РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 67, № 1, 2021

Дифференциальные уравнения с частными производными

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-1
http://journals.rudn.ru/cmfd

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print)
4 выпуска в год
http://journals.rudn.ru/cmfd
Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.
Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.
Индексируется в международных базах данных научных публикаций *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.
Полный текст журнала размещен в базах данных компании *EBSCO Publishing* на платформе *EBSCOhost*.
Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты. Объем статьи, занимающий целый том, должен составлять 140–190 страниц в стиле нашего журнала.

Правила оформления статей, архив публикаций и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала: http://journals.rudn.ru/cmfd, http://www.mathnet.ru/cmfd.

Редактор: ***Е. М. Варфоломеев***
Компьютерная верстка: ***Е. М. Варфоломеев***

Адрес редакции:
115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Подписано в печать 11.01.2021. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.
Усл. печ. л. 23,25. Тираж 125 экз. Заказ 31.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов» (РУДН)
117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН
115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 67, No. 1, 2021
Partial Differential Equations

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-1
http://journals.rudn.ru/cmfd

Founded in 2003
Founder: PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS
Published by the Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print)
4 issues per year
http://journals.rudn.ru/cmfd
Reviewed in *MathSciNet* and *Zentralblatt Math*.
The full texts can be found in the *EBSCOhost* databases by *EBSCO Publishing*.
Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results. Occupying the whole volume, an article should make up 140–190 pages in the format of the journal.

Guidelines for authors, archive of issues, and other information can be found at the journal's website: http://journals.rudn.ru/cmfd, http://www.mathnet.ru/eng/cmfd.

Editor: *E. M. Varfolomeev*
Computer design: *E. M. Varfolomeev*
Address of the Editorial Office:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Print run 125 copies.

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

Printed at RUDN Publishing House:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 1 (2021)

СОДЕРЖАНИЕ

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions, 2021, Vol. 67, No. 1

CONTENTS

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 1 (2021). С. 1–13

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-1-1-13 УДК 517.956.25

ОТСУТСТВИЕ НЕТРИВИАЛЬНЫХ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ГРАДИЕНТНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2021 г. **В. Э. АДМАСУ, Е. И. ГАЛАХОВ, О. А. САЛИЕВА**

Аннотация. В этой статье мы модифицируем результаты, полученные Митидиери и Похожаевым о достаточных условиях отсутствия нетривиальных слабых решений нелинейных неравенств и систем с целыми степенями оператора Лапласа и с нелинейным слагаемым вида $a(x)\,|\nabla(\Delta^m u)|^q + b(x)|\nabla u|^s$. Мы получаем оптимальные априорные оценки, применяя метод нелинейной емкости с соответствующим выбором пробных функций. В итоге мы доказываем отсутствие нетривиальных слабых решений нелинейных неравенств и систем от противного.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В последние десятилетия большое внимание уделяется условиям отсутствия решений различных нелинейных уравнений и неравенств в частных производных в соответствующих функциональных классах.

Эта статья вдохновлена различными недавними работами об отсутствии нетривиальных слабых решений некоторых нелинейных уравнений и неравенств в частных производных, содержащих целые степени оператора Лапласа. Мы получаем достаточные условия отсутствия нетривиальных слабых решений некоторых нелинейных уравнений и неравенств с целыми степенями оператора Лапласа и с градиентными нелинейностями вида $a(x)\,|\nabla(\Delta^m u)|^q + b(x)|\nabla u|^s$, применяя метод нелинейной емкости, предложенный С. И. Похожаевым [4]. Позднее этот метод был развит в совместной работе Э. Митидиери и С. И. Похожаева [3], см. также [10,11]. Так как метод позволил им получить новые точные достаточные условия отсутствия решений в более широких функциональных классах, чем ранее известные методы (в частности, метод сравнения), авторов заинтересовало его применение с соответствующим выбором пробных функций к задачам с различными операторами [11].

Метод основан на получении асимптотически оптимальных априорных оценок путем применения подходящих алгебраических неравенств к интегральной форме рассматриваемой задачи при соответствующем выборе пробных функций. Этот тип нелинейных слагаемых рассматривался в [1] для параболических неравенств. Метод также применялся для различных классов эллиптических уравнений, неравенств и систем, см. [2, 5–9].

В настоящей работе мы модифицируем условия отсутствия решений из [4], изменяя нелинейное слагаемое в рассматриваемом неравенстве или системе с целыми степенями оператора Лапласа.

Публикация выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН.

Оставшаяся часть статьи состоит из раздела 2 и раздела 3. В разделе 2 мы доказываем отсутствие нетривиальных слабых решений для рассматриваемого неравенства, а в разделе 3 — для системы таких неравенств.

2. Скалярные неравенства

Рассмотрим неравенство вида

$$\Delta^k u(x) \geqslant a(x)\,|\nabla(\Delta^m u(x))|^q + b(x)|\nabla u(x)|^s, \qquad x\in\mathbb{R}^N \tag{2.1}$$

с

$$q>1, \quad s>1, \tag{2.2}$$

где a и b — локально интегрируемые неотрицательные функции, удовлетворяющие оценкам

$$a(x)\geqslant c_1(1+|x|)^\alpha, \quad b(x)\geqslant c_2(1+|x|)^\beta \tag{2.3}$$

для некоторых $c_1, c_2>0$, α, $\beta\in\mathbb{R}$ и всех $x\in\mathbb{R}^N$.

Определение 2.1. Будем называть *слабым решением нелинейного неравенства* (2.1) функцию $u\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ такую, что $a(x)\,|\nabla(\Delta^m u)|^q\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $b(x)|\nabla u|^s\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, и неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(a(x)\,|\nabla(\Delta^m u(x))|^q + b(x)|\nabla u(x)|^s\right)\varphi(x)\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x)\Delta^k\varphi(x)\,dx \tag{2.4}$$

выполняется для всякой пробной функции $\varphi\in C_0^{2k}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}_+)$.

Теорема 2.1. *Предположим, что показатели q и s удовлетворяют неравенствам* (2.2) *и*

$$\begin{aligned} q &\leqslant \frac{N+\alpha}{N-2(k-m)+1} \text{ при } N>2(k-m)-1,\\ s &\leqslant \frac{N+\beta}{N-2k+1} \text{ при } N>2k-1. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Тогда задача (2.1) *не имеет нетривиальных слабых решений.*

Доказательство. По определению слабого решения, интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(a(x)\,|\nabla(\Delta^m u(x))|^q + b(x)|\nabla u(x)|^s\right)\varphi(x)\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x)\Delta^k\varphi(x)\,dx \leqslant\\ &\leqslant \frac12\int\limits_{\mathbb{R}^N}\nabla\left(\Delta^m u(x)\right)\nabla\left(\Delta^{k-m-1}\varphi(x)\right)dx + \frac12\int\limits_{\mathbb{R}^N}\nabla u(x)\nabla\left(\Delta^{k-1}\varphi(x)\right)dx \leqslant\\ &\leqslant \frac12\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla(\Delta^m u(x))|\cdot|\nabla(\Delta^{k-m-1}\varphi(x))|\,dx + \frac12\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(x)|\cdot|\nabla(\Delta^{k-1}\varphi(x))|\,dx. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Отсюда, применяя неравенство Юнга

$$AB\leqslant\frac{A^p}{p}+\frac{B^{p'}}{p'} \qquad \left(A,B>0, \quad p>1, \quad p'=\frac{p}{p-1}\right), \tag{2.7}$$

мы оцениваем слагаемые в правой части (2.6) следующим образом:

$$\begin{aligned} &\frac12\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla(\Delta^m u(x))|\cdot|\nabla(\Delta^{k-m-1}\varphi(x))|\,dx \leqslant\\ &\leqslant \frac12\int\limits_{\mathbb{R}^N} a(x)\,|\nabla\left(\Delta^m u(x)\right)|^q\varphi(x)\,dx + C_1(q)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(\Delta^{k-m-1}\varphi(x)\right)\right|^{q'} a^{-\frac{q'}{q}}(x)\varphi^{-\frac{q'}{q}}(x)\,dx, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где (2.7) применяется с $p=q$ и

$$\begin{cases} A=A(x)=a^{\frac1q}(x)\,|\nabla\left(\Delta^m u(x)\right)|\,\varphi^{\frac1q}(x),\\ B=B(x)=a^{-\frac1q}(x)\left|\nabla\left(\Delta^{k-m-1}\varphi(x)\right)\right|\varphi^{-\frac1q}(x), \end{cases} \tag{2.9}$$

и

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|\cdot\left|\nabla\left(\Delta^{k-1}\varphi(x)\right)\right| dx \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)|\nabla u(x)|^s\varphi(x)\,dx + C_2(s)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(\Delta^{k-1}\varphi(x)\right)\right|^{s'} b^{-\frac{s'}{s}}(x)\varphi^{-\frac{s'}{s}}(x)\,dx,\end{aligned} \tag{2.10}$$

где (2.7) применяется с $p=s$ и

$$\begin{cases} A = A(x) = b^{\frac{1}{s}}(x)|\nabla u(x)|\varphi^{\frac{1}{s}}(x), \\ B = B(x) = a^{-\frac{1}{s}}(x)\left|\nabla\left(\Delta^{k-1}\varphi(x)\right)\right|\varphi^{-\frac{1}{s}}(x), \end{cases} \tag{2.11}$$

$C_1(q)$ и $C_2(s)$ — положительные константы, зависящие только от q и s соответственно. Тогда, комбинируя (2.7), (2.10) и (2.13), получим следующую априорную оценку:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(a(x)\left|\nabla(\Delta^m u(x))\right|^q + b(x)|\nabla u(x)|^s\right)\varphi(x)\,dx\right) \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(C_1(q)\frac{|L_{k-m-1}(\varphi)|^{q'}}{(a\varphi)^{q'-1}} + C_2(q)\frac{|L_{k-1}(\varphi)|^{s'}}{(b\varphi)^{s'-1}}\right)dx,\end{aligned} \tag{2.12}$$

где $L_j(\varphi) = \nabla\left(\Delta^j\varphi\right)$ ($j = k-m-1$ или $k-1$), $q' = \dfrac{q}{q-1}$, $s' = \dfrac{s}{s-1}$.

Теперь выберем пробную функцию φ вида

$$\varphi(x) = \varphi_0\left(\frac{|x|^2}{R^2}\right), \tag{2.13}$$

где $R>0$ и $\varphi_0 \in C_0^{2k}\left(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}_+\right)$ такова, что

$$\varphi_0(s) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant s \leqslant 1, \\ 0, & s \geqslant 2. \end{cases} \tag{2.14}$$

Далее сделаем замену переменных:

$$x \to \xi : x = R\xi. \tag{2.15}$$

Преобразуя правую часть неравенства (2.12) по формуле (2.15), получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|L_{k-m-1}(\varphi)|^{q'}}{(a\varphi)^{q'-1}}\,dx = R^{\theta_1}\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}}\frac{\left|L^*_{k-m-1}(\varphi_0)\right|^{q'}}{(a_0\varphi_0)^{q'-1}}\,d\xi, \tag{2.16}$$

где $L^*_{k-m-1}(\varphi_0) = \nabla\left(\Delta^{k-m-1}\varphi_0\right)$, $a_0(\xi) = a(R\xi)$, $\theta_1 = N - \left(2(k-m) - 1 + \dfrac{\alpha}{q}\right)q'$, и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|L_{k-1}(\varphi)|^{s'}}{(b\varphi)^{s'-1}}\,dx = R^{\theta_2}\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}}\frac{\left|L^*_{k-1}(\varphi_0)\right|^{q'}}{(b_0\varphi_0)^{s'-1}}\,d\xi, \tag{2.17}$$

где $L^*_{k-1}(\varphi_0) = \nabla\left(\Delta^{k-1}\varphi_0\right)$, $b_0(\xi) = b(R\xi)$, $\theta_2 = N - \left(2k - 1 + \dfrac{\beta}{q}\right)q'$.

Теперь выберем пробную функцию φ_0 так, что

$$\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}}\frac{\left|L^*_{k-m-1}(\varphi_0)\right|^{q'}}{(a_0\varphi_0)^{q'-1}}\,d\xi < \infty$$

и

$$\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} \frac{\left|L^*_{k-1}(\varphi_0)\right|^{q'}}{(b_0\varphi_0)^{s'-1}}\,d\xi<\infty,$$

так что интеграл в правой части (2.12) конечен. Тогда из (2.12) следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}(a(x)\,|\nabla\left(\Delta^m u(x)\right)|^q+b(x)\,|\nabla u(x)|^s)\varphi\,dx\leqslant CR^{\theta}, \tag{2.18}$$

где $\theta=\max(\theta_1,\theta_2)$. Теперь предположим, что $\theta=\theta_1\geqslant\theta_2$ (противоположный случай можно исследовать аналогично) и рассмотрим следующие два случая для значений θ.

Случай 1: если $\theta<0$, переходя к пределу при $R\to\infty$ в (2.18), имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(a(x)\,|\nabla\left(\Delta^m u\right)|^q+b(x)\,|\nabla u|^s\right)dx\to 0. \tag{2.19}$$

Таким образом, утверждение теоремы доказано при $\theta<0$, т. е.

$$1<q<\frac{N+\alpha}{N-2(k-m)+1}. \tag{2.20}$$

Случай 2: если $\theta=0$,

$$q=\frac{N+\alpha}{N-2(k-m)+1}. \tag{2.21}$$

В этом случае из соотношения (2.16) следует

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|L_{k-m-1}(\varphi)|^{q'}}{(a\varphi)^{q'-1}}\,dx=c_1, \tag{2.22}$$

где

$$c_1=\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}}\frac{\left|L^*_{k-m-1}(\varphi_0)\right|^{q'}}{(a_0\varphi_0)^{q'-1}}\,d\xi, \tag{2.23}$$

и (так как $\theta_2\leqslant\theta_1=0$)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|L_{k-1}(\varphi)|^{s'}}{(b\varphi)^{s'-1}}\,dx=\lim_{R\to\infty}c_2R^{\theta_2}\leqslant c_2, \tag{2.24}$$

где

$$c_2=\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}}\frac{\left|L^*_{k-1}(\varphi_0)\right|^{s'}}{(b_0\varphi_0)^{s'-1}}\,d\xi. \tag{2.25}$$

Отсюда и из (2.12) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}(a(x)\,|\nabla\left(\Delta^m u\right)|^q+b(x)\,|\nabla u|^s)\varphi\,dx\leqslant c. \tag{2.26}$$

Переходя к пределу при $R\to\infty$, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(a(x)\,|\nabla\left(\Delta^m u\right)|^q+b(x)\,|\nabla u|^s\right)dx\leqslant c. \tag{2.27}$$

Теперь вернемся к неравенству (2.6). Заметим, что

$$\operatorname{supp}L_j(\varphi)\subseteq\{x\in\mathbb{R}^N\mid R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R\}=\overline{B}_{\sqrt{2}R}\backslash B_R,$$

где $B_L=\{x\in\mathbb{R}^N\mid|x|<L\}$, $L>0$ ($L=R$ или $2R$).

Тогда в силу неравенства Гельдера из соотношения (2.6) следует

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\mathbb{R}^N}(a(x)\,|\nabla\,(\Delta^m u)|^q+b(x)\,|\nabla u|^s)\varphi\,dx\leqslant\\ &\leqslant\Bigg(\int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R} a\,|\nabla\,(\Delta^m u)|^q\,\varphi\,dx\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg(\int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R}\frac{|L_{k-m-1}(\varphi)|^{q'}}{(a\varphi)^{q'-1}}\,dx\Bigg)^{\frac{1}{q'}}+\\ &+\Bigg(\int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R} b(x)\,|\nabla u|^s\,\varphi\,dx\Bigg)^{\frac{1}{s}}\Bigg(\int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R}\frac{|L_{k-1}(\varphi)|^{s'}}{(b\varphi)^{s'-1}}\,dx\Bigg)^{\frac{1}{s'}}.\end{aligned}\tag{2.28}$$

Однако, в силу (2.27) и абсолютной сходимости интеграла в этом соотношении, имеем

$$\int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R} a(x)\,|\nabla\,(\Delta^m u)|^q\,dx\to 0\tag{2.29}$$

и

$$\int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R} b(x)|\nabla u|^s\,dx\to 0\tag{2.30}$$

при $R\to\infty$.

Переходя к пределу при $R\to\infty$ в (2.28) и учитывая (2.22) и (2.24), вновь получим (2.19). Таким образом, $u=0$ п.в. и в этом случае, т. е. с учетом (2.21) условие отсутствия решения окончательно записывается как $1<q\leqslant\dfrac{N+\alpha}{N-2(k-m)+1}$, и это завершает доказательство теоремы 1. ☐

3. Системы неравенств

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases}\Delta^{k_1}u(x)\geqslant a(x)\,|\nabla\,(\Delta^{m_1}v(x))|^{q_1}+b(x)|\nabla u(x)|^{s_1}, & x\in\mathbb{R}^N,\\ \Delta^{k_2}v(x)\geqslant c(x)\,|\nabla\,(\Delta^{m_2}u(x))|^{q_2}+d(x)|\nabla v(x)|^{s_2}, & x\in\mathbb{R}^N\end{cases}\tag{3.1}$$

с

$$\begin{aligned}&k_1,k_2,m_1,m_2\in\mathbb{N},\quad k_1>m_2,\quad k_2>m_1,\quad \min(q_1,q_2,s_1,s_2)>1,\\ &a(x)\geqslant C(1+|x|)^{\alpha_1},\quad b(x)\geqslant C(1+|x|)^{\beta_1},\\ &c(x)\geqslant C(1+|x|)^{\alpha_2},\quad d(x)\geqslant C(1+|x|)^{\beta_2}\end{aligned}\tag{3.2}$$

для некоторых $C>0$, α_1, α_2, β_1, $\beta_2\in\mathbb{R}$ и всех $x\in\mathbb{R}^N$.

Определение 3.1. Будем называть *слабым решением системы нелинейных неравенств* (3.1) пару функций $(u,v)\in\big(L^{s_1}_{loc}(\mathbb{R}^N)\cap L^{q_2}_{loc}(\mathbb{R}^N)\big)\times\big(L^{q_1}_{loc}(\mathbb{R}^N)\cap L^{s_2}_{loc}(\mathbb{R}^N)\big)$ таких, что неравенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}(a(x)\,|\nabla\,(\Delta^{m_1}v(x))|^{q_1}+b(x)|\nabla u(x)|^{s_1})\varphi(x)\,dx\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^N}u(x)\Delta^{k_1}\varphi(x)\,dx,\tag{3.3}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}(c(x)\,|\nabla\,(\Delta^{m_2}u(x))|^{q_2}+d(x)|\nabla v(x)|^{s_2})\varphi(x)\,dx\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^N}v(x)\Delta^{k_2}\varphi(x)\,dx\tag{3.4}$$

выполняются для любой пробной функции $\varphi\in C_0^{2k}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}_+)$, где $k=\max(k_1,k_2)$.

Теорема 3.1. *Пусть выполняется* (3.2). *Предположим, что* $\theta\overset{\mathrm{def}}{=}\max\limits_{i=1,\dots,4}\theta_i\leqslant 0$, *где*

$$\begin{aligned}\theta_1&=N-\frac{2(k_1-m_2)q_2-q_2+\alpha_2}{q_2-1},\quad &\theta_2&=N-\frac{(2k_1-1)s_1+\beta_1}{s_1-1},\\ \theta_3&=N-\frac{2(k_2-m_1)q_1-q_1+\alpha_1}{q_1-1},\quad &\theta_4&=N-\frac{(2k_2-1)s_2+\beta_2}{s_2-1}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Тогда задача (3.1) *не имеет нетривиальных слабых решений в* $\mathbb{R}^N$.

Доказательство. Начнем с того, что положим $\psi(x)=\varphi(x)$. В силу определения слабого решения и интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^N}(a(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_1}v(x)\right)|^{q_1}+b(x)|\nabla u(x)|^{s_1})\varphi(x)\,dx\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^N}u(x)\Delta^{k_1}\varphi(x)\,dx\leqslant\\
&\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\nabla\left(\Delta^{m_2}u(x)\right)\nabla\left(\Delta^{k_1-m_2-1}\varphi(x)\right)\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\nabla u(x)\nabla\left(\Delta^{k_1-1}\varphi(x)\right)\,dx\leqslant\\
&\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla\left(\Delta^{m_2}u(x)\right)|\cdot\left|\nabla\left(\Delta^{k_1-m_2-1}\varphi(x)\right)\right|\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(x)|\cdot\left|\nabla\left(\Delta^{k_1-1}\varphi(x)\right)\right|\,dx,
\end{aligned}\tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^N}(c(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_2}u(x)\right)|^{q_2}+d(x)|\nabla v(x)|^{s_2})\varphi(x)\,dx\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^N}v(x)\Delta\varphi^{k_2}(x)\,dx\leqslant\\
&\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\nabla\left(\Delta^{m_1}v(x)\right)\nabla\left(\Delta^{k_2-m_1-1}\varphi(x)\right)\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\nabla v(x)\nabla\left(\Delta\varphi^{k_2-1}(x)\right)\,dx\leqslant\\
&\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla\left(\Delta^{m_1}v(x)\right)|\cdot\left|\nabla\left(\Delta^{k_2-m_1-1}\varphi(x)\right)\right|\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla v(x)|\cdot\left|\nabla\left(\Delta^{k_2-1}\varphi(x)\right)\right|\,dx.
\end{aligned}\tag{3.7}$$

Отсюда, применяя неравенство Юнга в соотношениях (3.6) и (3.7), имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla\left(\Delta^{m_2}u(x)\right)|\cdot\left|\nabla\left(\Delta^{k_1-m_2-1}\varphi(x)\right)\right|\,dx\leqslant\\
&\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}c(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_2}u(x)\right)|^{q_2}\,\varphi(x)\,dx+C_1(q_2)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(\Delta^{k_1-m_2-1}\varphi(x)\right)\right|^{q_2'}c^{-\frac{q_2'}{q_2}}(x)\varphi^{-\frac{q_2'}{q_2}}(x)\,dx,
\end{aligned}\tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(x)|\cdot\left|\nabla\left(\Delta^{k_1-1}\varphi(x)\right)\right|\,dx\leqslant\\
&\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}b(x)|\nabla u(x)|^{s_1}\varphi(x)\,dx+C_2(s_1)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(\Delta^{k_1-1}\varphi(x)\right)\right|^{s_1'}b^{-\frac{s_1'}{s_1}}(x)\varphi^{-\frac{s_1'}{s_1}}(x)\,dx,
\end{aligned}\tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla\left(\Delta^{m_1}v(x)\right)|\cdot\left|\nabla\left(\Delta^{k_2-m_1-1}\varphi(x)\right)\right|\,dx\leqslant\\
&\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}a(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_1}v(x)\right)|^{q_1}\,\varphi(x)\,dx+C_3(q_1)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(\Delta^{k_2-m_1-1}\varphi(x)\right)\right|^{q_1'}a^{-\frac{q_1'}{q_1}}(x)\varphi^{-\frac{q_1'}{q_1}}(x)\,dx,
\end{aligned}\tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla v(x)|\cdot\left|\nabla\left(\Delta^{k_2-1}\varphi(x)\right)\right|\,dx\leqslant\\
&\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}d(x)|\nabla v(x)|^{s_2}\varphi(x)\,dx+C_4(s_2)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(\Delta^{k_2-1}\varphi(x)\right)\right|^{s_2'}d^{-\frac{s_2'}{s_2}}(x)\varphi^{-\frac{s_2'}{s_2}}(x)\,dx,
\end{aligned}\tag{3.11}$$

где $\dfrac{1}{q_i}+\dfrac{1}{q_i'}=1$ и $\dfrac{1}{s_i}+\dfrac{1}{s_i'}=1$ $(i=1,2)$.

Введем следующие обозначения:

$$X=\int\limits_{\mathbb{R}^N}(a(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_1}v(x)\right)|^{q_1}+b(x)|\nabla u(x)|^{s_1})\varphi(x)\,dx$$

и

$$Y=\int\limits_{\mathbb{R}^N}(c(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_2}u(x)\right)|^{q_2}+d(x)|\nabla v(x)|^{s_2})\varphi(x)\,dx.$$

Тогда из (3.6)–(3.11) следует, что

$$\begin{aligned} X \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} c(x)\left|\nabla\left(\Delta^{m_2}u(x)\right)\right|^{q_2}\varphi(x)\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)|\nabla u(x)|^{s_1}\varphi(x)\,dx + \\ + C_1(q_2)\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\left(\Delta^{k_1-m_2-1}\varphi(x)\right)\right|^{q_2'} c^{-\frac{q_2'}{q_2}}(x)\varphi^{-\frac{q_2'}{q_2}}(x)\,dx + \\ + C_2(s_1)\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\left(\Delta^{k_1-1}\varphi(x)\right)\right|^{s_1'} b^{-\frac{s_1'}{s_1}}(x)\varphi^{-\frac{s_1'}{s_1}}(x)\,dx, \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} Y \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} a(x)\left|\nabla\left(\Delta^{m_1}v(x)\right)\right|^{q_1}\varphi(x)\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} d(x)|\nabla v(x)|^{s_2}\varphi(x)\,dx + \\ + C_3(q_1)\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\left(\Delta^{k_2-m_1-1}\varphi(x)\right)\right|^{q_1'} a^{-\frac{q_1'}{q_1}}(x)\varphi^{-\frac{q_1'}{q_1}}(x)\,dx + \\ + C_4(s_2)\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\left(\Delta^{k_2-1}\varphi(x)\right)\right|^{s_2'} d^{-\frac{s_2'}{s_2}}(x)\varphi^{-\frac{s_2'}{s_2}}(x)\,dx. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Складывая (3.12) с (3.13) и упрощая, получим

$$\begin{aligned} X + Y \leqslant 2C_1(q_2)\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\left(\Delta^{k_1-m_2-1}\varphi(x)\right)\right|^{q_2'} c^{-\frac{q_2'}{q_2}}(x)\varphi^{-\frac{q_2'}{q_2}}(x)\,dx + \\ + 2C_2(s_1)\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\left(\Delta^{k_1-1}\varphi(x)\right)\right|^{s_1'} b^{-\frac{s_1'}{s_1}}(x)\varphi^{-\frac{s_1'}{s_1}}(x)\,dx + \\ + 2C_3(q_1)\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\left(\Delta^{k_2-m_1-1}\varphi(x)\right)\right|^{q_1'} a^{-\frac{q_1'}{q_1}}(x)\varphi^{-\frac{q_1'}{q_1}}(x)\,dx + \\ + 2C_4(s_2)\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\left(\Delta^{k_2-1}\varphi(x)\right)\right|^{s_2'} d^{-\frac{s_2'}{s_2}}(x)\varphi^{-\frac{s_2'}{s_2}}(x)\,dx. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Теперь введем стандартную пробную функцию φ вида

$$\varphi(x) = \varphi_0\left(\frac{|x|^2}{R^2}\right),$$

где $R > 0$ и $\varphi_0 \in C_0^{2k}(\mathbb{R}_+)$ такова, что

$$\varphi_0(s) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant s \leqslant 1, \\ 0, & s \geqslant 2. \end{cases}$$

Далее сделаем замену переменных в правой части неравенства (3.14):

$$x \to \xi : x = R\xi,$$

что приводит к

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\left(\Delta^{k_1-m_2-1}\varphi(x)\right)\right|^{q_2'} c^{-\frac{q_2'}{q_2}}(x)\varphi^{-\frac{q_2'}{q_2}}(x)\,dx = \\ = R^{\theta_1}\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} \left|\nabla\left(\Delta^{k_1-m_2-1}\varphi_0(\xi)\right)\right|^{q_2'} (c_0\varphi_0)^{1-q_2'}\,d\xi, \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\left(\Delta^{k_1-1}\varphi(x)\right)\right|^{s_1'} b^{-\frac{s_1'}{s_1}}(x)\varphi^{-\frac{s_1'}{s_1}}(x)\,dx =$$

$$= R^{\theta_2} \int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla\left(\Delta^{k_1-1}\varphi_0(\xi)\right)|^{s_1'}(b_0\varphi_0)^{1-s_1'}(\xi)\,d\xi, \tag{3.16}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla\left(\Delta^{k_2-m_1-1}\varphi(x)\right)|^{q_1'} a^{-\frac{q_1'}{q_1}}(x)\varphi^{-\frac{q_1'}{q_1}}(x)\,dx =$$

$$= R^{\theta_3} \int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla\left(\Delta^{k_2-m_1-1}\varphi(\xi)\right)|^{q_1'}(a_0\varphi_0)^{1-q_1'}(\xi)\,d\xi, \tag{3.17}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla\left(\Delta^{k_2-1}\varphi(x)\right)|^{q_1'} d^{-\frac{s_2'}{s_1}}(x)\varphi^{-\frac{s_2'}{s_2}}(x)\,dx =$$

$$= R^{\theta_4} \int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla\left(\Delta^{k_2-1}\varphi_0(\xi)\right)|^{s_2'}(d_0\varphi_0)^{1-s_2'}(\xi)\,d\xi. \tag{3.18}$$

Тогда соотношение (3.14) принимает вид

$$\begin{aligned} X+Y \leqslant 2C_1(q_2)R^{\theta_1} &\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla\left(\Delta^{k_1-m_2-1}\varphi_0(\xi)\right)|^{q_2'}(c_0\varphi_0)^{1-q_2'}\,d\xi + \\ + 2C_2(s_1)R^{\theta_2} &\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla\left(\Delta^{k_1-1}\varphi_0(\xi)\right)|^{s_1'}(b_0\varphi_0)^{1-s_1'}(\xi)\,d\xi + \\ + 2C_3(q_1)R^{\theta_3} &\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla\left(\Delta^{k_2-m_1-1}\varphi(\xi)\right)|^{q_1'}(a_0\varphi_0)^{1-q_1'}(\xi)\,d\xi + \\ + 2C_4(s_2)R^{\theta_4} &\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla\left(\Delta^{k_2-1}\varphi_0(\xi)\right)|^{s_2'}(d_0\varphi_0)^{1-s_2'}(\xi)\,d\xi. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Теперь выберем пробную функцию φ_0 так, что

$$\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla\left(\Delta^{k_1-m_2-1}\varphi_0(\xi)\right)|^{q_2'}(c_0\varphi_0)^{1-q_2'}\,d\xi < \infty,$$

$$\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla\left(\Delta^{k_1-1}\varphi_0(\xi)\right)|^{s_1'}(b_0\varphi_0)^{1-s_1'}(\xi)\,d\xi < \infty,$$

$$\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla\left(\Delta^{k_2-m_1-1}\varphi(\xi)\right)|^{q_1'}(a_0\varphi_0)^{1-q_1'}(\xi)\,d\xi < \infty,$$

и

$$\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla\left(\Delta^{k_2-1}\varphi_0(\xi)\right)|^{s_2'}(d_0\varphi_0)^{1-s_2'}(\xi)\,d\xi < \infty.$$

Тогда из неравенства (3.19) следует, что

$$X+Y \leqslant \sum_{i=1}^{4} C_i R^{\theta_i} \tag{3.20}$$

с некоторыми $C_i > 0$, $i = 1, \dots, 4$. Если выполняется какое-либо из неравенств (3.5), т. е. если $\theta = \max\limits_{i=1,\dots,4} \theta_i \leqslant 0$, имеем два случая.

Случай 1: $\theta < 0$.

Переходя к пределу при $R \to \infty$ в (3.20), получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(a(x)\left|\nabla\left(\Delta^{m_1} v(x)\right)\right|^{q_1} + b(x)|\nabla u(x)|^{s_1}\right) dx + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(c(x)\left|\nabla\left(\Delta^{m_2} u(x)\right)\right|^{q_2} + d(x)|\nabla v(x)|^{s_2}\right) dx = 0.$$

Отсюда $u = 0$ и $v = 0$ п.в. в $\mathbb{R}^N$.

Случай 2: $\theta = 0$.

В этом случае в силу (3.15)–(3.18) выполняются соотношения

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\left(\Delta^{k_1-m_2-1}\varphi(x)\right)\right|^{q_2'} c^{-\frac{q_2'}{q_2}}(x)\varphi^{-\frac{q_2'}{q_2}}(x)\,dx = c_1, \tag{3.21}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\left(\Delta^{k_1-1}\varphi(x)\right)\right|^{s_1'} b^{-\frac{s_1'}{s_1}}(x)\varphi^{-\frac{s_1'}{s_1}}(x)\,dx = c_2, \tag{3.22}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\left(\Delta^{k_2-m_1-1}\varphi(x)\right)\right|^{q_1'} a^{-\frac{q_1'}{q_1}}(x)\varphi^{-\frac{q_1'}{q_1}}(x)\,dx = c_3, \tag{3.23}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\left(\Delta^{k_2-1}\varphi(x)\right)\right|^{q_1'} d^{-\frac{s_2'}{s_1}}(x)\varphi^{-\frac{s_2'}{s_2}}(x)\,dx = c_4, \tag{3.24}$$

где

$$c_1 = \begin{cases} \int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} \left|\nabla\left(\Delta^{k_1-m_2-1}\varphi_0(\xi)\right)\right|^{q_2'} (c_0\varphi_0)^{1-q_2'}\,d\xi, \text{ если } \theta = \theta_1 = 0, \\ 0, \text{ если } \theta_1 < 0; \end{cases}$$

$$c_2 = \begin{cases} \int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} \left|\nabla\left(\Delta^{k_1-1}\varphi_0(\xi)\right)\right|^{s_1'} (b_0\varphi_0)^{1-s_1'}(\xi)\,d\xi, \text{ если } \theta = \theta_2 = 0, \\ 0, \text{ если } \theta_2 < 0; \end{cases}$$

$$c_3 = \begin{cases} \int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} \left|\nabla\left(\Delta^{k_2-m_1-1}\varphi(\xi)\right)\right|^{q_1'} (a_0\varphi_0)^{1-q_1'}(\xi)\,d\xi, \text{ если } \theta = \theta_3 = 0, \\ 0, \text{ если } \theta_3 < 0; \end{cases}$$

$$c_4 = \begin{cases} \int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} \left|\nabla\left(\Delta^{k_2-1}\varphi_0(\xi)\right)\right|^{s_2'} (d_0\varphi_0)^{1-s_2'}(\xi)\,d\xi, \text{ если } \theta = \theta_4 = 0, \\ 0, \text{ если } \theta_4 < 0. \end{cases}$$

Отсюда в силу (3.20) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(a(x)\left|\nabla\left(\Delta^{m_1} v(x)\right)\right|^{q_1} + b(x)|\nabla u(x)|^{s_1}\right)\varphi(x)\,dx + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(c(x)\left|\nabla\left(\Delta^{m_2} u(x)\right)\right|^{q_2} + d(x)|\nabla v(x)|^{s_2}\right)\varphi(x)\,dx \leqslant c, \tag{3.25}$$

где $0 < c < \infty$. Переходя к пределу при $R \to \infty$, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(a(x)\left|\nabla\left(\Delta^{m_1} v(x)\right)\right|^{q_1} + b(x)|\nabla u(x)|^{s_1}\right) dx + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(c(x)\left|\nabla\left(\Delta^{m_2} u(x)\right)\right|^{q_2} + d(x)|\nabla v(x)|^{s_2}\right) dx \leqslant c. \tag{3.26}$$

Теперь вернемся к неравенствам (3.6) и (3.7). Заметим, что

$$\operatorname{supp}\nabla\left(\Delta^p(\varphi)\right) \subseteq \{x\in\mathbb{R}^N \mid R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R\} = \overline{B}_{\sqrt{2}R}\backslash B_R$$

для всех $p\in\mathcal{N}$, где $B_L=\{x\in\mathbb{R}^N \mid |x|<L\}$, $L>0$ $(L=R$ или $2R)$.

Тогда в силу неравенства Гельдера из соотношений (3.6) и (3.7) следует

$$\begin{gathered}\int\limits_{\mathbb{R}^N}(a(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_1}v(x)\right)|^{q_1}+b(x)|\nabla u(x)|^{s_1})\varphi(x)\,dx\leqslant\\ \leqslant\frac{c_1^{\frac{1}{q_2'}}}{2}\left(\int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R}c(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_2}u(x)\right)|^{q_2}\,\varphi(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q_2}}+\\ +\frac{c_2^{\frac{1}{s_1'}}}{2}\left(\int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R}(b(x)\,|\nabla u(x)|^{s_1}\,\varphi(x)\,dx\right)^{\frac{1}{s_1}},\end{gathered}\tag{3.27}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_{\mathbb{R}^N}(c(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_2}u(x)\right)|^{q_2}+d(x)|\nabla v(x)|^{s_2})\varphi(x)\,dx\leqslant\\ \leqslant\frac{c_3^{\frac{1}{q_1'}}}{2}\left(\int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R}a(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_1}v(x)\right)|^{q_1}\,\varphi(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q_1}}+\\ +\frac{c_4^{\frac{1}{s_2'}}}{2}\left(\int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R}d(x)\,|\nabla v(x)|^{s_2}\,\varphi(x)\,dx\right)^{\frac{1}{s_2}}.\end{gathered}\tag{3.28}$$

Однако из (3.26) и абсолютной сходимости интеграла

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}(a(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_1}v(x)\right)|^{q_1}+b(x)|\nabla u(x)|^{s_1})\,dx+\int\limits_{\mathbb{R}^N}(c(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_2}u(x)\right)|^{q_2}+d(x)|\nabla v(x)|^{s_2})\,dx=c$$

имеем

$$\begin{gathered}\int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R}(a(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_1}v(x)\right)|^{q_1}+b(x)|\nabla u(x)|^{s_1})\,dx+\\ +\int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R}(c(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_2}u(x)\right)|^{q_2}+d(x)|\nabla v(x)|^{s_2})\,dx\to0\end{gathered}$$

при $R\to\infty$.

Переходя к пределу при $R\to\infty$ в (3.27), получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}(a(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_1}v(x)\right)|^{q_1}+b(x)|\nabla u(x)|^{s_1})\,dx=0.$$

Тогда из неравенства (3.28) следует

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}(c(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_2}u(x)\right)|^{q_2}+d(x)|\nabla v(x)|^{s_2})\,dx=0.$$

Таким образом, $u=0$ и $v=0$ п.в. и в этом случае. Это завершает доказательство теоремы. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галахов Е. И.* О некоторых неравенствах в частных производных с градиентными слагаемыми// Тр. МИАН. — 2013. — *283*. — С. 40–48.
2. *Галахов Е. И., Салиева О. А.* Разрушение решений некоторых нелинейных неравенств с особенностями на неограниченных множествах// Мат. заметки. — 2015. — *98*, № 2. — С. 187–195.
3. *Митидиери Э., Похожаев С. И.* Априорные оценки и разрушение решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных// Тр. МИАН. — 2001. — *234*. — С. 3–383.
4. *Похожаев С. И.* Существенно нелинейные емкости, порожденные дифференциальными операторами// Докл. РАН. — 1997. — *357*, № 5. — С. 592–594.
5. *Салиева О. А.* Отсутствие решений некоторых нелинейных неравенств с дробными степенями оператора Лапласа// Мат. заметки. — 2017. — *101*, № 4. — С. 699–703.
6. *Farina A., Serrin J.* Entire solutions of completely coercive quasilinear elliptic equations// J. Differ. Equ. — 2011. — *250*, № 12. — С. 4367–4408.
7. *Farina A., Serrin J.* Entire solutions of completely coercive quasilinear elliptic equations II// J. Differ. Equ. — 2011. — *250*, № 12. — С. 4409–4436.
8. *Filippucci R., Pucci P., Rigoli M.* Nonlinear weighted p-Laplacian elliptic inequalities with gradient terms// Commun. Contemp. Math. — 2010. — *12*, № 3. — С. 501–535.
9. *Galakhov E., Salieva O.* On blow-up of solutions to differential inequalities with singularities on unbounded sets// J. Math. Anal. Appl. — 2013. — *408*, № 1. — С. 102–113.
10. *Galakhov E., Salieva O.* Nonexistence of solutions of some inequalities with gradient non-linearities and fractional Laplacian// В сб.: «Proc. Int. Conf. Equadiff 2017». — Bratislava: Spektrum STU Publishing, 2017. — С. 157–162.
11. *Galakhov E., Salieva O.* Uniqueness of the trivial solution of some inequalities with fractional Laplacian// Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2019. — *2019*, № 1. — С. 1–8.
12. *Li X., Li F.* Nonexistence of solutions for singular quasilinear differential inequalities with a gradient nonlinearity// Nonlinear Anal. — 2012. — *75*, № 2. — С. 2812–2822.

Васе Эсмелалем Адмасу

Евгений Игоревич Галахов
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: `galakhov@rambler.ru`

Ольга Алексеевна Салиева
Московский государственный технологический университет «Станкин»,
127055, Москва, Вадковский пер., д. 1
E-mail: `olga.a.salieva@gmail.com`

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-1-1-13 UDC 517.956.25

Nonexistence of Nontrivial Weak Solutions of Some Nonlinear Inequalities with Gradient Nonlinearity

© 2021 **V. E. Admasu, E. I. Galakhov, O. A. Salieva**

Abstract. In this article, we modify the results obtained by Mitidieri and Pohozaev on sufficient conditions for the absence of nontrivial weak solutions to nonlinear inequalities and systems with integer powers of the Laplace operator and with a nonlinear term of the form $a(x)\,|\nabla(\Delta^m u)|^q + b(x)|\nabla u|^s$. We obtain optimal a priori estimates by applying the nonlinear capacity method with an appropriate choice of test functions. As a result, we prove the absence of nontrivial weak solutions to nonlinear inequalities and systems by contradiction.

REFERENCES

1. Е. И. Галахов, "О некоторых неравенствах в частных производных с градиентными слагаемыми" [Some partial differential inequalities with gradient terms], *Тр. МИАН* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2013, **283**, 40–48 (in Russian).
2. Е. И. Галахов and О. А. Салиева, "Разрушение решений некоторых нелинейных неравенств с особенностями на неограниченных множествах" [Blow-up of solutions of some nonlinear inequalities with singularities on unbounded sets], *Мат. заметки* [Math. Notes], 2015, **98**, No. 2, 187–195 (in Russian).
3. E. Mitidieri and С. И. Pohozaev, "Априорные оценки и разрушение решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных" [A priori estimates and blowup of solutions of nonlinear partial differential equations and inequalities], *Тр. МИАН* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2001, **234**, 3–383 (in Russian).
4. С. И. Pohozaev, "Существенно нелинейные емкости, порожденные дифференциальными операторами" [Essentially nonlinear capacities generated by differential operators], *Докл. РАН* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1997, **357**, No. 5, 592–594 (in Russian).
5. О. А. Салиева, "Отсутствие решений некоторых нелинейных неравенств с дробными степенями оператора Лапласа" [Absence of solutions of some nonlinear inequalities with fractional powers of the Laplace operator], *Мат. заметки* [Math. Notes], 2017, **101**, No. 4, 699–703 (in Russian).
6. A. Farina and J. Serrin, "Entire solutions of completely coercive quasilinear elliptic equations," *J. Differ. Equ.*, 2011, **250**, No. 12, 4367–4408.
7. A. Farina and J. Serrin, "Entire solutions of completely coercive quasilinear elliptic equations II," *J. Differ. Equ.*, 2011, **250**, No. 12, 4409–4436.
8. R. Filippucci, P. Pucci, and M. Rigoli, "Nonlinear weighted p-Laplacian elliptic inequalities with gradient terms," *Commun. Contemp. Math.*, 2010, **12**, No. 3, 501–535.
9. E. Galakhov and O. Salieva, "On blow-up of solutions to differential inequalities with singularities on unbounded sets," *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, **408**, No. 1, 102–113.
10. E. Galakhov and O. Salieva, "Nonexistence of solutions of some inequalities with gradient non-linearities and fractional Laplacian," In: *Proc. Int. Conf. Equadiff 2017*, Spektrum STU Publishing, Bratislava, 2017, pp. 157–162.
11. E. Galakhov and O. Salieva, "Uniqueness of the trivial solution of some inequalities with fractional Laplacian," *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2019, **2019**, No. 1, 1–8.
12. X. Li and F. Li, "Nonexistence of solutions for singular quasilinear differential inequalities with a gradient nonlinearity," *Nonlinear Anal.*, 2012, **75**, No. 2, 2812–2822.

V. E. Admasu

E. I. Galakhov
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: `galakhov@rambler.ru`

O. A. Salieva
Moscow State Technological University "Stankin," Moscow, Russia
E-mail: `olga.a.salieva@gmail.com`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 1 (2021). С. 14–129

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-1-14-129 УДК 517.956+517.955.8+517.984

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА С ЧАСТОЙ СМЕНОЙ ТИПА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

© 2021 г. **Д. И. БОРИСОВ**

Аннотация. Настоящая работа, которую уместно рассматривать как небольшую монографию, посвящена исследованию двух- и трехмерных краевых задач на собственные значения для оператора Лапласа с частым чередованием типа граничных условий. Основной целью является построение асимптотических разложений собственных значений и собственных функций рассматриваемых задач. Асимптотические разложения строятся на основе оригинальных комбинаций методов асимптотического анализа: метода согласования асимптотических разложений, метода пограничного слоя и метода многих масштабов. Проводится анализ коэффициентов формально построенных асимптотических рядов. Для строго периодического и локально периодического чередования краевых условий описанный подход позволяет строить полные асимптотические разложения собственных значений и собственных функций. В случае непериодического чередования и усредненного третьего краевого условия получены достаточно слабые условия на структуру чередования, при которых удается построить первые поправки в асимптотиках для собственных значений и собственных функций; указанные условия включают в рассмотрение широкий класс различных случаев непериодического чередования. При дальнейшем, весьма серьезном ослаблении условий на структуру чередования удается получить двусторонние оценки скорости сходимости собственных значений возмущенной задачи; показано, что эти оценки неулучшаемы по порядку. Для соответствующих собственных функций также получены неулучшаемые по порядку оценки скорости сходимости.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи с различного рода сингулярными возмущениями — объект исследований многих ученых. Подобный интерес объясняется тем, что, с одной стороны, сингулярно возмущенные краевые задачи часто возникают как математические модели в различных приложениях, а с другой стороны — наличием у этих задач большого числа разнообразных свойств, интересных с математической точки зрения. Примерами такого рода задач могут служить краевые задачи для уравнений с малым параметром при старшей производной, с быстро осциллирующими коэффициентами, задачи в области с вырезанным множеством малой меры, задачи со сменой граничного условия на малом участке границе, задачи с частой сменой граничных условий, с концентрированными массами, задачи в областях с быстро осциллирующей границей, в перфорированных областях, в областях с тонкими отростками и многие другие, см., например, монографии [1,2,18,38,42,45,47,49,53,55,62,63,73], статьи [25,33–35,39–41,44,48,50,52,58,59,94,97,105] и списки литературы в цитированных работах.

Один из классов задач в теории граничного усреднения, который достаточно активно исследовался — это задачи с частой сменой типа граничных условий. Постановки задач с такого рода краевыми условиями в общих чертах выглядят следующим образом. Выбирается область с достаточно гладкой границей, в которой рассматривается эллиптическое уравнение. На границе области выделяется подмножество, состоящее из большого числа непересекающихся частей малой меры. Как правило, это подмножество зависит от одного или нескольких характерных малых параметров, при стремлении которых к нулю расстояние между отдельными компонентами этого подмножества и мера каждой отдельной компоненты стремятся к нулю. На этом подмножестве задается граничное условие одного типа (например, условие Дирихле), в то время как на оставшейся части границы задается граничное условий другого типа (например, условие Неймана). Пример двумерной области с описанным разбиением границы приведен на рис. 1. Цель исследований — описать поведение решений, когда характерные малые параметры стремятся к нулю. Интересны также задачи, в которых описанная смена краевых условий задается не на всей границе, а лишь на фиксированной ее части, в то время как на остальной части границы ставится одно из классических краевых условий.

Одной из самых простых физических моделей, описываемой краевой задачей с частой сменой граничных условий, является задача о мембране, часто закрепленной на малых участках границы.

Вопросы усреднения эллиптических краевых задач с частой сменой граничных условий исследовались достаточно широко (см., например, [3, 4, 65, 66, 72, 82, 84–87, 91, 100, 101]). Основной целью этих работ было определение вида предельных (усредненных) задач при минимальном наборе требований к структуре чередования граничных условий, т. е. к поведению множеств с разными краевыми условиями. В [85, 86] рассматривалось уравнение Лапласа в ограниченной области с частой сменой граничных условий Дирихле и Неймана. Рассматривалось чередование граничных условий, имеющее непериодическую структуру, но дополнительно предполагалось, что части границы с разными граничными условиями имеют одинаковый порядок малости. В работах [3, 65, 66, 82, 84, 91, 100, 101] для линейных эллиптических задач с чередованием первого краевого условия со вторым либо третьим краевым условием были получены усредненные задачи и приведены достаточно простые условия, определяющие зависимость типа усредненной задачи от структуры чередования. Случай, когда подмножество границы с граничным условием Дирихле имеет периодическую структуру, исследовался в [66, 82, 84, 100, 101]. Сходимость в непериодическом случае изучалась в [4,65,91]. Отметим, что ограничения на структуру чередования граничных условий, гарантирующие вывод усредненных задач, в работах [3, 65, 82, 84, 91, 100, 101] были сформулированы в терминах расстояний между отдельными частями границы с условием Дирихле, а также в терминах мер этих частей. В [66] ограничения на структуру чередования давалось в терминах минимального собственного значения некоторой модельной краевой задачи на подходящей ячейке периодичности. При некоторых дополнительных предположениях это условие было переписано в терминах расстояний и мер. В [3] была рассмотрена краевая задача для уравнения Лапласа с частым чередованием граничных условий Дирихле и Неймана весьма общей непериодической структуры. Также было исследовано чередование, описываемое на основе вероятностного подхода. Были получены достаточно общие условия, гарантирующие сходимость решения рассматриваемой задачи. Краевые задачи для нелинейных эллиптических уравнений с частой сменой типа граничных условий рассматривались в [72, 87]. В [72] численно решалась задача, являющаяся моделью химической задачи о тепловом взрыве газа в результате экзотермической реакции в длинном цилиндрическом сосуде. Смена граничных условий возникала вследствие того, что теплоизолированные части стенок сосуда часто и периодически чередовались с идеально проводящими участками. Результаты, полученные численно в [72], в целом хорошо согласуются с результатами цитированных выше работ [3, 65, 82, 84, 91, 100, 101]. Численные результаты [72] позднее были теоретически подтверждены в [87], где рассматривалось усреднение некоторого класса нелинейных уравнений, в который уравнение из [72] входило как частный случай. В [87] вопрос о сходимости решений нелинейной задачи фактически был сведен к аналогичному вопросу для некоторой линейной задачи. Сходимость же последней может быть установлена на основе результатов [3,65,82,84,91,100,101].

Основные результаты, полученные при изучении сходимости задач с частой сменой типа граничного условия (как периодической, так и непериодической), кратко можно сформулировать следующим образом. Краевые эллиптические задачи с частой сменой типа граничного условия при достаточно общих предположениях сходятся к задачам с классическими граничными условиями. Тип граничного условия в усредненной задаче зависит от соотношения мер частей границы с разными типами краевых условий и распределения их вдоль границы в исходной возмущенной задаче.

Помимо определения вида усредненных задач для задач с частой сменой граничных условий, важен и актуален также вопрос об оценках скорости сходимости решений возмущенных задач к решениям усредненных. Для эллиптических задач с периодической сменой краевых условий такого рода оценки были получены в работах [3, 29, 66]. Оценки для непериодического чередования были установлены в [31, 56, 57, 83, 104].

Сравнительно недавно появились работы, в которых строились асимптотические разложения решений эллиптических краевых задач с периодической структурой чередования граничных условий [16, 22–24, 26, 67, 68, 92]. Отметим, что факт периодичности при получении асимптотик использовался по существу. В [67, 68] была рассмотрена краевая задача для уравнения Пуассона в многомерном слое, ограниченном двумя гиперплоскостями. Периодическое чередование граничных условий Дирихле и Неймана задавалось на одной из гиперплоскостей, причем части границы с краевым условием Дирихле стягивались к точкам. Также дополнительно предполагалось, что меры частей границы с разными типами граничных условий имеют одинаковый порядок малости.

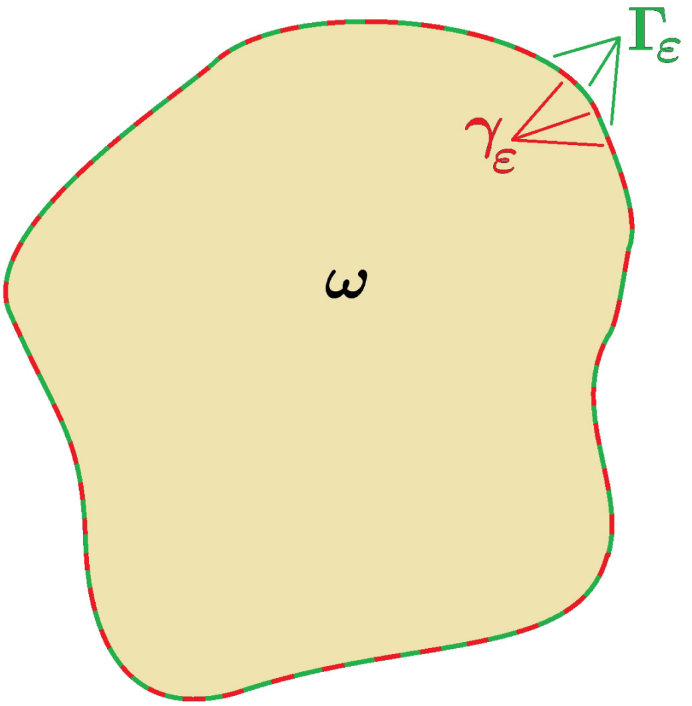

Рис. 1. Двумерная область с разбиением границы на малые части с быстрым чередованием краевых условий. На множестве Γ_ε задается краевое условие Неймана, на множестве γ_ε — краевое условие Дирихле.

Для решения рассматриваемой задачи было получено полное асимптотическое разложение. В работах [16, 22–24, 26, 92] изучалась краевая задача на собственные значения оператора Лапласа в ограниченной двумерной области с периодическим и локально периодическим чередованием граничных условий. В [92] для единичного круга со строго периодической сменой граничных условий были формально построены первые члены асимптотических разложений минимального собственного значения в случае усредненных первой, второй и третьей краевых задач. В [22] для случая круга со строго периодическим чередованием и усредненной задачи Дирихле были получены полные асимптотические разложения собственных значений в дополнительном предположении, что части границы с разными граничными условиями имеют одинаковый порядок малости. В отсутствии этого предположения в [22] для произвольной области и чередования, сводимого к строго периодическому конформной заменой переменных, были получены первые члены асимптотических разложений собственных значений, сходящихся к простым собственным значениям задачи Дирихле. В работе [24] вновь были рассмотрены случай круга со строго периодической сменой краевых условий и случай произвольной области с чередованием, сводимым к строго периодическому конформной заменой переменных, но уже в предположении усредненной задачи Неймана. Отношение длин частей границы с условием Дирихле и Неймана задавалось явной модельной функцией. Для круга были построены полные асимптотические разложения собственных значений, для произвольной области — первые члены асимптотик собственных значений, сходящихся к простым предельным собственным значениям. Также было доказано, что в случае круга собственные значения возмущенной задачи, сходящиеся к предельным двукратным собственным значениям, сами имеют кратность два. В работах [16, 23, 26] для произвольной области с чередованием граничных условий, сводимого к периодическому некоторой гладкой заменой переменных, были построены первые члены асимптотических разложений собственных значений, сходящихся к простым предельным собственным значениям. Были рассмотрены случаи усредненных первой [23], второй [23] и третьей краевых задач [16, 26].

В работах [88–90] были рассмотрены краевые задачи для параболического уравнения с частым чередованием первого и третьего краевых условий. Чередование задавалось по пространственным переменным. Дополнительно предполагалось, что меры частей границы с разными граничными условиями имеют одинаковый порядок малости, что при усреднении приводило к граничному условию Дирихле. В [88, 89] — для периодической, а в [90] — для почти периодической смены граничных условий в различных нормах были оценены скорости сходимости и построены первые члены асимптотических разложений решений рассматриваемых задач.

К задачам с частой сменой типа граничных условий близки задачи в областях с мелкозернистой границей. Постановка таких задач в общих чертах выглядит следующим образом. Уравнение рассматривается в неограниченной области. Краевое условие ставится на границе множества, состоящего из большого количества непересекающихся малых областей, расположенных близко друг к другу. Изучается поведение решения, когда число областей неограниченно возрастает, а расстояния между ними и их размеры стремятся к нулю. Вопросы усреднения таких задач изучались достаточно подробно (см., например, [49, 63, 64]). Асимптотические разложения решений таких задач с периодической структурой граничных условий были построены в [27, 28, 93].

Достаточно близки к задачам с частой сменой граничных условий и задачи с большим количеством концентрированных масс. Здесь обычно рассматриваются уравнения на собственные значения, где при спектральном параметре стоит весовая функция. Граничные условия задаются часто чередующимися. Упомянутая весовая функция зависит от характерного малого параметра (малых параметров) и равномерно по нему (по ним) ограничена всюду в области за исключением малых окрестностей, расположенных вдоль границы близко друг к другу. В этих окрестностях весовая функция имеет порядок обратной степени малого параметра — линейного размера окрестности. Усреднению такого рода задач посвящено достаточно много работ (см., например, [32, 60, 102, 103, 106]). Работам по усреднению задач со многими массами предшествовали исследования задач с одной концентрированной массой (см. [55] и содержащийся в монографии обзор литературы).

Настоящая работа, которую уместно рассматривать как небольшую монографию, посвящена исследованию двух- и трехмерных краевых задач на собственные значения оператора Лапласа с частым чередованием типа граничных условий. Основу монографии составляют статьи автора [8–16, 74, 75], вышедшие в 1998–2006 гг. Изучается чередование, имеющее как периодическую, так и непериодическую структуру. Основной целью является получение асимптотических разложений собственных значений и собственных функций рассматриваемых задач. Асимптотические разложения выводятся по следующей схеме. Вначале строятся формальные асимптотические решения. При этом используются оригинальные комбинации методов асимптотического анализа: метод согласования асимптотических разложений [42], метод пограничного слоя [20] и метод многих масштабов [7]. Этот этап также включает в себя анализ коэффициентов формально построенных асимптотических рядов. Формальное построение завершается доказательством того, что построенные асимптотические ряды являются формальным асимптотическим решением. Это означает, что частичные суммы данных рядов удовлетворяют исходной возмущенной задаче с точностью до невязок малого порядка, причем порядок малости должен увеличиваться при увеличении числа членов в частичных суммах. На следующем этапе формально построенные асимптотики строго обосновываются, т. е. выводятся оценки для разности между истинными собственными значениями и собственными функциями и формально построенными асимптотическими рядами.

Для строго периодического и локально периодического чередования краевых условий описанный подход позволяет строить полные асимптотические разложения собственных значений и собственных функций. Естественно возникает вопрос о том, как устроены аналогичные асимптотики в случае непериодического чередования. Понятно, что в самой общей постановке задачи с непериодическим чередованием можно надеяться лишь на получение результатов о сходимости, как это было сделано в цитированных выше работах. Поэтому задачу об определении асимптотических разложений в непериодическом случае уместно ставить следующим образом: при каких максимально слабых условиях на структуру чередования возможно построить первые поправки в асимптотиках для собственных значений и собственных функций рассматриваемых задач? Как оказалось, при такой постановке вопроса важным оказывается тип усредненного краевого условия. В случае, когда усреднение приводит к предельному условию Дирихле, расширить эти результаты на непериодический случай не удается. Зато в случае усредненного условия Неймана или третьего краевого условия первые поправки в асимптотиках удается построить при весьма слабых условиях на структуру чередования, которые включают в рассмотрение широкий класс различных случаев непериодического чередования.

Дальнейшее изучение случаев непериодического чередования проводится в рамках поиска ответа на следующий вопрос: насколько можно ослабить условия на структуру чередования, чтобы гарантировать вместе с тем наличие неулучшаемых по порядку оценок скорости сходимости? Результаты здесь оказываются весьма изящными: чередование может иметь произвольную структуру, лишь бы участки с граничным условием Дирихле можно было оценить с двух сторон в смысле вложения множеств парой периодических или локально периодических чередований. В этом случае на основании комбинации принципа минимакса и известных результатов об асимптотиках для периодического чередования удается получить двусторонние оценки скорости сходимости собственных значений возмущенной задачи к предельным собственным значениям. При этом данные оценки скорости сходимости неулучшаемые по порядку. Более того, на основе применения подходящего принципа максимума удается оценить и скорость сходимости собственных проекторов; здесь полученные оценки вновь оказываются неулучшаемыми по порядку.

Описанные результаты соответствуют состоянию дел на 2006 г. С тех пор в теории усреднения возникло новое направление исследований — изучение равномерной резольвентной сходимости для сингулярно возмущенных операторов и доказательство оценок скорости сходимости. Речь идет об усилении классических результатов о сходимости решений задач в теории усреднении и привлечения аппарата спектральной теории неограниченных операторов. Это направление было инициировано пионерскими работами для операторов с быстро осциллирующими коэффициентами, см. [5, 6, 36, 37, 95, 96, 99, 107], а также последующие работы этих авторов. Указанные работы мотивировали аналогичные исследования в теории граничного усреднения. Для задач с частой сменой краевых условий, а также для задач с быстро осциллирующей границей и перфорацией вдоль заданной линии была доказана серия результатов о равномерной резольвентной сходимости к усредненным операторам и об оценках скорости сходимости [17, 70, 71, 76–81], что дало новый свежий взгляд на задачи граничного усреднения. Несмотря на это, результаты, представленные в данной монографии, не потеряли своей важности и актуальности. Это связано с тем, что аппарат асимптотического анализа, используемый при построении асимптотик, не связан с методами теории усреднения и спектральной теории неограниченных операторов и ориентирован именно на построение асимптотических разложений. Поэтому методы и подходы, представленные в настоящей работе, могут эффективно использоваться для построения асимптотических разложений в других задачах граничного усреднения, включая случаи возмущений непериодической структуры. В частности, это было успешно продемонстрировано в работах [17, 70, 71] для многомерных задач с частой сменой краевых условий.

Прежде чем перейти к основному содержанию, сделаем несколько замечаний об используемых обозначениях. В каждой из глав используются свои обозначения, которые, как правило, не связаны с обозначениями в других главах. Если используется одинаковое обозначение, то это оговаривается отдельно. В формальных построениях асимптотик будут использоваться различные пограничные слои и внутренние разложения. Они будут строиться в терминах характерных растянутых переменных, которые мы обычно будем обозначать через ξ (для пограничных слоев) и ς (для внутренних разложений). Определение этих переменных зависит от постановки задачи, но эту зависимость в обозначениях мы не будем подчеркивать. Сами пограничные слои, внутренние разложения, а также внешние разложения мы также будем всюду обозначать одними и теми же символами вида ψ_ε^{bl} (пограничный слой), ψ_ε^{in} (внутреннее разложение) и ψ_ε^{ex} (внешнее разложение), несмотря на то, что эти ряды будут своими для каждой из рассматриваемых задач. Коэффициенты пограничных слоев и внутренних разложений также будем обозначать соответственно буквами v и w, каждый раз подразумевая, что эти величины свои для каждой из задач. Кроме того, будут встречаться одинаковые обозначения различных вспомогательных величин, которые определяются каждый раз в зависимости от задачи, но вместе с тем несут одну и ту же идейную нагрузку. Всюду, где могут возникнуть двусмысленности, мы будем оговаривать, о каких именно величинах идет речь.

Глава 2

ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА С ЛОКАЛЬНО ПЕРИОДИЧЕСКИМ ЧЕРЕДОВАНИЕМ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ: УСРЕДНЕННОЕ УСЛОВИЕ ДИРИХЛЕ

1. Постановка задачи и основные результаты главы

Первая глава посвящена изучению двумерной краевой задачи с периодическим и локально периодическим чередованием граничных условий. Постановка задачи следующая. Пусть $\mathsf{x}=(x_1,x_2)$ — декартовы координаты, ω — произвольная ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей, s — натуральный параметр кривой $\partial\omega$, а S — длина этой кривой, $s\in[0,S)$. Точки границы $\partial\omega$ будем описывать с помощью натурального параметра, фиксировав направление обхода (против часовой стрелки) и произвольно выбрав точку на $\partial\omega$, которой соответствует значение $s=0$. Точкам границы, которым соответствуют s, близкие к S или к нулю, для удобства изложения сопоставим дополнительно значения $(s-S)$ и $(S+s)$.

Обозначим: $N\gg 1$ — натуральное число, $\varepsilon=2N^{-1}$ — малый положительный параметр. Для каждого значения N на границе $\partial\omega$ зададим подмножество γ_ε, состоящее из N открытых непересекающихся связных частей границы (см. рис. 1). Множество γ_ε вводится следующим образом. Для каждого значения N задаются точки $x_j^\varepsilon\in\partial\omega$, $j=0,\ldots,N-1$, соответствующие значениям натурального параметра $s_j^\varepsilon\in[0,S)$, причем расстояние между любыми двумя соседними точками, измеренное вдоль границы $\partial\omega$, есть величина порядка ε. Далее, пусть заданы два набора из N функций каждый: $a_j(\varepsilon)$ и $b_j(\varepsilon)$, $j=0,\ldots,N-1$, где функции a_j и b_j — неотрицательны и ограничены. Множество γ_ε определяется следующим образом:

$$\gamma_\varepsilon=\bigcup_{j=0}^{N-1}\gamma_{\varepsilon,j},\qquad \gamma_{\varepsilon,j}=\{\mathsf{x}:-\varepsilon a_j(\varepsilon)<s-s_j^\varepsilon<\varepsilon b_j(\varepsilon)\}.$$

Без ограничения общности будем считать, что $\gamma_{\varepsilon,j}$ не пересекаются.

Рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача на собственные значения:

$$-\Delta\psi_\varepsilon=\lambda_\varepsilon\psi_\varepsilon,\quad \mathsf{x}\in\omega, \tag{1.1}$$

$$\psi_\varepsilon=0,\quad \mathsf{x}\in\gamma_\varepsilon,\qquad \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial\nu}=0,\quad \mathsf{x}\in\Gamma_\varepsilon, \tag{1.2}$$

где ν — внешняя нормаль к границе $\partial\omega$, $\Gamma_\varepsilon=\partial\omega\backslash\overline{\gamma}_\varepsilon$. Целью является построение асимптотических разложений собственных элементов этой задачи при $\varepsilon\to0$, или, эквивалентно, $N\to\infty$.

Положим $a_N(\varepsilon)=a_0(\varepsilon)$, $b_N(\varepsilon)=b_0(\varepsilon)$, $s_N^\varepsilon=s_0^\varepsilon$. На множество γ_ε наложим следующее условие.

(C1). *Существует функция $\theta=\theta(s)$, заданная на границе множества ω, принимающая значения на отрезке $[0,2\pi]$, удовлетворяющая условиям*

$$\theta(0)=0,\qquad \theta(S)=2\pi,\qquad \theta'\in C^\infty(\partial\omega),\qquad 0<c_1\leqslant\theta'(s)\leqslant c_2, \tag{1.3}$$

где c_1, c_2 — некоторые константы, не зависящие от s, и

$$\begin{aligned}\theta(s_j^\varepsilon-\varepsilon a_j(\varepsilon))&=\theta(s_0^\varepsilon)+\varepsilon\pi j-\varepsilon a(\varepsilon),\\ \theta(s_j^\varepsilon+\varepsilon a_j(\varepsilon))&=\theta(s_0^\varepsilon)+\varepsilon\pi j+\varepsilon b(\varepsilon),\end{aligned} \tag{1.4}$$

для всех $j=0,\ldots,N-1$, где $a(\varepsilon)$ и $b(\varepsilon)$ — ограниченные неотрицательные функции.

Условие (C1) имеет простую геометрическую интерпретацию. Оно означает, что границу $\partial\omega$ можно гладко отобразить на окружность единичного радиуса так, что при этом отображении множество γ_ε перейдет в строго периодическое множество, см. (1.4). Чередование граничных условий, имеющее подобную структуру, будем называть локально периодическим.

В данной главе мы рассматриваем локально периодическое чередование граничных условий в случае, когда усреднение в задаче (1.1), (1.2) приводит к краевому условию Дирихле. Согласно [65, 66, 91], такая ситуация имеет место при выполнении равенства

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\eta(\varepsilon)=0, \tag{1.5}$$

где

$$\eta(\varepsilon)=\frac{a(\varepsilon)+b(\varepsilon)}{2}.$$

Отметим еще, что согласно [65,66] собственные значения задачи (1.1), (1.2) сходятся к собственным значениям задачи Дирихле с сохранением совокупной кратности.

Первым основным результатом главы является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условие* (C1) *и равенство* (1.5). *Тогда для каждого простого собственного значения задачи*

$$-\Delta\psi_0=\lambda_0\psi_0,\quad x\in\omega,\qquad \psi_0=0,\quad x\in\partial\omega \tag{1.6}$$

существует единственное собственное значение λ_ε задачи (1.1), (1.2)*, сходящееся к λ_0 при $\varepsilon\to 0$. Собственное значение λ_ε простое и имеет двупараметрическую асимптотику*

$$\lambda_\varepsilon=\lambda_0+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j\lambda_j(\eta), \tag{1.7}$$

где $\lambda_j(\eta)$ непрерывны по $\eta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\lambda_j\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $j\geqslant 1$,

$$\lambda_1(\eta)=K_1\ln\sin\eta,\qquad K_1=\int\limits_{\partial\omega}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial\nu}\right)^2\frac{\mathrm{d}s}{\theta'}, \tag{1.8}$$

$$\lambda_2(\eta)=K_2\ln^2\sin\eta,\qquad K_2=\int\limits_{\partial\omega}\frac{\partial\psi_0}{\partial\nu}\frac{\partial\psi_{11}}{\partial\nu}\frac{\mathrm{d}s}{\theta'}, \tag{1.9}$$

$$\lambda_j(\eta)=K_j\ln^j\eta+O(|\ln\eta|^{j-\frac{5}{2}}),\quad \eta\to 0, \tag{1.10}$$

ψ_0 нормирована в $L_2(\omega)$, ψ_{11} — ортогональное ψ_0 в $L_2(\omega)$ решение краевой задачи

$$-\Delta\psi_{11}=\lambda_0\psi_{11}+K_1\psi_0,\quad x\in\omega,\qquad \psi_{11}=\frac{1}{\theta'}\frac{\partial\psi_0}{\partial\nu},\quad x\in\partial\omega, \tag{1.11}$$

K_j, $j\geqslant 3$ — некоторые константы. Асимптотика соответствующей собственной функции ψ_ε в норме $W_2^1(\omega)$ имеет вид (5.11).

Условие (1.5), непрерывность $\lambda_j(\eta)$ и формулы (1.10) обеспечивают асимптотичность ряда (1.7), несмотря на наличие сингулярностей у $\lambda_j(\eta)$ при $\eta\to 0$. Отметим также, что существует достаточно широкий класс функций $\eta(\varepsilon)$, стремящихся к нулю при $\varepsilon\to 0$ и удовлетворяющих одновременно условию (1.5), например, $\eta=\varepsilon^\alpha$, $\alpha>0$, $\eta=\mathrm{e}^{-1/\varepsilon^\alpha}$, $0<\alpha<1$ и др.

Условие непересечения множеств $\gamma_{\varepsilon,j}$ и неотрицательность функций $a(\varepsilon)$ и $b(\varepsilon)$ влекут неравенство: $0<\eta<\dfrac{\pi}{2}$. При $\eta=\dfrac{\pi}{2}$ множество γ_ε совпадает со всей границей $\partial\omega$, и в силу теоремы 1.1 все члены асимптотики (1.7) обращаются в нуль.

Подчеркнем, что для коэффициентов асимптотики (1.7) при $j\geqslant 3$ не удается получить явных формул типа (1.8), (1.9). Как было показано в [8], даже в случае единичного круга и $\theta(s)\equiv s$ уже коэффициент λ_3 имеет нетривиальный вид, а именно:

$$\lambda_3(a)=K_3\ln^3\sin a+\Phi_1(a)\ln\sin a+\Phi_2(a),\qquad K_3=-\frac{2}{3}\lambda_0^2+\frac{4}{3}\lambda_0,$$

где

$$\Phi_1,\Phi_2\in C^\infty[0,\frac{\pi}{2}],\qquad \Phi_1(0)=\Phi_1'(0)=0,\qquad \Phi_1''(0)\neq 0.$$

При отсутствии кратных собственных значений у задачи (1.6) теоремой 1.1 исчерпываются все собственные значения задачи (1.1), (1.2). Более того, наличие кратных собственных значений у задачи (1.6) для произвольной области — ситуация не слишком частая. Поэтому случай кратного предельного собственного значения будет изучен на примере единичного круга с центром в нуле со строго периодическим чередованием граничных условий. Хорошо известно, что на единичном круге задача (1.6) имеет двукратные собственные значения, которыми являются квадраты нулей функций Бесселя J_n целого порядка $n > 0$; соответствующие собственные функции имеют вид

$$\psi_0^{\pm}(\mathrm{x}) = J_n\left(\sqrt{\lambda_0} r\right)\Upsilon^{\pm}(n\theta), \qquad \Upsilon^{+}(t) = \cos(t), \qquad \Upsilon^{-}(t) = \sin(t), \qquad J_n\left(\sqrt{\lambda_0}\right) = 1.$$

Здесь (r, θ) — полярные координаты, соответствующие x.

Основной результат, полученный в описанных условиях, выглядит следующим образом.

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условие* (C1) *и равенство* (1.5), ω — *единичный круг с центром в нуле,* $\theta(s) \equiv s$. *Тогда для каждого двукратного собственного значения* λ_0 *задачи* (1.6) *существует единственное собственное значение* λ_ε *задачи* (1.1), (1.2), *сходящееся к* λ_0 *при* $\varepsilon \to 0$. *Собственное значение* λ_ε *двукратное и имеет асимптотику* (1.7), *где* $\lambda_j(\eta) \in C\Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big]$, $\lambda_j\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) = 0$, $j \geqslant 1$,

$$\lambda_1(\eta) = 2\lambda_0 \ln \sin \eta, \qquad \lambda_2(\eta) = 2\lambda_0 \ln^2 \sin \eta, \tag{1.12}$$

$$\lambda_j(\eta) = \widetilde{K}_j \ln^j \eta + O(|\ln \eta|^{j-\frac{5}{2}}), \quad \eta \to 0, \tag{1.13}$$

$\widetilde{K}_j$ — *некоторые константы. Асимптотики соответствующих собственных функций в норме* $W_2^1(\omega)$ *имеют вид* (6.7).

Отметим, что асимптотики из теорем 1.1, 1.2 для случая единичного круга и $\eta = \mathrm{const}$ были получены в работе [22]. В случае переменного η и произвольной области в [23] был формально получен первый член (1.8). Обоснование этого первого члена было проведено в [22] для частного случая, когда чередование граничных условий может быть сведено к строго периодическому конформной заменой переменных. Вопрос о полных асимптотиках в случае переменного η остался открытым. Решение этого вопроса существенно более сложное, чем при $\eta = \mathrm{const}$, так как необходимо выяснить характер зависимости коэффициентов от параметра η, что представляет собой совершенно самостоятельную и нетривиальную задачу. Решение этой задачи и, в частности, доказательство формул (1.10), (1.13) составляет самую сложную и ключевую часть данной главы.

Коэффициенты рядов (1.7), (1.12) имеют логарифмические особенности при $\eta \to 0$. Вместе с тем, эти ряды обладают свойством асимптотичности благодаря условию (1.5) и формулам (1.8), (1.9), (1.10), (1.13). Отметим еще, что формула (1.8) была формально получена в работе [23] при некоторых дополнительных ограничениях. Соотношения (1.12) были выведены в [22] для постоянного η; там же была обоснована формула (1.8) для η, стремящегося к нулю не более чем степенным образом, и множества γ_ε, являющегося образом периодического подмножества единичной окружности при конформном отображении.

Сформулированные теоремы 1.1, 1.2 составляют основные результаты главы. Доказательство этих теорем состоит из нескольких этапов; опишем их подробнее. В разделе 2 формально строятся асимптотические разложения для собственного значения λ_ε и соответствующей собственной функции ψ_ε в условиях теоремы 1.1. Данное построение проводится на основе комбинации метода пограничного слоя и метода многих масштабов. Эти методы применяются для формального построения асимптотики собственной функции. Пограничный слой, который строится на основе метода составных разложений, позволяет учесть микроструктуру граничных условий (1.2). В результате формального построения для функций пограничного слоя выводится рекуррентная система краевых задач, зависящих от параметра η. Эта зависимость носит сингулярный характер при $\eta \to 0$, что требует дополнительного нетривиального исследования этих задач. Такое исследования проводится в разделе 3, где изучается зависимость от параметра η решения модельной задачи. Упомянутые краевые задачи для функций пограничного слоя являются частными случаями данной модельной задачи. В разделе 4 на основе результатов раздела 3 выясняется зависимость функций пограничного слоя от параметра η и устанавливается характер сингулярностей этих функций при $\eta \to 0$. На основе полученных результатов доказывается, что формальные асимптотики, построенные в разделе 2, являются формальным асимптотическим решением исходной задачи. Под формальным асимптотическим решением понимаются формально построенные асимптотические ряды, если при подстановке частичных сумм этих рядов вместо λ_ε и ψ_ε в задачу (1.1), (1.2) получаем равенства в уравнении и граничных условиях с точностью до достаточно малой невязки. Более того, порядок малости этой невязки должен неограниченно расти при увеличении числа членов в частичных суммах. Вместе с тем, наличие формальных асимптотических решений еще не означает, что они дают асимптотики истинных собственных элементов задачи (1.1), (1.2). Поэтому необходимо провести обоснование формальных асимптотических решений и получить оценки остатков в построенных асимптотических рядах. Такое обоснование формально построенных асимптотик проводится в разделе 5, что завершает доказательство теоремы 1.1. Раздел 6 посвящен доказательству теоремы 1.2. Оно проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.1: формальное построение асимптотик, исследование характера зависимости пограничного слоя от параметра η, обоснование асимптотик.

Результаты данной главы были опубликованы в [8, 9].

2. ФОРМАЛЬНОЕ ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

В этом разделе будут формально построены асимптотики собственных элементов задачи (1.1), (1.2) в условиях теоремы 1.1. Ключевым моментом данного построения является использование пограничного слоя в окрестности границы $\partial\omega$ с целью удовлетворения граничных условий (1.2). Пограничный слой строится с использованием метода многих масштабов. Всюду в разделе считаем выполненными условия теоремы 1.1.

Так как собственное значение λ_0 простое, то из [65, 66, 91] следует, что к нему сходится одно собственное значение λ_ε задачи (1.1), (1.2), и это собственное значение — простое.

Асимптотику собственного значения λ_ε будем строить в виде ряда (1.7). Асимптотику соответствующей собственной функции ψ_ε, сходящейся к ψ_0, строим как сумму двух разложений: внешнего разложения и пограничного слоя. Внешнее разложение будем строить в виде:

$$\psi_\varepsilon^{ex}(\mathsf{x},\eta)=\psi_0(\mathsf{x})+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j\psi_j(\mathsf{x},\eta). \tag{2.1}$$

Пограничный слой строится следующим образом:

$$\psi_\varepsilon^{bl}(\xi,s,\eta)=\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j v_j(\xi,s,\eta). \tag{2.2}$$

Здесь $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ — растянутые переменные,

$$\xi_1=\frac{\theta(s)-\theta(s_0^\varepsilon)}{\varepsilon}-\frac{b(\varepsilon)-a(\varepsilon)}{2},\quad \xi_2=\frac{\theta'(s)\tau}{\varepsilon}, \tag{2.3}$$

где τ — расстояние от точки до границы, измеренное в направлении внутренней нормали. Выбор переменных ξ будет пояснен ниже, в замечании 2.1.

Целью формального построения является определение коэффициентов λ_j и функций ψ_j и v_j. Функции v_j согласно методу пограничного слоя будем искать экспоненциально убывающими при $\xi_2\to+\infty$.

Построение начнем с пограничного слоя. Следуя методу пограничного слоя, потребуем, чтобы сумма внешнего разложения (2.1) и пограничного слоя (2.2) асимптотически удовлетворяла граничным условиям из (1.2). Такое требование с учетом определения переменных ξ и условия (C1) приводит к граничным условиям для функций v_j:

$$v_j=A_j,\quad \xi\in\gamma(\eta),\qquad \frac{\partial v_j}{\partial\xi_2}=B_j,\quad \xi\in\Gamma(\eta), \tag{2.4}$$

где

$$\gamma(\eta)=\{\xi:|\xi_1-\pi j|<\eta,\ \xi_2=0,\ j\in\mathbb{Z}\},$$

$$\Gamma(\eta)=\left\{\xi:\left|\xi_1-\pi\left(j+\frac{1}{2}\right)\right|<\frac{\pi}{2}-\eta,\ \xi_2=0,\ j\in\mathbb{Z}\right\},$$

$$A_j=A_j(s,\eta)=-\psi_j(\mathsf{x},\eta),\qquad B_j=B_j(s,\eta)=\frac{1}{\theta'(s)}\frac{\partial}{\partial\nu}\psi_{j-1}(\mathsf{x},\eta),\qquad \mathsf{x}\in\partial\omega.$$

Выведем уравнения для функций v_j. В переменных (s,τ) оператор Лапласа выглядит следующим образом:

$$\Delta_{\mathsf{x}} = \frac{1}{\mathsf{H}}\frac{\partial}{\partial\tau}\mathsf{H}\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{1}{\mathsf{H}}\frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{\mathsf{H}}\frac{\partial}{\partial s}, \qquad \mathsf{H} = \mathsf{H}(s,\tau) = 1 - \tau\mathsf{k}(s), \tag{2.5}$$

где $\mathsf{k}(s) = -(\mathsf{r}''(s), \nu(s))_{\mathbb{R}^2}$, $\mathsf{r}(s)$ — вектор-функция, задающая кривую $\partial\omega$, а $\nu = \nu(s)$ — внешняя нормаль к $\partial\omega$. Подставляя теперь (1.7), (2.2), (2.5) в (1.1), умножая обе части полученного равенства на H^2, переходя к переменным ξ и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем уравнения:

$$\Delta_\xi v_j = F_j, \qquad \xi_2 > 0, \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}F_j =&\frac{1}{\theta'}\left(\left(1 + 2\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right)\left(\mathsf{k}\frac{\partial}{\partial\xi_2} - \frac{\theta''_\varepsilon}{\theta'}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right) - 2\frac{\partial^2}{\partial\xi_1\partial s}\right)v_{j-1} - \\ &-\frac{1}{(\theta')^2}\left(\xi_2^2\left(\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2 + \mathsf{k}^2\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2} + \left(\frac{\theta'''}{\theta'} + 2\frac{\theta''}{\theta'}\frac{\partial}{\partial s}\right)\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2} + \mathsf{k}'\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_1} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)v_{j-2} + \\ &+\sum_{i=0}^{2}\frac{\mathsf{a}_i}{(\theta')^2}\left(\frac{\xi_2\mathsf{k}}{\theta'}\right)^i\sum_{p=0}^{j-i-3}\lambda_p v_{j-i-p-2} - \sum_{i=0}^{j-4}\frac{\xi_2^{m+1}\mathsf{k}^m\mathsf{k}'}{(\theta')^{i+3}}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2} + \mathsf{k}\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_1} + \frac{\partial}{\partial s}\right)v_{j-i-3},\end{aligned}$$

где обозначено

$$\mathsf{a}_1 = \mathsf{a}_3 = -1, \qquad \mathsf{a}_2 = 2, \qquad v_{-1} = v_0 = 0, \qquad \mathsf{k} = \mathsf{k}(s).$$

При получении уравнений (2.6) умножение на H^2 оправдано, так как пограничный слой определяется лишь в некоторой малой окрестности $\partial\omega$, а функция H^2 не имеет нулей при достаточно малых τ. Если при выводе уравнений для v_j не умножать на H^2, то правые части уравнений для v_j будут записываться по-другому; вместе с тем, можно доказать, что они совпадают с правыми частями уравнений (2.6). Выбор в пользу уравнений (2.6) связан в первую очередь с тем, что они более удобны для дальнейших исследований.

Замечание 2.1. Благодаря условию (C1) и описанному выше выбору переменной ξ_1 краевые задачи для v_j периодичны по ξ_1. Периодичность по существу будет использована при исследовании этих задач, что и объясняет определение ξ_1. Переменная ξ_2 выбиралась так, чтобы получить уравнения Пуассона для v_j. Это привело к наличию множителя θ' в определении ξ_2.

Отметим, что s входит в задачи (2.4), (2.6) как параметр. Исследуем разрешимость этих задач. Для этого определим следующие функциональные пространства. Пусть $\mathcal{V}(\eta)$ — пространство π-периодических по ξ_1 функций из $C^\infty(\{\xi : \xi_2 \geqslant 0, \xi \neq (\pm\eta + \pi j, 0), j \in \mathbb{Z}\})$, имеющих при $\xi_2 \to +\infty$ дифференцируемую асимптотику

$$v(\xi) = \sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-2p\xi_2}\left(\mathsf{P}_p(\xi_2)\cos(2p\xi_1) + \mathsf{Q}_p(\xi_2)\sin(2p\xi_1)\right), \tag{2.7}$$

где P_p, Q_p — полиномы. Обозначим через $\mathcal{V}^+(\eta)$ $(\mathcal{V}^-(\eta))$ подпространство $\mathcal{V}(\eta)$, состоящее из четных (нечетных) по ξ_1 функций,

$$\mathcal{V}_p = \mathcal{V} \cap H^p(\Pi), \qquad \mathcal{V}_p^\pm = \mathcal{V}^\pm \cap H^p(\Pi), \qquad \Pi = \left\{\xi : |\xi_1| < \frac{\pi}{2},\ \xi_2 > 0\right\}.$$

Здесь и всюду далее все функциональные пространства предполагаются состоящими из вещественных функций.

Введем в рассмотрение функцию:

$$X(\xi,\eta) = \operatorname{Re}\ln\left(\sin z + \sqrt{\sin^2 z - \sin^2\eta}\right) - \xi_2, \tag{2.8}$$

где $z = \xi_1 + \mathrm{i}\xi_2$ — комплексная переменная. Легко видеть, что $X \in \mathcal{V}_1^+(\eta)$ — гармоническая функция, удовлетворяющая граничным условиям:

$$X = \ln\sin\eta, \quad \xi \in \gamma(\eta), \qquad \frac{\partial X}{\partial\xi_2} = -1, \quad \xi \in \Gamma(\eta). \tag{2.9}$$

Функция v_1 строится явно:

$$v_1 = -B_1 X. \tag{2.10}$$

Решить краевые задачи (2.4), (2.6) для $j \geqslant 2$ явно не удается, однако можно доказать разрешимость этих задач. Для этого понадобится следующая вспомогательная

Лемма 2.1. *Пусть* $F \in \mathcal{V}_0(\eta)$, $A, B = \mathrm{const}$. *Тогда задача*

$$\Delta_\xi v = F, \quad \xi_2 > 0, \quad v = A, \qquad \xi \in \gamma(\eta), \qquad \frac{\partial v}{\partial \xi_2} = B, \quad \xi \in \Gamma(\eta), \tag{2.11}$$

однозначно разрешима в пространстве $\mathcal{V}_1(\eta)$, *если и только если*

$$\int\limits_\Pi \widetilde{X} F \, d\xi = \pi(A + B \ln \sin \eta), \tag{2.12}$$

где $\widetilde{X} = X + \xi_2 - \ln \sin \eta$.

Доказательство. Функцию F представим в виде суммы $F = F^+ + F^-$, где $F^\pm \in \mathcal{V}_0^\pm(\eta)$, и рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &\Delta_\xi v = F, \quad \xi \in \Pi, \qquad v = A, \quad \xi \in \gamma(\eta) \cap \partial\Pi, \\ &\frac{\partial v}{\partial \xi_2} = B, \quad \xi \in \Gamma(\eta) \cap \partial\Pi, \qquad \frac{\partial v}{\partial \xi_1} = 0, \quad \xi_1 = \pm\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Сделаем комплексную замену переменной в этой задаче: $\widetilde{z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$. Тогда получим краевую задачу в полукруге с квадратично интегрируемой правой частью. Однозначная разрешимость такой задачи следует из общей теории обобщенных решений эллиптических уравнений. Также стандартными методами выясняется асимптотика решения в нуле, который является образом бесконечности при замене переменных. Возвращаясь теперь к переменным ξ и продолжая v^+ периодически по ξ_1 с периодом π, видим, что $v^+ = \widetilde{v}^+ + C$, $C = \mathrm{const}$, $\widetilde{v}^+ \in \mathcal{V}^+(\eta)$. Аналогичные факты устанавливаются для решения v^- задачи (2.13) с правой частью F^- и с заменой граничных условий при $\xi_1 = \pm\dfrac{\pi}{2}$ на однородное граничное условие Дирихле. Сумма функций $v^\pm$ и дает решение задачи (2.11), имеющее вид $v = \widetilde{v} + C$, $C = \mathrm{const}$, $\widetilde{v} \in \mathcal{V}(\eta)$. Критерием обращения константы C в нуль (т. е. критерием принадлежности $v \in \mathcal{V}(\eta)$), как было установлено в [22, лемма 3.1], является равенство (2.12). Лемма доказана. □

Ниже мы покажем, что $F_j \in \mathcal{V}_0(\eta)$. Условия разрешимости (2.12) дают краевые условия для функций ψ_j:

$$\psi_j = \frac{1}{\theta'} \frac{\partial \psi_{j-1}}{\partial \nu} \ln \sin \eta - \frac{1}{\pi} \int\limits_\Pi \widetilde{X} F_j \, d\xi, \quad \mathrm{x} \in \partial\omega, \tag{2.14}$$

Уравнения для ψ_j легко получаются стандартной подстановкой (1.7), (2.1) в (1.1) и вычислением коэффициентов при одинаковых степенях ε:

$$-\Delta \psi_j = \lambda_0 \psi_j + \sum_{p=1}^{j} \lambda_p \psi_{j-p}, \quad \mathrm{x} \in \omega. \tag{2.15}$$

Умножая обе части этих уравнений на ψ_0 и интегрируя по частям по ω, с учетом нормировки ψ_0 получаем условия разрешимости задач (2.14), (2.15):

$$\lambda_j + \sum_{p=1}^{j-1} \lambda_p (\psi_{j-p}, \psi_0)_{L_2(\omega)} = \ln \sin \eta \int\limits_{\partial\omega} \frac{\partial \psi_{j-1}}{\partial \nu} \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} \frac{\mathrm{d}s}{\theta'} - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\partial\omega} \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} \int\limits_\Pi \widetilde{X} F_j \, d\xi \, ds.$$

Решения задач (2.14), (2.15) определены с точностью до слагаемого $C\psi_0$, $C = \mathrm{const}$. Для определенности предполагается, что все функции ψ_j, $j \geqslant 1$, ортогональны ψ_0 в $L_2(\omega)$. Такой выбор функций ψ_j в силу только что полученных условий разрешимости задач (2.14), (2.15) дает формулы для коэффициентов ряда (1.7):

$$\lambda_j = \ln \sin \eta \int\limits_{\partial\omega} \frac{\partial \psi_{j-1}}{\partial \nu} \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} \frac{\mathrm{d}s}{\theta'} - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\partial\omega} \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} \int\limits_\Pi \widetilde{X} F_j \, d\xi \, ds. \tag{2.16}$$

Из (2.15) для $j=1$ следует:

$$\psi_1 = \frac{1}{\theta'}\frac{\partial\psi_0}{\partial\nu}\ln\sin\eta, \quad \mathsf{x}\in\partial\omega, \tag{2.17}$$

а из (2.16) с учетом равенства $F_1=0$ вытекает (1.8).

Докажем (1.9). Прямыми вычислениями проверяем, что

$$F_2 = \frac{1}{2}\Delta_\xi\left(\xi_2^2\left(\frac{\mathsf{k}}{\theta'}\frac{\partial}{\partial\xi_2} - \frac{\theta''}{(\theta')^2}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)v_1\right) + \frac{2}{\theta'}\frac{\partial B_1}{\partial s}\frac{\partial X}{\partial\xi_1}.$$

Второе слагаемое в данном равенстве нечетно по ξ_1, а потому, интегрируя по частям, получаем:

$$\int\limits_\Pi \widetilde{X}F_2\,d\xi = \frac{1}{2}\int\limits_\Pi \widetilde{X}\Delta_\xi\left(\xi_2^2\left(\frac{\mathsf{k}}{\theta'}\frac{\partial}{\partial\xi_2} - \frac{\theta''}{(\theta')^2}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)v_1\right)d\xi = 0. \tag{2.18}$$

Из граничного условия (2.17) следует, что $\psi_1(\mathsf{x},\eta)=\psi_{11}(\mathsf{x})\ln\sin\eta$, где ψ_{11} — решение задачи (1.11). Отсюда и из (2.16), (2.18) выводим (1.9).

Лемма 2.2. *Задачи* (2.4)*,* (2.6)*,* (2.14)*,* (2.15)*,* (2.16) *разрешимы, функции* v_j, ψ_j *и* F_j *представимы в виде сумм*

$$v_j(\xi,s,\eta)=\sum_{i=1}^{\mathsf{M}_{1j}}\varphi_{ij}(s)v_{ij}(\xi,\eta), \qquad F_j(\xi,s,\eta)=\sum_{i=1}^{\mathsf{M}_{1j}}\varphi_{ij}(s)F_{ij}(\xi,\eta), \qquad \psi_j(\mathsf{x},\eta)=\sum_{i=1}^{\mathsf{M}_{2j}}\mathsf{b}_{ij}(\eta)\psi_{ij}(\mathsf{x}),$$

где M_{ij} *— некоторые числа,* $\varphi_{ij}\in C^\infty(\partial\omega)$, $\psi_{ij}\in C^\infty(\overline{\omega})$, $v_{ij}\in\mathcal{V}_1(\eta)$, $F_{ij}\in\mathcal{V}_0(\eta)$.

Доказательство. Для $j=1$ утверждение леммы следует из определения функций v_1, ψ_1 и F_1:

$$\mathsf{M}_{11}=\mathsf{M}_{21}=1, \qquad \mathsf{b}_{11}(\eta)=\ln\sin\eta, \qquad v_{11}=X, \qquad F_{11}=0, \qquad \varphi_{11}=-B_1.$$

Из явного вида функции X следует, что

$$\xi_2^pX\in\mathcal{V}_{p+1}(\eta), \quad \xi_2^{p+q}\nabla_\xi\frac{\partial^pX}{\partial\xi_2^p}\in\mathcal{V}_q(\eta), \quad p,q\geqslant 0. \tag{2.19}$$

Тогда для F_2 выполнено утверждение леммы, откуда в силу задач для v_2 и ψ_2 и леммы 2.1 следует утверждение леммы для v_2, а также вытекает, что все интегралы в правой части (2.16) определены. Поэтому утверждение леммы для ψ_2 выполнено. Дальнейшее доказательство проводится по индукции; при этом несложно доказать, что

$$\xi_2^pv_{ij}\in\mathcal{V}_{p+1}(\eta), \qquad \xi_2^{p+q}\nabla_\xi\frac{\partial^pv_{ij}}{\partial\xi_2^p}\in\mathcal{V}_q(\eta), \qquad p,q\geqslant 0.$$

Для доказательства последних принадлежностей достаточно применить оператор Лапласа к функциям $\xi_2^pv_{ij}$, $p\geqslant 1$. Результат будет функцией из $\mathcal{V}_{p-1}(\eta)$. Этот факт и равенства $\xi_2^pv_{ij}\big|_{\xi_2=0}=0$ в силу теорем о повышении гладкости решений эллиптических уравнений дают первую из требуемых принадлежностей. Вторая из требуемых принадлежностей доказывается путем дифференцирования первой. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.2 обеспечивает существование всех интегралов в (2.14), (2.16).

Основной сложностью исследования зависимости λ_j от η является выяснение характера зависимости интегралов в правой части (2.16) от η, что нельзя сделать без более детального изучения зависимости решений задач (2.4), (2.6) от параметра η. Эту задачу решим в два этапа. Вначале исследуем зависимость от η решения модельной задачи (2.11), а затем полученные результаты применим к конкретным решениям задач (2.4), (2.6). Первое будет сделано в следующем разделе, второму посвящен раздел 4.

3. Модельная задача для пограничного слоя

Исследование задачи (2.11) начнем с получения оценок для решения. Для этого нам понадобится вспомогательное утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть* $v, \dfrac{\partial v}{\partial \xi_1} \in \mathcal{V}_0(\Pi)$ *и выполнено*

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} v(\xi)\, d\xi_1 = 0 \quad \textit{для всех} \quad \xi_2 > 0. \tag{3.1}$$

Тогда верна оценка:

$$\|v\|_{L_2(\Pi)} \leqslant 2\pi \Big\| \frac{\partial v}{\partial \xi_1} \Big\|_{L_2(\Pi)}.$$

Доказательство. Для $\xi_2 > 0$ в силу (3.1) и неравенства Пуанкаре имеем:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} v^2\, d\xi_1 \leqslant 2\pi^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi_1}\right)^2 d\xi_1.$$

Интегрируя теперь полученное неравенство по $\xi_2 \in (0, +\infty)$, приходим к утверждению леммы. Лемма доказана. □

Лемма 3.2. *Функция* X *обладает следующими свойствами*:

а) $\|\nabla_\xi X\|_{L_2(\Pi)} = \sqrt{\pi |\ln \sin \eta|}$;

б) *для* $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $p + q \geqslant 1$ *выполняется*

$$\Big\| \xi_2^{p+q} \nabla_\xi \frac{\partial^p X}{\partial \xi_2^p} \Big\|_{L_2(\Pi)} = \sqrt{(p+q)(2(p+q)-1)} \Big\| \xi_2^{p+q-1} \frac{\partial^p X}{\partial \xi_2^p} \Big\|_{L_2(\Pi)};$$

в) $\xi_2^p X$ *непрерывна по* $\eta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *в норме* $L_2(\Pi)$, $p \geqslant 0$;

г) $\xi_2^{p+q} \nabla_\xi \dfrac{\partial^p X}{\partial \xi_2^p}$ *непрерывна по* $\eta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *в норме* $L_2(\Pi)$, $p, q \geqslant 0$.

Доказательство. Существование всех интегралов в утверждении леммы обеспечивают соотношения (2.19). Интегрируя по частям в равенствах

$$\int\limits_{\Pi} \Delta_\xi X\, d\xi = 0, \qquad \int\limits_{\Pi} \xi_2 \Delta_\xi X\, d\xi = 0, \qquad \int\limits_{\Pi} X \Delta_\xi X\, d\xi = 0,$$

получаем

$$\int\limits_{\gamma(\eta)\cap\partial\Pi} \frac{\partial X}{\partial \xi_2}\, d\xi_1 = \pi - 2\eta, \qquad \int\limits_{\Gamma(\eta)\cap\partial\Pi} X\, d\xi_1 = -2\eta \ln \sin \eta,$$

$$\int\limits_{\Pi} |\nabla_\xi X|^2\, d\xi = -\ln \sin \eta \int\limits_{\gamma(\eta)\cap\partial\Pi} \frac{\partial X}{\partial \xi_2}\, d\xi_1 + \int\limits_{\Gamma(\eta)\cap\partial\Pi} X\, d\xi_1,$$

откуда следует пункт а). Пункт б) вытекает из цепочки равенств

$$\begin{aligned} 0 = &\int\limits_{\Pi} \xi_2^{2(p+q)} \frac{\partial^p X}{\partial \xi_2^p} \Delta_\xi \frac{\partial^p X}{\partial \xi_2^p}\, d\xi - \\ = -&\int\limits_{\Pi} \xi_2^{2(p+q)} \left| \nabla_\xi \frac{\partial^p X}{\partial \xi_2^p} \right|^2 d\xi - 2(p+q) \int\limits_{\Pi} \xi_2^{2(p+q)-1} \frac{\partial^p X}{\partial \xi_2^p} \frac{\partial^{p+1} X}{\partial \xi_2^{p+1}}\, d\xi - \\ = -&\Big\| \xi_2^{p+q} \nabla_\xi \frac{\partial^p X}{\partial \xi_2^p} \Big\|^2_{L_2(\Pi)} + (p+q)(2(p+q)-1) \Big\| \xi_2^{p+q-1} \frac{\partial^p X}{\partial \xi_2^p} \Big\|^2_{L_2(\Pi)}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Из принадлежности $X \in \mathcal{V}_1(\eta)$ и явного вида этой функции вытекает, что $\xi_2^p X$ непрерывна по $\eta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ в норме $W_2^1(\Pi)$ и непрерывна по $\eta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ в норме $L_2(\Pi \cap \{\xi : \xi_2 > 1\})$, $p \geqslant 0$. Применяя принцип максимума для гармонических функций, нетрудно доказать, что при $\xi \in \overline{\Pi} \cap \{\xi : \xi_2 \geqslant 1\}$ выполнена оценка

$$|X| \leqslant C_1 |\operatorname{Re} \ln \sin z| + C_2,$$

где $C_1, C_2 > 0$ — некоторые константы, не зависящие от η и ξ. Так как в правой части данной оценки стоит интегрируемая функция, то в силу теоремы Лебега о предельном переходе функция $\xi_2^p X$ непрерывна по $\eta \in [0, \pi/2]$ в $L_2(\Pi \cap \{\xi : \xi_2 < 1\})$, $p \geqslant 0$. Пункт в), а также пункт г) для $p = 0$ доказаны. Аналогично тому, как были получены равенства (3.2), легко доказать их и для функции $(X(\xi, \eta + \Delta\eta) - X(\xi, \eta))$, η, $\eta + \Delta\eta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, откуда, учитывая пункт в) и пункт г) для $p = 0$, получаем утверждение пункта г) для $p > 0$. Лемма доказана. ☐

Всюду до конца раздела будем предполагать, что решение задачи (2.11) в точках

$$\xi_k^{\pm} = (\pm\eta + \pi k, 0), \qquad k \in \mathbb{Z},$$

удовлетворяет следующей дифференцируемой асимптотике:

$$v(\xi) = A + O(|\xi - \xi_k^{\pm}|^{\frac{1}{2}}), \quad \xi \to \xi_k^{\pm}. \tag{3.3}$$

Отметим, что функция X удовлетворяет данной асимптотике с $A = \ln \sin \eta$.

Лемма 3.3. *Пусть для* $F \in \mathcal{V}_0(\eta)$ *выполнено* (3.1) *и условие разрешимости* (2.12)*, а решение задачи* (2.11) *удовлетворяет асимптотике* (3.3). *Тогда для этого решения справедливо равенство* (3.1) *и имеет место равномерная оценка*:

$$\|v\|_{W_2^1(\Pi)} \leqslant C\Big(\|F\|_{L_2(\Pi)} + |B|\big(|\ln \sin \eta|^{\frac{1}{2}} + 1\big)\Big),$$

где C *не зависит от* F, B *и* η.

Доказательство. Интегрируя по частям в равенствах

$$0 = \int\limits_{\Pi \cap \{\xi_2 > t\}} F\, d\xi = \int\limits_{\Pi \cap \{\xi_2 > t\}} \Delta_\xi v\, d\xi, \qquad 0 = \int\limits_{\Pi \cap \{\xi_2 > t\}} \xi_2 F\, d\xi = \int\limits_{\Pi \cap \{\xi_2 > t\}} \xi_2 \Delta_\xi v\, d\xi,$$

получаем

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial v}{\partial \xi_2}\Big|_{\xi_2 = t} d\xi_1 = 0, \qquad t \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial v}{\partial \xi_2}\Big|_{\xi_2 = t} d\xi_1 - \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} v\big|_{\xi_2 = t}\, d\xi_1 = 0,$$

откуда и следует (3.1) для v. Асимптотика (3.3) позволяет использовать эти равенства и при $t = 0$, что в силу граничных условий для v дает:

$$\int\limits_{\gamma(\eta) \cap \partial\Pi} \frac{\partial v}{\partial \xi_2}\, d\xi_1 = (2\eta - \pi)B, \qquad \int\limits_{\Gamma(\eta) \cap \partial\Pi} v\, d\xi_1 = -2\eta A.$$

Используя эти равенства, умножим уравнение в (2.11) на v и проинтегрируем по частям, учитывая (3.3). В результате имеем:

$$\pi AB - \|\nabla_\xi v\|^2_{L_2(\Pi)} = (F, v)_{L_2(\Pi)}.$$

Из этого равенства в силу леммы 3.1 выводим:

$$\|\nabla_\xi v\|^2_{L_2(\Pi)} \leqslant \pi AB + 2\pi \|F\|_{L_2(\Pi)} \|\nabla_\xi v\|_{L_2(\Pi)}. \tag{3.4}$$

В силу равенств (3.1) для функции F левая часть условия разрешимости (2.12) может переписана к виду:

$$\int\limits_{\Pi} \widetilde{X} F\, d\xi = \int\limits_{\Pi} X F\, d\xi.$$

С учетом последнего равенства выразим A из условия разрешимости (2.12) и затем оценим:

$$A = -B\ln\sin\eta + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Pi} \widetilde{X}F\,d\xi = -B\ln\sin\eta + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Pi} XF\,d\xi,$$

$$|A| \leqslant |B\ln\sin\eta| + \pi^{-1}\|F\|_{L_2(\Pi)}\|X\|_{L_2(\Pi)}.$$

В силу пункта в) леммы 3.2 величина $\|X\|_{L_2(\Pi)}$ ограничена равномерно по η. Учитывая этот факт и подставляя полученную оценку для A в (3.4), получим квадратное неравенства относительно $\|\nabla_\xi v\|_{L_2(\Omega)}$. Решая данное квадратное неравенство, приходим к оценке:

$$\|\nabla_\xi v\|^2_{L_2(\Pi)} \leqslant C\left(B^2|\ln\sin\eta| + |B|\|F\|_{L_2(\Pi)}\right) + \frac{1}{2}\|\nabla_\xi v\|^2_{L_2(\Pi)},$$

$$\|\nabla_\xi v\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C\left(\|F\|_{L_2(\Pi)} + |B|\left(|\ln\sin\eta|^{\frac{1}{2}} + 1\right)\right),$$

где C — константа, не зависящая от F, B и η. Соединяя последнее неравенство с оценкой для $\|v\|_{L_2(\Pi)}$ из леммы 3.1, приходим к утверждению леммы. Лемма доказана. □

Лемма 3.4. *Пусть выполнены условия леммы* 3.3*, и, кроме того, справедливы принадлежности*

$$\xi_2^p F \in \mathcal{V}_p(\eta), \qquad \xi_2^{p+q+1}\nabla_\xi \frac{\partial^p F}{\partial\xi_2^p} \in \mathcal{V}_q(\eta), \qquad p,q \geqslant 0.$$

Тогда для решения задачи (2.11) *справедливы соотношения*

$$\xi_2^p v \in \mathcal{V}_{p+1}(\eta), \quad \xi_2^{p+q}\nabla_\xi \frac{\partial^p v}{\partial\xi_2^p} \in \mathcal{V}_q(\eta), \tag{3.5}$$

и для $u = v + BX$, $p \geqslant 0$, $p + q \geqslant 1$ *верны оценки*:

$$\|\xi_2^p u\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C\sum_{k=0}^{p} \|\xi_2^k F\|_{L_2(\Pi)}, \tag{3.6}$$

$$\left\|\xi_2^{p+q}\nabla_\xi \frac{\partial^p u}{\partial\xi_2^p}\right\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C\left(\sum_{k=1}^{p}\left\|\xi_2^{q+k+1}\frac{\partial^k F}{\partial\xi_2^k}\right\|_{L_2(\Pi)} + \sum_{k=0}^{q}\|\xi_2^k F\|_{L_2(\Pi)}\right), \tag{3.7}$$

где константы C *не зависят от* η, F *и* B, $u = v + BX$.

Доказательство. Так как $v \in \mathcal{V}(\eta)$, то для доказательства (3.5) достаточно проверить интегрируемость соответствующих функций в точках $(\pm\eta + \pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Это легко сделать на основе асимптотик (3.3).

Ясно, что u — решение задачи (2.11) с правой частью F и $B = 0$. Поэтому в силу леммы 3.3 функция u удовлетворяет равенствам (3.1) и оценкам (3.6) с $p = 0$. Кроме того, в силу (2.19) и (3.5), для функции u верны принадлежности (3.5) и асимптотики (3.3) с заменой A на $A + B\ln\sin\eta$. Этот факт гарантирует существование всех интегралов в (3.6), (3.7), а также всех интегралов, приводимых ниже. Всюду в доказательстве через C будем обозначать различные константы, не зависящие от η, B, F и u. Интегрируя по частям аналогично (3.2), с учетом асимптотик (3.3) и соотношения $l \equiv p + q \geqslant 1$ получаем:

$$\int\limits_{\Pi} \xi_2^{2l}\frac{\partial^p u}{\partial\xi_2^p}\frac{\partial^p F}{\partial\xi_2^p}\,d\xi = -\left\|\xi_2^l\nabla_\xi\frac{\partial^p u}{\partial\xi_2^p}\right\|^2_{L_2(\Pi)} + l(2l-1)\left\|\xi_2^{l-1}\frac{\partial^p u}{\partial\xi_2^p}\right\|^2_{L_2(\Pi)},$$

откуда выводим неравенства

$$\left\|\xi_2^{p+q}\nabla_\xi\frac{\partial^p u}{\partial\xi_2^p}\right\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C\left(\left\|\xi_2^{p+q-1}\nabla_\xi\frac{\partial^{p-1}u}{\partial\xi_2^{p-1}}\right\|_{L_2(\Pi)} + \left\|\xi_2^{p+q+1}\frac{\partial^p F}{\partial\xi_2^p}\right\|_{L_2(\Pi)}\right) \tag{3.8}$$

— при $p \geqslant 1$,

$$\|\xi_2^q\nabla_\xi u\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C\left(\|\xi_2^{q-1}u\|_{L_2(\Pi)} + \|\xi_2^q u\|_{L_2(\Pi)} + \|\xi_2^q F\|_{L_2(\Pi)}\right) \tag{3.9}$$

— при $p=0$. Для $p\geqslant 1$ функции $\xi_2^p u$ обращаются в нуль при $\xi_2=0$. Это позволяет рассмотреть их как решения задачи (2.11) с однородным граничным условием Дирихле на всей оси $O\xi_1$ и правой частью

$$\xi_2^p F+2p\xi_2^{p-1}\frac{\partial u}{\partial \xi_2}+p(p-1)\xi_2^{p-2}u.$$

Тогда в силу леммы 3.3 имеем оценки:

$$\begin{aligned}&\|\xi_2^p u\|_{L_2(\Pi)}\leqslant C\big(\|\xi_2^p F\|_{L_2(\Pi)}+\|\xi_2^{p-2}u\|_{L_2(\Pi)}+\|\xi_2^{p-1}\nabla_\xi u\|_{L_2(\Pi)}\big),\quad p\geqslant 2,\\&\|\xi_2 u\|_{L_2(\Pi)}\leqslant C\left(\|\xi_2 F\|_{L_2(\Pi)}+\|\nabla_\xi u\|_{L_2(\Pi)}\right).\end{aligned}\tag{3.10}$$

С помощью (3.9), (3.10) по индукции доказываются неравенства (3.6), а также неравенства (3.7) для $p=0$. Также по индукции из (3.6), (3.7) для $p=0$ и (3.8) вытекают оценки (3.7) и для $p>0$. Лемма доказана. ☐

Лемма 3.5. *Пусть выполнены условия леммы* 3.3, *и, кроме того,* $A=A(\eta)$, $B=B(\eta)$, $F=F(\xi,\eta)$ *непрерывны по* $\eta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ *(последняя в норме* $L_2(\Pi)$*). Тогда решение задачи* (2.11) *непрерывно* $\eta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ *в норме* $W_2^1(\Pi)$.

Доказательство. Рассмотрим случай $F\in\mathcal{V}_0^+(\eta)$. Пусть $v=v(\xi,\eta)\in\mathcal{V}_1^+(\eta)$ — решение задачи (2.11), $\eta_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $t_k\to 0$, $k\to\infty$ — произвольная последовательность,

$$u(\xi,\eta)=v(\xi,\eta)-\chi(\xi_2)(A(\eta)+B(\eta)\xi_2),$$

где χ, напомним, срезающая функция. В силу леммы 3.1 функции $v(\xi,\eta_0+t_k)$, а значит, и функции $u(\xi,\eta_0+t_k)$, ограничены равномерно по k в норме $W_2^1(\Pi)$. Выделяя при необходимости из t_k подпоследовательность, заключаем, что $u(\xi,\eta_0+t_k)$ сходятся к некоторой функции u_* слабо в $W_2^1(\Pi)$. Более того, применяя стандартный диагональный процесс, нетрудно убедиться в существовании подпоследовательности t_k (обозначим ее вновь за t_k), на которой функции $u(\xi,\eta_0+t_k)$ сходятся к u_* слабо в $W_2^1(\Pi\cap\{\xi_2<p\})$ и сильно в $L_2(\Pi\cap\{\xi_2<p\})$ для всех $p\in\mathbb{N}$. Используя данные сходимости, аналогично, например, [21], [61, § 3], нетрудно доказать, что u_* — решение задачи (2.13) с правой частью $(F(\xi,\eta_0)-\Delta_\xi\chi(\xi_2)(A(\eta_0)+B(\eta_0)\xi_2))$ и однородными граничными условиями. Ясно, что функция u_*, периодически продолженная по ξ_1 с периодом π, принадлежит $C^\infty(\{\xi:\xi_2\geqslant 0,\xi\neq(\pm\eta+\pi j,0),j\in\mathbb{Z}\})$. Более того, из краевой задачи для u_* и принадлежности ее к $W_2^1(\Pi)$ вытекает, что на бесконечности эта функция имеет асимптотику (2.7), т. е. является элементом пространства $\mathcal{V}_1(\eta_0)$. Следовательно, в силу леммы 2.1,

$$u_*(\xi)=v(\xi,\eta_0)-\Delta_\xi\chi(\xi_2)(A(\eta_0)+B(\eta_0)\xi_2).$$

В случае нечетной функции F данный факт устанавливается еще проще, так как благодаря нечетности граничные условия здесь однородные и нет необходимости вводить функцию u.

Утверждение леммы теперь элементарно доказывается от противного с помощью представления $F=F^++F^-$, $F^\pm\in\mathcal{V}_0^\pm(\eta)$. Лемма доказана. ☐

Лемма 3.6. *Пусть выполнены условия леммы* 3.5, *а функции* $\xi_2^p F$ *и* $\xi_2^{p+q+1}\dfrac{\partial^p F}{\partial\xi_2^p}$, $p,q\geqslant 0$, *непрерывны по* $\eta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ *в норме* $L_2(\Pi)$. *Тогда функции* $\xi_2^p v$, $\xi_2^{p+q}\nabla_\xi\dfrac{\partial^p v}{\partial\xi_2^p}$, *где* v — *решение задачи* (2.11), *непрерывны по* $\eta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ *в норме* $L_2(\Pi)$.

Доказательство. Утверждение леммы для $p=q=0$ следует из леммы 3.5. Совершенно аналогично доказательству леммы 3.4, оценки (3.6), (3.7) нетрудно доказать и для функций $(u(\xi,\eta+t)+u(\xi,\eta))$, где σ — малое число, $\eta,\eta+t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $u=v+BX$. В правых частях этих оценок вместо функции F будут стоять функции $(F(\xi,\eta+t)-F(\xi,\eta))$. Эти оценки и пункты в), г) леммы 3.2 доказывают утверждение леммы. Лемма доказана. ☐

4. Непрерывность и оценки коэффициентов формальных асимптотик

В настоящем разделе будет показана непрерывность по η функций λ_j и v_j, получен ряд оценок, характеризующих поведение этих функций при $\eta \to 0$, а также будут доказаны равенства $\lambda_j\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, $j \geqslant 1$. Кроме того, будет доказано, что формально построенные в разделе 2 асимптотические разложения собственных элементов являются формальным асимптотическим решением задачи (1.1), (1.2).

Так как $F_1 = 0$, то в силу леммы 3.3 имеем равенство (3.1) для v_{11}. Отсюда и из вида функции F_2 следуют аналогичные равенства и для F_{i2}, что в силу леммы 3.3 влечет выполнение тех же равенств и для v_{i2}. Продолжая рассуждения, по индукции легко доказать, что все функции v_{ij} и F_{ij} удовлетворяют (3.1).

Асимптотики (3.3) для функций v_i легко устанавливаются по индукции достаточно стандартным способом (см., например, [54]). При этом функция v_1 удовлетворяет (3.3) по определению.

Положим $u_j = v_j + B_j X$. Сумму слагаемых, кроме первого, входящих в определение функции F_j, обозначим через $\widehat{F}_j$. Прямыми вычислениями проверяется, что

$$\begin{aligned} F_j &= \Delta_\xi \left(\frac{\xi_2^2}{2\theta'} \left(\mathsf{k}\frac{\partial}{\partial \xi_2} - \frac{\theta''_\varepsilon}{\theta'}\frac{\partial}{\partial \xi_1} \right) v_{j-1} \right) - \frac{2}{\theta'}\frac{\partial B_{j-1}}{\partial s}\frac{\partial X}{\partial \xi_1} + \widetilde{F}_j, \\ \widetilde{F}_j &= \widehat{F}_j - \frac{\xi_2^2}{2\theta'} \left(\mathsf{k}\frac{\partial}{\partial \xi_2} - \frac{\theta''}{\theta'}\frac{\partial}{\partial \xi_1} \right) F_{j-1} - \frac{2}{\theta'}\frac{\partial^2 u_{j-1}}{\partial \xi_1 \partial s}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Из (3.1) для F_{ij} следует

$$\int\limits_{\Pi} \widetilde{X} F_j \, d\xi = \int\limits_{\Pi} X F_j \, d\xi.$$

Подставим теперь (4.1) в правую часть этого равенства, проинтегрируем по частям и учтем, что производная $\dfrac{\partial X}{\partial \xi_1}$ нечетна по ξ_1, а X — четно:

$$\int\limits_{\Pi} \widetilde{X} F_j \, d\xi = \int\limits_{\Pi} X \widetilde{F}_j \, d\xi,$$

что позволяет переписать равенства (2.14) и (2.16):

$$\psi_j = \frac{1}{\theta'}\frac{\partial \psi_{j-1}}{\partial \nu} \ln \sin \eta - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Pi} X \widetilde{F}_j \, d\xi, \quad \mathsf{x} \in \partial\omega, \tag{4.2}$$

$$\lambda_j = \ln \sin \eta \int\limits_{\partial\omega} \frac{\partial \psi_{j-1}}{\partial \nu}\frac{\partial \psi_0}{\partial \nu}\frac{\mathrm{d}s}{\theta'} - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\partial\omega} \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} \int\limits_{\Pi} X \widetilde{F}_j \, d\xi \, ds. \tag{4.3}$$

Используя леммы 2.2, 3.5, 3.6, пункты в), г) леммы 3.2 и (4.2), (4.3), по индукции несложно доказать следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Функции* $\mathsf{b}_{ij}(\eta)$, $\xi_2^p v_{ij}$, $\xi_2^{p+q} \nabla_\xi \dfrac{\partial^p v_{ij}}{\partial \xi_2^p}$, $p, q \geqslant 0$, *непрерывны по* $\eta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *(последние в норме* $L_2(\Pi)$*).*

Лемма 4.2. *При* $\eta \to 0$ *справедливы равенства* (1.10)*,*

$$\mathsf{b}_{ij}(\eta) = \widehat{\mathsf{b}}_{ij} \ln^j \eta + O\left(|\ln \eta|^{j-\frac{5}{2}} \right), \tag{4.4}$$

где $\widehat{\mathsf{b}}_{ij}$ *— некоторые константы. Имеют место равномерные по* s *и* $\eta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *оценки*

$$\begin{aligned} &\|\psi_j\|_{C^p(\overline{\omega})} \leqslant C(|\ln \eta|^j + 1), && \left\| \xi_2^{p+q+1} \nabla_\xi \frac{\partial^p v_j}{\partial \xi_2^p} \right\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C(|\ln \eta|^{j-1} + 1), \\ &\|\xi_2^p v_j\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C(|\ln \eta|^{j-1} + 1), && \left\| \xi_2^{p} \nabla_\xi \frac{\partial^p v_j}{\partial \xi_2^p} \right\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C(|\ln \eta|^{j-\frac{1}{2}} + 1), \\ &\|F_j\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C(|\ln \eta|^{j-\frac{3}{2}} + 1), && \|\widetilde{F}_j\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C(|\ln \eta|^{j-\frac{5}{2}} + 1), \end{aligned} \tag{4.5}$$

где $p, q \geqslant 0$, $j \geqslant 1$.

Доказательство. Наряду с (1.10), (4.4), (4.5) будут доказаны равномерные по s и η оценки

$$\|\xi_2^p u_j\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C(|\ln\eta|^{j-\frac{3}{2}}+1), \qquad \Big\|\xi_2^{p+q}\nabla_\xi \frac{\partial^p u_j}{\partial\xi_2^p}\Big\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C(|\ln\eta|^{j-\frac{3}{2}}+1). \tag{4.6}$$

Доказательство проведем индукцией по j. При $j=1$ утверждение леммы и (4.6) следует из (1.8), определения функций v_1 и ψ_1 и пунктов а)–в) леммы 3.2. Пусть лемма выполнена при $j < \mathsf{N}$. Докажем ее для $j=\mathsf{N}$. В силу определения функций F_j и $\widetilde{F}_j$ и (4.5), (4.6) получаем оценки (4.5) функций F_j, $\widetilde{F}_j$, ψ_j для $j=\mathsf{N}$. В свою очередь, последнее неравенство из (4.5) и пункт в) леммы 3.2 позволяют оценить интегралы по Π в (4.2), (4.3):

$$\Big|\int\limits_{\Pi} X\widetilde{F}_{\mathsf{N}}\,d\xi\Big| \leqslant C(|\ln\eta|^{\mathsf{N}-\frac{5}{2}}+1),$$

где C не зависит от s, η и ε. Из этой оценки, краевых задач (2.15), (2.17), формул (4.2), (4.3), равенств (1.10), (4.4) для $j<\mathsf{N}$ получаем (1.10), (4.4) и для $j=\mathsf{N}$. Непосредственно из определения функций F_j, (4.5) для $j<\mathsf{N}$ и неравенств (3.6), (3.7) выводим равномерные по η и s оценки

$$\Big\|\xi_2^p\frac{\partial^p F_{\mathsf{N}}}{\partial\xi_2^p}\Big\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C\big(|\ln\eta|^{\mathsf{N}-\frac{3}{2}}+1\big), \quad \Big\|\xi_2^{p+q+1}\frac{\partial^p F_{\mathsf{N}}}{\partial\xi_2^p}\Big\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C\big(|\ln\eta|^{\mathsf{N}-2}+1\big).$$

Из этих оценок и леммы 3.4 следует (4.6) для $j=\mathsf{N}$. Чтобы доказать теперь оставшиеся неравенства из (4.5) для $j=\mathsf{N}$, осталось оценить функцию B_{N} из граничных условий для v_j на $\Gamma(\eta)$ и применить затем лемму 3.3 и пункты а) и б) леммы 3.2. Необходимая оценка для B_{N} легко вытекает из (4.5) для $j=\mathsf{N}-1$ и леммы 2.2:

$$|B_j| \leqslant C\big(|\ln\eta|^{j-1}+1\big),$$

откуда уже и следует (4.5) для $j=\mathsf{N}$. Лемма доказана. □

Докажем, что

$$\lambda_j\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, \qquad j\geqslant 1.$$

Очевидно, что

$$X\left(\xi,\frac{\pi}{2}\right)\equiv 0,$$

а потому

$$v_1\equiv 0, \qquad \psi_1\equiv 0, \qquad \lambda_1=0 \quad \text{при} \quad \eta=\frac{\pi}{2}.$$

Отсюда в силу задач для v_2 и ψ_2 вытекает:

$$F_2\equiv 0, \qquad A_2=B_2=0, \qquad v_2\equiv 0, \qquad \psi_2\equiv 0, \qquad \lambda_2=0 \quad \text{при} \quad \eta=\frac{\pi}{2},$$

и т. д.

Формальное построение завершим доказательством того, что построенные формальные асимптотики для λ_ε и ψ_ε являются формальным асимптотическим решением задачи (1.1), (1.2). Вначале докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 4.3. *Для любых* $p\geqslant 2$, $R>1$ *справедливы равномерные по* R, s *и* η *оценки*:

$$\|v_j\|_{L_2(\Pi\cap\{\xi_2>R\})} \leqslant CR^{-p+1}(|\ln\eta|^{j-1}+1), \qquad \|\nabla_\xi v_j\|_{L_2(\Pi\cap\{\xi_2>R\})} \leqslant CR^{-p+1}(|\ln\eta|^{j-1}+1).$$

Доказательство. Для всякой функции $v\in\mathcal{V}(\eta)$ при $\xi_2\geqslant R$ в силу неравенства Коши—Буняковского выполняется

$$|v(\xi)| = \Big|\int\limits_{\xi_2}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}v(\xi_1,t)\,dt\Big| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2p-1}}\xi_2^{-p+\frac{1}{2}}\Big\|\xi_2^p\frac{\partial v}{\partial\xi_2}\Big\|_{L_2(\{\xi_2>0\})}.$$

Последовательно полагая в полученном неравенстве

$$v=v_j, \qquad v=\frac{\partial v_j}{\partial\xi_2}, \qquad v=\frac{\partial v_j}{\partial\xi_1}$$

и интегрируя затем по $L_2(\Pi\cap\{\xi_2>R\}$, выводим:

$$\|v_j\|_{L_2(\Pi\cap\{\xi_2>R\})}\leqslant\frac{R^{-p+1}}{\sqrt{(2p-1)(2p-2)}}\|\xi_2^p\nabla_\xi v_j\|_{L_2(\Pi\cap\{\xi_2>R\})},$$

$$\|\nabla_\xi v_j\|_{L_2(\Pi\cap\{\xi_2>R\})}\leqslant\frac{R^{-p+1}}{\sqrt{(2p-1)(2p-2)}}\left\|\xi_2^p\nabla_\xi\frac{\partial v_j}{\partial\xi_2}\right\|_{L_2(\Pi\cap\{\xi_2>R\})}.$$

Правые части в этих неравенствах оцениваются с помощью (4.5), что и доказывает лемму. ☐

Обозначим

$$\lambda_{\varepsilon,\mathsf{N}}=\lambda_0+\sum_{j=1}^{\mathsf{N}}\varepsilon^j\lambda_j(\eta),\quad \psi_{\varepsilon,\mathsf{N}}(\mathsf{x})=\psi_{\varepsilon,\mathsf{N}}^{ex}(\mathsf{x},\eta)+\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)\psi_{\varepsilon,\mathsf{N}}^{bl}(\xi,s,\eta),$$

$$\psi_{\varepsilon,\mathsf{N}}^{ex}(\mathsf{x},\eta)=\psi_0(\mathsf{x})+\sum_{j=1}^{\mathsf{N}}\varepsilon^j\psi_j(\mathsf{x},\eta),\quad \psi_{\varepsilon,\mathsf{N}}^{bl}(\xi,s,\eta)=\sum_{j=1}^{\mathsf{N}}\varepsilon^j v_j(\xi,s,\eta).$$

Здесь c_0 — малое фиксированное число, такое что на множестве $\{\mathsf{x}:|\tau|<c_0\}$ координаты (s,τ) определены корректно, и

$$\mathsf{H}=1-\tau\mathsf{k}(s)\neq0,\quad \mathsf{x}\in\{\mathsf{x}:|\tau|<c_0\}. \tag{4.7}$$

Обозначим: $\widehat{\omega}=\omega\cup\gamma_\varepsilon\cup\Gamma_\varepsilon$.

Лемма 4.4. *Функции $\lambda_{\varepsilon,\mathsf{N}}$ и $\psi_{\varepsilon,\mathsf{N}}\in W_2^1(\omega)\cap C^\infty(\widehat{\omega})$ при $\varepsilon\to0$ сходятся к λ_0 и ψ_0 (последняя — в $W_2^1(\omega)$) и являются решениями задачи*

$$-\Delta\psi_{\varepsilon,\mathsf{N}}=\lambda_{\varepsilon,\mathsf{N}}\psi_{\varepsilon,\mathsf{N}}+f_{\varepsilon,\mathsf{N}},\quad \mathsf{x}\in\omega,\qquad \psi_{\varepsilon,\mathsf{N}}=0,\quad \mathsf{x}\in\gamma_\varepsilon,\qquad \frac{\partial}{\partial\nu}\psi_{\varepsilon,\mathsf{N}}=\mathsf{B}_{\varepsilon,\mathsf{N}},\quad \mathsf{x}\in\Gamma_\varepsilon,$$

где

$$\mathsf{B}_{\varepsilon,\mathsf{N}}=\varepsilon^{\mathsf{N}}\frac{\partial\psi_{\mathsf{N}}}{\partial\nu},\qquad \mathsf{x}\in\partial\omega,$$

причем верны оценки

$$\|f_{\varepsilon,\mathsf{N}}\|_{L_2(\omega)}=O(\varepsilon^{\mathsf{N}-\frac12}(|\ln\eta|^{\mathsf{N}-\frac12}+1)),\qquad \|\mathsf{B}_{\varepsilon,\mathsf{N}}\|_{C^2(\partial\omega)}=O(\varepsilon^{\mathsf{N}}(|\ln\eta|^{\mathsf{N}}+1)).$$

Доказательство. Гладкость функции $\psi_{\varepsilon,\mathsf{N}}$ очевидна. Сходимости для $\lambda_{\varepsilon,\mathsf{N}}$ и $\psi_{\varepsilon,\mathsf{N}}$ проверяются непосредственными вычислениями с использованием леммы 4.2. Выполнение граничных условий на γ_ε и Γ_ε следует непосредственно из (2.4). Оценка для $\mathsf{B}_{\varepsilon,\mathsf{N}}$ является прямым следствием леммы 4.2. Прямыми вычислениями легко проверить, что

$$f_{\varepsilon,\mathsf{N}}=-\sum_{j=1}^{3}f_{\varepsilon,\mathsf{N}}^{(j)},\qquad f_{\varepsilon,\mathsf{N}}^{(1)}=(\Delta+\lambda_{\varepsilon,\mathsf{N}})\,\psi_{\varepsilon,\mathsf{N}}^{ex},$$

$$f_{\varepsilon,\mathsf{N}}^{(2)}=\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)(\Delta+\lambda_{\varepsilon,\mathsf{N}})\,\psi_{\varepsilon,\mathsf{N}}^{bl},\qquad f_{\varepsilon,\mathsf{N}}^{(3)}=2\left(\nabla\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right),\nabla\psi_{\varepsilon,\mathsf{N}}^{bl}\right)+\psi_{\varepsilon,\mathsf{N}}^{bl}\Delta\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right).$$

Из лемм 2.2, 4.2 и уравнений (2.15) вытекает:

$$\|f_{\varepsilon,\mathsf{N}}^{(1)}\|_{L_2(\omega)}=O(\varepsilon^{\mathsf{N}+1}(|\ln\eta|^{\mathsf{N}+1}+1)).$$

В силу уравнений (2.6) и леммы 4.2 функция $f_{\varepsilon,\mathsf{N}}^{(2)}$ имеет вид конечной суммы

$$f_{\varepsilon,\mathsf{N}}^{(2)}=\varepsilon^{\mathsf{N}-1}\sum_k f_{\varepsilon,\mathsf{N},k}^{(2)}(\xi,s),$$

где

$$\|f_{\varepsilon,\mathsf{N},k}^{(2)}(\xi,s)\|_{L_2(\Pi)}=O(|\ln\eta|^{\mathsf{N}-\frac12}+1),$$

причем последнее равенство равномерно по s. Поэтому для $f_{\varepsilon,\mathsf{N}}^{(2)}$ верна оценка:

$$\|f_{\varepsilon,\mathsf{N}}^{(2)}\|_{L_2(\omega)}=O(\varepsilon^{\mathsf{N}-\frac12}(|\ln\eta|^{\mathsf{N}-\frac12}+1)),$$

Используя лемму 4.3 с $R = \varepsilon^{-1}$, $p = \mathsf{N}+2$, приходим к соотношению

$$\|f^{(3)}_{\varepsilon,\mathsf{N}}\|_{L_2(\omega)} = O(\varepsilon^{\mathsf{N}}).$$

Полученные оценки для $f^{(j)}_{\varepsilon,\mathsf{N}}$ дают требуемую оценку для $f_{\varepsilon,\mathsf{N}}$. Лемма доказана. □

5. ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИК В СЛУЧАЕ ПРОСТОГО ПРЕДЕЛЬНОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ

В настоящем разделе мы завершим доказательство теоремы 1.1, обосновав формально построенные в предыдущих разделах асимптотики.

Всюду в разделе, не оговаривая особо, будем считать выполненными условия теоремы 1.1. Также всюду в разделе задачу (1.6) будем называть предельной. Для обоснования асимптотик нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 5.1. *Пусть Q — произвольный компакт на комплексной плоскости, не содержащий собственных чисел предельной задачи. Тогда при $\lambda \in Q$, $f \in L_2(\Omega)$ краевая задача*

$$-\Delta u_\varepsilon = \lambda u_\varepsilon + f, \quad \mathsf{x} \in \omega, \qquad u_\varepsilon = 0, \quad \mathsf{x} \in \gamma_\varepsilon, \qquad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad \mathsf{x} \in \Gamma_\varepsilon, \tag{5.1}$$

однозначно разрешима, и для ее решения при малых ε справедлива равномерная оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\omega)} \leqslant C\|f\|_{L_2(\omega)}, \tag{5.2}$$

где C не зависит от ε, η, λ и f.

Доказательство. Разрешимость задачи (5.1) для каждого фиксированного ε следует из теории обобщенных решений эллиптических краевых задач. Ясно, что однозначная разрешимость является следствием оценки (5.2). Последнюю докажем от противного. Пусть найдутся последовательности $\varepsilon_k \to 0$, $f_k \in L_2(\omega)$, $\lambda_k \in Q$, на которых выполнено:

$$\|u_{\varepsilon_k}\|_{W_2^1(\omega)} \geqslant k\|f_k\|_{L_2(\omega)}, \tag{5.3}$$

Без ограничения общности нормируем функцию u_ε: $\|u_\varepsilon\|_{L_2(\omega)} = 1$. Умножая обе части уравнения в (5.1) на u_ε и интегрируя по частям, легко проверить, что

$$\|u_{\varepsilon_k}\|_{W_2^1(\omega)} \leqslant C(\|f_k\|_{L_2(\omega)} + 1),$$

откуда и из (5.3) следует:

$$\|u_{\varepsilon_k}\|_{W_2^1(\omega)} \leqslant C, \qquad \|f_k\|_{L_2(\omega)} \to 0, \qquad k \to \infty. \tag{5.4}$$

Здесь C — константа, не зависящая от k. Выделяя при необходимости из $\{k\}$ подпоследовательность, можно считать, что

$$\lambda_k \to \lambda_* \in Q, \qquad u_{\varepsilon_k} \to u_* \quad \text{слабо в } W_2^1(\omega) \text{ и сильно в } L_2(\omega). \tag{5.5}$$

Из [65,66,91] следует, что $u_* = 0$ на $\partial\omega$. Так как $\|u_{\varepsilon_k}\|_{L_2(\omega)} = 1$, то $u_* \not\equiv 0$. Умножим теперь уравнение из (5.1) на произвольную функцию $\varphi \in C^\infty(\overline{\omega})$, равную нулю на границе ω, и проинтегрируем по частям:

$$(\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla\varphi)_{L_2(\omega)} = (\lambda_k u_{\varepsilon_k} + f_k, \varphi)_{L_2(\omega)}. \tag{5.6}$$

Переходя в данном равенстве к пределу при $k \to \infty$ с учетом (5.4), (5.5) получаем, что u_* — нетривиальное решение краевой задачи:

$$-\Delta u_* = \lambda_* u_*, \quad \mathsf{x} \in \omega, \qquad u_* = 0, \quad \mathsf{x} \in \partial\omega, \tag{5.7}$$

т. е. $\lambda_* \in Q$ — собственное значение предельной задачи, что дает противоречие. Лемма доказана. □

Лемма 5.2. *Пусть λ_0 — p-кратное собственное значение предельной задачи, $\lambda_\varepsilon^{(j)}$, $j = 1,\ldots,p$ — собственные значения задачи* (1.1), (1.2), *сходящиеся к λ_0, взятые с учетом кратности, $\psi_\varepsilon^{(j)}$ — соответствующие собственные функции, ортонормированные в $L_2(\omega)$. Тогда при λ, близких к λ_0, для решения задачи* (5.1) *имеет место представление*

$$u_\varepsilon = \sum_{j=1}^{p} \frac{\psi_\varepsilon^{(j)}}{\lambda_\varepsilon^{(j)} - \lambda} \int\limits_\omega \psi_\varepsilon^{(j)} f\, d\mathsf{x} + \widetilde{u}_\varepsilon, \tag{5.8}$$

где функция $\widetilde{u}_\varepsilon$ *голоморфна по* λ *в норме* $W_2^1(\omega)$, *ортогональна всем* $\psi_\varepsilon^{(j)}$ *в* $L_2(\Omega)$ *и удовлетворяет равномерной оценке*

$$\|\widetilde{u}_\varepsilon\|_{W_2^1(\omega)} \leqslant C\|f\|_{L_2(\omega)}, \tag{5.9}$$

где C *не зависит от* ε, η, λ *и* f.

Доказательство. Для доказательства представления (5.8) достаточно стандартным образом переписать краевую задачу (5.1) к операторному уравнению и применить затем результаты [43, гл. 5, §3.5]. Легко проверить, что $\widetilde{u}_\varepsilon$ — решение задачи (5.1) с правой частью $f - \sum\limits_{j=1}^{p} \psi_\varepsilon^{(j)}(f, \psi_\varepsilon^{(j)})_{L_2(\omega)}$. Пусть $\mathcal{B}_\mathsf{t}(\lambda_0)$ — открытый круг в комплексной плоскости фиксированного радиуса t с центром в точке λ_0. Радиус t выберем так, чтобы $\mathcal{B}_\mathsf{t}(\lambda_0)$ не содержал собственных значений предельной задачи, кроме λ_0. Применяя теперь лемму 5.1 к $\widetilde{u}_\varepsilon$ с $Q = \partial\mathcal{B}_\mathsf{t}(\lambda_0)$, получаем оценку (5.9) для $\lambda \in \partial\mathcal{B}_\mathsf{t}(\lambda_0)$. Следовательно, в силу принципа максимума модуля для голоморфных функций, неравенство (5.9) справедливо и для $\lambda \in \mathcal{B}_\mathsf{t}(\lambda_0)$. Лемма доказана. ☐

Из леммы 4.4 следует, что функция

$$\widetilde{\psi}_{\varepsilon,\mathsf{N}}(\mathsf{x}) = \psi_{\varepsilon,\mathsf{N}}(\mathsf{x}) + \tau\chi\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)\mathsf{B}_{\varepsilon,\mathsf{N}} \in W_2^1(\omega)$$

сходится к ψ_0 в $W_2^1(\omega)$ при $\varepsilon \to 0$ и является решением задачи (5.1) с правой частью $\widetilde{f}_{\varepsilon,\mathsf{N}}$, удовлетворяющей оценке:

$$\|\widetilde{f}_{\varepsilon,\mathsf{N}}\|_{L_2(\omega)} = O\big(\varepsilon^{\mathsf{N}-\frac{1}{2}}(|\ln\eta|^{\mathsf{N}-\frac{1}{2}} + 1)\big).$$

Применяя лемму 5.2 к функции $\widetilde{\psi}_{\varepsilon,\mathsf{N}}$, в силу последней оценки получаем:

$$\widetilde{\psi}_{\varepsilon,\mathsf{N}} = \frac{\psi_\varepsilon(f_{\varepsilon,\mathsf{N}}, \psi_\varepsilon)_{L_2(\omega)}}{\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,\mathsf{N}}} + \widetilde{u}_\varepsilon, \qquad \|\widetilde{u}_\varepsilon\|_{W_2^1(\omega)} = O(\varepsilon^{\mathsf{N}-\frac{1}{2}}(|\ln\eta|^{\mathsf{N}-\frac{1}{2}} + 1)). \tag{5.10}$$

Так как

$$\|\widetilde{\psi}_{\varepsilon,N} - \widetilde{u}_\varepsilon\|_{L_2(\omega)} = 1 + o(1), \qquad \|\psi_\varepsilon\|_{L_2(\omega)} = 1,$$

то из (5.10) выводим:

$$1 + o(1) \leqslant \frac{C\varepsilon^{\mathsf{N}-\frac{1}{2}}(|\ln\eta|^{\mathsf{N}-\frac{1}{2}} + 1)}{|\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,\mathsf{N}}|},$$

где константа C не зависит от ε и η. Следовательно,

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,\mathsf{N}}| = O(\varepsilon^{\mathsf{N}-\frac{1}{2}}(|\ln\eta|^{\mathsf{N}-\frac{1}{2}} + 1)).$$

Таким образом, асимптотика λ_ε действительно имеет вид (1.7). Коэффициенты этой асимптотики были определены в разделе 2 (см. (2.16)) и удовлетворяют всем утверждением теоремы 1.1. Из (5.10), сходимости $\widetilde{\psi}_{\varepsilon,\mathsf{N}} \to \psi_0$, определения $\widetilde{\psi}_{\varepsilon,\mathsf{N}}$ и оценки для $\mathsf{B}_{\varepsilon,\mathsf{N}}$ из леммы 4.4 следует, что собственная функция задачи (1.1), (1.2)

$$\widehat{\psi}_\varepsilon = \frac{(f, \psi_\varepsilon)_{L_2(\omega)}}{\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,\mathsf{N}}}\psi_\varepsilon,$$

соответствующая λ_ε, сходится в $W_2^1(\omega)$ к ψ_0 и удовлетворяет оценке

$$\|\widehat{\psi}_\varepsilon - \psi_{\varepsilon,\mathsf{N}}\|_{W_2^1(\omega)} = O(\varepsilon^{\mathsf{N}-\frac{1}{2}}(|\ln\eta|^{\mathsf{N}-\frac{1}{2}} + 1)).$$

Следовательно, собственная функция, соответствующая λ_ε, может быть выбрана так, что в норме $W_2^1(\omega)$ будет иметь асимптотическое разложение:

$$\psi_\varepsilon(\mathsf{x}) = \psi_0(\mathsf{x}) + \sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j\psi_j(\mathsf{x}, \eta) + \chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j v_j(\xi, s, \eta), \tag{5.11}$$

где, напомним, ψ_j — решения краевых задач (2.14), (2.15), ξ — из (2.3), v_1 — из (2.10), X — из (2.8), v_j — решения (2.4), (2.6). Теорема 1.1 полностью доказана.

6. СЛУЧАЙ КРАТНОГО ПРЕДЕЛЬНОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ

В настоящем разделе мы доказываем теорему 1.2. Как уже было отмечено в начале главы, собственные значения задачи (1.1), (1.2) сходятся к предельным собственным значениям с сохранением кратности. Согласно результатам [65, 66, 91], отсюда и из двукратности λ_0 следует, что к λ_0 сходятся либо два простых, либо одно двукратное собственное значение задачи (1.1), (1.2). Следующая лемма уточняет данный факт.

Лемма 6.1. *В условиях теоремы* 1.2 *к двукратному собственному значению* λ_0 *сходится двукратное собственное значение* λ_ε.

Доказательство. Пусть $\psi_\varepsilon^{(1)}$ — нормированная в $L_2(\omega)$ собственная функция, соответствующая λ_ε. Выделяя при необходимости из $\{\varepsilon\}$ подпоследовательность, рассуждениями, аналогичными доказательству леммы 5.1 (см. (5.4), (5.5), (5.6), (5.7)), несложно доказать сходимость $L_2(\omega)$:

$$\psi_\varepsilon^{(1)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mathsf{a}_4\psi_0^+ + \mathsf{a}_5\psi_0^-, \qquad \mathsf{a}_4, \mathsf{a}_5 = \mathrm{const}\,. \tag{6.1}$$

В силу строгой периодичности множества γ_ε заключаем, что

$$\psi_\varepsilon^{(2)}(r,\theta) = \psi_\varepsilon^{(1)}\left(r, \theta + \left[\frac{N}{4n}\right]\right),$$

где $[\,\cdot\,]$ — целая часть числа, $\psi_\varepsilon^{(2)}$ — собственная функция, соответствующая λ_ε. Из (6.1) и определения функций $\psi_0^\pm$ следует сходимость

$$\psi_\varepsilon^{(2)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\mathsf{a}_4\psi_0^- + \mathsf{a}_5\psi_0^+. \tag{6.2}$$

Правые части (6.1), (6.2) ортогональны в $L_2(\Omega)$, а потому $\psi_\varepsilon^{(j)}$ линейно независимы. Следовательно, λ_ε — двукратное собственное значение. Лемма доказана. □

Идея доказательства леммы 6.1 была заимствована из [24].

Теорема 1.2 для $\eta = \mathrm{const}$ была доказана в [22]. Случай произвольной функции η будем доказывать также, как и теорему 1.1: вначале построим формальные асимптотики, а затем строго их обоснуем. Следует отметить, что формальное построение асимптотик одинаково как для случая $\eta = \mathrm{const}$, так и для $\eta = \eta(\varepsilon)$. Поэтому здесь мы пользуемся формальным построением из [22]. Кратко его опишем. Асимптотика собственного значения λ_ε строилась в виде (1.7), а асимптотики соответствующих собственных функций — в виде суммы внешних разложений

$$\psi_\varepsilon^{ex,\pm}(\mathsf{x},\eta) = J_n(\sqrt{\lambda_\varepsilon} r)\Upsilon^\pm(n\theta) \tag{6.3}$$

и пограничных слоев

$$\psi_\varepsilon^{bl,\pm}(\xi,\theta,\eta) = \Upsilon^\pm(n\theta)\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j v_j^+(\xi,\eta) \pm \Upsilon^\mp(n\theta)\varepsilon\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j v_j^-(\xi,\eta),$$

где растянутые переменные ξ определяются согласно (2.3) и имеют следующий вид:

$$\xi_1 = (1-r)\varepsilon^{-1}, \quad \xi_2 = \theta\varepsilon^{-1}. \tag{6.4}$$

Функции $\psi_\varepsilon^{ex,\pm}$ удовлетворяют уравнению (1.1) при любом λ_ε, но не удовлетворяют требуемым краевым условиям (1.2). Чтобы добиться последних, как и ранее, вводится пограничный слой. Краевые задачи для коэффициентов пограничного слоя выводятся аналогично (2.4), (2.6). При выводе уравнений для $v_i^\pm$ уравнение (1.1) следует умножать на r^2, а при выводе граничных условий необходимо подставить ряд (1.7) в (6.3) и разложить затем $\psi_\varepsilon^{ex,\pm}$ в ряд Тейлора по степеням ε. В результате краевые задачи для $v_i^\pm$ принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\Delta_\xi v_j^\pm = F_j^\pm, \qquad \xi_2 > 0,\\
&v_j^+ = -\frac{J_n'(\sqrt{\lambda_0})}{2\sqrt{\lambda_0}}\lambda_j + \mathcal{P}_j(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{j-1}), \qquad v_j^- = 0, \qquad \xi\in\Gamma(\eta),\\
&\frac{\partial v_j^+}{\partial\xi_2} = \mathcal{G}_j(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{j-1}), \qquad \frac{\partial v_j^-}{\partial\xi_2} = 0, \qquad \xi\in\gamma(\eta),
\end{aligned} \tag{6.5}$$

где обозначено

$$F_j^{\pm} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_2} + 2\xi_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}\right) v_{j-1}^{\pm} - \left(\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \xi_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}\right) v_{j-2}^{\pm} + \sum_{p=0}^{2} \mathsf{a}_p \xi_2^p \sum_{q=0}^{j-p-3} \lambda_q v_{j-p-q-2}^{\pm} \pm 2n \frac{\partial}{\partial \xi_1} v_{j-1\mp1}^{\mp}.$$

Здесь $v_{-1}^{\pm} = v_0^{\pm} = 0$, $\mathcal{P}_j$ и $\mathcal{G}_j$ — многочлены по $\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}$, причем для всякого входящего в них одночлена $\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\ldots\lambda_{j-1}^{k_{j-1}}$ выполняется $k_1+\ldots+k_{j-1}=j$ (для $\mathcal{P}_j$) и $k_1+\ldots+k_{j-1}=j-1$ (для $\mathcal{G}_j$). В частности,

$$\mathcal{P}_1 = 0, \qquad \mathcal{G}_1 = \sqrt{\lambda_0} J_n'(\sqrt{\lambda_0}).$$

На основе леммы 2.1 совершенно аналогично доказательству леммы 2.2 устанавливается, что задачи (6.5) однозначно разрешимы, $v_j^{\pm} \in \mathcal{V}_1^{\pm}(\eta)$, а условия разрешимости дают формулы для λ_j:

$$\lambda_j = \frac{2\sqrt{\lambda_0}}{J_n'(\sqrt{\lambda_0})} \left(\mathcal{P}_j + \mathcal{G}_j \ln \sin \eta - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Pi} \widetilde{X} F_j^{+} d\xi\right).$$

Справедливо равенство

$$v_1^{+} = -\sqrt{\lambda_0} J_n'(\sqrt{\lambda_0}) X.$$

Выясним характер зависимости функций $v_j^{\pm}$ и λ_j от η. Используя леммы 3.1, по индукции легко установить, что равенства (3.1) выполнены для функций $v_j^{\pm}$, $j \geqslant 1$. Пусть

$$\widehat{F}_j^{+} = F_j^{+} - \left(\frac{\partial}{\partial \xi_2} + 2\xi_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}\right) v_{j-1}^{+}.$$

Прямыми вычислениями проверяется, что

$$F_j^{+} = \Delta_\xi \left(\frac{1}{2}\xi_2^2 \frac{\partial v_{j-1}^{+}}{\partial \xi_2}\right) + \widetilde{F}_j^{+}, \quad \widetilde{F}_j^{+} = \widehat{F}_j^{+} - \frac{1}{2}\xi_2^2 F_{j-1}^{+}.$$

Отсюда и из равенств (3.1) для $v_j^{\pm}$ следует:

$$\lambda_j = \frac{2\sqrt{\lambda_0}}{J_n'(\sqrt{\lambda_0})} \left(\mathcal{P}_j + \mathcal{G}_j \ln \sin \eta - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Pi} X \widetilde{F}_j^{+} d\xi\right).$$

Аналогично леммам 4.1, 4.2 и 4.4 доказываются следующие утверждения.

Лемма 6.2. *Функции* $\lambda_j(\eta)$, $\xi_2^p v_j^{\pm}$, $\xi_2^{p+q} \nabla_\xi \dfrac{\partial^p v_j^{\pm}}{\partial \xi_2^p}$, $p, q \geqslant 0$ *непрерывны по* $\eta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (*последние в норме* $L_2(\Pi)$).

Лемма 6.3. *При* $\eta \to 0$ *справедливы равенства* (1.13). *Выполнены равномерные по* η *оценки* $(p, q \geqslant 0)$:

$$\begin{aligned}
&\|F_j^{+}\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C(|\ln \eta|^{j-\frac{3}{2}} + 1), && \left\|\xi_2^{p+q+1} \nabla_\xi \frac{\partial^p v_j^{+}}{\partial \xi_2^p}\right\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C(|\ln \eta|^{j-1} + 1),\\
&\|\widetilde{F}_j^{+}\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C(|\ln \eta|^{j-\frac{5}{2}} + 1), && \left\|\xi_2^{p} \nabla_\xi \frac{\partial^p v_j^{+}}{\partial \xi_2^p}\right\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C(|\ln \eta|^{j-\frac{1}{2}} + 1),\\
&\|F_j^{-}\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C(|\ln \eta|^{j-\frac{1}{2}} + 1), && \|\xi_2^p v_j^{+}\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C(|\ln \eta|^{j-1} + 1),\\
&\|\xi_2^p v_j^{-}\| \leqslant C(|\ln \eta|^{j-\frac{1}{2}} + 1), && \left\|\xi_2^{p+q} \nabla_\xi \frac{\partial^p v_j^{-}}{\partial \xi_2^p}\right\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C(|\ln \eta|^{j-\frac{1}{2}} + 1).
\end{aligned}$$

Формулы $\lambda_j\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ устанавливаются так же, как и в доказательстве теоремы 1.1.

Обозначим через $\lambda_{\varepsilon,\mathsf{N}}$ частичную сумму ряда (1.7), построенного в настоящем разделе:

$$\psi_{\varepsilon,\mathsf{N}}^{\pm}(\mathsf{x}) = J_n(\sqrt{\lambda_{\varepsilon,\mathsf{N}}} r) \Upsilon^{\pm}(n\theta) + \chi(1-r) \psi_{\varepsilon,\mathsf{N}}^{in,\pm}(\xi, \theta, \eta),$$

$$\psi^{in,\pm}_{\varepsilon,\mathsf{N}}(\xi,\theta,\eta)=\Upsilon^{\pm}(n\theta)\sum_{j=1}^{\mathsf{N}}\varepsilon^j v_j^+(\xi,\eta)\pm\Upsilon^{\mp}(n\theta)\varepsilon\sum_{j=1}^{\mathsf{N}-1}\varepsilon^j v_j^-(\xi,\eta).$$

Следующая лемма утверждает, что формально построенные асимптотики — формальное асимптотическое решение.

Лемма 6.4. *Функции* $\lambda_{\varepsilon,\mathsf{N}}$ *и* $\psi^{\pm}_{\varepsilon,\mathsf{N}}\in W_2^1(\omega)\cap C^{\infty}(\widehat{\omega})$ *при* $\varepsilon\to 0$ *сходятся к* λ_0 *и* $\psi_0^{\pm}$ *(последние — в* $W_2^1(\omega)$*) и являются решениями задачи*

$$-\Delta\psi^{\pm}_{\varepsilon,\mathsf{N}}=\lambda_{\varepsilon,\mathsf{N}}\psi^{\pm}_{\varepsilon,\mathsf{N}}+f^{\pm}_{\varepsilon,\mathsf{N}},\quad \mathsf{x}\in\omega,$$
$$\psi^{\pm}_{\varepsilon,\mathsf{N}}=\mathsf{A}_{\varepsilon,\mathsf{N}}\Upsilon^{\pm}(n\theta)\quad \mathsf{x}\in\gamma_\varepsilon,\qquad \frac{\partial}{\partial r}\psi^{\pm}_{\varepsilon,\mathsf{N}}=\mathsf{B}_{\varepsilon,\mathsf{N}}\Upsilon^{\pm}(n\theta),\quad \mathsf{x}\in\Gamma_\varepsilon,$$

где $\mathsf{A}_{\varepsilon,\mathsf{N}}$, $\mathsf{B}_{\varepsilon,\mathsf{N}}$ *не зависят от* θ. *Имеют место равенства*

$$\|f^{\pm}_{\varepsilon,\mathsf{N}}\|_{L_2(\omega)}=O(\varepsilon^{\mathsf{N}-\frac12}(|\ln\eta|^{\mathsf{N}-\frac12}+1)),$$
$$|\mathsf{A}_{\varepsilon,\mathsf{N}}|=O(\varepsilon^{\mathsf{N}+1}(|\ln\eta|^{\mathsf{N}+1}+1)),\quad |\mathsf{B}_{\varepsilon,\mathsf{N}}|=O(\varepsilon^{\mathsf{N}}(|\ln\eta|^{\mathsf{N}}+1)).$$

Переходим к обоснованию асимптотик. Функции

$$\widetilde{\psi}^{\pm}_{\varepsilon,\mathsf{N}}(\mathsf{x})=\psi^{\pm}_{\varepsilon,\mathsf{N}}(\mathsf{x})-\chi(1-r)(\mathsf{A}_{\varepsilon,\mathsf{N}}+\mathsf{B}_{\varepsilon,\mathsf{N}}(1-r))\Upsilon^{\pm}(n\theta)$$

являются решениями задач (5.1) с правыми частями $f=\widetilde{f}^{\pm}_{\varepsilon,\mathsf{N}}$, для которых выполнены оценки

$$\|\widetilde{f}^{\pm}_{\varepsilon,\mathsf{N}}\|_{L_2(\omega)}=O(\varepsilon^{\mathsf{N}-\frac12}(|\ln\eta|^{\mathsf{N}-\frac12}+1)),$$

а потому к ним применимо представление (5.8):

$$\begin{gathered}\widetilde{\psi}^{\pm}_{\varepsilon,\mathsf{N}}=\frac{1}{\lambda_\varepsilon-\lambda_{\varepsilon,\mathsf{N}}}\sum_{j=1}^{2}\psi_\varepsilon^{(j)}\int\limits_{\Omega}\widetilde{f}^{\pm}_{\varepsilon,\mathsf{N}}\psi_\varepsilon^{(j)}\,dx+\widetilde{u}^{\pm}_\varepsilon,\\ \|\widetilde{u}^{\pm}_\varepsilon\|_{L_2(\omega)}\leqslant C\|\widetilde{f}^{\pm}_{\varepsilon,\mathsf{N}}\|_{L_2(\omega)}\leqslant C\varepsilon^{\mathsf{N}-\frac12}(|\ln\eta|^{\mathsf{N}-\frac12}+1),\end{gathered}\tag{6.6}$$

где C не зависит от ε и η. Напомним, $\psi_\varepsilon^{(j)}$ — ортонормированные в $L_2(\omega)$ собственные функции, соответствующие λ_ε. Так как

$$\|\widetilde{\psi}^{\pm}_{\varepsilon,\mathsf{N}}-\widetilde{u}^{\pm}_\varepsilon\|_{L_2(\omega)}\to\|\psi_0^{\pm}\|_{L_2(\omega)},\qquad \varepsilon\to 0,$$

то из (6.6) следует оценка

$$|\lambda_\varepsilon-\lambda_{\varepsilon,\mathsf{N}}|=O(\varepsilon^{\mathsf{N}-\frac12}(|\ln\eta|^{\mathsf{N}-\frac12}+1)),$$

откуда делаем вывод, что асимптотика λ_ε совпадает с построенным в этом разделе рядом (1.7). Обозначим

$$\widetilde{\psi}^{\pm}_{\varepsilon}=\frac{1}{\lambda_\varepsilon-\lambda_{\varepsilon,\mathsf{N}}}\sum_{j=1}^{2}\psi_\varepsilon^{(j)}\int\limits_{\Omega}\widetilde{f}^{\pm}_{\varepsilon,\mathsf{N}}\psi_\varepsilon^{(j)}\,dx.$$

Ясно, что $\widetilde{\psi}^{\pm}_{\varepsilon}$ — собственные функции, соответствующие λ_ε и сходящиеся к собственным функциям задачи (1.6): $\widetilde{\psi}^{\pm}_{\varepsilon}\to\psi_0^{\pm}$. Из (6.6) в силу определения функций $\widetilde{\psi}^{\pm}_{\varepsilon,\mathsf{N}}$ и утверждения леммы 6.4 для величин $\mathsf{A}_{\varepsilon,\mathsf{N}}$ и $\mathsf{B}_{\varepsilon,\mathsf{N}}$ вытекают равенства

$$\|\widetilde{\psi}^{\pm}_{\varepsilon}-\psi^{\pm}_{\varepsilon,\mathsf{N}}\|_{W_2^1(\omega)}=O(\varepsilon^{\mathsf{N}-\frac12}(|\ln\eta|^{\mathsf{N}-\frac12}+1)).$$

Следовательно, собственные функции, соответствующие λ_ε, можно выбрать таким образом, что в норме $W_2^1(\omega)$ они будут удовлетворять асимптотическим разложениям

$$\psi^{\pm}_{\varepsilon}(\mathsf{x})=J_n(\sqrt{\lambda_\varepsilon}r)\Upsilon^{\pm}(n\theta)+\chi(1-r)\Big(\Upsilon^{\pm}(n\theta)\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j v_j^+(\xi,\eta)\pm\Upsilon^{\mp}(n\theta)\varepsilon\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j v_j^-(\xi,\eta)\Big),\tag{6.7}$$

где под λ_ε понимается асимптотический ряд (1.7), построенный в данном разделе, и, напомним, ξ — из (6.4), $v_j^{\pm}$ — решения краевых задач (6.5). Теорема 1.2 полностью доказана.

Глава 3

ЗАДАЧА В КРУГЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ЧЕРЕДОВАНИЕМ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ: УСРЕДНЕННОЕ ТРЕТЬЕ КРАЕВОЕ УСЛОВИЕ

7. Постановка задачи и основные результаты главы

Вторая глава посвящена изучению краевой задачи в единичном круге с периодическим чередованием граничных условий. Опишем постановку задачи. Пусть $x=(x_1,x_2)$ — декартовы координаты на плоскости, (r,θ) — соответствующие полярные координаты, D — единичный круг с центром в нуле. На границе круга D выберем периодическое множество γ_ε, состоящее из N одинаковых непересекающихся дуг длиной $2\varepsilon\eta$ каждая, где N — большой натуральный параметр, $\varepsilon=2N^{-1}$, а $\eta=\eta(\varepsilon)$ — некоторая функция, удовлетворяющая неравенству $0<\eta<\dfrac{\pi}{2}$. Каждая из этих дуг получена из соседней поворотом вокруг нуля на угол $\varepsilon\pi$. Считаем, что множество γ_ε симметрично относительно оси Ox_1, т. е. одна из дуг, входящее в это множество, имеет вид $\{x:\ r=1,\ |\theta|<\varepsilon\eta(\varepsilon)\}$. Обозначим через Γ_ε дополнение множества $\overline{\gamma_\varepsilon}$ до границы круга D, см. рис. 2.

Рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача

$$-\Delta\psi_\varepsilon=\lambda_\varepsilon\psi_\varepsilon,\quad x\in D,\tag{7.1}$$

$$\psi_\varepsilon=0,\quad x\in\gamma_\varepsilon,\qquad \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial r}=0,\quad x\in\Gamma_\varepsilon.\tag{7.2}$$

Исследуется случай, когда при усреднении возникает третье краевое условие на границе. Согласно [66, 91], для этого нужно предположить выполнение следующего равенства для функции η:

$$\lim_{\varepsilon\to0}(\varepsilon\ln\eta(\varepsilon))^{-1}=-A,\tag{7.3}$$

где A — некоторая константа. В этом случае собственные значения и собственные функции задачи (7.1), (7.2) сходятся к собственным значениям и собственным функциям задачи

$$-\Delta\psi_0=\lambda_0\psi_0,\quad x\in D,\qquad \left(\frac{\partial}{\partial r}+A\right)\psi_0=0,\quad x\in\partial D.\tag{7.4}$$

Собственные значения сходятся с сохранением совокупной кратности. При этом сходимость соответствующих спектральных проекторов выполнена в смысле сильной сходимости в $L_2(D)$ и слабой в $W_2^1(D)$. Коэффициент A в усредненном краевом условии в (7.4) неотрицателен. В случае $A>0$ мы имеем дело с третьим краевым условием, в частном случае $A=0$ — с краевым условием Неймана.

Собственные значения и соответствующие собственные функции усредненной задачи (7.4) легко находятся с помощью разделения переменных:

$$\sqrt{\lambda_0}J_n'\left(\sqrt{\lambda_0}\right)+AJ_n\left(\sqrt{\lambda_0}\right)=0,\tag{7.5}$$

где J_n — функции Бесселя неотрицательного целого порядка $n\geqslant0$, а соответствующие собственные функции определяются равенствами

$$\psi_0(x)=J_0\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)\tag{7.6}$$

при $n=0$ и

$$\psi_0^\pm(x)=J_n\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)\phi^\pm(n\theta),\qquad \phi^+(t)=\cos t,\qquad \phi^-(t)=\sin(t),\tag{7.7}$$

для $n>0$.

Следует подчеркнуть, что задача (7.4) может иметь собственные значения различной кратности, а не только простые или двукратные собственные значения, как может показаться из формул (7.6), (7.7). Кратность больше двух может возникать по причине того, что для некоторых значений A корни уравнений (7.5) могут совпадать для различных n. Доказательство этого факта приводится в Приложении в конце главы.

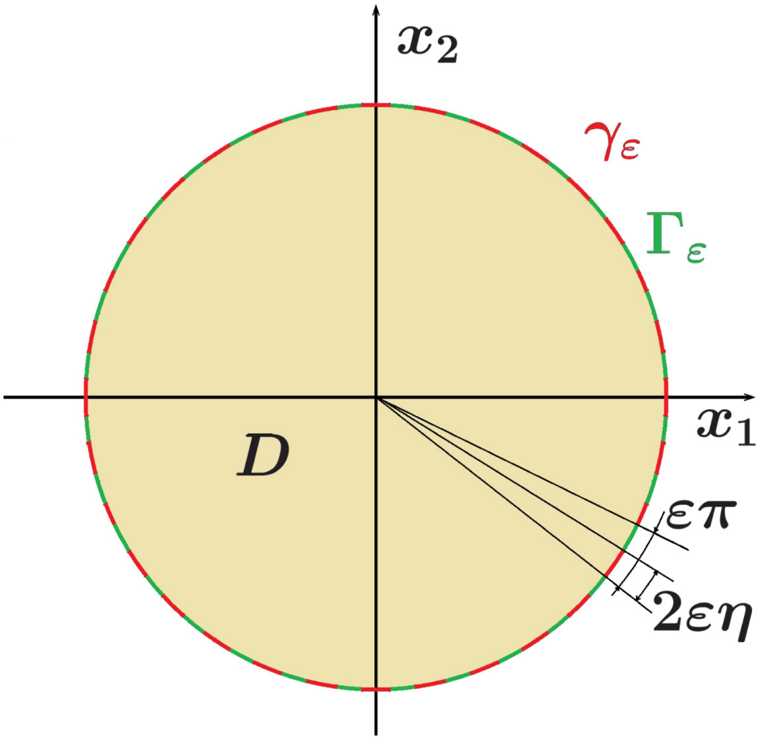

Рис. 2. Единичный круг с частым периодическим чередованием краевых условий

Обозначим:

$$\mu(\varepsilon) = (\varepsilon \ln \eta(\varepsilon))^{-1} + A. \tag{7.8}$$

Согласно (7.3), функция $\mu = \mu(\varepsilon)$ является бесконечно малой при $\varepsilon \to +0$. Эту функцию μ будем рассматривать как новый малый параметр вместо μ; он оказывается более удобным для формулировки результатов и вычислений в рамках главы. Функция η выражается через μ следующим образом:

$$\eta(\varepsilon) = e^{-\frac{1}{\varepsilon(A+\mu(\varepsilon))}}. \tag{7.9}$$

На бесконечно малую функцию μ мы накладываем следующее условие, которое упрощает некоторые вычисления в дальнейших исследованиях. А именно, мы предполагаем, что если

$$A \neq 0 \qquad \text{и} \qquad c\varepsilon^3 \leqslant |\mu(\varepsilon)| \leqslant c^{-1}\varepsilon^3 \tag{7.10}$$

с некоторой фиксированной константой $c > 0$ при достаточно малых ε, то

$$\mu(\varepsilon) = c\varepsilon^3 + O(\varepsilon^5), \qquad c = \mathrm{const}\,. \tag{7.11}$$

Основной результат главы выглядит следующим образом.

Теорема 7.1. *Пусть* λ_0 — *корень уравнения* (7.5) *для* $n \geqslant 0$, *и если он одновременно является корнем этого же уравнения для некоторого другого* $m \geqslant 0$, *то пусть выполнено условие* (7.10), (7.11). *Тогда существует единственное собственное значение* λ_ε *задачи* (7.1), (7.2), *сходящееся к* λ_0 *при* $\varepsilon \to +0$. *Это собственное значение имеет асимптотику*

$$\lambda_\varepsilon = \Lambda_0(\mu) + \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon^i \Lambda_i(\mu), \tag{7.12}$$

где $\Lambda_0(\mu)$ — *корень уравнения*

$$\sqrt{\Lambda_0} J_n'\left(\sqrt{\Lambda_0}\right) + (A+\mu) J_n\left(\sqrt{\Lambda_0}\right) = 0, \quad \Lambda_0(0) = \lambda_0, \tag{7.13}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_3(\mu)&=-\frac{\zeta(3)}{4}\frac{(A+\mu)^2\left(\Lambda_0(\mu)+2n^2\right)\Lambda_0(\mu)}{\Lambda_0(\mu)-n^2+(A+\mu)^2},\\ \Lambda_4(\mu)&=\frac{\pi^4}{5760}\frac{(A+\mu)^2\left(8\Lambda_0(\mu)+1\right)\Lambda_0(\mu)}{\Lambda_0(\mu)-n^2+(A+\mu)^2},\end{aligned}\tag{7.14}$$

а $\zeta(t)$ — дзета-функция Римана. Функции $\Lambda_i(\mu)$, $i\geqslant 0$, голоморфны по μ; при $A=0$ и $i\geqslant 3$ верны представления $\Lambda_i(\mu)=\mu^2\widetilde{\Lambda}_i(\mu)$, где $\widetilde{\Lambda}_i(\mu)$ — некоторые голоморфные по μ функции. Собственное значение λ_ε простое при $n=0$ и двукратное при $n>0$. Асимптотики соответствующих собственных функций имеют вид (8.33) *для* $n=0$ *и* (9.1) *для* $n>0$.

Известно [98], что для $n\geqslant 0$ функции $J_n(t)$ и $J_n'(t)$ положительны при $t\in(0,n]$. Ввиду этого минимальный корень (7.5) превосходит n^2. В силу (7.12) отсюда вытекает аналогичное утверждение и для $\Lambda_0(\mu)$. Это гарантирует, что знаменатели в (7.14) не равны нулю. Если $A=n=\lambda_0=0$, то $\Lambda_0>0$ и $\mu>0$, и знаменатели в (7.14) вновь не обращаются в нуль.

Подчеркнем, что теорема 7.1 применима к каждому собственному значению возмущенной задачи (7.1), (7.2). Если λ_0 — корень уравнения (7.5) только для одного значения n, то из теоремы 7.1 немедленно следует, что только одно собственное значение возмущенной задачи сходится к λ_0, и это собственное значение простое или двукратное в зависимости от n. Если λ_0 является корнем уравнения (7.5) одновременно для нескольких $n=n_i$, $i=1,\ldots,m$, $m\geqslant 2$, то в этом случае предельное собственное значение расщепляется на m собственных значений возмущенной задачи, каждое из которых оказывается простым или двукратным в зависимости от соответствующего n_i. В основе такого расщепления лежит структура асимптотик собственных значений возмущенной задачи. А именно, ниже в лемме 10.4 будет показано, что асимптотические ряды (7.12), (7.13), (7.14) не могут совпадать для различных n.

Глава имеет следующую структуру. В последующих двух разделах проводится формальное построение асимптотических разложений для собственных значений, сходящихся к корням уравнения (7.5). Одновременно формально строятся асимптотические разложения для соответствующих собственных функций. Случаи $n=0$ и $n>0$ исследуются отдельно: первый случай в разделе 8, второй — в разделе 9. Формальное построение еще не гарантирует, что построенные формальные ряды являются асимптотическими для собственных значений и собственных функций возмущенной задачи. Поэтому в разделе 10 проводится обоснование построенных формальных разложений. И как уже было сказано выше, в конце главы, в приложении доказывается существование положительных значений A, для которых уравнения (7.5) с различными n имеют совместный корень λ_0.

Результаты данной главы были опубликованы в [75].

8. Формальное построение асимптотик в случае $n=0$

В настоящем разделе мы строим формальные асимптотические разложения для собственных значений λ_ε, сходящихся к корню λ_0 уравнения (7.5) при $n=0$. Одновременно строится асимптотика для соответствующей собственной функции ψ_ε. Формальное построение основано на комбинации метода пограничного слоя и метода согласования асимптотических разложений.

Начнем с краткого описания схемы построения. Асимптотика для собственного значения ищется в виде ряда (7.12). Легко видеть, что функция

$$\psi_\varepsilon^{ex}(x)=J_0\left(\sqrt{\lambda_\varepsilon}r\right)$$

является решением уравнения (7.1) для любого λ_ε. Вместе с тем эта функция не удовлетворяет требуемым краевым условиям (7.2). Чтобы удовлетворить однородному условию Неймана на Γ_ε, мы строим подходящий пограничный слой в окрестности границы круга D. Этот слой строится в виде асимптотического ряда

$$\psi_\varepsilon^{mid}(\xi)=\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i v_i(\xi,\mu),\tag{8.1}$$

где $\xi=(\xi_1,\xi_2)=(\theta\varepsilon^{-1},(1-r)\varepsilon^{-1})$ — растянутые переменные. Однако введение пограничного слоя не позволяет одновременно удовлетворить однородное условие Дирихле на Γ_ε. Чтобы добиться последнего, мы применяем метод согласования асимптотических разложений, и в окрестности точек $x_m = (\cos\varepsilon\pi m, \sin\varepsilon\pi m)$, $m = 0, \ldots, N-1$, строятся внутренние разложения в виде

$$\psi_\varepsilon^{in}(\varsigma^m) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \left(w_{i,0}(\varsigma^m, \mu) + \varepsilon\eta w_{i,1}(\varsigma^m, \mu) \right), \tag{8.2}$$

где $\varsigma^m = (\varsigma_1^m, \varsigma_2^m) = \left((\xi_1 - m\pi)\eta^{-1}, \xi_2\eta^{-1}\right)$. При этом функции $w_{i,1}$ в (8.2) не нужны для формального построения степенной по ε асимптотики. Они играют вспомогательную роль и вводятся для того, чтобы построенные ряды давали невязку нужного порядка малости при подстановки в возмущенную задачу.

Основная цель формального построения — определить коэффициенты рядов (7.12), (8.1) и (8.2). Для них будут получены достаточно явные формулы.

Перейдем непосредственно к построению формальных асимптотик. В соответствии с методом пограничного слоя мы требуем, что сумма разложений ψ_ε^{ex} и ψ_ε^{mid} удовлетворяла однородному краевому условию Неймана всюду на границе ∂D за исключением точек x_k, а именно,

$$\sqrt{\lambda_\varepsilon} J_0'\left(\sqrt{\lambda_\varepsilon}\right) - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\psi_\varepsilon^{mid} = 0, \quad \xi \in \Gamma^0,$$

где Γ^0 — это ось $O\xi_1$, из которой исключены точки $(\pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Заменим в полученном равенстве λ_ε, ψ_ε^{mid} на ряды (7.12), (8.1), разложим первый член в ряд Тейлора по ε и приравняем нулю коэффициенты при степенях ε. В результате получим краевые условия для функций v_i:

$$\frac{\partial v_i}{\partial\xi_2} = \alpha_i, \quad \xi \in \Gamma^0, \qquad \alpha_i = \alpha_i(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_{i-1}), \tag{8.3}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \sqrt{\Lambda_0} J_0'\left(\sqrt{\Lambda_0}\right), \qquad \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \\ &\alpha_i = -\frac{1}{2} J_0\left(\sqrt{\Lambda_0}\right)\Lambda_{i-1} + f_i, \quad i \geqslant 4. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Здесь $f_i = f_i(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_{i-4})$ — некоторые полиномы по переменным $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{i-4}$ с коэффициентами, голоморфными по Λ_0, причем

$$f_4 = f_5 = 0, \qquad f_i(\Lambda_0, 0, \ldots, 0) = 0.$$

Выведем теперь уравнения для функций v_i. Для этого подставим ψ_ε^{mid} и λ_ε в уравнение (7.1) и перейдем к полярным координатам. В результате получим уравнение:

$$\left(r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} + r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + r^2\lambda_\varepsilon \right)\psi_\varepsilon^{mid} = 0.$$

Заменим в этом уравнении λ_ε и ψ_ε^{mid} на ряды (7.12) и (8.1), перейдем к переменным ξ и приравняем к нулю коэффициенты при степенях ε. Тогда получим:

$$\begin{aligned} \Delta_\xi v_i =& F_i \equiv \mathcal{L}_i(v_1, \ldots, v_{i-1}), \quad \xi_2 > 0, \\ \mathcal{L}_i(v_1, \ldots, v_{i-1}) =& \sum_{k=0}^{1}\sum_{j=1}^{2} \mathsf{a}_{kj}\xi_2^{k+j-1}\frac{\partial^j}{\partial\xi_2^j} v_{i-k} + \sum_{k=0}^{2} \mathsf{a}_k \xi_2^k \sum_{j=1}^{i-k-2} \Lambda_{i-j-k-2} v_j, \end{aligned} \tag{8.5}$$

где обозначено

$$\mathsf{a}_{11} = \mathsf{a}_{12} = \mathsf{a}_0 = \mathsf{a}_2 = -1, \qquad \mathsf{a}_{01} = 1, \qquad \mathsf{a}_1 = \mathsf{a}_{02} = 2, \qquad v_{-1} = v_0 = 0, \qquad \Lambda_1 = \Lambda_2 = 0.$$

Соотношения (8.3), (8.5) представляют собой рекуррентную систему краевых задач для функций v_i. Согласно методу пограничного слоя решения этих задач ищутся экспоненциально убывающими при $\xi_2 \to +\infty$. Для функций v_i будут получены достаточно явные формулы; это будет сделано на основе ряда вспомогательных утверждений.

Обозначим через $\mathcal{V}$ пространство π-периодических по ξ_1 функций из $C^\infty\left(\{\xi : \xi_2 > 0\} \cup \Gamma^0\right)$, равномерно экспоненциально убывающих при $\xi_2 \to +\infty$ вместе со всеми своими производными. Через $\mathcal{V}^+$ $(\mathcal{V}^-)$ обозначаем подмножества в $\mathcal{V}$, состоящие из четных (нечетных) по ξ_1 функций.

На пространстве $\mathcal{V}$ определим семейство операторов $\mathcal{A}_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, действующих следующим образом:

$$\mathcal{A}_0[u](\xi) = u(\xi), \quad \mathcal{A}_k[u](\xi) = \int\limits_{\xi_2}^{+\infty} t\mathcal{A}_{k-1}[u](\xi_1, t)\, dt.$$

С учетом определений пространств $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}^+$ и $\mathcal{V}^-$ и определения операторов $\mathcal{A}_k$ несложно убедиться, что эти операторы переводят пространство $\mathcal{V}$ в себя, а пространства $\mathcal{V}^\pm$ являются для них инвариантными.

Лемма 8.1. *Для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства*

$$\Delta_\xi \mathcal{A}_k[u] = -2k\mathcal{A}_{k-1}[u] + \mathcal{A}_k\left[\Delta_\xi u\right].$$

Доказательство. Прямыми вычислениями для произвольной функции $u \in \mathcal{V}$ проверяем, что

$$\frac{\partial^{\mathsf{m}_1+\mathsf{m}_2}}{\partial\xi_1^{\mathsf{m}_1}\partial\xi_2^{\mathsf{m}_2}} \int\limits_{\xi_2}^{+\infty} u(\xi_1, t)\, dt = \int\limits_{\xi_2}^{+\infty} \frac{\partial^{\mathsf{m}_1+\mathsf{m}_2}}{\partial\xi_1^{\mathsf{m}_1}\partial t^{\mathsf{m}_2}} u(\xi_1, t)\, dt, \quad \xi_2 > 0,$$

где $\mathsf{m}_1, \mathsf{m}_2 \in \mathbb{Z}_+$. Отсюда следует, что

$$\Delta_\xi \mathcal{A}_0[u] = \Delta_\xi u, \qquad \Delta_\xi \mathcal{A}_k[u] = \int\limits_{\xi_2}^{+\infty} t\Delta\mathcal{A}_{k-1}[u](\xi_1, t)\, dt - 2\mathcal{A}_{k-1}[u].$$

Используя полученные равенства, по индукции уже легко доказать утверждение леммы. □

Обозначим

$$\Pi = \left\{\xi : -\frac{\pi}{2} < \xi_1 < \frac{\pi}{2},\ \xi_2 > 0\right\},$$

и пусть (ρ, ϑ) — полярные координаты, соответствующие переменным ξ.

Лемма 8.2. *Пусть функция $F(\xi) \in \mathcal{V}^+$ имеет бесконечно дифференцируемую асимптотику*

$$F(\xi) = \alpha\rho^{-1}\sin 3\vartheta + O(\ln\rho), \quad \rho \to 0,$$

и существует натуральное число k такое, что $\Delta_\xi^k F \equiv 0$ при $\xi_2 > 0$. Тогда функция

$$v = -\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j j!}\mathcal{A}_j\left[\Delta_\xi^{j-1} F\right] \tag{8.6}$$

есть решение краевой задачи

$$\Delta_\xi v = F, \quad \xi_2 > 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial\xi_2} = 0, \quad \xi \in \Gamma^0, \tag{8.7}$$

принадлежащее $W_2^1(\Pi) \cap \mathcal{V}^+$ и имеющее бесконечно дифференцируемую асимптотику

$$v(\xi) = v(0) + \frac{1}{2}\alpha\xi_2^3\rho^{-2} + O(\rho^2\ln\rho), \quad \rho \to 0. \tag{8.8}$$

Доказательство. Так $F \in \mathcal{V}^+$, то очевидно $\Delta_\xi^j F \in \mathcal{V}^+$, и потому каждый член в правой части (8.6) принадлежит $\mathcal{V}^+$. Отсюда следует, что $v \in \mathcal{V}^+$.

Проверим теперь, что функция v, определенная формулой (8.6), действительно является решением краевой задачи (8.7). На самом деле, для каждой точки $\xi \in \Gamma^0$ имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial\xi_2}\bigg|_{\xi\in\Gamma^0} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j j!}\left(\xi_2\mathcal{A}_{j-1}\left[\Delta_\xi^{j-1}F\right]\right)\bigg|_{\xi\in\Gamma^0} = 0.$$

При $\xi \in \Pi$ применим оператор Лапласа к функции v и воспользуемся затем леммой 8.1 и равенством $\Delta_\xi^k F \equiv 0$. Тогда получим:

$$\Delta_\xi v = -\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j j!}\mathcal{A}_j\left[\Delta_\xi^j F\right] + \sum_{j=1}^{k} \frac{2j}{2^j j!}\mathcal{A}_{j-1}\left[\Delta_\xi^{j-1}F\right] = F.$$

Докажем теперь асимптотику (8.8). Пусть функция $U \in \mathcal{V}^+$ имеет дифференцируемую асимптотику

$$U(\xi) = O\left(\rho^{-p} \ln^q \rho\right), \quad \rho \to 0, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad p, q \geqslant 0. \tag{8.9}$$

Положим $u(\xi) = \mathcal{A}_1[U](\xi)$. Так как $U \in \mathcal{V}^+$, то справедливо представление

$$u(\xi) = \int\limits_{\xi_2}^{a} tU(\xi_1, t)\,dt + u_1(\xi), \tag{8.10}$$

где $u_1 \in \mathcal{V}^+ \cap C^\infty(\{\xi : \xi_2 \geqslant 0\})$ и a — некоторое фиксированное малое число. Очевидно, что

$$u_1(\xi) = u_1(0) + O(\rho^2), \quad \rho \to 0. \tag{8.11}$$

Заменим функцию U на ее асимптотику (8.9) в (8.10). После этого интеграл в (8.10) может быть вычислен явно. С учетом (8.11) тогда получаем:

$$u(\xi) = O\left(\ln^{q+1} \rho\right), \quad p = 2, \qquad u(\xi) = O\left(\rho^{-p+2} \ln^q \rho\right), \quad p > 2, \tag{8.12}$$

при $\rho \to 0$. Для $p = 0, 1$ аналогичные соотношения выглядят так:

$$\begin{aligned} u(\xi) - u(0) &= \int\limits_{\xi_2}^{a} t\left(U(\xi_1, t) - U(0, t)\right)\,dt - \int\limits_{0}^{\xi_2} tU(0, t)\,dt + O\left(\rho^2\right) = \\ &= \int\limits_{0}^{\xi_1} \int\limits_{\xi_2}^{a} t_2 \frac{\partial}{\partial t_1} U(t_1, t_2)\,dt_2 dt_1 + O\left(\rho^{-p+2} \ln^q \rho\right) = O\left(\rho^{-p+2} \ln^q \rho\right) \end{aligned} \tag{8.13}$$

при $\rho \to 0$. Функция F удовлетворяет следующим соотношениям при $\rho \to 0$:

$$\Delta_\xi F = -8\alpha \rho^{-3} \sin 3\vartheta + O(\rho^{-2} \ln \rho), \qquad \Delta_\xi^j F = O(\rho^{-2j} \ln \rho), \quad j \geqslant 2,$$

из которых, а также из (8.6), (8.9), (8.12), (8.13) и определения операторов $\mathcal{A}_j$, уже вытекают асимптотики (8.8). Ввиду последних и принадлежности $v \in \mathcal{V}$ выполнено $v \in W_2^1(\Pi)$. Лемма доказана. ☐

Обозначим

$$X(\xi) = \operatorname{Re} \ln \sin z + \ln 2 - \xi_2, \tag{8.14}$$

где $z = \xi_1 + \mathrm{i}\xi_2$ — комплексная переменная. Прямыми вычислениями несложно проверить, что $X \in \mathcal{V}^+$ является гармонической функцией $\xi_2 > 0$, удовлетворяющей краевому условию

$$\frac{\partial X}{\partial \xi_2} = -1, \quad \xi \in \Gamma^0,$$

и обладающей дифференцируемой асимптотикой

$$X(\xi) = \ln |\xi| + \ln 2 - \xi_2 + O(|\xi|^2), \quad \xi \to 0. \tag{8.15}$$

Лемма 8.2 позволяет решить систему задач (8.3), (8.5).

Лемма 8.3. *Для любой последовательности* $\{\Lambda_i(\mu)\}_{i=0}^\infty$, $\Lambda_1(\mu) = \Lambda_2(\mu) = 0$ *существуют решения краевых задач* (8.3), (8.5), *определенных формулой* (8.6) *с* $F = F_i$, $k = k_i$, *где* k_i — *некоторые натуральные числа. Для функций* v_i *справедливы представления*

$$\begin{aligned} &v_i(\xi, \mu) = \widetilde{v}_i(\xi, \mu) - \alpha_i X(\xi), \\ &\widetilde{v}_i(\xi, \mu) = \sum_{j=1}^{M_i} a_{ij}\left(\alpha_1, \Lambda_0, \ldots, \Lambda_{i-2}\right) v_{ij}(\xi), \end{aligned} \tag{8.16}$$

где $v_{ij} \in W_2^1(\Pi) \cap \mathcal{V}^+$ *и* a_{ij} *— некоторые полиномы по* $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{i-2}$ *с голоморфными по* Λ_0 *и* α_1 *коэффициентами, причем* $a_{ij}\,(0, \Lambda_0, 0, \ldots, 0) = 0$. *Верны равенства*:

$$\begin{gathered}
M_1 = 0, \qquad M_2 = 1, \qquad M_3 = 2, \qquad M_4 = 3, \\
a_{21} = a_{31} = a_{41} = -\alpha_1, \qquad a_{32} = -\alpha_1 \Lambda_0, \qquad a_{42} = \frac{\alpha_1\,(6\Lambda_0 + 1)}{24}, \\
a_{43} = \frac{\alpha_1\,(8\Lambda_0 + 1)}{32}, \qquad v_{21} = \frac{1}{2}\xi_2^2 \frac{\partial X}{\partial \xi_2}, \qquad v_{31} = \frac{1}{8}\xi_2^4 \frac{\partial^4 X}{\partial \xi_2^2} + \frac{1}{6}\xi_2^3 \frac{\partial X}{\partial \xi_2}, \\
v_{32} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_1[X], \qquad v_{41} = \frac{1}{48}\xi_2^6 \frac{\partial^3 X}{\partial \xi_2} + \frac{2}{15}\xi_2^5 \frac{\partial^2 X}{\partial \xi_2^2} + \frac{1}{16}\xi_2^4 \frac{\partial X}{\partial \xi_2}, \\
v_{42} = \xi_2^3 X, \qquad v_{43} = \mathcal{A}_1[\xi_2 X] + \xi_2^2 \int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t)\, dt.
\end{gathered} \tag{8.17}$$

Выполнены асимптотики

$$v_i(\xi, \mu) = -\alpha_i\,(\ln\rho + \ln 2 - \xi_2) + \widetilde{v}_i(0, \mu) - \frac{1}{2}\alpha_{i-1}\xi_2^3 \rho^{-2} + O\left(\rho^2 \ln\rho\right) \tag{8.18}$$

при $\rho \to 0$, *где* $\alpha_0 = 0$.

Доказательство. Утверждение леммы для $i = 1, \ldots, 4$ и равенства (8.17) проверяются непосредственно. Для $i \geqslant 5$ доказательство проведем по индукции. Предположим, что лемма верна для $i < K$. Тогда в силу (8.5) имеет место соотношение

$$F_K = \sum_{j=1}^{K} a_{Kj} F_{Kj},$$

где F_{Kj} удовлетворяют условиям леммы 8.2, а функции $a_{Kj} = a_{Kj}\,(\alpha_1, \Lambda_0, \ldots, \Lambda_{K-2})$ обладают всеми свойствами, описанными в утверждении доказываемой леммы. Пусть v_{Kj} — решения задач (8.7) с $F = F_{Kj}$, определенными в (8.6). Тогда $\widetilde{v}_K \in W_2^1(\Pi) \cap \mathcal{V}^+$ является решением уравнения (8.5) для $i = K$, удовлетворяющим однородному граничному условию Неймана на Γ^0. Отсюда следует, что функция v_K определенная равенством (8.16), является решением краевой задачи (8.3), (8.5) для $i = K$. Ясно, что функция п F_K удовлетворяет условиям леммы 8.2 и имеет асимптотику

$$F_K = -\alpha_{K-1}\rho^{-1} \sin 3\vartheta + O(\ln\rho), \quad \rho \to 0,$$

откуда и из (8.8) следует, что

$$\widetilde{v}_i(\xi, \mu) = \widetilde{v}_i(0, \mu) - \frac{1}{2}\alpha_{i-1}\xi_2^3 \rho^{-2} + O\left(\rho^2 \ln\rho\right), \quad \rho \to 0.$$

Последнее равенство и (8.15), (8.16) дают асимптотику (8.18). Лемма доказана. ☐

Как следует из определения функций v_j, сумма разложений ψ_ε^{ex} и ψ_ε^{mid} не удовлетворяет однородному краевому условию Дирихле на γ_ε. Более того, функции v_j имеют логарифмические особенности в точках x_k. Поэтому мы применяем метод согласования асимптотических разложений для построения формальных асимптотик собственной функции в окрестности этих точек. Асимптотика строится в виде ряда (8.2). Так как функции v_j периодичны по ξ_1, то достаточно провести согласование в окрестности точки $x_0 = (1, 0)$ и затем перенести результат на остальные точки x_k.

Обозначим $\varsigma = \varsigma^0 = \xi\eta^{-1}$. Подставим ряды (7.12) и (8.2) в (7.1), (7.2) и вычислим коэффициенты при одинаковых степенях ε. В результате получаем следующим задачи для $w_{i,j}$:

$$\Delta_\varsigma w_{i,0} = 0, \quad \varsigma_2 > 0, \qquad w_{i,0} = 0, \quad \varsigma \in \gamma^1, \quad \frac{\partial}{\partial \varsigma_2} w_{i,0} = 0, \quad \varsigma \in \Gamma^1, \tag{8.19}$$

$$\begin{gathered}
\Delta_\varsigma w_{i,1} = \left(\frac{\partial}{\partial \varsigma_2} + 2\varsigma_2 \frac{\partial^2}{\partial \varsigma_2^2}\right) w_{i,0}, \quad \varsigma_2 > 0, \\
w_{i,1} = 0, \quad \varsigma \in \gamma^1, \quad \frac{\partial}{\partial \varsigma_2} w_{i,1} = 0, \quad \varsigma \in \Gamma^1,
\end{gathered} \tag{8.20}$$

где γ^1 — интервал $(-1,1)$ на оси $\varsigma_2 = 0$, а Γ^1 — дополнение $\overline{\gamma}^1$ до оси $O\varsigma_1$. Далее, следуя методу согласования асимптотических разложений, вычислим асимптотику функций $w_{i,j}$ при $|\varsigma| \to \infty$. Обозначим:

$$\lambda_{\varepsilon,K} = \Lambda_0(\mu) + \sum_{i=3}^{K} \varepsilon^i \Lambda_i(\mu), \qquad \psi^{ex}_{\varepsilon,K}(x) = J_0\left(\sqrt{\lambda_{\varepsilon,K}} r\right),$$

$$\psi^{mid}_{\varepsilon,K}(\xi) = \sum_{i=1}^{K+1} \varepsilon^i v_i(\xi,\mu), \qquad \Psi_{\varepsilon,K}(x) = \psi^{ex}_{\varepsilon,K}(x) + \chi(1-r)\psi^{mid}_{\varepsilon,K}(\xi),$$

где $\chi(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $t < \dfrac{1}{3}$ и нулю при $t > \dfrac{1}{2}$. Разлагая в ряд Тейлора, получаем:

$$\begin{aligned} J_0\left(\sqrt{\lambda_{\varepsilon,K}} r\right) = &\sum_{i=0}^{K} \varepsilon^i G_i(\Lambda_0,\ldots,\Lambda_i) + \varepsilon^{K+1} G^{(K)}_{\varepsilon}(\Lambda_0,\ldots,\Lambda_K) - \\ &- \varepsilon\xi_2 \sqrt{\lambda_{\varepsilon,K}} J_0'\left(\sqrt{\lambda_{\varepsilon,K}}\right) + O\left(\varepsilon^2\xi_2^2\right), \end{aligned} \tag{8.21}$$

$$\begin{aligned} &G_0 = J_0\left(\sqrt{\Lambda_0}\right), \qquad G_1 = G_2 = 0, \\ &G_i = \frac{J_0'\left(\sqrt{\Lambda_0}\right)}{2\sqrt{\Lambda_0}} \Lambda_i + g_i, \quad i \geqslant 3, \qquad g_3 = g_4 = 0, \end{aligned} \tag{8.22}$$

где функции $g_i = g_i(\Lambda_0,\ldots,\Lambda_{i-3})$ — полиномы по Λ_1,…,Λ_{i-3} с голоморфными по Λ_0 коэффициентами, $g_i(\Lambda_0,0,\ldots,0) = 0$, а $G^{(K)}_{\varepsilon}$ — голоморфная по $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_K$ функция, причем $G^{(K)}_{\varepsilon}(\Lambda_0,0,\ldots,0) = 0$. Из (8.18) и равенства $\ln\eta = -\dfrac{1}{\varepsilon(A+\mu)}$ следует, что

$$v_i(\xi,\mu) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\alpha_i}{A+\mu} - \alpha_i\left(\ln|\varsigma| + \ln 2\right) + \alpha_i\xi_2 + \widetilde{v}_i(0,\mu) - \frac{1}{2}\eta\alpha_{i-1}\varsigma_2^3|\varsigma|^{-2} + O\left(\eta^2|\varsigma|^2\ln|\varsigma|\right) \tag{8.23}$$

при $\eta^{\frac{1}{2}} < \rho < 2\eta^{\frac{1}{2}}$, т. е. при $\eta^{-\frac{1}{2}} < |\varsigma| < 2\eta^{-\frac{1}{2}}$. Подставим (8.21) и (8.23) в формулу для $\Psi_{\varepsilon,K}$. Тогда при $\eta^{-\frac{1}{2}} < |\varsigma| < 2\eta^{-\frac{1}{2}}$ получим:

$$\Psi_{\varepsilon,M}(x) = \sum_{i=0}^{K} \varepsilon^i W_{i,0}(\varsigma,\mu) + \varepsilon\eta\sum_{i=1}^{K} \varepsilon^i W_{i,1}(\varsigma,\mu) + W^{(K)}_{\varepsilon}(x) + O\left(\varepsilon\eta^2|\varsigma|^2\ln|\varsigma|\right),$$

$$W_{i,0}(\varsigma,\mu) = -\alpha_i\left(\ln|\varsigma| + \ln 2\right) + \frac{\alpha_{i+1}}{A+\mu} + \widetilde{v}_i(0,\mu) + G_i, \qquad \widetilde{v}_0 = 0, \tag{8.24}$$

$$W_{i,1}(\varsigma,\mu) = -\frac{1}{2}\alpha_i\varsigma_2^3|\varsigma|^{-2}, \tag{8.25}$$

$$W^{(K)}_{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{K+1}\left(-\alpha_{K+1}\left(\ln|\varsigma| + \ln 2 - \xi_2\right) + G^{(K)}_{\varepsilon} + \widetilde{v}^{(}_{K+1}0,\mu)\right) + \varepsilon\mathsf{b}_K(\varepsilon)\xi_2,$$

$$\mathsf{b}_K(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{K} \varepsilon^{i-1}\alpha_i - \sqrt{\lambda_{\varepsilon,K}} J_0'\left(\sqrt{\lambda_{\varepsilon,K}}\right).$$

Отметим еще, что в силу определения функций α_i величина $\mathsf{b}_K(\varepsilon)$ мала, а именно, $\mathsf{b}_K(\varepsilon) = O\left(\varepsilon^K\right)$. В соответствии с методом согласования асимптотических разложений, необходимо найти решения задач (8.19), (8.20), удовлетворяющие асимптотикам

$$w_{i,j}(\varsigma,\mu) = W_{i,j}(\varsigma,\mu) + o\left(|\varsigma|^j\right), \quad |\varsigma| \to \infty. \tag{8.26}$$

Определим функцию

$$Y(\varsigma) = \mathrm{Re}\,\ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right),$$

где $y = \varsigma_1 + \mathrm{i}\varsigma_2$ — комплексная переменная. По определению, $Y(\varsigma)$ — решение задачи (8.19) с асимптотикой

$$Y(\varsigma) = \ln|\varsigma| + \ln 2 + O\left(|\varsigma|^{-2}\right), \qquad |\varsigma| \to \infty. \tag{8.27}$$

Из свойств функции Y, асимптотик (8.24), (8.26), (8.27) и вида задачи (8.19) выводим, что

$$w_{i,0} = -\alpha_i Y. \tag{8.28}$$

Сравнивая асимптотику для функции $w_{i,0}$, вытекающую из равенств (8.27), (8.28), с равенствами (8.24), (8.26), заключаем, что

$$\widetilde{v}_i(0,\mu) + \frac{\alpha_{i+1}}{A+\mu} + G_i = 0. \tag{8.29}$$

Из полученного равенства для $i = 0$ и (8.4), (8.22) вытекает уравнение (7.13) для Λ_0. Условие $\Lambda_0(0) = \lambda_0$ очевидно выполнено в силу $\lambda_\varepsilon \to \lambda_0$. Если $\lambda_0 \neq 0$, то голоморфность Λ_0 по μ вытекает из теоремы о неявной функции. Если $\lambda_0 = 0$, то $A = 0$ и в этом случае уравнение (7.13) имеет решение вида $\Lambda_0(\mu) = \mu\widetilde{\Lambda}_0(\mu)$, где $\widetilde{\Lambda}_0$ — голоморфная по μ функция и $\widetilde{\Lambda}_0(0) = 1$. В силу леммы 8.3 (см. (8.16), (8.17)) имеем: $\widetilde{v}_1(0,\mu) = \widetilde{v}_2(0,\mu) \equiv 0$. Используя эти соотношения и равенства $\alpha_2 = \alpha_3 = G_1 = G_2 = 0$ (см. (8.4), (8.22)), легко проверить, что равенство (8.29) выполнено для $i = 1, 2$. Рассмотрим случай $i \geqslant 3$. Подставляя формулы (8.4), (8.29) для α_{i+1} и G_i в (8.22) и выражая затем оттуда Λ_i, получаем:

$$\begin{gathered}
\Lambda_i(\mu) = \frac{2\Lambda_0(\mu)\left(\widetilde{f}_{i+1}(\mu) + (A+\mu)\left(\widetilde{g}_i(\mu) + \widetilde{v}_i(0,\mu)\right)\right)}{J_0(\sqrt{\Lambda_0(\mu)})\,(\Lambda_0(\mu) + (A+\mu)^2)}, \\
\widetilde{f}_{i+1}(\mu) = f_{i+1}\left(\Lambda_0(\mu), \ldots, \Lambda_{i-3}(\mu)\right), \quad \widetilde{g}_i(\mu) = g_i\left(\Lambda_0(\mu), \ldots, \Lambda_{i-3}(\mu)\right).
\end{gathered} \tag{8.30}$$

При выводе последнего равенства, мы заменили $J_0'\left(\sqrt{\Lambda_0}\right)$ на функцию $-(A+\mu)J_0\left(\sqrt{\Lambda_0}\right)/\sqrt{\Lambda_0}$, что возможно в силу уравнения (7.13). Полагая $i = 3, 4$ в (8.30) и используя (8.4), (8.16), (8.17), (8.22) и равенства [30],

$$\mathcal{A}_1[X](0) = -\frac{1}{4}\zeta(3), \quad \mathcal{A}_1[\xi_2 X](0) = -\frac{\pi^4}{360}, \tag{8.31}$$

приходим к (7.14) для $n = 0$.

Докажем теперь, что функции Λ_i голоморфны по μ. Так как $J_0\left(\sqrt{\lambda_0}\right) \neq 0$, то функция $J_0\left(\sqrt{\Lambda_0(\mu)}\right)$ голоморфна по μ и не обращается в нуль при малых $\mu \geqslant 0$. Если $\lambda_0 \neq 0$, то функция $\left(\Lambda_0(\mu) + (A+\mu)^2\right)$ также не обращается в нуль при $\mu \geqslant 0$. В случае $\lambda_0 = 0$ (здесь $A = 0$), функции $\Lambda_0(\mu)$ и $\left(\Lambda_0(\mu) + \mu^2\right)$ имеют простой нуль в точке $\mu = 0$. Таким образом, для всех возможных значений λ_0 и A, отношение

$$\frac{2\Lambda_0(\mu)}{J_0\left(\sqrt{\Lambda_0(\mu)}\right)(\Lambda_0(\mu) + (A+\mu)^2)}$$

является голоморфной функцией по $\mu \geqslant 0$. В силу утверждения леммы 8.3 о функциях a_{ij} и формулы (8.16) для функций $\widetilde{v}_i$, функция $\widetilde{v}_i(0,\mu)$ оказывается голоморфной по μ при условии, что $\Lambda_0, \ldots, \Lambda_{i-1}$ голоморфны по μ. Используя этот факт, а также то, что функции f_{i+1} и g_i голоморфны по $\Lambda_0, \ldots, \Lambda_{i-3}$, по индукции несложно доказать, что функции Λ_i голоморфны по μ.

Переходим к случаю $A = 0$. При $i = 3, 4$, из (7.14) следует, что $\Lambda_i(\mu) = \mu^2\widetilde{\Lambda}_i(\mu)$, где $\widetilde{\Lambda}_i(\mu)$ — голоморфные по μ функции. Докажем тоже самое для $i \geqslant 5$. Предположим, что утверждение верно при $i < M$. Так как функции f_{M+1}, g_M, $\widetilde{v}_M(0,\mu)$ голоморфны по $\Lambda_0, \ldots, L_{M-1}$, функция α_1 голоморфна по Λ_0,

$$f_{M+1}\left(\Lambda_0, 0, \ldots, 0\right) = g_M\left(\Lambda_0, 0, \ldots, 0\right) = a_{Mj}\left(0, \Lambda_0, 0, \ldots, 0\right) = 0,$$

то

$$\widetilde{f}_{M+1}(\mu) = \mu^2\widetilde{f}^{(M+1)}(\mu), \qquad \widetilde{g}_M(\mu) = \mu^2\widetilde{g}^{(M)}(\mu), \qquad \widetilde{v}_M(0,\mu) = \mu\widetilde{v}^{(M)}(\mu),$$

где $\widetilde{f}^{(M+1)}(\mu)$, $\widetilde{g}^{(M)}(\mu)$, $\widetilde{v}^{(M)}(\mu)$ — голоморфные по μ функции. На основе этого факта и (8.30) получаем требуемые представления.

Определим теперь функции $w_{i,1}$. Прямыми вычислениями проверяем, что решения задач (8.20), обладающие асимптотиками (8.25), (8.26), даются равенствами

$$w_{i,1} = \frac{1}{2}\varsigma_2^2\frac{\partial}{\partial\varsigma_2}w_{i,0}. \tag{8.32}$$

Таким образом, формально построенная асимптотика для собственной функции имеет вид:

$$\psi_\varepsilon(x) = \left(\psi^{ex}_\varepsilon(x) + \chi(1-r)\psi^{mid}_\varepsilon(\xi)\right)\chi_\varepsilon(x) + \sum_{m=0}^{N-1}\chi\left(|\varsigma^m|\,\eta^{\frac{1}{2}}\right)\psi^{in}_\varepsilon\left(\varsigma^m\right), \tag{8.33}$$

$$\chi_\varepsilon(x) = 1 - \sum_{m=0}^{N-1}\chi\left(|\varsigma^m|\,\eta^{\frac{1}{2}}\right).$$

Обозначим:

$$\begin{aligned}
\psi_{\varepsilon,K}(x) =& \Psi_{\varepsilon,K}(x)\chi_\varepsilon(x) + \sum_{m=0}^{N-1}\chi\left(|\varsigma^m|\,\eta^{\frac{1}{2}}\right)\psi^{in}_{\varepsilon,K}\left(\varsigma^m\right),\\
\psi^{in}_{\varepsilon,K}\left(\varsigma\right) =& \sum_{i=1}^{K}\varepsilon^i\left(w_{i,0}(\varsigma,\mu) + \varepsilon\eta w_{i,1}(\varsigma,\mu)\right),\\
\widetilde{\psi}_{\varepsilon,K}(x) =& \psi_{\varepsilon,K}(x) - R_{\varepsilon,K}(x), \quad R_{\varepsilon,K}(x) = \widetilde{R}_{\varepsilon,K}(x),\\
\widetilde{R}_{\varepsilon,K}(x) =& \chi(1-r)\left(\mathsf{b}_k(\varepsilon)(1-r) - \varepsilon^{K+1}\alpha_{K+1}X(\xi)\right) +\\
&+ \varepsilon^{K+1}G^{(K)}_\varepsilon + \varepsilon^{K+1}\widetilde{v}_{K+1}(0,\mu) - \varepsilon^K\frac{\alpha_{K+1}}{A+\mu}.
\end{aligned}$$

Положим: $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(D)}$.

Теорема 8.1. *Функции* $\psi_{\varepsilon,K}, \widetilde{\psi}_{\varepsilon,K} \in W^1_2(D)\cap C^\infty(D)$ *сходятся к* ψ_0 *в* $L_2(D)$ *при* $\varepsilon\to 0$, $\lambda_{\varepsilon,K}$ *сходится к* λ_0, *и* $\|R_{\varepsilon,K}\| = O(\varepsilon^K(A+\mu))$. *Функции* $\widetilde{\psi}_{\varepsilon,K}$ *и* $\lambda_{\varepsilon,k}$ *являются решениями задачи*

$$-\Delta u_\varepsilon = \lambda u_\varepsilon + f, \quad x\in D, \quad u_\varepsilon = 0, \qquad x\in\gamma_\varepsilon, \qquad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} = 0, \quad x\in\Gamma_\varepsilon, \tag{8.34}$$

с $u_\varepsilon = \widetilde{\psi}_{\varepsilon,K}$, $\lambda = \lambda_{\varepsilon,K}$, $f = f_{\varepsilon,K}$, *где* $\|f_{\varepsilon,K}\| = O\left(\varepsilon^K(A+\mu)\right)$.

Замечание 8.1. Выражения вида $O\left(\varepsilon^p(A+\mu)\right)$ в утверждении этой теоремы понимаются следующим образом. Для $A>0$ они означают $O(\varepsilon^p)$, а для $A=0$ означают $O(\varepsilon^p\mu)$.

Доказательство. Утверждаемая гладкость $\psi_{\varepsilon,K}$ и $\widetilde{\psi}_{\varepsilon,K}$ вытекает непосредственно из определения этих функций и гладкости функций $\psi^{ex}_{\varepsilon,K}$, v_i и $w_{i,j}$. Очевидно, что $\lambda_{\varepsilon,K}\to\lambda_0$, $\psi_{\varepsilon,K}, \widetilde{\psi}_{\varepsilon,K}\to\psi_0$ при $\varepsilon\to 0$. Из определения и свойств величин α_i выводим, что $\mathsf{b}_k(\varepsilon) = O\left(\varepsilon^K(A+\mu)^2\right)$. Отсюда и из определения функций $G^{(K)}_\varepsilon$ и α_{K+1}, а также из гладкости функции χ следует, что $\|R_{\varepsilon,K}\| = O\left(\varepsilon^{K+1}(A+\mu)^2\right)$.

Функция $\chi_\varepsilon(x)$ равна нулю в малой окрестности множества γ_ε, а функции w_{ij} обращаются в нуль на γ^1, а потому функция $\widetilde{\psi}_{\varepsilon,K}$ удовлетворяет однородному краевому условию Дирихле на γ_ε. Прямыми вычислениями проверяем, что при $x\in\Gamma_\varepsilon$ выполнено

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\widetilde{\psi}_{\varepsilon,K}(x) =& \chi_\varepsilon(x)\frac{\partial}{\partial r}\Psi_{\varepsilon,K}(x) - \frac{\partial}{\partial r}R_{\varepsilon,K}(x) =\\
&= \chi_\varepsilon(x)\left(\sqrt{\lambda_{\varepsilon,K}}J_0'\left(\sqrt{\lambda_{\varepsilon,K}}\right) - \sum_{i=1}^{K}\varepsilon^{i-1}\frac{\partial v_i}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi\in\Gamma^0} + \varepsilon^K\alpha_{K+1} + \mathsf{b}_K(\varepsilon)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Применяя оператор $-\left(\Delta+\lambda_{\varepsilon,K}\right)$ к функции $\widetilde{\psi}_{\varepsilon,K}(x)$, получаем:

$$\begin{aligned}
&f_{\varepsilon,K} = -\sum_{i=1}^{5}f^{(i)}_{\varepsilon,K},\\
&f^{(1)}_{\varepsilon,K}(x) = -\chi_\varepsilon(x)\left(\Delta+\lambda_{\varepsilon,K}\right)\widetilde{R}_{\varepsilon,K}(x),\\
&f^{(2)}_{\varepsilon,K}(x) = \chi(1-r)\chi_\varepsilon(x)\left(\Delta+\lambda_{\varepsilon,K}\right)\widetilde{\psi}^{mid}_{\varepsilon,K}(\xi),\\
&f^{(3)}_{\varepsilon,K}(x) = \widetilde{\psi}^{mid}_{\varepsilon,K}\Delta\chi(1-r) + 2\left(\nabla_x\chi(1-r), \nabla_x\widetilde{\psi}^{mid}_{\varepsilon,K}(\xi)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{(4)}_{\varepsilon,K}(x) &= \sum_{m=0}^{N-1} \chi\left(|\varsigma^m|\,\eta^{\frac{1}{2}}\right)(\Delta+\lambda_{\varepsilon,K})\,\psi^{in}_{\varepsilon,K}(\varsigma^m)\,,\\
f^{(5)}_{\varepsilon,K}(x) &= \sum_{m=0}^{N-1} \Delta\chi\left(|\varsigma^m|\,\eta^{\frac{1}{2}}\right)\psi^{mat}_{\varepsilon,K}(x) + 2\left(\nabla_x\chi\left(|\varsigma^m|\,\eta^{\frac{1}{2}}\right), \nabla_x\psi^{mat}_{\varepsilon,K}(x)\right),\\
\widetilde{\psi}^{mid}_{\varepsilon,K} &= \psi^{mid}_{\varepsilon,K} + \varepsilon^{K+1}\alpha_{K+1}X,\\
\psi^{mat}_{\varepsilon,K} &= \psi^{in}_{\varepsilon,K} - \psi^{ex}_{\varepsilon,K} - \widetilde{\psi}^{mid}_{\varepsilon,K} + \left(\varepsilon \mathsf{b}_k(\varepsilon)\xi_2 + \varepsilon^{K+1}G^{(K)}_{\varepsilon} + \varepsilon^{K+1}\widetilde{v}_{K+1}(0,\mu) - \varepsilon^K\frac{\alpha_{K+1}}{A+\mu}\right).
\end{aligned}$$

Прямыми вычислениями проверяем, что

$$\|f^{(1)}_{\varepsilon,K}\| = O\left(\varepsilon^K(A+\mu)\right).$$

В силу уравнений (8.5) верно представление

$$(\Delta+\lambda_{\varepsilon,K})\,\widetilde{\psi}^{mid}_{\varepsilon,K}(\xi) = \frac{\varepsilon^K}{r^2}\sum_{j=0}^{K-1} F^{(j)}_K(\xi,\mu),$$

где $F^{(j)}_K$ — явно вычисляемые функции, причем

$$F^{(j)}_K \in \mathcal{V}\cap L_2(\Pi), \qquad \|F^{(j)}_K\| = O((A+\mu)) \quad \text{при} \quad \mu\to 0.$$

Отсюда следует, что

$$\left\|f^{(2)}_{\varepsilon,K}\right\| = O\left(\varepsilon^{K+\frac{1}{2}}(A+\mu)\right).$$

Благодаря экспоненциальному убыванию функций v_i при $\xi_2\to+\infty$ легко проверяется, что

$$\|f^{(3)}_{\varepsilon,K}\| = O\left(\mathrm{e}^{-\varepsilon^{-q}}(A+\mu)\right),$$

где q — некоторое фиксированное число. С учетом задач для $w_{i,j}$ видим, что

$$\Delta\psi^{in}_{\varepsilon,K} = \frac{1}{r^2}\sum_{i=0}^{K}\varepsilon^i\left(\sum_{k=0}^{1}\sum_{j=1}^{2}\mathsf{a}_{kj}\varsigma_2^{k+j-1}\frac{\partial^j}{\partial\varsigma_2^j}w_{k,j} + \varepsilon\eta\varsigma_2\frac{\partial}{\partial\varsigma_2}\varsigma_2\frac{\partial}{\partial\varsigma_2}w_{i,1}\right).$$

Используя явные формулы для функций $w_{i,j}$ и асимптотики (8.26), получаем равенство

$$\left\|f^{(4)}_{\varepsilon,K}\right\| = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1}{2}}(A+\mu)\right).$$

Ввиду проведенного согласования в области $\eta<(\xi_1-\pi m)^2+\xi_2^2<4\eta$ верно

$$\psi^{mat}_{\varepsilon,K}(x) = O\left(\varepsilon(A+\mu)\rho^2\ln\rho\right), \tag{8.35}$$

откуда вытекает:

$$\|f^{(5)}_{\varepsilon,K}\| = O\left(\eta^{\frac{1}{5}}\right).$$

Отметим, что равенство (8.35) невозможно получить без введения функций $w_{i,1}$, т. е. невозможно получить быстрое убывание нормы $\|f^{(5)}_{\varepsilon,K}\|$ при $\varepsilon\to 0$. Это единственная причина, по которой были введены функции $w_{i,1}$. Собирая вместе полученные оценки для функций $f^{(i)}_{\varepsilon,K}$, приходим к требуемой оценке для $\|f_{\varepsilon,K}\|$. Лемма доказана. □

9. Формальное построение асимптотик в случае $n>0$

В данном разделе мы формально строим асимптотики собственного значения λ_ε, сходящегося к корню λ_0 уравнения (7.5) с $n>0$, а также формальные асимптотики для соответствующих собственных функций $\psi^{\pm}_{\varepsilon}$.

В целом схема построения аналогична случаю $n=0$. Единственным отличием является применение метода многих масштабов.

Асимптотика собственного значения строится в виде (7.12), а асимптотики собственных функций $\psi_\varepsilon^\pm$ — в виде рядов

$$\psi_\varepsilon^\pm(x) = \left(\psi_\varepsilon^{ex,\pm}(x) + \chi(1-r)\psi_\varepsilon^{mid,\pm}(\xi,\theta)\right)\chi_\varepsilon(x) + \sum_{m=0}^{N-1}\chi\left(|\varsigma^m|\,\eta^{\frac{1}{2}}\right)\psi_\varepsilon^{in,\pm}(\varsigma^m,\mu), \tag{9.1}$$

$$\psi_\varepsilon^{ex,\pm}(x) = J_n\left(\sqrt{\lambda_\varepsilon}r\right)\phi^\pm(n\theta),$$

$$\psi_\varepsilon^{mid,\pm}(\xi,\theta) = \phi^\pm(n\theta)\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i v_i(\xi,\mu) \pm \phi^\mp(n\theta)\varepsilon\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i v_i^{ad}(\xi,\mu), \tag{9.2}$$

$$\psi_\varepsilon^{in,\pm}(\varsigma,\theta) = \phi^\pm(n\theta)\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i\left(w_{i,0}(\varsigma,\mu) + \varepsilon\eta w_{i,1}(\varsigma,\mu)\right) \pm \phi^\mp(n\theta)\varepsilon\eta\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i w_{i,1}^{ad}(\varsigma,\mu). \tag{9.3}$$

Как и в предыдущем разделе, функции $\psi_\varepsilon^{mid,\pm}$ являются пограничным слоем и вводятся для того, чтобы удовлетворить краевому условию Неймана на Γ_ε. В окрестности точек x_m асимптотики собственных функций $\psi_\varepsilon^\pm$ строятся в виде рядов (9.3) на основе метода согласования асимптотических разложений. Это позволяет добиться краевого условия Дирихле на γ_ε. Отличием от случая $n = 0$ здесь является появление дополнительных функций v_i^{ad} и $w_{i,1}^{ad}$ и использование метода многих масштабов. Данный метод обуславливает присутствие функций $\phi^\pm(n\theta)$ в (9.2), (9.3); переменная θ играет роль медленного времени.

Целью данного раздела является определение функций Λ_i, v_i, v_i^{ad}, $w_{i,j}$, $w_{i,j}^{ad}$, для которых мы получим достаточно явные формулы.

Перейдем к построению. Мы постулируем, что сумма $\psi_\varepsilon^{ex,\pm}$ и $\psi_\varepsilon^{mid,\pm}$ должна удовлетворять однородному условию Неймана всюду на ∂D за исключением точек x_k, т. е.

$$\sqrt{\lambda_\varepsilon}J_n'\left(\sqrt{\lambda_\varepsilon}\right)\phi^\pm(n\theta) - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\psi_\varepsilon^{mid,\pm}(\xi,\theta) = 0, \quad \xi\in\Gamma^0.$$

Заменим λ_ε и $\psi_\varepsilon^{mid,\pm}$ на ряды (7.12) и (9.2), разложим в асимптотические степенные ряды по ε и вычислим коэффициенты при одинаковых степенях ε отдельно для $\phi^+(n\theta)$ и $\phi^-(n\theta)$. Это дает краевые условия для функций $v_i^\pm$:

$$\frac{\partial v_i}{\partial\xi_2} = \alpha_i, \quad \frac{\partial v_i^{ad}}{\partial\xi_2} = 0, \quad \xi\in\Gamma^0, \qquad \alpha_i = \alpha_i(\Lambda_0,\ldots,\Lambda_{i-1}), \tag{9.4}$$

$$\begin{gathered}\alpha_1 = \sqrt{\Lambda_0}J_n'\left(\sqrt{\Lambda_0}\right), \qquad \alpha_2 = \alpha_3 = 0,\\ \alpha_i = -\frac{J_n\left(\sqrt{\lambda_0}\right)\left(\Lambda_0 - n^2\right)}{2\Lambda_0}\Lambda_{i-1} + f_i, \quad i\geqslant 4, \qquad f_4 = f_5 = 0,\end{gathered} \tag{9.5}$$

где $f_i = f_i(\Lambda_0,\ldots,\Lambda_{i-4})$ — полиномы по $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{i-4}$ с коэффициентами, голоморфными по Λ_0, причем $f_i(\Lambda_0,0,\ldots,0) = 0$. Аналогично тому, как были получены уравнения (8.5), подставим (7.12) и (9.2) в (7.1), разложим в степенные ряды по ε и вычислим коэффициенты при одинаковых степенях ε отдельно для $\phi^+(n\theta)$ и $\phi^-(n\theta)$. В результате получаем уравнения для $v_i^\pm$:

$$\begin{aligned}\Delta_\xi v_i &= F_i \equiv \mathcal{L}_i(v_1,\ldots,v_{i-1}) - n^2 v_{i-2} + 2n\frac{\partial v_{i-2}^{ad}}{\partial\xi_1}, && \xi_2 > 0,\\ \Delta_\xi v_i^{ad} &= F_i^{ad} \equiv \mathcal{L}_i(v_1^{ad},\ldots,v_{i-1}^{ad}) - n^2 v_{i-2}^{ad} - 2n\frac{\partial v_i}{\partial\xi_1}, && \xi_2 > 0,\end{aligned} \tag{9.6}$$

где $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$, $v_{-1}^\pm = v_0^\pm = 0$. Мы ищем экспоненциально убывающие при $\xi_2\to+\infty$ решения рекуррентной системы краевых задач (9.4), (9.6).

Аналогично лемме 8.2 доказывается следующее утверждение.

Лемма 9.1. *Пусть функция* $F(\xi)\in\mathcal{V}^-$ *имеет бесконечно дифференцируемую асимптотику*

$$F(\xi) = \alpha\rho^{-1}\cos\vartheta + O(\ln\rho), \quad \rho\to 0,$$

и существует натуральное число k *такое, что* $\Delta_\xi^k F \equiv 0$ *при* $\xi_2 > 0$. *Тогда функция* v, *определенная формулой* (8.6), *является решением краевой задачи* (8.7), *принадлежащим* $W_2^1(\Pi) \cap \mathcal{V}^-$ *и имеющим бесконечно дифференцируемую асимптотику*

$$v(\xi) = \frac{1}{2}\xi_1 \ln \rho + \widetilde{\alpha}\xi_1 + O(\rho^2 \ln \rho), \quad \rho \to 0,$$

где $\widetilde{\alpha}$ *— некоторое число.*

Используя леммы 8.2 и 9.1, аналогично лемме 8.3 несложно доказать следующее утверждение.

Лемма 9.2. *Для любой последовательности* $\{\Lambda_i(\mu)\}_{i=0}^{\infty}$, $\Lambda_1(\mu) = \Lambda_2(\mu) = 0$, *существуют решения краевых задач* (9.4), (9.6), *определенные по формуле* (8.6) *с* $F = F_i$, $k = k_i$ *и* $F = F^{ad}$, $k = k_i^{ad}$, *где* k_i, k_i^{ad} *— некоторые натуральные числа. Для функций* v_i *и* v_i^{ad} *верны представления* (8.16), *где* α_i *из* (9.5), *и*

$$v_i^{ad}(\xi,\mu) = \sum_{j=1}^{M_i^{ad}} a_{ij}^{ad}\left(\alpha_1, \Lambda_0, \ldots, \Lambda_{i-2}\right) v_{ij}^{ad}(\xi).$$

Здесь $v_{ij} \in W_2^1(\Pi) \cap \mathcal{V}^+$, $v_{ij}^{ad} \in W_2^1(\Pi) \cap \mathcal{V}^-$ *— некоторые функции,* a_{ij}, a_{ij}^{ad} *— полиномы по* $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{i-2}$ *с голоморфными по* Λ_0 *и* α_1 *коэффициентами, причем*

$$a_{ij}\left(0, \Lambda_0, 0, \ldots, 0\right) = a_{ij}^{ad}\left(0, \Lambda_0, 0, \ldots, 0\right) = 0.$$

Верны равенства

$$\begin{gathered}
M_1 = 0, \qquad M_2 = M_1^{ad} = M_2^{ad} = 1, \qquad M_3 = 2, \qquad M_4 = 3,\\
a_{21} = a_{31} = a_{41} = a_{11}^{ad} = a_{21}^{ad} = -\alpha_1, \qquad a_{32} = -\alpha_1\left(\Lambda_0 + 2n^2\right),\\
a_{42} = \frac{\alpha_1\left(6\Lambda_0 + 1\right)}{24}, \qquad a_{43} = \frac{\alpha_1\left(8\Lambda_0 + 1\right)}{32}, \qquad v_{21} = \frac{1}{2}\xi_2^2\frac{\partial X}{\partial \xi_2},\\
v_{11}^{ad} = -n\mathcal{A}_1\left[\frac{\partial X}{\partial \xi_1}\right], \qquad v_{31} = \frac{1}{8}\xi_2^4\frac{\partial^4 X}{\partial \xi_2^2} + \frac{1}{6}\xi_2^3\frac{\partial X}{\partial \xi_2} + \frac{n^2}{2}\xi_2^2 X,\\
v_{32} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_1[X], \qquad v_{41} = \frac{1}{48}\xi_2^6\frac{\partial^3 X}{\partial \xi_2} + \frac{2}{15}\xi_2^5\frac{\partial^2 X}{\partial \xi_2^2} + \frac{4n^2+1}{16}\xi_2^4\frac{\partial X}{\partial \xi_2},\\
v_{42} = \xi_2^3 X, \qquad v_{43} = \mathcal{A}_1[\xi_2 X] + \xi_2^2\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t)\, dt, \qquad v_{22}^{ad} = \frac{n}{2}\xi_2^3\frac{\partial X}{\partial \xi_1}.
\end{gathered} \tag{9.7}$$

Имеют место асимптотики (8.18) *с числами* α_i *из* (9.5) *и*

$$v_i^{ad}(\xi,\mu) = -n\alpha_i\xi_1 \ln \rho + \widetilde{\alpha}_i\xi_1 + O\left(\rho^2 \ln \rho\right) \tag{9.8}$$

при $\rho \to 0$. *Здесь* $\alpha_0 = 0$ *и* $\widetilde{\alpha}_i = \widetilde{\alpha}_i\left(\alpha_1, \Lambda_0, \ldots, \Lambda_{i-2}\right)$ *— полиномы по* $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{i-2}$ *с голоморфными по* Λ_0 *и* α_1 *коэффициентами, причем* $\widetilde{\alpha}_i\left(0, \Lambda_0, 0, \ldots, 0\right) = 0$.

Аналогично предыдущему разделу, для построения асимптотик собственных функций $\psi_\varepsilon^\pm$ в окрестности точек x_m применяется метод согласования асимптотических разложений. Асимптотики этих функций в данной окрестности строятся в виде рядов (9.3). При этом функции $w_{i,j}$ согласовываются с v_i, в то время как функции $w_{i,1}^{ad}$ согласовываются с v_i^{ad}.

Подставим ряды (7.12) и (9.3) в задачу (7.1), (7.2), перейдем к переменным ς и соберем коэффициенты при одинаковых степенях ε отдельно для $\phi^+(n\theta)$ и $\phi^-(n\theta)$. В результате получаем краевые условия (8.19) и (8.20) для функций $w_{i,j}$ и следующие задачи для функций $w_{i,1}^{ad}$:

$$\Delta_\varsigma w_{i,1}^{ad} = 2n\frac{\partial}{\partial \varsigma_1}w_{i,0}, \quad \varsigma_2 > 0, \qquad w_{i,1}^{ad} = 0, \quad \varsigma \in \gamma^1, \qquad \frac{\partial}{\partial \varsigma_2}w_{i,1}^{ad} = 0, \quad \varsigma \in \Gamma^1, \tag{9.9}$$

где полагаем $w_{0,0} = 0$. Найдем теперь асимптотики для функций $w_{i,j}$ и $w_{i,1}^{ad}$ при $|\varsigma| \to \infty$. Обозначим через $\lambda_{\varepsilon,K}$ частичную сумму (7.12) и пусть

$$\Psi_{\varepsilon,K}^\pm(x) = \psi_{\varepsilon,K}^{ex,\pm}(x) + \chi(1-r)\psi_{\varepsilon,K}^{mid,\pm}(\xi), \qquad \psi_{\varepsilon,K}^{ex,\pm}(x) = J_n\left(\sqrt{\lambda_{\varepsilon,K}}r\right)\phi^\pm(n\theta),$$

$$\psi^{mid,\pm}_{\varepsilon,K}(\xi)=\phi^{\pm}(n\theta)\sum_{i=1}^{K+1}\varepsilon^i v_i(\xi,\mu)\pm\phi^{\mp}(n\theta)\varepsilon\sum_{i=1}^{K}\varepsilon^i v_i^{ad}(\xi,\mu).$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}
&J_n\left(\sqrt{\lambda_{\varepsilon,K}}\right)=\sum_{i=0}^{K}\varepsilon^i G_i(\Lambda_0,\ldots,\Lambda_i)+\varepsilon^{K+1}G_\varepsilon^{(K)}\left(\Lambda_0,\ldots,\Lambda_K\right)-\varepsilon\xi_2\sqrt{\lambda_{\varepsilon,K}}J_n'\left(\sqrt{\lambda_{\varepsilon,K}}\right)+O\left(\varepsilon^2\xi_2^2\right),\\
&G_0=J_n\left(\sqrt{\Lambda_0}\right),\qquad G_1=G_2=0,\\
&G_i=\frac{J_n'\left(\sqrt{\Lambda_0}\right)}{2\sqrt{\Lambda_0}}\Lambda_i+g_i,\quad i\geqslant 3,\qquad g_3=g_4=0,
\end{aligned}\tag{9.10}$$

где функции $g_i=g_i\left(\Lambda_0,\ldots,\Lambda_{i-3}\right)$ являются полиномами по $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{i-3}$ с голоморфными по Λ_0 коэффициентами, причем $g_i\left(\Lambda_0,0,\ldots,0\right)=0$, а функция $G_\varepsilon^{(K)}$ голоморфна по $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_K$ и $G_\varepsilon^{(K)}\left(\Lambda_0,0,\ldots,0\right)=0$. Из полученных соотношений, асимптотик (8.18) и (9.8) и равенства $\ln\eta=-\dfrac{1}{\varepsilon(A+\mu)}$ следует, что

$$\begin{aligned}
\Psi^{\pm}_{\varepsilon,M}(x)=&\phi^{\pm}(n\theta)\left(\sum_{i=0}^{K}\varepsilon^i W_{i,0}(\varsigma,\mu)+\varepsilon\eta\sum_{i=1}^{K}\varepsilon^i W_{i,1}(\varsigma,\mu)+W_\varepsilon^{(K)}(x)\right)\pm\\
&\pm\phi^{\mp}(n\theta)\varepsilon\eta\left(\sum_{i=0}^{K}\varepsilon^i W_{i,1}^{ad}(\varsigma,\mu)+\varepsilon^{K+1}W_K^{ad}(\varsigma,\mu)\right)+O\left(\varepsilon\eta^2|\varsigma|^2\ln|\varsigma|\right)
\end{aligned}$$

при $\eta^{\frac{1}{2}}<\rho<2\eta^{\frac{1}{2}}$, где $W_{i,j}$, $W_\varepsilon^{(K)}(x)$ из (8.24), (8.25) с α_i из (9.5), и

$$\begin{aligned}
&W_{i,1}^{ad}(\varsigma,\mu)=-n\alpha_i\varsigma_1\ln|\varsigma|+\left(\widetilde{\alpha}_i+\frac{n\alpha_{i+1}}{A+\mu}\right)\varsigma_1,\qquad\widetilde{\alpha}_0=0,\\
&W_K^{ad}(\varsigma,\mu)=-\frac{n\alpha_{K+1}}{A+\mu}\varsigma_1,\\
&W_\varepsilon^{(K)}(x)=\varepsilon^{K+1}\left(-\alpha_{K+1}\left(\ln|\varsigma|+\ln 2-\xi_2\right)+G_\varepsilon^{(K)}+\widetilde{v}_{K+1}(0,\mu)\right)+\varepsilon\mathsf{b}_K(\varepsilon)\xi_2,\\
&\mathsf{b}_K(\varepsilon)=\sum_{i=1}^{K}\varepsilon^{i-1}\alpha_i-\sqrt{\lambda_{\varepsilon,K}}J_n'\left(\sqrt{\lambda_{\varepsilon,K}}\right).
\end{aligned}\tag{9.11}$$

Согласно методу согласования асимптотических разложений, необходимо найти решения задач (8.19), (8.20) и (9.9) с асимптотиками (8.26) и

$$w_{i,1}^{ad}(\varsigma,\mu)=W_{i,1}^{ad}(\varsigma,\mu)+o(|\varsigma|),\quad|\varsigma|\to\infty.\tag{9.12}$$

Определим функции $w_{i,j}$ формулами (8.28) и (8.32), где α_i из (9.5). Тогда ввиду определения функции $w_{i,0}$ и асимптотик (8.24), (8.26) приходим к равенству (8.29), где α_i из (9.5), $\widetilde{v}_i(0,\mu)$ из леммы 9.2, G_i из (9.10). При $i=0$ это равенство превращается в уравнение (7.13) для Λ_0. Так как для $n>0$ собственное значение λ_0 не равно нулю, голоморфность Λ_0 легко вытекает из теоремы о неявной функции. Равенства (8.29) выполнены при $i=1,2$, так как в силу (9.5), (9.7) и (9.10) имеем

$$\alpha_2=\alpha_3=G_1=G_2=0,\qquad\widetilde{v}_1(0,\mu)=\widetilde{v}_2(0,\mu)=0.$$

При $i\geqslant 3$, аналогично тому как (8.30) было получено из (7.13), (8.29), (9.5) и (9.10), несложно получить формулы для Λ_i:

$$\begin{aligned}
&\Lambda_i(\mu)=\frac{2\Lambda_0(\mu)\left(\widetilde{f}_{i+1}(\mu)+(A+\mu)\left(\widetilde{g}_i(\mu)+\widetilde{v}_i(0,\mu)\right)\right)}{J_n(\sqrt{\Lambda_0(\mu)})\left(\Lambda_0(\mu)-n^2+(A+\mu)^2\right)},\\
&\widetilde{f}_{i+1}(\mu)=f_{i+1}\left(\Lambda_0(\mu),\ldots,\Lambda_{i-3}(\mu)\right),\quad\widetilde{g}_i(\mu)=g_i\left(\Lambda_0(\mu),\ldots,\Lambda_{i-3}(\mu)\right).
\end{aligned}$$

Полагая $i=3,4$ в полученных формулах и используя равенства (8.16), (8.31) и (9.7), получаем соотношения (7.14) и для $n>0$. Повторяя рассуждения из предыдущего раздела, доказываем, что функции $\Lambda_i(\mu)$ голоморфны по $\mu \geqslant 0$ и удовлетворяют представлениям $\Lambda_i(\mu) = \mu^2\widetilde{\Lambda}_i(\mu)$ при $A = 0$, где $\widetilde{\Lambda}_i(\mu)$ — некоторые голоморфные функции.

Построим функции $w_{i,1}^{ad}$. Легко видеть, что функции

$$Y_1(\varsigma) = \operatorname{Re}\sqrt{y^2-1}, \qquad Y_2(\varsigma) = \frac{1}{2}\big(\varsigma_1 Y(\varsigma) - \ln 2\, Y_1(\varsigma)\big)$$

являются решениями краевых задач

$$\Delta_\varsigma Y_1 = 0, \qquad \Delta_\varsigma Y_2 = \frac{\partial Y}{\partial \varsigma_1}, \quad \varsigma_2 > 0, \qquad Y_j = 0, \quad \varsigma \in \gamma^1, \qquad \frac{\partial Y_j}{\partial \varsigma_2} = 0, \quad \varsigma \in \Gamma^1, \quad j = 1,2,$$

и имеют асимптотики

$$Y_1(\varsigma) = \varsigma_1 + O(|\varsigma|^{-1}), \qquad Y_2(\varsigma) = \frac{1}{2}\varsigma_1 \ln|\varsigma| + O(|\varsigma|^{-1}), \quad |\varsigma| \to \infty.$$

В силу свойств функций Y_j, определения функции $w_{i,0}$, задачи (9.9) и асимптотик (9.11), (9.12) получаем, что

$$w_{i,1}^{ad} = -2n\alpha_i Y_2 + \left(\widetilde{\alpha}_i + \frac{\alpha_{i+1}}{A+\mu}\right) Y_1.$$

Положим:

$$\begin{aligned}
\psi_{\varepsilon,K}^{\pm}(x) =& \Psi_{\varepsilon,K}^{\pm}(x)\chi_\varepsilon(x) + \sum_{m=0}^{N-1} \chi\left(|\varsigma^m|\,\eta^{\frac{1}{2}}\right)\psi_{\varepsilon,K}^{in,\pm}(\varsigma^m),\\
\psi_{\varepsilon,K}^{in,\pm}(\varsigma) =& \phi^{\pm}(n\theta)\sum_{i=1}^{K}\varepsilon^i\left(w_{i,0}(\varsigma,\mu) + \varepsilon\eta w_{i,1}(\varsigma,\mu)\right) \pm \phi^{\mp}(n\theta)\varepsilon\eta\sum_{i=0}^{K}\varepsilon^i w_{i,1}^{ad}(\varsigma,\mu),\\
\widetilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{\pm}(x) =& \psi_{\varepsilon,K}^{\pm}(x) - R_{\varepsilon,K}^{\pm}(x),\\
R_{\varepsilon,K}^{\pm}(x) =& \chi_\varepsilon(x)\phi^{\pm}(n\theta)\widetilde{R}_{\varepsilon,K}(x) \pm \chi_\varepsilon(x)\phi^{\mp}(n\theta)\frac{n\alpha_{K+1}}{A+\mu}\sum_{m=0}^{N-1}\chi(|\varsigma^m|\eta^{\frac{1}{2}})Y_1(\varsigma^m),\\
\widetilde{R}_{\varepsilon,K}(x) =& \chi(1-r)\left(\mathsf{b}_k(\varepsilon)(1-r) - \varepsilon^{K+1}\alpha_{K+1}X(\xi)\right) + \varepsilon^{K+1}G_\varepsilon^{(K)} + \varepsilon^{K+1}\widetilde{v}_{K+1}(0,\mu) - \varepsilon^K\frac{\alpha_{K+1}}{A+\mu}.
\end{aligned}$$

Аналогично теореме 8.1, доказывается следующее утверждение.

Теорема 9.1. *Функции* $\psi_{\varepsilon,K}^{\pm}, \widetilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{\pm} \in W_2^1(D) \cap C^\infty(D)$ *сходятся к* $\psi_0^{\pm}$ *в* $L_2(D)$ *при* $\varepsilon \to 0$, $\lambda_{\varepsilon,K}$ *сходится к* λ_0 *и*

$$\|R_{\varepsilon,K}\| = O\left(\varepsilon^K(A+\mu)\right).$$

Функции $\widetilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{\pm}$ *и* $\lambda_{\varepsilon,k}$ *являются решениями задачи* (8.34) *с* $u_\varepsilon = \widetilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{\pm}$, $\lambda = \lambda_{\varepsilon,K}$, $f = f_{\varepsilon,K}^{\pm}$, *где*

$$\|f_{\varepsilon,K}^{\pm}\| = O\left(\varepsilon^K(A+\mu)\right).$$

10. ОБОСНОВАНИЕ

В настоящем разделе мы доказываем, что асимптотические разложения, формальное построенные в предыдущих разделах, действительно являются асимптотиками для собственных значений и собственных функций задачи (7.1), (7.2). Для этого используются следующие утверждения.

Лемма 10.1. *Пусть* Q *— произвольный компакт на комплексной плоскости, не содержащий собственных значений предельной задачи. Тогда для всех* $\lambda \in Q$, $f \in L_2(D)$ *и достаточно малых* ε *задача* (8.34) *однозначно разрешима и для решения верны равномерные* ε, μ, λ *и* f *оценки*

$$\|u_\varepsilon\|_1 \leqslant C\|f\|, \tag{10.1}$$

где $\|\cdot\|_1$ *— норма в пространстве* $W_2^1(D)$. *Функция* u_ε *сходится к решению задачи*

$$-\Delta u_0 = \lambda u_0 + f, \quad x \in D, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial r} + A\right)u_0 = 0, \quad x \in \partial D, \tag{10.2}$$

сильно в $L_2(D)$ *равномерно по* λ.

Доказательство. Однозначная разрешимость задачи (8.34) вытекает из уже известной сходимости спектра. Оценку докажем (10.1) от противного. Предположим, что существуют последовательности $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, f_k и λ_k такие, что для $\varepsilon = \varepsilon_k$, $f = f_k$, $\lambda = \lambda_k \in Q$ выполнены неравенства

$$\|u_{\varepsilon_k}\|_1 \geqslant k\|f_k\|. \tag{10.3}$$

Без ограничения общности будем считать, что $\|u_\varepsilon\| = 1$. Умножим уравнение в (8.34) на $\overline{u_\varepsilon}$ и проинтегрируем по частям по кругу D. Это дает следующую априорную равномерную оценку:

$$\|u_\varepsilon\|_1 \leqslant C\left(\|f\| + \|u_\varepsilon\|\right).$$

Из этой оценки, равенства $\|u_\varepsilon\| = 1$ и (10.3) получаем:

$$\|u_{\varepsilon_k}\|_1 \leqslant C, \qquad \|f_k\| \to 0, \qquad k \to \infty. \tag{10.4}$$

Из полученных соотношений и компактности вложения $W_2^1(D)$ в $L_2(D)$ вытекает существование подпоследовательности индексов k, которую мы обозначаем через k', такой что $\lambda_{k'} \to \lambda_* \in Q$ и

$$u_{\varepsilon_{k'}} \to u_* \neq 0$$

слабо в $W_2^1(D)$ и сильно в $L_2(D)$. В [66] было показано, что для любой функции $V \in C^\infty(\overline{D})$ существует последовательность функций $V_\varepsilon \in W_2^1(D)$, обращающихся в нуль на γ_ε, таких что

$$\begin{aligned} &V_\varepsilon \to V \qquad \text{слабо в } W_2^1(D) \text{ и сильно в } L_2(D),\\ &\int\limits_D (\nabla V_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon)\,dx \to \int\limits_D (\nabla V, \nabla v)\,dx + A\int\limits_{\partial D} Vv\,d\theta, \end{aligned} \tag{10.5}$$

где v_ε — произвольная последовательность функций из $W_2^1(D)$, обращающихся в нуль на γ_ε и сходящихся к $v \in W_2^1(D)$ сильно в $L_2(D)$ и слабо $W_2^1(D)$. Ввиду (8.34) выполнено равенство

$$\int\limits_D \left(\nabla V_{\varepsilon_{k'}}, \nabla u_{\varepsilon_{k'}}\right)dx = \lambda_{k'}\int\limits_D V_{\varepsilon_{k'}} u_{\varepsilon_{k'}}\,dx + \int\limits_D f_{k'} u_{\varepsilon_{k'}}\,dx.$$

Переходя в нем к пределу при $k' \to \infty$ и учитывая (10.4), (10.5), заключаем, что u_* есть решение задачи

$$-\Delta u_* = \lambda u_*, \quad x \in D, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial r} + A\right)u_* = 0, \quad x \in \partial D,$$

т. е. $\lambda_* \in Q$ оказывается собственным значением предельной задачи, в то время как по предположению множество Q не содержит собственных значений предельной задачи. Данное противоречие доказывает оценку (10.1).

Аналогичными рассуждениями, используя (10.1) вместо (10.4), легко доказать сходимость решения задачи (8.34) с $\lambda = \lambda(k) \to \lambda_*$ при $k \to \infty$ к решению задачи (10.2) с $\lambda = \lambda_*$. Из этого факта и непрерывности u_0 по λ вытекает равномерная по λ сходимость функции u_ε к u_0. Теорема доказана. □

Лемма 10.2. *Пусть λ_0 является p-кратным собственным значением предельной задачи, $\lambda_\varepsilon^{(j)}$, $j = 1, \ldots, p$ — собственные значения возмущенной задачи, сходящиеся к λ_0 и взятые с учетом кратности, $\psi_\varepsilon^{(j)}$ — соответствующие собственные функции, ортонормированные в $L_2(D)$. Тогда для λ, достаточно близких к λ_0, решение задачи* (8.34) *удовлетворяет представлению*

$$u_\varepsilon = \sum_{j=1}^{p} \frac{\psi_\varepsilon^{(j)}}{\lambda_\varepsilon^{(j)} - \lambda}\int\limits_D \psi_\varepsilon^{(j)} f\,dx + \widetilde{u}_\varepsilon, \tag{10.6}$$

где $\widetilde{u}_\varepsilon$ голоморфна по λ в норме пространства $L_2(D)$ и ортогональна в $L_2(D)$ всем функциям $\psi_\varepsilon^{(j)}$. Для u_ε верна равномерная по ε, μ, λ и f оценка

$$\|\widetilde{u}_\varepsilon\|_1 \leqslant C\|f\|. \tag{10.7}$$

Доказательство. Известно, что решение u_ε задачи (8.34) является мероморфной по λ функцией, имеющей полюса в собственных значениях возмущенной задачи, и все эти полюса простые. Вычеты в этих полюсах (собственных значениях) являются проекторами на соответствующие собственные функции возмущенной задачи. Так как $\lambda_\varepsilon^{(j)}$ сходится к λ_0, то λ, близкие λ_0, также близки и к $\lambda_\varepsilon^{(j)}$. Поэтому для функции u_ε справедливо представление

$$u_\varepsilon = \sum_{j=1}^{p} \frac{b_\varepsilon^{(j)}}{\lambda_\varepsilon^{(j)} - \lambda} \psi_\varepsilon^{(j)} + \widetilde{u}_\varepsilon, \tag{10.8}$$

где $b_\varepsilon^{(j)}$ — некоторые скалярные коэффициенты, $\widetilde{u}_\varepsilon$ — голоморфная по λ функция. Из уравнения для u_ε следует, что

$$\left(\lambda_\varepsilon^{(j)} - \lambda\right) \int\limits_D \psi_\varepsilon^{(j)} u_\varepsilon \, dx = \int\limits_D \psi_\varepsilon^{(j)} f \, dx.$$

Подставляя формулу (10.8) в это равенство, получаем, что

$$b_\varepsilon^{(j)} + \left(\lambda_\varepsilon^{(j)} - \lambda\right) \int\limits_D \psi_\varepsilon^{(j)} \widetilde{u}_\varepsilon \, dx = \int\limits_D \psi_\varepsilon^{(j)} f \, dx.$$

Отсюда в силу голоморфности по $\widetilde{u}_\varepsilon$ получаем:

$$b_\varepsilon^{(j)} = \int\limits_D \psi_\varepsilon^{(j)} f \, dx, \qquad \int\limits_D \psi_\varepsilon^{(j)} \widetilde{u}_\varepsilon \, dx = 0, \qquad j = 1, \ldots, p.$$

Эти соотношения и (10.8) приводят к представлению (10.6).

Докажем оценку (10.7). Через $S(z, a)$ обозначим открытый круг радиуса a в комплексной плоскости с центром в точке z. Выберем число δ так, что круг $S(\lambda_0, \delta)$ не содержит никаких собственных значений предельной задачи, за исключением λ_0. Тогда для всех достаточно малых ε каждое собственное значение $\lambda_\varepsilon^{(j)}$ лежит в круге $S\Big(\lambda_0, \dfrac{\delta}{2}\Big)$. Следовательно, в силу представления (10.8) и леммы 10.1 для $\lambda \in \partial S(\lambda_0, \delta)$ верна равномерная оценка

$$\|\widetilde{u}_\varepsilon\|_1 = \left\| u_\varepsilon - \sum_{j=1}^{p} \frac{\psi_\varepsilon^{(j)}}{\lambda_\varepsilon^{(j)} - \lambda} \int\limits_D \psi_\varepsilon^{(j)} f \, dx \right\|_1 \leqslant C\|f\| + \frac{2}{\delta} \sum_{j=1}^{p} \big\|\psi_\varepsilon^{(j)}\big\|_1 \|f\| \leqslant C\|f\|.$$

Так как $\widetilde{u}_\varepsilon$ голоморфна по λ, в силу принципа максимума модуля последнее неравенство верно и для $\lambda \in S(\lambda_0, \delta)$. Лемма доказана. □

Лемма 10.3. *Собственные значения возмущенной задачи имеют асимптотики* (7.12)–(7.14).

Доказательство. Пусть λ_0 — собственное значение задачи (7.4) и корень уравнения (7.5) для $n = n_i$, $i = 1, \ldots, m$, где n_i различны. Предположим, что $n_1 = 0$, $n_i > 0$, $i = 2, \ldots, m$. Случаи $n_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$ и $m = 1$, $n_1 = 0$ разбираются аналогично. Собственные функции, соответствующие λ_0, имеют вид:

$$\begin{aligned}
\psi_0^{(1)}(x) &= J_0\left(\sqrt{\lambda_0} r\right), \\
\psi_0^{(2i-2)}(x) &= J_{n_i}\left(\sqrt{\lambda_0} r\right) \phi^+(n_i\theta), \quad i = 2, \ldots, m, \\
\psi_0^{(2i-1)}(x) &= J_{n_i}\left(\sqrt{\lambda_0} r\right) \phi^-(n_i\theta), \quad i = 2, \ldots, m.
\end{aligned}$$

Аналогично, через $\psi_{\varepsilon,K}^{(j)}$, $\widetilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{(j)}$, $f_{\varepsilon,K}^{(j)}$ обозначим функции $\psi_{\varepsilon,K}$, $\psi_{\varepsilon,K}^{\pm}$, $\widetilde{\psi}_{\varepsilon,K}$, $\widetilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{\pm}$, $f_{\varepsilon,K}$, $f_{\varepsilon,K}^{\pm}$, построенные в двух предыдущих разделах и соответствующие индексам n_i. Положим $\lambda_{\varepsilon,K}^{(1)} = \lambda_{\varepsilon,K}$, где $\lambda_{\varepsilon,K}$ было определено в разделе 8, $\lambda_{\varepsilon,K}^{(2i-2)} = \lambda_{\varepsilon,K}^{(2i-1)} = \lambda_{\varepsilon,K}$, где $\lambda_{\varepsilon,K}$ было введено в разделе 9, и соответствующие индексам n_i, $i = 2, \dots, m$. Ясно, что кратность λ_0 равна $(2m-1)$. Согласно теоремам 8.1 и 9.1 и лемме 10.2, для функций $\widetilde{\psi}^{(j)}_{\varepsilon,K}$ верны представления

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\psi}^{(j)}_{\varepsilon,K} = \sum_{k=1}^{2m-1} \mathsf{b}^{jk}_{\varepsilon} \psi^{(k)}_{\varepsilon} + \widetilde{u}^{(j)}_{\varepsilon}, \qquad (10.9)\\
&\mathsf{b}^{jk}_{\varepsilon} = \int\limits_{D} \psi^{(k)}_{\varepsilon} \widetilde{\psi}^{(j)}_{\varepsilon,K}\, dx = \frac{1}{\lambda^{(k)}_{\varepsilon} - \lambda^{(j)}_{\varepsilon,K}} \int\limits_{D} \psi^{(k)}_{\varepsilon} f^{(j)}_{\varepsilon,K}\, dx,\\
&\|\widetilde{u}^{(j)}_{\varepsilon}\|_1 \leqslant C \|f^{(j)}_{\varepsilon,K}\| = O\left(\varepsilon^K (A+\mu)\right).
\end{aligned}$$

Предположим, что некоторые из собственных значений $\lambda^{(j)}_{\varepsilon}$ не удовлетворяют асимптотикам (7.12), (7.13), (7.14), а именно, выполнены равномерные по ε и μ оценки

$$\left|\lambda^{(k)}_{\varepsilon} - \lambda^{(j)}_{\varepsilon,K}\right| \geqslant C\varepsilon^p (A+\mu), \qquad j = 1, \dots, 2m-1, \quad k \in I, \tag{10.10}$$

где p — некоторое число, не зависящее от K, а I — подмножество индексов $I \subseteq \{1, 2, \dots, 2m-1\}$. В силу (10.10) и теорем 8.1, 9.1 для функций $f^{(j)}_{\varepsilon,K}$ заключаем, что при $K \geqslant p+1$ верны сходимости

$$\mathsf{b}^{jk}_{\varepsilon} \to 0, \qquad k \in I, \qquad j = 1, \dots, 2m-1.$$

Из определения функций $\mathsf{b}^{jk}_{\varepsilon}$, ортогональности $\psi^{(j)}_{\varepsilon}$ и сходимости $\widetilde{\psi}^{(j)}_{\varepsilon,K} \to \psi^{(j)}_0$ следует, что числа $\mathsf{b}^{jk}_{\varepsilon}$ равномерно ограничены, следовательно, существует подпоследовательность $\varepsilon' \to 0$ такая, что $\mathsf{b}^{jk}_{\varepsilon'} \to \mathsf{b}^{jk}_0$, и более того, $\mathsf{b}^{jk}_0 = 0$, если $k \in I$, $j = 1, \dots, 2m-1$. Ввиду (10.9) и леммы 10.2 верны равенства

$$\int\limits_{D} \widetilde{\psi}^{(j)}_{\varepsilon',K} \widetilde{\psi}^{(l)}_{\varepsilon',K}\, dx = \sum_{k=1}^{2m-1} \mathsf{b}^{jk}_{\varepsilon'} \mathsf{b}^{lk}_{\varepsilon'} + \int\limits_{D} \widetilde{u}^{(j)}_{\varepsilon',K} u^{(l)}_{\varepsilon',K}\, dx.$$

Переходя в них к пределу при $\varepsilon' \to 0$ и принимая во внимание сходимости $\widetilde{\psi}^{(i)}_{\varepsilon',K} \to \psi^{(i)}_0$ и оценки для функций $\widetilde{u}^{(i)}_{\varepsilon',K}$, получим

$$\mathsf{c}_{jl} \delta_{jl} = \sum_{k=1}^{2m-1} \mathsf{b}^{jk}_0 \mathsf{b}^{lk}_0, \quad \mathsf{c}_{jj} \neq 0, \tag{10.11}$$

где δ_{jl} — символ Кронекера—Капелли.

Через $\mathsf{b}^{(j)}_0$ обозначим вектор с компонентами b^{jk}_0, $k = 1, \dots, 2m-1$, $j \notin I$, $j = 1, \dots, 2m-1$. Ввиду (10.11) имеется $(2m-1)$ ненулевых попарно ортогональных q-мерных векторов $\mathsf{b}^{(i)}_0$, где $q < 2m-1$. Это противоречие доказывает лемму. $\square$

Лемма 10.4. *Пусть* $\lambda^{(1)}_{\varepsilon}$ *и* $\lambda^{(2)}_{\varepsilon}$ *— собственные значения задачи* (7.1), (7.2) *с асимптотиками* (7.12), (7.13), (7.14), *соответствующие индексам* n *и* m, $n \neq m$, *и пусть выполнены условия* (7.10), (7.10). *Тогда верна равномерная по* ε *и* μ *оценка*

$$\left|\lambda^{(1)}_{\varepsilon} - \lambda^{(2)}_{\varepsilon}\right| \geqslant C\varepsilon^4 (A+\mu). \tag{10.12}$$

Доказательство. Если $\lambda^{(i)}_{\varepsilon}$, $i = 1, 2$, сходятся к различным предельным собственным значениям, то оценка (10.12) очевидна. Поэтому далее предполагаем, что $\lambda^{(i)}_{\varepsilon}$ сходятся к одному и тому же собственному значению λ_0. Вначале рассмотрим случай $A = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\lambda^{(1)}_{\varepsilon} = \lambda_0 + \mu \frac{2\lambda_0}{\lambda_0 - n^2} + O(\mu(\mu + \varepsilon^3)), \qquad \lambda^{(2)}_{\varepsilon} = \lambda_0 + \mu \frac{2\lambda_0}{\lambda_0 - m^2} + O(\mu(\mu + \varepsilon^3)),\\
&\lambda^{(1)}_{\varepsilon} - \lambda^{(2)}_{\varepsilon} = \mu \frac{2\lambda_0 (n^2 - m^2)}{(\lambda_0 - n^2)(\lambda_0 - m^2)} + O(\mu(\mu + \varepsilon^3)),
\end{aligned}$$

откуда следует (10.12) для $A = 0$. Пусть теперь $A > 0$. Если $\varepsilon = o(\mu^{\frac{1}{3}})$, то из (7.13) следует, что

$$\lambda^{(1)}_{\varepsilon} - \lambda^{(2)}_{\varepsilon} = \mu \frac{2\lambda_0 (n^2 - m^2)}{(\lambda_0 - n^2 + A^2)(\lambda_0 - m^2 + A^2)} + O(\varepsilon^3),$$

откуда уже вытекает (10.12) при $A > 0$, $\varepsilon = o(\mu^{\frac{1}{3}})$. Если же $\mu = o(\varepsilon^3)$, то

$$\begin{aligned}\lambda_\varepsilon^{(1)} - \lambda_\varepsilon^{(2)} &= -\,\varepsilon^3\frac{A^2\lambda_0\zeta(3)}{4}\left(\frac{\lambda_0+2n^2}{\lambda_0-n^2+A^2}-\frac{\lambda_0+2m^2}{\lambda_0-m^2+A^2}\right)+O(\varepsilon^4+\mu) = \\ &= -\,\varepsilon^3\frac{A^2\lambda_0\zeta(3)(2A^2+3\lambda_0)(n^2-m^2)}{(\lambda_0-n^2+A^2)(\lambda_0-m^2+A^2)}+O(\varepsilon^4+\mu),\end{aligned}$$

и оценка (10.12) верна и в этом случае. Если же $\mu = O(\varepsilon^3)$, то с учетом условий (7.10), (7.11) несложно видеть, что

$$\begin{aligned}\lambda_\varepsilon^{(1)} - \lambda_\varepsilon^{(2)} &= \frac{\lambda_0(n^2-m^2)\left(8\mu-\varepsilon^3A^2\zeta(3)(2A^2+3\lambda_0)\right)}{4(\lambda_0-n^2+A^2)(\lambda_0-m^2+A^2)}+ \\ &+\varepsilon^4\frac{\pi^4\lambda_0(8\lambda_0+1)(n^2-m^2)}{5760(\lambda_0-n^2+A^2)(\lambda_0-m^2+A^2)}+O(\varepsilon^5) = \\ &= \varepsilon^3\frac{\lambda_0(n^2-m^2)\left(8c-A^2\zeta(3)(2A^2+3\lambda_0)\right)}{4(\lambda_0-n^2+A^2)(\lambda_0-m^2+A^2)}+ \\ &+\varepsilon^4\frac{\pi^4\lambda_0(8\lambda_0+1)(n^2-m^2)}{5760(\lambda_0-n^2+A^2)(\lambda_0-m^2+A^2)}+O(\varepsilon^5),\end{aligned}$$

Если первый член в этой формуле не равен нулю, то с учетом условия (7.11) сразу получаем неравенство (10.12). Если же первый член обращается в нуль, то второй член уже не обращается в нуль, и мы вновь приходим к (10.12). Лемма доказана. ☐

Доказательство теоремы 7.1. В доказательстве мы придерживаемся обозначений, введенных в доказательстве леммы 10.3, и рассматриваем только случай, разобранный в доказательстве этой леммы; остальные случаи исследуются аналогично. Покажем, что собственное значение $\lambda_\varepsilon^{(j)}$ простое, если соответствующий индекс n_i равен нулю, и двукратное, если этот индекс положителен. Рассмотрим собственные значения $\lambda_\varepsilon^{(2p-2)}$ и $\lambda_\varepsilon^{(2p-1)}$, соответствующие одному и тому же номеру $n_p > 0$. В силу леммы 10.3 эти собственные значения имеют одинаковое асимптотическое разложение. Покажем, что они совпадают. В силу леммы 10.4 остальные собственные значения возмущенной задачи, сходящиеся к λ_0 имеют асимптотики, отличные от асимптотики для $\lambda_\varepsilon^{(2p-2)}$ и $\lambda_\varepsilon^{(2p-1)}$. Поэтому условие $\lambda_\varepsilon^{(2p-2)} = \lambda_\varepsilon^{(2p-1)}$ эквивалентно двукратности собственного значения $\lambda_\varepsilon^{(2p-1)}$. Выпишем представления (10.9) для функций $\widetilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{(2p-2)}$ и $\widetilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{(2p-1)}$:

$$\widetilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{(i)} = \sum_{j=2p-2}^{2p-1}\mathsf{b}_\varepsilon^{ij}\psi_\varepsilon^{(j)}+\widehat{u}_\varepsilon^{(i)}, \qquad \widehat{u}_\varepsilon^{(i)} = \widetilde{u}_\varepsilon^{(i)}+\sum_{\substack{k=1\\k\neq 2p-2\\k\neq 2p-1}}^{2m-1}\mathsf{b}_\varepsilon^{ik}\psi_\varepsilon^{(k)}, \qquad i = 2p-2, 2p-1. \tag{10.13}$$

В силу леммы 10.4 и определения величин $\mathsf{b}_\varepsilon^{ik}$ получаем:

$$\mathsf{b}_\varepsilon^{ik} = O(\varepsilon^{K-4}), \qquad i = 2p-2, 2p-1, \qquad k = 1, \ldots, 2m-1, \qquad k \neq 2p-2, 2p-1.$$

Так как

$$\|\widetilde{u}_\varepsilon^{(i)}\| = O(\varepsilon^K(A+\mu)),$$

то

$$\|\widehat{u}_\varepsilon^{(i)}\| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

если $K \geqslant 5$. В силу теоремы 9.1 верны сходимости

$$\widetilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{(2p-2)} \to J_{n_p}\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)\phi^+(n_p\theta), \qquad \widetilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{(2p-1)} \to J_{n_p}\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)\phi^-(n_p\theta) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Следовательно, существуют две линейные комбинации собственных функций $\psi_\varepsilon^{(2p-2)}$ и $\psi_\varepsilon^{(2p-1)}$, сходящиеся к $J_{n_p}\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)\phi^\pm(n_p\theta)$:

$$\begin{aligned}&\mathsf{c}_\varepsilon^{(1)}\psi_\varepsilon^{(2p-2)}+\mathsf{c}_\varepsilon^{(2)}\psi_\varepsilon^{(2p-2)} \to J_{n_p}\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)\phi^+(n_p\theta),\\ &\mathsf{c}_\varepsilon^{(3)}\psi_\varepsilon^{(2p-2)}+\mathsf{c}_\varepsilon^{(4)}\psi_\varepsilon^{(2p-2)} \to J_{n_p}\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)\phi^-(n_p\theta),\end{aligned} \tag{10.14}$$

$$\mathsf{c}^{(1)}_\varepsilon = \mathsf{b}^{2p-2,2p-2}_\varepsilon, \qquad \mathsf{c}^{(2)}_\varepsilon = \mathsf{b}^{2p-2,2p-1}_\varepsilon, \tag{10.15}$$

$$\mathsf{c}^{(3)}_\varepsilon = \mathsf{b}^{2p-1,2p-2}_\varepsilon, \qquad \mathsf{c}^{(4)}_\varepsilon = \mathsf{b}^{2p-1,2p-1}_\varepsilon. \tag{10.16}$$

Введем функции

$$\widehat{\psi}^{(i)}_\varepsilon(r,\theta) = \psi^{(i)}_\varepsilon(r,\theta)\left(r, \theta + \left[\frac{N}{4n_p}\right]\varepsilon\pi\right), \qquad i = 2p-2, 2p-1,$$

где $[\,\cdot\,]$ — целая часть числа. Легко видеть, что $\widehat{\psi}^{(i)}_\varepsilon$ — собственные функции возмущенной задачи, соответствующие $\lambda^{(i)}_\varepsilon$. Предположим, что собственные значения $\lambda^{(i)}_\varepsilon$, $i = 2p-2, 2p-1$, различные. Тогда собственные функции, соответствующие собственным значениям, ортонормированы в $L_2(D)$. В этом случае

$$\widehat{\psi}^{(2p-2)}_\varepsilon = \mathsf{c}^{(5)}_\varepsilon \psi^{(2p-2)}_\varepsilon, \qquad \widehat{\psi}^{(2p-1)}_\varepsilon = \mathsf{c}^{(6)}_\varepsilon \psi^{(2p-1)}_\varepsilon, \qquad |\mathsf{c}^{(5)}_\varepsilon| = |\mathsf{c}^{(6)}_\varepsilon| = 1.$$

Из этих равенств и (10.14) получаем:

$$\begin{aligned} &\mathsf{c}^{(5)}_\varepsilon \mathsf{c}^{(1)}_\varepsilon \psi^{(2p-2)}_\varepsilon + \mathsf{c}^{(6)}_\varepsilon \mathsf{c}^{(2)}_\varepsilon \psi^{(2p-2)}_\varepsilon \to -J_{n_p}\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)\phi^-(n_p\theta), \\ &\mathsf{c}^{(5)}_\varepsilon \mathsf{c}^{(3)}_\varepsilon \psi^{(2p-2)}_\varepsilon + \mathsf{c}^{(6)}_\varepsilon \mathsf{c}^{(4)}_\varepsilon \psi^{(2p-2)}_\varepsilon \to J_{n_p}\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)\phi^+(n_p\theta). \end{aligned} \tag{10.17}$$

Вычисляя скалярные произведения в $L_2(D)$ функций из левых частей сходимостей в (10.14) и (10.17), получаем:

$$\mathsf{c}^{(1)}_\varepsilon \mathsf{c}^{(3)}_\varepsilon \mathsf{c}^{(5)}_\varepsilon + \mathsf{c}^{(2)}_\varepsilon \mathsf{c}^{(4)}_\varepsilon \mathsf{c}^{(6)}_\varepsilon \to -\mathsf{c}, \qquad \mathsf{c}^{(1)}_\varepsilon \mathsf{c}^{(3)}_\varepsilon \mathsf{c}^{(5)}_\varepsilon + \mathsf{c}^{(2)}_\varepsilon \mathsf{c}^{(4)}_\varepsilon \mathsf{c}^{(6)}_\varepsilon \to \mathsf{c},$$

$$\mathsf{c} = \left\| J_{n_p}\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)\phi^+(n_p\theta)\right\|^2 = \left\| J_{n_p}\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)\phi^-(n_p\theta)\right\|^2.$$

Эти сходимости не могут быть выполнены одновременно, и потому $\lambda^{(2p-2)}_\varepsilon = \lambda^{(2p-1)}_\varepsilon$. Следовательно, если $n_p > 0$, то соответствующее собственное значение $\lambda^{(2p-2)}_\varepsilon = \lambda^{(2p-1)}_\varepsilon$ двукратное. Собственное значение возмущенной задачи, соответствующее индексу $n_p = 0$, имеет асимптотику, отличную от асимптотик, соответствующих другим индексам, что означает простоту данного собственного значения.

Переходим к обоснованию асимптотик собственных функций возмущенной задачи. Пусть $n_p > 0$. Положим

$$\Psi^{(i)}_\varepsilon = \sum_{j=2p-2}^{2p-1} \mathsf{b}^{ij}_\varepsilon \psi^{(j)}_\varepsilon, \quad i = 2p-2, 2p-1.$$

Ясно, что $\Psi^{(i)}_\varepsilon$ являются собственными функциями, соответствующими двукратному собственному значению $\lambda^{(2p-2)}_\varepsilon$. В силу (10.13), приведенных выше оценок для $\widehat{u}^{(i)}_\varepsilon$ и сходимости $\widetilde{\psi}^{(i)}_{\varepsilon,K}$ к $\psi^{(i)}_0$ выводим, что $\Psi^{(i)}_\varepsilon$ сходится к $\psi^{(i)}_0$. Соотношения (10.13), оценки для $\widehat{u}^{(i)}_\varepsilon$ и другие утверждения теорем 8.1 и 9.1 о функциях $R_{\varepsilon,K}$ дают неравенства

$$\|\psi^{(i)}_{\varepsilon,K} - \Psi^{(i)}_\varepsilon\| \leqslant \|\widetilde{\psi}^{(i)}_{\varepsilon,K} - \Psi^{(i)}_\varepsilon\| + \|\widetilde{\psi}^{(i)}_{\varepsilon,K} - \psi^{(i)}_\varepsilon\| \leqslant \|\widehat{u}^{(i)}_\varepsilon\| + \|\widetilde{\psi}^{(i)}_{\varepsilon,K} - \psi^{(i)}_\varepsilon\| = O(\varepsilon^{K-4}),$$

которые означают, что асимптотики для собственных функций, соответствующих двукратным собственным значениям $\lambda^{(2p-2)}_\varepsilon = \lambda^{(2p-1)}_\varepsilon$, имеют вид (9.1).

Для простого собственного значения $\lambda^{(1)}_\varepsilon$ мы рассматриваем соответствующую собственную функцию

$$\Psi^{(1)}_\varepsilon = \mathsf{b}^{11}_\varepsilon \psi^{(1)}_\varepsilon,$$

сходящуюся к $J_0\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)$. По аналогии со случаем двукратного собственного значения легко доказывается оценка

$$\left\|\psi^{(1)}_{\varepsilon,K} - \Psi^{(1)}_\varepsilon\right\| = O\left(\varepsilon^{K-4}\right),$$

что означает, что асимптотика собственной функции, соответствующей $\lambda^{(1)}_\varepsilon$ имеет вид (8.33). Теорема 7.1 доказана. ☐

11. Приложение

Здесь мы доказываем, что для некоторых положительных A существуют λ_0, являющиеся корнями уравнения (7.5) одновременно для различных n. Обозначим:

$$\mathsf{f}_{n,A}(t)=tJ_n'(t)+AJ_n(t),\qquad n\in\mathbb{Z}_+,\qquad A\geqslant 0,\qquad t\in(0,+\infty).$$

Нули функции $\mathsf{f}_{n,A}(t)$ для неотрицательных A суть корни уравнения (7.5). Докажем, что существуют $A>0$, n, m, $n\neq m$, для которых функции $\mathsf{f}_{n,A}$ и $\mathsf{f}_{m,A}$ имеют общий положительный корень. Положим

$$\mathsf{F}_{n,m}(t)=t\left(J_n'(t)J_m(t)-J_m'(t)J_n(t)\right).$$

Пусть $t=t_0$ — нуль функции $\mathsf{F}_{n,m}$ и не является нулем функций J_n и J_m. Тогда из равенства

$$t_0\left(J_n'(t_0)J_m(t_0)-J_m'(t_0)J_n(t_0)\right)=0$$

следует, что

$$t_0\frac{J_n'(t_0)}{J_n(t_0)}=t_0\frac{J_m'(t_0)}{J_m(t_0)}.$$

Пусть

$$B=\frac{t_0J_n'(t_0)}{J_n(t_0)}.$$

Если $B\leqslant 0$, то точка t_0 — общий нуль функций $\mathsf{f}_{n,A}$ и $\mathsf{f}_{m,A}$ с $A=-B$. Таким образом, достаточно отыскать нуль функции $\mathsf{F}_{n,m}$ для некоторых n и m и проверить неравенство

$$\frac{t_0J_n'(t_0)}{J_n(t_0)}<0.$$

Возьмем $n=6$, $m=3$. Тогда

$$\mathsf{F}_{6,3}(8)\approx -0{,}1673037488<0,\qquad \mathsf{F}_{6,3}(9)\approx 0{,}0658220035>0.$$

Так функция $\mathsf{F}_{6,3}$ — гладкая, то существует нуль функции $\mathsf{F}_{6,3}$ на интервале $(8,9)$, который мы обозначим через t_0. Пусть $j_{p,q}$, $j_{p,q}'$ — положительные нули функций J_p и J_p', взятые в порядке возрастания:

$$j_{p,1}<j_{p,2}<\ldots,\qquad j_{p,1}'<j_{p,2}'<\ldots$$

Имеем:

$$\begin{aligned} j_{3,1}&\approx 6{,}380161896<8, & j_{3,2}&\approx 9{,}761023130>9,\\ j_{6,1}&\approx 9{,}936109524>9, & j_{6,1}'&\approx 7{,}501266145<8.\end{aligned}$$

Эти равенства означают, функции J_3 и J_6 не имеют нулей на интервале $(8,9)$. Функция $J_6(t)$ положительна для $t\in(0,j_{6,1})$ и $j_{6,1}'<8<9<j_{6,1}$. Поэтому выполнены неравенства

$$J_6(t)>0,\qquad J_6'(t)<0\quad\text{при}\quad t\in(8,9),$$

откуда уже следует, что

$$t\frac{J_6'(t)}{J_6(t)}<0\quad\text{при}\quad t\in(8,9).$$

Таким образом, существует нуль t_0 функции $\mathsf{F}_{6,3}$ на интервале $(8,9)$, не являющийся нулем функций J_3 и J_6, и более того, $t_0J_6'(t_0)/J_6(t_0)<0$. Следовательно, t_0 является корнем уравнения (7.5) одновременно для $n=6$ и $n=3$ с

$$A=-t_0\frac{J_6'(t_0)}{J_6(t_0)}>0.$$

Глава 4

ДВУМЕРНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НЕПЕРИОДИЧЕСКИМ ЧЕРЕДОВАНИЕМ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ: УСРЕДНЕННОЕ ТРЕТЬЕ КРАЕВОЕ УСЛОВИЕ

12. Постановка задачи и основные результаты главы

В настоящей главе мы вновь возвращаемся к задаче (1.1), (1.2) и, как и в предыдущей главе, рассматриваем случай усредненного третьего краевого условия. Однако здесь изучается более сложная задача о построении асимптотических разложений в случае принципиально непериодического чередования. Основной целью является выяснение максимально слабых ограничений на множество γ_ε, оставляющих возможность построить первые члены асимптотических разложений собственных элементов задачи (1.1), (1.2). Сформулируем эти ограничения в виде следующих условий.

(C2). *Существует функция* $\theta=\theta(s)$, *заданная на границе множества* ω, *принимающая значения на отрезке* $[0,2\pi]$, *удовлетворяющая условиям* (1.3), *и положительная ограниченная функция* $\eta=\eta(\varepsilon)$, *такие что*

$$\theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon)=\theta_\varepsilon(s_0^\varepsilon)+\varepsilon\pi j,\qquad c_3\eta(\varepsilon)\leqslant a_j(\varepsilon)+b_j(\varepsilon)\leqslant 2c_2^{-1}\eta(\varepsilon),\tag{12.1}$$

где c_3 — *некоторая положительная константа, не зависящая от* ε, η *и* j, *а для функции* η *выполнено равенство* (7.3) *с* $A=\mathrm{const}\geqslant 0$. *Если* $A>0$, *то при* $\varepsilon\to 0$ *функция* $\theta_\varepsilon(s)$ *сходится в* $C^1[0,S]$ *к некоторой функции* $\theta_0(s)$, $\theta_0'\in C^\infty(\partial\omega)$. *Норма* $\|\theta_\varepsilon'\|_{C^3(\partial\omega)}$ *ограничена равномерно по* ε.

Соотношения (12.1) более слабые по сравнению с равенствами (1.4). Геометрически равенства из (12.1) означают, что с помощью функции θ_ε точки $\{x_j^\varepsilon\}$ можно отобразить в периодическое множество точек, лежащее на единичной окружности. Более того, точку x_j^ε можно выбрать *произвольно* на множестве $\gamma_{\varepsilon,j}$, переопределив соответственно функции a_j и b_j. Поэтому равенства из (12.1) являются (достаточно слабым) ограничением на распределение множеств $\gamma_{\varepsilon,j}$ на границе $\partial\omega$. Неравенства из (12.1) означают, что длины множеств $\gamma_{\varepsilon,j}$ должны иметь одинаковый порядок малости при $\varepsilon\to 0$. Этот порядок малости описывается функцией η, в то время как в теоремах 1.1, 1.2 ввиду локальной периодичности чередования функция η описывала точные длины множеств $\gamma_{\varepsilon,j}$. Таким образом, условию (C2) подчиняется достаточно широкий класс множеств γ_ε, описывающих принципиально непериодическое чередование. Как и в предыдущей главе, равенство (7.3) и сходимость функции θ_ε при $A>0$ призваны обеспечить усредненное второе либо третье краевое условие. А именно, согласно [65, 66, 91], при выполнении условия (C2) собственные значения задачи (1.1), (1.2) сходятся с сохранением совокупной кратности к собственным значениям задачи

$$-\Delta\psi_0=\lambda_0\psi_0,\quad \mathrm{x}\in\omega,\qquad \left(\frac{\partial}{\partial\nu}+A\theta_0'\right)\psi_0=0,\quad \mathrm{x}\in\partial\omega,\tag{12.2}$$

где при $A=0$ полагаем $\theta_0(s)\equiv s$.

Для того, чтобы сформулировать основные результаты второй главы диссертации, нам понадобятся следующие вспомогательные обозначения.

Функцию θ_ε продолжим на значения $s\in[-S,2S)$ по правилу

$$\theta_\varepsilon(s)=\theta_\varepsilon(s-kS)+2\pi k,\qquad s\in[kS,(k+1)S),\quad k=-1,0,1.$$

Обозначим:

$$d_j(\varepsilon)=\frac{a_j(\varepsilon)+b_j(\varepsilon)}{2\eta(\varepsilon)},\qquad d^j(\varepsilon)=\frac{\theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon+\varepsilon b_j(\varepsilon))-\theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon-\varepsilon a_j(\varepsilon))}{2\varepsilon\eta(\varepsilon)},$$
$$\delta_j(\varepsilon)=d_{j+1}(\varepsilon)-d_j(\varepsilon),\qquad \delta^j(\varepsilon)=d^{j+1}(\varepsilon)-d^j(\varepsilon).$$

Пусть $\chi(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $t<\dfrac{1}{4}$ и нулю при $t>\dfrac{3}{4}$ и принимающая значения из отрезка $[0,1]$. Введем еще одну функцию $\mathsf{f}_\varepsilon(\theta)$

следующим образом:

$$\mathsf{f}_\varepsilon(\theta) = d^{j+1}(\varepsilon) - \chi\left(\frac{\theta - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon)}{\varepsilon\pi}\right)\delta^j(\varepsilon) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \theta - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon) \leqslant \varepsilon\pi, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

Следующее утверждение носит вспомогательный характер и необходимо для формулировки основных результатов главы. Его доказательство проводится в разделе 13.

Лемма 12.1. *Пусть* $A \geqslant 0$, *функция* $\theta'_\varepsilon(s) \in C^\infty(\partial\omega)$ *равномерно по* ε *ограничена в норме* $C(\partial\omega)$ *и для* $A > 0$ *имеет место сходимость* $\|\theta'_\varepsilon - \theta'_0\|_{C(\partial\omega)} \to 0$. *Тогда для каждого простого собственного значения* λ_0 *задачи* (12.2) *существует единственное и простое собственное значение задачи*

$$-\Delta\Psi_0 = \Lambda_0\Psi_0, \quad \mathsf{x} \in \omega, \tag{12.3}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\nu} + (A+\mu)\theta'_\varepsilon\right)\Psi_0 = 0, \quad \mathsf{x} \in \partial\omega, \tag{12.4}$$

сходящееся к λ_0 *при* $(\varepsilon, \mu) \to 0$, *где* μ *— малый положительный параметр. Для соответствующим нормированных в* $L_2(\omega)$ *собственных функций имеет место сильная в* $W_2^1(\omega)$ *сходимость* $\Psi_0 \to \psi_0$. *Собственное значение* $\Lambda_0(\mu, \varepsilon)$ *и соответствующая собственная функция* $\Psi_0(\mathsf{x}, \mu, \varepsilon)$ *голоморфны по* μ; *последняя — в норме* $W_2^1(\omega)$.

Основными результатами второй главы диссертации являются следующие утверждения.

Теорема 12.1. *Пусть выполнены условия* (C2) *и равенство*

$$\delta_*(\varepsilon) \equiv \max_j |\delta_j(\varepsilon)| = o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A+\mu)^{-1}), \tag{12.5}$$

где $\mu = \mu(\varepsilon)$ *определено формулой* (7.8). *Тогда для каждого собственного значения* λ_0 *задачи* (12.2) *существует единственное сходящееся к нему собственное значение* λ_ε *задачи* (1.1), (1.2). *Это собственное значение простое и имеет следующую двупараметрическую асимптотику*:

$$\lambda_\varepsilon = \Lambda_0(\mu, \varepsilon) + \varepsilon\Lambda_1(\mu, \varepsilon) + o(\varepsilon(A+\mu)), \tag{12.6}$$

$$\Lambda_1(\mu, \varepsilon) = (A+\mu)^2 \int\limits_{\partial\omega} (\Psi_0(\mathsf{x}, \mu, \varepsilon))^2 \ln \mathsf{f}_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s))\theta'_\varepsilon(s)\, ds, \tag{12.7}$$

где Λ_0 *и* Ψ_0 *удовлетворяют утверждению леммы* 12.1. *Функция* Λ_1 *неположительна и голоморфна по* μ. *Асимптотика соответствующей собственной функции* ψ_ε *в норме* $W_2^1(\omega)$ *имеет вид* (15.2).

Обратим внимание на равенство (12.5). Величины δ_j характеризуют разность длин двух соседних множеств $\gamma_{\varepsilon,j+1}$ и $\gamma_{\varepsilon,j}$, поэтому равенство (12.5) фактически означает, что длины двух соседних составляющих γ_ε не очень сильно отличаются друг от друга.

Отметим, что произвол в выборе срезающей функции χ не оказывает существенного влияния на вид члена $\varepsilon\Lambda_1$ в асимптотике (12.6). Выбор функции χ влияет на значения функции $f_\varepsilon(\theta)$ только при $\frac{\pi}{4}\varepsilon < \theta - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon) < \frac{3\pi}{4}\varepsilon$, где в силу (12.5) выполнено $f_\varepsilon(\theta) = o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A+\mu)^{-1})$. Поэтому произвол в выборе χ способен изменить слагаемое $\varepsilon\Lambda_1$ лишь на величину $o(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(A+\mu)$, что не превышает остатка в асимптотике.

В следующей теореме приведены асимптотики собственных значений возмущенной задачи в случае нарушения равенства (12.5) и сохранения остальных условий теоремы 12.1.

Теорема 12.2. *Пусть выполнено условие* (C2). *Тогда для каждого собственного значения* λ_0 *задачи* (12.2) *существует единственное сходящееся к нему собственное значение* λ_ε *задачи* (1.1), (1.2). *Собственное значение* λ_ε *простое и имеет следующую двупараметрическую асимптотику*:

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \mu \int\limits_{\partial\omega} (\psi_0(\mathsf{x}))^2 \theta'_\varepsilon(s) \mathrm{d}s + O\left(\mu^2 + \mu\varepsilon^{\frac{3}{2}} + A(\sigma_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{2}})\right), \tag{12.8}$$

где $\sigma_\varepsilon = \|\theta'_\varepsilon - \theta'_0\|_{C(\partial\omega)}$. *Асимптотика соответствующей собственной функции* ψ_ε *в норме* $W_2^1(\omega)$ *имеет вид* (15.3).

Асимптотика (12.8) конструктивна при $A = 0$, а в случае $A > 0$ — при $\sigma_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{2}} = o(\mu)$. Случай кратного предельного собственного значения в условиях теорем 12.1, 12.2 рассматривается аналогично.

Теоремы 12.1, 12.2 являются обобщениями аналогичных результатов работ [23,26].

Доказательство теорем 12.1, 12.2 проводится следующим образом. В разделе 13 демонстрируются основные идеи формального построения асимптотических разложений в условиях теорем 12.1, 12.2, позволяющие учесть непериодическую структуру чередования. В построении, помимо метода пограничного слоя и метода многих масштабов, используется и метод согласования асимптотических разложений. На основе последнего строится внутреннее разложение, которое вместе с пограничным слоем позволяет удовлетворить требуемым граничным условиям. Используемая здесь схема построения является нетривиальным обобщением схемы из [23,26], использованной для изучения локально периодической смены граничных условий в предыдущих главах.

Первые члены асимптотик, формально построенные в разделе 13, после подстановки в исходную задачу не дают невязок нужного порядка малости. Чтобы добиться невязок нужного порядка малости, приходиться строить дополнительные вспомогательные члены асимптотических разложений. Это построение проводится в разделе 14, результатом которого является построение формального асимптотического решения и оценка невязок в терминах ε, μ и δ_*. В разделе 15 проводится обоснование асимптотических разложений, что завершает доказательство теорем 12.1, 12.2.

Результаты данной главы были опубликованы в [10,13,16].

13. Формальное построение асимптотических разложений

В настоящем разделе будет продемонстрирована схема построения формальных асимптотических разложений собственных элементов задачи (1.1), (1.2) в условиях теорем 12.1, 12.2. Данная схема позволяет учесть принципиально непериодическое чередование граничных условий. Как и в предыдущей главе, в формальном построении применяются метод многих масштабов, метод пограничного слоя и метод согласования асимптотических разложений. Всюду в главе будем считать выполненным условие (C2).

Так как собственное значение λ_0 задачи (12.2) простое, то из [65,66,91] следует, что к нему сходится одно собственное значение λ_ε задачи (1.1), (1.2), и это собственное значение — простое.

Асимптотику собственного значения λ_ε будем строить в виде:

$$\lambda_\varepsilon = \Lambda_0(\mu,\varepsilon) + \varepsilon\Lambda_1(\mu,\varepsilon) + \ldots \tag{13.1}$$

Асимптотика ψ_ε строится на основе комбинации метода согласования асимптотических разложений, метода пограничного слоя и метода многих масштабов. Как и в предыдущей главе, эта асимптотика будет получена как сумма трех разложений: внешнего разложения, пограничного слоя и внутреннего разложения. Внешнее разложение будем строить следующим образом:

$$\psi_\varepsilon^{ex}(\mathsf{x},\mu) = \Psi_0(\mathsf{x},\mu,\varepsilon) + \varepsilon\Psi_1(\mathsf{x},\mu,\varepsilon) + \ldots \tag{13.2}$$

Пограничный слой строится в виде:

$$\psi_\varepsilon^{bl}(\xi,s,\mu) = \varepsilon v_1(\xi,s,\mu,\varepsilon) + \varepsilon^2 v_2(\xi,s,\mu,\varepsilon) + \ldots, \tag{13.3}$$

где $\xi = (\xi_1,\xi_2)$ — растянутые переменные,

$$\xi_1 = (\theta_\varepsilon(s) - \theta_\varepsilon(s_0^\varepsilon))\varepsilon^{-1}, \quad \xi_2 = \tau\theta'_\varepsilon(s)\varepsilon^{-1}. \tag{13.4}$$

Напомним, что координаты (s,τ) были определены в разделе 13. Выбор переменных ξ будет пояснен в замечании 13.1.

Внутреннее разложение будем строить на основе метода согласования асимптотических разложений в малых окрестностях точек x_j^ε в виде:

$$\psi_\varepsilon^{in,j}(\varsigma^j,s,\mu) = w_{0,0}^{(j)}(\varsigma^j,s,\mu,\varepsilon) + \varepsilon w_{1,0}^{(j)}(\varsigma^j,s,\mu,\varepsilon) + \ldots, \tag{13.5}$$

где $\varsigma^j = (\varsigma_1^j,\varsigma_2^j)$,

$$\varsigma_1^j = (\xi_1 - \pi j)\eta^{-1}, \quad \varsigma_2^j = \xi_2\eta^{-1}. \tag{13.6}$$

Целью данного раздела является определение вида функций Λ_i, Ψ_i, v_i и $w_{i,0}$.

Уравнения для функций Ψ_0 и Ψ_1 получаются стандартной подстановкой (13.1) и (13.2) в уравнение (1.1) с последующим выписыванием коэффициентов при одинаковых степенях ε. Такая процедура приводит к уравнению (12.3) для функции Ψ_0 и следующему уравнению для Ψ_1:

$$(\Delta + \Lambda_0)\Psi_1 = -\Lambda_1\Psi_0, \quad \mathsf{x} \in \omega. \tag{13.7}$$

Граничные условия для функций Ψ_0 и Ψ_1 будут определены ниже при построении пограничного слоя и внутреннего разложения.

Определим пограничный слой. Вначале получим задачи для функций v_i, для чего подставим (2.5), (13.1), (13.2) в (1.1), перейдем к переменным ξ и выпишем коэффициенты при старших степенях ε. Тогда для функций v_1 и v_2 получим следующие уравнения:

$$\Delta_\xi v_1 = 0, \quad \xi_2 > 0, \tag{13.8}$$

$$\Delta_\xi v_2 = \frac{1}{\theta'_\varepsilon}\left(\left(1 + 2\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right)\left(\mathsf{k}\frac{\partial}{\partial\xi_2} - \frac{\theta''_\varepsilon}{\theta'_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right) - 2\frac{\partial^2}{\partial\xi_1\partial s}\right)v_1, \quad \xi_2 > 0. \tag{13.9}$$

Следуя методу пограничного слоя, потребуем, чтобы сумма функций ψ^{ex}_ε и ψ^{bl}_ε удовлетворяла однородному граничному условию Неймана всюду на $\partial\omega$ за исключением точек x^ε_j:

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\psi^{ex}_\varepsilon - \frac{\partial}{\partial\tau}\psi^{bl}_\varepsilon = 0, \qquad \mathsf{x} \in \partial\omega, \quad \mathsf{x} \neq x^\varepsilon_j.$$

Переписываем теперь второе слагаемое в последнем равенстве к переменным ξ и заменяем функции ψ^{ex}_ε и ψ^{bl}_ε на правые части равенств (13.2) и (13.3), после чего вычисляем коэффициенты при старших степенях ε, которые приравниваем к нулю. В результате получаем граничные условия для функций v_i:

$$\frac{\partial v_i}{\partial\xi_2} = \frac{1}{\theta'_\varepsilon}\Psi^\nu_{i-1}, \quad \xi \in \Gamma(0), \tag{13.10}$$

$$\Psi^\nu_i = \Psi^\nu_i(s, \mu, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial\nu}\Psi_i(\mathsf{x}, \mu, \varepsilon), \quad \mathsf{x} \in \partial\omega.$$

Замечание 13.1. Как и в первой главе, переменная ξ_1 выбирается так, чтобы задачи для функций v_i были периодичны по ξ_1. Здесь эту периодичность обеспечивают равенства из (12.1). Указанный выбор ξ_2 позволяет получить уравнения Пуассона для функций v_1 и v_2.

Согласно методу пограничного слоя, будем искать экспоненциально убывающие при $\xi_2 \to +\infty$ решения задач (13.8), (13.9), (13.10). Как и в предыдущей главе, пограничный слой контролирует только граничное условие Неймана, так как мы перешли к формальному пределу при $\eta \to 0$ при выводе граничного условия (13.10).

Задача (13.8), (13.10) решается явно:

$$v_1(\xi, s, \mu, \varepsilon) = -\frac{1}{\theta'_\varepsilon(s)}\Psi^\nu_0(s, \mu, \varepsilon)X(\xi) \in \mathcal{V}^+_0(0), \tag{13.11}$$

где функция X — из (8.14). Заметим, что в силу (8.15) в точках $\xi^{(j)} = (\pi j, 0)$, $j \in \mathbb{Z}$, функция X имеет логарифмические особенности:

$$X(\xi) = \ln\rho_j + \ln 2 - \xi_2 + O(\rho_j^2), \quad \xi \to \xi^{(j)}, \tag{13.12}$$

где $\rho_j = |\xi - \xi^{(j)}|$, $j \in \mathbb{Z}$. Аналогично лемме 8.3 решение задачи (13.9), (13.10) также можно построить в явном виде. Прямыми вычислениями проверяем, что функция

$$\widetilde{v}_2 = \frac{\Psi^\nu_0}{2(\theta'_\varepsilon)^2}\xi_2^2\left(\frac{\theta''_\varepsilon}{\theta'_\varepsilon}\frac{\partial X}{\partial\xi_1} - \mathsf{k}\frac{\partial X}{\partial\xi_2}\right) - \frac{1}{\theta'_\varepsilon}\left(\frac{\Psi^\nu_0}{\theta'_\varepsilon}\right)'\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} t\frac{\partial}{\partial\xi_1}X(\xi_1, t)\,dt$$

является решением уравнения (13.9), удовлетворяющим однородному граничному условию Неймана на $\Gamma(0)$. Выясним асимптотику функции $\widetilde{v}_2$ при $\xi \to \xi^{(j)}$. В силу π-периодичности по ξ_1

достаточно вычислить эту асимптотику при $\xi \to 0$ и распространить ее затем на остальные точки $\xi^{(j)}$. Асимптотика первого слагаемого в определении $\widetilde{v}_2$ вычисляется непосредственно из (13.12). Определим асимптотику интеграла в определении $\widetilde{v}_2$. Имеем:

$$\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} t\frac{\partial}{\partial\xi_1}X(\xi_1,t)\,dt = \left(\int\limits_0^{+\infty} - \int\limits_0^{\xi_2}\right) t\frac{\partial}{\partial\xi_1}X(\xi_1,t)\,dt.$$

В силу гармоничности X, а также нечетности и π-периодичности $\dfrac{\partial X}{\partial\xi_1}$ по ξ_1, выводим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\xi_1}\int\limits_0^{+\infty} t\frac{\partial}{\partial\xi_1}X(\xi_1,t)\,dt &= -\int\limits_0^{+\infty} t\frac{\partial^2}{\partial t^2}X(\xi_1,t)\,dt = -X(\xi_1,0),\\
\int\limits_0^{+\infty} t\frac{\partial}{\partial\xi_1}X(\xi_1,t)\,dt &= \int\limits_{\xi_1}^{\frac{\pi}{2}} X(t,0)\,dt + \int\limits_0^{+\infty} t\frac{\partial}{\partial\xi_1}X(\xi_1,t)\,dt\Big|_{\xi_1=\frac{\pi}{2}} =\\
&= \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\xi_1}\right) X(t,0)\,dt = -\int\limits_0^{\xi_1} X(t,0)\,dt.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} t\frac{\partial}{\partial\xi_1}X(\xi_1,t)\,dt = -\int\limits_0^{\xi_2} t\frac{\partial}{\partial\xi_1}X(\xi_1,t)\,dt - \int\limits_0^{\xi_1}\ln(2\sin t)\,dt.$$

Отсюда и из (13.12) с учетом периодичности $\widetilde{v}_2$ по ξ_1 уже нетрудно вывести, что

$$\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} t\frac{\partial}{\partial\xi_1}X(\xi_1,t)\,dt = -\xi_1\ln|\rho_j| + \xi_1(\ln 2 - 1) + O(|\rho_j|^3), \qquad \xi \to \xi^{(j)}. \tag{13.13}$$

Таким образом, для функции $\widetilde{v}_2$ верна дифференцируемая асимптотика:

$$\widetilde{v}_2 = O(\rho_j\ln\rho_j), \qquad \xi \to \xi^{(j)}, \tag{13.14}$$

а потому $\widetilde{v}_2 \in \mathcal{V}_1(0)$. Учитывая все перечисленные свойства функции $\widetilde{v}_2$ и свойства функции X, приходим к выражению для функции v_2:

$$v_2(\xi,s,\mu,\varepsilon) = \widetilde{v}_2(\xi,s,\mu,\varepsilon) - \frac{1}{\theta'_\varepsilon(s)}\Psi_1^\nu(s,\mu,\varepsilon)X(\xi). \tag{13.15}$$

Как следует из (13.11), (13.12), (13.14), (13.15), функции v_i имеют логарифмические особенности в окрестностях точек $\xi^{(j)}$, или, что тоже самое, в окрестности точек x_j^ε. Кроме того, сумма внешнего разложения и пограничного слоя не удовлетворяет даже асимптотически граничному условию Дирихле на γ_ε. Поэтому в окрестности точек x_j^ε вводятся новые растянутые переменные ς^j, а асимптотика собственной функции строится в виде внутреннего разложения $\psi_\varepsilon^{in,j}$ методом согласования асимптотических разложений.

Вначале проведем процедуру согласования в окрестности точки x_j^ε. Для краткости обозначим $\varsigma = \varsigma^j$. Ниже будет показано, что $\Psi_i \in C^\infty(\overline{\omega})$. Поэтому при $\tau \to 0$ верны асимптотики:

$$\psi_\varepsilon^{ex}(\mathrm{x}) = \sum_{i=0}^{1}\varepsilon^i\left(\Psi_i^D(s,\mu,\varepsilon) - \tau\Psi_i^\nu(s,\mu,\varepsilon)\right) + O(\tau^2), \tag{13.16}$$

где Ψ_i^D — значения функций Ψ_i при $\mathrm{x} \in \partial\omega$. Учитывая асимптотики (13.12), (13.14) и определения функций v_i, получаем, что при $\xi \to \xi^{(j)}$

$$\psi_\varepsilon^{bl}(\xi,s,\mu) = -\varepsilon(\ln\rho_j + \ln 2 - \xi_2)\sum_{i=0}^{1}\varepsilon^i\frac{\Psi_i^\nu(s,\mu,\varepsilon)}{\theta'_\varepsilon(s)} + O(\rho_j\ln\rho_j). \tag{13.17}$$

Перепишем теперь асимптотики (13.16), (13.17) в переменных ς и учтем, что в силу (7.9) выполнено равенство $\varepsilon \ln \eta(\varepsilon) = -(A+\mu)^{-1}$. Тогда получим, что при $\eta^{\frac{1}{4}} < 4\rho_j < 3\eta^{\frac{1}{4}}$ или, что тоже самое, при $\eta^{-\frac{3}{4}} < 4|\varsigma| < 3\eta^{-\frac{3}{4}}$

$$\psi_\varepsilon^{ex}(\mathrm{x}) + \psi_\varepsilon^{bl}(\xi, s, \mu) = W_{0,0}(s,\mu,\varepsilon) + \varepsilon W_{1,0}(\varsigma, s, \mu, \varepsilon) + O(\varepsilon^3 \eta |\varsigma| \ln|\varsigma|), \tag{13.18}$$

$$W_{0,0} = \Psi_0^D + \frac{\Psi_0^\nu}{(A+\mu)\theta'_\varepsilon}, \tag{13.19}$$

$$W_{1,0} = -\frac{\Psi_0^\nu}{\theta'_\varepsilon}(\ln|\varsigma| + \ln 2) + \Psi_1^D + \frac{\Psi_1^\nu}{(A+\mu)\theta'_\varepsilon}. \tag{13.20}$$

Согласно методу согласования асимптотических разложений, из (13.18) вытекает, что функции $w_{i,0}^{(j)}$ должны иметь следующие асимптотики на бесконечности:

$$w_{i,0}^{(j)} = W_{i,0} + o(1), \quad \varsigma \to \infty. \tag{13.21}$$

Задачи для функций $w_{i,0}$ получаем стандартной подстановкой (13.1) и (13.5) в краевую задачу (1.1), (1.2) и выписыванием коэффициентов при старших степенях ε и η:

$$\Delta_\varsigma w_{i,0}^{(j)} = 0, \quad \varsigma_2 > 0, \quad w_{i,0}^{(j)} = 0, \quad \varsigma \in \gamma_j^1, \quad \frac{\partial}{\partial \varsigma_2} w_{i,0}^{(j)} = 0, \quad \varsigma \in \Gamma_j^1. \tag{13.22}$$

Здесь γ_j^1 — интервал $(-2\alpha^j, 2\beta^j)$ на оси $O\varsigma_1$, $\Gamma_j^1 = O\varsigma_1 \setminus \overline{\gamma}_j^1$,

$$a^j(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\left(\theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon) - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon - \varepsilon a_j(\varepsilon))\right), \qquad \alpha_j = \alpha^j(\varepsilon) = \frac{1}{2}a^j(\varepsilon)\eta^{-1}(\varepsilon),$$

$$b^j(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\left(\theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon + \varepsilon b_j(\varepsilon)) - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon)\right), \qquad \beta^j = \beta^j(\varepsilon) = \frac{1}{2}b^j(\varepsilon)\eta^{-1}(\varepsilon).$$

Исследуем разрешимость задачи для $w_{0,0}^{(j)}$ с заданной асимптотикой (13.19), (13.21). Вначале докажем вспомогательную лемму. Обозначим $\delta^*(\varepsilon) = \max\limits_j |\delta^j(\varepsilon)|$.

Лемма 13.1. *Пусть выполнено условие* (C2). *Тогда справедливы оценки*

$$\frac{c_1 c_3}{2} \leqslant \alpha^j(\varepsilon) + \beta^j(\varepsilon) \leqslant 1, \qquad \delta^*(\varepsilon) \leqslant C(\delta_*(\varepsilon) + \varepsilon),$$

где константа C не зависит от ε и η.

Доказательство. В силу теоремы Лагранжа и определения функций a^j и b^j имеем:

$$a^j(\varepsilon) + b^j(\varepsilon) = \theta'_\varepsilon(S_{j,\varepsilon}^{(1)})(a_j(\varepsilon) + b_j(\varepsilon)), \tag{13.23}$$

где $S_{j,\varepsilon}^{(1)}$ — некоторая точка из интервала $(s_j^\varepsilon - \varepsilon a_j(\varepsilon), s_j^\varepsilon + \varepsilon b_j(\varepsilon))$. Используя теперь неравенства (12.1) и оценку производной θ'_ε из условия (C2), приходим к первому неравенству из утверждения леммы.

Положим:

$$\alpha_j(\varepsilon) = \frac{a_j(\varepsilon)}{2\eta(\varepsilon)}, \qquad \beta^j(\varepsilon) = \frac{b_j(\varepsilon)}{2\eta(\varepsilon)}.$$

Отметим, что $d_j = \alpha_j + \beta_j$. Из (13.23), определения $\delta^j(\varepsilon)$ и теоремы Лагранжа выводим:

$$\begin{aligned}\delta^j &= \theta'_\varepsilon(S_{j+1,\varepsilon}^{(1)})d_{j+1} - \theta'_\varepsilon(S_{j,\varepsilon}^{(1)})d_j = d_j(\theta'_\varepsilon(S_{j+1,\varepsilon}^{(1)}) - \theta'_\varepsilon(S_{j,\varepsilon}^{(1)})) + \theta'_\varepsilon(S_{j+1,\varepsilon}^{(1)})\delta_j = \\ &= d_j\theta''_\varepsilon(S_{j,\varepsilon}^{(2)})(S_{j+1,\varepsilon}^{(1)} - S_{j,\varepsilon}^{(1)}) + \theta'_\varepsilon(S_{j+1,\varepsilon}^{(1)})\delta_j,\end{aligned}$$

где по определению $S_{j,\varepsilon}^{(1)}$ точка $S_{j,\varepsilon}^{(2)}$ лежит в интервале $(s_j^\varepsilon - \varepsilon a_j(\varepsilon), s_{j+1}^\varepsilon + \varepsilon b_{j+1}(\varepsilon))$. Из полученного представления для δ^j, ограниченности нормы $\|\theta'_\varepsilon\|_{C^3(\partial\omega)}$ и легко доказываемого соотношения

$$c_1|s_{j+1}^\varepsilon - s_j^\varepsilon| \leqslant \theta_\varepsilon(s_{j+1}^\varepsilon) - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon) = \varepsilon\pi$$

вытекает второе неравенство из утверждения леммы. Лемма доказана. ☐

Из доказанной леммы очевидным образом вытекают следствия.

Следствие 13.1. *В условиях теоремы* 12.1 *выполнено* $\delta^*(\varepsilon) = o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A+\mu)^{-1})$.

Следствие 13.2. *Функция* $\delta^*(\varepsilon)$ *ограничена.*

Из леммы 13.1 следует, что $\alpha^j + \beta^j > 0$, т. е. длина множества γ_j^1 положительна. Учитывая данное обстоятельство и вид задачи (13.22), заключаем, что данная задача не имеет ограниченных на бесконечности нетривиальных решений. Ввиду (13.19), (13.21) это дает:

$$w_{0,0}^{(j)} = 0.$$

Из этого равенства и асимптотики (13.19), (13.21) вытекает граничное условие (12.4) для функции Ψ_0.

Доказательство леммы 12.1. Краевая задача (12.3), (12.4) является регулярно возмущенной. Сходимость собственных значений и утверждаемая голоморфность собственных элементов по μ легко устанавливается, если переписать (12.3), (12.4) к операторному уравнению и применить затем результаты [43, гл. 7]. Лемма доказана. □

Функции Λ_0 и Ψ_0 выберем так, чтобы они сходились к λ_0 и ψ_0 при $(\varepsilon,\mu)\to(0,0)$. Возможность такого выбора гарантируется леммой 12.1. Отметим также, что, благодаря гладкости границы $\partial\omega$ и функции θ_ε', функция Ψ_0 — бесконечно дифференцируема по x в $\overline{\omega}$.

Определим теперь функцию $w_{1,0}$. Пусть

$$Z^{(j)}(\varsigma,\varepsilon) = \operatorname{Re}\ln\big(y^{(j)} + \sqrt{(y^{(j)})^2 - 1}\big), \qquad y^{(j)} = \frac{\varsigma_1 + \mathrm{i}\varsigma_2 + \alpha^j - \beta^j}{\alpha^j + \beta^j}. \tag{13.24}$$

Здесь $(\alpha^j + \beta^j) > 0$ в силу леммы 13.1. Легко убедиться, что $Z^{(j)} \in \mathcal{W}$, где обозначено

$$\mathcal{W} \equiv C^\infty(\{\varsigma:\ \varsigma_2 \geqslant 0,\ \varsigma \neq (-2\alpha^j, 0),\ \varsigma \neq (2\beta^j, 0)\}) \cap W_2^1(\{\varsigma:\ \varsigma_2 > 0,\ |\varsigma| < 5\}). \tag{13.25}$$

Функция $Z^{(j)}$ — решение задачи (13.22), имеющее на бесконечности асимптотику (см. (8.27)):

$$Z^{(j)} = \ln|\varsigma| + \ln 2 - \ln(\alpha^j + \beta^j) + (\alpha^j - \beta^j)\varsigma_1|\varsigma|^{-2} + O(|\varsigma|^{-2}), \quad \varsigma\to\infty. \tag{13.26}$$

В силу перечисленных свойств $Z^{(j)}$, функция $w_{1,0}^{(j)}$ имеет следующий вид:

$$w_{1,0}^{(j)}(\varsigma, s, \mu, \varepsilon) = -\frac{\Psi_0^\nu(s,\mu,\varepsilon)}{\theta_\varepsilon'(s)} Z^{(j)}(\varsigma,\varepsilon).$$

Ясно, что $w_{1,0}^{(j)} \in \mathcal{W}$. Выпишем теперь асимптотику функции $w_{1,0}^{(j)}$ на бесконечности (см. (13.26)) и сравним ее с (13.20), (13.21). В результате такого сравнения приходим к равенству

$$\frac{\Psi_0^\nu(s,\mu,\varepsilon)}{\theta_\varepsilon'(s)}\ln(\alpha^j(\varepsilon) + \beta^j(\varepsilon)) = \Psi_1^D(s,\mu,\varepsilon) + \frac{\Psi_1^\nu(s,\mu,\varepsilon)}{(A+\mu)\theta_\varepsilon'(s)}. \tag{13.27}$$

Это равенство фактически является граничным условием для функции Ψ_1. Необходимо лишь корректно определить правую часть граничного условия, которая бы учитывала то обстоятельство, что, вообще говоря, величины $\ln(\alpha^j + \beta^j)$ зависят от номера j и параметра ε. Так как согласование проводится в окрестности точки x_j^ε, то переменная s в равенстве (13.27) меняется в малой (порядка $O(\varepsilon\eta^{\frac{1}{4}})$) окрестности точки s_j^ε. Следовательно, чтобы удовлетворить равенству (13.27), достаточно построить функцию, которая была бы равна $(\alpha^j + \beta^j)$ в указанных окрестностях точек s_j^ε и заменить затем $(\alpha^j + \beta^j)$ в (13.27) на эту функцию. Функция $\mathrm{f}_\varepsilon(\theta)$, как несложно убедиться, бесконечно дифференцируема по θ и равна $(\alpha^j + \beta^j)$ при $|\theta - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon)| \leqslant \varepsilon\dfrac{\pi}{4}$. Поэтому в качестве функции, на которую заменяется сумма $(\alpha^j + \beta^j)$ в (13.27), мы берем $\mathrm{f}_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s))$, что дает граничное условие для Ψ_1:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\nu} + (A+\mu)\theta_\varepsilon'\right)\Psi_1 = (A+\mu)\Psi_0^\nu \ln \mathrm{f}_\varepsilon(\theta_\varepsilon), \quad \mathrm{x}\in\partial\omega.$$

Теперь еще учтем, что $\Psi_0^\nu = -(A+\mu)\theta_\varepsilon'\Psi_0^D$, и окончательно получаем:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\nu} + (A+\mu)\theta_\varepsilon'\right)\Psi_1 = -(A+\mu)^2\Psi_0^D\theta_\varepsilon' \ln \mathrm{f}_\varepsilon(\theta_\varepsilon), \quad \mathrm{x}\in\partial\omega. \tag{13.28}$$

Задача (13.7), (13.28) разрешима при подходящем выборе Λ_1. Условие разрешимости получается стандартно, путем умножения уравнения (13.7) на Ψ_0 и интегрированием по частям с учетом граничного условия (13.28). Принимая во внимание нормировку функции Ψ_0, из указанного условия разрешимости получаем формулу (12.7) для первого члена асимптотики. Из леммы 13.1 и определения f_ε следует оценка:

$$\frac{c_1 c_3}{2} \leqslant \mathsf{f}_\varepsilon(\theta) \leqslant 1, \tag{13.29}$$

откуда в силу формулы (12.7) вытекает неположительность Λ_1. Утверждаемая голоморфность Λ_1 по μ является следствием соответствующих свойств Ψ_0, ограниченности θ'_ε и $\mathsf{f}_\varepsilon(\theta)$ и оценки нормы $\|\Psi_0\|_{L_2(\partial\omega)}$ через $\|\Psi_0\|_{W_2^1(\omega)}$.

Функция Ψ_1 определена с точностью до слагаемого $C\Psi_0$, $C = \mathrm{const}$; данный произвол фиксируем, считая Ψ_1 ортогональной Ψ_0 в $L_2(\omega)$. Функция $\ln \mathsf{f}_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s))$ — гладкая, поэтому нетрудно показать, что $\Psi_1 \in C^\infty(\overline{\omega})$. Кроме того, функция Ψ_1 голоморфна по μ в норме $W_2^1(\omega)$, что несложно доказать, используя результаты [43].

Проведенное построение позволило определить первые члены асимптотических разложений λ_ε и ψ_ε на формальном уровне. Для того, чтобы обосновать эти асимптотики, предварительно надо доказать, что данные асимптотики являются формальным асимптотическим решением возмущенной задачи, т. е. удовлетворяют ей с точностью до достаточно малой невязки. Однако построенные асимптотики не дают порядка малости невязки, достаточного для последующего обоснования. Чтобы добиться невязки нужного порядка малости, необходимо построить дополнительные члены в асимптотических разложениях для λ_ε и ψ_ε. Данное построение будет проведено в следующем разделе.

14. Формальное асимптотическое решение

В настоящем разделе будет получено формальное асимптотическое решение задачи (1.1), (1.2). Как уже было сказано в конце предыдущего раздела, для этого нужно построить дополнительные члены в формальных асимптотических разложениях λ_ε и ψ_ε. Во внешнем разложении необходимо построить одно дополнительное слагаемое:

$$\psi_\varepsilon^{ex}(\mathsf{x},\mu) = \Psi_0(\mathsf{x},\mu,\varepsilon) + \varepsilon\Psi_1(\mathsf{x},\mu,\varepsilon) + \varepsilon^2\Psi_2(\mathsf{x},\mu,\varepsilon) + \ldots \tag{14.1}$$

В пограничном слое необходимо построить еще два члена:

$$\psi_\varepsilon^{bl}(\xi,s,\mu) = \sum_{i=1}^{4} \varepsilon^i v_i(\xi,s,\mu,\varepsilon) + \ldots \tag{14.2}$$

С учетом равенства $w_{0,0}^{(j)} = 0$ и дополнительных членов внутреннее разложение имеет следующий вид:

$$\psi_\varepsilon^{in,j}(\varsigma^j,s,\mu) = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon^i w_{i,0}^{(j)}(\varsigma^j,s,\mu,\varepsilon) + \eta\sum_{i=1}^{4} \varepsilon^i w_{i,1}^{(j)}(\varsigma^j,s,\mu,\varepsilon) + \ldots \tag{14.3}$$

Во внешнем разложении (14.1) первые члены известны, осталось определить лишь функцию Ψ_2. Эта функция будет в дальнейшем использована только для возможности согласования дополнительных членов внутреннего разложения. Как и ранее, согласование будет влиять лишь на вид граничного условия для Ψ_2, а потому есть произвол в выборе уравнения для Ψ_2, так как конкретный вид этого уравнения не оказывает существенного влияния на оценку невязки. Уравнение для Ψ_2 мы выбираем так, чтобы гарантировать его разрешимость и упростить дальнейшие вычисления. Эти две цели достигаются за счет следующего выбора:

$$(\Delta - 1)\Psi_2 = -\Lambda_1\Psi_1, \quad \mathsf{x} \in \omega. \tag{14.4}$$

Дополнительные члены пограничного слоя зададим так:

$$v_3 = \frac{\Psi_1^\nu}{2(\theta'_\varepsilon)^2}\xi_2^2\left(\frac{\theta''_\varepsilon}{\theta'_\varepsilon}\frac{\partial X}{\partial\xi_1} - \mathsf{k}\frac{\partial X}{\partial\xi_2}\right) - \frac{1}{\theta'_\varepsilon}\left(\frac{\Psi_1^\nu}{\theta'_\varepsilon}\right)' \int\limits_{\xi_2}^{+\infty} t\frac{\partial}{\partial\xi_1}X(\xi_1,t)\,dt + 4\mathsf{a}_6\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} tX(\xi_1,t)\,dt - \frac{1}{\theta'_\varepsilon}\Psi_2^\nu X,$$

$$v_4 =\frac{\Psi_2^\nu}{2(\theta'_\varepsilon)^2}\xi_2^2\left(\frac{\theta''_\varepsilon}{\theta'_\varepsilon}\frac{\partial X}{\partial\xi_1}-\mathsf{k}\frac{\partial X}{\partial \xi_2}\right)-\frac{1}{\theta'_\varepsilon}\left(\frac{\Psi_2^\nu}{\theta'_\varepsilon}\right)'\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} t\frac{\partial}{\partial\xi_1}X(\xi_1,t)\,dt,$$

где $\mathsf{a}_6=\mathsf{a}_6(s,\mu,\varepsilon)$ — некоторая функция, которая будет определена ниже, Ψ_2^ν — значение нормальной производной Ψ_2 на границе $\partial\omega$. Легко убедиться, что $v_3, v_4 \in \mathcal{V}_0(0)$.

Для того чтобы провести согласование асимптотических разложений и определить внутреннее разложение, нам понадобятся асимптотики функций v_i при $\xi\to\xi^{(j)}$. Асимптотика интеграла $\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} tX(\xi_1,t)\,dt$ легко получается интегрированием (13.13) по ξ_1 с учетом соотношений:

$$\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} tX(0,t)\,dt=\left(\int\limits_0^{+\infty}-\int\limits_0^{\xi_2}\right)tX(0,t)\,dt=-\frac{1}{4}\zeta(3)-\int\limits_0^{\xi_2}tX(0,t)\,dt.$$

В результате получаем:

$$\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} tX(\xi_1,t)\,dt=-\frac{1}{4}\zeta(3)+O(\rho_j\ln\rho_j),\quad \xi\to\xi^{(j)}. \tag{14.5}$$

В результате, с учетом (13.12), (13.13) и определения функций v_i, приходим к дифференцируемым асимптотикам при $\xi\to\xi^{(j)}$:

$$\begin{aligned}
v_1(\xi,s,\mu,\varepsilon)=&-\frac{\Psi_0^\nu}{\theta'_\varepsilon}(\ln\rho_j+\ln 2-\xi_2)+O(\rho_j^2),\\
v_2(\xi,s,\mu,\varepsilon)=&-\frac{\Psi_1^\nu}{\theta'_\varepsilon}(\ln\rho_j+\ln 2-\xi_2)+\mathsf{V}_\varepsilon(\xi-\xi^{(j)},s,\Psi_0^\nu(s,\mu,\varepsilon))+O(\rho_j^2),\\
v_3(\xi,s,\mu,\varepsilon)=&-\frac{\Psi_2^\nu}{\theta'_\varepsilon}(\ln\rho_j+\ln 2-\xi_2)-\zeta(3)\mathsf{a}_6(s,\mu,\varepsilon)+\\
&+\mathsf{V}_\varepsilon(\xi-\xi^{(j)},s,\Psi_1^\nu(s,\mu,\varepsilon))+O(\rho_j^2\ln\rho_j),\\
v_4(\xi,s,\mu,\varepsilon)=&\mathsf{V}_\varepsilon(\xi-\xi^{(j)},s,\Psi_2^\nu(s,\mu,\varepsilon))+O(\rho_j^2),\\
\mathsf{V}_\varepsilon(\xi,s,\Psi(s))=&\frac{\Psi(s)}{2(\theta'_\varepsilon(s))^2}\frac{\xi_2^2}{|\xi|^2}\left(\frac{\theta''_\varepsilon(s)}{\theta'_\varepsilon(s)}\xi_1-\mathsf{k}(s)\xi_2\right)+\\
&+\frac{1}{\theta'_\varepsilon(s)}\left(\frac{\Psi(s)}{\theta'_\varepsilon(s)}\right)'\xi_1\left(\ln|\xi|+\ln 2-1\right).
\end{aligned}$$

Коэффициенты внешнего разложения в окрестности границы $\partial\omega$ удовлетворяют соотношениям:

$$\Psi_i=\Psi_i^D-\tau\Psi_i^\nu+O(\tau^2),\quad \tau\to 0,\quad i=0,1,2.$$

Переписывая теперь вышеприведенные асимптотики функций v_i и Ψ_j к переменным ς, с учетом (7.9) получаем, что при $\eta^{\frac{1}{4}}<4\rho_j<3\eta^{\frac{1}{4}}$ $(\eta^{-\frac{3}{4}}<4|\varsigma|<3\eta^{-\frac{3}{4}})$ справедливо равенство:

$$\psi_\varepsilon^{ex}(\mathsf{x},\mu)+\psi_\varepsilon^{bl}(\xi,s,\mu)=\sum_{k=1}^{3}\varepsilon^k W_{k,0}(\varsigma,s,\mu,\varepsilon)+\eta\sum_{k=1}^{4}\varepsilon^k W_{k,1}(\varsigma,s,\mu\,\varepsilon)+O(\eta^2|\varsigma|^2\ln|\varsigma|), \tag{14.6}$$

$$W_{2,0}=-\frac{\Psi_1^\nu}{\theta'_\varepsilon}(\ln|\varsigma|+\ln 2)+\Psi_2^D+\frac{\Psi_2^\nu}{(A+\mu)\theta'_\varepsilon},\qquad W_{3,0}=-\frac{\Psi_2^\nu}{\theta'_\varepsilon}(\ln|\varsigma|+\ln 2)-\zeta(3)\mathsf{a}_6, \tag{14.7}$$

$$W_{1,1}=-\frac{1}{(A+\mu)\theta'_\varepsilon}\left(\frac{\Psi_0^\nu}{\theta'_\varepsilon}\right)'\varsigma_1,\qquad W_{k,1}=\mathsf{V}_\varepsilon(\varsigma,s,\Psi_{k-2}^\nu)-\frac{1}{(A+\mu)\theta'_\varepsilon}\left(\frac{\Psi_{k-1}^\nu}{\theta'_\varepsilon}\right)'\varsigma_1,\quad k=2,3.$$

Здесь

$$\Psi_2^D=\Psi_2^D(s,\mu,\varepsilon)=\Psi_2(\mathsf{x},\mu,\varepsilon),\quad \mathsf{x}\in\partial\omega,\qquad \Psi_3^\nu\equiv 0.$$

Следовательно, функции $w_{k,i}^{(j)}$ должны удовлетворять асимптотикам:

$$w_{k,i}^{(j)}=W_{k,i}+o(|\varsigma|^i),\quad \varsigma\to\infty. \tag{14.8}$$

Задачи для коэффициентов внутреннего разложения получаем как и ранее, подстановкой (13.1) и (14.3) в (1.1), (1.2) и выписыванием коэффициентов при старших степенях ε и η:

$$\begin{aligned}\Delta_\varsigma w^{(j)}_{k,1} =&\frac{1}{\theta'_\varepsilon}\left(\left(1+2\varsigma_2\frac{\partial}{\partial\varsigma_2}\right)\left(\mathsf{k}\frac{\partial}{\partial\varsigma_2}-\frac{\theta''_\varepsilon}{\theta'_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\varsigma_1}\right)-2\frac{\partial^2}{\partial\varsigma_1\partial s}\right)w^{(j)}_{k-1,0}, \quad \varsigma_2>0,\\ w^{(j)}_{k,1} =&0, \quad \varsigma\in\gamma^1_j, \qquad \frac{\partial}{\partial\varsigma_2}w^{(j)}_{k,1}=0, \quad \varsigma\in\Gamma^1_j,\end{aligned}$$

$k=2,3,4$; а для $w^{(j)}_{1,1}$ и $w^{(j)}_{k,0}$, $k=2,3$ получаем краевую задачу (13.22). Функции $w^{(j)}_{k,0}$, $k=2,3$, определим следующим образом:

$$w^{(j)}_{k,0}=-\frac{\Psi^\nu_{k-1}}{\theta'_\varepsilon}Z^{(j)}\in\mathcal{W}. \tag{14.9}$$

Теперь выпишем асимптотики функций $w^{(j)}_{k,0}$ (см. (13.26), (14.9)) и сравним их с асимптотиками (14.7), (14.8). Тогда получим два равенства:

$$\begin{aligned}&\frac{\Psi^\nu_1(s,\mu,\varepsilon)}{\theta'_\varepsilon(s)}\ln(\alpha^j(\varepsilon)+\beta^j(\varepsilon))=\Psi^D_2(s,\mu,\varepsilon)+\frac{\Psi^\nu_2(s,\mu,\varepsilon)}{(A+\mu)\theta'_\varepsilon(s)},\\ &\frac{\Psi^\nu_2(s,\mu,\varepsilon)}{\theta'_\varepsilon(s)}\ln(\alpha^j(\varepsilon)+\beta^j(\varepsilon))=-\zeta(3)\mathsf{a}(s,\mu,\varepsilon).\end{aligned}$$

Первое из полученных равенств приводит к граничному условию для Ψ_2:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\nu}+(A+\mu)\theta'_\varepsilon(s)\right)\Psi_2=(A+\mu)\Psi^\nu_1(s,\mu,\varepsilon)\ln\mathsf{f}_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s)), \quad \mathsf{x}\in\partial\omega, \tag{14.10}$$

а второе позволяет определить функцию a_6:

$$\mathsf{a}_6(s,\mu,\varepsilon)=-\frac{1}{\zeta(3)\theta'_\varepsilon(s)}\Psi^\nu_2(s,\mu,\varepsilon)\ln\mathsf{f}_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s)).$$

Краевая задача (14.4), (14.10) однозначно разрешима. Правые части в уравнении (14.4) и граничном условии (14.10) содержат гладкие по x и s функции, а потому $\Psi_2\in C^\infty(\overline{\omega})$.

Вернемся к построению внутреннего разложения. Несложно проверить, что функция

$$Z^{(j)}_1(\varsigma,\varepsilon)=\big(\alpha^j(\varepsilon)+\beta^j(\varepsilon)\big)\operatorname{Re}\sqrt{(y^{(j)})^2-1}\in\mathcal{W} \tag{14.11}$$

является решением краевой задачи (13.22) с асимптотикой

$$Z^{(j)}_1(\varsigma,\varepsilon)=\varsigma_1+O(|\varsigma|^{-1}), \quad \varsigma\to\infty. \tag{14.12}$$

Следовательно, функция $w^{(j)}_{1,1}$ имеет вид:

$$w^{(j)}_{1,1}=-\frac{1}{(A+\mu)\theta'_\varepsilon}\left(\frac{\Psi^\nu_0}{\theta'_\varepsilon}\right)'Z^{(j)}_1.$$

Остальные функции внутреннего разложения также строятся явно:

$$\begin{aligned}w^{(j)}_{k,1} =&\frac{\Psi^\nu_{k-2}}{2(\theta'_\varepsilon)^2}\varsigma_2^2\left(\frac{\theta''_\varepsilon}{\theta'_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\varsigma_1}-\mathsf{k}\frac{\partial}{\partial\varsigma_2}\right)Z^{(j)}+\frac{1}{\theta'_\varepsilon}\left(\frac{\Psi^\nu_{k-2}}{\theta'_\varepsilon}\right)'\varsigma_1Z^{(j)}+\\ &+\frac{1}{\theta'_\varepsilon}\left(\left(\frac{\Psi^\nu_{k-2}}{\theta'_\varepsilon}\right)'\big(\ln(\alpha^j+\beta^j)-1\big)-\frac{1}{(A+\mu)}\left(\frac{\Psi^\nu_{k-1}}{\theta'_\varepsilon}\right)'\right)Z^{(j)}_1\in\mathcal{W},\end{aligned}$$

где $k=2,3,4$. Используя асимптотики (13.26) и (14.12), непосредственно проверяем, что

$$w^{(j)}_{k,i}=W_{k,i}+O(|\varsigma|^{i-1}), \qquad \varsigma\to\infty. \tag{14.13}$$

Формальное построение внешнего разложения (14.1), пограничного слоя (14.2) и внутреннего разложения (14.3) закончено.

Обозначим $\omega^{bl}=\{\mathsf{x}:0<\tau<c_0\}$, где c_0, напомним, малое фиксированное число, такое что на множестве ω^{bl} координаты (s,τ) определены корректно, а функция $\mathsf{H}(s,\tau)$ не имеет нулей. Если не оговорено иное, всюду далее до конца главы посредством C будем обозначать различные не специфические константы, не зависящие от ε и μ.

Следующие пять лемм носят вспомогательный характер.

Лемма 14.1. *Пусть* $\varphi \in C^1(\overline{\omega})$ *и* $\widetilde{\varphi} \in C^1(\partial\omega)$. *Тогда существуют конечные пределы* $\lim\limits_{t\to+0} \|\varphi\|_{C^t(\overline{\omega})}$, $\lim\limits_{t\to+0} \|\widetilde{\varphi}\|_{C^t(\partial\omega)}$, *где* C^t — *пространства Гельдера. Верны равномерные оценки*:

$$\lim_{t\to+0} \|\varphi\|_{C^t(\overline{\omega})} \leqslant 3\|\varphi\|_{C(\omega)}, \quad \lim_{t\to+0} \|\widetilde{\varphi}\|_{C^t(\partial\omega)} \leqslant 3\|\widetilde{\varphi}\|_{C(\partial\omega)}.$$

Доказательство. Утверждение леммы докажем для $\|\varphi\|_{C^t(\overline{\omega})}$; для $\|\widetilde{\varphi}\|_{C^t(\partial\omega)}$ доказательство аналогично. Ясно, что достаточно выяснить сходимость и оценить предел величины

$$\langle\varphi\rangle_\omega^{(t)} = \sup_{\mathsf{x},\mathsf{y}\in\omega} \frac{|\varphi(\mathsf{x}) - \varphi(\mathsf{y})|}{|\mathsf{x} - \mathsf{y}|^t}.$$

Легко проверить, что для произвольного множества $\mathfrak{B}$ и заданных на нем ограниченных вещественнозначных функций $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ верны неравенства

$$|\sup_{\mathfrak{B}} \mathfrak{f} - \sup_{\mathfrak{B}} \mathfrak{g}| \leqslant \sup_{\mathfrak{B}} |\mathfrak{f} - \mathfrak{g}|.$$

Используя эти неравенства, получаем (d — диаметр области ω):

$$\begin{aligned}
|\mathsf{d}^t\langle\varphi\rangle_\omega^{(t)} - \langle\varphi\rangle_\omega^{(0)}| &\leqslant \sup_{\mathsf{x},\mathsf{y}\in\omega} |\varphi(\mathsf{x}) - \varphi(\mathsf{y})|\big(\mathsf{d}^t|\mathsf{x}-\mathsf{y}|^{-t} - 1\big) = \\
&= \sup_{\mathsf{x},\mathsf{y}\in\omega} \frac{|\varphi(\mathsf{x}) - \varphi(\mathsf{y})|}{|\mathsf{x}-\mathsf{y}|}\big(\mathsf{d}^t - |\mathsf{x}-\mathsf{y}|^t\big)|\mathsf{x}-\mathsf{y}|^{1-t} \leqslant \\
&\leqslant C\|\varphi\|_{C^1(\overline{\omega})} \max_{\mathsf{z}\in[0,\mathsf{d}]} (\mathsf{d}^t\mathsf{z}^{1-t} - \mathsf{z}) = C\mathsf{d}\|\varphi\|_{C^1(\overline{\omega})} \frac{t(1-t)^{\frac{1}{t}}}{1-t}.
\end{aligned}$$

Здесь константа C не зависит от t, а потому при $t \to +0$ выполнено $\langle\varphi\rangle_\omega^{(t)} \to \langle\varphi\rangle_\omega^{(0)}$, что и доказывает утверждение леммы для $\|\varphi\|_{C^t(\overline{\omega})}$. Лемма доказана. ☐

Лемма 14.2. *Пусть* $F = F(\mathsf{x}, \mu, \varepsilon) \in C^\infty(\overline{\omega})$ *и* $f = f(s, \mu, \varepsilon) \in C^\infty(\partial\omega)$ — *некоторые функции, чьи нормы* $\|f\|_{C(\partial\omega)}$, $\|F\|_{C(\overline{\omega})}$ *и* $\|F\|_{C^k(\overline{\omega}_1)}$, $\omega_1 \Subset \omega$ — *произвольная подобласть*, $k \in \mathbb{N}$, *ограничены равномерно по* ε *и* μ, $\mathsf{a}_0 = \mathsf{a}_0(\mu, \varepsilon)$ — *некоторая функция, равномерно ограниченная по* ε *и* μ. *Если краевая задача*

$$(\Delta + \mathsf{a}_0)u = F, \quad \mathsf{x} \in \omega, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial\nu} + (A+\mu)\theta_\varepsilon'\right)u = f, \quad \mathsf{x} \in \partial\omega. \tag{14.14}$$

имеет решение с равномерно ограниченной по ε *и* μ *нормой в* $W_2^1(\omega)$, *то для этого решения верны равномерные по* ε *и* μ *оценки*:

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{C^1(\omega)} \leqslant C(\|f\|_{C^1(\partial\omega)} + 1), \\
&\|u\|_{C^k(\overline{\omega}_1)} \leqslant C, \\
&\|u^\nu\|_{C(\partial\omega)} \leqslant C(A + \mu + \|f\|_{C(\partial\omega)}), \\
&\|u^\nu\|_{C^i(\partial\omega)} \leqslant C(\|f\|_{C^i(\partial\omega)} + 1), \quad i = 1, 2, \\
&\|u^\nu\|_{C^3(\partial\omega)} \leqslant C(\|F\|_{C^1(\overline{\omega})} + \|f\|_{C^3(\partial\omega)} + 1),
\end{aligned}$$

где $u^\nu = u^\nu(s, \mu, \varepsilon) = \dfrac{\partial u}{\partial\nu}(\mathsf{x}, \mu, \varepsilon)$, $\mathsf{x} \in \partial\omega$, $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Гладкость функций f и F позволяет утверждать, что решение $u \in C(\overline{\omega})$. Кроме того, в силу ограниченности нормы $\|u\|_{W_2^1(\omega)}$ для всякой пары строго внутренних подобластей $\omega_1 \Subset \omega_2 \Subset \omega$ выполнено

$$\|u\|_{H^{k+2}(\omega_1)} \leqslant C\left(\|F\|_{H^k(\omega_2)} + 1\right) \leqslant C, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Последние неравенства и теоремы вложения C^k в H^{k+2} позволяют утверждать, что верны оценки

$$\|u\|_{C^k(\overline{\omega}_1)} \leqslant C. \tag{14.15}$$

На области ω^{bl} сделаем замену функции u:

$$v(\mathsf{x}, \mu, \varepsilon) = u(\mathsf{x}, \mu, \varepsilon)\mathrm{e}^{-(A+\mu)\theta_\varepsilon'(s)\tau}(\mathsf{a}_7 - \mathsf{a}_8\tau^2),$$

где a_7 и a_8 — некоторые положительные числа. В силу (14.14) функция v есть решение задачи:

$$\left(\Delta_{\mathsf{x}} + \mathsf{a}_9 \frac{\partial}{\partial \mathsf{x}_1} + \mathsf{a}_{10} \frac{\partial}{\partial \mathsf{x}_2} + \mathsf{a}_{11}\right) v \equiv L_1 v = \widetilde{F}, \quad \mathsf{x} \in \omega^{bl},$$

$$v = \mathsf{a}_{12}, \quad \tau = c_0, \qquad \frac{\partial v}{\partial \tau} = -\mathsf{a}_7 f, \quad \tau = 0,$$

где

$$\widetilde{F} = \mathrm{e}^{-(A+\mu)\theta'_\varepsilon(s)\tau}(\mathsf{a}_7 - \mathsf{a}_8\tau^2)F, \qquad \mathsf{a}_i = \mathsf{a}_i(\mathsf{x}, \mu, \varepsilon), \quad i = 9, 10, 11,$$

$\mathsf{a}_{12} = \mathsf{a}_{12}(s, \mu, \varepsilon)$ — гладкие функции пространственных переменных, голоморфные по μ, причем

$$\|\mathsf{a}_{12}\|_{C(\{\tau = c_0\})} \leqslant C, \qquad \|\mathsf{a}_i\|_{C^1(\overline{\omega}^{bl})} \leqslant C,$$

см. (14.15)). Функции a_i, $i = 9, 10, 11$, легко получить в явном виде, мы не будем приводить здесь этих явных формул, отметим лишь, что за счет подходящего выбора констант a_7 и a_8 и константы c_0 из определения ω^{bl} всегда можно добиться выполнения неравенств $\mathsf{a}_7 - \mathsf{a}_8 c_0^2 > 0$, $\mathsf{a}_{11} \leqslant C < 0$ при $\mathsf{x} \in \overline{\omega}^{bl}$. Тогда для оператора L_1 и всякой функции $V \in C^2(\overline{\omega}^{bl})$ справедливо утверждение: если

$$L_1 V < 0, \quad \mathsf{x} \in \overline{\omega}^{bl}, \qquad V > 0, \quad \tau = c_0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \tau} < 0, \quad \tau = 0,$$

то $V > 0$. Действительно, если допустить обратное, то в точке минимума на $\overline{\omega}^{bl}$ функция V отрицательна, $\Delta V \geqslant 0$, $\nabla_{\mathsf{x}} V = 0$, т. е. в этой точке $L_1 V > 0$. Ясно, что данная точка минимума лежит строго внутри области ω^{bl}; полученное противоречие и доказывает утверждение. Берем теперь барьерную функцию $(\mathsf{a}_{13} - \mathsf{a}_{14}\tau - \mathsf{a}_{15}\tau^2)$, a_{13}, a_{14}, a_{15} — положительные константы и применяем данное утверждение к функциям $V = (\mathsf{a}_{13} - \mathsf{a}_{14}\tau - \mathsf{a}_{15}\tau^2) \pm v$, каждый раз подходящим образом выбирая константы a_i. В результате имеем оценку:

$$\begin{aligned}\|u\|_{C(\overline{\omega}^{bl})} \leqslant C\|v\|_{C(\overline{\omega}^{bl})} &\leqslant C\left(\|\widetilde{F}\|_{C(\overline{\omega}^{bl})} + \|f\|_{C(\partial\omega)} + \|\mathsf{a}_{12}\|_{C(\{\tau = c_0\})}\right) \leqslant \\ &\leqslant C\left(\|F\|_{C(\overline{\omega}^{bl})} + \|f\|_{C(\partial\omega)} + \|u\|_{C(\omega\setminus\omega^{bl})}\right) \leqslant C.\end{aligned}$$

Соединяя последнее неравенство с (14.15), окончательно получаем:

$$\|u\|_{C(\overline{\omega})} \leqslant C. \tag{14.16}$$

В [46, гл. 3, теорема 3.1] приводится оценка, которая позволяет оценить $\|u\|_{C^2(\overline{\omega})}$ через сумму норм Гельдера $\|F\|_{C^t(\overline{\omega})}$, $\|f\|_{C^{1+t}(\partial\omega)}$ и $\|u\|_{C(\overline{\omega})}$. Константы, входящие в эту оценку, будут иметь конечные пределы при $t \to +0$, если предварительно поделить уравнение и краевое условие из (14.14) на достаточно большое фиксированное число. Пределы норм функций F и f при $t \to +0$ оцениваются с помощью леммы 14.1, что в итоге дает оценку:

$$\|u\|_{C^2(\overline{\omega})} \leqslant C\left(\|F\|_{C(\overline{\omega})} + \|f\|_{C^1(\partial\omega)} + \|u\|_{C(\overline{\omega})}\right). \tag{14.17}$$

Из (14.16) и (14.17) выводим

$$\|u\|_{C^2(\overline{\omega})} \leqslant C\left(\|f\|_{C^1(\partial\omega)} + 1\right), \tag{14.18}$$

что дает требуемую оценку для $\|u\|_{C^1(\overline{\omega})}$. Очевидное равенство $u^\nu = -(A+\mu)\theta'_\varepsilon u + f$, (14.16), (14.18) и ограниченность $\|\theta'_\varepsilon\|_{C^2(\partial\omega)}$ приводят к оценкам для $\|u^\nu\|_{C^i(\partial\omega)}$, $i = 0, 1, 2$. Оценим $\|u^\nu\|_{C^3(\partial\omega)}$. При $\mathsf{x} \in \omega^{bl}$ продифференцируем задачу (14.14) по s. Тогда получим, что функция $U = \dfrac{\partial u}{\partial s}$ есть решение краевой задачи:

$$\begin{aligned}&\left(\Delta_{\mathsf{x}} + \frac{\partial \mathsf{H}^{-2}}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathsf{H}^{-2}}{\partial s^2} + \mathsf{a}_0\right) U = \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s}\frac{\mathsf{k}}{\mathsf{H}}\frac{\partial u}{\partial \tau} \equiv F_1, \quad \mathsf{x} \in \omega^{bl}, \\ &\left(\frac{\partial}{\partial \nu} + (A+\mu)\theta'_\varepsilon\right) U = f' - (A+\mu)\theta''_\varepsilon U \equiv f_1, \quad \mathsf{x} \in \partial\omega, \\ &\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \tau}, \quad \tau = c_0.\end{aligned}$$

Для такой задачи, вновь делая замену функции U и опираясь на [46, гл. 3, теорема 3.1], можно выписать оценку типа (14.17); здесь она будет иметь следующий вид:

$$\|U\|_{C^2(\overline{\omega}^{bl})} \leqslant C\Big(\|F_1\|_{C(\overline{\omega}^{bl})} + \|f_1\|_{C^1(\partial\omega)} + \Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial\tau}\Big\|_{C^1(\{\tau=c_0\})} + \|U\|_{C(\overline{\omega}^{bl})}\Big). \tag{14.19}$$

Величина $\Big\|\dfrac{\partial^2 u}{\partial s\partial\tau}\Big\|_{C^1(\{\tau=c_0\})}$ оценивается сверху некоторой константой C в силу (14.15); остальные слагаемые оцениваются с помощью (14.18):

$$\|F_1\|_{C(\overline{\omega}^{bl})} + \|f_1\|_{C^1(\partial\omega)} + \|U\|_{C(\overline{\omega}^{bl})} \leqslant C\left(\|F\|_{C^1(\overline{\omega}^{bl})} + \|f\|_{C^2(\partial\omega)} + 1\right).$$

Подставляя теперь полученную оценку в (14.19), приходим к неравенству

$$\Big\|\frac{\partial u}{\partial s}\Big\|_{C^2(\overline{\omega}^{bl})} \leqslant C\left(\|F\|_{C^1(\overline{\omega})} + \|f\|_{C^2(\partial\omega)} + 1\right),$$

из которого, с учетом равенства $u^\nu = -(A+\mu)\theta'_\varepsilon u + f$ и ограниченности $\|\theta'_\varepsilon\|_{C^3(\partial\omega)}$, вытекает требуемая оценка для $\|u^\nu\|_{C^3(\partial\omega)}$. Лемма доказана. □

Лемма 14.3. *Функции Ψ_1 и Λ_1 представимы в виде*:

$$\Psi_1(\mathsf{x},\mu,\varepsilon) = (A+\mu)^2\widetilde{\Psi}_1(\mathsf{x},\mu,\varepsilon), \quad \Lambda_1(\mu,\varepsilon) = (A+\mu)^2\widetilde{\Lambda}_1(\mu,\varepsilon), \tag{14.20}$$

где $\widetilde{\Psi}_1$ — бесконечно дифференцируема по x, $\widetilde{\Psi}_1$ и $\widetilde{\Lambda}_1$ голоморфны по μ для каждого фиксированного значения ε. Верны равномерные по ε и μ оценки ($i=1,2,3$):

$$\begin{aligned}
&|\Lambda_0| \leqslant C, && \|\Psi_0\|_{W_2^1(\omega)} \leqslant C, && \|\Psi_0^\nu\|_{C^3(\partial\omega)} \leqslant C(A+\mu),\\
&|\Lambda_1| \leqslant C(A+\mu)^2, && \|\Psi_1\|_{W_2^1(\omega)} \leqslant C(A+\mu)^2, && \|\Psi_2\|_{W_2^1(\omega)} \leqslant C(A+\mu)^3,\\
&\|\Psi_1^\nu\|_{C(\partial\omega)} \leqslant C(A+\mu)^2, && \|\Psi_1^\nu\|_{C^i(\partial\omega)} \leqslant C(A+\mu)^2(\varepsilon^{-i}\delta^*(\varepsilon)+1), &&\\
&\|\Psi_2^\nu\|_{C(\partial\omega)} \leqslant C(A+\mu)^3, && \|\Psi_2^\nu\|_{C^i(\partial\omega)} \leqslant C(A+\mu)^3(\varepsilon^{-i}\delta^*(\varepsilon)+1). &&
\end{aligned} \tag{14.21}$$

Доказательство. Представления (14.20) доказываются весьма просто. В самом деле, представление для Λ_1 есть прямое следствие (12.7). Используя это представление и наличие множителя $(A+\mu)^2$ в граничном условии (13.28), приходим к требуемому представлению для Ψ_1.

Оценки для Λ_0 и Ψ_0 из (14.21) доказываются элементарно. Ограниченность Λ_0 следует из сходимости $\Lambda_0 \to \lambda_0$. Так как $\|\Psi_0\|_{L_2(\omega)} = 1$, то, умножая уравнение (12.3) на Ψ_0 и интегрируя один раз по частям, в силу ограниченности Λ_0 и $\|\theta'_\varepsilon\|_{C(\partial\omega)}$ получаем требуемую оценку нормы $\|\Psi_0\|_{W_2^1(\omega)}$. Теперь, применяя лемму 14.2 к задаче для функции Ψ_0, получаем оценку $\|\Psi_0^\nu\|_{C^3(\partial\omega)}$ и, кроме того,

$$\|\Psi_0\|_{C^1(\overline{\omega})} \leqslant C, \qquad \|\Psi_0\|_{C^k(\overline{\omega}_1)} \leqslant C$$

для всякой подобласти $\omega_1 \Subset \omega$.

Оценка для Λ_1 вытекает из доказанных оценок для Ψ_0, ограниченности функций θ'_ε и $\mathsf{f}_\varepsilon(\theta_\varepsilon)$ и формулы (12.7).

Неравенства для Ψ_1 и Ψ_2 из (14.21) также будем доказывать на основе леммы 14.2. Так как Ψ_1 ортогональна Ψ_0 в $L_2(\omega)$, а величины Λ_0 и Λ_1 ограничены, то верна равномерная оценка

$$\|\Psi_1\|_{W_2^1(\omega)} \leqslant C(A+\mu)^2\left(\|\Psi_0\|_{L_2(\omega)} + \|\Psi_0^D\theta'_\varepsilon \ln \mathsf{f}_\varepsilon(\theta_\varepsilon)\|_{L_2(\partial\omega)}\right) \leqslant C(A+\mu)^2.$$

Правая часть уравнения (13.7) и граничного условия (13.28) удовлетворяют всем условиям леммы 14.2. Кроме того, оценки производных граничного условия (13.28) фактически сводятся к оценке производных (ограниченной) функции $\mathsf{f}_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s))$, так как производные θ'_ε ограничены, а производные Ψ_0^D оцениваются с помощью уже доказанных оценок для Ψ_0^ν и равенства $\Psi_0^\nu = (A+\mu)\theta'_\varepsilon\Psi_0^D$. Производные $\mathsf{f}_\varepsilon(\theta_\varepsilon)$, очевидно, оцениваются так:

$$\|\mathsf{f}_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s))\|_{C^i(\partial\omega)} \leqslant C\left(\varepsilon^{-i}\delta^*(\varepsilon)+1\right), \quad i=1,2,3.$$

Используя этот факт и применяя лемму 14.2 к задаче для $\widetilde{\Psi}_1$, приходим к оценкам для Ψ_1 из (14.21). Кроме того, в силу леммы 14.2

$$\|\Psi_1\|_{C^1(\overline{\omega})} \leqslant C(A+\mu)^2(\varepsilon^{-1}\delta^*(\varepsilon)+1), \quad \|\Psi_1\|_{C^k(\overline{\omega}_1)} \leqslant C,$$

для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и всех $\omega_1 \Subset \omega$. Из очевидного неравенства

$$\|\Psi_2\|_{W_2^1(\omega)} \leqslant C\left(|\Lambda_1|\|\Psi_1\|_{L_2(\omega)} + (A+\mu)\|\Psi_1^\nu\|_{L_2(\partial\omega)}\right)$$

и уже доказанных оценок для Ψ_1 и Λ_1 выводим требуемую оценку для нормы $\|\Psi_2\|_{W_2^1(\omega)}$. Представляя Ψ_2 в виде $\Psi_2 = (A+\mu)^3\widetilde{\Psi}_2$ и применяя к $\widetilde{\Psi}_2$ лемму 14.2, получаем и остальные оценки для Ψ_2 из (14.21). Лемма доказана. ☐

Обозначим

$$\Pi^{(j)} = \left\{\xi : |\xi_1 - \pi j| < \frac{\pi}{2},\ \xi_2 > 0\right\}, \qquad \Pi_\eta^{(j)} = \Pi^{(j)} \cap \{\xi : 4|\xi - \xi^{(j)}| > \eta^{\frac{1}{4}}\},$$
$$\omega_\eta^{bl} = \omega^{bl} \cap \{\mathsf{x} : \xi \in \Pi_\eta^{(j)}, j = 0, \ldots, N-1\}, \qquad \lambda_{\varepsilon,1} = \Lambda_0(\mu,\varepsilon) + \varepsilon\Lambda_1(\mu,\varepsilon),$$
$$\psi_{\varepsilon,1}^{ex}(\mathsf{x},\mu) = \Psi_0(\mathsf{x},\mu,\varepsilon) + \varepsilon\Psi_1(\mathsf{x},\mu,\varepsilon) + \varepsilon^2\Psi_2(\mathsf{x},\mu,\varepsilon), \qquad \psi_{\varepsilon,1}^{bl}(\xi,s,\mu) = \sum_{i=1}^{4}\varepsilon^i v_i(\xi,s,\mu,\varepsilon),$$
$$\psi_{\varepsilon,1}^{in,j}(\varsigma^j,s,\mu) = \sum_{i=1}^{3}\varepsilon^i w_{i,0}^{(j)}(\varsigma^j,s,\mu,\varepsilon) + \eta\sum_{i=1}^{4}\varepsilon^i w_{i,1}^{(j)}(\varsigma^j,s,\mu,\varepsilon).$$

Лемма 14.4. *Для пограничного слоя* (14.2) *при* $\varepsilon \to 0$ *справедливы следующие равномерные оценки*:

$$\|\psi_{\varepsilon,1}^{bl}\|_{L_2(\omega^{bl})} \leqslant C\varepsilon^{\frac{3}{2}}(A+\mu),$$
$$\|\varepsilon^2\widetilde{v}_2 + \varepsilon^3 v_3 + \varepsilon^4 v_4\|_{W_2^1(\omega_\eta^{bl})} \leqslant C\varepsilon^{\frac{3}{2}}(A+\mu),$$
$$\|(\Delta_{\mathsf{x}} + \lambda_{\varepsilon,1})\psi_{\varepsilon,1}^{bl}\|_{L_2(\omega^{bl})} \leqslant C\big(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(A+\mu) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta^*(\varepsilon)(A+\mu)^2\big).$$

Доказательство. Всюду в доказательстве, не подчеркивая дополнительно, мы будем опираться на принадлежности (2.19), взятые с $\eta = 0$. Верна оценка

$$\|\psi_{\varepsilon,1}^{bl}\|_{L_2(\omega^{bl})} \leqslant \varepsilon\left(\sum_{j=0}^{N-1}\|\psi_{\varepsilon,1}^{bl}\|_{L_2(\Pi^{(j)})}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Нормы $\|\psi_{\varepsilon,1}^{bl}\|_{L_2(\Pi^{(j)})}$ оцениваем, используя явный вид функций v_i и оценки из леммы 14.3:

$$\|\psi_{\varepsilon,1}^{bl}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leqslant C\varepsilon(A+\mu).$$

Из последних двух оценок и равенства $N = 2\varepsilon^{-1}$ следует первое неравенство из утверждения леммы. Второе неравенство из утверждения леммы доказывается аналогично на основе явного вида функций v_i и леммы 14.3. Для краткости обозначим: $F_{\varepsilon,1}^{bl} = (\Delta_{\mathsf{x}} + \lambda_{\varepsilon,1})\psi_{\varepsilon,1}^{bl}$. Используя явный вид функций v_i, вычисляем:

$$\begin{aligned}\mathsf{H}^3F_{\varepsilon,1}^{bl} =&\varepsilon\sum_{i=1}^{3}\xi_2^i\left(\mathsf{c}_{0,i}\frac{\partial^i X}{\partial\xi_2^i} + \mathsf{c}_{1,i-1}\frac{\partial^i X}{\partial\xi_1\partial\xi_2^{i-1}}\right) + \varepsilon\mathsf{c}_{0,0}X + \\ &+ \varepsilon^2\mathsf{c}_{1,-1}\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} t\frac{\partial}{\partial\xi_1}X(\xi_1,t)\,dt + \varepsilon\mathsf{c}_{0,-1}\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} tX(\xi_1,t)\,dt.\end{aligned}$$

Здесь $\mathsf{c}_{i,k} = \mathsf{c}_{i,k}(\xi_2,s,\varepsilon,\mu)$ — полиномы по ξ_2 с коэффициентами, зависящими от остальных переменных, причем эти коэффициенты в силу леммы 14.3 оцениваются сверху величиной $C\left((A+\mu) + \varepsilon^{-1}\delta^*(\varepsilon)(A+\mu)^2\right)$, где C не зависит от ε, μ, s. Используя указанные оценки коэффициентов полиномов $\mathsf{c}_{i,k}$ и вид функции $\mathsf{H}^3F_{\varepsilon,1}^{bl}$, убеждаемся, что

$$\|\mathsf{H}^3F_{\varepsilon,1}^{bl}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leqslant C\left(\varepsilon(A+\mu) + \delta^*(\varepsilon)(A+\mu)^2\right),$$

где C не зависит от ε, μ, s и j. Так как при $\mathsf{x} \in \overline{\omega}^{bl}$ функция H не обращается в нуль, то

$$\|F^{bl}_{\varepsilon,1}\|_{L_2(\omega^{bl})} \leqslant C\|\mathsf{H}^3 F^{bl}_{\varepsilon,1}\|_{L_2(\omega^{bl})} \leqslant C\varepsilon \left(\sum_{j=0}^{N-1} \|\mathsf{H}^3 F^{bl}_{\varepsilon,1}\|^2_{L_2(\Pi^{(j)})}\right)^{\frac{1}{2}},$$

что вместе с уже полученными оценками норм $\|\mathsf{H}^3 F^{bl}_{\varepsilon,1}\|_{L_2(\Pi^{(j)})}$ дает третье неравенство из утверждения леммы. Лемма доказана. □

Обозначим

$$\omega^{in}_j = \big\{\mathsf{x} : 4\eta^{\frac{3}{4}}|\varsigma^j| < 3\big\}, \quad \omega^{mat}_j = \big\{\mathsf{x} : 1 < 4|\varsigma^j|\eta^{\frac{3}{4}} < 3, j = 0, \ldots, N-1\big\}.$$

Аналогично лемме 14.4 доказывается справедливость следующего утверждения.

Лемма 14.5. *Для внутреннего разложения* (14.3) *при* $\varepsilon \to 0$ *справедливы следующие равномерные по* ε, μ *и* η *оценки*:

$$\|\psi^{in,j}_{\varepsilon,1}\|_{L_2(\omega^{in}_j)} \leqslant C\eta^{\frac{1}{5}}, \qquad \|(\Delta_{\mathsf{x}} + \lambda_{\varepsilon,1})\psi^{in,j}_{\varepsilon,1}\|_{L_2(\omega^{in}_j)} \leqslant C\eta^{\frac{1}{5}},$$
$$\|\psi^{in,j}_{\varepsilon,1} - \varepsilon w^{(j)}_{1,0} - \varepsilon^2 w^{(j)}_{2,0}\|_{W^1_2(\omega^{in}_j)} \leqslant C\varepsilon^2(A+\mu)^{\frac{3}{2}}.$$

Пусть

$$\psi_{\varepsilon,1}(\mathsf{x}) = \left(\psi^{ex}_{\varepsilon,1}(\mathsf{x},\mu) + \chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)\psi^{bl}_{\varepsilon,1}(\xi,s,\mu)\right)\chi_\varepsilon(\mathsf{x}) + \sum_{j=0}^{N-1}\chi(|\varsigma^j|\eta^{\frac{3}{4}})\psi^{in,j}_{\varepsilon,1}(\varsigma^j,s,\mu),$$

где

$$\chi_\varepsilon(\mathsf{x}) = 1 - \sum_{j=0}^{N-1}\chi(|\varsigma^j|\eta^{\frac{3}{4}}).$$

В следующем утверждении мы докажем, что формально построенные асимптотики $\lambda_{\varepsilon,1}$ и $\psi_{\varepsilon,1}$ являются формальным асимптотическим решением возмущенной задачи.

Лемма 14.6. *Функции* $\lambda_{\varepsilon,1}$ *и* $\psi_{\varepsilon,1} \in W^1_2(\omega) \cap C^\infty(\widehat{\omega})$ *сходятся при* $\varepsilon \to 0$ *к* λ_0 *и* ψ_0 (*последняя — в* $L_2(\omega)$) *и удовлетворяют краевой задаче* (5.1) *с* $u_\varepsilon = \psi_{\varepsilon,1}$, $\lambda = \lambda_{\varepsilon,1}$ *и* $f = f_{\varepsilon,1}$, *где для* $f_{\varepsilon,1}$ *верна оценка*:

$$\|f_{\varepsilon,1}\|_{L_2(\omega)} = O\big(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(A+\mu(\varepsilon)) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta^*(\varepsilon)(A+\mu(\varepsilon))^2\big). \tag{14.22}$$

Доказательство. Утверждаемая гладкость функции $\psi_{\varepsilon,1}$ — очевидна. Сходимость $\lambda_{\varepsilon,1}$ к λ_0 следует из лемм 12.1 и 14.3. Сходимость $\psi_{\varepsilon,1}$ к ψ_0 следует из оценки:

$$\|\psi_{\varepsilon,1} - \psi_0\|_{L_2(\omega)} \leqslant \|\psi_{\varepsilon,1} - \Psi_0\|_{L_2(\omega)} + \|\Psi_0 - \psi_0\|_{L_2(\omega)}.$$

Здесь первое слагаемое в правой части стремится к нулю в силу лемм 14.3–14.5, второе — в силу леммы 12.1. Проверим граничные условия из (5.1). Равенство функции $\psi_{\varepsilon,1}$ на γ_ε вытекает из равенства нулю χ_ε на γ_ε и равенства нулю $\psi^{in,j}_{\varepsilon,1}$ на γ^1_j. Нетрудно проверить, что при $\mathsf{x} \in \Gamma_\varepsilon$

$$\frac{\partial\psi_{\varepsilon,1}}{\partial\nu} = \left(\frac{\partial\psi^{ex}_{\varepsilon,1}}{\partial\nu} - \frac{\theta'_\varepsilon}{\varepsilon}\frac{\partial\psi^{bl}_{\varepsilon,1}}{\partial\xi_2}\bigg|_{\xi\in\Gamma^0}\right)\chi_\varepsilon(\mathsf{x}) - \frac{\theta'_\varepsilon}{\varepsilon\eta}\sum_{j=0}^{N-1}\chi(|\varsigma^j|\eta^{\frac{3}{4}})\frac{\partial\psi^{in,j}_{\varepsilon,1}}{\partial\varsigma_2}\bigg|_{\varsigma\in\Gamma^1_j} =$$
$$= \chi_\varepsilon(\mathsf{x})\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^i\left(\Psi^\nu_i - \theta'_\varepsilon\frac{\partial v_{i+1}}{\partial\xi_2}\bigg|_{\xi\in\Gamma^0}\right) = 0.$$

Оценим функцию $f_{\varepsilon,1}$. Она имеет следующий вид:

$$f_{\varepsilon,1} = -(\Delta + \lambda_{\varepsilon,1})\psi_{\varepsilon,1} = -\sum_{i=1}^{5} f^{(i)}_\varepsilon, \qquad f^{(1)}_{\varepsilon,1} = \chi_\varepsilon(\Delta + \lambda_{\varepsilon,1})\psi^{ex}_{\varepsilon,1},$$

$$f^{(2)}_{\varepsilon,1} = \chi_\varepsilon\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)(\Delta + \lambda_{\varepsilon,1})\psi^{bl}_{\varepsilon,1}, \qquad f^{(4)}_{\varepsilon,1} = \sum_{j=0}^{N-1}\chi(|\varsigma^j|\eta^{\frac{3}{4}})(\Delta + \lambda_{\varepsilon,1})\psi^{in,j}_{\varepsilon,1},$$

$$\begin{aligned}
&f^{(3)}_{\varepsilon,1}=\chi_\varepsilon\left(2\left(\nabla_{\mathsf{x}}\psi^{bl}_{\varepsilon,1},\nabla_{\mathsf{x}}\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)\right)_{\mathbb{R}^2}+\psi^{bl}_{\varepsilon,1}\Delta\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)\right),\\
&f^{(5)}_{\varepsilon,1}=\sum_{j=0}^{N-1}\left(2\left(\nabla_{\mathsf{x}}\psi^{mat,j}_{\varepsilon,1},\nabla_{\mathsf{x}}\chi(|\varsigma^j|\eta^{\frac{3}{4}})\right)_{\mathbb{R}^2}+\psi^{mat,j}_{\varepsilon,1}\Delta\chi(|\varsigma^j|\eta^{\frac{3}{4}})\right),\\
&\psi^{mat,j}_{\varepsilon,1}=\psi^{in,j}_{\varepsilon,1}-\psi^{ex}_{\varepsilon,1}-\psi^{bl}_{\varepsilon,1}.
\end{aligned}$$

Используя уравнения (12.3), (13.7) и (14.4) нетрудно убедиться, что

$$(\Delta+\lambda_{\varepsilon,1})\psi^{ex}_{\varepsilon,1}=\varepsilon^2(\Lambda_0+1+\varepsilon\Lambda_1)\Psi_2,$$

а потому, в силу леммы 14.3,

$$\|f^{(1)}_{\varepsilon,1}\|_{L_2(\omega)}=O\big(\varepsilon^2(A+\mu)^3\big).$$

Функция $f^{(2)}_{\varepsilon,1}$ обращается в нуль при $\tau>c_0$ и оценивается с помощью леммы 14.4:

$$\|f^{(2)}_{\varepsilon,1}\|_{L_2(\omega)}\leqslant\|f^{(2)}_{\varepsilon,1}\|_{L_2(\omega^{bl})}=O\Big(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(A+\mu)+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta^*(\varepsilon)(A+\mu)^2\Big).$$

Функции v_i и, следовательно, $\psi^{bl}_{\varepsilon,1}$ экспоненциально убывают, а интегрирование $f^{(3)}_{\varepsilon,1}$ по ω в силу определения χ фактически сводится к интегрированию по области $\left\{\mathsf{x}:\dfrac{c_0\theta'_\varepsilon}{4\varepsilon}\leqslant\xi_2\leqslant\frac{3c_0\theta'_\varepsilon}{4\varepsilon}\right\}$, а потому

$$\|f^{(3)}_{\varepsilon,1}\|_{L_2(\omega)}=O\big((A+\mu)\mathrm{e}^{-1/\varepsilon^{\mathsf{a}_{16}}}\big),$$

где $\mathsf{a}_{16}>0$ — некоторое фиксированное число. Далее, функцию $f^{(4)}_{\varepsilon,1}$ оцениваем на основе леммы 14.5:

$$\|f^{(4)}_{\varepsilon,1}\|_{L_2(\omega)}\leqslant C\sum_{j=0}^{N-1}\|(\Delta+\lambda_{\varepsilon,1})\psi^{in,j}_{\varepsilon,1}\|_{L_2(\omega^{in}_j)}=O\big(\eta^{\frac{1}{6}}\big).$$

В силу проведенного согласования (см. (14.6), (14.13)) функция $\psi^{mat,j}_{\varepsilon,1}$ при $\eta^{-\frac{3}{4}}\leqslant4|\varsigma^j|\leqslant3\eta^{-\frac{3}{4}}$ имеет дифференцируемую асимптотику:

$$\psi^{mat,j}_{\varepsilon,1}=O\Big(\eta^2|\varsigma|^2|\ln|\varsigma||+\varepsilon|\varsigma|^{-1}+\varepsilon\eta\Big),$$

используя которую, оцениваем $f^{(5)}_{\varepsilon,1}$:

$$\|f^{(5)}_{\varepsilon,1}\|_{L_2(\omega)}\leqslant C\sum_{j=0}^{N-1}\|f^{(5)}_{\varepsilon,1}\|_{L_2(\omega^{mat}_j)}=O\Big(\eta^{\frac{1}{5}}\Big).$$

Собирая полученные оценки величин $f^{(i)}_{\varepsilon,1}$, приходим к утверждению леммы. Лемма доказана. ☐

15. ОБОСНОВАНИЕ

В данном разделе мы обосновываем формальные асимптотики, построенные в предыдущих разделах и завершаем тем самым доказательство теорем 12.1, 12.2. Обоснование формальных асимптотик, построенных в двух предыдущих разделах, проводится аналогично разделу 5. Всюду в разделе будем считать, что выполнено условие (C2). В этом предположении утверждение леммы 5.1 остается верным, где под предельной следует понимать задачу (12.2). Доказательство этой леммы не меняется вплоть до соотношений (5.5). Далее, ввиду другой предельной задачи, несколько иначе выглядит вывод задачи для u_*. А именно, пусть $\varphi\in C^\infty(\overline{\omega})$ — произвольная функция (не обязательно равная нулю на границе). Из [65,66,91] и (5.5) следует, что существует последовательность функций $\varphi_\varepsilon\in W^1_2(\omega)$, равных нулю на γ_ε, для которых верны сходимости:

$$\varphi_\varepsilon\to\varphi\quad\text{слабо в } W^1_2(\omega),\quad(\nabla u_{\varepsilon_k},\varphi_{\varepsilon_k})_{L_2(\omega)}\to(\nabla u_*,\varphi)_{L_2(\omega)}+A(\theta'_0u_*,\varphi)_{L_2(\partial\omega)}.$$

Выделяя при необходимости из ε_k подпоследовательность, можно считать, что φ_{ε_k} сходится к φ сильно в $L_2(\omega)$. Переходя теперь в (5.6) к пределу при $k\to\infty$, получаем, что u_* — нетривиальное решение задачи (12.2) с $\lambda_0=\lambda_*$: противоречие. Утверждение леммы 5.2 также остается верным, где под предельной вновь следует понимать задачу (12.2). Доказательство этой леммы остается без изменений.

Доказательство теорем 12.1, 12.2 будет основано на следующем вспомогательном утверждении.

Лемма 15.1. *Пусть выполнено условие* (C2). *Тогда собственное значение* λ_ε *удовлетворяет оценке*

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,1}| = O\Big(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(A+\mu) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta^*(A+\mu)^2\Big),$$

а соответствующая собственная функция может быть выбрана так, что будет удовлетворять равенству:

$$\|\psi_\varepsilon - \psi_{\varepsilon,1}\|_{W_2^1(\omega)} = O\Big(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(A+\mu) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta^*(A+\mu)^2\Big),$$

где $\lambda_{\varepsilon,1}$ *и* $\psi_{\varepsilon,1}$ *— из предыдущего раздела.*

Доказательство. Пусть вначале ψ_ε нормирована в $L_2(\omega)$. Из лемм 5.2 и 14.6 следует:

$$\begin{aligned} &\psi_{\varepsilon,1} = \frac{\psi_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,1}} \int\limits_\omega f_{\varepsilon,1}\psi_\varepsilon\, d\mathrm{x} + \widetilde{u}_\varepsilon, \\ &\|\widetilde{u}_\varepsilon\|_{W_2^1(\omega)} \leqslant C\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(A+\mu) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta^*(A+\mu)^2\right), \end{aligned} \tag{15.1}$$

где C не зависит от ε и μ. Так как

$$\|\psi_{\varepsilon,1} - \widetilde{u}_\varepsilon\|_{L_2(\omega)} = \|\psi_0\|_{L_2(\omega)}(1+o(1)) = 1+o(1),$$

см. лемму 14.6, то в силу (14.22), (15.1) имеем:

$$C \leqslant \frac{\|f_{\varepsilon,1}\|_{L_2(\omega)}}{|\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,1}|},$$

где C не зависит от ε и μ, откуда следует, что

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,1}| = O\big(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(A+\mu) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta^*(A+\mu)^2\big).$$

Ясно, что

$$\frac{\psi_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,1}} \int\limits_\omega f_{\varepsilon,1}\psi_\varepsilon\, d\mathrm{x}$$

— собственная функция, соответствующая λ_ε. Переобозначая ее за ψ_ε, из (15.1) выводим вторую оценку из утверждения леммы. Лемма доказана. ☐

Доказательство теоремы 12.1. Утверждаемая асимптотика λ_ε легко выводится из леммы 15.1 и следствия 13.1 леммы 13.1. Из леммы 15.1 также следует, что собственную функцию, соответствующую λ_ε, можно выбрать так, что в норме $W_2^1(\omega)$ она будет иметь асимптотику

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon(\mathrm{x}) = &\left(\Psi_0(\mathrm{x},\mu,\varepsilon) + \varepsilon\Psi_1(\mathrm{x},\mu,\varepsilon) - -\frac{\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)}{\theta'_\varepsilon(s)} \sum_{l=0}^{1} \varepsilon^{l+1}\Psi_l^\nu(s,\mu,\varepsilon)X(\xi)\right)\chi_\varepsilon(\mathrm{x}) - \\ &- \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\chi(|\varsigma^j|\eta^{\frac{3}{4}})}{\theta'_\varepsilon(s)} \sum_{l=0}^{1} \varepsilon^{l+1}\Psi_l^\nu(s,\mu,\varepsilon)Z^{(j)}(\varsigma^j,\varepsilon) + o(\varepsilon(A+\mu)), \end{aligned} \tag{15.2}$$

где, напомним, переменные ξ и ς^j были определены в (13.4), (13.6), Ψ_i^ν — значения нормальных производных функций Ψ_i на границе $\partial\omega$, X — из (8.14), $Z(j)$ — из (13.24), а константа c_0 выбрана согласно (4.7).

Здесь мы отбросили из $\psi_{\varepsilon,1}$ дополнительные члены, построенные в предыдущем разделе, и $\varepsilon^2\widetilde{v}_2$, так как в силу лемм 14.3, 14.4, 14.5 их $W_2^1(\omega)$-норма есть величина порядка $O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(A+\mu))$. Теорема доказана. ☐

Доказательство теоремы 12.2. Если условие (12.5) не выполнено, то, ввиду ограниченности $\delta^*(\varepsilon)$ (следствие 13.2 леммы 13.1), правые части в оценках из утверждения леммы 15.1 суть величины порядка $O\Big(\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A+\mu)^2+\varepsilon^{\frac{3}{2}}(A+\mu)\Big)$. Вначале выведем асимптотику собственной функции. Как и в доказательстве теоремы 12.1, из функции $\psi_{\varepsilon,1}$ можно отбросить ряд слагаемых, $W_2^1(\omega)$-норма которых имеет порядок $O\Big(\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A+\mu)^2+\varepsilon^{\frac{3}{2}}(A+\mu)\Big)$. Прямыми вычислениями с использованием лемм 14.3, 14.4, 14.5 проверяется, что во внешнем разложении, в пограничном слое и во внутреннем слое можно оставить только главные члены, соответственно, Ψ_0, εv_1, $\varepsilon w_{1,0}^{(j)}$. В результате выводим, что собственная функция, соответствующая λ_ε, может быть выбрана так, что в $W_2^1(\omega)$ она будет иметь асимптотику

$$\begin{aligned}\psi_\varepsilon(\mathsf{x}) = &\left(\Psi_0(\mathsf{x},\mu,\varepsilon)+\varepsilon\frac{\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)}{\theta'_\varepsilon(s)}\Psi_0^\nu(s,\mu,\varepsilon)X(\xi)\right)\chi_\varepsilon(\mathsf{x})-\\ &-\varepsilon\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\chi(|\varsigma^j|\eta^{\frac{3}{4}})}{\theta'_\varepsilon(s)}\Psi_0^\nu(s,\mu,\varepsilon)Z^{(j)}(\varsigma^j,\varepsilon)+O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A+\mu)),\end{aligned}\tag{15.3}$$

где, напомним, переменные ξ и ς^j были определены в (13.4), (13.6), Ψ_0^ν — значения нормальной производной функций Ψ_0 на границе $\partial\omega$, X — из (8.14), $Z^{(j)}$ — из (13.24), а константа c_0 выбрана согласно (4.7).

Из лемм 14.3, 15.1 следует:

$$\lambda_\varepsilon-\Lambda_0(\mu,\varepsilon)=O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A+\mu)^2+\varepsilon^{\frac{3}{2}}(A+\mu)).\tag{15.4}$$

В свою очередь, функция Λ_0 удовлетворяет асимптотической формуле:

$$\Lambda_0(\mu,\varepsilon)=\lambda_0+\mu\boldsymbol{\lambda}_1+O(\mu^2+A\sigma_\varepsilon),\quad \boldsymbol{\lambda}_1=\int\limits_{\partial\omega}\psi_0^2\theta'_\varepsilon\,ds.\tag{15.5}$$

Так как, очевидно, асимптотика (12.8) есть прямое следствие (15.4) и (15.5), то достаточно доказать (15.5). Пусть

$$\Lambda_{0,1}=\lambda_0+\mu\boldsymbol{\lambda}_1,\qquad \Psi_{0,1}=\psi_0+\mu\boldsymbol{\psi}_1+\boldsymbol{\psi},$$

где функции $\boldsymbol{\psi}_1$ и $\boldsymbol{\psi}$ определяются как решения задач:

$$\begin{aligned}&(\Delta+\lambda_0)\boldsymbol{\psi}_1=-\boldsymbol{\lambda}_1\psi_0,\quad \mathsf{x}\in\omega,\qquad \left(\frac{\partial}{\partial\nu}+A\theta'_0\right)\boldsymbol{\psi}_1=-\theta'_\varepsilon\psi_0,\quad \mathsf{x}\in\partial\omega,\\ &(\Delta-1)\boldsymbol{\psi}=-\mu^2\boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\psi}_1,\quad \mathsf{x}\in\omega,\\ &\left(\frac{\partial}{\partial\nu}+(A+\mu)\theta'_\varepsilon\right)\boldsymbol{\psi}=-A(\theta'_\varepsilon-\theta'_0)(\psi_0+\mu\boldsymbol{\psi}_1)-\mu^2\theta'_\varepsilon\boldsymbol{\psi}_1,\quad \mathsf{x}\in\partial\omega.\end{aligned}$$

Задача для $\boldsymbol{\psi}_1$ разрешима, формула для $\boldsymbol{\lambda}_1$ из (15.5) есть в точности условие разрешимости. Функцию $\boldsymbol{\psi}_1$ выберем ортогональной ψ_0 в $L_2(\omega)$. Задача для $\boldsymbol{\psi}$, очевидно, однозначно разрешима. Из общих свойств решений эллиптических краевых задач вытекает, что для $\boldsymbol{\psi}_1,\boldsymbol{\psi}\in C^\infty(\overline{\omega})$ верны оценки:

$$\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{W_2^1(\omega)}\leqslant C,\qquad \|\boldsymbol{\psi}\|_{W_2^1(\omega)}\leqslant C(\mu^2+A\sigma_\varepsilon),$$

где константы C не зависят от ε и μ. С использованием этих оценок и определения $\boldsymbol{\lambda}_1$, $\boldsymbol{\psi}_1$ и $\boldsymbol{\psi}$ проверяется, что сходящиеся к λ_0 и ψ_0 функции $\Lambda_{0,1}$ и $\Psi_{0,1}$ (последняя — в $W_2^1(\omega)$) удовлетворяют краевой задаче

$$(\Delta+\Lambda_{0,1})\Psi_{0,1}=F_{\varepsilon,\mu},\quad \mathsf{x}\in\omega,\qquad \left(\frac{\partial}{\partial\nu}+(A+\mu)\theta'_\varepsilon\right)\Psi_{0,1}=0,\quad \mathsf{x}\in\partial\omega,$$

где для правой части справедлива оценка

$$\|F_{\varepsilon,\mu}\|_{L_2(\omega)}=O(\mu^2+A\sigma_\varepsilon).$$

Используя результаты [43, гл. 5, § 3.5], рассуждениями, полностью аналогичными доказательству леммы 5.2, нетрудно получить следующие представление и равномерную по ε и μ оценку:

$$\Psi_{0,1}=\frac{\Psi_0}{\Lambda_0-\Lambda_{0,1}}\int\limits_{\Omega}\Psi_0 F_{\varepsilon,\mu}\,dx+U_{\varepsilon,\mu},$$

$$\|U_{\varepsilon,\mu}\|_{W_2^1(\omega)}\leqslant C\|F_{\varepsilon,\mu}\|_{L_2(\omega)}=O(\mu^2+A\sigma_\varepsilon).$$

Так как $\|\Psi_{0,1}\|_{L_2(\omega)}=1+o(1)$, то из последних соотношений легко выводятся оценки

$$|\Lambda_0-\Lambda_{0,1}|=O(\mu^2+A\sigma_\varepsilon),$$

которые и доказывают равенства (15.5). Теорема доказана. ☐

Глава 5

ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА С НЕПЕРИОДИЧЕСКИМ ЧЕРЕДОВАНИЕМ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ: НЕУЛУЧШАЕМЫЕ ОЦЕНКИ

16. Постановка задачи и основные результаты главы

В данной главе мы продолжаем изучение задачи (1.1), (1.2) в случае непериодического чередования граничных условий. Как было показано в предыдущей главе, в случае усредненного третьего краевого условия при определенных условиях на структуру чередования удается построить первые члены асимптотических разложений собственных значений и собственных функций рассматриваемой задачи. Вместе с тем, в случае усредненного условия Дирихле подобного построения провести не удается. Поэтому в данной главе исследование направлено на решение следующего вопроса: выяснить максимально слабые ограничения на множество γ_ε, при которых можно получить явные неулучшаемые двусторонние асимптотические оценки на разности собственных значений возмущенной и предельной задач. Задача о построении асимптотик здесь уже не ставится, а заменяется на задачу получения тонких оценок скорости сходимости. Оказывается, что такие оценки можно получить, комбинируя принцип минимакса и результаты об асимптотических разложениях, полученные в предыдущих главах.

Постановка задачи (1.1), (1.2) остается прежней, однако условие (C2) заменяется на следующее:

(C3). *Существует функция $\theta=\theta(s)$, заданная на границе множества ω, принимающая значения на отрезке $[0,2\pi]$, удовлетворяющая условиям* (1.3)*, такая что*

$$\theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon)=\theta_\varepsilon(s_0^\varepsilon)+\varepsilon\pi j.$$

где c_3 — некоторая положительная константа, не зависящая от ε, η и j, а для функции η выполнено равенство (7.3) *с $A=\mathrm{const}\geqslant 0$. Норма $\|\theta'_\varepsilon\|_{C^3(\partial\omega)}$ ограничена равномерно по ε.*

Данное условие является ослабление условия (C2), так как фактически в нем остается лишь требования возможности гладко и взаимнооднозначно отобразить границу $\partial\Omega$ можно на окружность единичного радиуса так, что множество точек $\{x_j^\varepsilon\}$ перейдет в периодическое множество точек, делящее единичную окружность на N дуг длиной $\varepsilon\pi$ каждая. Данное отображение может зависеть от ε, на характер этой зависимости накладываются лишь условие ограниченности нормы $\|\theta'_\varepsilon\|_{C^3(\partial\Omega)}$.

Собственные значения возмущенной задачи занумеруем в порядке неубывания с учетом кратности:

$$\lambda_\varepsilon^1\leqslant\lambda_\varepsilon^2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_\varepsilon^k\leqslant\ldots$$

Соответствующие собственные функции ψ_ε^k выберем ортонормированными в $L_2(\Omega)$.

Сформулируем теперь основные результаты главы.

Теорема 16.1. *Пусть выполнены условия* (C3) *и существует положительная ограниченная функция* $\eta = \eta(\varepsilon)$, *удовлетворяющая равенству* (1.5), *такая что имеют место оценки*

$$2c_1^{-1}\eta(\varepsilon) \leqslant \min_j a_j(\varepsilon) + \min_i b_i(\varepsilon), \qquad 0 < \eta(\varepsilon) \leqslant \frac{\pi}{2},$$

где c_1 *из* (C3), *а также существует константа* $c_3 > 0$, *для которой норма Гельдера* $\|\theta_\varepsilon'\|_{C^{3+c_3}(\partial\Omega)}$ *ограничена по* ε. *Тогда собственные значения* λ_ε^k *возмущенной задачи сходятся к собственным значениям* λ_0^k *предельной задачи Дирихле* (1.6), *расположенным в порядке неубывания с учетом кратности, и справедливы оценки*

$$C_{k,1}\varepsilon \ln \sin \eta(\varepsilon) - C_{k,2}\left|\varepsilon \ln \eta(\varepsilon)\right|^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \eta(\varepsilon)\right) \leqslant \lambda_\varepsilon^k - \lambda_0^k \leqslant 0,$$

где $C_{k,i}$ — *некоторые положительные константы, не зависящие от* ε.

Теорема 16.2. *Пусть выполнено условие* (C3), *и существуют положительные функции* $\eta = \eta(\varepsilon)$ *и* $\eta_0 = \eta_0(\varepsilon)$, *удовлетворяющие соотношениям*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln \eta_0(\varepsilon) = 0, \qquad \eta_0(\varepsilon) < 1, \tag{16.1}$$

и (7.3) *с* $A > 0$, *такие что имеют место оценки*

$$2c_1^{-1}\eta_0\eta \leqslant a_j + b_j \leqslant 2c_2^{-1}\eta, \quad j = 0, \ldots, N-1,$$

с константами c_1 *и* c_2 *из* (C3). *При* $\varepsilon \to 0$ *функция* $\theta_\varepsilon(s)$ *сходится в* $C^1[0,S]$ *к некоторой функции* $\theta_0(s)$, $\theta_0' \in C^\infty(\partial\omega)$. *Тогда собственные значения* λ_ε^k *возмущенной задачи сходятся к собственным значениям* λ_0^k *предельной третьей краевой задачи* (12.2), *расположенным в порядке неубывания с учетом кратности, и справедливы оценки*

$$C_{k,1}\mu(\varepsilon) + C_{k,2}\varepsilon \ln \eta_0(\varepsilon) - C_{k,3}\varepsilon - C_{k,4}\sigma(\varepsilon) \leqslant \lambda_\varepsilon^k - \lambda_0^k \leqslant C_{k,5}\mu(\varepsilon) + C_{k,6}\varepsilon^{\frac{3}{2}} + C_{k,7}\sigma(\varepsilon),$$

где μ — *из* (7.8), $\sigma(\varepsilon) = \|\theta_\varepsilon' - \theta_0'\|_{C(\partial\Omega)}$, $C_{k,i}$ — *некоторые положительные константы, не зависящие от* ε, *а функция* $\eta_0(\varepsilon)$ *ограничена сверху единицей.*

Теорема 16.3. *Пусть выполнены условия* (C3) *и существует положительная функция* $\eta = \eta(\varepsilon)$, *удовлетворяющая равенству* (7.3) *с* $A = 0$, *такая что имеют место оценки*

$$a_j + b_j \leqslant 2c_2^{-1}\eta, \quad j = 0, \ldots, N-1,$$

с константой c_2 *из* (C3). *Тогда собственные значения* λ_ε^k *возмущенной задачи сходятся к собственным значениям* λ_0^k *задачи* (12.2) *с* $A = 0$ *и справедливы оценки*

$$0 \leqslant \lambda_\varepsilon^k - \lambda_0^k \leqslant C_k\mu(\varepsilon),$$

где μ — *из* (7.8), C_k — *некоторые положительные константы, не зависящие от* ε.

Поясним геометрический смысл условий теорем 16.1, 16.2, 16.3. Оценки для сумм $(a_j + b_j)$ в условиях данных теорем являются ограничениями на длины отдельных составляющих множества γ_ε и позволяют множествам $\gamma_{\varepsilon,j}$ иметь длины *разных* порядков. Более того, оценка для $(a_j + b_j)$ в условии теоремы 16.3 допускает ситуацию, когда для некоторых ε и j выполнено равенство $a_j(\varepsilon) + b_j(\varepsilon) = 0$, т. е. соответствующее множество $\gamma_{\varepsilon,j}$ — пустое, и в окрестности точки x_j^ε задается граничное условие Неймана. Следует отметить, что упомянутых оценках из условий теорем 16.1, 16.2, 16.3 могут быть произвольными, однако их всегда можно выбрать указанным образом путем умножения функций η и η_0 на подходящие числа.

Условия теорем 16.1, 16.2, 16.3 очевидно значительно слабее, чем условия теоремы из предыдущих глав. Вместе с тем, их достаточно, чтобы получить двусторонние оценки на разности собственных значений возмущенной и усредненных задач. Порядки малости в этих оценках совпадают с порядками первых членов асимптотик, построенных в предыдущих главах. Это означает, что полученные двусторонние оценки неулучшаемые по порядку.

Результаты данной главы были опубликованы в [13].

17. Вспомогательное утверждение в случае усредненного краевого условия Дирихле

В настоящем разделе мы докажем вспомогательную лемму, которая будет использована в следующем разделе при доказательстве теоремы 16.1. Сформулируем указанную лемму.

Лемма 17.1. *Пусть выполнены условие* (С3) *и существует положительная ограниченная функция* $\eta=\eta(\varepsilon)$, *такая что выполнены оценки*

$$c_4\eta(\varepsilon)\leqslant a_j(\varepsilon)+b_j(\varepsilon)\leqslant 2c_2^{-1}\eta(\varepsilon), \quad j=0,\dots,N-1, \qquad \eta(\varepsilon)<\frac{\pi}{2},$$

где положительная константа c_4 *не зависит от* ε, η *и* j, *а сама функция* η *удовлетворяет условию* (1.5) *и для всех* i, j *и* ε *справедливы равенства*

$$a^j(\varepsilon)+b^j(\varepsilon)=2\eta(\varepsilon), \qquad a^i(\varepsilon)=a^j(\varepsilon), \qquad b^i(\varepsilon)=b^j(\varepsilon).$$

Пусть также существует фиксированное число $c_3>0$, *для которого норма Гельдера* $\|\theta'_\varepsilon\|_{C^{3+c_3}(\partial\Omega)}$ *ограничена по* ε. *Тогда собственное значение* λ_ε^k *возмущенной задачи сходится к собственному значению* λ_0^k *предельной задачи* (1.6) *и имеет асимптотику*

$$\lambda_\varepsilon^k=\lambda_0^k+\varepsilon\ln\sin\eta(\varepsilon)\int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial\psi_0^k}{\partial\nu}\right)^2\frac{\mathrm{d}s}{\theta'_\varepsilon}+O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\left(|\ln\eta(\varepsilon)|^{\frac{3}{2}}+1\right)\left(\frac{\pi}{2}-\eta(\varepsilon)\right)\right).$$

Оставшаяся часть раздела посвящена доказательству данной леммы. Сходимость собственных значений доказывается аналогично работам [65, 66, 91]. Доказательство асимптотик проведем по схеме, использованной в главе 2. Как и ранее, мы вначале формально построим асимптотики, а затем проведем их строгое обоснование. Следует также отметить, что формальное построение асимптотик мы будем проводить по схеме, предложенной в работах [22, 23]. Отличием является оценка остатка в асимптотиках одновременно по двум параметрам ε и η, а также чуть более общая постановка рассматриваемой здесь задачи по сравнению с [22,23], и отказ от дополнительных ограничений, сделанных в [22, 23]. Мы подробно остановимся только на случае простого предельного собственного значения; случай кратного собственного значения доказывается аналогично.

Пусть λ_0 — простое собственное значение предельной задачи (1.6), ψ_0 — соответствующая (нормированная в $L_2(\Omega)$) собственная функция, λ_ε — собственное значение возмущенной задачи, сходящееся к λ_0.

Асимптотику собственного значения λ_ε будем искать в виде:

$$\lambda_\varepsilon=\lambda_0+\varepsilon\lambda_1(\varepsilon)\ln\sin\eta, \tag{17.1}$$

а асимптотика соответствующей собственной функции строится как сумма внешнего разложения и пограничного слоя:

$$\psi_\varepsilon(x)=\psi_\varepsilon^{ex}(x,\eta)+\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)\psi_\varepsilon^{bl}(\xi,s,\eta),$$

$$\psi_\varepsilon^{ex}(x,\eta)=\psi_0(x)+\varepsilon\psi_1(x,\varepsilon)\ln\sin\eta, \tag{17.2}$$

$$\psi_\varepsilon^{bl}(\xi,s,\eta)=\varepsilon v_1(\xi,s,\varepsilon,\eta)+\varepsilon^2 v_2(\xi,s,\varepsilon,\eta), \tag{17.3}$$

где

$$\xi=(\xi_1,\xi_2), \qquad \xi_1=\frac{\theta_\varepsilon(s)-\theta_\varepsilon(s_0^\varepsilon)}{\varepsilon}-\frac{b^j(\varepsilon)-a^j(\varepsilon)}{2}, \qquad \xi_2=\frac{\tau\theta'_\varepsilon(s)}{\varepsilon}.$$

Заметим также, что построение асимптотик здесь удается провести без использования метода согласования асимптотических разложений.

Подставим (17.1) и (17.2) в уравнение (1.1) и выпишем коэффициенты при $\varepsilon\ln\sin\eta$:

$$(\Delta+\lambda_0)\psi_1=-\lambda_1\psi_0, \quad x\in\Omega. \tag{17.4}$$

Подстановка (17.1) и (17.3) в уравнение (1.1) приводит к уравнениям (13.8) и (13.9) для функций v_1 и v_2. Граничные условия для этих функций выводим из требования, что сумма (17.2) и (17.3) удовлетворяет обоим граничным условиям из (1.2):

$$v_1=-\psi_1^D\ln\sin\eta, \quad \xi\in\gamma^\eta, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial\xi_2}=\frac{1}{\theta'_\varepsilon}\psi_0^\nu, \quad \xi\in\Gamma^\eta, \tag{17.5}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \xi_2} = \frac{1}{\theta'_\varepsilon}\psi_1^\nu \ln\sin\eta, \quad \xi \in \Gamma^\eta, \tag{17.6}$$

где γ^η — объединение интервалов $(\pi j - \eta, \pi j + \eta)$, $j \in \mathbb{Z}$, лежащих на оси ξ_1, а Γ^η — дополнение $\overline{\gamma}^\eta$ до оси ξ_1, ψ_1^D и ψ_i^ν — значений функций ψ_i и их нормальных производных на границе $\partial\Omega$. Задача (13.8), (17.5) решается явно:

$$v_1(\xi, s, \varepsilon, \eta) = -\frac{1}{\theta'_\varepsilon(s)}\psi_0^\nu(s)X(\xi), \tag{17.7}$$

где функция X — из (2.8). Функция v_1, определенная равенством (17.7), в силу (2.9) удовлетворяет граничному условию

$$v_1 = -\frac{1}{\theta'_\varepsilon}\psi_0^\nu \ln\sin\eta, \quad \xi \in \gamma^\eta,$$

сравнивая которое с (17.5), получаем краевое условие для ψ_1:

$$\psi_1 = \frac{1}{\theta'_\varepsilon}\frac{\partial\psi_0}{\partial\nu}, \quad x \in \partial\Omega. \tag{17.8}$$

Условие разрешимости краевой задачи (17.4), (17.8) приводит к формуле для λ_1:

$$\lambda_1 = \int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial\nu}\right)^2\frac{\mathrm{d}s}{\theta'_\varepsilon(s)}. \tag{17.9}$$

Функцию ψ_1 выберем ортогональной ψ_0 в $L_2(\Omega)$. Функция v_2 определяется следующим образом:

$$v_2 = \frac{\psi_0^\nu}{2(\theta'_\varepsilon)^2}\xi_2^2\left(\frac{\theta''_\varepsilon}{\theta'_\varepsilon}\frac{\partial X}{\partial\xi_1} + K\frac{\partial X}{\partial\xi_2}\right) - \frac{2}{\theta'_\varepsilon}\left(\frac{\psi_0^\nu}{\theta'_\varepsilon}\right)' v_2^{odd} - \frac{1}{\theta'_\varepsilon}\psi_1^\nu \ln\sin\eta X, \tag{17.10}$$

где v_2^{odd} — экспоненциально убывающее решение краевой задачи

$$\Delta_\xi v_2^{odd} = \frac{\partial X}{\partial\xi_1}, \quad \xi_2 > 0, \qquad v_2^{odd} = 0, \quad \xi \in \gamma^\eta, \qquad \frac{\partial v_2^{odd}}{\partial\xi_2} = 0, \quad \xi \in \Gamma^\eta. \tag{17.11}$$

Решение задачи (17.11) существует, существование, а также его нечетность по ξ_1 и принадлежность $\mathcal{V}_\eta \cap W_2^1(\Pi^{(j)})$ следуют из леммы 2.1.

Для обоснования формально построенных асимптотик нам понадобятся дополнительные леммы.

Лемма 17.2. *Выполняются следующие свойства*:

(1). *для целых $m \geqslant 0$ справедливы неравенства*

$$\|\xi_2^m X\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leqslant C\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)^2\left(\left|\ln\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)\right|^{\frac{1}{2}} + 1\right),$$

где константы C не зависят от η.

(2). *для целых $m, p \geqslant 0$ имеют место оценки*

$$\left\|\xi_2^m \nabla_\xi \frac{\partial^m X}{\partial\xi_2^m}\right\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leqslant C|\ln\sin\eta|^{\frac{1}{2}},$$

$$\left\|\xi_2^{m+p+1} \nabla_\xi \frac{\partial^m X}{\partial\xi_2^m}\right\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leqslant C\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)^2\left(\left|\ln\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)\right|^{\frac{1}{2}} + 1\right),$$

где константы C не зависят от η.

Доказательство. Вначале докажем утверждение пункта (1) для $m = 0$. В [8, § 3] было показано, что $\|X\|_{L_2(\Pi^{(j)})}$ — непрерывная функция по $\eta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Для доказательства требуемой оценки выясним поведение этой функции при $\eta \to \frac{\pi}{2}$. Непосредственно проверяется, что функция

$$X^1(\xi) = -\frac{1}{2}\xi_2 \int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t)\, dt$$

— четная по ξ_1, принадлежит $\mathcal{V}_\eta$ и является в области $\xi_2 > 0$ решением уравнения $\Delta_\xi X^1(\xi) = X$, удовлетворяющим граничным условиям:

$$X^1 = 0, \qquad \frac{\partial X^1}{\partial \xi_2} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} X(\xi_1, t)\,dt, \qquad \xi_2 = 0.$$

Используя перечисленные свойства функций X^1 и X и доказанное в [8, § 3] равенство

$$\int\limits_{\Pi^{(j)}} X^2\,d\xi = \int\limits_{\Pi^{(j)}} (X + \xi_2 - \ln\sin\eta) X\,d\xi,$$

интегрируя по частям, выводим:

$$\int\limits_{\Pi^{(j)}} X^2\,d\xi = \int\limits_{\Pi^{(j)}} (X + \xi_2 - \ln\sin\eta)\Delta_\xi X^1_\eta\,d\xi = \int\limits_{\eta}^{\frac{\pi}{2}} (X(\xi_1, 0) - \ln\sin\eta) \int\limits_0^{+\infty} X(\xi_1, t)\,dt\,d\xi_1. \tag{17.12}$$

Так как при $\xi_1 \in \left(\eta, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\frac{d^2}{d\xi_1^2}\int\limits_0^{+\infty} X(\xi_1, t)\,dt = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} X(\xi_1, t)\,dt = -1,$$

то ввиду четности и π-периодичности X по ξ_1 получаем:

$$\int\limits_0^{+\infty} X(\xi_1, t)\,dt = -\frac{1}{2}\left(\xi_1 - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \int\limits_0^{+\infty} X\left(\frac{\pi}{2}, t\right)\,dt. \tag{17.13}$$

Применяя оценку $|\ln(1+a)| \leqslant a$, $a \geqslant 0$, к подынтегральной функции

$$X\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \ln\left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-2t} - 1 + \sqrt{(1 - \mathrm{e}^{-2t})^2 + 4\mathrm{e}^{-2t}\cos^2\eta}}{2}\right)$$

в правой части равенства (17.13) и вычисляя полученный интеграл, выводим соотношение:

$$\int\limits_0^{+\infty} X\left(\frac{\pi}{2}, t\right)\,dt = O\left(\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)^2 \ln\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)\right), \qquad \eta \to \frac{\pi}{2}.$$

В [22] было доказано, что:

$$\int\limits_{\gamma^\eta \cap \overline{\Pi}} \frac{\partial X}{\partial \xi_2}\,d\xi_1 = \pi - 2\eta, \qquad \int\limits_{\Gamma^\eta \cap \overline{\Pi}} X\,d\xi_1 = -2\eta\ln\sin\eta. \tag{17.14}$$

Подставляя теперь (17.13)–(17.14) в (17.12), приходим к равенствам

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Pi^{(j)}} X^2\,d\xi = &-\frac{1}{2}\int\limits_{\eta}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin\xi_1}{\sin\eta} + \sqrt{\frac{\sin^2\xi_1}{\sin^2\eta} - 1}\right)\left(\xi_1 - \frac{\pi}{2}\right)^2 d\xi_1 + \\
&+ \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} X\left(\frac{\pi}{2}, \xi_2\right)\,d\xi_2 \int\limits_{\eta}^{\frac{\pi}{2}} (X(\xi_1, 0) - \ln\sin\eta)\,\mathrm{d}\xi_1 = \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\eta_1} t^2\left(\ln\left(\cos t + \sqrt{\cos^2 t - \sin^2\eta}\right) - \ln\sin\eta\right)\,dt + O\left(\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)^4 \ln\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)\right) = \\
&= O\left(\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)^4 \ln\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)\right), \qquad \eta \to \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

В вычислениях была сделана замена $t = \dfrac{\pi}{2} - \xi_1$. Из полученной оценки для $\|X\|^2_{L_2(\Pi^{(j)})}$ и непрерывности этой функции по $\eta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ вытекает утверждение пункта (1) для $m = 0$.

Из явного вида функции X, ее бесконечной дифференцируемости по (ξ, η) при $\xi_2 \geqslant 1$, непрерывности по $(\xi, \eta) \in \{\xi : \xi_2 > 0\} \times \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ и экспоненциального убывания при $\xi_2 \to +\infty$ следует, что для $m \geqslant 1$ величина $\|\xi_2^m X\|_{L_2(\Pi^{(j)})}$ — непрерывная по $\eta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ функция и верна оценка:

$$\|\xi_2^m X\|_{L_2(\Pi^{(j)} \cap \{\xi : \xi_2 > 1\})} \leqslant C\eta_1^2,$$

где константа C не зависит от η. Тогда в силу неравенства

$$\|\xi_2^m X\|_{L_2(\Pi^{(j)} \cap \{\xi : \xi_2 < 1\})} < \|X\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leqslant C\eta_1^2 \left(|\ln \eta_1|^{\frac{1}{2}} + 1\right)$$

и утверждения пункта (1) для $m = 0$ заключаем, что пункт (1) имеет место и для $m > 0$.

Проинтегрируем по частям в равенстве $\int\limits_{\Pi} X \Delta_\xi X \, d\xi = 0$; в результате получим:

$$\int\limits_{\Pi} |\nabla_\xi X|^2 \, d\xi = -\ln \sin \eta \int\limits_{\gamma^\eta \cap \overline{\Pi}^{(j)}} \frac{\partial X}{\partial \xi_2} d\xi_1 + \int\limits_{\Gamma^\eta \cap \overline{\Pi}^{(j)}} X \, d\xi_1,$$

откуда и из (17.14) вытекает:

$$\|\nabla_\xi X\|_{L_2(\Pi^{(j)})} = \pi^{\frac{1}{2}} |\ln \sin \eta|^{\frac{1}{2}}. \tag{17.15}$$

Из цепочки равенств ($m \geqslant 0$, $p \geqslant 0$, $m + p \geqslant 1$, $m, p \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{\Pi^{(j)}} \xi_2^{2(m+p)} \frac{\partial^m X}{\partial \xi_2^m} \Delta_\xi \frac{\partial^m X}{\partial \xi_2^m} \, d\xi = \\ &= -\int\limits_{\Pi^{(j)}} \xi_2^{2(m+p)} \left|\nabla_\xi \frac{\partial^m X}{\partial \xi_2^m}\right|^2 d\xi - 2(m+p) \int\limits_{\Pi^{(j)}} \xi_2^{2(m+p)-1} \frac{\partial^m X}{\partial \xi_2^m} \frac{\partial^{m+1} X}{\partial \xi_2^{m+1}} \, d\xi = \\ &= -\left\|\xi_2^{m+p} \nabla_\xi \frac{\partial^m X}{\partial \xi_2^m}\right\|^2_{L_2(\Pi^{(j)})} + (m+p)(2(m+p)-1)\left\|\xi_2^{m+p-1} \frac{\partial^m X}{\partial \xi_2^m}\right\|^2_{L_2(\Pi^{(j)})} \end{aligned}$$

выводим формулы:

$$\left\|\xi_2^{m+p} \nabla_\xi \frac{\partial^m X}{\partial \xi_2^m}\right\|_{L_2(\Pi^{(j)})} = \sqrt{(m+p)(2(m+p)-1)} \left\|\xi_2^{m+p-1} \frac{\partial^m X}{\partial \xi_2^m}\right\|_{L_2(\Pi^{(j)})}. \tag{17.16}$$

Применяя данные формулы с $p = 0$, $m \geqslant 1$ и с $p \geqslant 1$, $m \geqslant 0$, получаем оценки

$$\left\|\xi_2^m \nabla_\xi \frac{\partial^m X}{\partial \xi_2^m}\right\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leqslant C\|\nabla_\xi X\|_{L_2(\Pi^{(j)})}, \qquad \left\|\xi_2^{m+p+1} \nabla_\xi \frac{\partial^m X}{\partial \xi_2^m}\right\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leqslant C\|X\|_{L_2(\Pi^{(j)})},$$

из которых, пункта (1) и равенства (17.15) вытекает утверждение пункта (2). Лемма доказана. ☐

Лемма 17.3. *Функция v_2^{odd} удовлетворяет оценкам:*

$$\begin{aligned} &\|\xi_2^p v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leqslant C|\ln \sin \eta|^{\frac{1}{2}}, \\ &\|\xi_2^p \nabla_\xi v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leqslant C|\ln \sin \eta|^{\frac{1}{2}}, \\ &\left\|\xi_2^p \nabla_\xi \frac{\partial}{\partial \xi_2} v_2^{odd}\right\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leqslant C|\ln \sin \eta|^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

где $p \geqslant 0$, $p \in \mathbb{Z}$, а константы C не зависят от η.

Доказательство. Пусть $v \in \mathcal{V}_\eta \cap W_2^1(\Pi^{(j)})$ — нечетная по ξ_1 функция, являющаяся решением краевой задачи

$$\Delta_\xi v = f, \quad \xi_2 > 0, \qquad v = 0, \quad \xi \in \gamma^\eta, \qquad \frac{\partial v}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \Gamma^\eta, \tag{17.17}$$

где $f \in \mathcal{V}_\eta \cap L_2(\Pi^{(j)})$ — нечетна по ξ_1. Так как $v \in \mathcal{V}_\eta$ нечетна по ξ_1, то $v = 0$ при $\xi_1 = \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно,

$$v(\xi) = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}+\pi j}^{\xi_1} \frac{\partial v}{\partial t}(t, \xi_2)\, dt,$$

откуда в силу неравенства Коши—Буняковского выводим оценку:

$$|v(\xi)|^2 \leqslant \pi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}+\pi j}^{\frac{\pi}{2}+\pi j} \left|\frac{\partial v}{\partial \xi_1}(\xi)\right|^2 d\xi_1,$$

используя которую, окончательно получаем:

$$\|v\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leqslant \pi \|\nabla_\xi v\|_{L_2(\Pi^{(j)})}. \tag{17.18}$$

Теперь умножим уравнение из (17.17) на v и один раз проинтегрируем по частям:

$$\|\nabla_\xi v\|_{L_2(\Pi^{(j)})} = -\int\limits_{\Pi^{(j)}} v f \, d\xi,$$

что в силу неравенства Коши—Буняковского и оценки (17.18) дает:

$$\|v\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leqslant \pi^2 \|f\|_{L_2(\Pi^{(j)})}, \quad \|\nabla v\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leqslant \pi \|f\|_{L_2(\Pi^{(j)})}. \tag{17.19}$$

Применяя неравенства (17.19) к решению задачи (17.11) и учитывая лемму 17.2, получаем равномерные по η оценки:

$$\|v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leqslant C\|\nabla_\xi X\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leqslant C|\ln\sin\eta|^{\frac{1}{2}}, \qquad \|\nabla_\xi v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leqslant C|\ln\sin\eta|^{\frac{1}{2}}. \tag{17.20}$$

Далее, функции $\xi_2^p v_2^{odd}$ являются решением задачи (17.17), где γ_η совпадает с осью $O\xi_1$, а правые части имеют вид

$$f = p(p-1)\xi_2^{p-2} v_2^{odd} + 2p\xi_2^{p-1}\frac{\partial v_2^{odd}}{\partial \xi_2} + \xi_2^p \frac{\partial X}{\partial \xi_1}.$$

Поэтому, применяя к $\xi_2^p v_2^{odd}$ оценки (17.19), с учетом (17.20) и леммы 17.2 получаем:

$$\begin{aligned}
&\|\xi_2 v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leqslant C\left(\|\nabla v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} + \|\nabla X\|_{L_2(\Pi^{(j)})}\right) \leqslant C|\ln\sin\eta|^{\frac{1}{2}},\\
&\|\xi_2^p v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leqslant C\left(\|\xi_2^{p-2} v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} + \|\xi_2^{p-1}\nabla v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} + \|\xi_2^p \nabla_\xi X\|_{L_2(\Pi^{(j)})}\right), \quad p \geqslant 2.
\end{aligned} \tag{17.21}$$

Интегрируя по частям в равенствах ($m \in \mathbb{N}$)

$$\int\limits_{\Pi^{(j)}} \xi_2^{2m} v_2^{odd} \frac{\partial X}{\partial \xi_1}\, \mathrm{d}\xi = \int\limits_{\Pi^{(j)}} \xi_2^{2m} v_2^{odd} \Delta_\xi v_2^{odd}\, \mathrm{d}\xi,$$

$$\int\limits_{\Pi^{(j)}} \xi_2^{2(m+1)} \frac{\partial v_2^{odd}}{\partial \xi_2} \frac{\partial^2 X}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\, \mathrm{d}\xi = \int\limits_{\Pi^{(j)}} \xi_2^{2(m+1)} \frac{\partial v_2^{odd}}{\partial \xi_2} \Delta_\xi \frac{\partial v_2^{odd}}{\partial \xi_2}\, \mathrm{d}\xi,$$

аналогично тому, как было получено (17.16), выводим неравенства:

$$\|\xi_2^m \nabla_\xi v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leqslant C\left(\|\xi_2^{m-1} v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} + \left\|\xi_2^{m+1}\frac{\partial X}{\partial \xi_1}\right\|_{L_2(\Pi^{(j)})}\right),$$

$$\left\|\xi_2^{m+1}\nabla_\xi \frac{\partial v_2^{odd}}{\partial \xi_2}\right\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leqslant C\left(\|\xi_2^m \nabla_\xi v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} + \left\|\xi_2^{m+2}\frac{\partial^2 X}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\right\|_{L_2(\Pi^{(j)})}\right).$$

Из полученных неравенств, леммы 17.2 и оценок (17.20), (17.21) по индукции вытекает утверждение леммы. Лемма доказана. □

Лемма 17.4. *Для любого $R > 0$ и целого $m \geqslant 3$ имеют место равномерные по R и η оценки* ($k = 0, 1, 2$):

$$\begin{aligned}
&\|X\|_{L_2(\Pi^{(j)}\cup\{\xi:\xi_2>R\})} \leqslant CR^{-m}\left(\frac{\pi}{2}-\eta\right)^2\left(\left|\ln\left(\frac{\pi}{2}-\eta\right)\right|+1\right),\\
&\|\xi_2^k\nabla_\xi X\|_{L_2(\Pi^{(j)}\cup\{\xi:\xi_2>R\})} \leqslant CR^{-m}\left(\frac{\pi}{2}-\eta\right)^2\left(\left|\ln\left(\frac{\pi}{2}-\eta\right)\right|+1\right),\\
&\left\|\xi_2^{k+1}\nabla_\xi \frac{\partial X}{\partial \xi_2}\right\|_{L_2(\Pi^{(j)}\cup\{\xi:\xi_2>R\})} \leqslant CR^{-m}\left(\frac{\pi}{2}-\eta\right)^2\left(\left|\ln\left(\frac{\pi}{2}-\eta\right)\right|+1\right),\\
&\|v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)}\cup\{\xi:\xi_2>R\})} \leqslant CR^{-m}\left|\ln\sin\eta\right|^{\frac{1}{2}},\\
&\|\nabla_\xi v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)}\cup\{\xi:\xi_2>R\})} \leqslant CR^{-m}\left|\ln\sin\eta\right|^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Для любой функции $v \in \mathcal{V}_\eta$ при $\xi_2 \geqslant R$ в силу неравенства Коши—Буняковского справедливы соотношения:

$$|v(\xi)| = \left|\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} \frac{\partial v}{\partial t}(\xi_1, t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2m-3}}\xi_2^{-m+\frac{3}{2}}\left\|\xi_2^{m-1}\frac{\partial v}{\partial \xi_2}\right\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}.$$

Интегрируя это неравенство по $\Pi^{(j)} \cap \{\xi : \xi_2 > R\}$, получаем:

$$\|v\|_{L_2(\Pi^{(j)}\cap\{\xi:\xi_2>R\})} \leqslant \frac{R^{-m}}{\sqrt{(2m-3)(2m-4)}}\left\|\xi_2^{m-1}\frac{\partial v}{\partial \xi_2}\right\|_{L_2(\Pi^{(j)}\cap\{\xi:\xi_2>R\})}.$$

Последовательно полагая в данном неравенстве

$$v = X, \qquad v = \xi_2^k \frac{\partial X}{\partial \xi_i}, \qquad v = \xi_2^{k+1}\frac{\partial^2 X}{\partial \xi_i \partial \xi_2}, \qquad v = v_2^{odd}, \qquad v = \frac{\partial v_2^{odd}}{\partial \xi_i}, \qquad i = 1, 2,$$

приходим к утверждению леммы. Лемма доказана. □

Лемма 17.5. *Функции $\lambda_1(\varepsilon)$ и $\psi_1(x, \varepsilon) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ ограничены по ε:*

$$|\lambda_1| \leqslant C, \quad \|\psi_1\|_{C^3(\overline{\Omega})} \leqslant C.$$

Доказательство. Ограниченность $\lambda_1(\varepsilon)$ следует из условия (C2) и формулы (17.9). Гладкость функции ψ_1 — очевидна. В силу хорошо известных оценок решений эллиптических краевых задач для функции ψ_1 имеем:

$$\|\psi_1\|_{H^2(\Omega)} \leqslant C\left(|\lambda_1|\|\psi_0\|_{L_2(\Omega)} + \|\psi_0^\nu/\theta_\varepsilon'\|_{C^2(\partial\Omega)}\right) \leqslant C,$$

где C не зависит от ε, откуда в силу теоремы вложения $H^2(\Omega)$ в $C(\Omega)$ получаем: $\|\psi_1\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant C$ с независящей от ε константой C. Применяя теперь оценки Шаудера (см. [46, гл. III, § 1, формула (1.11)]) и учитывая ограниченность нормы $\|\theta_\varepsilon'\|_{C^{3+c_3}(\partial\Omega)}$, выводим:

$$\|\psi_1\|_{C^3(\overline{\Omega})} \leqslant C\left(|\lambda_1|\|\psi_0\|_{C^2(\overline{\Omega})} + \|\psi_1\|_{C(\overline{\Omega})} + \|\psi_0^\nu/\theta_\varepsilon'\|_{C^{3+d}(\partial\Omega)}\right) \leqslant C,$$

где C не зависит от ε. Лемма доказана. □

Обозначим:

$$\begin{aligned}
&\widehat{\lambda}_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon\ln\sin\eta\lambda_1,\\
&\widehat{\psi}_\varepsilon(x) = \psi_0(x) + \varepsilon\ln\sin\eta\psi_1(x,\varepsilon) + \chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)\psi_\varepsilon^{bl}(\xi, s, \eta) + R_\varepsilon(x),\\
&R_\varepsilon(x) = \varepsilon^2\ln^2\sin\eta\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)\psi_0^\nu/\theta_\varepsilon',
\end{aligned}$$

где λ_1 из (17.9), ψ_ε^{bl} из (17.3) с v_1 и v_2 из (17.7) и (17.10).

Следующее утверждение является аналогом леммы 14.6.

Лемма 17.6. *Функция* $\widehat{\psi}_\varepsilon \in C^\infty(\Omega \cup \gamma_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon) \cap W_2^1(\Omega)$ *сходится к* ψ_0 *в* $W_2^1(\Omega)$ *и удовлетворяет краевой задаче*

$$-\Delta \widehat{\psi}_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \widehat{\psi}_\varepsilon + f_\varepsilon, \quad x \in \Omega, \qquad \widehat{\psi}_\varepsilon = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \qquad \frac{\widehat{\psi}_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon,$$

где для f_ε *верна равномерная оценка*:

$$\|f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{3}{2}} \left(|\ln \eta|^{\frac{3}{2}} + 1 \right) \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right),$$

константа C *не зависит от* ε *и* η. *Для функции* $R_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *верна равномерная по* ε *и* η *оценка*:

$$\|R_\varepsilon\|_{C^2(\overline{\Omega})} \leqslant C\varepsilon^2 \ln^2 \sin \eta.$$

Доказательство. Гладкость $\widehat{\psi}_\varepsilon$ и R_ε является прямым следствием определения этих функций. Утверждаемые граничные условия для $\widehat{\psi}_\varepsilon$ вытекают из (17.5), (17.6), (2.9), (17.8), (17.11). Доказательство оценки для R_ε основывается на лемме 17.5 и условии (C2):

$$\|R_\varepsilon\|_{C^2(\overline{\Omega})} \leqslant C\varepsilon^2 \ln^2 \sin \eta \|\psi_1\|_{C^3(\overline{\Omega})} \leqslant C\varepsilon^2 \ln^2 \sin \eta.$$

Докажем оценку для f_ε. Эта функция представляется в виде:

$$\begin{aligned}
& f_\varepsilon = -(\Delta_x + \widehat{\lambda}_\varepsilon)\widehat{\psi}_\varepsilon = -\sum_{i=1}^{3} f_\varepsilon^{(i)}, \\
& f_\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^2 \ln^2 \sin \eta \left(\lambda_1 \psi_1 + \left(\Delta + \widehat{\lambda}_\varepsilon \right) \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) \frac{\psi_0^\nu}{\theta_\varepsilon'} \right), \\
& f_\varepsilon^{(2)} = \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) (\Delta_x + \widehat{\lambda}_\varepsilon) \psi_\varepsilon^{bl}, \\
& f_\varepsilon^{(3)} = 2 \left(\nabla_x \psi_\varepsilon^{bl}, \nabla_x \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) \right) + \psi_\varepsilon^{bl} \Delta_x \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right).
\end{aligned}$$

Функция $f_\varepsilon^{(1)}$ легко оценивается благодаря лемме 17.5:

$$\|f_\varepsilon^{(1)}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\varepsilon^2 \ln^2 \sin \eta,$$

где C не зависит от ε и η. Так как $\nabla_x \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right)$ и $\Delta_x \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right)$ не равны нулю лишь при $\frac{c_0}{4} < \tau < \frac{3c_0}{4}$, то, учитывая определение переменных ξ и используя лемму 17.4 с $m = 3$ и $R = \frac{c_0 c_1}{4\varepsilon}$, где c_1 из (C2), получаем оценку:

$$\|f_\varepsilon^{(2)}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{7}{2}} |\ln \sin \eta|^{\frac{1}{2}},$$

где C не зависит от η и ε. Используя гармоничность X и уравнение для v_2^{odd}, приходим к представлению для функции $f_\varepsilon^{(3)}$:

$$\begin{aligned}
f_\varepsilon^{(3)} =& \varepsilon \sum_{k=0}^{2} \sum_{i=1}^{2} \left((\ln \sin \eta)^{\left[\frac{3-k}{2}\right]} G_{4k+2i-1} + \xi_2 G_{4k+2i} \right) \xi_2^{2\left[\frac{k+1}{2}\right]} \frac{\partial^{k+1} X}{\partial \xi_i \partial \xi_2^k} + \\
& + \varepsilon(\varepsilon^2 \ln^2 \sin \eta \, G_{13} + \varepsilon \ln \sin \eta \, G_{14} + G_{15}) X + \varepsilon \sum_{k=0}^{1} \sum_{i=1}^{2} \xi_2^k G_{2k+i+15} \frac{\partial^{k+1} v_2^{odd}}{\partial \xi_i \partial \xi_2^k} + \\
& + \varepsilon^2 \left(\varepsilon \ln \sin \eta \, G_{20} + G_{21} \right) v_2^{odd},
\end{aligned}$$

где $G_i = G_i(\xi_2; s, \varepsilon)$ — полиномы по ξ_2 с коэффициентами, зависящими от s и ε, причем в силу леммы 17.5 эти коэффициенты ограничены равномерно по s и ε, $[\cdot]$ — целая часть числа. Учитывая эти оценки и применяя леммы 17.2 и 17.3, заключаем, что

$$\|f_\varepsilon^{(2)}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{3}{2}} \left(|\ln \eta|^{\frac{3}{2}} + 1 \right) \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right),$$

где C не зависит от ε и η. Здесь мы также использовали очевидные соотношения:

$$\ln\sin\eta = O(\eta),\quad \eta\to 0,\qquad \ln\sin\eta = O\left(\left(\frac{\pi}{2}-\eta\right)^2\right),\quad \eta\to\frac{\pi}{2}.$$

Лемма доказана. ☐

Обоснование построенных асимптотик проводится аналогично обоснованию асимптотик из раздела 5.

Формальное построение асимптотик в случае кратного предельного собственного значения принципиально не отличается от случая простого предельного собственного значения. Отличием будет лишь то, что одновременно строятся асимптотики всех собственных значений, сходящихся к кратному предельному собственному значению; в целом же формальное построение дословно повторяет приведенные выше рассуждения. Обоснование асимптотик в случае кратного предельного собственного значения также аналогично разделу 6. Лемма 17.1 полностью доказана.

18. ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ

В настоящем разделе мы докажем теоремы 16.1, 16.2, 16.3. Доказательство этих теорем будет основываться на следующем вспомогательном утверждении.

Лемма 18.1. *Пусть множества* $\gamma_1(\varepsilon),\gamma_2(\varepsilon)\subseteq\partial\Omega$ *таковы, что* $\gamma_1(\varepsilon)\subseteq\gamma_2(\varepsilon)$, $\lambda^k_{\varepsilon,1}$, $\lambda^k_{\varepsilon,2}$ — *собственные значения возмущенной задачи с* $\gamma_\varepsilon=\gamma_1(\varepsilon)$ *и* $\gamma_\varepsilon=\gamma_2(\varepsilon)$ *соответственно, взятые с учетом кратности в порядке неубывания. Тогда для всех* k *верны неравенства*

$$\lambda^k_{\varepsilon,1}\leqslant\lambda^k_{\varepsilon,2}.$$

Лемма 18.1 представляет из себя стандартное утверждение о вариационных свойствах собственных значений эллиптических краевых задач. Доказательство основано на минимаксном свойстве собственных значений и очевидном вложении функциональных пространств:

$$W_2^1(\Omega,\gamma_2(\varepsilon))\subseteq W_2^1(\Omega,\gamma_1(\varepsilon)),$$

где $W_2^1(\Omega,\gamma_i(\varepsilon))$, $i=1,2$ — множество функций из $W_2^1(\Omega)$, обращающихся в нуль на $\gamma_i(\varepsilon)$.

Доказательство теоремы 16.1. Согласно теореме Лагранжа, функции a^j и b^j, введенные в разделе 17, можно выразить через a_j и b_j следующим образом:

$$a^j=\theta'_\varepsilon(M^{(3)}_{j,\varepsilon})a_j,\qquad b^j=\theta'_\varepsilon(M^{(4)}_{j,\varepsilon})b_j,$$

где $M^{(3)}_{j,\varepsilon}\in(s^\varepsilon_j-\varepsilon a_j,s^\varepsilon_j)$, $M^{(4)}_{j,\varepsilon}\in(s^\varepsilon_j,s^\varepsilon_j+\varepsilon b_j)$. Из полученных представлений в силу предположений теоремы вытекает, что

$$a^j\geqslant c_1a_j,\qquad b^j\geqslant c_1b_j.$$

Эти оценки, предположения теоремы и факт непересечения множеств $\gamma_{\varepsilon,j}$ дают:

$$2\eta(\varepsilon)\leqslant\min_j a^j(\varepsilon)+\min_i b^i(\varepsilon)\leqslant\pi,$$

т. е. функция η ограничена сверху числом $\dfrac{\pi}{2}$. Кроме того, из последних неравенств следует существование функций $a_*(\varepsilon)$ и $b_*(\varepsilon)$, таких что $a_*+b_*=2\eta$, а для множества

$$\gamma_{\varepsilon,*}=\left\{x:\,x\in\partial\Omega,-\varepsilon a_*(\varepsilon)<\theta_\varepsilon(s)-\theta_\varepsilon(s^\varepsilon_j)<\varepsilon b_*(\varepsilon),\,j=0,\dots,N-1\right\}$$

выполнено включение $\gamma_{\varepsilon,*}\subseteq\gamma_\varepsilon$. Через $\lambda^k_{\varepsilon,*}$ обозначим собственные значения возмущенной задачи с $\gamma_\varepsilon=\gamma_{\varepsilon,*}$, взятые с учетом кратности в порядке неубывания. Множество $\gamma_{\varepsilon,*}$ удовлетворяет условиям леммы 17.1 с функцией η. Согласно лемме 17.1, собственные значения $\lambda^k_{\varepsilon,*}$ сходятся к собственным значениям λ^k_0 задачи (1.6) и для них верны асимптотики из этой леммы. Дважды применяя теперь лемму 18.1 с $\gamma_1(\varepsilon)=\gamma_{\varepsilon,*}$, $\gamma_2(\varepsilon)=\gamma_\varepsilon$ и $\gamma_1(\varepsilon)=\gamma_\varepsilon$, $\gamma_2(\varepsilon)=\partial\Omega$, выводим двусторонние оценки:

$$\lambda^k_{\varepsilon,*}\leqslant\lambda^k_\varepsilon\leqslant\lambda^k_0.$$

Теперь в полученных оценках заменим $\lambda^k_{\varepsilon,*}$ на асимптотики из леммы 18.1, что дает, во-первых, сходимость λ^k_ε к λ^k_0, и, во-вторых, требуемые двусторонние оценки разностей $(\lambda^k_\varepsilon-\lambda^k_0)$. Теорема 16.1 доказана. ☐

Доказательство теоремы 16.2. Из первой оценки леммы 13.1 и условия теоремы выводим, что

$$2\eta_0\eta \leqslant a^j + b^j \leqslant 2\eta.$$

Из полученных неравенств вытекает, что, во-первых, функция η_0 ограничена сверху единицей и, во-вторых, найдутся неотрицательные ограниченные функции $a^j_*(\varepsilon)$, $b^j_*(\varepsilon)$, $a^{j,*}(\varepsilon)$, $b^{j,*}(\varepsilon)$, такие что $a^j_* + b^j_* = 2\eta_0\eta$, $a^{j,*} + b^{j,*} = 2\eta$, а для множеств

$$\begin{aligned}\gamma_{\varepsilon,*} &= \big\{x : x \in \partial\Omega, -\varepsilon a^j_*(\varepsilon) < \theta_\varepsilon(s) - \theta_\varepsilon(s^\varepsilon_j) < \varepsilon b^j_*(\varepsilon), j = 0, \ldots, N-1\big\},\\ \gamma^*_\varepsilon &= \big\{x : x \in \partial\Omega, -\varepsilon a^{j,*}(\varepsilon) < \theta_\varepsilon(s) - \theta_\varepsilon(s^\varepsilon_j) < \varepsilon b^{j,*}(\varepsilon), j = 0, \ldots, N-1\big\}\end{aligned}$$

выполнены вложения

$$\gamma_{\varepsilon,*} \subseteq \gamma_\varepsilon \subseteq \gamma^*_\varepsilon. \tag{18.1}$$

Через $\lambda^k_{\varepsilon,*}$ и $\lambda^{k,*}_\varepsilon$ обозначим собственные значения возмущенной задачи с $\gamma_\varepsilon = \gamma_{\varepsilon,*}$ и $\gamma_\varepsilon = \gamma^*_\varepsilon$, взятые с учетом кратности в порядке неубывания. Множества $\gamma_{\varepsilon,*}$ и γ^*_ε удовлетворяют условиям (C2), функция η для них, соответственно, это функция $\eta_0\eta$ и η из условия теоремы; равенство (7.3) для этих функций выполнено с одним и тем же $A > 0$. Величины $\delta^j(\varepsilon)$ для множеств $\gamma_{\varepsilon,*}$ и γ^*_ε равны нулю, а потому в силу леммы 15.1 собственные значения $\lambda^k_{\varepsilon,*}$ и $\lambda^{k,*}_\varepsilon$ сходятся к собственным значениям задачи (12.2) и верны асимптотики

$$\begin{aligned}\lambda^k_{\varepsilon,*} &= \Lambda^k_0(\widetilde{\mu}, \varepsilon) + \varepsilon(A+\mu)^2 \int\limits_{\partial\Omega} \Big(\Psi^k_0(x, \mu, \varepsilon)\Big)^2 \ln g_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s))\theta'_\varepsilon(s)\, ds + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}),\\ \lambda^{k,*}_\varepsilon &= \Lambda^k_0(\mu, \varepsilon) + \varepsilon(A+\mu)^2 \int\limits_{\partial\Omega} \Big(\Psi^k_0(x, \widetilde{\mu}, \varepsilon)\Big)^2 \ln g_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s))\theta'_\varepsilon(s)\, ds + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}),\end{aligned} \tag{18.2}$$

где μ — из (7.8),

$$\widetilde{\mu} = \widetilde{\mu}(\varepsilon) = -\left(\varepsilon \ln \eta_0(\varepsilon)\eta(\varepsilon)\right)^{-1} - A = \mu(\varepsilon) + \frac{(A^2 - \mu(\varepsilon)^2)\varepsilon \ln \eta_0(\varepsilon)}{1 + (A + \mu(\varepsilon))\varepsilon \ln \eta_0(\varepsilon)}.$$

Из леммы 14.3 выводим оценку $\|\Psi^k_0\|_{L_2(\partial\Omega)} \leqslant C$ с не зависящей от ε и μ константой C. Данная оценка, (13.29) и условие (C3) позволяют оценить интегралы в (18.2):

$$-C \leqslant (A+\mu)^2 \int\limits_{\partial\Omega} (\Psi^k_0)^2 \ln g_\varepsilon(\theta_\varepsilon)\theta'_\varepsilon\, ds \leqslant 0, \tag{18.3}$$

где $C > 0$ не зависит от ε и μ. Лемма 18.1 в силу включений (18.1) утверждает справедливость оценок

$$\lambda^k_{\varepsilon,*} \leqslant \lambda^k_\varepsilon \leqslant \lambda^{k,*}_\varepsilon,$$

из которых, а также из асимптотик (18.2), (15.5) и неравенства (18.3) выводим сходимость $\lambda^k_\varepsilon \to \lambda^k_0$ и требуемые двусторонние оценки величин $(\lambda^k_\varepsilon - \lambda^k_0)$. Теорема 16.2 доказана. ☐

Доказательство теоремы 16.3. Методика доказательства — такая же, как и в теоремах 16.1, 16.2. Из первой оценки леммы 13.1 и условия теоремы следует, что существуют неотрицательные функции $a^{j,*}(\varepsilon)$ и $b^{j,*}(\varepsilon)$, такие что $a^{j,*} + b^{j,*} = 2\eta$, и для подмножества границы $\partial\Omega$

$$\gamma^*_\varepsilon = \big\{x : x \in \partial\Omega, -\varepsilon a^{j,*}(\varepsilon) < \theta_\varepsilon(s) - \varepsilon\pi j < \varepsilon b^{j,*}(\varepsilon), j = 0, \ldots, N-1\big\}$$

выполнено $\gamma_\varepsilon \subseteq \gamma^*_\varepsilon$. Пусть $\lambda^{k,*}_\varepsilon$ — собственные значения возмущенной задачи с $\gamma_\varepsilon = \gamma^*_\varepsilon$. Множество γ^*_ε удовлетворяет всем требованиям теоремы 12.2 с функцией η из условия теоремы. Поэтому

$$\lambda^{k,*}_\varepsilon = \lambda^k_0 + \mu \int\limits_{\partial\Omega} (\psi^k_0)^2 \theta'_0 \mathrm{d}s + o(\mu), \tag{18.4}$$

где λ^k_0, напомним, собственные значения задачи (12.2) с $A = 0$. Включения $\varnothing \subseteq \gamma(\varepsilon) \subseteq \gamma^*(\varepsilon)$ в силу леммы 18.1 дают неравенства:

$$\lambda^k_0 \leqslant \lambda^k_\varepsilon \leqslant \lambda^{k,*}_\varepsilon,$$

из которых и асимптотик (18.4) вытекает утверждение теоремы. Теорема 16.3 доказана. ☐

Глава 6

ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ЧЕРЕДОВАНИЕМ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

19. Постановка задачи и основные результаты главы

В настоящей главе мы переходим к рассмотрению трехмерных краевых задач с частой сменой краевых условий. В качестве основной модели выбирается задача для оператора Лапласа в прямом трехмерном цилиндре с частой сменой краевых условий на узких поперечных полосах на боковой поверхности. В целом схема исследования здесь повторяет идеи, использованные в двумерных задачах в предыдущих главах. Однако особенность постановки состоит в том, что ширина полос может меняться, в том числе, и достаточно нерегулярным образом, и это вносит дополнительные особенности в исследование.

Постановка задачи такова. Пусть $x = (\mathrm{x}, x_3)$ и $\mathrm{x} = (x_1, x_2)$ — двух- и трехмерные декартовы координаты, $\Omega = \omega \times [0, H]$, где ω — произвольная односвязная ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с бесконечно дифференцируемой границей, s — натуральный параметр кривой $\partial\omega$. Через Σ обозначим боковую поверхность цилиндра Ω, через ω_1 и ω_2 — верхнее и нижнее основания соответственно,

$$\omega_1 = \big\{x :\ \mathrm{x} \in \partial\omega,\ x_3 = H\big\}, \qquad \omega_2 = \big\{x :\ \mathrm{x} \in \partial\omega,\ x_3 = 0\big\}.$$

Малый параметр введем следующим образом: $\varepsilon = \dfrac{H}{\pi N}$, где $N \gg 1$ — натуральное число. Боковую поверхность разобьем на два подмножества γ^ε и Γ^ε, определив эти подмножества как объединение большого числа узких полос (см. рис. 3):

$$\gamma^\varepsilon = \left\{x :\ \mathrm{x} \in \partial\omega,\ \left|x_3 - \varepsilon\pi\left(j + \frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon\eta \mathrm{g}_\varepsilon(s),\ j = 0, \dots, N-1\right\}, \qquad \Gamma^\varepsilon = \Sigma \setminus \overline{\gamma}^\varepsilon.$$

Здесь $\eta = \eta(\varepsilon)$ — произвольная функция, принимающая значения из интервала $(0, \pi/2)$, $\mathrm{g}_\varepsilon \in C^\infty(\partial\omega)$ — произвольная функция, удовлетворяющая оценке

$$0 < c_4 \leqslant \mathrm{g}_\varepsilon(s) \leqslant 1$$

с константой c_4, не зависящей от ε и s. Рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача на собственные значения:

$$-\Delta\psi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \psi_\varepsilon, \quad x \in \Omega, \tag{19.1}$$

$$\psi_\varepsilon = 0, \quad x \in \omega_1 \cup \gamma^\varepsilon, \qquad \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial\nu} = 0, \quad x \in \omega_2 \cup \Gamma^\varepsilon, \tag{19.2}$$

где ν — внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$. Отметим, что в этой задаче разбиение границы ω не производится, а разбивается только боковая поверхность цилиндра Ω.

В работе [101] была изучена сходимость краевой задачи для уравнения Пуассона в круговом цилиндре с граничными условиями (19.2) в предположении $\mathrm{g}_\varepsilon(s) \equiv 1$. Здесь на основе методик работ [26, 66, 91, 101] будет изучена сходимость задачи (19.1), (19.2) и доказано следующее утверждение.

Теорема 19.1. *Пусть норма $\|\mathrm{g}_\varepsilon\|_{C^2(\partial\omega)}$ ограничена равномерно по ε, а для функции η выполнено одно из равенств* (1.5), (7.3). *Тогда собственные значения задачи* (19.1), (19.2) *сходятся к собственным значениям одной из предельных задач*:

$$\begin{gathered} -\Delta\psi_0 = \lambda_0\psi_0, \quad x \in \Omega, \\ \psi_0 = 0, \quad x \in \omega_1 \cup \Sigma, \qquad \frac{\partial\psi_0}{\partial\nu} = 0, \quad x \in \omega_2, \end{gathered} \tag{19.3}$$

если для η выполнено равенство (1.5), *и*

$$\begin{gathered} -\Delta\psi_0 = \lambda_0\psi_0, \quad x \in \Omega, \qquad \psi_0 = 0, \quad x \in \omega_1, \\ \frac{\partial\psi_0}{\partial\nu} = 0, \quad x \in \omega_2, \quad \left(\frac{\partial}{\partial\nu} + A\right)\psi_0 = 0, \quad x \in \Sigma, \end{gathered} \tag{19.4}$$

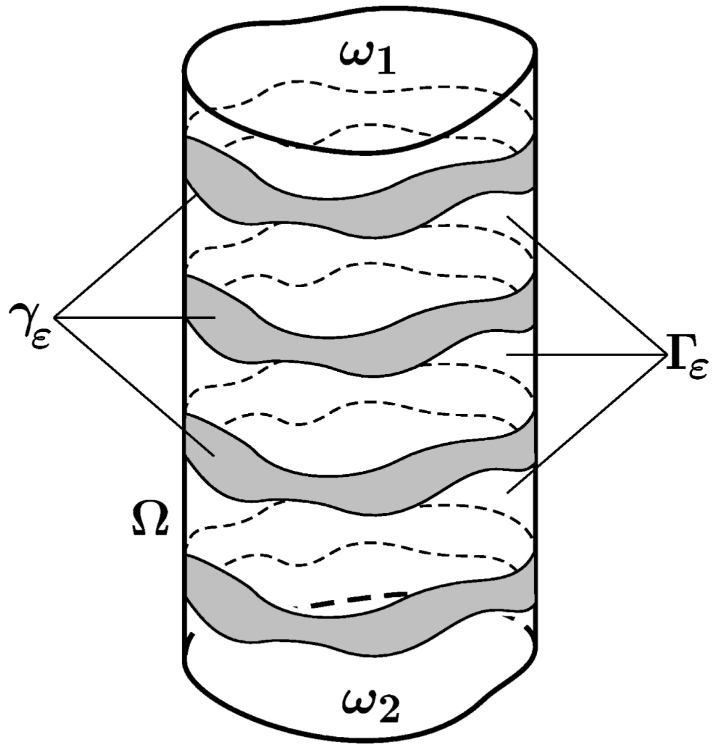

Рис. 3. Трехмерный цилиндр с частым периодическим чередованием краевых условий на полосах на боковой поверхности

если для η *выполнено равенство* (7.3). *Совокупная кратность собственных значений возмущенной задачи, сходящихся к одному и тому же предельному собственному значению, совпадает с кратностью этого предельного собственного значения. Для всякой собственной функции* ψ_0, *соответствующей собственному значению* λ_0, *существует сходящаяся к ней линейная комбинация собственных функций возмущенной задачи, соответствующих собственным значениям, сходящимся к* λ_0. *Эта сходимость — сильная в* $W_2^1(\Omega)$, *если предельной является задача* (19.3) *или* (19.4) *с* $A = 0$, *и сильная в* $L_2(\Omega)$ *и слабая в* $W_2^1(\Omega)$ *в случае предельной задачи* (19.4) *с* $A > 0$.

Как и в двух предыдущих главах, основной целью третьей главы является построение асимптотических разложений собственных элементов задачи (19.1), (19.2). Прежде чем сформулировать основные результаты третьей главы, введем дополнительные обозначения.

Задачи (19.3), (19.4) легко решаются разделением переменных:

$$\lambda_0 = M^2 + \varkappa, \qquad \psi_0(x) = \phi_0(\mathrm{x}) \cos Mx_3, \qquad M = \pi \left(m + \frac{1}{2} \right) H^{-1},$$

где $m \geqslant 0$ — целое число, $\varkappa$ и ϕ_0 — собственные значения и собственные функции двумерной задачи

$$-\Delta_{\mathrm{x}} \phi_0 = \varkappa \phi_0, \quad \mathrm{x} \in \omega, \qquad \phi_0 = 0, \quad \mathrm{x} \in \partial\omega, \tag{19.5}$$

— для задачи (19.3) и

$$-\Delta_{\mathrm{x}} \phi_0 = \varkappa \phi_0, \quad \mathrm{x} \in \omega, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{v}} + A \right) \phi_0 = 0, \quad \mathrm{x} \in \partial\omega, \tag{19.6}$$

— для задачи (19.4). Здесь v — внешняя нормаль к $\partial\omega$.

Сформулируем теперь основные результаты главы.

Теорема 19.2. *Пусть выполнено равенство* (1.5) *и существует* $c_5 > 0$, *такое что норма Гельдера* $\|\mathrm{g}_\varepsilon\|_{C^{2+c_5}(\partial\omega)}$ *ограничена по* ε. *Тогда собственные значения* λ_ε *задачи* (19.1), (19.2), *сходящиеся к простым собственным значениям* λ_0 *задачи* (19.3)*, имеют следующие двупараметрические асимптотики*:

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1(\eta,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(|\ln\eta|^{\frac{3}{2}}+1)\right), \tag{19.7}$$

$$\lambda_1(\eta,\varepsilon) = \int\limits_{\partial\omega}\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial\mathsf{v}}\right)^2 \ln\sin\eta\mathsf{g}_\varepsilon\, ds, \tag{19.8}$$

где $\|\phi_0\|_{L_2(\omega)} = 1$. *Асимптотика соответствующей собственной функции* ψ_ε *в норме* $W_2^1(\Omega)$ *имеет вид* (23.4).

Следующая лемма носит вспомогательный характер и необходима для формулировки теоремы 19.3. Доказательство этой леммы будет проведено в разделе 22.

Лемма 19.1. *Для каждого простого собственного значения* $\varkappa$ *задачи* (19.6) *существует единственное и простое собственное значение задачи*

$$-\Delta_{\mathsf{x}}\Phi_0 = \mathcal{K}\Phi_0, \quad \mathsf{x}\in\omega, \tag{19.9}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\mathsf{v}} + A + \mu\right)\Phi_0 = 0, \quad \mathsf{x}\in\partial\omega, \tag{19.10}$$

сходящееся к $\varkappa$ *при* $\mu\to 0$. *Для соответствующих нормированных в* $L_2(\omega)$ *собственных функций имеет место сильная в* $W_2^1(\omega)$ *сходимость* $\Phi_0\to\phi_0$. *Собственное значение* $\mathcal{K}(\mu)$ *и соответствующая собственная функция* $\Phi_0(\mathsf{x},\mu)$ *голоморфны по* μ (*последняя — в норме* $W_2^1(\omega)$).

Теорема 19.3. *Пусть выполнено равенство* (7.3) *для функции* η *и норма* $\|\mathsf{g}_\varepsilon\|_{C^2(\partial\omega)}$ *ограничена равномерно по* ε. *Тогда собственные значения* λ_ε *задачи* (19.1), (19.2)*, сходящиеся к простым собственным значениям* λ_0 *задачи* (19.4)*, имеют следующие двупараметрические асимптотики*:

$$\lambda_\varepsilon = \Lambda_0(\mu) + \varepsilon\Lambda_1(\mu,\varepsilon) + \varepsilon^2\Lambda_2(\mu,\varepsilon) + O(\varepsilon^3(A+\mu)), \tag{19.11}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_1(\mu,\varepsilon) =&(A+\mu)^2\int\limits_{\partial\omega}\Phi_0^2\ln\mathsf{g}_\varepsilon\, ds,\\ \Lambda_2(\mu,\varepsilon) =&(A+\mu)^2\int\limits_{\partial\omega}\left(\Phi_0\Phi_1\ln\mathsf{g}_\varepsilon - \frac{\pi^2}{24}\mathsf{k}\Phi_0^2\right)ds + (A+\mu)^3\int\limits_{\partial\Omega'}\Phi_0^2\ln^2\mathsf{g}_\varepsilon\, ds,\end{aligned} \tag{19.12}$$

где $\Lambda_0 = \mathcal{K}(\mu) + M^2$, $\mathcal{K}$ *и* Φ_0 *удовлетворяют лемме* 19.1*, причем* $\mathcal{K}$ *выбрано из условия*

$$\mathcal{K}(\mu)\to\varkappa, \qquad \mu\to 0.$$

Функция $\Phi_1 = \Phi_1(\mathsf{x},\mu,\varepsilon)$ *— решение задачи*

$$-\Delta_{\mathsf{x}}\Phi_1 = \mathcal{K}\Phi_1 + \Lambda_1\Phi_0, \quad \mathsf{x}\in\omega, \tag{19.13}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\mathsf{v}} + A + \mu\right)\Phi_1 = -(A+\mu)^2\Phi_0\ln\mathsf{g}_\varepsilon, \quad \mathsf{x}\in\partial\omega, \tag{19.14}$$

удовлетворяющее условию ортогональности $(\Phi_0,\Phi_1)_{L_2(\omega)} = 0$, $\mathsf{k}(s) = -\left(\mathsf{r}''(s),\mathsf{v}(s)\right)_{\mathbb{R}^2}$, $\mathsf{v}=\mathsf{v}(s)$, $\mathsf{r}(s)$ *— двумерная вектор-функция, задающая* $\partial\omega$. *Функции* Λ_i, Φ_i *голоморфны по* μ (*последние — в норме* $W_2^1(\omega)$). *Асимптотики соответствующих собственных функций* ψ_ε *в норме* $W_2^1(\Omega)$ *имеют вид* (23.6).

Отметим, что в случае кратного предельного значения у задач (19.3), (19.4) также возможно построить асимптотики собственных элементов задачи (19.1), (19.2). Кроме того, методика построения асимптотик в условиях теорем 19.2, 19.3 позволяет также строить и полные асимптотические разложения собственных элементов задачи (19.1), (19.2). Подобные исследования были сделаны в работах [11,12], где изучался случай кругового цилиндра с полосами постоянной ширины ($\mathsf{g}_\varepsilon\equiv 1$). В [12] для усредненной задачи (19.3), а в [11] — для усредненной задачи (19.4) были построены полные асимптотические разложения собственных значений задачи (19.1), (19.2), сходящихся к простым и кратным предельным значениям, а также полные асимптотические разложения соответствующих собственных функций. На основе полученных асимптотических разложений удалось установить достаточно простой и конструктивный критерий определения кратности у заданного собственного значения задачи (19.1), (19.2).

Теорема 19.1 будет доказана в разделе 20. Схема доказательства теорем 19.2, 19.3 аналогична доказательству аналогичных теорем в предыдущих главах. Формальные построения асимптотик в условиях теорем 19.2, 19.3 проводятся разделах 21, 22. Раздел 23 посвящен обоснованию формальных асимптотических разложений.

Результаты главы были опубликованы в [11, 12, 14, 74].

20. Сходимость

Основной целью данного раздела является доказательство теоремы 19.1. Схема доказательства этой теоремы в целом совпадает с доказательством аналогичных утверждений в [26, 66, 91, 101]. Всюду в разделе будем считать выполненными условия теоремы 19.1. Для доказательства этой теоремы нам потребуются дополнительные обозначения и ряд вспомогательных лемм. В окрестности боковой поверхности Σ введем координаты (s,τ,x_3), где (s,τ) определены в разделе 1. Всюду в разделе константу c_0 считаем выбранной согласно (4.7).

Лемма 20.1. *Пусть $u_0, f_0 \in W_2^1(\Omega)$, $f_1 \in L_2(\Omega)$. Тогда существует решение $u \in W_2^1(\Omega)$ краевой задачи*

$$\begin{gathered}(\Delta-1)u=\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)\frac{1}{\mathsf{H}}\frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{\mathsf{H}}\frac{\partial f_0}{\partial s}+f_1,\quad x\in\Omega,\\ \mathsf{p}u=0,\quad x\in\omega_1,\qquad u=u_0,\quad x\in\gamma^\varepsilon,\qquad \frac{\partial u}{\partial\nu}=0,\quad x\in\omega_2\cup\Gamma^\varepsilon,\end{gathered}\tag{20.1}$$

где функция H — из (2.5), p — граничный оператор, $\mathsf{p}u=u$ или $\mathsf{p}u=\dfrac{\partial u}{\partial\nu}$. Для этого решения справедлива равномерная по ε, η, f_0, f_1, u_0 оценка:

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\leqslant C\left(\left\|\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)\frac{\partial f_0}{\partial s}\right\|_{L_2(\Omega)}+\|f_1\|_{L_2(\Omega)}+\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}\right).$$

Доказательство. Решение задачи (20.1), следуя [46], понимаем как решение интегрального уравнения:

$$-(u,v)_{W_2^1(\Omega)}=\left(\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)\frac{1}{\mathsf{H}}\frac{\partial f_0}{\partial s},\frac{1}{\mathsf{H}}\frac{\partial v}{\partial s}\right)_{L_2(\Omega)}+(f_1,v)_{L_2(\Omega)},$$

имеющее на γ^ε след, равный u_0, где v — произвольный элемент из $W_2^1(\Omega)$, $v=0$ на γ^ε. В случае $\mathsf{p}u=u$ дополнительно предполагается, что $u|_{\omega_1}=0$, $v|_{\omega_1}=0$. Заметим, что данное интегральное уравнение получается стандартным интегрированием по частям с учетом того, что координаты (s,τ) — криволинейные. Правая часть этого интегрального уравнения, очевидно, оценивается сверху величиной

$$C\left(\left\|\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)\frac{\partial f_0}{\partial s}\right\|_{L_2(\Omega)}+\|f_1\|_{L_2(\Omega)}+\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}\right)\|v\|_{W_2^1(\Omega)},$$

где константа C не зависит от ε, η, f_0, f_1, u_0 и v. Из данной оценки, следуя методике [46], уже легко выводится утверждение леммы. Лемма доказана. □

Определим растянутые переменные $\xi=(\xi_1,\xi_2)$, $\varsigma^j=(\varsigma_1^j,\varsigma_2^j)$,

$$\xi_1=x_3\varepsilon^{-1}-\frac{\pi}{2},\qquad \xi_2=\tau\varepsilon^{-1},\qquad \varsigma_1^j=(\xi_1-\pi j)\eta^{-1},\qquad \varsigma_2^j=\xi_2\eta^{-1}.\tag{20.2}$$

Как и в двух предыдущих главах, эти переменные в различных формальных построениях асимптотик будут играть роль характерных переменных для пограничных слоев и внутренних разложений. Именно поэтому, несмотря на иное определение, мы оставляем за этими переменными прежнее обозначение. Через $Z=Z(\varsigma)$ обозначим функцию $Z^{(j)}$ из (13.24) с $\alpha^j=\beta^j=\dfrac{1}{2}$. Будем считать, что функция η удовлетворяет равенству (7.3), и рассмотрим функцию:

$$W_\varepsilon^{in}(x)=\sum_{j=0}^{N-1}\chi(|\varsigma^j|\eta^{\frac{3}{4}})\widetilde{W}_\varepsilon^{in}(\varsigma^j,s),\qquad \widetilde{W}_\varepsilon^{in}(\varsigma,s)=\varepsilon(A+\mu)\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon\eta\varsigma_2\mathsf{k}(s)\right)Z(\varsigma\mathsf{g}_\varepsilon^{-1}(s)).$$

Обозначим $\widehat{\Omega}=\overline{\Omega}\setminus(\overline{\gamma}^\varepsilon\cap\overline{\Gamma}^\varepsilon)$. Прямыми вычислениями проверяется, что для $W_\varepsilon^{in}\in W_2^1(\Omega)\cap C^\infty(\widehat{\Omega})$ верна равномерная по ε и η оценка:

$$\left\|\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)\frac{\partial W_\varepsilon^{in}}{\partial s}\right\|_{L_2(\Omega)}\leqslant C\eta^{\frac{1}{3}}.$$

С учетом последней и леммы 20.1 заключаем, что существует решение задачи (20.1) с $\mathsf{p}u=\dfrac{\partial u}{\partial\nu}$, $u_0=0$, $f_1=0$, $f_0=-W_\varepsilon^{in}$; обозначим это решение через W_ε^{ad}. В силу теорем о повышении гладкости решений эллиптических уравнений имеем: $W_\varepsilon^{ad}\in W_2^1(\Omega)\cap C^\infty(\widehat{\Omega})$. Из леммы 20.1 следует равномерная по ε и η оценка

$$\|W_\varepsilon^{ad}\|_{W_2^1(\Omega)}\leqslant C\eta^{\frac{1}{3}}. \tag{20.3}$$

Положим

$$W_\varepsilon(x)=\big(1+\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)W_\varepsilon^{bl}(x)\big)\chi_\varepsilon(x)+W_\varepsilon^{in}(x)-W_\varepsilon^{ad}(x),$$
$$W_\varepsilon^{bl}(x)=\varepsilon(A+\mu)\left(\left(1+\varepsilon\frac{\xi_2\mathsf{k}(s)}{2}\right)X(\xi)-\ln\mathsf{g}_\varepsilon(s)\right),$$

где X — из (8.14), и

$$\chi_\varepsilon(x)=1-\sum_{j=0}^{N-1}\chi(|\varsigma^j|\eta^{\frac{3}{4}}).$$

Далее нам понадобятся некоторые свойства функции W_ε, которые удобно сформулировать в виде следующей леммы.

Лемма 20.2. *Функция $W_\varepsilon\in W_2^1(\Omega)\cap C^\infty(\widehat{\Omega})$ удовлетворяет краевым условиям обладает следующими свойствами*:

$$W_\varepsilon=0,\quad x\in\gamma^\varepsilon,\qquad \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial\nu}=0,\quad x\in\omega_1\cup\omega_2, \tag{20.4}$$

и сходимостями

$$\|\Delta W_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}+\|1-W_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}+\|\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial\nu}-A\|_{L_2(\Gamma^\varepsilon)}+\|1-W_\varepsilon\|_{L_2(\partial\Omega)}\to 0, \tag{20.5}$$
$$\|\nabla W_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2\to A.$$

Доказательство. Так как функция W_ε задана явно, то проверка граничных условий и первой сходимости проводится прямыми вычислениями. При этом следует лишь учитывать гармоничность функций X и Z, асимптотики (13.12), (13.26) (последняя — с $\alpha^j=\beta^j=\dfrac{1}{2}$), ограниченность нормы $\|\mathsf{g}_\varepsilon\|_{C^2(\partial\Omega)}$, равенство (7.3) для функции η, а также краевую задачу для W_ε^{ad} и оценку (20.3). Кроме того, следует учесть, что $\operatorname{supp}\chi(|\varsigma|^j\eta^{\frac{3}{4}})\subset\operatorname{supp}\chi\left(\dfrac{\tau}{c_0}\right)$ и

$$\Delta W_\varepsilon=\sum_{i=1}^{5}f_\varepsilon^{(i)},\qquad f_\varepsilon^{(1)}=W_\varepsilon^{ad},\quad f_\varepsilon^{(2)}=\chi_\varepsilon\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)\Delta W_\varepsilon^{bl},$$
$$\Delta W_\varepsilon^{bl}=-\frac{\varepsilon(A+\mu)}{\mathsf{H}}\left(\frac{\mathsf{k}^2}{2}\Big(3\xi_2\frac{\partial X}{\partial\xi_2}+X\Big)+\frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{\mathsf{H}}\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{1}{2}\varepsilon\xi_2\mathsf{k}X-\ln\mathsf{g}_\varepsilon\Big)\right),$$
$$f_\varepsilon^{(3)}=2\Big(\nabla_x W_\varepsilon^{bl},\nabla_x\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)\Big)_{\mathsf{R}^3}+W_\varepsilon^{bl}\Delta\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right),$$

$$
\begin{aligned}
&f_\varepsilon^{(4)} = \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\varsigma^j|\eta^{\frac{3}{4}}) \left(\frac{1}{\mathsf{H}} \frac{\partial}{\partial\tau} \left(\mathsf{H} \frac{\partial}{\partial\tau} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \widetilde{W}_\varepsilon^{in}(\varsigma^j, s) = \\
&\quad = -\frac{\varepsilon(A+\mu)\mathsf{k}^2}{2\mathsf{H}} \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\varsigma^j|\eta^{\frac{3}{4}}) \Big(Z(\varsigma^j \mathsf{g}_\varepsilon^{-1}) + 3\varsigma_2 \mathsf{g}_\varepsilon^{-1} Z_{\varsigma_2}(\varsigma^j \mathsf{g}_\varepsilon^{-1}) \Big), \\
&f_\varepsilon^{(5)} = \sum_{j=0}^{N-1} \left(2 \left(\nabla W_\varepsilon^{mat,j}, \nabla \chi(|\varsigma^j|\eta^{\frac{3}{4}}) \right)_{\mathbb{R}^3} + W_\varepsilon^{mat,j} \Delta\chi(|\varsigma^j|\eta^{\frac{3}{4}}) \right), \\
&W_\varepsilon^{mat,j}(x) = \widetilde{W}_\varepsilon^{in}(\varsigma^j, s) - W_\varepsilon^{bl}(x) - 1,
\end{aligned}
$$

а также оценку

$$
W_\varepsilon^{mat,j} = O\Big(\eta^3 |\varsigma^j|^3 + \eta^2 |\varsigma^j|^2 + \eta |\varsigma^j| |\ln|\varsigma^j|| + |\varsigma^j|^{-2} \Big),
$$

справедливую для $\eta^{-\frac{3}{4}} \leqslant 4|\varsigma^j| \leqslant 3\eta^{-\frac{3}{4}}$. Вторая сходимость является следствием первой и краевых условий:

$$
\int\limits_{\Omega} |\nabla W_\varepsilon|^2 \, dx = \int\limits_{\Gamma^\varepsilon} W_\varepsilon \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial\nu} \, dx - \int\limits_{\Omega} W_\varepsilon \Delta W_\varepsilon \, dx \to A.
$$

Лемма доказана. □

Лемма 20.3. *Пусть функция* η *удовлетворяет равенству* (7.3), $\varepsilon_k \to 0$ — *произвольная последовательность,* u_{ε_k} — *последовательность функций из* $W_2^1(\Omega)$, *имеющих нулевой след на* $\omega_1 \cup \gamma^{\varepsilon_k}$ *и сходящихся при* $k \to \infty$ *к* $u_* \in W_2^1(\Omega)$ *слабо в* $W_2^1(\Omega)$ *и сильно в* $L_2(\Omega)$, *причем* $u_{\varepsilon_k}|_{\partial\Omega}$ *сходится к* $u_*|_{\partial\Omega}$ *сильно в* $L_2(\partial\Omega)$. *Тогда для любой функции* $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *верны сходимости при* $k \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
&\big(\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla(\varphi W_{\varepsilon_k}) \big)_{L_2(\Omega)} \to (\nabla u_*, \nabla\varphi)_{L_2(\Omega)} + A(u_*, \varphi)_{L_2(\Sigma)}, \\
&\|\nabla(\varphi W_{\varepsilon_k})\|_{L_2(\Omega)}^2 \to \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2 + A\|\varphi\|_{L_2(\Sigma)}^2.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Всюду в доказательстве для краткости будем опускать индекс k у последовательности ε_k. Интегрируя по частям, с учетом краевых условий (20.4) из леммы 20.2 получаем:

$$
\big(\nabla u_\varepsilon, \nabla(\varphi W_\varepsilon) \big)_{L_2(\Omega)} = \big(\nabla u_\varepsilon, W_\varepsilon \nabla\varphi \big)_{L_2(\Omega)} + \big(\nabla u_\varepsilon, \varphi \nabla W_\varepsilon \big)_{L_2(\Omega)}. \tag{20.6}
$$

В силу сходимости (20.5) леммы 20.2 и слабой сходимости u_ε к u_* в $W_2^1(\Omega)$ первое слагаемое в правой части стремится к $\int\limits_{\Omega} (\nabla u_*, \nabla\varphi) \, dx$, а второе с помощью интегрирования по частям представляется в виде:

$$
\begin{aligned}
&\big(\nabla u_\varepsilon, \varphi \nabla W_\varepsilon \big)_{L_2(\Omega)} = \Big(u_\varepsilon, \varphi \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial\nu} \Big)_{L_2(\Gamma^\varepsilon)} - \big(u_\varepsilon \nabla\varphi, \nabla W_\varepsilon \big)_{L_2(\Omega)} - (u_\varepsilon \varphi, \Delta W_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}, \\
&\big(u_\varepsilon \nabla\varphi, \nabla W_\varepsilon \big)_{L_2(\Omega)} = \big(u_\varepsilon \nabla\varphi, \nabla(W_\varepsilon - 1) \big)_{L_2(\Omega)} = \Big(W_\varepsilon - 1, u_\varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \Big)_{L_2(\partial\Omega)} - \big(W_\varepsilon - 1, \operatorname{div}(u_\varepsilon \nabla\varphi) \big)_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Здесь мы проинтегрировали по частям с учетом граничных условий для u_ε и для W_ε из (20.4). Используя полученные формулы, сходимость (20.5) леммы 20.2, сходимости для функций u_{ε_k} и очевидную ограниченность последних в норме $W_2^1(\Omega)$, равномерную по k, убеждаемся, что второе слагаемое в правой части (20.6) сходится к $A(u_*, \varphi)_{L_2(\Sigma)}$.

Интегрируя по частям и используя лемму 20.2, при $\varepsilon \to 0$ получаем:

$$
\begin{aligned}
\|\nabla(\varphi W_\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \Big(\varphi W_\varepsilon, \frac{\partial}{\partial\nu}(\varphi W_\varepsilon) \Big)_{L_2(\partial\Omega)} - (\varphi W_\varepsilon, \Delta(\varphi W_\varepsilon))_{L_2(\Omega)} = \\
&= \Big(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \Big)_{L_2(\partial\Omega)} + \Big(\varphi^2 W_\varepsilon, \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial\nu} \Big)_{L_2(\Gamma^\varepsilon)} - 2(\varphi\nabla\varphi, \nabla W_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} - (\varphi, \Delta\varphi)_{L_2(\Omega)} + o(1) = \\
&= \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2 + A\|\varphi\|_{L_2(\Sigma)} - 2\Big(W_\varepsilon \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \Big)_{L_2(\partial\Omega)} + 2(W_\varepsilon, \operatorname{div}(\varphi\nabla\varphi))_{L_2(\Omega)} + o(1) = \\
&= \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2 + A\|\varphi\|_{L_2(\Sigma)} + o(1).
\end{aligned}
$$

Лемма доказана. ☐

Следующие две леммы являются аналогами леммы 5.1.

Лемма 20.4. *Пусть функция* η *удовлетворяет равенству* (7.3), Q *— произвольный компакт на комплексной плоскости, не содержащий собственных чисел задачи* (19.4). *Тогда при* $\lambda \in Q$, $f \in L_2(\Omega)$ *краевая задача*

$$-\Delta u_\varepsilon = \lambda u_\varepsilon + f, \quad x \in \Omega, \qquad u_\varepsilon = 0, \quad x \in \omega_1 \cup \gamma^\varepsilon, \qquad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \omega_2 \cup \Gamma^\varepsilon, \tag{20.7}$$

однозначно разрешима, и ее решение при $\varepsilon \to 0$ *равномерно по* λ *сходится к решению задачи*

$$\begin{aligned} & -\Delta u_0 = \lambda u_0 + f, \quad x \in \Omega, \qquad u_0 = 0, \quad x \in \omega_1, \\ & \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \omega_2, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + A\right) u_0 = 0, \quad x \in \Sigma. \end{aligned} \tag{20.8}$$

Эта сходимость сильная в $W_2^1(\Omega)$ *при* $A = 0$ *и слабая в* $W_2^1(\Omega)$ *и сильная в* $L_2(\Omega)$ *при* $A > 0$. *Для решения задачи* (20.7) *верна оценка*

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C \|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{20.9}$$

где константа C *не зависит от* ε, η, λ *и* f.

Доказательство. Разрешимость задачи (20.7) для каждого фиксированного ε — очевидна. Единственность этого решения вытекает непосредственно из оценки (20.9). Доказательство последней проводится в целом аналогично доказательству оценки (5.2) в лемме 5.1. А именно, допустив противное, рассуждениями, аналогичными выводу (5.3)–(5.5), доказывается существование последовательностей $\varepsilon_k \to 0$, $f_k \in L_2(\Omega)$, $\lambda_k \in Q$, для которых выполнено при $k \to \infty$:

$$\begin{aligned} & \|u_{\varepsilon_k}\|_{L_2(\Omega)} = 1, \quad \|f_k\|_{L_2(\Omega)} \to 0, \quad \lambda_k \to \lambda_* \in Q, \\ & u_{\varepsilon_k} \to u_* \quad \text{слабо в } W_2^1(\Omega) \text{ и сильно в } L_2(\Omega). \end{aligned} \tag{20.10}$$

Выделяя при необходимости из $\{k\}$ подпоследовательность, можно считать, что

$$u_{\varepsilon_k}\big|_{\partial\Omega} \to u_*\big|_{\partial\Omega} \quad \text{в } L_2(\partial\Omega). \tag{20.11}$$

Пусть $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ — произвольная функция, равная нулю на ω_1. Выбирая $\varphi W_{\varepsilon_k}$ в качестве пробной функции, заключаем, что выполнено интегральное равенство:

$$\big(\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla(\varphi W_{\varepsilon_k})\big)_{L_2(\Omega)} = (\lambda_{\varepsilon_k} u_{\varepsilon_k} + f, \varphi W_{\varepsilon_k})_{L_2(\Omega)}.$$

Переходя теперь к пределу при $k \to \infty$, с учетом (20.10), (20.11) и леммы 20.3 получаем, что u_* — нетривиальное решение краевой задачи (19.4) с $\lambda_0 = \lambda_*$. Последнее означает, что λ_* — собственное значение задачи (19.4): противоречие. Оценка (20.9) доказана.

Используя оценку (20.9), рассуждениями, полностью аналогичными доказательству последней, легко установить сходимость u_{ε_k} к u_0 на произвольных последовательностях $\varepsilon_k \to 0$ и $\lambda = \lambda_k \to \lambda_*$. Отсюда и из непрерывной зависимости функции u_0 от параметра λ вытекает равномерная по λ сходимость u_ε к u_0, сильная в $L_2(\Omega)$ и слабая в $W_2^1(\Omega)$. Интегрированием по частям легко установить, что

$$\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)} = \lambda \|u_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)} + (f, u_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}.$$

Переходя теперь к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем:

$$\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)} \to \lambda \|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + (f, u_0)_{L_2(\Omega)} = \|\nabla u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + A\|u_0\|^2_{L_2(\Sigma)}. \tag{20.12}$$

Последняя сходимость при $A = 0$ означает сходимость норм $\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \to \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}$, что с учетом слабой сходимости u_ε к u_0 в $W_2^1(\Omega)$ доказывает сильную сходимость в том же пространстве. Лемма доказана. ☐

Лемма 20.5. *Пусть функция* η *удовлетворяет равенству* (1.5), Q *— произвольный компакт на комплексной плоскости, не содержащий собственных чисел задачи* (19.3). *Тогда при* $\lambda \in Q$,

$f \in L_2(\Omega)$ *краевая задача* (20.7) *однозначно разрешима, и ее решение при* $\varepsilon \to 0$ *равномерно по* λ *сильно в* $W_2^1(\Omega)$ *сходится к решению задачи*

$$-\Delta u_0 = \lambda u_0 + f, \quad x \in \Omega, \qquad u_0 = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \overline{\omega}_2, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \omega_2.$$

Для решения задачи (20.7) *верна оценка* (20.9).

Доказательство. Оценка (20.9) в целом доказывается так же, как и в предыдущей лемме. Как и ранее, устанавливается существование последовательностей $\varepsilon_k \to 0$, $f_k \in L_2(\Omega)$, $\lambda_k \in Q$, для которых выполнены соотношения (20.10), (20.11). Отличие проявляется лишь при выводе краевой задачи для u_*. Здесь в качестве пробной функции следует брать произвольную функцию $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, обращающуюся в нуль на $\partial\Omega \setminus \overline{\omega}_2$. Тогда функция u_{ε_k} будет удовлетворять следующему интегральному равенству:

$$\big(\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla\varphi\big)_{L_2(\Omega)} = (\lambda_{\varepsilon_k} u_{\varepsilon_k} + f, \varphi)_{L_2(\Omega)}.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем следующее интегральное уравнение для функции u_*:

$$\big(\nabla u_*, \nabla\varphi\big)_{L_2(\Omega)} = (\lambda_* u_* + f, \varphi)_{L_2(\Omega)}. \tag{20.13}$$

Выясним граничные условия для функции u_*. Равенство $u_*\big|_{\omega_1} = 0$ вытекает непосредственно из (20.11). Учитывая нормировку функции u_{ε_k} (см. (20.10)), аналогично доказательству (20.12) легко установить, что

$$\|\nabla u_{\varepsilon_k}\|^2_{L_2(\Omega)} \to \lambda_* + (f, u_*)_{L_2(\Omega)}. \tag{20.14}$$

Докажем, что $u_*\big|_\Sigma = 0$. Для этого будет использована методика доказательства из [101, теорема II.4]. Так как η удовлетворяет равенству (1.5), то функция u_ε обращается в нуль на множестве

$$\left\{x : \ x' \in \partial\omega, \left| x_3 - \varepsilon\pi\left(j + \frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon \mathrm{e}^{-\frac{1}{\varepsilon p}}, \ j = 0, \ldots, N-1\right\}$$

для всех $p > 0$ и достаточно малых ε. Рассматривая данное множество как γ^ε, возьмем соответствующую ему функцию W_ε. Для произвольной функции $\widetilde{\varphi} \in C^\infty(\Omega)$ имеем:

$$\|\nabla(u_\varepsilon - \widetilde{\varphi} W_\varepsilon)\|^2_{L_2(\Omega)} = \|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)} - 2\big(\nabla u_\varepsilon, \nabla(\widetilde{\varphi} W_\varepsilon)\big)_{L_2(\Omega)} + \|\nabla(\widetilde{\varphi} W_\varepsilon)\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Левая часть в последнем равенстве неотрицательна, а потому, полагая в нем $\varepsilon = \varepsilon_k$ и переходя к пределу вначале при $k \to \infty$ (с учетом леммы 20.3 и (20.14)), а затем при $\varphi \to u_*$ в смысле нормы $W_2^1(\Omega)$, получаем неравенство:

$$\lambda_* + (f, u_*)_{L_2(\Omega)} - \|\nabla u_*\|^2_{L_2(\Omega)} - p\|u_*\|^2_{L_2(\Sigma)} \geqslant 0,$$

справедливое для любого p. Если $\|u_*\|^2_{L_2(\Sigma)} \neq 0$, то полученное неравенство противоречиво, так как за счет выбора достаточно большого p всегда можно добиться обратного неравенства. Таким образом, $u_*\big|_\Sigma = 0$, что с уже установленным равенством $u_*\big|_{\omega_1} = 0$ и интегральным уравнением (20.13) означает, что u_* — нетривиальное решение задачи (19.3) с $\lambda_0 = \lambda_*$. Нетривиальность этого решения следует из нормировки функции u_{ε_k}. Следовательно, λ_* — собственное значение задачи (19.3): противоречие. Доказательство равномерной по λ сильной в $W_2^1(\Omega)$ сходимости u_ε к u_0 проводится так же, как и в доказательстве предыдущей леммы. Лемма доказана. ☐

Доказательство теоремы 19.1. Пусть вначале функция η удовлетворяет равенству (7.3). Известно [43, гл. 5, § 3.5], что решения задач (20.7) и (20.8) мероморфны по λ в норме $W_2^1(\Omega)$ и имеют в качестве особенностей простые полюса, совпадающие с собственными значениями соответственно задач (19.1), (19.2) и (19.4). Вычеты в данных полюсах (собственных значениях) суть соответствующие собственные функции.

Пусть λ_0 — p-кратное собственное значение задачи (19.4), $p \geqslant 1$, $\psi_0^{(j)}$, $j = 1, \ldots, p$ — соответствующие собственные функции, а $\mathcal{B}_{\mathfrak{t}}(\lambda_0)$, напомним, открытый круг радиуса $\mathfrak{t}$ на комплексной плоскости с центром в точке λ_0. Возьмем $\mathfrak{t}$ достаточно малым так, чтобы круг $\mathcal{B}_{\mathfrak{t}}(\lambda_0)$ не содержал собственных значений задачи, не совпадающих с λ_0. Тогда в силу аналитичности решений задач (20.7), (20.8) по параметру λ и леммы 20.4 имеем сходимость

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\partial\mathcal{B}_{\mathfrak{t}}} u_\varepsilon\,d\lambda \to \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\partial\mathcal{B}_{\mathfrak{t}}} u_0\,d\lambda, \qquad \varepsilon\to 0. \tag{20.15}$$

Данная сходимость сильная в $W_2^1(\Omega)$ при $A=0$ и сильная в $L_2(\Omega)$ и слабая в $W_2^1(\Omega)$ при $A>0$. Так как круг $\mathcal{B}_{\mathfrak{t}}(\lambda_0)$ содержит (простой) полюс функции u_0, то правая часть в (20.15) не равна нулю. Следовательно, левая часть (20.15) также не равна нулю, т. е. круг $\mathcal{B}_{\mathfrak{t}}(\lambda_0)$ содержит простой полюс функции u_ε. Отсюда и из произвола в выборе $\mathfrak{t}$ выводим сходимость собственных значений задачи (19.1), (19.2) к собственным значениям задачи (19.4).

Докажем теперь сходимость собственных функций. Прямыми вычислениями проверяется, что при $\lambda\in\mathcal{B}_{\mathfrak{t}}(\lambda_0)$, $\lambda\neq\lambda_0$, $f=\psi_0^{(j)}$, $j=1,\ldots,p$ решением задачи (20.8) является функция $u_0=\dfrac{\psi_0^{(j)}}{\lambda_0-\lambda}$. Подставляя последнее равенство в (20.15) и вычисляя правую часть, получаем, что левая часть (20.15), где u_ε — решение задачи (20.7) с $f=\psi_0^{(j)}$, и есть требуемая линейная комбинация собственных функций задачи (19.1), (19.2), сходящаяся к $\psi_0^{(j)}$. Подчеркнем, что данные собственные функции задачи (19.1), (19.2) соответствуют собственным значениям, сходящимся к λ_0.

Пусть к λ_0 сходятся собственные значения $\lambda_\varepsilon^{(k)}$, $k=1,\ldots,q$, задачи (19.1), (19.2), взятые с учетом кратности. Докажем, что $p=q$. Через $\psi_\varepsilon^{(k)}$, $k=1,\ldots,q$ обозначим собственные функции, соответствующие $\lambda_\varepsilon^{(k)}$. Так как собственные функции $\psi_0^{(j)}$, $j=1,\ldots,p$ линейно независимы, то соответствующие линейные комбинации функций $\psi_\varepsilon^{(k)}$, сходящиеся к $\psi_0^{(j)}$, также линейно независимы. Функции $\psi_\varepsilon^{(k)}$ линейно независимы, следовательно, по теореме Штейница, число q не может быть меньше p. С другой стороны, допустив, что $q>p$, аналогично доказательству леммы 20.4 нетрудно показать существование последовательности $\varepsilon_l\to 0$, на которой каждая из линейно независимых функций $\psi_\varepsilon^{(k)}$ сходится к линейным комбинациям функций $\psi_0^{(j)}$, причем эти комбинации также линейно независимы. Следовательно, p не превосходит q, т. е. $p=q$.

В случае, когда η удовлетворяет равенству (1.5), доказательство теоремы совершенно аналогично и опирается на лемму 20.5 вместо леммы 20.4. Теорема доказана. ☐

21. Формальное построение асимптотик в случае усредненного условия Дирихле

В настоящем разделе будут формально построены первые члены асимптотических разложений для собственных элементов задачи (19.1), (19.2) в условиях теоремы 19.2. Всюду в разделе считаем выполненными условия данной теоремы.

Так как λ_0 — простое собственное значение задачи (19.3), то согласно теореме 19.1 к нему сходится одно собственное значение λ_ε задачи (19.1), (19.2), которое является простым.

Первые члены асимптотики собственного значения λ_ε, сходящегося к λ_0, будем строить в виде

$$\lambda_\varepsilon=\lambda_0+\varepsilon\lambda_1(\eta,\varepsilon)+\ldots \tag{21.1}$$

Асимптотику соответствующей собственной функции будем строить как сумму внешнего разложения и пограничного слоя. Внешнее разложение определим следующим образом:

$$\psi_\varepsilon^{ex}(x,\eta)=(\phi_0(\mathsf{x})+\varepsilon\phi_1(\mathsf{x},\eta,\varepsilon))\Upsilon^+(Mx_3)+\ldots \tag{21.2}$$

Пограничный слой будем искать в виде

$$\psi_\varepsilon^{bl}(\xi,s,x_3,\eta)=(\varepsilon v_1^+(\xi,s,\eta,\varepsilon)+\varepsilon^2v_2^+(\xi,s,\eta,\varepsilon))\Upsilon^+(Mx_3)+\varepsilon^2v_1^-(\xi,s,\eta,\varepsilon)\Upsilon^-(Mx_3)+\ldots \tag{21.3}$$

Здесь ξ — переменные, введенные в разделе 20. Отметим, что слагаемые $\varepsilon^2v_2^+$ и $\varepsilon^2v_1^-$ играют в построении лишь вспомогательную роль. Они не влияют на вид первого члена в асимптотике собственного значения. Вместе с тем, они необходимы для доказательства того, что формальные асимптотики, которые будут построены ниже, являются формальным асимптотическим решением задачи (19.1), (19.2) (см. доказательство леммы 21.4).

Целью формального построения является определение вида величины λ_1 и функций ϕ_1, $v_i^\pm$.

Перейдем непосредственно к построению. Вначале подставим (21.1) и (21.2) в уравнение (19.1) и соберем коэффициенты при первой степени ε. Эта стандартная процедура дает уравнение для функции ϕ_1:

$$(\Delta_{\mathsf{x}} + \varkappa)\phi_1 = -\lambda_1 \phi_0, \quad \mathsf{x} \in \omega. \tag{21.4}$$

Краевое условие для функции ϕ_1 будет определено при построении пограничного слоя.

Выведем граничные условия для функций $v_i^{\pm}$. В соответствии с методом пограничного слоя потребуем, чтобы сумма функций ψ_ε^{ex} и ψ_ε^{bl} асимптотически (по ε) удовлетворяла краевым условиям (19.2) на γ^ε и Γ^ε. Из этого требования вытекают граничные условия для функций $v_i^{\pm}$:

$$v_1^+ = -\phi_1^D, \quad \xi \in \gamma(\eta \mathsf{g}_\varepsilon), \qquad \frac{\partial v_1^+}{\partial \xi_2} = \phi_0^{\mathsf{v}}, \quad \xi \in \Gamma(\eta \mathsf{g}_\varepsilon), \tag{21.5}$$

$$\frac{\partial v_2^+}{\partial \xi_2} = \phi_1^{\mathsf{v}}, \quad \frac{\partial v_1^-}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \Gamma(\eta \mathsf{g}_\varepsilon), \tag{21.6}$$

$$\phi_1^D = \phi_1^D(s, \eta, \varepsilon) = \phi_1(\mathsf{x}, \eta, \varepsilon), \quad \phi_0^{\mathsf{v}} = \phi_0^{\mathsf{v}}(s) = \frac{\partial}{\partial \mathsf{v}} \phi_0(\mathsf{x}), \quad \mathsf{x} \in \partial\omega,$$

$$\phi_1^{\mathsf{v}} = \phi_1^{\mathsf{v}}(s, \eta, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial \mathsf{v}} \phi_0(\mathsf{x}), \quad \mathsf{x} \in \partial\omega.$$

Отметим, что мы не фиксируем никаких граничных условий для v_1^+ и v_1^- на $\gamma(\eta \mathsf{g}_\varepsilon)$. Эти функции играют лишь вспомогательную роль и ниже будут построены явно.

Выведем теперь уравнения для функций пограничного слоя. Для этого подставим (21.1) и (21.3) в уравнение (19.1), учтем при этом выражение (2.5) для двумерного оператора Лапласа в переменных x и вычислим в получившемся уравнении коэффициенты при одинаковых степенях ε отдельно для $\Upsilon^+(Mx_3)$ и $\Upsilon^-(Mx_3)$. В результате приходим к уравнениям для функций $v_i^{\pm}$:

$$\Delta_\xi v_1^+ = 0, \qquad \Delta_\xi v_2^+ = \mathsf{k} \frac{\partial v_1^+}{\partial \xi_2}, \qquad \Delta_\xi v_1^- = 2M \frac{\partial v_1^+}{\partial \xi_1}, \qquad \xi_2 > 0. \tag{21.7}$$

Функции $v_i^{\pm}$ будем строить экспоненциально убывающими при $\xi_2 \to +\infty$. Решение краевой задачи (21.5), (21.7) строится явно:

$$v_1^+(\xi, s, \eta, \varepsilon) = -\phi_0^{\mathsf{v}}(s) X(\xi, \eta \mathsf{g}_\varepsilon(s)), \tag{21.8}$$

где, напомним, X — из (2.8). Тогда, в силу граничных условий (2.9),

$$v_1^+(\xi, s, \eta, \varepsilon) = -\phi_0^{\mathsf{v}}(s) \ln \sin \eta \mathsf{g}_\varepsilon(s) \quad \text{на} \quad \gamma(\eta \mathsf{g}_\varepsilon(s)).$$

Ввиду (21.5) и (2.9) последнее равенство позволяет получить граничное условие для ϕ_1:

$$\phi_1 = \phi_0^{\mathsf{v}} \ln \sin \eta \mathsf{g}_\varepsilon, \quad x \in \partial\omega. \tag{21.9}$$

Условие разрешимости краевой задачи (21.4), (21.9) получаем стандартным путем: умножаем обе части уравнения (21.4) на ϕ_0 и интегрируем по частям. Полученное таким образом равенство и нормировка ϕ_0 приводят к формуле (19.8).

Для $\xi \in \overline{\Pi}$ обозначим:

$$Y(\xi, a) = \operatorname{Im} \ln \left(\sin z + \sqrt{\sin^2 z - \sin^2 a} \right) - \frac{\pi}{2} + \xi_1.$$

Продолжим эту функцию π-периодически по ξ_1 и обозначим это продолжение вновь через Y. Непосредственно проверяется, что $Y \in \mathcal{V}_1^-(\eta)$ — гармоническая функция, вместе с X удовлетворяющая условиям Коши—Римана:

$$\frac{\partial X}{\partial \xi_1} = \frac{\partial Y}{\partial \xi_2}, \qquad \frac{\partial X}{\partial \xi_2} = -\frac{\partial Y}{\partial \xi_1}. \tag{21.10}$$

Функции v_1^- и v_2^+ также можно получить в явном виде:

$$\begin{aligned} v_2^+(\xi,s,\eta,\varepsilon) ={}& -\frac{1}{2}\mathsf{k}(s)\phi_0^{\mathsf{v}}(s)\left(\xi_2 X(\xi,\eta\mathsf{g}_\varepsilon(s)) + \int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1,t,\eta\mathsf{g}_\varepsilon(s))\,dt\right) - \\ & - \phi_1^{\mathsf{v}}(s,\eta,\varepsilon)X(\xi,\eta\mathsf{g}_\varepsilon(s)), \qquad (21.11) \\ v_1^-(\xi,s,\eta,\varepsilon) ={}& -M\phi_0^{\mathsf{v}}(s)\left(\xi_2 Y(\xi,\eta\mathsf{g}_\varepsilon(s)) + \int\limits_{\xi_2}^{+\infty} Y(\xi_1,t,\eta\mathsf{g}_\varepsilon(s))\,dt\right). \end{aligned}$$

Ясно, что $v_1 \in \mathcal{V}_1^{\pm}(\eta\mathsf{g}_\varepsilon)$, $v_2^+ \in \mathcal{V}_1^+(\eta\mathsf{g}_\varepsilon)$, $v_1^- \in \mathcal{V}_1^-(\eta\mathsf{g}_\varepsilon)$.

Далее нам понадобятся следующие вспомогательные леммы. Всюду в следующей лемме посредством C будем обозначать различные не специфические константы, не зависящие от η.

Лемма 21.1. *При* $\eta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ *функции* $X(\xi,\eta)$ *и* $Y(\xi,\eta)$ *обладают следующими свойствами.*

а) *Выполнены соотношения*:

$$\begin{aligned} &\|\xi_2^p Y\|_{L_2(\Pi)} = \|\xi_2^p X\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C, \quad p = 0,1 \\ &\|\xi_2 \nabla_\xi Y\|_{L_2(\Pi)} = \|\xi_2 \nabla_\xi X\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C, \\ &\Big\| \int\limits_{\xi_2}^{+\infty} Y(\xi_1,t,\eta)\,dt \Big\|_{L_2(\Pi)} = \Big\| \int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1,t,\eta)\,dt \Big\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C. \end{aligned}$$

б) *Для функций*

$$\frac{\partial}{\partial\eta}X, \frac{\partial}{\partial\eta}Y \in \mathcal{V}_0(\eta), \qquad \frac{\partial}{\partial\eta}\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1,t,\eta)\,dt,\ \frac{\partial}{\partial\eta}\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1,t,\eta)\,dt \in \mathcal{V}_1(\eta)$$

имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} &\Big\|\frac{\partial X}{\partial\eta}\Big\|_{L_2(\Pi)} = \Big\|\frac{\partial Y}{\partial\eta}\Big\|_{L_2(\Pi)} = \frac{\sqrt{\pi}\operatorname{ctg}\eta|\ln\cos\eta|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}, \\ &\Big\|\xi_2\frac{\partial X}{\partial\eta}\Big\|_{L_2(\Pi)} = \Big\|\xi_2\frac{\partial Y}{\partial\eta}\Big\|_{L_2(\Pi)} \leqslant \pi\Big\|\frac{\partial X}{\partial\eta}\Big\|_{L_2(\Pi)}, \\ &\Big\|\frac{\partial}{\partial\eta}\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1,t,\eta)\,dt\Big\|_{L_2(\Pi)} = \Big\|\frac{\partial}{\partial\eta}\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} Y(\xi_1,t,\eta)\,dt\Big\|_{L_2(\Pi)} \leqslant \pi\Big\|\frac{\partial X}{\partial\eta}\Big\|_{L_2(\Pi)}. \end{aligned}$$

Доказательство. Всюду в доказательстве, не оговаривая особо, при различных интегрированиях по частям мы будем пользоваться очевидными граничными условиями:

$$\frac{\partial X}{\partial\xi_2} = 0, \qquad Y = 0, \qquad \xi_1 = \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{21.12}$$

вытекающими из принадлежностей $X \in \mathcal{V}^+(\eta)$, $Y \in \mathcal{V}^-(\eta)$.

Принадлежности

$$\frac{\partial X}{\partial\eta},\ \frac{\partial Y}{\partial\eta},\ \frac{\partial}{\partial\eta}\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1,t,\eta)\,dt,\ \frac{\partial}{\partial\eta}\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1,t,\eta)\,dt \in \mathcal{V}_0(\eta)$$

устанавливаются непосредственно, с использованием явного вида X и Y. Производные по ξ_1, ξ_2 последних двух функций равны в силу условий Коши—Римана (21.10) функциям $\frac{\partial X}{\partial\eta}$, $\frac{\partial Y}{\partial\eta}$, что доказывает принадлежность функций $\frac{\partial}{\partial\eta}\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1,t,\eta)\,dt$, $\frac{\partial}{\partial\eta}\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1,t,\eta)\,dt$ пространству $\mathcal{V}_1(\eta)$. Существование остальных норм из утверждения леммы нетрудно доказать на основе явного вида функций X и Y. Докажем теперь равенство соответствующих норм X и Y из утверждения леммы. Используя условия Коши—Римана (21.10) и интегрируя по частям, для $\xi_2 > 0$ получаем:

$$\frac{\partial}{\partial\xi_2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Y^2\,d\xi_1 = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Y\frac{\partial X}{\partial\xi_1}\,d\xi_1 = = -2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial Y}{\partial\xi_1}X\,d\xi_1 = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial X}{\partial\xi_2}X\,d\xi_1 = \frac{\partial}{\partial\xi_2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} X^2\,d\xi_1,$$

откуда следует, что

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Y^2\,d\xi_1 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} X^2\,d\xi_1 \quad \text{при} \quad \xi_2 > 0.$$

Полученное равенство доказывает формулы

$$\|\xi_2^p X\|_{L_2(\Pi)} = \|\xi_2^p Y\|_{L_2(\Pi)}, \qquad p = 0, 1.$$

Равенства остальных норм X и Y устанавливаются аналогично.

Переходим к доказательству оценок и остальных равенств из утверждения леммы. Первые две оценки пункта а) суть прямое следствие пунктов а)–в) леммы 3.2. Из леммы 3.1 и равенств (3.1) для функции X с учетом условий Коши—Римана (21.10) выводим:

$$\Bigg\|\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t, \eta)\,dt\Bigg\|_{L_2(\Pi)} \leqslant 2\pi\Bigg\|\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} \frac{\partial X}{\partial\xi_1}(\xi_1, t, \eta)\,dt\Bigg\|_{L_2(\Pi)} = 2\pi\|Y\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C.$$

Пункт а) доказан. Прямыми вычислениями несложно проверить, что

$$X_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}\xi_2\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} \frac{\partial X}{\partial\eta}(\xi_1, t, \eta)\,dt \in \mathcal{V}_1^+(\eta)$$

— решение задачи

$$\Delta_\xi X_1 = \frac{\partial X}{\partial\eta}, \quad \xi_2 > 0, \qquad X_1 = 0, \qquad \frac{\partial X_1}{\partial\xi_2} = -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\partial X}{\partial\eta}(\xi_1, t, \eta)\,dt, \quad \xi_2 = 0. \tag{21.13}$$

Так как при $\xi_1 \in \left(\eta, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\partial X}{\partial\eta}(\xi_1, t, \eta)\,dt = -\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\partial^3}{\partial t^2\partial\eta}X(\xi_1, t, \eta)\,dt = 0,$$

то ввиду четности и π-периодичности X по ξ_1 получаем при $\xi_1 \in \left(\eta, \dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\int\limits_{0}^{+\infty} X(\xi_1, t, \eta)\,dt = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\partial X}{\partial\eta}(\pi/2, t, \eta)\,dt = \operatorname{ctg}\eta\ln\cos\eta.$$

Опираясь теперь на равенства (3.1) для функции X и интегрируя по частям, с учетом последнего равенства и (2.9), (21.13) получаем:

$$\int\limits_{\Pi}\left(\frac{\partial X}{\partial\eta}\right)^2 \mathrm{d}\xi = \int\limits_{\Pi}\left(\frac{\partial X}{\partial\eta} - \operatorname{ctg}\eta\right)\frac{\partial X}{\partial\eta}\mathrm{d}\xi = \int\limits_{\Pi}\left(\frac{\partial X}{\partial\eta} - \operatorname{ctg}\eta\right)\Delta_\xi\frac{\partial X_1}{\partial\eta}\mathrm{d}\xi =$$

$$= \int\limits_{\eta}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\eta}X(\xi_1, 0, \eta) - \operatorname{ctg}\eta\right)\frac{\partial}{\partial\eta}\int\limits_{0}^{+\infty} X(\xi, \eta)\,\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_1 = -\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}^2\eta\ln\cos\eta.$$

Аналогично (3.2) доказывается равенство

$$\Big\|\xi_2\nabla_\xi\frac{\partial X}{\partial\eta}\Big\|_{L_2(\Pi)}=\Big\|\frac{\partial X}{\partial\eta}\Big\|_{L_2(\Pi)},$$

что вместе с вытекающей из леммы 3.1 оценкой

$$\Big\|\frac{\partial X}{\partial\eta}\Big\|_{L_2(\Pi)}\leqslant 2\pi\Big\|\frac{\partial^2 X}{\partial\xi_1\partial\eta}\Big\|_{L_2(\Pi)}\leqslant 2\pi\Big\|\xi_2\nabla_\xi\frac{\partial X}{\partial\eta}\Big\|_{L_2(\Pi)}$$

приводит ко второму неравенству пункта б). Третья оценка этого пункта доказывается на основе леммы 3.1 и условий Коши—Римана (21.10):

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial\eta}\int\limits_{\xi_2}^{+\infty}X(\xi_1,t,\eta)\,dt\Big\|_{L_2(\Pi)}\leqslant 2\pi\Big\|\frac{\partial Y}{\partial\eta}\Big\|_{L_2(\Pi)}=2\pi\Big\|\frac{\partial X}{\partial\eta}\Big\|_{L_2(\Pi)}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 21.2. *Имеют место равномерные по ε и η оценка:*

$$|\lambda_1|\leqslant C(\ln\eta+1),\quad \|\phi_1\|_{C^2(\overline{\omega})}\leqslant C(|\ln\eta|+1).$$

Доказательство. Оценка для λ_1 очевидным образом вытекает из (19.8) и нормированности ϕ_0. Согласно общей теории эллиптических краевых задач и теореме вложения $H^2(\omega)\subset C(\overline{\omega})$ ввиду ортогональности ϕ_1 и ϕ_0 имеет место неравенство

$$\|\phi_1\|_{C(\overline{\omega})}\leqslant C\|\phi_0\|_{H^2(\omega)}\leqslant C\big(|\lambda_1|\|\phi_1\|_{L_2(\omega)}+\|\phi_0^{\vee}\ln\sin\eta\mathrm{g}_\varepsilon\|_{C^2(\partial\omega)}\big)\leqslant C(|\ln\eta|+1),$$

где константы C не зависят от ε и η. Из неравенства Шаудера [46, гл. III, § 1, формула (1.11)], выводим:

$$\|\phi_1\|_{C^{2+c_5}(\overline{\omega})}\leqslant C\left(|\lambda_1|\|\phi_0\|_{C^{c_5}(\overline{\omega})}+\|\phi_1\|_{C(\overline{\omega})}+\|\phi_0^{\vee}\ln\sin\eta\mathrm{g}_\varepsilon\|_{C^{2+c_5}(\overline{\omega})}\right),$$

откуда и из полученных оценок для λ_1 и $\|\phi_1\|_{C(\overline{\omega})}$ вытекает требуемое неравенство для ϕ_1. Лемма доказана. □

Обозначим:

$$\widetilde{\psi}_\varepsilon^{bl}(x,\eta)=\varepsilon^2(v_2^+(\xi,s,\eta,\varepsilon)\cos Mx_3+v_1^-(\xi,s,\eta,\varepsilon)\sin(Mx_3))\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right).$$

Из определения функций v_2^+ и v_1^-, граничных условий (21.12) и лемм 21.1, 21.2 вытекает

Лемма 21.3. *Функция $\widetilde{\psi}_\varepsilon^{bl}\in W_2^1(\Omega)\cap C^\infty(\widehat{\Omega})$ удовлетворяет граничным условиям*

$$\widetilde{\psi}_\varepsilon^{bl}=0,\quad x\in\omega_1,\qquad \frac{\partial}{\partial\nu}\widetilde{\psi}_\varepsilon^{bl}=0,\quad x\in\omega_2,\qquad \frac{\partial}{\partial\nu}\widetilde{\psi}_\varepsilon^{bl}=0,\quad x\in\gamma_\varepsilon.$$

Справедливы равномерные по ε и η оценки:

$$\|\widetilde{\psi}_\varepsilon^{bl}\|_{W_2^1(\Omega)}=O\big(\varepsilon^{\frac32}(|\ln\eta|^{\frac12}+1)\big),\quad \Big\|\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)\frac{\partial\psi_\varepsilon^{bl}}{\partial s}\Big\|_{L_2(\Omega)}=O\big(\varepsilon^{\frac32}\big),$$

$$\Big\|\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)\psi_\varepsilon^{bl}\Big\|_{W_2^1(\Omega)}=O\big(\varepsilon^{\frac12}(|\ln\eta|^{\frac12}+1)\big).$$

Пусть $\mathsf{R}_{\varepsilon,1}$ — решение задачи (20.1) с граничным оператором $\mathsf{p}u=u$ и $f_1=-\varepsilon^2\lambda_1\phi_1\Upsilon^+(Mx_3)$, $f_0=-\psi_\varepsilon^{bl}$. Тогда в силу лемм 20.1 и 21.3 верна оценка:

$$\|\mathsf{R}_{\varepsilon,1}\|_{W_2^1(\Omega)}=O\big(\varepsilon^2|\ln\eta|^2+\varepsilon^{\frac32}|\ln\eta|^{\frac12}+\varepsilon^{\frac32}\big).\tag{21.14}$$

Ясно, что $\mathsf{R}_{\varepsilon,1}\in C^\infty(\widehat{\Omega})$. Обозначим: $\lambda_{\varepsilon,1}=\lambda_0+\varepsilon\lambda_1(\varepsilon,\eta)$,

$$\psi_{\varepsilon,1}(x)=\psi_{\varepsilon,1}^{ex}(x,\eta)+\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)\psi_{\varepsilon,1}^{bl}(\xi,s,x_3,\eta)+\mathsf{R}_{\varepsilon,1}(x),$$

$$\psi_{\varepsilon,1}^{ex}(x,\eta)=(\phi_0(\mathsf{x})+\varepsilon\phi_1(\mathsf{x},\eta,\varepsilon))\Upsilon^+(Mx_3),$$

$$\psi_{\varepsilon,1}^{bl}(\xi,s,x_3,\eta)=(\varepsilon v_1^+(\xi,s,\eta,\varepsilon)+\varepsilon^2v_2^+(\xi,s,\eta,\varepsilon))\Upsilon^+(Mx_3)+\varepsilon^2v_1^-(\xi,s,\eta,\varepsilon)\Upsilon^-(Mx_3).$$

Здесь c_0 выбрана согласно (4.7). Следующая лемма утверждает, что формально построенные асимптотики собственных элементов — формальное асимптотическое решение возмущенной задачи.

Лемма 21.4. *Функции* $\lambda_{\varepsilon,1}$ *и* $\psi_{\varepsilon,1} \in W_2^1(\Omega) \cap C^\infty(\widehat{\Omega})$ *сходятся к* λ_0 *и* ψ_0 (*последняя — в норме* $W_2^1(\Omega)$) *и удовлетворяют краевой задаче* (20.1) *с* $u_\varepsilon = \psi_{\varepsilon,1}$, $\lambda = \lambda_{\varepsilon,1}$, $f = f_{\varepsilon,1}$, *где для* $f_{\varepsilon,1}$ *верна оценка*:

$$\|f_{\varepsilon,1}\|_{L_2(\Omega)} = O\big(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(|\ln\eta|^{\frac{3}{2}} + 1)\big). \tag{21.15}$$

Доказательство. Сходимости для $\lambda_{\varepsilon,1}$ и $\psi_{\varepsilon,1}$ вытекают из лемм 21.2, 21.3 и оценки (21.14). Граничные условия для $\psi_{\varepsilon,1}$ следуют из (2.9), (21.5), (21.6), (21.9), (21.11), (21.12). Гладкость функции $\psi_{\varepsilon,1}$ — очевидна. В силу (19.5), (21.4) функция $f_{\varepsilon,1} = -(\Delta + \lambda_{\varepsilon,1})\psi_{\varepsilon,1}$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&f_{\varepsilon,1} = -\sum_{i=1}^{3} f_{\varepsilon,1}^{(i)}, \quad f_{\varepsilon,1}^{(1)} = (\lambda_{\varepsilon,1} + 1)\mathsf{R}_{\varepsilon,1},\\
&f_{\varepsilon,1}^{(2)} = \chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)\left(\frac{1}{\mathsf{H}}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\mathsf{H}\frac{\partial}{\partial\tau}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \lambda_{\varepsilon,1}\right)\psi_{\varepsilon,1}^{bl},\\
&f_{\varepsilon,1}^{(3)} = 2(\nabla\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right), \nabla\psi_{\varepsilon,1}^{bl})_{\mathbb{R}^3} + \psi_{\varepsilon,1}^{bl}\Delta\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right).
\end{aligned}$$

Оценка (21.14) и лемма 21.2 позволяют оценить $f_{\varepsilon,1}^{(1)}$:

$$\|f_{\varepsilon,1}^{(1)}\|_{L_2(\Omega)} = O\Big(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\big(|\ln\eta|^{\frac{3}{2}} + 1\big)\Big).$$

Используя лемму 21.2, равенство (1.5), уравнения (21.7), формулы (21.8), (21.11), условия Коши—Римана (21.10) и оценку $\varepsilon\xi_2 < c_0$ на области $\{\mathsf{x} : \tau < c_0\}$, получаем, что

$$\begin{aligned}
f_{\varepsilon,1}^{(2)}(x) =&\varepsilon\mathfrak{c}_1 Y(\xi, \eta\mathsf{g}_\varepsilon) + \varepsilon^2\mathfrak{c}_2\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} Y(\xi_1, t, \eta\mathsf{g}_\varepsilon)\,dt + \varepsilon\mathfrak{c}_3 X(\xi, \eta\mathsf{g}_\varepsilon) +\\
&+ \varepsilon^2\mathfrak{c}_4\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t, \eta\mathsf{g}_\varepsilon)\,dt + \varepsilon(\mathfrak{c}_5\xi_2 + \mathfrak{c}_6)\frac{\partial}{\partial\xi_2}X(\xi, \eta\mathsf{g}_\varepsilon) + \varepsilon(\mathfrak{c}_7\xi_2 + \mathfrak{c}_8)\frac{\partial}{\partial\xi_2}Y(\xi, \eta\mathsf{g}_\varepsilon),
\end{aligned}$$

где функции $\mathfrak{c}_i = \mathfrak{c}_i(\xi, s, x_3, \varepsilon)$ удовлетворяют равномерным по ξ, s, x_3, ε и η оценкам:

$$|\mathfrak{c}_i| \leqslant C(|\ln\eta| + 1).$$

Отсюда, из леммы 21.1 и пункта а) леммы 3.2 вытекает оценка:

$$\|f_{\varepsilon,1}^{(2)}\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(|\ln\eta|^{\frac{1}{2}} + 1)).$$

Функция $f_{\varepsilon,1}^{(3)}$ не равна нулю на области $\{x : c_0 < 4\tau < 3c_0\}$, что соответствует значениям $\xi_2 = O(\varepsilon^{-1})$. Так как $X, Y, v_i^\pm \in \mathcal{V}(\eta)$ экспоненциально убывают, то из явного вида X и Y выводим, что

$$\|f_{\varepsilon,1}^{(3)}\|_{L_2(\Omega)} = O(\mathrm{e}^{-\varepsilon^{-\mathsf{a}_{18}}}),$$

где $\mathsf{a}_{18} > 0$ — некоторое фиксированное число. Собирая вместе полученные неравенства для $f_{\varepsilon,1}^{(i)}$, приходим к утверждаемой оценке для $f_{\varepsilon,1}$. Лемма доказана.

□

22. Формальное построение асимптотик в случае усредненного третьего краевого условия

В настоящем разделе будут формально построены первые члены асимптотических разложений для собственных элементов задачи (19.1), (19.2) в условиях теоремы 19.3. Всюду в разделе считаем выполненными условия этой теоремы.

Так как λ_0 — простое собственное значение задачи (19.4), то согласно теореме 19.1 к нему сходится одно собственное значение λ_ε задачи (19.1), (19.2), которое является простым.

Первые члены асимптотики собственного значения λ_ε, сходящегося к λ_0, будем строить в виде

$$\lambda_\varepsilon = \Lambda_0(\mu) + \varepsilon\Lambda_1(\mu,\varepsilon) + \varepsilon^2\Lambda_2(\mu,\varepsilon) + \ldots \tag{22.1}$$

Асимптотику соответствующей собственной функции будем строить на основе метода согласования асимптотических разложений, метода пограничного слоя и метода многих масштабов. Основным отличием от построения предыдущего раздела здесь является то обстоятельство, что использование только внешнего разложения и пограничного слоя не позволяет добиться требуемых граничных условий на γ^ε и Γ^ε. Поэтому приходится применять также метод согласования асимптотических разложений и строить дополнительное внутреннее разложение в окрестности множества γ^ε.

Внешнее разложение для собственной функции определим следующим образом:

$$\psi_\varepsilon^{ex}(x) = \Upsilon^+(Mx_3)\Big(\Phi_0(\mathsf{x},\mu) + \varepsilon\Phi_1(\mathsf{x},\mu,\varepsilon) + \varepsilon^2\Phi_2(\mathsf{x},\mu,\varepsilon)\Big) + \ldots \tag{22.2}$$

Пограничный слой будем строить в виде:

$$\psi_\varepsilon^{bl}(\xi,x_3,s) = \Upsilon^+(Mx_3)\sum_{i=1}^{4}\varepsilon^i v_i^+(\xi,s,\mu,\varepsilon) + \Upsilon^-(Mx_3)\varepsilon\sum_{i=1}^{3}\varepsilon^i v_i^-(\xi,s,\mu,\varepsilon) + \ldots \tag{22.3}$$

Здесь под ξ мы вновь понимаем растянутые переменные, введенные в разделе 20.

Выведем уравнения для функций Φ_i. Для этого подставим (22.1) и (22.2) в уравнение (19.1) и вычислим коэффициенты при степенях ε^p, $p = 0, 1, 2$. Эта процедура приводит к уравнению (19.9) с $\mathcal{K}(\mu) = \Lambda_0(\mu) - M^2$ для Φ_0, к уравнению (19.13) для Φ_1 и к следующему уравнению для Φ_2:

$$-\Delta_{\mathsf{x}}\Phi_2 = \mathcal{K}\Phi_2 + \Lambda_1\Phi_1 + \Lambda_2\Phi_0, \quad \mathsf{x}\in\omega. \tag{22.4}$$

Граничные условия для функций Φ_i будут получены ниже. Из этих граничных условий и уравнений для Φ_i будет следовать, что $\Phi_i \in C^\infty(\overline{\omega})$, поэтому всюду ниже будем считать функции Φ_i бесконечно дифференцируемыми.

Выведем теперь краевые задачи для функций пограничного слоя. Для этого подставим (22.1) и (22.3) в уравнение (19.1), учтем выражение (2.5) для оператора Лапласа и вычислим коэффициенты при одинаковых степенях ε отдельно для $\Upsilon^+(Mx_3)$ и $\Upsilon^-(Mx_3)$. В результате получим уравнения (21.7) и следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
\Delta_\xi v_2^- &= \mathsf{k}\frac{\partial v_1^-}{\partial\xi_2} + 2M\frac{\partial v_2^+}{\partial\xi_1},\\
\Delta_\xi v_3^\pm &= \mathsf{k}\frac{\partial v_2^\pm}{\partial\xi_2} + \mathsf{k}^2\xi_2\frac{\partial v_1^\pm}{\partial\xi_2} - \mathcal{K}v_1^\pm - \frac{\partial^2 v_1^\pm}{\partial s^2} - 2M\frac{\partial v_{2\mp1}^\mp}{\partial\xi_1},\\
\Delta_\xi v_4^+ &= \mathsf{k}\frac{\partial v_3^+}{\partial\xi_2} + \mathsf{k}^2\xi_2\frac{\partial v_2^+}{\partial\xi_2} + \mathsf{k}^3\xi_2^2\frac{\partial v_1^+}{\partial\xi_2} - \mathcal{K}v_2^+ - \Lambda_1 v_1^+ -\\
&\quad - \frac{\partial^2 v_2^+}{\partial s^2} - \xi_2\left(3\mathsf{k}\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \mathsf{k}'\frac{\partial}{\partial s}\right)v_1^+ - 2M\frac{\partial v_2^-}{\partial\xi_1}.
\end{aligned} \tag{22.5}$$

Потребуем, чтобы сумма функций $(\psi_\varepsilon^{ex} + \psi_\varepsilon^{bl})$ удовлетворяла однородному граничному условию Неймана на $\Sigma\backslash\Big\{x : \mathsf{x}\in\omega,\, x_3 = \varepsilon\pi\Big(j+\dfrac{1}{2}\Big)\Big\}$. Это приводит к граничным условиям для функций $v_i^\pm$:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial v_i^+}{\partial\xi_2} = \Phi_{i-1}^{\mathsf{v}}, \qquad \frac{\partial v_4^+}{\partial\xi_2} = 0, \qquad \frac{\partial v_i^-}{\partial\xi_2} = 0, \qquad i = 1,2,3, \qquad \xi\in\Gamma(0),\\
\Phi_j^{\mathsf{v}} = \Phi_j^{\mathsf{v}}(s,\mu,\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial\mathsf{v}}\Phi_j^{\mathsf{v}}(\mathsf{x},\mu,\varepsilon), \qquad \mathsf{x}\in\partial\omega.
\end{gathered} \tag{22.6}$$

Отметим, что как и в случае двумерных задач, за счет пограничного слоя мы удовлетворяем только граничному условию Неймана на Γ^ε. Попытка одновременно добиться также выполнения и граничного условия Дирихле на γ^ε за счет пограничного слоя приводит к неразрешимым задачам на функции пограничного слоя.

Краевые задачи (21.7), (22.5), (22.6) решаются явно, их решения имеют следующий вид:

$$v_i^+(\xi,s,\mu,\varepsilon) = \widetilde{v}_i^+(\xi,s,\mu,\varepsilon) - \Phi_{i-1}^{\mathsf{v}}(s,\mu,\varepsilon)X(\xi), \quad i = 1,\ldots,4, \tag{22.7}$$

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{v}_1^+ = 0, \qquad \widetilde{v}_2^+ = -\frac{1}{2}\mathsf{k}\Phi_0^{\mathsf{v}}\Bigl(\xi_2 X + \int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1,t)\,dt\Bigr),\\
&\widetilde{v}_3^+ = -\frac{1}{2}\mathsf{k}\Phi_1^{\mathsf{v}}\Bigl(\xi_2 X + \int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1,t)\,dt\Bigr) - \Phi_0^{\mathsf{v}}\left(\frac{3}{8}\mathsf{k}^2 + \frac{1}{2}M^2\right)\xi_2^2 X -\\
&\qquad - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Phi_0^{\mathsf{v}}}{\partial s^2} + 2\Phi_0^{\mathsf{v}}M^2 + \Lambda_0\Phi_0^{\mathsf{v}} + \frac{3}{4}\mathsf{k}^2\Phi_0^{\mathsf{v}}\right)\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} tX(\xi_1,t)\,dt,\\
&\widetilde{v}_4^+ = -\frac{1}{2}\mathsf{k}\Phi_2^{\mathsf{v}}\Bigl(\xi_2 X + \int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1,t)\,dt\Bigr) + (\mathfrak{b}_1^+\xi_2 + \mathfrak{b}_2^+)\xi_2^2 X +\\
&\qquad + \int\limits_{\xi_2}^{+\infty}(\mathfrak{b}_3^+ t^2 + \mathfrak{b}_4^+ t + \mathfrak{b}_5^+\xi_2^2)X(\xi_1,t)\,dt,\\
&v_1^- = \Phi_0^{\mathsf{v}}M\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} t\frac{\partial}{\partial\xi_1}X(\xi_1,t)\,dt,\\
&v_2^- = \Phi_1^{\mathsf{v}}M\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} t\frac{\partial}{\partial\xi_1}X(\xi_1,t)\,dt + \frac{1}{2}\mathsf{k}\Phi_0^{\mathsf{v}}M\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} t^2\frac{\partial}{\partial\xi_1}X(\xi_1,t)\,dt,\\
&v_3^- = \Phi_2^{\mathsf{v}}M\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} t\frac{\partial}{\partial\xi_1}X(\xi_1,t)\,dt + \int\limits_{\xi_2}^{+\infty}(\mathfrak{b}_1^- t^3 + \mathfrak{b}_2^-\xi_2^2 t)\frac{\partial}{\partial\xi_1}X(\xi_1,t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Здесь $\mathfrak{b}_i^\pm = \mathfrak{b}_i^\pm(s,\mu,\varepsilon)$ — некоторые вполне определенные функции, имеющие вид полиномов по k, Φ_i^{v}, производным этих функций по s до второго порядка и по $\mathcal{K}$, Λ_1. Более того, функции $\mathfrak{b}_i^\pm$ обращаются в нуль, если равны нулю функции Φ_i^{v}, производные этих функций по s и Λ_1.

Выясним асимптотики функций пограничного слоя при $\xi \to \xi^{(j)}$. Ясно, что в силу π-периодичности по ξ_1 достаточно выяснить эти асимптотики при $\xi \to 0$ и распространить их затем на остальные точки $\xi^{(j)}$. Вычислим асимптотику для интеграла $\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1,t)\,dt$. Обозначим:

$$
\mathsf{Y}(\xi) = Y(\xi,0) \equiv \operatorname{Re}\ln\sin z + \ln 2 - \xi_2.
$$

Ясно, что для функций X и Y выполнены условия Коши—Римана (21.10). С учетом последних выводим формулы:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\xi_1}\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1,t)\,dt = \int\limits_{\xi_2}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\mathsf{Y}(\xi_1,t)\,dt = -\mathsf{Y}(\xi),\\
&\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1,t)\,dt = -\int\limits_0^{\xi_2}\mathsf{Y}(t,\xi_2)\,dt + \int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(0,t)\,dt = -\int\limits_0^{\xi_2}\mathsf{Y}(t,\xi_2)\,dt - \int\limits_0^{\xi_2} X(0,t)\,dt + \int\limits_0^{+\infty} X(0,t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Отсюда в силу (13.12) и определения функции Y следует, что при $\xi \to 0$:

$$
\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1,t)\,dt = -\frac{\pi^2}{12} - \xi_2(\ln\rho + \ln 2 - \xi_2) - \xi_1\Bigl(\vartheta - \frac{\pi}{2}\Bigr) + \xi_2 + O(\rho^2). \tag{22.8}
$$

Из равенств ($p = 2, 3$)

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \int\limits_{\xi_2}^{+\infty} t^p \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t)\, dt = - \int\limits_{\xi_2}^{+\infty} t^p \frac{\partial}{\partial t^2} X(\xi_1, t)\, dt =$$
$$= -\xi_2^p \frac{\partial X}{\partial \xi_2} - p\xi_2^{p-1} X - p(p-1) \int\limits_{\xi_2}^{+\infty} t^{p-2} X(\xi_1, t)\, dt,$$

$$\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} t^p \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t)\, dt \Big|_{\xi_1 = \frac{\pi}{2}} = 0$$

и асимптотик (13.12), (14.5), (22.8) выводим:

$$\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} t^p \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t)\, dt = \mathsf{a}_{17+p}\xi_1 + O(\rho^2 \ln \rho), \quad \xi \to 0, \tag{22.9}$$

где a_{19}, a_{20} — некоторые числовые константы. Интегрирование полученных асимптотик по ξ_1 позволяет получить асимптотики при $\xi \to 0$ для интегралов $\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} t^p X(\xi_1, t)\, dt$. В результате с учетом (13.12), (14.5), (22.8), (22.9) можно утверждать, что функции $v_i^{\pm}$ обладают следующими асимптотическими разложениями при $\xi \to 0$:

$$\begin{aligned} v_i^+(\xi, s, \mu) =& - \Phi_{i-1}^{\mathsf{v}}(s, \mu, \varepsilon)(\ln \rho + \ln 2 - \xi_2) + \widetilde{v}_i(0, s, \mu, \varepsilon) + \\ &+ \frac{1}{2}\mathsf{k}(s)\Phi_{i-2}^{\mathsf{v}}(s, \mu, \varepsilon)\left(\xi_1(\vartheta - \pi/2) - \xi_2\right) + O(\rho^2 \ln \rho), \\ v_i^-(\xi, s, \mu) =& - \Phi_{i-1}^{\mathsf{v}}(s, \mu, \varepsilon) M \xi_1 \ln \rho + \mathfrak{b}_i(s, \mu, \varepsilon)\xi_1 + O(\rho^2 \ln \rho), \\ \widetilde{v}_2^+(0, s, \mu, \varepsilon) =& \frac{\pi^2}{24}\mathsf{k}(s)\Phi_0^{\mathsf{v}}(s, \mu), \quad \Phi_3^{\mathsf{v}} \equiv 0, \end{aligned} \tag{22.10}$$

где ϑ — полярный угол, соответствующий переменным ξ, $\mathfrak{b}_i$ — функции, полиномиально зависящие от Φ_i^{v}, k, производных этих функций по s до второго порядка и от Λ_0, Λ_1, причем $\mathfrak{b}_i$ обращаются в нуль, если равны нулю функции Φ_i^{v}, Φ_1^{v}, Φ_2^{v}, их производные по s и коэффициент Λ_1.

Сумма $(\psi_\varepsilon^{ex} + \psi_\varepsilon^{bl})$ не удовлетворяет однородному граничному условию Дирихле на γ^ε даже асимптотически. Более того, функции v_i^+ имеют логарифмические особенности в точках $\xi^{(j)} = (\pi j, 0)$, $j \in \mathbb{Z}$. Поэтому в окрестности этих точек, т. е. в окрестности отдельных составляющих множества γ^ε, асимптотику собственной функции будем строить в виде внутреннего разложения:

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon^{in}(\varsigma^j, s, x_3) =& \Upsilon^+(Mx_3) \sum_{i=0}^{3} \varepsilon^i \big(w_{i,0}^+(\varsigma^j, s, \mu, \varepsilon) + \varepsilon\eta w_{i,1}^+(\varsigma^j, s, \mu, \varepsilon)\big) + \\ &+ \Upsilon^-(Mx_3)\varepsilon\eta \sum_{i=0}^{3} \varepsilon^i w_{i,1}^-(\varsigma^j, s, \mu, \varepsilon) + \ldots \end{aligned} \tag{22.11}$$

Здесь ς^j — растянутые переменные, введенные разделе 20. Ввиду периодичности по ξ_1 функций $v_i^{\pm}$ и периодичности по x_3 множества γ^ε, внутренние разложения, соответствующие разным составляющим множества γ^ε, описываются одинаковыми функциями $w_{i,j}^{\pm}$. Поэтому достаточно построить внутреннее разложение для точки $\xi^{(0)} = 0$ и распространить затем полученные результаты на остальные точки $\xi^{(j)}$.

Определим функции $w_{i,j}^{\pm}$. Выведем краевые задачи для этих функций. Для этого подставим (22.1) и (22.11) в (19.1), (19.2) и вычислим отдельно коэффициенты при одинаковых степенях ε и η.

В результате получим краевые задачи:

$$\begin{gathered}\Delta_\varsigma w_{i,0}^+ = 0, \quad \Delta_\varsigma w_{i,1}^+ = \mathsf{k}\frac{\partial}{\partial\varsigma_2}w_{i,0}^+, \quad \Delta_\varsigma w_{i,1}^- = 2M\frac{\partial}{\partial\varsigma_1}w_{i,0}^+, \quad \varsigma_2 > 0,\\ w_{i,j}^\pm = 0, \quad \varsigma\in\gamma^{\mathsf{g}}, \qquad \frac{\partial}{\partial\varsigma_2}w_{i,j}^\pm = 0, \quad \varsigma\in\Gamma^{\mathsf{g}},\end{gathered} \tag{22.12}$$

где

$$\gamma^{\mathsf{g}} = \{\varsigma:\ |\varsigma_1| < \mathsf{g}_\varepsilon,\ \varsigma_2 = 0\}, \qquad \Gamma^{\mathsf{g}} = O\varsigma_1 \setminus \overline{\gamma}^{\mathsf{g}}.$$

Теперь выпишем асимптотики для функций $w_{i,j}^\pm$. Пусть (ϱ,ϑ) — полярные координаты, соответствующие переменным ς. Обозначим:

$$\begin{aligned}&\lambda_{\varepsilon,2} = \Lambda_0(\mu) + \varepsilon\Lambda_1(\mu,\varepsilon) + \varepsilon^2\Lambda_2(\mu,\varepsilon),\\ &\Psi_{\varepsilon,2}(x) = \psi_{\varepsilon,2}^{ex}(x) + \chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)\psi_{\varepsilon,2}^{bl}(\xi,x_3,s),\\ &\psi_{\varepsilon,2}^{ex}(x) = \Upsilon^+(Mx_3)\Big(\Phi_0(\mathsf{x},\mu) + \varepsilon\Phi_1(\mathsf{x},\mu,\varepsilon) + \varepsilon^2\Phi_2(\mathsf{x},\mu,\varepsilon)\Big),\\ &\psi_{\varepsilon,2}^{bl}(\xi,x_3,s) = \Upsilon^+(Mx_3)\sum_{i=1}^{4}\varepsilon^i v_i^+(\xi,s,\mu,\varepsilon) + \Upsilon^-(Mx_3)\varepsilon\sum_{i=1}^{3}\varepsilon^i v_i^-(\xi,s,\mu,\varepsilon).\end{aligned}$$

Так как при $\tau\to 0$

$$\Phi_i = \Phi_i^D - \tau\Phi_i^{\mathsf{v}} + O(\tau^2), \qquad \Phi_i^D = \Phi_i^D(s,\mu,\varepsilon) = \Phi_i^D(\mathsf{x},\mu,\varepsilon), \quad \mathsf{x}\in\partial\omega,$$

то, учитывая асимптотики (22.10) и очевидное равенство $\varepsilon\ln\eta(\varepsilon) = -(A+\mu)^{-1}$ (см. (7.9)), нетрудно убедиться, что при $\eta^{\frac14} < 4\rho < 3\eta^{\frac14}$ (или, что тоже самое, при $\eta^{-\frac34} < 4\varrho < 3\eta^{-\frac34}$) имеет место соотношение

$$\begin{aligned}\Psi_{\varepsilon,2}(x) = \Upsilon^+(Mx_3)\Big(&\sum_{i=0}^{3}\varepsilon^i W_{i,0}^+(\varsigma,s,\mu,\varepsilon) + \varepsilon\eta\sum_{i=0}^{3}\varepsilon^i W_{i,1}^+(\varsigma,s,\mu,\varepsilon)\Big) +\\ &+ \varepsilon\eta\Upsilon^-(Mx_3)\sum_{i=0}^{3}\varepsilon^i W_{i,1}^-(\varsigma,s,\mu,\varepsilon) + O(\eta^2\varrho^2\ln\varrho),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&W_{i,0}^+(\varsigma,s,\mu,\varepsilon) = -\Phi_{i-1}^{\mathsf{v}}(s,\mu,\varepsilon)(\ln\varrho + \ln 2) + \frac{\Phi_i^{\mathsf{v}}(s,\mu,\varepsilon)}{A+\mu} + \Phi_i^D(s,\mu,\varepsilon) + \widetilde{v}_i^+(0,s,\mu,\varepsilon),\\ &W_{i,1}^+(\varsigma,s,\mu,\varepsilon) = \frac12\mathsf{k}(s)\Phi_{i-1}^{\mathsf{v}}(s,\mu,\varepsilon)\left(\varsigma_1\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) - \varsigma_2\right),\\ &W_{i,1}^-(\varsigma,s,\mu) = -\Phi_{i-1}^{\mathsf{v}}(s,\mu,\varepsilon)M\varsigma_1\ln\varrho + \left(\frac{M\Phi_i^{\mathsf{v}}(s,\mu,\varepsilon)}{A+\mu} + \mathfrak{b}_i(s,\mu,\varepsilon)\right)\varsigma_1,\end{aligned} \tag{22.13}$$

где $\Phi_3^D = \Phi_{-1}^{\mathsf{v}} \equiv 0$, $\mathfrak{b}_0 = 0$. Согласно полученным формулам и методу согласования асимптотических разложений, мы должны построить решения задач (22.12) с асимптотиками

$$w_{i,k}^\pm = W_{i,k}^\pm + o(\varrho^k), \quad \varrho\to\infty. \tag{22.14}$$

Функции $w_{i,0}^+$ и $w_{i,1}^-$ строятся явно:

$$\begin{gathered}w_{0,0}^+ = 0, \quad w_{i,0}^+ = -\Phi_{i-1}^{\mathsf{v}}Z(\varsigma\mathsf{g}_\varepsilon^{-1}),\\ w_{i,1}^- = -\Phi_{i-1}^{\mathsf{v}}M\varsigma_1 Z(\varsigma\mathsf{g}_\varepsilon^{-1}) + \mathsf{g}_\varepsilon\bigg(\frac{M\Phi_i^{\mathsf{v}}}{A+\mu} + \mathfrak{b}_i + \Phi_{i-1}^{\mathsf{v}}M(\ln 2 - \ln\mathsf{g}_\varepsilon)\bigg)Z_1(\varsigma\mathsf{g}_\varepsilon^{-1}).\end{gathered}$$

Здесь $Z_1(\varsigma)$ — это функция $Z_1^{(j)}$ из (14.11) с $\alpha^j = \beta^j = \dfrac12$. Соотношения (13.26) с $\alpha^j = \beta^j = \dfrac12$ для функции Z позволяют вычислить асимптотики только что определенных функций $w_{i,0}^+$, сравнивая которые с (22.13), (22.14), приходим к необходимости выполнения равенств:

$$\frac{\Phi_i^{\mathsf{v}}(s,\mu,\varepsilon)}{A+\mu} + \Phi_i^D(s,\mu,\varepsilon) + \widetilde{v}_i(0,s,\mu,\varepsilon) = \Phi_{i-1}^{\mathsf{v}}(s,\mu,\varepsilon)\ln\mathsf{g}_\varepsilon(s).$$

Последние дают граничные условия (19.10), (19.14) для Φ_0 и Φ_1 и граничное условие для Φ_2:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathsf{v}} + A + \mu\right)\Phi_2 = -(A+\mu)^3\Phi_0 \ln^2 \mathsf{g}_\varepsilon + (A+\mu)^2\left(\frac{\pi^2}{24}\mathsf{k}\Phi_0 - \Phi_1 \ln \mathsf{g}_\varepsilon\right), \quad \mathsf{x} \in \partial\omega. \tag{22.15}$$

Собственные элементы $\mathcal{K}$ и Φ_0 выберем согласно лемме 19.1 сходящимися к $\varkappa$ и ϕ_0. Утверждение данной леммы следует из леммы 12.1 для $\theta'_\varepsilon \equiv 1$ с соответствующей заменой обозначений. Следовательно, $\Lambda_0(\mu) = \mathcal{K}(\mu) + M^2$ — голоморфная функция, $\Lambda_0(0) = \lambda_0$. Краевые задачи (19.13), (19.14), (22.4), (22.15) разрешимы при подходящем выборе Λ_1 и Λ_2. Условия разрешимости получаем стандартным образом: умножаем уравнения в (19.13), (22.4) на Φ_0 и интегрируем по частям по области ω, учитывая граничные условия (19.10), (19.14), (22.15). Функции Φ_1 и Φ_2 определены с точностью до слагаемого $c\Phi_0$; однозначно определяем функции Φ_1 и Φ_2, считая их ортогональными Φ_0 в $L_2(\omega)$. Такой выбор функций Φ_1 и Φ_2 и условия разрешимости задач для этих функций дают формулы (19.12). Также очевидно, что $\Phi_1, \Phi_2 \in C^\infty(\overline{\omega})$.

Лемма 22.1. *Верны равномерные по ε и μ оценки* ($i = 1, 2$):

$$\|\Phi_0\|_{C^3(\overline{\omega})} \leqslant C, \qquad \|\Phi_i\|_{C^2(\overline{\omega})} \leqslant C(A+\mu)^2, \qquad \|\Phi_i^{\mathsf{v}}\|_{C^2(\partial\omega)} \leqslant C(A+\mu)^2, \qquad |\Lambda_i| \leqslant C(A+\mu)^2.$$

Доказательство. Так как $\mathcal{K} \to \varkappa$, то функция Λ_0 ограничена равномерно по μ. Отсюда, из нормировки функции Φ_0 и стандартных теорем о повышении гладкости решений эллиптических краевых задач легко следует оценка для Φ_0. Следовательно, в силу (19.12), верна утверждаемая оценка для Λ_1. Последняя вместе с ортогональностью Φ_0 и Φ_1 в $L_2(\omega)$ приводит к равномерной ограниченности нормы $\|\Phi_1\|_{W_2^1(\omega)}$. Применяя теперь лемму 14.2 с $\theta'_\varepsilon \equiv 1$ к задаче (19.13), (19.14), приходим к оценкам для Φ_1. Эти оценки в силу (19.12) дают требуемое неравенство для Λ_2, что аналогично оценкам для Φ_1 позволяет доказать и оценки для Φ_2. Лемма доказана. □

Закончим построение внутреннего разложения.

Лемма 22.2. *Существует решение задачи*

$$\Delta_\varsigma U = \frac{\partial Z}{\partial \varsigma_2}, \quad \varsigma_2 > 0, \qquad U = 0, \quad \varsigma \in \gamma^1, \qquad \frac{\partial U}{\partial \varsigma_2} = 0, \quad \varsigma \in \Gamma^1, \tag{22.16}$$

принадлежащее пространству $\mathcal{W}$ с $\alpha^j = \beta^j = \dfrac{1}{2}$ (*см.* (13.25)) *и имеющее дифференцируемую асимптотику*:

$$U(\varsigma) = -\frac{1}{2}\left(\varsigma_1\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) - \varsigma_2\right) + O(1), \quad \varrho \to \infty. \tag{22.17}$$

Здесь $Z = Z(\varsigma)$, $\gamma^1 = \{\varsigma : |\varsigma_1| < 1,\ \varsigma_2 = 0\}$, $\Gamma^1 = O\varsigma_1 \setminus \overline{\gamma}^1$.

Доказательство. Для доказательства достаточно сделать комплексную замену переменных, отображающую верхнюю полуплоскость $\varsigma_2 > 0$ в полукруг и решить затем полученную задачу разделением переменных. Такой путь легко приводит к решению задачи (22.16) с дифференцируемой асимптотикой (22.17). Лемма доказана. □

Функции $w_{i,1}^+$ определим так:

$$w_{0,1}^+ = 0, \quad w_{i,1}^+ = -\Phi_{i-1}^{\mathsf{v}}\mathsf{g}_\varepsilon \mathsf{k} U(\varsigma \mathsf{g}_\varepsilon^{-1}),$$

где U — решение задачи (22.16). Обозначим:

$$\Psi_{\varepsilon,2}^{in}(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\varsigma^j|\eta^{\frac{3}{4}})\psi_{\varepsilon,2}^{in}(\varsigma^j, s, x_3),$$

$$\psi_{\varepsilon,2}^{in,j}(\varsigma^j, s, x_3) = \Upsilon^+(Mx_3)\sum_{i=0}^{3}\varepsilon^i\big(w_{i,0}^+(\varsigma^j, s, \mu, \varepsilon) + \varepsilon\eta w_{i,1}^+(\varsigma^j, s, \mu, \varepsilon)\big) +$$

$$+ \Upsilon^-(Mx_3)\varepsilon\eta\sum_{i=0}^{3}\varepsilon^i w_{i,1}^-(\varsigma^j, s, \mu, \varepsilon).$$

Прямыми вычислениями проверяется, что для $\Psi_{\varepsilon,2}^{in} \in W_2^1(\Omega) \cap C^\infty(\widehat{\Omega})$ верна равномерная по ε и η оценка:

$$\left\| \frac{\partial \Psi_{\varepsilon,2}^{in}}{\partial s} \right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\eta^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $\mathsf{R}_{\varepsilon,2}$ — решение краевой задачи (20.1) с $f_0 = -\Psi_{\varepsilon,2}^{in}$, $f_1 = 0$, $u_0 = 0$. Из леммы 20.1 следует, что для $\mathsf{R}_{\varepsilon,2}$ верна равномерная оценка:

$$\|\mathsf{R}_{\varepsilon,2}\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C\eta^{\frac{1}{2}}. \tag{22.18}$$

Положим:

$$\psi_{\varepsilon,2}(x) = \Psi_{\varepsilon,2}(x)\chi_\varepsilon(x) + \Psi_{\varepsilon,2}^{in}(x) + \mathsf{R}_{\varepsilon,2},$$

где $\chi_\varepsilon(x)$ из раздела 20.

Лемма 22.3. *Функции* $\lambda_{\varepsilon,2}$ *и* $\psi_{\varepsilon,2} \in W_2^1(\Omega) \cap C^\infty(\widehat{\Omega})$ *сходятся к* λ_0 *и* ψ_0 (*последняя — в норме* $L_2(\Omega)$) *и удовлетворяют краевой задаче* (20.1) *с* $u_\varepsilon = \psi_{\varepsilon,2}$, $\lambda = \lambda_{\varepsilon,2}$, $f = f_{\varepsilon,2}$, *где для* $f_{\varepsilon,2}$ *верна оценка*:

$$\|f_{\varepsilon,2}\|_{L_2(\Omega)} = O\big(\varepsilon^3(A+\mu)\big).$$

Доказательство. Сходимости для $\lambda_{\varepsilon,2}$ и $\psi_{\varepsilon,2}$ проверяются непосредственно, с учетом определения функций $v_i^\pm$ и $w_{i,j}^\pm$ и леммы 22.1. Гладкость функции $\psi_{\varepsilon,2}$ — очевидна. Краевые условия для $\psi_{\varepsilon,2}$ есть прямое следствие граничных условий (22.6), (22.12) и равенств (21.12) для X с $\eta = 0$. Функция $f_{\varepsilon,2} = -(\Delta + \lambda_{\varepsilon,2})\psi_{\varepsilon,2}$ представляется в виде:

$$f_{\varepsilon,2} = -\sum_{i=1}^{5} f_{\varepsilon,2}^{(i)}, \quad f_{\varepsilon,2}^{(1)} = \chi_\varepsilon(\Delta + \lambda_{\varepsilon,2})\psi_{\varepsilon,2}^{ex} + (\lambda_{\varepsilon,2} - 1)\mathsf{R}_{\varepsilon,2},$$

$$f_{\varepsilon,1}^{(2)} = \chi_\varepsilon \chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)(\Delta + \lambda_{\varepsilon,2})\psi_{\varepsilon,2}^{bl}, \quad f_{\varepsilon,2}^{(4)} = \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\varsigma^j|\eta^{\frac{3}{4}})(\Delta + \lambda_{\varepsilon,2})\psi_{\varepsilon,2}^{in,j},$$

$$f_{\varepsilon,2}^{(3)} = \chi_\varepsilon \left(2\left(\nabla_x \psi_{\varepsilon,2}^{bl}, \nabla_x \chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)\right)_{\mathbb{R}^3} + \psi_{\varepsilon,2}^{bl} \Delta_x \chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)\right),$$

$$f_{\varepsilon,2}^{(5)} = \sum_{j=0}^{N-1} \left(2\left(\nabla_x \psi_{\varepsilon,2}^{mat,j}, \nabla_x \chi(|\varsigma^j|\eta^{\frac{3}{4}})\right)_{\mathbb{R}^3} + \psi_{\varepsilon,2}^{mat,j} \Delta_x \chi(|\varsigma^j|\eta^{\frac{3}{4}})\right),$$

$$\psi_{\varepsilon,2}^{mat,j}(x) = \psi_{\varepsilon,2}^{in,j}(x) - \psi_{\varepsilon,2}^{ex}(x) - \psi_{\varepsilon,2}^{bl}(\xi, s, x_3).$$

В силу леммы 22.1, уравнений (19.9), (19.13), (22.4) и оценки (22.18) получаем:

$$\|f_{\varepsilon,2}^{(1)}\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon^3(A+\mu)^2).$$

Функция $f_{\varepsilon,1}^{(2)}$ вычисляется явно, так как функции $v_i^\pm$ заданы явно. Она имеет вид (конечной) суммы

$$f_{\varepsilon,1}^{(2)}(x) = \varepsilon^3 \Upsilon^+(Mx_3) \sum_j \mathfrak{c}_j^+(\mu,\varepsilon) f_{\varepsilon,2,j}^{2,+}(\xi) + \varepsilon^3 \Upsilon^-(Mx_3) \sum_j \mathfrak{c}_j^-(\mu,\varepsilon) f_{\varepsilon,2,j}^{2,-}(\xi),$$

где $\mathfrak{c}_j^\pm(\varepsilon,\mu) = O(A+\mu)$, $f_{\varepsilon,2,j}^{2,\pm} \in L_2(\Pi)$. Следовательно,

$$\|f_{\varepsilon,2}^{(2)}\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon^{\frac{7}{2}}(A+\mu)).$$

Функция $f_{\varepsilon,2}^{(3)}$ не равна нулю на области $\{x : c_0 < 4\tau < 3c_0\}$, что соответствует значениям $\xi_2 = O(\varepsilon^{-1})$. Так как $v_i^\pm \in \mathcal{V}(0)$ — экспоненциально убывают, то

$$\|f_{\varepsilon,2}^{(3)}\|_{L_2(\Omega)} = O((A+\mu)\mathrm{e}^{-\varepsilon^{-\mathsf{a}_{21}}}),$$

где $\mathsf{a}_{21} > 0$ — некоторая фиксированная константа. В силу уравнений (22.12) с учетом асимптотик для $w_{i,j}^\pm$ при $\varsigma \to \infty$ прямыми вычислениями проверяется, что

$$\|f_{\varepsilon,2}^{(4)}\|_{L_2(\Omega)} = O(\eta^{\frac{1}{6}}).$$

При $\eta^{-\frac{3}{4}} < 4|\varsigma^j| < 3\eta^{-\frac{3}{4}}$ функция $\psi_\varepsilon^{mat,j}$ в силу проведенного согласования удовлетворяет асимптотике:

$$\psi_{\varepsilon,2}^{mat,j} = O(\eta^2|\varsigma^j|^2|\ln|\varsigma^j|| + \varepsilon|\varsigma^j|^{-2} + \varepsilon\eta),$$

откуда выводим:

$$\|f_{\varepsilon,2}^{(5)}\|_{L_2(\Omega)} = O(\eta^{\frac{1}{5}}).$$

Полученные оценки для $f_{\varepsilon,2}^{(i)}$ дают требуемую оценку для $f_{\varepsilon,2}$. Лемма доказана. □

23. Обоснование

В настоящем разделе мы проведем обоснование формальных асимптотических разложений собственных значений и собственных функций задачи (19.1), (19.2), построенных в двух предыдущих разделах, и докажем тем самым теоремы 19.2, 19.3. Для этого нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 23.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 19.1, λ_0 — *p-кратное собственное значение предельной задачи,* $\lambda_\varepsilon^{(j)}$, $j = 1, \ldots, p$ — *собственные значения задачи* (19.1), (19.2), *сходящиеся к* λ_0 *и взятые с учетом кратности,* $\psi_\varepsilon^{(j)}$ — *соответствующие ортонормированные в* $L_2(\Omega)$ *собственные функции. Тогда при* λ, *близких к* λ_0, *для решения краевой задачи* (20.7) *справедливо представление*

$$u_\varepsilon = \sum_{j=1}^{p} \frac{\psi_\varepsilon^{(j)}}{\lambda_\varepsilon^{(j)} - \lambda} \int\limits_\Omega \psi_\varepsilon^{(j)} f\, dx + \widetilde{u}_\varepsilon, \tag{23.1}$$

где функция $\widetilde{u}_\varepsilon$ *голоморфна по* λ *в норме* $W_2^1(\Omega)$, *ортогональна всем* $\psi_\varepsilon^{(j)}$ *в* $L_2(\Omega)$ *и удовлетворяет равномерной по* ε, η, λ *и* f *оценке*

$$\|\widetilde{u}_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L_2(\omega)}. \tag{23.2}$$

В утверждении леммы, как и в утверждении теоремы 19.1, под предельной понимается краевая задача (19.3), если выполнено равенство (1.5), и задача (19.4), если выполнено равенство (7.3).

Доказательство леммы дословно повторяет доказательство леммы 5.2, где вместо леммы 5.1 следует применять лемму 20.5, если выполнено равенство (1.5), и лемму 20.4, если выполнено равенство (7.3).

Доказательство теоремы 19.2. Леммы 21.4 и 23.1 позволяют применить представление (23.1) к функции $\psi_{\varepsilon,1}$, построенной в разделе 21, что с учетом простоты собственного значения λ_0 дает:

$$\psi_{\varepsilon,1} = \frac{\psi_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,1}} \int\limits_\Omega \psi_\varepsilon f_{\varepsilon,1}\, dx + \widetilde{u}_\varepsilon,$$

где ψ_ε — нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция, соответствующая λ_ε, а функция $\widetilde{u}_\varepsilon$ в силу (21.15) и (23.2) удовлетворяет оценке:

$$\|\widetilde{u}_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} = O\Big(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\big(|\ln\eta|^{\frac{3}{2}} + 1\big)\Big). \tag{23.3}$$

Так как $\psi_{\varepsilon,1}$ сходится к ψ_0 в $W_2^1(\Omega)$, то из последней оценки следует, что

$$\|\psi_{\varepsilon,1} - \widetilde{u}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} = \|\psi_0\|_{L_2(\Omega)}(1 + o(1)) \neq 0,$$

а потому из (23.2) и (21.15) выводим:

$$\|\psi_0\|_{L_2(\Omega)}(1 + o(1)) \leqslant \frac{C\varepsilon^{\frac{3}{2}}(|\ln\eta|^{\frac{3}{2}} + 1)}{|\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,1}|},$$

где константа C не зависит от ε и η. Отсюда следует:

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,1}| = O\Big(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\big(|\ln\eta|^{\frac{3}{2}} + 1\big)\Big),$$

что доказывает асимптотику (19.7). Из (23.2), (23.3) и леммы 21.4 следует, что собственная функция

$$\widetilde{\psi}_\varepsilon = \frac{\psi_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,1}} \int\limits_\Omega \psi_\varepsilon f_{\varepsilon,1}\,dx,$$

соответствующая λ_ε, сходится к ψ_0 в $W_2^1(\Omega)$ (так как $\widetilde{\psi}_\varepsilon = \psi_{\varepsilon,1} - \widetilde{u}_\varepsilon$) и удовлетворяет оценке:

$$\|\widetilde{\psi}_\varepsilon - \psi_{\varepsilon,1}\|_{W_2^1(\Omega)} = O\Big(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\big(|\ln\eta|^{\frac{3}{2}}+1\big)\Big).$$

Переобозначив $\widetilde{\psi}_\varepsilon$ через ψ_ε, из последнего равенства выводим, что собственная функция, соответствующая λ_ε, может быть выбрана так, что будет иметь следующую асимптотику в норме $W_2^1(\Omega)$:

$$\psi_\varepsilon(x) = \Upsilon^+(Mx_3)\left(\phi_0(\mathsf{x}) + \varepsilon\phi_1(\mathsf{x},\eta,\varepsilon) - \varepsilon\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)\phi_0^{\mathsf{v}}(s)X(\xi,\eta\mathsf{g}_\varepsilon(s))\right) + O\Big(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\big(|\ln\eta|^{\frac{3}{2}}+1\big)\Big), \quad (23.4)$$

где, напомним, ϕ_1 — решение задачи (21.4), (21.9), ϕ_0^{v} — значение нормальной производной функции ϕ_0 на $\partial\omega$, ξ — из (20.2), X — из (2.8), а константа c_0 выбрана согласно (4.7). Отметим, что мы отбросили в (23.4) слагаемые $\varepsilon^2 v_2^+$, $\varepsilon^2 v_2^-$ и $\mathsf{R}_{\varepsilon,1}$. Нетрудно проверить, используя (21.11), (21.14) и лемму 21.1, что $W_2^1(\Omega)$-норма отброшенных слагаемых есть величина порядка $O\Big(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\big(|\ln\eta|^{\frac{1}{2}}+1\big)\Big)$. Теорема 19.2 доказана. □

Доказательство теоремы 19.3. Доказательство проводится совершенно аналогично доказательству теоремы 19.2. В силу лемм 22.3, 23.1 для функции $\psi_{\varepsilon,2}$, построенной в предыдущем разделе, справедливо представление:

$$\psi_{\varepsilon,1} = \frac{\psi_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,2}} \int\limits_\Omega \psi_\varepsilon f_{\varepsilon,2}\,dx + \widetilde{u}_\varepsilon,$$

$$\|\widetilde{u}_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} = O(\varepsilon^3(A+\mu)).$$

Так как $\psi_{\varepsilon,2}$ сходится к ψ_0 в $L_2(\Omega)$ (см. лемму 22.3), то из данного представления легко вывести оценки

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,2}| = O\big(\varepsilon^3(A+\mu)\big), \quad \|\widetilde{\psi}_\varepsilon - \psi_{\varepsilon,2}\|_{W_2^1(\Omega)} = O\big(\varepsilon^3(A+\mu)\big). \quad (23.5)$$

Здесь

$$\widetilde{\psi}_\varepsilon = \frac{\psi_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,2}} \int\limits_\Omega \psi_\varepsilon f_{\varepsilon,2}\,dx$$

— собственная функция, соответствующая λ_ε, сходящаяся к ψ_0 в $L_2(\Omega)$. Первая из оценок (23.5) доказывает асимптотику (19.11). Переобозначив $\widetilde{\psi}_\varepsilon$ через ψ_ε, из последней оценки из (23.5) выводим, что собственная функция, соответствующая λ_ε, может быть выбрана так, что будет иметь следующую асимптотику в норме $W_2^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\psi_\varepsilon(x) =&\chi_\varepsilon(x)\left(\Upsilon^+(Mx_3)\Big(\Phi_0(\mathsf{x},\mu) + \sum_{i=1}^{2}\varepsilon^i\Phi_i(\mathsf{x},\mu,\varepsilon)\Big) + \right.\\ &\left. + \chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)\left(\Upsilon^+(Mx_3)\sum_{i=1}^{3}\varepsilon^i v_i^+(\xi,s,\mu,\varepsilon) + \Upsilon^-(Mx_3)\varepsilon^2 v_1^-(\xi,s,\mu,\varepsilon)\right)\right) - \\ &- \Upsilon^+(Mx_3)\sum_{j=0}^{N-1}\chi(|\varsigma^j|\eta^{\frac{3}{4}})\sum_{i=1}^{3}\varepsilon^i\Phi_{i-1}^{\mathsf{v}}(s,\mu,\varepsilon)Z(\varsigma^j\mathsf{g}_\varepsilon^{-1}(s)) + O(\varepsilon^{\frac{5}{2}}(A+\mu)),\end{aligned} \quad (23.6)$$

где, напомним, Φ_2 — решение задачи (22.4), (22.15), v_i^+, v_1^- — из (22.7), ξ и ς^j — из (20.2), X — из (8.14), Φ_i^{v} — значение нормальное производной Φ_i^{v} на $\partial\omega$, Z — функция $Z^{(j)}$ из (13.24) с $\alpha^j = \beta^j = \dfrac{1}{2}$. Отметим, что мы отбросили в (23.6) ряд слагаемых. Прямыми вычислениями нетрудно проверить, что $W_2^1(\Omega)$-норма отброшенных слагаемых есть величина порядка $O\big(\varepsilon^{\frac{5}{2}}(A+\mu)\big)$. Теорема 19.3 доказана. □

Глава 7

ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА С НЕПЕРИОДИЧЕСКИМ ЧЕРЕДОВАНИЕМ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ: НЕУЛУЧШАЕМЫЕ ОЦЕНКИ

В настоящей главе мы продолжаем изучение трехмерной краевой задачи в цилиндре с частой сменой краевых условий, поставленной в предыдущей главе, а именно, задачи (19.1), (19.2). Как было показано в теоремах 19.1, 19.2, 19.3, если полосы на боковой поверхности расположены периодически и функция g_ε, описывающая вариацию их ширины, зависит от ε и s достаточно регулярно, то удается доказать теоремы сходимости и построить асимптотические разложения для собственных значений и собственных функций задачи (19.1), (19.2). Доказательстве этих теорем существенно используют периодичность расположения полос и регулярное изменение их ширины. Вместе с тем, несложно обобщить рассматриваемую задачу до случая непериодического расположения полос с произвольно меняющейся шириной. В настоящей главе мы рассматриваем задачу (19.1), (19.2) именно в такой общей постановке. При этом ширина полос может зависеть от малого параметра ε достаточно произвольным образом, в том числе, быстро осциллировать. В таких условиях задача о построении асимптотических разложений уже не имеет решения, однако по аналогии с подходами главы 5 можно эффективно решить задачу о получении неулучшаемых по порядку оценок скорости сходимости собственных значений.

Опишем постановку задачи. На боковой поверхности $\Sigma = \partial\omega\times(0,H)$ цилиндра Ω вновь выделим подмножество, состоящее из N узких полос:

$$\gamma_\varepsilon = \left\{x:\ \mathrm{x}\in\partial\omega, -\varepsilon a_j(s,\varepsilon) < x_3 - \varepsilon\pi\left(j+\frac{1}{2}\right) < \varepsilon b_j(s,\varepsilon),\ j=0,\ldots,N-1\right\}.$$

Здесь $a_j = a_j(s,\varepsilon)$ и $b_j = b_j(s,\varepsilon)$ — произвольные функции из $C^\infty(\partial\omega)$, удовлетворяющие равномерным по ε, s и j оценкам:

$$0 < a_j + b_j, \quad a_j < \frac{\pi}{2}, \quad b_j < \frac{\pi}{2}. \tag{23.7}$$

Геометрически эти оценки означают, что ширина каждой полосы множества γ_ε положительна, и полосы, соответствующие разным значениям j, не пересекаются, см. рис. 4. Вновь рассматривается задача (19.1), (19.2), но уже с только что введенным множеством γ_ε.

Собственные значения задачи (19.1), (19.2) расположим в порядке неубывания с учетом кратности:

$$\lambda_\varepsilon^{(1)} \leqslant \lambda_\varepsilon^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_\varepsilon^{(n)} \leqslant \ldots$$

Соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции обозначим через $\psi_\varepsilon^{(n)}$.

Рассмотрим также усредненные задачи (19.3), (19.4) и их собственные значения $\lambda_0^{(k)}$ также расположим в порядке неубывания с учетом кратности. Соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции обозначим через $\psi_0^{(n)}$.

Сформулируем основные результаты главы.

Теорема 23.1. *Пусть выполнены неравенства* (23.7) *и существует функция* $\eta = \eta(\varepsilon)$, *удовлетворяющая равенству* (1.5), *такая что верны равномерные по* ε, s *и* j *неравенства*

$$0 < \eta(\varepsilon) \leqslant a_j(s,\varepsilon), \quad 0 < \eta(\varepsilon) \leqslant b_j(s,\varepsilon). \tag{23.8}$$

Тогда собственные значения задачи (19.1), (19.2) *при* $\varepsilon\to 0$ *сходятся к собственным значениям задачи* (19.3) *и верны равномерные по* ε *оценки*:

$$-c_n\varepsilon(|\ln\eta(\varepsilon)|+1) \leqslant \lambda_\varepsilon^{(n)} - \lambda_0^{(n)} \leqslant 0, \tag{23.9}$$

где $c_n > 0$ — *некоторые константы. Для каждой собственной функции* $\psi_0^{(n)}$, $n = m,\ldots,m+p-1$, *задачи* (19.3), *соответствующей* p*-кратному собственному значению* $\lambda_0^{(m)} = \lambda_0^{(m+1)} = \ldots = \lambda_0^{(m+p-1)}$, *существует линейная комбинация собственных функций* $\psi_\varepsilon^{(j)}$, $j = m,\ldots,m+p-1$,

$$\widetilde{\psi}_\varepsilon^{(n)} = \sum_{j=m}^{m+p-1} \alpha_j^{(n)}(\varepsilon)\psi_\varepsilon^{(j)}, \quad \|\widetilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}\|_{L_2(\Omega)} = 1, \tag{23.10}$$

удовлетворяющая равномерным по ε оценкам:

$$\|\psi_0^{(n)}-\widetilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}\|_{L_2(\Omega)}\leqslant c_n\varepsilon\,(|\ln\eta(\varepsilon)|+1)\,,\qquad \|\psi_0^{(n)}-\widetilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}\|_{W_2^1(\Omega)}\leqslant c_n\sqrt{\varepsilon}\left(\sqrt{|\ln\eta(\varepsilon)|}+1\right),\tag{23.11}$$

где $c_n>0$ — некоторые константы.

Теорема 23.2. *Пусть выполнены неравенства* (23.7) *и существует функция $\eta=\eta(\varepsilon)$, удовлетворяющая равенству* (7.3) *с $A=0$, такая что верны равномерные по ε, s и j неравенства*

$$\eta(\varepsilon)\leqslant a_j(s,\varepsilon),\quad \eta(\varepsilon)\leqslant b_j(s,\varepsilon).$$

Тогда собственные значения задачи (19.1), (19.2) *при $\varepsilon\to0$ сходятся к собственным значениям задачи* (19.4) *с $A=0$ и верны равномерные по ε оценки:*

$$0\leqslant\lambda_\varepsilon^{(n)}-\lambda_0^{(n)}\leqslant c_n\mu(\varepsilon),\tag{23.12}$$

где $c_n>0$ — некоторые константы, $\mu=\mu(\varepsilon)=-(\varepsilon\ln\eta(\varepsilon))^{-1}\to0$. Для каждой собственной функции $\psi_0^{(n)}$, $n=m,\ldots,m+p-1$, задачи (19.4) *с $A=0$, соответствующей p-кратному собственному значению $\lambda_0^{(m)}=\lambda_0^{(m+1)}=\ldots=\lambda_0^{(m+p-1)}$, существует линейная комбинация* (23.10), *удовлетворяющая равномерным по ε оценкам:*

$$\|\psi_0^{(n)}-\widetilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}\|_{L_2(\Omega)}\leqslant c_n\mu(\varepsilon),\qquad \|\psi_0^{(n)}-\widetilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}\|_{W_2^1(\Omega)}\leqslant c_n\sqrt{\mu(\varepsilon)},$$

где $c_n>0$ — некоторые константы.

Теорема 23.3. *Пусть существуют функции $\eta=\eta(\varepsilon)$, $\eta_0=\eta_0(\varepsilon)$, удовлетворяющие соотношениям* (19.4) *с $A>0$ и* (16.1), *такие что верны равномерные по ε, s и j неравенства*

$$\eta_0(\varepsilon)\eta(\varepsilon)\leqslant a_j(s,\varepsilon)\leqslant\eta(\varepsilon),\qquad \eta_0(\varepsilon)\eta(\varepsilon)\leqslant b_j(s,\varepsilon)\leqslant\eta(\varepsilon).$$

Тогда собственные значения задачи (19.1), (19.2) *при $\varepsilon\to0$ сходятся к собственным значениям задачи* (19.4) *с $A=0$, и верны равномерные по ε оценки:*

$$-c_n\big(\varepsilon^2+|\mu(\varepsilon)|-\varepsilon\ln\eta_0(\varepsilon)\big)\leqslant\lambda_\varepsilon^{(n)}-\lambda_0^{(n)}\leqslant c_n\big(\varepsilon^2+|\mu(\varepsilon)|\big),\tag{23.13}$$

где $c_n>0$ — некоторые константы, $\mu=\mu(\varepsilon)=-A-(\varepsilon\ln\eta(\varepsilon))^{-1}$. Для каждой собственной функции $\psi_0^{(n)}$, $n=m,\ldots,m+p-1$, задачи (19.4), *соответствующей p-кратному собственному значению $\lambda_0^{(m)}=\lambda_0^{(m+1)}=\ldots=\lambda_0^{(m+p-1)}$, существует линейная комбинация* (23.10), *удовлетворяющая равномерной по ε оценке:*

$$\|\psi_0^{(n)}-\widetilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}\|_{L_2(\Omega)}\leqslant c_n\big(\varepsilon+|\mu(\varepsilon)|-\varepsilon\ln\eta_0(\varepsilon)\big),\tag{23.14}$$

где $c_n>0$ — некоторые константы.

Как уже было отмечено выше, в рассматриваемом случае непериодического чередования полос задача о построении первых членов асимптотических разложений собственных значений и собственных функций задачи не имеет решения. Именно поэтому в случае непериодического чередования актуальным является вопрос о получении максимально точных оценок скорости сходимости при минимальных ограничениях на структуру чередования. Этот вопрос эффективно решается в приведенных теоремах. Отметим, что условия теорем 23.1, 23.2, 23.3 включают в рассмотрение широкий класс случаев непериодического расположения полос множества γ_ε. Кроме того, ширина полос, оставаясь ограниченной, может меняться произвольным образом. Не исключаются и полосы с быстро меняющейся шириной, т. е. случай, когда ширина полос осциллирует и период осцилляций стремится к нулю при $\varepsilon\to0$. Также подчеркнем, что во всех трех теоремах оценки для собственных значений и собственных функций неулучшаемы по порядку. А именно, всякий раз найдутся функции a_j и b_j такие, что утверждаемые оценки будут точными. Такие функции легко построить: множество γ_ε следует выбирать периодическим и состоящим из полос постоянной ширины, после чего использовать асимптотические разложения $\lambda_\varepsilon^{(n)}$, полученные в предыдущей главе. При этом первые члены асимптотических разложений по порядку будут в точности совпадать с правыми и левыми частями оценок для собственных значений и правыми частями оценок для собственных функций из теорем 23.1, 23.2, 23.3.

Результаты данной главы были опубликованы в [14,15].

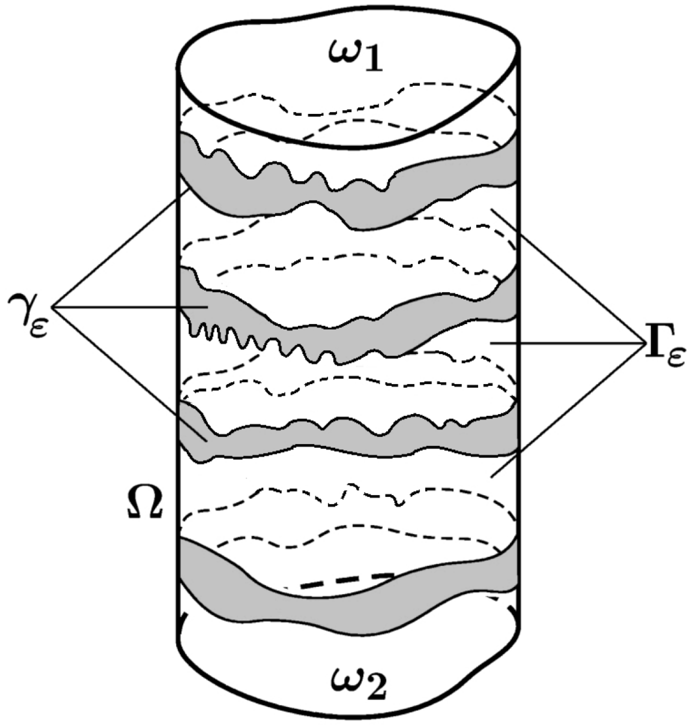

Рис. 4. Трехмерный цилиндр с частым непериодическим чередованием краевых условий на полосах на боковой поверхности

24. Вспомогательные утверждения

В настоящем разделе мы докажем вспомогательные леммы, необходимые для доказательства теорем 23.1, 23.2, 23.3 в следующем разделе.

Лемма 24.1. *Пусть подмножества* $\gamma_{\varepsilon,*}$ *и* γ_ε^* *боковой поверхности* Σ *таковы, что*

$$\gamma_{\varepsilon,*} \subseteq \gamma_\varepsilon \subseteq \gamma_\varepsilon^*, \tag{24.1}$$

и края отдельных составляющих множеств $\gamma_{\varepsilon,*}$ *и* γ_ε^* *являются гладкими кривыми без самопересечений. Пусть также* $\lambda_{\varepsilon,*}^{(n)}$ *и* $\lambda_\varepsilon^{*,n}$ *— собственные значения задачи* (19.1), (19.2) *с заменой* γ_ε *на* $\gamma_{\varepsilon,*}$ *и* γ_ε^* *и* Γ_ε *на* $\Sigma \setminus \overline{\gamma}_{\varepsilon,*}$ *и* $\Sigma \setminus \overline{\gamma_\varepsilon^*}$ *соответственно. Тогда верны оценки*:

$$\lambda_{\varepsilon,*}^{(n)} \leqslant \lambda_\varepsilon^{(n)} \leqslant \lambda_\varepsilon^{*,n}. \tag{24.2}$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 18.1 и также основано на принципе минимакса для задачи (19.1), (19.2).

Для точек, лежащих в малой окрестности Σ, через τ обозначим расстояние от точки до Σ, измеренное в направление внутренней нормали к Σ.

Лемма 24.2. *Пусть функция* $u \in C^2(\overline{\Omega} \setminus \overline{\gamma}_\varepsilon) \cap C(\overline{\Omega})$ *такова, что*

$$\Delta u \leqslant 0, \quad x \in \Omega, \qquad u \geqslant 0, \quad x \in \overline{\gamma}_\varepsilon \cup \overline{\omega}_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_3} \leqslant 0, \quad x \in \overline{\omega}_2, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} \geqslant 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon.$$

Тогда $u \geqslant 0$ *при* $x \in \overline{\Omega}$.

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Положим

$$v(x) = \frac{u(x)}{Q(x_3)}, \qquad Q(x_3) = 2H^2 - x_3^2.$$

Тогда $v \in C^2(\overline{\Omega} \setminus \overline{\gamma}_\varepsilon) \cap C(\overline{\Omega})$ и

$$Lv := \left(\Delta - \frac{4x_3}{Q(x_3)} \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{2}{Q(x_3)}\right) v \leqslant 0, \quad x \in \Omega,$$

$$v \geqslant 0, \quad x \in \overline{\gamma}_\varepsilon \cup \overline{\omega}_1, \qquad \frac{\partial v}{\partial x_3} \leqslant 0, \quad x \in \overline{\omega}_2, \qquad \frac{\partial v}{\partial \nu} \geqslant 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon.$$

Пусть $x^0 \in \overline{\Omega}$ — точка минимума функции $v(x)$ и $v(x^0) < 0$. Если $x^0 \in \Omega$, то $\nabla v = 0$, $\Delta v \geqslant 0$ при $x = x^0$, и в этом случае $Lv > 0$ при $x = x^0$. Следовательно, $x^0 \in \partial\Omega$. Ясно, что $x^0 \notin \overline{\gamma}_\varepsilon \cup \overline{\omega}_1$. Пусть $x^0 \in \Gamma_\varepsilon$. Тогда $\dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0$ при $x = x^0$, так как неравенство $\dfrac{\partial v}{\partial \nu} > 0$ противоречит тому, что x^0 — точка минимума. В малой окрестности точки x^0 перейдем к координатам (s, τ, x_3). В этих координатах оператор Лапласа имеет вид:

$$\Delta = \frac{1}{\mathsf{H}} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathsf{H} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\mathsf{H}} \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{\mathsf{H}} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

где H — из (2.5). Так как $v \in C^2(\overline{\Omega} \setminus \overline{\gamma}_\varepsilon)$, $Lv \leqslant 0$, $\dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0$ при $x = x_0$, а x^0 — точка минимума, то $\nabla_{(s,\tau,x_3)} v = 0$ при $x = x_0$ и

$$\left(\Delta_{(s,\tau,x_3)} - \frac{2}{Q(x_3)} \right) v \leqslant 0, \quad x = x^0. \tag{24.3}$$

Так как x^0 — точка минимума, то $\Delta_{(s,\tau,x_3)} v \geqslant 0$ при $x = x_0$. Из неравенства $v(x^0) < 0$ теперь следует, что соотношение (24.3) невозможно. Аналогично доказывается, что $x^0 \notin \overline{\omega}_2$. ☐

Лемма 24.3. *Пусть* $u \in C^2(\overline{\Omega} \setminus \overline{\gamma}_\varepsilon) \cap C(\overline{\Omega})$ — *решение краевой задачи*

$$\Delta u = F, \quad x \in \Omega, \qquad u = f_D, \quad x \in \gamma_\varepsilon \cup \omega_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_3} = f_N, \quad x \in \omega_2, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = f_N, \quad x \in \Gamma_\varepsilon,$$

где F, f_N, f_D — *некоторые функции. Тогда*

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leqslant C \left(\sup_{\Omega} |F| + \sup_{\gamma_\varepsilon \cup \omega_1} |f_D| + \sup_{\Gamma_\varepsilon \cup \omega_2} |f_N| \right),$$

где константа C *не зависит от* ε *и выбора функций* a_j *и* b_j, F, f_N, f_D.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся методом барьерных функций. Пусть $U(x) = Q(x_3)V(x')$, где $Q(x_3)$ из доказательства леммы 24.2. Функцию V определим как решение краевой задачи

$$\Delta_{x'} V = 1, \quad x' \in \omega, \qquad \frac{\partial V}{\partial \nu} = \frac{|\Omega|}{|\partial\Omega|} > 0, \quad x' \in \partial\omega,$$

где $|\Omega|$ и $|\partial\Omega|$ — соответственно, площадь области Ω и длина кривой $\partial\Omega$. Ясно, что данная краевая задача разрешима, а ее решение $V \in C^\infty(\overline{\omega})$ определено с точностью до константы. Выберем данную константу так, чтобы было выполнено равномерное по $\overline{\omega}$ неравенство $V \geqslant 1$. С учетом вида функции $Q(x_3)$ и принадлежности $U \in C^\infty(\overline{\Omega})$, выводим, что существует константа $c_0 > 1$ такая, что $H^2 \leqslant U \leqslant c_0 H^2$. Выбирая теперь подходящую константу C и применяя лемму 24.2 к функциям $(CU \pm u)$, приходим к утверждению леммы. ☐

Пусть $U_i = U_i(x, \varepsilon)$, $i = 1, 2$ — решения краевых задач

$$\Delta U_i = 0, \quad x \in \Omega, \qquad U_i = 0, \quad x \in \omega_1, \qquad \frac{\partial U_i}{\partial x_3} = 0, \quad x \in \omega_2, \tag{24.4}$$

$$U_1 = 0, \qquad x \in \gamma_\varepsilon, \qquad \frac{\partial U_1}{\partial \nu} = \cos \frac{\pi x_3}{2H}, \qquad x \in \Gamma_\varepsilon, \tag{24.5}$$

$$U_2 = \cos \frac{\pi x_3}{2H}, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \qquad \frac{\partial U_2}{\partial \nu} = 0, \qquad x \in \Gamma_\varepsilon, \tag{24.6}$$

где $A = \text{const} > 0$. Согласно результатам [51, гл. IV], задачи (24.4), (24.5), (24.6) однозначно разрешимы и $U_i \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \overline{\gamma}_\varepsilon) \cap C(\overline{\Omega})$. Из леммы 24.2 также следует, что

$$U_1 \geqslant 0, \qquad U_2 \geqslant 0, \qquad x \in \overline{\Omega}. \tag{24.7}$$

Лемма 24.4. *Пусть множество* $\widetilde{\gamma}_\varepsilon \subseteq \gamma_\varepsilon$ *таково, что края отдельных составляющих множества* $\widetilde{\gamma}_\varepsilon$ *являются гладкими кривыми без самопересечений,* $\widetilde{U}_i$ *— решения краевых задач* (24.4)*,* (24.5)*,* (24.6) *с заменой* γ_ε *на* $\widetilde{\gamma}_\varepsilon$ *и* Γ_ε *на* $\Sigma \setminus \overline{\widetilde{\gamma}}_\varepsilon$*. Тогда*

$$U_1 \leqslant \widetilde{U}_1, \qquad U_2 \geqslant \widetilde{U}_2. \tag{24.8}$$

Доказательство. Функция $(\widetilde{U}_1 - U_1) \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \overline{\gamma}_\varepsilon) \cap C(\overline{\Omega})$ является гармонической в Ω, удовлетворяет однородному краевому условию Дирихле на ω_1 и однородному краевому условию Неймана на $\Gamma_\varepsilon \cup \omega_2$. Так как $\widetilde{U}_1 \geqslant 0$, то при $x \in \gamma_\varepsilon$ в силу (24.5) имеем: $\widetilde{U}_1 - U_1 \geqslant 0$. В силу леммы 24.2 отсюда следует первая из оценок (24.8).

Докажем вторую из оценок (24.8). С учетом леммы 24.2 ясно, что для доказательства этой оценки достаточно показать, что

$$0 \leqslant U_2 - \widetilde{U}_2 = \cos\frac{\pi x_3}{2H} - \widetilde{U}_2, \quad x \in \gamma_\varepsilon. \tag{24.9}$$

Так как $U_2 \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \overline{\gamma}_\varepsilon)$ и $U_2 = 0$ при $x \in \omega_1$, то функция

$$V_2(x) = \frac{U_2(x)}{\cos\frac{\pi x_3}{2H}}$$

также является элементом пространства $C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \overline{\gamma}_\varepsilon)$. Аналогично,

$$\widetilde{V}_2 = \frac{U_2(x)}{\cos\frac{\pi x_3}{2H}} \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \overline{\gamma}_\varepsilon).$$

Неравенство (24.9) в терминах функций V_2, $\widetilde{V}_2$ переписывается как $\widetilde{V}_2 \leqslant 1$, $x \in \gamma_\varepsilon$. Для доказательства этого неравенства достаточно установить, что $\max\limits_{\overline{\Omega}} \widetilde{V}_2 = 1$. Докажем последнее соотношение.

Пусть $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ — точка максимума функции $\widetilde{V}_2$ в $\overline{\Omega}$. Так как $\widetilde{V}_2 = 1$ при $x \in \widetilde{\gamma}_\varepsilon$, то $\widetilde{V}_2(x^0) \geqslant 1$. Функция $\widetilde{V}_2$, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\cos\frac{\pi x_3}{2H}\left(\Delta - \frac{\pi^2}{4H^2}\right)\widetilde{V}_2 - \frac{\pi}{H}\sin\frac{\pi x_3}{2H}\frac{\partial \widetilde{V}_2}{\partial x_3} = 0. \tag{24.10}$$

Используя это уравнение, аналогично доказательству леммы 24.2 нетрудно установить, что $x^0 \in \overline{\gamma}_\varepsilon \cup \overline{\omega}_1$. Допустим, что $x^0 \in \overline{\omega}_1$. Так как $\widetilde{V}_2 \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \overline{\widetilde{\gamma}}_\varepsilon)$, то при x_3, близких к H, верно разложение в ряд Тейлора

$$\widetilde{V}_2(x) = \phi_0(x') + (x_3 - H)\phi_1(x') + (x_3 - H)^2\phi_2(x') + O\big((x_3 - H)^3\big). \tag{24.11}$$

Подставляя это разложение в уравнение (24.10), получаем, что

$$\phi_1 = 0, \quad \phi_2 = \frac{H}{6\pi}\left(\frac{\pi^2}{4H^2} - \Delta_{x'}\right)\phi_0. \tag{24.12}$$

Пусть $x^0 \in \omega_1$. Так как x^0 — точка максимума для функции ϕ_0, то $\Delta_{x'}\phi_0 \leqslant 0$ при $x = x^0$. Если $x^0 \in \partial\omega_1 = \omega \times \{H\}$, то из (24.6) выводим: $\dfrac{\partial \phi_0}{\partial \tau} = 0$, $x = x^0$. Кроме того, $\dfrac{\partial \phi_0}{\partial s} = 0$, $x = x^0$, и, следовательно, и в этом случае $\Delta_{x'}\phi_0 \leqslant 0$ при $x = x^0$. Так как $\phi_0(x_1^0, x_2^0) = \widetilde{V}_3(x^0) \geqslant 1$, то из (24.12) выводим: $\phi_2(x_1^0, x_2^0) > 0$. С учетом равенства $\phi_1 = 0$ последнее неравенство противоречит (24.11) и тому факту, что x^0 — точка максимума. □

Положим

$$\gamma_\varepsilon(\eta) = \left\{x : \mathrm{x} \in \partial\omega, -\varepsilon\eta < x_3 - \varepsilon\pi\left(j + \frac{1}{2}\right) < \varepsilon\eta, j = 0, \ldots, N-1\right\}, \qquad \Gamma_\varepsilon(\eta) = \Sigma \setminus \overline{\gamma_\varepsilon(\eta)}.$$

Через U_i^η, $i = 1, 2$, обозначим решения краевых задач (24.4), (24.5), (24.6) с заменой γ_ε на $\gamma_\varepsilon(\eta)$ и Γ_ε на $\Gamma_\varepsilon(\eta)$.

Пусть выполнены условия теоремы 23.1. В этом случае совершенно аналогично построениям разделов 21, 23 нетрудно построить асимптотическое разложение функции $U_1^{\eta(\varepsilon)}$, где $\eta(\varepsilon)$ из теоремы 23.1. Мы не будем приводить здесь этого построения, отметим лишь, что из этого разложения следует равенство

$$\big\|U_1^{\eta(\varepsilon)}\big\|_{L_2(\Omega)} = O\big((\varepsilon|\ln\eta(\varepsilon)|+1)\big).$$

Отсюда в силу первой из оценок (24.7), вложения $\gamma_\varepsilon(\eta(\varepsilon)) \subseteq \gamma_\varepsilon$ и леммы 24.4 выводим, что в условиях теоремы 23.1 верна равномерная по ε оценка

$$\|U_1\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C(\varepsilon|\ln\eta(\varepsilon)|+1). \tag{24.13}$$

Пусть выполнены условия теоремы 23.2. В этом случае аналогично разделам 21, 23 можно построить асимптотику функции $U_2^{\eta(\varepsilon)}$, где $\eta(\varepsilon)$ из теоремы 23.2 и показать, что

$$\big\|U_2^{\eta(\varepsilon)}\big\|_{L_2(\Omega)} = O(\mu(\varepsilon)),$$

где $\mu(\varepsilon)$ из теоремы 23.2. Из этого равенства, второй из оценок (24.7), вложения $\gamma_\varepsilon \subseteq \gamma_\varepsilon(\eta)$ и леммы 24.4 получаем равномерную по ε оценку

$$\|U_2\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\mu(\varepsilon). \tag{24.14}$$

Пусть ψ_0 — собственная функция задачи (19.4), а U_3 — решение краевой задачи

$$\begin{aligned} &\Delta U_3 = 0, \quad x \in \Omega, \qquad U_3 = 0, \quad x \in \omega_1, \qquad \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = 0, \quad x \in \omega_2,\\ &U_3 = -\psi_0, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \qquad \frac{\partial U_3}{\partial \nu} = A\psi_0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon. \end{aligned} \tag{24.15}$$

Ясно, что эта задача однозначно разрешима, $\psi_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $U_3 \in C^\infty(\overline{\Omega}\setminus\overline{\gamma}_\varepsilon)\cap C(\overline{\Omega})$. Пусть выполнены условия теоремы 23.3. Совершенно аналогично разделам 21, 23 нетрудно построить функцию $\widetilde{U}_3$, удовлетворяющую краевой задаче

$$\begin{aligned} &\Delta \widetilde{U}_3 = F, \quad x \in \Omega, \qquad \widetilde{U}_3 = 0, \quad x \in \omega_1, \qquad \frac{\partial \widetilde{U}_3}{\partial x_3} = 0, \quad x \in \omega_2,\\ &\widetilde{U}_3 = -\psi_0, \quad x \in \gamma_\varepsilon(\eta_0\eta), \qquad \frac{\partial \widetilde{U}_3}{\partial \nu} = A\psi_0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon(\eta_0\eta), \end{aligned}$$

причем выполнены соотношения

$$\begin{aligned} &\widetilde{U}_3 = -\psi_0 + f_D, \quad x \in \gamma_\varepsilon \setminus \gamma_\varepsilon(\eta_0\eta), \qquad \|\widetilde{U}_3\|_{L_2(\Omega)} = O\big(\varepsilon + |\mu(\varepsilon)| - \varepsilon\ln\eta_0(\varepsilon)\big),\\ &\sup_{\Omega}|F| = o\big(\varepsilon + |\mu(\varepsilon)| - \varepsilon\ln\eta_0(\varepsilon)\big), \qquad \sup_{\gamma_\varepsilon\setminus\gamma_\varepsilon(\eta_0\eta)}|f_D| = O\big(\varepsilon + |\mu(\varepsilon)| - \varepsilon\ln\eta_0(\varepsilon)\big). \end{aligned}$$

Учитывая эти соотношения и применяя к функции $(\widetilde{U}_3 - U_3)$ лемму 24.3, получаем:

$$\|U_3\|_{L_2(\Omega)} = O\big(\varepsilon + |\mu(\varepsilon)| - \varepsilon\ln\eta_0(\varepsilon)\big). \tag{24.16}$$

25. Доказательство оценок

Для доказательства оценок скорости сходимости собственных функций из теорем 23.1, 23.2, 23.3 мы используем подход, предложенный О. А. Олейник, Г. А. Иосифьяном, А. С. Шамаевым [55, гл. III, § 1]. Мы не будем приводить общую абстрактную схему из этой книги, а сформулируем лишь отдельное утверждение, необходимое для доказательства теорем 23.1, 23.2, 23.3.

Через B_ε, B_0 обозначим линейные самосопряженные положительные компактные операторы в $L_2(\Omega)$. Пусть $\Lambda_\varepsilon^{(n)}$, $\Lambda_0^{(n)}$ — собственные значения этих операторов, расположенные в порядке невозрастания с учетом кратности, а $\Psi_\varepsilon^{(n)}$, $\Psi_0^{(n)}$ — соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции. Совершенно аналогично доказательству [55, гл. III, § 1.2, теорема 1.12] устанавливается справедливость следующего утверждения.

Теорема 25.1. *Пусть верны сходимости*

$$\Lambda_\varepsilon^{(n)} \to \Lambda_0^{(n)}, \qquad \|(A_\varepsilon - A_0)\Psi_0^{(n)}\| \to 0, \qquad \varepsilon \to 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда для каждой собственной функции $\Psi_0^{(n)}$*, соответствующей* p*-кратному собственному значению* $\Lambda_0^{(m)} = \Lambda_0^{(m)} = \ldots = \Lambda_0^{(m+p-1)}$*, существует линейная комбинация собственных функций* $\Psi_\varepsilon^{(j)}$*,* $j = m, \ldots, m+p-1$*,*

$$\widetilde{\Psi}_\varepsilon^{(n)} = \sum_{j=m}^{m+p-1} \alpha_j^{(n)}(\varepsilon)\Psi_\varepsilon^{(j)}, \qquad \|\widetilde{\Psi}_\varepsilon^{(n)}\|_{L_2(\Omega)} = 1,$$

удовлетворяющая равномерной по ε *оценке*:

$$\|\widetilde{\Psi}_\varepsilon^{(n)} - \Psi_0^{(n)}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_n \|(A_\varepsilon - A_0)\Psi_0^{(n)}\|.$$

Докажем теперь теоремы 23.1, 23.2, 23.3.

Доказательство теоремы 23.1. Обозначим

$$\gamma_{\varepsilon,*} = \left\{x : \ x' \in \partial\omega \ \left| x_3 - \varepsilon\pi\left(j + \frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon\eta, \ j = 0, \ldots, N-1\right\}, \qquad \gamma_\varepsilon^* := \Sigma.$$

В силу неравенств (23.8) тогда выполнены вложения (24.1) и это дает возможность применить лемму 24.1, согласно которой верны неравенства

$$\lambda_{\varepsilon,*}^{(n)} \leqslant \lambda_\varepsilon^{(n)} \leqslant \lambda_0^{(n)}. \tag{25.1}$$

Так как собственные значения $\lambda_{\varepsilon,*}^{(n)}$ соответствуют задаче (19.1), (19.2) с $\mathrm{g}_\varepsilon \equiv 1$, то для них справедливы асимптотики (19.7), (19.8). Подставляя эти асимптотики в (25.1), получаем оценки (23.9).

Докажем оценки для собственных функций. Пусть B_ε и B_0 — операторы, сопоставляющие функции $f \in L_2(\Omega)$, соответственно, обобщенные решения краевых задач:

$$\begin{aligned} &-\Delta u_\varepsilon = f, \quad x \in \Omega, \qquad u_\varepsilon = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon \cup \omega_1, \qquad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon \cup \omega_2, \\ &-\Delta u_0 = f, \quad x \in \Omega, \qquad u_0 = 0, \quad x \in \Sigma \cup \omega_1, \qquad \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \omega_2. \end{aligned} \tag{25.2}$$

Проверим выполнение условий теоремы 25.1 для этих операторов. Пусть $u_\varepsilon = B_\varepsilon f$, $u_0 = B_0 f$. Умножим уравнения в (25.2) на u_ε и u_0, соответственно, и проинтегрируем по частям. Тогда получим:

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 = (f, u_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} = (f, B_\varepsilon f)_{L_2(\Omega)}, \qquad \|\nabla u_0\|_{L_2(\Omega)}^2 = (f, u_0)_{L_2(\Omega)} = (f, B_0 f)_{L_2(\Omega)}, \tag{25.3}$$

откуда следует положительность операторов B_ε и B_0. Для любой функции $u \in W_2^1(\Omega)$, обращающейся в нуль на ω_1, выполнено неравенство

$$\frac{\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|u\|_{L_2(\Omega)}^2} \geqslant \inf_{\substack{u \in W_2^1(\Omega), \\ u|_{\omega_1} = 0}} \frac{\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|u\|_{L_2(\Omega)}^2} = \frac{\pi^2}{4H^2},$$

где $\dfrac{\pi^2}{4H^2}$ — минимальное собственное значение оператора $-\Delta$ в цилиндре Ω с краевым условием Дирихле на ω_1 и краевым условием Неймана на остальной части границы. Используя это неравенство и (25.3), получаем:

$$\|B_\varepsilon f\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \left(\frac{4H^2}{\pi^2} + \frac{2H}{\pi}\right)\|f\|_{L_2(\Omega)}, \qquad \|B_0 f\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \left(\frac{4H^2}{\pi^2} + \frac{2H}{\pi}\right)\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Из последних двух оценок следует равномерная по ε ограниченность операторов B_ε, B_0 как операторов из $L_2(\Omega)$ в $W_2^1(\Omega)$. Следовательно, операторы B_ε, B_0 компактны как операторы из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Самосопряженность операторов $B_\varepsilon, B_0 : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ проверяется стандартным образом.

Так как собственные значения $\Lambda_\varepsilon^{(n)}$, $\Lambda_0^{(n)}$ операторов B_ε, B_0 связаны с собственными значениями задач (19.1), (19.2) и (19.3) равенствами $\Lambda_\varepsilon^{(n)} = (\lambda_\varepsilon^n)^{-1}$, $\Lambda_0^{(n)} = (\lambda_0^n)^{-1}$, то сходимости $\Lambda_\varepsilon^{(n)} \to \Lambda_0^{(n)}$

следуют из оценок (23.9). Собственные функции операторов B_ε, B_0 совпадают с собственными значениями задач (19.1), (19.2) и (19.3). Кроме того, $B_0\psi_0^{(n)} = (\lambda_0^{(n)})^{-1}\psi_0^{(n)}$. Поэтому для завершения проверки условия теоремы 25.1 достаточно оценить норму $\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}$, где

$$v_\varepsilon := \lambda_0^{(n)} u_\varepsilon - \psi_0^{(n)}, \qquad u_\varepsilon := B_\varepsilon \psi_0^{(n)}.$$

Ясно, что $u_\varepsilon, v_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}\setminus\overline{\gamma}_\varepsilon)\cap C(\overline{\Omega})$, $\psi_0^{(n)} \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Функции $\psi_0^{(n)}$ легко находятся разделением переменных; в результате нетрудно проверить, что выполнены равномерные оценки

$$|\psi_0^{(n)}| \leqslant C\cos\frac{\pi x_3}{2H}, \quad x\in\overline{\Sigma}. \tag{25.4}$$

Функция v_ε является решением краевой задачи

$$\Delta v_\varepsilon = 0, \quad x\in\Omega, \qquad v_\varepsilon = 0, \quad x\in\omega_1, \qquad \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial\nu} = 0, \quad x\in\Gamma_\varepsilon\cup\omega_2, \qquad v_\varepsilon = -\psi_0^{(n)}, \quad x\in\gamma_\varepsilon.$$

Отсюда, из (25.4) и леммы 24.2 следует, что

$$|v_\varepsilon| \leqslant CU_1, \quad x\in\overline{\Omega}. \tag{25.5}$$

Учитывая теперь оценку (24.13), получаем

$$\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\varepsilon\big(|\ln\eta(\varepsilon)|+1\big),$$

т. е. $\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Теперь из полученной оценки и теоремы 25.1 следует, что для каждой собственной функции $\psi_0^{(n)}$, $n = m,\dots,m+p-1$ задачи (19.3), соответствующей p-кратному собственному значению $\lambda_0 := \lambda_0^{(m)} = \lambda_0^{(m+1)} = \ldots = \lambda_0^{(m+p-1)}$, существует линейная комбинация (23.10), удовлетворяющая первой из оценок (23.11). Докажем вторую из оценок (23.11). Так как $\|\widetilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}\|_{L_2(\Omega)} = 1$, то для коэффициентов линейной комбинации (23.10) справедливо равенство:

$$\sum_{j=m}^{m+p-1} |\alpha_j^{(n)}(\varepsilon)|^2 = 1,$$

а потому числа $\alpha_j^{(n)}(\varepsilon)$ ограничены равномерно по ε. Функция $\widetilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}$ является решением уравнения

$$-\Delta\widetilde{\psi}_\varepsilon^{(n)} = \lambda_0\widetilde{\psi}_\varepsilon^{(n)} + f_\varepsilon^{(n)}, \quad x\in\Omega, \quad f_\varepsilon^{(n)} = \sum_{j=m}^{m+p-1}\alpha_j^{(n)}(\varepsilon)(\lambda_\varepsilon^{(j)}-\lambda_0^{(j)})\psi_\varepsilon^{(j)},$$

удовлетворяющим краевым условиям (19.2). Учитывая эти краевые условия и краевую задачу для функции $\psi_0^{(n)}$, интегрированием по частям легко установить равенства:

$$\begin{gathered}\|\widetilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}\|^2_{L_2(\Omega)} = \lambda_0\|\widetilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}\|^2_{L_2(\Omega)} + (f_\varepsilon^{(n)},\widetilde{\psi}_\varepsilon^{(n)})_{L_2(\Omega)}, \qquad \|\nabla\widetilde{\psi}_0^{(n)}\|^2_{L_2(\Omega)} = \lambda_0\|\widetilde{\psi}_0^{(n)}\|^2_{L_2(\Omega)}, \\ (\nabla\widetilde{\psi}_\varepsilon^{(n)},\nabla\widetilde{\psi}_0^{(n)})_{L_2(\Omega)} = \lambda_0(\widetilde{\psi}_\varepsilon^{(n)},\widetilde{\psi}_0^{(n)})_{L_2(\Omega)} + (f_\varepsilon^{(n)},\widetilde{\psi}_0^{(n)})_{L_2(\Omega)},\end{gathered} \tag{25.6}$$

откуда, из оценок (23.9), равномерной ограниченности чисел $\alpha_j^{(n)}(\varepsilon)$ и первой из оценок (23.11) выводим:

$$\begin{aligned}&\|f_\varepsilon^{(n)}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\varepsilon\big(|\ln\eta(\varepsilon)|+1\big),\\ &\|\nabla(\widetilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}-\psi_0^{(n)})\|^2_{L_2(\Omega)} = \lambda_0\|\widetilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}-\psi_0^{(n)}\|^2_{L_2(\Omega)} + (f_\varepsilon^{(n)},\widetilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}-2\psi_0^{(n)})_{L_2(\Omega)} \leqslant C\varepsilon\big(|\ln\eta(\varepsilon)|+1\big).\end{aligned}$$

Из последних оценок и первой из оценок (23.11) вытекает вторая из оценок (23.11). ☐

Доказательство теоремы 23.2. Положим

$$\gamma_{\varepsilon,*} = \varnothing, \quad \gamma_\varepsilon^* = \left\{x:\ \mathrm{x}\in\partial\omega\ \left|x_3-\varepsilon\pi\left(j+\frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon\eta(\varepsilon),\ j = 0,\dots,N-1\right\}.$$

Тогда в силу леммы 24.1 собственные значения $\lambda_\varepsilon^{(n)}$ удовлетворяют оценкам (24.2). Ясно, что $\lambda_{\varepsilon,*}^{(n)} = \lambda_0^{(n)}$. Из теоремы 19.3 и леммы 19.1 следует, что числа $\lambda_{\varepsilon,*}^{(n)}$ имеют асимптотики

$$\lambda_{\varepsilon,*}^{(n)} = \lambda_0^{(n)}, \qquad \lambda_\varepsilon^{*,n} = \lambda_0^{(n)} + \lambda_{0,1}^{(n)}\mu + o(\mu),$$

где $\lambda_{0,1}^{(n)}$ — некоторые константы. Из этих асимптотик и неравенств (24.2) уже вытекают оценки (23.12).

Доказательство оценок для собственных функций в целом аналогично доказательству оценок (23.11) в теореме 23.1. В качестве B_ε здесь берется тот же оператор, что и в доказательстве теоремы 23.1, а в качестве B_0 следует взять оператор, сопоставляющий функции $f \in L_2(\Omega)$ обобщенное решение задачи

$$-\Delta u_0 = f, \quad x \in \Omega, \qquad u_0 = 0, \quad x \in \omega_1, \qquad \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Sigma \cup \omega_2.$$

Требуемая сходимость собственных значений этих операторов следует из (23.12). Нормы $\|(B_\varepsilon - B_0)\psi_0^{(n)}\|_{L_2(\Omega)}$ оценивается аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 23.1. Необходимо лишь использовать оценку

$$\left|\frac{\partial \psi_0^{(n)}}{\partial \nu}\right| \leqslant C \cos\frac{\pi x_3}{2H}, \quad x \in \overline{\Sigma}$$

вместо (25.4) и оценку

$$|v_\varepsilon| \leqslant C U_2$$

вместо (25.5). Из последней оценки и (24.14) следует, что

$$\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\mu(\varepsilon),$$

где C не зависит от ε. Аналогом (25.6) являются следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\|\widetilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}\|^2_{L_2(\Omega)} = \lambda_0 \|\widetilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}\|^2_{L_2(\Omega)} + (f_\varepsilon^{(n)}, \widetilde{\psi}_\varepsilon^{(n)})_{L_2(\Omega)},\\ (\nabla \widetilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}, \nabla \widetilde{\psi}_0^{(n)})_{L_2(\Omega)} = \lambda_0 (\widetilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}, \widetilde{\psi}_0^{(n)})_{L_2(\Omega)}, \quad \|\widetilde{\psi}_0^{(n)}\|^2_{L_2(\Omega)} = \lambda_0 \|\widetilde{\psi}_0^{(n)}\|^2_{L_2(\Omega)}.\end{gathered}$$

Остальные рассуждения переносятся из доказательства теоремы 23.1 без изменений. □

Доказательство теоремы 23.3. Для доказательства оценок (23.13) мы используем лемму 24.1. Положим:

$$\begin{aligned}\gamma_{\varepsilon,*} &= \left\{x: \ x \in \partial\omega, \ \left|x_3 - \varepsilon\pi\left(j + \frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon\eta_0(\varepsilon)\eta(\varepsilon), \ j = 0, \dots, N-1\right\},\\ \gamma_\varepsilon^* &= \left\{x: \ x \in \partial\omega, \ \left|x_3 - \varepsilon\pi\left(j + \frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon\eta(\varepsilon), \ j = 0, \dots, N-1\right\}.\end{aligned}$$

Согласно теореме 19.3 и лемме 19.1, числа $\lambda_{\varepsilon,*}^{(n)}$, $\lambda_\varepsilon^{*,n}$ имеют следующие асимптотики:

$$\lambda_{\varepsilon,*}^{(n)} = \lambda_0^{(n)} + \widetilde{\mu}\lambda_{0,1}^{(n)} + \varepsilon^2\lambda_{1,0}^{(n)} + o\big(|\widetilde{\mu}| + \varepsilon^2\big), \qquad \lambda_\varepsilon^{*,n} = \lambda_0^{(n)} + \mu\lambda_{0,1}^{(n)} + \varepsilon^2\lambda_{1,0}^{(n)} + o\big(|\mu| + \varepsilon^2\big).$$

Здесь $\lambda_{i,j}^{(n)}$ — некоторые константы, $\widetilde{\mu} = \widetilde{\mu}(\varepsilon) = -A - (\varepsilon \ln \eta_0 \eta)^{-1}$. Из этих асимптотик и оценок (24.2) следуют оценки (23.13).

Доказательство оценок (23.14) проводится аналогично доказательству оценок (23.11) в теореме 23.1. Оператор B_0 следует определить как сопоставляющий функции $f \in L_2(\Omega)$ обобщенное решение задачи

$$-\Delta u_0 = f, \quad x \in \Omega, \qquad u_0 = 0, \quad x \in \omega_1, \qquad \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \omega_2, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + A\right) u_0 = 0, \quad x \in \Sigma.$$

Функция v_ε будет решением задачи

$$\begin{gathered}\Delta v_\varepsilon = 0, \quad x \in \Omega, \qquad v_\varepsilon = 0, \quad x \in \omega_1, \qquad v_\varepsilon = -\psi_0^{(n)}, \quad x \in \gamma_\varepsilon,\\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \omega_2, \qquad \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} = A\psi_0^{(n)}, \quad x \in \Gamma_\varepsilon,\end{gathered}$$

т. е. $v_\varepsilon = U_3$, где U_3 — решение задачи (24.15) с $\psi_0 = \psi_0^{(n)}$. Из (24.16) теперь следует, что

$$\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} = O\big(\varepsilon + |\mu(\varepsilon)| - \varepsilon \ln \eta_0(\varepsilon)\big).$$

Применение теоремы 25.2 теперь приводит к оценке (23.14). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабич В. М., Кирпичникова Н. Я.* Метод пограничного слоя. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1974.
2. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. — М.: Наука, 1984.
3. *Беляев А. Г., Чечкин Г. А.* Усреднение смешанной краевой задачи для оператора Лапласа в случае, когда «предельная» задача неразрешима// Мат. сб. — 1995. — *186*, № 4. — С. 47–60.
4. *Беляев А. Ю., Чечкин Г. А.* Усреднение операторов с мелкомасштабной структурой// Мат. заметки. — 1999. — *65*, № 4. — С. 496–510.
5. *Бирман М. Ш., Суслина Т. А.* Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения// Алгебра и анализ. — 2003. — *15*, № 5. — С. 1–108.
6. *Бирман М. Ш., Суслина Т. А.* Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного самосопряженного семейства с учетом корректора// Алгебра и анализ. — 2005. — *17*, № 5. — С. 69–90.
7. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.
8. *Борисов Д. И.* О двупараметрической асимптотике в одной краевой задаче для Лапласиана// Мат. заметки. — 2001. — *70*, № 4. — С. 520–534.
9. *Борисов Д. И.* Двупараметрические асимптотики собственных чисел Лапласиана с частым чередованием граничных условий// Вестн. молод. учен. Сер. прикл. мат. мех. — 2002. — № 1. — С. 32–52.
10. *Борисов Д. И.* О Лапласиане с часто и непериодически чередующимися граничными условиями// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 4. — С. 443–445.
11. *Борисов Д. И.* О краевой задаче в цилиндре с частой сменой типа граничных условий// Мат. сб. — 2002. — *193*, № 7. — С. 37–68.
12. *Борисов Д. И.* О сингулярно возмущенной краевой задаче для Лапласиана в цилиндре// Дифф. уравн. — 2002. — *38*, № 8. — С. 1071–1078.
13. *Борисов Д. И.* Асимптотики и оценки собственных элементов Лапласиана с частой непериодической сменой граничных условий// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2003. — *67*, № 6. — С. 23–70.
14. *Борисов Д. И.* Асимптотики и оценки скорости сходимости в трехмерной краевой задаче с частой сменой граничных условий// Сиб. мат. ж. — 2004. — *45*, № 2. — С. 274–294.
15. *Борисов Д. И.* О задаче с частым непериодическим чередованием краевых условий на быстро осциллирующих множествах// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2006. — *46*, № 2. — С. 284–294.
16. *Борисов Д. И., Гадыльшин Р. Р.* О спектре Лапласиана с часто меняющимся типом граничных условий// Теор. мат. физ. — 1999. — *118*, № 3. — С. 347–353.
17. *Борисов Д. И., Шарапов Т. Ф.* О резольвенте многомерных операторов с частой сменой краевых условий в случае третьего усредненного условия// Пробл. мат. анализа. — 2015. — *83*. — С. 3–40.
18. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. — М.: Мир, 1967.
19. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1. — М.: ИЛ, 1949.
20. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром// Усп. мат. наук. — 1957. — *12*, № 5. — С. 3–122.
21. *Гадыльшин Р. Р.* Спектр эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении граничных условий// В сб.: «Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений». — Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1988. — С. 3–15.
22. *Гадыльшин Р. Р.* Об асимптотике собственных значений для периодически закрепленной мембраны// Алгебра и анализ. — 1998. — *10*, № 1. — С. 3–19.
23. *Гадыльшин Р. Р.* О краевой задаче для Лапласиана с быстро осциллируюшими граничными условиями// Докл. РАН. — 1998. — *362*, № 4. — С. 456–459.
24. *Гадыльшин Р. Р.* Асимптотики собственных значений краевой задачи с быстро осциллирующими граничными условиями// Дифф. уравн. — 1999. — *35*, № 4. — С. 540–551.
25. *Гадыльшин Р. Р.* Системы резонаторов// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2000. — *64*, № 3. — С. 51–96.
26. *Гадыльшин Р. Р.* Осреднение и асимптотики в задаче о часто закрепленной мембране// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2001. — *41*, № 12. — С. 1857–1869.
27. *Гадыльшин Р. Р.* О модельном аналоге резонатора Гельмгольца в усреднении// Тр. МИАН. — 2002. — *236*. — С. 79–86.
28. *Гадыльшин Р. Р.* Об аналогах резонатора Гельмгольца в теории усреднения// Мат. сб. — 2002. — *193*, № 11. — С. 43–70.
29. *Гадыльшин Р. Р., Чечкин Г. А.* Краевая задача для Лапласиана с быстро меняющимся типом граничных условий в многомерной области// Сиб. мат. ж. — 1999. — *40*, № 2. — С. 271–287.
30. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963.

31. *Доронина Е. И., Чечкин Г. А.* Об усреднении решений эллиптического уравнения второго порядка с непериодическими быстро меняющимися граничными условиями// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2001. — № 1. — С. 14–19.
32. *Доронина Е. И., Чечкин Г. А.* О собственных колебаниях тела с большим количеством непериодически расположенных концентрированных масс// Тр. МИАН. — 2002. — *236*. — С. 158–166.
33. *Егер В., Олейник О. А., Шамаев А. С.* О задаче усреднения для уравнения Лапласа в частично перфорированной области// Докл. РАН. — 1993. — *333*, № 4. — С. 424–427.
34. *Жиков В. В.* Об усреднении нелинейных вариационных задач в перфорированных областях// Докл. РАН. — 1995. — *345*, № 2. — С. 156–160.
35. *Жиков В. В.* Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости// Мат. сб. — 2000. — *191*, № 7. — С. 31–72.
36. *Жиков В. В.* О спектральном методе в теории усреднения// Тр. МИАН. — 2005. — *250*. — С. 95–104.
37. *Жиков В. В.* Об операторных оценках в теории усреднения// Докл. РАН. — 2005. — *403*, № 3. — С. 305—308.
38. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Физматлит, 1993.
39. *Жиков В. В., Рычаго М. Е.* Усреднение нелинейных эллиптических уравнений второго порядка в перфорированных областях// Изв. РАН. Сер. Мат. — 1997. — *61*, № 1. — С. 70–88.
40. *Ильин А. М.* Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. I. Двумерный случай// Мат. сб. — 1976. — *99*, № 4. — С. 514–537.
41. *Ильин А. М.* Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. II. Область с малым отверстием// Мат. сб. — 1977. — *103(145)*, № 2. — С. 265–284.
42. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. — М.: Наука, 1989.
43. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
44. *Козлов С. М., Пятницкий А. Л.* Усреднение на фоне исчезающей вязкости// Мат. сб. — 1990. — *181*, № 6. — С. 813–832.
45. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. — М.: Мир, 1979.
46. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973.
47. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. — Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1981.
48. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач в областях с малыми отверстиями// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1984. — *48*, № 2. — С. 347–371.
49. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. — Киев: Наукова думка, 1974.
50. *Мельник Т. А., Назаров С. А.* Асимптотика решения спектральной задачи Неймана в области типа «густого гребня»// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1996. — *19*. — С. 138–174.
51. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
52. *Мовчан А. Б., Назаров С. А.* Влияние малых неровностей поверхности на напряженное состояние тела и энергетический баланс при росте трещины// Прикл. мат. мех. — 1991. — *55*, № 5. — С. 819–828.
53. *Найфе А. Х.* Методы возмущений. — М.: Мир, 1986.
54. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. — М.: Наука, 1991.
55. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — М.: Изд-во МГУ, 1990.
56. *Олейник О. А., Чечкин Г. А.* О краевых задачах для эллиптических уравнений с быстро меняющимся типом граничных условий// Усп. мат. наук. — 1993. — *48*, № 6(294). — С. 163–165.
57. *Олейник О. А., Чечкин Г. А.* Об одной задаче граничного усреднения для системы теории упругости// Усп. мат. наук. — 1994. — *49*, № 4. — С. 114.
58. *Олейник О. А., Шамаев А. С.* Об усреднении решений краевой задачи для уравнения Лапласа в частично перфорированной области с условиями Дирихле на границе полостей// Докл. РАН. — 1994. — *337*, № 2. — С. 168–171.
59. *Пастухова С. Е.* О характере распределения поля температур в перфорированном теле с заданным его значением на внешней границе в условиях теплообмена на границе полостей по закону Ньютона// Мат. сб. — 1996. — *187*, № 6. — С. 85–96.
60. *Перес М. Е., Чечкин Г. А., Яблокова Е. И.* О собственных колебаниях тела с «легкими» концентрированными массами на поверхности// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 6. — С. 195–196.

61. *Планида М. Ю.* О сходимости решений сингулярно возмущенных краевых задач для Лапласиана// Мат. заметки. — 2002. — *71*, № 6. — С. 867–877.
62. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. — М.: Мир, 1984.
63. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. — М.: Наука, 1990.
64. *Скрыпник И. В.* Асимптотика решений нелинейных эллиптических краевых задач в перфорированных областях// Мат. сб. — 1993. — *184*, № 10. — С. 67–90.
65. *Чечкин Г. А.* О краевых задачах для эллиптического уравнения второго порядка с осциллирующими граничными условиями// В сб.: «Неклассические дифференциальные уравнения в частных производных». — Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1988. — С. 95–104.
66. *Чечкин Г. А.* Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий// Мат. сб. — 1993. — *184*, № 6. — С. 99–150.
67. *Чечкин Г. А.* Полное асимптотическое разложение решения краевой задачи с быстро меняющимися граничными условиями в слое// Усп. мат. наук. — 1993. — *48*, № 4. — С. 218–219.
68. *Чечкин Г. А.* Асимптотическое разложение решения краевой задачи с быстро меняющимся типом граничных условий// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1996. — *19*. — С. 323–337.
69. *Шапошникова Т. А.* Усреднение краевой задачи для бигармонического уравнения в области, содержащей тонкие каналы малой длины// Мат. сб. — 2001. — *192*, № 10. — С. 131–160.
70. *Шарапов Т. Ф.* О резольвенте многомерных операторов с частой сменой краевых условий в случае усредненного условия Дирихле// Мат. сб. — 2014. — *205*, № 10. — С. 125–160.
71. *Шарапов Т. Ф.* О резольвенте многомерных операторов с частой сменой краевых условий: критический случай// Уфимск. мат. ж. — 2016. — *8*, № 2. — С. 66–96.
72. *Barenbaltt G. I., Bell J. B., Crutchfiled W. Y.* The thermal explosion revisited// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1998. — *95*, № 23. — С. 13384–13386.
73. *Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolau G.* Asymptotic analysis for periodic structures. — Amsterdam—New-York—Oxford: North Holland, 1978.
74. *Borisov D. I.* The asymptotics for the eigenelements of the Laplacian in a cylinder with frequently alternating boundary conditions// C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. IIb. — 2001. — *329*, № 10. — С. 717–721.
75. *Borisov D. I.* On a model boundary value problem for Laplacian with frequently alternating type of boundary condition// Asymptot. Anal. — 2003. — *35*, № 1. — С. 1–26.
76. *Borisov D., Bunoiu R., Cardone G.* On a waveguide with frequently alternating boundary conditions: homogenized Neumann condition// Ann. Henri Poincaré. — 2010. — *11*, № 8. — С. 1591–1627.
77. *Borisov D., Bunoiu R., Cardone G.* Homogenization and asymptotics for a waveguide with an infinite number of closely located small windows// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2011. — *176*, № 6. — С. 774–785.
78. *Borisov D., Bunoiu R., Cardone G.* Waveguide with non-periodically alternating Dirichlet and Robin conditions: homogenization and asymptotics// Z. Angew. Math. Phys. — 2013. — *64*, № 3. — С. 439–472.
79. *Borisov D., Cardone G.* Homogenization of the planar waveguide with frequently alternating boundary conditions// J. Phys. A: Math. Gen. — 2009. — *42*, № 36. — 365205.
80. *Borisov D., Cardone G., Durante T.* Homogenization and uniform resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 2016. — *146*, № 6. — С. 1115–1158.
81. *Borisov D., Cardone G., Faella L., Perugia C.* Uniform resolvent convergence for a strip with fast oscillating boundary// J. Differ. Equ. — 2013. — *255*, № 12. — С. 4378–4402.
82. *Brillard A., Lobo M., Pérez M. E.* Homogénéisation de frontières par épi-convergence en élasticité linéaire// Modél. Math. Anal. Numér. — 1990. — *24*, № 1. — С. 5–26.
83. *Chechkin G. A., Doronina E. I.* On asymptotics of spetrum of boundary value problem with nonperiodic rapidly alternating boundary conditions// Funct. Differ. Equ. — 2001. — *8*, № 1-2. — С. 111–122.
84. *Damlamian A.* Le problème de la passoire de Neumann// Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino. — 1985. — *43*. — С. 427–450.
85. *Damlamian A., Li T. (Li D.)* Boundary homogenization for ellpitic problems// J. Math. Pures Appl. — 1987. — *66*, № 4. — С. 351–361.
86. *Damlamian A., Li T. (Li D.)* Homogénéisation sur le bord pour les problèmes elliptiques// C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. — 1984. — *299*, № 17. — С. 859–862.
87. *Dávila J.* A nonlinear elliptic equation with rapidly oscillating boundary conditions// Asymptot. Anal. — 2001. — *28*, № 3-4. — С. 279–307.
88. *Filo J.* A note on asymptotic expansion for a periodic boundary condition// Arch. Math. (Brno). — 1998. — *34*, № 1. — С. 83–92.

89. *Filo J., Luckhaus S.* Asymptotic expansion for a periodic boundary condition// J. Differ. Equ. — 1995. — *120*, № 1. — С. 133–173.
90. *Filo J., Luckhaus S.* Homogenization of a boundary condition for the heat equation// J. Eur. Math. Soc. — 2000. — *2*, № 3. — С. 217–258.
91. *Friedman A., Huang Ch., Yong J.* Effective permeability of the boundary of a domain// Commun. Part. Differ. Equ. — 1995. — *20*, № 1-2. — С. 59–102.
92. *Gadyl'shin R. R.* Asymptotics of minimum eigenvalue for a circle with fast oscillating boundary conditions// C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. — 1996. — *323*, № 3. — С. 319–323.
93. *Gadyl'shin R. R.* On an analog of the Helmholtz resonator in the averaging theory// C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. — 1999. — *329*, № 12. — С. 1121–1126.
94. *Gadyl'shin R. R.* Eigenvalues and scattering frequencies for domain with narrow appendixes and tubes// C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. IIb. — 2001. — *329*, № 10. — С. 723–726.
95. *Griso G.* Error estimate and unfolding for periodic homogenization// Asymptot. Anal. — 2004. — *40*, № 3-4. — С. 269–286.
96. *Griso G.* Interior error estimate for periodic homogenization// Anal. Appl. — 2006. — *4*, № 1. — С. 61–79.
97. *Jäger W., Oleinik O. A., Shamaev A. S.* Asymptotics of solutions of the boundary value problem for the Laplace equation in a partially perforated domain with boundary conditions of the third kind on the boundaries of the cavities// Trans. Moscow Math. Soc. — 1997. — С. 163–196.
98. *Kratzer A., Franz W.* Transzendte funcktionen. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1960.
99. *Kenig C. E., Lin F., Shen Z.* Convergence rates in L_2 for elliptic homogenization problems// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2012. — *203*, № 3. — С. 1009–1036.
100. *Lobo M., Pérez M. E.* Asymptotic behaviour of an elastic body with a surface having small stuck regions// RAIRO Model. Math. Anal. Numer. — 1988. — *22*, № 4. — С. 609–624.
101. *Lobo M., Pérez M. E.* Boundary homogenization of certain elliptic problems for cylindrical bodies// Bull. Sci. Math. — 1992. — *116*, Ser. 2. — С. 399–426.
102. *Lobo M., Pérez M. E.* On vibrations of a body with many concentrated masses near the boundary// Math. Models Methods Appl. Sci. — 1993. — *3*, № 2. — С. 249–273.
103. *Lobo M., Pérez M. E.* Vibrations of a membrane with many concentrated masses near the boundary// Math. Models Methods Appl. Sci. — 1995. — *5*, № 5. — С. 565–585.
104. *Oleinik O. A., Chechkin G. A.* Solutions and eigenvalues of the boundary value problems with rapidly alternating boundary conditions for the system of elasticity// Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. — 1996. — *7*, № 1. — С. 5–15.
105. *Ovseevich A. I., Pyatnitskii A. I., Shamaev A. S.* Asymptotic behavior of solutions to a boundary value problem with small parameter// Russ. J. Math. Phys. — 1996. — *4*, № 4. — С. 487–498.
106. *Rybalko V.* Vibrations of elastic system with a large number of tiny heavy inclusions// Asymptot. Anal. — 2002. — *32*, № 1. — С. 27–62.
107. *Zhikov V. V., Pastukhova S. E.* On operator estimates for some problems in homogenization theory// Russ. J. Math. Phys. — 2005. — *12*, № 4. — С. 515–524.

Д. И. Борисов
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, 450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, д. 112;
Башкирский государственный университет, 450000, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32;
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, 450000, г. Уфа, ул. Октябрьской революции, д. 3а;
University of Hradec Králové, Czech Republic, 50003, Hradec Králové, Rokitanskeho, 62
E-mail: `borisovdi@yandex.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-1-14-129 UDC 517.956+517.955.8+517.984

Asymptotic Analysis of Boundary-Value Problems for the Laplace Operator with Frequently Alternating Type of Boundary Conditions

© 2021 **D. I. Borisov**

Abstract. This work, which can be considered as a small monograph, is devoted to the study of two- and three-dimensional boundary-value problems for eigenvalues of the Laplace operator with frequently alternating type of boundary conditions. The main goal is to construct asymptotic expansions of the eigenvalues and eigenfunctions of the considered problems. Asymptotic expansions are constructed on the basis of original combinations of asymptotic analysis methods: the method of matching asymptotic expansions, the boundary layer method and the multi-scale method. We perform the analysis of the coefficients of the formally constructed asymptotic series. For strictly periodic and locally periodic alternation of the boundary conditions, the described approach allows one to construct complete asymptotic expansions of the eigenvalues and eigenfunctions. In the case of nonperiodic alternation and the averaged third boundary condition, sufficiently weak conditions on the alternation structure are obtained, under which it is possible to construct the first corrections in the asymptotics for the eigenvalues and eigenfunctions. These conditions include in consideration a wide class of different cases of nonperiodic alternation. With further, very serious weakening of the conditions on the structure of alternation, it is possible to obtain two-sided estimates for the rate of convergence of the eigenvalues of the perturbed problem. It is shown that these estimates are unimprovable in order. For the corresponding eigenfunctions, we also obtain unimprovable in order estimates for the rate of convergence.

REFERENCES

1. V. M. Babich and N. Ya. Kirpichnikova, *Metod pogranichnogo sloya* [Boundary Layer Method], LGU, Leningrad, 1974 (in Russian).
2. N. C. Bakhvalov and G. P. Panasenko, *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh* [Averaging of Processes in Periodic Media], Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).
3. A. G. Belyaev and G. A. Chechkin, "Usrednenie smeshannoy kraevoy zadachi dlya operatora Laplasa v sluchae, kogda «predel'naya» zadacha nerazreshima" [Averaging of a mixed boundary-value problem for the Laplace operator in the case when the "limit" problem is unsolvable], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1995, **186**, No. 4, 47–60 (in Russian).
4. A. Yu. Belyaev and G. A. Chechkin, "Usrednenie operatorov s melkomasshtabnoy strukturoy" [Averaging of operators with small-scale structure], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1999, **65**, No. 4, 496–510 (in Russian).
5. M. Sh. Birman and T. A. Suslina, "Periodicheskie differentsial'nye operatory vtorogo poryadka. Porogovye svoystva i usredneniya" [Second-order periodic differential operators. Threshold properties and averagings], *Algebra i Analiz* [Algebra Anal.], 2003, **15**, No. 5, 1–108 (in Russian).
6. M. Sh. Birman and T. A. Suslina, "Porogovye approksimatsii rezol'venty faktorizovannogo samosopryazhennogo semeystva s uchetom korrektora" [Threshold approximations of the resolvent of a factorized self-adjoint family with allowance for a corrector], *Algebra i Analiz* [Algebra Anal.], 2005, **17**, No. 5, 69–90 (in Russian).
7. N. N. Bogolyubov and Yu. A. Mitropol'skiy, *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations], Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).
8. D. I. Borisov, "O dvuparametricheskoy asimptotike v odnoy kraevoy zadache dlya Laplasiana" [On two-parameter asymptotics in a boundary-value problem for the Laplacian], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2001, **70**, No. 4, 520–534 (in Russian).
9. D. I. Borisov, "Dvuparametricheskie asimptotiki sobstvennykh chisel Laplasiana s chastym cheredovaniem granichnykh usloviy" [Two-parameter asymptotics of the Laplacian eigenvalues with frequent alternation

of boundary conditions], *Vestn. Molod. Uchen. Ser. Prikl. Mat. Mekh.* [Bull. Young Sci. Ser. Appl. Math. Mech.], 2002, No. 1, 32–52 (in Russian).

10. D. I. Borisov, “O Laplasiane s chasto i neperiodicheski chereduyushchimisya granichnymi usloviyami” [On the Laplacian with frequently and non-periodically alternating boundary conditions], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2002, **383**, No. 4, 443–445 (in Russian).
11. D. I. Borisov, “O kraevoy zadache v tsilindre s chastoy smenoy tipa granichnykh usloviy” [On a boundary-value problem in a cylinder with frequently alternating type of boundary conditions], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 2002, **193**, No. 7, 37–68 (in Russian).
12. D. I. Borisov, “O singulyarno vozmushchennoy kraevoy zadache dlya Laplasiana v tsilindre” [On a singularly perturbed boundary-value problem for the Laplacian in a cylinder], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2002, **38**, No. 8, 1071–1078 (in Russian).
13. D. I. Borisov, “Asimptotiki i otsenki sobstvennykh elementov Laplaciana s chastoy neperiodicheskoy smenoy granichnykh usloviy” [Asymptotics and estimates of the Laplacian eigenelements with frequent non-periodic alternation of the boundary conditions], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 2003, **67**, No. 6, 23–70 (in Russian).
14. D. I. Borisov, “Asimptotiki i otsenki skorosti skhodimosti v trekhmernoy kraevoy zadache s chastoy smenoy granichnykh usloviy” [Asymptotics and estimates of the rate of convergence in a three-dimensional boundary value problem with frequent alternation of boundary conditions], *Sib. Mat. Zh.* [Siberian Math. J.], 2004, **45**, No. 2, 274–294 (in Russian).
15. D. I. Borisov, “O zadache s chastym neperiodicheskim cheredovaniem kraevykh usloviy na bystro ostsilliruyushchikh mnozhestvakh” [On a problem with frequent non-periodic alternation of boundary conditions on rapidly oscillating sets], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2006, **46**, No. 2, 284–294 (in Russian).
16. D. I. Borisov and R. R. Gadyl’shin, “O spektre Laplasiana s chasto menyayushchimsya tipom granichnykh usloviy” [On the Laplacian spectrum with frequently alternating type of boundary conditions], *Teor. Mat. Fiz.* [Theor. Math. Phys.], 1999, **118**, No. 3, 347–353 (in Russian).
17. D. I. Borisov and T. F. Sharapov, “O rezol’vente mnogomernykh operatorov s chastoy smenoy kraevykh usloviy v sluchae tret’ego usrednennogo usloviya” [On the resolvent of multidimensional operators with frequent alternation of boundary conditions in the case of the third averaged condition], *Probl. Mat. Analiza* [Probl. Math. Anal.], 2015, **83**, 3–40 (in Russian).
18. M. Van Dyke, *Metody vozmushcheniy v mekhanike zhidkosti* [Perturbation Methods in Fluid Mechanics], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
19. G. N. Watson, *Teoriya besselevykh funktsiy. Ch. 1* [A Treatise on the Theory of Bessel Functions. V. 1], IL, Moscow, 1949 (Russian translation).
20. M. I. Vishik and L. A. Lyusternik, “Regulyarnoe vyrozhdenie i pogranichnyy sloy dlya lineynykh differentsial’nykh uravneniy s malym parametrom” [Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with a small parameter], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1957, **12**, No. 5, 3–122 (in Russian).
21. R. R. Gadyl’shin, “Spektr ellipticheskikh kraevykh zadach pri singulyarnom vozmushchenii granichnykh usloviy” [The spectrum of elliptic boundary-value problems with a singular perturbation of the boundary conditions], In: *Asimptoticheskie svoystva resheniy differentsial’nykh uravneniy* [Asymptotic Properties of Solutions of Differential Equations], BNTs UrO AN SSSR, Ufa, 1988, pp. 3–15 (in Russian).
22. R. R. Gadyl’shin, “Ob asimptotike sobstvennykh znacheniy dlya periodicheski zakreplennoy membrany” [On the asymptotics of eigenvalues for a periodically fixed membrane], *Algebra i Analiz* [Algebra Anal.], 1998, **10**, No. 1, 3–19 (in Russian).
23. R. R. Gadyl’shin, “O kraevoy zadache dlya Laplasiana s bystro ostsilliruyushimi granichnymi usloviyami” [On a boundary-value problem for the Laplacian with rapidly oscillating boundary conditions], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1998, **362**, No. 4, 456–459 (in Russian).
24. R. R. Gadyl’shin, “Asimptotiki sobstvennykh znacheniy kraevoy zadachi s bystro ostsilliruyushchimi granichnymi usloviyami” [Asymptotics of the eigenvalues of a boundary-value problem with rapidly oscillating boundary conditions], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1999, **35**, No. 4, 540–551 (in Russian).
25. R. R. Gadyl’shin, “Sistemy rezonatorov” [Systems of resonators], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2000, **64**, No. 3, 51–96 (in Russian).
26. R. R. Gadyl’shin, “Osrednenie i asimptotiki v zadache o chasto zakreplennoy membrane” [Averaging and asymptotics in the problem of a densely fixed membrane], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2001, **41**, No. 12, 1857–1869 (in Russian).

27. R. R. Gadyl'shin, "O model'nom analoge rezonatora Gel'mgol'tsa v usrednenii" [On a model analogue of the Helmholtz resonator in averaging], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2002, **236**, 79–86 (in Russian).
28. R. R. Gadyl'shin, "Ob analogakh rezonatora Gel'mgol'tsa v teorii usredneniya" [On analogs of the Helmholtz resonator in averaging theory], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 2002, **193**, No. 11, 43–70 (in Russian).
29. R. R. Gadyl'shin and G. A. Chechkin, "Kraevaya zadacha dlya Laplasiana s bystro menyayushchimsya tipom granichnykh usloviy v mnogomernoy oblasti" [Boundary-value problem for the Laplacian with a rapidly alternating type of boundary conditions in a multidimensional domain], *Sib. Mat. Zh.* [Siberian Math. J.], 1999, **40**, No. 2, 271–287 (in Russian).
30. I. C. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of Integrals, Sums, Series, and Products], Fizmatgiz, Moscow, 1963 (in Russian).
31. E. I. Doronina and G. A. Chechkin, "Ob usrednenii resheniy ellipticheskogo uravneniya vtorogo poryadka s neperiodicheskimi bystro menyayushchimisya granichnymi usloviyami" [On averaging of solutions of a second-order elliptic equation with nonperiodic rapidly alternating boundary conditions], *Vestn. Mosk. Un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 2001, No. 1, 14–19 (in Russian).
32. E. I. Doronina and G. A. Chechkin, "O sobstvennykh kolebaniyakh tela s bol'shim kolichestvom neperiodicheski raspolozhennykh kontsentrirovannykh mass" [On eigen oscillations of a body with a large number of nonperiodically located concentrated masses], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2002, **236**, 158–166 (in Russian).
33. W. Jäger, O. A. Oleynik, and A. S. Shamaev, "O zadache usredneniya dlya uravneniya Laplasa v chastichno perforirovannoy oblasti" [On the averaging problem for the Laplace equation in a partially perforated domain], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1993, **333**, No. 4, 424–427 (in Russian).
34. V. V. Zhikov, "Ob usrednenii nelineynykh variatsionnykh zadach v perforirovannykh oblastyakh" [On averaging of nonlinear variational problems in perforated domains], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1995, **345**, No. 2, 156–160 (in Russian).
35. V. V. Zhikov, "Ob odnom rasshirenii i primenenii metoda dvukhmasshtabnoy skhodimosti" [On one extension and application of the two-scale convergence method], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 2000, **191**, No. 7, 31–72 (in Russian).
36. V. V. Zhikov, "O spektral'nom metode v teorii usredneniya" [On the spectral method in homogenization theory], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2005, **250**, 95–104 (in Russian).
37. V. V. Zhikov, "Ob operatornykh otsenkakh v teorii usredneniya" [On operator estimates in homogenization theory], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2005, **403**, No. 3, 305—308 (in Russian).
38. V. V. Zhikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleynik, *Usrednenie differentsial'nykh operatorov* [Homogenization of Differential Operators], Fizmatlit, Moscow, 1993 (in Russian).
39. V. V. Zhikov and M. E. Rychago, "Usrednenie nelineynykh ellipticheskikh uravneniy vtorogo poryadka v perforirovannykh oblastyakh" [Averaging of nonlinear second-order elliptic equations in perforated domains], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 1997, **61**, No. 1, 70–88 (in Russian).
40. A. M. Il'in, "Kraevaya zadacha dlya ellipticheskogo uravneniya vtorogo poryadka v oblasti s uzkoy shchel'yu. I. Dvumernyy sluchay" [Boundary-value problem for a second-order elliptic equation in a domain with a narrow slit. I. Two-dimensional case], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1976, **99**, No. 4, 514–537 (in Russian).
41. A. M. Il'in, "Kraevaya zadacha dlya ellipticheskogo uravneniya vtorogo poryadka v oblasti s uzkoy shchel'yu. II. Oblast' s malym otverstiem" [Boundary-value problem for a second-order elliptic equation in a domain with a narrow slit. II. Domain with a small hole], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1977, **103(145)**, No. 2, 265–284 (in Russian).
42. A. M. Il'in, *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozheniy resheniy kraevykh zadach* [Reconciliation of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary-Value Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
43. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
44. S. M. Kozlov and A. L. Pyatnitskiy, "Usrednenie na fone ischezayushchey vyazkosti" [Averaging under vanishing viscosity], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1990, **181**, No. 6, 813–832 (in Russian).
45. J. Cole, *Metody vozmushcheniy v prikladnoy matematike* [Perturbation Methods in Applied Mathematics], Mir, Moscow, 1979 (Russian translation).
46. O. A. Ladyzhenskaya and N. N. Ural'tseva, *Lineynye i kvazilineynye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
47. V. G. Maz'ya, S. A. Nazarov, and B. A. Plamenevskiy, *Asimptotika resheniy ellipticheskikh kraevykh zadach pri singulyarnykh vozmushcheniyakh oblasti* [Asymptotics of Solutions of Elliptic Boundary-Value Problems under Singular Perturbations of the Domain], Tbilisi Univ., Tbilisi, 1981 (in Russian).

48. V. G. Maz'ya, S. A. Nazarov, and B. A. Plamenevskiy, "Asimptoticheskie razlozheniya sobstvennykh chisel kraevykh zadach v oblastyakh s malymi otverstiyami" [Asymptotic expansions of eigenvalues of boundary-value problems in domains with small holes], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1984, **48**, No. 2, 347–371 (in Russian).
49. V. A. Marchenko and E. Ya. Khruslov, *Kraevye zadachi v oblastyakh s melkozernistoy granitsey* [Boundary-Value Problems in Domains with a Fine-Grained Boundary], Naukova Dumka, Kiev, 1974 (in Russian).
50. T. A. Mel'nik and S. A. Nazarov, "Asimptotika resheniya spektral'noy zadachi Neymana v oblasti tipa «gustogo grebnya»" [Asymptotic behavior of the solution to the Neumann spectral problem in a domain of the "dense ridge" type], *Tr. Sem. Im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 1996, **19**, 138–174 (in Russian).
51. V. P. Mikhaylov, *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial Differential Equations], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
52. A. B. Movchan and S. A. Nazarov, "Vliyanie malykh nerovnostey poverkhnosti na napryazhennoe sostoyanie tela i energeticheskiy balans pri roste treshchiny" [Influence of small surface irregularities on the stress state of the body and the energy balance during crack growth], *Prikl. Mat. Mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1991, **55**, No. 5, 819–828 (in Russian).
53. A. H. Nayfeh, *Metody vozmushcheniy* [Perturbation Methods], Mir, Moscow, 1986 (in Russian).
54. S. A. Nazarov and B. A. Plamenevskiy, *Ellipticheskie zadachi v oblastyakh s kusochno-gladkoy granitsey* [Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundary], Nauka, Moscow, 1991 (in Russian).
55. O. A. Oleynik, G. A. Iosif'yan, and A. S. Shamaev, *Matematicheskie zadachi teorii sil'no neodnorodnykh uprugikh sred* [Mathematical Problems in the Theory of Strongly Inhomogeneous Elastic Media], MGU, Moscow, 1990 (in Russian).
56. O. A. Oleynik and G. A. Chechkin, "O kraevykh zadachakh dlya ellipticheskikh uravneniy s bystro menyayushchimsya tipom granichnykh usloviy" [Boundary-value problems for elliptic equations with rapidly alternating type of boundary conditions], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1993, **48**, No. 6(294), 163–165 (in Russian).
57. O. A. Oleynik and G. A. Chechkin, "Ob odnoy zadache granichnogo usredneniya dlya sistemy teorii uprugosti" [On one problem of boundary averaging for a system of elasticity theory], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1994, **49**, No. 4, 114 (in Russian).
58. O. A. Oleynik and A. S. Shamaev, "Ob usrednenii resheniy kraevoy zadachi dlya uravneniya Laplasa v chastichno perforirovannoy oblasti s usloviyami Dirikhle na granitse polostey" [On averaging of solutions of a boundary-value problem for the Laplace equation in a partially perforated domain with Dirichlet conditions on the boundary of cavities], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1994, **337**, No. 2, 168–171 (in Russian).
59. S. E. Pastukhova, "O kharaktere raspredeleniya polya temperatur v perforirovannom tele s zadannym ego znacheniem na vneshney granitse v usloviyakh teploobmena na granitse polostey po zakonu N'yutona" [On the nature of the distribution of the temperature field in a perforated body with its given value at the outer boundary under conditions of heat transfer at the boundary of the cavities according to Newton's law], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1996, **187**, No. 6, 85–96 (in Russian).
60. M. E. Peres, G. A. Chechkin, and E. I. Yablokova, "O cobstvennykh kolebaniyakh tela s «legkimi» kontsentrirovannymi massami na poverkhnosti" [On eigne vibrations of the body with "light" concentrated masses on the surface], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 2002, **57**, No. 6, 195–196 (in Russian).
61. M. Yu. Planida, "O skhodimosti resheniy singulyarno vozmushchennykh kraevykh zadach dlya Laplasiana" [On convergence of solutions of singularly perturbed boundary-value problems for the Laplacian], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2002, **71**, No. 6, 867–877 (in Russian).
62. E. Sanchez-Palencia, *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy* [Non-Homogeneous Media and Vibration Theory], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
63. I. V. Skrypnik, *Metody issledovaniya nelineynykh ellipticheskikh granichnykh zadach* [Research Methods for Nonlinear Elliptic Boundary-Value Problems], Nauka, Moscow, 1990 (in Russian).
64. I. V. Skrypnik, "Asimptotika resheniy nelineynykh ellipticheskikh kraevykh zadach v perforirovannykh oblastyakh" [Asymptotics of solutions of nonlinear elliptic boundary-value problems in perforated domains], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1993, **184**, No. 10, 67–90 (in Russian).
65. G. A. Chechkin, "O kraevykh zadachakh dlya ellipticheskogo uravneniya vtorogo poryadka s ostsilliruyushchimi granichnymi usloviyami" [On boundary-value problems for a second-order elliptic equation with oscillating boundary conditions], In: *Neklassicheskie differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Nonclassical Partial Differential Equations], IM SOAN SSSR, Novosibirsk, 1988, pp. 95–104 (in Russian).

66. G. A. Chechkin, “Usrednenie kraevykh zadach s singulyarnym vozmushcheniem granichnykh usloviy” [Averaging of boundary-value problems with singular perturbation of boundary conditions], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1993, **184**, No. 6, 99–150 (in Russian).
67. G. A. Chechkin, “Polnoe asimptoticheskoe razlozhenie resheniya kraevoy zadachi s bystro menyayushchimisya granichnymi usloviyami v sloe” [Complete asymptotic expansion of a solution to a boundary value problem with rapidly changing boundary conditions in a layer], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1993, **48**, No. 4, 218–219 (in Russian).
68. G. A. Chechkin, “Asimptoticheskoe razlozhenie resheniya kraevoy zadachi s bystro menyayushchimsya tipom granichnykh usloviy” [Asymptotic expansion of the solution to a boundary-value problem with a rapidly alternating type of boundary conditions], *Tr. Sem. Im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 1996, **19**, 323–337 (in Russian).
69. T. A. Shaposhnikova, “Usrednenie kraevoy zadachi dlya bigarmonicheskogo uravneniya v oblasti, soderzhashchey tonkie kanaly maloy dliny” [Averaging of a boundary-value problem for a biharmonic equation in a domain containing thin channels of small length], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 2001, **192**, No. 10, 131–160 (in Russian).
70. T. F. Sharapov, “O rezol’vente mnogomernykh operatorov s chastoy smenoy kraevykh usloviy v sluchae usrednennogo usloviya Dirikhle” [On the resolvent of multidimensional operators with frequent alternation of boundary conditions in the case of the averaged Dirichlet condition], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 2014, **205**, No. 10, 125–160 (in Russian).
71. T. F. Sharapov, “O rezol’vente mnogomernykh operatorov s chastoy smenoy kraevykh usloviy: kriticheskiy sluchay” [On the resolvent of multidimensional operators with frequent alternation of boundary conditions: critical case], *Ufimsk. Mat. Zh.* [Ufa. Math. J.], 2016, **8**, No. 2, 66–96 (in Russian).
72. G. I. Barenbaltt, J. B. Bell, and W. Y. Crutchfiled, “The thermal explosion revisited,” *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1998, **95**, No. 23, 13384–13386.
73. A. Bensoussan, J. L. Lions, and G. Papanicolau, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North Holland, Amsterdam—New-York—Oxford, 1978.
74. D. I. Borisov, “The asymptotics for the eigenelements of the Laplacian in a cylinder with frequently alternating boundary conditions,” *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. IIb*, 2001, **329**, No. 10, 717–721.
75. D. I. Borisov, “On a model boundary value problem for Laplacian with frequently alternating type of boundary condition,” *Asymptot. Anal.*, 2003, **35**, No. 1, 1–26.
76. D. Borisov, R. Bunoiu, and G. Cardone, “On a waveguide with frequently alternating boundary conditions: homogenized Neumann condition,” *Ann. Henri Poincaré*, 2010, **11**, No. 8, 1591–1627.
77. D. Borisov, R. Bunoiu, and G. Cardone, “Homogenization and asymptotics for a waveguide with an infinite number of closely located small windows,” *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2011, **176**, No. 6, 774–785.
78. D. Borisov, R. Bunoiu, and G. Cardone, “Waveguide with non-periodically alternating Dirichlet and Robin conditions: homogenization and asymptotics,” *Z. Angew. Math. Phys.*, 2013, **64**, No. 3, 439–472.
79. D. Borisov and G. Cardone, “Homogenization of the planar waveguide with frequently alternating boundary conditions,” *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2009, **42**, No. 36, 365205.
80. D. Borisov, G. Cardone, and T. Durante, “Homogenization and uniform resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve,” *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 2016, **146**, No. 6, 1115–1158.
81. D. Borisov, G. Cardone, L. Faella, and C. Perugia, “Uniform resolvent convergence for a strip with fast oscillating boundary,” *J. Differ. Equ.*, 2013, **255**, No. 12, 4378–4402.
82. A. Brillard, M. Lobo, and M. E. Pérez, “Homogénéisation de frontières par épi-convergence en élasticité linéaire,” *Modél. Math. Anal. Numér.*, 1990, **24**, No. 1, 5–26.
83. G. A. Chechkin and E. I. Doronina, “On asymptotics of spetrum of boundary value problem with nonperiodic rapidly alternating boundary conditions,” *Funct. Differ. Equ.*, 2001, **8**, No. 1-2, 111–122.
84. A. Damlamian, “Le problème de la passoire de Neumann,” *Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino*, 1985, **43**, 427–450.
85. A. Damlamian and T. Li (D. Li), “Boundary homogenization for ellpitic problems,” *J. Math. Pures Appl.*, 1987, **66**, No. 4, 351–361.
86. A. Damlamian and T. Li (D. Li), “Homogénéisation sur le bord pour les problèmes elliptiques,” *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math.*, 1984, **299**, No. 17, 859–862.
87. J. Dávila, “A nonlinear elliptic equation with rapidly oscillating boundary conditions,” *Asymptot. Anal.*, 2001, **28**, No. 3-4, 279–307.
88. J. Filo, “A note on asymptotic expansion for a periodic boundary condition,” *Arch. Math. (Brno)*, 1998, **34**, No. 1, 83–92.

89. J. Filo and S. Luckhaus, “Asymptotic expansion for a periodic boundary condition,” *J. Differ. Equ.*, 1995, **120**, No. 1, 133–173.
90. J. Filo and S. Luckhaus, “Homogenization of a boundary condition for the heat equation,” *J. Eur. Math. Soc.*, 2000, **2**, No. 3, 217–258.
91. A. Friedman, Ch. Huang, and J. Yong, “Effective permeability of the boundary of a domain,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 1995, **20**, No. 1-2, 59–102.
92. R. R. Gadyl’shin, “Asymptotics of minimum eigenvalue for a circle with fast oscillating boundary conditions,” *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math.*, 1996, **323**, No. 3, 319–323.
93. R. R. Gadyl’shin, “On an analog of the Helmholtz resonator in the averaging theory,” *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math.*, 1999, **329**, No. 12, 1121–1126.
94. R. R. Gadyl’shin, “Eigenvalues and scattering frequencies for domain with narrow appendixes and tubes,” *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. IIb*, 2001, **329**, No. 10, 723–726.
95. G. Griso, “Error estimate and unfolding for periodic homogenization,” *Asymptot. Anal.*, 2004, **40**, No. 3-4, 269–286.
96. G. Griso, “Interior error estimate for periodic homogenization,” *Anal. Appl.*, 2006, **4**, No. 1, 61–79.
97. W. Jäger, O. A. Oleinik, and A. S. Shamaev, “Asymptotics of solutions of the boundary value problem for the Laplace equation in a partially perforated domain with boundary conditions of the third kind on the boundaries of the cavities,” *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1997, **1997**, 163–196.
98. A. Kratzer and W. Franz, *Transzendte Funcktionen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1960.
99. C. E. Kenig, F. Lin, and Z. Shen, “Convergence rates in L_2 for elliptic homogenization problems,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2012, **203**, No. 3, 1009–1036.
100. M. Lobo and M. E. Pérez, “Asymptotic behaviour of an elastic body with a surface having small stuck regions,” *RAIRO Model. Math. Anal. Numer.*, 1988, **22**, No. 4, 609–624.
101. M. Lobo and M. E. Pérez, “Boundary homogenization of certain elliptic problems for cylindrical bodies,” *Bull. Sci. Math.*, 1992, **116**, Ser. 2, 399–426.
102. M. Lobo and M. E. Pérez, “On vibrations of a body with many concentrated masses near the boundary,” *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 1993, **3**, No. 2, 249–273.
103. M. Lobo and M. E. Pérez, “Vibrations of a membrane with many concentrated masses near the boundary,” *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 1995, **5**, No. 5, 565–585.
104. O. A. Oleinik and G. A. Chechkin, “Solutions and eigenvalues of the boundary value problems with rapidly alternating boundary conditions for the system of elasticity,” *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, 1996, **7**, No. 1, 5–15.
105. A. I. Ovseevich, A. I. Pyatnitskii, and A. S. Shamaev, “Asymptotic behavior of solutions to a boundary value problem with small parameter,” *Russ. J. Math. Phys.*, 1996, **4**, No. 4, 487–498.
106. V. Rybalko, “Vibrations of elastic system with a large number of tiny heavy inclusions,” *Asymptot. Anal.*, 2002, **32**, No. 1, 27–62.
107. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, “On operator estimates for some problems in homogenization theory,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2005, **12**, No. 4, 515–524.

D. I. Borisov
Institute of Mathematics with Computer Center of the Ufa Science Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia;
Bashkir State University, Ufa, Russia;
Bashkir State Pedagogical University named after M. Akmullah, Ufa, Russia;
University of Hradec Králové, Hradec Králové, Czech Republic
E-mail: `borisovdi@yandex.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 1 (2021). С. 130–191

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-1-130-191 УДК 517.955

УСРЕДНЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2021 г. **А. А. МИЛОСЛОВА, Т. А. СУСЛИНА**

Аннотация. В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассматривается широкий класс матричных эллиптических операторов $\mathcal{A}_\varepsilon$ порядка $2p$ (где $p \geqslant 2$) с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами (зависящими от $\mathbf{x}/\varepsilon$). Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Изучается поведение операторной экспоненты $e^{-\mathcal{A}_\varepsilon\tau}$ при $\tau > 0$ и малом ε. Показано, что при $\varepsilon \to 0$ оператор $e^{-\mathcal{A}_\varepsilon\tau}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к экспоненте $e^{-\mathcal{A}^0\tau}$ от эффективного оператора $\mathcal{A}^0$. Получена также аппроксимация операторной экспоненты $e^{-\mathcal{A}_\varepsilon\tau}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Установлены оценки погрешностей найденных приближений, зависящие от двух параметров: ε и τ. При фиксированном $\tau > 0$ погрешности имеют точный порядок $O(\varepsilon)$. Результаты применяются к вопросу о поведении решения задачи Коши для параболического уравнения $\partial_\tau \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = -(\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},\tau)+\mathbf{F}(\mathbf{x},\tau)$ в $\mathbb{R}^d$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект 17-11-01069.

1. Введение

Работа относится к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Эта теория изучает поведение решений дифференциальных уравнений с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами и является широкой областью теоретической и прикладной науки. Обширная литература посвящена задачам усреднения; в первую очередь, укажем монографии [1, 9, 16, 22].

1.1. Операторные оценки погрешности для эллиптических и параболических задач усреднения в $\mathbb{R}^d$. В серии работ М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [2–5] был предложен и развит *теоретико-операторный подход* к задачам теории усреднения. С помощью этого подхода изучался широкий класс матричных самосопряженных ДО второго порядка, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и допускающих факторизацию вида

$$A = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \mathbf{D} = -i\nabla, \quad \operatorname{ord} b(\mathbf{D}) = 1. \tag{1.1}$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — ограниченная и равномерно положительно определенная матрица-функция размера $m\times m$, периодическая относительно некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$. Через Ω обозначим элементарную ячейку решетки Γ. Далее, $b(\mathbf{D})$ — $(m\times n)$-матричный однородный ДО первого порядка. Предполагается, что $m \geqslant n$, и что символ $b(\boldsymbol{\xi})$ имеет ранг n при всех $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. При сделанных предположениях оператор A сильно эллиптичен. Простейший пример оператора вида (1.1) — скалярный эллиптический оператор $A = -\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla$ (оператор акустики); оператор теории упругости также допускает запись в виде (1.1). Эти и другие примеры подробно рассмотрены в [2, 4, 5].

Пусть $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Для всякой Γ-периодической функции $\varphi(\mathbf{x})$ используем обозначение $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varphi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$. Рассмотрим оператор $A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$, коэффициенты которого быстро осциллируют при $\varepsilon \to 0$.

В [2] было показано, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к резольвенте *эффективного оператора* $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$. Здесь g^0 — постоянная положительная матрица, называемая *эффективной матрицей*. Была получена оценка

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{1.2}$$

В [3, 4] была найдена более точная аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ с погрешностью порядка $O(\varepsilon^2)$. В [5] была получена аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, с оценкой погрешности

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{1.3}$$

Здесь $K(\varepsilon)$ — так называемый *корректор*; этот оператор содержит быстро осциллирующий множитель, а потому зависит от ε, при этом $\|K(\varepsilon)\|_{L_2\to H^1} = O(\varepsilon^{-1})$.

Теоретико-операторный подход применялся и к параболическим задачам теории усреднения. В работах [20, 25] было показано, что при фиксированном $\tau > 0$ и $\varepsilon \to 0$ операторная экспонента $e^{-A_\varepsilon \tau}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к экспоненте от эффективного оператора A^0. При этом выполняется оценка

$$\|e^{-A_\varepsilon\tau} - e^{-A^0\tau}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}} + \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0,\ \tau \geqslant 0. \tag{1.4}$$

Более точная аппроксимация экспоненты $e^{-A_\varepsilon\tau}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ с погрешностью порядка $O(\varepsilon^2)$ была найдена в работе [6]. В [26] была получена аппроксимация операторной экспоненты $e^{-A_\varepsilon\tau}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, с оценкой погрешности

$$\|e^{-A_\varepsilon\tau} - e^{-A^0\tau} - \varepsilon K(\varepsilon,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2}} + \varepsilon)}, \quad \varepsilon > 0,\ \tau > 0. \tag{1.5}$$

Здесь $K(\varepsilon,\tau)$ — соответствующий корректор.

Оценки (1.2)–(1.5) точны по порядку параметра ε; постоянные контролируются явно в терминах данных задачи. Подобные результаты получили название *операторных оценок погрешности* в теории усреднения. Метод исследования в работах [2–6, 20, 25, 26] основан на масштабном преобразовании, разложении оператора A в прямой интеграл (на основе теории Флоке—Блоха) и аналитической теории возмущений. При этом было выяснено, что резольвенту и экспоненту для оператора A_ε можно аппроксимировать в терминах пороговых характеристик оператора A на краю спектра. В этом смысле процедура гомогенизации является проявлением *спектрального порогового эффекта*.

Упомянем также работу [21], в которой получены аналоги оценок (1.2), (1.3) для резольвенты $(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ в произвольной регулярной точке $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ с двухпараметрическими оценками погрешности (в зависимости от ε и ζ).

Другой подход к получению операторных оценок погрешности (так называемый *модифицированный метод первого приближения* или *метод сдвига*) был предложен В. В. Жиковым [8] и развит им совместно с С. Е. Пастуховой [28, 29]. В упомянутых работах операторные оценки погрешности были получены для операторов акустики и упругости. По поводу дальнейших результатов см. обзор [10].

Отдельный интерес представляет задача усреднения для периодических эллиптических ДО высокого четного порядка. В работах Н. А. Вениаминова [7] и А. А. Кукушкина и Т. А. Суслиной [12] теоретико-операторный подход был развит применительно к таким операторам. В [7] изучался оператор вида $\mathcal{B}_\varepsilon = (\mathbf{D}^p)^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}^p$, где $g(\mathbf{x})$ — симметричный равномерно положительно определенный тензор порядка $2p$, периодический относительно решетки Γ. При $p = 2$ такой оператор возникает в теории упругих пластин (см. [9]). В [7] был получен аналог оценки (1.2):

$$\|(\mathcal{B}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{B}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

В работе [12] изучался более общий класс ДО высокого порядка — аналог операторов вида (1.1):

$$\widehat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \operatorname{ord} b(\mathbf{D}) = p \geqslant 2,$$

где $g(\mathbf{x})$ — ограниченная и равномерно положительно определенная матрица-функция размера $m \times m$, периодическая относительно решетки Γ, а $b(\mathbf{D})$ — $(m \times n)$-матричный однородный ДО порядка p. Считаем $p \geqslant 2$. Предполагается, что $m \geqslant n$ и что символ $b(\boldsymbol{\xi})$ имеет ранг n при всех $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. При сделанных предположениях оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ сильно эллиптичен. Пусть $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$. В [12] изучалось поведение резольвенты $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ в произвольной регулярной точке $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Было показано, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ к резольвенте *эффективного оператора* $\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$. Была получена оценка погрешности

$$\|(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_1(\zeta)\varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

а также найдена аппроксимация резольвенты по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, с оценкой погрешности

$$\|(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p \mathcal{K}(\varepsilon, \zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_2(\zeta)\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

При этом отслежена зависимость величин $C_1(\zeta)$, $C_2(\zeta)$ от параметра ζ, так что найденные оценки являются двухпараметрическими.

Упомянем также недавние работы [17–19], в которых с помощью теоретико-операторного подхода найдена более точная аппроксимация резольвенты $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ с погрешностью порядка $O(\varepsilon^{2p})$.

Метод сдвига применялся к эллиптическим операторам высокого порядка в работах С. Е. Пастуховой [13–15, 24].

1.2. Постановка задачи. Основные результаты. В предлагаемой работе мы продолжаем изучение задач усреднения для описанных выше операторов $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ порядка $2p$ в $\mathbb{R}^d$. Также мы изучаем более общие операторы вида

$$\mathcal{A}_\varepsilon = (f^\varepsilon)^* \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon f^\varepsilon = (f^\varepsilon)^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon, \tag{1.6}$$

где $f(\mathbf{x})$ — периодическая матрица-функция размера $n \times n$ такая, что $f, f^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Наша цель — получить аппроксимацию операторной экспоненты $e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}$ при фиксированном $\tau > 0$ и малом ε в различных операторных нормах.

Наш *первый основной результат*: показано, что при фиксированном $\tau > 0$ и $\varepsilon \to 0$ оператор $e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к оператору $e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau}$. Установлена оценка погрешности вида

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \ \tau \geqslant 0. \tag{1.7}$$

Это неравенство является обобщением оценки (1.4) на случай операторов высокого порядка. Выяснилось, что для более общих операторов вида (1.6) аналогичный результат справедлив для «окаймленной» операторной экспоненты $f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^*$:

$$\left\| f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \ \tau \geqslant 0.$$

Здесь f_0 — некоторая постоянная матрица (см. (9.1)) и $\mathcal{A}^0 = f_0 \widehat{\mathcal{A}}^0 f_0$.

Далее, выделено условие на оператор, при котором эти результаты допускают усиление: при этом условии вместо (1.7) выполнена оценка

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C\varepsilon^2}{\tau^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0, \ \tau \geqslant 0.$$

Упомянутое условие формулируется в терминах спектральных характеристик оператора на краю спектра; оно автоматически выполняется для скалярного оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ (т. е. $n = 1$) с вещественными коэффициентами. Тем самым, обнаружен новый эффект, характерный для операторов высокого порядка: в «скалярном вещественном» случае возможна аппроксимация экспоненты от оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ через экспоненту от эффективного оператора с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ без учета каких-либо корректоров. Такого эффекта нет для операторов второго порядка. Отметим, что аналогичный эффект для операторов высокого порядка наблюдается и при аппроксимации резольвенты или экспоненты вида $e^{-i\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau}$; см. [14, 17, 18, 27].

Аналогичное усиление имеет место и для оператора $f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^*$.

Второй основной результат: найдена аппроксимация экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau}$ в «энергетической» норме. Установлены оценки

$$\left\| \mathbf{D}^p \left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} - \varepsilon^p \widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau) \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)}, \quad \varepsilon > 0, \ \tau > 0,$$

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} - \varepsilon^p \widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C(1+\tau^{-\frac{1}{2}})\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \ \tau > 0,$$

а также найдено приближение оператора $g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau}$ (отвечающего «потоку») по $(L_2 \to L_2)$-норме. Здесь $\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau)$ — соответствующий корректор. Он содержит быстро осциллирующий множитель, а потому зависит от ε; при этом $\|\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau)\|_{L_2\to H^p} = O(\varepsilon^{-p})$. Аналогичные результаты получены и для окаймленной экспоненты $f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^*$.

Результаты, сформулированные в операторных терминах, применяются затем к вопросу о поведении решения задачи Коши для параболического уравнения. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$ — решение задачи

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \ \tau > 0, \\ &\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Справедливо представление

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) = e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau}\boldsymbol{\phi} + \int\limits_0^\tau e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon(\tau-\widetilde{\tau})}\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\, d\widetilde{\tau}.$$

На основе этого представления из результатов об аппроксимации операторной экспоненты мы извлекаем результаты об аппроксимациях решения $\mathbf{u}_\varepsilon$. Выясняется, что при фиксированном $\tau > 0$

решение сходится по норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к решению $\mathbf{u}_0$ усредненной задачи

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ \tau>0,\\ &\mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

Получена оценка погрешности, а также аппроксимация решения по норме в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

Рассмотрена также более общая задача Коши (см. ниже (15.31)); результаты для нее можно извлечь из результатов о поведении оператора $f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon\tau}(f^\varepsilon)^*$.

1.3. Метод. Мы опираемся на теоретико-операторный подход. Поясним метод на примере вывода оценки (1.7). За счет масштабного преобразования выполнено тождество

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon\tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}\varepsilon^{-2p}\tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\varepsilon^{-2p}\tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Поэтому оценка (1.7) равносильна неравенству

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau\geqslant 0.$$

Далее применяем теорию Флоке—Блоха. С помощью унитарного преобразования Гельфанда оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ с периодическими коэффициентами раскладывается в прямой интеграл по операторам $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$, действующим в пространстве $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ и зависящим от параметра $\mathbf{k}$ (*квазиимпульса*). Оператор $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ задается дифференциальным выражением $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ при периодических граничных условиях. Семейство $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ представляет собой аналитическое операторное семейство с дискретным спектром. Мы полагаем $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}$, где $t = |\mathbf{k}|$ и $\boldsymbol{\theta} = \dfrac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$, и изучаем семейство $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) =: A(t,\boldsymbol{\theta})$ методами аналитической теории возмущений относительно одномерного параметра t. Роль невозмущенного оператора играет $\widehat{\mathcal{A}}(0)$. Точка $\lambda_0 = 0$ является изолированным собственным значением оператора $\widehat{\mathcal{A}}(0)$ кратности n; соответствующее собственное подпространство $\mathfrak{N}$ состоит из постоянных вектор-функций в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Тогда при $t\leqslant t^0$ на интервале $[0,\delta]$ оператор $A(t,\boldsymbol{\theta})$ имеет ровно n собственных значений (с учетом кратностей), а интервал $(\delta,3\delta)$ свободен от спектра. Числа δ и t^0 контролируются явно. Выясняется, что только выделенная часть спектра существенна для нашей задачи. В силу аналитической теории возмущений существуют вещественно аналитические (по t) ветви собственных значений $\lambda_l(t,\boldsymbol{\theta})$ и ветви собственных элементов $\varphi_l(t,\boldsymbol{\theta})$ оператора $A(t,\boldsymbol{\theta})$, $l=1,\dots,n$. При этом набор $\{\varphi_l(t,\boldsymbol{\theta})\}$, $l=1,\dots,n$, образует ортонормированный базис в собственном подпространстве оператора $A(t,\boldsymbol{\theta})$, отвечающем отрезку $[0,\delta]$. Рассматриваются степенные разложения для этих аналитических ветвей:

$$\begin{aligned}&\lambda_l(t,\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})t^{2p} + \mu_l(\boldsymbol{\theta})t^{2p+1} + \dots, \quad \gamma_l(\boldsymbol{\theta})>0, \quad l=1,\dots,n,\\ &\varphi_l(t,\boldsymbol{\theta}) = \omega_l(\boldsymbol{\theta}) + t\varphi_l^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) + \dots, \quad l=1,\dots,n.\end{aligned}$$

Набор $\{\omega_l(\boldsymbol{\theta})\}, l=1,\dots,n$, образует ортонормированный базис в подпространстве $\mathfrak{N}$. Коэффициенты этих степенных разложений называют *пороговыми характеристиками* операторного семейства $A(t,\boldsymbol{\theta})$ на краю спектра. В их терминах определяется так называемый *спектральный росток* $S(\boldsymbol{\theta})$. Это самосопряженный оператор в n-мерном пространстве $\mathfrak{N}$ такой, что

$$S(\boldsymbol{\theta})\omega_l(\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})\omega_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l=1,\dots,n.$$

Основной технический результат — это аппроксимация экспоненты $e^{-A(t,\boldsymbol{\theta})\tau}$ в терминах спектрального ростка:

$$\left\| e^{-A(t,\boldsymbol{\theta})\tau} - e^{-t^{2p}S(\boldsymbol{\theta})\tau}P \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{C}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau>0, \quad t\leqslant t^0.$$

Здесь P — ортопроектор пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на $\mathfrak{N}$. Росток удается вычислить: справедливо представление

$$S(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta}),$$

где g^0 — эффективная матрица. Выясняется, что эффективный оператор имеет тот же самый спектральный росток, а это дает возможность перейти к аппроксимации экспоненты $e^{-A(t,\boldsymbol\theta)\tau}$ через $e^{-A^0(t,\boldsymbol\theta)\tau}$. В итоге приходим к искомой оценке (1.7).

Изучение семейства $A(t,\boldsymbol\theta)$, представляющего собой полиномиальный операторный пучок, удобно вести в рамках абстрактной теоретико-операторной схемы, предложенной в работах [7, 12]. В рамках абстрактной схемы в некотором гильбертовом пространстве изучается полиномиальный пучок операторов вида $A(t) = X(t)^*X(t)$, где $X(t) = \sum\limits_{j=0}^{p} t^j X_j$. Пучок $A(t)$ моделирует семейство $\widehat{\mathcal A}(\mathbf k) = A(t,\boldsymbol\theta)$, но параметр $\boldsymbol\theta$ в абстрактной постановке отсутствует. В главе 1 мы развиваем далее абстрактную схему и получаем нужные аппроксимации операторной экспоненты $e^{-A(t)\tau}$.

1.4. План статьи.

Работа состоит из трех глав. В главе 1 (разделы 2–4) содержится нужный абстрактный теоретико-операторный материал. Здесь получены основные результаты на абстрактном уровне. Глава 2 (разделы 5–11) посвящена изучению периодических ДО, действующих в $L_2(\mathbb R^d;\mathbb C^n)$. В разделе 5 введен класс операторов $\mathcal A$, описаны решетки и преобразование Гельфанда. Раздел 6 посвящен разложению оператора $\mathcal A$ в прямой интеграл по операторам $\mathcal A(\mathbf k)$. В разделе 7 описаны эффективные характеристики оператора $\widehat{\mathcal A}$ (случай $f = \mathbf 1$), введен эффективный оператор. В разделе 8 с помощью абстрактных результатов найдена аппроксимация экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal A}(\mathbf k)\tau}$. В разделе 9 рассмотрено более общее семейство $\mathcal A(\mathbf k)$ и найдено приближение окаймленной экспоненты $fe^{-\mathcal A(\mathbf k)\tau}f^*$. В разделе 10 с помощью разложения в прямой интеграл из результатов раздела 8 выводится аппроксимация экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal A}\tau}$. Аналогичным образом в разделе 11 мы выводим приближение для окаймленной экспоненты $fe^{-\mathcal A\tau}f^*$ из результатов раздела 9. В главе 3 (разделы 12–15) рассматриваются задачи усреднения. В коротком разделе 12 описаны операторы $\mathcal A_\varepsilon$ и $\widehat{\mathcal A}_\varepsilon$, а также оператор масштабного преобразования. Разделы 13 и 14 посвящены выводу основных результатов о приближении экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal A}_\varepsilon\tau}$ и окаймленной экспоненты $f^\varepsilon e^{-\mathcal A_\varepsilon\tau}(f^\varepsilon)^*$. Наконец, в разделе 15 мы применяем полученные результаты к усреднению решений задачи Коши. Приложение (раздел 16) посвящено обсуждению другого способа получения результатов об усреднении операторной экспоненты.

1.5. Обозначения.

Пусть $\mathfrak H$, $\mathfrak H_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak H}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak H}$ означают скалярное произведение и норму в $\mathfrak H$ соответственно; символ $\|\cdot\|_{\mathfrak H\to\mathfrak H_*}$ означает норму линейного непрерывного оператора из $\mathfrak H$ в $\mathfrak H_*$. Иногда мы опускаем индексы. Через $I = I_{\mathfrak H}$ обозначается тождественный оператор в $\mathfrak H$. Если $X : \mathfrak H \to \mathfrak H_*$ — линейный оператор, то через $\operatorname{Dom} X$ обозначается его область определения, а через $\operatorname{Ker} X$ его ядро. Если $\mathfrak N$ — подпространство в $\mathfrak H$, то символ $\mathfrak N^\perp$ означает его ортогональное дополнение. Если P — ортопроектор пространства $\mathfrak H$ на $\mathfrak N$, то $P^\perp = I - P$ — ортопроектор на $\mathfrak N^\perp$.

Скалярное произведение и норма в $\mathbb C^n$ обозначаются через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ соответственно; $\mathbf 1 = \mathbf 1_n$ — единичная матрица размера $n\times n$. Если a — матрица размера $m\times n$, то $|a|$ означает норму матрицы a как оператора из $\mathbb C^n$ в $\mathbb C^m$.

Классы L_q вектор-функций в области $\mathcal O \subset \mathbb R^d$ со значениями в $\mathbb C^n$ обозначаются через $L_q(\mathcal O;\mathbb C^n)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Классы Соболева $\mathbb C^n$-значных функций порядка s в области $\mathcal O$ обозначаются через $H^s(\mathcal O;\mathbb C^n)$, $s\in\mathbb R$. В случае $n = 1$ пишем просто $L_q(\mathcal O)$, $H^s(\mathcal O)$, но иногда мы применяем такие упрощенные обозначения и для пространств векторнозначных или матричнозначных функций.

Используем обозначения $\mathbf x = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb R^d$, $D_j = -i\partial_j = -i\partial/\partial x_j$, $j = 1,\dots,n$; $\mathbf D = -i\nabla = (D_1,\dots,D_d)$. Если $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d) \in \mathbb Z_+^d$ — мультииндекс и $\mathbf k = (k_1,\dots,k_d) \in \mathbb R^d$, то $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d$, $\mathbf k^\alpha := k_1^{\alpha_1}\cdots k_d^{\alpha_d}$, $\mathbf D^\alpha := D_1^{\alpha_1}\cdots D_d^{\alpha_d}$. Для двух мультииндексов α,β запись $\beta\leqslant\alpha$ означает, что $\beta_j \leqslant \alpha_j$, $j = 1,\dots,d$; для числа сочетаний из α по β используем стандартное обозначение $C_\alpha^\beta = C_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots C_{\alpha_d}^{\beta_d}$.

Используем обозначение $\mathbb R_+ = [0,\infty)$. Символами $C, \mathcal C, \mathfrak C, c, \mathfrak c$ обозначаются различные постоянные в оценках.

ГЛАВА 1

АБСТРАКТНАЯ ТЕОРЕТИКО-ОПЕРАТОРНАЯ СХЕМА

2. АБСТРАКТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ

В данном разделе кратко описаны результаты абстрактной схемы, заимствованные из [7,12,19].

2.1. Полиномиальные пучки вида $A(t) = X(t)^*X(t)$**.** Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Рассматривается семейство самосопряженных операторов

$$A(t) = X(t)^*X(t) : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

где $X(t) : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ — полиномиальный операторный пучок вида

$$X(t) = \sum_{j=0}^{p} t^j X_j, \quad t \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{N},\ p \geqslant 2.$$

Случай, когда $p = 1$, подробно изучен в [2, 3, 5]. Об операторах $X_j : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$, $j = 0, \dots, p$, предполагаем следующее. Считаем, что X_0 *плотно определен и замкнут*, X_p — *ограничен*, а области определения операторов $X_0, \dots, X_p$ удовлетворяют дополнительному условию.

Условие 2.1. *Выполнены соотношения*

$$\operatorname{Dom} X(t) = \operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} X_j \subset \operatorname{Dom} X_p = \mathfrak{H}, \quad j = 1, \dots, p-1,\ t \in \mathbb{R}.$$

Кроме того, предполагается, что операторы X_j при $j = 1, \dots, p-1$ подчинены оператору X_0.

Условие 2.2. *Для* $j = 0, \dots, p-1$ *и для любого* $u \in \operatorname{Dom} X_0$ *выполнено неравенство*

$$\|X_j u\|_{\mathfrak{H}_*} \leqslant C_0 \|X_0 u\|_{\mathfrak{H}_*}, \tag{2.2}$$

где C_0 — *некоторая константа* (*очевидно,* $C_0 \geqslant 1$).

Из сделанных предположений следует, что оператор $X(t)$ *замкнут* на области $\operatorname{Dom} X(t) = \operatorname{Dom} X_0$, если $|t| \leqslant (2(p-1)C_0)^{-1}$. Условие 2.2 также влечет следующее соотношение для ядер операторов X_j:

$$\operatorname{Ker} X_0 \subset \operatorname{Ker} X_j, \quad j = 1, \dots, p-1.$$

Оператор (2.1) порождается замкнутой в $\mathfrak{H}$ неотрицательной квадратичной формой

$$a(t)[u,u] = \|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0.$$

Введем следующие обозначения: $A(0) = X_0^* X_0 =: A_0$;

$$\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} A_0 = \operatorname{Ker} X_0; \quad \mathfrak{N}_* := \operatorname{Ker} X_0^*.$$

Через P и P_* обозначим ортопроекторы пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$ и пространства $\mathfrak{H}_*$ на $\mathfrak{N}_*$ соответственно. Наложим следующее условие.

Условие 2.3. $\lambda_0 = 0$ — *изолированная точка спектра оператора* A_0, *причем*

$$n := \dim \mathfrak{N} < \infty; \quad n \leqslant n_* := \dim \mathfrak{N}_* \leqslant \infty.$$

Через $F(t,\sigma)$ обозначим спектральный проектор оператора $A(t)$ для отрезка $[0,\sigma]$ и положим $\mathfrak{F}(t,\sigma) := F(t,\sigma)\mathfrak{H}$. Зафиксируем число $\delta > 0$ такое, что

$$\delta \leqslant \min\left\{\frac{d^0}{36}, \frac{1}{4}\right\}, \tag{2.3}$$

где d^0 — расстояние от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора A_0. Далее, выберем положительное число t^0, удовлетворяющее условию

$$t^0 \leqslant \sqrt{\delta}(C^\circ)^{-1}, \quad \text{где} \quad C^\circ = \max\{(p-1)C_0, \|X_p\|\}, \tag{2.4}$$

а C_0 — постоянная из условия 2.2. Отметим, что $t^0 \leqslant 1/2$. Оператор $X(t)$ автоматически замкнут при $|t| \leqslant t^0$, поскольку $t^0 \leqslant (2(p-1)C_0)^{-1}$. В работе [7, предложение 3.10] выяснено, что

$$F(t,\delta) = F(t,3\delta), \quad \operatorname{rank} F(t,\delta) = n, \quad |t| \leqslant t^0. \tag{2.5}$$

Это означает, что при $|t| \leqslant t^0$ оператор $A(t)$ на промежутке $[0, \delta]$ имеет ровно n собственных значений (с учетом кратностей), а промежуток $(\delta, 3\delta)$ свободен от спектра. Для краткости обозначим

$$F(t) := F(t, \delta); \quad \mathfrak{F}(t) := \mathfrak{F}(t, \delta).$$

2.2. Операторы Z, R и S. Положим $\mathcal{D} = \operatorname{Dom} X_0 \cap \mathfrak{N}^\perp$. Заметим, что множество $\mathcal{D}$ со скалярным произведением

$$(f_1, f_2)_{\mathcal{D}} = (X_0 f_1, X_0 f_2)_{\mathfrak{H}_*}, \quad f_1, f_2 \in \mathcal{D},$$

образует гильбертово пространство.

Пусть $v \in \mathfrak{H}_*$. Рассмотрим уравнение $X_0^*(X_0\psi - v) = 0$ для элемента $\psi \in \mathcal{D}$, понимаемое в слабом смысле:

$$(X_0\psi, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = (v, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*}, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}. \tag{2.6}$$

Правая часть в (2.6) является антилинейным непрерывным функционалом над $\zeta \in \mathcal{D}$. Следовательно, в силу теоремы Рисса существует единственное решение $\psi \in \mathcal{D}$, причем $\|X_0\psi\|_{\mathfrak{H}_*} \leqslant \|v\|_{\mathfrak{H}_*}$. Теперь, пусть $\omega \in \mathfrak{N}$ и $v = -X_p\omega$. В этом случае решение уравнения (2.6) обозначим через $\psi(\omega)$. Определим ограниченный оператор $Z : \mathfrak{H} \to \mathcal{D}$ соотношением

$$Zu = \psi(Pu), \quad u \in \mathfrak{H}. \tag{2.7}$$

Отметим равенства $PZ = 0$ и $Z^*P = 0$, вытекающие из определения оператора Z. В [12, (1.11)] проверена оценка

$$\|Z\|_{\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}} \leqslant \frac{\|X_p\|}{6\sqrt{\delta}}. \tag{2.8}$$

Далее, определим ограниченный оператор $R : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}_*$ равенством

$$R\omega = X_0\psi(\omega) + X_p\omega, \quad \omega \in \mathfrak{N}. \tag{2.9}$$

Другое представление оператора R дается формулой $R = P_* X_p|_{\mathfrak{N}}$. Самосопряженный оператор $S = R^*R : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ называется *спектральным ростком* операторного семейства $A(t)$ при $t = 0$. Иначе говоря,

$$S = PX_p^* P_* X_p|_{\mathfrak{N}}.$$

Ясно, что

$$\|S\| \leqslant \|X_p\|^2. \tag{2.10}$$

Говорят, что росток S *невырожден*, если $\operatorname{Ker} S = \{0\}$.

2.3. Аналитические ветви собственных значений и собственных элементов. Согласно общей аналитической теории возмущений (см. [11]) при $|t| \leqslant t^0$ существуют вещественно аналитические функции $\lambda_j(t)$ (ветви собственных значений) и вещественно аналитические $\mathfrak{H}$-значные функции $\varphi_j(t)$ (ветви собственных векторов) такие, что

$$A(t)\varphi_j(t) = \lambda_j(t)\varphi_j(t), \quad j = 1, \ldots, n, \quad |t| \leqslant t^0,$$

причем набор $\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^n$ образует ортонормированный базис в $\mathfrak{F}(t)$. Если $t_* \leqslant t^0$ достаточно мало, то при $|t| \leqslant t_*$ имеют место сходящиеся степенные разложения (см. [7, теорема 3.15])

$$\lambda_j(t) = \gamma_j t^{2p} + \mu_j t^{2p+1} + \ldots, \quad \gamma_j \geqslant 0, \ \mu_j \in \mathbb{R}, \ j = 1, \ldots, n, \tag{2.11}$$

$$\varphi_j(t) = \omega_j + \varphi_j^{(1)} t + \varphi_j^{(2)} t^2 + \ldots, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.12}$$

При этом набор $\{\omega_j\}_{j=1}^n$ образует ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$. Числа γ_j и векторы ω_j являются собственными для спектрального ростка S, т. е.

$$S\omega_j = \gamma_j\omega_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.13}$$

Это позволяет нам записать следующие представления для операторов P, SP, $F(t)$ и $A(t)F(t)$:

$$P = \sum_{j=1}^{n} (\cdot, \omega_j)\omega_j, \tag{2.14}$$

$$SP = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j (\cdot, \omega_j)\omega_j, \tag{2.15}$$

$$F(t) = \sum_{j=1}^{n} (\cdot, \varphi_j(t))\varphi_j(t), \quad |t| \leqslant t^0, \tag{2.16}$$

$$A(t)F(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t)(\cdot, \varphi_j(t))\varphi_j(t), \quad |t| \leqslant t^0. \tag{2.17}$$

Сопоставляя (2.11), (2.12), (2.14)–(2.17), получаем, что при $|t| \leqslant t_*$ справедливы степенные разложения

$$F(t) = P + tF_1 + \ldots,$$
$$A(t)F(t) = t^{2p}SP + t^{2p+1}G + \ldots;$$

подробнее см. [19, п. 1.3].

2.4. Пороговые аппроксимации. В [7, п. 4.2] (см. также [12, п. 2.2] и [19, § 3]) были найдены аппроксимации операторов $F(t)$ и $A(t)F(t)$ при $|t| \leqslant t^0$ в терминах операторов S и P (так называемые *пороговые аппроксимации*). Приведем их здесь в виде теоремы. Всюду ниже через $c(p)$ обозначаются различные постоянные, зависящие только от p.

Теорема 2.1. *Пусть* $A(t)$ *— операторное семейство, введенное в пункте* 2.1. *Пусть* $\delta > 0$ *— фиксированное число, подчиненное* (2.3). *Пусть* $F(t) = F(t, \delta)$ *— спектральный проектор оператора* $A(t)$ *для интервала* $[0, \delta]$, *а* P *— ортопроектор пространства* $\mathfrak{H}$ *на подпространство* $\mathfrak{N} = \operatorname{Ker} A(0)$. *Пусть* $S : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ *— спектральный росток семейства* $A(t)$ *при* $t = 0$. *Тогда справедливы оценки*

$$\|F(t) - P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_1|t|, \quad |t| \leqslant t^0, \tag{2.18}$$

$$\|A(t)F(t) - t^{2p}SP\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_2|t|^{2p+1}, \quad |t| \leqslant t^0, \tag{2.19}$$

где число t^0 *подчинено условию* (2.4). *Постоянные* C_1, C_2 *определены выражениями* $C_1 = c(p)C_T$, $C_2 = c(p)C_T^{2p+1}$, *где*

$$C_T := p\,C_0^2 + \|X_p\|^2\delta^{-1}, \tag{2.20}$$

а C_0 *— константа из* (2.2).

Нам понадобятся также более точные аппроксимации операторов $F(t)$ и $A(t)F(t)$, полученные в [19, теорема 3.2].

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Положим*

$$F_p := ZP + PZ^*, \tag{2.21}$$

$$G := (RP)^*X_1Z + (X_1Z)^*RP, \tag{2.22}$$

где операторы Z *и* R *определены в пункте* 2.2. *В терминах разложений* (2.11) *и* (2.12) *оператор* G *имеет вид*

$$G = \sum_{j=1}^{n} \mu_j (\cdot, \omega_j)_{\mathfrak{H}}\omega_j + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \left((\cdot, \varphi_j^{(1)})_{\mathfrak{H}}\omega_j + (\cdot, \omega_j)_{\mathfrak{H}}\varphi_j^{(1)} \right).$$

Справедливы оценки

$$\|F(t) - P\| \leqslant C_3|t|^p, \quad |t| \leqslant t^0, \tag{2.23}$$

$$\|A(t)F(t) - t^{2p}SP - t^{2p+1}G\| \leqslant C_4 t^{2p+2}, \quad |t| \leqslant t^0. \tag{2.24}$$

Справедливы представление

$$F(t) = P + t^pF_p + F_*(t) \tag{2.25}$$

и оценка

$$\|F_*(t)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_5|t|^{p+1}, \quad |t| \leqslant t^0.$$

Постоянные C_3, C_4, C_5 *имеют вид*

$$C_3 = c(p)C_T^p, \quad C_4 = c(p)C_T^{2p+2}, \quad C_5 = c(p)C_T^{p+1},$$

где C_T *определено в* (2.20).

Нам также потребуется оценка

$$\|A(t)F(t)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant t^{2p}\|S\| + C_2|t|^{2p+1} \leqslant C_6 t^{2p}, \quad |t| \leqslant t^0,$$

где $C_6 = \|X_p\|^2 + C_2$. Она прямо следует из (2.10), (2.19) с учетом того, что $t^0 \leqslant 1$. Таким образом, при $|t| \leqslant t^0$ собственные значения $\lambda_j(t)$ оператора $A(t)$ удовлетворяют неравенствам $\lambda_j(t) \leqslant C_6 t^{2p}$, $j = 1, \dots, n$. Следовательно,

$$\|A(t)^{1/2}F(t)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \sqrt{C_6}|t|^p, \quad |t| \leqslant t^0. \tag{2.26}$$

Кроме того, справедлива следующая оценка (см. [12, (3.52)] и доказательство в [19, теорема 3.2])

$$\|A(t)^{1/2}F_*(t)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_7|t|^{p+1}, \quad |t| \leqslant t^0; \quad C_7 = c(p)C_T^{p+1}. \tag{2.27}$$

3. АППРОКСИМАЦИЯ ОПЕРАТОРНОЙ ЭКСПОНЕНТЫ $e^{-A(t)\tau}$

3.1. Старший член аппроксимации. Наша цель в этом разделе — получить аппроксимацию оператора $e^{-A(t)\tau}$ при больших значениях $\tau \geqslant 0$ в терминах спектрального ростка S. По сравнению с предположениями раздела 2 нам понадобится дополнительное условие.

Условие 3.1. *Найдется такая постоянная* $c_* > 0$, *что при* $|t| \leqslant t^0$ *справедливо неравенство*

$$A(t) \geqslant c_* t^{2p} I. \tag{3.1}$$

Условие 3.1 равносильно тому, что собственные значения $\lambda_j(t)$ оператора $A(t)$ удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_j(t) \geqslant c_* t^{2p}, \quad j = 1, \dots, n, \quad |t| \leqslant t^0. \tag{3.2}$$

В силу (2.11) из (3.2) вытекает, что $\gamma_j \geqslant c_*$. С учетом (2.13) отсюда следует, что

$$S \geqslant c_* I_{\mathfrak{N}}. \tag{3.3}$$

Это обеспечивает невырожденность спектрального ростка. Дальнейшие рассмотрения проводятся в предположении, что $|t| \leqslant t^0$. Очевидно,

$$e^{-A(t)\tau} = e^{-A(t)\tau}F(t) + e^{-A(t)\tau}F(t)^\perp. \tag{3.4}$$

В силу (2.5) оператор $F(t)^\perp$ — это спектральный проектор оператора $A(t)$ для интервала $[3\delta, +\infty)$, а потому

$$\|e^{-A(t)\tau}F(t)^\perp\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant e^{-3\delta\tau}, \ \tau \geqslant 0. \tag{3.5}$$

Очевидно,

$$e^{-A(t)\tau}F(t) = Pe^{-A(t)\tau}F(t) + P^\perp e^{-A(t)\tau}F(t). \tag{3.6}$$

Поскольку $P^\perp F(t) = (F(t) - P)F(t)$, то с учетом (3.1) получаем

$$\|P^\perp e^{-A(t)\tau}F(t)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} = \|(F(t) - P)e^{-A(t)\tau}F(t)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant e^{-c_* t^{2p}\tau}\|F(t) - P\|. \tag{3.7}$$

Положим

$$\Sigma(t,\tau) := Pe^{-A(t)\tau}F(t) - e^{-t^{2p}S\tau}P, \tag{3.8}$$

$$\mathcal{E}(t,\tau) := e^{t^{2p}S\tau}\Sigma(t,\tau) = e^{t^{2p}S\tau}Pe^{-A(t)\tau}F(t) - P. \tag{3.9}$$

Дифференцируя (3.9) по τ, получаем

$$\mathcal{E}'(t,\tau) := \frac{d\mathcal{E}(t,\tau)}{d\tau} = e^{t^{2p}S\tau}P(t^{2p}SP - A(t)F(t))e^{-A(t)\tau}F(t).$$

Следовательно,

$$\mathcal{E}(t,\tau)=\mathcal{E}(t,0)+\int\limits_0^\tau \mathcal{E}'(t,\widetilde{\tau})\,d\widetilde{\tau}=$$

$$=PF(t)-P-\int\limits_0^\tau e^{t^{2p}S\widetilde{\tau}}P(A(t)F(t)-t^{2p}SP)e^{-A(t)\widetilde{\tau}}F(t)\,d\widetilde{\tau}.$$

Тогда

$$\Sigma(t,\tau)=e^{-t^{2p}S\tau}\mathcal{E}(t,\tau)=$$

$$=e^{-t^{2p}S\tau}P(F(t)-P)-\int\limits_0^\tau e^{-t^{2p}S(\tau-\widetilde{\tau})}P(A(t)F(t)-t^{2p}SP)e^{-A(t)\widetilde{\tau}}F(t)\,d\widetilde{\tau}.$$

Отсюда, используя (3.1) и (3.3), получаем

$$\|\Sigma(t,\tau)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\leqslant e^{-c_*t^{2p}\tau}\left(\|F(t)-P\|+\tau\|A(t)F(t)-t^{2p}SP\|\right). \tag{3.10}$$

Объединяя (3.6)–(3.8) и (3.10), приходим к неравенству

$$\|e^{-A(t)\tau}F(t)-e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\leqslant e^{-c_*t^{2p}\tau}\left(2\|F(t)-P\|+\tau\|A(t)F(t)-t^{2p}SP\|\right). \tag{3.11}$$

Вместе с (2.18) и (2.19) это дает

$$\|e^{-A(t)\tau}F(t)-e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\leqslant\left(2C_1|t|+C_2|t|^{2p+1}\tau\right)e^{-c_*t^{2p}\tau}. \tag{3.12}$$

Положим $\alpha=|t|^p\sqrt{c_*\tau}$. Тогда оценка (3.12) принимает вид

$$\|e^{-A(t)\tau}F(t)-e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\leqslant\tau^{-\frac{1}{2p}}\Phi_1(\alpha),\quad \tau>0,$$

где

$$\Phi_1(\alpha):=\left(2C_1c_*^{-\frac{1}{2p}}\alpha^{\frac{1}{p}}+C_2c_*^{-1-\frac{1}{2p}}\alpha^{2+\frac{1}{p}}\right)e^{-\alpha^2}.$$

Оценивая максимум функции $\Phi_1(\alpha)$, $\alpha\geqslant 0$, приходим к неравенству

$$\|e^{-A(t)\tau}F(t)-e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\leqslant C_8^\circ\tau^{-\frac{1}{2p}},\quad \tau>0, \tag{3.13}$$

где

$$C_8^\circ=2C_1c_*^{-\frac{1}{2p}}+C_2c_*^{-1-\frac{1}{2p}}. \tag{3.14}$$

Легко проверить, что $e^{-3\delta\tau}\leqslant(3\delta\tau)^{-\frac{1}{2p}}$. Отсюда, учитывая (3.4), (3.5) и (3.13), получаем

$$\|e^{-A(t)\tau}-e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\leqslant C_8^\circ\tau^{-\frac{1}{2p}}+e^{-3\delta\tau}\leqslant\left(C_8^\circ+(3\delta)^{-\frac{1}{2p}}\right)\tau^{-\frac{1}{2p}},\quad \tau>0. \tag{3.15}$$

Мы используем (3.15) при $\tau\geqslant 1$, а при $0<\tau<1$ оцениваем левую часть (3.15) через 2. Объединяя эти оценки и полагая

$$C_8:=2\max\left\{2,C_8^\circ+(3\delta)^{-\frac{1}{2p}}\right\}, \tag{3.16}$$

приходим к следующему результату.

Теорема 3.1. *Пусть $A(t)$ — операторное семейство, введенное в пункте* 2.1. *Пусть выполнено условие* 3.1. *Пусть P — ортопроектор пространства $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathfrak{N}=\operatorname{Ker}A(0)$, а $S:\mathfrak{N}\to\mathfrak{N}$ — спектральный росток семейства $A(t)$ при $t=0$. Тогда справедлива оценка*

$$\|e^{-A(t)\tau}-e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\leqslant\frac{C_8}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1},\quad \tau\geqslant 0,\quad |t|\leqslant t^0. \tag{3.17}$$

Число t^0 подчинено условию (2.4). *Постоянная C_8 определена согласно* (3.14), (3.16) *и зависит лишь от p, δ, постоянной C_0 из* (2.2), *$\|X_p\|$ и c_*.*

В случае, когда $G=0$, результат может быть усилен.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Пусть* G — *оператор* (2.22). *Предположим, что* $G = 0$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|e^{-A(t)\tau} - e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \frac{C_9}{\tau^{\frac{1}{p}} + 1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad |t| \leqslant t^0. \tag{3.18}$$

Постоянная C_9 *определена ниже согласно* (3.20), (3.22) *и зависит лишь от* p, δ, *постоянной* C_0 *из* (2.2), $\|X_p\|$ *и* c_*.

Доказательство. Используя неравенство (3.11), оценки (2.23), (2.24) и условие $G = 0$, получаем

$$\|e^{-A(t)\tau}F(t) - e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \left(2C_3|t|^p + C_4t^{2p+2}\tau\right)e^{-c_*t^{2p}\tau} \leqslant \left(2C_3t^2 + C_4t^{2p+2}\tau\right)e^{-c_*t^{2p}\tau}.$$

В последнем переходе мы учли, что $|t|^p \leqslant t^2$ при $|t| \leqslant t^0$, поскольку $p \geqslant 2$ и $t^0 \leqslant 1$.

Полагая снова $\alpha = |t|^p\sqrt{c_*\tau}$, запишем получившееся неравенство в виде

$$\|e^{-A(t)\tau}F(t) - e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \tau^{-\frac{1}{p}}\Phi_2(\alpha), \quad \tau > 0,$$

где

$$\Phi_2(\alpha) := \left(2C_3c_*^{-\frac{1}{p}}\alpha^{\frac{2}{p}} + C_4c_*^{-1-\frac{1}{p}}\alpha^{2+\frac{2}{p}}\right)e^{-\alpha^2}.$$

Оценивая максимум функции $\Phi_2(\alpha)$, $\alpha \geqslant 0$, приходим к неравенству

$$\|e^{-A(t)\tau}F(t) - e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_9^\circ\tau^{-\frac{1}{p}}, \quad \tau > 0, \tag{3.19}$$

где

$$C_9^\circ = 2C_3c_*^{-\frac{1}{p}} + C_4c_*^{-1-\frac{1}{p}}. \tag{3.20}$$

Используя (3.4), (3.5) и (3.19) и учитывая неравенство $e^{-3\delta\tau} \leqslant (3\delta\tau)^{-\frac{1}{p}}$, получаем

$$\|e^{-A(t)\tau} - e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_9^\circ\tau^{-\frac{1}{p}} + e^{-3\delta\tau} \leqslant \left(C_9^\circ + (3\delta)^{-\frac{1}{p}}\right)\tau^{-\frac{1}{p}}, \quad \tau > 0. \tag{3.21}$$

Мы применяем (3.21) при $\tau \geqslant 1$, а при $0 < \tau < 1$ оцениваем левую часть (3.21) через 2. Полагая

$$C_9 := 2\max\left\{2, C_9^\circ + (3\delta)^{-\frac{1}{p}}\right\}, \tag{3.22}$$

приходим к оценке (3.18). ☐

3.2. Аппроксимация операторной экспоненты в «энергетической» норме.

В этом пункте мы получим другую аппроксимацию оператора $e^{-A(t)\tau}$ (в «энергетической» норме). А именно, мы изучаем оператор $A(t)^{1/2}e^{-A(t)\tau}$. Наша цель — доказать следующую теорему.

Теорема 3.3. *Пусть* $A(t)$ — *операторное семейство* (2.1), *причем выполнены условия пункта* 2.1, *а также условие* 3.1. *Пусть* P — *ортопроектор пространства* $\mathfrak{H}$ *на подпространство* $\mathfrak{N} = \operatorname{Ker} A(0)$, Z — *оператор* (2.7), *а* S — *спектральный росток семейства* $A(t)$ *при* $t = 0$. *Тогда при* $\tau > 0$ *и* $|t| \leqslant t^0$ *справедлива оценка*

$$\|A(t)^{1/2}\left(e^{-A(t)\tau} - (I + t^pZ)e^{-t^{2p}S\tau}P\right)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_{10}\tau^{-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}. \tag{3.23}$$

Число t^0 *подчинено условию* (2.4). *Постоянная* C_{10} *определена ниже согласно* (3.30), (3.37), (3.38) *и зависит лишь от* p, δ, *постоянной* C_0 *из* (2.2), $\|X_p\|$ *и* c_*.

Доказательство. Положим

$$\mathfrak{A}(t,\tau) := A(t)^{1/2}e^{-A(t)\tau}, \tag{3.24}$$

и представим этот оператор в виде

$$\mathfrak{A}(t,\tau) = \mathfrak{A}(t,\tau)F(t)^\perp + \mathfrak{A}(t,\tau)F(t)(F(t) - P) + F(t)\mathfrak{A}(t,\tau)P. \tag{3.25}$$

В силу спектральной теоремы с учетом (2.5) и элементарного неравенства $x^{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2}}e^{-x} \leqslant 1$ при $x \geqslant 0$ имеем

$$\|\mathfrak{A}(t,\tau)F(t)^\perp\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \sup_{\lambda\geqslant 3\delta}\lambda^{\frac{1}{2}}e^{-\lambda\tau} \leqslant (3\delta)^{-\frac{1}{2p}}\tau^{-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}, \quad \tau > 0, \ |t| \leqslant t^0. \tag{3.26}$$

Далее, в силу (3.2) при $\tau > 0$ и $0 < |t| \leqslant t^0$ выполнено

$$\|\mathfrak{A}(t,\tau)F(t)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \sup_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\lambda_j(t)^{\frac{1}{2}}e^{-\lambda_j(t)\tau}\right) \leqslant \tau^{-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}\sup_{1\leqslant j\leqslant n}\lambda_j(t)^{-\frac{1}{2p}} \leqslant c_*^{-\frac{1}{2p}}|t|^{-1}\tau^{-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}.$$

Вместе с (2.18) это влечет

$$\|\mathfrak{A}(t,\tau)F(t)(F(t)-P)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_1 c_*^{-\frac{1}{2p}}\tau^{-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}, \quad \tau > 0,\ |t| \leqslant t^0. \tag{3.27}$$

Последний член в правой части (3.25) можно представить в виде

$$F(t)\mathfrak{A}(t,\tau)P = A(t)^{1/2}F(t)(e^{-A(t)\tau}F(t) - e^{-t^{2p}S\tau}P)P + A(t)^{1/2}F(t)e^{-t^{2p}S\tau}P. \tag{3.28}$$

Из (2.26) и (3.12) следует, что при $\tau > 0$ и $|t| \leqslant t^0$

$$\begin{aligned}&\|A(t)^{1/2}F(t)(e^{-A(t)\tau}F(t) - e^{-t^{2p}S\tau}P)P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \\ &\leqslant \sqrt{C_6}|t|^p\left(2C_1|t| + C_2|t|^{2p+1}\tau\right)e^{-c_*t^{2p}\tau} = \tau^{-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}\Phi_3(\alpha),\end{aligned}$$

где $\alpha = |t|^p\sqrt{c_*\tau}$ и

$$\Phi_3(\alpha) := \sqrt{C_6}\left(2C_1 c_*^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\alpha^{1+\frac{1}{p}} + C_2 c_*^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2p}}\alpha^{3+\frac{1}{p}}\right)e^{-\alpha^2}.$$

Оценивая максимум функции $\Phi_3(\alpha)$, $\alpha \geqslant 0$, приходим к оценке

$$\|A(t)^{1/2}F(t)(e^{-A(t)\tau}F(t) - e^{-t^{2p}S\tau}P)P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C'_{10}\tau^{-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}, \tag{3.29}$$

где

$$C'_{10} = \sqrt{C_6}\left(2C_1 c_*^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} + C_2 c_*^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2p}}\right). \tag{3.30}$$

Из (3.24)–(3.29) при $\tau > 0$ и $|t| \leqslant t^0$ получаем

$$\begin{aligned}&\|A(t)^{1/2}\left(e^{-A(t)\tau} - (I + t^pZ)e^{-t^{2p}S\tau}P\right)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \\ &\leqslant \tau^{-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}\left((3\delta)^{-\frac{1}{2p}} + C_1c_*^{-\frac{1}{2p}} + C'_{10}\right) + \|A(t)^{1/2}(F(t) - P - t^pZ)e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}.\end{aligned} \tag{3.31}$$

Обозначим

$$\Xi(t,\tau) = e^{-t^{2p}S\tau}P. \tag{3.32}$$

Осталось оценить норму оператора

$$\mathcal{I}(t,\tau) := A(t)^{1/2}(F(t) - P - t^pZ)\Xi(t,\tau). \tag{3.33}$$

В силу (2.21), (2.25) и тождества $Z^*P = 0$ имеем $(F(t) - P - t^pZ)P = F_*(t)P$, а потому

$$\mathcal{I}(t,\tau) = A(t)^{1/2}F_*(t)\Xi(t,\tau). \tag{3.34}$$

Из (3.3) следует, что

$$\|\Xi(t,\tau)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} = \|e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant e^{-c_*t^{2p}\tau}. \tag{3.35}$$

Чтобы оценить оператор (3.34), используем оценки (2.27) и (3.35). С учетом элементарного неравенства $x^{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2}}e^{-x} \leqslant 1$ при $x \geqslant 0$ имеем

$$\|\mathcal{I}(t,\tau)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_7|t|^{p+1}e^{-c_*t^{2p}\tau} \leqslant C''_{10}\tau^{-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}, \quad \tau > 0,\ |t| \leqslant t^0, \tag{3.36}$$

где

$$C''_{10} = C_7c_*^{-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}. \tag{3.37}$$

В итоге, комбинируя соотношения (3.31)–(3.33) и (3.36), приходим к искомой оценке (3.23) с постоянной

$$C_{10} = (3\delta)^{-\frac{1}{2p}} + C_1c_*^{-\frac{1}{2p}} + C'_{10} + C''_{10}. \tag{3.38}$$

□

Замечание 3.1. Мы отследили зависимость постоянных в оценках от данных задачи. Ниже при применении абстрактных результатов к дифференциальным операторам существенно следующее. Постоянные C_8, C_9, C_{10} из теорем 3.1, 3.2, 3.3 после возможного завышения можно считать многочленами от переменных C_0, $\|X_p\|$, $\delta^{-\frac{1}{2p}}$, $c_*^{-\frac{1}{2p}}$ с положительными коэффициентами, зависящими только от p.

4. Операторное семейство вида $A(t) = M^*\widehat{A}(t)M$. Аппроксимация окаймленной операторной экспоненты

4.1. Оператор вида $A(t) = M^*\widehat{A}(t)M$**.** Пусть $\widehat{\mathfrak{H}}$ — еще одно комплексное сепарабельное гильбертово пространство. Пусть задан изоморфизм $M : \mathfrak{H} \to \widehat{\mathfrak{H}}$.

Пусть $\widehat{X}(t) : \widehat{\mathfrak{H}} \to \mathfrak{H}_*$ — операторный пучок вида

$$\widehat{X}(t) = \sum_{j=1}^{p} t^j \widehat{X}_j, \quad t \in \mathbb{R},$$

удовлетворяющий всем условиям пункта 2.1. При этом пространство $\mathfrak{H}_*$ остается прежним. Предположим, что

$$M \operatorname{Dom} X_j = \operatorname{Dom} \widehat{X}_j, \quad X_j = \widehat{X}_j M, \quad j = 0, 1, \dots, p. \tag{4.1}$$

Тогда $X(t) = \widehat{X}(t)M$. В пространстве $\widehat{\mathfrak{H}}$ рассмотрим семейство самосопряженных операторов $\widehat{A}(t) = \widehat{X}(t)^*\widehat{X}(t)$. Тогда

$$A(t) = M^*\widehat{A}(t)M.$$

Ниже все объекты, отвечающие семейству $\widehat{A}(t)$, помечаются «шляпкой». Отметим, что $\widehat{\mathfrak{N}} = M\mathfrak{N}$, $\widehat{n} = n$, $\widehat{\mathfrak{N}}_* = \mathfrak{N}_*$.

В пространстве $\widehat{\mathfrak{H}}$ рассмотрим оператор

$$Q := (MM^*)^{-1} : \widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}. \tag{4.2}$$

Оператор Q ограничен и положительно определен вместе с Q^{-1}. Через $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ обозначим блок оператора Q в подпространстве $\widehat{\mathfrak{N}} = \operatorname{Ker} \widehat{X}_0$:

$$Q_{\widehat{\mathfrak{N}}} := \widehat{P}Q|_{\widehat{\mathfrak{N}}}. \tag{4.3}$$

Очевидно, $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — изоморфизм в $\widehat{\mathfrak{N}}$.

Несложно проверить, что ортопроектор P пространства $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathfrak{N}$ и ортопроектор $\widehat{P}$ пространства $\widehat{\mathfrak{H}}$ на $\widehat{\mathfrak{N}}$ связаны соотношением

$$P = M^{-1}(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}(M^*)^{-1}; \tag{4.4}$$

ср. [25, предложение 1.2], где это тождество было проверено в случае $p = 1$.

Для $\widehat{A}(t)$ определим оператор $\widehat{Z}$ по аналогии с (2.7). Для каждого $\widehat{\omega} \in \widehat{\mathfrak{N}}$ определяется решение $\widehat{\psi} = \widehat{\psi}(\widehat{\omega})$ задачи

$$\widehat{X}_0^*(\widehat{X}_0\widehat{\psi} + \widehat{X}_p\widehat{\omega}) = 0, \quad \widehat{\psi} \perp \widehat{\mathfrak{N}}.$$

Тогда

$$\widehat{Z}\widehat{u} = \widehat{\psi}(\widehat{P}\widehat{u}), \quad \widehat{u} \in \widehat{\mathfrak{H}}. \tag{4.5}$$

Наряду с $\widehat{Z}$ нам понадобится оператор $\widehat{Z}_Q$. Пусть $\widehat{\omega} \in \widehat{\mathfrak{N}}$ и пусть $\widehat{\psi}_Q = \widehat{\psi}_Q(\widehat{\omega})$ — решение задачи

$$\widehat{X}_0^*(\widehat{X}_0\widehat{\psi}_Q + \widehat{X}_p\widehat{\omega}) = 0, \quad Q\widehat{\psi}_Q \perp \widehat{\mathfrak{N}}.$$

Определим оператор $\widehat{Z}_Q$ соотношением

$$\widehat{Z}_Q\widehat{u} = \widehat{\psi}_Q(\widehat{P}\widehat{u}), \quad \widehat{u} \in \widehat{\mathfrak{H}}.$$

Ясно, что $\widehat{\psi}_Q = \widehat{\psi} + \widehat{\omega}_Q$, где элемент $\widehat{\omega}_Q \in \widehat{\mathfrak{N}}$ определяется из условия $Q\widehat{\psi}_Q \perp \widehat{\mathfrak{N}}$. Тогда

$$\widehat{\omega}_Q = -(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}(Q\widehat{\psi}).$$

Таким образом,

$$\widehat{Z}_Q = \widehat{Z} - (Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}Q\widehat{Z}. \tag{4.6}$$

Отсюда, в частности, следуют равенства

$$\widehat{X}_0\widehat{Z}_Q = \widehat{X}_0\widehat{Z}, \quad \widehat{X}_1\widehat{Z}_Q = \widehat{X}_1\widehat{Z}. \tag{4.7}$$

Мы учли, что $\widehat{\mathfrak{N}} = \operatorname{Ker}\widehat{X}_0 \subset \operatorname{Ker}\widehat{X}_1$.

Легко проверить, что

$$\widehat{Z}_Q = MZM^{-1}\widehat{P}, \tag{4.8}$$

где Z — оператор (2.7); ср. [3, лемма 6.1]. Оператор $\widehat{R}$ для семейства $\widehat{A}(t)$ определяется по аналогии с (2.9):

$$\widehat{R} := (\widehat{X}_0\widehat{Z} + \widehat{X}_p)|_{\widehat{\mathfrak{N}}} = (\widehat{X}_0\widehat{Z}_Q + \widehat{X}_p)|_{\widehat{\mathfrak{N}}}.$$

Здесь второе равенство следует из (4.7). Оператор R, определенный в (2.9), и оператор $\widehat{R}$ связаны соотношением

$$R = \widehat{R}M|_{\mathfrak{N}}. \tag{4.9}$$

Наконец, спектральный росток $\widehat{S} := \widehat{R}^*\widehat{R} : \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}$ операторного семейства $\widehat{A}(t)$ и росток S семейства $A(t)$ связаны соотношением

$$S = PM^*\widehat{S}M|_{\mathfrak{N}}. \tag{4.10}$$

Для $\widehat{A}(t)$ введем оператор $\widehat{G}$ по аналогии с (2.22). Тогда с учетом (4.7)

$$\widehat{G} := (\widehat{R}\widehat{P})^*\widehat{X}_1\widehat{Z} + (\widehat{X}_1\widehat{Z})^*\widehat{R}\widehat{P} = (\widehat{R}\widehat{P})^*\widehat{X}_1\widehat{Z}_Q + (\widehat{X}_1\widehat{Z}_Q)^*\widehat{R}\widehat{P}. \tag{4.11}$$

В силу (4.1), (4.8) и (4.9) оператор G, определенный в (2.22), и оператор (4.11) связаны соотношением

$$G = PM^*\widehat{G}MP. \tag{4.12}$$

Замечание 4.1. Поскольку оператор G нетривиально действует только в подпространстве $\mathfrak{N}$, используя (4.4) и (4.12), легко проверить, что равенство $G = 0$ равносильно равенству $\widehat{G} = 0$.

4.2. Аппроксимация окаймленной операторной экспоненты $Me^{-A(t)\tau}M^*$.

В предположениях пункта 4.1 мы находим аппроксимацию оператора

$$Me^{-A(t)\tau}M^* = Me^{-M^*\widehat{A}(t)M}M^* : \widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}$$

в терминах спектрального ростка $\widehat{S}$ семейства $\widehat{A}(t)$ и изоморфизма M.

Пусть $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — оператор (4.3). Положим

$$M_0 = (Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1/2} : \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}. \tag{4.13}$$

Пусть S — спектральный росток семейства $A(t)$. С помощью (4.4) и (4.10) легко проверить справедливость тождества

$$Me^{-t^{2p}S\tau}PM^* = M_0e^{-t^{2p}M_0\widehat{S}M_0\tau}M_0\widehat{P} : \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}; \tag{4.14}$$

ср. [25, предложение 2.3], где это тождество проверено в случае $p = 1$.

Теорема 4.1. *Пусть* $A(t)$ *и* $\widehat{A}(t)$ — *операторные семейства, удовлетворяющие условиям пункта* 4.1. *Пусть выполнено условие* 3.1. *Пусть* $\widehat{P}$ — *ортопроектор пространства* $\widehat{\mathfrak{H}}$ *на подпространство* $\widehat{\mathfrak{N}} = \operatorname{Ker}\widehat{A}(0)$, *а* $\widehat{S} : \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}$ — *спектральный росток семейства* $\widehat{A}(t)$ *при* $t = 0$. *Пусть оператор* M_0 *определен в* (4.13). *Тогда справедлива оценка*

$$\left\| Me^{-A(t)\tau}M^* - M_0e^{-t^{2p}M_0\widehat{S}M_0\tau}M_0\widehat{P}\right\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}} \leqslant \frac{C_8\|M\|^2}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad |t| \leqslant t^0. \tag{4.15}$$

Число t^0 *подчинено условию* (2.4). *Постоянная* C_8 *определена согласно* (3.14), (3.16) *и зависит лишь от* p, δ, *постоянной* C_0 *из* (2.2), $\|X_p\|$ *и* c_*.

Доказательство. Домножая операторы под знаком нормы в (3.17) на M слева и на M^* справа, получаем

$$\left\| Me^{-A(t)\tau}M^* - Me^{-t^{2p}S\tau}PM^*\right\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}} \leqslant \frac{C_8\|M\|^2}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad |t| \leqslant t^0.$$

Отсюда с учетом тождества (4.14) вытекает искомое неравенство (4.15). ☐

Аналогичным образом, из теоремы 3.2 с учетом замечания 4.1 вытекает следующий результат.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1. *Пусть оператор* $\widehat{G}$ *определен в* (4.11). *Предположим, что* $\widehat{G}=0$. *Тогда справедлива оценка*

$$\left\| Me^{-A(t)\tau}M^* - M_0 e^{-t^{2p}M_0\widehat{S}M_0\tau}M_0\widehat{P}\right\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}} \leqslant \frac{C_9\|M\|^2}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}, \quad \tau\geqslant 0, \quad |t|\leqslant t^0.$$

Число t^0 *подчинено условию* (2.4). *Постоянная* C_9 *определена согласно* (3.20), (3.22) *и зависит лишь от* p, δ, *постоянной* C_0 *из* (2.2), $\|X_p\|$ *и* c_*.

Теперь из теоремы 3.3 мы выводим следующий результат.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1. *Пусть оператор* $\widehat{Z}$ *определен в* (4.5). *Тогда справедлива оценка*

$$\left\|\widehat{A}(t)^{1/2}\left(Me^{-A(t)\tau}M^* - (I+t^p\widehat{Z})M_0 e^{-t^{2p}M_0\widehat{S}M_0\tau}M_0\widehat{P}\right)\right\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}} \leqslant C_{11}\tau^{-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}, \quad \tau>0, \quad |t|\leqslant t^0. \tag{4.16}$$

Число t^0 *подчинено условию* (2.4). *Постоянная* C_{11} *зависит лишь от* p, δ, $\widehat{\delta}$, *постоянной* C_0 *из* (2.2), $\|\widehat{X}_p\|$, $\|X_p\|$, c_*, $\|M\|$, $\|M^{-1}\|$.

Доказательство. В силу (4.8) и (4.14) имеем

$$\begin{aligned}&\left\|\widehat{A}(t)^{1/2}\left(Me^{-A(t)\tau}M^* - (I+t^p\widehat{Z}_Q)M_0 e^{-t^{2p}M_0\widehat{S}M_0\tau}M_0\widehat{P}\right)\right\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}} = \\ &= \left\|\widehat{X}(t)M\left(e^{-A(t)\tau} - (I+t^pZ)e^{-t^{2p}S\tau}P\right)M^*\right\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}} \leqslant \\ &\leqslant \|M\|\left\|A(t)^{1/2}\left(e^{-A(t)\tau} - (I+t^pZ)e^{-t^{2p}S\tau}P\right)\right\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}}.\end{aligned}$$

Отсюда и из оценки (3.23) вытекает неравенство

$$\left\|\widehat{A}(t)^{1/2}\left(Me^{-A(t)\tau}M^* - (I+t^p\widehat{Z}_Q)M_0 e^{-t^{2p}M_0\widehat{S}M_0\tau}M_0\widehat{P}\right)\right\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}} \leqslant C_{10}\|M\|\tau^{-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}, \quad \tau>0, \ |t|\leqslant t^0. \tag{4.17}$$

Остается показать, что в пределах допустимой погрешности можно заменить $\widehat{Z}_Q$ на $\widehat{Z}$ в левой части (4.17). В силу (4.6) имеем

$$\widehat{X}(t)(\widehat{Z}_Q-\widehat{Z}) = t^p\widehat{X}_p(\widehat{Z}_Q-\widehat{Z}) = -t^p\widehat{X}_p(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}Q\widehat{Z}.$$

Мы учли, что $\widehat{\mathfrak{N}}\subset\operatorname{Ker}\widehat{X}_j$, $j=0,\ldots,p-1$. Следовательно,

$$\begin{aligned}&\left\|\widehat{A}(t)^{1/2}\left(t^p(\widehat{Z}_Q-\widehat{Z})M_0 e^{-t^{2p}M_0\widehat{S}M_0\tau}M_0\widehat{P}\right)\right\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}} = \\ &= \left\|\widehat{X}(t)\left(t^p(\widehat{Z}_Q-\widehat{Z})M_0 e^{-t^{2p}M_0\widehat{S}M_0\tau}M_0\widehat{P}\right)\right\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}} = \\ &= t^{2p}\left\|\widehat{X}_p(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}Q\widehat{Z}M_0 e^{-t^{2p}M_0\widehat{S}M_0\tau}M_0\widehat{P}\right\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}} \leqslant \\ &\leqslant \|\widehat{X}_p\|\|M\|^4\|M^{-1}\|^2\|\widehat{Z}\|\,t^{2p}e^{-c_*t^{2p}\tau}, \quad \tau>0, \ |t|\leqslant t^0.\end{aligned}$$

В последнем переходе мы учли тождество (4.14) и неравенство (3.3), а также оценку $\|(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}\|\leqslant\|M\|^2$, вытекающую из тождества $(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}=MPM^*$ (см. (4.4)). Согласно (2.8) имеем $\|\widehat{Z}\|\leqslant\dfrac{1}{6}\widehat{\delta}^{-\frac{1}{2}}\|\widehat{X}_p\|$, где $\widehat{\delta}$ — аналог величины δ для оператора $\widehat{A}(t)$.Теперь, используя элементарное неравенство $x^{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2}}e^{-x}\leqslant 1$ при $x\geqslant 0$, получаем

$$\left\|\widehat{A}(t)^{1/2}\left(t^p(\widehat{Z}_Q-\widehat{Z})M_0 e^{-t^{2p}M_0\widehat{S}M_0\tau}M_0\widehat{P}\right)\right\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}} \leqslant C_{12}\tau^{-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}, \quad \tau>0, \ |t|\leqslant t^0, \tag{4.18}$$

где

$$C_{12} = \frac{1}{6}\widehat{\delta}^{-\frac{1}{2}}\|\widehat{X}_p\|^2\|M\|^4\|M^{-1}\|^2 c_*^{-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}. \tag{4.19}$$

Мы учли, что $t^0\leqslant 1$.

Теперь из (4.17) и (4.18) вытекает искомая оценка (4.16) с постоянной

$$C_{11} = C_{10}\|M\| + C_{12}. \tag{4.20}$$

□

Замечание 4.2. Из замечания 3.1 и соотношений (4.19), (4.20) следует, что постоянную C_{11} из теоремы 4.3 после возможного завышения можно считать многочленом от переменных C_0, $\|\widehat{X}_p\|$, $\|X_p\|$, $\widehat{\delta}^{-\frac{1}{2}}$, $\delta^{-\frac{1}{2p}}$, $c_*^{-\frac{1}{2p}}$, $\|M\|$, $\|M^{-1}\|$ с положительными коэффициентами, зависящими только от p.

Глава 2

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В $\mathbb{R}^d$. ПРИБЛИЖЕНИЕ ОПЕРАТОРНОЙ ЭКСПОНЕНТЫ

5. Периодические дифференциальные операторы в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$

5.1. Факторизованные операторы порядка $2p$ в $\mathbb{R}^d$. В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассматриваются дифференциальные операторы, формально заданные выражением

$$\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f(\mathbf{x}). \tag{5.1}$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — равномерно положительно определенная и ограниченная измеримая матрица-функция размера $m \times m$ (в общем случае $g(\mathbf{x})$ — эрмитова матрица с комплексными элементами):

$$c'\mathbf{1}_m \leqslant g(\mathbf{x}) \leqslant c''\mathbf{1}_m, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d; \quad 0 < c' \leqslant c'' < \infty. \tag{5.2}$$

Матрица-функция $f(\mathbf{x})$ размера $n \times n$ (с комплексными элементами) предполагается ограниченной и ограниченно обратимой:

$$f, f^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d). \tag{5.3}$$

Оператор $b(\mathbf{D})$ имеет вид

$$b(\mathbf{D}) = \sum_{|\beta|=p} b_\beta \mathbf{D}^\beta, \tag{5.4}$$

где b_β — $(m \times n)$-матрицы с постоянными элементами, вообще говоря, комплексными. Считаем, что $m \geqslant n$, а символ

$$b(\boldsymbol{\xi}) := \sum_{|\beta|=p} b_\beta \boldsymbol{\xi}^\beta, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d,$$

оператора $b(\mathbf{D})$ имеет максимальный ранг, т. е.

$$\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d.$$

Последнее условие равносильно оценкам

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leqslant b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}; \quad 0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty, \tag{5.5}$$

с некоторыми положительными константами α_0, α_1. Без ограничения общности можно считать нормы матриц b_β ограниченными константой $\sqrt{\alpha_1}$:

$$|b_\beta| \leqslant \sqrt{\alpha_1}, \quad |\beta| = p. \tag{5.6}$$

Строгое определение оператора $\mathcal{A}$ дается через квадратичную форму. Из условий (5.2) следует, что матрицу $g(\mathbf{x})$ можно представить в факторизованном виде

$$g(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})^* h(\mathbf{x}),$$

причем h, $h^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$. Например, можно положить $h(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})^{1/2}$.

Рассмотрим оператор $\mathcal{X} : L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$, действующий по правилу

$$(\mathcal{X}\mathbf{u})(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})(f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})), \quad \operatorname{Dom}\mathcal{X} = \{\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) : \ f\mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\},$$

и квадратичную форму

$$a[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \langle g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}), b(\mathbf{D})f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})\rangle\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u}\in \operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom}\mathcal{X}. \tag{5.7}$$

Проверим следующие неравенства:

$$c_0 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^p(f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}))|^2\, d\mathbf{x} \leqslant a[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^p(f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}))|^2\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u}\in\operatorname{Dom}\mathcal{X}, \tag{5.8}$$

где $|\mathbf{D}^p\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 := \sum\limits_{|\beta|=p} |\mathbf{D}^\beta \mathbf{v}(\mathbf{x})|^2$. Во-первых, в силу равенства Парсеваля

$$\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |b(\boldsymbol{\xi})\widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi} \leqslant a[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \|g\|_{L_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |b(\boldsymbol{\xi})\widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{v} = f\mathbf{u}\in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n),$$

где $\widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})$ — Фурье-образ функции $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. Отсюда и из (5.5) следует, что

$$\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^{2p}|\widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi} \leqslant a[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1\|g\|_{L_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^{2p}|\widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{v} = f\mathbf{u}\in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n). \tag{5.9}$$

Наконец, при помощи элементарных неравенств

$$c'_p \sum_{|\beta|=p} |\boldsymbol{\xi}^\beta|^2 \leqslant |\boldsymbol{\xi}|^{2p} \leqslant c''_p \sum_{|\beta|=p} |\boldsymbol{\xi}^\beta|^2, \quad \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d, \tag{5.10}$$

где постоянные c'_p и c''_p зависят только от d и p, приходим к искомым соотношениям (5.8) с постоянными

$$c_0 = c'_p\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}, \quad c_1 = c''_p\alpha_1\|g\|_{L_\infty}. \tag{5.11}$$

Следовательно, форма (5.7) замкнута и неотрицательна. По определению, $\mathcal{A}$ есть самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, отвечающий форме (5.7).

5.2. Решетки Γ и $\widetilde{\Gamma}$. В дальнейшем функции g, h и f предполагаются периодическими относительно некоторой решетки $\Gamma\subset\mathbb{R}^d$. Пусть $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d$ — базис в $\mathbb{R}^d$, порождающий решетку Γ, т. е.

$$\Gamma = \Big\{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^d : \mathbf{a} = \sum_{j=1}^d \nu_j\mathbf{a}_j,\ \nu_j\in\mathbb{Z}\Big\},$$

и пусть Ω — элементарная ячейка решетки Γ:

$$\Omega = \Big\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d :\ \mathbf{x} = \sum_{j=1}^d \kappa_j\mathbf{a}_j,\ 0<\kappa_j<1\Big\}. \tag{5.12}$$

Базис $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_d$ в $\mathbb{R}^d$, двойственный к $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d$, определяется соотношениями $\langle\mathbf{b}_j,\mathbf{a}_l\rangle = 2\pi\delta_{jl}$. Порожденная им решетка

$$\widetilde{\Gamma} = \Big\{\mathbf{b}\in\mathbb{R}^d : \mathbf{b} = \sum_{j=1}^d \zeta_j\mathbf{b}_j,\ \zeta_j\in\mathbb{Z}\Big\}$$

называется *двойственной* к решетке Γ. Ячейка решетки $\widetilde{\Gamma}$ может быть определена аналогично (5.12), однако удобнее рассматривать центральную зону Бриллюэна двойственной решетки:

$$\widetilde{\Omega} := \Big\{\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d : |\mathbf{k}| < |\mathbf{k}-\mathbf{b}|,\ 0\neq\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}\Big\}. \tag{5.13}$$

Область $\widetilde{\Omega}$ является фундаментальной областью решетки $\widetilde{\Gamma}$. Обозначим $|\Omega| = \operatorname{mes}\Omega$, $|\widetilde{\Omega}| = \operatorname{mes}\widetilde{\Omega}$ и заметим, что $|\Omega||\widetilde{\Omega}| = (2\pi)^d$. Обозначим через r_0 радиус шара, вписанного в $\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$. Отметим, что

$$|\mathbf{k}+\mathbf{b}| \geqslant r_0, \quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}, \quad 0\neq\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}. \tag{5.14}$$

Положим $\mathcal{B}(r) := \big\{\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d : |\mathbf{k}|\leqslant r\big\}$, $r>0$. Под $\widetilde{H}^s(\Omega;\mathbb{C}^n)$ понимается подпространство функций из $H^s(\Omega;\mathbb{C}^n)$, Γ-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^d$ принадлежит $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

С решеткой Γ связано дискретное преобразование Фурье $\{\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}}\}_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} \mapsto \mathbf{v}$:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1/2} \sum_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} \widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}} e^{i\langle\mathbf{b},\mathbf{x}\rangle}, \quad \mathbf{x}\in\Omega,$$

которое унитарно отображает $l_2(\widetilde{\Gamma};\mathbb{C}^n)$ на $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$:

$$\int_\Omega |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} |\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}}|^2.$$

5.3. Преобразование Гельфанда. Первоначально *преобразование Гельфанда* $\mathcal{U}$ определяется на функциях из класса Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ формулой

$$\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x}) = (\mathcal{U}\mathbf{v})(\mathbf{k},\mathbf{x}) = |\widetilde{\Omega}|^{-1/2}\sum_{\mathbf{a}\in\Gamma} e^{-i\langle\mathbf{k},\mathbf{x}+\mathbf{a}\rangle}\mathbf{v}(\mathbf{x}+\mathbf{a}), \quad \mathbf{v}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad \mathbf{x},\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d,$$

а затем $\mathcal{U}$ распространяется по непрерывности до унитарного отображения:

$$\mathcal{U} : L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)\,d\mathbf{k} =: \mathcal{K}. \tag{5.15}$$

Соотношение $\mathbf{v}\in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ эквивалентно тому, что $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot)\in\widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n)$ при почти всех $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ и

$$\int_{\widetilde{\Omega}}\int_\Omega \left(|\,(\mathbf{D}+\mathbf{k})^p\,\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2 + |\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2\right)\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{k} < \infty.$$

Оператор умножения на ограниченную Γ-периодическую функцию в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ под действием преобразования Гельфанда переходит в оператор умножения на ту же функцию в слоях прямого интеграла $\mathcal{K}$ из (5.15). Действие оператора $b(\mathbf{D})$ на $\mathbf{v}\in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ переходит в послойное действие оператора $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ на $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot)\in\widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n)$.

6. Разложение оператора $\mathcal{A}$ в прямой интеграл. Операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$

6.1. Формы $a(\mathbf{k})$ и операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. Положим $\mathfrak{H} = L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, $\mathfrak{H}_* = L_2(\Omega;\mathbb{C}^m)$. Рассмотрим оператор $\mathcal{X}(\mathbf{k}) : \mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*$, $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d$, определенный соотношениями

$$\begin{gathered}(\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u})(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})b(\mathbf{D}+\mathbf{k})(f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})),\\ \operatorname{Dom}\mathcal{X}(\mathbf{k}) = \{\mathbf{u}\in L_2(\Omega;\mathbb{C}^n) :\ f\mathbf{u}\in\widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n)\} =: \mathfrak{D}.\end{gathered} \tag{6.1}$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$a(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \langle g(\mathbf{x})b(\mathbf{D}+\mathbf{k})f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}), b(\mathbf{D}+\mathbf{k})f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})\rangle\,d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u}\in\mathfrak{D}. \tag{6.2}$$

С помощью дискретного преобразования Фурье и соотношений (5.2) и (5.5) легко проверить, что при всех $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d$ выполнены оценки

$$\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} a_*(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant a(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1\|g\|_{L_\infty} a_*(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}], \quad \mathbf{u}\in\mathfrak{D}, \tag{6.3}$$

где

$$a_*(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \sum_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} |\mathbf{b}+\mathbf{k}|^{2p}|\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}}|^2, \quad \mathbf{v} = f\mathbf{u}\in\widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n). \tag{6.4}$$

Отсюда с учетом (5.10) получаем

$$c_0\int_\Omega |(\mathbf{D}+\mathbf{k})^p(f\mathbf{u})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant a(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant c_1\int_\Omega |(\mathbf{D}+\mathbf{k})^p(f\mathbf{u})|^2\,d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u}\in\mathfrak{D},$$

где постоянные c_0, c_1 определены в (5.11). Следовательно, оператор $\mathcal{X}(\mathbf{k})$ замкнут, а форма (6.2) замкнута и неотрицательна. Самосопряженный оператор в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, отвечающий форме $a(\mathbf{k})$, обозначим через $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. Формально можно записать

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f(\mathbf{x}). \tag{6.5}$$

6.2. Прямой интеграл для оператора $\mathcal{A}$. Операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ позволяют нам частично диагонализовать оператор $\mathcal{A}$ в прямом интеграле $\mathcal{K}$ (см. (5.15)). Пусть $\widetilde{\mathbf{u}} = \mathcal{U}\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in \operatorname{Dom} a$. Тогда

$$\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \operatorname{Dom} a(\mathbf{k}) = \mathfrak{D} \text{ при почти всех } \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, \tag{6.6}$$

$$a[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} a(\mathbf{k})[\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \cdot), \widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \cdot)]\, d\mathbf{k}. \tag{6.7}$$

Наоборот, если $\widetilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{K}$ удовлетворяет (6.6) и интеграл в (6.7) сходится, то $\mathbf{u} \in \operatorname{Dom} a$ и (6.7) выполнено. Таким образом, под действием преобразования Гельфанда оператор $\mathcal{A}$ превращается в прямом интеграле $\mathcal{K}$ в умножение на операторнозначную функцию $\mathcal{A}(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$. Все это можно кратко выразить формулой

$$\mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{U}^{-1} = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathcal{A}(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}. \tag{6.8}$$

6.3. Включение операторов $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ в абстрактную схему. Для $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ положим

$$\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}, \quad t = |\mathbf{k}|, \quad \boldsymbol{\theta} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|},$$

и рассмотрим t как параметр возмущения. В то же время все построения будут зависеть от параметра $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, и мы должны заботиться о равномерности оценок по этому параметру.

Применяя метод, описанный в разделе 2, положим $\mathfrak{H} = L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ и $\mathfrak{H}_* = L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)$. Согласно (5.4) и (6.1), имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\mathbf{k}) &= h \sum_{|\beta|=p} b_\beta (\mathbf{D} + \mathbf{k})^\beta f = h \sum_{|\beta|=p} b_\beta \sum_{\gamma \leqslant \beta} C_\beta^\gamma \mathbf{k}^{\beta-\gamma} \mathbf{D}^\gamma f = \\ &= h \sum_{|\beta|=p} b_\beta \sum_{\gamma \leqslant \beta} C_\beta^\gamma t^{|\beta-\gamma|} \boldsymbol{\theta}^{\beta-\gamma} \mathbf{D}^\gamma f. \end{aligned}$$

Следовательно, оператор $\mathcal{X}(\mathbf{k})$ допускает запись в виде

$$\mathcal{X}(\mathbf{k}) = X(t, \boldsymbol{\theta}) = X_0 + \sum_{j=1}^{p} t^j X_j(\boldsymbol{\theta}).$$

Здесь оператор

$$X_0 = h \sum_{|\beta|=p} b_\beta \mathbf{D}^\beta f = hb(\mathbf{D}) f$$

замкнут на области определения

$$\operatorname{Dom} X_0 = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) : \ f\mathbf{u} \in \widetilde{H}^p(\Omega; \mathbb{C}^n)\} = \mathfrak{D}, \tag{6.9}$$

«промежуточные» операторы $X_j(\boldsymbol{\theta})$, $j = 1, \ldots, p-1$, заданы соотношениями

$$X_j(\boldsymbol{\theta}) = h \sum_{|\beta|=p} b_\beta \sum_{\gamma \leqslant \beta,\ |\gamma| = p-j} C_\beta^\gamma \boldsymbol{\theta}^{\beta-\gamma} \mathbf{D}^\gamma f \tag{6.10}$$

на областях определения

$$\operatorname{Dom} X_j(\boldsymbol{\theta}) = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) : \ f\mathbf{u} \in \widetilde{H}^{p-j}(\Omega; \mathbb{C}^n)\}, \tag{6.11}$$

а оператор

$$X_p(\boldsymbol{\theta}) = h \sum_{|\beta|=p} b_\beta \boldsymbol{\theta}^\beta f = hb(\boldsymbol{\theta}) f$$

ограничен из $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)$.

Из (6.9) и (6.11) видно, что условие 2.1 выполнено:

$$\operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} X_j(\boldsymbol{\theta}) \subset \operatorname{Dom} X_p(\boldsymbol{\theta}) = L_2(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad j = 1, \ldots, p-1.$$

В силу (5.5) справедлива оценка

$$\|X_p(\boldsymbol{\theta})\| \leqslant \alpha_1^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_\infty}. \tag{6.12}$$

Легко проверить, что ядро оператора X_0 имеет вид

$$\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} X_0 = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) : f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}, \tag{6.13}$$

а потому $\dim \mathfrak{N} = n$; ср. [12, предложение 5.1], где этот факт установлен в случае $f = \mathbf{1}_n$.

Пусть $n_* = \dim \operatorname{Ker} X_0^*$. Соотношение $m \geqslant n$ обеспечивает выполнение условия $n_* \geqslant n$. Более того, поскольку

$$\mathfrak{N}_* = \operatorname{Ker} X_0^* = \{\mathbf{q} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^m) :\ h^*\mathbf{q} \in \widetilde{H}^p(\Omega; \mathbb{C}^m) :\ b(\mathbf{D})^*(h^*\mathbf{q}) = 0\},$$

то реализуется альтернатива: либо $n_* = \infty$ (если $m > n$), либо $n_* = n$ (если $m = n$).

Из [12, предложение 5.2] вытекает выполнение условия 2.2, а именно: при $j = 1, \dots, p-1$ справедливы оценки

$$\|X_j(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \widetilde{C}_j \|X_0\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{D}, \tag{6.14}$$

где

$$\widetilde{C}_j = \alpha_1^{\frac{1}{2}} \alpha_0^{-\frac{1}{2}} \|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} (2r_0)^{-j} \Big(\sum_{|\beta|=p} \sum_{\gamma \leqslant \beta,\ |\gamma|=p-j} C_\beta^\gamma \Big). \tag{6.15}$$

Отметим, что постоянные $\widetilde{C}_j$ не зависят от параметра $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, а зависят лишь от d, p, j, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1 и r_0.

В силу компактности вложения $\operatorname{Dom} a(0) = \mathfrak{D}$ в пространство $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ спектр оператора $\mathcal{A}(0)$ дискретен. Точка $\lambda_0 = 0$ является изолированным собственным значением оператора $\mathcal{A}(0)$ кратности n, соответствующее собственное подпространство $\mathfrak{N}$ описано в (6.13).

Используя вариационные соображения, с помощью нижней оценки (6.3) и (6.4) легко оценить расстояние d^0 от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора $\mathcal{A}(0)$:

$$d^0 \geqslant \alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-2} (2r_0)^{2p}. \tag{6.16}$$

Ср. [2, гл. 2, п. 2.2], где такая оценка получена в случае операторов второго порядка, а также [12, (5.17)], где рассмотрен случай $f = \mathbf{1}_n$.

Следуя абстрактной схеме, зафиксируем положительное число $\delta \leqslant \min\left\{\dfrac{d^0}{36}, \dfrac{1}{4}\right\}$. С учетом (6.16) положим

$$\delta = \min\left\{ \frac{\alpha_0 r_0^{2p}}{4\|g^{-1}\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}^2}, \frac{1}{4} \right\}. \tag{6.17}$$

Неравенства (6.14) позволяют в качестве постоянной C_0 из (2.2) принять

$$C_0 = \max\{1, \widetilde{C}_1, \dots, \widetilde{C}_{p-1}\}, \tag{6.18}$$

где константы $\widetilde{C}_j$ определены в (6.15). Постоянная C_0 зависит лишь от d, p, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1 и r_0. (Отметим, что от f постоянная C_0 не зависит.)

Постоянная $C^\circ = \max\{(p-1)C_0, \|X_p(\boldsymbol{\theta})\|\}$ (см. (2.4)) сейчас зависит от $\boldsymbol{\theta}$. С учетом (6.12) (завышая константу) примем значение

$$C^\circ = \max\left\{ (p-1)C_0, \alpha_1^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_\infty} \right\},$$

не зависящее от $\boldsymbol{\theta}$. В соответствии с (2.4), положим

$$t^0 = \sqrt{\delta}(C^\circ)^{-1} = \frac{\sqrt{\delta}}{\max\left\{ (p-1)C_0, \alpha_1^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_\infty} \right\}}. \tag{6.19}$$

Отметим, что $t^0 \leqslant 1$, поскольку $(p-1)C_0 \geqslant 1$ и $\delta \leqslant 1$. Следовательно,

$$t^0 \leqslant (t^0)^{\frac{1}{p}} \leqslant \delta^{\frac{1}{2p}} \alpha_1^{-\frac{1}{2p}} \|g\|_{L_\infty}^{-\frac{1}{2p}} \|f\|_{L_\infty}^{-\frac{1}{p}} \leqslant 4^{-\frac{1}{2p}} \alpha_0^{\frac{1}{2p}} \alpha_1^{-\frac{1}{2p}} \|g\|_{L_\infty}^{-\frac{1}{2p}} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-\frac{1}{2p}} \|f\|_{L_\infty}^{-\frac{1}{p}} \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-\frac{1}{p}} r_0 < r_0.$$

В последнем переходе использованы очевидные неравенства $\alpha_0 \leqslant \alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|_{L_\infty} \geqslant 1$ и $\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty} \geqslant 1$. Таким образом, шар $\mathcal{B}(t^0)$ находится внутри шара $\mathcal{B}(r_0)$ и тем самым целиком содержится в $\widetilde{\Omega}$.

6.4. Невырожденность спектрального ростка. Из нижней оценки (6.3) и (6.4) с учетом (5.13) вытекает неравенство

$$a(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant \alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty} |\mathbf{k}|^{2p} \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{D}, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega}.$$

Тем самым,

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) \geqslant c_* |\mathbf{k}|^{2p} I, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega}, \tag{6.20}$$

где

$$c_* = \alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty}. \tag{6.21}$$

Этим проверено выполнение условия 3.1.

Таким образом, мы убедились, что операторное семейство $\mathcal{A}(\mathbf{k}) =: A(t,\boldsymbol{\theta})$ удовлетворяет всем предположениям абстрактной схемы. Существенно, что δ, t^0 и c_* не зависят от $\boldsymbol{\theta}$ (см. (6.17), (6.19), (6.21).

Сейчас аналитические (по t) ветви собственных значений $\lambda_j(t,\boldsymbol{\theta})$ и аналитические ветви собственных функций $\varphi_j(t,\boldsymbol{\theta})$, $j=1,\dots,n$, $|t| \leqslant t^0$, операторного семейства $A(t,\boldsymbol{\theta})$ (см. пункт 2.3) зависят от $\boldsymbol{\theta}$. Из (6.20) следуют неравенства

$$\lambda_j(t,\boldsymbol{\theta}) \geqslant c_* t^{2p}, \quad j=1,\dots,n, \quad t = |\mathbf{k}| \leqslant t^0. \tag{6.22}$$

Разложения (2.11), (2.12) принимают вид

$$\lambda_j(t,\boldsymbol{\theta}) = \gamma_j(\boldsymbol{\theta}) t^{2p} + \mu_j(\boldsymbol{\theta}) t^{2p+1} + \dots, \quad j=1,\dots,n, \tag{6.23}$$

$$\varphi_j(t,\boldsymbol{\theta}) = \omega_j(\boldsymbol{\theta}) + \varphi_j^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) t + \dots, \quad j=1,\dots,n.$$

Из (6.22) и (6.23) следует, что $\gamma_j(\boldsymbol{\theta}) \geqslant c_*$, $j=1,\dots,n$. Отсюда вытекает (см. (2.13)), что росток $S(\boldsymbol{\theta})$ семейства $A(t,\boldsymbol{\theta})$ невырожден независимо от $\boldsymbol{\theta}$, и выполнена оценка

$$S(\boldsymbol{\theta}) \geqslant c_* I_{\mathfrak{N}}. \tag{6.24}$$

7. Эффективные характеристики в случае $f = \mathbf{1}_n$

7.1. Оператор $\widehat{\mathcal{A}}$. Случай, когда $f = \mathbf{1}_n$, является для нас базовым. В этом случае условимся помечать все объекты «шляпкой». Тогда оператор $\widehat{\mathcal{A}}$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, имеет вид

$$\widehat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \tag{7.1}$$

а соответствующие операторы $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = \widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})$, действующие в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, принимают вид

$$\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) \tag{7.2}$$

(при периодических граничных условиях).

При $f = \mathbf{1}_n$ ядро (6.13) состоит из постоянных вектор-функций:

$$\widehat{\mathfrak{N}} = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega;\mathbb{C}^n) : \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}. \tag{7.3}$$

Ортопроектор пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на подпространство $\widehat{\mathfrak{N}}$ действует как усреднение по ячейке:

$$\widehat{P}\mathbf{u} = |\Omega|^{-1} \int\limits_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in L_2(\Omega;\mathbb{C}^n). \tag{7.4}$$

Параметры (6.17), (6.19), (6.21) сейчас принимают вид

$$\widehat{\delta} = \min\left\{ \frac{\alpha_0 r_0^{2p}}{4\|g^{-1}\|_{L_\infty}}, \frac{1}{4} \right\}, \tag{7.5}$$

$$\widehat{t}^0 = \frac{(\widehat{\delta})^{\frac{1}{2}}}{\max\left\{ (p-1)C_0, \alpha_1^{\frac{1}{2}} \|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty} \right\}}, \tag{7.6}$$

$$\widehat{c}_* = \alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}. \tag{7.7}$$

В силу (6.20) при $f = \mathbf{1}_n$ выполнена оценка

$$\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) \geqslant \widehat{c}_* |\mathbf{k}|^{2p} I, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega}. \tag{7.8}$$

7.2. Операторы $\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{R}(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$. Для операторного семейства $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})$ операторы Z, R и S, введенные в абстрактных терминах в пункте 2.2, зависят от параметра $\boldsymbol{\theta}$. Они были построены в [12, п. 5.3].

Чтобы описать эти операторы, введем матрицу-функцию $\Lambda(\mathbf{x})$ размера $n\times m$, являющуюся Γ-периодическим решением задачи

$$b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})\,(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x})+\mathbf{1}_m)=0,\qquad \int\limits_{\Omega}\Lambda(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=0. \tag{7.9}$$

Уравнение здесь понимается в слабом смысле: для каждого $\mathbf{C}\in\mathbb{C}^m$ выполнено включение $\Lambda\mathbf{C}\in\widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n)$ и интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega}\langle g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x})\mathbf{C}+\mathbf{C}),b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})\rangle\,d\mathbf{x}=0,\qquad \boldsymbol{\eta}\in\widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n).$$

Согласно [12, п. 5.3]), оператор $\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})$ имеет вид

$$\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})=[\Lambda]b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}, \tag{7.10}$$

где $[\Lambda]$ — оператор умножения на матрицу-функцию $\Lambda(\mathbf{x})$. Оператор $\widehat{R}(\boldsymbol{\theta})$ задается равенством

$$\widehat{R}(\boldsymbol{\theta})=[h(b(\mathbf{D})\Lambda+\mathbf{1}_m)]b(\boldsymbol{\theta})|_{\widehat{\mathfrak{N}}}. \tag{7.11}$$

Тогда (см. [12, п. 5.3]) спектральный росток $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})=\widehat{R}(\boldsymbol{\theta})^*\widehat{R}(\boldsymbol{\theta})$ действует в подпространстве $\widehat{\mathfrak{N}}$ (см. (7.3)) и представляется в виде

$$\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})=b(\boldsymbol{\theta})^*g^0b(\boldsymbol{\theta}),\qquad \boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}. \tag{7.12}$$

Здесь g^0 — так называемая *эффективная матрица*. Постоянная матрица g^0 размера $m\times m$ определяется равенством

$$g^0=|\Omega|^{-1}\int\limits_{\Omega}\widetilde{g}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},\qquad \widetilde{g}(\mathbf{x}):=g(\mathbf{x})\,(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x})+\mathbf{1}_m)\,. \tag{7.13}$$

Оказывается, что эффективная матрица g^0 положительно определена. Отсюда еще раз следует невырожденность спектрального ростка $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$, которая уже обсуждалась в пункте 6.4.

Отметим некоторые свойства эффективной матрицы; см. [12, предложения 5.3–5.5].

Предложение 7.1. *Пусть g^0 — эффективная матрица, определенная в* (7.13). *Введем обозначения*

$$\overline{g}=|\Omega|^{-1}\int\limits_{\Omega}g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},\qquad \underline{g}=\left(|\Omega|^{-1}\int\limits_{\Omega}g(\mathbf{x})^{-1}\,d\mathbf{x}\right)^{-1}.$$

Выполнены оценки

$$\underline{g}\leqslant g^0\leqslant\overline{g}. \tag{7.14}$$

В случае, когда $m=n$, выполнено равенство $g^0=\underline{g}$.

Оценки (7.14) известны в теории усреднения для конкретных ДО как вилка Фойгта—Рейсса. Из (7.14) вытекают следующие оценки норм матриц g^0 и $(g^0)^{-1}$:

$$|g^0|\leqslant\|g\|_{L_\infty},\qquad |(g^0)^{-1}|\leqslant\|g^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{7.15}$$

Предложение 7.2.

1°. *Пусть $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$, $k=1,\dots,m$, — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})$. Равенство $g^0=\overline{g}$ равносильно соотношениям*

$$b(\mathbf{D})^*\mathbf{g}_k(\mathbf{x})=0,\qquad k=1,\dots,m. \tag{7.16}$$

2°. *Пусть $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$, $k=1,\dots,m$, — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})^{-1}$. Равенство $g^0=\underline{g}$ равносильно представлениям*

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x})=\mathbf{l}_k^0+b(\mathbf{D})\mathbf{v}_k(\mathbf{x}),\quad \mathbf{l}_k^0\in\mathbb{C}^m,\ \mathbf{v}_k\in\widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n);\quad k=1,\dots,m. \tag{7.17}$$

Замечание 7.1. В случае, когда $g^0=\underline{g}$, матрица $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ постоянна: $\widetilde{g}(\mathbf{x})=g^0=\underline{g}$.

Ниже нам понадобятся следующие оценки периодического решения Λ задачи (7.9), которые несложно проверить:

$$\|hb(\mathbf{D})\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{\frac{1}{2}}\|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}, \tag{7.18}$$

$$\|\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{\frac{1}{2}}\alpha_0^{-\frac{1}{2}}(2r_0)^{-p}\|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty} =: |\Omega|^{\frac{1}{2}}C_\Lambda, \tag{7.19}$$

$$\|\Lambda\|_{H^p(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{\frac{1}{2}}\alpha_0^{-\frac{1}{2}}\|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\Big(\sum_{|\beta|\leqslant p}(2r_0)^{-2(p-|\beta|)}\Big)^{\frac{1}{2}} =: |\Omega|^{\frac{1}{2}}\widetilde{C}_\Lambda. \tag{7.20}$$

7.3. Эффективный оператор. В силу (7.12) и однородности символа $b(\mathbf{k})$ имеем

$$\widehat{S}(\mathbf{k}) := t^{2p}\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) = b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \tag{7.21}$$

Выражение (7.21) является символом ДО

$$\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}), \quad \operatorname{Dom}\widehat{\mathcal{A}}^0 = H^{2p}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \tag{7.22}$$

который называется *эффективным оператором* для оператора $\widehat{\mathcal{A}}$.

Пусть $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$ — операторное семейство в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, отвечающее оператору $\widehat{\mathcal{A}}^0$. Тогда $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$ задается дифференциальным выражением $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ на области определения $\widetilde{H}^{2p}(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Аналогично (7.8) с учетом (7.15) выполнено неравенство

$$\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) \geqslant \widehat{c}_*|\mathbf{k}|^{2p}I, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{7.23}$$

В силу (7.4) и (7.21) справедливо тождество

$$t^{2p}\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P} = \widehat{S}(\mathbf{k})\widehat{P} = \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\widehat{P}. \tag{7.24}$$

7.4. Оператор $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$. Для операторного семейства $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})$ оператор G, в абстрактных терминах определенный в (2.22), зависит от параметра $\boldsymbol{\theta}$ и принимает вид

$$\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = (\widehat{R}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P})^*\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta}) + (\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta}))^*\widehat{R}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}.$$

Обозначим через $B_1(\boldsymbol{\theta};\mathbf{D})$ ДО порядка $p-1$ такой, что $\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta}) = hB_1(\boldsymbol{\theta};\mathbf{D})$ (см. (6.10) при $f = \mathbf{1}_n$). Тогда

$$B_1(\boldsymbol{\theta};\mathbf{D}) = \sum_{|\beta|=p} b_\beta \sum_{\gamma\leqslant\beta:|\gamma|=p-1} C^\gamma_\beta \boldsymbol{\theta}^{\beta-\gamma}\mathbf{D}^\gamma.$$

Используя (7.10) и (7.11), получаем

$$\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* g^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}, \tag{7.25}$$

где $g^{(1)}(\boldsymbol{\theta})$ — эрмитова матрица размера $m \times m$, заданная выражением

$$g^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \big(\widetilde{g}(\mathbf{x})^* B_1(\boldsymbol{\theta};\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + (B_1(\boldsymbol{\theta};\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}))^*\widetilde{g}(\mathbf{x})\big)\,d\mathbf{x}. \tag{7.26}$$

Выделим некоторые случаи, когда оператор (7.25) обращается в нуль (см. [27, предложение 3.3]).

Предложение 7.3.

1°. *Пусть выполнены соотношения* (7.16). *Тогда* $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$, *откуда* $g^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *и* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

2°. *Пусть справедливы представления* (7.17). *Тогда* $g^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *и* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

3°. *Пусть* $n = 1$ *и элементы матриц* $g(\mathbf{x})$, b_β, $|\beta| = p$, *вещественны. Тогда* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Замечание 7.2. В общем случае оператор $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$ может быть ненулевым. В частности, несложно привести примеры оператора $\mathcal{A} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ в случае $n = 1$, где $g(\mathbf{x})$ — эрмитова матрица с комплексными элементами, в которых соответствующий оператор $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$ отличен от нуля.

8. Аппроксимация операторной экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau}$

8.1. Аппроксимация операторной экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau}$. Старший член. Мы применим теоремы 3.1, 3.2, 3.3 к операторному семейству $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$. В силу (7.24) справедливо тождество

$$e^{-t^{2p}\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})\tau}\widehat{P} = e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}. \tag{8.1}$$

Остается реализовать постоянные в оценках. Константы $\widehat{\delta}$, C_0, $\widehat{t}^0$ и $\widehat{c}_*$ определены в (7.5), (6.18), (7.6), (7.7) и не зависят от $\boldsymbol{\theta}$. Они зависят лишь от следующего набора параметров:

$$d,\ p,\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \|g\|_{L_\infty},\ \|g^{-1}\|_{L_\infty},\ \text{параметры решетки } \Gamma, \tag{8.2}$$

который мы для краткости будем называть *данными задачи*. Далее, согласно замечанию 3.1 постоянные $\widehat{C}_8$, $\widehat{C}_9$, $\widehat{C}_{10}$ из теорем 3.1, 3.2, 3.3 (в применении к $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})$) мажорируются многочленами от переменных C_0, $\|\widehat{X}_p\|$, $\widehat{\delta}^{-\frac{1}{2p}}$, $\widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2p}}$ с положительными коэффициентами, зависящими только от p. Сейчас оператор $\widehat{X}_p$ зависит от $\boldsymbol{\theta}$, но его норма оценивается величиной $\alpha_1^{\frac{1}{2}}\|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}$, не зависящей от $\boldsymbol{\theta}$; см. (6.12) при $f = \mathbf{1}_n$. Таким образом, после возможного завышения постоянные $\widehat{C}_8$, $\widehat{C}_9$, $\widehat{C}_{10}$ (для операторного семейства $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})$) зависят только от параметров (8.2).

Применяя теорему 3.1 к операторному семейству $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ и учитывая тождество (8.1), получаем неравенство

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\widehat{C}_8}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad |\mathbf{k}| \leqslant \widehat{t}^0. \tag{8.3}$$

Покажем, что в пределах допустимой погрешности можно избавиться от проектора $\widehat{P}$ в (8.3) (заменить его тождественным оператором). Из (6.24) (при $f = \mathbf{1}_n$), (7.12) и однородности символа $b(\boldsymbol{\xi})$ вытекает оценка

$$b(\boldsymbol{\xi})^* g^0 b(\boldsymbol{\xi}) \geqslant \widehat{c}_* |\boldsymbol{\xi}|^{2p}\mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \tag{8.4}$$

Отсюда, используя дискретное преобразование Фурье, с помощью (5.14) и элементарной оценки $(x^{\frac{1}{2p}}+1)e^{-x} \leqslant 2$ при $x \geqslant 0$, получаем

$$\begin{aligned} \left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}(I-\widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} &\leqslant \sup_{0\neq \mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} e^{-\widehat{c}_*|\mathbf{b}+\mathbf{k}|^{2p}\tau} \leqslant e^{-\widehat{c}_* r_0^{2p}\tau} \leqslant \\ &\leqslant \frac{2}{(\widehat{c}_* r_0^{2p}\tau)^{\frac{1}{2p}}+1} \leqslant \frac{2\max\{1, \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2p}} r_0^{-1}\}}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Теперь из (8.3) и (8.5) следует оценка

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\widehat{C}_8'}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad |\mathbf{k}| \leqslant \widehat{t}^0, \tag{8.6}$$

где $\widehat{C}_8' = \widehat{C}_8 + 2\max\left\{1, \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2p}} r_0^{-1}\right\}$.

Оценка при $|\mathbf{k}| > \widehat{t}^0$ тривиальна. В силу (7.8) и (7.23)

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant 2e^{-\widehat{c}_*|\mathbf{k}|^{2p}\tau} \leqslant 2e^{-\widehat{c}_*(\widehat{t}^0)^{2p}\tau}, \quad \tau \geqslant 0, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}(\widehat{t}^0).$$

Используя элементарную оценку $(x^{\frac{1}{2p}}+1)e^{-x} \leqslant 2$ при $x \geqslant 0$, отсюда получаем

$$\begin{gathered} \left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{4}{(\widehat{c}_*(\widehat{t}^0)^{2p}\tau)^{\frac{1}{2p}}+1} \leqslant \frac{4\max\{1, \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2p}}(\widehat{t}^0)^{-1}\}}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \\ \tau \geqslant 0, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}(\widehat{t}^0). \end{gathered} \tag{8.7}$$

В итоге из оценок (8.6) и (8.7) вытекает следующий результат.

Теорема 8.1. *Пусть* $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ *— операторное семейство вида* (7.2) *и* $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$ *— эффективное операторное семейство, определенное в пункте* 7.3. *Тогда справедлива оценка*

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_1}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{8.8}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_1$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

При дополнительном предположении, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$, к операторному семейству $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ можно применить теорему 3.2. Это дает оценку

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\widehat{C}_9}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad |\mathbf{k}| \leqslant \widehat{t}^0. \tag{8.9}$$

По аналогии с (8.5)

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}(I-\widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{2\max\{1, \widehat{c}_*^{-\frac{1}{p}} r_0^{-2}\}}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{8.10}$$

Далее, по аналогии с (8.7) имеем

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{4\max\{1, \widehat{c}_*^{-\frac{1}{p}} (\widehat{t}^0)^{-2}\}}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}(\widehat{t}^0). \tag{8.11}$$

Комбинируя оценки (8.9)–(8.11), приходим к следующему результату.

Теорема 8.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.1. *Пусть оператор* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$ *определен согласно* (7.25), (7.26). *Предположим, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. *Тогда справедлива оценка*

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_2}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{8.12}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_2$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

8.2. Аппроксимация операторной экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau}$ в «энергетической» норме. Применим теперь теорему 3.3 к операторному семейству $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$. В силу (7.4), (7.10) и (7.24) справедливо тождество

$$\left(I + t^p \widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})\right) e^{-t^{2p}\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})\tau}\widehat{P} = \left(I + [\Lambda]b(\mathbf{k})\widehat{P}\right) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P} = \left(I + [\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\right) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}.$$

Учитывая это тождество и применяя теорему 3.3, получаем

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} - \left(I + [\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\right) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P} \right) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{C}_{10}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau > 0, \ |\mathbf{k}| \leqslant \widehat{t}^0. \tag{8.13}$$

Покажем теперь, что в пределах допустимой погрешности оператор $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}$ в (8.13) можно заменить на $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}$. Аналогично (8.5), используя (5.5), (5.14), (8.4) и элементарную оценку $x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}}e^{-x} \leqslant 1$ при $x \geqslant 0$, получаем

$$\begin{gathered} \left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}(I-\widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = \left\| hb(\mathbf{D}+\mathbf{k}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}(I-\widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant \alpha_1^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \sup_{0\neq\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} |\mathbf{b}+\mathbf{k}|^p e^{-\widehat{c}_*|\mathbf{b}+\mathbf{k}|^{2p}\tau} \leqslant \alpha_1^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \widehat{c}_*^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} r_0^{-1} \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau > 0, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \end{gathered} \tag{8.14}$$

Вместе с (8.13) это влечет

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} - \left(I + [\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}\right) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_3'\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau > 0, \ |\mathbf{k}| \leqslant \widehat{t}^0, \tag{8.15}$$

где $\widehat{\mathcal{C}}_3' = \widehat{C}_{10} + \alpha_1^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \widehat{c}_*^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} r_0^{-1}$.

Оценки при $|\mathbf{k}| > \widehat{t}^0$ тривиальны: каждое слагаемое под знаком нормы в (8.15) оценивается по-отдельности. В силу спектральной теоремы и неравенства (7.8)

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \sup_{\lambda\geqslant\widehat{c}_*(\widehat{t}^0)^{2p}} \sqrt{\lambda}e^{-\lambda\tau} \leqslant \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2p}}(\widehat{t}^0)^{-1}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(\widehat{t}^0). \tag{8.16}$$

Аналогично, используя (7.23), получаем

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2p}}(\widehat{t}^0)^{-1}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(\widehat{t}^0).$$

Отсюда с учетом (7.15) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = \left\|hb(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right\| \leqslant \\ &\leqslant \|g\|^{\frac12}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{\frac12}_{L_\infty}\left\|(g^0)^{1/2}b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right\| = \|g\|^{\frac12}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{\frac12}_{L_\infty}\left\|\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right\| \leqslant \\ &\leqslant \|g\|^{\frac12}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{\frac12}_{L_\infty}\widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2p}}(\widehat{t}^0)^{-1}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(\widehat{t}^0). \end{aligned} \tag{8.17}$$

Остается оценить оператор

$$\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P} = \left(\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}[\Lambda]\widehat{P}_m\right)\left(b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}\right). \tag{8.18}$$

Здесь $\widehat{P}_m$ — ортопроектор пространства $\mathfrak{H}_* = L_2(\Omega;\mathbb{C}^m)$ на подпространство констант. Из (5.5), (7.18) и (7.19) вытекает оценка

$$\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}[\Lambda]\widehat{P}_m\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = |\Omega|^{-\frac12}\|hb(\mathbf{D}+\mathbf{k})\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|g\|^{\frac12}_{L_\infty}\left(1+\alpha_1^{\frac12}r_1^pC_\Lambda\right), \tag{8.19}$$

где $2r_1 = \operatorname{diam}\widetilde{\Omega}$. Аналогично (8.17) имеем

$$\begin{aligned} &\left\|b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right\| \leqslant \|g^{-1}\|^{\frac12}_{L_\infty}\left\|(g^0)^{1/2}b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right\| \leqslant \\ &\leqslant \|g^{-1}\|^{\frac12}_{L_\infty}\widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2p}}(\widehat{t}^0)^{-1}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(\widehat{t}^0). \end{aligned} \tag{8.20}$$

Комбинируя (8.18)–(8.20), получаем

$$\begin{aligned} \left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}\right\| \leqslant \|g\|^{\frac12}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{\frac12}_{L_\infty}\left(1+\alpha_1^{\frac12}r_1^pC_\Lambda\right)\widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2p}}(\widehat{t}^0)^{-1}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \\ \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(\widehat{t}^0). \end{aligned} \tag{8.21}$$

В итоге из (8.15)–(8.17) и (8.21) вытекает неравенство

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} - \left(I+[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}\right)e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right)\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_3''\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}, \tag{8.22}$$

где

$$\widehat{\mathcal{C}}_3'' = \max\left\{\widehat{\mathcal{C}}_3', \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2p}}(\widehat{t}^0)^{-1}\left(1+\|g\|^{\frac12}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{\frac12}_{L_\infty}\left(2+\alpha_1^{\frac12}r_1^pC_\Lambda\right)\right)\right\}.$$

Неравенство (8.22) представляет интерес при $\tau\geqslant 1$. При $0<\tau<1$ тривиальные оценки дадут лучший порядок: каждый член под знаком нормы в (8.22) оценивается по-отдельности. В силу спектральной теоремы,

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \sup_{\lambda\geqslant 0}\lambda^{1/2}e^{-\lambda\tau} \leqslant \tau^{-\frac12}, \quad \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{8.23}$$

Аналогично с учетом (7.15) имеем

$$\begin{aligned} &\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = \left\|hb(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant \|g\|^{\frac12}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{\frac12}_{L_\infty}\left\|\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \|g\|^{\frac12}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{\frac12}_{L_\infty}\tau^{-\frac12}, \quad \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \end{aligned} \tag{8.24}$$

Для оценки оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}$ воспользуемся (8.18), (8.19) и неравенством

$$\left\| b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty} \left\| \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2} e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty} \tau^{-\frac{1}{2}}, \quad \tau > 0,\ \mathbf{k}\in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{8.25}$$

Получаем

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty} \left(1+\alpha_1^{\frac{1}{2}} r_1^p C_\Lambda\right)\tau^{-\frac{1}{2}}, \quad \tau > 0,\ \mathbf{k}\in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{8.26}$$

Вместе с (8.23) и (8.24) это влечет

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} - \left(I+[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}\right)e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_3'''\tau^{-\frac{1}{2}}, \quad \tau > 0,\ \mathbf{k}\in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}, \tag{8.27}$$

где

$$\widehat{\mathcal{C}}_3''' = 1 + \|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\left(2+\alpha_1^{\frac{1}{2}} r_1^p C_\Lambda\right).$$

Применяя (8.22) при $\tau \geqslant 1$ и (8.27) при $0<\tau<1$, приходим к неравенству

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} - \left(I+[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}\right)e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{2\max\{\widehat{\mathcal{C}}_3'', \widehat{\mathcal{C}}_3'''\}}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \quad \tau > 0,\ \mathbf{k}\in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{8.28}$$

Подытожим результаты.

Теорема 8.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.1. *Пусть* Λ — Γ*-периодическое решение задачи* (7.9), *а* $\widehat{P}$ — *проектор* (7.4). *Тогда при* $\tau>0$ *и* $\mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$ *справедливы оценки*

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} - \left(I+[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}\right)e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_3}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \tag{8.29}$$

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} - \left(I+[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\right)e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}\right) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_3}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}. \tag{8.30}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_3$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

Доказательство. Неравенство (8.28) доказывает (8.29) с постоянной $\widehat{\mathcal{C}}_3 = 2\max\{\widehat{\mathcal{C}}_3'', \widehat{\mathcal{C}}_3'''\}$.

Неравенство (8.30) устанавливается по аналогии с доказательством оценки (8.28): оно следует из (8.13), (8.16), (8.17), (8.21), (8.23), (8.24), (8.26). ☐

Нам понадобится также оценка оператора $e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} - \left(I+[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}\right)e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}$ по операторной норме в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$.

Предложение 8.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.3.

1°. *При* $\tau>0$ *и* $\mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$ *справедлива оценка*

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} - \left(I+[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}\right)e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_4}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}. \tag{8.31}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_4$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

2°. *Предположим дополнительно, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})\equiv 0$. *Тогда при* $\tau>0$ *и* $\mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$ *справедлива оценка*

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} - \left(I+[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}\right)e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_5}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}. \tag{8.32}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_5$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

Доказательство. Аналогично (8.18) справедливо представление

$$[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P} = \left([\Lambda]\widehat{P}_m\right)\left(b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}\right). \tag{8.33}$$

С учетом (7.19) имеем

$$\|[\Lambda]\widehat{P}_m\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = |\Omega|^{-\frac{1}{2}}\|\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_\Lambda. \tag{8.34}$$

Отсюда и из (8.25), (8.33) вытекает неравенство

$$\|[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_\Lambda\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\tau^{-\frac{1}{2}} \leqslant \frac{2C_\Lambda\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau \geqslant 1,\ \mathbf{k}\in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{8.35}$$

При $0<\tau<1$ с учетом равенства $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P} = b(\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}$ и (5.5) получаем

$$\|b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^p \leqslant \frac{2\alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^p}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad 0<\tau<1, \quad \mathbf{k}\in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{8.36}$$

Из (8.33), (8.34), (8.36) следует неравенство

$$\|[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{2C_\Lambda\alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^p}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad 0<\tau<1, \quad \mathbf{k}\in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{8.37}$$

В итоге из (8.8), (8.35) и (8.37) вытекает искомая оценка (8.31) с константой

$$\widehat{\mathcal{C}}_4 = \widehat{\mathcal{C}}_1 + 2C_\Lambda \max\left\{\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}, \alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^p\right\}.$$

Для проверки утверждения 2° следует иначе оценить оператор (8.33). Вместо (8.35) используем неравенство

$$\|[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_\Lambda\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\tau^{-\frac{1}{2}} \leqslant \frac{2C_\Lambda\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}, \quad \tau \geqslant 1,\ \mathbf{k}\in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{8.38}$$

Вместо (8.37) нам понадобится оценка

$$\|[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_\Lambda\alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^p \leqslant \frac{2C_\Lambda\alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^p}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}, \quad 0<\tau<1, \quad \mathbf{k}\in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{8.39}$$

В итоге из неравенства (8.12) (справедливого при условии $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})\equiv 0$) и из (8.38), (8.39) вытекает оценка (8.32) с постоянной $\widehat{\mathcal{C}}_5 = \widehat{\mathcal{C}}_2 + 2C_\Lambda \max\left\{\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}, \alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^p\right\}$. □

9. АППРОКСИМАЦИЯ ОПЕРАТОРА $fe^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau}f^*$

9.1. Включение операторного семейства $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ в схему раздела 4. Вернемся к рассмотрению операторного семейства (6.5) в общем случае $f \neq \mathbf{1}_n$. Сейчас выполнены предположения раздела 4 при $\mathfrak{H} = \widehat{\mathfrak{H}} = L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ и $\mathfrak{H}_* = L_2(\Omega;\mathbb{C}^m)$. Роль оператора $\widehat{A}(t)$ играет $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$, а роль оператора $A(t)$ играет $A(t,\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{A}(\mathbf{k})$ (подразумевается $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}$). В качестве изоморфизма M выступает оператор умножения на матрицу-функцию $f(\mathbf{x})$. Оператор Q (см. (4.2)) является оператором умножения на матрицу-функцию

$$Q(\mathbf{x}) := (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}.$$

В силу (5.3) матрица-функция $Q(\mathbf{x})$ положительно определена и ограничена. Блок $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ оператора Q в подпространстве $\widehat{\mathfrak{N}}$ (см. (7.3)) есть оператор умножения на постоянную матрицу

$$\overline{Q} = (\underline{ff^*})^{-1} = |\Omega|^{-1}\int\limits_{\Omega}(f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}\,d\mathbf{x}.$$

Далее, M_0 (см. (4.13)) есть оператор умножения на постоянную матрицу

$$f_0 = (\overline{Q})^{-1/2} = (\underline{ff^*})^{1/2}. \tag{9.1}$$

Отметим очевидные неравенства

$$|f_0| \leqslant \|f\|_{L_\infty}, \quad |f_0^{-1}| \leqslant \|f^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{9.2}$$

Пусть $\widehat{\mathcal{A}}^0$ — эффективный оператор для $\widehat{\mathcal{A}}$; см. (7.22). Положим

$$\mathcal{A}^0 := f_0 \widehat{\mathcal{A}}^0 f_0 = f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0. \tag{9.3}$$

Пусть $\mathcal{A}^0(\mathbf{k})$ — соответствующее операторное семейство в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Тогда

$$\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) = f_0 \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) f_0 = f_0 b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f_0 \tag{9.4}$$

(при периодических граничных условиях). В силу (7.23) и (9.2) с учетом равенства $c_* = \widehat{c}_* \|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty}$ выполнена оценка

$$\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) \geqslant c_* |\mathbf{k}|^{2p} I, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega}. \tag{9.5}$$

9.2. Аппроксимация оператора $fe^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau}f^*$. Старший член. Мы применим теоремы 4.1, 4.2, 4.3 к операторному семейству $A(t,\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{A}(\mathbf{k})$. В силу (7.24) выполнено тождество

$$t^{2p} f_0 \widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) f_0 \widehat{P} = f_0 \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) f_0 \widehat{P} = \mathcal{A}^0(\mathbf{k}) \widehat{P},$$

а потому

$$f_0 e^{-t^{2p} f_0 \widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) f_0 \tau} f_0 \widehat{P} = f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \widehat{P}. \tag{9.6}$$

Остается реализовать постоянные в оценках. Константы δ, C_0, t^0 и c_* определены в (6.17), (6.18), (6.19), (6.21) и не зависят от $\boldsymbol{\theta}$. Они зависят лишь от следующего набора параметров:

$$d,\ p,\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \|g\|_{L_\infty},\ \|g^{-1}\|_{L_\infty},\ \|f\|_{L_\infty},\ \|f^{-1}\|_{L_\infty},\ \text{параметры решетки } \Gamma, \tag{9.7}$$

который мы для краткости будем называть *данными задачи*. Далее, согласно замечаниям 3.1, 4.2 постоянные из теорем 4.1, 4.2, 4.3 (в применении к $A(t,\boldsymbol{\theta})$) мажорируются многочленами от переменных C_0, $\|\widehat{X}_p\|$, $\|X_p\|$, $\widehat{\delta}^{-\frac{1}{2}}$, $\delta^{-\frac{1}{2p}}$, $c_*^{-\frac{1}{2p}}$ с положительными коэффициентами, зависящими только от p. Сейчас операторы $\widehat{X}_p$, X_p зависят от $\boldsymbol{\theta}$, но их нормы оцениваются величинами $\alpha_1^{\frac{1}{2}} \|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}$ и $\alpha_1^{\frac{1}{2}} \|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty}$ соответственно, не зависящими от $\boldsymbol{\theta}$; см. (6.12). Таким образом, после возможного завышения постоянные из теорем 4.1, 4.2, 4.3 (для операторного семейства $A(t,\boldsymbol{\theta})$) зависят только от параметров (9.7).

Применяя теорему 4.1 к операторному семейству $A(t,\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{A}(\mathbf{k})$ и учитывая тождество (9.6), получаем неравенство

$$\left\| fe^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{C_8 \|f\|^2_{L_\infty}}{\tau^{\frac{1}{2p}} + 1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad |\mathbf{k}| \leqslant t^0. \tag{9.8}$$

Покажем, что в пределах допустимой погрешности можно заменить проектор $\widehat{P}$ в (9.8) тождественным оператором. Из (8.4) и (9.2) вытекает оценка

$$f_0 b(\boldsymbol{\xi})^* g^0 b(\boldsymbol{\xi}) f_0 \geqslant c_* |\boldsymbol{\xi}|^{2p} \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \tag{9.9}$$

Отсюда, используя дискретное преобразование Фурье, по аналогии с (8.5) получаем

$$\begin{gathered} \left\| f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 (I - \widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \|f\|^2_{L_\infty} \sup_{0\neq \mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} e^{-c_*|\mathbf{b}+\mathbf{k}|^{2p}\tau} \leqslant \|f\|^2_{L_\infty} e^{-c_* r_0^{2p}\tau} \leqslant \\ \leqslant \frac{2\|f\|^2_{L_\infty}}{(c_* r_0^{2p}\tau)^{\frac{1}{2p}} + 1} \leqslant \frac{2\|f\|^2_{L_\infty} \max\{1, c_*^{-\frac{1}{2p}} r_0^{-1}\}}{\tau^{\frac{1}{2p}} + 1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega}. \end{gathered} \tag{9.10}$$

Теперь из (9.8) и (9.10) следует оценка

$$\left\| fe^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{C_8' \|f\|^2_{L_\infty}}{\tau^{\frac{1}{2p}} + 1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad |\mathbf{k}| \leqslant t^0. \tag{9.11}$$

где $C_8' = C_8 + 2\max\{1, c_*^{-\frac{1}{2p}} r_0^{-1}\}$.

Оценка при $|\mathbf{k}| > t^0$ тривиальна. В силу (6.20), (9.2) и (9.5) по аналогии с (8.7) получаем

$$\begin{aligned}\left\| f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} &\leqslant 2\|f\|^2_{L_\infty} e^{-c_*|\mathbf{k}|^{2p}\tau} \leqslant 2\|f\|^2_{L_\infty} e^{-c_*(t^0)^{2p}\tau} \leqslant \\ &\leqslant \frac{4\|f\|^2_{L_\infty} \max\{1, c_*^{-\frac{1}{2p}}(t^0)^{-1}\}}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}(t^0).\end{aligned} \tag{9.12}$$

В итоге из оценок (9.11) и (9.12) вытекает следующий результат.

Теорема 9.1. *Пусть* $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ *— операторное семейство вида* (6.5). *Пусть матрица* f_0 *определена в* (9.1) *и операторное семейство* $\mathcal{A}^0(\mathbf{k})$ *определено в* (9.4). *Тогда справедлива оценка*

$$\left\| f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_1}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{9.13}$$

Постоянная $\mathcal{C}_1$ *зависит лишь от данных задачи* (9.7).

Аналогичным образом из теоремы 4.2 выводится следующий результат.

Теорема 9.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.1. *Пусть оператор* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$ *определен согласно* (7.25), (7.26). *Предположим, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. *Тогда справедлива оценка*

$$\left\| f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_2}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{9.14}$$

Постоянная $\mathcal{C}_2$ *зависит лишь от данных задачи* (9.7).

9.3. Аппроксимация оператора $f e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} f^*$ в «энергетической» норме. Применим теперь теорему 4.3 к операторному семейству $A(t, \boldsymbol{\theta}) = \mathcal{A}(\mathbf{k})$. В силу (7.4), (7.10) и (9.6) справедливо тождество

$$\begin{aligned}\left(I + t^p \widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})\right) f_0 e^{-t^{2p} f_0 \widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) f_0 \tau} f_0 \widehat{P} &= \left(I + [\Lambda] b(\mathbf{k}) \widehat{P}\right) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \widehat{P} = \\ &= (I + [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k}))\, f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \widehat{P}.\end{aligned}$$

Учитывая это тождество и применяя теорему 4.3, получаем

$$\begin{aligned}\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \left(f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - (I + [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k}))\, f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \widehat{P} \right) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} &\leqslant C_{11} \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \\ &\tau > 0, \ |\mathbf{k}| \leqslant t^0.\end{aligned} \tag{9.15}$$

Покажем теперь, что в пределах допустимой погрешности оператор $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \widehat{P}$ в (9.15) можно заменить на $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0$. Аналогично (8.14), используя (5.5), (9.2), (9.9), получаем

$$\begin{aligned}\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 (I - \widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} &= \left\| h b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 (I - \widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant \alpha_1^{\frac{1}{2}} \|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty} \|f\|^2_{L_\infty} \sup_{0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}} |\mathbf{b}+\mathbf{k}|^p e^{-c_*|\mathbf{b}+\mathbf{k}|^{2p}\tau} &\leqslant \alpha_1^{\frac{1}{2}} \|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty} \|f\|^2_{L_\infty} c_*^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} r_0^{-1} \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\end{aligned}$$

при $\tau > 0$ и $\mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$. Вместе с (9.15) это влечет

$$\begin{aligned}\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \left(f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - \left(I + [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) \widehat{P}\right) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \right) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} &\leqslant \mathcal{C}_3' \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \\ &\tau > 0, \ |\mathbf{k}| \leqslant t^0,\end{aligned} \tag{9.16}$$

где $\mathcal{C}_3' = C_{11} + \alpha_1^{\frac{1}{2}} \|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty} \|f\|^2_{L_\infty} c_*^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} r_0^{-1}$.

Оценки при $|\mathbf{k}| > t^0$ тривиальны: каждое слагаемое под знаком нормы в (9.16) оценивается по-отдельности. В силу спектральной теоремы и оценки (6.20)

$$\begin{aligned}\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} &= \left\| h b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* \right\| = \left\| \mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2} e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* \right\| \leqslant \\ \leqslant \|f\|_{L_\infty} \sup_{\lambda \geqslant c_*(t^0)^{2p}} \sqrt{\lambda} e^{-\lambda\tau} &\leqslant \|f\|_{L_\infty} c_*^{-\frac{1}{2p}} (t^0)^{-1} \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau > 0, \ \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}(t^0).\end{aligned} \tag{9.17}$$

По аналогии с (8.17) при учете (9.5) имеем

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}f_0e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} &= \left\|hb(\mathbf{D}+\mathbf{k})f_0e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\right\| \leqslant \\ &\leqslant \|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\left\|\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\right\| \leqslant \\ &\leqslant \|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}c_*^{-\frac{1}{2p}}(t^0)^{-1}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(t^0).\end{aligned} \tag{9.18}$$

Остается оценить оператор

$$\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})f_0e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\widehat{P} = \left(\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}[\Lambda]\widehat{P}_m\right)\left(b(\mathbf{D}+\mathbf{k})f_0e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\widehat{P}\right). \tag{9.19}$$

Аналогично (9.18) имеем

$$\begin{aligned}\left\|b(\mathbf{D}+\mathbf{k})f_0e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\right\| &\leqslant \|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\left\|\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\right\| \leqslant \\ &\leqslant \|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}c_*^{-\frac{1}{2p}}(t^0)^{-1}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(t^0).\end{aligned} \tag{9.20}$$

Комбинируя (8.19), (9.19) и (9.20), получаем

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})f_0e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\widehat{P}\right\| \leqslant \|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}\left(1+\alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^pC_\Lambda\right)c_*^{-\frac{1}{2p}}(t^0)^{-1}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \\ \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(t^0). \tag{9.21}$$

В итоге из (9.16)–(9.18) и (9.21) вытекает неравенство

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\left(fe^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau}f^* - \left(I+[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}\right)f_0e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\right)\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_3''\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \\ \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}, \tag{9.22}$$

где

$$\mathcal{C}_3'' = \max\left\{\mathcal{C}_3', \|f\|_{L_\infty}c_*^{-\frac{1}{2p}}(t^0)^{-1}\left(1+\|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\left(2+\alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^pC_\Lambda\right)\right)\right\}.$$

Неравенство (9.22) представляет интерес при $\tau \geqslant 1$. При $0<\tau<1$ тривиальные оценки дадут лучший порядок. В силу спектральной теоремы по аналогии с (9.17) получаем

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}fe^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau}f^*\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} &= \left\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau}f^*\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant \|f\|_{L_\infty}\sup_{\lambda\geqslant 0}\lambda^{1/2}e^{-\lambda\tau} \leqslant \|f\|_{L_\infty}\tau^{-\frac{1}{2}}, \quad \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}.\end{aligned} \tag{9.23}$$

Аналогично с учетом (7.15) и (9.2) имеем

$$\begin{aligned}&\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}f_0e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\left\|\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant \|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}\tau^{-\frac{1}{2}}, \quad \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}.\end{aligned} \tag{9.24}$$

Для оценки оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})f_0e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\widehat{P}$ воспользуемся (9.19), (8.19) и неравенством

$$\begin{aligned}\left\|b(\mathbf{D}+\mathbf{k})f_0e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} &\leqslant \|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\left\|\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant \|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}\tau^{-\frac{1}{2}}, \quad \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}.\end{aligned} \tag{9.25}$$

Получаем

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})f_0e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\widehat{P}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}\left(1+\alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^pC_\Lambda\right)\tau^{-\frac{1}{2}}, \\ \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{9.26}$$

Вместе с (9.23) и (9.24) это влечет

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\left(f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - \left(I + [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}\right) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0\right)\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_3''' \tau^{-\frac{1}{2}}, \quad \tau > 0,\ \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}, \tag{9.27}$$

где

$$\mathcal{C}_3''' = \|f\|_{L_\infty} + \|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty} \|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty} \left(2 + \alpha_1^{\frac{1}{2}} r_1^p C_\Lambda\right).$$

Объединяя (9.22) при $\tau \geqslant 1$ и (9.27) при $0 < \tau < 1$, приходим к неравенству

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\left(f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - \left(I + [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}\right) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0\right)\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{2\max\{\mathcal{C}_3'', \mathcal{C}_3'''\}}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \quad \tau > 0,\ \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{9.28}$$

Подытожим результаты.

Теорема 9.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.1. *Пусть* Λ — Γ*-периодическое решение задачи* (7.9), *а* $\widehat{P}$ — *проектор* (7.4). *Тогда при* $\tau > 0$ *и* $\mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$ *справедливы оценки*

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\left(f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - \left(I + [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}\right) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0\right)\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_3}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \tag{9.29}$$

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\left(f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - \left(I + [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\right) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \widehat{P}\right)\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_3}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}. \tag{9.30}$$

Постоянная $\mathcal{C}_3$ *зависит лишь от данных задачи* (9.7).

Доказательство. Неравенство (9.28) влечет (9.29) с постоянной $\mathcal{C}_3 = 2\max\{\mathcal{C}_3'', \mathcal{C}_3'''\}$.

Неравенство (9.30) проверяется по аналогии с доказательством оценки (9.28): оно следует из (9.15), (9.17), (9.18), (9.21), (9.23), (9.24), (9.26). ☐

Нам понадобится также оценка оператора $f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - \left(I + [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}\right) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0$ по операторной норме в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$.

Предложение 9.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.3.

1°. *При* $\tau > 0$ *и* $\mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$ *справедлива оценка*

$$\left\|f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - \left(I + [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}\right) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_4}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}. \tag{9.31}$$

Постоянная $\mathcal{C}_4$ *зависит лишь от данных задачи* (9.7).

2°. *Предположим дополнительно, что* $G(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. *Тогда при* $\tau > 0$ *и* $\mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$ *справедлива оценка*

$$\left\|f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - \left(I + [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}\right) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_5}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}. \tag{9.32}$$

Постоянная $\mathcal{C}_5$ *зависит лишь от данных задачи* (9.7).

Доказательство. Аналогично (9.19) справедливо представление

$$[\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \widehat{P} = \left([\Lambda]\widehat{P}_m\right)\left(b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \widehat{P}\right). \tag{9.33}$$

Отсюда и из (8.34), (9.25) вытекает неравенство

$$\|[\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_\Lambda \|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty} \tau^{-\frac{1}{2}} \leqslant \frac{2 C_\Lambda \|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty}}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau \geqslant 1, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{9.34}$$

При $0<\tau<1$ с учетом равенства $b(\mathbf{D}{+}\mathbf{k})f_0e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\widehat{P}=b(\mathbf{k})f_0e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\widehat{P}$,(5.5) и (9.2) получаем

$$\|b(\mathbf{D}+\mathbf{k})f_0e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant\alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^p\|f\|^2_{L_\infty}\leqslant\frac{2\alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^p\|f\|^2_{L_\infty}}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1},\quad 0<\tau<1,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}.\tag{9.35}$$

Из (8.34), (9.33), (9.35) следует неравенство

$$\|[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})f_0e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant\frac{2C_\Lambda\alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^p\|f\|^2_{L_\infty}}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1},\quad 0<\tau<1,\quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}.\tag{9.36}$$

В итоге из (9.13), (9.34) и (9.36) вытекает искомая оценка (9.31) с константой

$$\mathcal{C}_4=\mathcal{C}_1+2C_\Lambda\max\left\{\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty},\alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^p\|f\|^2_{L_\infty}\right\}.$$

Для проверки утверждения 2° надо иначе оценить оператор (9.33). Вместо (9.34) используем неравенство

$$\|[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})f_0e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant C_\Lambda\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}\tau^{-\frac{1}{2}}\leqslant\frac{2C_\Lambda\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}}{\tau^{\frac{1}{p}}+1},\\ \tau\geqslant 1,\quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}.\tag{9.37}$$

Вместо (9.36) применяем оценку

$$\|[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})f_0e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant C_\Lambda\alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^p\|f\|^2_{L_\infty}\leqslant\frac{2C_\Lambda\alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^p\|f\|^2_{L_\infty}}{\tau^{\frac{1}{p}}+1},\\ 0<\tau<1,\quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}.\tag{9.38}$$

В итоге из оценки (9.14) (справедливой при условии $G(\boldsymbol{\theta})\equiv 0$) и (9.37), (9.38) вытекает неравенство (9.32) с постоянной $\mathcal{C}_5=\mathcal{C}_2+2C_\Lambda\max\left\{\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty},\alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^p\|f\|^2_{L_\infty}\right\}$. □

10. Аппроксимация операторной экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau}$

10.1. Аппроксимация операторной экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Рассмотрим оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ вида (7.1), действующий в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. В силу разложения (6.8) (в случае $f=\mathbf{1}_n$) выполнено

$$e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau}=\mathcal{U}^{-1}\left(\int\limits_{\widetilde{\Omega}}\oplus e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau}\,d\mathbf{k}\right)\mathcal{U}.\tag{10.1}$$

Пусть $\widehat{\mathcal{A}}^0$ — эффективный оператор (7.22). Разложение аналогичное (10.1) имеет место и для оператора $e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}$. Следовательно,

$$\left\|e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau}-e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}=\operatorname*{ess-sup}_{\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}}\left\|e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau}-e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}.$$

Отсюда и из теорем 8.1, 8.2 вытекают следующие результаты.

Теорема 10.1. *Пусть* $\widehat{\mathcal{A}}$ — *оператор* (7.1) *и* $\widehat{\mathcal{A}}^0$ — *эффективный оператор* (7.22). *Тогда справедлива оценка*

$$\left\|e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau}-e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\frac{\widehat{\mathcal{C}}_1}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1},\qquad \tau\geqslant 0.$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_1$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

Теорема 10.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 10.1. *Пусть оператор* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$ *определен согласно* (7.25), (7.26). *Предположим, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. *Тогда справедлива оценка*

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_2}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0.$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_2$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

10.2. Аппроксимация операторной экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau}$ по энергетической норме.

Теперь мы получим аппроксимацию экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau}$ по «энергетической» норме, опираясь на теорему 8.3 и разложение (10.1). Напомним, что под действием преобразования Гельфанда оператор $b(\mathbf{D})$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$, а оператор умножения на периодическую матрицу-функцию $\Lambda(\mathbf{x})$ переходит в умножение на ту же функцию в слоях прямого интеграла $\mathcal{K}$ (см. (5.15)). Нам потребуется также оператор $\Pi := \mathcal{U}^{-1}[\widehat{P}]\mathcal{U}$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Здесь $[\widehat{P}]$ — оператор в $\mathcal{K}$, действующий послойно как оператор $\widehat{P}$. Легко видеть (см. [4, (6.8)]), что Π есть ПДО с символом $\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi})$, где $\chi_{\widetilde{\Omega}}$ — характеристическая функция множества $\widetilde{\Omega}$, т. е.

$$(\Pi\mathbf{u})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\widetilde{\Omega}} e^{i\langle\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}\rangle}\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi}. \tag{10.2}$$

Из сказанного следует, что оператор $\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D})\Pi)\,e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\right)$ раскладывается в прямой интеграл по операторам, стоящим под знаком нормы в (8.29), а оператор $\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D}))\,e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi\right)$ раскладывается по операторам из (8.30). Отсюда и из теоремы 8.3 выводим следующий результат.

Теорема 10.3. *Пусть* $\widehat{\mathcal{A}}$ — *оператор* (7.1) *и* $\widehat{\mathcal{A}}^0$ — *эффективный оператор* (7.22). *Пусть* Λ — Γ*-периодическое решение задачи* (7.9), *а матрица-функция* $\widetilde{g}$ *определена в* (7.13). *Пусть* Π — *оператор* (10.2). *Тогда справедливы оценки*

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D})\Pi)\,e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_3}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \quad \tau > 0, \tag{10.3}$$

$$\left\| gb(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - \widetilde{g}b(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_6}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \quad \tau > 0. \tag{10.4}$$

Постоянные $\widehat{\mathcal{C}}_3$ *и* $\widehat{\mathcal{C}}_6$ *зависят лишь от данных задачи* (8.2).

Доказательство. Неравенство (10.3) вытекает из (8.29) и разложения в прямой интеграл.

Проверим теперь справедливость неравенства (10.4). Из (8.30) с помощью разложения в прямой интеграл следует оценка

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D}))\,e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi\right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_3}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \quad \tau > 0.$$

Эту оценку можно переписать в виде

$$\left\| g^{1/2}b(\mathbf{D})\left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D}))\,e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi\right) \right\|_{L_2((\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_3}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \quad \tau > 0,$$

откуда вытекает неравенство

$$\left\| gb(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - gb(\mathbf{D})\,(I+[\Lambda]b(\mathbf{D}))\,e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_3\|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}}}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \quad \tau > 0. \tag{10.5}$$

С учетом (5.4) и (7.13) имеем

$$gb(\mathbf{D})\,(I+[\Lambda]b(\mathbf{D}))\,e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi = \widetilde{g}b(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi + g\sum_{|\beta|=p} b_\beta \sum_{\gamma\leqslant\beta:|\gamma|\geqslant 1} C_\beta^\gamma(\mathbf{D}^{\beta-\gamma}\Lambda)\mathbf{D}^\gamma b(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi. \tag{10.6}$$

Второе слагаемое справа обозначим через $\mathcal{G}(\tau)$. Очевидно, $\mathcal{G}(\tau)$ можно записать в виде

$$\mathcal{G}(\tau) = g \sum_{|\beta|=p} b_\beta \sum_{\gamma\leqslant\beta:|\gamma|\geqslant 1} C_\beta^\gamma [\mathbf{D}^{\beta-\gamma}\Lambda]\Pi_m \mathbf{D}^\gamma b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi, \tag{10.7}$$

где Π_m — ПДО с символом $\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi})$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$. Оператор $[\mathbf{D}^{\beta-\gamma}\Lambda]\Pi_m$ унитарно эквивалентен прямому интегралу от операторов $[\mathbf{D}^{\beta-\gamma}\Lambda]\widehat{P}_m$, а потому

$$\left\|[\mathbf{D}^{\beta-\gamma}\Lambda]\Pi_m\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \left\|[\mathbf{D}^{\beta-\gamma}\Lambda]\widehat{P}_m\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = |\Omega|^{-\frac{1}{2}}\|\mathbf{D}^{\beta-\gamma}\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \widetilde{C}_\Lambda. \tag{10.8}$$

Мы учли оценку (7.20). Далее с помощью преобразования Фурье, используя (5.5), (8.4), (10.2) и элементарное неравенство $x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}}e^{-x} \leqslant 1$ при $x \geqslant 0$, получаем

$$\left\|\mathbf{D}^\gamma b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_1^{\frac{1}{2}} \sup_{\boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}} |\boldsymbol{\xi}|^{p+|\gamma|} e^{-\widehat{c}_*|\boldsymbol{\xi}|^{2p}\tau} \leqslant \alpha_1^{\frac{1}{2}} r_1^{|\gamma|-1} \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad |\gamma| \geqslant 1,\ \tau > 0. \tag{10.9}$$

Аналогично, если использовать оценку $x^{\frac{1}{2}}e^{-x} \leqslant 1$ при $x \geqslant 0$, приходим к неравенству

$$\left\|\mathbf{D}^\gamma b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_1^{\frac{1}{2}} r_1^{|\gamma|} \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}}, \quad \tau > 0. \tag{10.10}$$

Применяя (10.9) при $\tau \geqslant 1$ и (10.10) при $0 < \tau < 1$, находим

$$\left\|\mathbf{D}^\gamma b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}^{(\gamma)}}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \quad \tau > 0, \tag{10.11}$$

где

$$\widehat{\mathcal{C}}^{(\gamma)} = 2\alpha_1^{\frac{1}{2}} \max\left\{ r_1^{|\gamma|-1} \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, r_1^{|\gamma|} \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2}} \right\}.$$

Теперь из (10.7), (10.8) и (10.11) с учетом (5.6) вытекает оценка

$$\|\mathcal{G}(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_6'}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \quad \tau > 0,$$

где

$$\widehat{\mathcal{C}}_6' = c(p,d)\alpha_1^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L_\infty} \widetilde{C}_\Lambda \max_{1\leqslant|\gamma|\leqslant p} \widehat{\mathcal{C}}^{(\gamma)}.$$

Вместе с (10.5) и (10.6) это влечет искомую оценку (10.4) с постоянной $\widehat{\mathcal{C}}_6 = \widehat{\mathcal{C}}_3 \|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} + \widehat{\mathcal{C}}_6'$. ☐

Из предложения 8.1 с помощью разложения в прямой интеграл вытекает следующее утверждение.

Предложение 10.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 10.3.

1°. *Справедлива оценка*

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - (I + [\Lambda]b(\mathbf{D})\Pi)\, e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_4}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau > 0. \tag{10.12}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_4$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

2°. *Предположим дополнительно, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. *Тогда справедлива оценка*

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - (I + [\Lambda]b(\mathbf{D})\Pi)\, e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_5}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}, \quad \tau > 0. \tag{10.13}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_5$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

10.3. Устранение оператора Π в корректоре при $\tau \geqslant 1$. Покажем теперь, что при $\tau \geqslant 1$ можно устранить оператор Π в оценках (10.3), (10.4), (10.12), (10.13) (т. е. в пределах допустимой погрешности можно заменить оператор Π тождественным).

Предложение 10.2. *При всяком $s \geqslant 0$ и $\tau > 0$ оператор $b(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}(I-\Pi)$ непрерывен из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$, причем выполнена оценка*

$$\left\| b(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}(I-\Pi)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^s(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}^{(s)}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}}, \quad \tau > 0. \tag{10.14}$$

Постоянная $\widehat{\mathfrak{C}}^{(s)}$ зависит лишь от s, p, α_0, α_1, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0.

Доказательство. Нам понадобится элементарное неравенство

$$x^{\frac{1}{2}+\frac{s}{2p}}e^{-x} \leqslant c(s,p), \quad x \geqslant 0, \quad c(s,p) = q^q e^{-q},\ q = \frac{1}{2}+\frac{s}{2p}. \tag{10.15}$$

С помощью преобразования Фурье, учитывая (5.5), (8.4), (10.2) и (10.15), получаем

$$\begin{aligned}\left\| b(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}(I-\Pi)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^s(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \alpha_1^{\frac{1}{2}} \sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d}(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{s}{2}}(1-\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi}))|\boldsymbol{\xi}|^p e^{-\widehat{c}_*|\boldsymbol{\xi}|^{2p}\tau} \leqslant \\ &\leqslant c(s,p)\alpha_1^{\frac{1}{2}}\widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}} \sup_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant r_0}(1+|\boldsymbol{\xi}|^{-2})^{\frac{s}{2}} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}^{(s)}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}}, \quad \tau > 0,\end{aligned}$$

где $\widehat{\mathfrak{C}}^{(s)} = c(s,p)\alpha_1^{\frac{1}{2}}\widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}}(1+r_0^{-2})^{\frac{s}{2}}$. ☐

Предложение 10.3.

1°. *Пусть $s > p + d/2$ и $\tau > 0$. Тогда оператор $\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}[\Lambda]$ непрерывен из $H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, причем*

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}[\Lambda]\right\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_1^{(s)}, \quad \tau > 0. \tag{10.16}$$

Постоянная $\mathfrak{C}_1^{(s)}$ зависит лишь от s и данных (8.2).

2°. *Пусть $s > d/2$ и $\tau > 0$. Тогда операторы $[\Lambda]$ и $[\widetilde{g}]$ непрерывны из $H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, причем*

$$\|[\Lambda]\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_2^{(s)}, \quad \tau > 0, \tag{10.17}$$

$$\|[\widetilde{g}]\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_3^{(s)}, \quad \tau > 0. \tag{10.18}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_2^{(s)}$, $\mathfrak{C}_3^{(s)}$ зависят лишь от s и данных (8.2).

Доказательство. Начнем с доказательства утверждения 1°. С учетом (5.4) и (5.6) имеем

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}[\Lambda]\right\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \|hb(\mathbf{D})[\Lambda]\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sqrt{\alpha_1}\|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \sum_{|\beta|=p}\left\|\mathbf{D}^\beta[\Lambda]\right\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{10.19}$$

Далее, пусть $\mathbf{u} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ при некотором $s > p + d/2$. Тогда

$$\mathbf{D}^\beta(\Lambda(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \sum_{\gamma\leqslant\beta} C_\beta^\gamma(\mathbf{D}^{\beta-\gamma}\Lambda(\mathbf{x}))\mathbf{D}^\gamma\mathbf{u}(\mathbf{x}). \tag{10.20}$$

Оценим L_2-норму каждого слагаемого в (10.20) по-отдельности:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}|\mathbf{D}^{\beta-\gamma}\Lambda(\mathbf{x})|^2|\mathbf{D}^\gamma\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} &= \sum_{\mathbf{a}\in\Gamma}\int_{\Omega+\mathbf{a}}|\mathbf{D}^{\beta-\gamma}\Lambda(\mathbf{x})|^2|\mathbf{D}^\gamma\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \\ &\leqslant \int_\Omega|\mathbf{D}^{\beta-\gamma}\Lambda(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}\sum_{\mathbf{a}\in\Gamma}\|\mathbf{D}^\gamma\mathbf{u}\|^2_{L_\infty(\Omega+\mathbf{a})}.\end{aligned} \tag{10.21}$$

Мы учли периодичность матрицы-функции Λ. Воспользуемся теперь непрерывным вложением $H^{s-p}(\Omega;\mathbb{C}^m) \subset L_\infty(\Omega;\mathbb{C}^m)$; пусть $c_{s-p}(\Omega)$ — норма соответствующего оператора вложения. Тогда

$$\|\mathbf{D}^\gamma\mathbf{u}\|_{L_\infty(\Omega+\mathbf{a})} \leqslant c_{s-p}(\Omega)\,\|\mathbf{D}^\gamma\mathbf{u}\|_{H^{s-p}(\Omega+\mathbf{a})} \leqslant c_{s-p}(\Omega)\,\|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega+\mathbf{a})}, \quad \mathbf{a}\in\Gamma,\ |\gamma|\leqslant p. \tag{10.22}$$

Из (10.21) и (10.22) с учетом (7.20) вытекает оценка

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^{\beta-\gamma}\Lambda(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}^{\gamma}\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant c_{s-p}^2(\Omega)\,\|\Lambda\|^2_{H^p(\Omega)}\,\|\mathbf{u}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leqslant c_{s-p}^2(\Omega)|\Omega|\widetilde{C}_\Lambda^2\,\|\mathbf{u}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)}\,,$$

$$\gamma \leqslant \beta,\ |\beta| = p.$$

Сопоставляя это с (10.19) и (10.20), приходим к искомому неравенству (10.16).

Аналогично (и даже проще) проверяется утверждение 2°. Пусть $\mathbf{u} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ при некотором $s > d/2$. По аналогии с (10.21) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\Lambda(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \int\limits_{\Omega} |\Lambda(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \sum_{\mathbf{a}\in\Gamma} \|\mathbf{u}\|^2_{L_\infty(\Omega+\mathbf{a})},$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\widetilde{g}(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \int\limits_{\Omega} |\widetilde{g}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \sum_{\mathbf{a}\in\Gamma} \|\mathbf{u}\|^2_{L_\infty(\Omega+\mathbf{a})}.$$

Отсюда, используя вложение $H^s(\Omega;\mathbb{C}^m) \subset L_\infty(\Omega;\mathbb{C}^m)$ и оценки (7.18), (7.19), получаем искомые неравенства (10.17) и (10.18). ☐

Теперь из теоремы 10.3 и предложений 10.2, 10.3 выводим следующий результат.

Теорема 10.4. *Пусть* $\widehat{\mathcal{A}}$ — *оператор* (7.1) *и* $\widehat{\mathcal{A}}^0$ — *эффективный оператор* (7.22). *Пусть* Λ — Γ-*периодическое решение задачи* (7.9), *а матрица-функция* $\widetilde{g}$ *определена в* (7.13). *Тогда справедливы оценки*

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2} \left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - (I + [\Lambda]b(\mathbf{D}))\,e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau} \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_3^\circ \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau \geqslant 1, \tag{10.23}$$

$$\left\| g b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - \widetilde{g} b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_6^\circ \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau \geqslant 1. \tag{10.24}$$

Постоянные $\widehat{\mathcal{C}}_3^\circ$ *и* $\widehat{\mathcal{C}}_6^\circ$ *зависят лишь от данных задачи* (8.2).

Доказательство. Начнем с проверки оценки (10.23). Из (10.14) и (10.16) вытекает неравенство

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2} [\Lambda] b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau} (I - \Pi) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}^{(s)} \mathfrak{C}_1^{(s)} \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}}, \quad \tau > 0, \tag{10.25}$$

при всяком $s > p + d/2$. Фиксируя $s = p + d/2 + 1$ и замечая, что $\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}} \leqslant \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}$ при $\tau \geqslant 1$, из (10.3) и (10.25) получаем (10.23).

Аналогично из (10.14) и (10.18) следует, что

$$\left\| [\widetilde{g}] b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau} (I - \Pi) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}^{(s)} \mathfrak{C}_3^{(s)} \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}}, \quad \tau > 0, \tag{10.26}$$

при всяком $s > d/2$. Фиксируя $s = d/2 + 1$ и замечая, что $\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}} \leqslant \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}$ при $\tau \geqslant 1$, из (10.4) и (10.26) получаем искомую оценку (10.24). ☐

Аналогичным образом из предложений 10.1, 10.2 и 10.3 выводится следующее утверждение.

Предложение 10.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 10.4.

1°. *Справедлива оценка*

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - (I + [\Lambda]b(\mathbf{D}))\,e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_4^\circ \tau^{-\frac{1}{2p}}, \quad \tau \geqslant 1.$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_4^\circ$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

2°. *Предположим дополнительно, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. *Тогда справедлива оценка*

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - (I + [\Lambda]b(\mathbf{D}))\,e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_5^\circ \tau^{-\frac{1}{p}}, \quad \tau \geqslant 1.$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_5^\circ$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

11. АППРОКСИМАЦИЯ ОПЕРАТОРА $fe^{-\mathcal{A}\tau}f^*$

11.1. Аппроксимация окаймленной экспоненты $fe^{-\mathcal{A}\tau}f^*$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Рассмотрим теперь оператор $\mathcal{A}$ вида (5.1), действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. По аналогии с пунктом 10.1, используя разложение (6.8) в прямой интеграл из теорем 9.1 и 9.2, выводим следующие результаты.

Теорема 11.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — оператор* (5.1) *и $\mathcal{A}^0$ — оператор* (9.3). *Пусть матрица f_0 определена в* (9.1). *Тогда справедлива оценка*

$$\left\| fe^{-\mathcal{A}\tau}f^* - f_0e^{-\mathcal{A}^0\tau}f_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_1}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0.$$

Постоянная $\mathcal{C}_1$ зависит лишь от данных задачи (9.7).

Теорема 11.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 11.1. *Пусть оператор $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$ определен согласно* (7.25), (7.26). *Предположим, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда справедлива оценка*

$$\left\| fe^{-\mathcal{A}\tau}f^* - f_0e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}f_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_2}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0.$$

Постоянная $\mathcal{C}_2$ зависит лишь от данных задачи (9.7).

11.2. Аппроксимация оператора $fe^{-\mathcal{A}\tau}f^*$ в энергетической норме.

Теорема 11.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 11.1. *Пусть Λ — Γ-периодическое решение задачи* (7.9), *а матрица-функция $\widetilde{g}$ определена в* (7.13). *Пусть Π — оператор* (10.2). *Тогда справедливы оценки*

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\left(fe^{-\mathcal{A}\tau}f^* - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D})\Pi)\, f_0e^{-\mathcal{A}^0\tau}f_0 \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_3}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \quad \tau > 0, \tag{11.1}$$

$$\left\| gb(\mathbf{D})fe^{-\mathcal{A}\tau}f^* - \widetilde{g}b(\mathbf{D})f_0e^{-\mathcal{A}^0\tau}f_0\Pi \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_6}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \quad \tau > 0. \tag{11.2}$$

Постоянные $\mathcal{C}_3$ и $\mathcal{C}_6$ зависят лишь от данных задачи (9.7).

Доказательство. Неравенство (11.1) вытекает из (9.29) с помощью разложения в прямой интеграл. Из (9.30) с помощью разложения в прямой интеграл следует оценка

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\left(fe^{-\mathcal{A}\tau}f^* - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D}))\, f_0e^{-\mathcal{A}^0\tau}f_0\Pi \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_3}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \quad \tau > 0.$$

Отсюда выводится оценка (11.2) полностью аналогично выводу оценки (10.4); см. доказательство теоремы 10.3. □

Из предложения 9.1 с помощью разложения в прямой интеграл вытекает следующее утверждение.

Предложение 11.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 11.3.

1°. *Справедлива оценка*

$$\left\| fe^{-\mathcal{A}\tau}f^* - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D})\Pi)\, f_0e^{-\mathcal{A}^0\tau}f_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_4}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau > 0. \tag{11.3}$$

Постоянная $\mathcal{C}_4$ зависит лишь от данных задачи (9.7).

2°. *Предположим дополнительно, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. Тогда справедлива оценка*

$$\left\| fe^{-\mathcal{A}\tau}f^* - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D})\Pi)\, f_0e^{-\mathcal{A}^0\tau}f_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_5}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}, \quad \tau > 0. \tag{11.4}$$

Постоянная $\mathcal{C}_5$ зависит лишь от данных задачи (9.7).

11.3. Устранение оператора Π в корректоре при $\tau \geqslant 1$. Покажем теперь, что при $\tau \geqslant 1$ можно устранить оператор Π в оценках (11.1)–(11.4).

Предложение 11.2. *При всяком $s \geqslant 0$ и $\tau > 0$ оператор $b(\mathbf{D})f_0e^{-\mathcal{A}^0\tau}f_0(I-\Pi)$ непрерывен из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$, причем выполнена оценка*

$$\left\|b(\mathbf{D})f_0e^{-\mathcal{A}^0\tau}f_0(I-\Pi)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^s(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}^{(s)}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}}, \quad \tau > 0. \tag{11.5}$$

Постоянная $\mathfrak{C}^{(s)}$ зависит лишь от s, p, α_0, α_1, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0.

Доказательство. С помощью преобразования Фурье, учитывая (5.5), (9.2), (9.9), (10.2) и (10.15), получаем

$$\begin{aligned}\left\|b(\mathbf{D})f_0e^{-\mathcal{A}^0\tau}f_0(I-\Pi)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^s(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \alpha_1^{\frac{1}{2}}\|f\|^2_{L_\infty}\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d}(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{s}{2}}(1-\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi}))|\boldsymbol{\xi}|^pe^{-c_*|\boldsymbol{\xi}|^{2p}\tau} \leqslant \\ &\leqslant c(s,p)\alpha_1^{\frac{1}{2}}\|f\|^2_{L_\infty}c_*^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}}\sup_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant r_0}(1+|\boldsymbol{\xi}|^{-2})^{\frac{s}{2}} \leqslant \mathfrak{C}^{(s)}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}}, \quad \tau > 0,\end{aligned}$$

где $\mathfrak{C}^{(s)} = c(s,p)\alpha_1^{\frac{1}{2}}\|f\|^2_{L_\infty}c_*^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}}(1+r_0^{-2})^{\frac{s}{2}}$. □

Теперь из теоремы 11.3 и предложений 10.3, 11.2 выводим следующий результат.

Теорема 11.4. *Пусть $\mathcal{A}$ — оператор* (5.1) *и $\mathcal{A}^0$ — оператор* (9.3). *Пусть матрица f_0 определена в* (9.1). *Пусть Λ — Γ-периодическое решение задачи* (7.9), *а матрица-функция $\widetilde{g}$ определена в* (7.13). *Тогда справедливы оценки*

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\left(fe^{-\mathcal{A}\tau}f^* - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D}))\,f_0e^{-\mathcal{A}^0\tau}f_0\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_3^\circ\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau \geqslant 1, \tag{11.6}$$

$$\left\|gb(\mathbf{D})fe^{-\mathcal{A}\tau}f^* - \widetilde{g}b(\mathbf{D})f_0e^{-\mathcal{A}^0\tau}f_0\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_6^\circ\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau \geqslant 1. \tag{11.7}$$

Постоянные $\mathcal{C}_3^\circ$ и $\mathcal{C}_6^\circ$ зависят лишь от данных задачи (9.7).

Доказательство. Начнем с проверки оценки (11.6). Из (10.16) и (11.5) вытекает неравенство

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}[\Lambda]b(\mathbf{D})f_0e^{-\mathcal{A}^0\tau}f_0(I-\Pi)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}^{(s)}\mathfrak{C}_1^{(s)}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}}, \quad \tau > 0, \tag{11.8}$$

при всяком $s > p + d/2$. Фиксируя $s = p + d/2 + 1$ и замечая, что $\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}} \leqslant \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}$ при $\tau \geqslant 1$, из (11.1) и (11.8) получаем (11.6).

Аналогично из (10.18) и (11.5) вытекает оценка

$$\left\|[\widetilde{g}]b(\mathbf{D})f_0e^{-\mathcal{A}^0\tau}f_0(I-\Pi)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}^{(s)}\mathfrak{C}_3^{(s)}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}}, \quad \tau > 0, \tag{11.9}$$

при всяком $s > d/2$. Фиксируя $s = d/2 + 1$ и замечая, что $\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}} \leqslant \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}$ при $\tau \geqslant 1$, из (11.2) и (11.9) получаем искомую оценку (11.7). □

Аналогичным образом из предложений 10.3, 11.1 и 11.2 выводим следующий результат.

Предложение 11.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 11.4.

1°. *Справедлива оценка*

$$\left\|fe^{-\mathcal{A}\tau}f^* - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D}))\,f_0e^{-\mathcal{A}^0\tau}f_0\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_4^\circ\tau^{-\frac{1}{2p}}, \quad \tau \geqslant 1.$$

Постоянная $\mathcal{C}_4^\circ$ зависит лишь от данных задачи (9.7).

2°. *Предположим дополнительно, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. Тогда справедлива оценка*

$$\left\|fe^{-\mathcal{A}\tau}f^* - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D}))\,f_0e^{-\mathcal{A}^0\tau}f_0\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_5^\circ\tau^{-\frac{1}{p}}, \quad \tau \geqslant 1.$$

Постоянная $\mathcal{C}_5^\circ$ зависит лишь от данных задачи (9.7).

Глава 3

УСРЕДНЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

12. Оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$. Масштабное преобразование

12.1. Операторы $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$. Мы переходим к задачам усреднения в пределе малого периода для периодических ДО в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Для всякой Γ-периодической функции $\varphi(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^d$ используем обозначение

$$\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varphi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x}), \quad \varepsilon > 0.$$

В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$, $\varepsilon>0$, формально заданный выражением

$$\mathcal{A}_\varepsilon = (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \varepsilon > 0. \tag{12.1}$$

Как обычно, строгое определение оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ дается через соответствующую замкнутую квадратичную форму

$$a_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}), b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})\rangle\, d\mathbf{x}, \quad f^\varepsilon\mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

Эта форма подчинена оценкам, аналогичным (5.9), (5.8):

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^{2p} |\widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi} \leqslant a_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^{2p} |\widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi},\ \mathbf{v} = f^\varepsilon\mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \tag{12.2}$$

$$c_0 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^p\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \leqslant a_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^p\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{v} = f^\varepsilon\mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n). \tag{12.3}$$

В случае $f = \mathbf{1}_n$ оператор (12.1) обозначается через $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$:

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \varepsilon > 0. \tag{12.4}$$

При малом ε коэффициенты операторов (12.1) и (12.4) быстро осциллируют. Наша цель в главе 3 — получить приближения операторов $e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau}$ и $f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^*$ при малом ε и применить результаты к вопросу о поведении решений задачи Коши для параболических уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами.

12.2. Масштабное преобразование. Пусть T_ε — унитарный в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ оператор масштабного преобразования, заданный равенством

$$(T_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) := \varepsilon^{d/2}\mathbf{u}(\varepsilon\mathbf{x}).$$

Легко проверить следующие тождества:

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \varepsilon^{-2p} T_\varepsilon^* \mathcal{A} T_\varepsilon, \quad \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = \varepsilon^{-2p} T_\varepsilon^* \widehat{\mathcal{A}} T_\varepsilon, \tag{12.5}$$

где $\mathcal{A}$ и $\widehat{\mathcal{A}}$ — операторы (5.1) и (7.1) соответственно. В силу (12.5) имеем

$$e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau} = T_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}\varepsilon^{-2p}\tau} T_\varepsilon, \quad e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} = T_\varepsilon^* e^{-\widehat{\mathcal{A}}\varepsilon^{-2p}\tau} T_\varepsilon. \tag{12.6}$$

Аналогичные тождества имеют место и для операторов (9.3) и (7.22):

$$e^{-\mathcal{A}^0 \tau} = T_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}^0\varepsilon^{-2p}\tau} T_\varepsilon, \quad e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} = T_\varepsilon^* e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\varepsilon^{-2p}\tau} T_\varepsilon. \tag{12.7}$$

Эти соотношения позволяют нам вывести результаты об усреднении операторной экспоненты из результатов разделов 10 и 11.

13. Усреднение операторной экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau}$

13.1. Аппроксимация оператора $e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Используя (12.6), (12.7) и унитарность оператора T_ε, получаем

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}} \varepsilon^{-2p} \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \varepsilon^{-2p}\tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{13.1}$$

Применяя теоремы 10.1, 10.2 (с заменой τ на $\varepsilon^{-2p}\tau$) и используя тождество (13.1), получаем следующие результаты.

Теорема 13.1. *Пусть* $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ *— оператор* (12.4) *и* $\widehat{\mathcal{A}}^0$ *— эффективный оператор* (7.22). *Тогда при* $\tau \geqslant 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_1 \varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon}. \tag{13.2}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_1$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

Теорема 13.2. *Пусть* $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ *— оператор* (12.4) *и* $\widehat{\mathcal{A}}^0$ *— эффективный оператор* (7.22). *Пусть оператор* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$ *определен согласно* (7.25), (7.26). *Предположим, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. *Тогда при* $\tau \geqslant 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_2 \varepsilon^2}{\tau^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^2}. \tag{13.3}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_2$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

Из теоремы 13.2 и предложения 7.3 непосредственно вытекает следствие.

Следствие 13.1. *Пусть выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

1°. *Справедливы соотношения* (7.16), *т. е.* $g^0 = \overline{g}$.

2°. *Справедливы представления* (7.17), *т. е.* $g^0 = \underline{g}$.

3°. *Пусть* $n = 1$ *и элементы матриц* $g(\mathbf{x})$, b_β, $|\beta| = p$, *вещественны.*

Тогда справедлива оценка (13.3).

Замечание 13.1. Следствие 13.1 демонстрирует новый эффект, характерный для операторов высокого порядка: для скалярного оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ с вещественными коэффициентами экспонента приближается экспонентой эффективного оператора по операторной норме в L_2 с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ без учета каких-либо корректоров. Для операторов второго порядка такого эффекта нет.

13.2. Аппроксимация оператора $e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau}$ по энергетической норме. Теперь с помощью теорем 10.3, 10.4 и предложений 10.1, 10.4 мы получим аппроксимацию экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, а также аппроксимацию оператора $g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau}$ (отвечающего «потоку») по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$.

Помимо (12.5)–(12.7), нам понадобятся тождества

$$b(\mathbf{D}) = \varepsilon^{-p} T_\varepsilon^* b(\mathbf{D}) T_\varepsilon, \quad [\Lambda^\varepsilon] = T_\varepsilon^*[\Lambda]T_\varepsilon, \quad [\widetilde{g}^\varepsilon] = T_\varepsilon^*[\widetilde{g}]T_\varepsilon. \tag{13.4}$$

Пусть Π_ε — ПДО в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ с символом $\chi_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})$, т. е.

$$(\Pi_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon} e^{i\langle \mathbf{x},\boldsymbol{\xi}\rangle} \widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}. \tag{13.5}$$

Операторы (10.2) и (13.5) связаны соотношением

$$\Pi_\varepsilon = T_\varepsilon^* \Pi T_\varepsilon. \tag{13.6}$$

Положим

$$\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon;\tau) := [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} \Pi_\varepsilon. \tag{13.7}$$

Оператор (13.7) называют *корректором*; он непрерывно переводит $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

Теорема 13.3. *Пусть* $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ *— оператор* (12.4) *и* $\widehat{\mathcal{A}}^0$ *— эффективный оператор* (7.22). *Пусть* Π_ε *— оператор* (13.5), $\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon;\tau)$ *— оператор* (13.7), *а матрица-функция* $\widetilde{g}$ *определена в* (7.13). *Тогда при* $\tau>0$ *и* $\varepsilon>0$ *справедливы оценки*

$$\left\| \mathbf{D}^p \left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} - \varepsilon^p \widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon;\tau) \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_7 \varepsilon}{\tau^{\frac12}(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}, \tag{13.8}$$

$$\left\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau}\Pi_\varepsilon \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_6 \varepsilon}{\tau^{\frac12}(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}. \tag{13.9}$$

Постоянные $\widehat{\mathcal{C}}_6$ *и* $\widehat{\mathcal{C}}_7$ *зависят лишь от данных задачи* (8.2).

Доказательство. Начнем с проверки неравенства (13.8). В силу (12.7), (13.4) и (13.6) справедливо тождество

$$\varepsilon^p \widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon;\tau) = T_\varepsilon^* [\Lambda] b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \varepsilon^{-2p}\tau} \Pi T_\varepsilon. \tag{13.10}$$

Отсюда и из (12.5)–(12.7) вытекает равенство

$$\begin{gathered} \left\| \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2} \left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} - \varepsilon^p \widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon;\tau) \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \\ = \varepsilon^{-p} \left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2} \left(e^{-\widehat{\mathcal{A}} \varepsilon^{-2p}\tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \varepsilon^{-2p}\tau} - [\Lambda] b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \varepsilon^{-2p}\tau}\Pi \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{gathered} \tag{13.11}$$

Теперь из (10.3) (с заменой τ на $\varepsilon^{-2p}\tau$) и (13.11) следует неравенство

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2} \left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} - \varepsilon^p \widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon;\tau) \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_3 \varepsilon}{\tau^{\frac12}(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}. \tag{13.12}$$

Из (13.12) и из нижней оценки (12.3) (при $f=\mathbf{1}_n$) вытекает искомое неравенство (13.8) с постоянной $\widehat{\mathcal{C}}_7 = c_0^{-\frac12}\widehat{\mathcal{C}}_3$.

Перейдем к проверке оценки (13.9). Аналогично (13.11) имеем

$$\begin{gathered} \left\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau}\Pi_\varepsilon \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \\ = \varepsilon^{-p} \left\| g b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}} \varepsilon^{-2p}\tau} - \widetilde{g} b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \varepsilon^{-2p}\tau}\Pi \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{gathered}$$

Отсюда и из (10.4) (с заменой τ на $\varepsilon^{-2p}\tau$) следует оценка (13.9). $\square$

Установим теперь аппроксимацию экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau}$ по $(L_2 \to H^p)$-норме.

Теорема 13.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 13.3.

1°. *При* $\tau>0$ *и* $\varepsilon>0$ *справедлива оценка*

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} - \varepsilon^p \widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon;\tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_8 (1+\tau^{-\frac12})\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon}. \tag{13.13}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_8$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

2°. *Предположим дополнительно, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. *Тогда при* $\tau>0$ *и* $\varepsilon>0$ *справедлива оценка*

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} - \varepsilon^p \widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon;\tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_9 \left(\frac{\varepsilon}{\tau^{\frac12}(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2}{\tau^{\frac1p}+\varepsilon^2} \right). \tag{13.14}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_9$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

Доказательство. Из (12.6), (12.7) и (13.10) вытекает равенство

$$\begin{gathered} \left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} - \varepsilon^p \widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon;\tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \\ = \left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}} \varepsilon^{-2p}\tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \varepsilon^{-2p}\tau} - [\Lambda] b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \varepsilon^{-2p}\tau}\Pi \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{gathered} \tag{13.15}$$

Теперь из (10.12) (с заменой τ на $\varepsilon^{-2p}\tau$) и (13.15) следует неравенство

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} - \varepsilon^p \widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon;\tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_4 \varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon}. \tag{13.16}$$

Поскольку $(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^p \leqslant 2^{p-1}(1+|\boldsymbol{\xi}|^{2p})$, то из нижней оценки (12.2) (при $f = \mathbf{1}_n$) для любой функции $\mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|^2_{H^p(\mathbb{R}^d)} &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} (1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^p |\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi} \leqslant 2^{p-1} \int\limits_{\mathbb{R}^d} (1+|\boldsymbol{\xi}|^{2p}) |\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi} \leqslant \\ &\leqslant 2^{p-1} \left(\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty} \|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2} \mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \right). \end{aligned} \tag{13.17}$$

Отсюда и из (13.12), (13.16) следует, что

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} - \varepsilon^p \widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon;\tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2^{\frac{p-1}{2}} \left(\widehat{\mathcal{C}}_4 + \widehat{\mathcal{C}}_3 \alpha_0^{-\frac12} \|g^{-1}\|^{\frac12}_{L_\infty} \tau^{-\frac12} \right) \frac{\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon}.$$

Это доказывает искомую оценку (13.13) с постоянной

$$\widehat{\mathcal{C}}_8 = 2^{\frac{p-1}{2}} \max\left\{ \widehat{\mathcal{C}}_4, \widehat{\mathcal{C}}_3 \alpha_0^{-\frac12} \|g^{-1}\|^{\frac12}_{L_\infty} \right\}.$$

Перейдем к доказательству утверждения 2°. Предположим, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. Тогда выполнена оценка (10.13), которая в комбинации с (13.15) дает

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} - \varepsilon^p \widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon;\tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_5 \varepsilon^2}{\tau^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^2}.$$

Вместе с (13.12) и (13.17) это приводит к оценке (13.14) с постоянной

$$\widehat{\mathcal{C}}_9 = 2^{\frac{p-1}{2}} \max\left\{ \widehat{\mathcal{C}}_5, \widehat{\mathcal{C}}_3 \alpha_0^{-\frac12} \|g^{-1}\|^{\frac12}_{L_\infty} \right\}.$$

□

По аналогии с доказательством теоремы 13.3 из теоремы 10.4 вытекает следующий результат.

Теорема 13.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 13.3. *Положим*

$$\widehat{\mathcal{K}}^0(\varepsilon;\tau) := [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau}.$$

Тогда справедливы оценки

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{D}^p \left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} - \varepsilon^p \widehat{\mathcal{K}}^0(\varepsilon;\tau) \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \widehat{\mathcal{C}}_7^\circ \varepsilon \tau^{-\frac12 - \frac{1}{2p}}, \quad \varepsilon > 0,\ \tau \geqslant \varepsilon^{2p}, \\ \left\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \widehat{\mathcal{C}}_6^\circ \varepsilon \tau^{-\frac12 - \frac{1}{2p}}, \quad \varepsilon > 0,\ \tau \geqslant \varepsilon^{2p}. \end{aligned}$$

Постоянные $\widehat{\mathcal{C}}_6^\circ$ *и* $\widehat{\mathcal{C}}_7^\circ$ *зависят лишь от данных задачи* (8.2).

По аналогии с доказательством теоремы 13.4 из теоремы 10.4 и предложения 10.4 выводим следующее утверждение.

Теорема 13.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 13.5.

1°. *Справедлива оценка*

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} - \varepsilon^p \widehat{\mathcal{K}}^0(\varepsilon;\tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_8^\circ \varepsilon \tau^{-\frac{1}{2p}}, \quad \varepsilon > 0,\ \tau \geqslant \varepsilon^{2p}.$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_8^\circ$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

2°. *Предположим дополнительно, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. *Тогда справедлива оценка*

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} - \varepsilon^p \widehat{\mathcal{K}}^0(\varepsilon;\tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_9^\circ \left(\varepsilon \tau^{-\frac12 - \frac{1}{2p}} + \varepsilon^2 \tau^{-\frac{1}{p}} \right), \quad \varepsilon > 0,\ \tau \geqslant \varepsilon^{2p}.$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_9^\circ$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

13.3. Специальные случаи. Остановимся на специальных случаях.

Пусть имеют место соотношения (7.16), т. е. $g^0 = \overline{g}$. В этом случае $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$, а потому корректор (13.7) обращается в нуль. Кроме того, в этом случае $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. Тогда из теорем 13.3 и 13.4 (2°) вытекает следующий результат.

Следствие 13.2. *Пусть выполнены соотношения* (7.16)*, т. е.* $g^0 = \overline{g}$*. Тогда при* $\tau > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\left\| \mathbf{D}^p \left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_7 \varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}} (\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)},$$

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_9 \left(\frac{\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}} (\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2}{\tau^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^2} \right).$$

Рассмотрим теперь случай, когда выполнены соотношения (7.17), т. е. $g^0 = \underline{g}$. В этом случае $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0$. Из теоремы 10.3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 13.3. *Пусть выполнены соотношения* (7.17)*, т. е.* $g^0 = \underline{g}$*. Тогда при* $\tau > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\left\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - g^0 b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}'_6 \varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}} (\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)}. \tag{13.18}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}'_6$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

Доказательство. Поскольку $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0$, то неравенство (10.4) сейчас принимает вид

$$\left\| g b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}} \tau} - g^0 b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} \Pi \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_6}{\tau^{\frac{1}{2}} (\tau^{\frac{1}{2p}} + 1)}, \quad \tau > 0. \tag{13.19}$$

По аналогии с доказательством предложения 10.2, используя (5.5), (8.4), (10.2) и оценку $x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}} e^{-x} \leqslant 1$ при $x \geqslant 0$, имеем

$$\left\| g^0 b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \widetilde{\tau}} (I - \Pi) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{\frac{1}{2}} \sup_{|\boldsymbol{\xi}| \geqslant r_0} |\boldsymbol{\xi}|^p e^{-\widehat{c}_* |\boldsymbol{\xi}|^{2p} \widetilde{\tau}} \leqslant \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{\frac{1}{2}} \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}} r_0^{-1} \widetilde{\tau}^{\,-\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}}.$$

Если же использовать оценку $x^{\frac{1}{2}} e^{-x} \leqslant 1$ при $x \geqslant 0$, то получим

$$\left\| g^0 b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \widetilde{\tau}} (I - \Pi) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{\frac{1}{2}} \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2}} \widetilde{\tau}^{\,-\frac{1}{2}}.$$

Применяя первое неравенство при $\widetilde{\tau} \geqslant 1$, а второе — при $0 < \widetilde{\tau} < 1$, приходим к оценке

$$\left\| g^0 b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \widetilde{\tau}} (I - \Pi) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}''_6}{\widetilde{\tau}^{\frac{1}{2}} (\widetilde{\tau}^{\frac{1}{2p}} + 1)},$$

где $\widehat{\mathcal{C}}''_6 = 2\|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{\frac{1}{2}} \max \left\{ \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}} r_0^{-1}, \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2}} \right\}$. Вместе с (13.19) это влечет

$$\left\| g b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}} \widetilde{\tau}} - g^0 b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \widetilde{\tau}} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}'_6}{\widetilde{\tau}^{\frac{1}{2}} (\widetilde{\tau}^{\frac{1}{2p}} + 1)}, \quad \widetilde{\tau} > 0,$$

где $\widehat{\mathcal{C}}'_6 = \widehat{\mathcal{C}}_6 + \widehat{\mathcal{C}}''_6$. Полагая $\widetilde{\tau} = \varepsilon^{-2p} \tau$ и применяя масштабное преобразование, приходим к искомой оценке (13.18). ☐

14. УСРЕДНЕНИЕ ОПЕРАТОРА $f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^*$

14.1. Аппроксимация оператора $f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^*$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Используя (12.6), (12.7) и унитарность оператора T_ε, получаем

$$\left\| f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \left\| f e^{-\mathcal{A}\varepsilon^{-2p}\tau} f^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \varepsilon^{-2p}\tau} f_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{14.1}$$

Применяя теоремы 11.1, 11.2 (с заменой τ на $\varepsilon^{-2p}\tau$) и используя тождество (14.1), приходим к следующим результатам.

Теорема 14.1. *Пусть $\mathcal{A}_\varepsilon$ — оператор* (12.1) *и $\mathcal{A}^0$ — оператор* (9.3). *Пусть матрица f_0 определена в* (9.1). *Тогда при $\tau \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\left\| f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C_1 \varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon}.$$

Постоянная C_1 зависит лишь от данных задачи (9.7).

Теорема 14.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 14.1. *Пусть оператор $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$ определен согласно* (7.25), (7.26). *Предположим, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда при $\tau \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\left\| f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C_2 \varepsilon^2}{\tau^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^2}. \tag{14.2}$$

Постоянная C_2 зависит лишь от данных задачи (9.7).

Из теоремы 14.2 и предложения 7.3 непосредственно вытекает следствие.

Следствие 14.1. *Пусть выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

1°. *Справедливы соотношения* (7.16), *т. е.* $g^0 = \overline{g}$.

2°. *Справедливы представления* (7.17), *т. е.* $g^0 = \underline{g}$.

3°. *Пусть $n = 1$ и элементы матриц $g(\mathbf{x})$, b_β, $|\beta| = p$, вещественны.*

Тогда справедлива оценка (14.2).

14.2. Аппроксимация оператора $f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^*$ по энергетической норме. Теперь с помощью теорем 11.3, 11.4 и предложений 11.1, 11.3 мы получим аппроксимацию оператора $f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^*$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, а также аппроксимацию оператора $g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^*$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$.

Введем корректор

$$\mathcal{K}(\varepsilon;\tau) := [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 \Pi_\varepsilon. \tag{14.3}$$

Из теоремы 11.3 с помощью масштабного преобразования вытекает следующий результат; его доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 13.3.

Теорема 14.3. *Пусть $\mathcal{A}_\varepsilon$ — оператор* (12.1) *и $\mathcal{A}^0$ — оператор* (9.3). *Пусть матрица f_0 определена в* (9.1). *Пусть Π_ε — оператор* (13.5), *$\mathcal{K}(\varepsilon;\tau)$ — оператор* (14.3), *а матрица-функция $\widetilde{g}$ определена в* (7.13). *Тогда при $\tau > 0$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\left\| \mathbf{D}^p \left(f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 - \varepsilon^p \mathcal{K}(\varepsilon;\tau) \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C_7 \varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)},$$

$$\left\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^* - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 \Pi_\varepsilon \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C_6 \varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)}.$$

Постоянные C_6 и C_7 зависят лишь от данных задачи (9.7).

Аналогично, из теоремы 11.3 и предложения 11.1 вытекает следующий результат; его доказательство аналогично доказательству теоремы 13.4.

Теорема 14.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 14.3.

1°. *При $\tau > 0$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\left\| f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 - \varepsilon^p \mathcal{K}(\varepsilon;\tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_8 (1+\tau^{-\frac{1}{2}})\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon}.$$

Постоянная $\mathcal{C}_8$ зависит лишь от данных задачи (9.7).

2°. *Предположим дополнительно, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. Тогда при $\tau > 0$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\left\| f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 - \varepsilon^p \mathcal{K}(\varepsilon;\tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_9 \left(\frac{\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2}{\tau^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^2} \right).$$

Постоянная $\mathcal{C}_9$ зависит лишь от данных задачи (9.7).

В свою очередь, теорема 11.4 за счет масштабного преобразования влечет следующий результат.

Теорема 14.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 14.3. *Положим*

$$\mathcal{K}^0(\varepsilon;\tau) := [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0.$$

Тогда справедливы оценки

$$\left\| \mathbf{D}^p \left(f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 - \varepsilon^p \mathcal{K}^0(\varepsilon;\tau) \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_7^\circ \varepsilon \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \varepsilon > 0,\ \tau \geqslant \varepsilon^{2p},$$

$$\left\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^* - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_6^\circ \varepsilon \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \varepsilon > 0,\ \tau \geqslant \varepsilon^{2p}.$$

Постоянные $\mathcal{C}_6^\circ$ и $\mathcal{C}_7^\circ$ зависят лишь от данных задачи (9.7).

Из теоремы 11.4 и предложения 11.3 выводим следующее утверждение.

Теорема 14.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 14.5.

1°. *Справедлива оценка*

$$\left\| f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 - \varepsilon^p \mathcal{K}^0(\varepsilon;\tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_8^\circ \varepsilon \tau^{-\frac{1}{2p}}, \quad \varepsilon > 0,\ \tau \geqslant \varepsilon^{2p}.$$

Постоянная $\mathcal{C}_8^\circ$ зависит лишь от данных задачи (9.7).

2°. *Предположим дополнительно, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. Тогда справедлива оценка*

$$\left\| f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 - \varepsilon^p \mathcal{K}^0(\varepsilon;\tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_9^\circ \left(\varepsilon \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} + \varepsilon^2 \tau^{-\frac{1}{p}} \right), \quad \varepsilon > 0,\ \tau \geqslant \varepsilon^{2p}.$$

Постоянная $\mathcal{C}_9^\circ$ зависит лишь от данных задачи (9.7).

14.3. Специальные случаи.

Остановимся на специальных случаях.

Пусть имеют место соотношения (7.16), т. е. $g^0 = \overline{g}$. В этом случае $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$, а потому корректор (14.3) обращается в нуль и $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. Тогда из теорем 14.3 и 14.4 вытекает следующий результат.

Следствие 14.2. *Пусть выполнены соотношения* (7.16), *т. е. $g^0 = \overline{g}$. Тогда при $\tau > 0$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\left\| \mathbf{D}^p \left(f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_7 \varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)},$$

$$\left\| f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_9 \left(\frac{\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2}{\tau^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^2} \right).$$

Рассмотрим теперь случай, когда выполнены соотношения (7.17), т. е. $g^0 = \underline{g}$. В этом случае $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0$. Из теоремы 11.3 вытекает следующее утверждение; его доказательство полностью аналогично доказательству следствия 13.3.

Следствие 14.3. *Пусть выполнены соотношения* (7.17), *т. е.* $g^0 = \underline{g}$. *Тогда при* $\tau > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\left\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^* - g^0 b(\mathbf{D}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_6'\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}.$$

Постоянная $\mathcal{C}_6'$ *зависит лишь от данных задачи* (9.7).

15. Усреднение параболической задачи Коши

15.1. Задача с оператором $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$. Аппроксимация решений в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Результаты разделов 13 и 14 можно применить к усреднению решений параболических уравнений с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами. Пусть $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$, $0 < T \leqslant \infty$. Изучаем поведение решения $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$ следующей задачи:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ \tau\in(0,T),\\ &\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d, \end{aligned} \tag{15.1}$$

где $\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F}\in L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ с некоторым $1 < q \leqslant \infty$. Справедливо представление

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) = e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon\tau}\boldsymbol{\phi} + \int\limits_0^\tau e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon(\tau-\widetilde{\tau})}\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\,d\widetilde{\tau}. \tag{15.2}$$

Пусть $\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — эффективный оператор и $\mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)$ — решение «усредненной» задачи

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ \tau\in(0,T),\\ &\mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{15.3}$$

Аналогично (15.2) имеем:

$$\mathbf{u}_0(\cdot,\tau) = e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\boldsymbol{\phi} + \int\limits_0^\tau e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\tau-\widetilde{\tau})}\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\,d\widetilde{\tau}. \tag{15.4}$$

Из теоремы 13.1 и представлений (15.2), (15.4) вытекает оценка

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_1\varepsilon(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{-1}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} +\\ &+ \widehat{\mathcal{C}}_1\varepsilon\int\limits_0^\tau ((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{-1}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\,d\widetilde{\tau} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_1\varepsilon(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{-1}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} +\\ &+ \widehat{\mathcal{C}}_1\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\left(\int\limits_0^\tau ((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{-q'}\,d\widetilde{\tau}\right)^{\frac{1}{q'}}, \end{aligned}$$

где $1 < q \leqslant \infty$ и $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q'} = 1$. Оценивая интеграл в правой части, приходим к следующему результату.

Теорема 15.1. *Пусть* $0 < T \leqslant \infty$ *и* $\mathbf{F}\in L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ *с некоторым* $1 < q \leqslant \infty$. *Пусть* $\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи* (15.1) *и* $\mathbf{u}_0$ *— решение усредненной задачи* (15.3). *Тогда для любого* $\tau\in(0,T)$ *при* $\varepsilon\to 0$ *имеет место сходимость* $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)$ *к* $\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)$ *в* L_2*-норме. При* $\tau\in(0,T)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_1\varepsilon\left((\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{-1}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \theta(q,\varepsilon,\tau)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\right), \tag{15.5}$$

где

$$\theta(q,\varepsilon,\tau)=\begin{cases} c(p,q)\tau^{1-\frac{1}{2p}-\frac{1}{q}}, & \dfrac{2p}{2p-1}<q\leqslant\infty,\\ (\ln|\tau+1|+2p|\ln\varepsilon|)^{\frac{1}{2p}}, & q=\dfrac{2p}{2p-1},\\ c(p,q)\varepsilon^{2p-1-\frac{2p}{q}}, & 1<q<\dfrac{2p}{2p-1}. \end{cases} \tag{15.6}$$

Здесь $c(p,q)$ — постоянная, зависящая только от p и q.

При фиксированном $\tau\in(0,T)$ коэффициент при $\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ в (15.5) имеет порядок $O(\varepsilon)$. Коэффициент при $\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}$ имеет порядок $O(\varepsilon)$ при $\dfrac{2p}{2p-1}<q\leqslant\infty$; $O(\varepsilon|\ln\varepsilon|^{\frac{1}{2p}})$ при $q=\dfrac{2p}{2p-1}$; при $1<q<\dfrac{2p}{2p-1}$ его порядок $O(\varepsilon^{2p-\frac{2p}{q}})$ зависит от q.

Аналогично при дополнительном условии, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})\equiv 0$, из теоремы 13.2 выводим следующее утверждение.

Теорема 15.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 15.1. *Пусть оператор $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$ определен согласно* (7.25), (7.26). *Предположим, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})=0$ при всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. Тогда при $\tau\in(0,T)$ и $0<\varepsilon\leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\widehat{\mathcal{C}}_2\varepsilon^2\left((\tau^{\frac{1}{p}}+\varepsilon^2)^{-1}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\widetilde{\theta}(q,\varepsilon,\tau)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\right), \tag{15.7}$$

где

$$\widetilde{\theta}(q,\varepsilon,\tau)=\begin{cases} c(p,q)\tau^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & \dfrac{p}{p-1}<q\leqslant\infty,\\ (\ln|\tau+1|+2p|\ln\varepsilon|)^{\frac{1}{p}}, & q=\dfrac{p}{p-1},\\ c(p,q)\varepsilon^{2p-2-\frac{2p}{q}}, & 1<q<\dfrac{p}{p-1}. \end{cases} \tag{15.8}$$

В условиях теоремы 15.2 при фиксированном $\tau\in(0,T)$ коэффициент при $\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ в (15.7) имеет порядок $O(\varepsilon^2)$. Коэффициент при $\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}$ имеет порядок $O(\varepsilon^2)$ при $\dfrac{p}{p-1}<q\leqslant\infty$; $O(\varepsilon^2|\ln\varepsilon|^{\frac{1}{p}})$ при $q=\dfrac{p}{p-1}$; при $1<q<\dfrac{p}{p-1}$ его порядок $O(\varepsilon^{2p-\frac{2p}{q}})$ зависит от q.

15.2. Задача с оператором $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$. Аппроксимация решений в $L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$. Предположим теперь, что $0<T<\infty$ и $1\leqslant q<\infty$. Применяя теорему 13.1, можно оценить норму разности $\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{u}_0$ в классе $L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$.

Теорема 15.3. *Пусть $0<T<\infty$ и $\mathbf{F}\in L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ при некотором $1\leqslant q<\infty$. Пусть $\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи* (15.1) *и $\mathbf{u}_0$ — решение усредненной задачи* (15.3). *Тогда при $0<\varepsilon\leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{u}_0\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\widehat{\mathcal{C}}_1\varepsilon\left(\rho(q,\varepsilon,T)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+c(p,q)T^{1-\frac{1}{2p}}\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\right), \tag{15.9}$$

где

$$\rho(q,\varepsilon,T)=\theta(q',\varepsilon,T)=\begin{cases} c(p,q)T^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2p}}, & 1\leqslant q<2p,\\ (\ln(T+1)+2p|\ln\varepsilon|)^{\frac{1}{2p}}, & q=2p,\\ c(p,q)\varepsilon^{\frac{2p}{q}-1}, & 2p<q<\infty. \end{cases} \tag{15.10}$$

Доказательство. В силу (13.2), (15.2) и (15.4)

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{u}_0\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\widehat{\mathcal{C}}_1\varepsilon\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\mathcal{I}_q(\varepsilon;T)^{\frac{1}{q}}+\widehat{\mathcal{C}}_1\varepsilon\Bigl(\int\limits_0^T\mathcal{L}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F})^q\,d\tau\Bigr)^{\frac{1}{q}}, \tag{15.11}$$

где

$$\mathcal{I}_q(\varepsilon;T) := \int\limits_0^T \frac{d\tau}{(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^q}, \quad \mathcal{L}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F}) := \int\limits_0^\tau ((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{-1}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\,d\widetilde{\tau}.$$

Оценивая интеграл $\mathcal{I}_q(\varepsilon;T)$, получаем

$$\mathcal{I}_q(\varepsilon;T)^{\frac{1}{q}} \leqslant \rho(q,\varepsilon,T). \tag{15.12}$$

Оценим теперь второе слагаемое в правой части (15.11). В случае $q=1$, меняя порядок интегрирования, имеем

$$\int\limits_0^T \mathcal{L}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F})\,d\tau = \int\limits_0^T d\tau \int\limits_0^\tau ((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{-1}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\,d\widetilde{\tau} = \\ = \int\limits_0^T d\widetilde{\tau}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \int\limits_{\widetilde{\tau}}^T ((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{-1}\,d\tau.$$

Оценивая внутренний интеграл через $\left(1-\dfrac{1}{2p}\right)^{-1}T^{1-\frac{1}{2p}}$, получаем

$$\int\limits_0^T \mathcal{L}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F})\,d\tau \leqslant c(p)T^{1-\frac{1}{2p}}\|\mathbf{F}\|_{L_1((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}.$$

В случае, когда $1<q<\infty$, применим неравенство Гельдера:

$$\mathcal{L}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F}) \leqslant \Bigl(\int\limits_0^\tau ((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{-1}\,d\widetilde{\tau}\Bigr)^{\frac{1}{q'}} \Bigl(\int\limits_0^\tau ((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{-1}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|^q_{L_2(\mathbb{R}^d)}\,d\widetilde{\tau}\Bigr)^{\frac{1}{q}}. \tag{15.13}$$

Интеграл в первой скобке не превосходит $\left(1-\dfrac{1}{2p}\right)^{-1}T^{1-\frac{1}{2p}}$. Используя (15.13) и меняя порядок интегрирования, приходим к неравенству

$$\int\limits_0^T \mathcal{L}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F})^q\,d\tau \leqslant c(p,q)T^{(1-\frac{1}{2p})\frac{q}{q'}} \int\limits_0^T d\tau \int\limits_0^\tau ((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{-1}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|^q_{L_2(\mathbb{R}^d)}\,d\widetilde{\tau} = \\ = c(p,q)T^{(1-\frac{1}{2p})\frac{q}{q'}} \int\limits_0^T d\widetilde{\tau}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|^q_{L_2(\mathbb{R}^d)} \int\limits_{\widetilde{\tau}}^T ((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{-1}\,d\tau \leqslant \\ \leqslant \tilde{c}(p,q)T^{(1-\frac{1}{2p})(\frac{q}{q'}+1)}\|\mathbf{F}\|^q_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}.$$

В итоге при всех $1 \leqslant q < \infty$ установлено неравенство

$$\Bigl(\int\limits_0^T \mathcal{L}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F})^q\,d\tau\Bigr)^{\frac{1}{q}} \leqslant c(p,q)T^{1-\frac{1}{2p}}\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}. \tag{15.14}$$

Теперь из (15.11), (15.12) и (15.14) вытекает искомая оценка (15.9). ☐

В оценке (15.9) коэффициент при $\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}$ есть $O(\varepsilon)$, а коэффициент при $\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ имеет порядок $O(\varepsilon)$ при $1 \leqslant q < 2p$; $O(\varepsilon|\ln\varepsilon|^{\frac{1}{2p}})$ при $q=2p$; а при $2p<q<\infty$ его порядок $O(\varepsilon^{\frac{2p}{q}})$ зависит от q.

Аналогично, при дополнительном условии, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$, из теоремы 13.2 выводим следующее утверждение.

Теорема 15.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 15.3. *Пусть оператор* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$ *определен согласно* (7.25), (7.26). *Предположим, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_2\varepsilon^2 \left(\widetilde{\rho}(q,\varepsilon,T)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + c(p,q)T^{1-\frac{1}{p}}\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\right), \tag{15.15}$$

где

$$\widetilde{\rho}(q,\varepsilon,T) = \widetilde{\theta}(q',\varepsilon,T) = \begin{cases} c(p,q)T^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, & 1 \leqslant q < p, \\ (\ln(T+1) + 2p|\ln\varepsilon|)^{\frac{1}{p}}, & q = p, \\ c(p,q)\varepsilon^{\frac{2p}{q}-2}, & p < q < \infty. \end{cases} \tag{15.16}$$

В оценке (15.15) коэффициент при $\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}$ есть $O(\varepsilon^2)$, а коэффициент при $\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ имеет порядок $O(\varepsilon^2)$ при $1 \leqslant q < p$; $O(\varepsilon^2|\ln\varepsilon|^{\frac{1}{p}})$ при $q = p$; а при $p < q < \infty$ его порядок $O(\varepsilon^{\frac{2p}{q}})$ зависит от q.

15.3. Задача с оператором $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$. **Аппроксимация решений в** $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$**.** Получим теперь аппроксимацию решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ задачи (15.1) по норме в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, а также аппроксимацию «потока» $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ по норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$. В случае, когда $\mathbf{F} = 0$, из теоремы 13.5 непосредственно вытекает следующий результат.

Теорема 15.5. *Пусть* $\mathbf{F} = 0$ *и* $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ — *решение задачи* (15.1) *и* $\mathbf{u}_0$ — *решение усредненной задачи* (15.3). *Пусть* $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$. *Пусть* Λ — Γ*-периодическое решение задачи* (7.9), *а матрица-функция* $\widetilde{g}$ *определена в* (7.13). *Тогда при* $\tau \in (0,T)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \tau^{\frac{1}{2p}}$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{D}^p\left(\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_7^\circ\varepsilon\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_6^\circ\varepsilon\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

В свою очередь, теорема 13.6 приводит к следующему утверждению.

Теорема 15.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 15.5.

1°. *При* $\tau \in (0,T)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \tau^{\frac{1}{2p}}$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_8^\circ\varepsilon\tau^{-\frac{1}{2p}}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

2°. *Предположим дополнительно, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. *Тогда при* $\tau \in (0,T)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \tau^{\frac{1}{2p}}$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_9^\circ\left(\varepsilon\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} + \varepsilon^2\tau^{-\frac{1}{p}}\right)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Если $\mathbf{F} \neq 0$, то нам нужны аппроксимации экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon\tau}$ при всех значениях $0 < \tau < T$ (а не только при $\tau \geqslant \varepsilon^{2p}$), а потому мы опираемся на теорему 13.3.

Теорема 15.7. *Пусть* $\mathbf{F} \in L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ *для некоторого* $2 < q \leqslant \infty$ *и* $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ — *решение задачи* (15.1) *и* $\mathbf{u}_0$ — *решение усредненной задачи* (15.3). *Пусть* $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$. *Пусть* Λ — Γ*-периодическое решение задачи* (7.9), *а матрица-функция* $\widetilde{g}$ *определена в* (7.13). *Пусть оператор* Π_ε *определен в* (13.5). *Тогда при* $\tau \in (0,T)$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\begin{gathered}\|\mathbf{D}^p\left(\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0)(\cdot,\tau)\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \\ \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_7\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \widehat{\mathcal{C}}_7\,\varepsilon\,\Theta(q,\varepsilon,\tau)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))},\end{gathered} \tag{15.17}$$

$$\begin{gathered}\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \\ \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_6\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \widehat{\mathcal{C}}_6\,\varepsilon\,\Theta(q,\varepsilon,\tau)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}.\end{gathered} \tag{15.18}$$

Здесь

$$\Theta(q,\varepsilon,\tau)=\begin{cases} c(p,q)\tau^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}-\frac{1}{2p}}, & \dfrac{2p}{p-1}<q\leqslant\infty,\\ c(p)\left(\ln|\tau+1|+|\ln\varepsilon|\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}}, & q=\dfrac{2p}{p-1},\\ c(p,q)\varepsilon^{p-1-\frac{2p}{q}}, & 2<q<\dfrac{2p}{p-1}. \end{cases} \tag{15.19}$$

Доказательство. Из теоремы 13.3 и представлений (15.2), (15.4) вытекает оценка

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{D}^p\left(\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)-\varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0)(\cdot,\tau)\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\\ &\leqslant\frac{\widehat{\mathcal{C}}_7\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\widehat{\mathcal{C}}_7\varepsilon\int\limits_0^\tau\frac{\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{(\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2}}((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}\,d\widetilde{\tau}\leqslant\\ &\leqslant\frac{\widehat{\mathcal{C}}_7\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\widehat{\mathcal{C}}_7\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\left(\int\limits_0^\tau\frac{d\widetilde{\tau}}{(\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{q'}{2}}((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{q'}}\right)^{\frac{1}{q'}}, \end{aligned}$$

где $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q'}=1$. Интеграл в правой части сходится при условии $q'<2$, т. е. $q>2$. Оценивая интеграл в правой части, приходим к неравенству (15.17).

Аналогично из (13.9) и представлений (15.2), (15.4) выводится оценка (15.18). ☐

Теперь из теоремы 13.4 выводим следующее утверждение.

Теорема 15.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 15.7.

1°. *При* $0<\tau<T$ *и* $\varepsilon>0$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)-\varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{H^p(\mathbb{R}^d)}\leqslant\\ &\leqslant\frac{\widehat{\mathcal{C}}_8(1+\tau^{-\frac{1}{2}})\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\widehat{\mathcal{C}}_8\varepsilon\left(c(p,q)\tau^{1-\frac{1}{2p}-\frac{1}{q}}+\Theta(q,\varepsilon,\tau)\right)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T),L_2(\mathbb{R}^d))}, \end{aligned} \tag{15.20}$$

где $\Theta(q,\varepsilon,\tau)$ *определено в* (15.19).

2°. *Предположим дополнительно, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})\equiv 0$. *Тогда при* $\tau\in(0,T)$ *и* $\varepsilon>0$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)-\varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{H^p(\mathbb{R}^d)}\leqslant\\ &\leqslant\widehat{\mathcal{C}}_9\left(\frac{\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}+\frac{\varepsilon^2}{\tau^{\frac{1}{p}}+\varepsilon^2}\right)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\widehat{\mathcal{C}}_9\left(\varepsilon\Theta(q,\varepsilon,\tau)+c(p,q)\varepsilon^2\tau^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}. \end{aligned} \tag{15.21}$$

Доказательство. Чтобы проверить неравенство (15.20), применим (13.13), (15.2) и (15.4):

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)-\varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0)(\cdot,\tau)\|_{H^p(\mathbb{R}^d)}\leqslant\\ &\leqslant\frac{\widehat{\mathcal{C}}_8(1+\tau^{-\frac{1}{2}})\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\widehat{\mathcal{C}}_8\varepsilon\int\limits_0^\tau\frac{(1+(\tau-\widetilde{\tau})^{-\frac{1}{2}})\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{(\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon}\,d\widetilde{\tau}\leqslant\\ &\leqslant\frac{\widehat{\mathcal{C}}_8(1+\tau^{-\frac{1}{2}})\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\widehat{\mathcal{C}}_8\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\left(\int\limits_0^\tau\frac{d\widetilde{\tau}}{((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{q'}}\right)^{\frac{1}{q'}}+\\ &+\widehat{\mathcal{C}}_8\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\left(\int\limits_0^\tau\frac{d\widetilde{\tau}}{(\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{q'}{2}}((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{q'}}\right)^{\frac{1}{q'}}. \end{aligned}$$

Оценивая интегралы в правой части, приходим к неравенству

$$
\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon^p \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0)(\cdot,\tau)\|_{H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \\
&\leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_8(1+\tau^{-\frac{1}{2}})\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \widehat{\mathcal{C}}_8\varepsilon\left(\theta(q,\varepsilon,\tau)+\Theta(q,\varepsilon,\tau)\right)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}.
\end{aligned}
$$

Поскольку при $q > 2$ выполнено $\theta(q,\varepsilon,\tau) = c(p,q)\tau^{1-\frac{1}{2p}-\frac{1}{q}}$, отсюда следует (15.20).

Аналогичным образом, применяя неравенство (13.14) (справедливое при условии $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$), получаем

$$
\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon^p \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0)(\cdot,\tau)\|_{H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \\
&\leqslant \widehat{\mathcal{C}}_9\left(\frac{\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2}{\tau^{\frac{1}{p}}+\varepsilon^2}\right)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \widehat{\mathcal{C}}_9\varepsilon^2\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\left(\int\limits_0^\tau \frac{d\widetilde{\tau}}{((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{p}}+\varepsilon^2)^{q'}}\right)^{\frac{1}{q'}} + \\
&+ \widehat{\mathcal{C}}_9\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\left(\int\limits_0^\tau \frac{d\widetilde{\tau}}{(\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{q'}{2}}((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{q'}}\right)^{\frac{1}{q'}} \leqslant \\
&\leqslant \widehat{\mathcal{C}}_9\left(\frac{\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2}{\tau^{\frac{1}{p}}+\varepsilon^2}\right)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \widehat{\mathcal{C}}_9\left(\varepsilon^2\widetilde{\theta}(q,\varepsilon,\tau)+\varepsilon\Theta(q,\varepsilon,\tau)\right)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}.
\end{aligned}
$$

Поскольку при $q > 2$ выполнено $\widetilde{\theta}(q,\varepsilon,\tau) = c(p,q)\tau^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$, отсюда следует (15.21). □

В условиях теорем 15.7 и 15.8 в оценках (15.17), (15.18), (15.20), (15.21) при фиксированном $\tau \in (0,T)$ коэффициент при $\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ имеет порядок $O(\varepsilon)$. Коэффициент при $\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}$ имеет порядок $O(\varepsilon)$ при $\dfrac{2p}{p-1} < q \leqslant \infty$; $O(\varepsilon|\ln\varepsilon|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}})$ при $q = \dfrac{2p}{p-1}$; при $2 < q < \dfrac{2p}{p-1}$ его порядок $O(\varepsilon^{p-\frac{2p}{q}})$ зависит от q.

15.4. Задача с оператором $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$. Аппроксимация решений в $L_q((0,T);H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$. Применение теоремы 13.3 дает возможность получить аппроксимацию решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ в классе $L_q((0,T);H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ в случае, когда $0 < T < \infty$ и $1 \leqslant q < 2$.

Теорема 15.9. *Пусть* $0 < T < \infty$ *и* $\mathbf{F} \in L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ *при некоторым* $1 \leqslant q < 2$. *Пусть* $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи* (15.1) *и* $\mathbf{u}_0$ *— решение усредненной задачи* (15.3). *Пусть* $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$. *Пусть* Λ *—* Γ*-периодическое решение задачи* (7.9), *а матрица-функция* $\widetilde{g}$ *определена в* (7.13). *Пусть оператор* Π_ε *определен в* (13.5). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{D}^p\left(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0\right)\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} &\leqslant \widehat{\mathcal{C}}_7\varepsilon\sigma(q,\varepsilon,T)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \\
&+ \widehat{\mathcal{C}}_7\varepsilon c(p,q)T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))},
\end{aligned}
\tag{15.22}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} &\leqslant \widehat{\mathcal{C}}_6\varepsilon\sigma(q,\varepsilon,T)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \\
&+ \widehat{\mathcal{C}}_6\varepsilon c(p,q)T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))},
\end{aligned}
\tag{15.23}
$$

где

$$
\sigma(q,\varepsilon,T) = \Theta(q',\varepsilon,T) = \begin{cases}
c(p,q)T^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, & 1 \leqslant q < \dfrac{2p}{p+1}, \\
c(p)\left(\ln(T+1)+|\ln\varepsilon|\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}}, & q = \dfrac{2p}{p+1}, \\
c(p,q)\varepsilon^{\frac{2p}{q}-p-1}, & \dfrac{2p}{p+1} < q < 2.
\end{cases}
\tag{15.24}
$$

Доказательство. В силу (13.8), (15.2) и (15.4)

$$\|\mathbf{D}^p\left(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0\right)\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_7\varepsilon\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\mathcal{J}_q(\varepsilon;T)^{\frac{1}{q}} + \widehat{\mathcal{C}}_7\varepsilon\Big(\int\limits_0^T \mathcal{M}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F})^q\,d\tau\Big)^{\frac{1}{q}}, \tag{15.25}$$

где

$$\mathcal{J}_q(\varepsilon;T) := \int\limits_0^T \frac{d\tau}{\tau^{\frac{q}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^q}, \quad \mathcal{M}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F}) := \int\limits_0^\tau \frac{\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\,d\widetilde{\tau}}{(\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2}}((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}.$$

Оценивая интеграл $\mathcal{J}_q(\varepsilon;T)$, получаем

$$\mathcal{J}_q(\varepsilon;T)^{\frac{1}{q}} \leqslant \sigma(q,\varepsilon,T). \tag{15.26}$$

Оценим теперь второе слагаемое в правой части (15.25). В случае $q=1$, меняя порядок интегрирования, имеем

$$\int\limits_0^T \mathcal{M}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F})\,d\tau = \int\limits_0^T d\tau \int\limits_0^\tau \frac{\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\,d\widetilde{\tau}}{(\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2}}((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)} =$$

$$= \int\limits_0^T d\widetilde{\tau}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \int\limits_{\widetilde{\tau}}^T \frac{d\tau}{(\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2}}((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}.$$

Оценивая внутренний интеграл через $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2p}\right)^{-1}T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}$, получаем

$$\int\limits_0^T \mathcal{M}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F})\,d\tau \leqslant c(p)T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|\mathbf{F}\|_{L_1((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}.$$

В случае, когда $1<q<\infty$, применим неравенство Гельдера:

$$\mathcal{M}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F}) \leqslant \left(\int\limits_0^\tau \frac{d\widetilde{\tau}}{(\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2}}((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int\limits_0^\tau \frac{\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|^q_{L_2(\mathbb{R}^d)}\,d\widetilde{\tau}}{(\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2}}((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{15.27}$$

Интеграл в первой скобке не превосходит $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2p}\right)^{-1}T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}$. Используя (15.27) и меняя порядок интегрирования, приходим к неравенству

$$\int\limits_0^T \mathcal{M}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F})^q\,d\tau \leqslant c(p,q)T^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2p})\frac{q}{q'}} \int\limits_0^T d\tau \int\limits_0^\tau \frac{\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|^q_{L_2(\mathbb{R}^d)}\,d\widetilde{\tau}}{(\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2}}((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)} =$$

$$= c(p,q)T^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2p})\frac{q}{q'}} \int\limits_0^T d\widetilde{\tau}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|^q_{L_2(\mathbb{R}^d)} \int\limits_{\widetilde{\tau}}^T \frac{d\widetilde{\tau}}{(\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2}}((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)} \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{c}(p,q)T^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2p})(\frac{q}{q'}+1)}\|\mathbf{F}\|^q_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}.$$

В итоге при всех $1\leqslant q<\infty$ установлено неравенство

$$\Big(\int\limits_0^T \mathcal{M}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F})^q\,d\tau\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant c(p,q)T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}. \tag{15.28}$$

Теперь из (15.25), (15.26) и (15.28) вытекает искомая оценка (15.22).

Аналогичным образом проверяется неравенство (15.23) с помощью (13.9). ☐

Аналогичным образом, из теоремы 13.4 выводим следующее утверждение.

Теорема 15.10. *Пусть выполнены условия теоремы* 15.9.

1°. *При* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon^p \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0\|_{L_q((0,T);H^p(\mathbb{R}^d))} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_8 \varepsilon \left(c(p,q) T^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2p}} + \sigma(q,\varepsilon,T) \right) \|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \\ + \widehat{\mathcal{C}}_8 \varepsilon \left(T^{1-\frac{1}{2p}} + T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} \right) \|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}. \tag{15.29}$$

Здесь $\sigma(q,\varepsilon,T)$ *определено в* (15.24).

2°. *Предположим дополнительно, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon^p \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0\|_{L_q((0,T);H^p(\mathbb{R}^d))} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_9 \left(c(p,q) \varepsilon^2 T^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} + \varepsilon \sigma(q,\varepsilon,T) \right) \|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \\ + \widehat{\mathcal{C}}_9 c(p,q) \left(\varepsilon T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} + \varepsilon^2 T^{1-\frac{1}{p}} \right) \|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}. \tag{15.30}$$

Доказательство. В силу (13.13), (15.2) и (15.4)

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon^p \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0\|_{L_q((0,T);H^p(\mathbb{R}^d))} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_8 \varepsilon \|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \left(\mathcal{I}_q(\varepsilon;T)^{\frac{1}{q}} + \mathcal{J}_q(\varepsilon;T)^{\frac{1}{q}} \right) + \\ + \widehat{\mathcal{C}}_8 \varepsilon \Big(\int\limits_0^T \mathcal{L}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F})^q \, d\tau \Big)^{\frac{1}{q}} + \widehat{\mathcal{C}}_8 \varepsilon \Big(\int\limits_0^T \mathcal{M}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F})^q \, d\tau \Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant \\ \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_8 \varepsilon \|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \left(\rho(q,\varepsilon,T) + \sigma(q,\varepsilon,T) \right) + \widehat{\mathcal{C}}_8 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} c(p,q) \left(T^{1-\frac{1}{2p}} + T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} \right).$$

В последнем переходе мы использовали (15.12), (15.14), (15.26), (15.28). Учитывая, что при $1 \leqslant q < 2$ выполнено $\rho(q,\varepsilon,T) = c(p,q) T^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2p}}$, приходим к неравенству (15.29).

Аналогичным образом при условии $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$ проверяется оценка (15.30) с помощью (13.14). ☐

В оценках (15.22), (15.23), (15.29), (15.30) коэффициент при $\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}$ есть $O(\varepsilon)$, а коэффициент при $\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ имеет порядок $O(\varepsilon)$ при $1 \leqslant q < \dfrac{2p}{p+1}$; $O(\varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}})$ при $q = \dfrac{2p}{p+1}$; а при $\dfrac{2p}{p+1} < q < 2$ его порядок $O(\varepsilon^{\frac{2p}{q}-p})$ зависит от q.

15.5. Более общая задача Коши. Аппроксимация решений в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Рассмотрим теперь более общую задачу Коши. Пусть $Q(\mathbf{x})$ — измеримая Γ-периодическая матрица-функция в $\mathbb{R}^d$ размера $n \times n$. Предполагается, что $Q(\mathbf{x})$ равномерно положительно определена и ограничена:

$$\mathfrak{c}' \mathbf{1}_n \leqslant Q(\mathbf{x}) \leqslant \mathfrak{c}'' \mathbf{1}_n, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < \mathfrak{c}' \leqslant \mathfrak{c}'' < \infty.$$

Пусть $0 < T \leqslant \infty$. Изучаем поведение решения $\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$ следующей задачи:

$$\begin{aligned} & Q^\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \ \tau \in (0,T), \\ & Q^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \tag{15.31}$$

где $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F} \in L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ с некоторым $1 < q \leqslant \infty$.

Представим матрицу-функцию $Q(\mathbf{x})^{-1}$ в факторизованной форме $Q(\mathbf{x})^{-1} = f(\mathbf{x}) f^*(\mathbf{x})$, где $f(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая матрица-функция размера $n \times n$, причем $f, f^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$. (Например, можно положить $f(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x})^{-1/2}$.)

Сделаем подстановку $\mathbf{w}_\varepsilon = (f^\varepsilon)^{-1} \mathbf{v}_\varepsilon$. Тогда $\mathbf{w}_\varepsilon$ является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau} = -(f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) + (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \ \tau \in (0,T), \\ & \mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{A}_\varepsilon = (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x})$. Тогда справедливо представление

$$\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,\tau) = e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau} (f^\varepsilon)^* \boldsymbol{\phi} + \int\limits_0^\tau e^{-\mathcal{A}_\varepsilon(\tau-\widetilde{\tau})} (f^\varepsilon)^* \mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau}) \, d\widetilde{\tau}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) = f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^* \boldsymbol{\phi} + \int\limits_0^\tau f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon(\tau-\widetilde{\tau})}(f^\varepsilon)^* \mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\, d\widetilde{\tau}. \tag{15.32}$$

Пусть f_0 определено в (9.1) и пусть $\mathcal{A}^0 = f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0$. Пусть $\mathbf{v}_0$ — решение «усредненной» задачи

$$\begin{aligned} &\overline{Q}\frac{\partial \mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ \tau\in(0,T), \\ &\overline{Q}\mathbf{v}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{15.33}$$

Аналогично (15.32) имеем:

$$\mathbf{v}_0(\cdot,\tau) = f_0 e^{-\mathcal{A}^0\tau} f_0 \boldsymbol{\phi} + \int\limits_0^\tau f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\tau-\widetilde{\tau})} f_0 \mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\, d\widetilde{\tau}. \tag{15.34}$$

Применяя теоремы 14.1, 14.2 и используя представления (15.32), (15.34), приходим к следующим результатам.

Теорема 15.11. *Пусть* $0 < T \leqslant \infty$ *и* $\mathbf{F} \in L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ *с некоторым* $1 < q \leqslant \infty$. *Пусть* $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. *Пусть* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *— решение задачи* (15.31) *и* $\mathbf{v}_0$ *— решение усредненной задачи* (15.33). *Тогда для любого* $\tau \in (0,T)$ *при* $\varepsilon \to 0$ *имеет место сходимость* $\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)$ *к* $\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)$ *в* L_2*-норме. При* $\tau \in (0,T)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_1 \varepsilon \left((\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)^{-1} \|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \theta(q,\varepsilon,\tau)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} \right),$$

где $\theta(q,\varepsilon,\tau)$ *определено в* (15.6).

Теорема 15.12. *Пусть выполнены условия теоремы* 15.11. *Пусть оператор* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$ *определен согласно* (7.25), (7.26). *Предположим, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. *Тогда при* $\tau \in (0,T)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_2 \varepsilon^2 \left((\tau^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^2)^{-1} \|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \widetilde{\theta}(q,\varepsilon,\tau)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} \right),$$

где $\widetilde{\theta}(q,\varepsilon,\tau)$ *определено в* (15.8).

15.6. Более общая задача Коши. Аппроксимация решений в $L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$.

Следующее утверждение выводится из теоремы 14.1 по аналогии с доказательством теоремы 15.3.

Теорема 15.13. *Пусть* $0 < T < \infty$ *и* $\mathbf{F} \in L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ *при некотором* $1 \leqslant q < \infty$. *Пусть* $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. *Пусть* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *— решение задачи* (15.31) *и* $\mathbf{v}_0$ *— решение усредненной задачи* (15.33). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} \leqslant \mathcal{C}_1 \varepsilon \left(\rho(q,\varepsilon,T)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + c(p,q) T^{1-\frac{1}{2p}} \|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} \right),$$

где $\rho(q,\varepsilon,T)$ *определено в* (15.10).

Аналогично, применение теоремы 14.2 приводит к следующему результату.

Теорема 15.14. *Пусть выполнены условия теоремы* 15.13. *Пусть оператор* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$ *определен согласно* (7.25), (7.26). *Предположим, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} \leqslant \mathcal{C}_2 \varepsilon^2 \left(\widetilde{\rho}(q,\varepsilon,T)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + c(p,q) T^{1-\frac{1}{p}} \|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} \right),$$

где $\widetilde{\rho}(q,\varepsilon,T)$ *определено в* (15.16).

15.7. Более общая задача Коши. Аппроксимация решений в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Получим теперь аппроксимацию решения $\mathbf{v}_\varepsilon$ задачи (15.31) по норме в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, а также аппроксимацию «потока» $\mathbf{q}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon$ по норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$. В случае, когда $\mathbf{F} = 0$, из теоремы 14.5 непосредственно вытекает следующий результат.

Теорема 15.15. *Пусть* $\mathbf{F} = 0$ *и* $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. *Пусть* $\mathbf{v}_\varepsilon$ — *решение задачи* (15.31) *и* $\mathbf{v}_0$ — *решение усредненной задачи* (15.33). *Пусть* $\mathbf{q}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon$. *Пусть* Λ — Γ*-периодическое решение задачи* (7.9), *а матрица-функция* $\widetilde{g}$ *определена в* (7.13). *Тогда при* $\tau \in (0,T)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \tau^{\frac{1}{2p}}$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{D}^p\left(\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_7^\circ \varepsilon\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|\phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

$$\|\mathbf{q}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_6^\circ \varepsilon\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|\phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Применение теоремы 14.6 дает следующее утверждение.

Теорема 15.16. *Пусть выполнены условия теоремы* 15.15.

1°. *При* $\tau \in (0,T)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \tau^{\frac{1}{2p}}$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_8^\circ \varepsilon\tau^{-\frac{1}{2p}}\|\phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

2°. *Предположим дополнительно, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. *Тогда при* $\tau \in (0,T)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \tau^{\frac{1}{2p}}$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_9^\circ \left(\varepsilon\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} + \varepsilon^2\tau^{-\frac{1}{p}}\right)\|\phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Если $\mathbf{F} \neq 0$, то нам нужны аппроксимации окаймленной экспоненты $f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon\tau}(f^\varepsilon)^*$ при всех значениях $0 < \tau < T$ (а не только при $\tau \geqslant \varepsilon^{2p}$), а потому мы опираемся на теорему 14.3.

Теорема 15.17. *Пусть* $\mathbf{F} \in L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ *для некоторого* $2 < q \leqslant \infty$ *и* $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. *Пусть* $\mathbf{v}_\varepsilon$ — *решение задачи* (15.31) *и* $\mathbf{v}_0$ — *решение усредненной задачи* (15.33). *Пусть* $\mathbf{q}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon$. *Пусть* Λ — Γ*-периодическое решение задачи* (7.9), *а матрица-функция* $\widetilde{g}$ *определена в* (7.13). *Пусть оператор* Π_ε *определен в* (13.5). *Тогда при* $\tau \in (0,T)$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{D}^p\left(\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon\mathbf{v}_0)(\cdot,\tau)\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \\
&\leqslant \frac{\mathcal{C}_7\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)}\|\phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \mathcal{C}_7\,\varepsilon\,\Theta(q,\varepsilon,\tau)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))},\\
&\|\mathbf{q}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \\
&\leqslant \frac{\mathcal{C}_6\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)}\|\phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \mathcal{C}_6\,\varepsilon\,\Theta(q,\varepsilon,\tau)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}.
\end{aligned}$$

Здесь $\Theta(q,\varepsilon,\tau)$ *определено в* (15.19).

Наконец, применение теоремы 14.4 дает следующий результат.

Теорема 15.18. *Пусть выполнены условия теоремы* 15.17.

1°. *При* $\tau \in (0,T)$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \\
&\leqslant \frac{\mathcal{C}_8(1 + \tau^{-\frac{1}{2}})\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon}\|\phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \mathcal{C}_8\varepsilon\left(c(p,q)\tau^{1-\frac{1}{2p}-\frac{1}{q}} + \Theta(q,\varepsilon,\tau)\right)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))},
\end{aligned}$$

2°. *Предположим дополнительно, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. *Тогда при* $\tau \in (0,T)$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \\
&\leqslant \mathcal{C}_9\left(\frac{\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2}{\tau^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^2}\right)\|\phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \mathcal{C}_9\left(\varepsilon\Theta(q,\varepsilon,\tau) + c(p,q)\varepsilon^2\tau^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}.
\end{aligned}$$

15.8. Более общая задача Коши. Аппроксимация решений в $L_q((0,T);H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$. Применяя теорему 14.3, выводим следующий результат по аналогии с доказательством теоремы 15.9.

Теорема 15.19. *Пусть* $0 < T < \infty$ *и* $\mathbf{F} \in L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ *при некотором* $1 \leqslant q < 2$. *Пусть* $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. *Пусть* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *— решение задачи* (15.31) *и* $\mathbf{v}_0$ *— решение усредненной задачи* (15.33). *Пусть* $\mathbf{q}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon$. *Пусть* Λ *— Γ-периодическое решение задачи* (7.9), *а матрица-функция* $\widetilde{g}$ *определена в* (7.13). *Пусть оператор* Π_ε *определен в* (13.5). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{D}^p\left(\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0 - \varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{v}_0\right)\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \mathcal{C}_7\varepsilon\sigma(q,\varepsilon,T)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \\ &+ \mathcal{C}_7\varepsilon c(p,q)T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))},\\ \|\mathbf{q}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{v}_0\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \mathcal{C}_6\varepsilon\sigma(q,\varepsilon,T)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \\ &+ \mathcal{C}_6\varepsilon c(p,q)T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))},\end{aligned}$$

где $\sigma(q,\varepsilon,T)$ *определено в* (15.24).

Аналогичным образом из теоремы 14.4 вытекает следующее утверждение.

Теорема 15.20. *Пусть выполнены условия теоремы* 15.19.

1°. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0 - \varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{v}_0\|_{L_q((0,T);H^p(\mathbb{R}^d))} &\leqslant \mathcal{C}_8\varepsilon\left(c(p,q)T^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2p}} + \sigma(q,\varepsilon,T)\right)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \\ &+ \mathcal{C}_8\varepsilon\left(T^{1-\frac{1}{2p}} + T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}.\end{aligned}$$

Здесь $\sigma(q,\varepsilon,T)$ *определено в* (15.24).

2°. *Предположим дополнительно, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0 - \varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{v}_0\|_{L_q((0,T);H^p(\mathbb{R}^d))} &\leqslant \mathcal{C}_9\left(c(p,q)\varepsilon^2T^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} + \varepsilon\sigma(q,\varepsilon,T)\right)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \\ &+ \mathcal{C}_9c(p,q)\left(\varepsilon T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} + \varepsilon^2T^{1-\frac{1}{p}}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}.\end{aligned}$$

16. ПРИЛОЖЕНИЕ. ДРУГОЙ СПОСОБ ПОЛУЧЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБ УСРЕДНЕНИИ ОПЕРАТОРНОЙ ЭКСПОНЕНТЫ

Результаты об аппроксимации операторной экспоненты можно выводить методом интегрирования резольвенты по подходящему контуру в комплексной плоскости. Такой способ был применен Ю. М. Мешковой в работе [23], где рассматривались операторы A_ε второго порядка. Для осуществления такого подхода нужно иметь «готовые» результаты об аппроксимации резольвенты $(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ в произвольной регулярной точке $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ с двухпараметрическими оценками погрешности (в зависимости от ε и ζ). Для операторов второго порядка такие оценки были «подготовлены» в [21].

Для операторов высокого порядка вида $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^*g^\varepsilon(\mathbf{x})b(\mathbf{D})$ нужные аппроксимации резольвенты с двухпараметрическими оценками погрешностей получены в [12]. На их основе можно дать другое доказательство теорем 13.1 и 13.3.

Пусть $\zeta = |\zeta|e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Положим $c(\varphi) := \dfrac{1}{\sin\varphi}$ при $\varphi \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ и $c(\varphi) := 1$ при $\varphi \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$. В [12, § 8] установлены оценки

$$\left\|(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 - \zeta I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C'c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{\frac{1}{2p}-1}, \tag{16.1}$$

$$\left\|\mathbf{D}^p\left((\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0 - \zeta I)^{-1}\Pi_\varepsilon\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C''c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}. \tag{16.2}$$

Воспользуемся представлением операторной экспоненты $e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$, $\tau > 0$, через интеграл от резольвенты по контуру, охватывающему спектр оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ (см. [11]):

$$e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\tau} e^{-\zeta\tau}(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon - \zeta I)^{-1}\, d\zeta. \tag{16.3}$$

Контур γ_τ, зависящий от параметра τ, выберем так же, как в [23]: $\gamma_\tau = \widetilde{\gamma}_\tau \cup \widehat{\gamma}_\tau$, где

$$\widetilde{\gamma}_\tau := \left\{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = \rho e^{i\frac{\pi}{4}} : \rho \in [\tau, \infty)\right\} \cup \left\{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = \rho e^{i\frac{7\pi}{4}} : \rho \in [\tau, \infty)\right\},$$

$$\widehat{\gamma}_\tau := \left\{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = \tau e^{i\varphi} : \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{7\pi}{4}\right\}.$$

Используя представление (16.3) для $e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ и аналогичное представление для $e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}$, получаем

$$\begin{aligned} e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}^0} &= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\tau} e^{-\zeta\tau}\left((\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 - \zeta I)^{-1}\right) d\zeta = \\ &= -\frac{1}{2\pi i\tau}\int\limits_{\gamma_1} e^{-\eta}\left(\left(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon - \frac{\eta}{\tau}I\right)^{-1} - \left(\widehat{\mathcal{A}}^0 - \frac{\eta}{\tau}I\right)^{-1}\right) d\eta. \end{aligned} \tag{16.4}$$

Второе равенство получено заменой переменной $\eta = \zeta\tau$.

Применяя представление (16.4) и оценку (16.1), приходим к неравенству

$$\left\|e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C'\varepsilon}{\pi\tau}\int\limits_{\gamma_1} e^{-\operatorname{Re}\eta}\left(\tau^{-1}|\eta|\right)^{\frac{1}{2p}-1}|d\eta|.$$

Мы учли, что $c(\varphi) \leqslant \sqrt{2}$ для точек контура γ_τ. Интеграл здесь понимается как интеграл по длине дуги. Оценивая этот интеграл, приходим к неравенству

$$\left\|e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widetilde{C}'\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}}}. \tag{16.5}$$

Применяя (16.5) при $\tau \geqslant 1$ и оценивая левую часть через 2 при $0 < \tau < 1$, получаем неравенство вида (13.2). Тем самым, мы доказали теорему 13.1 другим способом.

Аналогично, используя (16.2) и представление (16.3), легко получить оценку

$$\left\|\mathbf{D}^p\left(e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}^0} - \varepsilon^p\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau)\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widetilde{C}''\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}}}.$$

Отсюда несложно перейти к неравенству (13.8).

Таким образом, общие результаты о поведении экспоненты $e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ можно вывести из результатов работы [12] об аппроксимациях резольвенты. Однако мы не могли использовать тот же путь для получения остальных результатов работы, поскольку не располагаем «готовыми» результатами о поведении резольвенты ни в случае улучшения результатов при дополнительном условии (что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$), ни в случае более общего оператора вида $\mathcal{A}_\varepsilon = (f^\varepsilon)^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon$.

Поэтому мы предпочли провести независимые рассмотрения для операторной экспоненты в духе теоретико-операторного подхода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. — М.: Наука, 1984.
2. *Бирман М. Ш., Суслина Т. А.* Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения// Алгебра и анализ. — 2003. — *15*, № 5. — С. 1–108.
3. *Бирман М. Ш., Суслина Т. А.* Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного самосопряженного операторного семейства с учетом корректора// Алгебра и анализ. — 2005. — *17*, № 5. — С. 69–90.
4. *Бирман М. Ш., Суслина Т. А.* Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора// Алгебра и анализ. — 2005. — *17*, № 6. — С. 1–104.
5. *Бирман М. Ш., Суслина Т. А.* Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$// Алгебра и анализ. — 2006. — *18*, № 6. — С. 1–130.

6. *Василевская Е. С.* Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учете корректора// Алгебра и анализ. — 2009. — *21*, № 1. — С. 3–60.
7. *Вениаминов Н. А.* Усреднение периодических дифференциальных операторов высокого порядка// Алгебра и анализ. — 2010. — *22*, № 5. — С. 69–103.
8. *Жиков В. В.* Об операторных оценках в теории усреднения// Докл. РАН. — 2005. — *403*, № 3. — С. 305–308.
9. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1993.
10. *Жиков В. В., Пастухова С. Е.* Об операторных оценках в теории усреднения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 3. — С. 27–122.
11. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
12. *Кукушкин А. А., Суслина Т. А.* Усреднение эллиптических операторов высокого порядка с периодическими коэффициентами// Алгебра и анализ. — 2016. — *28*, № 1. — С. 89–149.
13. *Пастухова С. Е.* Операторные оценки усреднения для эллиптических уравнений четвертого порядка// Алгебра и анализ. — 2016. — *28*, № 2. — С. 204–226.
14. *Пастухова С. Е.* L^2-аппроксимации резольвенты в усреднении эллиптических операторов высокого порядка// Пробл. мат. анализа. — 2020. — *107*. — С. 113–132.
15. *Пастухова С. Е.* L^2-аппроксимации резольвенты в усреднении эллиптических операторов четвертого порядка// Мат. сб. — 2021. — *212*, № 1. — С. 119–142.
16. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. — М.: Мир, 1984.
17. *Слоущ В. А., Суслина Т. А.* Усреднение эллиптического оператора четвертого порядка с периодическими коэффициентами при учете корректоров// Функц. анализ и его прилож. — 2020. — *54*, № 3. — С. 94–99.
18. *Слоущ В. А., Суслина Т. А.* Усреднение эллиптического оператора четвертого порядка с периодическими коэффициентами// В сб.: «Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2020». — Симферополь: «Полипринт», 2020. — С. 186–188.
19. *Слоущ В. А., Суслина Т. А.* Пороговые аппроксимации резольвенты полиномиального неотрицательного операторного пучка// Алгебра и анализ. — 2021. — *33*, № 2. — С. 233–274.
20. *Суслина Т. А.* Об усреднении периодических параболических систем// Функц. анализ и его прилож. — 2004. — *38*, № 4. — С. 86–90.
21. *Суслина Т. А.* Усреднение эллиптических операторов с периодическими коэффициентами в зависимости от спектрального параметра// Алгебра и анализ. — 2015. — *27*, № 4. — С. 87–166.
22. *Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G.* Asymptotic analysis for periodic structures. — Amsterdam—New York: North Holland Publishing Co., 1978.
23. *Meshkova Yu. M.* Note on quantitative homogenization results for parabolic systems in $\mathbb{R}^d$// J. Evol. Equ. — 2020. — DOI 10.1007/s00028-020-00600-2.
24. *Pastukhova S. E.* Estimates in homogenization of higher-order elliptic operators// Appl. Anal. — 2016. — *95*, № 7. — С. 1449–1466.
25. *Suslina T. A.* Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem// В сб.: «Nonlinear Equations and Spectral Theory». — Providence: Amer. Math. Soc., 2007. — С. 201–233.
26. *Suslina T. A.* Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^d)$// Math. Model. Nat. Phenom. — 2010. — *5*, № 4. — С. 390–447.
27. *Suslina T. A.* Homogenization of the higher-order Schrödinger-type equations with periodic coefficients// В сб.: «Partial Differential Equations, Spectral Theory, and Mathematical Physics. The Ari Laptev Anniversary Volume». — EMS Publishing House, 2021 (to appear). — arXiv: 2011.13382.
28. *Zhikov V. V., Pastukhova S. E.* On operator estimates for some problems in homogenization theory// Russ. J. Math. Phys. — 2005. — *12*, № 4. — С. 515–524.
29. *Zhikov V. V., Pastukhova S. E.* Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients// Russ. J. Math. Phys. — 2006. — *13*, № 2. — С. 224–237.

А. А. Милослова
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `st010144@student.spbu.ru`

Т. А. Суслина
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `t.suslina@spbu.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-1-130-191 UDC 517.955

Averaging of Higher-Order Parabolic Equations with Periodic Coefficients

© 2021 **A. A. Miloslova, T. A. Suslina**

Abstract. In $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, we consider a wide class of matrix elliptic operators $\mathcal{A}_\varepsilon$ of order $2p$ (where $p \geqslant 2$) with periodic rapidly oscillating coefficients (depending on $\mathbf{x}/\varepsilon$). Here $\varepsilon > 0$ is a small parameter. We study the behavior of the operator exponent $e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}$ for $\tau > 0$ and small ε. We show that the operator $e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}$ converges as $\varepsilon \to 0$ in the operator norm in $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ to the exponent $e^{-\mathcal{A}^0 \tau}$ of the effective operator $\mathcal{A}^0$. Also we obtain an approximation of the operator exponent $e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}$ in the norm of operators acting from $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ to the Sobolev space $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. We derive estimates of errors of these approximations depending on two parameters: ε и τ. For a fixed $\tau > 0$ the errors have the exact order $O(\varepsilon)$. We use the results to study the behavior of a solution of the Cauchy problem for the parabolic equation $\partial_\tau \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = -(\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau)$ in $\mathbb{R}^d$.

REFERENCES

1. N. S. Bakhvalov and G. P. Panasenko, *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh* [Averaging Processes in Periodic Media], Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).
2. M. Sh. Birman and T. A. Suslina, “Periodicheskie differentsial’nye operatory vtorogo poryadka. Porogovye svoystva i usredneniya” [Second-order periodic differential operators. Threshold properties and averaging], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2003, **15**, No. 5, 1–108 (in Russian).
3. M. Sh. Birman and T. A. Suslina, “Porogovye approksimatsii rezol’venty faktorizovannogo samosopryazhennogo operatornogo semeystva s uchetom korrektora” [Threshold approximations of the resolvent of a factorized self-adjoint operator family with allowance for a corrector], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2005, **17**, No. 5, 69–90 (in Russian).
4. M. Sh. Birman and T. A. Suslina, “Usrednenie periodicheskikh ellipticheskikh differentsial’nykh operatorov s uchetom korrektora” [Averaging of periodic elliptic differential operators with a corrector], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2005, **17**, No. 6, 1–104 (in Russian).
5. M. Sh. Birman and T. A. Suslina, “Usrednenie periodicheskikh differentsial’nykh operatorov s uchetom korrektora. Priblizhenie resheniy v klasse Soboleva $H^1(\mathbb{R}^d)$” [Averaging of periodic differential operators taking into account the corrector. Approximation of solutions in the Sobolev class $H^1(\mathbb{R}^d)$], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2006, **18**, No. 6, 1–130 (in Russian).
6. E. S. Vasilevskaya, “Usrednenie parabolicheskoy zadachi Koshi s periodicheskimi koeffitsientami pri uchete korrektora” [Averaging of the parabolic Cauchy problem with periodic coefficients taking into account the corrector], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2009, **21**, No. 1, 3–60 (in Russian).
7. N. A. Veniaminov, “Usrednenie periodicheskikh differentsial’nykh operatorov vysokogo poryadka” [Averaging of higher-order periodic differential operators], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2010, **22**, No. 5, 69–103 (in Russian).
8. V. V. Zhikov, “Ob operatornykh otsenkakh v teorii usredneniya” [Operator estimates in homogenization theory], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2005, **403**, No. 3, 305–308 (in Russian).
9. V. V. Zhikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleynik, *Usrednenie differentsial’nykh operatorov* [Homogenization of Differential Operators], Nauka, Moscow, 1993 (in Russian).
10. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, “Ob operatornykh otsenkakh v teorii usredneniya” [On operator estimates in homogenization theory], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 3, 27–122 (in Russian).
11. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).

---

12. A. A. Kukushkin, T. A. Suslina, “Usrednenie ellipticheskikh operatorov vysokogo poryadka s periodicheskimi koeffitsientami” [Averaging of higher-order elliptic operators with periodic coefficients], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2016, **28**, No. 1, 89–149 (in Russian).
13. S. E. Pastukhova, “Operatornye otsenki usredneniya dlya ellipticheskikh uravneniy chetvertogo poryadka” [Operator estimates of averaging for fourth-order elliptic equations], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2016, **28**, No. 2, 204–226 (in Russian).
14. S. E. Pastukhova, “L^2-approksimatsii rezol’venty v usrednenii ellipticheskikh operatorov vysokogo poryadka” [L^2-approximations of the resolvent in the averaging of elliptic higher-order operators], *Probl. mat. analiza* [Probl. Math. Anal.], 2020, **107**, 113–132 (in Russian).
15. S. E. Pastukhova, “L^2-approksimatsii rezol’venty v usrednenii ellipticheskikh operatorov chetvertogo poryadka” [L^2-approximations of the resolvent in the averaging of fourth-order elliptic operators], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2021, **212**, No. 1, 119–142 (in Russian).
16. E. Sanchez-Palencia, *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy* [Non-Homogeneous Media and Vibration Theory], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
17. V. A. Sloushch and T. A. Suslina, “Usrednenie ellipticheskogo operatora chetvertogo poryadka s periodicheskimi koeffitsientami pri uchete korrektorov” [Averaging of a fourth-order elliptic operator with periodic coefficients taking into account correctors], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2020, **54**, No. 3, 94–99 (in Russian).
18. V. A. Sloushch and T. A. Suslina, “Usrednenie ellipticheskogo operatora chetvertogo poryadka s periodicheskimi koeffitsientami” [Averaging of a fourth-order elliptic operator with periodic coefficients], In: *Sbornik materialov mezhdunarodnoy konferentsii KROMSh-2020* [Collection of Materials of the International Conference KROMSH-2020], Poliprint, Simferopol’, 2020, pp. 186–188 (in Russian).
19. V. A. Sloushch and T. A. Suslina, “Porogovye approksimatsii rezol’venty polinomial’nogo neotritsatel’nogo operatornogo puchka” [Threshold approximations of the resolvent of a polynomial nonnegative operator pencil], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2021, **33**, No. 2, 233–274 (in Russian).
20. T. A. Suslina, “Ob usrednenii periodicheskikh parabolicheskikh sistem” [On averaging of periodic parabolic systems], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2004, **38**, No. 4, 86–90 (in Russian).
21. T. A. Suslina, “Usrednenie ellipticheskikh operatorov s periodicheskimi koeffitsientami v zavisimosti ot spektral’nogo parametra” [Averaging of elliptic operators with periodic coefficients depending on the spectral parameter], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2015, **27**, No. 4, 87–166 (in Russian).
22. A. Bensoussan, J. L. Lions, and G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North Holland Publishing Co., Amsterdam—New York, 1978.
23. Yu. M. Meshkova, “Note on quantitative homogenization results for parabolic systems in $\mathbb{R}^d$,” *J. Evol. Equ.*, 2020, DOI 10.1007/s00028-020-00600-2.
24. S. E. Pastukhova, “Estimates in homogenization of higher-order elliptic operators,” *Appl. Anal.*, 2016, **95**, No. 7, 1449–1466.
25. T. A. Suslina, “Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem,” In: *Nonlinear Equations and Spectral Theory*, Amer. Math. Soc., Providence, 2007, pp. 201–233.
26. T. A. Suslina, “Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^d)$,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2010, **5**, No. 4, 390–447.
27. T. A. Suslina, “Homogenization of the higher-order Schrödinger-type equations with periodic coefficients,” In: *Partial Differential Equations, Spectral Theory, and Mathematical Physics. The Ari Laptev Anniversary Volume*, EMS Publishing House, 2021 (to appear), arXiv: 2011.13382.
28. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, “On operator estimates for some problems in homogenization theory,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2005, **12**, No. 4, 515–524.
29. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, “Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2006, **13**, No. 2, 224–237.

A. A. Miloslova
Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia
E-mail: `st010144@student.spbu.ru`

T. A. Suslina
Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia
E-mail: `t.suslina@spbu.ru`