — 1979. — *13*, № 1. — С. 88-89.
44. *Шульман В. С.* О неподвижных точках дробно-линейных отображений// Функц. анализ и его прилож. — 1980. — *14*, № 2. — С. 93–94.
45. *Шульман В. С.* О модулях над операторными алгебрами// Функц. анализ и его прилож. — 1983. — *17*, № 2. — С. 94–95.
46. *Шульман В. С.* Факторизация вполне положительных коциклов и ГНС-конструкция представлений в пространствах Понтрягина// Функц. анализ и его прилож. — 1997. — *31*, № 3. — С. 91–94.
47. *Benderskii O. Ya., Litvinov S. N., Chilin V. I.* Description of commutative symmetric algebras of operators on Pontryagin space Π_1// J. Operator Theory. — 1997. — *37*. — С. 201–222.
48. *Blackadar B., Cuntz J.* Differential Banach algebra norms and smooth subalgebras of C*-algebras// J. Operator Theory. — 1991. — *26*. — С. 255–282.

49. *Bratteli O., Robinson D.* Unbounded derivations of C*-algebras, I// Commun. Math. Phys. — 1975. — *42.* — C. 253–268.
50. *Bratteli O., Robinson D.* Unbounded derivations of C*-algebras, II// Commun. Math. Phys. — 1976. — *46.* — C. 11–30.
51. *Chilin V. I., Masharipova S. Sh.* Functional calculus for the algebra of operators generated by a self-adjoint operator in Pontryagin's space Π_1// Proc. 8th Int. Conf. «Topological Algebras and Their Applications», 2014. — Berlin—Boston: Walter de Gruyter, 2018. — C. 55–72.
52. *Chilin V. I., Masharipova S. Sh.* Functional calculus for the algebra of operators generated by a selfadjoint operator in Pontryagin's space Π_1. II. Exceptional case in the model of type 1// Indian J. Math. — 2016. — *58.* — C. 18–37.
53. *Cuntz J.* Locally C*-equivalent algebras// J. Funct. Anal. — 1976. — *23.* — C. 95–106.
54. *Gohberg I., Lancaster P., Rodman L.* Indefinite linear algebra and applications. — Basel: Birkhäuser, 2005.
55. *Guichardet A.* Sur la cohomologie des groupes topologiques// Bull. Sci. Math. — 1971. — *95.* — C. 161–176.
56. *Helton J. W.* Unitary operators on a space with an indefinite inner product// J. Funct. Anal. — 1970. — *6.* — C. 412–440.
57. *Helton J. W.* Operators unitary in an indefinite metric and linear fractional transformations// Acta Sci. Math. — 1971. — *32.* — C. 261–266.
58. *Jorgensen P. E. T., Muhly P. S.* Selfadjoint extensions satisfying the Weyl operator commutation relations// J. D'Anal. Math. — 1980. — *37.* — C. 46–99.
59. *Kissin E.* Symmetric operator extensions of unbounded derivations of C*-algebras// J. Funct. Anal. — 1988. — *81.* — C. 38–53.
60. *Kissin E.* Dissipative implementations of *-derivationa of C*-algebras and representations in indefinite metric spaces// J. London. Math. Soc. (2). — 1991. — *43.* — C. 451–464.
61. *Kissin E.* Representational indices of derivations of C*-algebras and representations of *-algebras on Krein spaces// J. Reine Angew Math. — 1993. — *439.* — C. 71–92.
62. *Kissin E.* Semigroups of representational indices of derivations of C*-algebras// J. Funct. Anal. — 1994. — *126.* — C. 139–168.
63. *Kissin E.* Derivations of C*-algebras which contain all compact operators and representations of Q-subalgebras of these algebras on Π_k-spaces// J. London. Math. Soc. (2). — 1995. — *51.* — C. 161–174.
64. *Kissin E.* Derivations of C*-algebras and representations on deficiency spaces of skew-symmetric operators// Proc. London Math. Soc. (3). — 1998. — *76*, № 2. — C. 476–496.
65. *Kissin E., Loginov A. I., Shulman V. S.* Derivations of C*-algebras and almost Hermitian representations on Π_k-spaces// Pacific J. Math. — 1996. — *174.* — C. 411–430.
66. *Kissin E., Shulman V. S.* Differential properties of some dense subalgebras of C*-algebras// Proc. Edinb. Math. Soc. — 1994. — *37.* — C. 399–422.
67. *Kissin E., Shulman V. S.* Representations on Krein spaces and derivations of C*-algebras. — Harlow: Longman, 1997.
68. *Kissin E., Shulman V. S.* Non-unitary representations of nilpotent groups, I: Cohomologies, extensions and neutral cocycles// J. Funct. Anal. — 2015. — *269.* — C. 2564–2610.
69. *Kissin E., Shulman V. S.* Representations of nilpotent groups on spaces with indefinite metric// Integral Equ. Operator Theory. — 2017. — *87.* — C. 81–116.
70. *Kissin E., Shulman V. S., Turovskii V. S.* Pontryagin—Krein theorem: Lomonosov's proof and relared results// В сб.: «The Mathematical legacy of Victor Lomonosov. Operator theory». — Berlin: De Gruyter, 2020. — C. 231–250.
71. *Lomonosov V. I.* On stability of non-negative invariant subspaces// В сб.: «New Results in Operator Theory and Its Applications: the Israel M. Glazman Memorial Volume». — Basel: Birkhäuser, 1997. — C. 186–189.
72. *Naimark M. A.* Kommutative algebren von operatoren im raume Π_1// Rev. Roumaine Math. Pures Appl. — 1964. — *9*, № 6. — C. 499–528.
73. *Nakazato H.* Indefinite inner product spaces and derivations// Math. Japonica. — 1990. — *35.* — C. 1119–1124.
74. *Ostrovskii M., Shulman V. S., Turowska L.* Unitarizable representations and fixed points of groups of holomorphic transformations of operator balls// J. Funct. Anal. — 2009. — *257.* — C. 2476–2496.
75. *Ostrovskii M., Shulman V. S., Turowska L.* Fixed points of holomorphic transformations of operator balls// Q. J. Math. — 2011. — *62.* — C. 173–187.
76. *Ota S.* Certain operator algebras induced by *-derivations in C*-algebras on an indefinite product space// J. Funct. Anal. — 1978. — *30.* — C. 238–244.

77. *Pisier G.* Similarity problems and completely bounded maps. Includes the solution to «The Halmos Problem». — Berlin: Springer, 2001.
78. *Sakai K.* On J-unitary representations of amenable groups// Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. — 1977. — *26.* — С. 33–41.
79. *Sakai K.* On indecomposable unitary representations of Locally compact abelian groups in Π_n-spaces// Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. — 1978. — *27.* — С. 1–20.
80. *Sakai K.* On quasi-positive definite functions and unitary representations of groups in Pontryagin spaces// J. Math. Kyoto Univ. — 1979. — *19.* — С. 71–90.
81. *Sakai K.* Some remarks on unitary representations of the Euclidean motion group in Π_n-spaces// Sci. Rep. Kagoshima Univ. — 1980. — *29.* — С. 13–26.
82. *Sakai K.* On indecomposable unitary representations of the 2-dimensional Euclidean motion group in finite-dimensional indefinite inner product spaces// Sci. Rep. Kagoshima Univ. — 1980. — *29.* — С. 27–51.
83. *Samei E., Wiersma M.* Quasi-Hermitian locally compact groups are amenable// Adv. Math. — 2020. — *359.* — 106897.
84. *Sasvari Z.* On bounded functions with a finite number of negative squares// Monatsh. Math. — 1985. — *99.* — С. 223–234.
85. *Schwartz J. T.* Subdiagonalization of operators in Hilbert space with compact imaginary part// Commun. Pure Appl. Math. — 1962. — *15.* — С. 159–172.
86. *Shafrir I.* Operators in hyperbolic spaces// PhD Thesis. — Haifa: Technion — Israel Institute of Technology, 1990.
87. *Shulman V. S.* Quasivectors and Tomita—Takesaki theory for operator algebras on P_1-spaces// Rev. Math. Phys. — 1997. — *9*, № 6. — С. 749–783.
88. *Strauss V.* On the weakly closed algebra generated by a unitary operator in a Pontryagin space// Oper. Matrices. — 2018. — *12*, № 3. — С. 837–853.
89. *Strauss V.* On a functional calculus for unitary operators in Pontryagin spaces// Oper. Matrices. — 2020. — *14*, № 3. — С. 971–999.
90. *Takahashi W.* A convexity in metric spaces and non-expansive mappings. I// Kodai Math. Sem. Rep. — 1970. — *22.* — С. 142–149.
91. *Tong Y.* Commutative J-von Neumann algebras on Pontryagin spaces// Chinese Ann. Math. Ser. A. — 1993. — *14.* — С. 429–436.
92. *Tong Y.* Two density theorems for sets of operators on Pontryagin spaces// Acta Math. Sinica. — 1994. — *37*, № 1. — С. 1–11.
93. *Tong Y.* Uniformly closed symmetric operator algebras on Pontryagin spaces// Chinese Ann. Math. Ser. A. — 1994. — *15.* — С. 603–611.
94. *Tong Y.* A density theorem on the operator algebras in Pontryagin spaces// J. Math. Anal. Appl. — 2002. — *268.* — С. 143–156.
95. *Van Daele A.* A framework to study commutational problems// Bull. Soc. Math. France. — 1978. — *106.* — С. 289–309.
96. *Yang H.* On the symmetry of ideal in operator algebras on Pontryagin spaces// Acta Math. Sinica. — 2004. — *47.* — С. 915–920.
97. *Yang H.* Structure of ideals of operator algbras on Pontryagin spaces// Chinese Ann. Math. Ser. A. — 2007. — *28*, № 1. — С. 103–110.
98. *Yang H.* The operator algebras of class I on the Pontryagin spaces// J. Systems Sci. Math. Sci. — 2013. — *33*, № 2. — С. 993–1006.
99. *Yang H.* Classification and general forms of operator algebras on Pontryagin space// Acta Math. Sinica. — 2015. — *58*, № 3. — С. 401–408.
100. *Yang H., Fang Y., Liu S.* General form of operator algebras on Pontryagin spaces with neutral invariant subspaces// Linear Algebra Appl. — 2007. — *425.* — С. 184–209.
101. *Yang H., Fang Y., Liu S.* Invariant subspaces of JC*-algebras on Π_1-spaces// J. Systems Sci. Math. Sci. — 2008. — *28*, № 10. — С. 1268–1274.

Э. В. Киссин
STORM/SCDM, London Metropolitan University, London, UK
E-mail: `e.kissin@londonmet.ac.uk`

В. С. Шульман
Вологодский государственный университет, Вологда, Россия
E-mail: `victor.shulman80@gmail.com`

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-295-315 UDC 817

On Representations of Groups and Algebras in Spaces with Indefinite Metric

© 2021 **E. V. Kissin, V. S. Shulman**

Abstract. The paper contains a survey of known results on the structure of J-symmetric operator algebras in Pontryagin and Krein spaces, as well as on representations of groups and *-algebras in these spaces.

REFERENCES

1. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevsky, *Vvedenie v teoriyu prostranstv Pontryagina: spetsial'nyi kurs lektsiy* [Introduction to the Theory of Pontryagin Spaces: a Special Course of Lectures], Forma, Simferopol', 2008 (in Russian).
2. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevsky, *Vvedenie v teoriyu prostranstv Kreyna. Prilozheniya indefinitnoy metriki. Spetsial'nyi kurs lektsiy* [Introduction to the Theory of Kreyn Spaces: a Special Course of Lectures], Forma, Simferopol', 2010 (in Russian).
3. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevsky, *Prilozheniya indefinitnoy metriki* [Applications of Indefinite Metric], DIAYPI, Simferopol', 2014 (in Russian).
4. K. Yu. Dadashyan and S. S. Khoruzhiy, "O polevykh algebrakh v kvantovoy teorii s indefinitnoy metrikoy, I" [On field algebras in quantum theory with an indefinite metric, I], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 1983, **54**, No. 1, 57–77 (in Russian).
5. K. Yu. Dadashyan and S. S. Khoruzhiy, "O polevykh algebrakh v kvantovoy teorii s indefinitnoy metrikoy, II" [On field algebras in quantum theory with an indefinite metric, II], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 1985, **2**, No. 1, 30–44 (in Russian).
6. K. Yu. Dadashyan and S. S. Khoruzhiy, "O polevykh algebrakh v kvantovoy teorii s indefinitnoy metrikoy, III" [On field algebras in quantum theory with an indefinite metric, III], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 1987, **70**, No. 2, 181–191 (in Russian).
7. K. Yu. Dadashyan and S. S. Khoruzhiy, "O polevykh algebrakh v kvantovoy teorii s indefinitnoy metrikoy, IV" [On field algebras in quantum theory with an indefinite metric, IV], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 1987, **72**, No. 3, 340–351 (in Russian).
8. I. M. Gel'fand and M. A. Naymark, "Unitarnye predstavleniya klassicheskikh grupp" [Unitary representations of classical groups], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1950, **36**, 3–288 (in Russian).
9. D. P. Zhelobenko, "Opisanie odnogo klassa predstavleniy gruppy Lorentsa" [Description of one class of representations of the Lorentz group], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1958, **121**, No. 4, 586–590 (in Russian).
10. I. S. Iokhvidov, "Unitarnye operatory v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy" [Unitary operators in spaces with indefinite metric], *Zametki NII mat. i mekh. Khar'kov. un-ta* [Notes Inst. Math. Mech. Kharkov Univ.], 1949, **21**, 79–86 (in Russian).
11. R. S. Ismagilov, "Opisanie unitarnykh predstavleniy gruppy Lorentsa v prostranstve s indefinitnoy metrikoy" [Description of unitary representations of the Lorentz group in a space with an indefinite metric], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1964, **158**, No. 2, 268–270 (in Russian).
12. R. S. Ismagilov, "Kol'tsa operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy" [Rings of operators in spaces with indefinite metric], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1966, **171**, No. 2, 269–271 (in Russian).
13. R. S. Ismagilov, "Unitarnye predstavleniya gruppy Lorentsa v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy" [Unitary representations of the Lorentz group in spaces with indefinite metric], *Izv. AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1966, **30**, No. 3, 497–522 (in Russian).

14. R. S. Ismagilov, “O zadache rasshireniya predstavleniy” [An the problem of extending representations], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1984, **35**, No. 1, 99–106 (in Russian).
15. R. S. Ismagilov, “O neprivodimosti predstavleniy gruppy tokov” [On irreducibility of representations of a group of currents], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1994, **28**, 21–30 (in Russian).
16. M. G. Kreyn, “Ob odnom primenenii printsipa nepodvizhnoy tochki v teorii lineynykh preobrazovaniy prostranstv s indefinitnoy metrikoy” [On one application of the fixed point principle in the theory of linear transformations of spaces with indefinite metric], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1950, **5**, No. 2, 180–190 (in Russian).
17. M. G. Kreyn, “Ob integral’nom predstavlenii nepreryvnoy ermitovo-indefinitnoy funktsii s konechnym chislom otritsatel’nykh kvadratov” [On integral representation of a continuous Hermitian-indefinite function with a finite number of negative squares], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1959, **125**, No. 1, 31–34 (in Russian).
18. V. I. Liberzon and V. S. Shul’man, “Operatorno-neprivodimye algebry operatorov v prostranstve Pontryagina Π_1” [Operator-irreducible operator algebras in the Pontryagin space Π_1], *Izv. AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1971, **35**, No. 5, 1159–1170 (in Russian).
19. V. I. Liberzon and V. S. Shul’man, “Nevyrozhdennye operatornye algebry v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy” [Nondegenerate operator algebras in spaces with indefinite metric], *Izv. AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1973, **37**, No. 3, 533–538 (in Russian).
20. S. N. Litvinov, “Bitsiklicheskie WJ*-algebry v prostranstve Pontryagina tipa Π_1” [Bicyclic WJ*-algebras in the Pontryagin space of type Π_1], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1992, **26**, No. 3, 46–54 (in Russian).
21. A. I. Loginov, “O kommutativnykh simmetrichnykh algebrakh operatorov v prostranstvakh Pontryagina” [On commutative symmetric operator algebras in Pontryagin spaces], *Izv. AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1969, **33**, No. 3, 559–569 (in Russian).
22. A. I. Loginov, “Polnye kommutativnye simmetrichnye operatornye algebry v prostranstve Pontryagina Π_1” [Complete commutative symmetric operator algebras in the Pontryagin space Π_1], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1971, **84**, No. 4, 575–582 (in Russian).
23. A. I. Loginov, “Odno obobshchenie teoremy Markova—Kakutani o nepodvizhnoy tochke” [One generalization of the Markov–Kakutani fixed point theorem], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1980, **14**, No. 2, 65–66 (in Russian).
24. A. I. Loginov and V. S. Shul’man, “Neprivodimye J-simmetrichnye algebry operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy” [Neprivodimye J-simmetrichnye algebry operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1978, **240**, No. 1, 21–23 (in Russian).
25. A. I. Loginov and V. S. Shul’man, “Vektornoznachnaya dvoystvennost’ dlya moduley nad banakhovymi algebrami” [Vector-valued duality for modules over Banach algebras], *Izv. AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1993, **57**, No. 4, 3–35 (in Russian).
26. V. I. Lomonosov, “Ob invariantnykh podprostranstvakh semeystva operatorov, kommutiruyushchikh s vpolne nepreryvnym” [On invariant subspaces of the family of operators commuting with a completely continuous one], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1973, **7**, No. 3, 55–56 (in Russian).
27. S. Sh. Masharipova and V. I. Chilin, “Funktsional’noe ischislenie v simmetrichnykh operatornykh algebrakh v prostranstve Pontryagina Π_1” [Functional calculus in symmetric operator algebras in the Pontryagin space Π_1], *Dokl. AN Uzbek. SSR* [Rep. Acad. Sci. Uzbek SSR], 1994, **14**, 10–12 (in Russian).
28. S. Sh. Masharipova and V. I. Chilin, “Teorema plotnosti Kaplanskogo dlya simmetrichnykh operatornykh algebr v Π_1” [Kaplansky’s density theorem for symmetric operator algebras in Π_1], *Uzbek. mat. zh.* [Uzbek Math. J.], 1996, **2**, 68–75 (in Russian).
29. M. A. Naymark, “O perestanovochnykh unitarnykh operatorakh v prostranstve Π_k” [On permutation unitary operators in the space Π_k], *Dokl AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1963, **149**, 1261–1263 (in Russian).
30. M. A. Naymark, “O kommutativnykh algebrakh operatorov v prostranstve Π_k” [On commutative algebras of operators in the space Π_k], *Dokl AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1965, **161**, No. 4, 767–770 (in Russian).
31. M. A. Naymark, “Ob unitarnykh predstavleniyakh razreshimykh grupp v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy” [On unitary representations of solvable groups in spaces with indefinite metric], *Izv. AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1963, **27**, 1181–1185 (in Russian).
32. M. A. Naymark, “O strukture unitarnykh predstavleniy lokal’no kompaktnykh grupp v prostranstvakh Pontryagina Π_1” [On the structure of unitary representations of locally compact groups in Pontryagin spaces Π_1], *Izv. AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1965, **29**, No. 4, 689–770 (in Russian).

33. M. A. Naymark, "O strukture unitarnykh predstavleniy lokal'no kompaktnykh grupp i simmetrichnykh predstavleniy v prostranstvakh Pontryagina Π_k" [On the structure of unitary representations of locally compact groups and symmetric representations in Pontryagin spaces Π_k], *Izv. AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1966, **30**, No. 5, 1111–1132 (in Russian).
34. M. A. Naymark and R. S. Ismagilov, "Predstavleniya grupp i algebr v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy" [Representations of groups and algebras in spaces with indefinite metric], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Mat. Mat. analiz* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Math. Anal.], 1969, **1968**, 73–105 (in Russian).
35. L. S. Pontryagin, "Ermitovy operatory v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy" [Hermitian operators in spaces with indefinite metric], *Izv. AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1944, **8**, 243–280 (in Russian).
36. S. L. Sobolev, "O dvizhenii simmetrichnogo volchka s polost'yu, napolnennoy zhidkost'yu" [On the motion of a symmetrical top with a cavity filled with fluid], *Zhurn. prikl. mekh. i tekhn. fiz.* [J. Appl. Mech. Tech. Phys.], 1949, No. 1, 55–60 (in Russian).
37. R. S. Phillips, "Rasshirenie dual'nykh podprostranstv, invariantnykh otnositel'no algebry" [The extension of dual subspaces invariant under an algebra], *Matematika* [Mathematics], 1964, **8**, No. 6, 81–108 (Russian translation).
38. R. S. Phillips, "Dissipativnye operatory i giperbolicheskie sistemy operatorov v chastnykh proizvodnykh" [Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations], *Matematika* [Mathematics], 1962, **6**, No. 4, 11–70 (Russian translation).
39. A. A. Shkalikov, "O sushchestvovanii invariantnykh podprostranstv u dissipativnykh operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy" [On existence of invariant subspaces for dissipative operators in spaces with indefinite metric], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2005, **248**, 294–303 (in Russian).
40. V. A. Shtraus, "Funktsional'noe predstavlenie algebry, porozhdennoy samosopryazhennym operatorom v prostranstve Pontryagina" [Functional representation of the algebra, generated by a self-adjoint operator in a Pontryagin space], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1986, **20**, No. 1, 91-92 (in Russian).
41. V. S. Shul'man, "Banakhovy simmetrichnye algebry operatorov v prostranstve tipa Π_1" [Banach symmetric operator algebras in a space of type Π_1], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1972, **89**, No. 2, 264–279 (in Russian).
42. V. S. Shul'man, "O predstavleniyakh C*-algebr v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy" [On representations of C*-algebras in spaces with indefinite metric], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1977, **22**, 583–592 (in Russian).
43. V. S. Shul'man, "Odna teorema o nepodvizhnoy tochke" [One fixed point theorem], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1979, **13**, No. 1, 88-89 (in Russian).
44. V. S. Shul'man, "O nepodvizhnykh tochkakh drobno-lineynykh otobrazheniy" [On fixed points of linear-fractional mappings], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1980, **14**, No. 2, 93–94 (in Russian).
45. V. S. Shul'man, "O modulyakh nad operatornymi algebrami" [On modules over operator algebras], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1983, **17**, No. 2, 94–95 (in Russian).
46. V. S. Shul'man, "Faktorizatsiya vpolne polozhitel'nykh kotsiklov i GNS-konstruktsiya predstavleniy v prostranstvakh Pontryagina" [Factorization of completely positive cocycles and the GNS-construction of representations in Pontryagin spaces], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1997, **31**, No. 3, 91–94 (in Russian).
47. O. Ya. Benderskii, S. N. Litvinov, and V. I. Chilin, "Description of commutative symmetric algebras of operators on Pontryagin space Π_1," *J. Operator Theory*, 1997, **37**, 201–222.
48. B. Blackadar and J. Cuntz, "Differential Banach algebra norms and smooth subalgebras of C*-algebras," *J. Operator Theory*, 1991, **26**, 255–282.
49. O. Bratteli and D. Robinson, "Unbounded derivations of C*-algebras, I," *Commun. Math. Phys.*, 1975, **42**, 253–268.
50. O. Bratteli and D. Robinson, "Unbounded derivations of C*-algebras, II," *Commun. Math. Phys.*, 1976, **46**, 11–30.
51. V. I. Chilin and S. Sh. Masharipova, "Functional calculus for the algebra of operators generated by a self-adjoint operator in Pontryagin's space Π_1," Proc. 8th Int. Conf. *Topological Algebras and Their Applications, 2014*, Walter de Gruyter, Berlin—Boston, 2018, pp. 55–72.
52. V. I. Chilin and S. Sh. Masharipova, "Functional calculus for the algebra of operators generated by a selfadjoint operator in Pontryagin's space Π_1. II. Exceptional case in the model of type 1," *Indian J. Math.*, 2016, **58**, 18–37.
53. J. Cuntz, "Locally C*-equivalent algebras," *J. Funct. Anal.*, 1976, **23**, 95–106.

54. I. Gohberg, P. Lancaster, and L. Rodman, *Indefinite Linear Algebra and Applications*, Birkhäuser, Basel, 2005.
55. A. Guichardet, "Sur la cohomologie des groupes topologiques," *Bull. Sci. Math.*, 1971, **95**, 161–176.
56. J. W. Helton, "Unitary operators on a space with an indefinite inner product," *J. Funct. Anal.*, 1970, **6**, 412–440.
57. J. W. Helton, "Operators unitary in an indefinite metric and linear fractional transformations," *Acta Sci. Math.*, 1971, **32**, 261–266.
58. P. E. Jorgensen and P. S. Muhly, "Selfadjoint extensions satisfying the Weyl operator commutation relations," *J. D'Anal. Math.*, 1980, **37**, 46–99.
59. E. Kissin, "Symmetric operator extensions of unbounded derivations of C*-algebras," *J. Funct. Anal.*, 1988, **81**, 38–53.
60. E. Kissin, "Dissipative implementations of *-derivationa of C*-algebras and representations in indefinite metric spaces," *J. London. Math. Soc. (2)*, 1991, **43**, 451–464.
61. E. Kissin, "Representational indices of derivations of C*-algebras and representations of *-algebras on Krein spaces," *J. Reine Angew Math.*, 1993, **439**, 71–92.
62. E. Kissin, "Semigroups of representational indices of derivations of C*-algebras," *J. Funct. Anal.*, 1994, **126**, 139–168.
63. E. Kissin, "Derivations of C*-algebras which contain all compact operators and representations of Q-subalgebras of these algebras on Π_k-spaces," *J. London. Math. Soc. (2)*, 1995, **51**, 161–174.
64. E. Kissin, "Derivations of C*-algebras and representations on deficiency spaces of skew-symmetric operators," *Proc. London Math. Soc. (3)*, 1998, **76**, No. 2, 476–496.
65. E. Kissin, A. I. Loginov, and V. S. Shulman, "Derivations of C*-algebras and almost Hermitian representations on Π_k-spaces," *Pacific J. Math.*, 1996, **174**, 411–430.
66. E. Kissin and V. S. Shulman, "Differential properties of some dense subalgebras of C*-algebras," *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 1994, **37**, 399–422.
67. E. Kissin and V. S. Shulman, *Representations on Krein Spaces and Derivations of C*-Algebras*, Longman, Harlow, 1997.
68. E. Kissin and V. S. Shulman, "Non-unitary representations of nilpotent groups, I: Cohomologies, extensions and neutral cocycles," *J. Funct. Anal.*, 2015, **269**, 2564–2610.
69. E. Kissin and V. S. Shulman, "Representations of nilpotent groups on spaces with indefinite metric," *Integral Equ. Operator Theory*, 2017, **87**, 81–116.
70. E. Kissin and V. S. Shulman, V. S. Turovskii, "Pontryagin—Krein theorem: Lomonosov's proof and relared results," In: *The Mathematical legacy of Victor Lomonosov. Operator theory*, De Gruyter, Berlin, 2020, pp. 231–250.
71. V. I. Lomonosov, "On stability of non-negative invariant subspaces," In: *New Results in Operator Theory and Its Applications: the Israel M. Glazman Memorial Volume*, Birkhäuser, Basel, 1997, pp. 186–189.
72. M. A. Naimark, "Kommutative algebren von operatoren im raume Π_1," *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 1964, **9**, No. 6, 499–528.
73. H. Nakazato, "Indefinite inner product spaces and derivations," *Math. Japonica*, 1990, **35**, 1119–1124.
74. M. Ostrovskii, V. S. Shulman, and L. Turowska, "Unitarizable representations and fixed points of groups of holomorphic transformations of operator balls," *J. Funct. Anal.*, 2009, **257**, 2476–2496.
75. M. Ostrovskii, V. S. Shulman, and L. Turowska, "Fixed points of holomorphic transformations of operator balls," *Q. J. Math.*, 2011, **62**, 173–187.
76. S. Ota, "Certain operator algebras induced by *-derivations in C*-algebras on an indefinite product space," *J. Funct. Anal.*, 1978, **30**, 238–244.
77. G. Pisier, *Similarity Problems and Completely Bounded Maps. Includes the Solution to «The Halmos Problem»*, Springer, Berlin, 2001.
78. K. Sakai, "On J-unitary representations of amenable groups," *Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ.*, 1977, **26**, 33–41.
79. K. Sakai, "On indecomposable unitary representations of Locally compact abelian groups in Π_n-spaces," *Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ.*, 1978, **27**, 1–20.
80. K. Sakai, "On quasi-positive definite functions and unitary representations of groups in Pontryagin spaces," *J. Math. Kyoto Univ.*, 1979, **19**, 71–90.
81. K. Sakai, "Some remarks on unitary representations of the Euclidean motion group in Π_n-spaces," *Sci. Rep. Kagoshima Univ.*, 1980, **29**, 13–26.
82. K. Sakai, "On indecomposable unitary representations of the 2-dimensional Euclidean motion group in fnite-dimensional indefinite inner product spaces," *Sci. Rep. Kagoshima Univ.*, 1980, **29**, 27–51.

83. E. Samei and M. Wiersma, “Quasi-Hermitian locally compact groups are amenable,” *Adv. Math.*, 2020, **359**, 106897.
84. Z. Sasvari, “On bounded functions with a finite number of negative squares,” *Monatsh. Math.*, 1985, **99**, 223–234.
85. J. T. Schwartz, “Subdiagonalization of operators in Hilbert space with compact imaginary part,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1962, **15**, 159–172.
86. I. Shafrir, “Operators in hyperbolic spaces,” *PhD Thesis*, Technion — Israel Institute of Technology, Haifa, 1990.
87. V. S. Shulman, “Quasivectors and Tomita—Takesaki theory for operator algebras on P_1-spaces,” *Rev. Math. Phys.*, 1997, **9**, No. 6, 749–783.
88. V. Strauss, “On the weakly closed algebra generated by a unitary operator in a Pontryagin space,” *Oper. Matrices*, 2018, **12**, No. 3, 837–853.
89. V. Strauss, “On a functional calculus for unitary operators in Pontryagin spaces,” *Oper. Matrices*, 2020, **14**, No. 3, 971–999.
90. W. Takahashi, “A convexity in metric spaces and non-expansive mappings. I,” *Kodai Math. Sem. Rep.*, 1970, **22**, 142–149.
91. Y. Tong, “Commutative J-von Neumann algebras on Pontryagin spaces,” *Chinese Ann. Math. Ser. A*, 1993, **14**, 429–436.
92. Y. Tong, “Two density theorems for sets of operators on Pontryagin spaces,” *Acta Math. Sinica*, 1994, **37**, No. 1, 1–11.
93. Y. Tong, “Uniformly closed symmetric operator algebras on Pontryagin spaces,” *Chinese Ann. Math. Ser. A*, 1994, **15**, 603–611.
94. Y. Tong, “A density theorem on the operator algebras in Pontryagin spaces,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, **268**, 143–156.
95. A. Van Daele, “A framework to study commutational problems,” *Bull. Soc. Math. France*, 1978, **106**, 289–309.
96. H. Yang, “On the symmetry of ideal in operator algebras on Pontryagin spaces,” *Acta Math. Sinica*, 2004, **47**, 915–920.
97. H. Yang, “Structure of ideals of operator algbras on Pontryagin spaces,” *Chinese Ann. Math. Ser. A*, 2007, **28**, No. 1, 103–110.
98. H. Yang, “The operator algebras of class I on the Pontryagin spaces,” *J. Systems Sci. Math. Sci.*, 2013, **33**, No. 2, 993–1006.
99. H. Yang, “Classification and general forms of operator algebras on Pontryagin space,” *Acta Math. Sinica*, 2015, **58**, No. 3, 401–408.
100. H. Yang, Y. Fang, and S. Liu, “General form of operator algebras on Pontryagin spaces with neutral invariant subspaces,” *Linear Algebra Appl.*, 2007, **425**, 184–209.
101. H. Yang, Y. Fang, and S. Liu, “Invariant subspaces of JC*-algebras on Π_1-spaces,” *J. Systems Sci. Math. Sci.*, 2008, **28**, No. 10, 1268–1274.

E. V. Kissin
STORM/SCDM, London Metropolitan University, London, UK
E-mail: e.kissin@londonmet.ac.uk

V. S. Shulman
Vologda State University, Vologda, Russia
E-mail: victor.shulman80@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 2 (2021). С. 316–323

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-316-323 УДК 517.972.5

О ПОСТРОЕНИИ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2021 г. **И. А. КОЛЕСНИКОВА**

Аннотация. В данной работе получены необходимые и достаточные условия существования вариационных принципов для заданного дифференциально-разностного операторного уравнения первого порядка со специальным видом линейного оператора $P_\lambda(t)$, зависящего от t, и нелинейного оператора Q. При выполнении соответствующих условий построен функционал. Данные условия получены благодаря хорошо известному критерию потенциальности. На примерах показано, как строится обратная задача вариационного исчисления для заданных дифференциально-разностных операторов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение 316
2. Постановка задачи 318
3. Условия потенциальности и структура оператора $N(u)$ уравнения (2.1) в случае его вариационности 318
Список литературы 322

1. Введение

В математической физике под вариационными методами принято понимать те методы, которые позволяют свести задачу интегрирования дифференциального уравнения к эквивалентной вариационной задаче.

Разработанные ранее методы в основном распространялись на уравнения, рассматриваемые в некотором гильбертовом пространстве. Было установлено, что для любого разрешимого линейного уравнения в гильбертовом пространстве может быть построена вариационная задача отыскания точки минимума некоторого квадратичного функционала такого, что исходное уравнение вместе с граничными условиями будет эквивалентно уравнению Эйлера для этого функционала.

Вариационная задача для такого уравнения есть задача минимизации квадратичного функционала, содержащего производные от неизвестной функции более низкого порядка, чем в заданном уравнении. Данный функционал ограничен снизу в некотором гильбертовом пространстве, и множество критических точек функционала совпадает с множеством решений исследуемого уравнения.

Применяя вариационные методы для исследования различных краевых задач, можно, в частности, добиться того, что исследуемые уравнения будут представлены в виде уравнений Эйлера—Лагранжа. В работе [6] показано, что такое представление не всегда возможно.

В течение длительного времени вариационные принципы главным образом использовались для обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных с так называемыми потенциальными операторами (см. [6]).

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5–100».

Возникает интерес получить аналогичные результаты для дифференциально-разностных уравнений. Под дифференциально-разностным уравнением понимается (см. [1]) уравнение относительно неизвестной функции и ее производной вида

$$F[t, u(t), u(t-\omega_1), \ldots, u(t-\omega_l), u^{'}(t), u^{'}(t-\omega_1), \ldots, u^{'}(t-\omega_l), u^{(n)}(t), u^{(n)}(t-\omega_1), \ldots, u^{(n)}(t-\omega_l)] = 0,$$

где F — заданная функция, зависящая от $1 + (l+1)(n+1)$ переменных.

Введем необходимые определения.

Рассматривается операторное уравнение $N(u) = 0$, $u \in D(N)$, где $D(N)$ — область определения оператора $N : D(N) \subseteq U \to V$, а U, V — нормированные линейные пространства над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Заметим, что если для некоторого $u \in D(N)$ и $h \in U$ существует $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{N(u+\varepsilon h)-N(u)}{\varepsilon} = \delta N(u,h)$, то он называется *вариацией Гато* оператора N в точке u.

В формуле выражение $N(u + \varepsilon h)$ определено при таких ε, что $(u + \varepsilon h) \in D(N)$.

Вариация заданного оператора $\delta N(u,h)$ — выражение, однородное по $h : \delta N(u, \lambda h) = \lambda \delta N(u,h)$.

Определение 1.1. Если при фиксированном $u \in D(N)$ вариация $\delta N(u,h)$ является линейным по h оператором, то говорят, что оператор N *дифференцируем в точке u в смысле Гато*.

Определение 1.2. Выражение $\delta N(u,h)$ называется *дифференциалом Гато* и обозначается через $DN(u,h)$.

Определение 1.3. В этом случае используют также запись $DN(u,h) = N'_u h$ и говорят, что N'_u есть *производная Гато оператора N в точке u*.

Если N — линейный оператор, то $N'_u h = Nh$.

В дальнейшем будем предполагать, что для любого рассматриваемого оператора $N : D(N) \subset U \to V$ в каждой точке $u \in D(N)$ существует N'_u. Область определения $D(N'_u)$ состоит из таких элементов $h \in U$, что $(u + \varepsilon h) \in D(N)$ для любого достаточно малого значения ε. Элемент $h \in D(N'_u)$ будем называть *допустимым* элементом. Заметим, что в общем случае $D(N) \neq D(N'_u)$.

Производную Гато удобно искать по следующей формуле: $N^{'}_u h = \frac{d}{d\varepsilon} \left.\{N(u + \varepsilon h)\}\right|_{\varepsilon=0}$.

Определение 1.4. Оператор $N : D(N) \to V$ называется *потенциальным* (см. [6]) на соответствующей области определения $D(N)$ относительно заданной билинейной формы $\Phi(\cdot,\cdot) : V \times U \to \mathbb{R}$, если существует функционал $F_N : D(F_N) = D(N) \to \mathbb{R}$ такой, что $\delta F_N[u,h] = \Phi(N(u),h)$ $\forall u \in D(N)$, $\forall h \in D(N'_u)$.

В этом случае мы можем говорить о том, что данное уравнение допускает *прямую вариационную формулировку*. Задача построения функционала F_N по заданному оператору N называется *классической обратной задачей вариационного исчисления* (см. [6]).

Отметим, что до недавнего времени практически не ставилась обратная задача вариационного исчисления для дифференциально-разностных уравнений (см. [3, 4, 7, 8]). Существует теоретический и практический интерес в распространении полученных ранее результатов, на дифференциально-разностные уравнения (см. [2, 5, 9]).

Предполагается, что $D(N)$ является выпуклым множеством, на котором выполняется критерий потенциальности (см. [6]):

$$\Phi(N'_u h, g) = \Phi(h, N'_u g) \qquad \forall u \in D(N), \qquad \forall h, g \in D(N'_u). \tag{1.1}$$

При этом условии потенциал F_N может быть найден по формуле

$$F_N[u] = \int_0^1 \Phi(N(u_0 + \lambda(u - u_0)), u - u_0) d\lambda + \mathrm{const}, \tag{1.2}$$

где u_0 — фиксированный элемент из множества $D(N)$.

Определение 1.5. Функционал F_N называется *потенциалом* для оператора N; в свою очередь, оператор N называется *градиентом* функционала F_N. Записывают $N = \operatorname{grad}_\Phi F_N$.

2. Постановка задачи

Рассмотрим следующее дифференциально-разностное операторное уравнение:

$$N(u) \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} \Big\{ P_\lambda(t) u_t(t+\lambda\tau) + Q_\lambda(t, u(t+\lambda\tau)) \Big\} = 0, \qquad u \in D(N), t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Здесь $P_\lambda : U_1 \to V_1$ $(\lambda = -1, 0, 1)$ — линейные операторы, зависящие от t; $Q_\lambda : [t_0 - \tau, t_1 + \tau] \times U_1 \to V_1$ — вообще говоря, нелинейные операторы; $N : D(N) \subseteq U \to V = C([t_0, t_1]; V_1)$; $U = C^1([t_0 - \tau, t_1 + \tau]; U_1), V$, где U_1, V_1 — действительные нормированные линейные пространства, $U_1 \subseteq V_1$.

Будем предполагать, что при любом значении $t \in (t_0, t_1)$ и $u \in C^1([t_0, t_1]; U_1)$ функция $P_\lambda(t) u_t(t+\lambda\tau)$ со значением в V_1 непрерывно дифференцируема на (t_0, t_1).

Область определения $D(N)$ задается следующим образом: $D(N) = \{u \in U : u(t) = \varphi_1(t),$ $t \in [t_0 - \tau, t_0],\ u(t) = \varphi_2(t),\ t \in [t_1, t_1 + \tau]\}$, где φ_i $(i = 1, 2)$ — заданные функции.

Под решением задачи (2.1) подразумевается функция $u \in D(N)$, удовлетворяющая следующему уравнению:

$$N(u) \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} \Big\{ P_\lambda(t) u_t(t+\lambda\tau) + Q_\lambda(t, u(t+\lambda\tau)) \Big\} = 0 \qquad \forall t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}.$$

Зададим билинейную форму вида

$$\Phi(\cdot, \cdot) \equiv \int_{t_0}^{t_1} < \cdot, \cdot > dt : V \times U \to \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

где непрерывное билинейное отображение $< \cdot, \cdot >$ удовлетворяет условиям: $< v_1, v_2 > = < v_2, v_1 >$ $\forall v_1, v_2 \in V_1$; $D_t < v, g > = < D_t v, g > + < v, D_t g >$ $\forall v, g \in C^1([t_0, t_1]; U_1)$.

Наша цель — определить структуру операторов P_λ и Q_λ $(\lambda = -1, 0, 1)$, благодаря которым для (2.1) можно решить обратную задачу вариационного исчисления относительно заданной билинейной формы (2.2).

Оператор $D_t = d/dt$ является кососимметричным оператором на множестве

$$D(N'_u) = \{h \in U = C^1([t_0 - \tau, t_1 + \tau]; U_1) : h(t) = 0,\ t \in [t_0 - \tau, t_0] \cup [t_1, t_1 + \tau]\},$$

а именно: $\Phi(D_t h_1, h_2) = -\Phi(h_1, D_t h_2)$ $\forall h_1, h_2 \in D(N'_u)$.

Будем предполагать, что при любом значении $t \in (t_0, t_1)$ и $u \in U_1$ функция P_λ со значениями в V_1 непрерывно дифференцируема на (t_0, t_1).

3. Условия потенциальности и структура оператора $N(u)$ уравнения (2.1) в случае его вариационности

Определим оператор K^* как оператор, сопряженный к оператору K.

Теорема 3.1. *Для существования прямой вариационной формулировки для оператора $N(u)$ уравнения (2.1), рассматриваемого на области $D(N)$, относительно билинейной формы (2.2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия на множестве $D(N'_u)$:*

$$P_{-\lambda} + P^*_\lambda|_{t \to t-\lambda\tau} = 0, \qquad \frac{\partial P^*_\lambda}{\partial t}\Big|_{t \to t-\lambda\tau} + (Q_{-\lambda})'_{u(t-\lambda\tau)} - ((Q_\lambda)'_{u(t+\lambda\tau)})^*\Big|_{t \to t-\lambda\tau} = 0 \tag{3.1}$$

при $\lambda = -1, 0, 1$, $\forall u \in D(N), \forall t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$.

Доказательство. Найдем производную Гато заданного оператора. С учетом формулы (2.1) будем иметь

$$N'_u h = \sum_{\lambda=-1}^{1} P_\lambda h_t(t+\lambda\tau) + \sum_{\lambda=-1}^{1} ((Q_\lambda)'_{u(t+\lambda\tau)}) h(t+\lambda\tau)$$

при $\lambda = -1, 0, 1$, $\forall u \in D(N), \forall t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$. Тогда критерий потенциальности (1.1) принимает следующий вид:

$$\int_{t_0}^{t_1} < \sum_{\lambda=-1}^{1} \{P_\lambda h_t(t+\lambda\tau) + ((Q_\lambda)'_{u(t+\lambda\tau)})h(t+\lambda\tau)\}, g(t) > dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} < \sum_{\lambda=-1}^{1} \{P_\lambda g_t(t+\lambda\tau)) + ((Q_\lambda)'_{u(t+\lambda\tau)})g(t+\lambda\tau))\}, h(t) > dt$$

при $\lambda = -1, 0, 1, \forall t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}, \forall u \in D(N)$, $\forall g, h \in D(N'_u)$, или

$$\int_{t_0}^{t_1} \Bigg[< \sum_{\lambda=-1}^{1} \{P_\lambda h_t(t+\lambda\tau) + ((Q_\lambda)'_{u(t+\lambda\tau)})h(t+\lambda\tau)\}, g(t) > -$$

$$- < \sum_{\lambda=-1}^{1} \big(P_\lambda g_t(t+\lambda\tau) + ((Q_\lambda)'_{u(t+\lambda\tau)})g(t+\lambda\tau)\big), h(t) > \Bigg] dt = 0 \qquad (3.2)$$

при $\lambda = -1, 0, 1, \forall t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}, \forall u \in D(N)$, $\forall g, h \in D(N'_u)$.

Учитывая условие кососимметричности $D_t^* = -D_t$ на множестве $D(N'_u)$, из равенства (3.2) получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \Bigg[< \sum_{\lambda=-1}^{1} \Big(P_\lambda D_t + ((Q_\lambda)'_{u(t+\lambda\tau)})\Big) h(t+\lambda\tau), g(t) > -$$

$$- \sum_{\lambda=-1}^{1} < \Big[-D_t(P_\lambda^* h(t)) + ((Q_\lambda)'_{u(t+\lambda\tau)})^* h(t) \Big], g(t+\lambda\tau) > \Bigg] dt = 0$$

при $\lambda = -1, 0, 1, \forall t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, $\forall u \in D(N)$, $\forall g, h \in D(N'_u)$, или, с другой стороны, с учетом сдвигов переменной t на заданной области определения $D(N)$ имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \Bigg[< \sum_{\lambda=-1}^{1} \Big(P_{-\lambda} D_t + ((Q_{-\lambda})'_{u(t-\lambda\tau)})\Big) h(t-\lambda\tau), g(t) > -$$

$$- < \sum_{\lambda=-1}^{1} \left(-\frac{\partial P_\lambda^*}{\partial t} - P_\lambda^* D_t + (Q_\lambda)'^{\,*}_u \right)\Bigg|_{t \to t-\lambda\tau} h(t-\lambda\tau), g(t) > \Bigg] dt = 0$$

при $\lambda = -1, 0, 1$, $\forall t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, $\forall u \in D(N)$, $\forall g, h \in D(N'_u)$.

Таким образом, условие (3.2) может быть теперь записано в следующем виде:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{\lambda=-1}^{1} < \Big(P_{-\lambda} D_t + (Q_{-\lambda})'_{u(t-\lambda\tau)}\Big) h(t-\lambda\tau) - \left(-\frac{\partial P_\lambda^*}{\partial t} - P_\lambda^* D_t + (Q_\lambda)'^{\,*}_u \right)\Bigg|_{t \to t-\lambda\tau} h(t-\lambda\tau), g(t) > dt = 0$$

при $\lambda = -1, 0, 1$, $\forall t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, $\forall u \in D(N)$, $\forall g, h \in D(N'_u)$. Это равенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\lambda=-1}^{1} \left[(P_{-\lambda} + P_\lambda^*|_{t\to t-\lambda\tau})\, D_t + \frac{\partial P_\lambda^*}{\partial t}|_{t\to t-\lambda\tau} + (Q_{-\lambda})'_{u(t-\lambda\tau)} - (Q_\lambda)'_{u(t+\lambda\tau)}{}^*|_{t\to t-\lambda\tau} \right] \cdot h(t-\lambda\tau) = 0$$

при $\lambda = -1, 0, 1$, $\forall t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, $\forall u \in D(N)$, $\forall h \in D(N'_u)$.

Данное равенство имеет место для любого $h \neq 0$, следовательно, выполняются условия

$$P_{-\lambda} + P_\lambda^*|_{t\to t-\lambda\tau} = 0, \qquad \frac{\partial P_\lambda^*}{\partial t}\Big|_{t\to t-\lambda\tau} + (Q_{-\lambda})'_{u(t-\lambda\tau)} - ((Q_\lambda)'_{u(t+\lambda\tau)})^*\Big|_{t\to t-\lambda\tau} = 0,$$

при $\lambda = -1, 0, 1$, $\forall u \in D(N)$, $\forall t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, $\forall h \in D(N'_u)$. $\square$

Таким образом, необходимо и достаточно выполнения условий (3.1) теоремы 3.1.

Пример 3.1. В качестве примера рассмотрим дифференциально-разностный оператор

$$N_1(u) \equiv u_t(t+\tau) - u_t(t-\tau) = 0, \quad u \in D(N), \quad t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}, \quad t_1 - t_0 > 2\tau.$$

Зададим область определения: $D(N_1) = \{u \in U = C^1([t_0-\tau, t_1+\tau]) : u(t) = \varphi_1(t),\ t \in [t_0-\tau, t_0],$ $u(t) = \varphi_2(t),\ t \in [t_1, t_1+\tau]\}$, где φ_i $(i = 1, 2)$ — заданные функции. Введем билинейную форму

$$\Phi(v, g) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)g(t)dt \qquad v \in V, g \in U.$$

Условия теоремы выполнены: $P_\lambda = I$, $P_{-\lambda} = -I$, $P_0 = 0$, $Q_\lambda = 0$ $\forall \lambda = -1, 0, 1$. Следовательно, данный оператор $N_1(u)$ является потенциальным на соответствующей области определения $D(N_1)$ относительно заданной билинейной формы $\Phi(v, g)$. Соответствующий функционал находим по формуле (1.2), он имеет следующий вид:

$$F_{N_1}[u] = \int_{t_0}^{t_1} u_t(t)u(t-\tau)dt.$$

Полученный функционал $F_{N_1}[u]$ допускает построение вариационного принципа.

Пример 3.2. Рассмотрим дифференциально-разностный оператор

$$N_2(u) \equiv au_t(t+\tau) - au_t(t-\tau) + bu(t+\tau) + bu(t-\tau) = 0,$$

$u \in D(N)$, $t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, $t_1 - t_0 > 2\tau$. Зададим область определения: $D(N_2) = \{u \in U = C^1([t_0-\tau, t_1+\tau]) : u(t) = \varphi_1(t),\ t \in [t_0-\tau, t_0],\ u(t) = \varphi_2(t),\ t \in [t_1, t_1+\tau]\}$, где φ_i $(i = 1, 2)$ — заданные функции. Введем билинейную форму:

$$\Phi(v, g) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)g(t)dt \qquad v \in V, g \in U.$$

Условия теоремы выполнены: $P_\lambda = a$, $P_{-\lambda} = -a$, $P_0 = 0$, $Q_\lambda = bu(t+\lambda\tau)$ $\forall \lambda = -1, 1$, $Q_0 = 0$. Данный оператор $N_2(u)$ является потенциальным на области определения $D(N_2)$ относительно заданной билинейной формы $\Phi(v, g)$. Функционал находим по формуле (1.2):

$$F_{N_2}[u] = \int_{t_0}^{t_1} -au(t)u_t(t-\tau) + bu(t)u(t-\tau)dt.$$

Полученный функционал $F_{N_2}[u]$ допускает построение вариационного принципа. Оператор $N_2(u)$ есть градиент функционала $F_{N_2}[u]$.

Теорема 3.2. *Условия* (3.1) *выполняются тогда и только тогда, когда уравнение* (2.1) *имеет следующий вид*:

$$N(u) \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} (R^*_\lambda|_{t \to t-\lambda\tau} - R_{-\lambda})u_t(t-\lambda\tau) + \left(\operatorname{grad}_\Phi B[u] - \sum_{\lambda=-1}^{1} \frac{\partial R_\lambda}{\partial t} u(t+\lambda\tau)\right) = 0,$$

при $\lambda = -1, 0, 1$, $\forall u \in D(N)$, $t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$. *Операторы* R_λ *и* $B[u]$ *могут быть найдены по формулам*

$$\Phi(R_\lambda u, u_t) = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 < -P_\lambda(t)(u-u_0), \frac{\partial \tilde{u}_\mu}{\partial t} > d\mu dt,$$

$$B[u] = \int_0^1 < Q(t, \tilde{u}_\mu(t+\lambda\tau)) + \mu \frac{\partial P^*_\lambda}{\partial t}(u-u_0), u-u_0 > d\mu,$$

где $\tilde{u}_\mu = u_0 + \mu(u-u_0), u_0$ — *произвольный фиксированный элемент из* $D(N)$.

Доказательство. Пусть $D^*_t = -D_t$ на множестве определения $D(N'_u)$, и условия (3.1) выполняются тогда и только тогда, когда оператор (2.1) является потенциальным на заданной области определения $D(N) = \{u \in U : u(t) = \varphi_1(t),\ t \in [t_0-\tau, t_0],\ u(t) = \varphi_2(t),\ t \in [t_1, t_1+\tau]\}$, где φ_i $(i = 1, 2)$ — заданные функции, относительно заданной билинейной формы (2.2).

Рассмотрим следующий функционал:

$$F_N[u] = \int_{t_0}^{t_1} \left[< \sum_{\lambda=-1}^{1} R_\lambda(t) u(t+\lambda\tau), u_t(t) > + B[u] \right] dt + F_N[u_0], \tag{3.3}$$
$$\lambda = -1, 0, 1, \forall u \in D(N), \quad t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}.$$

Легко проверить, что

$$\delta F_N[u,h] = \int_{t_0}^{t_1} < \sum_{\lambda=-1}^{1} R_\lambda h(t+\lambda\tau), u_t(t) > + < \sum_{\lambda=-1}^{1} R_\lambda u(t+\lambda\tau), h_t(t) > +$$
$$+ < \operatorname{grad}_\Phi B[u], h(t) > dt =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} < \sum_{\lambda=-1}^{1} R^*_\lambda|_{t\to t-\lambda\tau} u_t(t-\lambda\tau), h(t) > - < \sum_{\lambda=-1}^{1} D_t \left(R_\lambda u(t+\lambda\tau) \right), h(t) > +$$
$$+ < \operatorname{grad}_\Phi B[u], h(t) > dt =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} < \sum_{\lambda=-1}^{1} R^*_\lambda|_{t\to t-\lambda\tau} u_t(t-\lambda\tau), h(t) > - < \sum_{\lambda=-1}^{1} \frac{\partial R_\lambda}{\partial t} u(t+\lambda\tau), h(t) > -$$
$$- < \sum_{\lambda=-1}^{1} R_{-\lambda} u_t(t-\lambda\tau), h(t) > + < \operatorname{grad}_\Phi B[u], h > dt =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} < \sum_{\lambda=-1}^{1} (R^*_\lambda|_{t\to t-\lambda\tau} - R_{-\lambda}) u_t(t-\lambda\tau) + (\operatorname{grad}_\Phi B[u] -$$
$$- \sum_{\lambda=-1}^{1} \frac{\partial R_\lambda}{\partial t} u(t+\lambda\tau)), h(t) > dt = \int_{t_0}^{t_1} < N(u), h > dt,$$

где $\lambda = -1, 0, 1$, $t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, $\forall u \in D(N)$, $\forall h \in D(N'_u)$. Тогда получаем, что функционал $F_N[u]$(3.3) является потенциалом оператора $N(u)$ (2.1).

Пусть $D^*_t = -D_t$ на области $D(N'_u)$, тогда

$$P_{-\lambda}(t) = R^*_\lambda|_{t\to t-\lambda\tau} - R_{-\lambda}, \qquad \sum_{\lambda=-1}^{1} Q_\lambda(t, u(t+\lambda\tau)) = - \sum_{\lambda=-1}^{1} \frac{\partial R_\lambda}{\partial t} u(t+\lambda\tau) + \operatorname{grad}_\Phi B[u]$$

при $\lambda = -1, 0, 1$, $t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, $\forall u \in D(N)$. □

Данная теорема показывает структуру заданного эволюционного дифференциально-разностного оператора, который допускает решение обратной задачи вариационного исчисления.

Замечание 3.1. Если $0 \in D(N)$, то операторы R_λ могут быть найдены по формуле

$$\Phi(R_\lambda u, u_t) = \int_0^1 < -\mu P_\lambda(t)(u), u_t > d\mu.$$

В случае, когда билинейное отображение задается формулой вида (2.2), получаем

$$R_\lambda u = - \int_0^1 \sum_{\lambda=-1}^{1} \mu P_{1\lambda}(t)(u) d\mu,$$

или $R_\lambda = -\frac{1}{2} P_{1\lambda}$.

Пример 3.3. Рассмотрим следующий дифференциально-разностный оператор:

$$N_3(u) \equiv a u_t(t+\tau) - a u_t(t-\tau) + e^{u(t+\tau)} + e^{u(t-\tau)} = 0,$$

где $t \in (t_0, t_1)$, $t_1 - t_0 > 2\tau$. Область определения задается в следующем виде: $D(N_3) = \{u \in C^2_t([t_0-\tau, t_1+\tau]) : u(t) = \varphi_1(t),\ t \in E_1 = [t_0-\tau, t_0],\ u(t) = \varphi_2(t),\ t \in E_2 = [t_1, t_1+\tau]\}$, где $\varphi_i \in C(E_i)$ $(i = 0, 1)$ — заданные функции.

Мы исследуем существование вариационного принципа для $N_3(u)$ относительно заданной билинейной формы (2.2). Оператор $N_3(u)$ является потенциальным на области определения $D(N_3)$ относительно этой билинейной формы. Другими словами, существует вариационный принцип для оператора $N_3(u)$.

Функционал находим по формуле (1.2), он будет иметь вид

$$F_{N_3}[u] = \int_{t_0}^{t_1} \frac{a}{2}\{(u_t(t)u(t-\tau) - u(t)u_t(t-\tau)\} + (e^{u(t)} - 1)\frac{u(t-\tau)+u(t+\tau)}{u(t)}dt,$$

$$t \in (t_0, t_1) \subset \mathbb{R}, \quad \forall u \in D(N).$$

Другими словами, оператор $N_3[u]$ допускает прямую вариационную формулировку.

Полученный функционал $F_{N_3}[u]$ является потенциалом для оператора $N_3[u]$; в свою очередь, оператор $N_3[u]$ есть градиент функционала $F_{N_3}[u]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.
2. *Каменский Г. А.* Вариационные и краевые задачи с отклоняющимся аргументом// Дифф. уравн. — 1970. — *69*, № 8. — С. 1349–1358.
3. *Попов А. М.* Условия потенциальности дифференциально-разностных уравнений// Дифф. уравн. — 1998. — *34*, № 3. — С. 422–424.
4. *Савчин В. М.* Условия потенциальности Гельмгольца для ДУЧП с отклоняющимися аргументами// Тез. докл. XXXII научной конф. ф-та физ.-мат. и естеств. наук. — М.: РУДН, 1994. — С. 25.
5. *Èl'sgol'c L. È.* Qualitative methods in mathematical analysis. — Am. Math. Soc., 1964.
6. *Filippov V. M., Savchin V. M., Shorokhov S. G.* Variational principles for nonpotential operators// J. Math. Sci. — 1994. — *68*, № 3. — С. 275–398.
7. *Kolesnikova I. A., Popov A. M., Savchin V. M.* On variational formulations for functional differential equations// J. Funct. Spaces Appl. — 2007. — *5*, № 1. — С. 89–101.
8. *Savchin V. M.* An operator approach to Birkhoff's equation// Вестн. РУДН. Сер. Мат. — 1995. — *2*, № 2. — С. 111–123.
9. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Bäsel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

И. А. Колесникова
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: kolesnikova-ia@rudn.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-316-323 UDC 517.972.5

On the Construction of a Variational Principle for a Certain Class of Differential-Difference Operator Equations

© 2021 **I. A. Kolesnikova**

Abstract. In this paper, we obtain necessary and sufficient conditions for the existence of variational principles for a given first-order differential-difference operator equation with a special form of the linear operator $P_\lambda(t)$ depending on t and the nonlinear operator Q. Under the corresponding conditions the functional is constructed. These conditions are obtained thanks to the well-known criterion of potentiality. Examples show how the inverse problem of the calculus of variations is constructed for given differential-difference operators.

REFERENCES

1. R. Bellman and K. L. Cooke, *Differentsial'no-raznostnye uravneniya* [Differential-Difference Equations], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
2. G. A. Kamenskii, "Variatsionnye i kraevye zadachi s otklonyayushchimsya argumentom" [Variational and boundary-value problems with deviating argument], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1970, **69**, No. 8, 1349–1358 (in Russian).
3. A. M. Popov, "Usloviya potentsial'nosti differentsial'no-raznostnykh uravneniy" [Potentiality conditions for differential-difference equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1998, **34**, No. 3, 422–424 (in Russian).
4. V. M. Savchin, "Usloviya potentsial'nosti Gel'mgol'tsa dlya DUChP s otklonyayushchimisya argumentami" [Helmholtz potentiality conditions for PDEs with deviating arguments], *Abstracts XXXII Sci. Conf. Fac. Phys.-Math. Nat. Sci.*, PFUR, Moscow, 1994, pp. 25 (in Russian).
5. L. È. Èl'sgol'c, *Qualitative Methods in Mathematical Analysis*, Am. Math. Soc., 1964.
6. V. M. Filippov, V. M. Savchin, and S. G. Shorokhov, "Variational principles for nonpotential operators," *J. Math. Sci.*, 1994, **68**, No. 3, 275–398.
7. I. A. Kolesnikova, A. M. Popov, and V. M. Savchin, "On variational formulations for functional differential equations," *J. Funct. Spaces Appl.*, 2007, **5**, No. 1, 89–101.
8. V. M. Savchin, "An operator approach to Birkhoff's equation," *Vestn. RUDN. Ser. Mat.*, 1995, **2**, No. 2, 111–123.
9. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Bäsel—Boston—Berlin, 1997.

I. A. Kolesnikova
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: kolesnikova-ia@rudn.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 2 (2021). С. 324–348

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-324-348 УДК 519.21+517.986.7+517.982.4

УРАВНЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПРОЦЕССАМИ: ПОЛУГРУППОВОЙ ПОДХОД И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

© 2021 г. **И. В. МЕЛЬНИКОВА, У. А. АЛЕКСЕЕВА, В. А. БОВКУН**

Аннотация. Работа посвящена интегродифференциальным уравнениям, связанным со случайными процессами. Изучается связь между дифференциальными уравнениями со случайными возмущениями — стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ) — и детерминированными уравнениями для вероятностных характеристик процессов, определяемых случайными возмущениями. Полученные детерминированные псевдодифференциальные уравнения исследуются полугрупповыми методами и методами преобразования Фурье.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Уравнения, связанные со случайными процессами. Способы перехода от случайного процесса и определяющего его СДУ к детерминированным уравнениям для вероятностных характеристик . . . 326
2. Полугрупповая классификация абстрактной задачи Коши: сильно непрерывные полугруппы, интегрированные полугруппы, R-полугруппы . . . 331
3. Полугруппы, порождаемые случайными процессами . . . 333
4. Задачи, связанные со случайными процессами, в полугрупповой классификации и классификации Гельфанда—Шилова. Схема сравнения . . . 342
Список литературы . . . 345

Введение

Широкий класс процессов, возникающих в различных областях естествознания, экономики и социальных явлений, математически можно описать с помощью дифференциальных уравнений со случайными возмущениями — стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). В последнее время большой интерес к проблемам финансовой математики: управление рисками, вычисление стоимости бондов, пакетов акций и деривативов разного рода — привел к значительным продвижениям в этой области (см., например, [18, 20, 37]).

Наиболее изученным является класс СДУ, источником случайности в которых служит винеровский процесс. Решения таких уравнений (нормальные диффузионные процессы), в силу непрерывности траекторий винеровского процесса, также обладают непрерывными траекториями. Поэтому моделирование в рамках уравнений диффузионного типа является наиболее подходящим при описании процессов, не имеющих скачков. Моделирование на основе процессов Леви и более общих процессов типа Леви позволяет изучать особенности поведения непрерывных и скачкообразных процессов. При этом, как в приложениях, так и в фундаментальной науке, зачастую стоит задача изучения не самого случайного процесса, задаваемого набором свойств или СДУ, а его вероятностных характеристик. Изучение связи между стохастическими уравнениями и детерминированными

Работа выполнена при финансовой поддержке постановления № 211 Правительства Российской Федерации (контракт № 02.A03.21.0006).

уравнениями для вероятностных характеристик и, как следствие, связи между свойствами решений этих уравнений является одним из основных направлений стохастического анализа.

В настоящей работе мы получаем и исследуем уравнения для вероятностных характеристик, определяемых стохастическими уравнениями, в которых источником случайности является процесс Леви. Показываем, что в отличие от уравнений для вероятностных характеристик, определяемых винеровскими процессами и являющихся УрЧП параболического типа, уравнения, определяемые процессами Леви и более общими марковскими процессами, являются в общем случае псевдодифференциальными.

Работа состоит из четырёх разделов. В разделе 1 даются ответы на вопросы: что следует понимать под СДУ, источником случайности в котором является процесс Леви; каковы условия существования его решения. Далее в этом разделе вводится важный объект нашего исследования — псевдодифференциальные уравнения, связанные со стохастическими процессами. С помощью двух подходов мы демонстрируем, каким образом может быть осуществлён переход от свойств процесса или стохастических дифференциальных уравнений к детерминированным уравнениям для характеристик процесса. Здесь на простых примерах видно стохастическое происхождение специфических псевдодифференциальных операторов, которые, как мы покажем в разделе 3, являются генераторами полугрупп, связанных с процессами Леви и процессами типа Леви. На базе первого подхода рассматриваем пример уравнения для конкретной вероятностной характеристики $p = p(0, x; t, y)$ — плотности переходной вероятности процесса X. Этот пример позволил продемонстрировать возможность применения обобщённых производных для преодоления сложности с трактовкой получаемых интегродифференциальных уравнений для функции p. На базе второго подхода выводим интегродифференциальное (псевдодифференциальное) уравнение для вероятностных характеристик вида $v(t, x) = \mathbb{E}^{t,x}[f(X(T))]$, где $X = \{X(t),\, t \in [0; T]\}$ — случайный процесс, являющийся решением СДУ.

В разделе 2, прежде чем переходить к полугрупповому подходу в изучении свойств стохастических процессов и их вероятностных характеристик через свойства переходных полугрупп, определяемых случайными процессами, мы даём краткий обзор современной полугрупповой классификации, основанный на спектральной технике генераторов. Начинаем с генераторов классических сильно непрерывных полугрупп Миядеры—Хилле—Иосиды—Филлипса—Феллера, далее переходим к генераторам регуляризованных полугрупп — интегрированных, конволюционных и R-полугрупп. Исторически эта классификация создавалась в основном при изучении дифференциальных генераторов (см., например, [1, 17, 23, 25, 31, 33]), но, что важно для изучения переходных полугрупп, генераторами сильно непрерывных и регуляризованных полугрупп реально могут быть дифференциальные, интегродифференциальные и более общие псевдодифференциальные операторы. Именно такие генераторы возникают при исследовании полугрупп, связанных со случайными процессами.

Раздел 3, основной в работе, посвящён полугруппам с ядрами, образованными переходными вероятностями марковских процессов и их важных подклассов — процессов Феллера и Леви. Показано, как на базе техники (обобщённого) преобразования Фурье может быть получен генератор переходной полугруппы $\{U(t),\, t \geqslant 0\}$, который является псевдодифференциальным оператором. Важно отметить, что при исследовании свойств генераторов переходных полугрупп техника преобразования Фурье сочетается с традиционной в теории полугрупп спектральной техникой. Это привело в следующем разделе к возможности вложения сильно непрерывных сжимающих полугрупп, связанных со случайными процессами, в полугрупповую классификацию и, в случае дифференциальных систем, в классификацию Гельфанда—Шилова.

В разделе 4 исследована связь между полугрупповой классификацией, основанной на спектральных свойствах генераторов, в общем случае являющихся псевдодифференциальными операторами, и классификацией Гельфанда—Шилова для дифференциальных систем, основанной на технике обобщённого преобразования Фурье. Построена схема вложений.

Отметим, что хотя настоящая работа во многом носит характер обзора, мы не ставили перед собой задачу представить исторический обзор результатов. По мере необходимости мы ссылаемся на известные в указанной области работы последнего времени, в основном [16, 19, 27, 36], в которых можно найти и литературный обзор обсуждаемой тематики. Ещё отметим, что генераторы феллеровских полугрупп, изучаемых в работе, определены на функциях с аргументами из $\mathbb{R}^n$, и мы не касаемся полугрупп Феллера с генераторами на ограниченных областях со специальными граничными условиями (см., например, [38]).

1. Уравнения, связанные со случайными процессами. Способы перехода от случайного процесса и определяющего его СДУ к детерминированным уравнениям для вероятностных характеристик

Прежде чем приступить к обсуждению детерминированных уравнений, связанных со стохастическими процессами, требуется ввести и должным образом определить СДУ, в котором источником случайности служит процесс Леви, и начнём мы с процессов Леви.

1.1. Процессы Маркова и Леви. СДУ с источником случайности — процессом Леви. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ — σ-алгебра борелевских подмножеств $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.1 (см. [36])**.** Случайный процесс $L = \{L(t),\, t \geqslant 0\}$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbf{P})$ и принимающий значения в фазовом пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, называется *процессом Леви*, если он:

- **(L1):** процесс с независимыми приращениями: для любых $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$ случайные величины $L(0), L(t_1) - L(0), L(t_2) - L(t_1), \ldots, L(t_n) - L(t_{n-1})$ независимы;
- **(L2):** стартует из нуля п.н.: $L(0) = 0$ п.н.;
- **(L3):** однородный по времени: закон распределения приращения $L(s+t) - L(s)$, $s, t \geqslant 0$ не зависит от s;
- **(L4):** стохастически непрерывен: для любых $s \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$ выполнено $\mathbf{P}(|L(s+t) - L(s)| > \varepsilon) \to 0$ при $t \to 0$;
- **(L5):** траектории процесса непрерывны справа и имеют конечные пределы слева п.н.

Процесс, отвечающий условиям (L1)–(L4), называют *процессом Леви по распределению*.

Замечание 1.1. При рассмотрении процессов Леви условие (L5) часто опускают. Это связано с тем, что у любого процесса Леви по распределению существует версия, удовлетворяющая (L5) (см., например, [19]); её называют *càdlàg-модификацией*[1].

Процессы Леви являются частью, может быть, наиболее известного класса случайных процессов — марковских процессов.

Определение 1.2. Случайный процесс $\{X(t),\, t \geqslant 0\}$ в фазовом пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, согласованный с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, называется *марковским*, если при любых $0 \leqslant s \leqslant t$ и $B \in \mathcal{F}_t$ выполнено $\mathbf{P}(B|\mathcal{F}_s) = \mathbf{P}(B|X(s))$ п.н.

Поведение марковских процессов в некотором смысле подобно поведению детерминированных систем: для детерминированной системы состояние в данный момент полностью определяет её эволюцию, а для марковских процессов известное на данный момент состояние системы полностью определяет её вероятность оказаться в различных допустимых состояниях в последующие моменты времени. Наряду с процессами Леви, марковским является любой процесс с независимыми приращениями [3, гл. VI, теорема 3].

Вероятность перехода марковского процесса из состояния x, в котором он находился в момент времени s, в одно из состояний борелевского множества B за время $t - s$ описывается переходной функцией $P(s, x; t, B)$.

Определение 1.3. Функция $P(s, x; t, B)$, заданная для $0 \leqslant s \leqslant t$, $x \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, называется *переходной функцией* марковского процесса $\{X(t),\, t \geqslant 0\}$, если при фиксированных $s, t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ она является распределением вероятностей на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$; при фиксированных $s, t \geqslant 0$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ она является измеримой функцией переменного $x \in \mathbb{R}^n$; $P(s, x, s, B) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$ и $P(s, x, t, B) = \mathbf{P}(X(t) \in B | X(s) = x)$, $s \leqslant t$, $x \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ п.н.

---

[1] аббревиатура от французского *continue à droite, limitée à gauche*.

Переходная функция удовлетворяет уравнению Чепмена—Колмогорова:

$$P(s,x,t,B)=\int_{\mathbb{R}^n}P(s,x,\tau,dy)P(\tau,y,t,B),\quad 0\leqslant s\leqslant\tau\leqslant t,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n).\tag{1.1}$$

Марковский процесс $\{X(t),\,t\geqslant 0\}$ является *однородным*, если его переходная функция не меняется при сдвиге вдоль временной оси: $P(s+h,x,t+h,B)=P(s,x,t,B)$, $0\leqslant s\leqslant t$, $h\geqslant 0$, $x\in\mathbb{R}^n$, $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Переходная функция однородного марковского процесса зависит не от t и s, а от их разности.

Наиболее известными представителями введённых процессов служат винеровский процесс, являющийся моделью броуновского движения и непрерывным процессом (обладает непрерывными траекториями п.н.), и процессы Пуассона, простой и составной, являющиеся процессами со скачками. В общем случае процессы Леви содержат как непрерывную, так и скачкообразную компоненты.

Чтобы описать структуру процессов Леви, введём, следуя [16], величину $N(t,B)=\#\{0\leqslant s\leqslant t:\Delta L(s)\in B\}$, $t\geqslant 0$, $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, равную количеству скачков процесса L за промежуток времени $[0;t]$, величина $\Delta L(s):=L(s)-L(s-)$ которых принадлежит множеству B. При любых $\omega\in\Omega$ и $t\geqslant 0$ функция $N(t,\cdot)(\omega)$ является считающей мерой на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, а функция $\nu(\cdot)=\mathbb{E}[N(1,\cdot)]$ — мерой интенсивности, связанной с процессом L. Если множество B ограничено снизу[1], то процесс $\{N(t,B),\,t\geqslant 0\}$ является пуассоновским с интенсивностью $\lambda=\nu(B)$; при этом мера $N(t,B)$ является пуассоновской случайной мерой на пространстве $(\mathbb{R}_+\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),\,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}))$, а мера $\widetilde{N}(t,B):=N(t,B)-t\nu(B)$ — мартингальнозначной пуассоновской случайной мерой на этом пространстве.

Во введённых обозначениях структура процесса Леви описывается разложением Леви—Ито (см., например, [16, теорема 2.4.16]):

$$L(t)=bt+W_Q(t)+\int_{|q|\geqslant 1}qN(t,dq)+\int_{|q|<1}q\widetilde{N}(t,dq),\tag{1.2}$$

где $b\in\mathbb{R}^n$, $\{W_Q(t),\,t\geqslant 0\}$ — $\mathbb{R}^n$-значный винеровский процесс с ковариационной $n\times n$-матрицей Q. Процесс $\{W_Q(t),\,t\geqslant 0\}$ определяется при каждом $t\geqslant 0$ как вектор, каждая координата которого является суммой: $W_{Q,i}(t)=\sum\limits_{j=1}^{m}\sigma_{ij}W_j(t)$, $i=1,\ldots,n$, где $W_1,\ldots,W_m$ — попарно независимые $\mathbb{R}$-значные стандартные винеровские процессы (броуновские движения), $\sigma=(\sigma_{ij})$ — $n\times m$-матрица с действительными элементами и $Q=\sigma\sigma^T$.

В равенстве (1.2) предполагается, что процесс W_Q и мера N заданы независимо друг от друга на одном и том же вероятностном пространстве. Например, если процесс L является $\mathbb{R}$-значным стандартным винеровским, то меры скачков $N(t,dq),\widetilde{N}(t,dq)$ равны нулю, $b=0$ и $Q=1$. Если L является $\mathbb{R}$-значным процессом Пуассона $\{N(t),\,t\geqslant 0\}$, то $b=Q=0$ и $N(t,dq)=N(t)\mu(dq)$, где μ — мера, носителем которой является одноточечное множество $\{1\}$.

Теперь рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX(t)=\alpha(X(t))\,dt+\beta(X(t))\,dL(t),\quad t\geqslant 0,\tag{1.3}$$

в котором источником случайности служит процесс Леви $L=\{L(t),\,t\geqslant 0\}$ со значениями в $\mathbb{R}^n$. Такие уравнения являются обобщением математической модели диффузии, где возмущение определяется винеровским процессом.

Используя представление (1.2), запишем уравнение (1.3) в традиционной для стохастических уравнений интегральной форме:

$$\begin{aligned}X(t)-\xi\ \ =\ \ &\int_0^t a(X(s-))\,ds+\int_0^t c(X(s-))\,dW(s)+\\&+\int_0^t\!\!\int_{|q|\geqslant 1}H(X(s-),q)N(ds,dq)+\int_0^t\!\!\int_{|q|<1}F(X(s-),q)\widetilde{N}(ds,dq),\quad t\geqslant 0,\end{aligned}\tag{1.4}$$

где $\{W(t)=W_I(t),\,t\geqslant 0\}$ — $\mathbb{R}^n$-значный винеровский процесс с единичной ковариационной матрицей I. В этом уравнении коэффициенты, определяемые как $a(X(s-))=\alpha(X(s-))+\beta(X(s-))b$,

[1] $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ и $0\notin\overline{B}$.

$c(X(s-)) = \beta(X(s-))$, $H(X(s-), q) = \beta(X(s-))q$, $F(X(s-), q) = \beta(X(s-))q$, удовлетворяют условиям существования интегралов в правой части (1.4). Первое слагаемое представляет собой интеграл Лебега, второе — (стохастический) интеграл Ито по винеровскому процессу W. Третье слагаемое, поскольку в силу свойства (L5) за конечный промежуток времени процесс L не может иметь бесконечное число скачков, является конечной суммой:

$$\int_0^t \int_{|q|\geqslant 1} \beta(X(s-)qN(ds, dq) = \sum_{0\leqslant s\leqslant t} \beta(X(s-)\Delta L(s) \cdot \mathbf{1}_{|q|\geqslant 1}(\Delta L(s)),$$

где $\mathbf{1}_{|q|\geqslant 1}(\cdot)$ — характеристическая функция множества $\{q \in \mathbb{R}^n : |q| \geqslant 1\}$. Наконец, последнее слагаемое в (1.4) является стохастическим интегралом по приращениям мартингала $\widetilde{N}(t, B) = N(t, B) - t\nu(B)$.

Отметим, что в общем случае непрерывные и разрывные компоненты процесса Леви могут иметь различную степень влияния на моделируемый процесс $X = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$, которая формализуется с помощью различных коэффициентов a, c, H, F. Процесс X, определяемый уравнением (1.4), имеет более сложное, чем (1.2), устройство, но в целом повторяет его структуру. Такие процессы называют *процессами типа Леви*. Известны достаточно общие условия существования и единственности решения уравнения (1.4) (см., например, [16, теоремы 6.2.9, 6.4.6]). Для простоты сформулируем теорему существования и единственности в одномерном случае.

Теорема 1.1. *Пусть отображение $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является предсказуемым, а отображения $a, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям Липшица и подлинейного роста*:

$$\exists C_1 > 0: \quad |a(y) - a(z)| + |c(y) - c(z)| + \int_{|q|<1} |F(y, q) - F(z, q)|\nu(dq) \leqslant C_1|y - z|, \quad y, z \in \mathbb{R},$$

$$\exists C_2 > 0: \quad a^2(y) + c^2(y) + \int_{|q|<1} F^2(y, q)\nu(dq) \leqslant C_2(1 + y^2), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Тогда существует единственное сильное[1] *решение задачи* (1.4)*, которое является однородным марковским процессом.*

Теперь, когда мы определились со стохастическими уравнениями и указали какими свойствами обладают их решения, обсудим два подхода, позволяющих перейти от стохастических процессов к детерминированным уравнениям для вероятностных характеристик процессов.

1.2. Переход от марковского процесса к детерминированному уравнению, основанный на предельных соотношениях. Этот подход восходит к идеям А. Н. Колмогорова [9] для диффузионных процессов и опирается на две локальные инфинитезимальные характеристики процесса, (1.5) и (1.6), и условие (1.7), характеризующее непрерывность/разрывность случайного процесса.

Пусть $X = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ — марковский случайный процесс в фазовом пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ и $p(t, x; T, y)$ — плотность его переходной вероятности. Предположим, при любом $\varepsilon > 0$ существуют конечные пределы

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|z-x|<\varepsilon} (z_i - x_i) p(t, x; t + \Delta t, z)\, dz = \mathtt{A}_i(t, x) + O(\varepsilon), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.5}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|z-x|<\varepsilon} (z_i - x_i)(z_j - x_j) p(t, x; t + \Delta t, z)\, dz = \mathtt{B}_{ij}(t, x) + O(\varepsilon), \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{1.6}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{p(t, x; t + \Delta t, z)}{\Delta t} = \mathtt{G}(t, x; z) \ \text{ при } |z - x| > \varepsilon. \tag{1.7}$$

Сходимость в равенствах (1.5), (1.6) предполагается равномерной по t на каждом конечном интервале и по $x \in \mathbb{R}^n$, а в равенстве (1.7) — по t, x и z.

Теорема 1.2 (см. [24, разд. 3.4])**.** *Пусть плотность переходной вероятности процесса X удовлетворяет условиям* (1.5)–(1.7)*. Тогда она удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$-\frac{\partial p(t, x; T, y)}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \mathtt{A}_i(t, x) \frac{\partial p(t, x; T, y)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \mathtt{B}_{i,j}(t, x) \frac{\partial^2 p(t, x; T, y)}{\partial x_i \partial x_j} +$$

[1] *Сильным решением* в стохастическом анализе называется процесс, удовлетворяющий п.н. равенству (1.4) и согласованный с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, порождённой случайными возмущениями, входящими в уравнение.

$$+\int_{\mathbb{R}^n}(p(t,z;T,y)-p(t,x;T,y))\mathsf{G}(t,x;z)dz,\quad 0<t<T, \tag{1.8}$$

с условием $p(T,x;T,y)=\delta(y-x)$.

Уравнение (1.8) называют *обратным уравнением Колмогорова*. Обратное уравнение с естественным финальным условием $p(T,x;T,y)=\delta(y-x)$ порождает корректную задачу. Смысл финального условия состоит в том, что если система в момент времени T находится в точке x, то плотность вероятности обнаружить её в этот момент в точке y равна $\delta(y-x)$.

Теорема 1.3 (см. [24, разд. 3.6]). *Пусть плотность переходной вероятности процесса* X *удовлетворяет условиям* (1.5)–(1.7). *Тогда она удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial p(t,x;T,y)}{\partial T}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\big(\mathsf{A}_i(T,y)p(t,x;T,y)\big)+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}\big(\mathsf{B}_{ij}(T,y)p(t,x;T,y)\big)+$$
$$+\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\mathsf{G}(T,z;y)p(t,x;T,z)-\mathsf{G}(T,y;z)p(t,x;T,y)\Big)dz,\quad 0\leqslant t<T,$$

с условием $p(t,x;t,y)=\delta(x-y)$.

Уравнение (1.3) называют *прямым уравнением Колмогорова*; поставленная для него задача Коши с начальным условием $p(t,x;t,y)=\delta(y-x)$ также является корректной.

Замечание 1.2. В случае диффузионных процессов предел (1.7) равен нулю, а для процесса Пуассона имеем $\mathsf{G}(t,x;z)=\begin{cases}\lambda\delta(z-(x+1)), & \varepsilon\leqslant 1,\\ 0, & \varepsilon>1.\end{cases}$

Замечание 1.3. Отметим, что если плотность переходной вероятности $p(t,x;T,y)$ существует только как обобщённая функция относительно переменной y (или x), то равенства (1.5)–(1.7) следует понимать как равенства с параметрами $t,\Delta t,x$ $(t,\Delta t,y)$ на некоторых (подходящих) основных функциях, а уравнение (1.8) — как уравнение с производными по параметрам t и x.

Пример 1.1. В качестве примера, иллюстрирующего этот подход, получим обратное уравнение для переходной плотности процесса

$$X(t)=b\,t+c\,W(t)+q\,N(t),\quad t\geqslant 0, \tag{1.9}$$

в фазовом пространстве $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, где b,c,q — константы, W — стандартный винеровский процесс, N — пуассоновский процесс с интенсивностью λ. Будем считать, что винеровский и пуассоновский процессы заданы независимо друг от друга, и найдём плотность распределения вероятностей процесса (1.9) как свёртку плотностей распределения каждого слагаемого.

Плотность вырожденного распределения есть сдвинутая δ-функция $p_{b\tau}(z)=\delta(z-b\tau)$, плотность распределения вероятностей случайной величины $cW(\tau)$ выражается как $p_{cW(\tau)}(z)=\frac{1}{c\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{z^2}{2c^2\tau}}$, а плотность распределения случайной величины $qN(\tau)$ имеет вид $p_{qN(\tau)}(z)=\sum\limits_{k=0}^{d_q}\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}\delta(z-kq)e^{-\lambda\tau}$, где $d_q=d_q(z)$ равно целой части $\left[\frac{z}{q}\right]$ при $\left[\frac{z}{q}\right]\neq\frac{z}{q}$ и $\left[\frac{z}{q}-1\right]$ — в противном случае. Тогда плотность распределения вероятностей случайной величины $X(\tau)$:

$$p_{X(\tau)}(z)=p_{b\tau}*p_{cW(\tau)}*p_{qN(\tau)}(z)=\frac{e^{-\lambda\tau}}{c\sqrt{2\pi\tau}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}e^{-\frac{(z-kq-b\tau)^2}{2c^2\tau}}.$$

Пользуясь тем, что рассматриваемые процессы и, как следствие, процесс (1.9) являются процессами Леви, а значит, однородны во времени и пространстве: $p(t,x;T,y)=p(0,0;T-t,y-x)$, а функция $p(0,0;T-t,y-x)$ представляет собой плотность распределения вероятностей $p_{X(T-t)}(y-x)$, получаем

$$p(t,x;T,y)=\frac{e^{-\lambda(T-t)}}{c\sqrt{2\pi(T-t)}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda(T-t))^k}{k!}e^{-\frac{(y-x-kq-b(T-t))^2}{2c^2(T-t)}}.$$

Вычислим локальные моменты (1.5) и (1.6) процесса X:

$$\mathtt{A}(t,x)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|z-x|<\varepsilon}(z-x)p(t,x;t+\Delta t,z)dz=\begin{cases}b, & \varepsilon\leqslant q,\\ b+\lambda q, & \varepsilon>q,\end{cases}$$

$$\mathtt{B}(t,x)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|z-x|<\varepsilon}(z-x)^2p(t,x;t+\Delta t,z)dz=\begin{cases}c^2, & \varepsilon\leqslant q,\\ c^2+\lambda q^2, & \varepsilon>q,\end{cases}$$

и функцию $\mathtt{G}(t,x;z)$:

$$\mathtt{G}(t,x;z)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p(t,x;t+\Delta t,z)}{\Delta t}=\begin{cases}\lambda\delta(z-(x+q)), & \varepsilon\leqslant q,\\ 0, & \varepsilon>q.\end{cases}$$

Найденные предельные величины позволяют выписать обратное уравнение (1.8) для функции $p(t,x;T,y)$ — плотности процесса (1.9):

$$-p'_t(t,x;T,y)=bp'_x(t,x;T,y)+\frac{c^2}{2}p''_{xx}(t,x;T,y)+\lambda(p(t,x+q;T,y)-p(t,x;T,y)). \tag{1.10}$$

Замечание 1.4. В рассмотренном примере плотность процесса X является дифференцируемой только в смысле обобщённых функций. Поскольку в этом случае при малых ε ($\varepsilon\leqslant q$) функции $\mathtt{A}(t,x)$ и $\mathtt{B}(t,x)$ являются постоянными, а $\mathtt{G}(t,x;\cdot)$ является δ-функцией, то и само уравнение (1.10) допускает формализацию лишь в обобщённом смысле. В качестве основных функций здесь достаточно рассмотреть дважды непрерывно дифференцируемые функции переменного x с компактным носителем. Формализовать уравнение (1.8) в общем случае сложнее, в частности, из-за поведения функций $\mathtt{A}(t,x)$ и $\mathtt{B}(t,x)$, которые не являются мультипликаторами в этом пространстве основных функций.

Замечание 1.5. Наряду с обратным уравнением (1.10) для плотности процесса X, можно записать прямое уравнение Колмогорова, которое допускает формализацию в обобщённом смысле на тех же основных функциях, что и уравнение (1.10), так как $\mathtt{A}(T,y)$ и $\mathtt{B}(T,y)$ являются мультипликаторами в пространстве непрерывных функций с компактным носителем.

1.3. Переход от СДУ к детерминированному уравнению, основанный на формуле Ито. Пусть $X=\{X(t),\,t\geqslant 0\}$ — сильное решение задачи (1.4) — однородный марковский процесс в пространстве $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ с переходной функцией $P(t,x;T,B)$.

В приложениях часто возникают характеристики текущего положения процесса, $X(t)=x$, вида

$$v(t,x):=\mathbb{E}^{t,x}[f(X(T))]=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)P(t,x;T,dy),\quad t\in[0;T],\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{1.11}$$

где $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ — ограниченная борелевская функция, $\mathbb{E}^{t,x}[f(X(T))]:=\mathbb{E}[f(X(T))\big|X(t)=x]$ — условное математическое ожидание. В следующей теореме получено интегродифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $v(t,x)$. Это уравнение является обратным и для него ставится финальная задача Коши с условием $v(T,x)=f(x)$.

Теорема 1.4 (см. [11]). *Пусть* $X=\{X(t),\,t\geqslant 0\}$ — *сильное решение задачи* (1.4) *с начальным условием* $\xi\in\mathbb{R}$. *Если функция* v, *определяемая равенством* (1.11), *имеет непрерывные частные производные* v'_t, v'_x, v''_{xx}, *то она является решением финальной задачи*

$$\begin{aligned}-v'_t(t,x)&=a(x)v'_x(t,x)+\frac{1}{2}c^2(x)v''_{xx}(t,x)+\int_{|q|\geqslant 1}\Big[v\Big(t,x+H(x,q)\Big)-v(t,x)\Big]\nu(dq)+\\&+\int_{|q|<1}\Big[v\Big(t,x+F(x,q)\Big)-v(t,x)-F(x,q)v'_x(t,x)\Big]\,\nu(dq),\\ v(T,x)&=f(x),\qquad x\in\mathbb{R},\quad t\in[0;T].\end{aligned} \tag{1.12}$$

Доказательство теоремы основано на применении формулы Ито и мартингальности процесса $\{\widetilde{N}(t,B),t\geqslant 0\}$. Формула Ито для разрывного процесса, каковым в общем случае является процесс типа Леви, имеет более сложную структуру, нежели в случае винеровских процессов. Прежде чем её приводить, остановимся коротко на формуле Ито для винеровских процессов.

Изначально формула Ито была предложена в [26] для процессов, зависящих от броуновского движения W, называемых теперь *процессами Ито*: $X(t)=X(0)+\int_0^t a(s)\,ds+\int_0^t c(s)\,dW(s)$. Коротко это равенство записывается следующим образом: $dX(t)=a(t)\,dt+c(t)\,dW(t)$. Для наглядности приведём формулу для процессов Ито в одномерном случае (см., например, [34]).

Теорема 1.5. *Пусть $X = \{X(t),\, t \geqslant 0\}$ — процесс Ито в фазовом пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ и $Y(t, X(t)) = g(t, X(t))$, где функция $g(t, x)$, $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$ имеет непрерывные производные g'_t, g'_x, g''_{xx}. Тогда для любого $t \geqslant 0$ имеет место формула Ито*:

$$dY(t, X(t)) = g_t(t, X(t))\, dt + g_x(t, X(t))\, dX(t) + \frac{1}{2} g_{xx}(t, X(t))(dX(t))^2,$$

где свойства броуновского движения при определении $(dX(t))^2$ условно записывают следующим образом: $dt \cdot dt = dt \cdot dW(t) = dW(t) \cdot dt = 0$, $dW(t) \cdot dW(t) = dt$.

Формулу Ито называют стохастической формулой замены переменных. От классической формулы замены переменных она отличается дополнительным слагаемым $\frac{1}{2} g_{xx}(t, X(t))(dX(t))^2$, которое появляется в силу свойства броуновского движения $\mathbb{E}[dW(t) \cdot dW(t)] = dt$, коротко записываемого как $dW(t) \cdot dW(t) = dt$. В интегральной форме формула Ито записывается следующим образом:

$$Y(t,X(t)) - Y(0,X(0)) = \int_0^t \Big(g'_s(s, X(s)) + a(s) g'_x(s,X(s)) + \frac{c^2(s)}{2} g''_{xx}(s,X(s)) \Big) ds + \int_0^t c(s) g'_x(s,X(s)) dW(s).$$

Как мы отметили выше, формула Ито для разрывного процесса типа Леви имеет более сложную структуру, нежели в случае непрерывных процессов Ито: пусть $\{X(t),\, t \geqslant 0\}$ — $\mathbb{R}$-значный процесс типа Леви, определяемый равенством

$$X(t) - \xi = \int_0^t a(s) ds + \int_0^t c(s) dW(s) + \int_0^t \int_{|q| \geqslant 1} H(s,q) N(ds, dq) + \int_0^t \int_{|q|<1} F(s,q) \widetilde{N}(ds, dq), \quad t \in [0; T], \tag{1.13}$$

тогда для любой функции $g \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ с вероятностью 1 имеет место равенство

$$\begin{aligned} g(t, X(t)) - g(0, X(0)) = \int_0^t \Big(g'_s(s, X(s-)) + a(s) g'_x(s, X(s-)) + \frac{1}{2} c^2(s) g''_{xx}(s, X(s-)) \Big) ds \,+ \\ + \int_0^t \int_{|q| \geqslant 1} \Big[g\Big(s, X(s-) + H(s,q)\Big) - g(s, X(s-)) \Big] N(ds, dq) \,+ \\ + \int_0^t c(s) g'_x(s, X(s-)) dW(s) + \int_0^t \int_{|q|<1} \Big[g\Big(s, X(s-) + F(s,q)\Big) - g(s, X(s-)) \Big] \widetilde{N}(ds, dq) \,+ \\ + \int_0^t \int_{|q|<1} \Big[g\Big(s, X(s-) + F(s,q)\Big) - g(s, X(s-)) - F(s,q) g'_x(s, X(s-)) \Big] \nu(dq) ds, \end{aligned} \tag{1.14}$$

называемое *формулой Ито для процесса типа Леви* (1.13) (см., например, [35, гл. V, теорема 18]). На основе формулы (1.14) выводится интегродифференциальное уравнение (1.12), решением которого является выбранная характеристика (1.11), являющаяся усреднением борелевской функции f от изучаемого процесса.

Прежде чем переходить к изучению полугрупп операторов, позволяющих строить различные характеристики марковских процессов и процессов Леви, в следующем разделе мы приведём краткий обзор современной полугрупповой классификации операторов.

2. Полугрупповая классификация абстрактной задачи Коши: сильно непрерывные полугруппы, интегрированные полугруппы, R-полугруппы

Приведём сводку основных результатов по теории полугрупп операторов и корректности абстрактной задачи Коши

$$u'(t) = Au(t), \quad t \in [0; \tau), \tau \leqslant \infty, \quad u(0) = f \in \operatorname{dom} A \subset E, \tag{2.1}$$

где оператор A, рассматриваемый в банаховом пространстве, может быть дифференциальным, интегральным, псевдодифференциальным. При изложении мы опираемся в основном на [1, 33]. Дополнительную информацию можно найти в обширной литературе (см., например, [17, 23, 25]).

Пусть E — банахово пространство, A — замкнутый линейный оператор в E с областью определения $\operatorname{dom} A$.

Под *решением задачи* (2.1) на отрезке $[0; T]$ будем понимать $u \in C\left([0; T], \operatorname{dom} A\right) \cap C^1\left([0; T], E\right)$.

Определение 2.1. Однопараметрическое семейство $U = \{U(t), t \geqslant 0\}$ линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве E и удовлетворяющих условиям:

(U1): $U(t + s) = U(t)U(s)$, $t, s \geqslant 0$ (полугрупповое свойство), $U(0) = I$,

(U2): $\|U(t)f - f\| \to 0$ при $t \to 0$ для любого $f \in E$ (сильная непрерывность при $t = 0$), называется *полугруппой класса* C_0.

Оператор, определяемый соотношением $Af := \lim\limits_{t\to+0} t^{-1}(U(t) - I)f$, с областью определения $\operatorname{dom} A = \bigl\{f \in E : \lim\limits_{t\to+0} t^{-1}(U(t) - I)f \ \text{ существует}\bigr\}$, называется (*инфинитезимальным*) *генератором полугруппы* U.

Известно, что генератор полугруппы класса C_0 замкнут и плотно определён.

2.1. Равномерная корректность задачи (2.1)**.** Пусть оператор A плотно определён в пространстве E. Оператор A порождает полугруппу U класса C_0, если и только если выполняется любое из эквивалентных условий:

1) задача (2.1) *равномерно корректна на* $\operatorname{dom} A$ при $t \geqslant 0$, т. е. для любых $T > 0$ и $f \in \operatorname{dom} A$ существует единственное решение задачи (2.1) на отрезке $[0;T]$, устойчивое относительно изменения начальных данных: $\sup\limits_{t\in[0;T]} \|u(t)\| \leqslant C_T\|f\|$;
2) резольвента $\mathcal{R}(\lambda)$ оператора A определена в некоторой правой полуплоскости комплексной плоскости $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ и при некотором $C > 0$ удовлетворяет оценке $\|\mathcal{R}^{(k)}(\lambda)\| \leqslant \frac{Ck!}{(\operatorname{Re}\lambda-\omega)^{k+1}}$, $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, $k \in \mathbb{N}_0$.

2.2. Равномерная (n,ω)**-корректность задачи** (2.1)**.** Пусть оператор A плотно определён в пространстве E и множество его регулярных точек $\rho(A)$ непусто. Оператор A порождает (невырожденную) *n раз интегрированную экспоненциально ограниченную полугруппу* операторов в пространстве E, если и только если выполняется любое из эквивалентных условий:

1) задача (2.1) *равномерно (n,ω)-корректна* при $t \geqslant 0$, т. е. для любых $T > 0$ и $f \in \operatorname{dom} A^{n+1}$ существует единственное решение задачи (2.1) на отрезке $[0;T]$, устойчивое относительно изменения начальных данных по n-й граф-норме оператора A: $\|u(t)\| \leqslant Ce^{\omega t}\|f\|_n$, $t \geqslant 0$, где $\|f\|_n = \|f\| + \|Af\| + \ldots + \|A^n f\|$.
2) резольвента оператора A определена в некоторой правой полуплоскости комплексной плоскости $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ и при некотором $C > 0$ удовлетворяет оценке $\left\|\frac{d^k}{d\lambda^k}\left(\frac{\mathcal{R}(\lambda)}{\lambda^n}\right)\right\| \leqslant \frac{Ck!}{(\operatorname{Re}\lambda-\omega)^{k+1}}$, $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, $k \in \mathbb{N}_0$;
3) задача (2.1) корректна в пространстве абстрактных экспоненциально ограниченных распределений $\mathcal{S}'_\omega(E)$, которое определяется следующим образом: $f \in \mathcal{S}'_\omega(E)$, если и только если $fe^{\omega t} \in \mathcal{S}'(E)$, где $\mathcal{S}'(E)$ — распределения над $\mathcal{S}$ со значениями в E.

2.3. Локальная n**-корректность задачи** (2.1)**.** Пусть оператор A плотно определён в E, $\rho(A) \neq \varnothing$ и $\tau < \infty$. Оператор A порождает *локальную* (на $[0;\tau)$) *n раз интегрированную полугруппу* операторов в пространстве E тогда и только тогда, когда выполняется любое из эквивалентных условий:

1) задача (2.1) n-корректна при $t \in [0;\tau)$, т. е. для любых $f \in \operatorname{dom} A^{n+1}$ и $T < \tau$ существует единственное решение задачи (2.1) на отрезке $[0;T]$, устойчивое относительно изменения начальных данных по n-й граф-норме оператора A: $\sup\limits_{t\in[0;T]} \|u(t)\| \leqslant C_T\|f\|_n$;
2) задача (2.1) корректна в пространстве $\mathcal{D}'(E)$ распределений над $\mathcal{D}$ со значениями в E.

Из этих равносильных условий следует, что резольвента оператора A определена в области $\Lambda^{\ln}_{n,\gamma,\omega} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > n\gamma\ln|\lambda| + \omega\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, и при некотором $C > 0$ удовлетворяет оценке

$$\|\mathcal{R}(\lambda)\| \leqslant C|\lambda|^n, \qquad \lambda \in \Lambda^{\ln}_{n,\gamma,\omega}. \tag{2.2}$$

В свою очередь из оценки (2.2) в общем случае можно доказать, что оператор A порождает локальную $(n+2)$ раза интегрированную полугруппу.

2.4. Корректность задачи (2.1) **в пространствах ультрараспределений.** Пусть $K(t)$, $t \geqslant 0$ — экспоненциально ограниченная функция: $|K(t)| \leqslant Ce^{\theta t}$, $t \geqslant 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, и её преобразование Лапласа удовлетворяет условию: $|\widetilde{K}(\lambda)| = \mathcal{O}(e^{-M(\kappa|\lambda|)})$ при $|\lambda| \to \infty$, где $M(\xi)$ — положительная функция переменного $\xi \geqslant 0$, возрастающая при $\xi \to \infty$ не быстрее ξ^p, $p < 1$.

Оператор A порождает на $[0;\tau)$, $\tau \leqslant \infty$, *K-конволюционную полугруппу* операторов в пространстве E, если и только если выполняется любое из эквивалентных условий:

1) резольвента оператора A определена в некоторой области правой полуплоскости $\Lambda^M_{\alpha,\gamma,\omega} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \alpha M(\gamma|\lambda|) + \omega\}$ и удовлетворяет там условию $\|\mathcal{R}(\lambda)\| \leqslant Ce^{\beta M(\gamma|\lambda|)}$, $\lambda \in \Lambda^M_{\alpha,\gamma,\omega}$;
2) если $M(\xi)$ — ассоциированная функция последовательности M_k, то задача (2.1) корректна в пространстве абстрактных ультрараспределений Румье.

2.5. **R-корректность задачи** (2.1)**.** Пусть R — ограниченный оператор в пространстве E. Пусть оператор A плотно определён в E, коммутирует с R на своей области определения и удовлетворяет условию $\overline{A|_{R(\operatorname{dom} A)}} = A$. Пусть $\tau < \infty$. Оператор A порождает локальную (на $[0;\tau)$) *R-полугруппу* операторов в пространстве E, если и только если выполняется любое из эквивалентных условий:

1) задача (2.1) R-корректна на $[0;\tau)$, т. е. для любых $f \in R(\operatorname{dom} A)$ и $T < \tau$ существует единственное решение задачи (2.1) на отрезке $[0;T]$, устойчивое в следующем смысле: $\sup\limits_{t\in[0;T]} \|u(t)\| \leqslant C_T\|R^{-1}f\|$;
2) для любого $t \in [0;\tau)$ существует асимптотическая R-резольвента $\mathcal{R}_t(\lambda)$ оператора A, удовлетворяющая при некотором $C_t > 0$ условию $\left\|\frac{d^k}{d\lambda^k}\mathcal{R}_t(\lambda)\right\| \leqslant \frac{C_t k!}{|\lambda|^{k+1}}$, $\frac{k}{\lambda} \in [0;t]$, $\lambda > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Теперь переходим к изучению уравнений для вероятностных характеристик процессов и свойств решений задач Коши для этих уравнений на основе изучения свойств полугрупп, связанных со случайными процессами.

3. Полугруппы, порождаемые случайными процессами

В этом разделе речь пойдёт о переходных полугруппах однородных марковских процессов, их свойствах, свойствах генераторов и связью с задачей Коши (2.1).

Введем необходимые обозначения. Обозначим $B_b(\mathbb{R}^n)$ пространство функций, ограниченных и измеримых по Борелю на $\mathbb{R}^n$, с нормой $\|f\| = \sup|f(x)|$, $C_0(\mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных на $\mathbb{R}^n$ функций, стремящихся к нулю при $x \to \infty$, с нормой $\|f\| = \max|f(x)|$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ — пространство Л. Шварца бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями на $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — пространство бесконечно дифференцируемых быстро убывающих на $\mathbb{R}^n$ функций.

Важную роль в исследовании полугрупп, порождаемых случайными процессами, играет преобразование Фурье, классическое и обобщённое. В работе использованы следующие обозначения: преобразование Фурье меры μ

$$\mathcal{F}[\mu](\sigma) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\sigma,y)}\mu(dy) = \widehat{\mu}(\sigma), \qquad \mathcal{F}^{-1}[\mu](\sigma) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma,y)}\mu(dy) = \check{\mu}(\sigma);$$

преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{F}[f](\sigma) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\sigma,y)}f(y)dy = \widehat{f}(\sigma), \qquad \mathcal{F}^{-1}[f](\sigma) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma,y)}f(y)dy = \check{f}(\sigma); \tag{3.1}$$

преобразование Фурье обобщённой функции (распределения) $f \in S'(\mathbb{R}^n)$

$$\langle\varphi, \mathcal{F}f\rangle := (2\pi)^n\langle\mathcal{F}^{-1}\varphi, f\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{3.2}$$

Здесь же введём обозначение для *характеристической функции меры μ* (закона распределения случайной величины ξ):

$$\Phi_\xi(\sigma) := \mathbb{E}[e^{i(\sigma,\xi)}](\sigma) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma,y)}\mu(dy) = \widehat{\mu}(-\sigma) = (2\pi)^n\check{\mu}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{3.3}$$

Если задан случайный процесс $\{X(t), t \geqslant 0\}$, то при фиксированном $t \geqslant 0$ для характеристической функции случайной величины $X(t)$ будем использовать обозначение:

$$\Phi_{X(t)}(\sigma) := \mathbb{E}[e^{i(\sigma,X(t))}](\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{3.4}$$

3.1. Полугруппы Маркова, Феллера и Леви.

Определение 3.1 (см. [19, с. 2]). Однопараметрическое семейство $U = \{U(t),\, t \geqslant 0\}$ линейных операторов в пространстве $B_b(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих при любых $f \in B_b(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t, s \geqslant 0$ условиям:

(M1): $U(t+s)f(x) = U(t)U(s)f(x)$ (полугрупповое свойство), $U(0) = I$,
(M2): $f(x) \geqslant 0 \;\Rightarrow\; U(t)f(x) \geqslant 0$ (сохранение положительности),
(M3): $f(x) \leqslant 1 \;\Rightarrow\; U(t)f(x) \leqslant 1$ (субмарковское свойство),
(M4): $U(t)1 = 1$ (консервативность),

называется *марковской полугруппой*. Семейство U, удовлетворяющее условиям (M1)–(M3), называется *субмарковской полугруппой*.

Первое знакомство с марковской полугруппой вызывает у читателя, не связанного с теорией вероятностей, некоторое удивление по поводу разнородности свойств, вынесенных в определение полугруппы. Всё становится на свои места, когда становится известным стохастическое происхождение этих полугрупп.

Если $X = \{X(t),\, t \geqslant 0\}$ — однородный марковский процесс в фазовом пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ с переходной функцией $P(s, x; t, B)$, то семейство операторов

$$U(t)f(x) := \mathbb{E}^{0,x}[f(X(t))] = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)P(0, x; t, dy), \quad f \in B_b(\mathbb{R}^n),\ x \in \mathbb{R}^n,\ t \geqslant 0, \tag{3.5}$$

образует полугруппу в пространстве $B_b(\mathbb{R}^n)$, называемую *переходной полугруппой процесса* X, которая является марковской.

Действительно, полугрупповое свойство (M1) переходной полугруппы является следствием марковского свойства процесса X, а условие $U(0) = I$ — следствием очевидного наблюдения, что вероятность $P(t, x; t, B)$ системы, находящейся в момент времени t в состоянии x, оказаться в этот же момент в одном из состояний множества B равна 1 при $x \in B$ и 0 при $x \notin B$. Свойство (M2) есть результат неотрицательности меры P, а свойства (M3)–(M4) — отражение того, что вероятностная мера всего пространства равна 1.

Напомним, что решение стохастического дифференциального уравнения (1.4) представляет собой однородный марковский процесс, и, следовательно, ему тоже соответствует переходная полугруппа. Мы уже исследовали характеристики решения уравнения (1.4) при помощи инфинитезимальных характеристик в разделе 1.2 и при помощи формулы Ито в разделе 1.3. В этом разделе мы применяем полугрупповые методы.

Переходная полугруппа описывает эволюцию текущего состояния процесса $X(t)$ при известном начальном состоянии $X(0) = x$ на языке характеристик вида $u(t, x) := U(t)f(x)$. Характеристика $v(t, x)$, введённая в разделе 1.3 равенством (1.11), также описывает текущее состояние процесса $X(t) = x$ но при известном его конечном состоянии $X(T)$. Можно сказать, что функция $v(t, x)$ описывает историю развития процесса X до момента времени T, а функция $u(t, x)$ — его эволюцию от некоторого начального момента, поэтому для функции $v(t, x)$ естественным образом появляется обратное уравнение с финальным условием $v(T, x) = f(x)$, а для функции $u(t, x)$ — прямое уравнение с начальным условием $f(x)$. Подобные рассуждения справедливы и для задач Коши (1.8) и (1.3) для плотности переходной вероятности.

Вернёмся к полугруппам. Из свойства (M3) следует, что операторы полугруппы ограничены, более того, субмарковская полугруппа является сжимающей: $\|U(t)f\| \leqslant \|f\|$, $f \in B_b(\mathbb{R}^n)$.

Определение 3.2. Субмарковская полугруппа $\{U(t),\, t \geqslant 0\}$, отображающая $C_0(\mathbb{R}^n)$ в $C_0(\mathbb{R}^n)$ и сильно непрерывная в нуле в $C_0(\mathbb{R}^n)$: $\|U(t)f - f\| \to 0$ при $t \to 0$, $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ — называется *феллеровской полугруппой* (*полугруппой Феллера*). Однородный марковский процесс, переходная полугруппа которого является феллеровской, называется *феллеровским процессом*.

Замечание 3.1. Сравнивая с полугруппами, введёнными в предыдущем разделе, заметим, что феллеровские полугруппы являются полугруппами класса C_0 в пространстве $E = C_0(\mathbb{R}^n)$. Это означает, что задача Коши (2.1) с оператором A — генератором феллеровской полугруппы, является равномерно корректной на $\operatorname{dom} A \subset C_0(\mathbb{R}^n)$.

Мы определили феллеровские случайные процессы по поведению их переходных полугрупп. Верно и обратное, любая феллеровская полугруппа есть переходная полугруппа некоторого стохастического процесса (который при этом автоматически является феллеровским и субмарковским однородным).

Замечание 3.2. Отметим здесь, что феллеровские полугруппы могут оказаться как марковскими (консервативными), так и субмарковскими (неконсервативными). Это означает, что соответствующий случайный процесс является либо марковским с переходной функцией $P(s,x;t,\cdot)$, являющейся вероятностной мерой на $\mathbb{R}^n$ (т. е. $P(s,x;t,\mathbb{R}^n)=1$), либо *субмарковским*[1] — с переходной функцией $P(s,x;t,\cdot)$, являющейся субвероятностной мерой на $\mathbb{R}^n$ (т. е. $P(s,x;t,\mathbb{R}^n)<1$). Последнее означает, что процесс выходит за пределы фазового пространства. В этом случае иногда говорят,что процесс *умирает* для $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ илиимеет *конечное время жизни* в пространстве $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

Среди переходных полугрупп однородных марковских процессов особое место занимают феллеровские полугруппы, *инвариантные относительно сдвигов*:

$$\tau_z U(t)f = U(t)\tau_z f, \quad \text{где} \ \ \tau_z u := u(\cdot+z). \tag{3.6}$$

Предложение 3.1. *Феллеровская полугруппа* $\{U(t),\, t\geqslant 0\}$, *инвариантная относительно сдвигов, представима в виде оператора свёртки*

$$U(t)f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\eta_t(x-dy) = (\eta_t * f)(x), \tag{3.7}$$

где мера $\eta_t(\cdot)$ *на* $\mathbb{R}^n$ *связана с переходной функцией* $P(s,x;t,B)$ *соответствующего феллеровского процесса соотношением*

$$\eta_t(x-B) = P(0,x;t,B), \quad B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n). \tag{3.8}$$

Доказательство. Согласно классическим результатам [13, Th. 6.33], линейный непрерывный оператор $U:\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\to C(\mathbb{R}^n)$ является инвариантным относительно сдвигов, если и только если он представим в виде свёртки с ядром из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Следовательно, найдётся такое $\lambda_t\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, что сужение полугруппы $U(t)$ на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ может быть записано в виде свёртки: $U(t)\varphi(x) = (\lambda_t*\varphi)(x)$, $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Поскольку полугруппа сохраняет положительность (свойство (M2)), распределение $\lambda_t\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ является положительным: для любой основной функции ψ, принимающей неотрицательные значения, значение функционала также неотрицательно:

$$\lambda_t(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n}\lambda_t(y)\psi(y)\,dy := \int_{\mathbb{R}^n}\lambda_t(y)\varphi(-y)\,dy = U(t)\varphi(0)\geqslant 0.$$

Согласно ещё одному классическому результату [14, теорема 2.1.7], положительные распределения отождествляются с положительными мерами — элементами из пространства, сопряженного к $C_0(\mathbb{R}^n)$: $\lambda_t(y)dy = \eta_t(dy)$, что даёт представление полугруппы в виде (3.7).

Для завершения доказательства остаётся сравнить полученное представление с (3.5) и заметить справедливость соотношения (3.8). □

Замечание 3.3. Свойство (3.6) инвариантности полугруппы относительно сдвигов выражается свойством инвариантности переходной функции относительно сдвигов фазового пространства: $P(s,x;t,B) = P(s,0;t,B-x)$. Обозначая μ_t закон распределения процесса, стартовавшего из нуля: $\mu_t(B) = P(0,0;t,B)$, получаем, что построенная мера η_t есть «отзеркаленный» относительно нуля закон распределения процесса:

$$\eta_t(B) = \mu_t(-B). \tag{3.9}$$

Теперь мы вплотную приблизились к процессам, с которых начинали исследование — процессам Леви.

Предложение 3.2 (см. [19, Th. 2.6]). *Инвариантная относительно сдвигов феллеровская полугруппа* $\{U(t),\, t\geqslant 0\}$ *консервативна тогда и только тогда, когда соответствующий ей случайный процесс является процессом Леви.*

[1]Такие процессы также называют *обрывающимися* [7, с. 19].

Отсюда следует, что случайный процесс, соответствующий неконсервативной инвариантной относительно сдвигов феллеровской полугруппе $\{U(t),\, t \geqslant 0\}$, является *процессом Леви с конечным временем жизни* (в контексте замечания 3.2).

Пусть $L = \{L(t),\, t \geqslant 0\}$ — процесс Леви. Представление его переходной полугруппы в форме операторов свертки открывает возможности для эффективного применения преобразования Фурье. Во-первых, преобразование Фурье переводит свёртку в произведение: $\mathcal{F}[U(t)f](\sigma) = \widehat{\eta}_t(\sigma)\widehat{f}(\sigma)$, откуда, в силу связи (3.9) мер η_t и μ_t и определения характеристической функции (3.3)–(3.4) получаем, что преобразование Фурье полугруппы есть произведение характеристической функции $\Phi_{L(t)}(\sigma)$ и Фурье-образа функции f:

$$\mathcal{F}[U(t)f](\sigma) = (2\pi)^n \check{\mu}_t(\sigma)\widehat{f}(\sigma) = \Phi_{L(t)}(\sigma)\widehat{f}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{3.10}$$

Во-вторых, если полугруппа представлена в виде свёртки, то полугрупповому свойству (M1) соответствует свёртка мер: $(M1) \iff \eta_{t+s} = \eta_t * \eta_s,\ \eta_0 = \delta$, из которой следует безграничная делимость мер η_t и μ_t: $\widehat{\eta}_t = (\widehat{\eta}_{t/n})^n \iff \check{\mu}_t = (\check{\mu}_{t/n})^n$, что, в свою очередь, позволяет применить к функции $\Phi_{L(t)}$ формулу Леви—Хинчина, описывающую структуру логарифма характеристической функции безгранично делимого распределения.

Изложенные рассуждения суммирует следующая теорема (см., например, [3, 16, 19, 27, 36]).

Теорема 3.1. *Пусть $L = \{L(t),\, t \geqslant 0\}$ — процесс Леви. Тогда*

$$\Phi_{L(t)}(\sigma) = \mathbb{E}\left[e^{i(\sigma, L(t))}\right](\sigma) = e^{t\psi(\sigma)}, \quad t \geqslant 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \tag{3.11}$$

где

$$\psi(\sigma) = i(b,\sigma) - \frac{1}{2}(\sigma, Q\sigma) + \int_{\mathbb{R}^n} \Big(e^{i(\sigma,y)} - 1 - i(\sigma,y)\cdot \mathbf{1}_{|y|\leqslant 1}(y)\Big)\nu(dy). \tag{3.12}$$

В этом представлении однозначно определённые характеристики (b, Q, ν) таковы: $b \in \mathbb{R}^n$, Q — симметричная неотрицательно определённая $n \times n$-матрица, ν — мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая условиям $\nu(\{0\}) = 0$ и $\int_{\mathbb{R}^n} \big(|y|^2 \wedge 1\big)\nu(dy) < \infty$.

Верно и обратное: для любой функции ψ вида (3.12)*, удовлетворяющей приведённым условиям, существует процесс Леви, удовлетворяющий соотношению* (3.11).

Определение 3.3. В условиях теоремы 3.1 равенство (3.12) называют *формулой Леви—Хинчина*, функцию ψ — *символом Леви*, (b, Q, ν) — *тройкой Леви*, b — *коэффициентом сноса* (*сдвига*), Q — *ковариационной матрицей*, ν — *мерой Леви*.

Начиная от классических доказательств Леви и Хинчина в 30-е годы прошлого столетия, существует множество вероятностных и аналитических доказательств формулы Леви—Хинчина. Например, доказательство в [27] основано на свойствах класса отрицательно определённых функций, которому показана принадлежность функция ψ. Обзор истории становления этой формулы можно найти в [36].

В общем случае, когда $\{U(t),\, t \geqslant 0\}$ — инвариантная относительно сдвигов полугруппа Феллера и $\{X(t),\, t \geqslant 0\}$ — соответствующий случайный процесс, функция $\psi(\sigma)$ в представлении (3.11) имеет вид:

$$\psi(\sigma) = \psi(0) + i(b,\sigma) - \frac{1}{2}(\sigma, Q\sigma) + \int_{\mathbb{R}^n} \Big(e^{i(\sigma,y)} - 1 - i(\sigma,y)\cdot \mathbf{1}_{|y|\leqslant 1}(y)\Big)\nu(dy). \tag{3.13}$$

В этом представлении $\psi(0) \leqslant 0$, а остальные параметры соответствуют теореме 3.1. Здесь тройка (b, Q, ν) определяется функцией $\psi(\sigma) - \psi(0)$ однозначно.

Верно и обратное: для любой функции ψ вида (3.13), удовлетворяющей приведённым условиям, существует процесс Леви (с конечным или бесконечным временем жизни), удовлетворяющий соотношению (3.11), и связанная с ним инвариантная относительно сдвигов феллеровская полугруппа (см. [19, Th. 2.2]).

Для функции $\psi(\sigma)$ справедливы оценки:

$$\operatorname{Re}\psi(\sigma) \leqslant 0, \qquad |\psi(\sigma)| \leqslant C(1 + |\sigma|^2), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \tag{3.14}$$

первая из которых следует из представления (3.11) и того, что для любой случайной величины $|\Phi(\sigma)| \leqslant 1$, а вторая — из представления (3.13).

Формула (3.13) позволяет получить критерий консервативности/неконсервативности полугруппы (или продолжительности жизни соответствующего процесса) в терминах символа Леви. Действительно, из соотношения $e^{t\psi(0)} = \Phi_{X(t)}(0) = \mu_t(\mathbb{R}^n)$ для консервативной полугруппы получаем: $\mu_t(\mathbb{R}^n) = 1 \iff \psi(0) = 0$, а для неконсервативной: $\mu_t(\mathbb{R}^n) < 1 \iff \psi(0) < 0$.

Перейдём к вопросу о представлении генератора переходной полугруппы.

3.2. Генераторы феллеровских полугрупп. Напомним, что генератором полугруппы $\{U(t), t \geqslant 0\}$ в пространстве $B_b(\mathbb{R}^n)$ называется оператор $Af(x) := \lim\limits_{t\to 0} \frac{U(t)f(x)-f(x)}{t}$, $x \in \mathbb{R}^n$, определённый для тех $f \in B_b(\mathbb{R}^n)$, для которых этот предел существует.

Найдём генератор феллеровской полугруппы, инвариантной относительно сдвигов. Возьмём для начала $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и, пользуясь преобразованием Фурье и соотношениями (3.10) и (3.11), запишем полугруппу в виде

$$U(t)f(x) = \mathcal{F}^{-1}\big[e^{t\psi(\sigma)}\widehat{f}(\sigma)\big](x). \tag{3.15}$$

Тогда

$$Af(x) = \mathcal{F}^{-1}\Big[\lim_{t\to 0}\frac{e^{t\psi(\sigma)}-1}{t}\widehat{f}(\sigma)\Big](x) = \mathcal{F}^{-1}\big[\psi(\sigma)\widehat{f}(\sigma)\big](x). \tag{3.16}$$

Из представления (3.13) функции $\psi(\sigma)$ по свойствам обобщённого преобразования Фурье находим:

$$Af(x)=\psi(0)f(x)+(b,\nabla f(x))+\frac{1}{2}\operatorname{div}Q\nabla f(x)+\int_{\mathbb{R}^n}\big(f(x+y)-f(x)-(\nabla f(x), y\cdot \mathbf{1}_{|y|\leqslant 1}(y))\big)\nu(dy),\ \ f\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{3.17}$$

Нетрудно показать, что это равенство может быть продолжено на дважды непрерывно дифференцируемые функции пространства $C_0(\mathbb{R}^n)$ и, таким образом, $C_0^2(\mathbb{R}^n) \subseteq \operatorname{dom} A \subset B_b(\mathbb{R}^n)$. Полное описание области определения оператора A нам неизвестно. Однако представление (3.17) вполне определяет генератор, потому что множество $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ является ядром оператора A ($\operatorname{core} A$) в смысле следующего определения.

Определение 3.4. Пусть A — замкнутый линейный оператор в банаховом пространстве E с областью определения $\operatorname{dom} A$. Линейное подпространство $\mathcal{E} \subset \operatorname{dom} A$ называется *ядром оператора* A ($\mathcal{E} = \operatorname{core} A$), если $\overline{A|_{\mathcal{E}}} = A$, т. е. для любого $f \in \operatorname{dom} A$ найдётся такая последовательность $f_n \in \mathcal{E}$, что $f_n \to f$ и $Af_n \to Af$.

Таким образом, мы получили, что генератор феллеровской полугруппы, инвариантной относительно сдвигов, представляет собой интегродифференциальный оператор (3.17).

В общем случае феллеровской полугруппы вид генератора определяет следующая теорема [19, Th. 2.21].

Теорема 3.2. *Пусть A — генератор феллеровской полугруппы. Если $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \operatorname{dom} A$, то*

$$\begin{aligned} Af(x) \ = \ & a(x)f(x) + (b(x), \nabla f(x)) + \frac{1}{2}\, div\, Q(x)\nabla f(x) + \\ & + \int_{\mathbb{R}^n}\big(f(x+y) - f(x) - (\nabla f(x), y\cdot\mathbf{1}_{|y|\leqslant 1}(y))\big)\nu(x,dy), \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \end{aligned} \tag{3.18}$$

где $a(x) \leqslant 0$ и при каждом $x \in \mathbb{R}^n$ тройка $(b(x), Q(x), \nu(x,\cdot))$ соответствует условиям теоремы 3.1.

Теперь, имея генератор феллеровской полугруппы, мы получаем уравнение для вероятностной характеристики $u(t,x) = U(t)f(x)$ соответствующего процесса X.

Предложение 3.3. *Пусть X — феллеровский процесс и $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \operatorname{dom} A$. Тогда для любого $f \in \operatorname{dom} A$ функция $u(t,x)$ является решением задачи Коши $u_t'(t,x) = Au(t,x)$, $u(0,x) = f(x)$, $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, с оператором A, определённым равенством* (3.17).

Используя полугрупповую технику, ослабим условия теоремы 1.4 и покажем возможность не требовать дифференцируемости характеристики $v(t,x)$, определенной в разделе 1.3 равенством (1.11).

Предложение 3.4. *Пусть функция $v(t,x)$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ определена соотношением* (1.11). *Если процесс X — феллеровский и A — генератор соответствующей переходной полугруппы U, то для любого $f \in \operatorname{dom} A \cap C_0(\mathbb{R}^n)$ функция $v(t,x)$ дважды непрерывно дифференцируема по x.*

Доказательство. В силу однородности процесса функцию v можно представить как действие полугруппы:
$$v(t,x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(y)P(t,x;T,dy)=\int_{\mathbb{R}^n} f(y)P(0,x;T-t,dy)=U(T-t)f(x),\quad f\in C_0(\mathbb{R}^n).$$
Полугруппа U — феллеровская, т. е. отображает $C_0(\mathbb{R}^n)$ в $C_0(\mathbb{R}^n)$ и её сужение на пространство $C_0(\mathbb{R}^n)$ образует полугруппу класса C_0 в этом пространстве. Как известно, полугруппа класса C_0 (в пространстве E) коммутирует со своим генератором на его области определения (лежащей в пространстве E), т. е. в нашем случае $AU(t)f(x)=U(t)Af(x)$, $f\in \operatorname{dom}A\subset C_0(\mathbb{R}^n)$. Отсюда получаем, что $v(t,\cdot)=U(T-t)f(\cdot)\in\operatorname{dom}A\subset C_0(\mathbb{R}^n)$. Осталось заметить, что функции, входящие в область определения A и лежащие в пространстве $C_0(\mathbb{R}^n)$, дважды непрерывно дифференцируемы. $\square$

В заключение коснёмся спектральных характеристик генераторов и свойств полугрупп в пространствах L_p, $p\geqslant 1$.

Учитывая свойства феллеровских полугрупп быть сжимающими и сильно непрерывными на пространстве $C_0(\mathbb{R}^n)$, мы можем сформулировать классический критерий поведения генератора такой полугруппы в терминах оценок на резольвенту.

Теорема 3.3 (Хилле—Иосида). *Пусть A — плотно определённый замкнутый оператор в банаховом пространстве E с резольвентой $\mathcal{R}(\lambda)$. Оператор A является генератором сжимающей полугруппы на E, если и только если*

1) $(0,\infty)\subseteq\rho(A)$, *где* $\rho(A)$ — *резольвентное множество оператора* A;
2) $\|\mathcal{R}(\lambda)\|\leqslant 1/\lambda$ *при* $\lambda>0$.

Покажем, что резольвенту генератора феллеровской полугруппы, в классической теории полугрупп представимую в форме преобразования Лапласа, на базе техники характеристических функций можно представить в виде преобразования Фурье:
$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\lambda)f(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}U(t)f(x)\,dt=(2\pi)^n\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma,x)}e^{t\psi(\sigma)}\widehat{f}(\sigma)\,d\sigma=\\ &= (2\pi)^n\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma,x)}\widehat{f}(\sigma)\,d\sigma\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}e^{t\psi(\sigma)}\,dt=(2\pi)^n\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma,x)}\frac{\widehat{f}(\sigma)}{\lambda-\psi(\sigma)}\,d\sigma=\\ &= \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\widehat{f}(\sigma)}{\lambda-\psi(\sigma)}\right],\quad \operatorname{Re}\lambda>\operatorname{Re}\psi(\sigma).\end{aligned}$$
Свойства переходных полугрупп в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$, $p\geqslant 1$, устанавливает теорема.

Теорема 3.4 (см. [16, Th. 3.4.2]). *Если $X=\{X(t),\,t\geqslant 0\}$ является процессом Леви, то семейство операторов*
$$U(t)f(x)=\mathbb{E}[f(X(t)+x)],\quad f\in L_p(\mathbb{R}^n),\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\geqslant 0,\tag{3.19}$$
образует марковскую полугруппу в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ и $\|U(t)f\|_{L_p}\leqslant\|f\|_{L_p}$.

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$, используя формулу Леви—Хинчина (3.12) и свойства преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R}^n)$, можно полностью описать область определения генератора полугруппы (3.19): $\operatorname{dom}A=\left\{f\in L_2(\mathbb{R}^n):\int_{\mathbb{R}^n}|\psi(\sigma)|^2|\widehat{f}(\sigma)|^2\,d\sigma<\infty\right\}$.

3.3. Примеры полугрупп, связанных с процессами Леви. Здесь мы приводим примеры полугрупп, связанных с базовыми процессами Леви. Несмотря на то, что все рассматриваемые семейства имеют близкие полугрупповые свойства, они принципиально различаются с точки зрения приложений к моделированию случайных процессов и их вероятностных характеристик. Для наглядности все примеры рассматриваются в $\mathbb{R}$.

Пример 3.1. Начнём с полугруппы операторов сдвига $U_1=\{U_1(t),t\geqslant 0\}$, связанной с процессом сдвига $X_1(t)=x+bt$, $x,b\in\mathbb{R}$, $t\geqslant 0$. Процесс X_1 является детерминированным процессом, и для него имеют место свойства стохастической непрерывности, временной и пространственной однородности.

Поскольку вероятность перехода из точки x в точку $y<x+bt$ равна нулю, а в точку $y\geqslant x+bt$ равна единице, то для процесса сдвига X_1 можно задать обобщённую плотность переходной

вероятности[1] следующим образом: $p_1(0,x;t,y) = \delta_{x+bt}(y) = \delta(y-(x+bt))$. Тогда соответствующая процессу X_1 переходная полугруппа U_1 имеет вид $U_1(t)f(x) = \langle f(\cdot), p_1(0,x;t,\cdot)\rangle = \langle f, \delta_{x+bt}\rangle = f(x+bt)$. Эта полугруппа является сильно непрерывной на пространстве $C_0(\mathbb{R})$ и может быть продолжена на пространств $B_b(\mathbb{R})$, измеримых ограниченных на $\mathbb{R}$ функций.

Нетрудно проверить, что $u(x,t) = U_1(t)f(x)$ — значение функционала, зависящего от параметров $t \geqslant 0$ и $x \in \mathbb{R}$, является решением задачи Коши $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = b\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $u(x,0) = f(x)$. Следовательно, генератором полугруппы U_1 является оператор дифференцирования первого порядка $A_1 = b\frac{\partial}{\partial x}$.

Пример 3.2. Переходная полугруппа $U_2 = \{U_2(t), t \geqslant 0\}$ винеровского процесса с плотностью переходной вероятности $p_2(0,x;t,y) = \frac{1}{c\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2c^2 t}}$ задаётся соотношением $U_2(t)f(x) = \frac{1}{c\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{2c^2 t}}dy$. Полугруппа определена на пространстве $B_b(\mathbb{R})$, является сильно непрерывной на пространстве $C_0(\mathbb{R})$ и, кроме того, является сильно непрерывной на пространстве $L_2(\mathbb{R})$ (см., например, [2]).

Функция $u(x,t) = U_2(t)f(x)$ является решением задачи Коши $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{c^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $u(x,0) = f(x)$, генератором полугруппы U_2 является оператор $A_2 = \frac{c^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Пример 3.3. Рассмотрим процесс Пуассона $\{X_3(t), t \geqslant 0\}$ — процесс со скачками величины q, интенсивностью λ и начальным состоянием $X_3(0) = x$ п.н. Процесс задаётся с помощью функции переходной вероятности $P_3(0,x;t,y) := P_3(0,x;t,(-\infty;y)) = \sum\limits_{k=0}^{d_q} \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$, где $d_q = d_q(x,y)$ равно целой части $\left[\frac{y-x}{q}\right]$ при $\left[\frac{y-x}{q}\right] \neq \frac{y-x}{q}$ и $\left[\frac{y-x}{q} - 1\right]$ — в противном случае. Обобщённая плотность переходной вероятности определяется соотношением $p_3(0,x;t,y) = \sum\limits_{k=0}^{d_q} \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\delta_{x+kq}(y)$. Отсюда несложно получить представление переходной полугруппы: $U_3(t)f(x) = \langle f(\cdot), p_3(0,x;t,\cdot)\rangle = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}f(x+kq)$. Полугруппа U_3 определена на пространстве $C_0(\mathbb{R})$ и является сильно непрерывной на этом пространстве:

$$\|U_3(t)f(x) - f(x)\| = \left\|(e^{-\lambda t}-1)f(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}f(x+kq)\right\| \xrightarrow[t\to 0]{} 0, \quad f \in C_0(\mathbb{R}).$$

Для данной полугруппы по определению генератора получаем:

$$A_3 f(x) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[U_3(t) - I\right]f(x) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big[\langle f(y), \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\delta_{x+kq}(y)\rangle - f(x)\Big] =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big[(e^{-\lambda t}-1)f(x) + \lambda t e^{-\lambda t}f(x+q)\big] = \lambda(f(x+q) - f(x)).$$

Отсюда следует, что $u(x,t) = U_3(t)f(x)$ является решением задачи Коши $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \lambda(u(x+q,t) - u(x,t))$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$, $u(x,0) = f(x)$.

Отметим, что, в отличие от дифференциальных операторов A_1, A_2, генератором полугруппы U_3 является разностный оператор.

Пример 3.4. Рассмотрим переходную полугруппу $U_4 = \{U_4(t),\, t \geqslant 0\}$, отвечающую составному процессу Пуассона $X_4 = \{X_4(t),\, t \geqslant 0\}$, сдвинутому на x. Пусть $\{z_k\}$ — последовательность независимых одинаково распределённых $\mathbb{R}$-значных случайных величин с общим законом распределения μ_z и $N = \{N(t),\, t \geqslant 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью λ. Тогда $X_\pi(t) = z_1 + \cdots + z_{N(t)}$ и есть составной процесс Пуассона с интенсивностью λ.

В данном случае, не имея для процесса в явном виде плотности переходной вероятности или функции переходной вероятности, для описания полугруппы, соответствующей $X_4 := X_\pi + x$, мы

[1] Функционал $p(0,x;t,\cdot)$ такой, что для любой функции $f \in C_0(\mathbb{R})$ справедливо равенство $\int_{\mathbb{R}} f(y)P(0,x;t,dy) = \langle f(\cdot), p(0,x;t,\cdot)\rangle$, будем называть *обобщённой плотностью переходной вероятности* процесса $\{X(t), t \geqslant 0\}$. Если функция переходной вероятности имеет плотность (производную в смысле Радона—Никодима), то $p(0,x;t,\cdot)$ является регулярной обобщённой функцией.

используем технику (обобщённого) преобразования Фурье от переходной вероятности процесса, или, в вероятностной терминологии, технику характеристических функций.

Найдём характеристическую функцию процесса X_π:

$$\begin{aligned}\Phi_{X_\pi(t)}(\sigma) &= \mathbb{E}\left[e^{i(\sigma,X_\pi(t))}\right](\sigma)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\left(e^{i\sigma(z_1+\dots+z_{N(t)})}\big|N(t)=k\right)\mathbf{P}(N(t)=k)=\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\Phi_z^k(\sigma)\frac{(t\lambda)^k}{k!}e^{-t\lambda}=e^{t\lambda(\Phi_z(\sigma)-1)}=:e^{t\psi(\sigma)},\quad \sigma\in\mathbb{R}.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Следовательно, процесс X_π является процессом Леви с символом Леви $\psi(\sigma)=\lambda(\Phi_z(\sigma)-1)$.

Из определения характеристической функции процесса как обобщённого обратного преобразования Фурье плотности переходной вероятности находим плотность процесса X_π как обобщённую функцию $\langle\varphi(\cdot),p_\pi(0,0;t,\cdot)\rangle=\frac{1}{2\pi}\langle\varphi(\cdot),\mathcal{F}[e^{t\lambda(\Phi_z(\sigma)-1)}](\cdot)\rangle$, $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, и представление для переходной полугруппы процесса X_4

$$\begin{aligned}U_4(t)f(x) &= \int_{\mathbb{R}}f(y)P_4(0,x;t,dy)=\int_{\mathbb{R}}f(y+x)P_\pi(0,0;t,dy)=\langle f(y+x),p_\pi(0,0;t,y)\rangle=\\ &= \frac{1}{2\pi}\langle f(y+x),\mathcal{F}[e^{t\lambda(\Phi_z(\sigma)-1)}](y)\rangle=\frac{1}{2\pi}\langle\mathcal{F}[f(y+x)](\sigma),e^{t\lambda(\Phi_z(\sigma)-1)}\rangle=\\ &= \frac{1}{2\pi}\langle e^{ix\sigma}\mathcal{F}[f](\sigma),e^{t\lambda(\Phi_z(\sigma)-1)}\rangle=\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}(\sigma)e^{t\lambda(\Phi_z(\sigma)-1)}](x),\quad f\in C_0(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Генератор полугруппы U_4 мы получим в следующем разделе, используя технику псевдодифференциальных операторов.

3.4. Генераторы полугрупп как псевдодифференциальные операторы и операторы с ядрами. Операторы рассматриваемых полугрупп вида $U(t)f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)dP(0,x;t,y)$, $x\in\mathbb{R}^n$, похожи на классические интегральные операторы. Однако, как мы видели в рассмотренных примерах, претенденты на ядра — плотности переходных вероятностей $p(0,x;t,\cdot)$ — не принадлежат в общем случае пространству интегрируемых функций. В настоящем разделе мы покажем, что операторы полугрупп и их генераторы принадлежат классу псевдодифференциальных операторов, обобщающему классы дифференциальных и интегральных операторов, и что они являются операторами с ядрами из пространства распределений $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$.

Определение 3.5. *Псевдодифференциальным оператором* на классе функций $\mathcal{A}$ называют оператор вида $Kf(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(x,\sigma)}s(x,\sigma)\widehat{f}(\sigma)d\sigma$, $x\in\mathbb{R}^n$, $f\in\mathcal{A}$, где функция $s:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ называется *символом* псевдодифференциального оператора.

На классе функций $\mathcal{A}=\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ для операторов с локально ограниченными по x и полиномиально-ограниченными по σ символами имеем $Kf\,(x)=\mathcal{F}^{-1}[s(x,\cdot)\widehat{f}(\cdot)](x)$, $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Такие операторы обобщают класс дифференциальных операторов с переменными ограниченными коэффициентами: оператор $K=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x)\frac{d^k}{dx^k}$, $x\in\mathbb{R}$ является псевдодифференциальным

$$\begin{aligned}Kf\,(x) &= \sum_{k=0}^{n}a_k(x)\frac{d^k}{dx^k}f(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n}a_k(x)\int_{\mathbb{R}}e^{ix\sigma}(i\sigma)^k\widehat{f}(\sigma)d\sigma=\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\sum_{k=0}^{n}a_k(x)e^{ix\sigma}(i\sigma)^k\widehat{f}(\sigma)d\sigma=:\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{ix\sigma}s(x,\sigma)\widehat{f}(\sigma)d\sigma,\end{aligned}$$

с символом $s(x,\sigma)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x)(i\sigma)^k$.

Отсюда следует, что генераторы полугрупп U_1 и U_2, как частный случай операторов $K=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x)\frac{d^k}{dx^k}$, являются псевдодифференциальными со степенными (по σ) символами. Мы покажем, что генераторы A_3 и A_4 полугрупп U_3 и U_4 тоже относятся к классу псевдодифференциальных операторов. Более того, покажем, что генераторы полугрупп, соответствующих сдвинутым на x процессам Леви, можно рассматривать как операторы с ядрами $\mathcal{K}$, действующими на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$.

Согласно теореме Шварца о ядре [14, с. 158], существует взаимно-однозначное соответствие между непрерывными операторами

$$K : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}'(Y) \tag{3.21}$$

и распределениями $\mathcal{K} \in \mathcal{D}'(X \times Y)$. А именно, любому непрерывному оператору (3.21) соответствует единственное распределение $\mathcal{K} \in \mathcal{D}'(X \times Y)$ такое, что

$$\langle \phi, K\varphi \rangle = \langle \varphi \otimes \phi, \mathcal{K} \rangle, \quad \text{где} \quad (\varphi \otimes \phi)(x, y) := \varphi(x)\phi(y), \quad \varphi \in \mathcal{D}(X),\ \phi \in \mathcal{D}(Y), \tag{3.22}$$

называемое *ядром оператора* K; и в обратную сторону, по $\mathcal{K}$ определяется K.

Отметим, что, как показано в [14], можно рассматривать также пары $K : \mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}'(Y)$ и $\mathcal{K} \in \mathcal{S}'(X \times Y)$.

В зависимости от специфики задач, решаемых с помощью псевдодифференциальных операторов, выделяют различные классы символов. В настоящей работе для определения генераторов полугрупп нам будет достаточно предполагать, что символ s принадлежит подходящему классу Хермандера [14, гл. 7], [15, гл. 18]. Псевдодифференциальные операторы с такими символами корректно определены на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, а соответствующие операторы $K : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Для символов, отвечающих самим полугруппам, следует использовать классы функций, зависящие от временного параметра.

Теорема 3.5. *Пусть $\{X(t),\, t \geqslant 0\}$ — процесс Леви и $U = \{U(t),\, t \geqslant 0\}$ — переходная полугруппа процесса $Y = \{X(t)+x\}$. Тогда генератор полугруппы U является псевдодифференциальным оператором и оператором с ядром из пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Для начала заметим, что представление (3.16) генератора полугруппы можно распространить на $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, пользуясь полиномиальной оценкой (3.14) функции ψ:

$$Af(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\psi(\sigma)\widehat{f}(\sigma)\right](x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma,x)}\psi(\sigma)\widehat{f}(\sigma)\,d\sigma, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

следовательно, оператор A является псевдодифференциальным оператором с полиномиально ограниченным символом $s(x,\sigma) = \psi(\sigma)$ на классе $\mathcal{A} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Найдём ядро $\mathcal{K}$ оператора A. Из предыдущего представления, формально меняя порядок интегрирования, получаем

$$Af\,(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma,x)}\psi(\sigma)\,d\sigma \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\sigma,y)}f(y)\,dy = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}(x,y)f(y)\,dy,$$

где через $\mathcal{K}$ обозначен расходящийся интеграл:

$$\mathcal{K}(x,y) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma,x-y)}\psi(\sigma)\,d\sigma.$$

Придадим ядру $\mathcal{K}$ смысл, рассматривая его как распределение на основных функциях $\varphi \otimes \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. По определению (3.22) имеем

$$\begin{aligned}\langle \varphi(x)\phi(y), \mathcal{K}(x,y)\rangle &= \langle \phi(y), A\varphi(y)\rangle = \langle \phi(y), \mathcal{F}^{-1}[\psi(\sigma)\widehat{\varphi}(\sigma)](y)\,\rangle = \langle \phi(y), (\mathcal{F}^{-1}[\psi] * \varphi)(y)\,\rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\phi(y)\,dy\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma,y)}\psi(\sigma)\,d\sigma\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\sigma,z)}\varphi(z)\,dz.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Повторный интеграл здесь сходится в силу гладкости функций ϕ и φ, степенных оценок на символ Леви ψ и поведения (прямого и обратного) преобразования Фурье от функций ϕ и φ из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, генератор A взаимно однозначно определяется ядром $\mathcal{K} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. □

Теперь покажем конструкцию ядер для генераторов A_1–$A_4 : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, используя представление этих псевдодифференциальных операторов через символы, определяемые для каждого из них формулой (3.12).

Для генератора полугруппы U_1 символ имеет вид $\psi(\sigma) = ib\sigma$. Тогда ядро генератора определяется равенством $\langle \varphi(x)\phi(y), \mathcal{K}_1(x,y)\rangle = \langle \phi(y), (\mathcal{F}^{-1}[\psi] * \varphi)(y)\,\rangle = b\int_{\mathbb{R}}\phi(y)\varphi'(y)dy$.

Для генератора полугруппы U_2 символ определяется равенством $\psi(\sigma) = -\frac{c^2}{2}\sigma^2$. Тогда получаем следующее выражение для ядра генератора A_2: $\langle \varphi(x)\phi(y), \mathcal{K}_2(x,y)\rangle = \frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}}\phi(y)\varphi''(y)dy$.

Для генератора полугруппы U_3 находим символ: $\psi(\sigma) = \lambda(e^{iq\sigma} - 1)$. Тогда ядро определяется следующим образом: $\langle \varphi(x)\phi(y), \mathcal{K}_3(x,y)\rangle = \langle \phi(y),\ \lambda(\varphi(y+q) - \varphi(y))\rangle = \lambda\int_{\mathbb{R}}\phi(y)(\varphi(y+q) - \varphi(y))dy$.

Для полугруппы, соответствующей процессу $\{X_4(t), t \geqslant 0\}$, сначала найдем генератор. Для него $\psi(\sigma) = \int_{\mathbb{R}}\lambda(e^{i\sigma\beta} - 1)\mu_z(d\beta)$, что следует из представления (3.20) характеристической функции

$\Phi_{X_4(t)}$. Тогда с помощью теоремы Фубини и формул преобразования Фурье для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ получаем оператор A_4:

$$A_4 f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\sigma x}\int_{\mathbb{R}}(e^{i\sigma\beta}-1)\lambda\mu_z(d\beta)\hat{f}(\sigma)d\sigma =$$
$$= \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\sigma x}e^{i\sigma\beta}\hat{f}(\sigma)d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\sigma x}\hat{f}(\sigma)d\sigma\right)\lambda\mu_z(d\beta) = \int_{\mathbb{R}}\left(f(x+\beta)-f(x)\right)\lambda\mu_z(d\beta),$$

который можно продолжить на пространство $B_b(\mathbb{R})$.

Для генератора полугруппы U_4 с символом $\psi(\sigma) = \int_{\mathbb{R}}\lambda(e^{i\sigma\beta}-1)\mu_z(d\beta)$ имеем

$$\langle\varphi(x)\phi(y),\, \mathcal{K}_4(x,y)\rangle = \langle\phi(y),\, \lambda\int_{\mathbb{R}}[\varphi(y+\beta)-\varphi(y)]\mu_z(d\beta)\,\rangle.$$

Для полугрупп $\{U_1(t), U_2(t), U_3(t), t \geqslant 0\}$ получаем ядра $\delta_{x+bt}(y)$, $e^{-\frac{(x-y)^2}{2c^2t}}$, $\sum\limits_{k=0}^{d_q}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\delta_{x+kq}(y)$.

В заключение отметим, что если процесс X не является процессом Леви, но является феллеровским процессом, то формула (3.18) показывает, что генераторы и более общих полугрупп, нежели полугруппы Леви, являются псевдодифференциальными операторами с символом $s(x,\sigma)$.

Далее мы используем технику обобщённого преобразования Фурье и формулу Леви—Хинчина (3.12), чтобы рассмотреть псевдодифференциальные операторы в рамках классификации Гельфанда и Шилова, построенной для линейных дифференциальных операторов.

4. Задачи, связанные со случайными процессами, в полугрупповой классификации и классификации Гельфанда—Шилова. Схема сравнения

В этом разделе обсуждается место стохастических задач в соотношении между полугрупповой классификацией абстрактных задач Коши раздела 2, основанной на спектральных свойствах генераторов полугрупп и преобразовании Лапласа, и классификацией Гельфанда и Шилова дифференциальных систем, основанной на спектральных свойствах системы, технике обобщённого преобразования Фурье и свойствах мультипликаторов в пространствах основных и обобщённых функций. Начнём с краткого изложения классификации дифференциальных систем согласно [6].

4.1. Классификация Гельфанда—Шилова дифференциальных систем. Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathsf{A}\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)u(t,x), \quad t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \quad u(0,x) = f(x), \tag{4.1}$$

где

$$\mathsf{A}\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big) = \Big\{\mathsf{A}_{j,k}\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big\}_{j,k=1}^{m}, \tag{4.2}$$

дифференциальные операторы $\mathsf{A}_{j,k}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ являются линейными с постоянными коэффициентами порядка, не превышающего l.

Применим к задаче (4.1) обобщённое преобразование Фурье (3.2), полагая при этом, что классическим преобразованием Фурье[1] вектор-функции $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ является вектор-функция $\widetilde{f}(\sigma) = (\widetilde{f}_1(\sigma), \ldots, \widetilde{f}_m(\sigma))$ с компонентами $\widetilde{f}_j(\sigma) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma,x)}f_j(x)dx$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \ldots, m$. Получим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial\widetilde{u}(t,\sigma)}{\partial t} = \mathsf{A}\,(\sigma)\,\widetilde{u}(t,\sigma), \quad t \geqslant 0,\ \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad \widetilde{u}(0,\sigma) = \widetilde{f}(\sigma), \tag{4.3}$$

оператором решения которой служит матричная экспонента $e^{t\mathsf{A}(\sigma)}$:

$$\widetilde{u}(t,\sigma) = e^{t\mathsf{A}(\sigma)}\widetilde{f}(\sigma), \quad t \geqslant 0,\ \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{4.4}$$

Решение исходной задачи находится как обобщённое обратное преобразование Фурье функции $\widetilde{u}(t,\sigma)$

$$u(t,x) = G(t,x) * f(x), \qquad G(t,x) := \mathcal{F}^{-1}[e^{t\mathsf{A}(\sigma)}], \tag{4.5}$$

и его свойства определяются поведением матрицы-функции Грина $G(t,x)$, элементы которой могут оказаться как классическими, так и обобщёнными функциями.

[1] Мы сохраняем здесь определение операторов Фурье, введённое в [6]. Несложно связать его с преобразованием Фурье, введённым ранее в форме (3.1).

Целью исследований в [6] было построить классы корректности задачи (4.1), т. е. указать классы обычных функций $f(x)$, при которых существует обобщённое решение $u(t,x)$, лежащее в некотором классе также обычных функций, единственное и непрерывно зависящее от начальных условий. Для этого были детально изучены свойства функции $G(t,x)$, определяемые поведением экспоненты $e^{t\mathsf{A}(\sigma)}$.

Поскольку функция $e^{t\mathsf{A}(\sigma)}$ не имеет проблем с гладкостью и является целой, элементы матрицы-функции $G(t,x)$ быстро убывают на бесконечности, что гарантирует существование свёртки (4.5) для широкого класса начальных функций $f(x)$. Однако рост экспоненты приводит к нерегулярности функции $G(t,x)$, что заставляет подбирать пространства основных функций, обеспечивающие существование обобщённых функций (4.4) и (4.5). Для максимального расширения пространства решений пространства основных функций следует выбирать узкими, насколько возможно, в конечном итоге — имеющими аналитическое продолжение. Таким образом, задача сводится к определению максимально узких пространств основных функций, в которых функция $e^{t\mathsf{A}(\zeta)}$, $\zeta\in\mathbb{C}^n$, определяет мультипликатор — ограниченный оператор умножения. Тогда в двойственных относительно преобразования Фурье пространствах обобщённых функций функция $G(t,x)$ определяет ограниченный оператор свёртки. После этого остаётся выделить классы начальных условий $f(x)$, берущих на себя роль основных функций, при которых свёртка (4.5) является регулярной.

Свойство целой функции быть мультипликатором в том или ином пространстве основных функций определяется её поведением в комплексной плоскости и на действительной оси [5]. Для экспоненты $e^{t\mathsf{A}(\cdot)}$ справедлива оценка

$$e^{t\Lambda(\zeta)}\leqslant\|e^{t\mathsf{A}(\zeta)}\|_m\leqslant C(1+|\zeta|)^{l(m-1)}e^{t\Lambda(\zeta)},\qquad t\geqslant 0,\quad \zeta\in\mathbb{C}^n,\tag{4.6}$$

где $\Lambda(\zeta):=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}\operatorname{Re}\lambda_k(\zeta)$, функции $\lambda_1(\zeta),\ldots,\lambda_m(\zeta)$ — корни характеристического уравнения $\det(\lambda I-\mathsf{A}(\zeta))=0$.

Число $l_0=\inf\{\rho:|\Lambda(\zeta)|\leqslant C_\rho(1+|\zeta|)^\rho,\ \zeta\in\mathbb{C}^n\}$, $l_0\leqslant l$, называемое *точным степенным порядком роста* функции $\Lambda(\cdot)$ и *приведённым порядком системы* (4.1), определяет порядок роста экспоненты в целом в комплексной плоскости: $\|e^{t\mathsf{A}(\zeta)}\|_m\leqslant C(1+|\zeta|)^{l(m-1)}e^{bt\cdot|\zeta|^{l_0}}$, $b\in\mathbb{R}$, $t\geqslant 0$, $\zeta\in\mathbb{C}^n$. Эта оценка точная, она универсальна для всех систем. Дифференциация систем возникает при исследовании роста экспоненты $e^{t\mathsf{A}(\cdot)}$ на действительной оси, которое, в силу (4.6), целиком определяется поведением функции $\Lambda(\cdot)$. На основе этого в [6] выделены следующие классы систем.

Система (4.1) называется

- *корректной по Петровскому*, если найдется такая постоянная $C>0$, что $\Lambda(\sigma)\leqslant C$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$;
- *параболической*, если найдутся такие постоянные $C>0$, $h>0$, $C_1>0$, что
$$\Lambda(\sigma)\leqslant -C_1|\sigma|^h+C_2;\tag{4.7}$$
- *гиперболической*, если она корректна по Петровскому и приведённый порядок системы l_0 не превосходит единицы, т. е. $\Lambda(\zeta)\leqslant C_1|\zeta|+C_2$, $\zeta\in\mathbb{C}^n$;
- *условно корректной*, если найдутся такие постоянные $C>0$, $0<h<1$, $C_1>0$, что $\Lambda(\sigma)\leqslant C|\sigma|^h+C_1$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$;
- *некорректной*, если функция $\Lambda(\cdot)$ растет при действительных $s=\sigma$ так же, как и при комплексных: $\Lambda(\sigma)\leqslant C|\sigma|^{l_0}+C_1$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$.

Для каждого из выделенных классов систем в [6] построены классы корректности задачи (4.1).

4.2. Стохастические задачи в схеме сравнения полугрупповой классификации и классификации дифференциальных систем. В полугрупповой теории преобразование Лапласа (классическое и обобщённое) играет такую же роль для решения задачи (2.1), как преобразование Фурье в исследовании систем дифференциальных уравнений — оно связывает операторы решения $\{U(t),t\in[0,\tau)\}$ задачи (2.1) с резольвентой $\mathcal{R}(\lambda)$ генератора полугруппы: $\mathcal{R}(\lambda)f=\mathcal{L}[U(t)f]$, $U(t)f=\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{R}(\lambda)f]$.

На этой связи основано разбиение задач (2.1) на классы, приведённое в разделе 2: в основу этой полугрупповой классификации можно полагать как поведение резольвенты генератора полугруппы, так и пространства обобщённых функций, в которых задача корректна.

На основе сравнения оценок нормы резольвенты оператора A и матричной функции $e^{t\mathsf{A}(\sigma)}$ у авторов появилась гипотеза, что генераторы полугрупп класса C_0 и интегрированных полугрупп

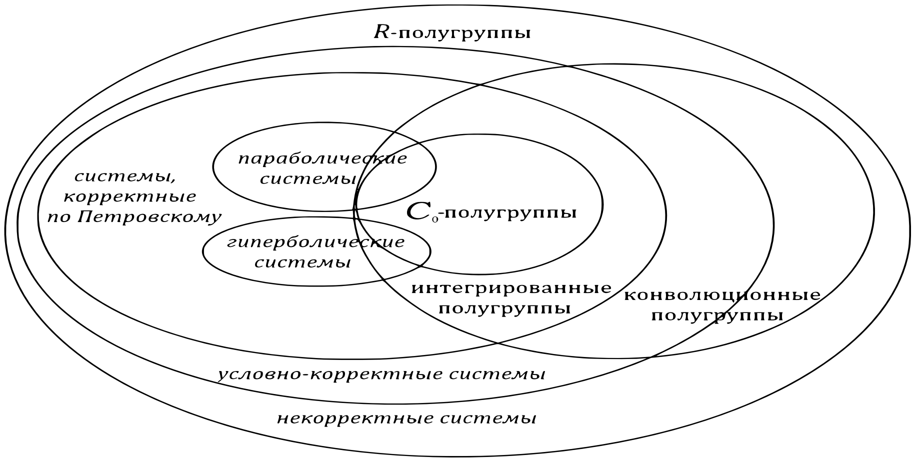

Рис. 1

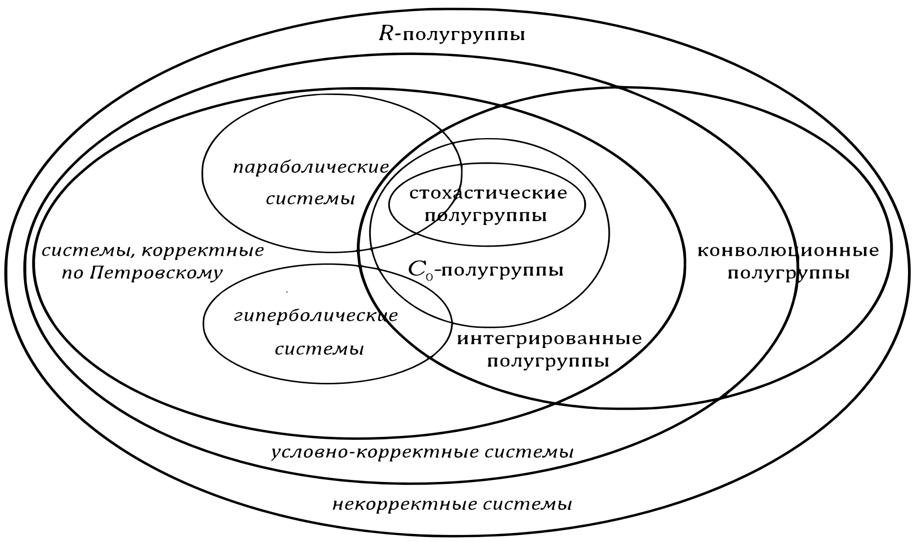

Рис. 2

порождают системы, корректные по Петровскому, генераторы конволюционных полугрупп порождают условно корректные системы, а генераторы R-полугрупп — некорректные системы. Детальные исследования показали, что всё не так просто, и соотношение между дифференциальными системами и полугруппами приняло следующий вид [10]: см. рис. 1.

Для возможности такого сравнение задача (2.1) рассматривалась с дифференциальным оператором A вида (4.2) в пространстве $X = L_2^m(\mathbb{R}^n) = L_2(\mathbb{R}^n) \times \ldots \times L_2(\mathbb{R}^n)$ вектор-функций $f(x)$.

Пополним эту схему полугруппами, соответствующими случайным процессам. Как уже говорилось в разделе 3, переходные полугруппы феллеровских случайных процессов образуют полугруппы класса C_0. Посмотрим на них с точки зрения классификации, основанной на преобразовании Фурье.

Если A — генератор феллеровской полугруппы, инвариантной относительно сдвигов, то решение задачи (2.1), согласно (3.15), определяется поведением экспоненты $e^{t\psi(\cdot)}$, где $\psi(\sigma)$ — символ оператора A, что аналогично тому, как решение системы (4.1) определяется поведением экспоненты $e^{t\mathsf{A}(\cdot)}$. В силу представления (3.13) функции $\psi(\sigma)$, на действительной оси справедлива оценка $\left|e^{t\psi(\sigma)}\right| \leqslant e^{(-\alpha|\sigma|^2+\beta)t}$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, что соответствует условию (4.7) параболичности системы.

Однако в комплексной плоскости экспонента $e^{t\psi(\zeta)}$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$, имеет рост выше, чем $e^{t|\zeta|^k}$, при любом $k \in \mathbb{N}$ за счёт поведения интегрального слагаемого в функции $\psi(\cdot)$, что не позволяет отнести «стохастические» полугруппы к классу параболических систем по Гельфанду и Шилову.

Более того, такой рост экспоненты вообще не даёт возможности включить переходные полугруппы в эту классификацию, за исключением случая, когда мера Леви ν равна нулю.

В случае нулевого интегрального члена в представлении (3.13) функция $e^{t\psi(\cdot)}$ удовлетворяет оценкам $\left|e^{t\psi(\sigma)}\right| \leqslant e^{(-\alpha|\sigma|^2+\beta)t}$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$; $\left|e^{t\psi(\zeta)}\right| \leqslant e^{(\alpha'|\zeta|^2+\beta')t}$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$, где положительные константы α и α' зависят от Q и равны нулю при $Q = 0$. Эти оценки означают, что интегродифференциальные уравнения, соответствующие $\nu = 0$ и $Q \neq 0$, относятся к классу параболических систем, а при $\nu = 0$ и $Q = 0$ — к классу систем, корректных по Петровскому. Полученный результат вполне ожидаем: задачи с нулевой мерой Леви являются дифференциальными (а не псевдодифференциальными) и вписываются в классификацию дифференциальных систем.

Более интересными являются следующие факты. При классификации с точки зрения преобразования Фурье уравнения для вероятностных характеристик случайных процессов по своим свойствам оказываются (в общем случае) далёкими от своих ближайших собратьев — дифференциальных систем, хотя и полугруппа, и её генератор являются псевдодифференциальными операторами. В то же время переходные полугруппы процессов Леви в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ однозначно характеризуются полугрупповыми методами: они обладают свойством сильной непрерывности и являются сжимающими (см. теорему 3.4).

Таким образом, мы можем пополнить приведённую выше схему переходными полугруппами процессов Леви с нулевой мерой Леви; на схеме они помечены как «стохастические полугруппы», см. рис. 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ануфриева У. А., Мельникова И. В.* Особенности и регуляризация некорректных задач Коши с дифференциальными операторами// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2005. — *14*. — С. 3–156.
2. *Балакришнан А. В.* Прикладной функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.
3. *Булинский А. В., Ширяев А. Н.* Теория случайных процессов. — М.: Физматлит, 2005.
4. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. — М.: Наука, 1975.
5. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщённые функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщённых функций. — М.: Физматгиз, 1958.
6. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщённые функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1958.
7. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. II. — М.: Наука, 1973.
8. *Ито К.* Вероятностные процессы. Вып. II. — М.: Иностранная литература, 1963.
9. *Колмогоров А. Н.* Об аналитических методах в теории вероятностей// Усп. мат. наук. — 1938. — № 5. — С. 5–41.
10. *Мельникова И. В., Алексеева У. А.* Полугрупповая классификация и классификация Гельфанда—Шилова для систем дифференциальных уравнений в частных производных// Мат. заметки. — 2018. — *104*, № 6. — С. 895–911.
11. *Мельникова И. В., Бовкун В. А., Алексеева У. А.* Интегродифференциальные уравнения, порожденные стохастическими задачами// Дифф. уравн. — 2021. — *57*, № 3. — С. 1653–1663.
12. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. — М.: Наука, 1987.
13. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
14. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределения и анализ Фурье. — М.: Мир, 1986.
15. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. — М.: Мир, 1987.
16. *Applebaum D.* Lévy processes and stochastic calculus. — Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
17. *Arendt W., Batty C. J. K., Hieber M., Neubrander F.* Vector-Valued Laplace Transform and Cauchy Problems. — Basel: Birkhäuser, 2011.
18. *Björk T.* Arbitrage theory in continuous time. — Oxford: Oxford Univ. Press, 2009.
19. *Böttcher B., Schilling R., Wang J.* Lévy matters III. Lévy-type processes: construction, approximation and sample path properties. — Heidelberg—New York: Springer, 2013.
20. *Boyarchenko S. I., Levendorskii S. Z.* Non-Gaussian Merton—Black—Scholes theory. — Singapore: World Scientific, 2002.
21. *Chazarain J.* Problemes de Cauchy abstraits et applications a quelques problemes mixtes// J. Funct. Anal. — 1971. — *7*, № 3. — С. 386–446.

22. *Dubkov A. A., Spagnolo B., Uchaikin V. V.* Lévy flight superdiffusion: an introduction// Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. — 2008. — *18*, № 9. — C. 2649–2672.
23. *Engel K.-J., Nagel R.* One-parameter semigroups for linear evolution equations. — New York: Springer, 1999.
24. *Gardiner C.* Stochastic Methods. A handbook for the natural and social sciences. — Berlin—Heidelberg: Springer, 2009.
25. *Hille E., Phillips R. S.* Functional analysis and semi-groups. — Providence: Am. Math. Soc., 1957.
26. *Ito K.* On a formula concerning stochastic differentials// Nagoya Math. J. — 1951. — *3*. — C. 55–65.
27. *Jacob N.* Pseudo-differential operators and Markov processes. Vol. 1. — London: Imperial College Press, 2001.
28. *Kolokoltsov V. N.* Markov processes, semigroups and generators. — Berlin—New York: De Gruyter, 2011.
29. *Komatsu H.* Ultradistributions, I. Structure theorems and characterization// J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. — 1973. — *20*, № 1. — C. 25–106.
30. *Kunita H.* Ito's stochastic calculus: its surprising power for applications// Stoch. Process. Their Appl. — 2010. — *120*, № 5. — C. 622–652.
31. *Melnikova I. V.* Stochastic Cauchy problems in infinite dimensions. Regularized and generalized solutions. — London—New York: CRC Press, 2016.
32. *Melnikova I. V., Alekseeva U. A.* Weak regularized solutions to stochastic Cauchy problems// Chaotic Model. Simul. — 2014. — № 1. — C. 49–56.
33. *Melnikova I. V., Filinkov A. I.* The Cauchy problem: Three approaches. — London—New York: Chapman & Hall/CRC, 2001.
34. *Oksendal B.* Stochastic differential equations. — Berlin: Springer, 2003.
35. *Protter P. E.* Stochastic integration and differential equations. — Berlin—Heidelberg: Springer, 2005.
36. *Sato K. I.* Basic results on Lévy processes// В сб.: «Lévy processes theory and applications». — Boston: Birkhäuser, 2001. — C. 3–37.
37. *Shreve S.* Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models. — New York: Springer, 2004.
38. *Taira K.* Boundary value problems and Markov processes. — Cham: Springer, 2020.

И. В. Мельникова
Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия
E-mail: `Irina.Melnikova@urfu.ru`

У. А. Алексеева
Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия
E-mail: `Uliana.Alekseeva@urfu.ru`

В. А. Бовкун
Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия
E-mail: `Vadim.Bovkun@urfu.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-324-348 UDC 519.21+517.986.7+517.982.4

Equations Related to Stochastic Processes: Semigroup Approach and Fourier Transform

© 2021 **I. V. Melnikova, U. A. Alekseeva, V. A. Bovkun**

Abstract. The work is devoted to integro-differential equations related to stochastic processes. We study the relationship between differential equations with random perturbations — stochastic differential equations (SDEs) — and deterministic equations for the probabilistic characteristics of processes determined by random perturbations. The resulting deterministic pseudodifferential equations are investigated by semigroup methods and Fourier transform methods.

REFERENCES

1. U. A. Anufrieva and I. V. Mel'nikova, "Osobennosti i regulyarizatsiya nekorrektnykh zadach Koshi s differentsial'nymi operatorami" [Singularities and regularization of ill-posed Cauchy problems with differential operators], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2005, **14**, 3–156 (in Russian).
2. A. V. Balakrishnan, *Prikladnoy funktsional'nyi analiz* [Applied Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1980 (Russian translation).
3. A. V. Bulinskiy and A. N. Shiryaev, *Teoriya sluchaynykh protsessov* [Theory of Stochastic Processes], Fizmatlit, Moscow, 2005 (in Russian).
4. A. D. Venttsel', *Kurs teorii sluchaynykh protsessov* [A Course in the Theory of Stochastic Processes], Nauka, Moscow, 1975 (in Russian).
5. I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, *Obobshchennye funktsii. Vyp. 2. Prostranstva osnovnykh i obobshchennykh funktsiy* [Generalized Functions. Vol. 2. Spaces of Basic and Generalized Functions], Fizmatgiz, Moscow, 1958 (in Russian).
6. I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, *Obobshchennye funktsii. Vyp. 3. Nekotorye voprosy teorii differentsial'nykh uravneniy* [Generalized Functions. Vol. 3. Some Questions of the Theory of Differential Equations], Fizmatgiz, Moscow, 1958 (in Russian).
7. I. I. Gikhman and A. V. Skorokhod, *Teoriya sluchaynykh protsessov, t. II* [Theory of Stochastic Processes. Vol. II], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
8. K. Ito, *Veroyatnostnye protsessy. Vyp. II* [Stochastic Processes. Vol. II], Inostrannaya literatura, Moscow, 1963 (in Russian).
9. A. N. Kolmogorov, "Ob analiticheskikh metodakh v teorii veroyatnostey" [On analytical methods in probability theory], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1938, No. 5, 5–41 (in Russian).
10. I. V. Mel'nikova and U. A. Alekseeva, "Polugruppovaya klassifikatsiya i klassifikatsiya Gel'fanda—Shilova dlya sistem differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh" [Semigroup classification and Gelfand–Shilov classification for systems of partial differential equations], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2018, **104**, No. 6, 895–911 (in Russian).
11. I. V. Mel'nikova, V. A. Bovkun, and U. A. Alekseeva, "Integrodifferentsial'nye uravneniya, porozhdennye stokhasticheskimi zadachami" [Integrodifferential equations generated by stochastic problems], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2021, **57**, No. 3, 1653–1663 (in Russian).
12. Yu. V. Prokhorov and Yu. A. Rozanov, *Teoriya veroyatnostey. Osnovnye ponyatiya. Predel'nye teoremy. Sluchaynye protsessy* [Probability Theory. Basic Concepts. Limit Theorems. Random Processes], Nauka, Moscow, 1987 (in Russian).
13. W. Rudin, *Funktsional'nyi analiz* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1975 (Russian translation).

14. L. Hörmander, *Analiz lineynykh differentsial'nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. T. 1. Teoriya raspredeleniya i analiz Fur'e* [The Analysis of Linear Partial Differential Operators. Vol. 1. Distribution Theory and Fourier Analysis], Mir, Moscow, 1986 (Russian translation).
15. L. Hörmander, *Analiz lineynykh differentsial'nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. T. 3. Psevdodifferentsial'nye operatory* [The Analysis of Linear Partial Differential Operators. Vol. 3. Pseudodifferential Operators], Mir, Moscow, 1987 (Russian translation).
16. D. Applebaum, *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
17. W. Arendt, C. J. Batty, M. Hieber, and F. Neubrander, *Vector-Valued Laplace Transform and Cauchy Problems*, Birkhäuser, Basel, 2011.
18. T. Björk, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2009.
19. B. Böttcher, R. Schilling, and J. Wang, *Lévy Matters III. Lévy-Type Processes: Construction, Approximation and Sample Path Properties*, Springer, Heidelberg–New York, 2013.
20. S. I. Boyarchenko and S. Z. Levendorskii, *Non-Gaussian Merton–Black–Scholes Theory*, World Scientific, Singapore, 2002.
21. J. Chazarain, "Problemes de Cauchy abstraits et applications a quelques problemes mixtes," *J. Funct. Anal.*, 1971, **7**, No. 3, 386–446.
22. A. A. Dubkov, B. Spagnolo, and V. V. Uchaikin, "Lévy flight superdiffusion: an introduction," *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2008, **18**, No. 9, 2649–2672.
23. K.-J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer, New York, 1999.
24. C. Gardiner, *Stochastic Methods. A Handbook for the Natural and Social Sciences*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2009.
25. E. Hille and R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups*, Am. Math. Soc., Providence, 1957.
26. K. Ito, " On a formula concerning stochastic differentials," *Nagoya Math. J.*, 1951, **3**, 55–65.
27. N. Jacob, *Pseudo-Differential Operators and Markov Processes. Vol. 1*, Imperial College Press, London, 2001.
28. V. N. Kolokoltsov, *Markov Processes, Semigroups and Generators*, De Gruyter, Berlin–New York, 2011.
29. H. Komatsu, "Ultradistributions, I. Structure theorems and characterization," *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 1973, **20**, No. 1, 25–106.
30. H. Kunita, "Ito's stochastic calculus: its surprising power for applications," *Stoch. Process. Their Appl.*, 2010, **120**, No. 5, 622–652.
31. I. V. Melnikova, *Stochastic Cauchy Problems in Infinite Dimensions. Regularized and Generalized Solutions*, CRC Press, London–New York, 2016.
32. I. V. Melnikova and U. A. Alekseeva, "Weak regularized solutions to stochastic Cauchy problems," *Chaotic Model. Simul.*, 2014, No. 1, 49–56.
33. I. V. Melnikova and A. I. Filinkov, *The Cauchy Problem: Three Approaches*, Chapman & Hall/CRC, London–New York, 2001.
34. B. Oksendal, *Stochastic Differential Equations*, Springer, Berlin, 2003.
35. P. E. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2005.
36. K. I. Sato, "Basic results on Lévy processes," In: *Lévy Processes Theory and Applications*, Birkhäuser, Boston, 2001, pp. 3–37.
37. S. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer, New York, 2004.
38. K. Taira, *Boundary Value Problems and Markov Processes*, Springer, Cham, 2020.

I. V. Melnikova
Ural Federal University named after the First President of Russia B. Yeltsin, Ekaterinburg, Russia
E-mail: `Irina.Melnikova@urfu.ru`

U. A. Alekseeva
Ural Federal University named after the First President of Russia B. Yeltsin, Ekaterinburg, Russia
E-mail: `Uliana.Alekseeva@urfu.ru`

V. A. Bovkun
Ural Federal University named after the First President of Russia B. Yeltsin, Ekaterinburg, Russia
E-mail: `Vadim.Bovkun@urfu.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 2 (2021). С. 349–362

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-349-362 УДК 517.9

О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2021 г. **О. В. СОЛОНУХА**

Аннотация. Рассматривается линейное параболическое уравнение с краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского. Доказана теорема существования и единственности обобщенного решения, получены оценки.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Изоморфизм пространств 350
2. Постановка задачи 353
3. Свойства операторов 354
4. Существование и единственность решения 357
5. Пример 360
Список литературы 361

Введение

Нелокальные эллиптические краевые задачи рассматривались начиная с 30-х годов XX века, см. [12]. Абстрактные нелокальные эллиптические краевые задачи изучались в работах [2,13] и др. В 1969 г. А. В. Бицадзе и А. А. Самарский сформулировали новую нелокальную краевую задачу, возникающую в теории плазмы, см. [1]. В частности, в [1] была изучена следующая задача:

$$-\Delta w(x) = f(x) \qquad (x = (x_1, x_2) \in Q = (0,2) \times (0,1)), \tag{0.1}$$

$$\left.\begin{array}{ll} w(x_1, 0) = w(x_1, 1) = 0 & (0 \leqslant x_1 \leqslant 2), \\ w(0, x_2) = \gamma_1 w(1, x_2), \quad w(2, x_2) = \gamma_2 w(1, x_2) & (0 \leqslant x_2 \leqslant 1) \end{array}\right\} \tag{0.2}$$

при $\gamma_1 = 0$ и $\gamma_2 = 1$. Разрешимость задачи в общей постановке была сформулирована как нерешенная задача, см. [6]. В конце 80-х годов была построена общая теория линейных нелокальных эллиптических краевых задач, в рамках которой была решена указанная проблема, см. [7–9, 16].

В данной работе исследование нелокальных краевых задач продолжено для линейных параболических уравнений. Отметим, что основным методом исследования в данной работе является сведение параболической задачи с нелокальными краевыми условиями к эволюционному дифференциально-разностному уравнению с краевыми условиями Дирихле. Ранее этот метод использовался лишь для эллиптических задач, см. [10,16]. Обобщение его на параболический случай связано с использованием техники монотонных операторов, см., например, [5]. С другой стороны, независимо от параболических задач с нелокальными краевыми условиями несколько десятилетий широко рассматривались параболические функционально-дифференциальные уравнения, см., например, [3, 11, 15] и библиографию. В этих исследованиях большую роль играли полугрупповые свойства операторов, что не использовалось в представленной работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (номер темы FSSF-2020-0018).

В первом разделе сформулированы свойства разбиения области и границы, а также доказана теорема об изоморфизме функциональных пространств, позволяющая поставить в соответствие нелокальной параболической задаче некое эквивалентное (с точки зрения множества решений) параболическое функционально-дифференциальное уравнение. Во втором разделе построено эволюционное дифференциально-разностное уравнение, соответствующее исходной задаче. Свойства дифференциально-разностных операторов, входящих в это уравнение, изучены в разделе 3. В разделе 4 сформулированы и доказаны достаточные условия существования и единственности решения линейной нелокальной задачи параболического типа. В качестве модельного примера рассмотрена параболическая задача с Лапласианом в прямоугольном параллелепипеде $\Omega_T = (0,T)\times(0,2)\times(0,1)$:

$$\partial_t w(t,x) - \Delta w(t,x) = f(t,x) \qquad ((t,x)\in\Omega_T), \tag{0.3}$$

$$u(0,x) = \psi(x) \qquad (x=(x_1,x_2)\in Q=(0,2)\times(0,1)) \tag{0.4}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$\left.\begin{array}{ll} w(t,x_1,0)=w(t,x_1,1)=0 & (t\in(0,T), 0\leqslant x_1\leqslant 2),\\ w(t,0,x_2)=\gamma_1 w(t,1,x_2), \quad w(t,2,x_2)=\gamma_2 w(t,1,x_2) & (t\in(0,T), 0\leqslant x_2\leqslant 1)\end{array}\right\}. \tag{0.5}$$

Здесь $f\in L_2(\Omega_T)$, $\varphi\in L_2(Q)$.

В работах [4, 14] исследовались линейные эллиптические уравнения со смешанными нелокальными краевыми условиями, т. е. на части границы задавались нелокальные краевые условия, а на оставшейся части — производные по нормали от неизвестной функции. Используя методы настоящей работы и статей [4, 14], можно исследовать разрешимость нелокальных смешанных задач для параболических уравнений.

1. Изоморфизм пространств

Пусть $Q\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей ∂Q класса C^∞ или $Q=(0,d)\times G$, где $G\subset\mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей ∂G класса C^∞, если $n\geqslant 3$). В случае $n=1$ мы полагаем $Q=(0,d)$.

Определим цилиндр $\Omega_T := (0,T)\times Q$ с границей $\Gamma^T := (0,T)\times\partial Q$. Рассматриваемая в статье задача является нелокальной, поскольку краевые условия в некоторых точках $(t,x)\in\Gamma^T$ заданы непосредственно, а в некоторых точках определены значениями искомой функции $u(t,x)$ внутри области, при $(t,x)\in\Omega_T$. Для точной формулировки данных условий (см. ниже (1.2)) необходимы дополнительные построения.

Для изучения параболической краевой задачи нам потребуются некоторые вспомогательные построения, разработанные для эллиптических нелокальных задач. Заметим, что нелокальные условия связывают значения искомой функции в точках, смещенных только по пространственным координатам. Данные сдвиги можно задать неким разностным оператором. Поскольку мы не рассматриваем временные сдвиги, то можно рассматривать разностный оператор сдвигов как действующий в $\mathbb{R}^n$ или в n-мерных областях. Свойства таких разностных операторов в пространствах $L_2(Q)$ и $W_2^1(Q)$ были изучены ранее, см. [7, 10, 16]. В данном разделе мы используем упомянутые результаты, чтобы сформулировать свойства разностных операторов $R_Q : L_2(\Omega_T)\to L_2(\Omega_T)$ и $R_Q : L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))\to L_2(0,T;W_2^1(Q))$, необходимых для установки связи между нелокальной задачей и неким дифференциально-разностным уравнением. Ниже будет подробно изложено построение и действие данных разностных операторов.

1.1. Разбиение области. Пусть $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n$ — конечное множество векторов h с целочисленными (или соизмеримыми) координатами. Через M обозначим аддитивную группу, порожденную множеством $\mathcal{M}$, а через Q_r — открытые связные компоненты множества $Q\setminus\big(\bigcup\limits_{h\in M}(\partial Q+h)\big)$.

Определение 1.1. Множество Q_r называется *подобластью*. Семейство $\mathcal{R}$ всех подобластей Q_r $(r=1,2,\dots)$ называется *разбиением* области Q.

Легко видеть, что множество $\mathcal{R}$ не более чем счетно, при этом $\bigcup\limits_r \partial Q_r = \big(\bigcup\limits_{h\in M}(\partial Q+h)\big)\cap\overline{Q}$ и $\bigcup\limits_r \overline{Q}_r=\overline{Q}$. Известно, что для любой подобласти Q_{r_1} и произвольного вектора $h\in M$ либо найдется подобласть Q_{r_2} такая, что $Q_{r_2}=Q_{r_1}+h$, либо $Q_{r_1}+h\subset\mathbb{R}^n\setminus\overline{Q}$, см. [16, лемма 7.1]. Таким образом, семейство $\mathcal{R}$ можно разбить на непересекающиеся классы следующим образом: подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному классу, если $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$ для некоторого $h \in M$. Будем обозначать подобласти Q_r через Q_{sl}, где s — номер класса, а l — номер подобласти в s-м классе. Очевидно, каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl}. Множество классов может быть конечным или счетным, см. примеры в [16, гл. II, §7].

1.2. Разбиение границы. Кроме разбиения области, необходимо рассмотреть свойства разбиения границы ∂Q, определяемое тем же множеством сдвигов $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$, см. выше. По-прежнему, M — аддитивная группа, порожденная $\mathcal{M}$.

Условие 1. *Пусть множество* $\mathcal{K}$, *заданное формулой*
$$\mathcal{K} = \bigcup_{h_1, h_2 \in M} \left\{ \overline{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)]} \right\}, \tag{1.1}$$
удовлетворяет условию $\operatorname{mes}_{n-1}(\mathcal{K} \cap \partial Q) = 0$.

Обозначим через Γ_ρ открытые, связные в топологии ∂Q компоненты множества $\partial Q \setminus \mathcal{K}$. В [16, §7] получен следующий результат:

Лемма 1.1. *Если* $(\Gamma_\rho + h) \cap \overline{Q} \neq \varnothing$ *для некоторого* $h \in M$, *то или* $\Gamma_\rho + h \subset Q$, *или существует* $\Gamma_r \subset \partial Q \setminus \mathcal{K}$ *такое, что* $\Gamma_\rho + h = \Gamma_r$.

Согласно этому свойству множества $\left\{\Gamma_\rho + h : \Gamma_\rho + h \subset \overline{Q},\ \rho = 1, 2, \ldots,\ h \in M\right\}$ могут быть разбиты на классы. Множества $\Gamma_{\rho_1} + h_1$ и $\Gamma_{\rho_2} + h_2$ принадлежат одному классу, если

1) существует вектор $h \in M$ такой, что $\Gamma_{\rho_1} + h_1 = \Gamma_{\rho_2} + h_2 + h$;
2) для любых $\Gamma_{\rho_1} + h_1, \Gamma_{\rho_2} + h_2 \subset \partial Q$ нормали к ∂Q в точках $x \in \Gamma_{\rho_1} + h_1$ и $x - h \in \Gamma_{\rho_2} + h_2$ однонаправлены.

Обозначим множество $\Gamma_\rho + h$ через Γ_{rj}, где r — номер класса, j — номер элемента в классе ($1 \leqslant j \leqslant J = J(r)$). Не нарушая общности, будем считать, что $\Gamma_{r1}, \ldots, \Gamma_{rJ_0} \subset Q$, $\Gamma_{rJ_0}, \ldots, \Gamma_{rJ} \subset \partial Q$ ($0 \leqslant J_0 = J_0(r) < J(r)$).

Как известно, см. [16, §7], данное разбиение обладает следующими свойствами:

Лемма 1.2. *Для любого* $\Gamma_{rj} \subset \partial Q$ *существует подобласть* Q_{sl} *такая, что* $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{sl}$. *Более того, если* $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{sl}$, *то* $\Gamma_{rj} \cap \partial Q_{s_1 l_1} = \varnothing$ *для любых пар* $(s_1, l_1) \neq (s, l)$.

Лемма 1.3. *Для каждого* $r = 1, 2, \ldots$ *существует единственный номер* $s = s(r)$ *такой, что* $N(s) = J(r)$ *и* $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$ $(l = 1, \ldots, N(s))$ (*с точностью до перенумеровки*).

Обозначим теперь $\Gamma_{rl}^T := (0, T) \times \Gamma_{rl}$. Проиллюстрируем разбиение области на простом примере.

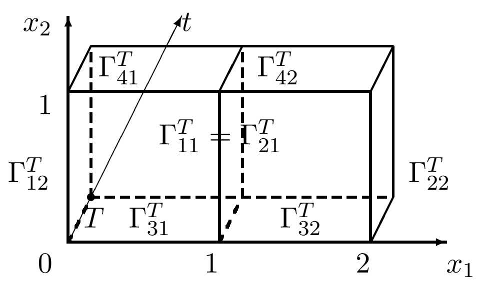

Рис. 1

Пример 1.1. Рассмотрим нелокальные краевые условия задачи Бицадзе—Самарского (0.5).

Согласно этим краевым условиям мы имеем множество сдвигов $\mathcal{M} = \{(0,0); (1,0); (-1,0)\}$, которые разбивают область $Q = (0,2) \times (0,1)$ на две подобласти $Q_{11} = (0,1) \times (0,1)$ и $Q_{12} = (1,2) \times (0,1)$, принадлежащих одному классу.

Множество $\mathcal{K}$ состоит из 6 точек: $\mathcal{K} = \{(i,j) : i = 0,1,2; j = 0,1\}$.

Множество $\{\Gamma_{rj}^T\}$ состоит из 8 элементов, которые принадлежат 4-м классам, см. рис. 1:

1) $\Gamma_{11}^T = (0,T) \times \{1\} \times (0,1)$, $\Gamma_{12}^T = (0,T) \times \{0\} \times (0,1)$;

2) $\Gamma_{21}^T = (0,T)\times\{1\}\times(0,1)$, $\Gamma_{22}^T = (0,T)\times\{2\}\times(0,1)$;
3) $\Gamma_{31}^T = (0,T)\times(0,1)\times\{0\}$, $\Gamma_{32}^T = (0,T)\times(1,2)\times\{0\}$;
4) $\Gamma_{41}^T = (0,T)\times(0,1)\times\{1\}$, $\Gamma_{42}^T = (0,T)\times(1,2)\times\{1\}$.

Заметим, что в полученном прямоугольном параллелепипеде есть еще 4 части граней, не входящих в множество $\{\Gamma_{ij}^T\}$ $(i=1,\dots,4; j=1,2)$. В частности, на гранях $\{0\}\times Q_{11}$ и $\{0\}\times Q_{12}$ заданы начальные условия, на гранях $\{T\}\times Q_{11}$ и $\{T\}\times Q_{12}$ мы получим терминальные значения искомой функции.

1.3. Построение разностного оператора.

Сформулируем следующее необходимое условие.

Условие 2. *Для каждой подобласти Q_{sl} $(s=1,2,\dots,\ l=1,\dots,N(s))$ и для любого $\varepsilon>0$ существует открытое множество $G_{sl}\subset Q_{sl}$ с границей $\partial G_{sl}\in C^1$ такое, что* $\mathrm{mes}_n(Q_{sl}\setminus G_{sl})<\varepsilon$, $\mathrm{mes}_{n-1}(\partial G_{sl}\Delta\partial Q_{sl})<\varepsilon$.

Множество всех распределений $u\in\mathcal{D}'(Q)$, являющихся вместе со всеми своими частными производными 1-го порядка функциями из $L_2(Q)$, обозначим через $W_2^1(Q)$. Пространство Соболева $W_2^1(Q)$ — гильбертово относительно нормы $\|u\|_{W_2^1(Q)} = \big\{\sum\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\int_Q|\partial_i u|^2 p dx\big\}^{\frac12}$, здесь и далее $\partial_0 u := u$. Через $\mathring{W}_2^1(Q)$ обозначим замыкание множества $\dot{C}^\infty(Q)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций в $W_2^1(Q)$. Как известно, эквивалентной нормой пространства $\mathring{W}_2^1(Q)$ является $\|u\|_{\mathring{W}_2^1(Q)} = \big\{\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\int_Q|\partial_i u|^2 p dx\big\}^{\frac12}$. Также будут рассматриваться сопряженные пространства $W_2^{-1}(Q) = \big(\mathring{W}_2^1(Q)\big)^*$. Линейное пространство $L_2(0,T;X) := \big\{u:(0,T)\to X:\ \int_0^T\|u\|_X^2dt<\infty\big\}$ с нормой $\|u\|_{L_2(0,T;X)} = \big(\int_0^T\|u\|_X^2dt\big)^{1/2}$ также гильбертово, если X — гильбертово. Таким образом, пространства $L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))$ и $L_2(0,T;W_2^1(Q))$ гильбертовы.

Обозначим через $L_2(0,T;W_{2,\gamma}^1(Q))$ $(\gamma=\{\gamma_{ij}^r\})$ подпространство функций из $L_2(0,T;W_2^1(Q))$, удовлетворяющих *нелокальным краевым условиям*

$$\left.\begin{aligned} w|_{\Gamma_{rl}^T} &= \sum_{j=1}^{J_0}\gamma_{lj}^r w|_{\Gamma_{rj}^T} && (r\in B,\ l=J_0+1,\dots,J),\\ w|_{\Gamma_{rl}^T} &= 0 && (r\notin B,\ l=1,\dots,J),\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

где $J_0=J_0(r)$, $J=J(r)$, γ_{lj}^r — вещественные числа, $B=\{r: J_0>0\}$.

Рассмотрим набор вещественных постоянных коэффициентов $\Lambda=\{a_h: h\in\mathcal{M}\}$. Определим разностный оператор $R: L_2(0,T;\mathbb{R}^n)\to L_2(0,T;\mathbb{R}^n)$:

$$Ru(t,x) = \sum_{h\in\mathcal{M}} a_h u(t,x+h),\tag{1.3}$$

а также оператор $R_Q = P_Q R I_Q : L_p(\Omega_T)\to L_2(\Omega_T)$. Здесь $I_Q: L_2(\Omega_T)\to L_2((0,T)\times\mathbb{R}^n)$ — оператор продолжения функций из $L_2(\Omega_T)$ нулем в $(0,T)\times(\mathbb{R}^n\setminus Q)$, а $P_Q: L_2((0,T)\times\mathbb{R}^n)\to L_2(\Omega_T)$ — оператор сужения функций из $L_2((0,T)\times\mathbb{R}^n)$ на Ω_T. Для исследования свойств оператора R_Q введем матрицы $R_s=\{r_{ij}^s\}_{1\leqslant i,j\leqslant N(s)}$ такие, что

$$r_{ij}^s = \begin{cases} a_h & (h=h_{sj}-h_{si}\in\mathcal{M}),\\ 0 & (h_{sj}-h_{si}\notin\mathcal{M}),\end{cases}\tag{1.4}$$

где h_{si} определяется условием $Q_{si}=Q_{s1}+h_{si}$. Из ограниченности области Q и формулы (1.4) следует, что множество различных матриц R_s конечно. Обозначим эти матрицы R_{s_ν} $(\nu=1,\dots,n_1)$.

Согласно лемме 1.3, для каждого $r=1,2,\dots$ найдется единственный номер $s=s(r)$ такой, что $N(s)=J(r)$ и $\Gamma_{rl}\subset(0,T)\times\partial Q_{sl}$ $(l=1,\dots,N)$ после перенумерации подобластей s-го класса, т. е. $\Gamma_{rl}^T\subset(0,T)\times\partial Q_{sl}$ $(l=1,\dots,N)$. Обозначим через $R_{s(r)}$ матрицы, полученные из R_s $(s=s(r))$ путем перенумерования соответствующих столбцов и строк. Пусть e_j^r $(j=1,\dots,J(r))$ — j-ая строка матрицы размерности $J\times J_0$, полученной путем вычеркивания последних $J-J_0$ столбцов из матрицы $R_{s(r)}$.

Определение 1.2. Будем говорить, что матрицы R_s соответствуют граничным условиям (1.2), если выполнено следующее условие:

Условие 3. *Существует набор Λ такой, что для любого $s = 1, 2, \dots$ матрицы R_s невырождены, а также для всех $r \in B$ и $s = s(r)$ справедливо*: $e_l^r = \sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant J_0} \gamma_{lj}^r e_j^r$ $(l = J_0 + 1, \dots, J)$.

Кроме того, обозначим через R_{s0} матрицу порядка $J_0 \times J_0$, полученную из матрицы R_s вычеркиванием последних $N(s) - J_0$ строк и столбцов.

Пример 1.1 (продолжение). Согласно краевым условиям (0.5), мы имеем множество сдвигов $\mathcal{M} = \{(0,0); (1,0); (-1,0)\}$. В соответствии с множеством сдвигов разностный оператор должен иметь вид $Ru(t,x) = u(t,x) + a_1 u(t, x_1+1, x_2) + a_{-1} u(t, x_1 - 1, x_2)$. Данному оператору соответствует матрица $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ a_{-1} & 1 \end{pmatrix}$, невырожденная при $a_1 a_{-1} \neq 1$. В то же время, для любого $u \in L_2(0,T; \mathring{W}_2^1(Q))$ и $w = R_Q u$ получаем:

$$w(t, x_1, 0) = w(t, x_1, 1) = 0,$$
$$a_1 u(t, 1, x_2) = w(t, 0, x_2) = \gamma_1 w(t, 1, x_2) = \gamma_1 u(t, 1, x_2),$$
$$a_{-1} u(t, 1, x_2) = w(t, 2, x_2) = \gamma_2 w(t, 1, x_2) = \gamma_2 u(t, 1, x_2).$$

В последних двух формулах первое и третье равенства получены из определения разностного оператора, а второе — из краевых условий (0.5). Таким образом, если $a_1 = \gamma_1$, $a_{-1} = \gamma_2$ и $u \in L_2(0,T; \mathring{W}_2^1(Q))$, то функция $w = R_Q u$ принадлежит $L_2(0,T; W_2^1(Q))$ и удовлетворяет нелокальным краевым условиям (0.5), т. е. $R_Q(L_2(0,T; \mathring{W}_2^1(Q))) \subset L_2(0,T; W_{2,\gamma}^1(Q))$, где $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$. При этом $R_{10} = 1$.

1.4. Изоморфизм пространств. Следующая теорема устанавливает связь между эллиптическими дифференциальными уравнениями с нелокальными условиями вида (1.2) и эллиптическими дифференциально-разностными уравнениями с однородными условиями Дирихле. Это позволяет применять результаты, полученные для одной из этих задач, к исследованию другой задачи.

Теорема 1.1. *Предположим, что выполнены условия* 1, 2 *и* 3, *а соответствующие матрицы R_s и R_{s0} $(s = s(r), r \in B)$ невырождены. Тогда существует множество $\gamma = \{\gamma_{lj}^r\}$ такое, что оператор $R_Q : L_2(0,T; \mathring{W}_2^1(Q)) \to L_2(0,T; W_{2,\gamma}^1(Q))$ — изоморфизм.*

Доказательство. Заметим, что оператор R_Q не зависит от t. В силу невырожденности матриц R_s и R_{s0} оператор $R_Q(t,\cdot) : \mathring{W}_2^1(Q) \to W_{2,\gamma}^1(Q)$ отображает $\mathring{W}_2^1(Q)$ на $W_{2,\gamma}^1(Q)$ непрерывно и взаимнооднозначно, см. [16, теорема 8.1] или [10, теорема 2.1]. Следовательно, R_Q отображает $L_2(0,T; \mathring{W}_2^1(Q))$ на $L_2(0,T; W_{2,\gamma}^1(Q))$ непрерывно и взаимнооднозначно. $\square$

2. Постановка задачи

Пусть выполнены условия 1 и 2. В цилиндре Ω_T рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\partial_t w(t,x) - \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \partial_i \left(A_{ij}(t,x) \partial_j w(t,x) \right) + A_{00}(t,x) u = f(t,x) \quad ((x,t) \in \Omega_T) \tag{2.1}$$

с начальными условиями

$$w(0,x) = \psi(x) \qquad (x \in Q) \tag{2.2}$$

и граничными условиями (1.2). Здесь $f \in L_2(\Omega_T)$, $\varphi \in L_2(Q)$, а функции $A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ $(i,j = 0, 1, \dots, n)$, причем $A_{ij}(t,x) = A_{ij}(t,x)$ при $i,j = 1, \dots, n$, эти функции $\mathcal{M}$-периодичны (т. е. $A_{ij}(t,x) = A_{ij}(t, x+h)$ для всех $(t,x), (t, x+h) \in \overline{\Omega_T}$ и $h \in \mathcal{M}$). Кроме того, существует $c_1 > 0$ такое, что

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} A_{ij}(t,x) \xi_i \xi_j \geqslant c_1 \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|^2. \tag{2.3}$$

Мы рассматриваем оператор ∂_t как неограниченный оператор $\partial_t : \mathcal{D}(\partial_t) \subset L_2(0,T; W_2^1(Q)) \to L_2(\Omega_T)$. То есть любой элемент $w \in \mathcal{D}(\partial_t)$ после, быть может, изменения на множестве меры нуль из отрезка $(0,T)$ будет непрерывным отображением $[0,T] \to L_2(Q)$, см. [5, гл. 1, лемма 1.2]. Поскольку $\mathcal{D}(\partial_t) \subset C(0,T; L_2(Q))$, то начальные условия определены корректно. Введем пространство $W_\gamma := \{u \in L_2(0,T; W_{2,\gamma}^1(Q)) : \partial_t u \in L_2(\Omega_T)\}$.

Тогда задача (2.1), (2.2), (1.2) может быть рассмотрена как операторное уравнение

$$\partial_t w + Aw = f, \qquad w \in W_\gamma \tag{2.4}$$

с начальными условиями (2.2).

Определение 2.1. Будем называть функцию $w \in W_\gamma$ *обобщенным решением* задачи (2.1), (2.2), (1.2), если она удовлетворяет операторному уравнению (2.4) и начальным условием (2.2).

Пусть, кроме условий 1 и 2, выполнено также условие 3. Тогда существует разностный оператор R_Q, являющийся изоморфизмом пространств $L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))$ и $L_2(0,T;W_{2,\gamma}^1(Q))$. Таким образом, для каждого $w \in W_\gamma \subset L_2(0,T;W_{2,\gamma}^1(Q))$ существует единственный элемент $u \in L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))$ такой, что $w = R_Q u$, $u = R_Q^{-1} w$. Введем пространство $W := \{u \in L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q)) : \partial_t u \in L_2(\Omega_T)\}$.

По построению $R_Q(L_2(Q)) \subset L_2(Q)$ и $R_Q^{-1}(L_2(Q)) \subset L_2(Q)$; $R_Q(L_2(\Omega_T)) \subset L_2(\Omega_T)$ и $R_Q^{-1}(L_2(\Omega_T)) \subset L_2(\Omega_T)$; кроме того, $\partial_t R_Q u = R_Q \partial_t u$. Таким образом, если $w \in W_\gamma$, то $u \in W$, причем $\varphi(x) := u(0,x) = R_Q^{-1} w(0,x) = R_Q^{-1}\psi \in L_2(Q)$. В соответствии с [5, гл. 1, лемма 1.2], $u \in C(0,T;L_2(Q))$. То есть корректно определено значение функции u при $t = 0$. Можно рассмотреть следующее операторное уравнение:

$$\partial_t R_Q u + A R_Q u = f, \qquad u \in W \tag{2.5}$$

с начальными условиями

$$u(0,x) = \varphi(x) = R_Q^{-1}\psi. \tag{2.6}$$

Исходя из изложенного выше, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* 1, 2 *и* 3. *Тогда если существует и единственно решение операторного уравнения* (2.5), (2.6)*, то существует и единственно обобщенное решение задачи* (2.1), (2.2), (1.2).

Пример 2.1. Продолжим рассмотрение задачи (0.3)–(0.5). Как было доказано в примере 1.1, краевым условиям (0.5) соответствует разностный оператор R_Q, определяемый матрицей $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ a_{-1} & 1 \end{pmatrix}$, невырожденной при $a_1 a_{-1} \neq 1$; при этом матрица $R_{10} = 1$ также невырождена. Следовательно, задаче (0.3)–(0.5) соответствует задача Дирихле:

$$\partial_t R_Q u(t,x) + \Delta R_Q u(t,x) = f(t,x) \qquad ((t,x) \in \Omega_T), \tag{2.7}$$

$$u(0,x) = \varphi(x) = R_Q^{-1}\psi(x) \qquad ((t,x) \in Q), \tag{2.8}$$

$$u(t,x) = 0 \qquad ((t,x) \in \Gamma^T). \tag{2.9}$$

3. Свойства операторов

3.1. Свойства разностного оператора. Рассмотрим разностный оператор R, определенный формулой (1.3).

Лемма 3.1. *Оператор* $R : L_2((0,T) \times \mathbb{R}^n) \to L_2((0,T) \times \mathbb{R}^n)$ *ограничен и*

$$R^* u(t,x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_h u(t, x-h).$$

Доказательство очевидно.

Лемма 3.2 (ср. с [10, лемма 2.3]). *Операторы* $I_Q : L_2(\Omega_T) \to L_2((0,T) \times \mathbb{R}^n)$, $P_Q : L_2((0,T) \times \mathbb{R}^n) \to L_2(\Omega_T)$ *и* $R_Q = P_Q R I_Q : L_p(\Omega_T) \to L_2(\Omega_T)$ *ограниченные, при этом* $I_Q^* = P_Q$ *и* $R_Q^* = P_Q R^* I_Q$.

Обозначим через $L_2(\Omega_s)$ подпространство функций из $L_2(\Omega_T)$ таких, что $x \notin \bigcup_l Q_{sl}$ $(l = 1,\dots,N(s))$, где $\Omega_s = (0,T) \times \bigcup_l Q_{sl}$. Введем ограниченный оператор $P_s : L_2(\Omega_T) \to L_2(\Omega_s)$ по формуле $P_s u(t,x) = u(t,x)$ $(t \in (0,T),\ x \in \bigcup_l Q_{sl})$, $P_s u(t,x) = 0$ $(t \in (0,T),\ x \in Q \setminus \bigcup_l Q_{sl})$. Очевидно, что P_s является проектором на $L_2(\Omega_s)$. Поскольку $\mathrm{mes}_n(\partial Q_{sl}) = 0$, то $L_2(\Omega_T) = \dot{+}_s L_2(\Omega_s)$.

Пусть $\Omega_{s1} = (0,T) \times Q_{s1}$. Построим изоморфизм гильбертовых пространств $U_s : L_2(\Omega_s) \to L_2^N(\Omega_{s1})$ по формуле $(U_s u)_l(t,x) = u(t, x + h_{sl})$ $((t,x) \in \Omega_{s1})$, где $l = 1,\dots,N = N(s)$ и вектор h_{sl} таков, что $Q_{s1} + h_{sl} = Q_{sl}$ $(h_{s1} = 0)$, $L_2^N(\Omega_{s1}) = \prod_l L_2(\Omega_{s1})$.

Чтобы сформулировать леммы ниже, сделаем некоторые пояснения.

Пусть $G \subset Q \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая область, $G_T := (0,T) \times G$. Обозначим через $W_2^{1,0}(G_T)$ анизотропное пространство Соболева, содержащее функции $u \in L_2(G_T)$, имеющие обобщенные производные $\partial_i u \in L_2(G_T)$. Норма данного пространства задана формулой $\|u\|_{W_2^{1,0}(G_T)} = \Big\{ \sum\limits_{0\leqslant i\leqslant n} \int_{G_T} |\partial_i u|^2 \, dt\, dx \Big\}^{1/2}$. Пространство $W_2^{1,0}(G_T)$ можно отождествить с $L_2(0,T; W_2^1(G))$. Также очевидно, что $L_2(0,T; \mathring{W}_2^1(Q)) = \big\{ u \in W_2^{1,0}(\Omega_T) : u|_{(0,T)\times\partial Q} = 0 \big\}$.

Тогда из [16, лемма 8.6] (или [10, лемма 2.6]) следует, что оператор $R_{Qs} : L_2^N(\Omega_{s1}) \to L_2^N(\Omega_{s1})$, определяемый соотношением

$$R_{Qs} = U_s R_Q U_s^{-1}, \tag{3.1}$$

является оператором умножения на матрицу R_s. В то же время, оператор $R_{Qs}^* : L_2^N(\Omega_{s1}) \to L_2^N(\Omega_{s1})$, определяемый соотношением $R_{Qs}^* = U_s R_Q^* U_s^{-1}$, является оператором умножения на сопряженную матрицу R_s^*.

Определение 3.1. Оператор $R_Q + R_Q^*$ положительно определен, если существует $c_2 > 0$ такое, что $\big((R_Q + R_Q^*)u, u\big)_{L_2(\Omega_T)} \geqslant c_2 \|u\|^2_{L_2(\Omega_T)}$ $\forall u \in L_2(\Omega_T)$.

Лемма 3.3 (см. [10, лемма 2.8]). *Оператор $R_Q + R_Q^*$ положительно определен тогда и только тогда, когда все матрицы $R_{s_\nu} + R_{s_\nu}^*$ $(\nu = 1, \ldots, n_1)$ положительно определены.*

Лемма 3.4 (см. [10, лемма 2.14]). *Оператор $R_Q : L_2\big(0,T; \mathring{W}_2^1(Q)\big) \to L_2\big(0,T; W_2^1(Q)\big)$ непрерывен; более того, $\partial_i(R_Q u) = R_Q \partial_i u$.*

Из [16, лемма 8.15] получаем следующее утверждение.

Лемма 3.5. *$R_Q u \in L_2\big(0,T; W_2^1(Q_{sl})\big)$ для всех $u \in L_2\big(0,T; W_2^1(Q)\big)$, и*

$$\|R_Q u\|_{L_2(0,T; W_2^1(Q_{sl}))} \leqslant c_3 \sum_{j=1}^{N(s)} \|u\|_{L_2(0,T; W_2^1(Q_{sj}))} \quad (s = 1, 2, \ldots;\ l = 1, \ldots, N(s)). \tag{3.2}$$

Если $\det R_{s_\nu} \neq 0$ $(\nu = 1, \ldots, n_1)$, то существует обратный оператор $R_Q^{-1} : L_2(\Omega_T) \to L_2(\Omega_T)$ такой, что $R_Q^{-1} w \in L_2\big(0,T; W_2^1(Q_{sl})\big)$ для всех $w \in L_2\big(0,T; W_2^1(Q)\big)$; причем $R_Q^{-1} = \sum\limits_s U_s^{-1} R_{Qs}^{-1} U_s P_s$, где R_{Qs}^{-1} — оператор умножения на матрицу R_s^{-1}, и

$$\|R_Q^{-1} w\|_{L_2(0,T; W_2^1(Q_{sl}))} \leqslant c_4 \sum_{j=1}^{N(s)} \|w\|_{L_2(0,T; W_2^1(Q_{sj}))} \quad (s = 1, 2, \ldots;\ l = 1, \ldots, N(s)). \tag{3.3}$$

Константы $c_3, c_4 > 0$ не зависят от s, u и w.

3.2. Свойства оператора AR_Q. Обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle : L_2(0,T; \mathring{W}_2^1(Q)) \times L_2(0,T; W_2^{-1}(Q)) \to \mathbb{R}$ спаривание, т. е.

$$\langle A_R u, v \rangle = \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \int_{\Omega_T} A_{ij}(t,x)\, \partial_j R_Q u\, \partial_i v\, dx\, dt \qquad \forall u, v \in L_2(0,T; \mathring{W}_2^1(Q)). \tag{3.4}$$

Напомним, что в уравнении (2.1) $A_{i0} = A_{0j} = 0$ для $i, j \neq 0$; более общий случай рассматривается аналогично.

Как известно, в эллиптической теории оператор $A : \mathring{W}_2^1(Q) \to W_2^{-1}(Q)$ называется *сильно эллиптичным*, если $(Au, u)_{L_2(Q)} \geqslant c_5 \|u\|^2_{\mathring{W}_2^1(Q)} - c_6 \|u\|^2_{L_2(Q)}$ для любых $u \in \mathring{W}_1^2(Q)$ при некоторых фиксированных $c_5 > 0$ и $c_6 \geqslant 0$. Введем аналогичное определение.

Определение 3.2. Линейный оператор $A_R : L_2(0,T; \mathring{W}_2^1(Q)) \to L_2(0,T; W_2^{-1}(Q))$ назовем *сильно эллиптичным*, если существуют $c_5 > 0$ и $c_6 \geqslant 0$ такие, что для любых $u \in L_2(0,T; \mathring{W}_1^2(Q))$ выполнено $\langle A_R u, u \rangle \geqslant c_5 \|u\|^2_{L_2(0,T; \mathring{W}_2^1(Q))} - c_6 \|u\|^2_{L_2(\Omega_T)}$.

Теорема 3.1. *Пусть $A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $A_{ij}(t,x) = A_{ij}(t,x)$ $(i,j = 0, 1, \ldots, n)$, причем A_{ij} $\mathcal{M}$-периодичны для $i, j = 1, \ldots, n$, и справедлива оценка (2.3). Кроме того, пусть оператор $R_Q + R_Q^*$ положительно определен. Тогда линейный оператор $A_R := AR_Q : L_2(0,T; \mathring{W}_2^1(Q)) \to L_2(0,T; W_2^{-1}(Q))$ ограничен и сильно эллиптичен.*

Доказательство. Ограниченность оператора A_R следует из того, что $A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, а оператор R_Q ограничен, см. лемму 3.1. Заметим, что это означает также деминепрерывность оператора A_R (непрерывность из сильной топологии $L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))$ в слабую топологию $L_2(0,T;W_2^{-1}(Q))$).

Сильная эллиптичность оператора $A_R(t,\cdot) : \mathring{W}_2^1(Q) \to W_2^{-1}(Q)$ доказана в [10, 16]. Для удобства читателей покажем справедливость этого утверждения для $A_R : L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q)) \to L_2(0,T;W_2^{-1}(Q))$.

Поскольку $R_Q = \sum\limits_s R_{Qs}$, число различных матриц R_s конечно, а функции A_{ij} $\mathcal{M}$-периодичны для $i,j = 1,\dots,n$, воспользуемся формулами (3.1) и (3.3):

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \int_{\Omega_T} A_{ij}(t,x)\,\partial_j R_Q u\,\partial_i u\,dx\,dt = \sum_s \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \big(A_{ij}(t,x)\,R_s\partial_j(U_sP_su), \partial_i(U_sP_su)\big)_{L_2^N(\Omega_{s1})} = I_1.$$

Так как

$$\begin{aligned}\sum_s \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} &\big(A_{ij}(t,x)\,R_s\partial_j(U_sP_su), \partial_i(U_sP_su)\big)_{L_2^N(\Omega_{s1})} = \\ &= \sum_s \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \big(\partial_j(U_sP_su), A_{ij}(t,x)\,R_s^*\partial_i(U_sP_su)\big)_{L_2^N(\Omega_{s1})} = \\ &= \sum_s \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \big(\partial_j(U_sP_su), A_{ji}(t,x)\,R_s^*\partial_i(U_sP_su)\big)_{L_2^N(\Omega_{s1})} = \\ &= \frac{1}{2}\sum_s \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \big(A_{ij}(t,x)\,(R_s+R_s^*)\partial_j(U_sP_su), \partial_i(U_sP_su)\big)_{L_2^N(\Omega_{s1})},\end{aligned}$$

воспользуемся положительной определенностью оператора $R_Q + R_Q^*$, т. е. положительной определенностью матриц $R_s + R_s^*$, а также оценкой (2.3):

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{2}\sum_s \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \big(A_{ij}(t,x)\,(R_s+R_s^*)\partial_j(U_sP_su), \partial_i(U_sP_su)\big)_{L_2^N(\Omega_{s1})} = \\ &= \frac{1}{2}\sum_s \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \Big(A_{ij}(t,x)\,\sqrt{R_s+R_s^*}\partial_j(U_sP_su), \sqrt{R_s+R_s^*}\partial_i(U_sP_su)\Big)_{L_2^N(\Omega_{s1})} \geqslant \\ &\geqslant \frac{c_1}{2}\sum_s \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \Big(\sqrt{R_s+R_s^*}\partial_i(U_sP_su), \sqrt{R_s+R_s^*}\partial_i(U_sP_su)\Big)_{L_2^N(\Omega_{s1})} = \\ &= \frac{c_1}{2}\big((R_Q+R_Q^*)u,u\big) \geqslant \frac{c_1c_2}{2}\|u\|^2_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))} = c_7\|u\|^2_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Оценим оставшееся слагаемое оператора. При этом мы учтем, что по определению $|A_{ij}(t,x)| \leqslant c_8$ ($A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$), а $\|R_Qu\|_{L_2(\Omega_T)} \leqslant c_9\|u\|_{L_2(\Omega_T)}$ (см. лемму 3.5):

$$I_2 = \left|\int_{\Omega_T} A_{00}(t,x)\,R_Qu\,u\,dx\,dt\right| \leqslant c_8c_9\|u\|^2_{L_2(\Omega_T)} = c_{10}\|u\|^2_{L_2(\Omega_T)}. \tag{3.6}$$

Таким образом,

$$\langle A_Ru,u\rangle \geqslant I_1 - I_2 \geqslant c_7\|u\|^2_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))} - c_{10}\|u\|^2_{L_2(\Omega_T)}. \tag{3.7}$$

Теорема доказана. □

Замечание 3.1. Заметим, что утверждение теоремы 3.1 справедливо также, если дифференциально-разностный оператор A_R задан формулой (3.4) и $A_{i0} \neq 0$ и (или) $A_{0j} \neq 0$ для всех или некоторых $i,j \neq 0$.

Для доказательства этого факта достаточно оценить интегралы

$$I_{3i} = \left|\int_{\Omega_T} A_{i0}(t,x)\,R_Qu\,\partial_iu\,dx\,dt\right| \leqslant c_8c_9\|u\|_{L_2(\Omega_T)}\|\partial_iu\|_{L_2(\Omega_T)} \leqslant c_{10}\varepsilon\|\partial_iu\|^2_{L_2(\Omega_T)} + c_{10}\varepsilon^{-1}\|u\|^2_{L_2(\Omega_T)},$$

$$I_{4j} = \left|\int_{\Omega_T} A_{0j}(t,x)\,R_Q\partial_ju\,u\,dx\,dt\right| \leqslant c_8c_9\|\partial_ju\|_{L_2(\Omega_T)}\|u\|_{L_2(\Omega_T)} \leqslant c_{10}\varepsilon\|\partial_ju\|^2_{L_2(\Omega_T)} + c_{10}\varepsilon^{-1}\|u\|^2_{L_2(\Omega_T)}.$$

Тогда

$$\langle A_Ru,u\rangle \geqslant I_1 - I_2 - \sum_{1\leqslant i\leqslant n}(I_{3i}+I_{4i}) \geqslant$$

$$\geqslant c_7\|u\|^2_{L_2(0,T;\mathring{W}^1_2(Q))} - 2c_{10}\varepsilon\|u\|^2_{L_2(0,T;\mathring{W}^1_2(Q))} - c_{10}(2n\varepsilon^{-1}+1)\|u\|^2_{L_2(\Omega_T)}.$$

Всегда можно подобрать $\varepsilon > 0$ такое, что $\widehat{c_7} := c_7 - 2c_{10}\varepsilon > 0$. Сильная эллиптичность доказана.

3.3. Свойства оператора $\partial_t R_Q$ при $\varphi = 0$.

Определение 3.3. Линейный оператор $\partial_t R_Q : L_2(0,T;\mathring{W}^1_2(Q)) \to L_2(\Omega_T)$ называется *монотонным*, если $\langle \partial_t R_Q u, u\rangle \geqslant 0$ $\forall u \in \mathcal{D}(\partial_t R_Q)$. Монотонный оператор $\partial_t R_Q$ *максимально монотонен*, если из справедливого для любого $u \in \mathcal{D}(\partial_t R_Q)$ неравенства $\langle \partial_t R_Q u - g, u - y\rangle \geqslant 0$ следует, что $y \in \mathcal{D}(\partial_t R_Q)$ и $g = \partial_t R_Q y$.

Таким образом, монотонный оператор с замкнутым графиком максимально монотонен.

Теорема 3.2. *Пусть $\varphi \equiv 0$, а оператор $R_Q + R_Q^*$ положительно определен. Тогда $\partial_t R_Q$: $L_2(0,T;\mathring{W}^1_2(Q)) \to L_2(\Omega_T)$ — максимально монотонный оператор.*

Доказательство. Максимальная монотонность оператора $\partial_t : L_2(0,T;\mathring{W}^1_2(Q)) \to L_2(\Omega_T)$ при $\varphi \equiv 0$ хорошо известна, см., например, [5, гл. 3, §2]. Проверим эти свойства у оператора $\partial_t R_Q$. Проинтегрируем по частям:

$$\langle \partial_t R_Q u, u\rangle = \int_0^T \left(\partial_t R_Q u(\tau), u(\tau)\right)_{L_2(Q)} d\tau =$$
$$= \frac{1}{2}\left(R_Q u(T), u(T)\right)_{L_2(Q)} - \frac{1}{2}\left(R_Q u(\tau), u(\tau)\right)_{L_2(Q)} = \frac{1}{2}\left(R_Q u(T), u(T)\right)_{L_2(Q)}. \quad (3.8)$$

Воспользуемся формулой (3.1):

$$\left(R_Q u(T), u(T)\right)_{L_2(Q)} = \sum_s \left(R_s(U_sP_su(T)), (U_sP_su(T))\right)_{L_2^N(Q_{s1})} =$$
$$= \sum_s \left((U_sP_su(T)), R_s^*(U_sP_su(T))\right)_{L_2^N(Q_{s1})} = \frac{1}{2}\sum_s \left((R_s+R_s^*)(U_sP_su(T)), (U_sP_su(T))\right)_{L_2^N(Q_{s1})} =$$
$$= \frac{1}{2}\big((R_Q+R_Q^*)u(T), u(T)\big)_{L_2(Q)} \geqslant 0 \quad (3.9)$$

в силу положительной определенности оператора $R_Q + R_Q^*$. Оценка (3.9), подставленная в (3.8), доказывает монотонность оператора $\partial_t R_Q$. Кроме того, график $R_Q+R_Q^*$ замкнут, т. е. этот оператор максимально монотонен. Максимальная монотонность оператора $\partial_t(R_Q+R_Q^*)$ следует из того, что этот оператор монотонен, а операторы ∂_t и $R_Q + R_Q^*$ максимально монотонны. □

Следствие 3.1. *Пусть $u \in W$. Тогда, согласно доказательству предыдущей теоремы, из формулы* (3.9) *и положительной определенности $R_Q + R_Q^*$ следует, что существуют константы $c_{11} > 0$ и $c_{12} > 0$, не зависящие от u, такие, что*

$$\langle R_Q u, u\rangle \geqslant c_{11}\|u\|^2_{L_2(\Omega_T)}, \quad (3.10)$$
$$\left(R_Q u(t), u(t)\right)_{L_2(Q)} \geqslant c_{12}\|u(t)\|^2_{L_2(Q)} \qquad \forall t \in (0,T]. \quad (3.11)$$

4. Существование и единственность решения

Определение 4.1. Оператор $A : L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q)) \to L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ называется *коэрцитивным*, если на положительной полуоси существует некоторая непрерывная функция $c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ такая, что $\langle Au, u\rangle \geqslant c(\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))})\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))}$ и $c(s) \to \infty$ при $s \to \infty$.

Теорема 4.1. *Пусть $A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $A_{ij}(t,x) = A_{ij}(t,x)$ $(i,j = 0,1,\ldots,n)$, причем A_{ij} $\mathcal{M}$-периодичны для $i,j = 1,\ldots,n$ и справедлива оценка* (2.3). *Кроме того, пусть оператор $R_Q+R_Q^*$ положительно определен. Тогда для любых $f \in L_2(\Omega_T)$ и $\varphi \in L_2(Q)$ существует единственное решение задачи* (2.5), (2.6). *Более того, соответствие $\varphi \mapsto u$ как отображение из $L_2(Q)$ в $C(0,T;L_2(Q))$ и соответствие $f \mapsto u$ как отображение из $L_2(\Omega_T)$ в $L_p(0,T;\mathring{W}^1_2(Q))$ непрерывны, и для некоторых $c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16} > 0$, не зависящих от u_i, f_i и φ_2 $(i = 1,2)$, справедливы оценки*

$$\|u_1 - u_2\|_{C(0,T;L_2(Q))} \leqslant c_{13}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(Q)} + c_{14}\|f_1 - f_2\|_{L_2(\Omega_T)}, \quad (4.1)$$
$$\|u_1 - u_2\|_{L_2(0,T;\mathring{W}^1_2(Q))} \leqslant c_{15}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(Q)} + c_{16}\|f_1 - f_2\|_{L_2(\Omega_T)}, \quad (4.2)$$

где u_1 и u_2 — решения задачи (2.5), (2.6) *при правых частях f_1 и f_2 и начальных условиях φ_1 и φ_2, соответственно.*

Доказательство. Сначала рассмотрим задачу при $\varphi = 0$. Тогда согласно теореме 3.2 оператор $\partial_t R_Q$ максимально монотонен, а согласно теореме 3.1 оператор A_R радиально непрерывен и сильно эллиптичен. Пусть в оценке сильной эллиптичности $c_6 = 0$. Следовательно, A_R монотонен и коэрцитивен. Таким образом, выполнены условия теоремы 1.1 из [5, гл. III, §1]. Решение задачи (2.5), (2.6) существует. Единственность данного решения следует из монотонности операторов.

Если $c_6 > 0$, то заменой функции $u(t,x) = e^{\lambda t} v(t,x)$ получим эквивалентное уравнение

$$\partial_t R_Q v + (A_R + \lambda R_Q) v = e^{-\lambda t} f, \qquad 0 < t < T, \tag{4.3}$$

$$v(0) = 0. \tag{4.4}$$

В силу оценки (3.10), если $c_{11}\lambda > c_6$, то оператор $A_R + \lambda R_Q$ монотонен и коэрцитивен, т. е. решение задачи (4.3), (4.4) существует и единственно, см. выше. Следовательно, существует и единственно решение задачи (2.5), (2.6).

Осталось рассмотреть задачу при $\varphi \neq 0$. Воспользуемся линейностью операторов. Для любого $\varphi \in L_2(Q)$ существует функция $y \in W \subset C(0,T; L_2(Q))$ такая, что $y(0,x) = \varphi(x)\,(x \in Q)$. Тогда заменой функции $u(t,x) = v(t,x) + y(t,x)$ можно получить эквивалентное уравнение

$$\partial_t R_Q v + A_R v = f - \partial_t y - A_R y := \widehat{f}, \qquad 0 < t < T, \tag{4.5}$$

$$v(0) = 0. \tag{4.6}$$

Как доказано выше, задача (4.5), (4.6) имеет единственное решение. Следовательно, существует и единственно решение задачи (2.5), (2.6).

Покажем зависимость решения от начальных условий и правой части. Используем сильную эллиптичность оператора A_R. Для упрощения формул будем пока считать, что A_R — монотонный (т. е. $c_{10} = 0$ в оценке (3.7)). Пусть $u_1 \in W$ и $u_2 \in W$ — решения задачи (2.5), (2.6) при начальных условиях $\varphi_1 \in L_2(Q)$ и $\varphi_2 \in L_2(Q)$, а также при правых частях $f_1 \in L_2(\Omega_T)$ и $f_2 \in L_2(\Omega_T)$, соответственно.

Пусть $\Omega_t := (0,t) \times Q$ и $\langle f, u\rangle_t := \int_{\Omega_t} f\, u\, dx\, d\tau$. Аналогично формулам (3.8), (3.9)

$$\begin{aligned}\langle \partial_t R_Q u, u\rangle_t = \int_0^t \left(\partial_t R_Q u(\tau), u(\tau)\right)_{L_2(Q)} d\tau = \\ = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}(R_Q + R_Q^*)u(t), u(t)\Big)_{L_2(Q)} - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}(R_Q + R_Q^*)u(0), u(0)\Big)_{L_2(Q)}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Обозначим для сокращения записей $R_Q^c := \frac{1}{2}(R_Q + R_Q^*)$. Очевидно, что этому оператору соответствуют матрицы $R_s^c := \frac{1}{2}(R_s + R_s^*)$. Воспользуемся положительной определенностью оператора R_Q^c, т. е. положительной определенностью матриц R_s^c:

$$\begin{aligned}\left(R_Q^c u(t), u(t)\right)_{L_2(Q)} = \sum_s \left(R_s^c U_s P_s u(t), U_s P_s u(t)\right)_{L_2^N(Q_{s1})} = \\ = \sum_s \left(\sqrt{R_s^c}\, U_s P_s u(t), \sqrt{R_s^c}\, U_s P_s u(t)\right)_{L_2^N(Q_{s1})} = \left\|\sqrt{R_Q^c}\, u(t)\right\|^2_{L_2(Q)}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Из формул (4.7) и (4.8) следует, что $\langle \partial_t R_Q(u_1 - u_2), (u_1 - u_2)\rangle_t = \frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^c}(u_1 - u_2)(t)\right\|^2_{L_2(Q)} - \frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^c}(\varphi_1 - \varphi_2)\right\|^2_{L_2(Q)}$. Тогда для любого $t \in (0,T]$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^c}(u_1(t) - u_2(t))\right\|^2_{L_2(Q)} + \langle A_R u_1 - A_R u_2, u_1 - u_2\rangle_t = \\ = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2\rangle_t + \frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^c}(\varphi_1 - \varphi_2)\right\|^2_{L_2(Q)}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Здесь $\langle A_R u, u\rangle_t := \sum\limits_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \int_{\Omega_t} A_{ij}(\tau, x)\, \partial_j R_Q u\, \partial_i u\, dx\, d\tau$.

Рассмотрим также функцию $u_3 \in W$, являющуюся решением задачи (2.5), (2.6) при начальных условиях φ_1 и правой части f_2. Тогда для любого $t \in (0,T]$

$$\frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^c}(u_1(t) - u_3(t))\right\|^2_{L_2(Q)} + \langle A_R u_1 - A_R u_3, u_1 - u_3\rangle_t = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_3\rangle_t, \tag{4.10}$$

$$\frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^c}(u_3(t)-u_2(t))\right\|^2_{L_2(Q)}+\langle A_Ru_3-A_Ru_2,u_3-u_2\rangle_t=\frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^c}(\varphi_1-\varphi_2)\right\|^2_{L_2(Q)}. \tag{4.11}$$

В силу аддитивности интеграла Лебега, аналогично оценке (3.7),

$$\langle A_Ru,u\rangle_t\geqslant c_7\|u\|^2_{L_2(0,t;\mathring{W}_2^1(Q))}. \tag{4.12}$$

Используя оценку (4.12) и неотрицательность первого слагаемого левой части (4.10), имеем, что

$$c_7\|u_1-u_3\|^2_{L_2(0,t;\mathring{W}_2^1(Q))}\leqslant\langle A_Ru_1-A_Ru_3,u_1-u_3\rangle_t=\langle f_1-f_2,u_1-u_3\rangle_t-$$
$$-\left\|\sqrt{R_Q^c}(u_1(t)-u_3(t))\right\|^2_{L_2(Q)}\leqslant\langle f_1-f_2,u_1-u_3\rangle_t\leqslant\|f_1-f_2\|_{L_2(\Omega_t)}\|u_1-u_3\|_{L_2(\Omega_t)}. \tag{4.13}$$

Воспользовавшись неравенством Фридрихса $\|u\|_{L_2(\Omega_t)}\leqslant c_{17}\|u_1-u_3\|_{L_2(0,t;\mathring{W}_2^1(Q))}$, из неравенства (4.13) получаем, что

$$c_7\|u_1-u_3\|^2_{L_2(0,t;\mathring{W}_2^1(Q))}\leqslant c_{17}\|f_1-f_2\|_{L_2(\Omega_t)}\|u\|_{L_2(0,t;\mathring{W}_2^1(Q))},$$
$$\|u_1-u_3\|_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))}\leqslant c_{18}\|f_1-f_2\|_{L_2(\Omega_t)}. \tag{4.14}$$

С другой стороны, второе слагаемое левой части (4.10) также неотрицательно, т. е.

$$\frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^c}(u_1(t)-u_3(t))\right\|^2_{L_2(Q)}\leqslant\|f_1-f_2\|_{L_2(\Omega_t)}\|u_1-u_3\|_{L_2(\Omega_t)}.$$

Используя опять неравенство Фридрихса, а также оценку (4.14), имеем

$$\left\|\sqrt{R_Q^c}(u_1(t)-u_3(t))\right\|^2_{L_2(Q)}\leqslant c_{19}\|f_1-f_2\|^2_{L_2(\Omega_t)}.$$

По построению оценка (3.11) справедлива не только для R_Q, но и для R_Q^c, т. е.

$$c_{12}\|u_1(t)-u_3(t)\|^2_{L_2(Q)}\leqslant\left\|\sqrt{R_Q^c}(u_1(t)-u_3(t))\right\|^2_{L_2(Q)}\leqslant c_{18}\|f_1-f_2\|^2_{L_2(\Omega_t)},$$
$$\|u_1(t)-u_3(t)\|_{L_2(Q)}\leqslant c_{20}\|f_1-f_2\|_{L_2(\Omega_t)}. \tag{4.15}$$

Аналогично, из (4.11) следует, что $\left\|\sqrt{R_Q^c}(u_3(t)-u_2(t))\right\|^2_{L_2(Q)}\leqslant\left\|\sqrt{R_Q^c}(\varphi_1-\varphi_2)\right\|^2_{L_2(Q)}$, т. е. благодаря невырожденности R_Q^c имеем, что $\|u_3(t)-u_2(t)\|^2_{L_2(Q)}\leqslant c_{21}\|\varphi_1-\varphi_2\|^2_{L_2(Q)}$. А также

$$c_7\|u_3-u_2\|^2_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))}\leqslant\langle A_Ru_3-A_Ru_2,u_3-u_2\rangle\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^c}(\varphi_1-\varphi_2)\right\|^2_{L_2(Q)}\leqslant c_{22}\|\varphi_1-\varphi_2\|^2_{L_2(Q)}. \tag{4.16}$$

Здесь мы воспользовались оценкой $\left\|\sqrt{R_Q^c}\varphi\right\|^2_{L_2(Q)}\leqslant c_{23}\|\varphi\|^2_{L_2(Q)}$, следующей из аналогичной оценки для оператора R_Q, см. [16, лемма 8.15].

Используем неравенство треугольника для норм. Тогда из (4.14)–(4.16) следует, что

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_{L_2(Q)}\leqslant\|u_1(t)-u_3(t)\|_{L_2(Q)}+\|u_3(t)-u_2(t)\|_{L_2(Q)}\leqslant$$
$$\leqslant c_{23}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_2(Q)}+c_{20}\|f_1-f_2\|_{L_2(\Omega_T)}, \tag{4.17}$$
$$\|u_1-u_2\|_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))}\leqslant\|u_1-u_3\|_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))}+\|u_3-u_2\|_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))}\leqslant$$
$$\leqslant c_{24}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_2(Q)}+c_{18}\|f_1-f_2\|_{L_2(\Omega_T)}. \tag{4.18}$$

Если оператор A_R сильно эллиптичен, но не монотонен, т. е. $c_6=c_{10}>0$, рассмотрим эквивалентное уравнение для вспомогательной функции v такой, что $u(t,x)=e^{\lambda t}v(t,x)$:

$$\partial_tR_Qv+(A_R+\lambda R_Q)v=e^{-\lambda t}f,\qquad 0<t<T, \tag{4.19}$$
$$v(0)=\varphi, \tag{4.20}$$

где $c_{11}\lambda>c_6$, т. е. оператор $A_R+\lambda R_Q$ монотонен. Пусть $v_1\in W$ и $v_2\in W$ — решения задачи (4.19), (4.20) при начальных условиях $\varphi_1\in L_2(Q)$ и $\varphi_2\in L_2(Q)$, а также при правых частях $f_1\in L_2(\Omega_T)$ и $f_2\in L_2(\Omega_T)$, соответственно. Аналогично оценкам (4.17), (4.18) получаем оценки для v_1-v_2:

$$\|v_1(t)-v_2(t)\|_{L_2(Q)}\leqslant c_{23}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_2(Q)}+c_{20}\|e^{-\lambda t}(f_1-f_2)\|_{L_2(\Omega_t)},$$
$$\|v_1-v_2\|_{L_2(0,t;\mathring{W}_2^1(Q))}\leqslant c_{24}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_2(Q)}+c_{18}\|e^{-\lambda t}(f_1-f_2)\|_{L_2(\Omega_t)}.$$

Таким образом,

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_{L_2(Q)}=\|e^{-\lambda t}(v_1(t)-v_2(t))\|_{L_2(Q)}\leqslant\|v_1(t)-v_2(t)\|_{L_2(Q)}\leqslant$$

$$\leqslant c_{23}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_2(Q)}+c_{20}\|e^{-\lambda t}(f_1-f_2)\|_{L_2(\Omega_t)}\leqslant c_{23}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_2(Q)}+c_{20}\|(f_1-f_2)\|_{L_2(\Omega_t)}, \quad (4.21)$$

$$\|v_1-v_2\|_{L_2(0,t;\mathring{W}_2^1(Q))}=\|e^{-\lambda t}(v_1-v_2)\|_{L_2(0,t;\mathring{W}_2^1(Q))}\leqslant\|v_1-v_2\|_{L_2(0,t;\mathring{W}_2^1(Q))}\leqslant$$

$$\leqslant c_{24}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_2(Q)}+c_{18}\|e^{-\lambda t}(f_1-f_2)\|_{L_2(\Omega_t)}\leqslant c_{24}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_2(Q)}+c_{18}\|(f_1-f_2)\|_{L_2(\Omega_t)}. \quad (4.22)$$

Доказана непрерывная зависимость от начальных условий и правой части и оценки (4.1), (4.2). □

Следующая теорема является следствием теорем 4.1 и 2.1.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* 1, 2 *и* 3. *Пусть матрицы R_s и R_{s0}, заданные в условии* 3, *невырождены, причем $R_s+R_s^*>0$. Пусть также $A_{ij}\in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $A_{ij}(t,x)=A_{ij}(t,x)$ $(i,j=0,1,\ldots,n)$, причем A_{ij} $\mathcal{M}$-периодичны для $i,j=1,\ldots,n$ и справедлива оценка* (2.3). *Тогда для любых $f\in L_2(\Omega_T)$ и $\psi\in L_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение задачи* (2.1), (2.2), (1.2). *Более того, соответствие $\psi\mapsto w$ как отображение из $L_2(Q)$ в $C(0,T;L_2(Q))$ и соответствие $f\mapsto w$ как отображение из $L_2(\Omega_T)$ в $L_2(0,T;W^1_{2,\gamma}(Q))$ непрерывны, и для некоторых $c_{25},c_{26},c_{27},c_{28}>0$, не зависящих от w_i, f_i и ψ_i $(i=1,2)$, справедливы оценки*

$$\|w_1-w_2\|_{C(0,T;L_2(Q))}\leqslant c_{25}\|\psi_1-\psi_2\|_{L_2(Q)}+c_{26}\|f_1-f_2\|_{L_2(\Omega_T)}, \quad (4.23)$$

$$\|w_1-w_2\|_{L_2(0,T;W_2^1(Q))}\leqslant c_{27}\|\psi_1-\psi_2\|_{L_2(Q)}+c_{28}\|f_1-f_2\|_{L_2(\Omega_T)}, \quad (4.24)$$

где w_1 и w_2 — обобщенные решения задачи (2.1), (2.2), (1.2) *при правых частях f_1 и f_2 и начальных условиях ψ_1 и ψ_2, соответственно.*

Осталось проверить согласованность начальных и краевых условий. Для произвольного $\psi\in L_2(Q)$ однозначно определен $\varphi=R_Q^{-1}\psi\in L_2(Q)$. Пространство $\mathring{W}_2^1(Q)\subset L_2(Q)$ плотно. Т.е. существует последовательность $\mathring{W}_2^1(Q)\ni\varphi_k\to\varphi$, сходящаяся в $L_2(Q)$. Тогда $\psi_k=R_Q\varphi_k\to\psi$ в $L_2(Q)$ и $\psi_k\in W^1_{2,\gamma}(Q)$. Пусть w_k — обобщенное решение задачи (2.1), (2.2), (1.2) при правых частях f и начальных условиях ψ_k. Очевидно, что краевые и начальные условия в этом случае согласованы, при этом $\|w_k-w_m\|_{C(0,T;L_2(Q))}\leqslant c_{25}\|\psi_k-\psi_m\|_{L_2(Q)}$, $\|w_k-w_m\|_{L_2(0,T;W_2^1(Q))}\leqslant c_{27}\|\psi_k-\psi_m\|_{L_2(Q)}$.

Таким образом, последовательность $\{w_k\}$ фундаментальна в пространстве $C(0,T;L_2(Q))\cap L_2(0,T;W_2^1(Q))$ и имеет единственный предел $w\in C(0,T;L_2(Q))\cap L_2(0,T;W_2^1(Q))$. Этот предел является обобщенным решением задачи (2.1), (2.2), (1.2) при правых частях f и начальных условиях ψ в силу замкнутости графиков операторов $\partial_t R_Q$ и A_R. Согласованность начальных и краевых условий доказана.

5. Пример

Рассмотрим параболическую задачу с Лапласианом

$$\partial_t w(t,x)-\Delta w(t,x)=f(t,x) \qquad ((t,x)\in\Omega_T=(0,T)\times(0,2)\times(0,1)), \quad (5.1)$$

с начальными условиями

$$u(0,x)=\psi(x) \qquad (x=(x_1,x_2)\in Q=(0,2)\times(0,1)) \quad (5.2)$$

и с краевыми условиями

$$\left.\begin{array}{lll} w(t,x_1,0)=w(t,x_1,1)=0 & & (t\in(0,T),0\leqslant x_1\leqslant 2),\\ w(t,0,x_2)=\gamma_1 w(t,1,x_2), & w(t,2,x_2)=\gamma_2 w(t,1,x_2) & (t\in(0,T),0\leqslant x_2\leqslant 1).\end{array}\right\} \quad (5.3)$$

В примере 1.1 показано, что для данной задачи выполнены условия 1 и 2, а краевым условиям (5.3) соответствует разностный оператор $Ru(t,x)=u(t,x)+\gamma_1 u(t,x_1+1,x_2)+\gamma_2 u(t,x_1-1,x_2)$. Данному оператору соответствует матрица $R_1=\begin{pmatrix}1&\gamma_1\\ \gamma_2&1\end{pmatrix}$, невырожденная при $\gamma_1\gamma_2\neq 1$. При этом $R_{10}=1>0$. То есть для выполнения условий теоремы 4.2 осталось определить, при каких условиях симметризация матрицы R_1 положительно определена. Очевидно, что это выполнено при $|\gamma_1+\gamma_2|<2$.

Теорема 5.1. *Пусть $|\gamma_1+\gamma_2|<2$. Тогда задача* (5.1)–(5.3) *имеет единственное обобщенное решение.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач// Докл. АН СССР. — 1969. — *185*, № 4. — С. 739–740.
2. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1952. — *1*. — С. 187–264.
3. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.
4. *Лийко В. В., Скубачевский А. Л.* Смешанные задачи для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений в цилиндре// Мат. заметки. — 2020. — *107*, № 5. — С. 693–716.
5. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
6. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений// Дифф. уравн. — 1980. — *16*, № 1. — С. 1925–1935.
7. *Скубачевский А. Л.* Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы// Мат. сб. — 1986. — *129*, № 2. — С. 279–302.
8. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — *26*. — С. 3–132.
9. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. II// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *33*. — С. 3–179.
10. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 3–112.
11. *Скубачевский А. Л., Селицкий А. М.* Вторая краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 1. — С. 207-208.
12. *Carleman T.* Sur la théorie des équations intégrales et ses applications// Verh. Internat. Math.-Kongr. — 1932. — *1*. — С. 138–151.
13. *Browder F. E.* Nonlocal elliptic boundary value problems// Am. J. Math. — 1964. — *86*, № 4. — С. 735–750.
14. *Liiko V. V., Skubachevskii A. L.* On a certain property of a regular difference operator with variable coefficients// Complex Var. Elliptic Equ. — 2019. — *64*, № 5. — С. 852–865.
15. *Muravnik A. B.* Functional differential parabolic equations: integral transformationsand qualitative properties of solutions of the Cauchy problem// J. Math. Sci. (N.Y.) — 2016. — *216*, № 3. — С. 345–496.
16. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

О. В. Солонуха

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия

E-mail: `solonukha@yandex.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-349-362 UDC 517.9

On Solvability of a Linear Parabolic Problem with Nonlocal Boundary Conditions

© 2021 **O. V. Solonukha**

Abstract. A linear parabolic equation with boundary conditions of the Bitsadze–Samarskii type is considered. An existence and uniqueness theorem for a generalized solution is proved, and estimates are obtained.

REFERENCES

1. A. V. Bitsadze and A. A. Samarskii, "O nekotorykh prosteyshikh obobshcheniyakh lineynykh ellipticheskikh zadach" [On some simplest generalizations of linear elliptic problems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **185**, No. 4, 739–740 (in Russian).
2. M. I. Vishik, "Ob obshchikh kraevykh zadachakh dlya ellipticheskikh differentsial'nykh uravneniy" [On general boundary-value problems for elliptic differential equations], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1952, **1**, 187–264 (in Russian).
3. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral'nyi analiz funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equations], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).
4. V. V. Liyko and A. L. Skubachevskii, "Smeshannye zadachi dlya sil'no ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy v tsilindre" [Mixed problems for strongly elliptic differential-difference equations in a cylinder], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2020, **107**, No. 5, 693–716 (in Russian).
5. J.-L. Lions, *Nekotorye metody resheniya nelineynykh kraevykh zadach* [Some Methods of Solving Non-Linear Boundary Value Problems], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
6. A. A. Samarskii, "O nekotorykh problemakh teorii differentsial'nykh uravneniy" [On some problems in the theory of differential equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1980, **16**, No. 1, 1925–1935 (in Russian).
7. A. L. Skubachevskii, "Ellipticheskie zadachi s nelokal'nymi usloviyami vblizi granitsy" [Elliptic problems with nonlocal conditions near the boundary], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1986, **129**, No. 2, 279–302 (in Russian).
8. A. L. Skubachevskii, "Neklassicheskie kraevye zadachi. I" [Nonclassical boundary-value problems. I], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2007, **26**, 3–132 (in Russian).
9. A. L. Skubachevskii, "Neklassicheskie kraevye zadachi. II" [Nonclassical boundary-value problems. II], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **33**, 3–179 (in Russian).
10. A. L. Skubachevskii, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy i ikh prilozheniya" [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112 (in Russian).
11. A. L. Skubachevskii and A. M. Selitskii, "Vtoraya kraevaya zadacha dlya parabolicheskogo differentsial'no-raznostnogo uravneniya" [The second boundary-value problem for a parabolic differential-difference equation], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2007, **62**, No. 1, 207-208 (in Russian).
12. T. Carleman, "Sur la théorie des équations intégrales et ses applications," *Verh. Internat. Math.-Kongr.*, 1932, **1**, 138–151.
13. F. E. Browder, "Nonlocal elliptic boundary value problems," *Am. J. Math.*, 1964, **86**, No. 4, 735–750.
14. V. V. Liiko and A. L. Skubachevskii, "On a certain property of a regular difference operator with variable coefficients," *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2019, **64**, No. 5, 852–865.
15. A. B. Muravnik, "Functional differential parabolic equations: integral transformationsand qualitative properties of solutions of the Cauchy problem," *J. Math. Sci.* (*N.Y.*), 2016, **216**, No. 3, 345–496.
16. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1997.

O. V. Solonukha
Dorodnitsyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
E-mail: solonukha@yandex.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 2 (2021). С. 363–407

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-363-407 УДК 517.95

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ

© 2021 г. **Т. А. СУСЛИНА**

Аннотация. Работа представляет собой обзор результатов по асимптотике спектра вариационных задач, возникающих в теории малых колебаний жидкости в сосуде вблизи положения равновесия. Задачи были поставлены Н. Д. Копачевским в конце 1970-х годов и охватывают различные модели жидкости. Постановки даются как в виде краевых задач на собственные значения в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, которую занимает жидкость в положении равновесия, так и в виде вариационных задач о спектре отношения квадратичных форм. Общими чертами всех рассматриваемых задач является наличие «эллиптической» связи (уравнение Лапласа для идеальной жидкости или однородная система Стокса для вязкой жидкости), а также вхождение спектрального параметра в граничное условие на свободной (равновесной) поверхности Γ. Спектр в рассматриваемых задачах дискретен; функции распределения спектра имеют степенную асимптотику.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение . . . 363
2. Предварительные сведения по теории операторов . . . 366
3. Асимптотика спектра малых колебаний тяжелой идеальной жидкости . . . 370
4. Асимптотика спектра неклассической задачи типа Стеклова. Применение к теории малых колебаний жидкости . . . 375
5. Асимптотика спектра малых колебаний тяжелой вязкой жидкости . . . 386
6. Асимптотика спектра малых колебаний капиллярной вязкой жидкости . . . 392
Список литературы . . . 402

Светлой памяти Николая Дмитриевича Копачевского.

1. Введение

1.1. История вопроса. Работа представляет собой обзор результатов по асимптотике спектра вариационных задач, возникающих в теории колебаний жидкости. Имеются в виду малые (линейные) колебания жидкости в сосуде вблизи положения равновесия. В [20, приложение 1] (см. также [3, 18, 19]) Николай Дмитриевич Копачевский поставил ряд задач о спектре нормальных колебаний жидкости для различных физических моделей — тяжелой идеальной, капиллярной идеальной, тяжелой вязкой и капиллярной вязкой жидкостей. (Эти задачи обсуждаются также в более поздней монографии [21] Н. Д. Копачевского, С. Г. Крейна и Нго Зуй Кана и в книгах [40, 41] Н. Д. Копачевского и С. Г. Крейна.) Напомним, что для тяжелой жидкости основную роль играют массовые силы (сила тяжести, центробежная сила при вращении сосуда). Для капиллярной жидкости основную роль играют поверхностные силы (сила поверхностного натяжения). Рассматриваются случаи одной жидкости, частично заполняющей сосуд, и системы несмешивающихся жидкостей. Из эвристических соображений Н. Д. Копачевский нашел формулы для главных членов спектральной асимптотики в этих задачах. Он же в конце 1970-х годов поставил вопрос о получении этих формул строгими методами и обратился за консультацией к ленинградским математикам М.Ш. Бирману и М.З. Соломяку — известным специалистам по спектральной теории операторов. Оказалось, что в одной вспомогательной задаче для тяжелой вязкой жидкости справедливость асимптотической формулы спектра следует из общих результатов Метивье [43]. В остальных задачах вопрос о получении асимптотических формул строгими методами был на тот момент открыт.

В случае тяжелой идеальной жидкости асимптотическая формула спектра была вскоре оправдана Н. А. Каразеевой и М. З. Соломяком [15]. Во всех остальных задачах, поставленных в [20], асимптотические формулы спектра были оправданы автором (в то время — аспиранткой М. Ш. Бирмана). На эту тему автором опубликована краткая заметка [31] и депонирована рукопись [29]. Подробное изложение результатов ранее не публиковалось. Предлагаемый обзор восполняет этот пробел.

Решение этих задач положило начало многолетнему тесному научному взаимодействию и крепкой дружбе автора настоящей статьи с Николаем Дмитриевичем Копачевским — замечательным математиком и человеком.

1.2. О постановках и результатах. Постановки даются как в виде краевых задач на собственные значения в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, которую занимает жидкость в положении равновесия, так и в виде вариационных задач о спектре отношения квадратичных форм. Общими чертами всех рассматриваемых задач является наличие «эллиптической» связи (уравнение Лапласа для идеальной жидкости или однородная система Стокса для вязкой жидкости), а также вхождение спектрального параметра в граничное условие на свободной (равновесной) поверхности Γ. Задачи с эллиптическими связями в области с гладкой границей поддаются технике псевдодифференциальных операторов (ПДО); см. [11, 12]. Однако сейчас граница $\partial\Omega$ — негладкая, поскольку свободная поверхность Γ (или поверхность раздела двух жидкостей) и твердая стенка сосуда S при пересечении образуют ребро. Именно это обстоятельство представляет собой основную трудность. Кроме негладкости $\partial\Omega$, в рассматриваемых задачах возникают и другие осложнения. Они связаны с присутствием в вариационной постановке нелокального оператора $\mathbf{B}_\Gamma^{-1}$ для капиллярной жидкости (это разрешающий оператор некоторой эллиптической краевой задачи на Γ; см. разделы 4, 6), с векторным характером задач и появлением дополнительных связей ($\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$) для вязкой жидкости.

Спектр в рассматриваемых задачах дискретен; функции распределения спектра имеют степенную асимптотику. Получены главные члены асимптотических формул спектра.

1.3. Метод. Мы исходим из вариационной постановки задач — исследуем спектр отношения квадратичных форм
$$\frac{\mathcal{B}_\Gamma[u]}{\mathcal{A}_\Omega[u]}, \tag{1.1}$$
где $\mathcal{A}_\Omega[u]$ — положительно определенная дифференциальная квадратичная форма в области Ω, а $\mathcal{B}_\Gamma[u]$ — форма на Γ, компактная относительно $\mathcal{A}_\Omega[u]$. Доказательство асимптотических формул спектра использует общий подход, разработанный М. Ш. Бирманом и М. З. Соломяком в [6, 7]. Схема доказательства такова. Устанавливаются оценки спектра через подходящие $L_r(\Gamma)$-нормы коэффициентов формы $\mathcal{B}_\Gamma$. Эти оценки позволяют при вычислении главного члена асимптотики спектра ограничиться рассмотрением коэффициентов из плотного в $L_r(\Gamma)$ множества. В качестве такого множества удобно взять $C_0^\infty(\Gamma)$. Для случая гладких и финитных на Γ коэффициентов удается провести сравнение отношения (1.1) и аналогичного отношения форм, заданных в области $\widetilde{\Omega}$ с гладкой границей (область $\widetilde{\Omega}$ «сглаживает» Ω). Задачу в области $\widetilde{\Omega}$ мы сводим на границу, сопоставляя решениям однородного эллиптического уравнения их данные Дирихле. Из свойств алгебры ПДО Буте де Монвеля [35, 38] следует, что исходные формы приводятся[1] к квадратичным формам некоторых ПДО на $\partial\widetilde{\Omega}$. После сведения на границу получается задача о спектре отношения псевдодифференциальных форм (быть может, при наличии дополнительных связей на части границы). Асимптотические формулы спектра тогда вытекают из результатов работ [8, 10, 28].

[1] В [11], где алгебра Буте де Монвеля не использовалась, подобное представление получено лишь с точностью до слагаемых младшего порядка, не влияющих на главный член асимптотики спектра, но зато даны явные формулы для главных символов получающихся на $\partial\widetilde{\Omega}$ ПДО.

Близкий метод применялся в работах автора [30, 45], где в достаточно общей постановке была получена асимптотика спектра вариационных задач на решениях эллиптического уравнения в области с кусочно-гладкой границей. Еще две модельные задачи теории колебаний жидкости изучались в [32].

1.4. Краткий обзор результатов по асимптотике спектра в задачах со спектральным параметром в граничном условии. Рассматриваемые в статье краевые задачи содержат спектральный параметр в граничном условии. Спектральные свойства таких задач активно исследуются на протяжении длительного времени многими авторами. В обзоре [9] М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка асимптотике спектра в таких задачах посвящен раздел 7. Мы упомянем лишь несколько наиболее важных работ, отсылая читателя к более полной библиографии в [9]. Простейшая задача со спектральным параметром в граничном условии — это задача Стеклова:

$$-\Delta u = 0 \ \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda u \ \text{ на } \partial\Omega, \quad \int_{\partial\Omega} u\,dS = 0.$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+1}$ — ограниченная область. Собственные значения этой задачи совпадают с последовательными максимумами отношения форм

$$\frac{\int_{\partial\Omega} |u|^2\,dS}{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}, \quad u \in H^1(\Omega), \quad \int_{\partial\Omega} u\,dS = 0.$$

Функция распределения собственных значений $N(\lambda)$ в задаче Стеклова при $\lambda \to +0$ имеет степенную асимптотику: $N(\lambda) \sim \lambda^{-m}\omega_m \mathrm{mes}\,\partial\Omega$, где ω_m — объем единичного m-мерного шара. Более общая «задача типа Стеклова» с переменными коэффициентами эквивалентна вариационной задаче о спектре отношения

$$\frac{\int_{\partial\Omega} b(\mathbf{y})|u(\mathbf{y})|^2\,dS(\mathbf{y})}{\int_\Omega \Big(\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_i u\overline{\partial_j u} + |u|^2\Big)\,d\mathbf{x}}, \quad u \in H^1(\Omega),$$

где коэффициенты вещественные, а матрица $\{a_{ij}(\mathbf{x})\}$ симметрична и положительно определена. Сначала исследовался случай, когда граница области и коэффициенты гладкие. Первым асимптотику спектра получил Сандгрен [44] с помощью вариационного метода. Весьма общие результаты по задачам со спектральным параметром в граничном условии получил А. Н. Кожевников [16, 17] с помощью техники ПДО. И. Л. Вулис и М. З. Соломяк установили спектральную асимптотику в случае задачи типа Стеклова с вырождением [14]. Тонкие результаты о поведении собственных значений задачи типа Стеклова в двумерном случае получены Г. В. Розенблюмом [25].

Асимптотика спектра в задачах со спектральным параметром в граничном условии в области с кусочно-гладкой границей (области с ребрами) изучалась в уже упомянутой выше работе [15] Н. А. Каразеевой и М. З. Соломяка и в работах автора [29, 31] (результаты [15, 29, 31] подробно излагаются ниже). М. С. Агранович [1] оправдал асимптотическую формулу спектра для задачи типа Стеклова в липшицевой области с «почти гладкой» границей (предполагалось, что $\partial\Omega$ бесконечно гладкая вне некоторого замкнутого подмножества нулевой меры). Как сообщил автору Г. В. Розенблюм [26], ему удалось получить тот же результат в липшицевой области, заменив условие «почти гладкости» следующим: для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое подмножество $U_\varepsilon \subset \partial\Omega$ меры меньше ε такое, что на $\partial\Omega \setminus U_\varepsilon$ векторное поле $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ принадлежит классу VMO (здесь $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке $\mathbf{x}$). Для задачи типа Стеклова в случае, если известна только липшицевость границы, Г. В. Розенблюм установил двусторонние оценки правильного порядка для функции распределения спектра, а вопрос об оправдании асимптотики спектра пока остается открытым.

Отметим, что в последнее время активно изучаются свойства собственных функций задачи типа Стеклова: для них характерно быстрое убывание при удалении точки от границы области (см., например, [36, 37, 46] и цитированную там литературу).

1.5. План работы. Статья состоит из введения (раздел 1) и еще пяти разделов. В разделе 2 приведены необходимые сведения о компактных операторах в гильбертовом пространстве со степенной асимптотикой спектра. В разделе 3 рассматривается задача типа Стеклова (случай тяжелой идеальной жидкости); излагаются результаты работы [15]. В разделе 4 изучается асимптотика спектра неклассической задачи типа Стеклова (задачи о спектре отношения (4.1)); результат применяется к нескольким задачам теории колебаний жидкости, в том числе к задаче о колебаниях капиллярной идеальной жидкости. Разделы 5 и 6 посвящены задачам для вязкой жидкости. В разделе 5 изучается асимптотика спектра одной вспомогательной задачи для тяжелой вязкой жидкости, а в разделе 6 — задача о спектре малых колебаний капиллярной вязкой жидкости.

1.6. Обозначения и предварительные сведения. Пусть $\mathfrak{H}$ — комплексное сепарабельное гильбертово пространство. Скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$ обозначаем $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ соответственно. Иногда мы опускаем индексы.

Стандартное скалярное произведение и норму в $\mathbb{C}^k$ обозначаем через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ соответственно.

Далее, $L_p(\Omega;\mathbb{C}^k)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и $H^s(\Omega;\mathbb{C}^k)$, $s \geqslant 0$, — стандартные L_p-пространства и пространства Соболева $\mathbb{C}^k$-значных функций в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Через $H^s_0(\Omega;\mathbb{C}^k)$ обозначим замыкание класса $C_0^\infty(\Omega;\mathbb{C}^k)$ в $H^s(\Omega;\mathbb{C}^k)$. При $k=1$ пишем просто $H^s(\Omega)$, $H^s_0(\Omega)$; иногда мы применяем такие упрощенные обозначения и для пространств вектор-функций.

Если $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей и $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ — единичный вектор (внутренней либо внешней) нормали к $\partial\Omega$ в точке $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ (определенный на гладких участках границы), то через $\partial/\partial\nu$ обозначается производная по нормали.

Обозначим через $\mathcal{K}$ *класс ограниченных областей* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *удовлетворяющих условиям обычных теорем вложения и продолжения*. Достаточным условием для $\Omega \in \mathcal{K}$ является липшицевость (т. е. условие, что локально граница $\partial\Omega$ в подходящих координатах является графиком липшицевой функции).

Если $f(\mathbf{x})$ — вещественнозначная функция в области Ω, обозначим ее положительную и отрицательную части через $f_\pm(\mathbf{x}) := \frac{1}{2}(|f(\mathbf{x})| \pm f(\mathbf{x}))$.

Если $\mathcal{D}$ — гладкое компактное m-мерное многообразие без края или с краем, то через $T^*\mathcal{D}$ обозначается кокасательное расслоение, $T^*_{\mathbf{x}}\mathcal{D}$ — кокасательное пространство в точке $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, $T^*\mathcal{D} \setminus \{0\}$ — кокасательное расслоение с исключенным нулевым сечением.

Нам понадобится понятие полуплотности (см. [34]). В каждой локальной системе координат на $\mathcal{D}$ полуплотность $\mathfrak{u}$ изображается функцией. Если функции $u(\mathbf{y})$, $u'(\mathbf{y}')$ отвечают полуплотности $\mathfrak{u}$ в координатах, связанных преобразованием $h : \mathbf{y}' \mapsto \mathbf{y}$, то $u' = (u \circ h) j_h$, где j_h^2 — модуль якобиана преобразования h. Классы C^l, H^s и т. п. для полуплотностей вводятся через локальные координаты. На полуплотностях имеет смысл понятие классического ПДО; определение может быть дано в локальных координатах. Алгебра главных символов ПДО на полуплотностях та же, что и для ПДО на функциях. В частности, главный символ ПДО есть функция на кокасательном расслоении. Произведение двух полуплотностей есть плотность. Для плотностей на $\mathcal{D}$ инвариантно определен интеграл. Это позволяет ввести комплексное сепарабельное гильбертово пространство полуплотностей $L_2(\mathcal{D})$.

1.7. Благодарности. Автор благодарен Г. В. Розенблюму за консультацию по современному состоянию дел с изучением спектральных свойств задачи типа Стеклова. Автор благодарен А. И. Назарову за обсуждение и полезные комментарии.

2. Предварительные сведения по теории операторов

Приведем необходимые сведения о компактных операторах в гильбертовом пространстве; см. [6, §1], [7, добавление 1], [13].

2.1. Функции распределения спектра для компактных операторов. Пусть $\mathfrak{H}$ — комплексное сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{S}_\infty = \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$ — множество компактных операторов в $\mathfrak{H}$. Если $T = T^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$, то через $\lambda_n^+(T)$, $-\lambda_n^-(T)$ обозначим положительные и отрицательные собственные значения оператора T, занумерованные в порядке невозрастания $\lambda_n^\pm(T)$ с учетом кратностей. Через $N_\pm(\lambda, T)$ обозначим функции распределения положительных и отрицательных собственных значений: $N_\pm(\lambda,T) := \#\{n : \lambda_n^\pm(T) > \lambda\}$, $\lambda > 0$. Если $T \geqslant 0$, то пишем просто $N(\lambda,T) = N_+(\lambda,T)$.

Минимаксимальный принцип для собственных значений самосопряженного оператора $T \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$ утверждает, что справедливо равенство

$$\lambda^\pm_{n+1}(T) = \min_{\operatorname{codim}\mathfrak{G}\leqslant n}\ \max_{0\neq u\in\mathfrak{G}} \pm\frac{(Tu,u)_\mathfrak{H}}{(u,u)_\mathfrak{H}}, \tag{2.1}$$

где $\mathfrak{G}$ — подпространство в $\mathfrak{H}$.

Мы будем систематически пользоваться следующим утверждением, вытекающим из (2.1).

Лемма 2.1. *Пусть $\mathfrak{H}_1$ — подпространство в $\mathfrak{H}_2$. Пусть $T_i = T_i^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}_i)$, $i = 1,2$. Предположим, что для $u \in \mathfrak{H}_1$ такого, что $\pm(T_1u,u) > 0$, справедливо неравенство $\pm(T_1u,u) \leqslant \pm(T_2u,u)$. Тогда $N_\pm(\lambda,T_1) \leqslant N_\pm(\lambda,T_2)$ при $\lambda > 0$.*

Следующая лемма, обобщая лемму 2.1, позволяет сравнивать спектры операторов, действующих в разных гильбертовых пространствах.

Лемма 2.2 (см. [7, лемма 1.15]). *Пусть $T_i = T_i^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}_i)$, $i = 1,2$. Пусть $\mathcal{S} : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ — непрерывный оператор, причем $(T_1u,u)_{\mathfrak{H}_1} = 0$ при $u \in \operatorname{Ker}\mathcal{S}$. Если при некотором $t > 0$ для всех $u \in \mathfrak{H}_1$, удовлетворяющих условию $\pm(T_1u,u)_{\mathfrak{H}_1} > 0$, выполнено неравенство*

$$\pm\frac{(T_1u,u)_{\mathfrak{H}_1}}{(u,u)_{\mathfrak{H}_1}} \leqslant \pm\frac{t\,(T_2\mathcal{S}u,\mathcal{S}u)_{\mathfrak{H}_2}}{(\mathcal{S}u,\mathcal{S}u)_{\mathfrak{H}_2}},$$

то при $\lambda > 0$ справедливо неравенство $N_\pm(\lambda,T_1) \leqslant N_\pm(t^{-1}\lambda,T_2)$.

Мы будем рассматривать операторы $T = T^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$ со степенной асимптотикой функций $N_\pm(\lambda,T)$, которую удобно характеризовать значениями функционалов

$$\Delta^\pm_\theta(T) := \limsup_{\lambda\to+0} \lambda^\theta N_\pm(\lambda,T), \qquad \delta^\pm_\theta(T) := \liminf_{\lambda\to+0} \lambda^\theta N_\pm(\lambda,T). \tag{2.2}$$

Здесь $\theta > 0$. Отметим соотношения

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/\theta}\lambda^\pm_n(T) = \left(\Delta^\pm_\theta(T)\right)^{1/\theta}, \qquad \liminf_{n\to\infty} n^{1/\theta}\lambda^\pm_n(T) = \left(\delta^\pm_\theta(T)\right)^{1/\theta}.$$

Функционалы (2.2) не меняются при компактном возмущении метрики исходного гильбертова пространства $\mathfrak{H}$. Пусть $Q = Q^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$ и $\lambda^+_1(Q) < 1$. Положим

$$(u,v)_{\mathfrak{H}_1} := (u,v)_\mathfrak{H} - (Qu,v)_\mathfrak{H}. \tag{2.3}$$

Скалярное произведение (2.3) превращает $\mathfrak{H}$ в новое гильбертово пространство $\mathfrak{H}_1$. Метрики $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_1$ эквивалентны. Пусть $T = T^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$, и пусть T_1 — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}_1$, порожденный полуторалинейной формой оператора T, то есть $(T_1u,v)_{\mathfrak{H}_1} = (Tu,v)_\mathfrak{H}$, $u,v \in \mathfrak{H}$.

Лемма 2.3 (см. [7, лемма 1.16]). *При сделанных предположениях для всякого $\theta > 0$ справедливы равенства $\Delta^\pm_\theta(T_1) = \Delta^\pm_\theta(T)$, $\delta^\pm_\theta(T_1) = \delta^\pm_\theta(T)$.*

Обсудим теперь поведение функционалов $\Delta^\pm_\theta(T)$, $\delta^\pm_\theta(T)$ при аддитивных возмущениях оператора T. Прежде всего отметим, что для операторов $T_i = T_i^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$, $i = 1,2$, справедливы неравенства

$$N_\pm(\lambda+\mu, T_1+T_2) \leqslant N_\pm(\lambda,T_1) + N_\pm(\mu,T_2), \quad \lambda,\mu > 0. \tag{2.4}$$

Неравенства (2.4) эквивалентны известным неравенствам Г. Вейля для собственных чисел суммы самосопряженных операторов. Следующее утверждение также принадлежит Г. Вейлю.

Лемма 2.4 (см. [7, лемма 1.17]). *Пусть $T_i = T_i^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$, $i = 1,2$. Предположим, что $\Delta^+_\theta(T_2) = \Delta^-_\theta(T_2) = 0$ при некотором $\theta > 0$. Тогда справедливы равенства $\Delta^\pm_\theta(T_1+T_2) = \Delta^\pm_\theta(T_1)$ и $\delta^\pm_\theta(T_1+T_2) = \delta^\pm_\theta(T_1)$.*

Лемма 2.4 содержится в следующем утверждении, имеющем для нас важное значение.

Лемма 2.5 (см. [13, (6)]). *Пусть $T_i = T_i^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$, $i = 1,2$. Тогда справедливы неравенства*

$$\left|\left(\Delta^\pm_\theta(T_1)\right)^{\frac{1}{1+\theta}} - \left(\Delta^\pm_\theta(T_2)\right)^{\frac{1}{1+\theta}}\right| \leqslant \left(\Delta^+_\theta(T_1-T_2) + \Delta^-_\theta(T_1-T_2)\right)^{\frac{1}{1+\theta}},$$

$$\left|\left(\delta^\pm_\theta(T_1)\right)^{\frac{1}{1+\theta}} - \left(\delta^\pm_\theta(T_2)\right)^{\frac{1}{1+\theta}}\right| \leqslant \left(\Delta^+_\theta(T_1-T_2) + \Delta^-_\theta(T_1-T_2)\right)^{\frac{1}{1+\theta}}.$$

Функционалы (2.2) не меняются при переходе в $\mathfrak{H}$ к подпространству конечной коразмерности.

Лемма 2.6. *Пусть* $\mathfrak{H}_2$ — *подпространство в* $\mathfrak{H}_1$, *причем* $\dim \mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{H}_2 < \infty$. *Пусть* $J : \mathfrak{H}_2 \to \mathfrak{H}_1$ — *оператор вложения, а* P — *ортопроектор пространства* $\mathfrak{H}_1$ *на* $\mathfrak{H}_2$. *Пусть* $T_1 = T_1^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}_1)$ *и* $T_2 := PT_1J$ — *оператор в* $\mathfrak{H}_2$. *Тогда верны равенства* $\Delta_\theta^\pm(T_2) = \Delta_\theta^\pm(T_1)$, $\delta_\theta^\pm(T_2) = \delta_\theta^\pm(T_1)$.

При вычислении асимптотики спектра ортогональной суммы операторов будем пользоваться следующим очевидным утверждением. Пусть $T_i = T_i^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}_i)$, $i = 1, 2$. Тогда $T = T_1 \oplus T_2 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2)$ и справедливо равенство

$$N_\pm(\lambda, T_1 \oplus T_2) = N_\pm(\lambda, T_1) + N_\pm(\lambda, T_2), \quad \lambda > 0. \tag{2.5}$$

2.2. Спектр отношения квадратичных форм. Мы будем рассматривать компактные операторы, порожденные отношением квадратичных форм. Если $\mathcal{F}[u, v]$ — полуторалинейная форма в $\mathfrak{H}$, то положим $\mathcal{F}[u] := \mathcal{F}[u, u]$. Пусть непрерывная полуторалинейная форма $\mathcal{A}[u, v]$ порождает в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ скалярное произведение, превращая $\mathfrak{H}$ в новое гильбертово пространство $\mathfrak{H}_\mathcal{A}$. Пусть в пространстве $\mathfrak{H}$ задана непрерывная полуторалинейная форма $\mathcal{B}[u, v]$. Эта форма порождает в пространстве $\mathfrak{H}_\mathcal{A}$ оператор $\mathbf{B}$, т. е. $\mathcal{B}[u, v] = \mathcal{A}[\mathbf{B}u, v]$, $u, v \in \mathfrak{H}$. Предположим, что $\mathbf{B} = \mathbf{B}^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}_\mathcal{A})$. В силу минимаксимального принципа (2.1) числа $\lambda_n^\pm(\mathbf{B})$ совпадают с последовательными максимумами отношения квадратичных форм

$$\pm\frac{\mathcal{B}[u]}{\mathcal{A}[u]}, \quad u \in \mathfrak{H}. \tag{2.6}$$

Поэтому можно говорить просто о спектре отношения форм (2.6) и употреблять обозначения типа $N_\pm(\lambda, (2.6))$, $\Delta_\theta^\pm$ (2.6), $\delta_\theta^\pm$ (2.6) вместо $N_\pm(\lambda, \mathbf{B})$, $\Delta_\theta^\pm(\mathbf{B})$, $\delta_\theta^\pm(\mathbf{B})$. Если $\mathcal{B}[u] \geqslant 0$, то значки $\pm$ в обозначениях опускаем.

В работе часто возникают конечномерные задачи о спектре, зависящие от дополнительного параметра $\mathbf{w}$ (обычно $\mathbf{w} = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in T^*\mathcal{D} \setminus \{0\}$, где $\mathcal{D}$ — гладкое компактное многообразие). Пусть на конечномерном пространстве $H_\mathbf{w}$ заданы эрмитовы полуторалинейные формы $a_\mathbf{w}$, $b_\mathbf{w}$, причем $a_\mathbf{w}[f] > 0$, $0 \neq f \in H_\mathbf{w}$. Тогда для функций распределения спектра отношения квадратичных форм

$$\pm\frac{b_\mathbf{w}[f]}{a_\mathbf{w}[f]}, \quad f \in H_\mathbf{w}, \tag{2.7}$$

будем использовать обозначения $n_\pm(\lambda, \mathbf{w};\ (2.7))$.

Иногда конечномерная задача о спектре будет записываться в другой форме. Если $q(\mathbf{w})$, $p(\mathbf{w})$ — эрмитовы $(l \times l)$-матрицы, зависящие от параметра $\mathbf{w}$, причем $p(\mathbf{w}) > 0$, то для функций распределения собственных значений задачи

$$q(\mathbf{w})\mathbf{z} = \lambda p(\mathbf{w})\mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^l, \tag{2.8}$$

используются обозначения $n_\pm(\lambda, \mathbf{w};\ (2.8))$.

2.3. Оценки спектра отношения дифференциальных или псевдодифференциальных форм. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченная область, причем $\Omega \in \mathcal{K}$. Рассмотрим отношение квадратичных форм

$$\frac{\|u\|^2_{H^{s_1}(\Omega)}}{\|u\|^2_{H^{s_2}(\Omega)}}, \quad u \in H^{s_2}(\Omega), \tag{2.9}$$

где $s_2 > s_1 \geqslant 0$. Хорошо известно следующее утверждение.

Лемма 2.7. *Для функции распределения спектра отношения* (2.9) *справедлива оценка* $N(\lambda, (2.9)) \leqslant C\lambda^{-\theta}$, $\lambda > 0$; $\theta = \frac{m}{2(s_2 - s_1)}$. *Постоянная* C *зависит от* m, s_1, s_2 *и от области* Ω.

Рассмотрим теперь отношение квадратичных форм

$$\pm\frac{\int_\Omega b(\mathbf{y})|u(\mathbf{y})|^2\, d\mathbf{y}}{\|u\|^2_{H^s(\Omega)}}, \quad u \in H^s(\Omega), \tag{2.10}$$

где $s > 0$ и $b(\mathbf{y})$ — вещественнозначная измеримая функция в Ω.

Лемма 2.8. *Пусть* $b(\mathbf{y})$ — *вещественнозначная функция, причем* $b \in L_r(\Omega)$, *где* $r = 1$ *при* $2s > m$, $r > 1$ *при* $2s = m$, $r = \frac{m}{2s}$ *при* $2s < m$. *Тогда для функций распределения спектра отношения* (2.10) *справедливы оценки*

$$N_\pm(\lambda, (2.10)) \leqslant C\lambda^{-\theta}\|b\|^\theta_{L_r(\Omega)}, \quad \lambda > 0; \quad \theta = \frac{m}{2s}.$$

Постоянная $C = C(m, r, s, \Omega)$ *не зависит от функции* b.

Утверждение леммы 2.8 при целом s совпадает с утверждением [7, теорема 4.1]. Соответствующее доказательство автоматически переносится на случай нецелого s — это доказательство основано на теоремах о приближениях функций из $H^s(\Omega)$ кусочно-полиномиальными функциями, а теоремы о приближениях были доказаны в [6, 7] для случая произвольного $s > 0$.

Нам потребуются также оценки спектра отношения

$$\pm\frac{2\operatorname{Re}\int_\Omega b(\mathbf{y})u_1(\mathbf{y})\overline{u_2(\mathbf{y})}\,d\mathbf{y}}{\|u_1\|^2_{H^{s_1}(\Omega)} + \|u_2\|^2_{H^{s_2}(\Omega)}}, \quad \{u_1, u_2\} \in H^{s_1}(\Omega) \oplus H^{s_2}(\Omega), \tag{2.11}$$

где $s_1, s_2 > 0$.

Лемма 2.9. *Пусть* $b(\mathbf{y})$ — *вещественнозначная функция, причем* $b \in L_r(\Omega)$, *где* $r = 1$ *при* $2s_1 > m$, $2s_2 > m$; $1 < r < 2$ *при* $2s_1 = m$, $2s_2 > m$ *или* $2s_1 > m$, $2s_2 = m$ *или* $2s_1 = 2s_2 = m$; $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{s_2}{m}$ *при* $2s_1 > m$, $2s_2 < m$; $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{s_1}{m}$ *при* $2s_1 < m$, $2s_2 > m$; $\frac{1}{r} < \frac{1}{2} + \frac{s_2}{m}$ *при* $2s_1 = m$, $2s_2 < m$; $\frac{1}{r} < \frac{1}{2} + \frac{s_1}{m}$ *при* $2s_1 < m$, $2s_2 = m$; $r = \frac{m}{s_1+s_2}$ *при* $2s_1 < m$, $2s_2 < m$. *Тогда для функций распределения спектра отношения* (2.11) *справедливы оценки*

$$N_\pm(\lambda, (2.11)) \leqslant C\lambda^{-\theta}\|b\|^\theta_{L_r(\Omega)}, \quad \lambda > 0; \quad \theta = \frac{m}{s_1 + s_2}. \tag{2.12}$$

Постоянная $C = C(m, r, s_1, s_2, \Omega)$ *не зависит от функции* b.

Доказательство. Достаточно проверить неравенство (2.12) в случае, когда $\|b\|_{L_r(\Omega)} = 1$.

Для произвольных чисел $\varepsilon > 0$ и $0 < \alpha < 1$ отношение (2.11) оценивается по абсолютной величине через

$$\frac{\varepsilon\int_\Omega |b(\mathbf{y})|^{2\alpha}|u_1(\mathbf{y})|^2\,d\mathbf{y} + \varepsilon^{-1}\int_\Omega |b(\mathbf{y})|^{2(1-\alpha)}|u_2(\mathbf{y})|^2\,d\mathbf{y}}{\|u_1\|^2_{H^{s_1}(\Omega)} + \|u_2\|^2_{H^{s_2}(\Omega)}}, \quad \{u_1, u_2\} \in H^{s_1}(\Omega) \oplus H^{s_2}(\Omega).$$

Рассмотрим отношения

$$\frac{\int_\Omega |b(\mathbf{y})|^{2\alpha}|u_1(\mathbf{y})|^2\,d\mathbf{y}}{\|u_1\|^2_{H^{s_1}(\Omega)}}, \quad u_1 \in H^{s_1}(\Omega), \tag{2.13}$$

$$\frac{\int_\Omega |b(\mathbf{y})|^{2(1-\alpha)}|u_2(\mathbf{y})|^2\,d\mathbf{y}}{\|u_2\|^2_{H^{s_2}(\Omega)}}, \quad u_2 \in H^{s_2}(\Omega). \tag{2.14}$$

В соответствии с леммой 2.1 и (2.5) имеем

$$N_\pm(\lambda, (2.11)) \leqslant N(\lambda\varepsilon^{-1}, (2.13)) + N(\lambda\varepsilon, (2.14)), \quad \lambda > 0. \tag{2.15}$$

Из условий на r следует, что можно выбрать числа r_1, r_2 так, чтобы выполнялось равенство $r^{-1} = \frac{1}{2}(r_1^{-1} + r_2^{-1})$ и $r_i = 1$ при $2s_i > m$; $r_i > 1$ при $2s_i = m$; $r_i = \frac{m}{2s_i}$ при $2s_i < m$, $i = 1, 2$. Применяя лемму 2.8 для отношений (2.13), (2.14) и учитывая (2.15), получаем

$$N_\pm(\lambda, (2.11)) \leqslant C\left(\varepsilon^{\theta_1}\lambda^{-\theta_1}\left\||b|^{2\alpha}\right\|^{\theta_1}_{L_{r_1}(\Omega)} + \varepsilon^{-\theta_2}\lambda^{-\theta_2}\left\||b|^{2(1-\alpha)}\right\|^{\theta_2}_{L_{r_2}(\Omega)}\right),$$

где $\theta_i = \frac{m}{2s_i}$, $i = 1, 2$. Выберем $\varepsilon = \lambda^{\frac{s_2-s_1}{s_1+s_2}}$, $\alpha = \frac{r_2}{r_1+r_2}$. Тогда $N_\pm(\lambda, (2.11)) \leqslant C\lambda^{-\theta}$ при $\|b\|_{L_r(\Omega)} = 1$. □

Нам понадобится также асимптотика спектра отношения двух псевдодифференциальных форм (ПДФ), заданных на гладком компактном ориентируемом m-мерном многообразии $\mathcal{D}$ без края. (В приложениях роль многообразия $\mathcal{D}$ будет играть граница гладкой области $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^{m+1}$.)

Пусть $\rho > 0$ и $H^\rho(\mathcal{D};\mathbb{C}^l)$ — пространство Соболева $\mathbb{C}^l$-значных полуплотностей на $\mathcal{D}$. В пространстве $H^\rho(\mathcal{D};\mathbb{C}^l)$ рассмотрим ПДФ $(\mathcal{P}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}) = \sum\limits_{i,j=1}^{l}(\mathcal{P}_{ij}\varphi_j,\psi_i)$. Предполагается, что операторы $\mathcal{P}_{ij} = \mathcal{P}_{ji}^*$ суть классические ПДО, действующие на полуплотности на $\mathcal{D}$, порядка не выше 2ρ. Предположим, что ПДФ $(\mathcal{P}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})$ определяет в $H^\rho(\mathcal{D};\mathbb{C}^l)$ эквивалентную норму:

$$(\mathcal{P}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}) \asymp \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H^\rho(\mathcal{D})}, \quad \boldsymbol{\varphi} \in H^\rho(\mathcal{D};\mathbb{C}^l). \tag{2.16}$$

Главный символ ПДО $\mathcal{P}$ (порядка 2ρ) обозначим через $p^\circ(\mathbf{w})$, $\mathbf{w} \in T^*\mathcal{D} \setminus \{0\}$.

Пусть $\varkappa > 0$ и $\mathcal{Q}_{ij} = \mathcal{Q}_{ji}^*$ — классические ПДО, действующие на полуплотности на $\mathcal{D}$, порядка не выше $2(\rho-\varkappa)$. Тогда ПДФ $(\mathcal{Q}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}) = \sum\limits_{i,j=1}^{l}(\mathcal{Q}_{ij}\varphi_j,\psi_i)$ непрерывна в $H^{\rho-\varkappa}(\mathcal{D};\mathbb{C}^l)$. Главный символ ПДО $\mathcal{Q}$ (порядка $2(\rho-\varkappa)$) обозначим через $q^\circ(\mathbf{w})$, $\mathbf{w} \in T^*\mathcal{D} \setminus \{0\}$.

Рассмотрим отношение форм

$$\pm\frac{(\mathcal{Q}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})}{(\mathcal{P}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})}, \quad \boldsymbol{\varphi} \in H^\rho(\mathcal{D};\mathbb{C}^l). \tag{2.17}$$

Из условия (2.16) следует положительность матрицы $p^\circ(\mathbf{w})$. Поэтому имеет смысл конечномерная задача о спектре отношения форм

$$\pm\frac{\langle q^\circ(\mathbf{w})\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle}{\langle p^\circ(\mathbf{w})\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^l. \tag{2.18}$$

Функции $n_\pm(\lambda,\mathbf{w};\ (2.18))$ имеют свойство однородности: $n_\pm(\lambda,\mathbf{x},t\boldsymbol{\xi};\ (2.18)) = n_\pm(t^{2\varkappa}\lambda,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};\ (2.18))$, $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, $\boldsymbol{\xi} \in T^*_{\mathbf{x}}\mathcal{D} \setminus \{0\}$, $t > 0$.

Следующее утверждение вытекает из [11, лемма 1]; см. также [8,10].

Лемма 2.10. *При сделанных предположениях для функций распределения спектра отношения* (2.17) *справедлива асимптотика при* $\lambda \to +0$:

$$N_\pm(\lambda,(2.17)) \sim (2\pi)^{-m}\int_{T^*\mathcal{D}} n_\pm(\lambda,\mathbf{w};\ (2.18))\,d\mathbf{w} = \lambda^{-\theta}(2\pi)^{-m}\int_{T^*\mathcal{D}} n_\pm(1,\mathbf{w};\ (2.18))\,d\mathbf{w}, \quad \theta = \frac{m}{2\varkappa}.$$

Здесь $d\mathbf{w}$ — *инвариантная мера на* $T^*\mathcal{D}$.

Наконец, нам понадобится асимптотика спектра отношения ПДФ при наличии дополнительных связей на части многообразия $\mathcal{D}$. Пусть $\mathcal{D}_0$ — открытое подмножество многообразия $\mathcal{D}$ такое, что $\mathrm{mes}_m\,\partial\mathcal{D}_0 = 0$. Рассмотрим отношение форм

$$\pm\frac{(\mathcal{Q}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})}{(\mathcal{P}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})}, \quad \boldsymbol{\varphi} \in H^\rho(\mathcal{D};\mathbb{C}^l), \quad \boldsymbol{\varphi}|_{\mathcal{D}_0} = 0. \tag{2.19}$$

Следующее утверждение является частным случаем результата статьи [28].

Лемма 2.11. *При сделанных предположениях для функций распределения спектра отношения* (2.19) *справедлива асимптотика при* $\lambda \to +0$:

$$N_\pm(\lambda,(2.19)) \sim \lambda^{-\theta}(2\pi)^{-m}\int_{T^*(\mathcal{D}\setminus\overline{\mathcal{D}_0})} n_\pm(1,\mathbf{w};\ (2.18))\,d\mathbf{w}, \quad \theta = \frac{m}{2\varkappa}.$$

3. Асимптотика спектра малых колебаний тяжелой идеальной жидкости

В работе [15] Н. А. Каразеевой и М. З. Соломяка рассматривалась задача типа Стеклова в составных областях. В качестве основного примера авторы получили асимптотику спектра в задаче о малых колебаниях системы несмешивающихся тяжелых идеальных жидкостей, полностью заполняющих сосуд. Метод был основан на общем подходе исследования негладких вариационных задач, разработанном М. Ш. Бирманом и М. З. Соломяком. Тем же методом можно рассмотреть и задачу в случае одной жидкости, частично заполняющей сосуд. В данном разделе мы кратко опишем результаты для тяжелой идеальной жидкости.

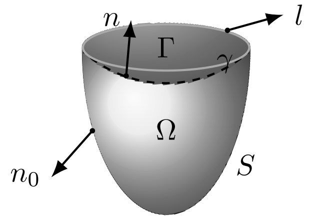

Рис. 1. Одна жидкость, частично заполняющая сосуд

3.1. Малые колебания тяжелой идеальной жидкости. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (см. рис. 1) — область, которую занимает жидкость, находящаяся в сосуде в положении равновесия; Γ — равновесная свободная поверхность жидкости; $S = \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}$ — твердая стенка сосуда. Приведем вначале классическую постановку задачи.

Пусть $\mathbf{n}_0(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней нормали к S в точке $\mathbf{x} \in S$, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней нормали к Γ в точке $\mathbf{x} \in \Gamma$. Пусть задана вещественная функция $a(\mathbf{x})$ на Γ, причем $\int_\Gamma a(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \neq 0$. Из физических соображений функция $a(\mathbf{x})$ положительна, но математическую задачу можно рассматривать без этого ограничения.

Задача о нормальных колебаниях тяжелой идеальной жидкости сводится к краевой задаче на собственные значения[1]

$$\begin{gathered}\Delta\Phi = 0 \ \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n_0} = 0 \ \text{ на } S, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n}(\mathbf{x}) = \lambda^{-1}a(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x}) \ \text{ на } \Gamma, \quad \int_\Gamma a(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})\,dS = 0.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь $\Phi(\mathbf{x})$ имеет смысл амплитуды колебаний потенциала $\Phi(\mathbf{x},t)$ поля скоростей частиц жидкости: $\Phi(\mathbf{x},t) = \Phi(\mathbf{x})e^{i\omega t}$, $\omega^{-1} = \sqrt{\lambda}$, t — время. Уравнение Лапласа — уравнение неразрывности, условие на S — условие непротекания.

Краевая задача (3.1) эквивалентна задаче о нахождении последовательных максимумов отношения квадратичных форм

$$\pm\frac{\int_\Gamma a(\mathbf{x})|\Phi(\mathbf{x})|^2\,dS}{\int_\Omega |\nabla\Phi|^2\,d\mathbf{x}}, \quad \Phi \in H^1(\Omega), \quad \int_\Gamma a(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})\,dS = 0. \tag{3.2}$$

По теореме об эквивалентных нормировках в пространствах Соболева (см., например, [27]) функционал $\int_\Omega |\nabla\Phi|^2\,d\mathbf{x} + |\int_\Gamma a(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})\,dS|^2$ задает эквивалентную норму в пространстве $H^1(\Omega)$. Поэтому на подпространстве $\{\Phi \in H^1(\Omega) : \int_\Gamma a(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})\,dS = 0\}$ форма $\int_\Omega |\nabla\Phi|^2\,d\mathbf{x}$ эквивалентна $\|\Phi\|^2_{H^1(\Omega)}$. Уравнение Лапласа в Ω и условие на S являются естественными условиями в вариационной задаче о спектре отношения (3.2).

Теорема 3.1. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющая условиям обычных теорем вложения и продолжения: $\Omega \in \mathcal{K}$; Γ — гладкая двумерная поверхность с липшицевой границей, причем $\overline{\Gamma} \subset \partial\Omega$. Пусть $a \in L_2(\Gamma)$ — вещественная функция. Тогда для функций распределения спектра отношения* (3.2) *при $\lambda \to +0$ справедлива асимптотика*

$$N_\pm(\lambda, (3.2)) \sim \frac{\lambda^{-2}}{4\pi}\int_\Gamma a_\pm^2(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x}). \tag{3.3}$$

Приведем схему доказательства теоремы 3.1 методом статьи [15]. Применяя леммы 2.3 и 2.6, убеждаемся, что величины $\Delta_2^\pm$ (3.2), $\delta_2^\pm$ (3.2) совпадают с аналогичными величинами для отношения

$$\pm\frac{\int_\Gamma a(\mathbf{x})|\Phi(\mathbf{x})|^2\,dS}{\int_\Omega (|\nabla\Phi|^2 + |\Phi|^2)\,d\mathbf{x}}, \quad \Phi \in H^1(\Omega). \tag{3.4}$$

Сначала установим оценку спектра.

Лемма 3.1. *В условиях теоремы* 3.1 *справедливы оценки* $\Delta_2^\pm$ (3.4) $\leqslant C\|a\|^2_{L_2(\Gamma)}$.

[1] В [21, гл. 3, §3] обсуждается эта задача в случае $a(\mathbf{x}) = 1$.

Доказательство. По теореме о следах имеем: $\int_\Omega \left(|\nabla\Phi|^2+|\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x} \geqslant C\|\Phi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}$, $\Phi\in H^1(\Omega)$, $C>0$. Применяя лемму 2.2, убеждаемся, что функции $N_\pm(\lambda,(3.4))$ оцениваются через функции распределения спектра отношения

$$\pm\frac{\int_\Gamma a(\mathbf{x})|\Phi(\mathbf{x})|^2\,dS}{C\|\Phi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}},\quad \Phi\in H^{1/2}(\Gamma),\quad C>0. \tag{3.5}$$

С учетом леммы 2.8 получаем: $\Delta_2^\pm\ (3.4)\leqslant \Delta_2^\pm\ (3.5)\leqslant C\|a\|^2_{L_2(\Gamma)}$. □

Леммы 3.1 и 2.5 показывают, что величины $\Delta_2^\pm$ (3.4), $\delta_2^\pm$ (3.4) являются непрерывными функционалами над $a\in L_2(\Gamma)$. Поэтому достаточно провести вычисление этих величин для плотного в $L_2(\Gamma)$ множества коэффициентов a. В качестве такого множества возьмем $C_0^\infty(\Gamma)$.

Теперь, считая, что $a\in C_0^\infty(\Gamma)$, проведем сравнение отношения (3.4) и аналогичного отношения, заданного в области $\widetilde\Omega$ с гладкой границей. Пусть $\widetilde\Omega$ — ограниченная область с гладкой границей такая, что $\widetilde\Omega\subset\Omega$ и $\operatorname{supp} a$ лежит строго внутри множества $\partial\widetilde\Omega\cap\Gamma$. Пусть $\widetilde a\in C^\infty(\partial\widetilde\Omega)$ — функция, равная $a(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}\in\partial\widetilde\Omega\cap\Gamma$ и равная нулю при $\mathbf{x}\in\partial\widetilde\Omega\setminus\Gamma$.

Наша цель — сравнить отношение (3.4) и отношение

$$\pm\frac{\int_{\partial\widetilde\Omega}\widetilde a(\mathbf{x})|\Phi(\mathbf{x})|^2\,dS}{\int_{\widetilde\Omega}\left(|\nabla\Phi|^2+|\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x}},\quad \Phi\in H^1(\widetilde\Omega). \tag{3.6}$$

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1, *и пусть* $a\in C_0^\infty(\Gamma)$. *Тогда справедливы оценки*

$$\delta_2^\pm\ (3.6)\leqslant \delta_2^\pm\ (3.4)\leqslant \Delta_2^\pm\ (3.4)\leqslant \Delta_2^\pm\ (3.6). \tag{3.7}$$

Доказательство. Очевидно, на функциях $\Phi\in H^1(\Omega)$ числители отношений (3.4) и (3.6) совпадают, а знаменатель в (3.6) не превосходит знаменателя в (3.4). Применяя лемму 2.2, в которой роль $\mathcal S$ играет оператор сужения $\mathcal S: H^1(\Omega)\to H^1(\widetilde\Omega)$, получаем:

$$N_\pm(\lambda,(3.4))\leqslant N_\pm(\lambda,(3.6)),\quad \lambda>0. \tag{3.8}$$

Отсюда следует правое неравенство в (3.7).

Фиксируем срезку $\vartheta\in C^\infty(\overline{\Omega})$; $0\leqslant\vartheta(\mathbf{x})\leqslant 1$; $\vartheta(\mathbf{x})=1$ при $\mathbf{x}\in\operatorname{supp} a$; $\vartheta(\mathbf{x})=0$ в некоторой окрестности $\Omega\setminus\widetilde\Omega$. Имеем:

$$\begin{aligned}
&\int_{\widetilde\Omega}\left(|\nabla\Phi|^2+|\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x}\geqslant\varepsilon\int_{\widetilde\Omega}\left(|\nabla\Phi|^2+|\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x}+(1-\varepsilon)\int_{\widetilde\Omega}\vartheta^2\left(|\nabla\Phi|^2+|\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x}=\\
&=\varepsilon\int_{\widetilde\Omega}\left(|\nabla\Phi|^2+|\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x}+(1-\varepsilon)\int_{\widetilde\Omega}\left(|\nabla(\vartheta\Phi)|^2+|\vartheta\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x}+\\
&+(1-\varepsilon)\int_{\widetilde\Omega}\left(\vartheta^2|\nabla\Phi|^2-|\nabla(\vartheta\Phi)|^2\right)\,d\mathbf{x},\quad \Phi\in H^1(\widetilde\Omega).
\end{aligned}\tag{3.9}$$

Сумма первых двух членов в правой части (3.9) определяет в $H^1(\widetilde\Omega)$ эквивалентную метрику, а последний член — форма, компактная в $H^1(\widetilde\Omega)$.

Далее, используя равенство $\widetilde a(\mathbf{x})=\vartheta^2(\mathbf{x})\widetilde a(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\partial\widetilde\Omega$, получаем

$$\int_{\partial\widetilde\Omega}\widetilde a(\mathbf{x})|\Phi(\mathbf{x})|^2\,dS=\int_{\partial\widetilde\Omega}\widetilde a(\mathbf{x})|\vartheta(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})|^2\,dS,\quad \Phi\in H^1(\widetilde\Omega).$$

В соответствии с леммой 2.3 величины $\delta_\theta^\pm$ (3.6) не превосходят аналогичных величин для отношения

$$\pm\frac{\int_{\partial\widetilde\Omega}\widetilde a(\mathbf{x})|\vartheta(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})|^2\,dS}{\varepsilon\int_{\widetilde\Omega}\left(|\nabla\Phi|^2+|\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x}+(1-\varepsilon)\int_{\widetilde\Omega}\left(|\nabla(\vartheta\Phi)|^2+|\vartheta\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x}},\quad \Phi\in H^1(\widetilde\Omega). \tag{3.10}$$

Для $\Phi\in H^1(\widetilde\Omega)$ через $\widehat{\mathcal S}\Phi$ обозначим функцию, совпадающую с $\vartheta\Phi$ на $\widetilde\Omega$ и равную нулю на $\Omega\setminus\widetilde\Omega$. Тогда оператор $\widehat{\mathcal S}: H^1(\widetilde\Omega)\to H^1(\Omega)$ ограничен. Для всех $\Phi\in H^1(\widetilde\Omega)$, для которых $\pm\int_{\partial\widetilde\Omega}\widetilde a(\mathbf{x})|\vartheta(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})|^2\,dS>0$, отношение (3.10) не превосходит $\pm\frac{\int_\Gamma a(\mathbf{x})|(\widehat{\mathcal S}\Phi)(\mathbf{x})|^2\,dS}{(1-\varepsilon)\int_\Omega\left(|\nabla(\widehat{\mathcal S}\Phi)|^2+|\widehat{\mathcal S}\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x}}$. В силу леммы 2.2 отсюда вытекают оценки $\delta_2^\pm\ (3.6)\leqslant\delta_2^\pm\ (3.10)\leqslant(1-\varepsilon)^{-2}\delta_2^\pm\ (3.4)$. Устремляя здесь ε к нулю, приходим к левому неравенству в (3.7). □

Остается установить асимптотику спектра для задачи в гладкой области.

Лемма 3.3. *Пусть* $\widetilde{\Omega}$ — *ограниченная область в* $\mathbb{R}^3$ *с гладкой границей. Пусть* $\widetilde{a}$ — *гладкая вещественная функция на* $\partial\widetilde{\Omega}$. *Тогда для функций распределения спектра отношения* (3.6) *при* $\lambda \to +0$ *справедлива асимптотика*

$$N_\pm(\lambda, (3.6)) \sim \frac{\lambda^{-2}}{4\pi} \int_{\partial\widetilde{\Omega}} \widetilde{a}_\pm^2(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}). \tag{3.11}$$

Доказательство. Пусть $L_0 = -\Delta + I$. Через $H^1(\widetilde{\Omega}, L_0)$ обозначим подпространство в $\widetilde{\Omega}$, образованное решениями уравнения $L_0 u = 0$ в $\widetilde{\Omega}$. Справедливо разложение $H^1(\widetilde{\Omega}) = H^1(\widetilde{\Omega}, L_0) \oplus H_0^1(\widetilde{\Omega})$. Поскольку форма в числителе отношения (3.6) обращается в нуль при $u \in H_0^1(\widetilde{\Omega})$, то ненулевой спектр отношения (3.6) не изменится, если рассматривать это отношение на $H^1(\widetilde{\Omega}, L_0)$.

Пусть G_0 — «оператор Пуассона», сопоставляющий функции $\varphi \in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega})$ решение соответствующей задачи Дирихле для уравнения $L_0 u = 0$: равенство $u = G_0\varphi$ означает, что $u \in H^1(\widetilde{\Omega}, L_0)$, $u|_{\partial\widetilde{\Omega}} = \varphi$. Оператор G_0 устанавливает гомеоморфизм пространств $H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega})$ и $H^1(\widetilde{\Omega}, L_0)$. Задача о спектре отношения (3.6) эквивалентна задаче о спектре отношения

$$\pm \frac{\int_{\partial\widetilde{\Omega}} \widetilde{a}(\mathbf{x}) |\varphi(\mathbf{x})|^2\, dS}{\int_{\widetilde{\Omega}} \left(|\nabla G_0\varphi|^2 + |G_0\varphi|^2\right)\, d\mathbf{x}}, \quad \varphi \in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega}). \tag{3.12}$$

Из свойств алгебры Буте де Монвеля [35, 38] следует, что справедливо представление $\int_{\widetilde{\Omega}} \left(|\nabla G_0\varphi|^2 + |G_0\varphi|^2\right) d\mathbf{x} = (\mathcal{P}_0\varphi, \varphi)$, $\varphi \in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega})$, где $\mathcal{P}_0$ — классический ПДО на $\partial\widetilde{\Omega}$ порядка 1. Вычисляя старший символ $p_0^\circ(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ оператора $\mathcal{P}_0$ в соответствии с известными правилами вычислений для алгебры Буте де Монвеля, получаем: $p_0^\circ(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = |\boldsymbol{\xi}|$, $\mathbf{x} \in \partial\widetilde{\Omega}$, $0 \neq \boldsymbol{\xi} \perp \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$. Здесь $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ — нормаль к $\partial\widetilde{\Omega}$. (Ср. с вычислениями в пункте 4.4 ниже.)

Очевидно, форму в числителе отношения (3.12) можно интерпретировать как форму $(\mathcal{Q}_0\varphi, \varphi)$ ПДО $\mathcal{Q}_0$ нулевого порядка на $\partial\widetilde{\Omega}$ с символом $q_0^\circ(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \widetilde{a}(\mathbf{x})$. Таким образом, отношение (3.12) совпадает с отношением ПДФ

$$\pm \frac{(\mathcal{Q}_0\varphi, \varphi)}{(\mathcal{P}_0\varphi, \varphi)}, \quad \varphi \in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega}). \tag{3.13}$$

Мы установили, что

$$N_\pm(\lambda, (3.6)) = N_\pm(\lambda, (3.12)) = N_\pm(\lambda, (3.13)), \quad \lambda > 0. \tag{3.14}$$

В силу леммы 2.10 для функций распределения спектра отношения (3.13) при $\lambda \to +0$ справедливы асимптотические формулы

$$N_\pm(\lambda, (3.13)) \sim \frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial\widetilde{\Omega}} dS(\mathbf{x}) \int_{\boldsymbol{\xi} \perp \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})} d\boldsymbol{\xi}\, n_\pm(\lambda, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi};\ (3.16)), \tag{3.15}$$

где $n_\pm(\lambda, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi};\ (3.16))$ — функции распределения спектра отношения (одномерных) форм

$$\pm \frac{q_0^\circ(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})|z|^2}{p_0^\circ(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})|z|^2}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{3.16}$$

Имеем:

$$n_\pm(\lambda, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi};\ (3.16)) = \begin{cases} 1, & \lambda < \widetilde{a}_\pm(\mathbf{x})|\boldsymbol{\xi}|^{-1}, \\ 0, & \lambda \geqslant \widetilde{a}_\pm(\mathbf{x})|\boldsymbol{\xi}|^{-1}. \end{cases} \tag{3.17}$$

Теперь, вычисляя асимптотику функций $N_\pm(\lambda, (3.13))$ согласно (3.15), (3.17) и учитывая (3.14), получаем искомую асимптотику (3.11). $\square$

Завершение доказательства теоремы 3.1. Из леммы 3.2 и асимптотики (3.11) с учетом равенства $\widetilde{a}(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in \operatorname{supp} a = \operatorname{supp} \widetilde{a} \subset \Gamma$ вытекает асимптотическая формула вида (3.3) для $N_\pm(\lambda, (3.4))$ в случае $a \in C_0^\infty(\Gamma)$. По замыканию эта формула верна при $a \in L_2(\Gamma)$; см. лемму 3.1. Остается вспомнить, что $\Delta_2^\pm\ (3.2) = \Delta_2^\pm\ (3.4)$ и $\delta_2^\pm\ (3.2) = \delta_2^\pm\ (3.4)$. Это завершает доказательство теоремы 3.1. $\square$

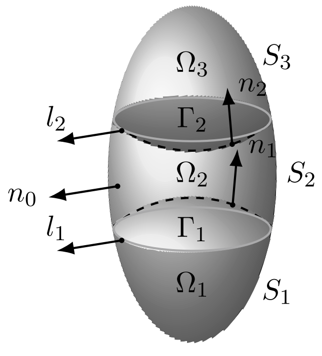

Рис. 2. Система жидкостей в замкнутом сосуде

3.2. Малые колебания системы тяжелых идеальных жидкостей. На прежнем пути можно получить асимптотические формулы спектра для задачи о колебаниях системы из несмешивающихся жидкостей, полностью или частично заполняющих сосуд. Мы ограничимся постановкой задачи и формулировкой результата для случая системы тяжелых идеальных жидкостей, полностью заполняющих сосуд (см. рис. 2); читатель найдет доказательство в [15].

Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ разделена на $(k+1)$ частей Ω_j, $j = 1, \dots, k+1$. Число $k+1$ — это количество жидкостей, Ω_j — область, которую занимает j-ая жидкость в положении равновесия. При этом

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{k+1} \overline{\Omega_j}, \quad \Omega = \operatorname{int} \overline{\Omega}, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing \text{ при } i \neq j, \quad \overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j} = \varnothing \text{ при } j \notin \{i-1, i, i+1\}. \tag{3.18}$$

Обозначим

$$\overline{\Gamma_i} = \overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_{i+1}}, \quad i = 1, \dots, k, \tag{3.19}$$

— границы раздела жидкостей; $S = \partial\Omega$ — твердая стенка сосуда; $S_j = \partial\Omega_j \cap S$, $j = 1, \dots, k+1$. Предполагается, что $\Omega_i \in \mathcal{K}$, $i = 1, \dots, k+1$, и Γ_i, $i = 1, \dots, k$, — гладкие двумерные поверхности с липшицевыми краями. Пусть $\mathbf{n}_0(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней нормали к S в точке $\mathbf{x} \in S$; $\mathbf{n}_j(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней (по отношению к Ω_j) нормали к Γ_j в точке $\mathbf{x} \in \Gamma_j$.

Задача о нормальных колебаниях системы тяжелых идеальных жидкостей формулируется для системы функций $\{\Phi_j(\mathbf{x})\}$, $j = 1, \dots, k+1$, где Φ_j — функция в Ω_j:

$$\begin{gathered}
\Delta\Phi_j = 0 \ \text{ в } \Omega_j, \quad \frac{\partial \Phi_j}{\partial n_0} = 0 \ \text{ на } S_j, \quad j = 1, \dots, k+1, \\
\frac{\partial \Phi_j}{\partial n_j} = \frac{\partial \Phi_{j+1}}{\partial n_j} = \lambda^{-1} a_j(\mathbf{x}) \left(\rho_j \Phi_j - \rho_{j+1}\Phi_{j+1}\right) \ \text{ на } \Gamma_j, \quad j = 1, \dots, k, \\
\int_{\Gamma_j} a_j(\mathbf{x}) \left(\rho_j \Phi_j - \rho_{j+1}\Phi_{j+1}\right) dS = 0, \quad j = 1, \dots, k; \quad \sum_{j=1}^{k+1} \int_{\Omega_j} \rho_j^{-1} \Phi_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.
\end{gathered} \tag{3.20}$$

Здесь $a_j \in L_2(\Gamma_j)$ — вещественные функции, причем $\int_{\Gamma_j} a_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \neq 0$. Постоянные $\rho_j > 0$ имеют смысл плотностей жидкостей. (По физическому смыслу функции $a_j(\mathbf{x})$ положительны, а плотности ρ_j подчинены неравенствам $\rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_{k+1}$, но математическую задачу можно рассматривать без этих ограничений.)

Задача (3.20) эквивалентна вариационной задаче о спектре отношения форм

$$\begin{gathered}
\frac{\sum_{j=1}^{k} \int_{\Gamma_j} a_j(\mathbf{x}) |\rho_j \Phi_j - \rho_{j+1}\Phi_{j+1}|^2\, dS}{\sum_{j=1}^{k+1} \rho_j \int_{\Omega_j} |\nabla \Phi_j|^2\, d\mathbf{x}}, \quad \Phi_j \in H^1(\Omega_j), \quad j = 1, \dots, k+1; \\
\int_{\Gamma_j} a_j(\mathbf{x}) \left(\rho_j \Phi_j - \rho_{j+1}\Phi_{j+1}\right) dS = 0, \quad j = 1, \dots, k; \quad \sum_{j=1}^{k+1} \int_{\Omega_j} \rho_j^{-1} \Phi_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.
\end{gathered} \tag{3.21}$$

Предложение 3.1 (см. [15]). *При сделанных предположениях для функций распределения спектра отношения* (3.21) *при* $\lambda \to +0$ *справедлива асимптотика*

$$N_{\pm}(\lambda, (3.21)) \sim \frac{\lambda^{-2}}{4\pi} \sum_{j=1}^{k} (\rho_j + \rho_{j+1})^2 \int_{\Gamma_j} (a_j)_{\pm}^2 \, d\mathbf{x}.$$

4. Асимптотика спектра неклассической задачи типа Стеклова. Применение к теории малых колебаний жидкости

Ряд задач теории малых колебаний жидкости (см. [3, 18–20]) приводит к вопросу о спектре вариационного отношения

$$\frac{\operatorname{Re} \int_{\Gamma} b(\mathbf{y}) (\mathbf{B}_{\Gamma}^{-1} u)(\mathbf{y}) \overline{u(\mathbf{y})} \, dS(\mathbf{y})}{\mathcal{A}_{\Omega}[u]}, \quad u \in H^1(\Omega). \tag{4.1}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (см. рис. 1) — область, которую занимает жидкость, частично заполняющая сосуд, в положении равновесия; гладкая двумерная поверхность $\Gamma \subset \partial\Omega$ имеет смысл свободной поверхности жидкости либо упругого днища сосуда. Квадратичная форма $\mathcal{A}_{\Omega}[u]$ определяет эквивалентную метрику в $H^1(\Omega)$. Нелокальный оператор $\mathbf{B}_{\Gamma}^{-1}$ является разрешающим оператором некоторой эллиптической краевой задачи на Γ. Мы называем задачу о спектре отношения (4.1) *задачей типа Стеклова*, поскольку: а) экстремали автоматически удовлетворяют однородному эллиптическому уравнению $Lu = 0$ в области Ω, где оператор L отвечает форме $\mathcal{A}_{\Omega}$; б) экстремали удовлетворяют уравнению на Γ, в которое входит спектральный параметр. Однако эта задача отличается от классической задачи типа Стеклова тем, что в отношении форм присутствует нелокальный оператор $\mathbf{B}_{\Gamma}^{-1}$.

В настоящем разделе мы получаем асимптотику спектра отношения вида (4.1). Результат применяется к вопросу о спектре малых колебаний капиллярной идеальной жидкости, капиллярной стратифицированной жидкости, а также к одной вспомогательной задаче гидроупругости. Основная трудность связана с негладкостью границы $\partial\Omega$ (стенка сосуда и свободная поверхность жидкости при пересечении образуют ребро). Другая трудность вытекает из нелокального характера оператора $\mathbf{B}_{\Gamma}^{-1}$.

4.1. Постановка задачи. Формулировка результата. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+1}$ — ограниченная область, $\Omega \in \mathcal{K}$. Пусть граница $\partial\Omega$ содержит бесконечно гладкую m-мерную поверхность Γ с гладким $(m-1)$-мерным краем γ (при этом Γ и γ не обязательно связны). Через $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ обозначим единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке $\mathbf{x} \in \Gamma$.

В области Ω задана эрмитова квадратичная форма

$$\mathcal{A}_{\Omega}[u] := \int_{\Omega} \Big(\sum_{i,j=1}^{m+1} a_{ij}(\mathbf{x}) \partial_i u(\mathbf{x}) \overline{\partial_j u(\mathbf{x})} + V(\mathbf{x}) |u(\mathbf{x})|^2 \Big) \, d\mathbf{x}, \quad u \in H^1(\Omega). \tag{4.2}$$

Предполагается, что коэффициенты $a_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ji}(\mathbf{x})$, $V(\mathbf{x})$ — бесконечно гладкие вещественные функции в $\overline{\Omega}$, матрица $a(\mathbf{x}) = \{a_{ij}(\mathbf{x})\}$ положительно определена:

$$\langle a(\mathbf{x})\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \sum_{i,j=1}^{m+1} a_{ij}(\mathbf{x}) \eta_i \overline{\eta_j} \geqslant c_a |\boldsymbol{\eta}|^2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \ \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}^{m+1}, \quad c_a > 0, \tag{4.3}$$

и функция $V(\mathbf{x})$ положительно определена:

$$V(\mathbf{x}) \geqslant c_a > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{4.4}$$

При сделанных предположениях форма $\mathcal{A}_{\Omega}[u]$ определяет в $H^1(\Omega)$ норму, эквивалентную стандартной:

$$c_a \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant \mathcal{A}_{\Omega}[u] \leqslant C_a \|u\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad u \in H^1(\Omega). \tag{4.5}$$

Через L обозначим дифференциальное выражение, отвечающее форме (4.2):

$$L = -\sum_{i,j=1}^{m+1} \partial_j a_{ij}(\mathbf{x}) \partial_i + V(\mathbf{x}).$$

Далее, пусть B_Γ — скалярное сильно эллиптическое дифференциальное выражение на Γ порядка $2q$; $T_1,\dots,T_q$ — дифференциальные операторы следа, действующие «с Γ на γ», $\operatorname{ord} T_j=\beta_j\leqslant 2q-1$. Коэффициенты операторов B_Γ и T_j, $j=1,\dots,q$, предполагаются бесконечно гладкими, вообще говоря, комплекснозначными функциями. Предположим, что задача $B_\Gamma u=f$ на Γ, $T_j u=\varphi_j$ на γ, $j=1,\dots,q$, является регулярной эллиптической задачей, т. е. выполнено условие Шапиро—Лопатинского; см., например, [2, 4, 22]. Через $\mathbf{B}_\Gamma$ обозначим оператор в $L_2(\Gamma)$, заданный выражением B_Γ на области определения $\operatorname{Dom}\mathbf{B}_\Gamma=\{u\in H^{2q}(\Gamma): T_j u|_\gamma=0,\ j=1,\dots,q\}$. Предположим, что $\mathbf{B}_\Gamma$ самосопряжен и положительно определен. На $L_2(\Gamma)$ определен компактный оператор $\mathbf{B}_\Gamma^{-1}$. Через $B(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$, $\mathbf{x}\in\Gamma$, $\boldsymbol{\xi}\perp\mathbf{n}(\mathbf{x})$, обозначим главный символ дифференциального выражения B_Γ. Из условий сильной эллиптичности и самосопряженности следует, что $B(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\geqslant c_0|\boldsymbol{\xi}|^{2q}$, $\mathbf{x}\in\Gamma$, $\boldsymbol{\xi}\perp\mathbf{n}(\mathbf{x})$, $c_0>0$.

Рассмотрим квадратичную форму $\mathcal{B}_\Gamma[u]:=\operatorname{Re}\int_\Gamma b(\mathbf{x})\left(\mathbf{B}_\Gamma^{-1}u\right)(\mathbf{x})\overline{u(\mathbf{x})}\,dS(\mathbf{x})$, где $b(\mathbf{x})$ — вещественнозначная функция на Γ, удовлетворяющая условиям

$$\begin{gathered}b\in L_r(\Gamma),\quad r>1 \text{ при } m=1;\quad \frac{1}{r}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2m} \text{ при } 1<m<4q+1;\\ \frac{1}{r}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2m} \text{ при } m=4q+1;\quad r=\frac{m}{2q+1} \text{ при } m>4q+1.\end{gathered}\tag{4.6}$$

Рассмотрим отношение форм

$$\pm\frac{\mathcal{B}_\Gamma[u]}{\mathcal{A}_\Omega[u]},\quad u\in H^1(\Omega).\tag{4.7}$$

Пусть $\mathbf{x}\in\Gamma$, $\xi\perp\mathbf{n}(x)$. Обозначим $M(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}):=\left(\langle a(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle\langle a(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}),\mathbf{n}(\mathbf{x})\rangle-\langle a(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi},\mathbf{n}(\mathbf{x})\rangle^2\right)^{1/2}$. Основной результат данного раздела — следующая теорема.

Теорема 4.1. *При сделанных предположениях для функций распределения собственных значений отношения* (4.7) *справедливы асимптотические формулы при* $\lambda\to+0$:

$$N_\pm(\lambda,(4.7))\sim\frac{\lambda^{-\theta}}{m(2\pi)^m}\int_\Gamma dS(\mathbf{x})\int_{\boldsymbol{\xi}\perp\mathbf{n}(x):\,|\boldsymbol{\xi}|=1}dS(\boldsymbol{\xi})\,\left(b_\pm(\mathbf{x})B^{-1}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})M^{-1}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\right)^\theta,\quad \theta=\frac{m}{2q+1}.$$

4.2. Оценки спектра.

Лемма 4.1. *Пусть вещественнозначная функция* $b(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условиям* (4.6). *Тогда справедливы оценки* $\Delta_\theta^\pm$ (4.7) $\leqslant C\|b\|^\theta_{L_r(\Gamma)}$, $\theta=\frac{m}{2q+1}$, *где постоянная* C *не зависит от* b.

Доказательство. По теореме о следах (см., например, [2, 22]) из нижней оценки (4.5) вытекает неравенство $\mathcal{A}_\Omega[u]\geqslant c_a\|u\|^2_{H^1(\Omega)}\geqslant C_1\|u\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}$, $u\in H^1(\Omega)$, с некоторой постоянной $C_1>0$. В (4.7) обозначим $g=\mathbf{B}_\Gamma^{-1}u$. По теореме о гомеоморфизмах (см., например, [2, 4, 22]) имеем $\|u\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}\geqslant C_2\|g\|^2_{H^{2q+1/2}(\Gamma)}$, $u\in H^{1/2}(\Gamma)$, $C_2>0$. Применяя лемму 2.2, получаем, что функции $N_\pm(\lambda,(4.7))$ оцениваются сверху через функции распределения спектра отношения

$$\pm C\frac{\operatorname{Re}\int_\Gamma b(\mathbf{x})g(\mathbf{x})\overline{u(\mathbf{x})}\,dS(\mathbf{x})}{\|u\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}+\|g\|^2_{H^{2q+1/2}(\Gamma)}},\quad \{u,g\}\in H^{1/2}(\Gamma)\oplus H^{2q+1/2}(\Gamma).\tag{4.8}$$

В силу леммы 2.9 имеем $\Delta_\theta^\pm$ (4.7) $\leqslant\Delta_\theta^\pm$ (4.8) $\leqslant C\|b\|^\theta_{L_r(\Gamma)}$. □

Леммы 4.1 и 2.5 показывают, что величины $\Delta_\theta^\pm$ (4.7), $\delta_\theta^\pm$ (4.7) являются непрерывными функционалами над $b\in L_r(\Gamma)$. Поэтому вычисление этих величин *достаточно провести для плотного в* $L_r(\Gamma)$ *множества коэффициентов* $b(\mathbf{x})$. В качестве такого множества удобно взять $C_0^\infty(\Gamma)$.

4.3. Сравнение с задачей в гладкой области. *Ниже предполагается, что* $b\in C_0^\infty(\Gamma)$. Действуем аналогично пункту 3.1. Пусть $\widetilde{\Omega}$ — ограниченная область с гладкой границей такая, что $\widetilde{\Omega}\subset\Omega$ и $\operatorname{supp} b$ лежит строго внутри множества $\partial\widetilde{\Omega}\cap\Gamma$. Тогда найдется открытое подмножество $\widetilde{\Gamma}$ границы $\partial\widetilde{\Omega}$, лежащее строго внутри $\partial\widetilde{\Omega}\cap\Gamma$, причем $\operatorname{supp} b\subset\widetilde{\Gamma}$. Можно считать, что $\widetilde{\Gamma}$ — m-мерная поверхность с достаточно гладкой границей. Через $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ обозначим единичный вектор внутренней нормали к $\partial\widetilde{\Omega}$ в точке $\mathbf{x}\in\partial\widetilde{\Omega}$. Пусть $\widetilde{b}\in C^\infty(\partial\widetilde{\Omega})$ — функция, равная $b(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}\in\widetilde{\Gamma}$ и равная нулю вне $\widetilde{\Gamma}$.

Пусть $B_{\partial\widetilde{\Omega}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$, $\mathbf{x}\in\partial\widetilde{\Omega}$, $\boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$, — однородный полином по переменным $\boldsymbol{\xi}$ степени $2q$, коэффициенты которого гладко зависят от $\mathbf{x}$, причем $B_{\partial\widetilde{\Omega}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=B(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ при $\mathbf{x}\in\partial\widetilde{\Omega}\cap\Gamma$, $\boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$, и выполнено условие сильной эллиптичности $B_{\partial\widetilde{\Omega}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\geqslant c|\boldsymbol{\xi}|^{2q}$, $\mathbf{x}\in\partial\widetilde{\Omega}$, $\boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$, $c>0$. Нетрудно показать, что такое «сильно эллиптическое» продолжение символа $B(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ всегда возможно. Через $B_{\partial\widetilde{\Omega}}$ обозначим какое-либо дифференциальное выражение порядка $2q$ на $\partial\widetilde{\Omega}$ с гладкими коэффициентами и главным символом $B_{\partial\widetilde{\Omega}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$.

Пусть $\mathbf{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}$ — оператор в пространстве $L_2(\partial\widetilde{\Omega})$, заданный выражением $B_{\partial\widetilde{\Omega}}$ на области $H^{2q}(\partial\widetilde{\Omega})$. За счет выбора младших членов выражение $B_{\partial\widetilde{\Omega}}$ можно выбрать так, чтобы оператор $\mathbf{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}$ был самосопряжен и положительно определен. Обратный оператор $\mathbf{B}^{-1}_{\partial\widetilde{\Omega}}$ есть ПДО на $\partial\widetilde{\Omega}$ порядка $(-2q)$. Обозначим $\mathcal{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}[u]:=\operatorname{Re}\int_{\partial\widetilde{\Omega}}\widetilde{b}(\mathbf{x})\big(\mathbf{B}^{-1}_{\partial\widetilde{\Omega}}u\big)(\mathbf{x})\overline{u(\mathbf{x})}\,dS(\mathbf{x})$.

Через $\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}$ обозначим форму $\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}[u]:=\int_{\widetilde{\Omega}}\Big(\sum\limits_{i,j=1}^{m+1}a_{ij}(\mathbf{x})\partial_i u(\mathbf{x})\overline{\partial_j u(\mathbf{x})}+V(\mathbf{x})|u(\mathbf{x})|^2\Big)\,d\mathbf{x}$, $u\in H^1(\widetilde{\Omega})$. Коэффициенты этой формы — те же, что в (4.2) (суженные на $\widetilde{\Omega}$). Наша цель — сравнить отношение (4.7) и отношение

$$\pm\frac{\mathcal{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}[u]}{\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}[u]},\quad u\in H^1(\widetilde{\Omega}).\tag{4.9}$$

Это сравнение проводится в два этапа — они соответствуют леммам 4.2 и 4.3. Рассмотрим отношение форм

$$\pm\frac{\mathcal{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}[u]}{\mathcal{A}_{\Omega}[u]},\quad u\in H^1(\Omega).\tag{4.10}$$

Лемма 4.2. *Справедливы равенства*

$$\Delta^{\pm}_{\theta}\ (4.7)=\Delta^{\pm}_{\theta}\ (4.10),\quad \delta^{\pm}_{\theta}\ (4.7)=\delta^{\pm}_{\theta}\ (4.10),\quad \theta=\frac{m}{2q+1}.\tag{4.11}$$

Доказательство. Рассмотрим отношение

$$\pm\frac{\mathcal{F}[u]}{\mathcal{A}_{\Omega}[u]},\quad u\in H^1(\Omega),\tag{4.12}$$

где $\mathcal{F}[u]:=\mathcal{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}[u]-\mathcal{B}_{\Gamma}[u]$. В силу леммы 2.4 равенства (4.11) будут установлены, коль скоро мы покажем, что $\Delta^{+}_{\theta}\ (4.12)=\Delta^{-}_{\theta}\ (4.12)=0$. Пусть $u\in H^1(\Omega)$. Обозначим $g=\mathbf{B}_{\Gamma}^{-1}u$, $f=\mathbf{B}^{-1}_{\partial\widetilde{\Omega}}u$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u]&=\operatorname{Re}\int_{\widetilde{\Gamma}}b(f-g)\overline{B_{\partial\widetilde{\Omega}}f}\,dS=\operatorname{Re}\int_{\widetilde{\Gamma}}B_{\partial\widetilde{\Omega}}(b(f-g))\overline{f}\,dS=\\&=\operatorname{Re}\int_{\widetilde{\Gamma}}b\left(B_{\partial\widetilde{\Omega}}f-B_{\Gamma}g+(B_{\Gamma}-B_{\partial\widetilde{\Omega}})g\right)\overline{f}\,dS+\operatorname{Re}\int_{\widetilde{\Gamma}}\left(B_{\partial\widetilde{\Omega}}(b(f-g))-bB_{\partial\widetilde{\Omega}}(f-g)\right)\overline{f}\,dS.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Учтем, что: а) $(B_{\partial\widetilde{\Omega}}f)(\mathbf{x})=(B_{\Gamma}g)(\mathbf{x})=u(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}\in\widetilde{\Gamma}$; б) $(B_{\Gamma}-B_{\partial\widetilde{\Omega}})$ на $\widetilde{\Gamma}$ есть дифференциальное выражение порядка $2q-1$, поскольку главные символы B_{Γ} и $B_{\partial\widetilde{\Omega}}$ совпадают при $\mathbf{x}\in\widetilde{\Gamma}$ (т. е. $B(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=B_{\partial\widetilde{\Omega}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ при $\mathbf{x}\in\widetilde{\Gamma}$, $\boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$); в) $(B_{\partial\widetilde{\Omega}}\widetilde{b}-\widetilde{b}B_{\partial\widetilde{\Omega}})$ есть дифференциальное выражение порядка $2q-1$. Тогда из (4.13) видно, что форма $\mathcal{F}[u]$ представляется в виде

$$\mathcal{F}[u]=\operatorname{Re}\int_{\widetilde{\Gamma}}(B'g+B''f)\overline{f}\,dS,\tag{4.14}$$

где B' и B'' — некоторые дифференциальные выражения на $\widetilde{\Gamma}$ порядка $2q-1$ с гладкими коэффициентами.

Используя (4.5), теорему о следах, теорему о гомеоморфизмах для $\mathbf{B}_{\Gamma}$ и свойства непрерывности ПДО в пространствах Соболева на $\partial\widetilde{\Omega}$, заключаем, что

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\Omega}[u]&\geqslant c_a\|u\|^2_{H^1(\Omega)}\geqslant C_3\left(\|u\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}+\|u\|^2_{H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega})}\right)\geqslant C_4\left(\|g\|^2_{H^{2q+1/2}(\Gamma)}+\|f\|^2_{H^{2q+1/2}(\partial\widetilde{\Omega})}\right)\geqslant\\&\geqslant C_5\left(\|B'g+B''f\|^2_{H^{3/2}(\widetilde{\Gamma})}+\|f\|^2_{H^{2q+1/2}(\partial\widetilde{\Omega})}\right),\quad u\in H^1(\Omega).\end{aligned}\tag{4.15}$$

Обозначим $B'g+B''f=\psi$. Применяя лемму 2.2 и учитывая (4.14) и (4.15), получаем, что величины $\Delta^{\pm}_{\theta}$ (4.12) не превосходят аналогичных величин для отношения

$$\pm C\frac{\operatorname{Re}\int_{\widetilde{\Gamma}}\psi(\mathbf{x})\overline{f(\mathbf{x})}\,dS(\mathbf{x})}{\|\psi\|^2_{H^{3/2}(\widetilde{\Gamma})}+\|f\|^2_{H^{2q+1/2}(\widetilde{\Gamma})}},\quad \{\psi,f\}\in H^{3/2}(\widetilde{\Gamma})\oplus H^{2q+1/2}(\widetilde{\Gamma}). \tag{4.16}$$

В силу леммы 2.9 имеем: $N_{\pm}(\lambda,(4.16))=O(\lambda^{-\frac{m}{2q+2}})$. Следовательно, $\Delta^{\pm}_{\theta}$ $(4.16)=0$ при $\theta=\frac{m}{2q+1}$. Тогда и Δ^{+}_{θ} $(4.12)=\Delta^{-}_{\theta}$ $(4.12)=0$. □

Сравним теперь отношения (4.10) и (4.9).

Лемма 4.3. *Справедливы неравенства*

$$\delta^{\pm}_{\theta}\ (4.9)\leqslant\delta^{\pm}_{\theta}\ (4.10)\leqslant\Delta^{\pm}_{\theta}\ (4.10)\leqslant\Delta^{\pm}_{\theta}\ (4.9),\quad \theta=\frac{m}{2q+1}. \tag{4.17}$$

Доказательство. В силу (4.4) и (4.3) выполнено неравенство $\mathcal{A}_{\Omega}[u]\geqslant\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}[u]$, $u\in H^1(\Omega)$. Применяя лемму 2.2, в которой $\mathcal{S}:H^1(\Omega)\to H^1(\widetilde{\Omega})$ — оператор сужения, получаем

$$N_{\pm}(\lambda,(4.10))\leqslant N_{\pm}(\lambda,(4.9)),\quad \lambda>0. \tag{4.18}$$

Отсюда вытекает правое неравенство в (4.17).

Фиксируем срезку $\vartheta\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$; $0\leqslant\vartheta(\mathbf{x})\leqslant1$; $\vartheta(\mathbf{x})=1$ при $\mathbf{x}\in\operatorname{supp}b$; $\vartheta(\mathbf{x})=0$ в некоторой окрестности $\Omega\setminus\widetilde{\Omega}$. Имеем:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}[u]&\geqslant\varepsilon\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}[u]+(1-\varepsilon)\int_{\widetilde{\Omega}}\vartheta^2(\mathbf{x})\left(\langle a(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x}),\nabla u(\mathbf{x})\rangle+V(\mathbf{x})|u(\mathbf{x})|^2\right)d\mathbf{x}=\\&=\varepsilon\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}[u]+(1-\varepsilon)\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}[\vartheta u]+(1-\varepsilon)\int_{\widetilde{\Omega}}\left(\vartheta^2\langle a\nabla u,\nabla u\rangle-\langle a\nabla(\vartheta u),\nabla(\vartheta u)\rangle\right)d\mathbf{x},\quad u\in H^1(\widetilde{\Omega}).\end{aligned} \tag{4.19}$$

Сумма первых двух членов в правой части (4.19) определяет в $H^1(\widetilde{\Omega})$ эквивалентную метрику, а последний член — форма, компактная в $H^1(\widetilde{\Omega})$. Далее, используя равенство $\widetilde{b}(\mathbf{x})=\vartheta^2(\mathbf{x})\widetilde{b}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\partial\widetilde{\Omega}$, получаем

$$\mathcal{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}[u]=\mathcal{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}[\vartheta u]+\int_{\partial\widetilde{\Omega}}\widetilde{b}(\mathbf{x})\left(\left(\vartheta\mathbf{B}^{-1}_{\partial\widetilde{\Omega}}-\mathbf{B}^{-1}_{\partial\widetilde{\Omega}}\vartheta\right)u\right)(\mathbf{x})\vartheta(\mathbf{x})\overline{u(\mathbf{x})}\,dS(\mathbf{x}). \tag{4.20}$$

Второе слагаемое в правой части (4.20) представляет собой форму ПДО порядка $-(2q+1)$, т. е. является формой младшего порядка. В соответствии с леммами 2.3 и 2.4 величины $\delta^{\pm}_{\theta}$ (4.9) не превосходят аналогичных величин для отношения

$$\pm\frac{\mathcal{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}[\vartheta u]}{\varepsilon\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}[u]+(1-\varepsilon)\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}[\vartheta u]},\quad u\in H^1(\widetilde{\Omega}). \tag{4.21}$$

Для $u\in H^1(\widetilde{\Omega})$ через $\widehat{\mathcal{S}}u$ обозначим функцию, совпадающую с ϑu на $\widetilde{\Omega}$ и равную нулю на $\Omega\setminus\widetilde{\Omega}$. Тогда оператор $\widehat{\mathcal{S}}:H^1(\widetilde{\Omega})\to H^1(\Omega)$ ограничен. Для всех $u\in H^1(\widetilde{\Omega})$, для которых $\pm\mathcal{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}[\vartheta u]>0$, отношение (4.21) не превосходит $\pm\dfrac{\mathcal{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}[\widehat{\mathcal{S}}u]}{(1-\varepsilon)\mathcal{A}_{\Omega}[\widehat{\mathcal{S}}u]}$. Мы находимся в условиях леммы 2.2, в силу которой $\delta^{\pm}_{\theta}$ $(4.9)\leqslant(1-\varepsilon)^{-\theta}\delta^{\pm}_{\theta}$ (4.10). Устремляя здесь ε к нулю, приходим к левому неравенству в (4.17). □

4.4. Асимптотическая формула в гладком случае. В соответствии с леммами 4.2 и 4.3 справедливы неравенства

$$\delta^{\pm}_{\theta}\ (4.9)\leqslant\delta^{\pm}_{\theta}\ (4.7)\leqslant\Delta^{\pm}_{\theta}\ (4.7)\leqslant\Delta^{\pm}_{\theta}\ (4.9),\quad \theta=\frac{m}{2q+1}. \tag{4.22}$$

Установим теперь асимптотическую формулу для $N_{\pm}(\lambda,(4.9))$.

Лемма 4.4. *Справедливы асимптотические формулы при* $\lambda \to +0$:

$$N_\pm(\lambda,(4.9)) \sim \frac{\lambda^{-\theta}}{m(2\pi)^m}\int_{\partial\widetilde{\Omega}} dS(\mathbf{x})\int_{\boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}):\,|\boldsymbol{\xi}|=1} dS(\boldsymbol{\xi})\,\left(\widetilde{b}_\pm(\mathbf{x})B^{-1}_{\partial\widetilde{\Omega}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\widetilde{M}^{-1}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\right)^\theta, \quad \theta=\frac{m}{2q+1}. \tag{4.23}$$

Здесь $\widetilde{M}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) := \left(\langle a(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle\langle a(\mathbf{x})\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}),\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\rangle - \langle a(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\rangle^2\right)^{1/2}$.

Доказательство. Через $H^1(\widetilde{\Omega},L)$ обозначим подпространство в $H^1(\widetilde{\Omega})$, образованное решениями уравнения $Lu=0$ в $\widetilde{\Omega}$. Справедливо разложение $H^1(\widetilde{\Omega}) = H^1(\widetilde{\Omega},L)\oplus^{\mathcal{A}} H^1_0(\widetilde{\Omega})$. Здесь ортогональная сумма понимается в смысле скалярного произведения $\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}[u,v]$. Поскольку форма в числителе отношения (4.9) обращается в нуль при $u\in H^1_0(\widetilde{\Omega})$, то ненулевой спектр отношения (4.9) не изменится, если рассматривать это отношение на $H^1(\widetilde{\Omega},L)$.

Пусть G — «оператор Пуассона», сопоставляющий функции $\varphi\in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega})$ решение соответствующей задачи Дирихле для уравнения $Lu=0$: равенство $u=G\varphi$ означает, что $u\in H^1(\widetilde{\Omega},L)$, $u|_{\partial\widetilde{\Omega}}=\varphi$. Оператор G устанавливает гомеоморфизм пространств $H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega})$ и $H^1(\widetilde{\Omega},L)$. Задача о спектре отношения (4.9) эквивалентна задаче о спектре отношения

$$\pm\frac{\mathcal{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}[\varphi]}{\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}[G\varphi]}, \quad \varphi\in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega}). \tag{4.24}$$

Из свойств алгебры Буте де Монвеля [35, 38] следует, что справедливо представление

$$\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}[G\varphi] = (\mathcal{P}\varphi,\varphi), \quad \varphi\in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega}), \tag{4.25}$$

где $\mathcal{P}$ — классический ПДО на $\partial\widetilde{\Omega}$ порядка 1. Вычислим старший символ оператора $\mathcal{P}$, используя рецепт из [11]. Старший символ оператора L есть $L^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\eta}) = a(\mathbf{x})\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\eta} = \sum\limits_{j,l=1}^{m+1} a_{jl}(\mathbf{x})\eta_j\eta_l$. Для каждой пары $(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$, где $\mathbf{x}\in\partial\widetilde{\Omega}$, $0\neq\boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$, надо рассмотреть обыкновенное дифференциальное уравнение $L^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})D_t)f(t)=0$, $t\in\mathbb{R}_+$. Это уравнение принимает вид

$$-\langle a(\mathbf{x})\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}),\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\rangle\frac{d^2f(t)}{dt^2} - 2i\langle a(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\rangle\frac{df(t)}{dt} + \langle a(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle f(t) = 0.$$

Пусть $F(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ — пространство решений этого уравнения, исчезающих при $t\to+\infty$. Это пространство одномерно, выберем базисную функцию $Y(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};t)$ в нем из условия $Y(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};0)=1$. Тогда $Y(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};t)=e^{\kappa(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})t}$, $\kappa(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = -\dfrac{\widetilde{M}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})+i\langle a(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\rangle}{\langle a(\mathbf{x})\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}),\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\rangle}$. Старший символ $p^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ ПДО $\mathcal{P}$ вычисляется по правилу

$$p^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i,j=1}^{m+1}\int_0^\infty a_{ij}(\mathbf{x})(\xi_i+\nu_i(\mathbf{x})D_t)Y(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};t)(\xi_j-\nu_j(\mathbf{x})D_t)\overline{Y(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};t)}\,dt.$$

Вычисление показывает, что

$$p^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \widetilde{M}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x}\in\partial\widetilde{\Omega}, \quad \boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}). \tag{4.26}$$

Очевидно, $\mathcal{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}[\varphi] = (\mathcal{Q}\varphi,\varphi)$, где $\mathcal{Q}$ — ПДО на $\partial\widetilde{\Omega}$ порядка $(-2q)$ с главным символом

$$q^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \widetilde{b}(\mathbf{x})B^{-1}_{\partial\widetilde{\Omega}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x}\in\partial\widetilde{\Omega}, \quad \boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}). \tag{4.27}$$

Таким образом, отношение (4.24) совпадает с отношением ПДФ

$$\pm\frac{(\mathcal{Q}\varphi,\varphi)}{(\mathcal{P}\varphi,\varphi)}, \quad \varphi\in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega}). \tag{4.28}$$

Мы установили, что

$$N_\pm(\lambda,(4.9)) = N_\pm(\lambda,(4.24)) = N_\pm(\lambda,(4.28)), \quad \lambda>0. \tag{4.29}$$

В силу леммы 2.10 для функций распределения спектра отношения (4.28) при $\lambda \to +0$ справедливы асимптотические формулы

$$N_\pm(\lambda, (4.28)) \sim (2\pi)^{-m} \int_{\partial\widetilde{\Omega}} dS(\mathbf{x}) \int_{\boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})} d\boldsymbol{\xi}\, n_\pm(\lambda, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi};\ (4.31)), \tag{4.30}$$

где $n_\pm(\lambda, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi};\ (4.31))$ — функции распределения спектра отношения (одномерных) форм

$$\pm\frac{q^\circ(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})|z|^2}{p^\circ(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})|z|^2}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4.31}$$

С учетом (4.26), (4.27) получаем

$$n_\pm(\lambda, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi};\ (4.31)) = \begin{cases} 1, & \lambda < \widetilde{b}_\pm(\mathbf{x}) B^{-1}_{\partial\widetilde{\Omega}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \widetilde{M}^{-1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \\ 0, & \lambda \geqslant \widetilde{b}_\pm(\mathbf{x}) B^{-1}_{\partial\widetilde{\Omega}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \widetilde{M}^{-1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}). \end{cases} \tag{4.32}$$

Теперь, вычисляя асимптотику функций $N_\pm(\lambda, (4.28))$ по формулам (4.30), (4.32) и учитывая (4.29), приходим к искомому результату (4.23). □

Завершение доказательства теоремы 4.1. Из (4.22) и (4.23), учитывая, что $\widetilde{b}(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in \operatorname{supp} b = \operatorname{supp} \widetilde{b} \subset \Gamma$ и $B_{\partial\widetilde{\Omega}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = B(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, $\widetilde{M}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = M(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ при $\mathbf{x} \in \operatorname{supp} b$, $\boldsymbol{\xi} \perp \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$, получаем:

$$\Delta^\pm_\theta\ (4.7) = \delta^\pm_\theta\ (4.7) = \frac{1}{m(2\pi)^m} \int\limits_\Gamma dS(\mathbf{x}) \int\limits_{\boldsymbol{\xi}\perp\mathbf{n}(\mathbf{x}):\, |\boldsymbol{\xi}|=1} dS(\boldsymbol{\xi})\ \left(b_\pm(\mathbf{x}) B^{-1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) M^{-1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\right)^\theta, \quad \theta = \frac{m}{2q+1},$$

при всяком $b \in C_0^\infty(\Gamma)$. По замыканию эта формула верна при $b \in L_r(\Gamma)$; см. пункт 4.2. Это завершает доказательство теоремы 4.1. □

4.5. Применение результата к исследованию спектра малых колебаний капиллярной идеальной жидкости. Применение теоремы 4.1 позволяет решить задачу об асимптотике спектра малых колебаний капиллярной идеальной жидкости (см. [3, 20], а также [21, гл. 4, §1]). В этом случае $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (см. рис. 1) имеет смысл области, которую занимает жидкость, находящаяся в сосуде в положении равновесия; Γ — равновесная свободная поверхность жидкости; $S = \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}$ — твердая стенка сосуда; $\gamma = \partial\Gamma$ — линия смачивания. Приведем вначале классическую постановку задачи. При этом будем предполагать выполненным следующее условие.

Условие 4.1. Ω — *ограниченная область в* $\mathbb{R}^3$ *с кусочно-гладкой границей* $\partial\Omega = \overline{\Gamma} \cup \overline{S}$, *где* Γ *и* S — *гладкие двумерные поверхности, при пересечении образующие гладкое одномерное ребро* γ, *причем внутренний угол при ребре больше нуля и меньше* 2π (Γ, S *и* γ *не обязательно связны*).

Пусть $\mathbf{n}_0(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней нормали к S в точке $\mathbf{x} \in S$, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней нормали к Γ в точке $\mathbf{x} \in \Gamma$, $\mathbf{l}(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней (по отношению к Γ) нормали к γ, лежащий в плоскости, касательной к Γ в точке $\mathbf{x} \in \gamma$. Отметим, что после перехода к вариационной постановке задачи требование гладкости S может быть снято (см. ниже условие 4.2).

Пусть заданы постоянная $\sigma > 0$ и вещественные функции $h \in C^\infty(\overline{\Gamma})$, $\chi \in C^\infty(\gamma)$. Здесь σ имеет смысл коэффициента поверхностного натяжения (см. [3]), функция h связана с нормальной производной потенциала массовых сил и с главными кривизнами поверхности Γ. Предполагается выполненным неравенство

$$\begin{gathered} \int_\Gamma \left(\sigma|\nabla_\Gamma u(\mathbf{x})|^2 + h(\mathbf{x})|u(\mathbf{x})|^2\right)\, dS(\mathbf{x}) + \int_\gamma \sigma\chi(\mathbf{x})|u(\mathbf{x})|^2\, d\gamma \geqslant c \int_\Gamma |u(\mathbf{x})|^2\, dS(\mathbf{x}), \\ u \in H^1(\Gamma), \quad \int_\Gamma u(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = 0; \quad c > 0. \end{gathered} \tag{4.33}$$

Условие (4.33) накладывает ограничение на данные задачи. Физически оно означает, что положение равновесия жидкости устойчиво. Обозначим $L_2(\Gamma) \ominus \{1\} := \left\{u \in L_2(\Gamma) : \int_\Gamma u\, dS = 0\right\}$. Пусть P — ортопроектор пространства $L_2(\Gamma)$ на $L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$. Квадратичной форме, стоящей в левой части неравенства (4.33), отвечает самосопряженный положительно определенный оператор $\mathfrak{B}_\Gamma$ в пространстве $L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$. Оператор $\mathfrak{B}_\Gamma$ носит название оператора потенциальной энергии. Пусть

Δ_Γ — оператор Лапласа—Бельтрами на Γ. Тогда $\mathfrak{B}_\Gamma$ задается выражением $P(-\sigma\Delta_\Gamma+h)$ на области определения $\operatorname{Dom}\mathfrak{B}_\Gamma = \Big\{u \in H^2(\Gamma) : \frac{\partial u}{\partial l} + \chi u = 0$ на $\gamma,\ \int_\Gamma u\,dS = 0\Big\}$. На $L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$ определен компактный оператор $\mathfrak{B}_\Gamma^{-1}$, который является разрешающим оператором соответствующей краевой задачи на Γ.

Задача о нормальных колебаниях капиллярной идеальной жидкости сводится (см. [3, гл. 4, §2]) к краевой задаче на собственные значения:

$$\begin{aligned} &\Delta\Phi = 0 \ \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n_0} = 0 \ \text{ на } S,\\ &P(-\sigma\Delta_\Gamma + h)\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \lambda^{-1}\Phi \ \text{ на } \Gamma, \quad \int_\Gamma \Phi\,dS = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right) + \chi\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \gamma. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Здесь $\Phi(\mathbf{x})$ имеет смысл амплитуды колебаний потенциала $\Phi(\mathbf{x},t)$ поля скоростей частиц жидкости: $\Phi(\mathbf{x},t) = \Phi(\mathbf{x})e^{i\omega t}$, $\omega^{-1} = \sqrt{\lambda}$, t — время. Уравнение Лапласа — уравнение неразрывности, условие на S — условие непротекания, третье краевое условие на γ — линеаризованное условие сохранения угла смачивания в процессе движения.

Краевая задача (4.34) эквивалентна (см. [3, гл. 4, §5]) задаче о нахождении последовательных максимумов отношения квадратичных форм

$$\frac{\int_\Gamma(\mathfrak{B}_\Gamma^{-1}\Phi)\overline{\Phi}\,dS}{\int_\Omega|\nabla\Phi|^2\,d\mathbf{x}}, \quad \Phi \in H^1(\Omega), \quad \int_\Gamma \Phi\,dS = 0. \tag{4.35}$$

При этом уравнение Лапласа в Ω и условие на S являются естественными условиями в вариационной задаче о спектре отношения (4.35). Отношение (4.35) рассмотрим при следующем условии.

Условие 4.2. Ω — *ограниченная область в* $\mathbb{R}^3$, $\Omega \in \mathcal{K}$; Γ — *гладкая двумерная поверхность с гладким одномерным краем* γ, *причем* $\overline{\Gamma} \subset \partial\Omega$.

Предложение 4.1. *Пусть выполнено условие* 4.2. *Пусть* $\sigma > 0$ *и вещественные функции* $h \in C^\infty(\overline{\Gamma})$, $\chi \in C^\infty(\gamma)$ *таковы, что выполнено неравенство* (4.33). *Тогда для функции распределения спектра отношения* (4.35) *при* $\lambda \to +0$ *справедлива асимптотика*

$$N(\lambda, (4.35)) \sim \lambda^{-2/3}\frac{\operatorname{mes}\Gamma}{4\pi\sigma^{2/3}}. \tag{4.36}$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{\mathfrak{B}}_\Gamma = \mathfrak{B}_\Gamma + CI$ — оператор в пространстве $L_2(\Gamma)\ominus\{1\}$, заданный выражением $P(-\sigma\Delta_\Gamma + h + C)$ на области $\operatorname{Dom}\mathfrak{B}_\Gamma$. Пусть $\mathbf{B}_\Gamma$ — оператор в $L_2(\Gamma)$, заданный выражением $-\sigma\Delta_\Gamma + h + C$ на области определения $\operatorname{Dom}\mathbf{B}_\Gamma = \Big\{u \in H^2(\Gamma) : \frac{\partial u}{\partial l} + \chi u = 0$ на $\gamma\Big\}$. Мы считаем, что постоянная C настолько велика, что оператор $\mathbf{B}_\Gamma$ положительно определен. В силу тождества Гильберта $\widetilde{\mathfrak{B}}_\Gamma^{-1} = (I+K)\mathfrak{B}_\Gamma^{-1}$, где $K = -C\widetilde{\mathfrak{B}}_\Gamma^{-1}$ — компактный самосопряженный оператор в $L_2(\Gamma)\ominus\{1\}$, причем K коммутирует с $\mathfrak{B}_\Gamma^{-1}$. Отсюда и из леммы 2.4 следует, что величины $\Delta_{2/3}$ (4.35), $\delta_{2/3}$ (4.35) совпадают с аналогичными величинами для отношения

$$\frac{\int_\Gamma(\widetilde{\mathfrak{B}}_\Gamma^{-1}\Phi)\overline{\Phi}\,dS}{\int_\Omega|\nabla\Phi|^2\,d\mathbf{x}}, \quad \Phi \in H^1(\Omega), \quad \int_\Gamma \Phi\,dS = 0. \tag{4.37}$$

В силу леммы 2.6 главный член асимптотики спектра отношения (4.37) не изменится, если рассмотреть это отношение на подпространстве конечной коразмерности в $\mathfrak{H} = \{\Phi \in H^1(\Omega) : \int_\Gamma \Phi\,dS = 0\}$, а именно, на подпространстве $\mathfrak{G} := \Big\{\Phi \in H^1(\Omega) : \int_\Gamma \Phi\,dS = 0,\ \int_\Gamma \mathbf{B}_\Gamma^{-1}\Phi\,dS = 0\Big\}$. Отметим, что $\widetilde{\mathfrak{B}}_\Gamma^{-1}\Phi = \mathbf{B}_\Gamma^{-1}\Phi$ при $\Phi \in \mathfrak{G}$. Далее, применяя лемму 2.3, получаем, что величины $\Delta_{2/3}$ (4.37), $\delta_{2/3}$ (4.37) совпадают с аналогичными величинами для отношения

$$\frac{\int_\Gamma(\mathbf{B}_\Gamma^{-1}\Phi)\overline{\Phi}\,dS}{\int_\Omega\left(|\nabla\Phi|^2 + |\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x}}, \quad \Phi \in \mathfrak{G}. \tag{4.38}$$

Наконец, в силу леммы 2.6 главный член асимптотики спектра не изменится, если заменить (4.38) на отношение

$$\frac{\int_\Gamma (\mathbf{B}_\Gamma^{-1}\Phi)\overline{\Phi}\,dS}{\int_\Omega \left(|\nabla\Phi|^2 + |\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x}}, \quad \Phi \in H^1(\Omega). \tag{4.39}$$

Применяя для отношения (4.39) теорему 4.1 и учитывая, что в данном случае $b(\mathbf{x}) = 1$, $B(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \sigma|\boldsymbol{\xi}|^2$ и $M(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = |\boldsymbol{\xi}|$, приходим к асимптотической формуле (4.36). $\square$

4.6. Малые колебания капиллярной стратифицированной жидкости. Теорема 4.1 позволяет также решить задачу об асимптотике спектра малых колебаний капиллярной стратифицированной жидкости. В классической постановке предполагаем выполненным условие 4.1. Постоянная σ и функции h, χ удовлетворяют прежним условиям. Пусть, кроме того, задана положительная функция $\rho \in C^\infty(\overline{\Omega})$, которая имеет смысл плотности жидкости.

Задача о малых колебаниях капиллярной стратифицированной жидкости сводится к краевой задаче на собственные значения:

$$\begin{gathered}
\operatorname{div}\left(\rho^{-1}\nabla\Phi\right) = 0 \ \text{ в } \Omega, \quad \rho^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial n_0} = 0 \ \text{ на } S, \\
P(-\sigma\Delta_\Gamma + h)\Big(\rho^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big) = \lambda^{-1}\Phi \ \text{ на } \Gamma, \quad \int_\Gamma \Phi\,dS = 0, \\
\frac{\partial}{\partial l}\Big(\rho^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big) + \chi\rho^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \gamma.
\end{gathered} \tag{4.40}$$

Краевая задача (4.40) эквивалентна вариационной задаче о спектре отношения форм

$$\frac{\int_\Gamma (\mathfrak{B}_\Gamma^{-1}\Phi)\overline{\Phi}\,dS}{\int_\Omega \rho^{-1}|\nabla\Phi|^2\,d\mathbf{x}}, \quad \Phi \in H^1(\Omega), \quad \int_\Gamma \Phi\,dS = 0, \tag{4.41}$$

где оператор $\mathfrak{B}_\Gamma$ определен так же, как в пункте 4.5. Вариационную задачу рассматриваем уже при условии 4.2.

По аналогии с доказательством предложения 4.1 из теоремы 4.1 легко вывести следующее утверждение.

Предложение 4.2. *Пусть выполнено условие* 4.2. *Пусть* $\sigma > 0$ *и вещественные функции* $h \in C^\infty(\overline{\Gamma})$, $\chi \in C^\infty(\gamma)$ *таковы, что выполнено неравенство* (4.33). *Пусть* $\rho \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\rho(\mathbf{x}) > 0$. *Тогда для функции распределения спектра отношения* (4.41) *при* $\lambda \to +0$ *справедлива асимптотика* $N(\lambda,(4.41)) \sim \lambda^{-2/3}\frac{1}{4\pi\sigma^{2/3}}\int_\Gamma \rho^{2/3}(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x})$.

4.7. Вспомогательная задача теории гидроупругости. Теорема 4.1 находит применение и в теории гидроупругости. В этом случае Γ имеет смысл упругого днища сосуда. Следующая вспомогательная задача гидроупругости отвечает колебаниям системы в случае, когда упругое днище имеет нулевую массу:

$$\begin{gathered}
\Delta\Phi = 0 \ \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n_0} = 0 \ \text{ на } S, \\
P\Big(D\rho^{-1}\Delta_\Gamma^2\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big) = \lambda^{-1}\Phi \ \text{ на } \Gamma, \quad \int_\Gamma \Phi\,dS = 0, \\
\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial l}\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big) = 0 \ \text{ на } \gamma.
\end{gathered} \tag{4.42}$$

Здесь Δ_Γ^2 — бигармонический оператор на Γ, условия на γ имеют смысл условий жесткого закрепления. Постоянная $D > 0$ — коэффициент упругости, постоянная $\rho > 0$ — плотность жидкости[1].

Через $\widehat{\mathfrak{B}}_\Gamma$ обозначим оператор в $L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$, заданный выражением $PD\rho^{-1}\Delta_\Gamma^2$ на области определения $\operatorname{Dom}\widehat{\mathfrak{B}}_\Gamma = H^4(\Gamma) \cap H_0^2(\Gamma) \cap (L_2(\Gamma) \ominus \{1\})$. Оператор $\widehat{\mathfrak{B}}_\Gamma$ самосопряжен и положительно определен. Краевой задаче (4.42) отвечает вариационная задача о спектре отношения квадратичных форм

$$\frac{\int_\Gamma (\widehat{\mathfrak{B}}_\Gamma^{-1}\Phi)\overline{\Phi}\,dS}{\int_\Omega |\nabla\Phi|^2\,d\mathbf{x}}, \quad \Phi \in H^1(\Omega), \quad \int_\Gamma \Phi\,dS = 0. \tag{4.43}$$

[1]Краевые задачи, в которых порядок оператора в граничном условии выше, чем порядок уравнения в области, обсуждались, например, в [23].

Предложение 4.3. *Пусть выполнено условие* 4.2. *Пусть* $D > 0$ *и* $\rho > 0$. *Тогда для функции распределения спектра отношения* (4.43) *при* $\lambda \to +0$ *справедлива асимптотика*

$$N(\lambda, (4.43)) \sim \lambda^{-2/5}\Big(\frac{\rho}{D}\Big)^{2/5}\frac{\operatorname{mes}\Gamma}{4\pi}. \tag{4.44}$$

Доказательство. Пусть $\widehat{\mathbf{B}}_\Gamma$ — оператор в $L_2(\Gamma)$, заданный выражением $D\rho^{-1}\Delta_\Gamma^2$ на области определения $\operatorname{Dom}\widehat{\mathbf{B}}_\Gamma = H^4(\Gamma)\cap H_0^2(\Gamma)$. Оператор $\widehat{\mathbf{B}}_\Gamma$ самосопряжен и положительно определен. Нетрудно показать, что главный член асимптотики спектра не изменится, если заменить отношение (4.43) на отношение

$$\frac{\int_\Gamma(\widehat{\mathbf{B}}_\Gamma^{-1}\Phi)\overline{\Phi}\,dS}{\int_\Omega\left(|\nabla\Phi|^2+|\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x}}, \quad \Phi\in H^1(\Omega). \tag{4.45}$$

Применяя теорему 4.1 к отношению (4.45), приходим к асимптотической формуле (4.44). □

4.8. Колебания системы капиллярных идеальных жидкостей. Асимптотические формулы спектра, полученные выше для задач о малых колебаниях одной жидкости, частично заполняющей сосуд, допускают обобщение на случай колебаний системы из несмешивающихся жидкостей, полностью или частично заполняющих сосуд. Рассмотрим в качестве примера задачу о колебаниях системы капиллярных идеальных жидкостей, полностью заполняющих сосуд (см. рис. 2).

Условие 4.3. *Ограниченная область* $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ *разделена на* $(k+1)$ *частей* Ω_j, $j=1,\dots,k+1$, *причем выполнено* (3.18). *Поверхности* $\overline{\Gamma_j}$, $j=1,\dots,k$, *определены в* (3.19). *Предполагается, что* Γ_i, $i=1,\dots,k$, — *гладкие двумерные поверхности с гладкими одномерными краями* $\gamma_i=\partial\Gamma_i$, S — *гладкая двумерная поверхность, углы между* Γ_i *и* S *больше нуля и меньше* 2π. *При этом* S, Γ_i, γ_i *не обязательно связны.*

Как и в случае одной жидкости, требование гладкости S может быть ослаблено после перехода к вариационной постановке задачи. Пусть $\mathbf{n}_0(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней нормали к S в точке $\mathbf{x}\in S$; $\mathbf{n}_j(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней (по отношению к Ω_j) нормали к Γ_j в точке $\mathbf{x}\in\Gamma_j$; $\mathbf{l}_j(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней (по отношению к Γ_j) нормали к γ_j в точке $\mathbf{x}\in\gamma_j$, лежащий в плоскости, касательной к Γ_j в точке $\mathbf{x}$.

Задача о нормальных колебаниях системы капиллярных идеальных жидкостей (см. [3, гл. 4, §6]) формулируется для системы функций $\{\Phi_j(\mathbf{x})\}$, $j=1,\dots,k+1$, где Φ_j — функция в Ω_j:

$$\begin{aligned}
&\Delta\Phi_j = 0 \ \text{ в } \Omega_j, \quad \frac{\partial\Phi_j}{\partial n_0}=0 \ \text{ на } S_j, \quad j=1,\dots,k+1,\\
&\frac{\partial\Phi_j}{\partial n_j}=\frac{\partial\Phi_{j+1}}{\partial n_j} \ \text{ на } \Gamma_j, \quad j=1,\dots,k,\\
&P_j\left(-\sigma_j\Delta_{\Gamma_j}+h_j\right)\frac{\partial\Phi_j}{\partial n_j}=\lambda^{-1}\left(\rho_j\Phi_j-\rho_{j+1}\Phi_{j+1}\right) \ \text{ на } \Gamma_j, \quad j=1,\dots,k,\\
&\frac{\partial}{\partial l_j}\frac{\partial\Phi_j}{\partial n_j}+\chi_j\frac{\partial\Phi_j}{\partial n_j}=0 \ \text{ на } \gamma_j, \quad j=1,\dots,k,\\
&\int_{\Gamma_j}\left(\rho_j\Phi_j-\rho_{j+1}\Phi_{j+1}\right)dS=0, \quad j=1,\dots,k; \quad \sum_{j=1}^{k+1}\int_{\Omega_j}\rho_j^{-1}\Phi_j\,d\mathbf{x}=0.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Здесь $\sigma_j>0$ — постоянные, $h_j\in C^\infty(\overline{\Gamma_j})$, $\chi_j\in C^\infty(\gamma_j)$ — вещественнозначные функции. Постоянные $\rho_j>0$ имеют смысл плотностей жидкостей. Оператор P_j — ортопроектор пространства $L_2(\Gamma_j)$ на $L_2(\Gamma_j)\ominus\{1\}$. Через $\mathfrak{B}_j$ обозначим самосопряженный оператор в пространстве $L_2(\Gamma_j)\ominus\{1\}$, заданный выражением $P_j(-\sigma_j\Delta_{\Gamma_j}+h_j)$ на области определения $\operatorname{Dom}\mathfrak{B}_j=\big\{u\in H^2(\Gamma_j) : \frac{\partial u}{\partial l_j}+\chi_j u=0$ на γ_j, $\int_{\Gamma_j}u\,dS=0\big\}$. Предполагается, что операторы $\mathfrak{B}_j$ положительно определены при всех $j=1,\dots,k$ (ср. (4.33)). Тогда на $L_2(\Gamma_j)\ominus\{1\}$ определены компактные операторы $\mathfrak{B}_j^{-1}$.

Задача (4.46) эквивалентна вариационной задаче о спектре отношения форм

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{k}\int_{\Gamma_j}(\mathfrak{B}_j^{-1}\Psi_j)\overline{\Psi_j}\,dS}{\sum\limits_{j=1}^{k+1}\rho_j\int_{\Omega_j}|\nabla\Phi_j|^2\,d\mathbf{x}},\quad \Phi_j\in H^1(\Omega_j),\quad j=1,\dots,k+1;$$
$$\Psi_j:=\rho_j\Phi_j-\rho_{j+1}\Phi_{j+1},\quad \int_{\Gamma_j}\Psi_j\,dS=0,\quad j=1,\dots k;\quad \sum_{j=1}^{k+1}\int_{\Omega_j}\rho_j^{-1}\Phi_j\,d\mathbf{x}=0. \tag{4.47}$$

Вариационную задачу рассмотрим при следующем условии.

Условие 4.4. *Ограниченная область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ разделена гладкими двумерными поверхностями $\Gamma_1,\dots,\Gamma_k$ на $(k+1)$ непересекающихся областей $\Omega_1,\dots,\Omega_{k+1}$. При этом выполнены соотношения* (3.18), (3.19). *Предполагается, что $\Omega_j\in\mathcal{K}$, $j=1,\dots,k+1$, а Γ_j, $j=1,\dots,k$, — гладкие двумерные поверхности с гладкими краями $\gamma_j=\partial\Gamma_j$.*

Предложение 4.4. *При сделанных предположениях для функции распределения спектра отношения* (4.47) *при $\lambda\to+0$ справедлива асимптотика*

$$N(\lambda,(4.47))\sim\lambda^{-2/3}\sum_{j=1}^{k}\Big(\frac{\rho_j+\rho_{j+1}}{\sigma_j}\Big)^{2/3}\frac{\operatorname{mes}\Gamma_j}{4\pi}.$$

Через $\mathbf{B}_{\Gamma_j}$ обозначим самосопряженный оператор в пространстве $L_2(\Gamma_j)$, заданный выражением $B_{\Gamma_j}=-\sigma_j\Delta_{\Gamma_j}+h_j(\mathbf{x})+C_j$ на области определения $\operatorname{Dom}\mathbf{B}_{\Gamma_j}=\big\{u\in H^2(\Gamma_j):\frac{\partial u}{\partial l_j}+\chi_j u=0 \text{ на } \gamma_j\big\}$. Постоянные $C_j>0$ настолько велики, что операторы $\mathbf{B}_{\Gamma_j}$ положительно определены при всех $j=1,\dots,k$. Для $\Phi=\{\Phi_j\}_{1\leqslant j\leqslant k+1}\in\sum\limits_{j=1}^{k+1}\oplus H^1(\Omega_j)$ положим

$$\mathcal{B}[\Phi]:=\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Re}\int_{\Gamma_j}b_j(\mathbf{x})\big(\mathbf{B}_{\Gamma_j}^{-1}\Psi_j\big)\overline{\Psi_j}dS,\quad \Psi_j:=\rho_j\Phi_j-\rho_{j+1}\Phi_{j+1},\quad \mathcal{A}[\Phi]:=\sum_{j=1}^{k+1}\rho_j\int_{\Omega_j}\big(|\nabla\Phi_j|^2+|\Phi_j|^2\big)d\mathbf{x}.$$

Здесь $b_j(\mathbf{x})$ — вещественнозначные функции на Γ_j, причем $b_j\in L_{4/3}(\Gamma_j)$, $j=1,\dots,k$.

По аналогии с рассуждениями из доказательства предложения 4.1 легко убедиться, что величины $\Delta_{2/3}$ (4.47), $\delta_{2/3}$ (4.47) совпадают при $b_j=1$ $(j=1,\dots,k)$ с аналогичными величинами для отношения

$$\pm\frac{\mathcal{B}[\Phi]}{\mathcal{A}[\Phi]},\quad \Phi\in\sum_{j=1}^{k+1}\oplus H^1(\Omega_j). \tag{4.48}$$

Предложение 4.4 теперь следует из следующего утверждения.

Предложение 4.5. *Пусть выполнены условия предложения* 4.4. *Пусть $b_j(\mathbf{x})$ — вещественные функции на Γ_j, причем $b_j\in L_{4/3}(\Gamma_j)$. Тогда для функций распределения спектра отношения* (4.48) *при $\lambda\to+0$ справедлива асимптотика*

$$N_\pm(\lambda,(4.48))\sim\frac{\lambda^{-2/3}}{4\pi}\sum_{j=1}^{k}\Big(\frac{\rho_j+\rho_{j+1}}{\sigma_j}\Big)^{2/3}\int_{\Gamma_j}(b_j)_\pm^{2/3}dS.$$

Замечание 4.1. Можно было бы установить обобщение теоремы 4.1 на случай составных областей, и тогда предложение 4.5 было бы частным случаем. Мы ограничимся обсуждением предложения 4.5, чтобы не вдаваться в детали общей постановки задачи.

Доказательство предложения 4.5 получается на том же пути, что и доказательство теоремы 4.1. Наметим основные этапы, опуская детали (подробности доказательства можно найти в [29]). По аналогии с доказательством леммы 4.1 нетрудно установить оценки спектра: $\Delta_{2/3}^{\pm}$ (4.48) $\leqslant C\sum\limits_{j=1}^{k}\|b_j\|_{L_{4/3}(\Gamma_j)}^{2/3}$. Вместе с леммой 2.5 это позволяет при вычислении асимптотики спектра отношения (4.48) ограничиться случаем, когда $b_j\in C_0^\infty(\Gamma_j)$, $j=1,\dots,k$.

Далее, в случае гладких финитных коэффициентов b_j проводится сравнение отношения (4.48) с аналогичными отношениями форм, заданными в гладких областях. Пусть $\Omega_j^{\pm}$, $j = 1, \ldots, k$ — непересекающиеся области в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей такие, что $\Omega_j^- \subset \Omega_j$, $\Omega_j^+ \subset \Omega_{j+1}$, и $\operatorname{supp} b_j$ лежит строго внутри множества $\partial\Omega_j^- \cap \partial\Omega_j^+$, $j = 1, \ldots, k$. Тогда найдутся открытые множества $\widetilde{\Gamma}_j \subset \partial\Omega_j^- \cap \partial\Omega_j^+$ такие, что $\operatorname{supp} b_j \subset \widetilde{\Gamma}_j$. Можно считать, что $\widetilde{\Gamma}_j$ — двумерные поверхности с гладкой границей.

Пусть $h_j^{\pm}(\mathbf{x})$ — гладкие положительные функции на $\partial\Omega_j^{\pm}$. Рассмотрим операторы $\mathbf{B}_{\partial\Omega_j^{\pm}}$, заданные выражениями $B_{\partial\Omega_j^{\pm}} = -\sigma_j \Delta_{\partial\Omega_j^{\pm}} + h_j^{\pm}$ на областях определения $\operatorname{Dom} \mathbf{B}_{\partial\Omega_j^{\pm}} = H^2(\partial\Omega_j^{\pm})$, $j = 1, \ldots, k$. Обратные операторы $\mathbf{B}_{\partial\Omega_j^{\pm}}^{-1}$ являются ПДО на $\partial\Omega_j^{\pm}$ порядка (-2). Для $\widehat{\Phi} = \{\Phi_j^-, \Phi_j^+\}_{1 \leqslant j \leqslant k} \in \sum\limits_{j=1}^{k} \oplus \Big(H^1(\Omega_j^-) \oplus H^1(\Omega_j^+)\Big) =: \widehat{H}$ положим

$$\widehat{\mathcal{B}}[\widehat{\Phi}] := \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Re} \int_{\widetilde{\Gamma}_j} b_j(\mathbf{x}) \big(\rho_j \mathbf{B}_{\partial\Omega_j^-}^{-1} \Phi_j^- - \rho_{j+1} \mathbf{B}_{\partial\Omega_j^+}^{-1} \Phi_j^+\big) \big(\rho_j \overline{\Phi_j^-} - \rho_{j+1} \overline{\Phi_j^+}\big)\, dS,$$

$$\widehat{\mathcal{A}}[\widehat{\Phi}] := \sum_{j=1}^{k} \left(\rho_j \int_{\Omega_j^-} \big(|\nabla \Phi_j^-|^2 + |\Phi_j^-|^2\big)\, d\mathbf{x} + \rho_{j+1} \int_{\Omega_j^+} \big(|\nabla \Phi_j^+|^2 + |\Phi_j^+|^2\big)\, d\mathbf{x} \right).$$

Рассмотрим отношение форм

$$\pm \frac{\widehat{\mathcal{B}}[\widehat{\Phi}]}{\widehat{\mathcal{A}}[\widehat{\Phi}]}, \quad \widehat{\Phi} \in \widehat{H}. \tag{4.49}$$

По аналогии с доказательствами леммы 4.2 и леммы 4.3 можно проверить, что выполнены неравенства $\delta_{2/3}^{\pm}$ (4.49) $\leqslant \delta_{2/3}^{\pm}$ (4.48) $\leqslant \Delta_{2/3}^{\pm}$ (4.48) $\leqslant \Delta_{2/3}^{\pm}$ (4.49).

Остается установить асимптотику спектра для отношения (4.49). Ясно, что задача распадается в ортогональную сумму k независимых задач о спектре отношений

$$\pm \frac{\widehat{\mathcal{B}}_j[\widehat{\Phi}_j]}{\widehat{\mathcal{A}}_j[\widehat{\Phi}_j]}, \quad \widehat{\Phi}_j = \{\Phi_j^-, \Phi_j^+\} \in \widehat{H}_j = H^1(\Omega_j^-) \oplus H^1(\Omega_j^+), \tag{4.50}$$

где

$$\widehat{\mathcal{B}}_j[\widehat{\Phi}_j] := \operatorname{Re} \int_{\widetilde{\Gamma}_j} b_j(\mathbf{x}) \big(\rho_j \mathbf{B}_{\partial\Omega_j^-}^{-1} \Phi_j^- - \rho_{j+1} \mathbf{B}_{\partial\Omega_j^+}^{-1} \Phi_j^+\big) \big(\rho_j \overline{\Phi_j^-} - \rho_{j+1} \overline{\Phi_j^+}\big)\, dS,$$

$$\widehat{\mathcal{A}}_j[\widehat{\Phi}_j] := \rho_j \int_{\Omega_j^-} \big(|\nabla \Phi_j^-|^2 + |\Phi_j^-|^2\big)\, d\mathbf{x} + \rho_{j+1} \int_{\Omega_j^+} \big(|\nabla \Phi_j^+|^2 + |\Phi_j^+|^2\big)\, d\mathbf{x}.$$

Ясно, что ненулевой спектр отношения (4.50) не изменится, если рассматривать это отношение на подпространстве $\widehat{H}_j(L_0) := H^1(\Omega_j^-, L_0) \oplus H^1(\Omega_j^+, L_0)$, где $H^1(\Omega_j^{\pm}, L_0) := \{u \in H^1(\Omega_j^{\pm}) : L_0 u = -\Delta u + u = 0\}$. Через $G_j^{\pm} : H^{1/2}(\partial\Omega_j^{\pm}) \to H^1(\Omega_j^{\pm}, L_0)$ обозначим оператор Пуассона, решающий соответствующую задачу Дирихле в $\Omega_j^{\pm}$ (ср. с определением оператора G в пункте 4.4). Полагая $\Phi_j^{\pm} = G_j^{\pm} \varphi_j^{\pm}$ и пользуясь свойствами алгебры Буте де Монвеля, получаем представление $\widehat{\mathcal{A}}_j[\widehat{\Phi}_j] = \widehat{\mathcal{A}}_j[G_j^- \varphi_j^- \oplus G_j^+ \varphi_j^+] = \rho_j (\mathcal{P}_j^- \varphi_j^-, \varphi_j^-)_{L_2(\partial\Omega_j^-)} + \rho_{j+1} (\mathcal{P}_j^+ \varphi_j^+, \varphi_j^+)_{L_2(\partial\Omega_j^+)}$, $\varphi_j^{\pm} \in H^{1/2}(\partial\Omega_j^{\pm})$. Здесь $\mathcal{P}_j^{\pm}$ — положительно определенные ПДО на $\partial\Omega_j^{\pm}$ первого порядка.

После замены $\psi_j^- = \rho_j^{1/2} (\mathcal{P}_j^-)^{1/2} \varphi_j^-$, $\psi_j^+ = \rho_{j+1}^{1/2} (\mathcal{P}_j^+)^{1/2} \varphi_j^+$ получаем, что задача о спектре отношения (4.50) эквивалентна задаче о спектре отношения

$$\pm \frac{\mathcal{T}_j[\psi_j]}{\|\psi_j^-\|_{L_2(\partial\Omega_j^-)}^2 + \|\psi_j^+\|_{L_2(\partial\Omega_j^+)}^2} \quad \psi_j = \{\psi_j^-, \psi_j^+\} \in L_2(\partial\Omega_j^-) \oplus L_2(\partial\Omega_j^+), \tag{4.51}$$

где

$$\mathcal{T}_j[\psi_j] := \operatorname{Re} \int_{\widetilde{\Gamma}_j} b_j \left(\rho_j^{1/2} \mathbf{B}^{-1}_{\partial\Omega_j^-} (\mathcal{P}_j^-)^{-1/2} \psi_j^- - \rho_{j+1}^{1/2} \mathbf{B}^{-1}_{\partial\Omega_j^+} (\mathcal{P}_j^+)^{-1/2} \psi_j^+ \right) \times \\ \times \left(\rho_j^{1/2} \overline{(\mathcal{P}_j^-)^{-1/2} \psi_j^-} - \rho_{j+1}^{1/2} \overline{(\mathcal{P}_j^+)^{-1/2} \psi_j^+} \right) dS.$$

Задача о спектре отношения (4.51) сводится[1] к задаче о спектре матричного ПДО порядка $(-3/2)$ на $\partial\Omega_j^- \cap \partial\Omega_j^+$. Поэтому асимптотика спектра отношения (4.51) вытекает из результатов работ [8, 10]. Это завершает доказательство предложения 4.5.

Замечание 4.2. Тем же способом можно получить результат об асимптотике спектра малых колебаний системы капиллярных идеальных жидкостей в случае, когда сосуд заполнен частично, а также в случае, когда ρ_j — положительные гладкие функции в Ω_j (а не постоянные).

5. Асимптотика спектра малых колебаний тяжелой вязкой жидкости

В этом и следующем разделах мы изучаем задачи, связанные с колебаниями вязкой жидкости; по поводу постановок задач см. [3, 18–20].

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — область, которую занимает жидкость, находящаяся в сосуде в положении равновесия. Задачи ставятся для вектор-функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, имеющей смысл поля скоростей частиц жидкости, и скалярной функции $p(\mathbf{x})$, имеющей смысл давления. Постановки даются как в виде краевых задач на собственные значения в области Ω, так и в виде вариационных задач о спектре отношения квадратичных форм. Функции $\mathbf{u}$ и p удовлетворяют однородной эллиптической в обобщенном смысле системе — системе Стокса; спектральный параметр входит в граничное условие на свободной поверхности Γ.

5.1. Постановка задачи и формулировка результата для тяжелой вязкой жидкости.

Пусть Ω удовлетворяет условию 4.1. (После перехода к вариационной постановке задачи условия гладкости на S и γ будут ослаблены.) Пусть задана постоянная $\mu > 0$, имеющая смысл коэффициента вязкости. Рассмотрим полуторалинейную форму

$$E_\Omega[\mathbf{u}, \mathbf{v}] := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Big) \Big(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} \Big) \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{C}^3).$$

Отметим, что $\rho\mu E_\Omega[\mathbf{u}]$ имеет смысл скорости диссипации энергии во всем объеме жидкости.

Пусть $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке $\mathbf{x}$. Через $u_n(\mathbf{x})$ обозначим нормальную компоненту вектор-функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ на границе: $u_n(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle$, $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. Через $\tau(\mathbf{x}) = \tau(\mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}))$ обозначим тензор напряжений в жидкости: $\tau_{ik}(\mathbf{x}) = \tau_{ik}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x})) := -p(\mathbf{x})\delta_{ik} + \mu\Big(\frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_i} \Big)$, $i, k = 1, 2, 3$. Далее, на Γ определим векторное поле $\boldsymbol{\tau}_n(\mathbf{x})$ с координатами $\tau_{in}(\mathbf{x}) = \sum\limits_{k=1}^{3} \tau_{ik}(\mathbf{x}) n_k(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, 3$. Через $\boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{x})$ обозначим касательное к Γ векторное поле, которое является касательной составляющей поля $\boldsymbol{\tau}_n(\mathbf{x})$. Пусть $\tau_{nn}(\mathbf{x}) = \langle \tau(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle$ — нормальная компонента поля $\boldsymbol{\tau}_n(\mathbf{x})$.

Для произвольных достаточно гладких функций $\mathbf{u}, p$ и $\mathbf{v}$ справедлива формула Грина

$$\mu E_\Omega[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \int_\Omega \langle -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p, \mathbf{v} \rangle \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \left(-\mu \langle \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + p \operatorname{div} \overline{\mathbf{v}} \right) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \langle \boldsymbol{\tau}_n(\mathbf{u}, p), \mathbf{v} \rangle \, dS(\mathbf{x}). \quad (5.1)$$

Ниже используются обозначения

$$J^1(\Omega) := \{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega; \mathbb{C}^3) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \}, \qquad J^1_S(\Omega) := \{ \mathbf{u} \in J^1(\Omega) : \mathbf{u}|_S = 0 \}. \quad (5.2)$$

[1]Затруднений, связанных с тем, что $\partial\Omega_j^- \cap \partial\Omega_j^+$ — многообразие с краем, не возникает, поскольку мы имеем дело с ПДО отрицательного порядка.

Следующая краевая задача на собственные значения связана с малыми колебаниями тяжелой вязкой жидкости (см. [20]):

$$\begin{aligned}&-\mu\Delta\mathbf{u}+\nabla p=0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u}=0 \ \text{ в } \Omega,\\ &\mathbf{u}=0 \ \text{ на } S, \quad \boldsymbol{\tau}_{tn}=0 \ \text{ на } \Gamma,\\ &a(\mathbf{x})u_n(\mathbf{x})=\lambda\tau_{nn}(\mathbf{x}) \ \text{ на } \Gamma.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Вещественнозначная функция $a\in C^\infty(\overline{\Gamma})$ связана с нормальной производной потенциала массовых сил.

Для перехода к вариационной постановке нужно домножить последнее уравнение в (5.3) на $\overline{u_n}$ и проинтегрировать по Γ. По формуле Грина (5.1) с учетом условий на $\mathbf{u}$ и p из (5.3) имеем: $\int_\Gamma \tau_{nn}\overline{u_n}\,dS=\mu E_\Omega[\mathbf{u}]$. Задача (5.3) эквивалентна вариационной задаче о спектре отношения квадратичных форм

$$\frac{\int_\Gamma a(\mathbf{x})|u_n(\mathbf{x})|^2\,dS(\mathbf{x})}{\mu E_\Omega[\mathbf{u}]}, \quad \mathbf{u}\in J^1_S(\Omega). \tag{5.4}$$

Первое уравнение в (5.3) и условие равенства нулю касательных напряжений на Γ являются естественными условиями в вариационной задаче о спектре отношения (5.4).

Мы будем изучать спектр отношения форм (5.4) при следующем условии на область Ω и функцию $a(\mathbf{x})$.

Условие 5.1. *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ — ограниченная область, $\Omega\in\mathcal{K}$. Предположим, что Γ — гладкая двумерная поверхность с липшицевой границей $\gamma=\partial\Gamma$, причем $\overline{\Gamma}\subset\partial\Omega$. Пусть $a\in L_2(\Gamma)$ — вещественнозначная функция.*

Отметим, что в отличие от случая капиллярной идеальной жидкости (см. раздел 4) не требуется гладкости γ. (В разделе 3 мы также не требовали гладкости γ.)

Из общих теорем об условиях коэрцитивности дифференциальных операторов (см., например, [5, §11]) следует, что справедливо неравенство

$$E_\Omega[\mathbf{u}]\geqslant c\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\Omega)}-C\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\Omega;\mathbb{C}^3), \quad c>0, \tag{5.5}$$

причем требования на область, обеспечивающие справедливость (5.5), достаточно слабые. Если же выполнено условие прилипания $\mathbf{u}|_S=0$, то справедливо неравенство Корна (см. [24])

$$E_\Omega[\mathbf{u}]\geqslant c\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\Omega;\mathbb{C}^3), \quad \mathbf{u}|_S=0, \quad c>0. \tag{5.6}$$

Сформулируем результат об асимптотике спектра отношения (5.4).

Теорема 5.1. *Пусть выполнено условие* 5.1. *Тогда для функций распределения собственных значений отношения* (5.4) *справедлива асимптотика*

$$N_\pm(\lambda,(5.4))\sim\lambda^{-2}\frac{1}{16\pi\mu^2}\int\limits_\Gamma a^2_\pm(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x}), \quad \lambda\to+0.$$

5.2. Оценки спектра.

Лемма 5.1. *Пусть выполнено условие* 5.1. *Тогда справедлива оценка*

$$\Delta_2^\pm\,(5.4)\leqslant C\|a\|^2_{L_2(\Gamma)}, \tag{5.7}$$

где постоянная C не зависит от функции a.

Доказательство. Из (5.6) и теоремы о следах следует, что $E_\Omega[\mathbf{u}]\geqslant\check{C}\|\mathbf{u}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}\geqslant\check{C}\|u_n\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}$, $\mathbf{u}\in H^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$, $\mathbf{u}|_S=0$. В силу леммы 2.2 получаем, что функции $N_\pm(\lambda,(5.4))$ не превосходят функций распределения спектра отношения

$$\pm\frac{\int_\Gamma a(\mathbf{x})|v(\mathbf{x})|^2\,dS(\mathbf{x})}{\check{C}\mu\|v\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}}, \quad v\in H^{1/2}(\Gamma). \tag{5.8}$$

Для $\Delta_2^\pm$ (5.8) нужная оценка следует из леммы 2.8. $\square$

Из леммы 2.5 и неравенства (5.7) следует, что функционалы $\Delta_2^{\pm}$ (5.4), $\delta_2^{\pm}$ (5.4) непрерывно зависят от коэффициента a в метрике $L_2(\Gamma)$. Поэтому вычисление главного члена асимптотики спектра отношения (5.4) достаточно провести в случае $a \in C_0^\infty(\Gamma)$.

5.3. Сравнение с задачей в гладкой области. *Ниже предполагается, что* $a \in C_0^\infty(\Gamma)$. Пусть $\widetilde{\Omega}$ — ограниченная область с гладкой границей такая, что $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ и $\operatorname{supp} a$ лежит строго внутри множества $\partial\widetilde{\Omega} \cap \Gamma$. Тогда найдется открытое подмножество $\widetilde{\Gamma}$ границы $\partial\widetilde{\Omega}$, лежащее строго внутри $\partial\widetilde{\Omega} \cap \Gamma$, причем $\operatorname{supp} a \subset \widetilde{\Gamma}$. Можно считать, что граница множества $\widetilde{\Gamma}$ достаточно гладкая. Пусть $\widetilde{a} \in C^\infty(\partial\widetilde{\Omega})$ — функция, равная $a(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in \partial\widetilde{\Omega} \cap \Gamma$ и равная нулю при $\mathbf{x} \in \partial\widetilde{\Omega} \setminus \Gamma$.

Чтобы оценить $\Delta_2^{\pm}$ (5.4) сверху, рассмотрим отношение

$$\pm\frac{\int_{\partial\widetilde{\Omega}} \widetilde{a}(\mathbf{x})|u_\nu(\mathbf{x})|^2\,dS(\mathbf{x})}{\mu E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u}] + C\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\widetilde{\Omega})}}, \quad \mathbf{u} \in J^1(\widetilde{\Omega}). \tag{5.9}$$

Здесь $u_\nu(\mathbf{x})$ — нормальная составляющая функции $\mathbf{u}$ на $\partial\widetilde{\Omega}$, а постоянная C настолько велика, что форма в знаменателе определяет эквивалентную метрику в $H^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$; см. (5.5). Пусть $\mathcal{S}$ — оператор сужения функций $\mathbf{u} \in H^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$ на $\widetilde{\Omega}$. Тогда $\mathcal{S}$ переводит $J^1_S(\Omega)$ в $J^1(\widetilde{\Omega})$. Для всех $\mathbf{u} \in J^1_S(\Omega)$, для которых $\pm\int_\Gamma a(\mathbf{x})|u_n|^2\,dS > 0$, справедливо неравенство

$$\pm\frac{\int_\Gamma a(\mathbf{x})|u_n|^2\,dS}{\mu E_\Omega[\mathbf{u}] + C\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}} \leqslant \pm\frac{\int_{\partial\widetilde{\Omega}} \widetilde{a}(\mathbf{x})|(\mathcal{S}\mathbf{u})_\nu|^2\,dS}{\mu E_{\widetilde{\Omega}}[\mathcal{S}\mathbf{u}] + C\|\mathcal{S}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\widetilde{\Omega})}}.$$

Пользуясь леммами 2.3 и 2.2, получаем, что

$$\Delta_2^{\pm}\ (5.4) \leqslant \Delta_2^{\pm}\ (5.9). \tag{5.10}$$

Чтобы оценить $N_\pm(\lambda,(5.4))$ снизу, рассмотрим отношение

$$\pm\frac{\int_{\partial\widetilde{\Omega}} \widetilde{a}(\mathbf{x})|u_\nu(\mathbf{x})|^2\,dS(\mathbf{x})}{\mu E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u}]}, \quad \mathbf{u} \in J^1_{\widetilde{S}}(\widetilde{\Omega}). \tag{5.11}$$

Здесь $\widetilde{S} := \partial\widetilde{\Omega} \setminus \widetilde{\Gamma}$ и $J^1_{\widetilde{S}}(\widetilde{\Omega}) := \{\mathbf{u} \in J^1(\widetilde{\Omega}) :\ \mathbf{u}|_{\widetilde{S}} = 0\}$. Отметим, что справедливо неравенство Корна $E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u}] \geqslant c\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\widetilde{\Omega})}$, $\mathbf{u} \in J^1_{\widetilde{S}}(\widetilde{\Omega})$, $c > 0$.

Пусть Π — оператор продолжения функций, заданных в $\widetilde{\Omega}$, нулем на $\Omega \setminus \widetilde{\Omega}$. Проверим, что Π является линейным непрерывным оператором из $J^1_{\widetilde{S}}(\widetilde{\Omega})$ в $J^1_S(\Omega)$. Фиксируем функцию $\zeta \in C^\infty(\overline{\widetilde{\Omega}})$ такую, что $\zeta(\mathbf{x}) = 1$ при $\mathbf{x} \in \widetilde{\Gamma}$ и $\zeta(\mathbf{x}) = 0$ в некоторой окрестности множества $\partial\widetilde{\Omega} \setminus \Gamma$. Пусть $\mathbf{u} \in J^1_{\widetilde{S}}(\widetilde{\Omega})$. Очевидно, $\Pi(\zeta\mathbf{u}) \in H^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$. Далее, $(1-\zeta)\mathbf{u} \in H^1(\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3)$ и $(1-\zeta)\mathbf{u} = 0$ на $\partial\widetilde{\Omega}$. Тогда справедливо включение $\Pi\left((1-\zeta)\mathbf{u}\right) \in H^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$; см. [22] или [27]. Таким образом, $\Pi\mathbf{u} = \Pi\left(\zeta\mathbf{u}\right) + \Pi\left((1-\zeta)\mathbf{u}\right) \in H^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$. Очевидно, $\Pi\mathbf{u} = 0$ на S. Условие $\operatorname{div}\Pi\mathbf{u} = 0$ в Ω выполнено, поскольку $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ в $\widetilde{\Omega}$, $\Pi\mathbf{u} = 0$ в $\Omega \setminus \widetilde{\Omega}$ и $\Pi\mathbf{u} \in H^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$. Таким образом, $\Pi\mathbf{u} \in J^1_S(\Omega)$.

Справедливо равенство $\pm\dfrac{\int_{\partial\widetilde{\Omega}} \widetilde{a}(\mathbf{x})|u_\nu(\mathbf{x})|^2\,dS(\mathbf{x})}{\mu E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u}]} = \pm\dfrac{\int_\Gamma a(\mathbf{x})|(\Pi\mathbf{u})_n(\mathbf{x})|^2\,dS(\mathbf{x})}{\mu E_\Omega[\Pi\mathbf{u}]}$, $\mathbf{u} \in J^1_{\widetilde{S}}(\widetilde{\Omega})$. Применяя лемму 2.2, получаем, что

$$N_\pm(\lambda,(5.11)) \leqslant N_\pm(\lambda,(5.4)), \quad \lambda > 0. \tag{5.12}$$

5.4. Асимптотика спектра задачи для тяжелой вязкой жидкости в гладком случае. Неравенства (5.10), (5.12) показывают, что теорема 5.1 будет доказана, коль скоро будет установлена следующая лемма.

Лемма 5.2. *Справедливы асимптотические формулы при* $\lambda \to +0$:

$$N_\pm(\lambda,(5.9)) \sim N_\pm(\lambda,(5.11)) \sim \lambda^{-2}\frac{1}{16\pi\mu^2}\int_{\partial\widetilde{\Omega}} \widetilde{a}^2_\pm(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x}). \tag{5.13}$$

Доказательство. В силу неравенства (5.5) для области $\widetilde{\Omega}$ пространство $Z_0 := \left\{\mathbf{u} \in H^1(\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3) :\right.$ $\left.\operatorname{div}\mathbf{u} = 0,\ E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u}] = 0\right\}$ конечномерно. Через Z обозначим множество следов функций из Z_0 на $\partial\widetilde{\Omega}$. Тогда Z — конечномерное подпространство в $L_2(\partial\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3)$. Положим $W(\widetilde{\Omega}) := \left\{\mathbf{u} \in J^1(\widetilde{\Omega}) :\right.$

$(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}=0,\ \forall\boldsymbol{\varphi}\in Z\big\}$. Заметим, что если $\mathbf{u}\in H^1_0(\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3)$ и $E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u}]=0$, то $\mathbf{u}=0$. Следовательно, если $\mathbf{u}\in W(\widetilde{\Omega})$ и $E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u}]=0$, то $\mathbf{u}=0$. Стандартным образом отсюда следует, что $E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u}]\asymp\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\widetilde{\Omega})}$ при $\mathbf{u}\in W(\widetilde{\Omega})$ (знак $\asymp$ понимается в смысле двусторонних оценок с некоторыми константами).

Рассмотрим отношение форм

$$\pm\frac{\int_{\partial\widetilde{\Omega}}\widetilde{a}(\mathbf{x})|u_\nu(\mathbf{x})|^2\,dS(\mathbf{x})}{\mu E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u}]},\quad \mathbf{u}\in W(\widetilde{\Omega}). \tag{5.14}$$

Применяя леммы 2.3 и 2.6, получаем

$$\Delta_2^\pm\ (5.9)=\Delta_2^\pm\ (5.14),\quad \delta_2^\pm\ (5.9)=\delta_2^\pm\ (5.14). \tag{5.15}$$

Положим $W_0(\widetilde{\Omega}):=\big\{\mathbf{u}\in H^1_0(\widetilde{\Omega}):\operatorname{div}\mathbf{u}=0\big\}$. Пусть $W(\widetilde{\Omega},\mathcal{L})$ — подпространство в $W(\widetilde{\Omega})$, образованное решениями системы Стокса, т. е.

$$W(\widetilde{\Omega},\mathcal{L}):=\big\{\mathbf{u}\in W(\widetilde{\Omega}):\ \text{существует } p\in L_2(\widetilde{\Omega}),\ \text{такое что } \mathcal{L}\{\mathbf{u},p\}=0 \text{ в } \widetilde{\Omega}\big\}.$$

Здесь $\mathcal{L}\{\mathbf{u},p\}:=\{-\mu\Delta\mathbf{u}+\nabla p,\operatorname{div}\mathbf{u}\}$. Равенство $\mathcal{L}\{\mathbf{u},p\}=0$ понимается в смысле обобщенных функций.

Справедливо ортогональное разложение $W(\widetilde{\Omega})=W_0(\widetilde{\Omega})\oplus^E W(\widetilde{\Omega},\mathcal{L})$, где ортогональность понимается в смысле скалярного произведения $E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u},\mathbf{v}]$. Поскольку отношение (5.14) аннулируется на $W_0(\widetilde{\Omega})$, то ненулевой спектр отношения (5.14) не изменится, если рассматривать это отношение на $W(\widetilde{\Omega},\mathcal{L})$.

Аналогично, ненулевой спектр отношения (5.11) не изменится, если рассматривать это отношение на подпространстве $H^1_{\widetilde{S}}(\widetilde{\Omega},\mathcal{L}):=\big\{\mathbf{u}\in H^1(\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3):\mathcal{L}\{\mathbf{u},p\}=0$ для некоторого $p\in L_2(\widetilde{\Omega})$, $\mathbf{u}=0$ на $\widetilde{S}\big\}$.

Пусть $\mathcal{G}$ — оператор, сопоставляющий вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}\in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3)$, для которой выполнено $\int_{\partial\widetilde{\Omega}}\varphi_\nu\,dS=0$, решение первой краевой задачи для системы Стокса (см. [33]): $\{\mathbf{u},p\}=\mathcal{G}\boldsymbol{\varphi}$ означает, что пара функций $\mathbf{u}\in H^1(\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3)$, $p\in L_2(\widetilde{\Omega})$ является обобщенным решением краевой задачи $\mathcal{L}\{\mathbf{u},p\}=0$ в $\widetilde{\Omega}$, $\mathbf{u}=\boldsymbol{\varphi}$ на $\partial\widetilde{\Omega}$.

Оператор $\mathcal{G}$ устанавливает гомеоморфизм пространства $\big\{\boldsymbol{\varphi}\in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3):\int_{\partial\widetilde{\Omega}}\varphi_\nu\,dS=0\big\}$ и пространства $\big\{\{\mathbf{u},p\}\in H^1(\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3)\times\big(L_2(\widetilde{\Omega})/\{1\}\big):\mathcal{L}\{\mathbf{u},p\}=0\big\}$. Здесь $L_2(\widetilde{\Omega})/\{1\}$ — фактор-пространство $L_2(\widetilde{\Omega})$ по одномерному подпространству констант. Как отмечается в [39], $\mathcal{G}$ является оператором Пуассона из алгебры Буте де Монвеля. Из свойств этой алгебры вытекает справедливость представления

$$E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u}]=(\mathcal{E}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})},\quad \{\mathbf{u},p\}=\mathcal{G}\boldsymbol{\varphi}, \tag{5.16}$$

где $\mathcal{E}$ — матричный ПДО порядка 1. Представление (5.16) с точностью до слагаемых младшего порядка может быть получено также из рассмотрений, обобщающих рассмотрения [11] на случай систем, эллиптических по Дуглису—Ниренбергу. Аналогично (5.16) справедливо представление

$$\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\widetilde{\Omega})}=(\mathcal{Q}_0\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})},\quad \{\mathbf{u},p\}=\mathcal{G}\boldsymbol{\varphi}, \tag{5.17}$$

где $\mathcal{Q}_0$ — матричный ПДО порядка (-1). Из (5.16), (5.17) и неравенства (5.5) для $\widetilde{\Omega}$ следует, что

$$((\mathcal{E}+C\mathcal{Q}_0)\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}\geqslant c\|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega})},\quad \boldsymbol{\varphi}\in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3),\quad \int_{\partial\widetilde{\Omega}}\varphi_\nu\,dS=0,\quad c>0. \tag{5.18}$$

Неравенство (5.18) показывает, что, изменяя при необходимости младшие члены в ПДО $\mathcal{E}$, можно считать выполненным неравенство

$$(\mathcal{E}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}\geqslant c\|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega})},\quad \boldsymbol{\varphi}\in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3),\quad c>0. \tag{5.19}$$

Считая (5.19) выполненным, рассмотрим отношения форм

$$\pm\frac{\int_{\partial\widetilde{\Omega}}\widetilde{a}(\mathbf{x})|\varphi_\nu(\mathbf{x})|^2\,dS(\mathbf{x})}{\mu(\mathcal{E}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}},\quad \boldsymbol{\varphi}\in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3), \tag{5.20}$$

$$\pm \frac{\int_{\partial\widetilde{\Omega}} \widetilde{a}(\mathbf{x})|\varphi_\nu(\mathbf{x})|^2\, dS(\mathbf{x})}{\mu(\mathcal{E}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}}, \quad \boldsymbol{\varphi} \in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3), \quad \boldsymbol{\varphi}|_{\widetilde{S}} = 0. \tag{5.21}$$

Суммируя все сказанное и применяя леммы 2.3 и 2.6, получаем, что

$$\Delta_2^\pm\ (5.14) = \Delta_2^\pm\ (5.20), \quad \delta_2^\pm\ (5.14) = \delta_2^\pm\ (5.20), \tag{5.22}$$

$$\Delta_2^\pm\ (5.11) = \Delta_2^\pm\ (5.21), \quad \delta_2^\pm\ (5.11) = \delta_2^\pm\ (5.21). \tag{5.23}$$

Отношения (5.20) и (5.21) суть отношения ПДФ вида (2.17) и (2.19) соответственно. Асимптотические формулы спектра для них следуют из леммы 2.10 и леммы 2.11. Необходимо вычислить старшие символы соответствующих ПДО. Обозначим через $\mathcal{Q}$ матричный ПДО на $\partial\widetilde{\Omega}$, отвечающий форме в числителе (5.20) и (5.21): $\int_{\partial\widetilde{\Omega}} \widetilde{a}(\mathbf{x})|\varphi_\nu(\mathbf{x})|^2\, dS(\mathbf{x}) = (\mathcal{Q}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}$. Локально, в окрестности $\mathcal{U}$ некоторой точки $\mathbf{x}_0 \in \partial\widetilde{\Omega}$ выберем криволинейную ортогональную систему координат так, чтобы координатные линии для третьей координаты на $\partial\widetilde{\Omega}$ были направлены по внутренней нормали $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$, а соответствующий коэффициент Ламе на $\partial\widetilde{\Omega}$ был равен 1. При таком выборе системы координат символ ПДО $\mathcal{Q}$ есть

$$q^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{a}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{U}, \quad \boldsymbol{\xi} \perp \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}). \tag{5.24}$$

Пусть $e^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ — старший символ ПДО $\mathcal{E}$, вычисленный в тех же локальных координатах. Рассмотрим алгебраическую задачу

$$q^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\mathbf{z} = \lambda\mu e^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^3. \tag{5.25}$$

Из леммы 2.10 следует, что при $\lambda \to +0$ справедлива асимптотика

$$N_\pm(\lambda,(5.20)) \sim \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\partial\widetilde{\Omega}} dS(\mathbf{x}) \int_{\boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})} d\boldsymbol{\xi}\, n_\pm(\lambda,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};\ (5.25)). \tag{5.26}$$

Из леммы 2.11 вытекает асимптотика при $\lambda \to +0$:

$$N_\pm(\lambda,(5.21)) \sim \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\widetilde{\Gamma}} dS(\mathbf{x}) \int_{\boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})} d\boldsymbol{\xi}\, n_\pm(\lambda,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};\ (5.25)). \tag{5.27}$$

Вычислим символ $e^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ в соответствии с правилами из [39]. Запишем выражение для старшего символа $L^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\eta}) = \{L^\circ_{sj}(\mathbf{x},\boldsymbol{\eta})\}_{1\leqslant s,j\leqslant 4}$ оператора $\mathcal{L}$: $L^\circ_{sj}(\mathbf{x},\boldsymbol{\eta}) = \mu|\boldsymbol{\eta}|^2\delta_{sj}$, $s,j = 1,2,3$; $L^\circ_{s4}(\mathbf{x},\boldsymbol{\eta}) = \overline{L^\circ_{4s}(\mathbf{x},\boldsymbol{\eta})} = i\eta_s$, $s = 1,2,3$; $L^\circ_{44}(\mathbf{x},\boldsymbol{\eta}) = 0$.

Далее, для каждой точки $(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$, $\mathbf{x} \in \partial\widetilde{\Omega}$, $\boldsymbol{\xi} \perp \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений на полуоси

$$\sum_{j=1}^{4} L^\circ_{sj}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})D_t)f_j(t) = 0, \quad s = 1,2,3,4; \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{5.28}$$

При нашем выборе системы координат имеем $\xi_3 = 0$, $\nu_1 = \nu_2 = 0$, $\nu_3 = 1$, и система (5.28) принимает вид

$$\begin{aligned} &\mu\Big(|\boldsymbol{\xi}|^2 - \frac{d^2}{dt^2}\Big)f_j(t) + i\xi_j f_4(t) = 0, \quad j = 1,2, \\ &\mu\Big(|\boldsymbol{\xi}|^2 - \frac{d^2}{dt^2}\Big)f_3(t) + \frac{d}{dt}f_4(t) = 0, \quad i\xi_1 f_1(t) + i\xi_2 f_2(t) + \frac{d}{dt}f_3(t) = 0. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Через $F(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ обозначим линейное пространство решений системы (5.29), исчезающих при $t \to +\infty$. Характеристический определитель системы (5.29) равен $D(k) = \mu^2(|\boldsymbol{\xi}|^2 - k^2)^3$. Убывающему при $t \to +\infty$ решению соответствует трехкратный корень $k = -|\boldsymbol{\xi}|$. Следовательно, пространство $F(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ трехмерно. Рассмотрим базис в $F(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$, состоящий из вектор-функций $Y^{(j)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},t) = \{Y_i^{(j)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},t)\}_{1\leqslant i\leqslant 4}$, $j = 1,2,3$, которые являются решениями системы (5.29), исчезающими при $t \to +\infty$, и удовлетворяют начальным условиям $Y_i^{(j)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},0) = \delta_{ij}$, $i,j = 1,2,3$.

Вычисления показывают, что $Y^{(j)}$ не зависят от $\mathbf{x}$ и имеют вид

$$Y^{(1)}(\boldsymbol{\xi},t)=\begin{pmatrix}-\frac{\xi_1^2 t}{|\boldsymbol{\xi}|}+1\\ -\frac{\xi_1\xi_2 t}{|\boldsymbol{\xi}|}\\ -i\xi_1 t\\ -2\mu i\xi_1\end{pmatrix}e^{-|\boldsymbol{\xi}|t},\quad Y^{(2)}(\boldsymbol{\xi},t)=\begin{pmatrix}-\frac{\xi_1\xi_2 t}{|\boldsymbol{\xi}|}\\ -\frac{\xi_2^2 t}{|\boldsymbol{\xi}|}+1\\ -i\xi_2 t\\ -2\mu i\xi_2\end{pmatrix}e^{-|\boldsymbol{\xi}|t},\quad Y^{(3)}(\boldsymbol{\xi},t)=\begin{pmatrix}-i\xi_1 t\\ -i\xi_2 t\\ |\boldsymbol{\xi}|t+1\\ 2\mu|\boldsymbol{\xi}|\end{pmatrix}e^{-|\boldsymbol{\xi}|t}. \tag{5.30}$$

Форме $E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u},\mathbf{v}]$ соответствует конечномерная полуторалинейная форма на $F(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$:

$$\mathbf{e}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}[f,g]:=\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{3}\int_0^\infty\big((\xi_j+\nu_j(\mathbf{x})D_t)f_k(t)+(\xi_k+\nu_k(\mathbf{x})D_t)f_j(t)\big)\times$$
$$\times\big((\xi_j-\nu_j(\mathbf{x})D_t)\overline{g_k(t)}+(\xi_k-\nu_k(\mathbf{x})D_t)\overline{g_j(t)}\big)\,dt,\quad f,g\in F(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}).$$

Старший символ $e^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=\Big\{e^\circ_{jl}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\Big\}_{1\leqslant j,l\leqslant 3}$ ПДО $\mathcal{E}$ может быть вычислен с помощью формулы $e^\circ_{jl}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=\mathbf{e}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}[Y^{(j)}(\boldsymbol{\xi},\cdot),Y^{(l)}(\boldsymbol{\xi},\cdot)]$, $j,l=1,2,3$. Вычисления показывают, что

$$e^\circ_{33}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=2|\boldsymbol{\xi}|,\quad e^\circ_{j3}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=e^\circ_{3j}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=0,\quad j=1,2. \tag{5.31}$$

(Остальные элементы e°_{jl} вычислять нет необходимости.)

Из (5.24) и (5.31) следует, что алгебраическая задача (5.25) имеет собственные значения $0,0$ и $\widetilde{a}(\mathbf{x})/2\mu|\boldsymbol{\xi}|$. Поэтому $n_\pm(\lambda,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};\ (5.25))=\begin{cases}1, & \lambda<\widetilde{a}_\pm(\mathbf{x})/2\mu|\boldsymbol{\xi}|\\ 0, & \lambda\geqslant\widetilde{a}_\pm(\mathbf{x})/2\mu|\boldsymbol{\xi}|\end{cases}$. Тогда по формулам (5.26) и (5.27) при $\lambda\to+0$ справедливы асимптотические формулы

$$N_\pm(\lambda,(5.20))\sim N_\pm(\lambda,(5.21))\sim\lambda^{-2}\frac{1}{16\pi\mu^2}\int_{\partial\widetilde{\Omega}}\widetilde{a}^2_\pm(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x}).$$

Отсюда с учетом (5.15), (5.22) и (5.23) вытекает искомая асимптотика (5.13). □

Лемма 5.2, а с ней и теорема 5.1, доказаны.

5.5. Колебания системы тяжелых вязких жидкостей. Теорема 5.1 допускает обобщение на случай колебаний системы тяжелых вязких жидкостей, частично или полностью заполняющих сосуд. Для определенности рассмотрим случай полного заполнения (см. рис. 2). Мы здесь ограничимся постановкой задачи и формулировкой результата; доказательство можно найти в [29].

Пусть область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ удовлетворяет предположениям пункта 3.2. Для системы вектор-функций $\{\mathbf{u}_j(\mathbf{x})\}$, $j=1,\dots,k+1$, и системы скалярных функций $\{p_j(\mathbf{x})\}$, $j=1,\dots,k+1$, рассматривается краевая задача

$$\begin{aligned}&-\mu_j\Delta\mathbf{u}_j+\nabla p_j=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{u}_j=0\ \text{ в } \Omega_j,\quad j=1,\dots,k+1,\\ &\mathbf{u}_j=0\ \text{ на } S_j,\quad j=1,\dots,k+1,\\ &\mathbf{u}_j=\mathbf{u}_{j+1},\quad \boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u}_j)=\boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u}_{j+1})\ \text{ на } \Gamma_j,\quad j=1,\dots,k,\\ &a_j(\mathbf{x})u_{jn}=\lambda\left(\tau_{nn}(\mathbf{u}_j,p_j)-\tau_{nn}(\mathbf{u}_{j+1},p_{j+1})\right)\ \text{ на } \Gamma_j,\quad j=1,\dots,k.\end{aligned} \tag{5.32}$$

Здесь использовано обозначение $u_{jn}(\mathbf{x}):=\langle\mathbf{u}_j(\mathbf{x}),\mathbf{n}_j(\mathbf{x})\rangle$. Постоянные $\mu_j>0$, $j=1,\dots,k+1$, имеют смысл коэффициентов вязкости жидкостей; $a_j(\mathbf{x})$ — гладкие вещественные функции на Γ_j, $j=1,\dots,k$. Задача (5.32) эквивалентна задаче о спектре отношения квадратичных форм

$$\begin{aligned}&\pm\frac{\sum\limits_{j=1}^{k}\int_{\Gamma_j}a_j(\mathbf{x})|u_{jn}|^2\,d\mathbf{x}}{\sum\limits_{j=1}^{k+1}\mu_jE_{\Omega_j}[\mathbf{u}_j]},\quad \mathbf{u}_j\in H^1(\Omega_j;\mathbb{C}^3),\quad j=1,\dots,k+1,\\ &\operatorname{div}\mathbf{u}_j=0\ \text{ в } \Omega_j,\quad \mathbf{u}_j=0\ \text{ на } S_j,\quad j=1,\dots,k+1,\\ &\mathbf{u}_j=\mathbf{u}_{j+1}\ \text{ на } \Gamma_j,\quad j=1,\dots,k.\end{aligned} \tag{5.33}$$

Отношение форм (5.33) рассмотрим при следующем условии.

Условие 5.2. *Ограниченная область* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *разделена гладкими двумерными поверхностями* $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ *на* $(k+1)$ *непересекающихся областей* $\Omega_1, \dots, \Omega_{k+1}$. *При этом выполнены соотношения* (3.18), (3.19). *Предполагается, что* $\Omega_j \in \mathcal{K}$, $j = 1, \dots, k+1$, *а кривые* $\gamma_j = \partial\Gamma_j$, $j = 1, \dots, k$, — *липшицевы. Функции* $a_j \in L_2(\Gamma_j)$, $j = 1, \dots, k$, — *вещественные.*

Предложение 5.1 (см. [29]). *Пусть выполнено условие* 5.2. *Тогда для функций распределения спектра отношения* (5.33) *при* $\lambda \to +0$ *справедлива асимптотика*:

$$N_\pm(\lambda, (5.33)) \sim \frac{\lambda^{-2}}{16\pi} \sum_{j=1}^{k} (\mu_j + \mu_{j+1})^{-2} \int_{\Gamma_j} (a_j)_\pm^2 \, dS. \tag{5.34}$$

6. Асимптотика спектра малых колебаний капиллярной вязкой жидкости

6.1. Свойства решений системы Стокса в области с ребрами. В этом пункте устанавливается ряд технических утверждений, необходимых для решения задачи, связанной с колебаниями капиллярной вязкой жидкости. При этом существенно используются результаты из [42] о разрешимости в весовых классах Соболева первой краевой задачи для системы Стокса в областях с ребрами.

Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ удовлетворяет условию 4.1. Введем нужные обозначения. Пусть $l \geqslant 0$ — целое число, $s \in \mathbb{R}$, $V_s^l(\Omega)$ — пространство Кондратьева (весовое пространство Соболева) с нормой

$$\|u\|_{V_s^l(\Omega)} := \left(\int_\Omega \left(|\nabla_l u|^2 r^{2s} + |\nabla_{l-1} u|^2 r^{2(s-1)} + \dots + |u|^2 r^{2(s-l)} \right) d\mathbf{x} \right)^{1/2},$$

где $r = r(\mathbf{x})$ — расстояние от точки $\mathbf{x} \in \Omega$ до ребра γ. Символ $\nabla_j u$ означает «градиент функции u порядка j», т. е. набор всех производных $\partial^\alpha u$ порядка $|\alpha| = j$. Через $V_s^{l-1/2}(\partial\Omega)$ обозначается пространство следов на $\partial\Omega$ функций из $V_s^l(\Omega)$ с индуцированной нормой: $\|\varphi\|_{V_s^{l-1/2}(\partial\Omega)} := \inf_{v \in V_s^l(\Omega): v|_{\partial\Omega} = \varphi} \|v\|_{V_s^l(\Omega)}$. При $s = 0$ пишем просто $V^l(\Omega) = V_0^l(\Omega)$, $V^{l-1/2}(\partial\Omega) = V_0^{l-1/2}(\partial\Omega)$. Пусть $\rho(\mathbf{x})$ — регуляризованное расстояние на $\partial\Omega$ от точки $\mathbf{x}$ до γ. В пространстве $V^{l-1/2}(\partial\Omega)$ можно задать эквивалентную норму по формуле

$$\|\varphi\|_{V^{l-1/2}(\partial\Omega)}^2 := \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} dS(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{y})\, \frac{|\nabla_{l-1}\varphi(\mathbf{x}) - \nabla_{l-1}\varphi(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} + \int_{\partial\Omega} dS(\mathbf{x})\, |\varphi(\mathbf{x})|^2 \rho(\mathbf{x})^{1-2l},$$

а в $V_s^{l-1/2}(\partial\Omega)$ — по формуле $\|\varphi\|_{V_s^{l-1/2}(\partial\Omega)} = \|\rho^s \varphi\|_{V^{l-1/2}(\partial\Omega)}$. Через $V_s^l(\Omega; \mathbb{C}^3)$ и $V_s^{l-1/2}(\partial\Omega; \mathbb{C}^3)$ обозначаются соответствующие пространства вектор-функций.

Пусть $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ (см. [22]) — замыкание множества $C_0^\infty(\Gamma)$ по норме

$$\|\varphi\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)} := \left(\int_\Gamma \int_\Gamma dS(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{y})\, \frac{|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} + \int_\Gamma dS(\mathbf{x})\, \frac{|\varphi(\mathbf{x})|^2}{\rho(\mathbf{x})} \right)^{1/2}.$$

Отметим, что $\{\varphi : \varphi \in V^{1/2}(\partial\Omega),\ \varphi|_S = 0\} = \{\varphi : \varphi|_\Gamma \in H_{00}^{1/2}(\Gamma),\ \varphi|_S = 0\}$. Через $(H_{00}^{1/2}(\Gamma))'$ обозначим негативное пространство (см. [4]), построенное по позитивному $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ и нулевому $L_2(\Gamma)$.

Важную роль при изучении задачи для капиллярной вязкой жидкости будет играть пространство

$$\mathcal{H}_1 := \left\{ \{\mathbf{u}, p\} : \mathbf{u} \in H^1(\Omega; \mathbb{C}^3),\ p \in L_2(\Omega)/\{1\}, -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0,\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,\ \mathbf{u}|_S = 0 \right\}.$$

Здесь $L_2(\Omega)/\{1\}$ — фактор-пространство $L_2(\Omega)$ по одномерному подпространству констант; уравнение $-\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0$ понимается в смысле обобщенных функций.

Нам потребуются следующие утверждения.

Предложение 6.1. *Пусть* $v \in H^1(\Omega)$ *и* $v = 0$ *на* S. *Тогда* $v \in V^1(\Omega)$ *и*

$$\|v\|_{V^1(\Omega)} \leqslant C \|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{6.1}$$

Доказательство. Для доказательства (6.1) достаточно установить справедливость неравенства

$$\int_\Omega \frac{|v(\mathbf{x})|^2}{r^2(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x} \leqslant C \|v\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad v \in H^1(\Omega),\ v|_S = 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Положим $\Omega_\varepsilon := \{\mathbf{x} \in \Omega : \ r(\mathbf{x}) > \varepsilon\}$. Очевидно,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{|v(\mathbf{x})|^2}{r^2(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Omega |v(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}.$$

При достаточно малом ε множество $\Omega \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$ можно разбить на конечное число частей U_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, таких, что существуют диффеоморфизмы f_j класса C^1, отображающие $\overline{U_j}$ на $\overline{\mathcal{U}_j}$, где $\mathcal{U}_j$ — подмножество двугранного угла вида $\mathcal{U}_j := \{(r, \omega, x_3) : \ 0 < r < 1, \ 0 < \omega < \omega_j, \ 0 < x_3 < 1\}$, $0 < \omega_j < 2\pi$, причем $S \cap \partial U_j$ переходит в множество $\{(r, \omega, x_3) : \ 0 \leqslant r \leqslant 1, \ \omega = 0, \ 0 \leqslant x_3 \leqslant 1\}$. Здесь (r, ω, x_3) — цилиндрические координаты в $\mathbb{R}^3$. Пусть $v \in H^1(\mathcal{U}_j)$ и $v(r, \omega, x_3) = 0$ при $\omega = 0$. Тогда

$$\int_{\mathcal{U}_j} |v|^2 r^{-2}\, d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{U}_j} |v|^2 r^{-2}\, r dr\, d\omega\, dx_3 = \int_{\mathcal{U}_j} \left| \int_0^\omega \frac{1}{r} \frac{\partial v(r, \omega', x_3)}{\partial \omega'}\, d\omega' \right|^2 r dr\, d\omega\, dx_3 \leqslant$$
$$\leqslant \omega_j \int_{\mathcal{U}_j} \left| \frac{1}{r} \frac{\partial v(r, \omega', x_3)}{\partial \omega'} \right|^2 r dr\, d\omega'\, dx_3 \leqslant C \int_{\mathcal{U}_j} |\nabla v|^2 d\mathbf{x}.$$

□

Предложение 6.2. *Форма* $E_\Omega[\mathbf{u}]$ *определяет в пространстве* $\mathcal{H}_1$ *эквивалентную норму*: $E_\Omega[\mathbf{u}] \asymp \big(\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\Omega)} + \|p\|^2_{L_2(\Omega)/\{1\}}\big)$, $\{\mathbf{u}, p\} \in \mathcal{H}_1$.

Доказательство. Из предложения 6.1 следует, что для $\{\mathbf{u}, p\} \in \mathcal{H}_1$ справедливо включение $\mathbf{u} \in V^1(\Omega; \mathbb{C}^3)$ и $\|\mathbf{u}\|_{V^1(\Omega)} \asymp \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}$. Пусть T — оператор следа, сопоставляющий паре $\{\mathbf{u}, p\} \in \mathcal{H}_1$ след $\mathbf{u}$ на $\partial\Omega$: $\boldsymbol{\varphi} = T\{\mathbf{u}, p\} = \mathbf{u}|_{\partial\Omega}$. По теореме о разрешимости первой краевой задачи для системы Стокса (см. [42]) имеем: $\|\mathbf{u}\|_{V^1(\Omega)} + \|p\|_{L_2(\Omega)/\{1\}} \leqslant C\|\boldsymbol{\varphi}\|_{V^{1/2}(\partial\Omega)}$. Очевидно, $\|\boldsymbol{\varphi}\|_{V^{1/2}(\partial\Omega)} \leqslant \|\mathbf{u}\|_{V^1(\Omega)}$. Из сказанного с учетом неравенства Корна (5.6) вытекает нужное утверждение. □

Предложение 6.3. *Пространство* $\mathcal{H}_2 := \big\{\{\mathbf{u}, p\} : \mathbf{u} \in V_1^2(\Omega; \mathbb{C}^3),\, p \in V_1^1(\Omega)/\{1\},\, -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0,$ $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0,\ \mathbf{u}|_S = 0\big\}$ *плотно в* $\mathcal{H}_1$.

Доказательство. Из теоремы о разрешимости первой краевой задачи для системы Стокса в весовых пространствах (см. [42]) следует, что оператор T устанавливает гомеоморфизм следующих пар пространств: $\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{1/2} := \big\{\boldsymbol{\varphi} \in V^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{C}^3) : \ \boldsymbol{\varphi}|_S = 0,\ \int_\Gamma \varphi_n\, dS = 0\big\}$, $\mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_{3/2} := \big\{\boldsymbol{\varphi} \in V_1^{3/2}(\partial\Omega; \mathbb{C}^3) : \boldsymbol{\varphi}|_S = 0,\ \int_\Gamma \varphi_n\, dS = 0\big\}$. Заметим, что для $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{H}_{1/2}$ выполнено $\boldsymbol{\varphi}|_\Gamma \in H_{00}^{1/2}(\Gamma; \mathbb{C}^3)$. Поскольку $C_0^\infty(\Gamma; \mathbb{C}^3)$ плотно в $H_{00}^{1/2}(\Gamma; \mathbb{C}^3)$, то в $\mathcal{H}_{1/2}$ плотно множество $\big\{\boldsymbol{\varphi} : \boldsymbol{\varphi}|_\Gamma \in C_0^\infty(\Gamma; \mathbb{C}^3),\ \boldsymbol{\varphi}|_S = 0,\ \int_\Gamma \varphi_n\, dS = 0\big\}$, а тогда и более широкое множество $\mathcal{H}_{3/2}$. Из сказанного следует, что $\mathcal{H}_2$ плотно в $\mathcal{H}_1$. □

Пусть $z \in L_2(\Gamma)$ и $\int_\Gamma z\, dS \neq 0$. Через P_z обозначим (неортогональный) проектор в $L_2(\Gamma)$, действующий по формуле

$$(P_z f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \frac{\int_\Gamma f(\mathbf{y})\overline{z(\mathbf{y})}\, dS(\mathbf{y})}{\int_\Gamma \overline{z(\mathbf{y})}\, dS(\mathbf{y})}. \tag{6.2}$$

Оператор P_z проектирует на подпространство $\big\{v \in L_2(\Gamma) : \ \int_\Gamma v\overline{z}\, dS = 0\big\}$. Сопряженный проектор P_z^* действует по формуле $(P_z^* f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - z(\mathbf{x}) \dfrac{\int_\Gamma f(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y})}{\int_\Gamma z(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y})}$. Отметим, что $\int_\Gamma (P_z^* f)(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = 0$. Важную роль ниже играет следующее утверждение.

Предложение 6.4. *Пусть* $\{\mathbf{u}, p\} \in \mathcal{H}_1$, $z \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$, $\int_\Gamma z\, dS \neq 0$. *Пусть* $\tau_{nn}(\mathbf{u}, p)$ *определено в пункте* 5.1. *Тогда*

$$\|P_z \tau_{nn}(\mathbf{u}, p)\|_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma))'} \leqslant C\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}. \tag{6.3}$$

Доказательство. Для функции $w \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$, удовлетворяющей условию $\int_\Gamma w\, dS = 0$, через $\mathbf{f}_w(\mathbf{x})$ обозначим вектор-функцию на $\partial\Omega$, равную $w(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in \Gamma$ и равную нулю при $\mathbf{x} \in S$. Тогда $\mathbf{f}_w \in V^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{C}^3)$ и $\int_{\partial\Omega} (\mathbf{f}_w)_n\, dS = 0$. Пусть $\mathcal{M}$ — оператор, решающий первую краевую задачу для системы Стокса. Тогда

$$\|\mathcal{M}\mathbf{f}_w\|_{V^1(\Omega)} \leqslant C\|w\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)}. \tag{6.4}$$

Оценку (6.3) достаточно доказать для плотного в $\mathcal{H}_1$ множества $\mathcal{H}_2$. Применим к функциям $\{\mathbf{u}, p\} \in \mathcal{H}_2$ и $\mathbf{v}_w = \mathcal{M}\mathbf{f}_w$ формулу Грина (5.1) (нетрудно проверить, что все выражения, входящие в (5.1), на этих функциях имеют смысл и конечны). Получаем: $\mu E_\Omega[\mathbf{u}, \mathcal{M}\mathbf{f}_w] = \int_\Gamma \tau_{nn}\overline{w}\, dS$. Отсюда с учетом (6.4) вытекает, что

$$\left|\int_\Gamma \tau_{nn}\overline{w}\, dS\right| \leqslant C'\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}\|w\|_{H^{1/2}_{00}(\Gamma)}, \quad w \in H^{1/2}_{00}(\Gamma),\ \int_\Gamma w\, dS = 0. \tag{6.5}$$

Далее, пусть $f \in H^{1/2}_{00}(\Gamma)$. Тогда $P_z^* f \in H^{1/2}_{00}(\Gamma)$, $\int_\Gamma P_z^* f\, dS = 0$ и $\|P_z^* f\|_{H^{1/2}_{00}(\Gamma)} \leqslant C_z \|f\|_{H^{1/2}_{00}(\Gamma)}$. В силу (6.5) имеем:

$$\begin{aligned}\left|\int_\Gamma P_z\tau_{nn}\overline{f}\, dS\right| = \left|\int_\Gamma \tau_{nn}\overline{P_z^* f}\, dS\right| \leqslant C'\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}\|P_z^* f\|_{H^{1/2}_{00}(\Gamma)} \leqslant \\ \leqslant C'C_z\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}\|f\|_{H^{1/2}_{00}(\Gamma)}, \quad f \in H^{1/2}_{00}(\Gamma).\end{aligned} \tag{6.6}$$

Из (6.6) по определению негативной нормы получаем:

$$\|P_z\tau_{nn}\|_{(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'} = \sup_{0\neq f\in H^{1/2}_{00}(\Gamma)} \frac{\left|\int_\Gamma P_z\tau_{nn}\overline{f}\, dS\right|}{\|f\|_{H^{1/2}_{00}(\Gamma)}} \leqslant C'C_z\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}.$$

□

Следствие 6.1. *Пусть* $z_i \in H^{1/2}_{00}(\Gamma)$, $i = 1, 2$, $\int_\Gamma z_1\, dS \neq 0$. *Тогда функционал* $I(\{\mathbf{u}, p\}) = \int_\Gamma (P_{z_1}\tau_{nn})\overline{z_2}\, dS$ — *линейный непрерывный функционал над* $\mathcal{H}_1$.

Предложение 6.5. *Пусть* $\{\mathbf{u}, p\} \in \mathcal{H}_1$. *Пусть* $\tau_{tn}(\mathbf{u})$ *определено в пункте* 5.1. *Тогда*

$$\|\boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u})\|_{(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'} \leqslant C\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}. \tag{6.7}$$

Доказательство. Проведем оценки локально. Выберем некоторый конечный атлас $\{U_j, \alpha_j\}_{1\leqslant j\leqslant N}$ на многообразии Γ. Пусть $\{\omega_j\}_{1\leqslant j\leqslant N}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию Γ множествами $\{U_j\}$. Пусть $\mathbf{e}_1^{(j)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{e}_2^{(j)}(\mathbf{x})$ — гладкие касательные векторные поля в U_j, образующие при каждом $\mathbf{x} \in U_j$ базис в касательной плоскости к Γ.

Пусть $w \in H^{1/2}_{00}(\Gamma)$. Тогда $\omega_j w \in H^{1/2}_{00}(\Gamma)$ и $\|\omega_j w\|_{H^{1/2}_{00}(\Gamma)} \leqslant C_j\|w\|_{H^{1/2}_{00}(\Gamma)}$. Через $\mathbf{g}_w^{ij}(\mathbf{x})$ обозначим вектор-функцию на $\partial\Omega$, равную $\omega_j(\mathbf{x})w(\mathbf{x})\mathbf{e}_i^{(j)}(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in U_j$ и нулю при $\mathbf{x} \in \partial\Omega \setminus \overline{U_j}$. Тогда $\mathbf{g}_w^{ij} \in V^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{C}^3)$ и $\int_{\partial\Omega} (\mathbf{g}_w^{ij})_n\, dS = 0$. Пусть $\mathcal{M}$ — такой же оператор, как в доказательстве предложения 6.4. Тогда

$$\left\|\mathcal{M}\mathbf{g}_w^{ij}\right\|_{V^1(\Omega)} \leqslant C_{ij}\, \|w\|_{H^{1/2}_{00}(\Gamma)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \quad i = 1, 2. \tag{6.8}$$

Неравенство (6.7) достаточно доказать при $\{\mathbf{u}, p\} \in \mathcal{H}_2$. Применяя формулу Грина (5.1) к функциям $\{\mathbf{u}, p\} \in \mathcal{H}_2$ и $\mathcal{M}\mathbf{g}_w^{ij}$, получаем: $\mu E_\Omega[\mathbf{u}, \mathcal{M}\mathbf{g}_w^{ij}] = \int_\Gamma \langle\boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u}), \mathbf{e}_i^{(j)}\rangle\omega_j\overline{w}\, dS$. Отсюда и из (6.8) вытекает неравенство

$$\left|\int_\Gamma \langle\boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u}), \mathbf{e}_i^{(j)}\rangle\omega_j\overline{w}\, dS\right| \leqslant \check{C}_{ij}\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}\, \|w\|_{H^{1/2}_{00}(\Gamma)}, \quad w \in H^{1/2}_{00}(\Gamma), \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \quad i = 1, 2. \tag{6.9}$$

Поскольку $\|\boldsymbol{\tau}_{tn}\|_{(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'} \leqslant \sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{i=1}^{2} \left\|\omega_j\langle\boldsymbol{\tau}_{tn}, \mathbf{e}_i^{(j)}\rangle\right\|_{(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'}$, то из (6.9) с учетом определения негативной нормы следует (6.7). □

Положим $\mathcal{H}_1^\tau := \{\{\mathbf{u}, p\} \in \mathcal{H}_1 : \boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u})|_\Gamma = 0\}$. Подразумевается, что $\boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u})$ есть нулевой элемент пространства $(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'$. Множество $\mathcal{H}_1^\tau$ является замкнутым подпространством пространства $\mathcal{H}_1$. Положим $\widetilde{\mathcal{H}}_1 := \{\{\mathbf{u}, p\} \in \mathcal{H}_1 : u_n|_\Gamma = 0\}$.

Предложение 6.6. *Справедливо ортогональное разложение* $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^\tau \oplus^E \widetilde{\mathcal{H}}_1$, *где ортогональность понимается в смысле скалярного произведения* $E_\Omega[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$.

Доказательству предложения 6.6 предпошлем следующие рассмотрения. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} &-\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \ \text{ в } \Omega, \\ &\mathbf{u} = 0 \ \text{ на } S, \quad \boldsymbol{\tau}_{tn} = 0, \ \tau_{nn} = \psi \ \text{ на } \Gamma, \end{aligned} \tag{6.10}$$

при $\psi \in (H^{1/2}_{00}(\Gamma))'$. Пусть пространство $J^1_S(\Omega)$, определенное в (5.2), наделено скалярным произведением $E_\Omega[\mathbf{u},\mathbf{v}]$. Обобщенным решением задачи (6.10) назовем функцию $\mathbf{u} \in J^1_S(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\mu E_\Omega[\mathbf{u},\mathbf{v}] = \int_\Gamma \psi\overline{v_n}\,dS, \quad \mathbf{v} \in J^1_S(\Omega). \tag{6.11}$$

Если $\mathbf{u}$, p, ψ — гладкие функции, удовлетворяющие (6.10) в классическом смысле, то нетрудно видеть, что $\mathbf{u}$ является и обобщенным решением задачи (6.10).

Предложение 6.7. *Для любого элемента $\psi \in (H^{1/2}_{00}(\Gamma))'$ существует единственное обобщенное решение задачи* (6.10).

Доказательство. Если $\mathbf{v} \in J^1_S(\Omega)$, то в силу предложения 6.1 выполнено $\mathbf{v} \in V^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$ и $\|\mathbf{v}\|_{V^1(\Omega)} \leqslant C\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}$. Тогда $\mathbf{v}|_{\partial\Omega} \in V^{1/2}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3)$ и $\mathbf{v}|_S = 0$. Следовательно, $\mathbf{v}|_\Gamma \in H^{1/2}_{00}(\Gamma;\mathbb{C}^3)$ и $\|\mathbf{v}\|_{H^{1/2}_{00}(\Gamma)} \leqslant C\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}$.

Пусть $\psi \in (H^{1/2}_{00}(\Gamma))'$. Тогда $\int_\Gamma \psi\overline{v_n}\,dS$ определяет антилинейный непрерывный функционал над $\mathbf{v} \in J^1_S(\Omega)$. По теореме Рисса существует единственная функция $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\psi) \in J^1_S(\Omega)$ такая, что $\int_\Gamma \psi\overline{v_n}\,dS = \mu E_\Omega[\mathbf{u},\mathbf{v}]$, $\mathbf{v} \in J^1_S(\Omega)$. □

Как обычно, можно показать, что если $\mathbf{u}$ — обобщенное решение задачи (6.10), то существует функция $p \in L_2(\Omega)$ такая, что $\{\mathbf{u}, p\}$ является решением задачи (6.10) в следующем слабом смысле: а) $\mathbf{u} \in J^1_S(\Omega)$; б) $-\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0$ в смысле обобщенных функций; в) $\boldsymbol{\tau}_{tn} = 0$, $\tau_{nn} = \psi$ как элементы $(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'$. Отметим, что тогда $\{\mathbf{u}, p\} \in \mathcal{H}^\tau_1$.

Доказательство предложения 6.6. Пусть $\{\mathbf{v}, q\} \in \mathcal{H}_1$ и $\{\mathbf{v}, q\} \perp \mathcal{H}^\tau_1$, т. е. $E_\Omega[\mathbf{u},\mathbf{v}] = 0$ для любого $\{\mathbf{u}, p\} \in \mathcal{H}^\tau_1$. Для произвольной функции $\psi \in (H^{1/2}_{00}(\Gamma))'$ через $\mathbf{u}_\psi$ обозначим обобщенное решение задачи (6.10). Тогда $E_\Omega[\mathbf{u}_\psi,\mathbf{v}] = 0$ для любого $\psi \in (H^{1/2}_{00}(\Gamma))'$. Согласно (6.11) это означает, что $\int_\Gamma \psi\overline{v_n}\,dS = 0$ для любого $\psi \in (H^{1/2}_{00}(\Gamma))'$. Поэтому $v_n = 0$ на Γ, т. е. $\{\mathbf{v}, q\} \in \widetilde{\mathcal{H}}_1$. Мы доказали, что $(\mathcal{H}^\tau_1)^\perp \subset \widetilde{\mathcal{H}}_1$.

Установим теперь обратное включение $\widetilde{\mathcal{H}}_1 \subset (\mathcal{H}^\tau_1)^\perp$. Пусть $\{\mathbf{v}, q\} \in \widetilde{\mathcal{H}}_1$. Тогда в силу формулы Грина (5.1) справедливо равенство $E_\Omega[\mathbf{u},\mathbf{v}] = 0$, $\{\mathbf{u}, p\} \in \mathcal{H}_2$, $\boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u}) = 0$. По замыканию $E_\Omega[\mathbf{u},\mathbf{v}] = 0$ при любом $\{\mathbf{u}, p\} \in \mathcal{H}^\tau_1$, т. е. $\{\mathbf{v}, q\} \in (\mathcal{H}^\tau_1)^\perp$. □

6.2. Постановка задачи, связанной с колебаниями капиллярной вязкой жидкости. Формулировка результата. Постановка задачи дана в [21, гл. 8, §2]. Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ удовлетворяет условию 4.1. Через $\mathbf{B}_\Gamma$ обозначим дифференциальный оператор, заданный выражением $B_\Gamma = -\sigma\Delta_\Gamma + h(\mathbf{x})$ на области определения $\operatorname{Dom}\mathbf{B}_\Gamma = H^2(\Gamma) \cap H^1_0(\Gamma)$. Здесь $\sigma > 0$, $h(\mathbf{x})$ — гладкая вещественнозначная функция на Γ. Коэффициенты σ и h имеют тот же смысл, что и в пункте 4.5. Оператор $\mathbf{B}_\Gamma$ самосопряжен в $L_2(\Gamma)$, его ядро $Z_B := \{v \in \operatorname{Dom}\mathbf{B}_\Gamma : (-\sigma\Delta_\Gamma + h)v = 0\}$, совпадающее с коядром, конечномерно и состоит из бесконечно гладких функций. На $L_2(\Gamma) \ominus Z_B$ определен обратный оператор $\mathbf{B}_\Gamma^{-1}$, который является разрешающим оператором первой краевой задачи на Γ: $\varphi = \mathbf{B}_\Gamma^{-1} f$ при $f \in L_2(\Gamma) \ominus Z_B$ означает, что $(-\sigma\Delta_\Gamma + h)\varphi = f$ на Γ, $\varphi = 0$ на γ, $\varphi \perp Z_B$.

Оператор $\mathbf{B}_\Gamma$ предполагается положительно определенным на $\operatorname{Dom}\mathbf{B}_\Gamma \cap (L_2(\Gamma) \ominus \{1\})$. Это условие эквивалентно выполнению неравенства

$$\int_\Gamma \left(\sigma|\nabla_\Gamma u|^2 + h(\mathbf{x})|u|^2\right) dS \geqslant c\int_\Gamma |u|^2\,dS, \quad u \in H^1_0(\Gamma), \quad \int_\Gamma u\,dS = 0; \quad c > 0. \tag{6.12}$$

Условие (6.12) накладывает ограничение на данные задачи. Физически оно означает, что положение равновесия жидкости устойчиво в линейном приближении. Из (6.12) следует, что $\dim Z_B \leqslant 1$. Обозначим через z_1 базисный вектор в Z_B; в случае $Z_B = \{0\}$ считаем $z_1 = 0$.

Рассмотрим следующую краевую задачу в Ω:

$$\begin{aligned} &-\mu\Delta\mathbf{u}+\nabla p=0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u}=0 \quad \text{в} \quad \Omega,\\ &\mathbf{u}=0 \quad \text{на } S, \quad \boldsymbol{\tau}_{tn}=0 \quad \text{на } \Gamma,\\ &B_\Gamma u_n=\lambda^{-1}(\tau_{nn}+c_\tau) \quad \text{на } \Gamma. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Здесь постоянная c_τ не задается, а ищется вместе с решением. Краевое условие $u_n|_\gamma=0$ выполнено автоматически за счет $\mathbf{u}|_S=0$.

Как будет показано ниже, краевой задаче (6.13) соответствует вариационное отношение форм, определяющее неотрицательный компактный оператор в пространстве $\mathcal{H}_1^\tau$. Основной результат данного раздела — следующая теорема.

Теорема 6.1. *При сделанных предположениях для функции распределения собственных значений задачи* (6.13) *при* $\lambda\to+0$ *справедлива асимптотика*

$$N(\lambda,(6.13))\sim\lambda^{-2}\frac{\mu^2}{\pi\sigma^2}\operatorname{mes}\Gamma.$$

6.3. Вариационная постановка задачи для капиллярной вязкой жидкости. На решениях задачи (6.13) функция $\tau_{nn}+c_\tau$ принадлежит области значений оператора $\mathbf{B}_\Gamma$, а потому

$$\int_\Gamma(\tau_{nn}+c_\tau)\overline{z_1}\,dS=0. \tag{6.14}$$

Кроме того, из условия неразрывности ($\operatorname{div}\mathbf{u}=0$) и условия прилипания $\mathbf{u}|_S=0$ следует, что

$$\int_\Gamma u_n\,dS=0. \tag{6.15}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $Z_B\neq\{0\}$. Тогда $\int_\Gamma\overline{z_1}\,dS\neq0$ в силу (6.12), и постоянную c_τ можно определить по формуле $c_\tau=-\dfrac{\int_\Gamma\tau_{nn}\overline{z_1}\,dS}{\int_\Gamma\overline{z_1}\,dS}$; см. (6.14). Следовательно, $\tau_{nn}+c_\tau=P_{z_1}\tau_{nn}$, где проектор P_{z_1} определен согласно (6.2).

На решениях задачи (6.13) выполнено

$$\lambda u_n=\mathbf{B}_\Gamma^{-1}P_{z_1}\tau_{nn}+Cz_1. \tag{6.16}$$

В силу (6.15) постоянную C можно определить из условия

$$\int_\Gamma(\mathbf{B}_\Gamma^{-1}P_{z_1}\tau_{nn}+Cz_1)\,dS=0. \tag{6.17}$$

Умножим (6.16) на $\overline{\tau_{nn}}$ и проинтегрируем по Γ: $\lambda\displaystyle\int_\Gamma u_n\overline{\tau_{nn}}\,dS=\int_\Gamma(\mathbf{B}_\Gamma^{-1}P_{z_1}\tau_{nn}+Cz_1)\overline{\tau_{nn}}\,dS$. Используя формулу Грина (5.1), получаем, что при условиях из (6.13) справедливо равенство $\int_\Gamma u_n\overline{\tau_{nn}}\,dS=\mu E_\Omega[\mathbf{u}]$. С другой стороны, с учетом (6.17) и очевидного равенства $\int_\Gamma z_1\overline{P_{z_1}\tau_{nn}}\,dS=0$ имеем: $\displaystyle\int_\Gamma(\mathbf{B}_\Gamma^{-1}P_{z_1}\tau_{nn}+Cz_1)\overline{\tau_{nn}}\,dS=\int_\Gamma(\mathbf{B}_\Gamma^{-1}P_{z_1}\tau_{nn})\overline{P_{z_1}\tau_{nn}}\,dS$.

Рассмотрим теперь случай, когда $Z_B=\{0\}$. Тогда на решениях задачи (6.13) выполнено

$$\lambda u_n=\mathbf{B}_\Gamma^{-1}(\tau_{nn}+c_\tau). \tag{6.18}$$

В силу условия (6.15) из (6.18) следует, что

$$\int_\Gamma\mathbf{B}_\Gamma^{-1}(\tau_{nn}+c_\tau)\,dS=0, \tag{6.19}$$

что равносильно равенству $\int_\Gamma(\tau_{nn}+c_\tau)\overline{z_0}\,dS=0$, $z_0:=\mathbf{B}_\Gamma^{-1}1$. Заметим, что в рассматриваемом случае $\int_\Gamma\overline{z_0}\,dS=\int_\Gamma B_\Gamma z_0\overline{z_0}\,dS\neq0$. Отсюда следует, что постоянную c_τ можно определить из условия $c_\tau=-\dfrac{\int_\Gamma\tau_{nn}\overline{z_0}\,dS}{\int_\Gamma\overline{z_0}\,dS}$. Тогда $\tau_{nn}+c_\tau=P_{z_0}\tau_{nn}$. Умножим (6.18) на $\overline{\tau_{nn}}$ и проинтегрируем по Γ: $\lambda\int_\Gamma u_n\overline{\tau_{nn}}\,dS=\int_\Gamma(\mathbf{B}_\Gamma^{-1}P_{z_0}\tau_{nn})\overline{\tau_{nn}}\,dS$. Как и прежде, в силу формулы Грина $\int_\Gamma u_n\overline{\tau_{nn}}\,dS=\mu E_\Omega[\mathbf{u}]$. С другой стороны, с учетом (6.19) выполнено $\int_\Gamma(\mathbf{B}_\Gamma^{-1}P_{z_0}\tau_{nn})\overline{\tau_{nn}}\,dS=\int_\Gamma(\mathbf{B}_\Gamma^{-1}P_{z_0}\tau_{nn})\overline{P_{z_0}\tau_{nn}}\,dS$.

В итоге мы убедились, что задача (6.13) эквивалентна вариационной задаче о спектре отношения форм

$$\frac{\int_\Gamma(\mathbf{B}_\Gamma^{-1}P_z\tau_{nn})\overline{P_z\tau_{nn}}\,dS}{\mu E_\Omega[\mathbf{u}]}, \quad \{\mathbf{u},p\}\in\mathcal{H}_1^\tau. \tag{6.20}$$

Здесь $z=z_1$, если $Z_B\neq\{0\}$, и $z=z_0$, если $Z_B=\{0\}$. В силу предложения 6.2 форма $E_\Omega[\mathbf{u}]$ задает эквивалентную норму в $\mathcal{H}_1^\tau$.

Отметим, что функции сравнения в (6.20) должны удовлетворять уравнению $-\mu\Delta\mathbf{u}+\nabla p=0$, а также условию равенства нулю касательных напряжений на Γ (в отличие от задачи о спектре отношения (5.4), в которой эти условия были естественными). Причина здесь в том, что числитель отношения (6.20) зависит от τ_{nn}, а тем самым и от функции p, а знаменатель — только от $\mathbf{u}$ (в то время как отношение (5.4) зависит только от $\mathbf{u}$). Поэтому функция p должна быть связана с $\mathbf{u}$. На определенном этапе решения задачи указанные выше «связи» будут сняты после того, как p будет выражено через $\mathbf{u}$.

Убедимся в том, что форма, стоящая в числителе отношения (6.20), компактна[1] в $\mathcal{H}_1^\tau$. По теореме о гомеоморфизмах оператор B_Γ осуществляет гомеоморфизм следующих пар пространств:

$$H^2_{\text{гр}}(\Gamma):=H^2(\Gamma)\cap H^1_0(\Gamma)\cap(L_2(\Gamma)\ominus Z_B)\to L_2(\Gamma)\ominus Z_B,\quad H^1_{\text{гр}}(\Gamma):=H^1_0(\Gamma)\cap(L_2(\Gamma)\ominus Z_B)\to H_Z^{-1}(\Gamma).$$

Здесь через $H_Z^{-1}(\Gamma)$ обозначено негативное пространство, построенное по нулевому $L_2(\Gamma)\ominus Z_B$ и позитивному $H^1_{\text{гр}}(\Gamma)$.

Пользуясь теорией интерполяции (см. [22]), получаем, что B_Γ осуществляет гомеоморфизм пространств $\left[H^2_{\text{гр}}(\Gamma),H^1_{\text{гр}}(\Gamma)\right]_{1/2}\to\left[L_2(\Gamma)\ominus Z_B,H_Z^{-1}(\Gamma)\right]_{1/2}$. Здесь через $[\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2]_{1/2}$ обозначено промежуточное пространство между гильбертовыми пространствами $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$, где $\mathfrak{H}_1\subset\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_1$ плотно в $\mathfrak{H}_2$ и непрерывно в него вложено; см. [22, §1.2.1].

Используя тот факт, что $\left[H^2(\Gamma),H^1(\Gamma)\right]_{1/2}=H^{3/2}(\Gamma)$, можно показать, что $\left[H^2_{\text{гр}}(\Gamma),H^1_{\text{гр}}(\Gamma)\right]_{1/2}=H^{3/2}(\Gamma)\cap H^1_0(\Gamma)\cap(L_2(\Gamma)\ominus Z_B)=:H^{3/2}_{\text{гр}}(\Gamma)$.

Теорема 1.12.4 из [22] утверждает, что $\left[L_2(\Gamma),H^{-1}(\Gamma)\right]_{1/2}=(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'$, где $H^{-1}(\Gamma)=(H^1_0(\Gamma))'$. Учитывая этот факт, нетрудно показать, что $\left[L_2(\Gamma)\ominus Z_B,H_Z^{-1}(\Gamma)\right]_{1/2}=H^{-1/2}_{\text{гр}}(\Gamma)$, где $H^{-1/2}_{\text{гр}}(\Gamma)$ — негативное пространство, построенное по нулевому $L_2(\Gamma)\ominus Z_B$ и позитивному пространству $H^{1/2}_{\text{гр}}(\Gamma):=H^{1/2}_{00}(\Gamma)\cap(L_2(\Gamma)\ominus Z_B)$. Пространство $H^{-1/2}_{\text{гр}}(\Gamma)$ можно отождествить с $\left\{\varphi\in(H^{1/2}_{00}(\Gamma))':(\varphi,z_1)=0\right\}$. Таким образом, B_Γ устанавливает гомеоморфизм

$$B_\Gamma: H^{3/2}_{\text{гр}}(\Gamma)\to H^{-1/2}_{\text{гр}}(\Gamma). \tag{6.21}$$

Поскольку оператор вложения $H^{3/2}_{\text{гр}}(\Gamma)$ в $H^{1/2}_{\text{гр}}(\Gamma)$ компактен, то $\mathbf{B}_\Gamma^{-1}$ — компактный оператор из $H^{-1/2}_{\text{гр}}(\Gamma)$ в $H^{1/2}_{\text{гр}}(\Gamma)$. Вместе с предложением 6.4 это показывает, что форма, стоящая в числителе (6.20), компактна в $\mathcal{H}_1^\tau$.

Пусть $b\in C^\infty(\overline{\Gamma})$, $z\in H^{1/2}_{00}(\Gamma)$ и $\int_\Gamma z\,dS\neq0$. Обозначим $\mathcal{B}_{\Gamma,z}[\varphi]:=\operatorname{Re}\int_\Gamma b(\mathbf{x})(\mathbf{B}_\Gamma^{-1}P_z\varphi)\overline{P_z\varphi}\,dS(\mathbf{x})$. Вместо (6.20) рассмотрим отношение форм более общего вида

$$\pm\frac{\mathcal{B}_{\Gamma,z}[\tau_{nn}]}{\mu E_\Omega[\mathbf{u}]},\quad \{\mathbf{u},p\}\in\mathcal{H}_1^\tau. \tag{6.22}$$

Теорема 6.1 прямо вытекает из следующей теоремы.

Теорема 6.2. *Пусть Ω удовлетворяет условию* 4.1. *Пусть $b(\mathbf{x})$ — гладкая вещественнозначная функция на $\overline{\Gamma}$. Тогда для функций распределения собственных значений отношения* (6.22) *при $\lambda\to+0$ справедлива асимптотика*

$$N_\pm(\lambda,(6.22))\sim\lambda^{-2}\frac{\mu^2}{\pi\sigma^2}\int_\Gamma b_\pm^2(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x}). \tag{6.23}$$

Доказательство теоремы 6.2 проведем по той же схеме, которая использовалась в предыдущих задачах.

[1] Отметим, что в случае третьего краевого условия на γ соответствующая форма даже не ограничена в $\mathcal{H}_1^\tau$; см. [29, §8].

6.4. Оценки спектра отношения (6.22).

Лемма 6.1. *Пусть $b(\mathbf{x})$ — гладкая вещественнозначная функция на $\overline{\Gamma}$. Справедливы оценки $\Delta_2^{\pm}$ (6.22) $\leqslant C\|b\|^2_{L_2(\Gamma)}$, где C не зависит от функции b.*

Доказательство. В силу предложения 6.4 и неравенства Корна (5.6), $E_\Omega[\mathbf{u}] \geqslant C\,\|P_z\tau_{nn}\|^2_{(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'}$, $\{\mathbf{u},p\}\in\mathcal{H}_1$, $C>0$. В силу леммы 2.2 отсюда вытекает, что функции $N_\pm(\lambda,(6.22))$ не превосходят функций распределения спектра отношения

$$\pm C\frac{\operatorname{Re}\int_\Gamma b(\mathbf{B}_\Gamma^{-1}\psi)\overline{\psi}\,dS}{\|\psi\|^2_{(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'}},\quad \psi\in(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'. \tag{6.24}$$

Выполним в (6.24) замену $\mathbf{B}_\Gamma^{-1}\psi=f$. Тогда (см. (6.21)) $f\in H^{3/2}(\Gamma)\cap H^1_0(\Gamma)$ и $\|f\|_{H^{3/2}(\Gamma)}\leqslant C\|\psi\|_{(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'}$. Применяя лемму 2.2, получаем, что функции $N_\pm(\lambda,(6.24))$ не превосходят функций распределения спектра отношения

$$\pm C\frac{\operatorname{Re}\int_\Gamma bf\overline{B_\Gamma f}\,dS}{\|f\|^2_{H^{3/2}(\Gamma)}},\quad f\in H^{3/2}(\Gamma)\cap H^1_0(\Gamma). \tag{6.25}$$

Интегрируя по частям в числителе (6.25) и отбрасывая младшие по порядку члены, получаем, что величины $\Delta_2^{\pm}$ (6.25) не превосходят аналогичных величин для отношения

$$\pm C\frac{\int_\Gamma b|\nabla_\Gamma f|^2\,dS}{\|f\|^2_{H^{3/2}(\Gamma)}},\quad f\in H^{3/2}(\Gamma). \tag{6.26}$$

Делая замену $\nabla_\Gamma f=:\mathbf{g}$ и пользуясь леммой 2.8, приходим к оценке $\Delta_2^{\pm}$ (6.26) $\leqslant C\|b\|^2_{L_2(\Gamma)}$. $\square$

Леммы 6.1 и 2.5 позволяют при вычислении главного члена асимптотики спектра отношения (6.22) ограничиться рассмотрением случая, когда $b\in C_0^\infty(\Gamma)$.

6.5. Сравнение с задачами в гладкой области. Фиксируем вещественнозначную функцию $z_2\in C_0^\infty(\Gamma)$, $\int_\Gamma z_2\,dS=1$. В соответствии с леммой 2.6 и следствием 6.1 величины $\Delta_2^{\pm}$ (6.22), $\delta_2^{\pm}$ (6.22) совпадают с аналогичными величинами для отношения

$$\pm\frac{\mathcal{B}_{\Gamma,z_2}[\tau_{nn}]}{\mu E_\Omega[\mathbf{u}]},\quad \{\mathbf{u},p\}\in\mathcal{H}_1^\tau,\quad P_z\tau_{nn}=P_{z_2}\tau_{nn}. \tag{6.27}$$

Имеем:

$$\Delta_2^{\pm}\ (6.22)=\Delta_2^{\pm}\ (6.27),\quad \delta_2^{\pm}\ (6.22)=\delta_2^{\pm}\ (6.27). \tag{6.28}$$

Итак, пусть $b\in C_0^\infty(\Gamma)$. Пусть $\widetilde{\Omega}$ — ограниченная область с гладкой границей такая, что $\widetilde{\Omega}\subset\Omega$, $\operatorname{supp} b$ и $\operatorname{supp} z_2$ лежат строго внутри множества $\partial\widetilde{\Omega}\cap\Gamma$. Пусть $\widetilde{b}\in C^\infty(\partial\widetilde{\Omega})$ — функция, совпадающая с $b(\mathbf{x})$ на $\partial\widetilde{\Omega}\cap\Gamma$ и равная нулю вне этого множества. Аналогично определяется функция $\widetilde{z}_2\in C^\infty(\partial\widetilde{\Omega})$. Пусть $d(\mathbf{x})$ — некоторая гладкая положительная функция на $\partial\widetilde{\Omega}$. Рассмотрим дифференциальное выражение $B_{\partial\widetilde{\Omega}}:=-\sigma\Delta_{\partial\widetilde{\Omega}}+d(\mathbf{x})$, где $\Delta_{\partial\widetilde{\Omega}}$ — оператор Лапласа—Бельтрами на $\partial\widetilde{\Omega}$. Оператор $\mathbf{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}$ (ср. с пунктом 4.3) задан выражением $B_{\partial\widetilde{\Omega}}$ на области определения $H^2(\partial\widetilde{\Omega})$. Обратный оператор $\mathbf{B}^{-1}_{\partial\widetilde{\Omega}}$ есть ПДО на $\partial\widetilde{\Omega}$ порядка (-2). Через $P_{\widetilde{z}_2}$ обозначим проектор в $L_2(\partial\widetilde{\Omega})$, действующий по формуле $(P_{\widetilde{z}_2}f)(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})-\int_{\partial\widetilde{\Omega}}f(\mathbf{y})\widetilde{z}_2(\mathbf{y})\,dS(\mathbf{y})$, $\mathbf{x}\in\partial\widetilde{\Omega}$.

Пусть $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ — единичный вектор внутренней нормали к $\partial\widetilde{\Omega}$. На $\partial\widetilde{\Omega}$ определим функцию $\widetilde{\tau}_{\nu\nu}=\widetilde{\tau}_{\nu\nu}(\mathbf{u},p)$ (аналогично τ_{nn} на Γ). Имеем: $\widetilde{\tau}_{\nu\nu}(\mathbf{x})=\langle\tau(\mathbf{x})\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}),\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\rangle$, $\mathbf{x}\in\partial\widetilde{\Omega}$. Отметим, что $\widetilde{\tau}_{\nu\nu}(\mathbf{x})=\tau_{nn}(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}\in\partial\widetilde{\Omega}\cap\Gamma$. Положим $\widetilde{\mathcal{B}}[\varphi]:=\operatorname{Re}\int_{\partial\widetilde{\Omega}}\widetilde{b}(\mathbf{x})\big(\mathbf{B}^{-1}_{\partial\widetilde{\Omega}}P_{\widetilde{z}_2}\varphi\big)\overline{P_{\widetilde{z}_2}\varphi}\,dS(\mathbf{x})$.

Рассмотрим отношение форм

$$\pm\frac{\widetilde{\mathcal{B}}[\widetilde{\tau}_{\nu\nu}]}{\mu E_\Omega[\mathbf{u}]},\quad \{\mathbf{u},p\}\in\mathcal{H}_1^\tau. \tag{6.29}$$

Аналогом леммы 4.2 является следующее утверждение.

Лемма 6.2. *Справедливы равенства*

$$\Delta_2^{\pm}\ (6.27) = \Delta_2^{\pm}\ (6.29), \quad \delta_2^{\pm}\ (6.27) = \delta_2^{\pm}\ (6.29). \tag{6.30}$$

Доказательство. В соответствии с леммой 2.6 величины $\Delta_2^{\pm}$ (6.29), $\delta_2^{\pm}$ (6.29) не изменятся, если рассматривать отношение на подпространстве конечной коразмерности в $\mathcal{H}_1^{\tau}$, выделяемом условием $P_z\tau_{nn} = P_{z_2}\tau_{nn}$. Обозначим $\Lambda[\{\mathbf{u},p\}] = \mathcal{B}_{\Gamma,z_2}[\tau_{nn}] - \widetilde{\mathcal{B}}[\widetilde{\tau}_{\nu\nu}]$. Рассмотрим отношение форм

$$\pm\frac{\Lambda[\{\mathbf{u},p\}]}{\mu E_\Omega[\mathbf{u}]}, \quad \{\mathbf{u},p\} \in \mathcal{H}_1^{\tau}, \quad P_z\tau_{nn} = P_{z_2}\tau_{nn}. \tag{6.31}$$

В силу леммы 2.4 равенства (6.30) будут доказаны, коль скоро будет показано, что Δ_2^{+} (6.31) $= \Delta_2^{-}(6.31) = 0$.

Пусть $\{\mathbf{u},p\} \in \mathcal{H}_1^{\tau}$ и $P_z\tau_{nn} = P_{z_2}\tau_{nn}$. Обозначим $f = \mathbf{B}_{\Gamma}^{-1}P_{z_2}\tau_{nn}$, $g = \mathbf{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}^{-1}P_{\widetilde{z}_2}\widetilde{\tau}_{\nu\nu}$. Пусть $\widetilde{\Gamma}$ — открытое множество, лежащее строго внутри $\Gamma \cap \partial\widetilde{\Omega}$, $\operatorname{supp} b \subset \widetilde{\Gamma}$, $\operatorname{supp} z_2 \subset \widetilde{\Gamma}$. Можно считать, что $\widetilde{\Gamma}$ — двумерная поверхность с достаточно гладкой границей. Заметим, что $P_{z_2}\tau_{nn}(\mathbf{x}) = P_{\widetilde{z}_2}\widetilde{\tau}_{\nu\nu}(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in \widetilde{\Gamma}$. Следовательно, $(B_\Gamma f)(\mathbf{x}) = (B_{\partial\widetilde{\Omega}}g)(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in \widetilde{\Gamma}$. Преобразуем форму $\Lambda[\{\mathbf{u},p\}]$ (ср. с доказательством леммы 4.2):

$$\Lambda[\{\mathbf{u},p\}] = \operatorname{Re}\left(\int_\Gamma bf\overline{B_\Gamma f}\,dS - \int_{\partial\widetilde{\Omega}} \widetilde{b}g\overline{B_{\partial\widetilde{\Omega}}g}\,dS\right) =$$
$$= \operatorname{Re}\int_{\widetilde{\Gamma}} \left(-\sigma(\Delta b)(f-g)\overline{g} - 2\sigma\nabla b\cdot(\nabla f - \nabla g)\overline{g} + b(d-h)f\overline{g}\right)\,dS.$$

Отсюда видно, что $\Lambda[\{\mathbf{u},p\}] = \operatorname{Re}\int_{\widetilde{\Gamma}}(B'f + B''g)\overline{g}\,dS$, где B', B'' — дифференциальные операторы первого порядка.

Справедливо неравенство

$$E_\Omega[\mathbf{u}] \geqslant C\left(\|g\|^2_{H^{3/2}(\partial\widetilde{\Omega})} + \|f\|^2_{H^{3/2}(\Gamma)}\right), \quad C > 0. \tag{6.32}$$

Действительно, неравенство $\|f\|^2_{H^{3/2}(\Gamma)} \leqslant CE_\Omega[\mathbf{u}]$ было установлено в доказательстве леммы 6.1. Аналогичное неравенство для $\|g\|^2_{H^{3/2}(\partial\widetilde{\Omega})}$ проверить только проще, поскольку $\partial\widetilde{\Omega} \in C^\infty$.

Из (6.32) вытекает неравенство $E_\Omega[\mathbf{u}] \geqslant C\bigl(\|g\|^2_{H^{3/2}(\widetilde{\Gamma})} + \|B'f + B''g\|^2_{H^{1/2}(\widetilde{\Gamma})}\bigr)$, $C > 0$. В силу леммы 2.2 функции $N_\pm(\lambda, (6.31))$ не превосходят функций распределения спектра отношения

$$\pm\frac{\operatorname{Re}\int_{\widetilde{\Gamma}}\psi\overline{g}\,dS}{\mu C\bigl(\|\psi\|^2_{H^{1/2}(\widetilde{\Gamma})} + \|g\|^2_{H^{3/2}(\widetilde{\Gamma})}\bigr)}, \quad \{\psi, g\} \in H^{1/2}(\widetilde{\Gamma}) \oplus H^{3/2}(\widetilde{\Gamma}). \tag{6.33}$$

Применяя лемму 2.9, получаем, что $N_\pm(\lambda, (6.33)) = O(\lambda^{-1})$, а потому $\Delta_2^{\pm}$ (6.33) $= 0$. Тогда и $\Delta_2^{\pm}$ (6.31) $= 0$. ☐

Наша цель теперь — сравнить отношение (6.29) с аналогичным отношением форм, заданным в гладкой области $\widetilde{\Omega}$. Непосредственному проведению такого сравнения мешает наличие связей: уравнение $-\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0$ в Ω и граничное условие $\boldsymbol{\tau}_{tn} = 0$ на Γ. Преобразуем числитель отношения (6.29) с тем, чтобы можно было «снять» эти связи (см. ниже лемму 6.3). Для $\{\mathbf{u},p\} \in \mathcal{H}_1$ обозначим $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{u}|_{\partial\widetilde{\Omega}}$. Тогда в $\widetilde{\Omega}$ справедливо равенство $\{\mathbf{u},p\} = \mathcal{G}\boldsymbol{\varphi}$. Оператор $\mathcal{G}$ был определен в пункте 5.4. Из свойств алгебры Буте де Монвеля следует, что

$$\widetilde{\tau}_{\nu\nu}(\mathcal{G}\boldsymbol{\varphi}) = \mathcal{T}\boldsymbol{\varphi} + \mathrm{Const}, \tag{6.34}$$

где $\mathcal{T}$ — ПДО на $\partial\widetilde{\Omega}$ порядка 1. В (6.34) присутствует произвольная постоянная, связанная с тем, что функция $p = p(\boldsymbol{\varphi})$ определена с точностью до произвольной постоянной. Локально в окрестности U некоторой точки $\mathbf{x}_0 \in \partial\widetilde{\Omega}$ выберем ортогональную криволинейную систему координат так, чтобы координатные линии для третьей координаты в точке $\mathbf{x} \in \partial\widetilde{\Omega}$ были направлены по нормали $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$, а соответствующий коэффициент Ламе на $\partial\widetilde{\Omega}$ равнялся 1. В этой координатной системе старший символ ПДО $\mathcal{T}$ есть строка $t^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \{t_1^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}), t_2^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}), t_3^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\}$ с элементами

$$t_j^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = -Y_4^{(j)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},0) + 2\mu\Bigl(\frac{d}{dt}Y_3^{(j)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},t)\Bigr)\Bigr|_{t=0}, \quad \mathbf{x} \in U, \quad \boldsymbol{\xi} \perp \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}),$$

где функции $Y^{(j)}$ определены в (5.30). Вычисление показывает, что $t_1^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = t_2^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = 0$, $t_3^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = -2\mu|\boldsymbol{\xi}|$. Из (6.34) вытекает справедливость представления

$$\widetilde{\mathcal{B}}[\widetilde{\tau}_{\nu\nu}] = \operatorname{Re}\int_{\partial\widetilde{\Omega}} \widetilde{b}(\mathbf{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}^{-1}\mathcal{T}\boldsymbol{\varphi})\overline{\mathcal{T}\boldsymbol{\varphi}}\,dS + \mathcal{D}[\boldsymbol{\varphi}], \tag{6.35}$$

где $\mathcal{D}$ — форма конечного ранга. Обозначим через $\mathcal{R}$ матричный ПДО порядка 0 на $\partial\widetilde{\Omega}$, отвечающий первому слагаемому в правой части (6.35). Старший символ ПДО $\mathcal{R}$ имеет вид

$$r^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \frac{\widetilde{b}(\mathbf{x})}{\sigma|\boldsymbol{\xi}|^2}\big(t^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\big)^+ t^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\mu^2\sigma^{-1}\widetilde{b}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \tag{6.36}$$

Положим

$$J_S^1(\Omega,\mathcal{L}) = \big\{\mathbf{u}\in J_S^1(\Omega) : -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0 \text{ для некоторого } p\in L_2(\Omega)\big\},$$
$$\widetilde{J}_S^1(\Omega,\mathcal{L}) = \big\{\mathbf{u}\in J_S^1(\Omega,\mathcal{L}) :\ \boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u}) = 0 \text{ на } \Gamma\big\}.$$

Рассмотрим отношение

$$\pm\frac{(\mathcal{R}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}}{\mu E_\Omega[\mathbf{u}]}, \quad \mathbf{u}\in\widetilde{J}_S^1(\Omega,\mathcal{L}), \quad \boldsymbol{\varphi} := \mathbf{u}\big|_{\partial\widetilde{\Omega}}. \tag{6.37}$$

В силу леммы 2.4 из представления (6.35) следует справедливость равенств

$$\Delta_2^\pm\ (6.29) = \Delta_2^\pm\ (6.37), \quad \delta_2^\pm\ (6.29) = \delta_2^\pm\ (6.37). \tag{6.38}$$

Покажем, что главный член асимптотики спектра не изменится, если снять часть связей — заменить (6.37) на отношение

$$\pm\frac{(\mathcal{R}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}}{\mu E_\Omega[\mathbf{u}]}, \quad \mathbf{u}\in J_S^1(\Omega), \quad \boldsymbol{\varphi} := \mathbf{u}\big|_{\partial\widetilde{\Omega}}. \tag{6.39}$$

Лемма 6.3. *Выполнены равенства*

$$\Delta_2^\pm\ (6.37) = \Delta_2^\pm\ (6.39), \quad \delta_2^\pm\ (6.37) = \delta_2^\pm\ (6.39). \tag{6.40}$$

Доказательство. Положим $J_0^1(\Omega) := J^1(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Верно разложение $J_S^1(\Omega) = J_0^1(\Omega)\oplus^E J_S^1(\Omega,\mathcal{L})$, где ортогональная сумма понимается в смысле скалярного произведения $E_\Omega[\mathbf{u},\mathbf{v}]$.

Далее, положим $\widehat{J}_S^1(\Omega,\mathcal{L}) = \big\{\mathbf{u}\in J_S^1(\Omega,\mathcal{L}) : u_n = 0 \text{ на } \Gamma\big\}$. Предложение 6.6 показывает, что $J_S^1(\Omega,\mathcal{L}) = \widehat{J}_S^1(\Omega,\mathcal{L})\oplus\widetilde{J}_S^1(\Omega,\mathcal{L})$. Таким образом,

$$J_S^1(\Omega) = J_0^1(\Omega)\oplus\widehat{J}_S^1(\Omega,\mathcal{L})\oplus\widetilde{J}_S^1(\Omega,\mathcal{L}). \tag{6.41}$$

Положим $(\widehat{\mathcal{R}}\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{x}) = 4\mu^2\sigma^{-1}\widetilde{b}(\mathbf{x})\varphi_\nu(\mathbf{x})\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\partial\widetilde{\Omega}$, где φ_ν — нормальная компонента $\boldsymbol{\varphi}$ на $\partial\widetilde{\Omega}$. Тогда $\widehat{\mathcal{R}}$ — матричный ПДО на $\partial\widetilde{\Omega}$ порядка 0 со старшим символом $r^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$. Поэтому $(\mathcal{R}-\widehat{\mathcal{R}})$ — ПДО порядка не выше (-1). Рассмотрим отношение

$$\pm\frac{((\mathcal{R}-\widehat{\mathcal{R}})\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}}{\mu E_\Omega[\mathbf{u}]}, \quad \mathbf{u}\in J_S^1(\Omega), \quad \boldsymbol{\varphi} := \mathbf{u}\big|_{\partial\widetilde{\Omega}}. \tag{6.42}$$

Учитывая неравенство $E_\Omega[\mathbf{u}] \geqslant C\|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega})}$, $C>0$, в силу леммы 2.2 получаем, что функции $N_\pm(\lambda,(6.42))$ не превосходят функций распределения спектра отношения

$$\pm\frac{((\mathcal{R}-\widehat{\mathcal{R}})\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}}{\mu C\|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega})}}, \quad \boldsymbol{\varphi}\in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3). \tag{6.43}$$

Поскольку $N_\pm(\lambda,(6.43)) = O(\lambda^{-1})$, то $\Delta_2^\pm\ (6.43) = 0$. Отсюда в силу леммы 2.4 следует, что величины $\Delta_2^\pm\ (6.39)$, $\delta_2^\pm\ (6.39)$ совпадают с аналогичными величинами для отношения

$$\pm\frac{(\widehat{\mathcal{R}}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}}{\mu E_\Omega[\mathbf{u}]}, \quad \mathbf{u}\in J_S^1(\Omega), \quad \boldsymbol{\varphi} := \mathbf{u}\big|_{\partial\widetilde{\Omega}}, \tag{6.44}$$

а величины $\Delta_2^{\pm}$ (6.37), $\delta_2^{\pm}$ (6.37) совпадают с аналогичными величинами для отношения

$$\pm\frac{(\widehat{\mathcal{R}}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}}{\mu E_\Omega[\mathbf{u}]},\quad \mathbf{u}\in\widetilde{J}^1_S(\Omega,\mathcal{L}),\quad \boldsymbol{\varphi}:=\mathbf{u}\big|_{\partial\widetilde{\Omega}}. \tag{6.45}$$

Заметим, что $\widehat{\mathcal{R}}\boldsymbol{\varphi}=0$ при $\mathbf{u}\in J^1_0(\Omega)\oplus\widehat{J}^1_S(\Omega,\mathcal{L})$. Поэтому в силу (6.41) выполнено $N_\pm(\lambda,(6.44))=N_\pm(\lambda,(6.45))$. С учетом сказанного выше отсюда вытекают равенства (6.40). □

Из леммы 6.3, леммы 6.2 и равенств (6.28), (6.38) следует, что

$$\Delta_2^{\pm}\ (6.22)=\Delta_2^{\pm}\ (6.39),\quad \delta_2^{\pm}\ (6.22)=\delta_2^{\pm}\ (6.39). \tag{6.46}$$

Проведем теперь сравнение отношения (6.39) с отношениями форм, заданными в $\widetilde{\Omega}$. Для оценки $\Delta_2^{\pm}$ (6.39) сверху рассмотрим отношение

$$\pm\frac{(\mathcal{R}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}}{\mu E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u}]+C\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\widetilde{\Omega})}},\quad \mathbf{u}\in J^1(\widetilde{\Omega}),\quad \boldsymbol{\varphi}:=\mathbf{u}\big|_{\partial\widetilde{\Omega}}. \tag{6.47}$$

Здесь постоянная C настолько велика, что форма в знаменателе (6.47) определяет эквивалентную норму в $H^1(\widetilde{\Omega})$. Справедливо неравенство

$$\Delta_2^{\pm}\ (6.39)\leqslant\Delta_2^{\pm}\ (6.47). \tag{6.48}$$

Доказательство неравенства (6.48) аналогично доказательству неравенства (5.10) — следует воспользоваться леммой 2.2, в которой $\mathcal{S}$ — оператор сужения.

Для оценки $N_\pm(\lambda,(6.39))$ снизу рассмотрим отношение

$$\pm\frac{(\mathcal{R}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}}{\mu E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u}]},\quad \mathbf{u}\in J^1_{\widetilde{S}}(\widetilde{\Omega}),\quad \boldsymbol{\varphi}:=\mathbf{u}\big|_{\partial\widetilde{\Omega}}. \tag{6.49}$$

Здесь $\widetilde{S}=\partial\widetilde{\Omega}\setminus\widetilde{\Gamma}$ и $J^1_{\widetilde{S}}(\widetilde{\Omega})=\{\mathbf{u}\in J^1(\widetilde{\Omega}):\ \mathbf{u}|_{\widetilde{S}}=0\}$. По аналогии с доказательством неравенства (5.12), используя лемму 2.2 и оператор продолжения нулем, получаем, что

$$N_\pm(\lambda,(6.49))\leqslant N_\pm(\lambda,(6.39)). \tag{6.50}$$

6.6. Асимптотические формулы в гладком случае. Учитывая (6.46), (6.48) и (6.50), заключаем, что асимптотика спектра отношения (6.22) будет найдена, коль скоро будет установлено следующее утверждение.

Лемма 6.4. *При $\lambda\to+0$ справедливы асимптотические формулы*

$$N_\pm(\lambda,(6.47))\sim N_\pm(\lambda,(6.49))\sim\lambda^{-2}\frac{\mu^2}{\pi\sigma^2}\int_{\partial\widetilde{\Omega}}\widetilde{b}^2_\pm(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x}). \tag{6.51}$$

Доказательство. По аналогии с доказательством леммы 5.2 нетрудно показать, что задача о спектре отношения (6.47) эквивалентна (в смысле асимптотики спектра) задаче о спектре отношения

$$\pm\frac{(\mathcal{R}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}}{\mu(\mathcal{E}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}},\quad \boldsymbol{\varphi}\in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3), \tag{6.52}$$

а задача о спектре отношения (6.49) эквивалентна (в смысле асимптотики спектра) задаче о спектре отношения

$$\pm\frac{(\mathcal{R}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}}{\mu(\mathcal{E}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}},\quad \boldsymbol{\varphi}\in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3),\quad \boldsymbol{\varphi}|_{\widetilde{S}}=0. \tag{6.53}$$

ПДО $\mathcal{E}$ определен в пункте 5.4. Как и прежде, за счет изменения младших членов в $\mathcal{E}$ мы считаем выполненным неравенство (5.19). Рассмотрим алгебраическую задачу

$$r^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\mathbf{z}=\lambda\mu e^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\mathbf{z},\quad \mathbf{z}\in\mathbb{C}^3. \tag{6.54}$$

Из леммы 2.10 и леммы 2.11 следует справедливость асимптотических формул при $\lambda\to+0$:

$$N_\pm(\lambda,(6.52))\sim\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\partial\widetilde{\Omega}}dS(\mathbf{x})\int_{\boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})}d\boldsymbol{\xi}\,n_\pm(\lambda,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};\ (6.54)), \tag{6.55}$$

$$N_\pm(\lambda,(6.53)) \sim \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\widetilde{\Gamma}} dS(\mathbf{x})\int_{\boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})} d\boldsymbol{\xi}\, n_\pm(\lambda,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};\ (6.54)). \tag{6.56}$$

В соответствии с выражениями для $r^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ и $e^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ (см. (5.31), (6.36)) имеем:

$$n_\pm(\lambda,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};\ (6.54)) = \begin{cases} 1, & \lambda < \frac{2\mu\widetilde{b}_\pm(\mathbf{x})}{\sigma|\boldsymbol{\xi}|},\\ 0, & \lambda \geqslant \frac{2\mu\widetilde{b}_\pm(\mathbf{x})}{\sigma|\boldsymbol{\xi}|}.\end{cases}$$

Вычисляя по формулам (6.55) и (6.56), получаем (6.51). $\square$

Из (6.46), (6.48), (6.50) и леммы 6.4 вытекает формула (6.23) в случае, когда $b \in C_0^\infty(\Gamma)$. По замыканию асимптотика верна для любой $b \in C^\infty(\overline{\Gamma})$. Теорема 6.2, а вместе с ней и теорема 6.1, доказаны.

6.7. Колебания системы капиллярных вязких жидкостей. Теорема 5.1 допускает обобщение на случай колебаний системы капиллярных вязких жидкостей, частично или полностью заполняющих сосуд. Для определенности рассмотрим случай полного заполнения. Мы ограничимся постановкой задачи и формулировкой результата.

Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ удовлетворяет условию 4.3. Для системы вектор-функций $\{\mathbf{u}_j(\mathbf{x})\}$, $j = 1,\dots,k+1$, и системы скалярных функций $\{p_j(\mathbf{x})\}$, $j = 1,\dots,k+1$, рассматривается краевая задача

$$\begin{aligned}
&-\mu_j\Delta\mathbf{u}_j + \nabla p_j = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u}_j = 0 \ \text{ в } \Omega_j, \quad j = 1,\dots,k+1,\\
&\mathbf{u}_j = 0 \ \text{ на } S_j, \quad j = 1,\dots,k+1,\\
&\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_{j+1}, \quad \boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u}_j) = \boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u}_{j+1}) \ \text{ на } \Gamma_j, \quad j = 1,\dots,k,\\
&\left(-\sigma_j\Delta_{\Gamma_j} + h_j(\mathbf{x})\right)u_{jn} = \lambda^{-1}\left(\tau_{nn}^{(j)} - \tau_{nn}^{(j+1)} + c_j\right) \ \text{ на } \Gamma_j, \quad j = 1,\dots,k.
\end{aligned} \tag{6.57}$$

Здесь $u_{jn}(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{u}_j(\mathbf{x}), \mathbf{n}_j(\mathbf{x})\rangle$, $\tau_{nn}^{(j)} := \tau_{nn}(\mathbf{u}_j, p_j)$; $\mu_j > 0$, $\sigma_j > 0$ — постоянные; $h_j \in C^\infty(\overline{\Gamma_j})$ — вещественные функции. Постоянные c_j ищутся вместе с решением.

Через $\mathbf{B}_j$ обозначим оператор в $L_2(\Gamma_j)$, заданный выражением $-\sigma_j\Delta_{\Gamma_j} + h_j(\mathbf{x})$ на области определения $\operatorname{Dom}\mathbf{B}_j = H^2(\Gamma_j)\cap H_0^1(\Gamma_j)$.

Приведем вариационную постановку задачи (6.57) в случае, когда операторы $\mathbf{B}_j$ обратимы (общий случай можно рассмотреть по аналогии с пунктом 6.2). Пусть $z_j = \mathbf{B}_j^{-1}1$ и P_{z_j} — проектор в $L_2(\Gamma_j)$, определенный аналогично (6.2).

Задача (6.57) эквивалентна задаче о спектре отношения квадратичных форм

$$\begin{aligned}
&\pm\frac{\sum\limits_{j=1}^{k}\int_{\Gamma_j}\left(\mathbf{B}_j^{-1}P_{z_j}\left(\tau_{nn}^{(j)} - \tau_{nn}^{(j+1)}\right)\right)\overline{P_{z_j}\left(\tau_{nn}^{(j)} - \tau_{nn}^{(j+1)}\right)}\,dS}{\sum\limits_{j=1}^{k+1}\mu_j E_{\Omega_j}[\mathbf{u}_j]},\\
&\mathbf{u}_j \in H^1(\Omega_j;\mathbb{C}^3), \quad p_j \in L_2(\Omega_j), \quad j = 1,\dots,k+1,\\
&-\mu_j\Delta\mathbf{u}_j + \nabla p_j = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u}_j = 0 \ \text{ в } \Omega_j, \quad \mathbf{u}_j = 0 \ \text{ на } S_j, \quad j = 1,\dots,k+1,\\
&\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_{j+1}, \quad \boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u}_j) = \boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u}_{j+1}) \ \text{ на } \Gamma_j, \quad j = 1,\dots,k.
\end{aligned} \tag{6.58}$$

Предложение 6.8. *При сделанных предположениях для функции распределения спектра отношения* (6.58) *при* $\lambda \to +0$ *справедлива асимптотика*:

$$N(\lambda,(6.58)) \sim \lambda^{-2}\sum_{j=1}^{k}(\mu_j + \mu_{j+1})^2\frac{\operatorname{mes}\Gamma_j}{\pi\sigma_j^2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С.* Смешанные задачи в липшицевой области для сильно эллиптических систем 2-го порядка// Функц. анализ и его прилож. — 2011. — *45*, № 2. — С. 1–22.
2. *Агранович М. С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. — М.: МЦНМО, 2013.

3. *Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Гидромеханика невесомости. — М.: Наука, 1976.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наукова думка, 1965.
5. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.
6. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная асимптотика негладких эллиптических операторов. I// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1972. — № 27. — С. 3–52.
7. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Количественный анализ в теоремах вложения Соболева и приложения к спектральной теории// В сб.: «Десятая мат. школа». — Киев, 1974. — С. 5–189.
8. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра псевдодифференциальных операторов с анизотропно-однородными символами. I// Вестн. Ленингр. ун-та. — 1977. — № 13. — С. 13–21.
9. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений// Итоги науки и техн. Мат. анализ. — 1977. — *14*. — С. 5–58.
10. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра псевдодифференциальных операторов с анизотропно-однородными символами. II// Вестн. Ленингр. ун-та. — 1979. — № 13. — С. 5–10.
11. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра вариационных задач на решениях эллиптических уравнений// Сиб. мат. ж. — 1979. — *20*, № 1. — С. 3–22.
12. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра вариационных задач на решениях эллиптических систем// Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1982. — *115*. — С. 23–39.
13. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Компактные операторы со степенной асимптотикой сингулярных чисел// Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1983. — *126*. — С. 21–30.
14. *Вулис И. Л., Соломяк М. З.* Спектральная асимптотика вырождающейся задачи Стеклова// Вестн. Ленингр. ун-та — 1973. — № 19. — С. 262–265.
15. *Каразеева Н. А., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра контактной задачи для эллиптических уравнений второго порядка// Пробл. мат. анализа. — 1981. — № 8. — С. 36–48.
16. *Кожевников А. Н.* Об асимптотике собственных значений и полноте корневых векторов оператора, порожденного краевой задачей с параметром в краевом условии// Докл. АН СССР. — 1971. — *200*, № 6. — С. 1273–1276.
17. *Кожевников А. Н.* Спектральные задачи для псевдодифференциальных систем, эллиптических по Дуглису—Ниренбергу// Мат. сб. — 1973. — *92*, № 1. — С. 60–88.
18. *Копачевский Н. Д.* Нормальные колебания системы тяжелых вязких вращающихся жидкостей// Докл. АН УССР. Сер. А. — 1978. — № 7. — С. 586–590.
19. *Копачевский Н. Д.* Малые движения и нормальные колебания системы тяжелых вязких вращающихся жидкостей. — Харьков: ФТИНТ АН УССР, Препринт 33–77. — 1978.
20. *Копачевский Н. Д.* Теория малых колебаний жидкостей с учетом сил поверхностного натяжения и вращения// Дисс. доктора физ.-мат. наук. — Харьков: ФТИНТ АН УССР, 1979.
21. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. — М.: Наука, 1989.
22. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
23. *Лукьянов В. В., Назаров А. И.* Решение задачи Вентцеля для уравнения Лапласа и Гельмгольца с помощью повторных потенциалов// Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1998. — *250*. — С. 203–218.
24. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. — М.: Гостехиздат, 1952.
25. *Розенблюм Г. В.* Асимптотика собственных значений некоторых двумерных спектральных задач// Пробл. мат. анализа. — 1979. — *7*. — С. 188–203.
26. *Розенблюм Г. В.* Частное сообщение. — 2021.
27. *Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Пространства Соболева// В сб.: «Избранные главы анализа и высшей алгебры». — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981.
28. *Суслина Т. А.* Асимптотика спектра вариационных задач на решениях однородного эллиптического уравнения при наличии связей на части границы// Пробл. мат. анализа. — 1984. — № 9. — С. 84–97.
29. *Суслина Т. А.* Асимптотика спектра некоторых задач, связанных с колебаниями жидкостей// Деп. в ВИНИТИ. — 1985. — № 8058-В.
30. *Суслина Т. А.* Асимптотика спектра вариационных задач на решениях эллиптического уравнения в области с кусочно-гладкой границей// Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1985. — *147*. — С. 179–183.
31. *Суслина Т. А.* Об асимптотике спектра некоторых задач, связанных с колебаниями жидкостей// Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1986. — *152*. — С. 158–164.
32. *Суслина Т. А.* Асимптотика спектра двух модельных задач теории колебаний жидкостей// Тр. СПб. Мат. об-ва. — 1996. — *4*. — С. 287–322.

33. *Темам Р.* Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1981.
34. *Трев Ф.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1984.
35. *Boutet de Monvel L.* Boundary problems for pseudodifferential operators// Acta Math. — 1971. — *126.* — С. 11–51.
36. *Galkowski J., Toth J. A.* Poinwise bounds for Steklov eigenfunctions// J. Geom. Anal. — 2019. — *29.* — С. 142–193.
37. *Girouard A., Polterovich I.* Spectral geometry of the Steklov problem// J. Spectr. Theory — 2017. — *7*, № 2. — С. 321–359.
38. *Grubb G.* Functional calculus of pseudodifferential boundary problems. — Boston: Birkhäuser, 1996.
39. *Grubb G., Geymonat G.* The essential spectrum of elliptic systems of mixed order// Math. Ann. — 1977. — *227.* — С. 247–276.
40. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint problems for an ideal fluid. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2001.
41. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Non-self-adjoint problems for viscous fluids. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2003.
42. *Maz'ya V. G., Plamenevskii B. A.* The first boundary value problem for the classical equations of mathematical physics. I// Z. Anal. Anwend. — 1983. — *2*, № 1. — С. 335–359.
43. *Metivier G.* Valeurs propres d'operateurs definis par la restriction de systemes variationnels a des sous-espaces// J. Math. Pures Appl. — 1978. — *57*, № 2. — С. 133–156.
44. *Sandgren L.* A vibration problem// Medd. Lunds Univ. Mat. Semin. — 1955. — *13.*
45. *Suslina T. A.* Spectral asymptotics of variational problems with elliptic constraints in domains with piecewise smooth boundary// Russ. J. Math. Phys. — 1999. — *6*, № 2. — С. 214–234.
46. *Zhu J.* Geometry and interior nodal sets of Steklov eigenfunctions// Calc. Var. Part. Differ. Equ. — 2020. — *59*, № 5. — Paper No. 150.

Т. А. Суслина

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб., дом 7/9, Санкт-Петербург, 199034

E-mail: `t.suslina@spbu.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-363-407 UDC 517.95

Asymptotics of the Spectrum of Variational Problems Arising in the Theory of Fluid Oscillations

© 2021 **T. A. Suslina**

Abstract. This work is a survey of results on the asymptotics of the spectrum of variational problems arising in the theory of small oscillations of a fluid in a vessel near the equilibrium position. The problems were posed by N. D. Kopachevsky in the late 1970s and cover various fluid models. The formulations of problems are given both in the form of boundary-value problems for eigenvalues in the domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, which is occupied by the fluid in the equilibrium state, and in the form of variational problems on the spectrum of the ratio of quadratic forms. The common features of all the problems under consideration are the presence of an "elliptic" constraint (the Laplace equation for an ideal fluid or a homogeneous Stokes system for a viscous fluid), as well as the occurrence of the spectral parameter in the boundary condition on the free (equilibrium) surface Γ. The spectrum in the considered problems is discrete; the spectrum distribution functions have power-law asymptotics.

REFERENCES

1. M. S. Agranovich, "Smeshannye zadachi v lipshitsevoy oblasti dlya sil'no ellipticheskikh sistem 2-go poryadka" [Mixed problems in a Lipschitz domain for strongly elliptic second-order systems], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2011, **45**, No. 2, 1–22 (in Russian).
2. M. S. Agranovich, *Sobolevskie prostranstva, ikh obobshcheniya i ellipticheskie zadachi v oblastyakh s gladkoy i lipshitsevoy granitsey* [Sobolev spaces, Their Generalizations and Elliptic Problems in Domains with Smooth and Lipschitz Boundaries], MTsNMO, Moscow, 2013 (in Russian).
3. V. G. Babskii, N. D. Kopachevsky, A. D. Myshkis, L. A. Slobozhanin, and A. D. Tyuptsov, *Gidromekhanika nevesomosti* [Zero Gravity Hydromechanics], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
4. Yu. M. Berezanskii, *Razlozhenie po sobstvennym funktsiyam samosopryazhennykh operatorov* [Expansion in Eigenfunctions of Self-Adjoint Operators], Naukova dumka, Kiev, 1965 (in Russian).
5. O. V. Besov, V. P. Il'in, and S. M. Nikol'skii, *Integral'nye predstavleniya funktsiy i teoremy vlozheniya* [Integral Representations of Functions and Embedding Theorems], Nauka, Moscow, 1975 (in Russian).
6. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, "Spektral'naya asimptotika negladkikh ellipticheskikh operatorov. I" [Spectral Asymptotics of Nonsmooth Elliptic Operators. I], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1972, No. 27, 3–52 (in Russian).
7. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, "Kolichestvennyi analiz v teoremakh vlozheniya Soboleva i prilozheniya k spektral'noy teorii" [Quantitative Analysis in Sobolev Embedding Theorems and Applications to Spectral Theory], In: *Desyataya mat. shkola* [Tenth Math. School], Kiev, 1974, pp. 5–189 (in Russian).
8. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, "Asimptotika spektra psevdodifferentsial'nykh operatorov s anizotropno-odnorodnymi simvolami. I" [Asymptotics of the spectrum of pseudodifferential operators with anisotropic homogeneous symbols. I], *Vestn. Leningr. un-ta* [Bull. Leningrad Univ.], 1977, No. 13, 13–21 (in Russian).
9. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, "Asimptotika spektra differentsial'nykh uravneniy" [Asymptotics of the spectrum of differential equations], *Itogi nauki i tekhn. Mat. analiz* [Totals Sci. Tech. Math. Anal.], 1977, **14**, 5–58 (in Russian).
10. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, "Asimptotika spektra psevdodifferentsial'nykh operatorov s anizotropno-odnorodnymi simvolami. II" [Asymptotics of the spectrum of pseudodifferential operators with anisotropic homogeneous symbols. II], *Vestn. Leningr. un-ta* [Bull. Leningrad Univ.], 1979, No. 13, 5–10 (in Russian).
11. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, "Asimptotika spektra variatsionnykh zadach na resheniyakh ellipticheskikh uravneniy" [Asymptotics of the spectrum of variational problems on solutions of elliptic equations], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1979, **20**, No. 1, 3–22 (in Russian).
12. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, "Asimptotika spektra variatsionnykh zadach na resheniyakh ellipticheskikh sistem" [Asymptotics of the spectrum of variational problems on solutions of elliptic systems], *Zap. nauch. sem. LOMI* [Notes Sci. Semin. Leningrad Dept. Math. Inst. Acad. Sci.], 1982, **115**, 23–39 (in Russian).
13. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, "Kompaktnye operatory so stepennoy asimptotikoy singulyarnykh chisel" [Compact operators with power asymptotics for singular numbers], *Zap. nauch. sem. LOMI* [Notes Sci. Semin. Leningrad Dept. Math. Inst. Acad. Sci.], 1983, **126**, 21–30 (in Russian).
14. I. L. Vulis and M. Z. Solomyak, "Spektral'naya asimptotika vyrozhdayushcheysya zadachi Steklova" [Spectral asymptotics of the degenerate Steklov problem], *Vestn. Leningr. un-ta* [Bull. Leningrad Univ.], 1973, No. 19, 262–265 (in Russian).
15. N. A. Karazeeva and M. Z. Solomyak, "Asimptotika spektra kontaktnoy zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy vtorogo poryadka" [Asymptotics of the spectrum of a contact problem for second-order elliptic equations], *Probl. mat. analiza* [Probl. Math. Anal.], 1981, No. 8, 36–48 (in Russian).
16. A. N. Kozhevnikov, "Ob asimptotike sobstvennykh znacheniy i polnote kornevykh vektorov operatora, porozhdennogo kraevoy zadachey s parametrom v kraevom uslovii" [On the asymptotics of the eigenvalues and the completeness of the root vectors of an operator generated by a boundary-value problem with a parameter in the boundary condition], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1971, **200**, No. 6, 1273–1276 (in Russian).
17. A. N. Kozhevnikov, "Spektral'nye zadachi dlya psevdodifferentsial'nykh sistem, ellipticheskikh po Duglisu—Nirenbergu" [Spectral problems for pseudodifferential systems elliptic in the Douglis–Nirenberg sense], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1973, **92**, No. 1, 60–88 (in Russian).
18. N. D. Kopachevsky, "Normal'nye kolebaniya sistemy tyazhelykh vyazkikh vrashchayushchikhsya zhidkostey" [Normal oscillations of a system of heavy viscous rotating fluids], *Dokl. AN USSR. Ser. A* [Rep. Acad. Sci. Ukr. SSR. Ser. A], 1978, No. 7, 586–590 (in Russian).

19. N. D. Kopachevsky, “Malye dvizheniya i normal’nye kolebaniya sistemy tyazhelykh vyazkikh vrashchayushchikhsya zhidkostey” [Small Movements and Normal Oscillations of a System of Heavy Viscous Rotating Fluids], Khar’kov, FTINT AN Ukr. SSR, 1978, Preprint 33–77.
20. N. D. Kopachevsky, “Teoriya malykh kolebaniy zhidkostey s uchetom sil poverkhnostnogo natyazheniya i vrashcheniya” [Theory of small oscillations of liquids taking into account the forces of surface tension and rotation], *Doctoral Thesis*, FTINT AN Ukr. SSR, Khar’kov, 1979.
21. N.D. Kopachevsky, S.G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
22. J.L. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
23. V. V. Luk’yanov and A. I. Nazarov, “Reshenie zadachi Venttselya dlya uravneniya Laplasa i Gel’mgol’tsa s pomoshch’yu povtornykh potentsialov” [Solution of the Wentzell problem for the Laplace and Helmholtz equation using repeated potentials], *Zap. nauch. sem. LOMI* [Notes Sci. Semin. Leningrad Dept. Math. Inst. Acad. Sci.], 1998, **250**, 203–218 (in Russian).
24. S. G. Mikhlin, *Problema minimuma kvadratichnogo funktsionala* [The problem of the Minimum of a Quadratic Functional], Gostekhizdat, Moscow, 1952 (in Russian).
25. G. V. Rozenblum, “Asimptotika sobstvennykh znacheniy nekotorykh dvumernykh spektral’nykh zadach” [Asymptotics of the eigenvalues of some two-dimensional spectral problems], *Probl. mat. analiza* [Probl. Math. Anal.], 1979, **7**, 188–203 (in Russian).
26. G. V. Rozenblum, Personal communication, 2021 (in Russian).
27. V. A. Solonnikov and N. N. Ural’tseva, “Prostranstva Soboleva” [Sobolev spaces], In: *Izbrannye glavy analiza i vysshey algebry* [Selected Chapters of Analysis and Higher Algebra], Leningrad Univ., Leningrad, 1981, pp. 129–196 (in Russian).
28. T. A. Suslina, “Asimptotika spektra variatsionnykh zadach na resheniyakh odnorodnogo ellipticheskogo uravneniya pri nalichii svyazey na chasti granitsy” [Asymptotics of the spectrum of variational problems on solutions of a homogeneous elliptic equation in the presence of constraints on a part of the boundary], *Probl. mat. analiza* [Probl. Math. Anal.], 1984, No. 9, 84–97 (in Russian).
29. T. A. Suslina, “Asimptotika spektra nekotorykh zadach, svyazannykh s kolebaniyami zhidkostey” [Asymptotics of the spectrum of some problems related to oscillations of fluids], VINITI, 1985, No. 8058-B.
30. T. A. Suslina, “Asimptotika spektra variatsionnykh zadach na resheniyakh ellipticheskogo uravneniya v oblasti s kusochno-gladkoy granitsey” [Asymptotics of the spectrum of variational problems on solutions of an elliptic equation in a domain with a piecewise smooth boundary], *Zap. nauch. sem. LOMI* [Notes Sci. Semin. Leningrad Dept. Math. Inst. Acad. Sci.], 1985, **147**, 179–183 (in Russian).
31. T. A. Suslina, “Ob asimptotike spektra nekotorykh zadach, svyazannykh s kolebaniyami zhidkostey” [On the asymptotics of the spectrum of some problems related to oscillations of fluids], *Zap. nauch. sem. LOMI* [Notes Sci. Semin. Leningrad Dept. Math. Inst. Acad. Sci.], 1986, **152**, 158–164 (in Russian).
32. T. A. Suslina, “Asimptotika spektra dvukh model’nykh zadach teorii kolebaniy zhidkostey” [Asymptotics of the spectrum of two model problems in the theory of oscillations of fluids], *Tr. SPb. Mat. ob-va* [Proc. Saint Petersburg Math. Soc.], 1996, **4**, 287–322 (in Russian).
33. R. Temam, *Uravneniya Nav’e—Stoksa. Teoriya i chislennyi analiz* [Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis], Mir, Moscow, 1981 (Russian translation).
34. J.-F. Treves, *Vvedenie v teoriyu psevdodifferentsial’nykh operatorov i integral’nykh operatorov Fur’e. T. 1, 2* [Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators. Vol. 1, 2], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
35. L. Boutet de Monvel, “Boundary problems for pseudodifferential operators,” *Acta Math.*, 1971, **126**, 11–51.
36. J. Galkowski and J. A. Toth, “Poinwise bounds for Steklov eigenfunctions,” *J. Geom. Anal.*, 2019, **29**, 142–193.
37. A. Girouard and I. Polterovich, “Spectral geometry of the Steklov problem,” *J. Spectr. Theory*, 2017, **7**, No. 2, 321–359.
38. G. Grubb, *Functional Calculus of Pseudodifferential Boundary Problems*, Birkhäuser, Boston, 1996.
39. G. Grubb and G. Geymonat, “The essential spectrum of elliptic systems of mixed order,” *Math. Ann.*, 1977, **227**, 247–276.
40. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Self-Adjoint Problems for an Ideal Fluid*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 2001.
41. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Non-Self-Adjoint Problems for Viscous Fluids*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 2003.
42. V. G. Maz’ya and B. A. Plamenevskii, “The first boundary value problem for the classical equations of mathematical physics. I,” *Z. Anal. Anwend.*, 1983, **2**, No. 1, 335–359.

43. G. Metivier, "Valeurs propres d'operateurs definis par la restriction de systemes variationnels a des sous-espaces," *J. Math. Pures Appl.*, 1978, **57**, No. 2, 133–156.
44. L. Sandgren, "A vibration problem," *Medd. Lunds Univ. Mat. Semin.*, 1955, **13**.
45. T. A. Suslina, "Spectral asymptotics of variational problems with elliptic constraints in domains with piecewise smooth boundary," *Russ. J. Math. Phys.*, 1999, **6**, No. 2, 214–234.
46. J. Zhu, "Geometry and interior nodal sets of Steklov eigenfunctions," *Calc. Var. Part. Differ. Equ.*, 2020, **59**, No. 5, Paper No. 150.

T. A. Suslina
Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia
E-mail: t.suslina@spbu.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 2 (2021). С. 408–421

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-408-421 УДК 517.984

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОРЯДКОВ С НЕИНТЕГРИРУЕМЫМИ РЕГУЛЯРНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

© 2021 г. **В. А. ЮРКО**

Аннотация. Дается краткий обзор результатов по спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов произвольных порядков с неинтегрируемыми регулярными особенностями. Установлены свойства спектральных характеристик, доказаны теоремы о полноте корневых функций в соответствующих пространствах, теоремы о разложении и равносходимости, приводится решение обратной спектральной задачи для этого класса операторов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение 408
2. Дифференциальные операторы на полуоси 409
3. Дифференциальные операторы на конечном интервале 415
4. Дифференциальные операторы с особенностью во внутри интервала 417
Список литературы 420

Светлой памяти Николая Дмитриевича Копачевского.

1. Введение

Цель статьи — дать краткий обзор результатов по спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов произвольных порядков с неинтегрируемыми регулярными особенностями. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(x)+\sum_{j=0}^{n-2}\Big(\frac{\nu_j}{(x-a)^{n-j}}+q_j(x)\Big)y^{(j)}(x)=\lambda y(x),\ n\geqslant 2,\ 0\leqslant x\leqslant T\leqslant\infty, \tag{1.1}$$

где $0\leqslant a<T$, ν_j — комплексные числа, а $q_j(x)$ — комплекснозначные функции, условия на которые будут даны позднее. Пусть $\mu_1,\ldots,\mu_n$ — корни характеристического многочлена

$$\delta(\mu):=\sum_{j=0}^{n}\nu_j\prod_{k=0}^{j-1}(\mu-k),\ \nu_n:=1,\ \nu_{n-1}:=0,$$

причем для определенности $\mu_k-\mu_j\neq sn$ $(s=0,\pm1,\pm2,\ldots)$, $\operatorname{Re}\mu_1<\ldots<\operatorname{Re}\mu_n$ (остальные случаи вносят незначительные изменения). Спектральные свойства операторов зависят от расположения чисел $\mu_1,\ldots,\mu_n$ на комплексной плоскости. Обозначим $\theta_{\nu j}:=n-1-\operatorname{Re}(\mu_n-\mu_1)-j+\nu$.

Дифференциальные уравнения с неинтегрируемыми особенностями возникают в различных разделах математики и приложениях. К уравнению (1.1) также сводятся дифференциальные уравнения с точками поворота, например, уравнение $z^{(n)}(t)=\lambda r(t)z(t)$, $r(t)\sim\alpha t^{\gamma}$, $t\to 0$, и многие другие (см. [1, 8, 10]). Уравнение (1.1) является в некотором смысле каноническим для широкого класса

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00102).

уравнений с особенностями и точками поворота. При $n = 2$ прямые и обратные спектральные задачи для операторов с особенностями изучены достаточно полно. Случай $n > 2$ является существенно более трудным. Именно этому случаю и посвящен настоящий обзор, хотя приведенные результаты верны и для $n = 2$.

Исследованию дифференциальных операторов при $n > 2$ с *интегрируемыми* коэффициентами посвящена обширная литература (см. [2, 3, 5] и библиографию в них). Наличие неинтегрируемой особенности вносит значительные качественные изменения в исследовании прямых и обратных спектральных задач. Важную роль в спектральной теории дифференциальных операторов играют специальные фундаментальные системы решений (ФСР), обладающие требуемыми аналитическими и асимптотическими свойствами. При построении таких ФСР для уравнения (1.1) возникают существенные трудности. В частности, в отличие от уравнений без особенностей, важной и технически сложной задачей является получение асимптотических свойств множителей Стокса, связывающих построенные ФСР. Существенную роль в прямых и обратных задачах для уравнения (1.1) играет также введенная в [9] так называемая *матрица Вейля*. Опираясь на свойства построенных ФСР, множителей Стокса и матрицы Вейля, проведено исследование спектральных свойств операторов с неинтегрируемыми особенностями, доказаны теоремы о полноте корневых функций в соответствующих пространствах, теоремы о разложении и равносходимости, получено решение обратной спектральной задачи для этого класса операторов.

Несколько слов о структуре статьи. В разделах 2-3 исследуется уравнение (1.1) при $a = 0$, т. е. в случае, когда особенность находится на конце интервала. При этом в разделе 2 изучается случай полуоси, а раздел 3 посвящен случаю конечного интервала. В разделе 4 исследуется более трудный случай $a > 0$, когда особенность лежит внутри интервала. Для удобства читателя изложение материала в разделах 2-4 независимо друг от друга.

Этот краткий обзор не претендует на полноту. В нем изложены только основные результаты по спектральной теории дифференциальных операторов с неинтегрируемыми регулярными особенностями для случая $n > 2$. Более подробную информацию можно найти в работах, приведенных в библиографическом списке. Отметим, что в последнее время появились важные работы [6,7], в которых исследуются дифференциальные системы с неинтегрируемыми регулярными особенностями.

2. Дифференциальные операторы на полуоси

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ell y := y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-2} \Big(\frac{\nu_j}{x^{n-j}} + q_j(x) \Big) y^{(j)} = \lambda y, \tag{2.1}$$

на полуоси $x > 0$. Положим $q_{\nu j}(x) := \begin{cases} q_j^{(\nu)}(x) & \text{при } x \geqslant 1, \\ q_j^{(\nu)}(x) x^{\theta_{\nu j}} & \text{при } x < 1. \end{cases}$

Будем говорить, что $q_j(x) \in W_j$, если функции $q_j^{(\nu)}(x)$ абсолютно непрерывны при $\nu = \overline{0, j-1}$ и $q_{\nu j}(x) \in L(0,\infty)$ при $0 \leqslant \nu \leqslant j \leqslant n-2$. Будем говорить,что $\ell \in V$, если $q_j(x) \in W_j$.

Построим специальные ФСР для уравнения (2.1) и установим свойства множителей Стокса для этих систем. Построение проводится в три этапа.

1) Рассмотрим «простейшее» уравнение без спектрального параметра:

$$\ell_0 y := y^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{\nu_j}{x^{n-j}}\, y^{(j)}(x) = y(x) \tag{2.2}$$

в комплексной x-плоскости. Пусть $x = r\exp(i\varphi)$, $r > 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $x^\mu := \exp(\mu(\ln r + i\varphi))$, а Π_- — x-плоскость с разрезом по полуоси $x \leqslant 0$. Пусть числа c_{j0}, $j = \overline{1,n}$ выбраны так, чтобы

$$\prod_{j=1}^{n} c_{j0} = (\det[\mu_j^{\nu-1}]_{j,\nu=\overline{1,n}})^{-1}.$$

Тогда функции

$$C_j(x) = x^{\mu_j} \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk} x^{nk}, \quad c_{jk} = c_{j0} \Big(\prod_{s=1}^{k} \delta(\mu_j + sn) \Big)^{-1} \tag{2.3}$$

являются решениями уравнения (2.2). В силу (2.3) функции $C_j(x)$ являются регулярными в области Π_- и $\det[C_j^{(\nu-1)}(x)]_{j,\nu=\overline{1,n}} \equiv 1$.

Обозначим $\varepsilon_k = \exp\big(\frac{2\pi i(k-1)}{n}\big)$, $S_k = \big\{x : \arg x \in \big(\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\big)\big\}$, $S_1^* = \bar S_{n-1}$, $S_k^* = \bar S_{n-2k+1} \cup \bar S_{n-2k+2}$, $k = \overline{2,n}$, $Q_k = \big\{x : \arg x \in \big[\max\big(-\pi, (-2k+2)\frac{\pi}{n}\big), \min\big(\pi, (2n-2k+2)\frac{\pi}{n}\big)\big]\big\}$, $k = \overline{1,n}$.

При $x \in S_k^*$ уравнение (2.2) имеет решения типа Йоста $e_k(x)$, $k = \overline{1,n}$ вида $e_k^{(\nu-1)}(x) = \varepsilon_k^\nu \exp(\varepsilon_k x) z_{k\nu(x)}$, $\nu = \overline{0,n-1}$, где функции $z_{k\nu}(x)$ являются решениями интегральных уравнений (2.4):

$$z_{k\nu}(x) = 1 + \frac{1}{n}\int_x^\infty \Big(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j^{\nu+1}\varepsilon_k^{-\nu}\exp((\varepsilon_k - \varepsilon_j)(t-x))\Big)\Big(\sum_{m=0}^{n-2} \nu_m \varepsilon_k^m t^{m-n} z_{km}(t)\Big)\,dt \tag{2.4}$$

(здесь $\arg t = \arg x$, $|t| > |x|$). Разложим $e_k(x)$ по ФСР $\{C_j(x)\}_{j=\overline{1,n}}$:

$$e_k(x) = \sum_{j=1}^n \beta_{kj}^0 C_j(x). \tag{2.5}$$

В частности, это дает аналитическое продолжение для $e_k(x)$ в Π_-. Функции $e_k(x)$ образуют ФСР уравнения (2.2), причем $\det[e_k^{(\nu-1)}(x)]_{k,\nu=\overline{1,n}} = \det[\varepsilon_k^{\nu-1}]_{k,\nu=\overline{1,n}}$. Имеет место асимптотическая формула

$$e_k^{(\nu-1)}(x) = \varepsilon_k^{\nu-1}\exp(\varepsilon_k x)(1 + O(x^{-1})), \quad |x| \to \infty,\ x \in Q_k. \tag{2.6}$$

Отметим, что формулы (2.6) при $x \in S_k^*$ очевидны. Однако удается доказать, что (2.6) действуют в более широких секторах Q_k, что является важным для дальнейшего исследования фактом.

Лемма 2.1. *Справедливы соотношения*

$$\beta_{kj}^0 = \beta_{1j}^0 \varepsilon_k^{\mu_j}, \quad j,k = \overline{1,n}, \tag{2.7}$$

$$\prod_{j=1}^n \beta_{1j}^0 = (\det[\varepsilon_k^{\mu_j}]_{k,j=\overline{1,n}})^{-1}\det[\varepsilon_k^{j-1}]_{k,j=\overline{1,n}} \neq 0. \tag{2.8}$$

Доказательство. В самом деле, при $\arg x \in \big(-\pi, \pi - \frac{2\pi s}{n}\big)$ имеем

$$e_k(\varepsilon^s x) = \sum_{j=1}^n \beta_{kj}^0 (\varepsilon^s)^{\mu_j} C_j(x). \tag{2.9}$$

Из построения функций $e_k(x)$ следует, что $e_1(\varepsilon^s x) = e_{s+1}(x)$. Подставляя (2.5) и (2.9) в это равенство и сравнивая соответствующие коэффициенты, получаем (2.7). После этого (2.8) становится очевидным. ☐

Формулы (2.6) дают связи между множителями Стокса β_{kj}^0, что сыграет важную роль при изучении свойств множителей Стокса для уравнения (2.1).

2) Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$\ell_0 y = \lambda y = \rho^n y, \quad x > 0. \tag{2.10}$$

Очевидно, что если $y(x)$ — решение уравнения (2.2), то $y(\rho x)$ удовлетворяет (2.10). Положим $C_j(x,\lambda) = \rho^{-\mu_j} C_j(\rho x) = x^{\mu_j}\sum\limits_{k=0}^\infty c_{jk}(\rho x)^{nk}$. Функции $C_j(x,\lambda)$ являются целыми по λ решениями уравнения (2.10), причем $\det[C_j^{(\nu-1)}(x,\lambda)]_{j,\nu=\overline{1,n}} \equiv 1$.

В каждом секторе $S_{k_0} = \big\{\rho : \arg\rho \in \big(\frac{k_0\pi}{n}, \frac{(k_0+1)\pi}{n}\big)\big\}$ корни R_k уравнения $R^n = 1$ можно занумеровать так, чтобы $\mathrm{Re}(\rho R_1) < \ldots < \mathrm{Re}(\rho R_n)$, $\rho \in S_{k_0}$. Ясно, что $R_k = \exp(2i\pi\omega_k/n)$, где ω_k — перестановка чисел $\overline{0,n-1}$, своя для каждого сектора. Из вышеизложенного вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.1. *В каждом секторе S_{k_0} дифференциальное уравнение* (2.2) *имеет ФСР $B_0 = \{y_k(x,\rho)\}_{k=\overline{1,n}}$ такую, что $y_k(x,\rho) = y_k(\rho x)$, $y_k(x) = e_{\omega_k+1}(x)$,*

$$\big|y_k^{(\nu)}(x,\rho)(\rho R_k)^{-\nu}\exp(-\rho R_k x) - 1\big| \leqslant \frac{M_0}{|\rho|x}, \quad \rho \in \bar S_{k_0}, \quad |\rho|x \geqslant 1, \quad \nu = \overline{0,n-1},$$

$$\det\big[y_k^{(\nu-1)}(x,\rho)\big]_{k,\nu=\overline{1,n}} \equiv \rho^{n(n-1)/2}\Omega, \quad \Omega := \det\big[R_k^{\nu-1}\big]_{k,\nu=\overline{1,n}} \neq 0,$$

$$y_k(x,\rho)=\sum_{j=1}^{n} b_{kj}^0\rho^{\mu_j}C_j(x,\lambda),\quad b_{kj}^0=\beta_{1j}^0R_k^{\mu_j},\ \beta_{1j}^0\neq 0,$$

где константа M_0 зависит только от ν_j.

3) Построим теперь ФСР уравнения (2.1) методом возмущений. Обозначим

$$C_j^*(x,\lambda)=\det[C_k^{(\nu)}(x,\lambda)]_{\nu=\overline{0,n-2};\,k=\overline{1,n}\setminus n-j+1},$$

$$y_j^*(x,\rho)=(-1)^{n-j}\big(\rho^{(n-1)(n-2)/2}\Omega\big)^{-1}\det\big[y_k^{(\nu)}(x,\rho)\big]_{\nu=\overline{0,n-2};\,k=\overline{1,n}\setminus j},$$

$$F_{k\nu}(\rho x)=\begin{cases} R_k^{\nu}\exp(\rho R_k x), & |\rho|x>1,\\ (\rho x)^{\mu_1-\nu}, & |\rho|x\leqslant 1,\end{cases}\qquad F_k^*(\rho x)=\begin{cases}\exp(-\rho R_k x), & |\rho|x>1,\\ (\rho x)^{n-1-\mu_n}, & |\rho|x\leqslant 1,\end{cases}$$

$$U_{k\nu}^0(x,\rho)=y_k^{(\nu)}(x,\rho)(\rho^{\nu}F_{k\nu}(\rho x))^{-1},\qquad U_k^{0,*}(x,\rho)=y_k^*(x,\rho)(F_k^*(\rho x))^{-1},$$

$$g(x,t,\lambda)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}C_j(x,\lambda)C_{n-j+1}^*(t,\lambda)=\frac{1}{\rho^{n-1}}\sum_{j=1}^{n}y_j(x,\rho)y_j^*(t,\rho),$$

$$J_m(\rho)=|\rho|^{\mathrm{Re}(\mu_1-\mu_n)}\int_0^{|\rho|^{-1}}t^{\theta_n-m}|q_m(t)|\,dt+|\rho|^{m-n+1}\int_{|\rho|^{-1}}^{\infty}|q_m(t)|\,dt,\ J(\rho)=\sum_{m=0}^{n-2}J_m(\rho).$$

Имеют место оценки $|U_{k\nu}^0(x,\rho)|\leqslant M_1$, $|U_k^{0,*}(x,\rho)|\leqslant M_1$, $x\geqslant 0$, $\rho\in\bar S_{k_0}$,

$$\Big|\frac{\partial^{\nu}}{\partial x^{\nu}}g(x,t,\lambda)\Big|\leqslant M_2\sum_{j=1}^{n}|x^{\mu_j-\nu}t^{n-1-\mu_j}|,\quad |\rho x|\leqslant C_0,\ t\leqslant x,$$

$$J(\rho)\leqslant\frac{Q}{|\rho|},\ |\rho|\geqslant 1,\quad Q:=\sum_{m=0}^{n-2}\int_0^{\infty}|q_{0m}(t)|\,dt,$$

где M_1 зависит от ν_j, а M_2 — от ν_j и C_0.

Пусть функции $S_j(x,\lambda)$ являются решениями интегральных уравнений

$$S_j^{(\nu)}(x,\lambda)=C_j^{(\nu)}(x,\lambda)-\int_0^x\frac{\partial^{\nu}}{\partial x^{\nu}}g(x,t,\lambda)\Big(\sum_{m=0}^{n-2}q_m(t)S_j^{(m)}(t,\lambda)\Big)\,dt,\ \nu=\overline{0,n-1}.$$

Тогда $S_j(x,\lambda)$ — целые по λ решения уравнения (2.1), причем $\det\big[S_j^{(\nu-1)}(x,\lambda)\big]_{j,\nu=\overline{1,n}}\equiv 1$,

$$S_j^{(\nu)}(x,\lambda)=O(x^{\mu_j-\nu}),\ (S_j(x,\lambda)-C_j(x,\lambda))x^{-\mu_j}=o(x^{\mu_n-\mu_1}),\quad x\to 0.$$

Пусть $S_{k_0,\alpha}=\{\rho:\ \rho\in S_{k_0},\ |\rho|>\alpha\}$, $\rho_0=2M_1Q+1$. При $k=\overline{1,n}$, $\rho\in\bar S_{k_0,\rho_0}$ рассмотрим систему интегральных уравнений

$$U_{k\nu}(x,\rho)=U_{k\nu}^0(x,\rho)+\sum_{m=0}^{n-2}\int_0^{\infty}A_{k\nu m}(x,t,\rho)U_{km}(t,\rho)\,dt,\ x\geqslant 0,\ \nu=\overline{0,n-1},\tag{2.11}$$

где

$$A_{k\nu m}(x,t,\rho)=\frac{q_m(t)F_{km}(\rho t)}{\rho^{n-1-m}F_{k\nu}(\rho x)}\begin{cases}-\displaystyle\sum_{j=1}^{k}F_{j\nu}(\rho x)U_{j\nu}^0(x,\rho)F_j^*(\rho t)U_j^{0,*}(t,\rho), & t\leqslant x,\\ \displaystyle\sum_{j=k+1}^{n}F_{j\nu}(\rho x)U_{j\nu}^0(x,\rho)F_j^*(\rho t)U_j^{0,*}(t,\rho), & t>x.\end{cases}$$

Имеет место оценка $\displaystyle\sum_{m=0}^{n-2}\int_0^{\infty}|A_{k\nu m}(x,t,\rho)|\,dt\leqslant M_1J(\rho)\leqslant\frac{M_1Q}{|\rho|}$. Поэтому система (2.11) при $\rho\in\bar S_{k_0,\rho_0}$ имеет единственное решение, причем равномерно по $x\geqslant 0$

$$U_{k\nu}(x,\rho)-U_{k\nu}^0(x,\rho)=O(\rho^{-1}),\quad \rho\in\bar S_{k_0,\rho_0}.\tag{2.12}$$

Теорема 2.2. *При $x>0$, $\rho\in\bar S_{k_0,\rho_0}$ существует фундаментальная система решений дифференциального уравнения* (2.1) $B=\{Y_k(x,\rho)\}_{k=\overline{1,n}}$ *вида $Y_k^{(\nu)}(x,\rho)=\rho^{\nu}F_{k\nu}(\rho x)U_{k\nu}(x,\rho)$, где функции $U_{k\nu}(x,\rho)$ являются решениями системы* (2.11) *и верно* (2.12). *Функции $Y_k^{(\nu)}(x,\rho)$ при* *каждом* $x > 0$ *регулярны по* $\rho \in S_{k_0,\rho_0}$, *непрерывны по* $\rho \in \bar{S}_{k_0,\rho_0}$ *и* $\det\left[Y_k^{(\nu-1)}(x,\rho)\right]_{k,\nu=\overline{1,n}} = \rho^{n(n-1)/2}\Omega(1+O(\rho^{-1}))$ *при* $|\rho|\to\infty$. *Функции* $Y_k(x,\rho)$ *удовлетворяют соотношению*

$$Y_k(x,\rho) = y_k(x,\rho) - \frac{1}{\rho^{n-1}}\int_0^x \Big(\sum_{j=1}^{k} y_j(x,\rho)y_j^*(t,\rho)\Big)\Big(\sum_{m=0}^{n-2} q_m(t)Y_k^{(m)}(t,\rho)\Big)\,dt +$$
$$+\frac{1}{\rho^{n-1}}\int_x^\infty \Big(\sum_{j=k+1}^{n} y_j(x,\rho)y_j^*(t,\rho)\Big)\Big(\sum_{m=0}^{n-2} q_m(t)Y_k^{(m)}(t,\rho)\Big)\,dt.$$

Справедливо представление

$$Y_k(x,\rho) = \sum_{j=1}^{n} b_{kj}(\rho)S_j(x,\lambda), \tag{2.13}$$

причем

$$b_{kj}(\rho) = b_{kj}^0(\rho)\rho^{\mu_j}(1+O(\rho^{-1})), \quad |\rho|\to\infty,\ \rho\in\bar{S}_{k_0,\rho_0}. \tag{2.14}$$

В доказательстве нуждается лишь асимптотическая формула (2.14) для множителей Стокса $b_{kj}(\rho)$ из (2.13), которая является наиболее важным фактом в теореме. Пусть ρ фиксировано, $x \leqslant |\rho|^{-1}$. Имеем

$$\left.\begin{aligned} U_{k0}^0(x,\rho) &= \sum_{j=1}^{n} b_{kj}^0(\rho x)^{\mu_j-\mu_1}\hat{C}_j(x,\lambda),\\ U_{k0}(x,\rho) &= \sum_{j=1}^{n} b_{kj}(\rho)(\rho)^{-\mu_1}x^{\mu_j-\mu_1}\hat{S}_j(x,\lambda), \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

где $\hat{C}_j(x,\lambda) = x^{-\mu_j}C_j(x,\lambda)$, $\hat{S}_j(x,\lambda) = x^{-\mu_j}S_j(x,\lambda)$, $\hat{S}_j(0,\lambda) = \hat{C}_j(0,\lambda) = c_{j0} \neq 0$. Из (2.15) имеем

$$U_{k0}(x,\rho) - U_{k0}^0(x,\rho) = \sum_{j=1}^{n}\Big(b_{kj}(\rho)\rho^{-\mu_1} - b_{kj}^0\rho^{\mu_j-\mu_1}\Big)x^{\mu_j-\mu_1}\hat{S}_j(x,\lambda) +$$
$$+\sum_{j=1}^{n} b_{kj}^0(\rho x)^{\mu_j-\mu_1}(\hat{S}_j(x,\lambda) - \hat{C}_j(x,\lambda)). \tag{2.16}$$

Обозначим

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{F}_{k1}(x,\rho) &= U_{k0}(x,\rho) - U_{k0}^0(x,\rho),\\ \mathcal{F}_{k,s+1}(x,\rho) &= \Big(\mathcal{F}_{ks}(x,\rho) - \mathcal{F}_{ks}(0,\rho)\hat{S}_s(x,\lambda)c_{s0}^{-1}\Big)x^{\mu_s-\mu_{s+1}},\ s=\overline{1,n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

Лемма 2.2. *Справедливы соотношения*

$$(b_{ks}(\rho)\rho^{-\mu_1} - b_{ks}^0\rho^{\mu_s-\mu_1})c_{s0} = \mathcal{F}_{ks}(x,\rho), \quad s=\overline{1,n}, \tag{2.18}$$

$$\mathcal{F}_{ks}(x,\rho) = ((U_{k0}(x,\rho) - U_{k0}^0(x,\rho)) - \sum_{j=1}^{s-1}(b_{kj}(\rho)\rho^{-\mu_1} - b_{kj}^0\rho^{\mu_j-\mu_1})x^{\mu_j-\mu_1}\hat{S}_j(x,\lambda))x^{\mu_1-\mu_s},\ s=\overline{1,n}. \tag{2.19}$$

Доказательство. При $s=1$ равенство (2.18) следует из (2.16) при $x=0$, а равенство (2.19) очевидно. Предположим теперь, что (2.18), (2.19) доказаны для $s=1,\dots,N-1$. Тогда

$$\Big((U_{k0}(x,\rho) - U_{k0}^0(x,\rho)) - \sum_{j=1}^{N-1}(b_{kj}(\rho)\rho^{-\mu_1} - b_{kj}^0\rho^{\mu_j-\mu_1})x^{\mu_j-\mu_1}\hat{S}_j(x,\lambda))\Big)x^{\mu_1-\mu_N} =$$
$$= \Big((U_{k0}(x,\rho) - U_{k0}^0(x,\rho)) - \sum_{j=1}^{N-2}(b_{kj}(\rho)\rho^{-\mu_1} - b_{kj}^0\rho^{\mu_j-\mu_1})x^{\mu_j-\mu_1}\hat{S}_j(x,\lambda))\Big)x^{\mu_1-\mu_{N-1}}x^{\mu_{N-1}-\mu_N} -$$
$$-(b_{k,N-1}(\rho)\rho^{-\mu_1} - b_{k,N-1}^0\rho^{\mu_{N-1}-\mu_1})\hat{S}_{N-1}(x,\lambda)x^{\mu_{N-1}-\mu_N} = \mathcal{F}_{kN}(x,\rho),$$

т. е. верно (2.19) при $s=N$. Теперь равенство (2.16) запишем в виде

$$\mathcal{F}_{kN}(x,\rho) = \sum_{j=N}^{n}(b_{kj}(\rho)\rho^{-\mu_1} - b_{kj}^0\rho^{\mu_j-\mu_1})x^{\mu_j-\mu_N}\hat{S}_j(x,\lambda) + \sum_{j=1}^{n}(b_{kj}^0(\rho x)^{\mu_j-\mu_1}(\hat{S}_j(x,\lambda) - \hat{C}_j(x,\lambda))x^{\mu_1-\mu_N}.$$

Отсюда находим $\mathcal{F}_{kN}(0,\rho) = (b_{kN}(\rho)\rho^{-\mu_1} - b_{kN}^0\rho^{\mu_N-\mu_1})c_{N0}$, т. е. верно (2.18) при $s=N$. Лемма 2.2 доказана. $\square$

Соотношение (2.11) при $\nu = 0$ запишем в виде

$$\mathcal{F}_{k1}(x,\rho) = \frac{1}{\rho^{n-1}}\Big(- \int_0^x (\sum_{j=1}^n (U_{j0}^0(x,\rho)U_j^{0,*}(t,\rho))(\rho t)^{n-1-\mu_n} V_k(t,\rho)\,dt + \\ + \int_0^\infty \Big(\sum_{j=k+1}^n U_{j0}^0(x,\rho)U_j^{0,*}(t,\rho))F_j^*(\rho t)\Big) V_k(t,\rho)\,dt\Big), \quad (2.20)$$

где $V_k(t,\rho) = \sum\limits_{m=0}^{n-2} q_m(t)\rho^m F_{km}(\rho t)U_{km}(t,\rho)$. Так как при $t \leqslant x \leqslant |\rho|^{-1}$

$$\sum_{j=1}^n U_{j0}^0(x,\rho)U_j^{0,*}(t,\rho) = \rho^{\mu_n-\mu_1}x^{-\mu_1}t^{1-n+\mu_n}g(x,t,\lambda),$$

то получаем

$$\Big|\sum_{j=1}^n U_{j0}^0(x,\rho)U_j^{0,*}(t,\rho)\Big| \leqslant M_3|(\rho x)^{\mu_n-\mu_1}|,\ 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant |\rho|^{-1}. \quad (2.21)$$

Лемма 2.3. *Имеют место равенства*

$$\mathcal{F}_{ks}(0,\rho) = \rho^{\mu_s-\mu_1-n+1}c_{s0}\int_0^\infty \Big(\sum_{j=k+1}^n b_{js}^0 F_j^*(\rho t)U_j^{0,*}(t,\rho)\Big)V_k(t,\rho)\,dt, \quad (2.22)$$

$$\mathcal{F}_{ks}(x,\rho) = \frac{1}{\rho^{n-1}}\Big(- x^{\mu_1-\mu_s}\int_0^x \Big(\sum_{j=1}^n U_{j0}^0(x,\rho)U_j^{0,*}(t,\rho)\Big)(\rho t)^{n-1-\mu_n}V_k(t,\rho)\,dt - \\ - \sum_{\ell=1}^{s-1} x^{\mu_\ell-\mu_s}\int_0^\infty \Big(\sum_{j=k+1}^n b_{j\ell}^0\rho^{\mu_\ell-\mu_1}(\hat{S}_\ell(x,\lambda) - \hat{C}_\ell(x,\lambda))F_j^*(\rho t)U_j^{0,*}(t,\rho)\Big)V_k(t,\rho)\,dt + \\ + \int_0^\infty \Big(\sum_{j=k+1}^n \Big(\sum_{\xi=s}^n b_{j\xi}^0\rho^{\mu_\xi-\mu_1}\hat{C}_\xi(x,\lambda)\Big)F_j^*(\rho t)U_j^{0,*}(t,\rho)\Big)V_k(t,\rho)\,dt\Big),\ x \leqslant |\rho|^{-1}. \quad (2.23)$$

Доказательство. При $s = 1$ равенства (2.22), (2.23) следуют из (2.20) с учетом (2.15). Предположим теперь, что (2.22), (2.23) доказаны при $s = 1,\dots,N$. Тогда, используя (2.17), вычисляем

$$\mathcal{F}_{k,N+1}(x,\rho) = (\mathcal{F}_{kN}(x,\rho) - \mathcal{F}_{kN}(0,\rho) = \hat{S}_N(x,\lambda)c_{N0}^{-1})x^{\mu_N-\mu_{N+1}} = \\ = \frac{1}{\rho^{n-1}}\Big(- x^{\mu_1-\mu_{N+1}}\int_0^x \Big(\sum_{j=1}^n (U_{j0}^0(x,\rho)U_j^{0,*}(t,\rho)\Big)(\rho t)^{n-1-\mu_n}V_k(t,\rho)\,dt - \\ - \sum_{\ell=1}^{N-1} x^{\mu_\ell-\mu_{N+1}}\int_0^\infty \Big(\sum_{j=k+1}^n b_{j\ell}^0\rho^{\mu_\ell-\mu_1}(\hat{S}_\ell(x,\lambda) - \hat{C}_\ell(x,\lambda))F_j^*(\rho t)U_j^{0,*}(t,\rho)\Big)V_k(t,\rho)\,dt + \\ + x^{\mu_N-\mu_{N+1}}\int_0^\infty \Big(\sum_{j=k+1}^n \Big(\sum_{\xi=N}^n b_{j\xi}^0\rho^{\mu_\xi-\mu_1}x^{\mu_\xi-\mu_N}\hat{C}_\xi(x,\lambda) - b_{jN}^0\rho^{\mu_N-\mu_{N+1}}\hat{C}_N(x,\lambda) - \\ - b_{jN}^0\rho^{\mu_N-\mu_{N+1}}(\hat{S}_N(x,\lambda) - \hat{C}_N(x,\lambda))\Big)F_j^*(\rho t)U_j^{0,*}(t,\rho))V_k(t,\rho)\,dt\Big) = \\ = \frac{1}{\rho^{n-1}}\Big(- x^{\mu_1-\mu_{N+1}}\int_0^x \Big(\sum_{j=1}^n U_{j0}^0(x,\rho)U_j^{0,*}(t,\rho)\Big)(\rho t)^{n-1-\mu_n}V_k(t,\rho)\,dt - \\ - \sum_{\ell=1}^{N} x^{\mu_\ell-\mu_{N+1}}\int_0^\infty \Big(\sum_{j=k+1}^n b_{j\ell}^0\rho^{\mu_\ell-\mu_1}(\hat{S}_\ell(x,\lambda) - \hat{C}_\ell(x,\lambda))F_j^*(\rho t)U_j^{0,*}(t,\rho)\Big)V_k(t,\rho)\,dt + \\ + \int_0^\infty \Big(\sum_{j=k+1}^n \Big(\sum_{\xi=N+1}^n b_{j\xi}^0\rho^{\mu_\xi-\mu_1}x^{\mu_s-\mu_{N+1}}\hat{C}_\xi(x,\lambda)\Big)F_j^*(\rho t)U_j^{0,*}(t,\rho)\Big)V_k(t,\rho)\,dt\Big),$$

т. е. (2.23) верна при $s = N + 1$. Теперь при $x \to 0$ из (2.23) при $s = N + 1$ с учетом (2.21) получаем (2.22) при $s = N + 1$. Лемма 2.3 доказана. □

Из равенств (2.18), (2.22) находим

$$b_{ks}(\rho)\rho^{-\mu_s}-b_{ks}^0=\frac{1}{\rho^{n-1}}\int_0^\infty\Big(\sum_{j=k+1}^n b_{js}^0F_j^*(\rho t)U_j^{0,*}(t,\rho)\Big)V_k(t,\rho)\,dt. \tag{2.24}$$

Используя (2.24) и (2.12), получаем оценку $b_{ks}(\rho)\rho^{-\mu_s}-b_{ks}^0=O(J(\rho))=O(\rho^{-1})$, $|\rho|\to\infty,\ \rho\in\bar S_{k_0}$, т. е. верно (2.14). Теорема 2.2 доказана.

Отметим, что имеют место оценки $|Y_k^{(\nu)}(x,\rho)(\rho R_k)^{-\nu}\exp(-\rho R_k x)-1)|\leqslant\frac{M_4}{|\rho|}$, $x\geqslant 1$, $\rho\in\bar S_{k_0,\rho_0}$. Обозначим $\Gamma_{\pm1}:=\{\pm\lambda\geqslant 0\}$. Через $\Pi_{\pm1}$ обозначим λ-плоскость с разрезом вдоль $\Gamma_{\pm1}$.

Теорема 2.3.

1. *Уравнение* (2.1) *имеет ФСР* $\Phi_k(x,\lambda)$, $k=\overline{1,n}$, *такую что* $\Phi_k(x,\lambda)\sim c_{k0}x^{\mu_k}$, $x\to 0$, $\Phi_k(x,\lambda)=O(\exp(\rho R_k x))$, $x\to\infty$, $\rho\in S_{k_0}$, *причем* $\det[\Phi_k^{(\nu-1)}(x,\lambda)]_{k,\nu=\overline{1,n}}\equiv 1$, $\Phi_k(x,\lambda)=S_k(x,\lambda)+\sum\limits_{j=k+1}^n M_{kj}(\lambda)S_j(x,\lambda)$. *Матрица* $M(\lambda)=\det[M_{kj}(\lambda)]_{k,j=\overline{1,n}}$, *где* $M_{kj}(\lambda)=\delta_{kj}$ $(k\geqslant j)$ *называется матрицей Вейля для* ℓ.
2. *Функции* $M_{kj}(\lambda)$ *регулярны в* $\Pi_{(-1)^{n-k}}$ *исключением не более чем счетного ограниченного множества полюсов* Λ'_{kj} *и непрерывны в* $\overline{\Pi_{(-1)^{n-k}}}$ *за исключением ограниченных множеств* Λ_{kj}.
3. $M_{kj}(\lambda)=O(\rho^{\mu_j-\mu_k})$ *при* $|\lambda|\to\infty$.
4. *Функции* $M_{sk}(\lambda)-M_{s,s+1}(\lambda)M_{s+1,k}(\lambda)$ *регулярны при* $\lambda\in\Gamma_{(-1)^{n-s}}\setminus\Lambda$, *где* $\Lambda:=\cup_{s,k}\Lambda_{sk}$.

Обратная задача ставится следующим образом: по заданной матрице Вейля $M(\lambda)$ найти дифференциальный оператор ℓ.

Сформулируем теорему единственности решения обратной задачи. Для этого наряду с ℓ рассмотрим оператор $\tilde\ell$ того же вида, но с другими коэффициентами $\tilde q_j(x)$. Условимся, что если некоторый символ b обозначает объект, относящийся к ℓ, то $\tilde b$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\tilde\ell$, и $\hat b:=b-\tilde b$.

Теорема 2.4. *Если* $M(\lambda)=\tilde M(\lambda)$, *то* $\ell=\tilde\ell$.

Используя полученные результаты и метод спектральных отображений, получим теперь алгоритм решения этой нелинейной обратной задачи, а также необходимые и достаточные условия ее разрешимости. Центральную роль здесь будет играть так называемое *основное уравнение обратной задачи*.

Обозначим $Y=[\delta_{j,k-1}]_{j=\overline{1,n-1},k=\overline{1,n}}$, $E=[\delta_{jk}]_{j,k=\overline{1,n}}$, $\Phi(x,\lambda)=[\Phi_s^{(k-1)}(x,\lambda)]_{s,k=\overline{1,n}}$,

$$\Phi_j^*(x,\lambda)=\det[\Phi_k^{(r-1)}(x,\lambda)]_{r=\overline{1,n-1},\,k=\overline{1,n}\setminus n-j+1},\qquad \Phi^*(x,\lambda)=[(-1)^{n-k}\Phi_{n-k+1}^*(x,\lambda)]_{k=\overline{1,n}},$$

$$A_0(\lambda)=\hat M(\lambda)(M(\lambda))^{-1},\qquad \langle y(x),z(x)\rangle_\ell=\sum_{k+j\leqslant n-1}L_{kj}(x)y^{(k)(x)z^{(j)}(x)},$$

$$L_{kj}(x)=\sum_{s=j}^{n-k-1}(-1)^sC_s^jp_{s+k+1}^{(s-j)}(x),\ p_j(x)=\nu_jx^{j-n}+q_j(x),\ p_n(x)=1,\ p_{n-1}(x)=0.$$

Пусть $\tilde\ell\in V$ — известный оператор. Рассмотрим контур $\gamma=\gamma_{-1}\cup\gamma_0\cup\gamma_1$ в λ-плоскости, где γ_0 — ограниченный замкнутый контур, охватывающий множество $\Lambda\cup\tilde\Lambda$, а $\gamma_{\pm1}$ — двусторонний разрез вдоль луча $\{\lambda:\ \pm\lambda>0,\ \lambda\notin\operatorname{int}\gamma_0\}$. При $\lambda\in\gamma$ положим $g(x,\lambda)=\tilde\Phi^*(x,\lambda)A(\lambda)Y^T$, $\varphi(x,\lambda)=[\chi_{(-1)^{n-k+1}}(\lambda)\Phi_k(x,\lambda)]_{k=\overline{2,n}}$, $N(\lambda)=E-\chi_{+1}(\lambda)\chi_{-1}(\lambda)YA_0(\lambda)Y^T$,

$$\chi_{\pm1}(\lambda)=\begin{cases}1,&\lambda\in\gamma_0\cup\gamma_{\pm1},\\0,&\lambda\in\gamma_{\mp1},\end{cases}\qquad A(\lambda)=\begin{cases}A_0(\lambda),&\lambda\in\gamma_0,\\ [\delta_{j,k-1}\chi_{(-1)^{k-j}}\hat M_{j,j+1}(\lambda)]_{j,k=\overline{1,n}},&\lambda\in\gamma_1\cup\gamma_{-1}.\end{cases}$$

Теорема 2.5. *При каждом фиксированном* $x>0$ *функция* $\varphi(x,\lambda)$ *является решением линейного интегрального уравнения*

$$\tilde\varphi(x,\lambda)=N(\lambda)\varphi(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{H(x,\lambda,\mu)}{\mu-\lambda}\,\varphi(x,\mu)\,d\mu,\ \lambda\in\gamma, \tag{2.25}$$

где $H(x,\lambda,\mu)=\langle\tilde\varphi(x,\lambda),g(x,\mu)\rangle_{\tilde\ell}$.

Уравнение (2.25) называется основным уравнением обратной задачи. Обозначим

$$\Omega(x,\lambda)=\begin{cases}\operatorname{diag}\left[(\rho R_k)^{\mu_k}\exp(-\rho R_k x)\right]_{k=\overline{2,n}}, & |\rho|x>1,\\ \operatorname{diag}\left[(x^{-R_k})^{\mu_k}\right]_{k=\overline{2,n}}, & |\rho|x\leqslant 1,\end{cases}$$

$\gamma''=\{\lambda:\ \lambda\in\gamma_1\cup\gamma_{-1},\ \inf|\lambda-\mu|\geqslant\delta_0>0,\ \mu\in\gamma_0\}$, $\gamma'=\gamma\setminus\gamma''$. Введем банахово пространство $B=L_2^{n-1}(\gamma')\oplus L_\infty^{n-1}$ функций $z(\lambda)=[z_j(\lambda)]_{j=\overline{1,n-1}}$ с нормой $\|z\|_B=\sum\limits_{j=1}^{n-1}(\|z_j\|_{L_2(\gamma')}+\|z_j\|_{L_\infty(\gamma'')})$.

Теорема 2.6. *При $x>0$ основное уравнение* (2.25) *имеет единственное решение в классе $\Omega(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\in B$, причем $\sup\limits_x\|\Omega(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\|_B<\infty$.*

Обозначим

$$\alpha_{jk}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g^{(j)}(x,\lambda)\varphi^{(k)}(x,\lambda)\,d\lambda,\ j+k\leqslant n-1,$$

$$t_{jk}(x)=-\sum_{s=k+1}^{j}C_j^sC_{s-1}^k\alpha_{s-k-1,j-s}(x),\ j>k,\quad t_{jk}(x)=\delta_{jk},\ j\leqslant k,$$

$$\xi_k(x)=\sum_{s=0}^{n-k-1}\sum_{j=k+1}^{n-s}\Big(C_{j+s}^jC_{j-1}^k\tilde p_{j+s}(x)\alpha_{j-k-1,s}(x)+$$

$$+\delta_{s0}(-1)^{j-k}\sum_{r=0}^{j-k-1}C_{j-k-1}^r\tilde p_j^{(j-k-1-r)}(x)\alpha_{r0}(x)\Big),\ k=\overline{0,n-2},$$

$$\psi_k(x)=\xi_k(x)-\sum_{j=k+1}^{n-2}\psi_j(x)t_{jk}(x),\quad k=\overline{0,n-2}.$$

Приведем теперь алгоритм решения обратной задачи и необходимые и достаточные условия ее разрешимости. Пусть $\mathcal{M}$ — множество матриц $M(\lambda)=\det\left[M_{kj}(\lambda)\right]_{k,j=\overline{1,n}}$, $M_{kj}(\lambda)=\delta_{kj}$ $(k\geqslant j)$, обладающих свойствами 2–4 из теоремы 2.3.

Теорема 2.7. *Для того, чтобы матрица $M(\lambda)\in\mathcal{M}$ была матрицей Вейля для некоторого оператора $\ell\in V$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

1. (*асимптотика*) *существует $\tilde\ell$ такой, что $\hat M_{k,k+1}(\lambda)=O(\lambda^{-1})$, $k=\overline{1,n-1}$ при $|\lambda|\to\infty$;*
2. *при $x>0$ уравнение* (2.25) *имеет единственное решение в классе $\Omega(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\in B$, причем $\sup\limits_x\|\Omega(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\|_B<\infty$;*
3. $\psi_j(x)\in\hat W_j$.

Оператор ℓ строится по формуле $q_k(x)=\tilde q_k(x)+\psi_k(x)$, $k=\overline{0,n-2}$.

3. Дифференциальные операторы на конечном интервале

Рассмотрим следующую несамосопряженную краевую задачу L:

$$\ell y:=y^{(n)}+\sum_{j=0}^{n-2}\Big(\frac{\nu_j}{x^{n-j}}+q_j(x)\Big)y^{(j)}=\lambda y,\quad 0<x<T,\ n=2m,\tag{3.1}$$

$$y(x)=O(x^{\mu_{m+1}}),\quad x\to 0,\tag{3.2}$$

$$V_j(y):=y^{(\tau_j)}(T)+\sum_{k=0}^{\tau_j-1}v_{jk}y^{(k)}=0,\quad j=\overline{1,m},\tag{3.3}$$

где $0\leqslant\tau_j\leqslant n-1$, $\tau_j\neq\tau_i$ при $j\neq i$, $q_j(x)$ — комплекснозначные функции, причем $q_j^{(\nu)}(x)$ абсолютно непрерывны при $\nu=\overline{0,j-1}$, а $q_j^{(\nu)}(x)x^{\theta_{\nu j}}$ при $\nu=\overline{0,j}$.

Пусть $\{S_j(x,\lambda)\}_{j=\overline{1,n}}$ — построенная выше целая по λ ФСР уравнения (3.1) при условии $S_j(x,\lambda)\sim c_jx^{\mu_j}$, $x\to 0$, $c_j\neq 0$. Положим $\Delta(\lambda):=\det[V_p(S_j(x,\lambda))]_{p=\overline{1,m},j=\overline{m+1,n}}$. Нули функции $\Delta(\lambda)$ совпадают с собственными значениями задачи L. Функция $\Delta(\lambda)$ называется характеристической функцией задачи L вида (3.1)–(3.3).

Теорема 3.1. *Краевая задача* L *имеет счетное множество собственных значений* $\{\lambda_l\}$, *причем* $\lambda_l = (-1)^m \big((l+\theta)\pi/T + O(l^{-1})\big)^n$, $l \to \infty$, *причем* θ *зависит только от* $\mu_1, \dots, \mu_n$. *Все собственные значения, начиная с некоторого, являются простыми.*

Доопределим линейные формы V_p при $p = \overline{1,n}$ так, чтобы $\tau_j \neq \tau_i$ при $j \neq i$. Существуют решения $\Psi_k(x,\lambda)$, $k = \overline{1,n}$ уравнения (3.1), удовлетворяющие условиям $\Psi_k(x,\lambda) \sim c_k x^{\mu_k}$, $x \to 0$, $V_p(\Psi_k) = 0$, $p = \overline{1, n-k}$. Тогда

$$\det \big[\Psi_k^{(\nu-1)}(x,\lambda)\big]_{k,\nu=\overline{1,n}} \equiv 1, \qquad \Psi_k(x,\lambda) = S_k(x,\lambda) + \sum_{j=k+1}^{n} M_{kj0}(\lambda) S_j(x,\lambda).$$

Матрица $M_0(\lambda) = \det \left[M_{kj0}(\lambda)\right]_{k,j=\overline{1,n}}$, где $M_{kj0}(\lambda) = \delta_{kj}$ $(k \geqslant j)$, называется матрицей Вейля для ℓ. Сформулируем теорему единственности решения обратной задачи восстановления ℓ и V_p по матрице Вейля.

Теорема 3.2. *Если* $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$, *то* $\ell = \tilde{\ell}$ *и* $V_p = \tilde{V}_p$, $p = \overline{1,n}$.

Обозначим $\mu_k^* = n - 1 - \bar{\mu}_{n-k+1}$, $\Psi_k^*(x,\lambda) = \det \big[\Psi_j^{(r-1)}(x,\lambda)\big]_{r=\overline{1,n-1},\ j=\overline{1,n}\setminus n-k+1}$,

$$G(x,t,\lambda) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=m+1}^{n} (-1)^{k-1} \Psi_{n-k+1}(x,\lambda) \overline{\Psi_k^*(t,\bar{\lambda})}, & x \geqslant t, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k} \Psi_{n-k+1}(x,\lambda) \overline{\Psi_k^*(t,\bar{\lambda})}, & x \leqslant t. \end{cases}$$

Лемма 3.1. *Пусть* $f(t) t^{\mu_{m+1}^*} \in L(0,T)$, $\Delta(\lambda) \neq 0$. *Положим* $y(x) = \int_0^T G(x,t,\lambda) f(t)\, dt$. *Тогда* $\ell y - \lambda y = f$, $y(x) = o(x^{\mu_m})$, $x \to 0$, $V_p(y) = 0$, $p = \overline{1,m}$.

Верно и обратное утверждение. Функция $G(x,t,\lambda)$ называется функцией Грина задачи. Она является мероморфной по λ с полюсами в точках $\lambda = \lambda_l$. Если λ_l — простой полюс, то

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_l} G(x,t,\lambda) = -\alpha_l \varphi_l(x) \overline{\varphi_l^*(t)}, \quad \alpha_l = \Big(\int_0^T \varphi_l(t) \overline{\varphi_l^*(t)}\, dt \Big)^{-1},$$

где $\varphi_l(x)$ и $\varphi_l^*(x)$ — собственные функции задачи L и сопряженной задачи L^*, соответственно. Пусть $\lambda = \rho^n$, $\lambda_l^0 = (-1)^m((l+\theta)\pi/T)^n$, $\lambda_l^0 = (\rho_l^0)^n$, $\varepsilon_0 > 0$, $G_0 = \left\{\rho : |\rho - \rho_l^0| \geqslant \varepsilon_0\right\}$.

Теорема 3.3. *Пусть*

$$y_{\nu j}(x,\lambda) = \int_0^T \frac{\partial^{\nu+j} G(x,t,\lambda)}{\partial x^\nu \partial t^j} f(t)\, dt, \quad \nu, j = \overline{0, n-1},$$

где $f(t) t^\kappa \in L(0,T)$, $\kappa \leqslant \operatorname{Re} \mu_{m+1}^* - j$. *Тогда при* $\rho \in G_0$, $|\rho| \geqslant \rho_0$, $0 < x < T$ *справедливы оценки*

$$|y_{\nu j}(x,\lambda)| \leqslant \omega(\rho) |\rho|^{\nu+j-m+1+\langle\kappa\rangle}, \ |\rho| x \geqslant 1,$$

$$|y_{\nu j}(x,\lambda)| \leqslant \omega(\rho) |x^{\mu_{m+1}-\nu}| \Big(|\rho^{j-\mu_m^*+\langle\kappa\rangle}| + \Omega |x^{\mu_m^*-j-\kappa}| \Big), \ |\rho| x \geqslant 1,$$

где

$$\Omega = \begin{cases} 0, & \kappa \leqslant \operatorname{Re} \mu_m^* - j, \\ 1, & \kappa > \operatorname{Re} \mu_m^* - j, \end{cases}$$

$\langle\kappa\rangle = \max(\kappa, 0)$ *и* $\omega(\rho) = o(1)$ *при* $|\rho| \to \infty$.

Применение теоремы 3.3 и метода контурного интегрирования дает возможность доказать теоремы о полноте, разложении и равносходимости. Пусть α — вещественное число, а $1 \leqslant p < \infty$. Рассмотрим банахово пространство $\mathcal{B}_{\alpha p} = \{f(x) : f(x) x^{-\alpha} \in L_p(0,T)\}$, снабженное нормой $\|f\|_{\alpha,p} = \|f(x) x^{-\alpha}\|_{L_p(0,T)}$. Если $1 \leqslant s \leqslant p < \infty$ и $\beta - \alpha < 1/s - 1/p$, то пространство $\mathcal{B}_{\alpha p}$ плотно вложено в $\mathcal{B}_{\beta s}$. Обозначим $\psi = \operatorname{Re} \mu_{m+1}$, $\varphi = \min(0, -\operatorname{Re} \mu_m)$, $\gamma = \min(0, \operatorname{Re} \mu_{m+1}^*)$, $\eta = \max(0, -\operatorname{Re} \mu_{m+1})$.

Теорема 3.4. *Система корневых функций краевой задачи* L *полна в пространстве* $\mathcal{B}_{\beta s}$ *при* $\beta < \psi + 1/s$.

Следствие 3.1. *Система корневых функций краевой задачи* L *полна в пространстве* $L_s(0,T)$ *при* $\operatorname{Re} \mu_{m+1} > -1/s$.

Теорема 3.5. *Пусть функция $f(t)t^{\varphi}$ абсолютно непрерывна на $[0,T]$, $f(t)t^{\varphi-1} \in L(0,T)$, и если $\tau_1 \dots \tau_m = 0$, то $f(T) = 0$. Положим $y(x,\lambda) = \int_0^T G(x,t,\lambda)f(t)\,dt$. Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} \max_{0\leqslant x\leqslant T} \Big| x^{\eta}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N} y(x,\lambda)\,d\lambda + f(x)\Big)\Big| = 0,$$

где $\Gamma_N = \{\lambda : |\lambda| = r_N\}$ — окружности радиуса $r_N \to \infty$, лежащие на положительном расстоянии от собственных значений задачи L. В частности, если спектр задачи L простой, то

$$\lim_{N\to\infty} \max_{0\leqslant x\leqslant T} \Big| x^{\eta}\Big(f(x) - \sum_{l=1}^{N} \alpha_l \varphi_l(x) \int_0^T f(t)\overline{\varphi_l^*(t)}\,dt\Big)\Big| = 0.$$

Сформулируем теперь теорему о равносходимости разложений по корневым функциям задач L и $\tilde{L}$ на всем отрезке $[0,T]$. Пусть $\mathrm{Re}(\mu_n - \mu_1) \geqslant 1$ и $\hat{\mu}_k = \hat{\tau}_k = 0$ при $k = \overline{1,m}$.

Теорема 3.6. *Пусть $f(t)t^{\gamma} \in L(0,T)$. Положим $\hat{y}(x,\lambda) = \int_0^T \hat{G}(x,t,\lambda)f(t)\,dt$. Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} \max_{0\leqslant x\leqslant T} \Big| x^{\eta}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N} \hat{y}(x,\lambda)\,d\lambda\Big| = 0.$$

В частности, если спектры задач L и $\tilde{L}$ простые, то

$$\lim_{N\to\infty} \max_{0\leqslant x\leqslant T} \Big| x^{\eta}\sum_{l=1}^{N}\Big(\alpha_l\varphi_l(x)\int_0^T f(t)\overline{\varphi_l^*(t)}\,dt - \tilde{\alpha}_l\tilde{\varphi}_l(x)\int_0^T f(t)\overline{\tilde{\varphi}_l^*(t)}\,dt\Big)\Big| = 0.$$

Приведенные в этом разделе результаты более подробно изложены в [4].

4. Дифференциальные операторы с особенностью во внутри интервала

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ell_1 y := y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-2}\Big(\frac{\nu_j}{(x-a)^{n-j}} + q_j(x)\Big)y^{(j)} = \lambda y, \quad 0 < x < T, \tag{4.1}$$

где $a \in (0,T)$ — фиксированное число. Пусть для определенности $n = 2m$. Предположим, что функции $q_j^{(\nu)}(x)$, $\nu = \overline{0,j-1}$ абсолютно непрерывны на $[0,a-\varepsilon]$ и $[a+\varepsilon,T]$ при всех $\varepsilon \in (0,\min(a,T-a))$ и $q_j^{(\nu)}(x)|x-a|^{\theta_{\nu j}} \in L(0,T)$, $\nu = \overline{0,j}$.

Рассмотрим несамосопряженную краевую задачу $\mathcal{L}$ для уравнения (4.1) с краевыми условиями $y^{(\nu-1)}(0) = y^{(\nu-1)}(T) = 0$, $\nu = \overline{1,m}$ и дополнительными условиями склейки решений в окрестности особой точки $x = a$. Эти условия порождаются матрицей перехода $A = [a_{kj}]_{k,j=\overline{1,n}}$, которая связывает решения уравнения (4.1) слева и справа от особой точки (см. ниже).

Пусть $\lambda = \rho^n$. Рассмотрим функции $C_{j,a}(x,\lambda) = (x-a)^{\mu_j}\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{jk}(\rho(x-a))^{nk}$, $j = \overline{1,n}$, где $c_{jk} = c_{j0}\Big(\prod\limits_{s=1}^{k}\delta(\mu_j+sn)\Big)^{-1}$, $\prod\limits_{j=1}^{n} c_{j0} = (\det[\mu_j^{\nu-1}]_{j,\nu=\overline{1,n}})^{-1}$. Здесь и далее $z^{\mu} = \exp(\mu(\ln|z| + i\arg z))$, $\arg z \in (-\pi,\pi]$. При $x > a$ и $x < a$ функции $C_{j,a}(x,\lambda)$ являются решениями «простейшего» уравнения с $q_j(x) \equiv 0$. Положим $C^*_{j,a}(x,\lambda) = \det[C^{(\nu)}_{k,a}(x,\lambda)]_{\nu=\overline{0,n-2},\,k=\overline{1,n}\setminus n-j+1}$, $g_0(x,t,\lambda) = \sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}C_{j,a}(x,\lambda)C^*_{n-j+1,a}(t,\lambda)$. Пусть функции $s_j(x,\lambda)$ являются решениями интегральных уравнений

$$s_j^{(\nu)}(x,\lambda) = C_{j,a}^{(\nu)}(x,\lambda) - \int_0^x \frac{\partial^{\nu}}{\partial x^{\nu}}\,g_0(x,t,\lambda)\Big(\sum_{p=0}^{n-2} q_p(t)s_j^{(p)}(t,\lambda)\Big)\,dt,\ \nu = \overline{0,n-1}.$$

Функции $s_j(x,\lambda)$, $j = \overline{1,n}$ являются целыми по λ решениями уравнения (4.1), причем $\det[s_j^{(\nu-1)}(x,\lambda)]_{j,\nu=\overline{1,n}} \equiv 1$.

Пусть задана матрица $A=[a_{kj}]_{k,j=\overline{1,n}}$, $\det A\neq 0$, где a_{kj} — комплексные числа. Введем функции $\{\sigma_j(x,\lambda)\}_{j=\overline{1,n}}$, $x\in J_\pm$, где $J_\pm:=\{x:\ \pm(x-a)>0\}$, по формуле

$$\sigma_j(x,\lambda)=\begin{cases} s_j(x,\lambda), & x\in J_-,\\ \sum\limits_{k=1}^n a_{kj}s_k(x,\lambda), & x\in J_+.\end{cases}$$

ФСР $\{\sigma_j(x,\lambda)\}_{j=\overline{1,n}}$ используется для склейки решений уравнения (4.1) в окрестности особой точки $x=a$. Точнее, будем говорить, что решение $y(x,\lambda)$ уравнения (4.1) удовлетворяет условиям склейки, порожденным матрицей A, если $y(x,\lambda)$ имеет вид $y(x,\lambda)=\sum\limits_{j=1}^n\chi_j(\lambda)\sigma_j(x,\lambda)$, $x\in J_-\cup J_+$, где коэффициенты $\chi_j(\lambda)$ не зависят от x. Для определенности рассмотрим наиболее важным частным случаем, когда $a_{kj}=0$ при $k<j$.

Пусть функции $\varphi_j(x,\lambda)$, $j=\overline{1,n}$, являются решениями уравнения (4.1) при начальных условиях $\varphi_j^{(\nu-1)}(0,\lambda)=\delta_{j\nu}$, $\nu=\overline{1,n}$, и при условиях склейки, порожденных матрицей A. При каждом $x\neq a$ функции $\varphi_j^{(\nu-1)}(x,\lambda)$, $j,\nu=\overline{1,n}$, являются целыми по λ порядка $1/n$, причем $\det[\varphi_j^{(\nu-1)}(x,\lambda)]_{j,\nu=\overline{1,n}}\equiv 1$ при $x\in J_-$ и $\det[\varphi_j^{(\nu-1)}(x,\lambda)]_{j,\nu=\overline{1,n}}\equiv\det A$ при $x\in J_+$.

В каждом секторе $S_{k_0}=\{\rho:\arg\rho\in(k_0\pi/n,(k_0+1)\pi/n)\}$ корни R_k, $k=\overline{1,n}$, уравнения $R^n-1=0$ можно занумеровать так, чтобы $\mathrm{Re}(\rho R_1)<\mathrm{Re}(\rho R_2)<\ldots<\mathrm{Re}(\rho R_n)$, $\rho\in S_{k_0}$. Очевидно, что $R_k=\exp(i\pi\omega_k/m)$, где ω_k — перестановка чисел $\overline{0,n-1}$. Тогда $R_k^\mu:=\exp(i\pi\mu\omega_k/m)$.

При $|\rho(x-a)|\geqslant 1$, $\rho\in\overline{S_{k_0}}$, $\nu=\overline{0,n-1}$, $|\rho|\to\infty$, имеют место асимптотические формулы

$$\varphi_j^{(\nu)}(x,\lambda)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n(-\rho R_k)^{\nu+1-j}\exp(-\rho R_kx)[1]_a,\quad x\in J_-,$$

$$\varphi_j^{(\nu)}(x,\lambda)=\frac{1}{n}\sum_{l,k=1}^n(-\rho R_k)^{1-j}(\rho R_l)^{\nu}\big(\xi_{kl}^0+O(\rho^{-\delta_1})\big)\exp(-\rho R_ka)\exp(\rho R_l(x-a))[1]_a,\quad x\in J_+,$$

где $\delta_1:=\min(1,\min\limits_l\mathrm{Re}(\mu_{l+1}-\mu_l))$, $\xi_{kj}^0=\sum\limits_{s=1}^n a_{ss}R_k^{\mu_s}d_{sj}\exp(-i\pi\mu_s)$, $[d_{sj}]_{s,j=\overline{1,n}}=\big([R_k^{\mu_j}]_{k,j=\overline{1,n}}\big)^{-1}$. Обозначим $\xi_s^0=\det\big[\xi_{kj}^0\big]_{k=\overline{1,s};\ j=\overline{n-s+1,n}}$, $s=\overline{1,n}$, и предположим, что

$$\xi_s^0\neq 0\quad\text{при}\quad s=\overline{1,n-1}. \tag{4.2}$$

Условие (4.2) называется *условием регулярности* склейки. Нижеприведенный контрпример показывает важность условия (4.2) в спектральной теории этого класса операторов. Отметим, что если $A=E$ и $\nu_j=0$, то $\xi_{kj}^0=\delta_{k,n-j+1}$, следовательно, $\xi_{2s}^0=\xi_{2s+1}^0=(-1)^s\neq 0$, и условие регулярности склейки выполняется.

Обозначим $\Delta_a(\lambda):=\det[\varphi_j^{(\nu-1)}(T,\lambda)]_{j=\overline{m+1,n};\,\nu=\overline{1,m}}$. Функция $\Delta_a(\lambda)$ является целой по λ порядка $1/n$, и ее нули совпадают с собственными значениями $\{\lambda_l\}$ краевой задачи $\mathcal{L}$. Функция $\Delta_a(\lambda)$ называется характеристической функцией для $\mathcal{L}$. Обозначим $I_k=\{\rho:\ \arg\rho=\pi k/n\}$, $k=\overline{-n,n-1}$, $I_{k,h}=\{\rho:\ \mathrm{dist}(\rho,I_k)\leqslant h\}$, $I_{+1}^h=\bigcup\limits_k I_{2k,h}$, $I_{-1}^h=\bigcup\limits_k I_{2k-1,h}$. Пусть $\hat I_{\pm1}^h$ — образ $I_{\pm1}^h$ при отображении $\rho\to\lambda=\rho^n$.

При $|\rho|\to\infty$, $\rho\in\overline{S_{k_0}}$ имеет место оценка $\Delta_a(\lambda)=O(\rho^{-m/2}\exp(\rho(R_{m+1}+\cdots+R_n)T))$. Собственные значения $\lambda_l=\rho_l^n$ задачи $\mathcal{L}$ лежат в области $\hat I_{(-1)^m}^h$. Число N_ξ нулей функции $\Delta(\lambda)$ в области

$$\Pi_\xi^h:=\{\rho\in I_{(-1)^m}^h:\ |\rho|\in[\xi,\xi+1]\}$$

ограничено по ξ. Обозначим $G_\delta:=\{\rho:|\rho-\rho_l|\geqslant\delta\}$. Тогда $|\Delta_a(\lambda)|\geqslant C_\delta|\rho^{-m/2}\exp(\rho(R_{m+1}+\cdots+R_n)T)|$, $\rho\in\overline{S_{k_0}}\cap G_\delta$. Существуют положительные числа $r_N\to\infty$ такие, что при достаточно малом $\delta>0$ окружности $|\rho|=r_N$ лежат в G_δ при всех N.

Рассмотрим банахово пространство $B_{\alpha,p}:=\{f(x):f(x)(x-a)^{-\alpha}\in L_p(0,T)\}$ с нормой $\|f\|_{\alpha,p}=\|f(x)(x-a)^{-\alpha}\|_{L_p(0,T)}$. Обозначим $\omega:=\mathrm{Re}\,\mu_1$.

Теорема 4.1. *Система корневых функций краевой задачи $\mathcal{L}$ полна в $B_{\alpha,p}$ при $1\leqslant p<\infty$, $\alpha<\omega+1/p$.*

Приведем контрпример, показывающий важность условия регулярности склейки (4.2). Рассмотрим краевую задачу $\mathcal{L}'$:

$$-y'' = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \quad \lambda = \rho^2,$$
$$y(0) = y(\pi) = 0, \quad y^{(k)}(a+0) = (-1)^k y^{(k)}(a-0), \quad k = 0, 1, \ a = 3\pi/4.$$

Для этой задачи условие регулярности склейки (4.2) не выполняется, и $\Delta_a(\lambda) = \frac{\sin\rho(2a-\pi)}{\rho}$. Собственные значения $\lambda_l = \rho_l^2$ краевой задачи $\mathcal{L}'$ имеют вид $\rho_l = 2l$, $l \geqslant 1$, а собственные функции вычисляются по формуле

$$y_l(x) = \begin{cases} \sin 2lx, & x \leqslant 3\pi/4, \\ (-1)^{l-1}\sin 2lx, & x > 3\pi/4. \end{cases}$$

Система функций $\{y_l(x)\}_{l\geqslant 1}$ не полна в $B_{\alpha,p}$ при $1 \leqslant p < \infty$, $\alpha < 1 + 1/p$.

Обозначим $\eta = \max(0, -\omega)$, $\mu_k^* = n - 1 - \mu_{n-k+1}$, $\psi = \mu_{n-1} + \mu_1^*$. Пусть для определенности $\operatorname{Re}\psi < 0$. Рассмотрим функцию

$$G_a(x,t,\lambda) = \frac{(-1)^m}{\Delta_a(\lambda)} \begin{vmatrix} \varphi_{m+1}(x,\lambda) & \ldots & \varphi_n(x,\lambda) & g_a(x,t,\lambda) \\ \varphi_{m+1}(T,\lambda) & \ldots & \varphi_n(T,\lambda) & g_a(T,t,\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{m+1}^{(m-1)}(T,\lambda) & \ldots & \varphi_n^{(m-1)}(T,\lambda) & g_a^{(m-1)}(T,t,\lambda) \end{vmatrix},$$

где

$$g_a(x,t,\lambda) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\varphi_{n-k+1}(x,\lambda)\varphi_k^*(t,\lambda), & x \geqslant t, \\ 0 & x < t. \end{cases}$$

$$\varphi_k^*(t,\lambda) := \frac{1}{A(t)} \det\left[\varphi_j^{(\nu)}(t,\lambda)\right]_{\nu=\overline{0,n-2};\, j=\overline{1,n}\setminus n-k+1},$$

$A(t) \equiv 1$ при $x \in J_-$ и $A(t) \equiv \det A$ при $x \in J_+$.

Теорема 4.2. *Пусть функции $f(x)$ такова, что функция $f(x)(x-a)^{\mu_1^*}$ абсолютно непрерывна на $[0,a]$ и $[a,T]$, причем $f(0) = f(T) = 0$. Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} \max_{0\leqslant x\leqslant T} \left|(x-a)^\eta \Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r_N^n} \Big(\int_0^T G_a(x,t,\lambda)f(t)\,dt\Big)\,d\lambda + f(x)\Big)\right| = 0.$$

Рассмотрим функции $\Delta_{k,a}(\lambda) := \det\left[\varphi_j^{(\nu-1)}(T,\lambda)\right]_{j=\overline{k+1,n};\, \nu=\overline{1,n-k}}$, $k = \overline{1,n}$. В частности, $\Delta_{n,a}(\lambda) \equiv \det A$. Нули функции $\Delta_{k,a}(\lambda)$, $k = \overline{1,n-1}$ совпадают с собственными значениями $\{\lambda_{lk}\}$ краевой задачи $\mathcal{L}_k$ для уравнения (4.1) с краевыми условиями $y(0) = \ldots = y^{(k-1)}(0) = 0$, $y(T) = \ldots = y^{(n-k-1)}(T) = 0$ и с условиями склейки, порожденными матрицей перехода A.

Пусть функции $\Phi_{j,a}(x,\lambda)$, $j = \overline{1,n}$, являются решениями уравнения (4.1) с условиями $\Phi_{j,a}^{(\nu-1)}(0,\lambda) = \delta_{\nu j}$, $\nu = \overline{1,j}$, $\Phi_{j,a}^{(\mu-1)}(T,\lambda) = 0$, $\mu = \overline{1,n-j}$ и с условиями склейки, порожденными матрицей перехода A. Справедливы соотношения

$$\Phi_{j,a}(x,\lambda) = \varphi_j(x,\lambda) + \sum_{k=j+1}^{n} M_{jk,a}(\lambda)\varphi_k(x,\lambda), \qquad M_{jk,a}(\lambda) = \frac{\Delta_{jk,a}(\lambda)}{\Delta_{j,a}(\lambda)}, \qquad 1 \leqslant j < k \leqslant n,$$
$$\Delta_{jk,a}(\lambda) = (-1)^{j+k}\det[\varphi_s^{(\nu-1)}(T,\lambda)]_{s=\overline{j,n}\setminus k;\, \nu=\overline{1,n-j}}.$$

Матрица $M_a(\lambda) = [M_{jk,a}(\lambda)]_{j,k=\overline{1,n}}$ ($M_{jk,a}(\lambda) := \delta_{jk}$ при $j \geqslant k$) называется матрицей Вейля для уравнения (4.1).

Теорема 4.3.

1. *При $|\rho(x-a)| \geqslant 1$, $\rho \in \overline{S_{k_0}} \cap G_{\delta,j}$ имеют место оценки*

$$|\Phi_{j,a}^{(\nu-1)}(x,\lambda)| \leqslant C\,|\rho^{\nu-j}\exp(\rho R_j x)|, \quad j,\nu = \overline{1,n},$$
$$|M_{jk,a}(\lambda)| \leqslant C|\rho|^{k-j}, \quad 1 \leqslant j < k \leqslant n.$$

2. *При $|\rho(x-a)| \leqslant 1$ имеют место оценки*

$$|\hat{\Phi}_{j,a}(x,\lambda)| \leqslant C\,|\rho^{1-j+\mu_1}\exp(\rho R_j a)|, \quad j = \overline{1,n},$$
$$|\hat{\Phi}_{j,a}^{(\nu)}(x,\lambda)| \leqslant C\,|\rho^{1-j+\mu_1}\exp(\rho R_j a)|(|\rho|^n|x-a|^{n-\nu} + |\rho^{\mu_2-\mu_1}(x-a)^{\mu_2-\mu_1-\nu}|), \ \ \nu = \overline{1,n-1}, \ j = \overline{1,n},$$

где $\hat{\Phi}_{j,a}(x,\lambda) = (x-a)^{-\mu_1}\Phi_{j,a}(x,\lambda)$.

Рассмотрим обратную задачу восстановления оператора ℓ по заданной матрице Вейля. Сформулируем теорему единственности для этой обратной задачи.

Теорема 4.4. *Если* $M_a(\lambda) = \tilde{M}_a(\lambda)$, *то* $\ell = \tilde{\ell}$. *Таким образом, матрица Вейля* $M(\lambda)$ *однозначно определяет оператор* ℓ.

Используя метод спектральных отображений, можно получить конструктивную процедуру решения этой нелинейной обратной задачи, а также необходимые и достаточные условия ее разрешимости.

Результаты, относящиеся к уравнению (4.1), более подробно изложены в [11, 12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968.
2. *Костюченко А. Г., Саргсян И. С.* Распределение собственных значений. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1979.
3. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
4. *Юрко В. А.* О дифференциальных операторах высших порядков с регулярной особенностью// Мат. сб. — 1995. — *186*, № 6. — С. 133–160.
5. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. — М.: Физматлит, 2007.
6. *Ignatiev M. Yu.* Integral transforms connected with differential systems with a singularity// Tamkang J. Math. — 2019. — *50*, № 3. — С. 253–268.
7. *Ignatiev M. Yu.* Asymptotics of solutions of some integral equations connected with differential systems with a singularity// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2020. — *20*, № 1. — С. 17–28.
8. *Turrittin H.* Stokes multipliers for asymptotic solutions of a certain differential equation// Trans. Am. Math. Soc. — 1950. — *68*. — С. 304–329.
9. *Yurko V. A.* On higher-order differential operators with a singular point// Inverse Problems. — 1993. — *9*, № 4. — С. 495–502.
10. *Yurko V. A.* Inverse spectral problems for differential operators and their applications. — Amsterdam: Gordon and Breach Sci. Publ., 2000.
11. *Yurko V. A.* Higher-order differential equations having a singularity in an interior point// Results Math. — 2002. — *42*, № 1-2. — С. 177–191.
12. *Yurko V. A.* Integral transforms connected with higher-order differential operators with a singularity// Integral Transforms Spec. Funct. — 2002. — *13*, № 6. — С. 497–511.

Вячеслав Анатольевич Юрко

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, 410026, г. Саратов, ул. Астраханская, 83

E-mail: `yurkova@info.sgu.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-408-421 UDC 517.984

Direct and Inverse Problems of Spectral Analysis for Arbitrary-Order Differential Operators with Nonintegrable Regular Singularities

© 2021 **V. A. Yurko**

Abstract. A short review is presented of results on the spectral theory of arbitrary order ordinary differential operators with non-integrable regular singularities. We establish properties of spectral characteristics, prove theorems on completeness of root functions in the corresponding spaces, prove expansion and equiconvergence theorems, and provide a solution of the inverse spectral problem for this class of operators.

REFERENCES

1. V. Vazov, *Asimptoticheskie razlozheniya resheniy obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Asymptotic Expansions of Solutions of Ordinary Differential Equations], Mir, Moscow, 1968 (in Russian).
2. A. G. Kostyuchenko and I. S. Sargsyan, *Raspredelenie sobstvennykh znacheniy. Samosopryazhennye obyknovennye differentsial'nye operatory* [Distribution of Eigenvalues. Self-Adjoint Ordinary Differential Operators], Nauka, Moscow, 1979 (in Russian).
3. M. A. Naimark, *Lineynye differentsial'nye operatory* [Linear Differential Operators], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
4. V. A. Yurko, "O differentsial'nykh operatorakh vysshikh poryadkov s regulyarnoy osobennost'yu" [On differential operators of higher orders with a regular singularity], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1995, **186**, No. 6, 133–160 (in Russian).
5. V. A. Yurko, *Vvedenie v teoriyu obratnykh spektral'nykh zadach* [Introduction to the Theory of Inverse Spectral Problems], Fizmatlit, Moscow, 2007 (in Russian).
6. M. Yu. Ignatiev, "Integral transforms connected with differential systems with a singularity," *Tamkang J. Math.*, 2019, **50**, No. 3, 253–268.
7. M. Yu. Ignatiev, "Asymptotics of solutions of some integral equations connected with differential systems with a singularity," *Izv. Saratov. Univ. N.S. Ser. Mat. Mekh. Inf.*, 2020, **20**, No. 1, 17–28.
8. H. Turrittin, "Stokes multipliers for asymptotic solutions of a certain differential equation," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1950, **68**, 304–329.
9. V. A. Yurko, "On higher-order differential operators with a singular point," *Inverse Problems*, 1993, **9**, No. 4, 495–502.
10. V. A. Yurko, *Inverse Spectral Problems for Differential Operators and Their Applications*, Gordon and Breach Sci. Publ., Amsterdam, 2000.
11. V. A. Yurko, "Higher-order differential equations having a singularity in an interior point," *Results Math.*, 2002, **42**, No. 1-2, 177–191.
12. V. A. Yurko, "Integral transforms connected with higher-order differential operators with a singularity," *Integral Transforms Spec. Funct.*, 2002, **13**, No. 6, 497–511.

V. A. Yurko
Chernyshevskii Saratov National Research State University, Saratov, Russia
E-mail: yurkova@info.sgu.ru