РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 66, № 2, 2020

Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2
http://journals.rudn.ru/cmfd

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print)
4 выпуска в год
http://journals.rudn.ru/cmfd
Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.
Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.
Индексируется в международных базах данных научных публикаций *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.
Полный текст журнала размещен в базах данных компании *EBSCO Publishing* на платформе *EBSCOhost*.
Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты. Объем статьи, занимающий целый том, должен составлять 140–190 страниц в стиле нашего журнала.

Правила оформления статей, архив публикаций и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала: http://journals.rudn.ru/cmfd, http://www.mathnet.ru/cmfd.

Редактор: ***Е. М. Варфоломеев***
Компьютерная верстка: ***Е. М. Варфоломеев***

Адрес редакции:
115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Подписано в печать 22.04.2020. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.
Усл. печ. л. 26,04. Тираж 135 экз. Заказ 576.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов» (РУДН)
117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН
115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 66, No. 2, 2020

Proceedings of the Crimean Autumn Mathematical School-Symposium

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2

http://journals.rudn.ru/cmfd

Founded in 2003

Founder: PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS
Published by the Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print)
4 issues per year
http://journals.rudn.ru/cmfd
Reviewed in *MathSciNet* and *Zentralblatt Math.*
The full texts can be found in the *EBSCOhost* databases by *EBSCO Publishing*.
Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results. Occupying the whole volume, an article should make up 140–190 pages in the format of the journal.

Guidelines for authors, archive of issues, and other information can be found at the journal's website: http://journals.rudn.ru/cmfd, http://www.mathnet.ru/eng/cmfd.

Editor: ***E. M. Varfolomeev***
Computer design: ***E. M. Varfolomeev***

Address of the Editorial Office:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Print run 135 copies.

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

Printed at RUDN Publishing House:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 66, № 2 (2020)

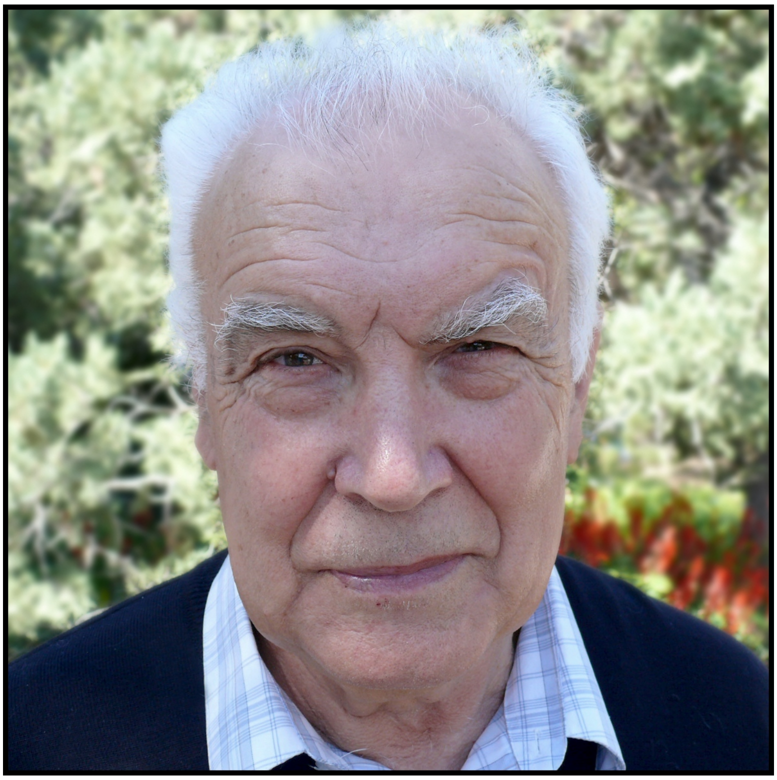
СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 66, № 2 (2020). С. 157–159

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-157-159

НИКОЛАЙ ДМИТРИЕВИЧ КОПАЧЕВСКИЙ. 25 МАРТА 1940 Г. — 18 МАЯ 2020 Г.



18 мая 2020 года ушел из жизни Николай Дмитриевич Копачевский, известный отечественный математик, доктор физико-математических наук, профессор, почетный работник сферы образования Российской Федерации, заведующий кафедрой математического анализа Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, организатор и бессменный руководитель Крымской осенней математической школы-симпозиума (КРОМШ).

Николай Дмитриевич родился 25 марта 1940 года в городе Симферополе. Его мать в период оккупации Симферополя была расстреляна, и маленький Коля остался на руках его тети, Дины Лазаревны, которая воспитала его, несмотря на трудное военное и послевоенное время.

По окончании школы Николай Дмитриевич поступил в Харьковский авиационный институт, который окончил с отличием в 1963 году, получив одним из первых в СССР новую специальность инженера-конструктора ядерных авиадвигателей. В том же году был принят инженером в Физико-технический институт низких температур имени Б. И. Веркина (ФТИНТ), в отдел прикладной математики, возглавляемый Анатолием Дмитриевичем Мышкисом.

В годы начала космической эры возникла потребность в исследовании поведения жидкости в условиях невесомости. К изучению данной проблематики (задачи определения форм равновесия, условий устойчивости, описания тепловой конвекции, проблемы малых движений) был привлечен отдел прикладной математики. Подобными задачами чуть позже стали заниматься в Вычислительном центре АН СССР (Москва) и в Институте математики АН УССР (Киев). В 1976 году по материалам работы сотрудников ФТИНТ вышла первая в мире монография по гидромеханике невесомости[1], которая была переиздана во многих странах мира.

Исследования Николая Дмитриевича, посвященные проблемам малых движений и собственных колебаний капиллярной жидкости, стали основой кандидатской диссертации «*О малых колебаниях жидкости в сосуде в условиях, близких к невесомости*», защищенной в Харькове в 1966 году под руководством А. Д. Мышкиса. Николай Дмитриевич одним из первых начал применять методы теории операторов к исследованию гидродинамических задач. На выбор данной методики существенное влияние оказал Селим Григорьевич Крейн, который на долгие годы стал старшим товарищем и соавтором Николая Дмитриевича.

Под влиянием работ С. Г. Крейна, Николай Дмитриевич начал изучение поведения вязкой жидкости, а также систем несмешивающихся жидкостей с учетом сил поверхностного натяжения и вращения. Материалы его работ, написанных в 70-е годы, стали основой докторской диссертации «*Теория малых колебаний жидкостей с учетом сил поверхностного натяжения и вращения*», защищенной в Москве в 1980 году в Вычислительном центре АН СССР. Официальными оппонентами были академики О. А. Ладыженская и Ф. Л. Черноусько, высоко оценившие результаты Николая Дмитриевича.

В 1981 году Николай Дмитриевич вернулся в Крым. С этого момента он является заведующим кафедрой математического анализа Симферопольского государственного университета, Таврического национального университета, а ныне Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского.

В Симферополе Николай Дмитриевич продолжил сотрудничать с С. Г. Крейном и другими ведущими специалистами в области функционального анализа, среди которых А. С. Маркус и М. С. Агранович. Результатом работы в этот период стала монография в соавторстве с С. Г. Крейном и Нго Зуй Каном «*Операторные методы в линейной гидродинамике*: *эволюционные и спектральные задачи*» (1989), расширенный вариант которой «*Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics*» вышел в двух томах в 2001 и 2003 годах в серии «*Operator Theory*: *Advances and Applications*».

С 1990 года Николай Дмитриевич Копачевский — идейный вдохновитель и руководитель международной конференции «*Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам*» (КРОМШ) — явления, уникального во многих отношениях. В течение более чем тридцати лет КРОМШ проходит с большим успехом, собирает замечательных математиков и отличается неизменно высоким научным уровнем. Несомненной заслугой Николая Дмитриевича является удивительная душевная атмосфера на этой Школе. Постоянными участниками КРОМШ стали многие известные математики из России, Украины, Белоруссии, Узбекистана, Казахстана, Израиля, Германии, Польши, Англии, Франции, Японии, США и других стран.

За годы работы Николай Дмитриевич разработал более 10 спецкурсов для студентов и аспирантов математических специальностей, был бессменным руководителем еженедельного научного семинара кафедры математического анализа. Семинар воспитал многих кандидатов наук, ставших преподавателями Крымских вузов. Под руководством Николая Дмитриевича сформировалась научная школа «*Операторные методы в механике сплошных сред*», защищены 22 кандидатские и две докторские диссертации.

Основные направления научных исследований школы Николая Дмитриевича Копачевского связаны с проблемами малых движений идеальной, вязкой, вязко-упругой жидкостей, баротропного газа, систем жидкостей с условиями капиллярности, релаксации, стратификации в неподвижном, вращающемся или колеблющемся сосуде. В работах Николая Дмитриевича и его учеников отражена главная методика научной школы — сведение задачи в частных производных к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения в гильбертовом пространстве. Использование современных достижений функционального анализа и математической физики позволило получить важные для приложений результаты о полноте и базисности собственных функций, о локализации

[1] *Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Гидромеханика невесомости. — М.: Наука, 1976.

и асимптотике собственных значений, о существовании сильных или слабых решений краевых задач.

Николай Дмитриевич одним из первых стал использовать методы теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой для решения проблем гидродинамики. В результате более чем 35-летнего сотрудничества с Т. Я. Азизовым в 2014 году вышла их совместная монография «*Приложения индефинитной метрики*».

Кроме прикладных задач, Николай Дмитриевич активно исследовал многие фундаментальные проблемы теории нелинейных оператор-функций, теории интегродифференциальных уравнений Вольтерра, общей теории граничных задач и задач сопряжения. В последние годы Николай Дмитриевич с учениками активно занимался исследованием малых движений сочлененных маятников с жидким наполнением, вязкоупругих жидкостей и систем несмешивающихся жидкостей, многокомпонентными задачами сопряжения в липшицевых областях, обобщениями абстрактной формулы Грина для задач сопряжения и полуторалинейных форм.

За период почти 60-летней научной деятельности Николай Дмитриевич с соавторами написал более 250 научных работ, более 15 учебных пособий, издал 8 монографий (полный список трудов доступен на сайте http://nikolay-d-kopachevsky.com). Его достижения были отмечены наградами и премиями: он являлся заслуженным деятелем науки и техники Украины (1992), лауреатом государственной премии Украины 2013 года (в составе авторского коллектива) за цикл научных работ по гидромеханике «*Закономерности волно-вихревых процессов в сплошной среде*», лауреатом премии имени В. И. Вернадского (2001), кавалером Ордена «За заслуги» 3-й степени (2008), почетным работником сферы образования Российской Федерации (2020). Николай Дмитриевич был заместителем главного редактора журнала «*Таврический вестник информатики и математики*», членом редколлегии журнала «*Современная математика. Фундаментальные направления*», переводящегося издательством Springer в серии «*Journal of Mathematical Sciences*», членом редколлегии журнала «*Динамические системы*».

Неоценимую поддержку в жизни и работе Николаю Дмитриевичу оказывала его жена, с которой он прожил 47 лет в любви и согласии. Валентина Георгиевна прекрасно понимала Николая Дмитриевича и делала все для его плодотворной научной деятельности.

Интересы и увлечения Николая Дмитриевича были чрезвычайно разнообразными: волейбол, плавание, прыжки в воду с Крымских скал, туризм. Но главной для него всегда оставалась математика.

Ученики, коллеги и друзья Николая Дмитриевича знали его как человека, преданного своей профессии, увлеченного, любящего жизнь во всех ее проявлениях, никогда не скрывавшего своей гражданской позиции, доброжелательного к окружающим. Все, кому посчастливилось знать Николая Дмитриевича Копачевского, навсегда сохранят память об этом замечательном математике и человеке.

О. В. Анашкин, Е. М. Варфоломеев, В. И. Войтицкий, В. И. Донской, Д. А. Закора, А. Б. Муравник, М. А. Муратов, Ю. С. Пашкова, В. Э. Петров, Е. В. Плохая, А. Л. Скубачевский, П. А. Старков, Т. А. Суслина, Д. О. Цветков, В. Н. Чехов, А. А. Шкаликов, А. И. Яковлев.

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-157-159

Nikolay Dmitrievich Kopachevsky. March 25, 1940 — May 18, 2020

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 66, № 2 (2020). С. 160–181

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-160-181 УДК 517.938

О ВКЛЮЧЕНИИ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ МОРСА—СМЕЙЛА В ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ПОТОК

© 2020 г. **В. З. ГРИНЕС, Е. Я. ГУРЕВИЧ, О. В. ПОЧИНКА**

Аннотация. В настоящем обзоре приводятся результаты последних лет по решению проблемы Ж. Палиса о нахождении необходимых и достаточных условий включения каскада Морса—Смейла в топологический поток. На сегодняшний день проблема решена Палисом для диффеоморфизмов Морса—Смейла, заданных на многообразиях размерности два. Результат для окружности является тривиальным упражнением. В размерности три и выше возникают новые эффекты, связанные с возможностью дикого вложения замыканий инвариантных многообразий седловых периодических точек, что приводит к дополнительным препятствиям включения диффеоморфизмов Морса—Смейла в топологический поток. Прогресс, достигнутый в решении проблемы Палиса в размерности три, связан с относительно недавним получением полной топологической классификации диффеоморфизмов Морса—Смейла на трехмерных многообразиях и введением новых инвариантов, описывающих вложение сепаратрис седловых периодических точек в несущее многообразие. Переход к более высокой размерности требует привлечения новейших результатов топологии многообразий. Необходимые сведения из топологии, играющие ключевые роли в доказательствах, также излагаются в обзоре.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Постановка задачи и история вопроса

Динамические системы с непрерывным (потоки) и дискретным (каскады) временем имеют тесную взаимосвязь. Так, если поток на многообразии M^n обладает глобальной секущей, то его свойства во многом определяются свойствами отображения последования Пуанкаре на этой секущей. Численные методы решения дифференциальных уравнений естественным образом приводят к отображениям с дискретным временем. Один из показателей адекватности численного моделирования состоит в том, что полученный в результате каскад топологически сопряжен сдвигу на единицу времени вдоль траекторий исходного потока. В работах [29, 30] показано, что дискретизация методом Рунге—Кутты системы $n \geqslant 2$ дифференциальных уравнений, определяющих поток Морса—Смейла без периодических траекторий (структурно-устойчивый поток с конечным

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект № 17-11-01041, за исключением разделов 2-3, выполненных при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-15-2019-1931).

неблуждающим множеством) на диске, при достаточно малой величине шага дискретизации задает дискретную динамическую систему, топологически сопряженную сдвигу на единицу времени вдоль траекторий исходного потока. Это означает, что полученная дискретная динамическая система включается в топологический поток.

Изучение взаимосвязи между каскадами и потоками приводит к классической задаче об отыскании условий включения диффеоморфизмов (или гомеоморфизмов) в поток. Пусть M^n — гладкое связное замкнутое многообразие размерности n. Напомним, что C^m*-потоком* ($m \geqslant 0$) на многообразии M^n называется непрерывно зависящее от $t \in \mathbb{R}$ семейство C^m-диффеоморфизмов $X^t : M^n \to M^n$ такое, что $X^0(x) = x$ и $X^t(X^s(x)) = X^{t+s}(x)$ для любых $s, t \in \mathbb{R}$, $x \in M^n$. C^0-поток еще называют *топологическим потоком*.

Говорят, что диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ замкнутого многообразия M^n *включается в* C^m*-поток*, если f является сдвигом на единицу времени вдоль траекторий некоторого C^m-потока X^t ($f = X^1$), заданного на M^n.

Так как поток определяет изотопию, соединяющую сдвиг на единицу времени вдоль траекторий и тождественное отображение, то неизотопные тождественному диффеоморфизмы не включаются ни в какие потоки. Таким образом, множество каскадов значительно богаче, чем множество сдвигов на единицу времени вдоль траекторий потоков. В работе [43] доказано, что множество C^r-диффеоморфизмов ($r \geqslant 1$), включающихся в C^1-поток, является подмножеством первой категории в $Diff^r(M^n)$. Согласно [3], множество C^2-диффеоморфизмов, включающихся в C^1-гладкий поток, нигде не плотно в пространстве диффеоморфизмов Морса—Смейла.

В то же время, для любого многообразия M^n существует открытое в $Diff^1(M^n)$ множество диффеоморфизмов, включающихся в топологический поток. Этот факт вытекает из следующего рассуждения. В силу [47] на любом многообразии существует функция Морса, градиентный поток которой может быть сколь угодно близко аппроксимирован потоком X^t Морса—Смейла без замкнутых траекторий. Сдвиг на единицу времени X^1 вдоль траекторий такого потока является диффеоморфизмом Морса—Смейла, который, в силу [42, 44], являются структурно устойчивыми. Следовательно, существует окрестность $U(X^1) \subset Diff^1(M^n)$ такая, что любой диффеоморфизм $f \in U(X^1)$ топологически сопряжен с X^1 посредством некоторого гомеоморфизма h, поэтому f включается в топологический поток $h^{-1}X^t h$.

Напомним, что диффеоморфизм f, заданный на замкнутом многообразии M^n, называется *диффеоморфизмом Морса—Смейла*, если его неблуждающее множество Ω_f конечно и состоит из гиперболических периодических точек, и для любых двух точек $p, q \in \Omega_f$ пересечение устойчивого многообразия W^s_p точки p и неустойчивого многообразия W^u_q точки q трансверсально. Везде далее рассматривается класс $G(M^n)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса—Смейла на ориентируемых многообразиях.

В работе Ж. Палиса [42] сформулированы следующие необходимые условия включения диффеоморфизма Морса—Смейла $f : M^n \to M^n$ в топологический поток:

(1) *неблуждающее множество* Ω_f *совпадает с множеством неподвижных точек*;
(2) *ограничение диффеоморфизма* f *на каждое инвариантное многообразие любой неподвижной точки* $p \in \Omega_f$ *сохраняет его ориентацию*;
(3) *если для различных седловых точек* $p, q \in \Omega_f$ *пересечение* $W^s_p \cap W^u_q$ *непусто, то оно не содержит компактных компонент связности.*

В дальнейшем условия (1)–(3) будем называть *условиями Палиса*.

В работе [42] также показано, что при $n = 2$ эти условия являются достаточными (см. теорему 5.1) и поставлена задача обобщения этого результата на случай большей размерности (отметим, что из [28] следует, что необходимое и достаточное условие включения в поток диффеоморфизма Морса—Смейла окружности совпадает с первым условием Палиса). Проблема Палиса исчерпывающим образом решена в размерности три в работах [6, 13]; для более высокой размерности — лишь частично, для класса диффеоморфизмов Морса—Смейла без гетероклинических пересечений, заданных на сфере, см. [32]. Изложению этих результатов и связанных с ними топологических проблем посвящен настоящий обзор.

2. Свойства диффеоморфизмов Морса—Смейла и связанные обозначения

Напомним некоторые факты, связанные с динамикой диффеоморфизмов Морса—Смейла, к которым мы будем обращаться многократно в дальнейших разделах.

Пусть $f : M^n \to M^n$ — диффеоморфизм. Точка $x \in M^n$ называется *неблуждающей точкой* диффеоморфизма f, если для любой ее окрестности U и любого натурального числа N найдется $n_0 \in \mathbb{Z}$ такое, что $|n_0| \geqslant N$ и $f^{n_0}(U) \cap U \neq \varnothing$. Очевидно, что периодическая точка является неблуждающей. Согласно определению диффеоморфизма Морса—Смейла его неблуждающее множество совпадает с множеством периодических точек.

Периодическая точка p периода m диффеоморфизма f называется *гиперболической*, если дифференциал $Df^m(p) : T_pM^n \to T_pM^n$, рассматриваемый как линейное отображение касательного пространства T_pM^n в себя, не имеет собственных значений, равных по модулю единице. Согласно теореме Гробмана—Хартмана [8, 9, 34], в некоторой окрестности гиперболической периодической точки p диффеоморфизм f^m топологически сопряжен линейному диффеоморфизму, определяемому матрицей Якоби $\left.\left(\dfrac{\partial f^m}{\partial x}\right)\right|_p$.

Отсюда получаем, что для гиперболической периодической точки p существуют так называемые *устойчивое многообразие* $W^s_p = \{x \in M^n : \lim\limits_{n\to+\infty} d(f^{km}(x), p) = 0\}$ и *неустойчивое многообразие* $W^u_p = \{x \in M^n : \lim\limits_{n\to+\infty} d(f^{-km_p}(x), p) = 0\}$, где d — метрика на M^n. Неустойчивые и устойчивые многообразия называются *инвариантными многообразиями*. Число j, равное числу собственных значений матрицы Якоби, по модулю больших единицы и, соответственно, совпадающее с размерностью неустойчивого многообразия $\dim W^u_p$, называется *индексом Морса* гиперболической точки p. Тогда размерность устойчивого многообразия вычисляется по формуле $\dim W^s_p = n - j$.

Везде в дальнейшем мы будем обозначать через Ω^j_f, $j \in \{0, \ldots, n\}$ множество гиперболических периодических точек диффеоморфизма f с индексом Морса j. Точка с индексом Морса $0 < j < n$ называется *седловой*, остальные точки называются *узловыми*, при этом узловая точка с индексом 0 называется *стоком*, а с индексом n — *источником*.

Напомним, что *n-шаром* (*n-диском*) называется многообразие с краем, гомеоморфное стандартному шару $\mathbb{B}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\}$. *Сферой* называется многообразие S^n, гомеоморфное границе $\mathbb{S}^{n-1}$ шара $\mathbb{B}^n$.

В силу сопряженности с линейным сжатием, в окрестности неподвижной стоковой точки p существует замкнутый n-шар $U_p \subset W^s_p$ такой, что $f(U_p) \subset \operatorname{int} U_p$ и $\bigcap\limits_{k\geqslant 0} f^k(U_p) = p$. Таким образом, стоковая гиперболическая неподвижная точка является аттрактором диффеоморфизма f в смысле следующего определения.

Замкнутое f-инвариантное множество $A \subset M^n$ называется *аттрактором* f, если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f(U_A) \subset \operatorname{int} U_A$ и $A = \bigcap\limits_{k\geqslant 0} f^k(U_A)$. Окрестность U_A при этом называется *захватывающей*, а объединение $\bigcup\limits_{k\geqslant 0} f^{-k}(U_A)$ называется *бассейном* аттрактора. *Репеллер* определяется как аттрактор для f^{-1}.

Для любой периодической гиперболической точки p компонента связности ℓ^s_p (ℓ^u_p) множества $W^s_p \setminus p$ ($W^u_p \setminus p$) называется *сепаратрисой точки* p. Для любого подмножества $P \subset \Omega_f$ будем обозначать через W^u_P (W^s_P) объединение неустойчивых (устойчивых) многообразий всех точек из множества P.

Тесная связь топологии несущего многообразия с динамическими свойствами диффеоморфизмов Морса—Смейла во многом объясняется следующим фактом (см. [35, 47]).

Предложение 2.1. *Пусть $f : M^n \to M^n$ — диффеоморфизм Морса—Смейла. Тогда W^u_p и W^s_p являются гладкими подмногообразиями многообразия M^n, диффеоморфными $\mathbb{R}^j$ и $\mathbb{R}^{n-j}$, соответственно, для любой периодической точки $p \in \Omega_f$, и $M^n = \bigcup\limits_{p\in\Omega_f} W^u_p = \bigcup\limits_{p\in\Omega_f} W^s_p$.*

Хотя инвариантные многообразия седловых периодических точек диффеоморфизма Морса—Смейла f являются подмногообразиями многообразия M^n, их замыкания могут иметь сложную топологическую структуру. Например, такое поведение имеет место, когда сепаратриса седловой точки участвует в гетероклинических пересечениях.

Пусть $\sigma_1,\ \sigma_2 \in \Omega_f$ — различные седловые периодические точки диффеоморфизма Морса—Смейла f. Пересечение инвариантных многообразий $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2}$, в случае $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2} \neq \varnothing$, называется *гетероклиническим*. Поскольку инвариантные многообразия пересекаются трансверсально и каждое из $W^s_{\sigma_1}$, $W^u_{\sigma_2}$ является подмногообразием, то любая компонента связности гетероклинического пересечения $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2}$ также является подмногообразием. Если $\dim\left(W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2}\right) \geqslant 1$, то компонента связности такого пересечения называется *гетероклиническим многообразием*. В частности, если $\dim\left(W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2}\right) = 1$, то гетероклиническое многообразие называется *гетероклинической кривой*.

Асимптотическое поведение неустойчивой сепаратрисы в общем случае описывается следующим предложением.

Предложение 2.2. *Пусть $f : M^n \to M^n$ — диффеоморфизм Морса—Смейла. Тогда*

$$cl(\ell^u_p) \setminus (\ell^u_p \cup p) = \bigcup_{r \in \Omega_f : \ell^u_p \cap W^s_r \neq \varnothing} W^u_r$$

для любой неустойчивой сепаратрисы ℓ^u_p периодической точки $p \in \Omega_f$. В частности, если ℓ^u_p — седловая сепаратриса, не участвующая в гетероклинических пересечениях, то $cl(\ell^u_\sigma) \setminus (\ell^u_\sigma \cup \sigma) = \{\omega\}$, где ω — стоковая периодическая точка. При этом, если $j = 1$, то $cl(\ell^u_\sigma)$ — топологически вложенная дуга в M^n, если $j \geqslant 2$, то $cl(\ell^u_\sigma)$ — топологически вложенная в M^n сфера $\mathbb{S}^j$.

3. Условия Палиса

В этом разделе мы приводим доказательство необходимости выполнения условий Палиса для включения диффеоморфизма Морса—Смейла в топологический поток, предложенное Палисом в [42].

Лемма 3.1 (необходимые условия Палиса)**.** *Пусть $f : M^n \to M^n$ — диффеоморфизм Морса—Смейла, включающийся в топологический поток X^t. Тогда*:

1) *неблуждающее множество Ω_f совпадает с множеством неподвижных точек*;
2) *ограничение диффеоморфизма f на каждое инвариантное многообразие любой неподвижной точки $p \in \Omega_f$ сохраняет его ориентацию*;
3) *если для различных седловых точек $p, q \in \Omega_f$ пересечение $W^s_p \cap W^u_q$ непусто, то оно не содержит компактных компонент связности.*

Доказательство.

1) Предположим, что множество Ω_f содержит периодическую точку p периода m_p, большего единицы. Тогда точка p принадлежит замкнутой траектории потока X^t, и все точки этой траектории являются периодическими периода m_p для потока X^t. Но тогда все эти точки являются периодическими и для диффеоморфизма f, являющегося сдвигом на единицу времени вдоль траекторий потока X^t, что противоречит конечности его неблуждающего множества.

2) Из гиперболичности множества Ω_f следует, что инвариантное многообразие W^u_p произвольной неподвижной точки $p \in \Omega_f$ либо совпадает с точкой p, либо является гладко вложенным в M^n открытым диском размерности $\dim W^u_p \in \{1 \ldots, n\}$. В случае $W^u_p = p$ по определению f сохраняет ориентацию W^u_p. Пусть $\dim W^u_p > 0$. Так как f включается в поток X^t, то W^u_p является инвариантным относительно потока X^t, следовательно, ограничение $X^t|_{W^u_p}$ потока X^t на множество W^u_p является изотопией от тождественного отображения к $f|_{W^u_p}$, поэтому $f|_{W^u_p}$ является сохраняющим ориентацию отображением.

3) Пусть для различных седловых точек $p, q \in \Omega_f$ пересечение $W^s_p \cap W^u_q$ непусто и K — компактная компонента связности этого пересечения. Тогда множество K инвариантно относительно потока X^t и, следовательно, инвариантно относительно диффеоморфизма f. Пусть $x \in K$, тогда последовательность $\{f^i(x)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $x^* \in K$, следовательно, точка x^* является неблуждающей, что невозможно, так как $x^* \in W^s_p$. ☐

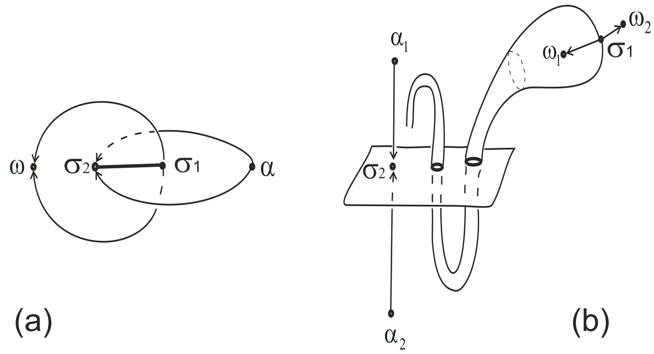


Рис. 1. Пересечения инвариантных многообразий седловых точек

На рисунке 1 приведены фазовые портреты диффеоморфизмов Морса—Смейла, инвариантные многообразия седловых точек которых: a) пересекаются по некомпактной кривой; b) пересекаются по счетному множеству компактных кривых.

4. Включение в поток диффеоморфизмов окружности

Единственное замкнутое многообразие размерности один — окружность $\mathbb{S}^1$.

В силу [28] гомеоморфизм $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ включается в топологический поток тогда и только тогда, когда выполняется одно из трех условий: 1) h имеет неподвижную точку, 2) h — периодический, 3) h имеет транзитивную орбиту. Из предложения 2.1 следует, что если f — диффеоморфизм Морса—Смейла, то его неблуждающее множество непусто (и конечно, по определению) и состоит из источниковых и стоковых периодических точек. Для включения в поток необходимо, чтобы f являлся сохраняющим ориентацию, тогда из неподвижности одной периодической точки следует неподвижность всех периодических точек диффеоморфизма f. Таким образом, необходимое и достаточное условие включения в топологический поток диффеоморфизма Морса—Смейла окружности состоит в неподвижности хотя бы одной его периодической точки. Приведем независимое доказательство этого факта.

Теорема 4.1. *Диффеоморфизм Морса—Смейла $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ включается в топологический поток тогда и только тогда, когда его неблуждающее множество Ω_f состоит из неподвижных точек.*

Доказательство. Необходимость следует из условия (1) Палиса. Докажем достаточность. Пусть множество Ω_f состоит из неподвижных точек. Построим поток X^t на окружности такой, что $f = X^1$.

Множество неподвижных точек диффеоморфизма f делит окружность $\mathbb{S}^1$ на конечное число открытых дуг, каждая из которых является f-инвариантной. Пусть $l \in \mathbb{S}^1$ — одна таких дуг. Определим поток X^t_l на l такой, что f является сдвигом на единицу времени вдоль траекторий потока X^t_l. Пусть $c \subset l$ — компактная дуга, ограниченная точками $x \in l$ и $f(x)$, тогда существует диффеоморфизм $\varphi_c : [1,2] \to c$ такой, что $\varphi_c(1) = x, \varphi_c(2) = f(x)$. Отметим, что $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} f^i(c) = l$, поэтому для каждой точки $y \in l$ найдется целое i_y такое, что $f^{i_y}(y) \in c$. Определим гомеоморфизм $\varphi_l : \mathbb{R}_+ \to l$ соотношением $\varphi_l(y) = 2^{-i_y}\varphi_c^{-1}(f^{i_y}(y))$. Гомеоморфизм φ_l сопрягает линейное растяжение $a_+(s) = 2s$, $s \in \mathbb{R}_+$ с ограничением $f|_l$ диффеоморфизма f на дугу l. Отображение a_+ включается в поток $a^t_+(s) = 2^t s$. Положим $X^t_l(y) = \varphi_l(a^t_+(\varphi_l^{-1}(y)))$, тогда $X^1_l(y) = f|_l$.

Аналогично определим поток на всех дугах окружности, заключенных между соседними неподвижными точками и доопределим полученные потоки в неподвижных точках. В результате получим искомый поток X^t на окружности такой, что $X^1 = f$. □

5. Включение в поток диффеоморфизмов Морса—Смейла поверхностей

Следующая теорема доказана в [42] (см. теорему 4.2 на с. 402).

Теорема 5.1 (теорема Палиса)**.** *Если диффеоморфизм $f \in G(M^2)$ удовлетворяет условиям Палиса, то он включается в топологический поток.*

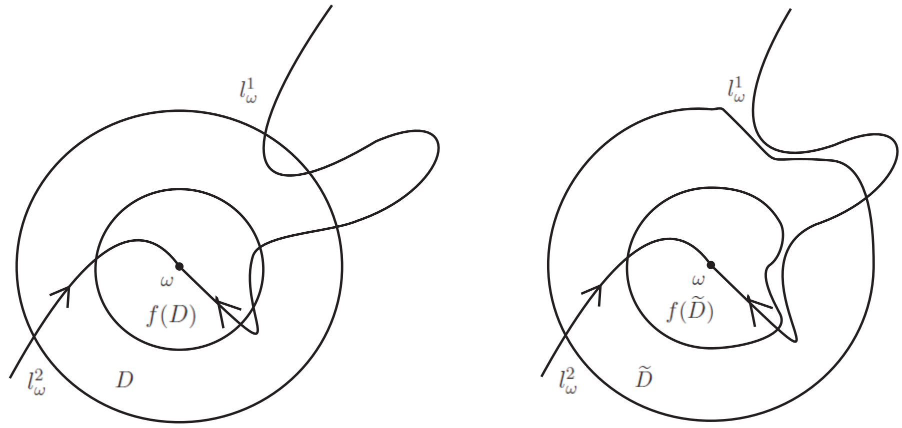


Рис. 2. Модификация диска D

Схема доказательства. Отметим, что для $n = 2$ условие (3) Палиса означает, что инвариантные многообразия различных седловых неподвижных точек диффеоморфизма $f : M^2 \to M^2$ не пересекаются. В [42] для диффеоморфизма f непосредственно строится топологический поток X^t, сдвиг на единицу времени f^1 вдоль траекторий которого совпадает с f. Построение базируется на следующих шагах.

1) Из гиперболичности и условий (1)-(2) Палиса следует, что для любой седловой точки $p \in \Omega_f$ существует окрестность u_p и гомеоморфизм $h_p : u_p \to \mathbb{R}^2$ такой, что $f|_{u_p} = h_p^{-1} b h_p|_{u_p}$, где $b(x, y) = (1/2x, 2y)$ — линейный гомеоморфизм плоскости. Отображение b включается в поток $b^t(x, y) = ((1/2)^t x, 2^t y)$, поэтому ограничение диффеоморфизма f на множество u_p включается в топологический поток $g^t_p = h_p^{-1} b^t h_p|_{u_p}$. Положим $v = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2y^2 \leqslant 1, |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 2\}$, $v_p = h_p^{-1}(v)$, $V_p = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} f^i(v_p)$, поставим в соответствие каждой точке $M \in V_p$ число $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $f^n(M) \subset v_p$ и определим поток G^t_p на множестве V_p соотношением $G^t_p(M) = f^{-n}(g^t_p(f^n(M)))$. Окрестность V_p назовем *линеаризующей окрестностью седловой точки* p. Очевидно, что линеаризующие окрестности можно выбрать так, чтобы для любых седловых точек $p \neq q$ выполнялось условие $V_p \cap V_q = \varnothing$. Обозначим через G^t поток на объединении всех линеаризующих окрестностей, для каждой седловой точки p совпадающий с G^t_p.

2) Пусть ω — стоковая неподвижная точка диффеоморфизма f. Из гиперболичности точки ω следует, что существует гладко вложенный диск $D \subset W^s_\omega$ такой, что $\omega \subset \operatorname{int} D$, $f(D) \subset \operatorname{int} D$.

Обозначим через $\ell^1_\omega, \ldots, \ell^k_\omega$ множество всех сепаратрис седловых точек, принадлежащих множеству W^s_ω, и через $V^1_\omega, \ldots, V^k_\omega$ компоненты связности линеаризующих окрестностей, принадлежащих W^s_ω такие, что $\ell^i_\omega \subset V^i_\omega$ для любого $i \in \{1, \ldots, k\}$. Не уменьшая общности, положим, что граница диска D трансверсальна всем сепаратрисам седловых точек диффеоморфизма f, лежащим в многообразии W^s_ω, (этого всегда можно добиться малыми шевелениями) и, в силу непрерывности, траекториям потока $G^t \cap W^s_\omega$. Тогда пересечение $\partial D \cap \bigcup\limits_{p\in\Omega^1_f} V_p$ состоит из конечного числа компактных дуг. Тогда можно выбрать диск $\widetilde{D} \subset W^s_\omega$ со следующими свойствами:

1. $\omega \subset \operatorname{int} \widetilde{D}$, $f(\widetilde{D}) \subset \operatorname{int} \widetilde{D}$,
2. для любого $i \in \{1, \ldots, k\}$ пересечение $V^i_\omega \cap (\widetilde{D} \setminus f(\operatorname{int} \widetilde{D})$ состоит в точности из одной полосы.

На рис. 2 схематично показана процедура модификации диска D в диск $\widetilde{D}$, граница которого пересекается с каждой сепаратрисой из множества $\ell^1_\omega, \ldots, \ell^k_\omega$ в единственной точке.

Тогда ограничение потока G^t на множество $\widetilde{D} \setminus f(\operatorname{int} \widetilde{D}) \cap \bigcup\limits_{p\in\Omega^1_f} V_p$ естественным образом достраивается до потока g^t_ω на этом множестве, который доопределяется на множестве $W^s_\omega \setminus \omega = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} f^i(\widetilde{D} \setminus f(\operatorname{int} \widetilde{D}))$ следующим образом. Каждой точке $M \in W^s_\omega \setminus \omega$ поставим в соответствие целое число n такое, что $f^n(M) \subset \widetilde{D} \setminus f(\operatorname{int} \widetilde{D})$, и положим $g^t_\omega(M) = f^{-n}(G^t(f^n(M))$. Теперь для построения искомого потока X^t осталось только доопределить поток, составленный из потоков G^t, G^t_ω, в неподвижных источниковых и стоковых точках. $\square$

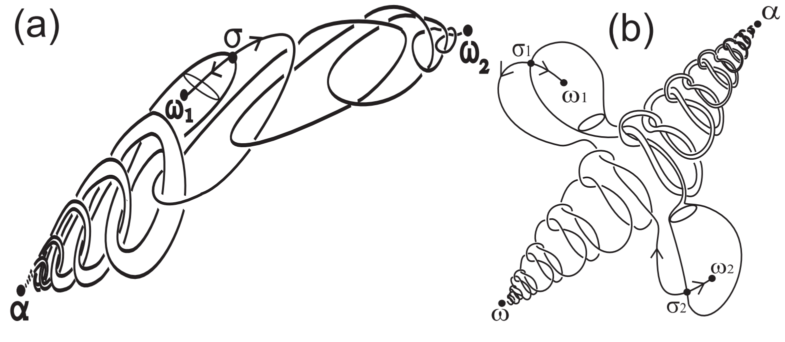


Рис. 3. Диффеоморфизмы с дико вложенными сепаратрисами

6. Включение в поток диффеоморфизмов Морса—Смейла трехмерных многообразий

6.1. Эффекты размерности 3. Как оказалось, в размерности $n = 3$ дополнительным препятствием для включения диффеоморфизма Морса—Смейла в топологический поток является возможность дикого вложения сепаратрис седловых точек, см. рис. 3. Первые примеры таких диффеоморфизмов построены в работах [16, 45, 46].

Напомним определение диких многообразий. Пусть M^n — топологическое многообразие размерности $n \geqslant 3$ и $N^k \subset \operatorname{int} M^n$ — компактное топологическое многообразие размерности $k < n$, вообще говоря, с непустым краем. Согласно [20], многообразие N^k называется *локально плоским в точке* $x \in N^k$, если существует окрестность $U(x) \subset M^n$ точки x и гомеоморфизм $\varphi : U(x) \to \mathbb{R}^n$ такой, что $\varphi(N^k \cap U(x)) \subset \mathbb{R}^k$, где $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство, а $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ — гиперплоскость размерности k. Если многообразие N^k является локально плоским в каждой своей точке, то оно называется *локально плоским*. Заметим, что в последнем случае множество N^k является подмногообразием многообразия M^n. Если многообразие N^k не является локально плоским хотя бы в одной точке $x \in N^k$, то оно называется *диким* в M^n, а точка x называется *точкой дикости*.

На рисунке 3 справа изображен фазовый портрет диффеоморфизма $f \in G(S^3)$, у которого замыкание двумерной сепаратрисы и одной из одномерных сепаратрис седловой неподвижной точки σ (содержащей в своем замыкании стоковую точку ω_2) являются дикой сферой и дугой соответственно.

Основное препятствие к обобщению доказательства теоремы 5.1 для размерности $n = 3$ состоит в том, что в общем случае в окрестности стоковой точки ω не существует шара со свойствами, аналогичными свойствам диска $\widetilde{D}$. Так, для диффеоморфизма, фазовый портрет которого изображен на рис. 3 слева, граница любого шара, содержащего стоковую точку ω_2, пересекается с сепаратрисой седла σ, содержащей точку ω_2 в замыкании, минимум в трех точках. Для диффеоморфизма f, фазовый портрет которого изображен на рис. 3 справа, в окрестности точки ω существует шар D, граница которого пересекается с каждой сепаратрисой, принадлежащей W^s_ω, в единственной точке. Но не существует расслоения кольца $D \setminus \operatorname{int} f(D)$ на отрезки, которое бы содержало в качестве слоев дуги этих одномерных сепаратрис. Поэтому уже ограничение таких диффеоморфизмов на устойчивые многообразия стоковых точек не включаются в топологические потоки, для которых одномерные сепаратрисы, содержащие эти стоковые точки в своем замыкании, совпадали бы с траекториям потока. При этом, в силу результатов работы К. Куперберг [38], дикая дуга может быть траекторией некоторого топологического потока на 3-многообразии.

Для более точного понимания препятствий включения диффеоморфизмов из класса $G(M^3)$ в топологический поток напомним несколько определений.

Множество $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}^n$ будем называть *стандартным одномерным пучком*, если оно состоит из конечного числа прямолинейных лучей с началом в точке $O(0, \dots, 0)$. Подмножество $F \subset \mathbb{R}^n$, снабженное индуцированной топологией и гомеоморфное $\mathbb{F}$, будем называть *одномерным пучком*. При этом пучок F будем называть *ручным*, если существует гомеоморфизм $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такой, что $H(F) = \mathbb{F}$; в противном случае пучок F будем называть *диким*.

Частным случаем одномерного пучка является дуга. Первые примеры диких дуг в $\mathbb{R}^3$ были построены Е. Артином и Р. Фоксом в 1948 году (см. [14]). Отметим, что ручность каждого из элементов, входящих в пучок $F \subset \mathbb{R}^3$, еще не является гарантией того, что пучок в целом будет ручным. Например, в работе [26] построен пример так называемого *умеренно дикого одномерного*

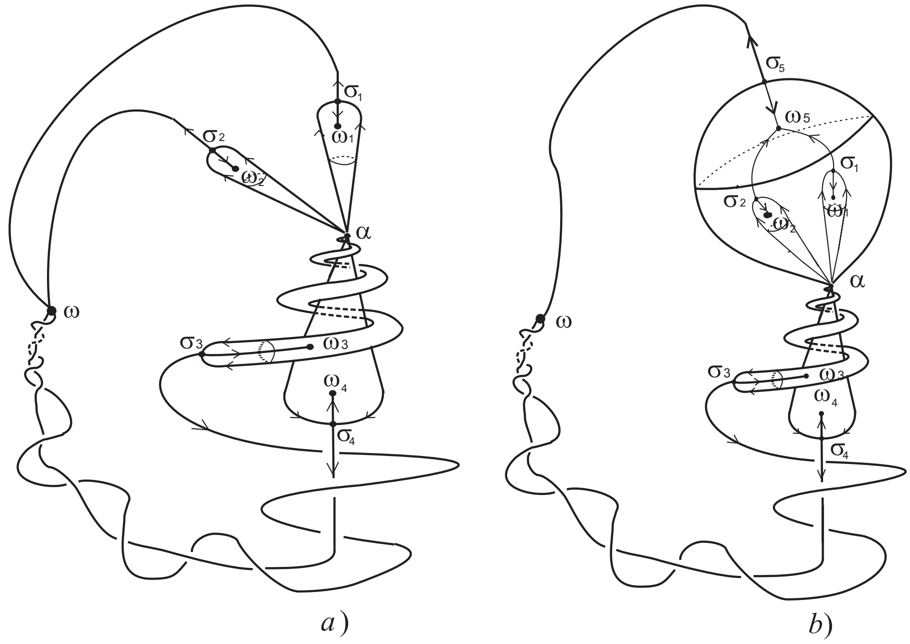


Рис. 4. Фазовые портреты диффеоморфизмов из класса $G(\mathbb{S}^3)$, не включающихся ни в какие топологические потоки: a) диффеоморфизм, все пучки одномерных сепаратрис которого являются ручными, но пучок F_ω не является тривиальным; b) диффеоморфизм, все пучки одномерных сепаратрис которого являются тривиальными.

пучка, т. е. такого дикого пучка, что любой содержащийся в нем пучок из меньшего числа дуг является ручным.

Пусть α — источниковая точка диффеоморфизма $f \in G(M^3)$. Будем обозначать через L_α объединение всех одномерных устойчивых сепаратрис седловых точек диффеоморфизма f, принадлежащих W^u_α. Положим $F_\alpha = L_\alpha \cup \alpha$ и назовем F_α *пучком одномерных устойчивых сепаратрис*.

Пучок одномерных устойчивых сепаратрис F_α назовем *ручным*, если существует гомеоморфизм $h_\alpha : W^u_\alpha \to \mathbb{R}^3$, отображающий F_α на стандартный ручной пучок. В противном случае будем говорить, что пучок сепаратрис F_α является *диким*. Если ручной (дикий) пучок F_α содержит только одну сепаратрису, то будем называть эту сепаратрису *ручной* (*дикой*).

Аналогично определяется *ручной* (*дикий*) *пучок* одномерных неустойчивых сепаратрис F_ω, состоящий из стоковой точки ω и всех одномерных неустойчивых сепаратрис L_ω седловых точек диффеоморфизма f, принадлежащих W^s_ω.

На рис. 3, a) одномерная сепаратриса, идущая в стоковую точку ω_2, является дикой дугой, а пучок сепаратрис, идущих в сток ω на рис. 3, b), является умеренно диким пучком.

Как оказалось, необходимое условие включения диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ в поток заключается даже в более сильном, нежели ручность, требовании, использующем линейное растяжение евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, определяемое формулой $A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2, 2x_3)$.

Пучок одномерных сепаратрис F_α называется *тривиальным*, если существует гомеоморфизм $H_\alpha : W^u_\alpha \to \mathbb{R}^3$ такой, что $f|_{W^u_\alpha} = H^{-1}_\alpha A H_\alpha|_{W^u_\alpha}$ и $H_\alpha(F_\alpha)$ — стандартный одномерный пучок. Аналогично определяется *тривиальный пучок* одномерных сепаратрис F_ω.

Из рассуждений выше ясно, что тривиальность всех пучков одномерных сепаратрис является необходимым условием включения диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ в топологический поток (строгое доказательство этого факта аналогично доказательству предложения 6.1, которое мы приводим ниже). Сюрпризом оказался тот факт, что добавление к списку Палиса условия тривиальности всех пучков одномерных сепаратрис седловых точек диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ не приводит к достаточным условиям его включения в топологический поток. Иллюстрирующий этот факт пример построен в работе [13], его фазовый портрет приведен на рисунке 4, b). На рисунке 4, a) изображен фазовый портрет диффеоморфизма из класса $G(S^3)$, все пучки одномерных сепаратрис которого являются ручными, но среди них есть пучок, не являющийся тривиальным.

6.2. Схема диффеоморфизма. Решение проблемы Палиса в случае $n \geqslant 3$ оказалось возможным благодаря существенному продвижению в решении задачи топологической классификации диффеоморфизмов Морса—Смейла. В цикле работ [1, 2, 16–19, 46] С. Бонатти, В. З. Гринесом, О. В. Починкой, Е. Пеку, В. С. Медведевым и Ф. Лауденбахом для диффеоморфизмов Морса—Смейла на трехмерных многообразиях был введен новый полный топологический инвариант, названный схемой диффеоморфизма, и решена проблема реализации всех классов топологической сопряженности. Благодаря этому удалось сформулировать необходимые и достаточные условия включения диффеоморфизма Морса—Смейла в топологический поток, выражающиеся в весьма компактном и естественном условии, накладываемом на схему диффеоморфизма. Для точной формулировки этого условия приведем вначале определение схемы диффеоморфизма.

Напомним, что через Ω^i_f обозначено множество неподвижных точек диффеоморфизма $f: M^3 \to M^3$ Морса—Смейла, размерность неустойчивых многообразий которых равна $i \in \{0,1,2,3\}$. Класс таких сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса—Смейла обозначим через $G(M^3)$.

Представим многообразие M^3 в виде объединения трех множеств $A_f = (\bigcup\limits_{\sigma\in\Omega^1_f} W^u_\sigma) \cup \Omega^0_f$, $R_f = (\bigcup\limits_{\sigma\in\Omega^2_f} W^s_\sigma) \cup \Omega^3_f$, $V_f = M^n \setminus (A_f \cup R_f)$. Из [7] следует, что множества A_f, R_f, V_f являются связными, множество A_f является аттрактором, R_f — репеллером, а V_f состоит из блуждающих орбит гомеоморфизма f, идущих от R_f к A_f.

Обозначим через $\widehat{V}_f = V_f/f$ пространство орбит действия f на V_f. Установлено, что $\widehat{V}_f$ является многообразием, а естественная проекция $p_{_f}: V_f \to \widehat{V}_f$ является накрытием. При этом накрытие $p_{_f}$ индуцирует эпиморфизм $\eta_{_f}: \pi_1(\widehat{V}_f) \to \mathbb{Z}$, ставящий в соответствие гомотопическому классу $[c] \in \pi_1(\hat{V}_f)$ целое число m такое, что поднятие кривой c на V_f соединяет точку x с точкой $f^m(x)$.

Положим $\hat{L}^s_f = \bigcup\limits_{\sigma\in\Omega^1_f} p_{_f}(W^s_\sigma \setminus \sigma)$, $\hat{L}^u_f = \bigcup\limits_{\sigma\in\Omega^2_f} p_{_f}(W^u_\sigma \setminus \sigma)$.

Определение 6.1. Набор $S_f = (\widehat{V}_f, \hat{L}^s_f, \hat{L}^u_f, \eta_f)$ называется *схемой* диффеоморфизма $f \in G(M^3)$.

Определение 6.2. Схемы S_f и $S_{f'}$ диффеоморфизмом $f, f' \in G(M^3)$ называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\hat{\varphi}: \widehat{V}_f \to \widehat{V}_{f'}$ такой, что $\hat{\varphi}(\hat{L}^s_f) = \hat{L}^s_{f'}$, $\hat{\varphi}(\hat{L}^u_f) = \hat{L}^u_{f'}$ и $\eta_{_f} = \eta_{_{f'}}\hat{\varphi}_*$.

В [17, 19] доказан следующий факт.

Утверждение 6.1. *Диффеоморфизмы $f, f' \in G(M^3)$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы эквивалентны.*

6.3. Необходимые и достаточные условия включения в поток диффеоморфизмов Морса—Смейла трехмерных многообразий. Для формулировки условий включения диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ в топологический поток определим стандартную схему.

Положим $g_{_f} = \dfrac{|\Omega^1_f \cup \Omega^2_f| - |\Omega^0_f \cup \Omega^3_f| + 2}{2}$, где $|P|$ означает мощность множества P. Обозначим через $\mathbb{S}_{g_f}$ ориентируемую замкнутую поверхность рода $g_{_f}$ и положим $\mathbb{V}_{g_f} = \mathbb{S}_{g_f} \times \mathbb{R}$, $\widehat{\mathbb{V}}_{g_f} = \mathbb{S}_{g_f} \times \mathbb{S}^1$.

Определим на множестве $\mathbb{V}_{g_f}$ поток $A^t_{g_f}$ соотношением $A^t_{g_f}(x,s) = (x, s+t)$, где $x \in \mathbb{S}_{g_f}$, $s \in \mathbb{R}$. По построению $\widehat{\mathbb{V}}_{g_f} = \mathbb{V}_{g_f}/_{A^1_{g_f}}$. Обозначим через $p_{g_f}: \mathbb{V}_{g_f} = \widehat{\mathbb{V}}_{g_f}$ естественную проекцию.

Определение 6.3. Схему S_f диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ назовем *тривиальной*, если существует гомеоморфизм $\hat{\psi}_{_f}: \widehat{V}_f \to \widehat{\mathbb{V}}_{g_f}$ такой, что для каждой компоненты связности $\hat{\lambda}$ множества $\hat{L}^s_f \cup \hat{L}^u_f$ найдется простая замкнутая дуга $c_{\hat{\lambda}} \subset \mathbb{S}_{g_f}$ такая, что $\hat{\psi}_{_f}(\hat{\lambda}) = c_{\hat{\lambda}} \times \mathbb{S}^1$.

В работах [6, 13] доказан следующий факт.

Теорема 6.1. *Диффеоморфизм $f \in G(M^3)$ включается в топологический поток тогда и только тогда, когда его схема является тривиальной.*

Изложим здесь схему доказательства теоремы 6.1, разбив его на два утверждения.

Предложение 6.1. *Пусть диффеоморфизм $f \in G(M^3)$ включается в топологический поток. Тогда его схема S_f является тривиальной.*

Схема доказательства. Если диффеоморфизм f включается в некоторый топологический поток X^t $(f = X^1)$, то неблуждающее множество Ω_f диффеоморфизма f совпадает с множеством состояний равновесия потока X^t, при этом устойчивое (неустойчивое) многообразие любой неподвижной точки $p \in \Omega_f$ совпадает с устойчивым (неустойчивым) многообразием соответствующего состояния равновесия потока X^t.

Обозначим через X_f^t ограничение потока X^t на множество V_f. Из построения множества V_f следует, что для любой точки $x \in V_f$ имеют место включения $\lim\limits_{t\to+\infty} X_f^t(x) \in A_f$ и $\lim\limits_{t\to-\infty} X_f^t(x) \in R_f$. Таким образом, для любых точек $p, q \in V_f$ существуют окрестности $U_p, U_q \subset V_f$ и константа $T > 0$ такие, что $X_f^t(U_p) \cap U_q = \varnothing$ для любого $|t| > T$. Тогда из [27, теорема 3] следует, что поток X_f^t является параллелизуемым, т. е. существует множество $\Sigma_f \subset V_f$ и гомеоморфизм $\xi_f : V_f \to \Sigma_f \times \mathbb{R}$ такие, что $\bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}} X_f^t(\Sigma_f) = V_f$ и $\xi_f(X_f^t(z)) = (z, t)$ для любых $z \in \Sigma_f, t \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что множество Σ_f является деформационным ретрактом многообразия V_f. Из [10, теоремы III.4, IV.3; с. 56, 69] следует, что топологическая размерность Σ_f равна двум. Тогда в силу [49, теорема 2] Σ_f является многообразием без края. Таким образом, Σ_f — замкнутая ориентируемая поверхность. Обозначим через ρ_f род этой поверхности. Покажем теперь, что $\rho_f = g_f$.

По построению поверхность Σ_f делит многообразие на две части, замыкания которых обозначим через P_{A_f}, P_{R_f}, полагая, что $A_f \subset \operatorname{int} P_{A_f}$, $R_f \subset \operatorname{int} P_{R_f}$. Более того, аттрактор A_f является деформационным ретрактом P_{A_f} и, следовательно, они имеют одинаковый гомотопический тип, а значит, и эйлерову характеристику. При этом $\chi(P_{A_f}) = 1 - \rho_f$, поскольку P_{A_f} — 3-многообразие с краем Σ_f и $\chi(A_f) = |\Omega_f^0| - |\Omega_f^1|$, поскольку A_f — клеточный комплекс, состоящий из $|\Omega_f^0|$ нульмерных и $|\Omega_f^1|$ одномерных клеток. Таким образом, $|\Omega_f^0| - |\Omega_f^1| = 1 - \rho_f$. Из аналогичных рассуждений для аттрактора получаем, что $|\Omega_f^3| - |\Omega_f^1| = 1 - \rho_f$. Складывая два последних равенства, получаем, что $|\Omega_f^0| - |\Omega_f^1| + |\Omega_f^3| - |\Omega_f^2| = 2 - 2\rho_f$, откуда $\rho_f = \dfrac{|\Omega_f^1 \cup \Omega_f^2| - |\Omega_f^0 \cup \Omega_f^3| + 2}{2}$ и, следовательно, $\rho_f = g_f$.

Поскольку каждая двумерная сепаратриса λ диффеоморфизма f является объединением траекторий потока X_f^t, гомеоморфных $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, то существует простая замкнутая кривая $\gamma_\lambda \subset \Sigma_f$ такая, что $\xi_f(\lambda) = \gamma_\lambda \times \mathbb{R}$. Тогда существует гомеоморфизм $h_f : \Sigma_f \to \mathbb{S}_{g_f}$ такой, что $c_\lambda = h_f(\gamma_\lambda)$ — простая гладкая замкнутая кривая для любой двумерной сепаратрисы λ. Определим гомеоморфизм $\psi_f : V_f \to \mathbb{V}_{g_f}$ соотношением $\psi_f(X_f^t(z)) = A_{g_f}^t(h_f(z))$. По построению гомеоморфизм ψ_f сопрягает потоки X_f^t и $A_{g_f}^t$, а значит, и их сдвиги на единицу времени. При этом $\psi_f(\lambda) = c_\lambda \times \mathbb{R}$. По построению $\hat{\mathbb{V}}_{g_f} = \mathbb{V}_{g_f}/A_{g_f}^1$. Тогда гомеоморфизм $\hat{\psi}_f = p_{g_f}\psi_f p_f^{-1} : \hat{V}_f \to \hat{\mathbb{V}}_{g_f}$ удовлетворяет условию определения 6.3. Таким образом, схема S_f является тривиальной и утверждение доказано. □

Предложение 6.2. *Пусть схема S_f диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ тривиальна. Тогда f включается в топологический поток.*

Схема доказательства. Построим топологический поток $\tilde{X}^t$ на многообразии M^3, сдвиг на единицу времени которого топологически сопряжен с диффеоморфизмом f посредством некоторого гомеоморфизма $h : M^3 \to M^3$. Отсюда будет следовать, что диффеоморфизм f включается в топологический поток $X^t = h\tilde{X}^t h^{-1}$.

Построение искомого потока проводится аналогично предложенному в работе [18] (см. также в [1] более детально) решению задачи реализации классов топологической сопряженности диффеоморфизмов. Перечислим принципиальные шаги в построении.

Шаг 1. Из определения тривиальной схемы следует, что существует гомеоморфизм $\psi_f : V_f \to \mathbb{V}_{g_f}$ такой, что:

1) $f|_{V_f} = \psi_f^{-1} A_{g_f}^1 \psi_f$, где $A_{g_f}^1$ — сдвиг на единицу времени потока $A_{g_f}^t$;
2) для любой двумерной сепаратрисы λ диффеоморфизма f существует простая гладкая замкнутая кривая c_λ на поверхности $\mathbb{S}_{g_f}$ такая, что $\psi_f(\lambda) = c_\lambda \times \mathbb{R}$.

Напомним, что L^s_f, L^u_f — объединение всех устойчивых, неустойчивых, соответственно, двумерных сепаратрис диффеоморфизма f. Положим $\mathbb{L}^s = \psi_f(L^s_f)$ и $\mathbb{L}^u = \psi_f(L^u_f)$. Для множества цилиндров $\mathbb{L}^\delta = \lambda^\delta_1 \cup \dots \cup \lambda^\delta_{l^\delta}$, $\delta \in \{s, u\}$ обозначим через $N(\mathbb{L}^\delta) = N(\lambda^\delta_1) \cup \dots \cup N(\lambda^\delta_{l^\delta})$ множество их попарно непересекающихся гладких трубчатых окрестностей таких, что $N(\lambda^\delta_i) = K^\delta_i \times \mathbb{R}$, где $K^\delta_i \subset \mathbb{S}_{g_f}$ — гладкое двумерное кольцо для каждого $i = 1, \dots, l^\delta$.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим подмножество $N = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1^2 + x_2^2)x_3^2 < 1\}$ и зададим на нем поток B^t формулой $B^t(x_1, x_2, x_3) = (2^{-t}x_1, 2^{-t}x_2, 2^t x_3)$. Положим $\hat{N}^s = (N \setminus Ox_3)/B^1$. По построению многообразие $\hat{N}^s$ диффеоморфно $K \times \mathbb{R}$, где K стандартное двумерное кольцо. Тогда существует диффеоморфизм $\mu^s_i : N(\lambda^s_i) \to (N \setminus Ox_3)$, сопрягающий потоки $A^t_{g_f}|_{N(\lambda^s_i)}$ и $B^t|_{N \setminus Ox_3}$. Обозначим через $\mu^s : N(\mathbb{L}^s) \to (N \setminus Ox_3) \times \mathbb{Z}_{l^s}$ диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов $\mu^s_1, \dots, \mu^s_{l^s}$. Положим $Q^s = \mathbb{V}_{g_f} \bigcup\limits_{\mu^s} (N \times \mathbb{Z}_{l^s})$. Тогда топологическое пространство Q^s является гладким связным ориентируемым 3-многообразием без края.

Положим $\bar{Q}^s = (\mathbb{V}_{g_f}) \cup (N \times \mathbb{Z}_{l^s})$ и обозначим через $p_s : \bar{Q}^s \to Q^s$ естественную проекцию. Положим $p_{s,1} = p_s|_{\mathbb{V}_{g_f}}$, $p_{s,2} = p_s|_{N \times \mathbb{Z}_{l^s}}$. Тогда поток $\tilde{Y}^t_s$ на многообразии Q^s определяется формулой

$$\tilde{Y}^t_s(x) = \begin{cases} p_{s,1}(A^t_{g_f}(p^{-1}_{s,1}(x))), \ x \in p_{s,1}(\mathbb{V}_{g_f}); \\ p_{s,2}(B^t(p^{-1}_{s,2}(x))), \ x \in p_{s,2}(N \times \{i\}), \ i \in \mathbb{Z}_{l^s}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество потока $\tilde{Y}^t_s$ состоит из l^s седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным единице.

Шаг 2. Снова обозначим через $\mathbb{L}^u$, $N(\mathbb{L}^u)$ образы этих множеств относительно проекции p_s. Положим $\hat{N}^u = (N \setminus Ox_3)/(B^1)^{-1}$. Тогда существует диффеоморфизм $\mu^u_i : N(\lambda^u_i) \to (N \setminus Ox_3)$, сопрягающий потоки $\tilde{Y}^t_s|_{N(\lambda^u_i)}$ и $B^{-t}|_{N \setminus Ox_3}$ для любого $i = 1, \dots, l^u$. Обозначим через $\mu^u : N(\mathbb{L}^u) \to (N \setminus Ox_3) \times \mathbb{Z}_{l^u}$ диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов $\mu^u_1, \dots, \mu^u_{l^u}$. Положим $Q^u = Q^s \bigcup\limits_{\mu^u} (N \times \mathbb{Z}_{l^u})$. Тогда топологическое пространство Q^u является гладким связным ориентируемым 3-многообразием без края.

Положим $\bar{Q}^u = Q^s \cup (N \times \mathbb{Z}_{l^u})$ и обозначим через $p_u : \bar{Q}^u \to Q^u$ естественную проекцию. Положим $p_{u,1} = p_u|_{Q^s}$, $p_{u,2} = p_u|_{N \times \mathbb{Z}_{l^u}}$. Тогда поток $\tilde{Y}^t_u$ на многообразии Q^u определяется формулой

$$\tilde{Y}^t_u(x) = \begin{cases} p_{u,1}(\tilde{Y}^t_s(p^{-1}_{u,1}(x))), \ x \in p_{u,1}(Q^s); \\ p_{u,2}(B^{-t}(p^{-1}_{u,2}(x))), \ x \in p_{u,2}(N \times \{i\}), \ i \in \mathbb{Z}_{l^u}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество потока $\tilde{Y}^t_u$ состоит из l^s седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным единице, и l^u седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным двум.

Шаг 3. Положим $R^s = Q^u \setminus W^s_{\Omega_{\tilde{Y}^t_u}}$ и обозначим через $\rho^s_1, \dots, \rho^s_{n^s}$ компоненты связности множества R^s. Определим на многообразии $\mathbb{R}^3$ топологический поток D^t формулой $D^t(x_1, x_2, x_3) = (2^{-t}x_1, 2^{-t}x_2, 2^{-t}x_3)$. Тогда каждая компонента ρ^s_i диффеоморфна $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ и поток $\tilde{Y}^t_u|_{\rho^s_i}$ гладко сопряжен с потоком $D^t|_{\mathbb{R}^3 \setminus O}$ посредством некоторого диффеоморфизма ν^s_i. Обозначим через $\nu^s : R^s \to (\mathbb{R}^3 \setminus Ox_3) \times \mathbb{Z}_{n^s}$ диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов $\nu^s_1, \dots, \nu^s_{n^s}$. Положим $M^s = Q^u \bigcup\limits_{\nu^s} (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^s})$. Тогда топологическое пространство M^s является гладким связным ориентируемым 3-многообразием без края.

Положим $\bar{M}^s = Q^u \cup (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^s})$ и обозначим через $q_s : \bar{M}^s \to M^s$ естественную проекцию. Положим $q_{s,1} = q_s|_{Q^u}$, $q_{s,2} = q_s|_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^s}}$. Тогда поток $\tilde{X}^t_s$ на многообразии M^s определяется формулой

$$\tilde{X}^t_s(x) = \begin{cases} q_{s,1}(\tilde{Y}^t_u(q^{-1}_{s,1}(x))), \ x \in q_{s,1}(Q^u); \\ q_{s,2}(B^{-t}(q^{-1}_{s,2}(x))), \ x \in q_{s,2}(\mathbb{R}^3 \times \{i\}), \ i \in \mathbb{Z}_{n^s}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество потока $\tilde{X}^t_s$ состоит из l^s седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным единице, l^u седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным двум, и n^s стоковых неподвижных гиперболических точек.

Шаг 4. Положим $R^u = M^s \setminus W^u_{\Omega_{\tilde{X}^t_s}}$ и обозначим через $\rho^u_1, \dots, \rho^u_{n^u}$ компоненты связности множества R^u. Тогда каждая компонента ρ^u_i диффеоморфна $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ и поток $\tilde{X}^t_s|_{\rho^u_i}$ гладко сопряжен с потоком $D^{-t}|_{\mathbb{R}^3 \setminus O}$ посредством некоторого диффеоморфизма ν^u_i. Обозначим через $\nu^u : R^u \to (\mathbb{R}^3 \setminus Ox_3) \times \mathbb{Z}_{n^u}$ диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов $\nu^u_1, \dots, \nu^u_{n^u}$. Положим $M^u = M^s \bigcup\limits_{\nu^u} (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^u})$. Тогда топологическое пространство M^u является гладким связным замкнутым ориентируемым 3-многообразием.

Положим $\bar{M}^u = M^s \cup (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^u})$ и обозначим через $q_u : \bar{M}^u \to M^u$ естественную проекцию. Положим $q_{u,1} = q_u|_{M^s}$, $q_{u,2} = q_u|_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^u}}$. Тогда поток $\tilde{X}^t_u$ на многообразии M^u определяется формулой

$$\tilde{X}^t_u(x) = \begin{cases} q_{u,1}(\tilde{X}^t_s(q^{-1}_{u,1}(x))), \ x \in q_{u,1}(M^s); \\ q_{u,2}(B^{-t}(q^{-1}_{u,2}(x))), \ x \in q_{u,2}(\mathbb{R}^3 \times \{i\}), \ i \in \mathbb{Z}_{n^u}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество потока $\tilde{X}^t_u$ состоит из l^s седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным единице, l^u седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным двум, n^s стоковых неподвижных гиперболических точек и n^u источниковых неподвижных гиперболических точек.

Шаг 5. Положим $\tilde{f} = \tilde{X}^1_u$. По построению диффеоморфизм $\tilde{f}$ является диффеоморфизмом Морса—Смейла на многообразии M^u и его ограничение $\tilde{f}|_{V_{\tilde{f}}}$ топологически сопряжено с диффеоморфизмом $f|_{V_f}$ посредством гомеоморфизма, переводящего двумерные сепаратрисы диффеоморфизма $\tilde{f}$ в двумерные сепаратрисы диффеоморфизма f с сохранением устойчивости. Таким образом, схемы диффеоморфизмов $\tilde{f}$ и f эквивалентны, а сами диффеоморфизмы $\tilde{f}, f$ в силу утверждения 6.1 топологически сопряжены. Следовательно, $M^u = M^3$ и $\tilde{X}^t = \tilde{X}^t_u$ — искомый поток. ☐

6.4. Связь условия тривиальности схемы и условий Палиса. Пусть схема диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ тривиальна. Покажем, что отсюда следуют все условия Палиса.

1) Покажем, что все седловые периодические точки диффеоморфизма f имеют период, равный единице. Предположим, что $\sigma \in \Omega^2_f$ — седловая точка периода m_σ такая, что диффеоморфизм $f|_{W^u_\sigma}$ является сохраняющим ориентацию. Тогда существует гомеоморфизм $h : W^u_\sigma \to \mathbb{R}^2$ такой, что $hf^{m_\sigma}|_{W^u_\sigma} = a_+h$, где $a_+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — линейное отображение плоскости, задаваемое формулой $a_+(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2)$. Положим $K = \{(x_1, x_2)|\ 1 \leqslant x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4\}$. Кольцо K $(h^{-1}(K))$ является фундаментальной областью действия a_+ (f) на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ $(\bigcup\limits_{i=0}^{m_\sigma - 1} W^u_{f^i(\sigma)} \setminus f^i(\sigma))$. Пространство орбит $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}/_{a_+}$ $(\hat{\lambda}^u_\sigma = (\bigcup\limits_{i=0}^{m_\sigma - 1} W^u_{f^i(\sigma)} \setminus f^i(\sigma))/_f = p_f(\bigcup\limits_{i=0}^{m_\sigma - 1} W^u_{f^i(\sigma)} \setminus f^i(\sigma))$ этого действия получается склейкой компонент края кольца K $(h^{-1}(K))$ по диффеоморфизму a_+ (f). Так как a_+ является сохраняющим ориентацию отображением, то многообразие $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}/_{a_+}$ и, следовательно, многообразие $\hat{\lambda}^u_\sigma$ диффеоморфно тору. Выберем на множестве $h^{-1}(K)$ дугу $\tilde{l}$, соединяющую точки x и $f^{m_\sigma}(x)$, принадлежащие разным компонентам связности края кольца $h^{-1}(K)$. Тогда замкнутая дуга $l = p_f(\tilde{l})$ является негомотопной нулю петлей на торе $\hat{\lambda}^u_\sigma$ и $\eta_f([p_f(l)]) = m_\sigma$. Тогда из условия существования гомеоморфизма $\hat{\psi}_f : \hat{V}_f \to \widehat{\mathbb{V}}_{g_f}$ такого, что $\hat{\psi}_f(\hat{\lambda}^u_\sigma) = c_{\hat{\lambda}^u_\sigma} \times \mathbb{S}^1$ следует, что $m_\sigma = 1$.

2) Покажем, что ограничение диффеоморфизма f на инвариантное многообразие произвольной седловой точки является сохраняющим ориентацию. Из этого условия будет следовать инвариантность каждой сепаратрисы произвольной седловой точки, что приводит к неподвижности стоковых и источниковых точек, каждая из которых, в силу предложений 2.1, 2.2, лежит в замыкании некоторой сепаратрисы седловой точки.

Пусть $\sigma \in \Omega^2_f$ — седловая неподвижная точка такая, что диффеоморфизм $f|_{W^u_\sigma}$ меняет ориентацию W^u_σ. Тогда существует гомеоморфизм $h : W^u_\sigma \to \mathbb{R}^2$ такой, что $hf|_{W^u_\sigma} = a_-h$, где $a_- : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — линейное отображение плоскости, задаваемое формулой $a_-(x_1, x_2) = (-2x_1, 2x_2)$. Тогда пространство орбит $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}/_{a_-}$ $(\hat{\lambda}^u_\sigma = (W^u_\sigma \setminus \sigma)/_f = p_f(W^u_\sigma \setminus \sigma))$ диффеоморфно бутылке Клейна, что противоречит тривиальности схемы.

Пусть $\sigma' \in \Omega^1_f$ и $f|_{W^u_{\sigma'}}$ является меняющим ориентацию. Так как f в целом является сохраняющим ориентацию, то $f|_{W^s_{\sigma'}}$ меняет ориентацию на $W^s_{\sigma'}$. Применим к точке σ' те же рассуждения, что и для точки σ. В результате получим, что все седловые точки диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ с тривиальной схемой являются неподвижными, а ограничение диффеоморфизма f на инвариантное многообразие произвольной седловой точки является сохраняющим ориентацию.

3) Пусть p, q — такие седловые неподвижные точки диффеоморфизма f, что $W^u_p \cap W^s_q \neq \varnothing$. Покажем, что пересечение $W^u_p \cap W^s_q$ не содержит компактных компонент связности.

Положим $\hat{\lambda}^u_p = p_f(W^u_p \setminus p), \hat{\lambda}^s_q = p_f(W^s_q \setminus q)$. Если $p \in \Omega^1_f, q \in \Omega^2_f$, то $W^u_p \subset A_f$, следовательно, проекция многообразия $W^s_q \backslash q$ не содержит точек, принадлежащих многообразию $W^s_q \cap W^u_p$. Поэтому множество $\hat{\lambda}^s_p$ некомпактно, что противоречит тому факту, что это множество (в тривиальной схеме) гомеоморфно тору. Если $p \in \Omega^2_f$, $q \in \Omega^2_f$, то по условию существуют замкнутые дуги $c_p, c_q \subset \mathbb{S}_{g_f}$ такие, что $\hat{\psi}_f(\hat{\lambda}^u_p) = c_p \times \mathbb{S}^1$, $\hat{\psi}_f(\hat{\lambda}^s_q) = c_q \times \mathbb{S}^1$, следовательно, проекция каждой компоненты связности пересечения $W^u_p \cap W^s_q$ является множеством вида $\{x\} \times \mathbb{S}^1$, где $x \in c_p \cap c_q$ — точка. Из конструкции следует, что $p_f^{-1}(\{x\} \times \mathbb{S}^1)$ гомеоморфно вложенной в V_f вещественной прямой, следовательно, пересечение $W^u_p \cap W^s_q$ не содержит компактных компонент.

7. Достаточные условия включения в поток диффеоморфизмов Морса—Смейла на сфере размерности четыре и выше

Обозначим через $G_*(S^n)$ класс сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса—Смейла сферы S^n размерности $n \geqslant 4$ таких, что для любого $f \in G_*(S^n)$ инвариантные многообразия различных седловых точек $p, q \in \Omega_f$ не пересекаются. Из отсутствия пересечения инвариантных многообразий различных седловых периодических точек следует, что множество седловых периодических точек диффеоморфизма $f \in G_*(S^n)$ состоит из точек, размерность инвариантных многообразий которых принимает значения только 1 и $(n-1)$ (см. [31, теорема 1.3], [32, предложение 4.2], а также [12, лемма 2.2]).

Поскольку нас интересует вопрос включения диффеоморфизма f в топологический поток, далее будем предполагать, что все точки из Ω_f являются неподвижными (что влечет за собой выполнение всех условий Палиса для $f \in G_*(S^n)$).

В силу предложения 2.1 инвариантные многообразия седловых периодических точек любого диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$ Морса—Смейла являются гладкими подмногообразиями. Кроме того, в силу предложения 2.2, если неустойчивая сепаратриса ℓ^u_σ седловой точки σ не пересекается ни с какими устойчивыми многообразиями седловых точек, отличных от σ, то замыкание $cl\, \ell^u_\sigma$ этой сепаратрисы состоит из нее самой, точки σ, и некоторой стоковой точки ω. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Предложение 7.1. *Пусть $f \in G_*(S^n)$, σ — его седловая периодическая точка. Тогда множество $cl\, \ell^u_\sigma$ является сферой размерности $n-1$, если $\sigma \in \Omega^{n-1}_f$, и компактной дугой, если $\sigma \in \Omega^1_f$.*

В отличие от размерности 3, замыкания сепаратрис седловых точек диффеоморфизма $f \in G_*(S^n)$ являются топологическими подмногообразиями сферы S^n. Этот факт непосредственно вытекает из следующего утверждения.

Предложение 7.2.

1. *Пусть $N^{n-1} \subset \operatorname{int} M^n$ — дикое многообразие, $n \geqslant 4$, и B — множество точек такое, что N^{n-1} локально плоское в каждой точке $N^{n-1} \setminus B$. Тогда B несчетно.*
2. *Пусть $l \in \mathbb{R}^n$ — дикая дуга, $n \geqslant 4$. Тогда множество ее точек дикости более чем счетно.*
3. *Пучок $F \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 4$, ручных дуг является ручным*[1].

Первое утверждение предложения 7.2 является следствием результатов Дж. Кантрелла, А. В. Чернавского и Р. Кирби[2] (см. [21], [25, утверждение 3А.6]). Второе и третье утверждения

[1]То есть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ размерности $n \geqslant 4$ нет умеренно диких пучков.

[2]В работе [25] отмечается, что утверждение 7.2 является следствием результатов А. В. Чернавского и Р. Кирби, полученных независимо в 1968 году. Ранее, в 1963 году, Дж. Кантреллом получено менее общее утверждение, которое может быть сформулировано следующим образом: *если сфера $S^{n-1} \subset S^n$, $n \geqslant 4$, является дикой и B — множество*

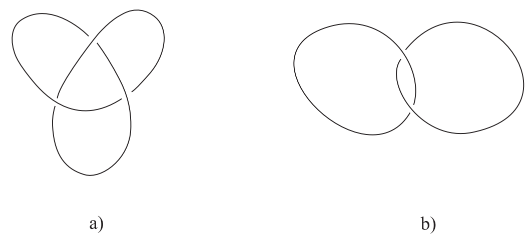


Рис. 5. a) нетривиальная дуга; b) нетривиальное зацепление.

предложения 7.2 следуют из работ [22, 23]. Отметим, что в работе [15] доказано существование диких дуг в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ размерности $n \geqslant 4$ (но тогда эти дуги, как следует из [22, 23], имеют более чем счетное число точек дикости).

Из предложений 7.2, 7.1 следует, что сепаратрисы седловых точек диффеоморфизма $f \in G_*(S^n)$ размерности $(n-1)$ являются ручными сферами, а одномерные сепаратрисы образуют ручные пучки. Методами работы [22] можно доказать и более сильный факт тривиальности пучков одномерных сепаратрис (см. [4, следствие 4.1]). Однако отсюда еще не следует, что пучки сепаратрис размерности $(n-1)$ являются ручными и все диффеоморфизмы из класса $G_*(S^n)$ при $n \geqslant 4$ включаются в топологические потоки. Тем не менее, в работе [32] удалось увидеть определенную двойственность между вложениями сепаратрис размерности 1 и $(n-1)$ и доказать следующую теорему.

Теорема 7.1. *Любой диффеоморфизм $f \in G_*(S^n)$, $n \geqslant 4$, включается в топологический поток.*

Инструментом доказательства теоремы 7.1 вновь является схема диффеоморфизма, которая вводится ниже аналогично тому, как это сделано в размерности 3. Мы вводим понятие тривиальности схемы и приводим основные идеи доказательства того факта, что схема любого диффеоморфизма $f \in G_*(S^n)$ является тривиальной. После доказательства тривиальности схемы доказательство включения диффеоморфизма f в топологический поток проводится полностью аналогично доказательству теоремы 6.1.

Представим сферу S^n в виде объединения множеств $A_f = (\bigcup\limits_{\sigma\in\Omega_f^1} W^u_\sigma)\cup\Omega_f^0$, $R_f = (\bigcup\limits_{\sigma\in\Omega_f^{n-1}} W^s_\sigma)\cup\Omega_f^n$, $V_f = M^n \setminus (A_f \cup R_f)$.

Обозначим через $\widehat{V}_f = V_f/f$ пространство орбит действия f на V_f и через $p_f : V_f \to \widehat{V}_f$ естественную проекцию, положим $\hat{L}^s_f = \bigcup\limits_{\sigma\in\Omega_f^1} p_f(W^s_\sigma \setminus \sigma)$, $\hat{L}^u_f = \bigcup\limits_{\sigma\in\Omega_f^{n-1}} p_f(W^u_\sigma \setminus \sigma)$.

Определение 7.1. Набор $S_f = (\widehat{V}_f, \hat{L}^s_f, \hat{L}^u_f)$ называется *схемой* диффеоморфизма $f \in G_*(S^n)$.

Определение 7.2. Схемы S_f и $S_{f'}$ диффеоморфизмом $f, f' \in G_*(S^n)$ называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\hat{\varphi} : \widehat{V}_f \to \widehat{V}_{f'}$ такой, что $\hat{\varphi}(\hat{L}^s_f) = \hat{L}^s_{f'}$ и $\hat{\varphi}(\hat{L}^u_f) = \hat{L}^u_{f'}$.

В [31], в частности, доказано следующее утверждение.

Утверждение 7.1. *Диффеоморфизмы $f, f' \in G_*(S^n)$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы эквивалентны.*

Определение 7.3. Схему S_f диффеоморфизма $f \in G_*(S^n)$ назовем *тривиальной*, если существует гомеоморфизм $\hat{\psi}_f : \widehat{V}_f \to \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ такой, что для каждой компоненты связности $\hat{\lambda}$ множества $\hat{L}^s_f \cup \hat{L}^u_f$ найдется гладко вложенная сфера $S^{n-2}_{\hat{\lambda}} \subset \mathbb{S}^{n-1}$ размерности $(n-2)$ такая, что $\hat{\psi}_f(\hat{\lambda}) = S^{n-2}_{\hat{\lambda}} \times \mathbb{S}^1$.

7.1. Вспомогательные результаты. Следующее утверждение, доказанное в [32] (см. также уточнения в [33]), резюмирует результаты, полученные в работах [24, 36, 41, 48] относительно

точек такое, что S^{n-1} — локально-плоская в каждой точке множества $S^{n-1} \setminus B$, то множество B состоит более чем из одной точки (см. [21]).

вложений тривиальной коразмерности (большей трех). В частности, из этих результатов следует, что все локально плоско вложенные замкнутые дуги и зацепления (объединения замкнутых дуг) в пространстве $\mathbb{R}^n$ размерности $n \geqslant 4$, являются тривиальными, т. е. переводятся гомеоморфизмом пространства на дуги (объединения дуг), лежащие в координатной плоскости. Примеры нетривиальной замкнутой дуги и нетривиального зацепления в $\mathbb{R}^3$ приведены на рис. 5.

Простую замкнутую дугу $\beta \in M^n$ будем называть *узлом*, а образ топологического вложения $e : S^1 \times B^{n-1} \to M^n$ такого, что $e(S^1 \times \{O\}) = \beta$, — *трубчатой окрестностью* узла β.

Предложение 7.3. *Пусть M^n — топологическое многообразие, возможно, с непустым краем ∂M^n, а $\{\beta_i\}_{i=1}^k$, $\{\beta_i'\}_{i=1}^k$ — семейства попарно непересекающихся простых замкнутых дуг, локально плоско вложенных в $\operatorname{int} M^n$ такие, что для каждого $i \in \{1,\dots,k\}$ дуги β_i, β_i' гомотопны. Пусть $\{N_{\beta_i}\}_{i=1}^k, \{N_{\beta_i'}\}_{i=1}^k$ — попарно непересекающиеся трубчатые окрестности этих дуг в $\operatorname{int} M^n$.*

Тогда существует гомеоморфизм $h : M_n \to M^n$ такой, что $h(\beta_i) = \beta_i', h(N_{\beta_i}) = N_{\beta_i'}$, $i \in \{1,\dots,k\}$, и $h|_{\partial M^n} = id$.

Основным инструментом доказательства тривиальности схемы диффеоморфизмов рассматриваемого класса является хирургия вдоль узлов, которая, как доказывается в предложении 7.4, в размерности 4 и выше не меняет топологии многообразия (что, как хорошо известно, неверно в трехмерном случае).

Пусть M^n — топологическое многообразие, возможно, с непустым краем, $\beta \in \operatorname{int} M^n$ — узел и $N_\beta \subset \operatorname{int} M^n$ — его трубчатая окрестность. Склеим многообразия $M^n \setminus \operatorname{int} N_\beta$ и $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ при помощи произвольного обращающего ориентацию гомеоморфизма $\varphi : \partial N_\beta \to \mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{S}^1$ и обозначим полученное многообразие через Q^n. Будем говорить, что Q^n получено из M^n *хирургией вдоль узла β.*

Предложение 7.4. *Q^n гомеоморфно M^n.*

Доказательство. Положим $N' = M^n \setminus \operatorname{int} N_\beta$, тогда $Q^n = N' \bigcup\limits_{\varphi} \mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ и для любого $X \subset N' \cup \mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ определена естественная проекция $\pi : X \to Q^n$.

Пусть $\psi = \varphi^{-1}\pi^{-1}|_{\pi(\mathbb{S}^{n-2}\times\mathbb{S}^1)}$. В силу [39] гомеоморфизм ψ продолжается до гомеоморфизма $\Psi : \pi(\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1) \to N_\beta$. Тогда отображение $H : Q^n \to M^n$, определенное соотношениями

$$H(x) = \begin{cases} \pi^{-1}(x) = x, x \in \pi(\operatorname{int} N'), \\ \Psi(x), x \in \pi(\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1), \end{cases}$$

является искомым гомеоморфизмом. □

Пусть фундаментальная группа $\pi_1(M^n)$ многообразия M^n изоморфна $\mathbb{Z}$. Будем называть узел $\beta \in M^n$ *тривиальным*, если гомоморфизм $e_* : \pi_1(\beta) \to \pi_1(M^n)$, индуцированный включением, является изоморфизмом.

Из предложения 7.3 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 7.1. *Пусть $\beta \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ — тривиальный узел и N_β — его трубчатая окрестность. Тогда $(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1) \setminus \operatorname{int} N_\beta$ гомеоморфно $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.*

Последнее следствие в сочетании с предложением 7.4 приводит к следующему утверждению.

Следствие 7.2. *Пусть $Q_1^n, \dots, Q_{k+1}^n$, $k \geqslant 0$, — попарно-непересекающиеся многообразия, гомеоморфные $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$; $\beta_1, \dots, \beta_{2k} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k+1} Q_i$ — локально-плоские тривиальные узлы такие, что:*

1. *каждое многообразие Q_i^n содержит по крайней мере один узел из множества $\beta_1, \dots, \beta_{2k}$;*
2. *для любого $j \in \{1,\dots,k\}$ узлы β_{2j-1}, β_{2j} принадлежат различным многообразиям из множества $Q_1^n, \dots, Q_{k+1}^n$.*

Пусть $\psi_j : \partial N_{\beta_{2j-1}} \to \partial N_{\beta_{2j}}$ — обращающий естественную ориентацию гомеоморфизм, $j \in \{1,\dots,k+1\}$, и Q^n — многообразие, полученное из множества $(\bigcup\limits_{j=1}^{k+1} Q_j^n) \setminus (\bigcup\limits_{i=1}^{2k} \operatorname{int} N_{\beta_i})$ склеиванием компонент края по гомеоморфизмам $\psi_1, \dots, \psi_{k+1}$.

Тогда Q^n гомеоморфно $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$, и проекция каждого многообразия ∂N_β делит Q^n на две компоненты связности, замыкание каждой из которых гомеоморфно $\mathbb{B}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$.

7.2. Доказательство тривиальности схемы диффеоморфизма $f\in G_*(S^n)$. Пусть $f\in G_*(S^n)$. Докажем, что схема S_f тривиальна. Ввиду предложения 7.3 для этого достаточно доказать, что многообразие $\widehat{V}_f$ гомеоморфно $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$ и каждая компонента связности множества $\hat{L}^u_f\cup\hat{L}^s_f$ делит $\widehat{V}_f$ на две компоненты связности, замыкание каждой из которых гомеоморфно $\mathbb{B}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$. Изложим основную идею доказательства.

Положим $k_i=|\Omega^i_f|$, $i\in\{0,1,n-1,n\}$. Так как замыкания всех устойчивых (неустойчивых) сепаратрис размерности $(n-1)$ делят несущую сферу S^n на непересекающиеся множества, каждое из которых содержит в точности одну стоковую (источниковую) точку, то $k_0=k_1+1$, $k_n=k_{n-1}+1$.

Положим $\widehat{V}_\omega=(W^s_\omega\setminus\omega)/_f$, $\widehat{V}=\bigcup\limits_{\omega\in\Omega^0_f}\widehat{V}_\omega$. Из гиперболичности стоковых точек следует, что многообразие $\widehat{V}_\omega$ гомеоморфно $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$. Обозначим через $\beta_1,\dots,\beta_{2k_1}$ проекции одномерных сепаратрис в многообразие $\widehat{V}$. Так как все сепаратрисы неподвижны, то их проекции являются существенным узлами. Без потери общности предположим, что нумерация на множестве узлов выбрана таким образом, что узлы β_{2j-1},β_{2j} являются проекциями одномерных сепаратрис одной и той же седловой точки $\sigma_j\in\Omega^1_f$, $j\in\{1,\dots,k_1\}$.

Из [47, теорема 2.3, с. 753] следует, что каждое многообразие $\widehat{V}^s_\omega$ содержит по крайней мере один узел из множества $\beta_1,\dots,\beta_{2k_1}$. Покажем, что для любого $j\in\{1,\dots,k_1\}$ узлы β_{2j-1},β_{2j} принадлежат различным компонентам связности множества $\widehat{V}$. Действительно, если $\beta_{2j-1},\beta_{2j}\subset\widehat{V}^s_\omega$ для некоторого j,ω, то множество $cl\,W^u_{\sigma_j}=W^u_{\sigma_j}\cup\omega$ гомеоморфно окружности. Так как $cl\,W^s_{\sigma_j}$ делит сферу S^n на две компоненты связности и пересекает окружность $cl\,W^u_{\sigma_j}$ в точке σ_j, то найдется по крайней мере одна точка в $cl\,W^s_{\sigma_j}\cap cl\,W^u_{\sigma_j}$, отличная от σ_j, что приводит к бесконечному множеству неблуждающих точек, и, следовательно, противоречит определению диффеоморфизма f.

Положим $\mathbb{U}=\{(x_1,\dots,x_n)|\ x_1^2(x_2^2+\dots+x_n^2)\leqslant 1\}$ и определим диффеоморфизм $b:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ формулой $b(x_1,x_2,\dots,x_n)=(2x_1,\frac{1}{2}x_2,\dots,\frac{1}{2}x_n)$.

Из гиперболичности точек $\sigma\in\Omega^1_f$ следует, что существуют попарно-непересекающиеся окрестности $\{N_\sigma\}_{\sigma\in\Omega^1_f}$ этих точек и гомеоморфизмы $\chi_\sigma:N_\sigma\to\mathbb{U}$ такие, что $f|_{N_\sigma}=\chi_\sigma^{-1}b\chi_\sigma$. Нетрудно увидеть, что множество $\widehat{N}^u_\sigma=N_\sigma\setminus W^s_\sigma)/_f$ состоит из двух компонент связности, каждая из которых гомеоморфна $\mathbb{B}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$, а множество $\widehat{N}^s_\sigma=N_\sigma\setminus W^u_\sigma)/_f$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-2}\times\mathbb{S}^1\times[-1,1]$, при этом проекция устойчивой сепаратрисы точки σ совпадает со средним слоем $\mathbb{S}^{n-2}\times\mathbb{S}^1\times\{0\}$. Обозначим через $\pi^u_\sigma:N_\sigma\setminus W^s_\sigma\to\widehat{N}^u_\sigma$, $\pi^s_\sigma:N_\sigma\setminus W^u_\sigma\to\widehat{N}^s_\sigma$ естественные проекции.

Обозначим через N_{2j-1},N_{2j} компоненты связности множества $\widehat{N}^u_{\sigma_j}$, содержащие узлы β_{2j-1},β_{2j}, соответственно, положим $K_j=\widehat{N}^s_{\sigma_j}$, $T_j=\widehat{V}^s_{\sigma_j}$, определим гомеоморфизм $\psi_j:\partial N_{2j-1}\cup\partial N_{2j}\to\partial K_j$ формулой $\psi_j=\pi^s_\sigma(\pi^u_\sigma)^{-1}$ и обозначим через $\Psi:\bigcup\limits_{j=1}^{k_1}\partial N_{2j-1}\cup\partial N_{2j}\to\bigcup\limits_{j=1}^{k_1}\partial K_j$ гомеоморфизм такой, что $\Psi|_{\partial N_{2j-1}\cup\partial N_{2j}}=\psi_j|_{\partial N_{2j-1}\cup\partial N_{2j}}$.

Так как

$$V_f=\Bigl(\bigcup_{\omega\in\Omega^0_f}V^s_\omega\setminus\Bigl(\bigcup_{\sigma\in\Omega^1_f}V^u_\sigma\Bigr)\Bigr)\bigcup\Bigl(\bigcup_{\sigma\in\Omega^1_f}V^s_\sigma\Bigr)=\Bigl(V_f\setminus\Bigl(\bigcup_{\sigma\in\Omega^1_f}N^u_\sigma\Bigr)\Bigr)\bigcup\Bigl(\bigcup_{\sigma\in\Omega^1_f}N^s_\sigma\Bigr),$$

то

$$\widehat{V}_f=\Bigl(\widehat{V}_f\setminus\Bigl(\bigcup_{\sigma\in\Omega^1_f}\widehat{N}^u_\sigma\Bigr)\Bigr)\cup_\Psi\Bigl(\bigcup_{\sigma\in\Omega^1_f}\widehat{N}^s_\sigma\Bigr)=\Bigl(\widehat{V}_f\setminus\Bigl(\bigcup_{j=1}^{2k_1}N_j\Bigr)\Bigr)\cup_\Psi\Bigl(\bigcup_{j=1}^{k_1}K_j\Bigr).$$

Таким образом, многообразие $\widehat{V}_f$ получено из $\bigcup\limits_{\omega\in\Omega^0_f}\widehat{V}^s_\omega$ хирургией вдоль узлов $\beta_1,\dots,\beta_{2k_1}$. В силу следствия 7.2 $\widehat{V}_f$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$, и проекция каждой компоненты связности множества ∂K_j делит $\widehat{V}_f$ на две компоненты связности, замыкание каждой из которых гомеоморфно $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. Так как проекция устойчивой сепаратрисы точки σ_j в ∂K_j и любая компонента связности края K_j ограничивают в K_j прямое произведение $\mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{S}^1 \times [0,1]$, то проекция устойчивой сепаратрисы точки σ_j в $\widehat{V}_f$ также делит $\widehat{V}_f$ на две компоненты связности, замыкание каждой из которых гомеоморфно $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.

С другой стороны,

$$V_f = \Bigg(\bigcup_{\alpha \in \Omega_f^n} V_\alpha^u \setminus \Bigg(\bigcup_{\sigma \in \Omega_f^{n-1}} V_\sigma^s \Bigg) \Bigg) \bigcup \Bigg(\bigcup_{\sigma \in \Omega_f^{n-1}} V_\sigma^u \Bigg) = \Bigg(V_f \setminus \Bigg(\bigcup_{\sigma \in \Omega_f^{n-1}} N_\sigma^s \Bigg) \Bigg) \bigcup \Bigg(\bigcup_{\sigma \in \Omega_f^{n-1}} N_\sigma^u \Bigg).$$

Аналогично предыдущим рассуждениям получаем, что множество $\widehat{V}_f$ получено из $\bigcup\limits_{\alpha \in \Omega_f^n} \widehat{V}_\alpha^u$ хирургией вдоль проекций устойчивых одномерных сепаратрис седловых точек диффеоморфизма f, и каждая компонента множества $\hat{L}_f^u$ делит $\widehat{V}_f$ на две компоненты связности, замыкание каждой из которых гомеоморфно $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.

7.3. Обсуждение условий теоремы 7.1. Нарушение любого из условий теоремы 7.1 позволяет построить контрпример к утверждению теоремы. Необходимость условий i), ii) в теореме 7.1 показана в лемме 3.1.

Условие, что несущее многообразие является сферой, не является необходимым, однако в работе [50] построен пример диффеоморфизма Морса—Смейла $f_0 : M^4 \to M^4$ на многообразии M^4, отличном от сферы S^4, удовлетворяющий условиям i)–iii), но не включающийся в топологический поток. Неблуждающее множество диффеоморфизма f_0 состоит в точности из трех неподвижных точек: источника, стока и седла, инвариантные многообразия которого имеют размерность два, и замыкание каждого из них является дикой сферой (см. [50, теорема 4, п. 2]). Если предположить, что диффеоморфизм f_0 включается в топологический поток X_0^t, тогда неблуждающее множество этого потока состоит из трех состояний равновесия, совпадающими с неподвижными точками диффеоморфизма f_0, каждое из которых имеет окрестность, в которой поток X_0^t локально топологически эквивалентен линейному потоку с собственными числами, вещественная часть которых отлична от нуля.

В [11, теорема 3] показано, что все такие потоки топологически эквивалентны, а в работе [50] построен пример потока Морса—Смейла из рассматриваемого класса, замыкания инвариантных многообразий седлового состояния равновесия которого являются ручными сферами. Таким образом, замыкания инвариантных многообразий состояния равновесия потока X_0^t, являющегося седлом диффеоморфизма f_0, являются ручными сферами. Получаем противоречие с конструкцией диффеоморфизма f_0. Из [31, теорема 1.3] следует, что если инвариантные многообразия различных седловых точек диффеоморфизма Морса—Смейла $f : S^n \to S^n$ не пересекаются, то его неблуждающее множество Ω_f состоит из точек, размерность неустойчивого многообразия каждой из которых принадлежит множеству $\{0, 1, n-1, n\}$. Это обстоятельство поясняет, в частности, почему многообразие M^4 не гомеоморфно сфере.

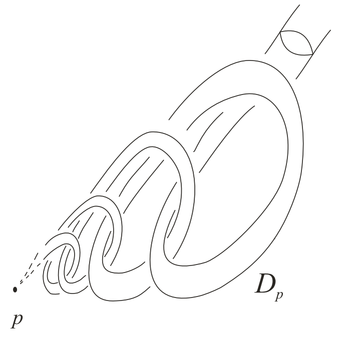


Рис. 6. Диск $D_p \subset W_p^s$

В работе [40] описывается пример диффеоморфизма Морса—Смейла $f_1 : S^4 \to S^4$, удовлетворяющего условиям i)-ii) теоремы, но не включающегося в топологический поток. Неблуждающее множество диффеоморфизма f_1 состоит из двух источников, двух стоков и двух седел p, q таких, что $\dim W^s_p = \dim W^u_q = 3$. При этом пересечение $W^s_p \cap W^u_q$ не пусто и его замыкание в W^s_p является дико вложенным открытым диском D_p с точкой дикости p. Более точно, для любого шара $B^3 \subset W^s_p$, для которого точка p является внутренней, пересечение границы этого шара с диском D_p состоит не менее чем из трех компонент связности (см. рис. 6). Диффеоморфизм f_1 удовлетворяет всем условиям теоремы 7.1, кроме условия iii). Аналогично доказательству предложения 6.1 доказывается, что не существует топологического потока в W^s_p, для которого диск D_p является инвариантным, а ограничение диффеоморфизма f_1 на множество W^s_p является сдвигом на единицу времени. Отсюда следует, что f_1 не включается в топологический поток.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бонатти Хр., Гринес В. З., Починка О. В.* Классификация диффеоморфизмов Морса—Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях// Докл. АН СССР. — 2004. — *396*, № 4. — С. 439–442. С. 439-442
2. *Бонатти Х., Гринес В. З., Починка О. В.* Реализация диффеоморфизмов Морса—Смейла на 3-многообразиях// Тр. МИАН. — 2017. — *297*. — С. 46–61. 297. С. 35–49.
3. *Брин М. И.* О включении диффеоморфизма в поток// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1972. — *8*. — С. 19–25.
4. *Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Медведев В. С.* Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса—Смейла на многообразиях размерности большей трех// Тр. МИАН. — 2008. — *261*. — С. 61–86. (2008), 59–83
5. *Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Медведев В. С.* О топологической классификации диффеоморфизмов Морса—Смейла с одномерным множеством неустойчивых сепаратрис на многообразиях размерности большей 3// Тр. МИАН. — 2010. — *270*. — С. 62–86. 270 (2010), 57–79
6. *Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Починка О. В., Медведев В. С.* О включении в поток диффеоморфизмов Морса—Смейла на многообразиях размерности, большей двух// Мат. заметки. — 2012. — *91*, № 5. — С. 791–794. Notes, 91:5 (2012), 742–745
7. *Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С., Починка О. В.* Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса—Смейла// Тр. МИАН. — 2010. — *271*. — С. 111–133. 103–124
8. *Гробман Д. М.* О гомеоморфизме систем дифференциальных уравнений// Докл. АН СССР. — 1959. — *128*, № 5. — 1959. — С. 880–881.
9. *Гробман Д. М.* Топологическая классификация окрестностей особой точки в n-мерном пространстве// Мат. сб. — 1962. *56*, № 1. — С. 77–94.
10. *Гуревич В., Волмэн Г.* Теория размерности. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1948.
11. *Жужома Е. В., Медведев В. С.* Непрерывные потоки Морса—Смейла с тремя состояниями равновесия// Мат. сб. — 2016. — *207*, № 5. — С. 69–92.
12. *Пилюгин С. Ю.* Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса—Смейла без периодических траекторий на сферах// Дифф. уравн. — 1978. — *14*, № 2. — С. 245–254.
13. *Починка О. В., Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Медведев В. С.* О включении диффеоморфизмов Морса—Смейла на 3-многообразии в топологический поток// Мат. сб. — 2012. — *203*, № 12. — С. 81–104. 1761–1784
14. *Artin E., Fox R. H.* Some wild cells and spheres in three-dimensional space// Ann. Math. — 1948. — *49*. — С. 979–990.
15. *Blankinship W. A.* Generalization of a construction of Antoine// Ann. Math. — 1951. — *2*, № 3. — С. 276–297.
16. *Bonatti Ch., Grines V.* Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3// J. Dyn. Control Syst. — 2000. — *6*, № 4. — С. 579–602.
17. *Bonatti C., Grines V., Laudenbach F., Pochinka O.* Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves on 3-manifolds// Ergodic Theory Dynam. Systems. — 2019. — *39*, №. 9. — С. 2403–2432.
18. *Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pécou E.* Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds// Topology. — 2004. — *43*. — С. 369–391.
19. *Bonatti C., Grines V., Pochinka O.* Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds// Duke Math. J. — 2019. — *168*, № 13. — С. 2507–2558.
20. *Brown M.* Locally flat imbeddings of topological manifolds// Ann. Math. (2). — 1962. — *75*, № 2. — С. 331–341.
21. *Cantrell J. C.* Almost locally flat embeddings of S^{n-1} in S^n// Bull. Am. Math. Soc. — 1963. — *69*. — С. 716–718.
22. *Cantrell J. C.* Almost locally poliedral curves in Euclidean n-space// Trans. Am. Math. Soc. — 1963. — *107*, № 3. — С. 451–457.

23. *Cantrell J.C.* n-frames in Euclidean k-space// Proc. Am. Math. Soc. — 1964. — *15*, № 4. — С. 574–578.
24. *Chernavskii A. V.* Piecewise linear approximation of imbeddings of manifolds in codimensions greater than two// Sb. Math. — 1970. — *11*, № 3. — С. 465–466.
25. *Daverman R.J.* Embeddings of $(n-1)$-spheres in Euclidean n-space// Bull. Am. Math. Soc. — 1978. — *84*, № 3. — С. 377–405.
26. *Debruner H., Fox R.* A mildly wild embedding of an n-frame// Duke Math. J. — 1960. — *27*, № 3. — С. 425–429.
27. *Dugundji J., Antosiewicz H.A.* Parallelizable flows and Lyapunov's second method// Ann. Math. — 1961. — *2*, № 73. — С. 543–555.
28. *Foland N.E., Utz W.R.* The embedding of discrete flows in continuous flows// В сб.: «Ergodic theory», Proc. Int. Symp., Tulane University, New Orleans, USA, October, 1961. — New York: Academic Press, 1963. — С. 121–134.
29. *Garay B.M.* Discretization and some qualitative properties of ordinary differential equations about equilibria// Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.). — 1993. — *62*, № 2. — С. 249–275.
30. *Garay B.M.* On structural stability of ordinary differential equations with respect to discretization methods// Numer. Math. — 1996. — *72*, № 4. — С. 449–479.
31. *Grines V., Gurevich E., Pochinka O.* Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2015. — *208*, № 1. — С. 81–90.
32. *Grines V., Gurevich E., Pochinka O.* On embedding of multidimensional Morse–Smale diffeomorphisms in topological flows// Mosc. Math. J. — 2019. — *19*, № 4. — С. 739–760.
33. *Grines V., Gurevich E., Pochinka O.* On topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on the sphere S^n// ArXiv. — 2019. — 1911.10234v2 [math.DS].
34. *Hartman P.* On the local linearization of differential equations// Proc. Am. Math. Soc. — 1963. — *14*, № 4. — С. 568–573.
35. *Hirsch M., Pugh C., Shub M.* Invariant Manifolds. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1977.
36. *Hudson J.F.* Concordance and isotopy of PL embeddings// Bull. Am. Math. Soc. — 1966. — *72*, № 3. — С. 534–535.
37. *Hudson J.F., Zeeman E.C.* On combinatorial isotopy// Publ. IHES. — 1964. — *19*. — С. 69–74.
38. *Kuperberg K.* 2-wild trajectories// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2005. — Suppl. Vol. — С. 518–523.
39. *Max N.L.* Homeomorphisms of $S^n \times S^1$// Bull. Am. Math. Soc. — 196. — *74*, № 6. — С. 939–942.
40. *Medvedev T., Pochinka O.* The wild Fox–Artin arc in invariant sets of dynamical systems// Dyn. Syst. — 2018. — *33*, № 4. — С. 660–666.
41. *Miller R. T.* Approximating codimension 3 embeddings// Ann. Math. (2). — 1972. — *95*, № 3. — С. 406–416.
42. *Palis J.* On Morse–Smale dynamical systems// Topology. — 1969. — *8*, № 4. — С. 385–404.
43. *Palis J.* Vector fields generate few diffeomorphisms// Bull. Am. Math. Soc. — 1974. — *80*. — С. 503–505.
44. *Palis J., Smale S.* Structural stability theorem// В сб.: «Global Analysis», Proc. Symp. Pure Math., 1970, № 14. — Providence: American Math. Soc., 1970.
45. *Pixton D.* Wild unstable manifolds// Topology. — 1977. — *16*, № 2. — С. 167–172.
46. *Pochinka O.* Diffeomorphisms with mildly wild frame of separatrices// Zesz. Nauk. Uniw. Jagiell. — 2009. — *47*. — С. 149–154.
47. *Smale S.* Differentiable dynamical systems// Bull. Am. Math. Soc. — 1967. — *73*, № 6. — С. 747–817.
48. *Weller G.P.* Locally flat imbeddings of topological manifolds in codimension three// Trans. Am. Math. Soc. — 1971. — *157*. — С. 161–178.
49. *Young G.S.* On the factors and fiberings of manifolds// Proc. Am. Math. Soc. — 1950. — *1*. — С. 215–223.
50. *Zhuzhoma E. V., Medvedev V.S.* Morse–Smale systems with few non-wandering points// Topology Appl. — 2013. — *160*, № 3. — С. 498–507.

В.З. Гринес
Национальный исследовательский ун-т «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия
E-mail: vgrines@yandex.ru

Е.Я. Гуревич
Национальный исследовательский ун-т «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия
E-mail: egurevich@hse.ru

О.В. Починка
Национальный исследовательский ун-т «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия
E-mail: opochinka@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-160-181 UDC 517.938

On Embedding of the Morse–Smale Diffeomorphisms in a Topological Flow

© 2020 **V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, O. V. Pochinka**

Abstract. This review presents the results of recent years on solving of the Palis problem on finding necessary and sufficient conditions for the embedding of Morse–Smale cascades in topological flows. To date, the problem has been solved by Palis for Morse–Smale diffeomorphisms given on manifolds of dimension two. The result for the circle is a trivial exercise. In dimensions three and higher new effects arise related to the possibility of wild embeddings of closures of invariant manifolds of saddle periodic points that leads to additional obstacles for Morse–Smale diffeomorphisms to embed in topological flows. The progress achieved in solving of Palis's problem in dimension three is associated with the recently obtained complete topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on three-dimensional manifolds and the introduction of new invariants describing the embedding of separatrices of saddle periodic points in a supporting manifold. The transition to a higher dimension requires the latest results from the topology of manifolds. The necessary topological information, which plays key roles in the proofs, is also presented in the survey.

REFERENCES

1. Ch. Bonatti, V. Z. Grines, and O. V. Pochinka, "Klassifikatsiya diffeomorfizmov Morsa—Smeyla s konechnym mnozhestvom geteroklinicheskikh orbit na 3-mnogoobraziyakh" [Classification of Morse–Smale diffeomorphisms with finite set of heteroclinic orbits on 3-manifolds], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 2004, **396**, No. 4, 439–442 (in Russian).
2. Ch. Bonatti, V. Z. Grines, and O. V. Pochinka, "Realizatsiya diffeomorfizmov Morsa—Smeyla na 3-mnogoobraziyakh" [Realization of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2017, **297**, 46–61 (in Russian).
3. M. I. Brin, "O vklyuchenii diffeomorfizma v potok" [On embedding of a diffeomorphism in a flow], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1972, **8**, 19–25 (in Russian).
4. V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, and V. S. Medvedev, "Graf Peykshoto diffeomorfizmov Morsa—Smeyla na mnogoobraziyakh razmernosti bol'shey trekh" [Peixoto graph of Morse–Smale diffeomorphisms on manifolds of dimension greater than three], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2008, **261**, 61–86 (in Russian).
5. V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, and V. S. Medvedev, "O topologicheskoy klassifikatsii diffeomorfizmov Morsa—Smeyla s odnomernym mnozhestvom neustoychivykh separatris na mnogoobraziyakh razmernosti bol'shey 3" [On topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms with one-dimensional set of unstable separatrices on manifolds of dimension greater than 3], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2010, **270**, 62–86 (in Russian).
6. V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, O. V. Pochinka, and V. S. Medvedev, "O vklyuchenii v potok diffeomorfizmov Morsa—Smeyla na mnogoobraziyakh razmernosti, bol'shey dvukh" [On embedding of Morse–Smale diffeomorphisms in a flow on manifolds of dimension greater than two], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2012, **91**, No. 5, 791–794 (in Russian).
7. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, and O. V. Pochinka, "Global'nye attraktor i repeller diffeomorfizmov Morsa—Smeyla" [Global attractor and repeller of Morse–Smale diffeomorphisms], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2010, **271**, 111–133 (in Russian).
8. D. M. Grobman, "O gomeomorfizme sistem differentsial'nykh uravneniy" [On homeomorphism of systems of differential equations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1959, **128**, No. 5, 880–881 (in Russian).
9. D. M. Grobman, "Topologicheskaya klassifikatsiya okrestnostey osoboy tochki v n-mernom prostranstve" [Topological classification of neighborhoods of singular points in n-dimensional space], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1962, **56**, No. 1, 77–94 (in Russian).

10. W. Hurewicz and H. Wallman, *Teoriya razmernosti* [Dimension Theory], Izd-vo inostrannoy literatury, Moscow, 1948 (Russian translation).
11. E. V. Zhuzhoma and V. S. Medvedev, "Nepreryvnye potoki Morsa—Smeyla s tremya sostoyaniyami [Continuous Morse–Smale flows with three equilibrium states], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2016, **207**, No. 5, 69–92 (in Russian).
12. S. Yu. Pilyugin, "Fazovye diagrammy, opredelyayushchie sistemy Morsa—Smeyla bez periodicheskikh traektoriy sferakh" [Phase diagrams defining Morse–Smale systems without periodic orbits on spheres], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1978, **14**, No. 2, 245–254 (in Russian).
13. O. V. Pochinka, V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, and V. S. Medvedev, "O vklyuchenii diffeomorfizmov Morsa—Smeyla na 3-mnogoobrazii v topologicheskiy potok" [On embedding a Morse–Smale diffeomorphism on a 3-manifold in a topological flow], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2012, **203**, No. 12, 81–104 (in Russian).
14. E. Artin and R. H. Fox, "Some wild cells and spheres in three-dimensional space," *Ann. Math.*, 1948, **49**, 979–990.
15. W. A. Blankinship, "Generalization of a construction of Antoine," *Ann. Math.*, 1951, **2**, No. 3, 276–297.
16. Ch. Bonatti and V. Grines, "Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3," *J. Dyn. Control Syst.*, 2000, **6**, No. 4, 579–602.
17. C. Bonatti, V. Grines, F. Laudenbach, and O. Pochinka, "Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves on 3-manifolds," *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 2019, **39**, No. 9, 2403–2432.
18. Ch. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, and E. Pécou, "Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds," *Topology*, 2004, **43**, 369–391.
19. C. Bonatti, V. Grines, and O. Pochinka, "Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds," *Duke Math. J.*, 2019, **168**, No. 13, 2507–2558.
20. M. Brown, "Locally flat imbeddings of topological manifolds," *Ann. Math. (2)*, 1962, **75**, No. 2, 331–341.
21. J. C. Cantrell, "Almost locally flat embeddings of S^{n-1} in S^n," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1963, **69**, 716–718.
22. J. C. Cantrell, "Almost locally poliedral curves in Euclidean n-space," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1963, **107**, No. 3, 451–457.
23. J. C. Cantrell, "n-frames in Euclidean k-space," *Proc. Am. Math. Soc.*, 1964, **15**, No. 4, 574–578.
24. A. V. Chernavskii, "Piecewise linear approximation of imbeddings of manifolds in codimensions greater than two," *Sb. Math.*, 1970, **11**, No. 3, 465–466.
25. R. J. Daverman, "Embeddings of $(n-1)$-spheres in Euclidean n-space," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1978, **84**, No. 3, 377–405.
26. H. Debruner and R. Fox, "A mildly wild embedding of an n-frame," *Duke Math. J.*, 1960, **27**, No. 3, 425–429.
27. J. Dugundji and H. A. Antosiewicz, "Parallelizable flows and Lyapunov's second method," *Ann. Math.*, 1961, **2**, No. 73, 543–555.
28. N. E. Foland and W. R. Utz, "The embedding of discrete flows in continuous flows," In: *Ergodic theory*, Proc. Int. Symp., Tulane University, New Orleans, USA, October, 1961, Academic Press, New York, 1963, pp. 121–134.
29. B. M. Garay, "Discretization and some qualitative properties of ordinary differential equations about equilibria," *Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.)*, 1993, **62**, No. 2, 249–275.
30. B. M. Garay, "On structural stability of ordinary differential equations with respect to discretization methods," *Numer. Math.*, 1996, **72**, No. 4, 449–479.
31. V. Grines, E. Gurevich, and O. Pochinka, "Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections," *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2015, **208**, No. 1, 81–90.
32. V. Grines, E. Gurevich, and O. Pochinka, "On embedding of multidimensional Morse–Smale diffeomorphisms in topological flows," *Mosc. Math. J.*, 2019, **19**, No. 4, 739–760.
33. V. Grines, E. Gurevich, and O. Pochinka, "On topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on the sphere S^n," *ArXiv*, 2019, 1911.10234v2 [math.DS].
34. P. Hartman, "On the local linearization of differential equations," *Proc. Am. Math. Soc.*, 1963, **14**, No. 4, 568–573.
35. M. Hirsch, C. Pugh, and M. Shub, *Invariant Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.
36. J. F. Hudson, "Concordance and isotopy of PL embeddings," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1966, **72**, No. 3, 534–535.
37. J. F. Hudson and E. C. Zeeman, "On combinatorial isotopy," *Publ. IHES*, 1964, **19**, 69–74.
38. K. Kuperberg, "2-wild trajectories," *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2005, Suppl. Vol, 518–523.
39. N. L. Max, "Homeomorphisms of $S^n \times S^1$," *Bull. Am. Math. Soc.*, 196, **74**, No. 6, 939–942.

40. T. Medvedev and O. Pochinka, "The wild Fox–Artin arc in invariant sets of dynamical systems," *Dyn. Syst.*, 2018, **33**, No. 4, 660–666.
41. R. T. Miller, "Approximating codimension 3 embeddings," *Ann. Math. (2)*, 1972, **95**, No. 3, 406–416.
42. J. Palis, "On Morse–Smale dynamical systems," *Topology*, 1969, **8**, No. 4, 385–404.
43. J. Palis, "Vector fields generate few diffeomorphisms," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1974, **80**, 503–505.
44. J. Palis and S. Smale, "Structural stability theorem," In: *Global Analysis*, Proc. Symp. Pure Math., 1970, No. 14, American Math. Soc., Providence, 1970.
45. D. Pixton, "Wild unstable manifolds," *Topology*, 1977, **16**, No. 2, 167–172.
46. O. Pochinka, "Diffeomorphisms with mildly wild frame of separatrices," *Zesz. Nauk. Uniw. Jagiell.*, 2009, **47**, 149–154.
47. S. Smale, "Differentiable dynamical systems," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1967, **73**, No. 6, 747–817.
48. G. P. Weller, "Locally flat imbeddings of topological manifolds in codimension three," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1971, **157**, 161–178.
49. G. S. Young, "On the factors and fiberings of manifolds," *Proc. Am. Math. Soc.*, 1950, **1**, 215–223.
50. E. V. Zhuzhoma and V. S. Medvedev, "Morse–Smale systems with few non-wandering points," *Topology Appl.*, 2013, **160**, No. 3, 498–507.

V. Z. Grines
National Research University "Higher School of Economics," Nizhniy Novgorod, Russia
E-mail: vgrines@yandex.ru

E. Ya. Gurevich
National Research University "Higher School of Economics," Nizhniy Novgorod, Russia
E-mail: egurevich@hse.ru

O. V. Pochinka
National Research University "Higher School of Economics," Nizhniy Novgorod, Russia
E-mail: opochinka@yandex.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 66, № 2 (2020). С. 182–208

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-182-208 УДК 517.958

К ПРОБЛЕМЕ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ ИЗ ДВУХ ВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ, ЗАПОЛНЯЮЩИХ НЕПОДВИЖНЫЙ СОСУД (МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА)

© 2020 г. **Д. А. ЗАКОРА, Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ**

Аннотация. В работе изучается скалярная задача сопряжения, моделирующая проблему малых колебаний двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд. Исследуется начально-краевая задача и методами теории полугрупп доказывается теорема о ее однозначной разрешимости на положительной полуоси. Возникающая при этом спектральная проблема для нормальных колебаний системы исследуется методами спектральной теории оператор-функций (операторных пучков). Полученный операторный пучок обобщает как известный операторный пучок С. Г. Крейна (колебания вязкой жидкости в открытом сосуде), так и пучок, возникающий в задаче о малых движениях вязкоупругой жидкости в частично заполненном сосуде. Рассмотрен пример двумерной задачи, допускающей разделение переменных, найдены все точки существенного спектра и ветви собственных значений. На основе этой двумерной задачи сформулирована гипотеза о структуре существенного спектра в скалярной задаче сопряжения и доказана теорема о кратной базисности системы корневых элементов основного операторного пучка.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Постановка скалярной модельной задачи

1.1. Введение. Одними из первых работ, связанных с применением методов функционального анализа к исследованию проблемы малых движений и нормальных колебаний вязкоупругой жидкости в частично заполненном сосуде, являются работы А. И. Милославского (см. [13, 23, 24]). В них для обобщенной модели Олдройта ($m > 1$) применен операторный подход, развивающий построения, проведенные ранее С. Г. Крейном и его учениками (см. [7, 9], а также [6, 22]), применительно к задаче о малых колебаниях вязкой жидкости в частично заполненном сосуде либо системы из несмешивающихся жидкостей. Случай полного заполнения полости вязкоупругой жидкостью рассмотрен в [16], а также в [5]. Вариант начально-краевой задачи для сосуда, заполненного двумя несмешивающимися вязкоупругими жидкостями, изучен в [19]. Там же сформирована спектральная проблема в задаче о нормальных колебаниях гидросистемы, которая приведена к исследованию операторного пучка, обобщающего известный пучок С. Г. Крейна.

Работа выполнена при частичной поддержке второго автора грантом Российского научного фонда (№ 16-11-10125, «Операторные уравнения в функциональных пространствах и приложения к нелинейному анализу», выполняемого в Воронежском госуниверситете).

В данной работе изучается модельная спектральная задача, обладающая всеми особенностями векторной проблемы о нормальных колебаниях системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих произвольный сосуд, а также ее частный случай (двумерная проблема в прямоугольной области). Для произвольного сосуда изучена начально-краевая задача и получена спектральная проблема для операторного пучка, обобщающая пучок С. Г. Крейна. Далее изучается соответствующая спектральная задача в упомянутом частном случае, допускающем разделение переменных. Характеристическое уравнение задачи позволяет проводить ее исследование графически с использованием асимптотических методов. В итоге двумерная задача позволяет выдвинуть гипотезу, позволяющую исследовать структуру спектра в модельной спектральной задаче. Модельная задача, в свою очередь, позволяет сделать качественные выводы относительно свойств векторной гидродинамической задачи в случае, когда сосуд заполнен двумя или более несмешивающимися жидкостями.

1.2. Предварительная постановка проблемы. Будем считать, что две вязкоупругих жидкости модели Олдройта заполняют сосуд $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и в состоянии равновесия под действием гравитационного поля занимают области Ω_1 и Ω_2 соответственно с горизонтальной границей раздела Γ. Обозначим через S_1 и S_2 те части границы $\partial\Omega$, которые примыкают к первой и второй жидкостям соответственно.

Введем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, чтобы ось Ox_3 была направлена вверх, т. е. против действия однородного гравитационного поля, а начало координат O находилось на Γ. Тогда ускорение гравитационного поля $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, $g > 0$, а в состоянии покоя поле давлений в жидкостях выражаются по законам Архимеда:

$$P_{0,k}(x_3) = p_0 - \rho_k g x_3, \quad k = 1, 2, \tag{1.1}$$

где $\rho_k > 0$ — постоянные плотности жидкостей, а p_0 — давление на границе раздела Γ.

Приведем теперь постановку задачи о малых движениях системы из двух вязкоупругих жидкостей модели Олдройта (см. [19]). Пусть $\vec{u}_k(t,x)$ — поля малых скоростей, а $p_k(t,x)$ — отклонения полей давлений от их равновесных значений (1.1). Полагаем, что на гидросистему дополнительно к гравитационному действует малое поле внешних сил $\vec{f}(t,x)$, $x \in \Omega$.

Тогда линеаризованные уравнения движения жидкостей имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}\rho_k \frac{\partial \vec{u}_k(t,x)}{\partial t} = -\nabla p_k(t,x) + \mu_k \Delta \vec{v}_k(t,x) + \rho_k \vec{f}_k(t,x), \quad \operatorname{div}\vec{u}_k(t,x) = 0, \quad x \in \Omega_k, \\ \vec{v}_k(t,x) = \vec{u}_k(t,x) + \alpha_k \int\limits_0^t e^{-\beta_k(t-s)}\vec{u}_k(s,x)\,ds =: I_{0,k}(t)\vec{u}_k(t,x), \quad k = 1, 2,\end{gathered} \tag{1.2}$$

где $\mu_k > 0$ — динамические вязкости жидкостей, $\alpha_k \geqslant 0$, $\beta_k \geqslant 0$ — коэффициенты, характеризующие свойства вязкоупругости жидкостей модели Олдройта, $\vec{f}_k(t,x) := \vec{f}(t,x)\big|_{\Omega_k}$, $k = 1, 2$, а Δ — трехмерный оператор Лапласа.

Для вязких жидкостей, как известно, на твердых стенках S_k сосуда должны выполняться условия прилипания, т. е.

$$\vec{u}_k(t,x) = \vec{0}, \quad x \in S_k, \quad k = 1, 2, \tag{1.3}$$

а на границе Γ — условия непрерывности полей скоростей:

$$\vec{u}_1(t,x) = \vec{u}_2(t,x), \quad x \in \Gamma. \tag{1.4}$$

Пусть

$$x_3 = \zeta(t,x), \quad x \in \Gamma, \tag{1.5}$$

— вертикальное отклонение границы раздела между жидкостями в процессе малых движений системы. Тогда на Γ должно выполняться кинематическое условие

$$\frac{\partial \zeta(t,x)}{\partial t} = \vec{u}_1(t,x)\cdot\vec{n} =: \gamma_{n,1}\vec{u}_1(t,x) = \vec{u}_2(t,x)\cdot\vec{n} =: \gamma_{n,2}\vec{u}_2(t,x), \quad \vec{n} = \vec{e}_3, \tag{1.6}$$

где символом $\gamma_{n,k}$ обозначена операция взятия нормальной компоненты поля скорости. Заметим также, что из условия сохранения объема каждой из жидкости имеем связь

$$\int\limits_{\Gamma} \zeta(t,x)\,d\Gamma = 0. \tag{1.7}$$

Сформулируем теперь динамические условия на Γ. Они состоят в том, что на движущейся границе раздела жидкостей векторное поле напряжений при переходе из одной жидкости к другой изменяется непрерывно. Линеаризация этого условия и его снос на Γ приводят к следующим соотношениям: на Γ касательные напряжения изменяются непрерывно, а нормальное напряжение (т. е. вдоль оси Ox_3) компенсируется гравитационным скачком давлений. Имеем

$$\begin{gathered}\mu_1\tau_{j3}\big(\vec v_1(t,x)\big) = \mu_2\tau_{j3}\big(\vec v_2(t,x)\big), \quad \vec v_k(t,x) = I_{0,k}(t)\vec u_k(t,x), \quad j,k=1,2;\\ \big[-p_1(t,x)+\mu_1\tau_{33}\big(\vec v_1(t,x)\big)\big] - \big[-p_2(t,x)+\mu_2\tau_{33}\big(\vec v_2(t,x)\big)\big] = -g(\rho_1-\rho_2)\zeta(t,x), \quad x\in\Gamma.\end{gathered} \tag{1.8}$$

Здесь $\tau_{jl}(\vec u) := \dfrac{\partial u_j}{\partial x_l} + \dfrac{\partial u_l}{\partial x_j}$, $j,l=1,2,3$ — удвоенный тензор скоростей деформаций в жидкости с полем скоростей $\vec u(t,x)$, а $I_{0,k}(t)$ — закон действия памяти в модели Олдройта (см. (1.2)).

Наконец, для искомых функций $\vec u_k(t,x)$, $p_k(t,x)$, $k=1,2$, и $\zeta(t,x)$ необходимо еще задать начальные условия:

$$\vec u_k(0,x) = \vec u_k^0(x), \quad x\in\Omega_k, \quad k=1,2; \quad \zeta(0,x)=\zeta^0(x), \quad x\in\Gamma. \tag{1.9}$$

1.3. Формулировка модельной начально-краевой и спектральной задачи. Опираясь на постановку задачи (1.2)–(1.9), сформулируем модельную начально-краевую задачу о малых движениях системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, разбитую на две части Ω_1 и Ω_2, как это было описано выше в пункте 1.2. При этом воспользуемся следующими упрощающими предположениями.

1. Векторные поля скоростей $\vec u_k(t,x)$ заменяем скалярными полями $u_k(t,x)$, $x\in\Omega_k$, $k=1,2$, поля давлений $p_k(t,x)$ считаем тождественно равными нулю, а условия соленоидальности отбрасываем.
2. Кинематические условия (1.6) заменяем соотношениями с $u_1(t,x)=u_2(t,x)$, $x\in\Gamma$.
3. В динамических условиях (1.8) условие равенства касательных напряжений нулю отбрасываем, а нормальные напряжения на Γ заменяем производными от $u_k(t,x)$ по внешней нормали к границе области Ω_k.

Тогда при тех же обозначениях для остальных параметров и функций приходим к следующей начально-краевой задаче:

$$\rho_k\frac{\partial u_k(t,x)}{\partial t} = \mu_k\Delta v_k(t,x) + \rho_k f_k(t,x), \quad x\in\Omega_k, \quad k=1,2, \tag{1.10}$$

$$v_k(t,x) := u_k(t,x) + \alpha_k\int\limits_0^t e^{-\beta_k(t-s)}u_k(s,x)\,ds =: I_{0,k}(t)u_k(t,x), \quad k=1,2, \tag{1.11}$$

$$u_k(t,x)=0, \quad x\in S_k, \quad k=1,2, \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial\zeta(t,x)}{\partial t} = u_1(t,x) =: \gamma_1u_1(t,x) = u_2(t,x) =: \gamma_2u_2(t,x), \quad x\in\Gamma, \tag{1.13}$$

$$\int\limits_{\Gamma}\zeta(t,x)\,d\Gamma = 0, \tag{1.14}$$

$$\mu_1\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial n} - \mu_2\frac{\partial v_2(t,x)}{\partial n} = -g(\rho_1-\rho_2)\zeta(t,x), \quad x\in\Gamma, \quad \vec n=\vec e_3, \tag{1.15}$$

$$u_k(0,x)=u_k^0(x), \quad x\in\Omega_k, \quad k=1,2; \quad \zeta(0,x)=\zeta^0(x), \quad x\in\Gamma. \tag{1.16}$$

Далее будем рассматривать также задачу о нормальных движениях, т. е. о решениях однородной начально-краевой проблемы (1.10)–(1.16), зависящих от t по экспоненциальному закону:

$$\begin{gathered}u_k(t,x)=\exp(-\lambda t)u_k(x), \quad x\in\Omega_k, \quad k=1,2,\\ \zeta(t,x)=\exp(-\lambda t)\zeta(x), \quad x\in\Gamma, \quad \lambda\in\mathbb{C}.\end{gathered}$$

При этом воспользуемся следствиями из соотношений (1.11) для модели вязкоупругой жидкости Олдройта:

$$\begin{gathered}\frac{\partial w_k(t,x)}{\partial t} = \alpha_k^{1/2} u_k(t,x) - \beta_k w_k(t,x), \quad w_k(0,x)=0, \\ w_k(t,x) := \alpha_k^{1/2} \int\limits_0^t e^{-\beta_k(t-s)} u_k(s,x)\,ds, \quad k=1,2.\end{gathered} \tag{1.17}$$

Тогда для амплитудных функций $u_k(x)$, $k=1,2$, $\zeta(x)$, а также амплитудных функций $w_k(x)$, $k=1,2$, отвечающих связям (1.17), возникает следующая спектральная задача:

$$\begin{gathered} -\lambda\rho_k u_k(x) = \mu_k \Delta\big(u_k(x) + \alpha_k^{1/2} w_k(x)\big), \quad x\in\Omega_k, \quad k=1,2, \\ -\lambda w_k(x) = \alpha_k^{1/2} u_k(x) - \beta_k w_k(x), \quad x\in\Omega_k, \quad k=1,2, \\ u_k(x) = w_k(x) = 0, \quad x\in S_k, \quad k=1,2, \\ -\lambda\zeta(x) = u_1(x) = u_2(x), \quad x\in\Gamma, \quad \int\limits_\Gamma \zeta(x)\,d\Gamma = 0, \end{gathered} \tag{1.18}$$

$$\mu_1\frac{\partial}{\partial n}\big(u_1(x)+\alpha_1^{1/2}w_1(x)\big) - \mu_2\frac{\partial}{\partial n}\big(u_2(x)+\alpha_2^{1/2}w_2(x)\big) = -g(\rho_1-\rho_2)\zeta(x), \quad x\in\Gamma, \quad \vec{n}=\vec{e}_3.$$

Далее задачу (1.10)–(1.16), а также задачу (1.18), будем исследовать методами функционального анализа и спектральной теории операторных пучков с использованием обобщенной формулы Грина для оператора Лапласа, приспособленной к изучению краевых задач в областях с липшицевой границей.

1.4. О формуле Грина для оператора Лапласа. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ — область с границей $\partial\Omega$, разбитой на два куска S и Γ. Введем пространство функций $H^1(\Omega)$ с нормой, эквивалентной стандартной: $\|u\|^2_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega + \Big|\int\limits_\Gamma u\,d\Gamma\Big|^2$.

Для подпространства $H^1_\Gamma(\Omega)$ функций из $H^1(\Omega)$, у которых выполнено условие $\int\limits_\Gamma u\,d\Gamma = 0$, имеем $\|u\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega)} := \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega$, т. е. квадрат нормы совпадает с интегралом Дирихле.

Введем далее подпространство $H^1_{0,S}(\Omega)$ функций, обращающихся в нуль на S:

$$H^1_{0,S}(\Omega) := \big\{u\in H^1_\Gamma(\Omega):\ u\big|_S = 0\big\}. \tag{1.19}$$

Будем считать, что граница $\partial\Omega$ области Ω липшицева, причем ее куски S и Γ, на которые она разбита, также липшицевы. Тогда, как известно (см. [19]), след функций из $H^1(\Omega)$, вычисленный на $\partial\Omega$, принадлежит пространству $H^{1/2}(\partial\Omega)\subset L_2(\partial\Omega)$. Более того, функции на его кусках, заданные на Γ и S, также принадлежат соответствующим пространствам $H^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{1/2}(S)$ соответственно (см. [4]).

Введем в $H^1_\Gamma(\Omega)$ множество функций, которые обладают следующим свойством: их следы $\gamma_\Gamma u\in H^{1/2}(\Gamma)\cap L_{2,\Gamma}$ продолжимы нулем на кусок S в классе $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Обозначим соответствующее множество из $H^1_\Gamma(\Omega)$ символом $\widehat{H}^1_\Gamma(\Omega)$, а совокупность следов на Γ — через $\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma$. Тогда оказывается, что имеет место оснащение пространства $L_{2,\Gamma} = L_2(\Gamma)\ominus\{1_\Gamma\}$ в виде $\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma \hookrightarrow\hookrightarrow L_{2,\Gamma} \hookrightarrow\hookrightarrow \Big(\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma\Big)^* = H^{-1/2}_\Gamma$; при этом для элементов $\varphi\in\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma$ и $\psi\in H^{-1/2}_\Gamma$ выражение $\langle\varphi,\psi\rangle_{L_{2,\Gamma}}$ является полуторалинейной формой в $L_{2,\Gamma}$: $\big|\langle\varphi,\psi\rangle_{L_{2,\Gamma}}\big| \leqslant \|\varphi\|_{\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma}\cdot\|\psi\|_{H^{-1/2}_\Gamma}$. Здесь $\langle\varphi,\psi\rangle_{L_{2,\Gamma}}$ — замыкание формы $\big(\varphi,\psi\big)_{L_{2,\Gamma}} := \int\limits_\Gamma \varphi\overline{\psi}\,d\Gamma$, заданное на гладких функциях, по соответствующим нормам.

Оказывается, для функций из $\widehat{H}^1_\Gamma(\Omega)$ имеет место следующая формула Грина для оператора Лапласа (см. [4]):

$$\big(\eta,u\big)_{H^1_{0,S}(\Omega)} = \big\langle\eta,-\Delta u\big\rangle_{L_2(\Omega)} + \Big\langle\gamma_\Gamma\eta,\frac{\partial u}{\partial n}\Big\rangle_{L_2(\Gamma)}, \tag{1.20}$$

где $-\Delta u\in\big(H^1_\Gamma(\Omega)\big)^*$, $\gamma_\Gamma\eta\in\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma$, $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma \in H^{-1/2}_\Gamma$.

Перейдем теперь к соответствующим формулам Грина для задачи (1.10)–(1.16). Считаем, что области $\Omega_k \subset \mathbb{R}^m$, $k = 1, 2$, имеют липшицевы границы $\partial\Omega_k$, состоящие из липшицевых кусков S_k и Γ соответственно, $k = 1, 2$. Введем множества $\widehat{H}^1_{0,S_k}(\Omega_k) \subset H^1_{0,S_k}(\Omega_k)$, а также наборы пар функций $\eta = (\eta_1; \eta_2)$ и $u = (u_1; u_2)$, $\eta_k, u_k \in \widehat{H}^1_{0,S_k}(\Omega_k)$, $k = 1, 2$. Для таких наборов определим скалярные произведения

$$(\eta, u)_{L_2(\Omega)} := \sum_{k=1}^{2} \rho_k (\eta_k, u_k)_{L_2(\Omega_k)}, \tag{1.21}$$

$$(\eta, u)_{\widehat{H}^1_\Gamma(\Omega)} := \sum_{k=1}^{2} \mu_k (\eta_k, u_k)_{H^1_{0,S_k}(\Omega_k)}. \tag{1.22}$$

Тогда оказывается (см. [4]), что для таких наборов имеет место следующая обобщенная формула Грина:

$$(\eta, u)_{\widehat{H}^1_\Gamma(\Omega)} = \sum_{k=1}^{2} \langle \eta_k, -\mu_k \Delta u_k \rangle_{L_2(\Omega_k)} + \sum_{k=1}^{2} \Big\langle \gamma_k \eta_k, \mu_k \frac{\partial u_k}{\partial n_k} \Big\rangle_{L_{2,\Gamma}}, \tag{1.23}$$

где $\eta, u \in \widehat{H}^1_{0,S}(\Omega)$, $\gamma_k \eta_k := \eta_k\big|_\Gamma \in \widetilde{H}^{1/2}_\Gamma$, $\dfrac{\partial u_k}{\partial n_k} \in H^{-1/2}_\Gamma$, $k = 1, 2$, которая далее будет использоваться.

1.5. Закон баланса полной энергии. Будем считать, что начально-краевая задача (1.10)–(1.16) имеет классическое решение, т. е. все заданные и искомые функции, а также их производные, входящие в уравнения и краевые условия, являются непрерывными функциями своих переменных. Тогда, используя обобщенные формулы Грина для оператора Лапласа в областях Ω_k, $k = 1, 2$, можно установить, что для классического решения задачи имеет место следующее тождество:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{ \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int_{\Omega_k} |u_k(t,x)|^2 d\Omega_k + g(\rho_1 - \rho_2) \int_\Gamma |\zeta(t,x)|^2 d\Gamma \Big\} = \\ = -\sum_{k=1}^{2} \mu_k \int_{\Omega_k} \nabla v_k(t,x) \cdot \overline{\nabla u_k(t,x)}\, d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int_{\Omega_k} f_k(t,x)\, \overline{u_k(t,x)}\, d\Omega_k. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Это тождество — закон баланса полной энергии системы в дифференциальной форме. Оно показывает, что изменение полной энергии исследуемой системы обусловлено мощностью диссипативных и внешних сил, действующих на систему.

Тождество (1.24) показывает также, что для искомых объектов следует выбирать пары функций $u = (u_1; u_2)$ из пространства $\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega) \subset \widehat{H}^1_{0,S}(\Omega)$, которое определяется следующим образом:

$$\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega) := \Big\{ u = (u_1; u_2) \in \widehat{H}^1_{0,S}(\Omega) :\ \gamma_1 u_1 := u_1\big|_\Gamma = u_2\big|_\Gamma =: \gamma_2 u_2 \Big\}. \tag{1.25}$$

Пространство $\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ плотно в пространстве $L_2(\Omega)$ (см. (1.21)), так как оно в качестве подпространства содержит множество $H^1_0(\Omega) := H^1_0(\Omega_1) \oplus H^1_0(\Omega_2) := \{u = (u_1; u_2) \in \widehat{H}^1_{0,S}(\Omega) : u_k = 0$ $(x \in \Gamma),\ k = 1, 2\}$.

Лемма 1.1. *Имеет место следующее ортогональное разложение*:

$$\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega) = \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega) \oplus \widehat{H}^1_h(\Omega), \tag{1.26}$$

$$\begin{aligned} \widehat{H}^1_h(\Omega) := \Big\{ u = (u_1; u_2) \in \widehat{H}^1_{0,S}(\Omega) : -\mu_k \Delta u_k = 0\ (x \in \Omega_k), \quad u_k = 0\ (x \in S_k),\ \ k = 1, 2, \\ \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0\ (x \in \Gamma), \quad \vec{n} = \vec{e}_3 \Big\}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Доказательство. Оно основано на формуле Грина (1.23) для областей Ω_1 и Ω_2, а также на определении (1.25). □

Лемма 1.2. *Ортопроектор* $P_1:\ \widehat{H}^1_{0,S}(\Omega)\to\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ *действует по закону*

$$P_1(u_1;u_2)=\Big\{u_1-\mu_1^{-1}V_1(\mu_1^{-1}C_1+\mu_2^{-1}C_2)^{-1}(\gamma_1u_1-\gamma_2u_2);\ u_2+\mu_2^{-1}V_2(\mu_1^{-1}C_1+\mu_2^{-1}C_2)^{-1}(\gamma_1u_1-\gamma_2u_2)\Big\}, \tag{1.28}$$

где $C_k:=\gamma_kV_k$ $(k=1,2)$, *а* V_1 *и* V_2 — *операторы вспомогательных задач*

$$-\mu_k\Delta v_k=0\ (x\in\Omega_k),\quad v_k=0\ (x\in S_k),\quad \mu_k\frac{\partial v_k}{\partial n_k}=\pm\psi\ (x\in\Gamma),\quad \vec{n}_k=\vec{e}_3,\quad k=1,2. \tag{1.29}$$

Доказательство. Опираясь на (1.25)–(1.27), получим закон действия ортопроектора P_1. Пусть $(u_1;u_2)\in\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega)$. Тогда

$$P_1(u_1;u_2)=(u_1;u_2)-(v_1;v_2), \tag{1.30}$$

где $(v_1;v_2)\in\widehat{H}^1_h(\Omega)$ — такой элемент, который в силу (1.25) удовлетворяет условию

$$\gamma_1u_1-\gamma_1v_1=\gamma_2u_2-\gamma_2v_2,\quad x\in\Gamma. \tag{1.31}$$

Рассмотрим слабые решения вспомогательных задач (1.29).

При $k=1$ определим на основе формулы Грина вида (1.20) для области Ω_1 слабое решение задачи (1.29) тождеством $\mu_1\big(\eta_1,v_1\big)_{\widehat{H}^1_{0,S_1}(\Omega_1)}=\big\langle\gamma_1\eta_1,\psi\big\rangle_{L_2,\Gamma}$ $\forall\eta_1\in\widehat{H}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$.

Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (1.29) при $k=1$ является условие $\psi\in H_\Gamma^{-1/2}=\big(\widetilde{H}_\Gamma^{1/2}\big)^*$. Если это условие выполнено, то задача (1.29) при $k=1$ имеет единственное слабое решение

$$\mu_1v_1=V_1\psi,\quad V_1\in\mathcal{L}\big(H_\Gamma^{-1/2};\widehat{H}^1_{0,S_1}(\Omega_1)\big). \tag{1.32}$$

Аналогичным образом получаем, что слабое решение второй вспомогательной задачи (1.29) определяется из тождества $\mu_2\big(\eta_2,v_2\big)_{H^1_{0,S_2}(\Omega_2)}=\big\langle\gamma_2\eta_2,-\psi\big\rangle_{L_2,\Gamma}$ $\forall\eta_2\in\widehat{H}^1_{0,S_2}(\Omega_2)$, и поэтому

$$\mu_2v_2=V_2(-\psi),\quad V_2\in\mathcal{L}\big(H_\Gamma^{-1/2};\widehat{H}^1_{0,S_2}(\Omega_2)\big). \tag{1.33}$$

Теперь из (1.31)–(1.33) получим связь

$$\gamma_1v_1-\gamma_2v_2=(\mu_1^{-1}\gamma_1V_1+\mu_2^{-1}\gamma_2V_2)\psi=\gamma_1u_1-\gamma_2u_2. \tag{1.34}$$

Можно проверить, что оператор

$$\mu_1^{-1}\gamma_1V_1+\mu_2^{-1}\gamma_2V_2=:\mu_1^{-1}C_1+\mu_2^{-1}C_2 \tag{1.35}$$

ограниченно действует из $H_\Gamma^{-1/2}=\Big(\widetilde{H}_\Gamma^{1/2}\Big)^*$ на все пространство $\widetilde{H}_\Gamma^{1/2}$. Поэтому по теореме Банаха существует ограниченный обратный оператор $(\mu_1^{-1}C_1+\mu_2^{-1}C_2)^{-1}\in\mathcal{L}\big(\widetilde{H}_\Gamma^{1/2};H_\Gamma^{-1/2}\big)$. Отсюда, из (1.34), (1.32), (1.33) и (1.30) получим (1.28). □

В дальнейшем нам понадобятся также ортопроекторы P_{jl} $(l=1,2)$, действующие в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$. А именно, если $u=(u_1;u_2)\in L_2(\Omega)$, то $P_{j1}u:=(u_1;0)$, $P_{j2}u:=(0;u_2)$.

2. Операторный подход к начально-краевой задаче

2.1. Вспомогательные краевые задачи. Система интегродифференциальных операторных уравнений. Будем считать, что начально-краевая задача (1.10)–(1.16) имеет решение $u=(u_1;u_2)$, являющееся функцией переменной t со значениями в пространстве $\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, и получим уравнение, которому должно удовлетворять это решение.

С этой целью перепишем уравнение в областях Ω_1 и Ω_2 в виде пар соотношений:

$$\left\{\rho_k\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\}_{k=1}^2=\big\{\mu_k\Delta v_k\big\}_{k=1}^2+\big\{\rho_kf_k\big\}_{k=1}^2. \tag{2.1}$$

Представим функцию $v=(v_1;v_2)$ в виде суммы решений двух вспомогательных проблем:

$$v=(v_1;v_2)=w_1+w_2=:(w_{11};w_{12})+(w_{21};w_{22}). \tag{2.2}$$

Первая проблема соответствует неоднородным уравнениям в областях Ω_k $(k=1,2)$, а вторая — неоднородным краевым условиям.

Для первой проблемы имеем:

$$\begin{gathered}\big\{-\mu_k\Delta w_{1k}\big\}_{k=1}^2=-\Big\{\rho_k\frac{\partial u_k}{\partial t}\Big\}_{k=1}^2+\big\{\rho_k f_k\big\}_{k=1}^2,\\ w_{11}\big|_{S_1}=0,\quad w_{12}\big|_{S_2}=0,\quad \gamma_1 w_{11}=\gamma_2 w_{12},\quad x\in\Gamma,\\ \mu_1\frac{\partial w_{11}}{\partial n}-\mu_2\frac{\partial w_{12}}{\partial n}=0,\quad x\in\Gamma,\quad \vec{n}=\vec{e}_3.\end{gathered}\tag{2.3}$$

Для второй проблемы соответственно получаем:

$$\begin{gathered}\big\{-\mu_k\Delta w_{2k}\big\}_{k=1}^2=0,\\ w_{21}\big|_{S_1}=0,\quad w_{22}\big|_{S_2}=0,\quad \gamma_1 w_{21}=\gamma_2 w_{22}=:\varphi,\quad x\in\Gamma,\\ \mu_1\frac{\partial w_{21}}{\partial n}-\mu_2\frac{\partial w_{22}}{\partial n}=-g(\rho_1-\rho_2)\zeta,\quad x\in\Gamma,\quad \vec{n}=\vec{e}_3.\end{gathered}\tag{2.4}$$

Лемма 2.1. *Задача* (2.4) *имеет единственное слабое решение* $w_2=(w_{21};w_{22})\in\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие* $\zeta\in H_\Gamma^{-1/2}$. *Это решение имеет вид*

$$w_2=(w_{21};w_{22})=-g(\rho_1-\rho_2)V\zeta:=$$
$$:=-g(\rho_1-\rho_2)\left(\widetilde{\gamma}_1^{-1}(\mu_1C_1^{-1}+\mu_2C_2^{-1})^{-1}\zeta;\widetilde{\gamma}_2^{-1}(\mu_1C_1^{-1}+\mu_2C_2^{-1})^{-1}\zeta\right),\tag{2.5}$$

$$V\in\mathcal{L}\big(H_\Gamma^{-1/2};\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)\big).\tag{2.6}$$

Доказательство. Если функция φ известна, то задача (2.4) распадается на две независимые задачи Дирихле для уравнения Лапласа. При этом для элементов $w_{2k}\in\widehat{H}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$ следы функций на Γ, т. е. элементы $\gamma_k w_{2k}$, должны принадлежать пространству $\widetilde{H}_\Gamma^{1/2}$, и тогда должно выполняться необходимое условие разрешимости $\varphi=\gamma_1 w_{21}=\gamma_2 w_{22}\in\widetilde{H}_\Gamma^{1/2}$, которое является и достаточным для каждой из распадающихся задач. Так как между следами гармонических функций из $\widehat{H}^1_{0,S_k}(\Omega_k)$ и самими функциями имеется взаимно однозначное соответствие, то (см. [4]) имеем связи

$$w_{2k}=\widetilde{\gamma}_k^{-1}\varphi,\quad \widetilde{\gamma}_k^{-1}\in\mathcal{L}\big(\widetilde{H}_\Gamma^{1/2};\widehat{H}^1_{0,S_k}(\Omega_k)\big),\quad k=1,2.\tag{2.7}$$

Учитывая еще соотношения (1.32), (1.33) (см. также (1.29)), из динамического условия на Γ в (2.4) приходим к соотношению

$$(\mu_1C_1^{-1}+\mu_2C_2^{-1})\varphi=-g(\rho_1-\rho_2)\zeta,\quad C_k=\gamma_kV_k\in\mathcal{L}\big(H_\Gamma^{-1/2};\widetilde{H}_\Gamma^{1/2}\big),\quad k=1,2.\tag{2.8}$$

Здесь оператор $\mu_1C_1^{-1}+\mu_2C_2^{-1}$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между $\widetilde{H}_\Gamma^{1/2}$ и $H_\Gamma^{-1/2}$ и является ограниченным оператором. Поэтому по теореме Банаха существует ограниченный обратный оператор: $(\mu_1C_1^{-1}+\mu_2C_2^{-1})^{-1}\in\mathcal{L}\big(H_\Gamma^{-1/2};\widetilde{H}_\Gamma^{1/2}\big)$, $k=1,2$. Отсюда, из (2.7), (2.8) получим (2.5), (2.6). □

Рассмотрим теперь вопрос о существовании слабого решения первой вспомогательной задачи, т. е. задачи (2.3), с учетом леммы 2.1. При этом понадобится формула Грина (1.23), приспособленная к определению обобщенного решения задачи (2.3).

Определение 2.1. Функцию $w_1(t)=(w_{11}(t);w_{12}(t))$ со значениями в пространстве $\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ назовем обобщенным решением задачи (2.3), если для нее выполнено тождество, следующее из (1.23), а также из уравнений и краевых условий задачи (2.3):

$$\big(\eta,w_1(t)\big)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)}=\Big(\eta,-\frac{du}{dt}+f(t)\Big)_{L_2(\Omega)}\quad\forall\,\eta\in\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega).\tag{2.9}$$

Здесь выражение $\widehat{f}(t):=-du/dt+f(t)$ считается функцией переменной t со значениями в $L_2(\Omega)$ (и потому $\partial/\partial t$ заменено на d/dt). Если, в частности, выполнено условие $\widehat{f}\in C(\mathbb{R}_+;L_2(\Omega))$ ($\mathbb{R}_+:=[0,+\infty)$), то, как известно из теории слабых и обобщенных решений краевых задач, обобщенное решение $w_1(t)$ задачи (2.3) существует, единственно и является непрерывной функцией переменной t со значениями в $\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$.

Более того, так как $(\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega))$ — гильбертова пара пространств, то в сформированных условиях $w_1(t)$ — непрерывная функция t со значениями в $\mathcal{D}(\widetilde{A})$, где $\widetilde{A}$ — оператор гильбертовой пары. Напомним здесь, что оператор $\widetilde{A}$ самосопряжен и положительно определен в $L_2(\Omega)$. Из компактности вложения $\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ в пространство $L_2(\Omega)$ следует компактность оператора $\widetilde{A}^{-1}$.

Опираясь на тождество (2.9), получим интегродифференциальное соотношение, которому должно удовлетворять сильное по переменной t решение проблемы (1.10)–(1.16). Предварительно отметим следующий факт: так как в (2.9) $\eta \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, то $P_1\eta = \eta$, где P_1 — ортопроектор из леммы 1.2. Кроме того, упомянутые выше доводы влекут следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\big(\eta, w_1(t)\big)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} &= \big(P_1\eta, w_1(t)\big)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = \big(\eta, P_1 w_1(t)\big)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = \\ &= \big(\widetilde{A}^{1/2}\eta, \widetilde{A}^{1/2}P_1 w_1(t)\big)_{L_2(\Omega)} = \big(\eta, \widetilde{A}P_1 w_1(t)\big)_{L_2(\Omega)} \quad \forall\, \eta \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega).\end{aligned} \tag{2.10}$$

Отсюда следует, что тождество (2.9) равносильно связи

$$\widetilde{A}P_1 w_1(t) = -\frac{du}{dt} + f(t), \tag{2.11}$$

которая имеет место в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$. Здесь $\widetilde{A}$ — оператор гильбертовой пары $(\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega))$, P_1 — упомянутый выше ортопроектор (см. лемму 1.2), $w_1(t)$ — обобщенное решение первой вспомогательной задачи (см. (2.3)), а $w_2(t)$ — обобщенное решение второй краевой вспомогательной задачи (см. (2.4)).

Таким образом, если начально-краевая задача (1.10)–(1.16) имеет сильное решение, то функции $u(t)$, $\zeta(t)$ со значениями в $\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ и в $L_{2,\Gamma}$ соответственно являются сильным решением следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned}&\frac{du}{dt} = -\widetilde{A}P_1\big(I_0(t)u + g(\rho_1-\rho_2)V\zeta\big) + f(t), \quad \frac{d\zeta}{dt} = \gamma_1 u_1 = \gamma_2 u_2 =: \widehat{\gamma}u,\\ &u(0) = u^0, \quad \zeta(0) = \zeta^0, \quad I_0(t)u := \left\{u_k(t) + \alpha_k\int_0^t \exp(-\beta_k(t-s))u_k(s)\,ds\right\}_{k=1}^2.\end{aligned} \tag{2.12}$$

2.2. Переход к задаче Коши для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве. Преобразуем систему (2.12) к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_{2,\Gamma}$.

Введем оператор $A := \{A_k\}_{k=1}^2$, где A_k — операторы гильбертовых пар $(\widehat{H}^1_{0,S_k}(\Omega_k); L_2(\Omega_k))$ (см. (1.19)). Очевидно, что A — оператор гильбертовой пары $(\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega); L_2(\Omega))$. По предположению $u(t)$ является функцией переменной t со значениями в $\mathcal{D}(\widetilde{A}^{1/2}) = \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega) \subset \widehat{H}^1_{0,S}(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2})$. В связи с этим обстоятельством введем искомую функцию

$$\psi(t) := \left\{\alpha_k^{1/2}\int_0^t \exp(-\beta_k(t-s))A_k^{1/2}u_k(s)\,ds\right\}_{k=1}^2, \quad \psi(0) = 0. \tag{2.13}$$

Тогда будем иметь связь

$$\frac{d\psi}{dt} = A^{1/2}\alpha^{1/2}u - \beta\psi, \quad \alpha^{1/2} := \left\{\alpha_k^{1/2}\right\}_{k=1}^2, \quad \beta := \{\beta_k\}_{k=1}^2. \tag{2.14}$$

Осуществим в задаче (2.12), с целью ее симметризации, также следующую замену:

$$\eta(t) = \big(g(\rho_1-\rho_2)\big)^{1/2}\zeta(t). \tag{2.15}$$

Уравнение из (2.14), начальные условия и преобразованные уравнения из (2.12) составляют следующую систему уравнений и начальных условий:

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt} = -\widetilde{A}^{1/2}\Big[\widetilde{A}^{1/2}u + \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\psi + \big(g(\rho_1-\rho_2)\big)^{1/2}\widetilde{A}^{1/2}V\eta\Big] + f(t),\\ \dfrac{d\psi}{dt} = -\Big[-A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}\big(\widetilde{A}^{1/2}u\big) + \beta\psi\Big],\\ \dfrac{d\eta}{dt} = -\Big[-\big(g(\rho_1-\rho_2)\big)^{1/2}\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}\big(\widetilde{A}^{1/2}u\big)\Big],\end{cases} \tag{2.16}$$

$$u(0) = u^0, \quad \psi(0) = 0, \quad \eta(0) = \bigl(g(\rho_1 - \rho_2)\bigr)^{1/2}\zeta^0. \tag{2.17}$$

Докажем две леммы о свойствах операторов из системы (2.16).

Лемма 2.2. *Имеют место свойства*

$$A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2},\ \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2} \in \mathcal{L}\bigl(L_2(\Omega)\bigr), \quad \bigl(A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}\bigr)^* = \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}. \tag{2.18}$$

Доказательство. Ограниченность рассматриваемых операторов проверяется непосредственно, если заметить, что в этих произведениях операторов каждый сомножитель ограничен из одного пространства в другое. В частности, $A^{-1/2} \in \mathcal{L}(L_2(\Omega); \widehat{H}^1_{0,S}(\Omega))$, $\alpha^{1/2} \in \mathcal{L}(\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega); \widehat{H}^1_{0,S}(\Omega))$, $P_1 \in \mathcal{L}(\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega); \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega))$, $\widetilde{A}^{1/2} \in \mathcal{L}(\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega))$, и отсюда следует ограниченность второго из операторов в (2.18). Для первого оператора проверка аналогична.

Проверим взаимную сопряженность этих операторов. С использованием свойства $(u,v)_{\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega)} = (A^{1/2}u, A^{1/2}v)_{L_2(\Omega)}$, $(u,v)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = (\widetilde{A}^{1/2}u, \widetilde{A}^{1/2}v)_{L_2(\Omega)}$, а также того факта, что $\alpha^{1/2}$ самосопряжен в $\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega)$, для любых $u, v \in L_2(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned}
\bigl(\widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}u, v\bigr)_{L_2(\Omega)} &= \bigl(\widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}u, \widetilde{A}^{1/2}\widetilde{A}^{-1/2}v\bigr)_{L_2(\Omega)} = \\
&= \bigl(P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}u, \widetilde{A}^{-1/2}v\bigr)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = \bigl(\alpha^{1/2}A^{-1/2}u, P_1\widetilde{A}^{-1/2}v\bigr)_{\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega)} = \\
&= \bigl(A^{-1/2}u, \alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}v\bigr)_{\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega)} = \bigl(u, A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}v\bigr)_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.3. *Имеют место свойства*

$$\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty\bigl(L_2(\Omega), L_{2,\Gamma}\bigr), \quad \widetilde{A}^{1/2}V \in \mathfrak{S}_\infty\bigl(L_{2,\Gamma}, L_2(\Omega)\bigr), \quad \bigl(\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}\bigr)^* = \widetilde{A}^{1/2}V. \tag{2.19}$$

Доказательство. Из включений $\widetilde{A}^{-1/2} \in \mathcal{L}\bigl(L_2(\Omega); \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)\bigr)$, $\widehat{\gamma} \in \mathcal{L}\bigl(\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega); \widetilde{H}^{1/2}_\Gamma\bigr)$ следует, что $\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2} \in \mathcal{L}\bigl(L_2(\Omega); \widetilde{H}^{1/2}_\Gamma\bigr)$. Аналогично из включений $V \in \mathcal{L}\bigl(H^{-1/2}_\Gamma; \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)\bigr)$ (см. (2.6)), $\widetilde{A}^{1/2} \in \mathcal{L}\bigl(\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega)\bigr)$ следует, что $\widetilde{A}^{1/2}V \in \mathcal{L}\bigl(H^{-1/2}_\Gamma; L_2(\Omega)\bigr)$. Отсюда в силу компактности вложений $\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma \subsetneq\subsetneq L_{2,\Gamma} \subsetneq\subsetneq H^{-1/2}_\Gamma$ (см. теорему Гальярдо в [19]) следуют свойства (2.19).

Докажем теперь свойство взаимной сопряженности операторов из (2.19). Пусть $u \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ — решение вспомогательной задачи (2.4) при $\psi = \zeta \in H^{-1/2}_\Gamma$. Тогда $u = V\zeta \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ (см. (2.5) и (2.6)), и если $\eta \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, то

$$\begin{aligned}
\bigl(\eta, u\bigr)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} &= \mu_1 \int\limits_{\Omega_1} \nabla\eta_1 \cdot \nabla u_1\, d\Omega_1 + \mu_2 \int\limits_{\Omega_2} \nabla\eta_2 \cdot \nabla u_2\, d\Omega_2 = \\
&= \Bigl\langle \gamma_1\eta_1, \mu_1\frac{\partial u_1}{\partial n_1}\Bigr\rangle_{L_{2,\Gamma}} + \Bigl\langle \gamma_2\eta_2, \mu_2\frac{\partial u_2}{\partial n_2}\Bigr\rangle_{L_{2,\Gamma}} = \bigl\langle \widehat{\gamma}\eta, \zeta\bigr\rangle_{L_{2,\Gamma}}.
\end{aligned}$$

Вспоминая, что $\bigl(\eta, u\bigr)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = \bigl(\widetilde{A}^{1/2}\eta, \widetilde{A}^{1/2}u\bigr)_{L_2(\Omega)}$, получаем при $\eta = \widetilde{A}^{-1/2}\psi$, $\psi \in L_2(\Omega)$, тождество

$$\bigl(\psi, \widetilde{A}^{1/2}V\zeta\bigr)_{L_2(\Omega)} = \bigl\langle \widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}\psi, \zeta\bigr\rangle_{L_{2,\Gamma}} \quad \forall\, \psi \in L_2(\Omega), \quad \zeta \in H^{-1/2}_\Gamma, \tag{2.20}$$

а значит, операторы $\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}$ и $\widetilde{A}^{1/2}V$ взаимно сопряжены. □

Задачу (2.16)-(2.17) перепишем в виде следующей основной задачи Коши в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := L_2(\Omega) \oplus \bigl(L_2(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma}\bigr)$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0. \tag{2.21}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&\xi(t) := \bigl(u(t); w(t)\bigr)^\tau, \quad w(t) := \bigl(\psi(t); \eta(t)\bigr)^\tau, \quad \mathcal{F}(t) := \bigl(f(t); 0\bigr)^\tau, \\
&\xi^0 := \bigl(u^0; w^0\bigr)^\tau, \qquad w^0 := \bigl(0; \bigl(g(\rho_1 - \rho_2)\bigr)^{1/2}\zeta^0\bigr)^\tau.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Оператор $\mathcal{A}$ определен по формулам:

$$\mathcal{A} := \operatorname{diag}\big(\widetilde{A}^{1/2}, \mathcal{I}\big)\begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}\end{pmatrix}\operatorname{diag}\big(\widetilde{A}^{1/2}, \mathcal{I}\big) \equiv \tag{2.23}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{Q}\widetilde{A}^{-1/2} & \mathcal{I}\end{pmatrix}\operatorname{diag}\big(\widetilde{A}, \mathcal{G}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*\big)\begin{pmatrix} I & \widetilde{A}^{-1/2}\mathcal{Q}^* \\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix}, \tag{2.24}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{\xi = (u; w)^\tau \in \mathcal{H} \big|\, u + \widetilde{A}^{-1/2}\mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(\widetilde{A})\Big\}, \tag{2.25}$$

где I, $\mathcal{I}$ — единичные операторы в $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Omega)\oplus L_{2,\Gamma}$,

$$\mathcal{Q} := \Big(A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}, \big(g(\rho_1-\rho_2)\big)^{1/2}\widetilde{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}\Big)^\tau, \quad \mathcal{G} := \operatorname{diag}\big(\beta, 0\big). \tag{2.26}$$

Определение 2.2. *Сильным решением* задачи Коши (2.21) назовем такую функцию $\xi(t)$, что $\xi \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}) \cap C(\mathbb{R}_+;\mathcal{D}(\mathcal{A}))$, выполнены начальное условие и уравнение из (2.21) для любого $t \in \mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$.

2.3. Исследование эволюционного уравнения. Перейдем к рассмотрению задачи (2.21), предварительно изучив свойства операторной матрицы $\mathcal{A}$.

Лемма 2.4. *Оператор $\mathcal{A}$ — максимальный секториальный. Более того, $\mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \big\{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\lambda| \leqslant 2\|\mathcal{Q}^*\|(\mathrm{Re}\lambda)^{1/2}\big\}$, где $\mathcal{W}(\mathcal{A})$ — числовая область значений оператора $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Докажем, что оператор $\mathcal{A}$ плотно определен и замкнут. Из (2.23) найдем, что оператор $\mathcal{A}-\lambda$ представим в виде

$$\mathcal{A}-\lambda = \operatorname{diag}\big(\widetilde{A}^{1/2}, \mathcal{I}\big)\begin{pmatrix} I-\lambda\widetilde{A}^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}-\lambda\end{pmatrix}\operatorname{diag}\big(\widetilde{A}^{1/2}, \mathcal{I}\big) =$$

$$= \operatorname{diag}\big(\widetilde{A}^{1/2}, \mathcal{I}\big)\begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{G}-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I}\end{pmatrix}\operatorname{diag}\big(\widetilde{A}^{1/2}, \mathcal{I}\big), \tag{2.27}$$

где $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) := (\mathcal{G}-\lambda)^{-1}$, $L(\lambda) := I - \lambda\widetilde{A}^{-1} + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\lambda)^{-1}\mathcal{Q}$. Из положительной определенности оператора $L(\lambda)$ при $\lambda < 0$ следует, что $L^{-1}(\lambda) \in \mathcal{L}(L_2(\Omega))$. Отсюда и из (2.27) следует, что при $\lambda < 0$ существует $(\mathcal{A}-\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, а значит оператор $\mathcal{A}$ замкнут на своей естественной области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (2.25)). Легко видеть также, что $\operatorname{Ker}\big((\mathcal{A}-\lambda)^{-1}\big)^* = \{0\}$, а значит, оператор $\mathcal{A}$ плотно определен.

Докажем, что оператор $\mathcal{A}$ секториален. Пусть $\xi = (u; w)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, тогда $u \in \mathcal{D}(\widetilde{A}^{1/2})$ и из факторизации (2.23) оператора $\mathcal{A}$ в симметричной форме получим, что

$$\mathrm{Re}\big(\mathcal{A}\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}} = \mathrm{Re}\left(\begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{A}^{1/2}u \\ w\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\widetilde{A}^{1/2}u \\ w\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} = \|\widetilde{A}^{1/2}u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\mathcal{G}^{1/2}w\|^2,$$

$$\big|\mathrm{Im}\big(\mathcal{A}\xi,\xi\big)_{\mathcal{H}}\big| = \big|\mathrm{Im}\big[(\mathcal{Q}^*w, \widetilde{A}^{1/2}u) - (\mathcal{Q}\widetilde{A}^{1/2}u, w)\big]\big| = \big|2\,\mathrm{Im}(\mathcal{Q}^*w, \widetilde{A}^{1/2}u)\big| \leqslant 2\,\|\widetilde{A}^{1/2}u\|_{L_2(\Omega)}\|\mathcal{Q}^*w\|.$$

Из этих оценок при любом $\delta > 0$ получим, что

$$\mathrm{Re}\big(\mathcal{A}\xi,\xi\big)_{\mathcal{H}} - \delta\big|\mathrm{Im}\big(\mathcal{A}\xi,\xi\big)_{\mathcal{H}}\big| \geqslant \big(\|\widetilde{A}^{1/2}u\|_{L_2(\Omega)} - \delta\|\mathcal{Q}^*w\|\big)^2 - \delta^2\|\mathcal{Q}^*w\|^2 + \|\mathcal{G}^{1/2}w\|^2 - \delta^2\|\mathcal{Q}^*\|^2\cdot\|\xi\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Следовательно, $\mathrm{Re}\big(\big[\mathcal{A}+\gamma(\delta)\big]\xi,\xi\big)_{\mathcal{H}} - \delta\big|\mathrm{Im}\big(\big[\mathcal{A}+\gamma(\delta)\big]\xi,\xi\big)_{\mathcal{H}}\big| \geqslant 0$, где $\gamma(\delta) := \delta^2\|\mathcal{Q}^*\|^2$. Таким образом, $\big|\mathrm{Im}\big(\big[\mathcal{A}+\gamma(\delta)\big]\xi,\xi\big)_{\mathcal{H}}\big| \leqslant \delta^{-1}\mathrm{Re}\big(\big[\mathcal{A}+\gamma(\delta)\big]\xi,\xi\big)_{\mathcal{H}}$ $\forall\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\delta > 0$. Отсюда следует, что $\mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \big\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\big(\lambda+\gamma(\delta)\big)| \leqslant \operatorname{arctg}\delta^{-1}\big\}$ при любом $\delta > 0$, т. е. оператор $\mathcal{A}$ секториален. Максимальность оператора $\mathcal{A}$ следует из $(\mathcal{A}-\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ при $\lambda < 0$.

Формула из утверждения леммы получается построением огибающих соответствующих семейств прямых. □

Замечание 2.1. Из (2.27) получим представление для резольвенты оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix}\widetilde{A}^{-1/2} & 0 \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} L^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{A}^{-1/2} & -\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\widetilde{A}^{-1/2}L^{-1}(\lambda)\widetilde{A}^{-1/2} & -\widetilde{A}^{-1/2}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)\widetilde{A}^{-1/2} & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) - \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

$$L(\lambda) := I - \lambda \widetilde{A}^{-1} + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}$$

при всех $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G}) \cup \sigma(L(\lambda))$, где $\sigma(\mathcal{G}) = \{0, \beta_1, \beta_2\}$, $\sigma(L(\lambda))$ — спектры оператора $\mathcal{G}$ и операторного пучка $L(\lambda)$ соответственно.

Из (2.24) можно найти также, что при $\lambda < 0$ оператор $\mathcal{A} - \lambda$ представим в виде

$$\mathcal{A} - \lambda = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{Q}\widetilde{A}^{-1/2}(I - \lambda\widetilde{A}^{-1})^{-1} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{A} - \lambda & 0 \\ 0 & \mathcal{D}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & (I - \lambda\widetilde{A}^{-1})^{-1}\widetilde{A}^{-1/2}\mathcal{Q}^* \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix}, \tag{2.29}$$

$$\mathcal{D}(\lambda) := \mathcal{G} - \lambda + \mathcal{Q}(I - \lambda\widetilde{A}^{-1})^{-1}\mathcal{Q}^*.$$

Теорема 2.1. *Пусть в начально-краевой задаче* (2.21) $u^0 + g(\rho_1 - \rho_2)V\zeta^0 \in \mathcal{D}(\widetilde{A})$, *а функция* $f(t)$ *удовлетворяет локальному условию Гельдера, т. е. для любого* $\tau \in \mathbb{R}_+$ *существуют такие* $K(\tau) > 0$, $k(\tau) \in (0, 1]$, *что при всех* $0 \leqslant s, t \leqslant \tau$ *выполнено* $\|f(t) - f(s)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant K|t - s|^k$.

Тогда задача (2.21) *имеет единственное сильное решение.*

Доказательство. Пусть $u^0 + g(\rho_1 - \rho_2)V\zeta^0 \in \mathcal{D}(\widetilde{A})$, тогда $\xi^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (2.22), (2.25), (2.26)). Из условия на функцию $f(t)$ следует, что функция $\mathcal{F}(t)$ из (2.21) также локально гельдерова.

По теореме [2, гл. 1, § 5, теорема 5.9] оператор $-\mathcal{A}$ порождает сильно непрерывную полугруппу операторов, голоморфную в некотором секторе, содержащем положительную полуось. По теореме [2, гл. 2, § 1, теорема 1.4] задача Коши (2.21) имеет единственное сильное (в смысле определения 2.2) решение $\xi(t)$. □

Замечание 2.2. Из теоремы 2.1 получаем достаточное условие существования и единственности решения задач (2.21), отвечающее в модельной проблеме (1.10)–(1.16) нулевому отклонению границы раздела жидкостей: $\zeta^0 \equiv 0$, $u^0 \in \mathcal{D}(\widetilde{A}) \subset \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$.

Теорема 2.2. *Для сильного решения* $\xi(t)$ *задачи* (2.21) *выполнен закон баланса полной энергии в следующей дифференциальной форме* (*ср. с* (1.24)):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + g(\rho_1 - \rho_2)\|\zeta(t)\|^2_{L_{2,\Gamma}}\Big\} = -\mathrm{Re}\big(I_0(t)u(t), u(t)\big)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + \mathrm{Re}\big(f(t), u(t)\big)_{L_2(\Omega)} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.30}$$

Доказательство. Пусть $\xi(t) = (u(t); \psi(t); \eta(t))^\tau$ — сильное решение задачи (2.21), т. е. выполнены все уравнения системы (2.16) и каждое слагаемое является непрерывной функцией t со значениями в соответствующем пространстве. Вернемся от задачи (2.21) к проблеме (2.12) используя промежуточные формулы (2.13)–(2.15).

Умножим скалярно обе части первого уравнения в (2.12) справа на функцию $u(t)$ в пространстве $L_2(\Omega)$. С учетом того, что $u(t) \in \mathcal{D}(\widetilde{A}^{1/2}) = \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, будем иметь соотношение

$$\Big(\frac{du}{dt}, u\Big)_{L_2(\Omega)} + \big(P_1 I_0(t)u, u\big)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + g(\rho_1 - \rho_2)\big(\widetilde{A}^{1/2}V\zeta, \widetilde{A}^{1/2}u\big)_{L_2(\Omega)} = (f, u)_{L_2(\Omega)}.$$

Учитывая свойства оператора P_1 (см. лемму 1.2), взаимную сопряженность операторов $\widetilde{A}^{1/2}V$ и $\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}$ (см. лемму 2.3) и второе уравнение в (2.12), последнее соотношение можно преобразовать к следующему виду:

$$\Big(\frac{du}{dt}, u\Big)_{L_2(\Omega)} + \big(I_0(t)u, u\big)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + g(\rho_1 - \rho_2)\Big(\zeta, \frac{d\zeta}{dt}\Big)_{L_{2,\Gamma}} = (f, u)_{L_2(\Omega)}.$$

Умножение первого уравнения в (2.12) слева на $u(t)$ в пространстве $L_2(\Omega)$ дает комплексно сопряженное выражение, и из этих двух соотношений следует закон баланса (2.30). □

3. Плоская задача, допускающая разделение переменных

3.1. Модельная спектральная проблема в прямоугольной области. Для уточнения характера спектра в исследуемой проблеме исследуем спектральную задачу (1.18) в случае, когда область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ является прямоугольной, а граница раздела Γ — отрезок вещественной оси: $\Gamma = \{(x; 0) : 0 < x < \pi\}$, нижняя жидкость занимает область $\Omega_1 := \{(x, y) : 0 < x < \pi, -a_1 < y < 0\}$, а верхняя — область $\Omega_2 := \{(x, y) : 0 < x < \pi, 0 < y < a_2\}$, см. рис. 1.

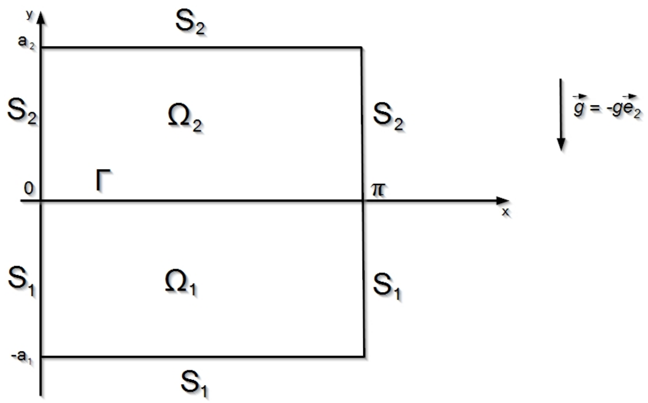


Рис. 1

В этом случае спектральная проблема (1.18) формулируется следующим образом. Для искомых амплитудных функций u_k, w_k $(k = 1, 2)$ и ζ должны быть выполнены следующие уравнения и краевые условия:

$$
\begin{gathered}
-\rho_1 \lambda u_1 = \mu_1 \triangle (u_1 + \alpha_1^{1/2} w_1) \quad ((x,y) \in \Omega_1), \quad u_1(0,y) = u_1(\pi,y) = u_1(x,-a_1) = 0, \\
-\rho_2 \lambda u_2 = \mu_2 \triangle (u_2 + \alpha_2^{1/2} w_2) \quad ((x,y) \in \Omega_2), \quad u_2(0,y) = u_2(\pi,y) = u_2(x,a_2) = 0, \\
-\lambda w_1 = \alpha_1^{1/2} u_1 - \beta_1 w_1 \quad ((x,y) \in \Omega_1), \qquad -\lambda w_2 = \alpha_2^{1/2} u_2 - \beta_2 w_2 \quad ((x,y) \in \Omega_2), \\
-\lambda \zeta = u_1 = u_2 \quad ((x,y) \in \Gamma), \quad \triangle := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \\
\mu_1 \frac{\partial}{\partial y}(u_1 + \alpha_1^{1/2} w_1) - \mu_2 \frac{\partial}{\partial y}(u_2 + \alpha_2^{1/2} w_2) = -g(\rho_1 - \rho_2)\zeta \quad ((x,y) \in \Gamma).
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

Исключая в (3.1) переменные $\zeta(x)$ и $w_l(x,y)$ $(l = 1, 2)$ при $\lambda \notin \{0, \beta_1, \beta_2\}$, приходим к проблеме

$$
\begin{gathered}
-\triangle u_1 = \frac{\lambda \rho_1}{m_1(\lambda)} u_1 \quad ((x,y) \in \Omega_1), \quad m_1(\lambda) := \mu_1 \Big(1 + \frac{\alpha_1}{\beta_1 - \lambda}\Big), \\
-\triangle u_2 = \frac{\lambda \rho_2}{m_2(\lambda)} u_2 \quad ((x,y) \in \Omega_2), \quad m_2(\lambda) := \mu_2 \Big(1 + \frac{\alpha_2}{\beta_2 - \lambda}\Big), \\
u_1 = 0 \ \ ((x,y) \in S_1), \quad u_2 = 0 \ \ ((x,y) \in S_2), \quad u_1 = u_2 \ \ ((x,y) \in \Gamma), \\
m_1(\lambda) \frac{\partial u_1}{\partial y} - m_2(\lambda) \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda} u_1 \quad ((x,y) \in \Gamma).
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

3.2. Вывод характеристических уравнений задачи. Задача (3.2) допускает разделение переменных с использованием разложения искомых функций в ряды Фурье по системе $\big\{\sin kx\big\}_{k=1}^{\infty}$. Итак, будем разыскивать функции $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ в виде рядов $u_1(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{1k}(y) \sin kx$, $u_2(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{2k}(y) \sin kx$.

Используя это представление для решения в уравнениях и граничных условиях в (3.2), получим, что для функций $u_{1k}(y)$ и $u_{2k}(y)$ $(k \in \mathbb{N})$ выполнены следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2 u_{1k}}{dy^2} - \Big(k^2 - \frac{\lambda \rho_1}{m_1(\lambda)}\Big) u_{1k} = 0, \quad -a_1 < y < 0, \quad u_{1k}(-a_1) = 0, \\
&\frac{d^2 u_{2k}}{dy^2} - \Big(k^2 - \frac{\lambda \rho_2}{m_2(\lambda)}\Big) u_{2k} = 0, \qquad 0 < y < a_2, \quad u_{2k}(a_2) = 0.
\end{aligned}
$$

Отсюда получим: $u_{1k}(y) = c_{1k} \operatorname{sh}\Big((y + a_1)\sqrt{k^2 - \frac{\lambda \rho_1}{m_1(\lambda)}}\Big)$, $u_{2k}(y) = c_{2k} \operatorname{sh}\Big((y - a_2)\sqrt{k^2 - \frac{\lambda \rho_2}{m_2(\lambda)}}\Big)$, где c_{nk} $(n = 1, 2,\ k \in \mathbb{N})$ — набор постоянных.

Для получения связей между функциями $u_{1k}(y)$ и $u_{2k}(y)$ используем кинематическое и динамическое условия на Γ из (3.2). Из кинематического условия получаем связь

$$c_{1k}\,\mathrm{sh}\left(a_1\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\right)+c_{2k}\,\mathrm{sh}\left(a_2\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\right)=0, \tag{3.3}$$

а динамическое условие дает соотношение

$$c_{1k}\left[m_1(\lambda)\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\,\mathrm{ch}\left(a_1\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\right)-\frac{g(\rho_1-\rho_2)}{\lambda}\,\mathrm{sh}\left(a_1\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\right)\right]-$$
$$-c_{2k}m_2(\lambda)\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\,\mathrm{ch}\left(a_2\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\right)=0. \tag{3.4}$$

Приравнивая к нулю определитель системы линейных однородных уравнений (3.3)-(3.4), приходим к характеристическим уравнениям для нахождения собственных значений λ спектральной задачи (3.1). После простых преобразований эти уравнения принимают следующий вид:

$$\frac{g(\rho_1-\rho_2)}{\lambda}-m_1(\lambda)\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\,\mathrm{cth}\left(a_1\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\right)-$$
$$-m_2(\lambda)\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\,\mathrm{cth}\left(a_2\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\right)=0,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{3.5}$$

3.3. Исследование характеристических уравнений. Из общих соображений, которые будут приведены далее (см. п. 1 теоремы 4.2), следует, что корни всей последовательности уравнений (3.5), за исключением не более, чем конечного количества комплексно сопряженных пар, лежат на положительной действительной полуоси. Поэтому, поскольку в первую очередь нас интересуют точки сгущения корней уравнений (3.5), мы ограничимся рассмотрением уравнений (3.5) на положительной полуоси.

Рассмотрим следующую зону для параметра λ:

$$\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}<k^2,\quad \frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}<k^2,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Предположим, что $\lambda\notin\{0\}\cup\{\alpha_1+\beta_1\}\cup\{\alpha_2+\beta_2\}\cup\{+\infty\}$ — точка сгущения корней характеристических уравнений (3.5) ($m_l(\alpha_l+\beta_l)=0,\ l=1,2$). Тогда из (3.5) найдем, что

$$\frac{g(\rho_1-\rho_2)}{\lambda k}-m_1(\lambda)\sqrt{1-\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)k}}\,\mathrm{cth}\left(a_1\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\right)-$$
$$-m_2(\lambda)\sqrt{1-\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)k}}\,\mathrm{cth}\left(a_2\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\right)=-\big(m_1(\lambda)+m_2(\lambda)\big)+o(1)\ \text{ при }\ k\to+\infty,$$

откуда следует уравнение для определения точек сгущения в зоне (3.6):

$$m_1(\lambda)+m_2(\lambda)=0. \tag{3.7}$$

Обозначим через $\lambda_l>0$ $(l=1,2)$ корни уравнения (3.7) в случае, когда $\alpha_1+\beta_1\neq\alpha_2+\beta_2$. При $\alpha_1+\beta_1=\alpha_2+\beta_2$ корни уравнения (3.7) имеют вид $\lambda_1:=\alpha_1+\beta_1$, $\lambda_2=(\mu_1\beta_2+\mu_2\beta_1)(\mu_1+\mu_2)^{-1}$.

Исследуем точки $\lambda=\lambda_l$ $(l=1,2)$ в зоне (3.6). Из представления (см. (3.5))

$$\frac{g(\rho_1-\rho_2)}{k}-\lambda m_1(\lambda)\sqrt{1-\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)k^2}}\,\mathrm{cth}\left(a_1\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\right)-$$
$$-\lambda m_2(\lambda)\sqrt{1-\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)k^2}}\,\mathrm{cth}\left(a_2\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\right)=$$
$$=\frac{g(\rho_1-\rho_2)}{k}-\lambda_l\left(\frac{\mu_1\alpha_1}{(\beta_1-\lambda_l)^2}+\frac{\mu_2\alpha_2}{(\beta_2-\lambda_l)^2}\right)(\lambda-\lambda_l)+o((\lambda-\lambda_l))+O\Big(\frac{1}{k^2}\Big)$$
$$\text{при }\ \lambda\to\lambda_l,\ \ k\to+\infty\quad(l=1,2)$$

следует, что точка $\lambda = \lambda_l$ является предельной для последовательности корней характеристических уравнений (3.5) из рассматриваемой зоны. Для этих последовательностей корней $\{\lambda_k^{(l)}\}_{k=1}^{+\infty}$ $(l = 1, 2)$ имеют место асимптотические формулы:

$$\lambda_k^{(l)} = \lambda_l + \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_l\Big(\dfrac{\mu_1\alpha_1}{(\beta_1 - \lambda_l)^2} + \dfrac{\mu_2\alpha_2}{(\beta_2 - \lambda_l)^2}\Big)} \cdot \frac{1}{k}\big(1 + o(1)\big), \quad k \to +\infty \quad (l = 1, 2). \tag{3.8}$$

Исследуем точку $\lambda = +\infty$ в зоне (3.6). Из соотношения (см. (3.5))

$$\varlimsup_{k\to+\infty,\, \lambda\to+\infty} \Bigg[\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda} - m_1(\lambda)\sqrt{k^2 - \frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\,\mathrm{cth}\Big(a_1\sqrt{k^2 - \frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\Big) - \\ - m_2(\lambda)\sqrt{k^2 - \frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\,\mathrm{cth}\Big(a_2\sqrt{k^2 - \frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\Big)\Bigg] \leqslant -\Big(\frac{\mu_1}{a_1} + \frac{\mu_2}{a_2}\Big) < 0$$

следует, что точка $\lambda = +\infty$ не является предельной для последовательности корней характеристических уравнений (3.5) из рассматриваемой зоны.

Исследуем точку $\lambda = 0$ в зоне (3.6). Из представления (см. (3.5))

$$\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda k} - m_1(\lambda)\sqrt{1 - \frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)k^2}}\,\mathrm{cth}\Big(a_1\sqrt{k^2 - \frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\Big) - \\ - m_2(\lambda)\sqrt{1 - \frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)k^2}}\,\mathrm{cth}\Big(a_2\sqrt{k^2 - \frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\Big) = \\ = \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda k} - m_1(0) - m_2(0) + O(\lambda) + o\Big(\frac{1}{k^2}\Big) \ \text{ при } \ \lambda \to 0, \ \ k \to +\infty$$

следует, что точка $\lambda = 0$ является предельной для последовательности корней характеристических уравнений (3.5) из рассматриваемой зоны. Для этой последовательности корней $\{\lambda_k^{(0)}\}_{k=1}^{+\infty}$ имеет место асимптотическая формула:

$$\lambda_k^{(0)} = \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\mu_1\Big(1 + \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}\Big) + \mu_2\Big(1 + \dfrac{\alpha_2}{\beta_2}\Big)} \cdot \frac{1}{k}\big(1 + o(1)\big), \quad k \to +\infty. \tag{3.9}$$

Исследуем точку $\lambda = \alpha_1 + \beta_1$ в зоне (3.6) при условии, что $\alpha_1 + \beta_1 \neq \alpha_2 + \beta_2$ (случай $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$ укладывается в формулу (3.8)). Из соотношения (см. (3.5))

$$\lim_{k\to+\infty,\, \lambda\to\alpha_1+\beta_1} \Bigg[\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda k} - \frac{m_1(\lambda)}{k}\sqrt{k^2 - \frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\,\mathrm{cth}\Big(a_1\sqrt{k^2 - \frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}}\Big) - \\ - m_2(\lambda)\sqrt{1 - \frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)k^2}}\,\mathrm{cth}\Big(a_2\sqrt{k^2 - \frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\Big)\Bigg] = -m_2(\alpha_1 + \beta_1) \neq 0$$

следует, что точка $\lambda = \alpha_1 + \beta_1$ не является предельной для последовательности корней характеристических уравнений (3.5) из рассматриваемой зоны. Аналогичный вывод справедлив и для точки $\lambda = \alpha_2 + \beta_2$.

Рассмотрим теперь зону для параметра λ (правая полуокрестность точки $\lambda = \alpha_1 + \beta_1$):

$$k^2 < \frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}, \quad \frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)} < k^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Характеристические уравнения (3.5) в зоне (3.10) примут вид

$$\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda}\sin\Big(a_1\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)} - k^2}\Big) - m_1(\lambda)\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)} - k^2}\cos\Big(a_1\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)} - k^2}\Big) - \\ - m_2(\lambda)\sqrt{k^2 - \frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\sin\Big(a_1\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)} - k^2}\Big)\,\mathrm{cth}\Big(a_2\sqrt{k^2 - \frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\Big) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда получим, что

$$\frac{g(\rho_1-\rho_2)}{\lambda k}\sin\Big(a_1\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}-k^2}\Big)-\frac{m_1(\lambda)}{k}\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}-k^2}\cos\Big(a_1\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}-k^2}\Big)-$$
$$-m_2(\lambda)\sqrt{1-\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)k^2}}\sin\Big(a_1\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}-k^2}\Big)\operatorname{cth}\Big(a_2\sqrt{k^2-\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}}\Big)=$$
$$=-m_2(\alpha_1+\beta_1)\sin\Big(a_1\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}-k^2}\Big)\big(1+o(1)\big)+o(1)\ \text{ при }\ \lambda\to\alpha_1+\beta_1,\quad k\to+\infty.$$

Из этого соотношения следует, что точка $\lambda=\alpha_1+\beta_1$ является предельной для последовательности корней $\{\lambda_{nk}^{(1)}\}_{n,k=1}^{+\infty}$ характеристических уравнений (3.5) из рассматриваемой зоны. Аналогично, рассматривая характеристические уравнения (3.5) в зоне, связанной с правой полуокрестностью точки $\lambda=\alpha_2+\beta_2$, также найдем, что точка $\lambda=\alpha_2+\beta_2$ является предельной для последовательности корней $\{\lambda_{nk}^{(2)}\}_{n,k=1}^{+\infty}$ характеристических уравнений (3.5). Для этих последовательностей корней $\{\lambda_{nk}^{(l)}\}_{n,k=1}^{+\infty}$ $(l=1,2)$ имеют место асимптотические формулы:

$$\lambda_{nk}^{(l)}=\alpha_l+\beta_l+\frac{a_l^2\rho_l\alpha_l(\alpha_l+\beta_l)}{\mu_l\big(\pi^2n^2+a_l^2k^2\big)}\cdot\big(1+o(1)\big),\quad n,k\to+\infty\quad(l=1,2).\tag{3.11}$$

Рассмотрим теперь зону, связанную окрестностью точки $\lambda=+\infty$:

$$k^2<\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)},\quad k^2<\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)},\quad k\in\mathbb{N}.\tag{3.12}$$

Характеристические уравнения (3.5) в зоне (3.12) примут вид

$$\frac{g(\rho_1-\rho_2)}{\lambda}\sin\Big(a_1\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}-k^2}\Big)\sin\Big(a_2\sqrt{\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}-k^2}\Big)-$$
$$-m_1(\lambda)\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}-k^2}\cos\Big(a_1\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}-k^2}\Big)\sin\Big(a_2\sqrt{\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}-k^2}\Big)-$$
$$-m_2(\lambda)\sqrt{\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}-k^2}\cos\Big(a_2\sqrt{\frac{\lambda\rho_2}{m_2(\lambda)}-k^2}\Big)\sin\Big(a_1\sqrt{\frac{\lambda\rho_1}{m_1(\lambda)}-k^2}\Big)=0,\quad k\in\mathbb{N}.\tag{3.13}$$

Можно показать, что точка $\lambda=+\infty$ является предельной для некоторой подпоследовательности корней уравнений (3.13).

Таким образом, спектр задачи (1.18) в случае, когда область $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ является прямоугольной, а граница раздела Γ — отрезок вещественной оси, т. е. спектр задачи (3.2), дискретен и имеет конечное количество точек сгущения. А именно, спектр можно разбить на шесть ветвей собственных значений.

Предельной точке $\lambda=+\infty$ отвечает ветвь $\{\lambda_k^{(+\infty)}\}_{k=1}^{+\infty}$ конечнократных собственных значений задачи, которые являются последовательными минимумами вариационного отношения $\Big(\sum\limits_{k=1}^{2}\mu_k\int\limits_{\Omega_k}|\nabla u_k|^2\,d\Omega_k\Big)\Big(\sum\limits_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}|u_k|^2\,d\Omega_k\Big)^{-1}$, $u=(u_1;u_2)\in\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$. Отсюда видно, что силы вязкоупругости не влияют на асимптотику собственных значений. Соответствующие нормальные колебания отвечают внутренним диссипативным волнам, как и в задаче о колебаниях двух обычных вязких жидкостей.

Предельной точке $\lambda=0$ отвечает ветвь $\{\lambda_k^{(0)}\}_{k=1}^{+\infty}$ конечнократных собственных значений, которые имеют асимптотическое распределение (3.9) и являются последовательными максимумами вариационного отношения задачи Стеклова: $\Big(g(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma}|u_1|^2\,d\Gamma\Big)\Big(\sum\limits_{k=1}^{2}\Big(1+\frac{\alpha_k}{\beta_k}\Big)\mu_k\int\limits_{\Omega_k}|\nabla u_k|^2\,d\Omega_k\Big)^{-1}$, $u=(u_1;u_2)\in\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$. Отсюда следует, что вязкоупругие силы в жидкостях вносят существенный вклад в асимптотику собственных значений, связанных с колебаниями границы раздела между жидкостями. Отметим, что аналогичные волновые движения возникают и в задаче о колебаниях двух обычных вязких жидкостей с общей границей раздела.

Предельным точкам $\lambda = \alpha_1 + \beta_1$, $\lambda = \alpha_2 + \beta_2$ отвечают ветви $\{\lambda_{nk}^{(l)}\}_{n,k=1}^{+\infty}$ $(l = 1, 2)$ конечнократных собственных значений, которые имеют асимптотическое распределение (3.11). Волновые движения, отвечающие этим собственным значениям, носят преимущественно внутренний характер и возникают исключительно от действия сил вязкоупругости. Этот тип волновых движений в жидкостях останется и в случае, если границу раздела Γ между жидкостями заменить на твердую стенку.

Предельным точкам $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$, где λ_l $(l = 1, 2)$ корни уравнения (3.7), отвечают ветви $\{\lambda_k^{(l)}\}_{k=1}^{+\infty}$ $(l = 1, 2)$ конечнократных собственных значений, которые имеют асимптотическое распределение (3.8) и связаны с последовательными максимумами вариационного отношения задачи Стефана: $\Big(\dfrac{g(\rho_1-\rho_2)}{\lambda_l}\int\limits_\Gamma |u_1|^2\,d\Gamma\Big)\Big(\sum\limits_{k=1}^{2}\dfrac{\mu_k\alpha_k}{(\beta_k-\lambda_l)^2}\int\limits_{\Omega_k}|\nabla u_k|^2\,d\Omega_k\Big)^{-1}$, $u = (u_1; u_2) \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ $(l = 1, 2)$.

Волновые движения, отвечающие этим собственным значениям, происходят преимущественно в окрестности границы раздела Γ и возникают исключительно от действия сил вязкоупругости. Этот тип волновых движений в жидкостях пропадет в случае, если границу раздела Γ между жидкостями заменить на твердую стенку.

Отметим здесь, что все сказанное относится исключительно к спектру задачи (3.2), а относящиеся к векторным задачам гидродинамики термины использованы лишь для удобства.

4. Операторный подход к спектральной задаче

4.1. Основная спектральная задача. Пересчет корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ и пучка $L(\lambda)$. Будем разыскивать решения однородного уравнения ($\mathcal{F}(t) \equiv 0$) из (2.21) в форме $\xi(t) = \exp(-\lambda t)\xi$, где λ — спектральный параметр, а ξ — амплитудный элемент. В результате придем к следующей основной спектральной задаче:

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}, \tag{4.1}$$

которую будем ассоциировать с задачей о спектре скалярной задачи сопряжения, которая моделирует систему из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд.

При $\lambda \notin \{0, \beta_1, \beta_2\} = \sigma(\mathcal{G})$ с задачей (4.1) свяжем также следующую спектральную задачу для операторного пучка (см. замечание 2.1):

$$L(\lambda)z := \big[I - \lambda\widetilde{A}^{-1} + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\lambda)^{-1}\mathcal{Q}\big]z =$$
$$= \Big[I - \lambda\widetilde{A}^{-1} - \frac{g(\rho_1-\rho_2)}{\lambda}(\widetilde{A}^{1/2}V)(\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}) + \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha(\beta-\lambda)^{-1}\widetilde{A}^{-1/2}\Big]z = 0, \quad z \in L_2(\Omega). \tag{4.2}$$

Для выяснения связи между корневыми элементами задач (4.1) и (4.2) нам понадобятся вспомогательные леммы о связи цепочки из собственного и присоединенного к нему элементов пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ с некоторой функцией из $\mathcal{H}$ и о связи цепочек элементов некоторых специальных оператор-функций.

Определение 4.1 (см. [10, гл. 2, § 11, с. 61]). Пусть λ_0 собственное значение, а η_0 отвечающий ему собственный элемент (с.э.) оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, т. е. $\mathcal{A}(\lambda_0)\eta_0 = 0$. Элементы $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ называют *присоединенными* к с.э. η_0, если $\sum\limits_{k=0}^{j}(k!)^{-1}\mathcal{A}^{(k)}(\lambda_0)\eta_{j-k} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$. Число n называют *длиной цепочки* $\{\eta_k\}_{k=0}^{n-1}$ из собственного и присоединенных элементов.

Лемма 4.1 (см. [10, гл. 2, § 11, лемма 11.3]). *Элементы $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ образуют цепочку из собственного и присоединенных элементов $\mathcal{A}(\lambda)$, отвечающую числу λ_0, тогда и только тогда, когда существует функция $\eta(\lambda)$, голоморфная в некоторой окрестности точки λ_0, такая, что $\eta(\lambda_0) \neq 0$, $\eta^{(k)}(\lambda_0) = k!\eta_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ и что функция $\mathcal{A}(\lambda)\eta(\lambda)$ в точке λ_0 имеет нуль кратности, большей или равной n.*

Определение 4.2 (см. [10, гл. 2, § 11, с. 62]). Пусть $\eta(\lambda)$ — функция из $\mathcal{H}$, причем $\eta(\lambda_0) \neq 0$ и $\mathcal{A}(\lambda_0)\eta(\lambda_0) = 0$. Если порядок нуля функции $\mathcal{A}(\lambda)\eta(\lambda)$ в точке λ_0 равен n, то $\eta(\lambda)$ называется *производящей функцией* для цепочки из собственного и присоединенных элементов $\{(k!)^{-1}\eta^{(k)}(\lambda_0)\}_{k=0}^{n-1}$ оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$. Число n будем называть *рангом* производящей функции $\eta(\lambda)$.

Рассмотрим операторный пучок $\mathcal{A}(\lambda)$, действующий в пространстве $\mathcal{H} = L_2(\Omega) \oplus \mathcal{H}_0$, и соответствующую спектральную задачу:

$$\mathcal{A}(\lambda)\eta := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11}(\lambda) & \mathcal{A}_{12}(\lambda) \\ \mathcal{A}_{21}(\lambda) & \mathcal{A}_{22}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (z; w)^{\tau} \in \mathcal{H} = L_2(\Omega) \oplus \mathcal{H}_0. \tag{4.3}$$

С задачей (4.3) при $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$ свяжем спектральную задачу:

$$L(\lambda)z = \big[\mathcal{A}_{11}(\lambda) - \mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)\big]z = 0, \quad z \in L_2(\Omega). \tag{4.4}$$

Замечание 4.1. В области $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$ спектральную задачу (4.3) можно переписать следующим образом:

$$\mathcal{A}(\lambda)\eta = \begin{pmatrix} I & \mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda) \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{22}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda) & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда после замены $\big(z; \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)z + w\big)^{\tau} =: (z; w_z)^{\tau}$ найдем, что в области $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$ спектральные задачи (4.3) и (4.4) эквивалентны.

Лемма 4.2. *Пусть $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$. Функция $\eta(\lambda) := (z(\lambda); w(\lambda))^{\tau}$ из $\mathcal{H}$ является производящей функцией ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке $\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$ тогда и только тогда, когда $z(\lambda)$ является производящей функцией ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке λ_0 и*

$$w(\lambda) = -\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)z(\lambda) + (\lambda - \lambda_0)^n \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)p(\lambda), \tag{4.5}$$

где $p(\lambda)$ — функция, голоморфная в некоторой окрестности точки λ_0.

Доказательство. Доказательство этой леммы следует рассуждениям [10, гл. 2, § 12, лемма 12.3]. Начнем с достаточности. Пусть $z(\lambda)$ является производящей функцией ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке $\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$ и выполнено соотношение (4.5). Поскольку $L(\lambda)z(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль кратности $\geqslant n$, то из вида $L(\lambda)$ получим:

$$L(\lambda)z(\lambda) = \big[\mathcal{A}_{11}(\lambda) - \mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)\big]z(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n q(\lambda), \tag{4.6}$$

где $q(\lambda)$ — некоторая функция, голоморфная в окрестности точки λ_0. Подставим (4.5) в (4.6) и запишем полученное соотношение вместе с (4.5) в виде одного векторно-матричного выражения в $\mathcal{H}$. После простых преобразований получим, что $\mathcal{A}(\lambda)\big(z(\lambda); w(\lambda)\big)^{\tau} = (\lambda - \lambda_0)^n\big(q(\lambda) + \mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)p(\lambda); p(\lambda)\big)^{\tau}$. Отсюда следует, что $\eta(\lambda) = (z(\lambda); w(\lambda))^{\tau}$ есть производящая функция ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке λ_0. Достаточность доказана.

Пусть теперь функция $\eta(\lambda) = (z(\lambda); w(\lambda))^{\tau}$ является производящей функцией ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке λ_0. По условию теоремы $\mathcal{A}(\lambda)\eta(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль кратности $\geqslant n$, следовательно:

$$\mathcal{A}_{11}(\lambda)z(\lambda) + \mathcal{A}_{12}(\lambda)w(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n r(\lambda), \tag{4.7}$$

$$\mathcal{A}_{21}(\lambda)z(\lambda) + \mathcal{A}_{22}(\lambda)w(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n p(\lambda), \tag{4.8}$$

где $r(\lambda)$, $p(\lambda)$ — некоторые функции, голоморфные в окрестности точки λ_0. Из (4.8) следует (4.5). Подставив (4.5) в (4.7), получим, что $L(\lambda)z(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n\big(r(\lambda) - \mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)p(\lambda)\big)$. Отсюда следует, что $L(\lambda)z(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль порядка не ниже n. $\square$

В качестве следствия из леммы 4.2 получим следующую лемму о пересчете корневых элементов спектральных задач (4.3) и (4.4).

Лемма 4.3. *Пусть набор элементов $\{\eta_k = (z_k; w_k)^{\tau}\}_{k=0}^{n-1}$ является цепочкой из собственного и присоединенных элементов задачи* (4.3)*, отвечающей собственному значению λ_0 ($\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$), тогда $\{z_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов задачи* (4.4)*, отвечающая собственному значению λ_0.*

Обратно, пусть набор элементов $\{z_k\}_{k=0}^{n-1}$ — *цепочка из собственного и присоединенных элементов спектральной задачи* (4.4)*, отвечающая собственному значению* λ_0*, тогда* $\{\eta_k = (z_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$*, где*

$$w_k = -\sum_{l=0}^{k} \frac{1}{(k-l)!} \frac{d^{k-l}}{d\lambda^{k-l}} \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0} z_l, \quad k = \overline{0, n-1}, \tag{4.9}$$

— *цепочка из собственного и присоединенных элементов спектральной задачи* (4.3).

Доказательство. По лемме 4.2, если функция $\eta(\lambda) = = (z(\lambda); w(\lambda))^\tau$ из $\mathcal{H}$ является производящей функцией ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке $\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$, то функция $z(\lambda)$ является производящей функцией ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке λ_0. Отсюда и из леммы 4.1 следует прямое утверждение.

Обратно, пусть функция $z(\lambda)$ является производящей функцией из H ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке λ_0. Определим функцию $w(\lambda)$ по формуле (4.5). Тогда по лемме 4.2 функция $\eta(\lambda) = (z(\lambda); w(\lambda))^\tau$ из $\mathcal{H}$ является производящей функцией ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке λ_0. При этом (см. определение 4.2)

$$\begin{aligned} w_k = -\frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)z(\lambda) + (\lambda-\lambda_0)^n\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)p(\lambda)\right]\Big|_{\lambda=\lambda_0} = \\ = -\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{l!(k-l)!}\frac{d^{k-l}}{d\lambda^{k-l}}\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0}\frac{d^l z(\lambda)}{d\lambda^l}\Big|_{\lambda=\lambda_0} = \\ = -\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{(k-l)!}\frac{d^{k-l}}{d\lambda^{k-l}}\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0} z_l \quad (k=\overline{0,n-1}). \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

В качестве следствия из леммы 4.3 получим следующую теорему о связи собственных и присоединенных элементов оператора $\mathcal{A}$ и пучка $L(\lambda)$.

Теорема 4.1. *Пусть набор элементов* $\{\xi_k = (u_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ *является цепочкой из собственного и присоединенных элементов оператора* $\mathcal{A}$*, отвечающей собственному значению* λ_0 $(\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{G}) = \{0, \beta_1, \beta_2\})$*, тогда набор элементов* $\{z_k\}_{k=0}^{n-1} := \{\widetilde{A}^{1/2}u_k\}_{k=0}^{n-1}$ — *цепочка из собственного и присоединенных элементов пучка* $L(\lambda)$*, отвечающая собственному значению* λ_0.

Обратно, пусть набор элементов $\{z_k\}_{k=0}^{n-1}$ — *цепочка из собственного и присоединенных элементов пучка* $L(\lambda)$*, отвечающая собственному значению* λ_0*, тогда* $\{\xi_k = (\widetilde{A}^{-1/2}z_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$*, где* $w_k = \sum_{l=0}^{k}(\mathcal{G}-\lambda_0)^{-(k-l+1)}\mathcal{Q}z_l$ — *цепочка из собственного и присоединенных элементов оператора* $\mathcal{A}$.

Доказательство. Пусть λ_0 $(\lambda_0 \notin \{0, \beta_1, \beta_2\})$ — собственное значение оператора $\mathcal{A}$ и $\xi(\lambda)$ производящая функция для цепочки из собственного и присоединенных элементов $\{\xi_k := (k!)^{-1}\xi^{(k)}(\lambda_0)\}_{k=0}^{n-1}$ (см. определение 4.2).

Запишем спектральную задачу для оператора $\mathcal{A}$ в виде $(\mathcal{A}-\lambda)\xi = \mathcal{B}\mathcal{A}(\lambda)\mathcal{B}\xi = 0$, $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, где $\mathcal{B} := \operatorname{diag}(\widetilde{A}^{1/2}, \mathcal{I})$, а оператор-функция $\mathcal{A}(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ имеет вид:

$$\mathcal{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11}(\lambda) & \mathcal{A}_{12}(\lambda) \\ \mathcal{A}_{21}(\lambda) & \mathcal{A}_{22}(\lambda) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} I - \lambda\widetilde{A}^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}-\lambda \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Отсюда следует, что $\mathcal{B}\xi(\lambda) = (\widetilde{A}^{1/2}u(\lambda); w(\lambda))^\tau$ — производящая функция для оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$. Согласно лемме 4.2, $z(\lambda) := \widetilde{A}^{1/2}u(\lambda)$ — производящая функция для оператор-функции $L(\lambda)$, и первое утверждение в теореме доказано.

Пусть теперь λ_0 — собственное значение операторного пучка $L(\lambda)$, а $z(\lambda)$ — производящая функция для цепочки из собственного и присоединенных элементов $\{z_k := (k!)^{-1}z^{(k)}(\lambda_0)\}_{k=0}^{n-1}$ (см. определение 4.2) оператор-функции $L(\lambda)$. Тогда в соответствии с леммой 4.3 получим, что

$$(z_k; w_k)^\tau := \Big(z_k; -\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{(k-l)!}\frac{d^{k-l}}{d\lambda^{k-l}}\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0} z_l\Big)^\tau, \quad k = \overline{0, n-1} \tag{4.11}$$

— цепочка из собственного и присоединенных элементов оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_0. Для вторых компонент из (4.11) имеем, с учетом вида $\mathcal{A}_{22}(\lambda)$ и $\mathcal{A}_{21}(\lambda)$ (см. (4.10) и определение 4.2):

$$w_k = -\sum_{l=0}^{k} \frac{1}{(k-l)!} \frac{d^{k-l}}{d\lambda^{k-l}} \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0} z_l =$$

$$= \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{(k-l)!} \frac{d^{k-l}}{d\lambda^{k-l}} (\mathcal{G}-\lambda)^{-1}\mathcal{Q}\Big|_{\lambda=\lambda_0} z_l = \sum_{l=0}^{k} (\mathcal{G}-\lambda_0)^{-(k-l+1)}\mathcal{Q} z_l.$$

Таким образом, набор элементов $\{\eta_k = (z_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ является цепочкой из собственного и присоединенных элементов оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$, отвечающей собственному значению λ_0. Отсюда следует, что набор элементов $\{\xi_k = (\widetilde{A}^{-1/2} z_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов оператора $\mathcal{A}$. □

4.2. Структура и локализация спектра. Часть рассуждений в следующей теореме будет основана на применении методов индефинитной метрики, которые можно найти в [1] (см. также [16]). В связи с этим обстоятельством будем считать, что $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, где $\mathcal{H}_+ := L_2(\Omega)$, $\mathcal{H}_- := L_2(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma}$.

Определим оператор $\mathcal{J} := \operatorname{diag}(I, -\mathcal{I})$ и введем в $\mathcal{H}$ индефинитное скалярное произведение по формуле $[\xi_1, \xi_2] := (\mathcal{J}\zeta_1, \zeta_2)_{\mathcal{H}} = (u_1, u_2)_{\mathcal{H}_+} - (w_1, w_2)_{\mathcal{H}_-}$. Введем ортопроекторы $\mathcal{P}_+$ и $\mathcal{P}_-$: $\mathcal{P}_+\mathcal{H} = \mathcal{H}_+$, $\mathcal{P}_-\mathcal{H} = \mathcal{H}_-$. Приведем необходимые понятия и факты из теории пространств с индефинитной метрикой.

Подпространство L_+ пространства Крейна $\mathcal{H}$ называется *неотрицательным*, если $[\xi, \xi] \geqslant 0$ для любого $\xi \in L_+$, и *максимальным неотрицательным* ($L_+ \in \mathfrak{M}^+$), если оно не является частью другого неотрицательного подпространства. Аналогично определяется *неположительное* подпространство L_-. Подпространство L_0 пространства Крейна $\mathcal{H}$ называется *изотропным*, если $[\xi, \eta] = 0$ для любых ξ, $\eta \in L_0$.

Известно [1, гл. 1, § 8, п. 3], что $L_+ \in \mathfrak{M}^+$ тогда и только тогда, когда существует $K_+ : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$ ($\|K_+\| \leqslant 1$) такой, что $L_+ = \{\xi = \xi_+ + K_+\xi_+ : \xi_+ \in \mathcal{H}_+\}$.

Подпространство L_+ называется *равномерно положительным*, если оно является гильбертовым пространством по отношению к скалярному произведению, порождаемому индефинитной метрикой.

Будем говорить, что пространство L_+ *принадлежит классу* h^+, если оно допускает разложение в прямую $\mathcal{J}$-ортогональную сумму конечномерного изотропного подпространства и равномерно положительного подпространства. В частности, $L_+ \in h^+$, если $K_+ \in \mathfrak{S}_\infty$ (см. [1, гл. 1, § 9, задача 18], [21]).

Если $L_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$ и L_+ $\mathcal{J}$-ортогонально L_-, то будем говорить, что они образуют *дуальную пару* $\{L_+, L_-\}$. Будем писать $\{L_+, L_-\} \in h$, если $L_\pm \in h^\pm$.

Будем говорить, что непрерывный $\mathcal{J}$-самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ *принадлежит классу* (H) ($\mathcal{A} \in (H)$), если у него есть хотя бы одна дуальная пара $\{L_+, L_-\}$ инвариантных подпространств и каждая $\mathcal{A}$-инвариантная дуальная пара принадлежит классу h.

Определение 4.3 (см. [18, гл. 4, § 1, п. 20])**.** *Существенным спектром* оператора $\mathcal{A}$ называется множество $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) := \big\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{оператор } \mathcal{A} - \lambda \text{ нефредгольмов}\big\}$.

Теорема 4.2. *Справедливы утверждения*:

1. *Спектр оператора $\mathcal{A}$ действительный, за исключением, быть может, конечного количества собственных значений, расположенных симметрично относительно действительной оси.*
2. *Имеет место включение $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \subset \sigma_{ess}(L(\lambda)) \subset \big[0, \max\{\beta_1, \beta_2\} + \|A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}\|^2\big]$. Множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$.*

3. *Если λ — невещественное собственное значение оператора $\mathcal{A}$, то*

$$\begin{gathered}\gamma_1 := \left[2\|\widetilde{A}^{-1/2}\|^2\right]^{-1} < \mathrm{Re}\lambda < \widetilde{b} + \widetilde{q} + \widetilde{q}^{1/2}\big(\widetilde{b}+\widetilde{q}\big)^{1/2} =: \gamma_2, \\ |\lambda|^2 < \big(\widetilde{b} + 2\widetilde{q} + 2\widetilde{q}^{1/2}\big(\widetilde{b}+\widetilde{q}\big)^{1/2}\big)\big(2\widetilde{b}+\widetilde{q}\big), \\ \widetilde{b} := \max\{\beta_1,\beta_2\}, \quad \widetilde{q} := g(\rho_1-\rho_2)\|\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}\|^2 + \|A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}\|^2.\end{gathered} \tag{4.12}$$

Спектр оператора $\mathcal{A}$ действительный, если выполнено условие

$$2\|\widetilde{A}^{-1/2}\|^2 \leqslant \big(\widetilde{b} + \widetilde{q} + \widetilde{q}^{1/2}\big(\widetilde{b}+\widetilde{q}\big)^{1/2}\big)^{-1}. \tag{4.13}$$

Доказательство. Доказательство проведем в несколько шагов.

1. Из факторизации (2.29) при $\lambda = -a$, где $a > 0$, и из $\widetilde{A}^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$ найдем

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}+a)^{-1} &= \begin{pmatrix} I & -(I+a\widetilde{A}^{-1})^{-1}\widetilde{A}^{-1/2}\mathcal{Q}^* \\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\widetilde{A}+a)^{-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{D}^{-1}(a)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathcal{Q}\widetilde{A}^{-1/2}(I+a\widetilde{A}^{-1})^{-1} & \mathcal{I}\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix}(\widetilde{A}+a)^{-1} - (I+a\widetilde{A}^{-1})^{-1}\widetilde{A}^{-1/2}\mathcal{Q}^*\mathcal{D}^{-1}\mathcal{Q}\widetilde{A}^{-1/2}(I+a\widetilde{A}^{-1})^{-1} & -(I+a\widetilde{A}^{-1})^{-1}\widetilde{A}^{-1/2}\mathcal{Q}^*\mathcal{D}^{-1} \\ \mathcal{D}^{-1}\mathcal{Q}\widetilde{A}^{-1/2}(I+a\widetilde{A}^{-1})^{-1} & \mathcal{D}^{-1}(a)\end{pmatrix} = \\ &=: \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & \mathcal{D}^{-1}(a)\end{pmatrix}, \quad A_{11},\, A_{12},\, A_{21} \in \mathfrak{S}_\infty.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Оператор $(\mathcal{A}+a)^{-1}$ — $\mathcal{J}$-самосопряженный и ограниченный, следовательно, спектр оператора $\mathcal{A}+a$ симметричен относительно действительной оси (этот же факт следует и из самосопряженности пучка $L(\lambda)$). Теорема будет доказана полностью, если оператор $(\mathcal{A}+a)^{-1}$ имеет не более конечного количества невещественных собственных значений. Последнее, в свою очередь, будет верно, если $(\mathcal{A}+a)^{-1} \in (H)$ (см. в [1, гл. 3, § 5, следствие 5.21] условия принадлежности оператора $(\mathcal{A}+a)^{-1}$ классу Хелтона). В самом деле, из компактности оператора $\widetilde{A}^{-1/2}$ следует, что $\mathcal{P}_+(\mathcal{A}+a)^{-1}\mathcal{P}_-$ компактен, а значит (см. [1, гл. 4, § 3, теорема 3.7]) оператор $(\mathcal{A}+a)^{-1}$ имеет дуальную инвариантную пару $\{L_+((\mathcal{A}+a)^{-1}), L_-((\mathcal{A}+a)^{-1})\}$. Пусть K_+ — угловой оператор инвариантного неотрицательного подпространства $L_+((\mathcal{A}+a)^{-1})$, тогда $K_+ : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$, $\|K_+\| \leqslant 1$ и $L_+((\mathcal{A}+a)^{-1}) = \big\{(u;w)^\tau \in \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- : (u;w)^\tau = (u;K_+u)^\tau,\ u \in \mathcal{H}_+\big\}$.

Пусть $(u_1;w_1)^\tau = (u_1;K_+u_1)^\tau \in L_+((\mathcal{A}+a)^{-1})$, тогда $(\mathcal{A}+a)^{-1}(u_1;K_+u_1)^\tau = (u_2;K_+u_2)^\tau$. Отсюда и из (4.14) следует уравнение для определения углового оператора K_+:

$$\mathcal{D}^{-1}K_+ = -A_{21} + K_+A_{11} + K_+A_{12}K_+. \tag{4.15}$$

Отсюда и из $A_{11}, A_{12}, A_{21} \in \mathfrak{S}_\infty$ следует, что $K_+ \in \mathfrak{S}_\infty$.

2. Покажем, что $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \subset \sigma_{ess}(L(\lambda))$. Пусть $\lambda \notin \sigma_{ess}(L(\lambda))$. Тогда из теоремы о произведении фредгольмовых операторов (см. [20, гл. 17, § 3, теорема 3.1]) и (2.27) найдем, что оператор

$$\begin{aligned}\mathcal{A}-\lambda &= \begin{pmatrix}\widetilde{A}^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\widetilde{\lambda}A^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{A}^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix}\widetilde{A}^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{G}-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{A}^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

фредгольмов. Следовательно, $\lambda \notin \sigma_{ess}(\mathcal{A})$, и для существенного спектра оператора $\mathcal{A}$ получаем включение $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \subset \sigma_{ess}(L(\lambda))$.

Выясним расположение множества $\sigma_{ess}(L(\lambda))$ на $\mathbb{R}_+$. Из $\widetilde{A}^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$, леммы 2.3 и из теоремы о сохранении существенного спектра при относительно компактных возмущениях (см. [3, гл. 4, § 5, п. 6, теорема 5.35]) следует, что $\sigma_{ess}(L(\lambda)) = \sigma_{ess}(L_0(\lambda))$, где $L_0(\lambda) := I + \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha(\beta-\lambda)^{-1}\widetilde{A}^{-1/2} = I + (A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2})^*(\beta-\lambda)^{-1}(A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2})$ (см. лемму 2.2). Очевидно, что оператор $L_0(\lambda)$ непрерывно обратим при $\lambda < 0$. Из теоремы Неймана об обращении оператора, близкого к единичному, и оценки

$$\|(A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2})^*(\beta-\lambda)^{-1}(A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2})\|_{\mathcal{L}(L_2(\Omega))} \leqslant \frac{\|A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}\|^2}{\lambda - \max\{\beta_1,\beta_2\}},\ \lambda > \max\{\beta_1,\beta_2\},$$

следует также, что оператор $L_0(\lambda)$ непрерывно обратим при $\lambda > \max\{\beta_1,\beta_2\} + \|A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}\|^2$.

Таким образом, $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \subset \sigma_{ess}(L(\lambda)) \subset \big[0, \max\{\beta_1, \beta_2\} + \|A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}\|^2\big]$.

Множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ является связным, а оператор $\mathcal{A}$ имеет регулярные точки (см. лемму 2.4). Отсюда и из теоремы об устойчивости индекса и дефекта замкнутого оператора (см. [20, гл. 17, § 2, теорема 2.1], а также [3, гл. 4, § 5, п. 2, теорема 5.17]) следует, что множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$.

3. Пусть λ_0 — невещественное собственное значение оператора $\mathcal{A}$, тогда λ_0 — собственное значение оператора $L(\lambda_0)$ (см. теорему 4.1), отвечающее некоторому собственному элементу $z_0 \in L_2(\Omega)$. Очевидно, что λ_0 будет корнем уравнения $\|z_0\|^{-2}\big(L(\lambda)z_0, z_0\big) = 0$, которое после ряда простых преобразований записывается следующим образом:

$$1 - \lambda p - \frac{1}{\lambda}\Big(q - \sum_{l=1}^{2}\frac{q_l}{\beta_l - \lambda}\Big) = 0, \tag{4.16}$$

$$p := \frac{\|\widetilde{A}^{-1/2}z_0\|^2}{\|z_0\|^2} > 0, \quad q := \frac{g(\rho_1-\rho_2)\|\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}z_0\|^2 + \|A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}z_0\|^2}{\|z_0\|^2} \geqslant 0,$$
$$q_l := \beta_l\frac{\|P_{jl}A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}z_0\|^2}{\|z_0\|^2} \geqslant 0 \quad (l=1,2).$$

Напомним, что здесь P_{jl} $(l=1,2)$ — ортопроекторы, действующие в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$. Точнее, если $z = (z_1; z_2) \in L_2(\Omega)$, то $P_{j1}z := (z_1; 0)$, $P_{j2}z := (0; z_2)$.

В последующих вычислениях будем считать для определенности, что $\beta_1 < \beta_2$. Случай $\beta_1 = \beta_2$ также укладывается в последующие вычисления после введения соответствующих обозначений.

Перепишем уравнение (4.16) в следующей форме:

$$0 = (\lambda - \lambda^2 p - q)\prod_{l=1}^{2}(\beta_l - \lambda) + \sum_{l=1}^{2} q_l \prod_{k\neq l}^{2}(\beta_k - \lambda) = -p\lambda^4 + \lambda^3\Big[1 + p\sum_{l=1}^{2}\beta_l\Big] - \lambda^2\Big[q + \sum_{l=1}^{2}\beta_l + p\beta_1\beta_2\Big] + \ldots \tag{4.17}$$

Уравнение (4.16) имеет два действительных корня, которые мы обозначим через λ_l $(l=1,2)$ $(\lambda_1 \in (0,\beta_1),\ \lambda_2 \in (\beta_1,\beta_2))$, и еще два корня: λ_0 и $\overline{\lambda_0}$. Обозначим $\xi_0 := \mathrm{Re}\lambda_0$, $\eta_0 := \mathrm{Im}\lambda_0$, тогда

$$0 = -p\prod_{l=1}^{2}(\lambda_l - \lambda)\big((\lambda-\xi_0)^2 + \eta_0^2\big) = -p\lambda^4 + \lambda^3 p\Big[2\xi_0 + \sum_{l=1}^{2}\lambda_l\Big] - \lambda^2 p\Big[(\xi_0^2+\eta_0^2) + 2\xi_0\sum_{l=1}^{2}\lambda_l + \lambda_1\lambda_2\Big] + \ldots \tag{4.18}$$

Приравнивая коэффициенты при λ^3 и λ^2 из (4.17) и (4.18), получим

$$2\xi_0 + \sum_{l=1}^{2}\lambda_l = \frac{1}{p} + \sum_{l=1}^{2}\beta_l, \tag{4.19}$$

$$(\xi_0^2+\eta_0^2) + 2\xi_0\sum_{l=1}^{2}\lambda_l + \lambda_1\lambda_2 = \frac{q}{p} + \frac{1}{p}\sum_{l=1}^{2}\beta_l + \beta_1\beta_2. \tag{4.20}$$

Из (4.19) следует оценка снизу $2\mathrm{Re}\lambda_0 = 2\xi_0 = p^{-1} + \sum_{l=1}^{2}(\beta_l - \lambda_l) > p^{-1} \geqslant \|\widetilde{A}^{-1/2}\|^{-2}$.

Далее мы следуем идеям из [22, гл. 11, § 5, п. 11.5.2(2)]. Введем обозначения $\delta := 2^{-1}\sum_{l=1}^{2}(\beta_l - \lambda_l)$, $\omega := (2p)^{-1}$, тогда $\xi_0 = \omega + \delta$ (см. (4.19)). Выразим из (4.19) $\sum_{l=1}^{2}\lambda_l$ и подставим его в (4.20). После ряда преобразований получим

$$\eta_0^2 + 2\delta\sum_{l=1}^{2}\lambda_l - (\beta_1\beta_2 - \lambda_1\lambda_2) = -\omega^2 + 2\omega(\delta + q) - \delta^2. \tag{4.21}$$

Из условий $\lambda_1 \in (0,\beta_1)$, $\lambda_2 \in (\beta_1,\beta_2)$ можно вывести следующую оценку (см. [22, гл. 11, §5, п. 11.5.2, формула (5.24)]):

$$(\beta_1\beta_2 - \lambda_1\lambda_2) < \sum_{l=1}^{2}(\beta_l - \lambda_l)\Big(\sum_{l=1}^{2}\lambda_l\Big) = 2\delta\sum_{l=1}^{2}\lambda_l. \tag{4.22}$$

Из (4.22) следует положительность правой части в (4.21), следовательно, $\omega < \delta+q+(2\delta q+q^2)^{1/2}$. Отсюда $\mathrm{Re}\lambda_0 = \xi_0 < 2\delta+q+(2\delta q+q^2)^{1/2} \leqslant \widetilde{b}+\widetilde{q}+\widetilde{q}^{1/2}\big[\widetilde{b}+\widetilde{q}\big]^{1/2}$, и оценка сверху на $\mathrm{Re}\lambda_0$ получена.

Из оценки на $\mathrm{Re}\lambda_0$ выводится условие (4.13), достаточное для отсутствия невещественного собственного значения λ_0.

Далее, выразим из (4.20) $(\xi_0^2+\eta_0^2) = |\lambda_0|^2$ и преобразуем его с помощью (4.19). С использованием оценки (4.22) получим, что $|\lambda_0|^2 < 2\omega(q+4\delta)$. После простых оценок отсюда следует неравенство для $|\lambda_0|^2$. $\square$

Замечание 4.2. Из (4.14)-(4.15) следует, что $K_+ \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 2q$, если $\widetilde{A}^{-1} \in \mathfrak{S}_q(L_2(\Omega))$.

Следствием общих теорем А. С. Маркуса и В. И. Мацаева из [11,12] является следующее условное утверждение.

Теорема 4.3. *Справедливы утверждения*:

1. *Если собственные значения оператора $\widetilde{A}$ имеет степенную асимптотику, то спектр оператора $\mathcal{A}$ имеет ветвь собственных значений $\{\lambda_k^{(+\infty)}(\mathcal{A})\}_{k=1}^{+\infty}$ со следующей асимптотикой*:
$$\lambda_k^{(+\infty)}(\mathcal{A}) = \lambda_k(\widetilde{A})(1+o(1)), \quad k \to +\infty. \tag{4.23}$$
2. *Если оператор $B := g(\rho_1-\rho_2)\big(I+T^*\alpha\beta^{-1}T\big)^{-1/2}(\widetilde{A}^{1/2}V)(\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2})\big(I+T^*\alpha\beta^{-1}T\big)^{-1/2}$, где $T := A^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2} \in \mathcal{L}(L_2(\Omega))$ (см. лемму 2.2), имеет степенную асимптотику собственных значений, то спектр оператора $\mathcal{A}$ имеет ветвь собственных значений $\{\lambda_k^{(0)}(\mathcal{A})\}_{k=1}^{+\infty}$ со следующей асимптотикой*:
$$\lambda_k^{(0)}(\mathcal{A}) = \lambda_k(B)(1+o(1)), \quad k \to +\infty. \tag{4.24}$$

Доказательство. Пучок $L(\lambda)$ (см. (4.2)) может быть записан в виде $L(\lambda) = I - \lambda\widetilde{A}^{-1} + F_1(\lambda)$, где $F_1(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Отсюда и из условий на оператор $\widetilde{A}$ следует формула (4.23).

Осуществим в спектральной задаче (4.2) замену спектрального параметра $\mu := \lambda^{-1}$. Получим

$$\begin{aligned}
L(\mu^{-1})z &:= \Big[I - \mu g(\rho_1-\rho_2)(\widetilde{A}^{1/2}V)(\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}) - \mu^{-1}\widetilde{A}^{-1} + \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha(\beta-\mu^{-1})^{-1}\widetilde{A}^{-1/2}\Big]z = \\
&= \Big[I - \mu g(\rho_1-\rho_2)(\widetilde{A}^{1/2}V)(\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}) - \mu^{-1}\widetilde{A}^{-1} + \widetilde{A}^{1/2}P_1\big[\alpha\beta^{-1} + \alpha\beta^{-1}(\mu\beta-1)^{-1}\big]\widetilde{A}^{-1/2}\Big]z = \\
&= \Big[\big(I+T^*\alpha\beta^{-1}T\big) - \mu g(\rho_1-\rho_2)(\widetilde{A}^{1/2}V)(\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}) - \mu^{-1}\widetilde{A}^{-1} + \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha\beta^{-1}(\mu\beta-1)^{-1}\widetilde{A}^{-1/2}\Big]z = \\
&= \big(I+T^*\alpha\beta^{-1}T\big)^{1/2}\Big[I - \mu B + F_2(\mu)\Big]\big(I+T^*\alpha\beta^{-1}T\big)^{1/2}z = 0,
\end{aligned}$$

где $F_2(\mu) \to 0$ при $\mu \to \infty$. Отсюда и из условий на оператор $\widetilde{A}$ следует формула (4.24). $\square$

Замечание 4.3. Как следует из доказательства п. 2 в теореме 4.2, имеет место равенство $\sigma_{ess}(L(\lambda)) = \sigma_{ess}(L_0(\lambda))$, где $L_0(\lambda) := I + \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha(\beta-\lambda)^{-1}\widetilde{A}^{-1/2} = \widetilde{A}^{1/2}P_1\big(I+\alpha(\beta-\lambda)^{-1}\big)\widetilde{A}^{-1/2}$. По теореме о произведении фредгольмовых операторов (см. [20, гл. 17, § 3, теорема 3.1]), оператор $L_0(\lambda)$ фредгольмов в $L_2(\Omega)$ тогда и только тогда, когда оператор $P_1\big(I+\alpha(\beta-\lambda)^{-1}\big)$ фредгольмов в $\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$. Из леммы 1.2, с использованием обозначений из (2.14) и (3.2), получим, что для любого $(u_1;u_2) \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ имеет место представление

$$\begin{aligned}
P_1\big(I+\alpha(\beta-\lambda)^{-1}\big)(u_1;u_2) = \Big\{&\Big(\frac{m_1(\lambda)}{\mu_1} - \frac{\mu_1^{-1}m_1(\lambda) - \mu_2^{-1}m_2(\lambda)}{\mu_1}\,V_1\big(\mu_1^{-1}C_1+\mu_2^{-1}C_2\big)^{-1}\gamma_1\Big)u_1; \\
&\Big(\frac{m_2(\lambda)}{\mu_2} + \frac{\mu_1^{-1}m_1(\lambda) - \mu_2^{-1}m_2(\lambda)}{\mu_2}\,V_2\big(\mu_1^{-1}C_1+\mu_2^{-1}C_2\big)^{-1}\gamma_2\Big)u_2\Big\}.
\end{aligned}$$

Из этого представления видно, что если $\lambda = \alpha_1 + \beta_1$, т. е. $m_1(\lambda) = 0$, то рассматриваемый оператор не является фредгольмовым. Действительно, в этом случае ядро оператора содержит элементы вида $(u_1; 0)$, где $u_1 \in \operatorname{Ker} \gamma_1 = H_0^1(\Omega_1)$, а значит, бесконечномерно. Аналогично с точкой $\lambda = \alpha_2 + \beta_2$. Таким образом, $\{\alpha_l + \beta_l,\ l = 1, 2\} \subset \sigma_{ess}(L(\lambda))$. Опираясь на последнее представление, можно предположить также, что рассматриваемый оператор не является фредгольмовым в точках, в которых $m_1(\lambda) + m_2(\lambda) = 0$. Причиной этого является то обстоятельство, что, вероятно, оператор $C_1 - C_2$ нефредгольмов как действующий из $H_\Gamma^{-1/2}$ в $\widetilde{H}_\Gamma^{1/2}$.

4.3. Теорема о базисности системы корневых элементов оператора $\mathcal{A}$. В этом пункте будем предполагать, основываясь на результатах для спектральной задачи в прямоугольной области, что спектр оператора $\mathcal{A}$ имеет не более, чем счетное множество точек сгущения.

Определение 4.4. Назовем систему $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ *базисом Рисса* пространства $\mathcal{H}$, если $\xi_k = \mathcal{T}\zeta_k$, где $\mathcal{T}, \mathcal{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, а $\{\zeta_k\}_{k=1}^\infty$ — ортонормированный базис пространства $\mathcal{H}$. Если $\mathcal{T} = \mathcal{I} + \mathcal{K}$, где $\mathcal{K} \in \mathfrak{S}_p$, то система $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ называется *p-базисом* $\mathcal{H}$.

Определение 4.5. Назовем базис $\mathcal{J}$-пространства $\mathcal{H}$ *почти $\mathcal{J}$-ортонормированным*, если его можно представить как объединение конечного подмножества элементов и $\mathcal{J}$-ортонормированного подмножества, причем эти подмножества $\mathcal{J}$-ортогональны друг другу.

Обозначим через $\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A})$ корневой линеал оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению λ $(\lambda \in \sigma_p(\mathcal{A}))$. Введем также следующие обозначения: $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) := \overline{\operatorname{sp}\{\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A}) |\ \lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})\}}$, $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) := \overline{\operatorname{sp}\{\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda) |\ \lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})\}}$. Будем писать $\lambda \in s(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}$, если $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ вырождено, т. е. если существует $\xi_0 \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ такое, что $[\xi_0, \xi] = 0$ для любого $\xi \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$.

Основываясь на теореме Азизова—Лангера (см. [1, гл. 4, § 2, теорема 2.12]), установим следующую теорему в предположении, что спектр оператора $\mathcal{A}$ не более, чем счетен.

Теорема 4.4. *Имеют место следующие утверждения*:

1. $\operatorname{codim} \mathfrak{F}(\mathcal{A}) \leqslant \operatorname{codim} \mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) < \infty$.
2. $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) = \mathcal{H} \iff \operatorname{sp}\{\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A}) | \lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{A}) \cap (\gamma_1, \gamma_2)\}$ — *невырожденное подпространство, где* γ_1, γ_2 — *числа, определенные в п.* 3 *теоремы* 4.2 (*см.* (4.12)).
3. $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H} \iff \mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A}) = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ *при* $\lambda \neq \overline{\lambda}$ *и* $s(\mathcal{A}) = \varnothing$. *Если* $\gamma_2 \leqslant \gamma_1$, *то* $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$.
4. *Если* $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$ (*соответственно,* $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$), *то в* $\mathcal{H}$ *существует почти $\mathcal{J}$-ортонормированный базис Рисса, составленный из собственных* (*соответственно, корневых*) *элементов оператора* $\mathcal{A}$. *Если* $\widetilde{A}^{-1} \in \mathfrak{S}_q(L_2(\Omega))$, *то эти базисы будут p-базисами при* $p > 2q$. *Если* $\gamma_2 \leqslant \gamma_1$, *то данный базис из собственных элементов будет $\mathcal{J}$-ортонормированным.*

Доказательство. В теореме 4.2 установлено, что $(\mathcal{A} + a)^{-1} \in (H)$. По предположению спектр оператора $(\mathcal{A} + a)^{-1}$ имеет не более, чем счетное множество точек сгущения. Таким образом, оператор $(\mathcal{A} + a)^{-1}$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Азизова—Лангера. Применим эту теорему к оператору $(\mathcal{A} + a)^{-1}$.

1. Из равенств $\mathfrak{F}(\mathcal{A}+a) = \mathfrak{F}((\mathcal{A}+a)^{-1})$, $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}+a) = \mathfrak{F}_0((\mathcal{A}+a)^{-1})$ следует первое утверждение.

2. $\mathfrak{F}((\mathcal{A} + a)^{-1}) = \mathcal{H} \iff \operatorname{sp}\{\mathfrak{L}_{\lambda^{-1}}((\mathcal{A}+a)^{-1}) | \lambda^{-1} \in s((\mathcal{A}+a)^{-1})\}$ — невырожденное подпространство. Из [1, гл. 4, § 3, замечание 3.8] следует, что при доказательстве равенства $\mathfrak{F}((\mathcal{A} + a)^{-1}) = \mathcal{H}$ невырожденность $\mathfrak{L}_{\lambda^{-1}}((\mathcal{A} + a)^{-1})$ нужно проверять только для тех $\lambda^{-1} \in s((\mathcal{A}+a)^{-1})$, которые являются точками сгущения спектра оператора $(\mathcal{A}+a)^{-1}$. Из равенства $\mathfrak{L}_{\lambda^{-1}}((\mathcal{A} + a)^{-1}) = \mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A} + a)$ следует, что нужно проверять невырожденность $\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A})$ для $\lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{A}) \cap s(\mathcal{A})$.

Выясним расположение множества $s(\mathcal{A})$. Пусть $\lambda_0 = \overline{\lambda}_0 \in \sigma_p(\mathcal{A})$, $\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{G}) = \{0, \beta_1, \beta_2\}$ и $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_0)$ вырождено. В силу теоремы 4.1 это эквивалентно тому, что в $\operatorname{Ker} L(\lambda_0)$ существует такой z_0, что элемент $\xi_0 = (\widetilde{A}^{-1/2} z_0; (\mathcal{G} - \lambda_0)^{-1} \mathcal{Q} z_0)^\tau$ $\mathcal{J}$-ортогонален всем элементам вида $\xi = (\widetilde{A}^{-1/2} z; (\mathcal{G} - \lambda_0)^{-1} \mathcal{Q} z)^\tau$, где $z \in \operatorname{Ker} L(\lambda_0)$, т. е. $[\xi_0, \xi] = 0$. Используя введенные ранее обозначения, последнее уравнение можно привести к виду $\big(L'(\lambda_0) z_0, z\big) = 0$. В частности, имеем два соотношения: $\big(L(\lambda_0) z_0, z_0\big) = 0$, $\big(L'(\lambda_0) z_0, z_0\big) = 0$. Из этих соотношений следует, что λ_0 есть кратный корень уравнения (4.16). Уравнение (4.16) имеет два действительных корня, которые мы обозначим через λ_l $(l = 1, 2)$ $(\lambda_1 \in (0, \beta_1),\ \lambda_2 \in (\beta_1, \beta_2)$ — здесь мы снова считаем для определенности, что $\beta_1 < \beta_2)$, и действительный двукратный корень λ_0. Положим $\xi_0 := \lambda_0$, $\eta_0 := 0$ и повторим рассуждения п. 3 теоремы 4.2. В результате получим, что $\lambda_0 \in (\gamma_1, \gamma_2)$ (см. (4.12)).

Положим $\lambda_0 = 0$ и предположим, что $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ вырождено, т. е. существует такое $\xi_0 \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$, что $[\xi_0, \xi] = 0$ для любого $\xi \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$. В частности, $[\xi_0, \xi_0] = 0$. Тогда (см. (2.16))

$$\begin{cases} \widetilde{A}^{1/2}\Big[\widetilde{A}^{1/2}u_0 + \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\psi_0 + \big(g(\rho_1-\rho_2)\big)^{1/2}\widetilde{A}^{-1/2}V\eta_0\Big] = 0, \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}\big(\widetilde{A}^{1/2}u_0\big) + \beta\psi_0 = 0, \\ -\big(g(\rho_1-\rho_2)\big)^{1/2}\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}\big(\widetilde{A}^{1/2}u_0\big) = 0, \end{cases}$$

$$[\xi_0, \xi_0] = \|u_0\|^2 - \|\psi_0\|^2 - \|\eta_0\|^2 = 0.$$

Умножим первое уравнение системы скалярно на u_0 и преобразуем его с помощью оставшихся соотношений. Получим

$$\|\widetilde{A}^{1/2}u_0\|^2 + \big(\beta\psi_0, \psi_0\big) = 0, \quad \|u_0\|^2 - \|\psi_0\|^2 = \|\eta_0\|^2.$$

Отсюда следует, что $\xi_0 = 0$ и, значит, $0 \notin s(\mathcal{A})$.

Пусть $\beta_q \notin (\gamma_1, \gamma_2)$, тогда $\beta_q \leqslant \gamma_1$, поскольку $\beta_q \leqslant \max\{\beta_1, \beta_2\} < \gamma_2$. Допустим, что $\beta_q \leqslant \gamma_1$ и $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \beta_q)$ вырождено, т. е. существует такое $\xi_0 \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \beta_q)$, что $[\xi_0, \xi] = 0$ для любого $\xi \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \beta_q)$. В частности, $[\xi_0, \xi_0] = 0$. Тогда

$$\begin{cases} \widetilde{A}^{1/2}\Big[\widetilde{A}^{1/2}u_0 + \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\psi_0 + \big(g(\rho_1-\rho_2)\big)^{1/2}\widetilde{A}^{-1/2}V\eta_0\Big] = \beta_q u_0, \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}\big(\widetilde{A}^{1/2}u_0\big) + \beta\psi_0 = \beta_q\psi_0, \\ -\big(g(\rho_1-\rho_2)\big)^{1/2}\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}\big(\widetilde{A}^{1/2}u_0\big) = \beta_q\eta_0, \end{cases}$$

$$[\xi_0, \xi_0] = \|u_0\|^2 - \|\psi_0\|^2 - \|\eta_0\|^2 = 0.$$

Умножим здесь первое уравнение скалярно на u_0 и преобразуем его с помощью оставшихся соотношений. Получим

$$\|\widetilde{A}^{1/2}u_0\|^2 + \big(\beta\psi_0, \psi_0\big) - 2\beta_q\|u_0\|^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $\|z_0\|^2 < 2\beta_q\|\widetilde{A}^{-1/2}z_0\|^2$, где $z_0 := \widetilde{A}^{1/2}u_0$, а значит $\beta_q > (2\|\widetilde{A}^{-1/2}\|)^{-2} = \gamma_1$ (см. (2.16)), что противоречит предположению $\beta_q \leqslant \gamma_1$.

Таким образом, $s(\mathcal{A}) \subset (\gamma_1, \gamma_2)$, и второе утверждение доказано.

3. Первая часть третьего утверждения — это переформулировка соответствующего утверждения используемой теоремы Азизова—Лангера. Если $\gamma_2 \leqslant \gamma_1$, то $s(\mathcal{A}) = \varnothing$, и оператор $\mathcal{A}$ не имеет невещественных собственных значений (см. (4.12)). Следовательно, $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$.

4. Первая часть четвертого утверждения — это переформулировка соответствующего утверждения используемой теоремы. Если $\widetilde{A}^{-1} \in \mathfrak{S}_q(L_2(\Omega))$, то $K_+ \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 2q$ (см. замечание 4.2), и указанные базисы будут p-базисами при $p > 2q$. Наконец, если $\gamma_2 \leqslant \gamma_1$, то, как отмечено выше, оператор $\mathcal{A}$ не имеет невещественных собственных значений, и соответствующий p-базис при $p > 2q$ в $\mathcal{H}$, составленный из собственных элементов оператора $\mathcal{A}$, будет $\mathcal{J}$-ортонормированным. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.
2. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Выща школа, 1989.
3. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
4. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения. — Симферополь: ООО «Форма», 2016.
5. *Копачевский Н. Д.* К проблеме малых движений системы из двух вязкоупругих жидкостей в неподвижном сосуде// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2018. — *64*, № 3. — С. 547–572.
6. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
7. *Крейн С. Г.* О колебаниях вязкой жидкости в сосуде// Докл. АН СССР. — 1964. — *159*, № 2. — С. 262–265.
8. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
9. *Крейн С. Г., Лаптев Г. И.* К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде// Функц. анализ и его прилож. — 1968. — *2*, № 1. — С. 40–50.
10. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: «Штиинца», 1986.

11. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Теоремы о сравнении спектров линейных операторов и спектральные асимптотики// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1982. — *45.* — С. 133–181.
12. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Теорема о сравнении спектров и спектральная асимптотика для пучка М. В. Келдыша// Мат. сб. — 1984. — *123*, № 3. — С. 391–406.
13. *Милославский А. И.* Спектральный анализ малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом контейнере. — Киев: Ин-т мат. НАН Украины, 1989. — Деп. рукопись № 1221.
14. *Милославский А. И.* Спектр малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом сосуде// Усп. мат. наук. — 1989. — *44*, № 4.
15. *Милославский А. И.* Спектр малых колебаний вязкоупругой наследственной среды// Докл. АН СССР. — 1989. — *309*, № 3. — С. 532–536.
16. *Azizov T. Ya., Kopachevskii N. D., Orlova L. D.* Evolution and spectral problems related to small motions of viscoelastic fluid// Am. Math. Soc. Transl. — 2000. — *199.* — C. 1–24.
17. *Birman M. Sh., Solomyak M. Z.* Asymptotic behavior of the spectrum of differential equations// J. Soviet Math. — 1979. — *12*, № 3. — С. 247–283.
18. *Engel K.-J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. — New York: Springer-Verlag, 2000.
19. *Gagliardo E.* Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1957. — *27.* — С. 284–305.
20. *Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M. A.* Classes of Linear Operators. Vol. 1. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1990.
21. *Helton J. W.* Unitary operators on a space with an indefinite inner product// J. Funct. Anal. — 1970. — *6*, № 3. — С. 412–440.
22. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-Adjoint Problems for Viscous Fluids. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2003.
23. *Miloslavsky A. I.* Stability of certain classes of evolution equations// Sib. Math. J. — 1985. — *26*, № 5. — С. 723–735.
24. *Miloslavskii A. I.* Stability of a viscoelastic isotropic medium// Soviet Phys. Dokl. — 1988. — *33.* — С. 300.

Д. А. Закора
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия
E-mail: dmitry.zkr@gmail.com

Н. Д. Копачевский
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия
E-mail: kopachevsky@list.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-182-208 UDC 517.958

To the Problem on Small Oscillations of a System of Two Viscoelastic Fluids Filling Immovable Vessel: Model Problem

© 2020 **D. A. Zakora,** $\boxed{\textbf{N. D. Kopachevsky}}$

Abstract. In this paper, we study the scalar conjugation problem, which models the problem of small oscillations of two viscoelastic fluids filling a fixed vessel. An initial-boundary value problem is investigated and a theorem on its unique solvability on the positive semiaxis is proven with semigroup theory methods. The spectral problem that arises in this case for normal oscillations of the system is studied by the methods of the spectral theory of operator functions (operator pencils). The resulting operator pencil generalizes both the well-known S. G. Kreyn's operator pencil (oscillations of a viscous fluid in an open vessel) and the pencil arising in the problem of small motions of a viscoelastic fluid in a partially filled vessel. An example of a two-dimensional problem allowing separation of variables is considered, all points of the essential spectrum and branches of eigenvalues are found. Based on this two-dimensional problem, a hypothesis on the structure of the essential spectrum in the scalar conjugation problem is formulated and a theorem on the multiple basis property of the system of root elements of the main operator pencil is proved.

REFERENCES

1. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Osnovy teorii lineynykh operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy* [Fundamentals of the Theory of Linear Operators in Spaces with Indefinite Metric], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
2. J. Goldstein, *Polugruppy lineynykh operatorov i ikh prilozheniya* [Semigroups of Linear Operators and Applications], Vyshcha shkola, Kiev, 1989 (Russian translation).
3. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
4. N. D. Kopachevsky, *Abstraktnaya formula Grina i nekotorye ee prilozheniya* [Abstract Green's Formula and Applications], OOO «Forma», Simferopol', 2016 (in Russian).
5. N. D. Kopachevsky, "K probleme malykh dvizheniy sistemy iz dvukh vyazkouprugikh zhidkostey v nepodvizhnom sosude" [To the problem on small motions of the system of two viscoelastic fluids in a fixed vessel], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2018, **64**, No. 3, 547–572 (in Russian).
6. N. D. Kopachevsky, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike. Evolyutsionnye i spektral'nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamic. Evolutional and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
7. C. G. Kreyn, "O kolebaniyakh vyazkoy zhidkosti v sosude" [On oscillations of a viscous fluid in a vessel], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1964, **159**, No. 2, 262–265 (in Russian).
8. C. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in a Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
9. C. G. Kreyn and G. I. Laptev, "K zadache o dvizhenii vyazkoy zhidkosti v otkrytom sosude" [To the problem on motion of a viscous liquid in an open vessel], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1968, **2**, No. 1, 40–50 (in Russian).
10. A. S. Markus, *Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu polinomial'nykh operatornykh puchkov* [Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils], «Shtiintsa», Kishinev, 1986 (in Russian).
11. A. S. Markus and V. I. Matsaev, "Teoremy o sravnenii spektrov lineynykh operatorov i spektral'nye asimptotiki" [Comparison theorems for spectra of linear operators and spectral asymptotics], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1982, **45**, 133–181 (in Russian).

12. A. S. Markus and V. I. Matsaev, “Teorema o sravnenii spektrov i spektral’naya asimptotika dlya puchka M. V. Keldysha” [Theorem on spectra comparison and spectral asymptotics for the Keldysh pencil], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1984, **123**, No. 3, 391–406 (in Russian).
13. A. I. Miloslavskiy, “Spektral’nyy analiz malykh kolebaniy vyazkouprugoy zhidkosti v otkrytom konteynere” [Spectral analysis of small oscillations of viscoelastic fluid in open container], Univ. Math. NAS Ukraine, Kiev, 1989, Preprint No. 1221 (in Russian).
14. A. I. Miloslavskiy, “Spektr malykh kolebaniy vyazkouprugoy zhidkosti v otkrytom sosude” [Spectrum of small oscillation of viscoelastic fluid in open vessel], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1989, **44**, No. 4 (in Russian).
15. A. I. Miloslavskiy, “Spektr malykh kolebaniy vyazkouprugoy nasledstvennoy sredy” [Spectrum of small oscillations of viscoelastic inheritance medium], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1989, **309**, No. 3, 532–536 (in Russian).
16. T. Ya. Azizov, N. D. Kopachevskii, and L. D. Orlova, “Evolution and spectral problems related to small motions of viscoelastic fluid,” *Am. Math. Soc. Transl.*, 2000, **199**, 1–24.
17. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, “Asymptotic behavior of the spectrum of differential equations,” *J. Soviet Math.*, 1979, **12**, No. 3, 247–283.
18. K.-J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer-Verlag, New York, 2000.
19. E. Gagliardo, “Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili,” *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1957, **27**, 284–305.
20. I. Gohberg, S. Goldberg, and M. A. Kaashoek, *Classes of Linear Operators. Vol. 1*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1990.
21. J. W. Helton, “Unitary operators on a space with an indefinite inner product,” *J. Funct. Anal.*, 1970, **6**, No. 3, 412–440.
22. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-Adjoint Problems for Viscous Fluids*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2003.
23. A. I. Miloslavsky, “Stability of certain classes of evolution equations,” *Sib. Math. J.*, 1985, **26**, No. 5, 723–735.
24. A. I. Miloslavskii, “Stability of a viscoelastic isotropic medium,” *Soviet Phys. Dokl.*, 1988, **33**, 300.

D. A. Zakora
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: dmitry.zkr@gmail.com

N. D. Kopachevsky
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: kopachevsky@list.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 66, № 2 (2020). С. 209–220

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-209-220 УДК 517.983.24, 517.984.4

ДИЛАТАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2020 г. **Ю. Л. КУДРЯШОВ**

Аннотация. В статье строятся различные дилатации линейных операторов. Рассматривается явное построение унитарной дилатации оператора сжатия. Затем с помощью понятия операторного узла линейного ограниченного оператора строится J-унитарная дилатация ограниченного оператора. Методом Б. С. Павлова строится самосопряженная дилатация ограниченного диссипативного оператора. Рассматривается спектральное и трансляционное представления самосопряженной дилатации плотно заданного диссипативного оператора с непустым множеством регулярных точек.

Используя понятие операторного узла для ограниченного оператора и преобразования Кэли, вводится понятие операторного узла для линейного оператора. С помощью этого понятия строится J-самосопряженная дилатация плотно заданного оператора, у которого есть регулярная точка.

Указаны условия изоморфизма посторонних дилатаций и их минимальности.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В последнее время изучение неунитарных и несамосопряженных операторов происходит по трем направлениям: теория рассеяния, метод характеристических функций и метод дилатаций. Все эти направления тесно связаны между собой.

Построение унитарных и самосопряженных дилатаций операторов общего вида позволяет получить информацию об этих операторах и свести их изучение к классам операторов, которые достаточно хорошо изучены.

В данном обзоре нас будут интересовать явные построения различных дилатаций линейных операторов. При этом за строгими доказательствами сформулированных теорем мы будем отсылать к соответствующим статьям. Доказательство, связанное с построением J-самосопряженной дилатации с помощью операторного узла, будет дано в конце обзора, причем все рассмотренные ранее дилатации будут частным случаем последней или ей изоморфны.

Определение 1.1. В случае ограниченных операторов, оператор B, действующий в гильбертовом пространстве H, называется *дилатацией* [14] оператора A, который действует в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H} \subset H$, если

$$A^n h = PB^n h \text{ для всех } n \in \mathbb{N} \text{ и } h \in \mathfrak{H}, \tag{1.1}$$

где P — оператор ортогонального проектирования в H на $\mathfrak{H}$. При этом условие (1.1) эквивалентно любому из следующих условий:

1) $(A^n h, g) = (B^n h, g)$ для всех $\{f, g\} \subset \mathfrak{H}$ и $n \in \mathbb{N}$;
2) $(A - \lambda I)^{-1} h = P(B - \lambda I)^{-1} h$ для всех $h \in \mathfrak{H}$ и $\lambda \in W(\lambda_0, \varepsilon) \subset \rho(A) \cap \rho(B)$, где $W(\lambda_0, \varepsilon)$ — ε-окрестность точки λ_0;
3) $R^n(A, \alpha) h = P R^n(B, \alpha) h$ для всех $h \in \mathfrak{H}$, $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \rho(A) \cap \rho(B)$, где $R(T, \alpha) = (T - \alpha I)^{-1}$.

Последние два условия имеют смысл и в случае неограниченных операторов, и, таким образом, любое из них можно принять в качестве определения дилатации произвольного линейного оператора A, у которого $\rho(A) \neq \varnothing$.

Определение 1.2. Дилатации B_1 и B_2 оператора A, действующие соответственно в пространствах H_1 и H_2, называются *изоморфными*, если существует унитарное отображение U пространства H_1 на H_2 такое, что: 1) $Uh = h\,(\forall h \in \mathfrak{H})$, 2) $B_2 = U B_1 U^{-1}$.

2. Унитарная дилатация оператора сжатия

Унитарная дилатация сжатия впервые была построена в работах Б. С. Надя и довольно полно изучена в работах Б. С. Надя, Ч. Фояша [14] и других авторов.

Обозначим множество линейных ограниченных операторов, действующих из всего гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2, через $[H_1, H_2]$; если $H_1 = H_2$, то $[H_1]$.

Рассмотрим сжатие $T \in [\mathfrak{H}]$, т. е. $\|T\| \leqslant 1$, и его дефектные операторы $D = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$, $D_* = (I - TT^*)^{\frac{1}{2}}$.

Образуем гильбертово пространство $H = \bigoplus\limits_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{H}_n$ элементов вида $h = \left(\ldots, h_{-2}, h_{-1}, \boxed{h_0}, h_1, h_2, \ldots\right)$, где $h_0 \in \mathfrak{H}$, $h_n \in \overline{D\mathfrak{H}}$, $h_{-n} \in \overline{D_*\mathfrak{H}}$, $n \in \mathbb{N}$ (рамка означает, что элемент стоит на нулевом месте), $\|h\|_H^2 = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \|h_n\|^2 < \infty$.

Вложим $\mathfrak{H}$ в H, приняв, что $h_0 \equiv \left(\ldots, 0, 0, \boxed{h_0}, 0, 0, \ldots\right)$ и ортопроектор P на $\mathfrak{H}$ действует по формуле $P\left(\ldots, h_{-2}, h_{-1}, \boxed{h_0}, h_1, h_2, \ldots\right) = h_0$.

Зададим в H оператор U: $Uh = \left(\ldots, h_{-3}, h_{-2}, \boxed{Th_0 + D_* h_{-1}}, -T^* h_{-1} + D h_0, h_1, h_2, \ldots\right)$.

Теорема 2.1. *Оператор U является унитарной дилатацией сжатия T, причем минимальной в том смысле, что $H = \overline{\operatorname{span}\{U^n h | n \in \mathbb{Z}, h \in \mathfrak{H}\}}$. Эта минимальная дилатация определяется с точностью до изоморфизма.*

3. J-унитарная дилатация линейного ограниченного оператора

J-унитарную дилатацию построили Ч. Дэвис [16], Л. А. Сахнович [13], а затем А. В. Кужель [8], причем способы построения дилатаций у этих авторов были различны. Мы приведем дилатацию, построенную в [8].

Пусть $T \in [\mathfrak{H}]$,

$$\begin{gathered} D = |I - T^*T|^{\frac{1}{2}}, \quad D_* = |I - TT^*|^{\frac{1}{2}}, \\ \mathfrak{J} = \operatorname{sign}(I - T^*T), \quad \mathfrak{J}_* = \operatorname{sign}(I - TT^*). \end{gathered} \tag{3.1}$$

Как и в разделе 1, образуем гильбертово пространство $H = \bigoplus\limits_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{H}_n$, где $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_n = \overline{D\mathfrak{H}}$, $\mathfrak{H}_{-n} = \overline{D_*\mathfrak{H}}$, $n \in \mathbb{N}$. Построим в пространстве H оператор J: $Jh = \left(\ldots, \mathfrak{J}_* h_{-2}, \mathfrak{J}_* h_{-1}, \boxed{h_0}, \mathfrak{J} h_1, \mathfrak{J} h_2, \ldots\right)$, тогда $J^* = J = J^{-1}$. С помощью оператора J зададим в H новое скалярное произведение $[h, \widetilde{h}] = (Jh, \widetilde{h})_H$ и будем говорить в обычном смысле о J-метрике и J-унитарности. В пространстве H построим оператор U аналогично тому, как это делалось в п. 1, имея в виду, что оператор D и D_* определяются соотношениями (3.1).

Теорема 3.1. *Оператор U является J-унитарной дилатацией оператора T, причем минимальной, т. е. $H = \operatorname{span}\overline{\{U^n h | h \in \mathfrak{H}, n \in \mathbb{Z}\}}$.*

Теперь мы построим J-унитарную дилатацию с помощью понятия операторного узла, введенного в [18], а затем в [2], следующим образом.

Рассмотрим гильбертовы пространства $\mathfrak{H}$, E_-, E_+ и операторы $T \in [\mathfrak{H}]$, $\Phi \in [E_-, \mathfrak{H}]$, $\Psi \in [\mathfrak{H}, E_+]$, $K \in [E_-, E_+]$, $J_- \in [E_-]$, $J_+ \in [E_+]$, $J_\pm = J_\pm^* = J_\pm^{-1}$.

Определение 3.1. Совокупность перечисленных выше пространств и операторов называется *операторным узлом*, если выполняются равенства

$$\begin{aligned} T^*T + \Psi^* J_+ \Psi = I, \qquad T^*\Phi + \Psi^* J_+ K = 0, \qquad \Phi^*\Phi + K^* J_+ K = J_-, \\ TT^* + \Phi J_- \Phi^* = I, \qquad T\Psi^* + \Phi J_- K^* = 0, \qquad \Psi\Psi^* + K J_- K^* = J_+. \end{aligned}$$

С помощью понятия операторного узла в [18], а затем в [2], строится J-унитарная дилатация, а в [1] были проведены полные строгие доказательства.

Рассмотрим пространство $H = \bigoplus\limits_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{H}_n$, где $\mathfrak{H}_{\pm n} = E_\pm$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}$, и в H зададим оператор U:
$Uh = \Big(\dots, h_{-3}, h_{-2}, \boxed{Th_0 + \Phi h_{-1}}, \Psi h_0 + K h_{-1}, h_1, h_2, \dots\Big)$, где $h = \Big(\dots, h_{-2}, h_{-1}, \boxed{h_0}, h_1, h_2, \dots\Big)$.
Введем в H индефинитную метрику: $Jh = \Big(\dots, J_- h_{-2}, J_- h_{-1}, \boxed{h_0}, J_+ h_1, J_+ h_2, \dots\Big)$.

Теорема 3.2. *Оператор U является J-унитарной дилатацией оператора T, причем минимальной, т. е. $H = \overline{\operatorname{span}\{U^n \mathfrak{H} | n \in \mathbb{Z}\}}$, если $E_+ = \overline{\Psi \mathfrak{H}}, E_- = \overline{\Phi^* \mathfrak{H}}$. При этом минимальная дилатация определена с точностью до J-унитарного изоморфизма.*

Замечание 3.1. Если положить $\Psi = D$, $J_- = \mathfrak{J}_*$, $\Phi = D_*$, $J_+ = \mathfrak{J}$ и $K = -T^*$, то мы получаем дилатацию, построенную в [8].

4. Самосопряженная дилатация ограниченного диссипативного оператора

Простейшие соображения говорят о том, что для диссипативного оператора должна существовать самосопряженная дилатация. Для этого достаточно воспользоваться преобразованием Кэли.

Таким образом, в случае диссипативных операторов задача сводится к явному построению самосопряженной дилатации. Эта задача была решена в работах Б. С. Павлова [10,11] для оператора Шредингера. Анализ показывает, что этот метод построения самосопряженной дилатации применим к произвольному ограниченному диссипативному оператору. Рассмотрим этот метод.

Пусть $A \in [\mathfrak{H}]$ — диссипативный оператор, $-i \in \rho(A)$; $V = \dfrac{A - A^*}{2i} \geqslant 0$, $E = \overline{\sqrt{V}\mathfrak{H}}$. Образуем пространства вектор-функций $L_2([0, \infty), E) = H_+$ и $L_2((-\infty, 0], E) = H_-$.

Построим пространство $H = H_- \oplus \mathfrak{H} \oplus H_+$ и в нем оператор S_V следующим образом: вектор $v = (v_-(t), h_0, v_+(t))^T \in \mathfrak{D}(S_V)$ входит в область определения оператора S_V тогда и только тогда, когда 1) $\left\{v_\pm, \dfrac{dv_\pm(t)}{dt} \subset H_\pm\right\}$, 2) $v_+(0) = i\sqrt{2V} h_0 + v_-(0)$.

Если $v \in \mathfrak{D}(S)$, то

$$S_V(v) = S_V \begin{pmatrix} v_-(t) \\ h_0 \\ v_+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\dfrac{dv_-(t)}{dt} \\ Ah_0 + \sqrt{2V} v_-(0) \\ i\dfrac{dv_+(t)}{dt} \end{pmatrix}.$$

Теорема 4.1. *Оператор S_V является самосопряженной дилатацией оператора A.*

С помощью понятия открытой системы и узла для ограниченного диссипативного оператора такая дилатация была построена в [2]. Заметим, что другими методами самосопряженная дилатация была построена для конкретных дифференциальных выражений в [12,15,17].

5. Самосопряженная дилатация диссипативного оператора

Пусть A — плотно определенный диссипативный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, и $-i \in \rho(A)$.

Рассмотрим дефектные операторы $B = iR - iR^* - 2R^*R$, $\tilde{B} = iR - iR^* - 2RR^*$, где $R = (A + iI)^{-1}$: $B \geqslant 0$, $\tilde{B} \geqslant 0$,

$$Q = \sqrt{B}, \tilde{Q} = \sqrt{\tilde{B}}, \tag{5.1}$$

$$\mathfrak{H}_1 = \overline{Q\mathfrak{H}}, \mathfrak{H}_2 = \overline{\tilde{Q}\mathfrak{H}}. \tag{5.2}$$

Построим пространства вектор-функций $H_+ = L_2\left([0; +\infty), \mathfrak{H}_1\right)$, $H_- = L_2\left((-\infty, 0], \mathfrak{H}_2\right)$, $H = H_- \oplus \mathfrak{H} \oplus H_+$ и определим в H оператор S следующим образом: вектор $h = (h_-, h_0, h_+)^T$, где $h_\pm \in H_\pm$, $h_0 \in \mathfrak{H}$, принадлежит $\mathfrak{D}(S)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) $\{h_\pm, \dfrac{dh_\pm(t)}{dt}\} \subset H_\pm$,
2) $\varphi = h_0 + \tilde{Q}h_0 \in \mathfrak{D}(A)$,
3) $h_+(0) = T^*h_-(0) + iD\varphi$, где $T^* = I + 2iR^*$, $D = Q(A + iI)$.

Если $h \in \mathfrak{D}(S)$, то

$$Sh = S\begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\dfrac{dh_-(t)}{dt} \\ -ih_0 + (A + iI)\varphi \\ i\dfrac{dh_+(t)}{dt} \end{pmatrix}.$$

В [3] доказана следующая теорема.

Теорема 5.1. *Оператор S является самосопряженной дилатацией оператора A.*

Теорема 5.2. *Дилатация S является минимальной в том смысле, что*

$$H = \overline{\operatorname{span}\{R_i^n(S)h, R_{-i}^n(S)h | h \in \mathfrak{H}, n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}}.$$

Эта теорема доказана в [7].

Построенная дилатация S называется *спектральным представлением* самосопряженной дилатации диссипативного оператора. В [8, 9] построено трансляционное представление такой дилатации, которое мы сейчас рассмотрим.

Пусть A — плотно заданный диссипативный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, $-i \in \rho(A)$. Рассмотрим операторы (5.1) и пространства (5.2).

Образуем гильбертово пространство $\mathscr{H} = \mathfrak{H}_- \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}_+$, где $\mathfrak{H}_- \bigoplus\limits_{-\infty}^{-1} \mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_+ = \bigoplus\limits_{1}^{\infty} \mathfrak{H}_1$. Элементами $\mathscr{H}$ являются векторы $f = \left(\ldots, f_{-2}, f_{-1}, \boxed{f_0}, f_1, f_2, \ldots\right)$, где $f_k \in \mathfrak{H}_1$, при $k \geqslant 1$, $f_k \in \mathfrak{H}_2$ при $k \leqslant -1$, $f_0 \in \mathfrak{H}$ и $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \left\|f_k{}^2\right\| < \infty$.

В пространстве $\mathscr{H}$ рассмотрим неограниченные операторы S_+ и S_-, действующие по формулам $S_+f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$, $S_-f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{-k}$. Построим в пространстве $\mathscr{H}$ оператор S_T. Пусть $f \in \mathfrak{D}(S_T)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) $f \in \mathfrak{D}(S_+) \cap \mathfrak{D}(S_-)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|S_nf\|^2 < \infty$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|S_{-n}f\|^2 < \infty$, где $S_nf = -\dfrac{1}{2}f_n - \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k$ и $S_{-n}f = \dfrac{1}{2}f_{-n} + \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_{-k}$;
2) $\varphi = f_0 + \tilde{Q}S_-f \in \mathfrak{D}(A)$;
3) $S_+f = T^*S_-f + iD\varphi$, где $D = Q(A + iI)$, $T = I - 2iR, R = (A + iI)^{-1}$. Если $f \in \mathfrak{D}(S_T)$, то $S_Tf = \left(\ldots, g_{-1}, \boxed{g_0}, g_1, \ldots\right)$, где $g_0 = -if_0 + (A + iI)\varphi$, $g_n = iS_nf\ (\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

В [8] доказана теорема.

Теорема 5.3. *Оператор S_T является самосопряженной дилатацией диссипативного оператора A.*

В [4] получена следующая теорема.

Теорема 5.4. *Если пространство* $\mathfrak{H}_1 = \overline{Q\mathfrak{H}}$ *и* $\mathfrak{H}_2 = \overline{\hat{Q}\mathfrak{H}}$ *сепарабельны, то самосопряженные дилатации* S *и* S_T *диссипативного оператора* A *изоморфны.*

Теорема 5.5. *Если* A — *ограниченный диссипативный оператор и* $-i \in \rho(A)$, *то самосопряженные дилатации* S *и* S_V *оператора* A *изоморфны.*

Эта теорема доказана в [4, 6].

6. J-САМОСОПРЯЖЕННАЯ ДИЛАТАЦИЯ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть A — линейный, плотно заданный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, $-i \in \rho(A)$.

Рассмотрим операторы

$$R = (A + iI)^{-1}, \quad B = iR - iR^* - 2R^*R, \quad \tilde{B} = iR - iR^* - 2RR^*. \tag{6.1}$$

Пусть

$$Q = \sqrt{|B|}, \quad \tilde{Q} = \sqrt{|\tilde{B}|}, \tag{6.2}$$
$$\mathcal{J} = \operatorname{sign} B, \quad \tilde{\mathcal{J}} = \operatorname{sign} \tilde{B}.$$

Пространство $H = H_- \oplus \mathfrak{H} \oplus H_+$ определяется как и в разделе 4. Операторы Q и $\tilde{Q}$ теперь определяются по формулам (6.2). Затем в пространстве H определяем оператор S аналогично тому, как это делается в разделе 4.

Введем в пространстве H J-метрику следующим образом: пусть $h_\pm(t) \in H_\pm$, $J_1 h_- = \tilde{\mathcal{J}} h_-(t)$, $J_2 h_+ = \mathcal{J} h_+(t)$ ($\mathcal{J}$ и $\tilde{\mathcal{J}}$ действуют при каждом фиксированном t),

$$J \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 h_- \\ h_0 \\ J_2 h_+ \end{pmatrix}.$$

В [5] доказана следующая теорема.

Теорема 6.1. *Оператор* S *является* J*-самосопряженной дилатацией оператора* A.

Построенный оператор S является спектральным представлением J-самосопряженной дилатации оператора A. В [8] аналогичным образом было построено трансляционное представление такой дилатации.

Теперь, используя понятие операторного узла, введенное в п. 2, определим это понятие для неограниченного оператора. Пусть A — линейный, плотно заданный оператор, действующий в пространстве $\mathfrak{H}$, $-i \in \rho(A)$ и операторы B и $\tilde{B}$ определяются по формулам (6.1).

Определение 6.1. Совокупность гильбертовых пространств $\mathfrak{H}$, E_- и E_+ и операторов $\Phi \in [E_-, \mathfrak{H}]$, $\Psi \in [\mathfrak{H}, E_+]$, $K \in [E_-, E_+]$, $J_- \in [E_-, E_-]$, $J_+ \in [E_+, E_+]$, $A : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$, где $J_\pm = J_\pm^{-1} = J_\pm^*$, которые удовлетворяют соотношениям:

$$B = \Psi^* J_+ \Psi, \tag{6.3}$$
$$T^* \Phi + \Psi^* J_+ K = 0, \tag{6.4}$$
$$2\Phi^* \Phi + K^* J_+ K = J_-, \tag{6.5}$$
$$\tilde{B} = \Phi J_- \Phi^*, \tag{6.6}$$
$$T \Psi^* + \Phi J_- K^* = 0, \tag{6.7}$$
$$2\Psi \Psi^* + K J_- K^* = J_+, \tag{6.8}$$

называется *операторным узлом* для оператора A.

Из (6.4) получаем

$$\Phi^* T + K^* J_+ \Psi = 0. \tag{6.9}$$

Из (6.7) получаем

$$\Psi T^* + K J_- \Phi^* = 0. \tag{6.10}$$

Используя введенное понятие операторного узла построим J-самосопряженную дилатацию $\mathbf{S}$ линейного оператора A следующим образом. Пусть $H_- = L_2((-\infty; 0], E_-)$, $H_+ = L_2([0; \infty), E_+)$, $H = H_- \oplus \mathfrak{H} \oplus H_+$. Введем в H индефинитную метрику:

$$Jh = J \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_- h_-(t) \\ h_0 \\ J_+ h_+(t) \end{pmatrix}.$$

Вектор $h=(h_+,h_0,h_-)^T\in\mathfrak{D}(\mathbf{S})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) $\{h_\pm,\dfrac{dh_\pm(t)}{dt}\}\subset H_\pm$,
2) $\tilde h=h_0+\Phi h_-(0)\in\mathfrak{D}(A)$,
3) $h_+(0)=-Kh_-(0)+i\Psi(A+iI)\tilde h$;

$$\mathbf{S}\begin{pmatrix}h_-\\ h_0\\ h_+\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i\dfrac{dh_-(t)}{dt}\\ -ih_0+(A+iI)\tilde h\\ i\dfrac{dh_+(t)}{dt}\end{pmatrix}.$$

Теорема 6.2. *Оператор* $\mathbf{S}$ *является* J*-самосопряженной дилатацией оператора* A.

Доказательство. Найдем сопряженный оператор $\mathbf{S}^*$. Обозначим $\Gamma_\pm h_\pm(t)=i\dfrac{dh_\pm(t)}{dt}$. Используя свойства оператора дифференцирования, получим

$$(\Gamma_\pm f,\varphi)_{H_\pm}-(f,\Gamma_\pm\varphi)_{H_\pm}=\mp i(f(0),\varphi(0))_{\mathfrak{H}},$$

$$(\mathbf{S}h,g)_H=(h_-,\Gamma_-g_-)_{H_-}+(h_+,\Gamma_+g_+)_{H_+}-i(h_+(0),g_+(0))_{E_+}+$$

$$+i(h_-(0),g_-(0))_{E_-}-i(h_0,g_0)_{\mathfrak{H}}+((A+iI)\hat h,g_0)_{\mathfrak{H}},$$

где $\hat h=h_0+\Phi h_-(0)\in\mathfrak{D}(A)$.

Введем обозначение $C=(h_0,ig_0)_{\mathfrak{H}}-i(h_+(0),g_+(0))_{E_+}+i(h_-(0),g_-(0))_{E_-}+((A+iI)\hat h,g_0)_{\mathfrak{H}}$. Используем условие 3) на $\mathfrak{D}(\mathbf{S})$:

$$C=(h_0,ig_0)_{\mathfrak{H}}-i(-Kh_-(0)+i\Psi(A+iI)\hat h,g_+(0))_{E_+}+i(h_-(0),g_-(0))_{E_-}+((A+iI)\hat h,g_0)_{\mathfrak{H}}.$$

Положим $h_-(0)=0$, тогда $\hat h=h_0$ и

$$C=(h_0,ig_0)_{\mathfrak{H}}+(\Psi(A+iI)h_0,g_+(0))_{E_+}+((A+iI)h_0,g_0)_{\mathfrak{H}}=$$

$$=(h_0,ig_0)_{\mathfrak{H}}+((A+iI)h_0,\Psi^*g_+(0))_{E_+}+((A+iI)h_0,g_0)_{\mathfrak{H}}=(h_0,ig_0)_{\mathfrak{H}}+((A+iI)h_0,g_0+\Psi^*g_+(0))_{\mathfrak{H}}.$$

Если $g'=g_0+\Psi^*g_+(0)\in\mathfrak{D}(A^*)$, то $C=(h_0,ig_0)_{\mathfrak{H}}+(h_0,(A*-iI)g')_{\mathfrak{H}}=(h_0,ig_0+(A*-iI)g')_{\mathfrak{H}}$. Теперь

$$C=(h_0,ig_0)_{\mathfrak{H}}+i(h_-(0),K^*g_+(0))_{E_-}+((A+iI)\hat h,g_0+\Psi^*J_+g_+(0))_{\mathfrak{H}}+i(h_-(0),g_-(0))_{E_-}=$$

$$=(h_0,ig_0)_{\mathfrak{H}}+i(h_-(0),K^*g_+(0))_{E_-}+(h_0+\Phi h_-(0),(A^*-iI)g')_{\mathfrak{H}}+i(h_-(0),g_-(0))_{E_-}=$$

$$=(h_0,ig_0)_{\mathfrak{H}}+(h_-(0),-iK^*g_+(0))_{E_-}+(h_0,(A^*-iI)g')_{\mathfrak{H}}+(\Phi h_-(0),(A^*-iI)g')_{\mathfrak{H}}+i\,(h_-(0),g_-(0))_{E_-}=$$

$$=(h_0,ig_0+(A^*-iI)g')_{\mathfrak{H}}+(h_-(0),-iK^*g_+(0)+\Phi^*(A^*-iI)g'-ig_-(0))_{E_-},$$

тогда

$$-iK^*g_+(0)+\Phi^*(A^*-iI)g'-ig_-(0)=0,$$

т. е.

$$g_-(0)=-K^*g_+(0)-i\Phi^*(A^*-iI)g'.$$

Таким образом, оператор $\mathbf{S}^*$ определяется следующим образом.

Вектор $h=(h_-,h_0,h_+)^T\in\mathfrak{D}(\mathbf{S}^*)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия

1) $\{h_\pm,\Gamma_\pm h_\pm\}\subset H_\pm$,
2) $h'=h_0+\Psi^*h_+(0)\in D(A^*)$,
3) $h_-(0)=-K^*h_+(0)-i\Phi^*(A^*-iI)h'$;

$$\mathbf{S}^* \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_- h_-(t) \\ ih_0 + (A^* - iI)h' \\ \Gamma_+ h_+(t) \end{pmatrix}.$$

Докажем равенство $\mathbf{S} = J\mathbf{S}^*J$, где

$$J \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_- h_-(t) \\ h_0 \\ J_+ h_+(t) \end{pmatrix}.$$

Для его доказательства нам понадобятся следующие утверждения.

Если выполнены условия 2) и 3) на $\mathfrak{D}(\mathbf{S})$, то вектор $\hat{h} = h_0 + \Psi^* J_+ h_+(0) \in \mathfrak{D}(A^*)$ и имеет место равенство

$$(A + iI)\widetilde{h} - (A^* - iI)\hat{h} = 2ih_0, \tag{6.11}$$

где $\widetilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0), \hat{h} = h_0 + \Psi^* J_+ h_+(0)$. Действительно, $h_+(0) = -Kh_-(0) + i\Psi(A + iI)\widetilde{h}$. Подействуем на это равенство оператором $\Psi^* J_+$:

$$\Psi^* J_+ h_+(0) = -\Psi^* J_+ K h_-(0) + i\Psi^* J_+ \Psi(A + iI)\widetilde{h}.$$

Используем соотношение (6.3):

$$\Psi^* J_+ h_+(0) = -\Psi^* J_+ K h_-(0) + (-R + R^* - 2iR^*R)(A + iI)\widetilde{h},$$

$$\Psi^* J_+ h_+(0) = -\Psi^* J_+ K h_-(0) - \widetilde{h} + R^*(A + iI)\widetilde{h} - 2iR^*\widetilde{h},$$

или

$$\Psi^* J_+ h_+(0) + \Psi^* J_+ K h_-(0) + \widetilde{h} = R^*(A + iI)\widetilde{h} - 2iR^*\widetilde{h}. \tag{6.12}$$

Преобразуем левую часть равенства, используя (6.4):

$$\Psi^* J_+ h_+(0) - T^*\Phi h_-(0) + h_0 + \Phi h_-(0) = \Psi^* J_+ h_+(0) + h_0 - 2iR^*\Phi h_-(0) = \hat{h} - 2iR^*\Phi h_-(0).$$

Подставляя в (6.12), получим

$$\Psi^* J_+ h_+(0) + h_0 = 2iR^*\Phi h_-(0) + R^*(A + iI)\hat{h} - 2iR^*\widetilde{h}. \tag{6.13}$$

Следовательно, вектор $\hat{h} = \Psi^* J_+ h_+(0) + h_0 \in \mathfrak{D}(A^*)$.

Подействуем на равенство (6.13) оператором $(A^* - iI)$:

$$(A^* - iI)\hat{h} = 2i\Phi h_-(0) + (A + iI)\widetilde{h} - 2i\widetilde{h},$$

$$(A^* - iI)\hat{h} = 2i\Phi h_-(0) + (A + iI)\hat{h} - 2ih_0 - 2i\Phi h_-(0),$$

и получаем (6.11).

Теперь докажем, что если выполняются условия 2) и 3) на $\mathfrak{D}(\mathbf{S}^*)$, то вектор $h' = h_0 + \Phi J_- h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$ и имеет место равенство

$$(A + iI)h' - (A^* - iI)\hat{h} = 2ih_0, \tag{6.14}$$

где $h' = h_0 + \Phi J_- h_-(0), \hat{h} = h_0 + \Psi^* h_+(0)$.

Действительно, запишем условие 3) на $\mathfrak{D}(\mathbf{S}^*)$: $h_-(0) = -K^* h_+(0) - i\Phi^*(A^* - iI)\hat{h}$ и подействуем на это равенство оператором ΦJ_-:

$$\Phi J_- h_-(0) = -\Phi J_- K^* h_+(0) - i\Phi J_- \Phi^*(A^* - iI)\hat{h}.$$

Используя равенства (6.6) и (6.7), получаем

$$\Phi J_- h_-(0) = T\Psi^* h_+(0) - i(iR - iR^* - 2RR^*)(A - iI)\hat{h},$$

$$\Phi J_- h_-(0) = \Psi^* h_+(0) - 2iR\Psi^* h_+(0) + R(A^* - iI)\hat{h} - \hat{h} + 2iR\hat{h}. \tag{6.15}$$

Тогда $h' = h_0 + \Phi J_- h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$.

Подействуем на равенство (6.15) оператором $(A + iI)$:

$$(A + iI)h' = -2i\Psi^* h_+(0) + (A^* - iI)\hat{h} + 2i(h_0 + \Psi^* h_+(0)).$$

Таким образом, $(A + iI)h' - (A^* - iI)\hat{h} = 2ih_0$ и (6.14) доказано.

Итак, докажем что

$$\mathbf{S}h = J\mathbf{S}^*Jh, \tag{6.16}$$

$$h = \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix}, \quad Jh = \begin{pmatrix} J_+h_+ \\ h_0 \\ J_-h_- \end{pmatrix}.$$

Пусть $h \in \mathfrak{D}(S)$ и $Jh \in \mathfrak{D}(S^*)$, тогда

$$\mathbf{S}^*Jh = \mathbf{S}^* \begin{pmatrix} J_+h_+ \\ h_0 \\ J_-h_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\dfrac{J_+dh_+(t)}{dt} \\ ih_0 + (A^* - iI)\hat{h} \\ i\dfrac{J_-dh_-(t)}{dt} \end{pmatrix},$$

где $\hat{h} = h_0 + \Psi J_+h_+(0) \in \mathfrak{D}(A^*)$. Используя (6.11), получаем

$$\mathbf{S}^*Jh = \begin{pmatrix} iJ_+\dfrac{dh_+(t)}{dt} \\ -ih_0 + (A + iI)\widetilde{h} \\ iJ_-\dfrac{J_-dh_-(t)}{dt} \end{pmatrix}, \qquad J\mathbf{S}^*Jh = \begin{pmatrix} i\dfrac{J_+dh_+(t)}{dt} \\ -ih_0 + (A + iI)\widetilde{h} \\ i\dfrac{dh_-(t)}{dt} \end{pmatrix} = \mathbf{S}h.$$

Надо доказать, что

$$\mathfrak{D}(S^*) = J\mathfrak{D}(S). \tag{6.17}$$

Равенство (6.16) было доказано в предположении (6.17). Пусть $h \in \mathfrak{D}(\mathbf{S})$, докажем что $Jh \in \mathfrak{D}(\mathbf{S}^*)$.

$$h_+(0) = -Kh_-(0) + i\Psi(A + iI)\widetilde{h}, \tag{6.18}$$

где $\widetilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$. Надо доказать, что $J_-h_-(0) = -K^*J_+h_+(0) - i\Phi^*(A^* - iI)\hat{h}$, где $\hat{h} = h_0 + \Psi^*J_+h_+(0) \in \mathfrak{D}(A^*)$. Из (6.11) получим $(A + iI)\widetilde{h} = 2ih_0 + (A^* - iI)\hat{h}$. Подействуем на равенство (6.18) оператором K^*J_+ и применим равенства (6.5) и (6.9). Получаем:

$$K^*J_+h_+(0) = -K^*J_+Kh_-(0) + iK^*J_+\Psi(2ih_0 + (A^* - iI)\hat{h}),$$

$$K^*J_+h_+(0) = (2\Phi^*\Phi - J_-)h_-(0) - i\Phi^*T(2ih_0 + (A^* - iI)\hat{h}),$$

$$K^*J_+h_+(0) + J_-h_-(0) = 2\Phi^*\Phi h_-(0) - iT(2ih_0 + (A^* - iI)\hat{h}).$$

Преобразуем правую часть равенства:

$$2\Phi^*\Phi h_-(0) - i\Phi^*(I - 2iR)(2ih_0 + (A^* - iI)\hat{h}) = 2\Phi^*\Phi h_-(0) + 2\Phi^*Th_0 - i\Phi^*(A^* - iI)\hat{h} - 2\Phi^*R(A^* - iI)\hat{h}.$$

Вычислим $2\Phi^*\Phi h_-(0) + 2\Phi^*Th_0 - 2\Phi^*R(A^* - iI)\hat{h}$, используя (6.11). Получаем:

$$2\Phi^*\Phi h_-(0) + 2\Phi^*Th_0 - 2\Phi^*R(A^* - iI)\hat{h} = 2\Phi^*\Phi h_-(0) + 2\Phi^*(I - 2iR)h_0 - 2\Phi^*R((A + iI)\hat{h} - 2ih_0) =$$

$$= \Phi^*(2\Phi h_-(0) + 2h_0 - 4iRh_0 - 2h_0 - 2\Phi h_-(0) + 4iRh_0) = 0,$$

таким образом, $J_-h_-(0) = K^*J_+h_+(0) - i\Phi^*(A^* - iI)\hat{h}$.

Пусть $Jh \in \mathfrak{D}(\mathbf{S}^*)$. Докажем, что $h \in \mathfrak{D}(\mathbf{S})$,

$$h = \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix}, \quad Jh = \begin{pmatrix} J_-h_- \\ h_0 \\ J_+h_+ \end{pmatrix}, \quad Jh \in \mathfrak{D}(\mathbf{S}^*).$$

Это означает, что $\hat{h} = h_0 + \Psi^*J_+h_+(0) \in \mathfrak{D}(A^*)$ и

$$J_-h_-(0) = -K^*J_+h_+(0) - i\Phi^*(A^* - iI)\hat{h}. \tag{6.19}$$

Из равенства (6.11), если $Jh \in \mathfrak{D}(\mathbf{S}^*)$, получаем

$$(A + iI)\widetilde{h} - (A^* - iI)\hat{h} = 2ih_0, \tag{6.20}$$

$\hat{h} \in \mathfrak{D}(A^*)$, $\widetilde{h} \in \mathfrak{D}(A)$, $\hat{h} = h_0 + \Psi^*J_+h_+(0)$, $\tilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$, т. е. условие 2) на $\mathfrak{D}(\mathbf{S})$ выполняется.

Проверим выполнение условия 3) на $\mathfrak{D}(\mathbf{S})$ для вектора h. Надо доказать равенство

$$h_+(0) = -Kh_-(0) + i\Psi(A+iI)\widetilde{h},$$

где $\tilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$. Подействуем на равенство (6.19) оператором KJ_- и получим

$$Kh_-(0) = -KJ_-K^*J_+h_+(0) - iKJ_-\Phi^*(A^*-iI)\hat{h}.$$

Используя (6.8) и (6.10), получаем

$$Kh_-(0) = (2\Psi\Psi^* - J_+)J_+h_+(0) + i\Psi(I+2iR^*)(A^*-iI)\hat{h},$$

$$Kh_-(0) + h_+(0) = 2\Psi\Psi^*J_+h_+(0) + i\Psi(I+2iR^*)(A^*-iI)\hat{h}.$$

Преобразуем правую часть равенства:

$$2\Psi\Psi^*J_+h_+(0) + i\Psi(A^*-iI)\hat{h} - 2\Psi(h_0 + \Psi^*J_+h_+(0)) =$$

$$= 2\Psi\Psi^*J_+h_+(0) + i\Psi((A+iI)\widetilde{h} - 2ih_0) - 2\Psi h_0 - 2\Psi\Psi^*J_+h_+(0) = i\Psi(A+iI)\widetilde{h},$$

$h_+(0) = -Kh_-(0) + i\Psi(A+iI)\widetilde{h}$, где $\widetilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0)$.

Докажем, что $\mathbf{S}$ — дилатация оператора A. Обозначим $\Gamma_-h_-(t) = i\dfrac{dh_-(t)}{dt}$, $\Gamma_+h_+(t) = i\dfrac{dh_+(t)}{dt}$, $\Gamma_0 = \Gamma_+|_M$, где $M = \{h_+(t) \in \mathfrak{D}(\Gamma_+) | h_+(0) = 0\}$.

Рассмотрим в пространстве $H = H_- \oplus g \oplus H$ оператор $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R}h = \mathbf{R}\begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Gamma_- - \lambda I)^{-1}h_- \\ R_\lambda h_0 - (I+\mu R_\lambda)\Phi v_-(0) \\ (\Gamma_0 - \lambda I)^{-1}h_+ + e^{-i\lambda t}v_+(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_- \\ v_0 \\ v_+ \end{pmatrix},$$

где $\lambda \in \rho(\Gamma_-) \cap \rho(\Gamma_0) \cap \rho(A) = \rho(\lambda)$. Так как $-i \in \rho(\lambda)$, то λ принадлежит некоторой окрестности точки $-i$, которая содержится в $\rho(\lambda)$.

$$(\Gamma_0 - \lambda I)^{-1}h_+(x) = \frac{1}{i}\int_0^x e^{-i\lambda(x-t)}h_+(t)dt, \qquad (\Gamma_- - \lambda I)^{-1}h_-(t) = \frac{1}{i}\int_{-\infty}^x e^{-i\lambda(x-t)}h_-(t)dt.$$

При этом

$$v_-(0) = [(\Gamma_- - \lambda I)^{-1}h_-(t)]_{t=0}, \qquad v_+(0) = -Kv_-(0) + i\Psi^*(I+\mu R_\lambda)(h_0 - \mu\Phi v_-(0)),$$

$\mu = \lambda + i$, $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$. Пусть $h \in \mathfrak{D}(\mathbf{S})$, тогда

$$(\mathbf{S} - \lambda I)\begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Gamma_- - \lambda I)h_- \\ -\mu h_0 + (A+iI)\widetilde{h} \\ (\Gamma_+ - \lambda I)h_+ \end{pmatrix}.$$

Докажем, что $\mathbf{R} = (\mathbf{S} - \lambda I)^{-1}$:

$$\mathbf{R}(\mathbf{S} - \lambda I)\begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \mathbf{R}\begin{pmatrix} (\Gamma_- - \lambda I)h_- \\ (A - \lambda I)\widetilde{h} + \mu\Phi h_-(0) \\ (\Gamma_+ - \lambda I)h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_- \\ y_0 \\ y_+ \end{pmatrix}.$$

Докажем, что $y_0 = h_0$, $y_+ = h_+$.

$y_0 = R_\lambda((A-\lambda I)\widetilde{h} + \mu\Phi h_-(0)) - (I+\mu R_\lambda)\Phi v_-(0) = \widetilde{h} + \mu R_\lambda\Phi h_-(0) - \Phi h_-(0) - \mu R_\lambda \Phi v_-(0) = h_0$, т. к. $v_-(0) = h_-(0)$.

$$v_+(0) = -Kv_-(0) + i\Psi^*(I+\mu R_\lambda)((A-\lambda I)\widetilde{h} - \mu\Phi h_-(0) - \mu\Phi v_-(0)) =$$

$$= -Kh_-(0) + i\Psi^*(I+\mu R_\lambda)(A-\lambda I)\widetilde{h} = -Kh_-(0) + i\Psi^*(A-\lambda I)\widetilde{h} + i\mu\Psi^*\widetilde{h} =$$

$$= -Kh_-(0) + i\Psi^*(A+iI)\widetilde{h} = h_+(0),$$

таким образом, $y_+ = h_+$. Теперь докажем, что $\forall h \in H$, $\mathbf{R}h \in \mathfrak{D}(\mathbf{S})$. Действительно:

1) очевидно, что $v_\mp \in H_\mp$.
2) $\widetilde{h} = v_0 + \Phi v_-(0) = R_\lambda h_0 - (I+\mu R_\lambda)\Phi v_-(0) + \Phi v_-(0) = R_\lambda(h_0 - \mu\Phi v_-(0)) \in \mathfrak{D}(A)$.
3) Проверим равенство

$$\begin{aligned}v_+(0) &= -Kv_-(0) + i\Psi^*(A+iI)(v_0+\Phi v_-(0)) = \\ &= -Kv_-(0) + i\Psi^*(A+iI)(R_\lambda h_0 - (I+\mu R_\lambda)\Psi^* v_-(0) + \Psi^* v_-(0)) = \\ &= -Kv_-(0) + \Psi^*(I+\mu R_\lambda)(h_0 - \mu\Phi v_-(0)) = v_+(0).\end{aligned}$$

Таким образом, $\mathbf{R}h \in \mathfrak{D}(\mathbf{S})(\forall h \in H)$. Теперь докажем, что $(\mathbf{S}-\lambda I)\mathbf{R}h = h, \forall h \in H$.

$$(\mathbf{S}-\lambda I)\mathbf{R}h = (\mathbf{S}-\lambda I)\begin{pmatrix} v_- \\ v_0 \\ v_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Gamma_- - \lambda I)v_- \\ (A-\lambda I)(v_0+\Phi v_-(0)) + \mu\Phi v_-(0) \\ (\Gamma_+ - \lambda I)v_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_- \\ \Theta_0 \\ \Theta_+ \end{pmatrix} = \Theta.$$

Докажем, что $\Theta = h$:

$$\begin{aligned}\Theta_- &= (\Gamma_- - \lambda I)(\Gamma_- - \lambda I)^{-1}h_- = h_-, \\ \Theta_0 &= (A-\lambda I)(v_0 + \Phi v_-(0)) + \mu\Phi v_-(0) = \\ &= (A-\lambda I)(R_\lambda h_0 - (I+\mu R_\lambda)\Phi v_-(0) - \Phi v_-(0)) + \mu\Phi v_-(0) = h_0, \\ \Theta_+ &= (\Gamma_+ - \lambda I)[(\Gamma_0 - \lambda I)^{-1}h_0 + e^{-i\lambda t}v_+(0)],\end{aligned}$$

где

$$v_+(0) = -Kv_-(0) + i\Psi^*(I+\mu R_\lambda)(h_0 - \mu\Phi v_-(0)).$$

Поскольку $(\Gamma_+ - \lambda I)e^{-i\lambda t}v_-(0) = 0$, то $\Theta_+ = h_+$.

Как легко видеть оператор $\mathbf{R}$ ограничен и определен на всем пространстве H. □

Замечание 6.1. При доказательстве равенства $\mathbf{R} = (\mathbf{S}-\lambda I)^{-1}$ не использовались свойства узла, поэтому $\mathbf{R} = (\mathbf{S}-\lambda I)^{-1}$ для любых операторов $\Psi^* \in [E_+, \mathfrak{H}]$ и $\Phi \in [E_-, \mathfrak{H}]$.

Замечание 6.2. Если положить $E_- = \overline{\widetilde{Q}\mathfrak{H}}$, $E_+ = \overline{Q\mathfrak{H}}$, $\Psi = Q$, $\Phi = \widetilde{Q}$ и $J = I$, где Q и $\widetilde{Q}$ определены равенством (5.1), то мы получаем спектральное представление самосопряженной дилатации диссипативного оператора A.

Замечание 6.3. Если Q и $\widetilde{Q}$ определить равенством (6.2) и $\mathcal{J} = \operatorname{sign} B$, $\widetilde{\mathcal{J}} = \operatorname{sign} \widetilde{B}$, то получаем спектральное представление J-самосопряженной дилатации линейного оператора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Биданец А. В., Кудряшов Ю. Л.* J-изометрические и J-унитарные дилатации операторного узла// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2016. — № 3. — С. 21–30.
2. *Золотарев В. А.* Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. — Харьков: ХНУ, 2003.
3. *Кудряшов Ю. Л.* Симметричные и самосопряженные дилатации диссипативных операторов// Теор. функций, функц. анализ и их прил. — 1982. — *37*. — С. 51–54.
4. *Кудряшов Ю. Л.* Связь между различными представителями самосопряженной дилатации диссипативного оператора// Деп. в ВИНИТИ. — 03.01.1983. — № 3-83.
5. *Кудряшов Ю. Л.* J-эрмитовы и J-самосопряженные дилатации линейных операторов// Динам. системы. — 1984. — № 3. — С. 94–98.
6. *Кудряшов Ю. Л.* Изоморфизм двух представлений самосопряженной дилатации диссипативного оператора// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Физ.-мат. науки. — 2011. — *23*, № 3. — С. 32–38.
7. *Кудряшов Ю. Л.* Минимальность самосопряженной дилатации диссипативного оператора// Динам. системы. — 2014. — *4*, № 3-4. — С. 279–285.
8. *Кужель А. В.* Самосопряженные и J-самосопряженные дилатации линейных операторов// Теор. функций, функц. анализ и их прил. — 1982. — *37*. — С. 54–62.
9. *Кужель А. В., Кудряшов Ю. Л.* Симметричные и самосопряженные дилатации диссипативных операторов// Докл. АН СССР. — 1980. — *253*, № 4. — С. 812–815.
10. *Павлов Б. С.* Теория дилатаций и спектральный анализ несамосопряженных дифференциальных операторов// В сб.: «Матем. программир. и смежн. вопр. Теория операторов в линейных пространствах». — М.: ЦЭМИ, 1976. — С. 3–69.
11. *Павлов Б. С.* Самосопряженная дилатация диссипативного оператора Шредингера и разложение по его собственным функциям// Мат. сб. — 1977. — *102*, № 4. — С. 511–536.
12. *Павлов Б. С., Фаддеев М. Д.* Построение самосопряженной дилатации для задачи с импедансным граничным условием// Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1977. — *73*. — С. 217–223.

13. *Сахнович Л. А.* О J-унитарной дилатации ограниченного оператора// Функц. анализ и его прилож. — 1974. — *8*, № 3. — С. 83-84.
14. *Секефальви-Надь Б.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Мир, 1970.
15. *Allahverdiev B. P., Ugurlu E.* On self-adjoint dilation of the dissipative extension of a direct sum differential operator// Banach J. Math. Anal. — 2013. — *7*, № 2. — C. 194–207.
16. *Davis Ch.* J-unitary dilation of general operators// Acta Sci. Math. — 1970. — *31*, № 1-2. — C. 75–86.
17. *Kurasov P. B., Elander N.* Complex scaling and self-adjoint dilations// Int. J. Quantum Chem. — 1993. — *46*, № 3. — C. 415–418.
18. *Temme D.* The point spectrum of unitary dilations in Kreĭ space// Math. Nachr. — 1998. — *194*, № 1. — C. 205–224.

Ю. Л. Кудряшов
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия
E-mail: kudryashov_2889@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-209-220 UDC 517.983.24, 517.984.4

Dilatations of Linear Operators

© 2020 **Yu. L. Kudryashov**

Abstract. The article is devoted to building various dilatations of linear operators. The explicit construction of a unitary dilation of a compression operator is considered. Then the J-unitary dilatation of a bounded operator is constructed by means of the operator knot concept of a bounded linear operator. Using the Pavlov method, we construct the self-adjoint dilatation of a bounded dissipative operator. We consider spectral and translational representations of the self-adjoint dilatation of a densely defined dissipative operator with nonempty set of regular points.

Using the concept of an operator knot for a bounded operator and the Cayley transform, we introduce an operator knot for a linear operator. By means of this concept, we construct the J-self-adjoint dilatation of a densely defined operator with a regular point.

We obtain conditions of isomorphism of extraneous dilations and their minimality.

REFERENCES

1. A. V. Bidanets and Yu. L. Kudryashov, “J-izometricheskie i J-unitarnye dilatatsii operatornogo uzla” [J-isometric and J-unitary dilatations of an operator knot], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2016, No. 3, 21–30 (in Russian).
2. V. A. Zolotarev, *Analiticheskie metody spektral’nykh predstavleniy nesamosopryazhennykh i neunitarnykh operatorov* [Analytical Methods of Spectral Representations of Non-self-adjoint and Nonunitary Operators], KhNU, Khar’kov, 2003 (in Russian).
3. Yu. L. Kudryashov, “Simmetrichnye i samosopryazhennye dilatatsii dissipativnykh operatorov” [Symmetric and self-adjoint dilatations of dissipative operators], *Teor. funktsiy, funkts. analiz i ikh pril.* [Funct. Theory Funct. Anal Appl.], 1982, **37**, 51–54 (in Russian).
4. Yu. L. Kudryashov, “Svyaz’ mezhdu razlichnymi predstavitelyami samosopryazhennoy dilatatsii dissipativnogo operatora” [Relation between different representatives of self-adjoint dilatation of a dissipative operator], *Dep. v VINITI* [Dep. VINITI], 03.01.1983, No. 3-83 (in Russian).
5. Yu. L. Kudryashov, “J-ermitovy i J-samosopryazhennye dilatatsii lineynykh operatorov” [J-Hermitian and J-self-adjoint dilatations of linear operators], *Dinam. sistemy* [Dynam. Syst.], 1984, No. 3, 94–98 (in Russian).

6. Yu. L. Kudryashov, “Izomorfizm dvukh predstavleniy samosopryazhennoy dilatatsii dissipativnogo operatora” [Isomorphism of two representations of self-adjoint dilatation of a dissipative operator], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Cer. Fiz.-mat. nauki* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ. Ser. Phys. Math. Sci.], 2011, **23**, No. 3, 32–38 (in Russian).
7. Yu. L. Kudryashov, “Minimal’nost’ samosopryazhennoy dilatatsii dissipativnogo operatora” [Minimality of self-adjoint dilatation of a dissipative operator], *Dinam. sistemy* [Dynam. Syst.], 2014, **4**, No. 3-4, 279–285 (in Russian).
8. A. V. Kuzhel’, “Samosopryazhennye i J-samosopryazhennye dilatatsii lineynykh operatorov” [Self-adjoint and J-self-adjoint dilatations of linear operators], *Teor. funktsiy, funkts. analiz i ikh pril.* [Funct. Theory Funct. Anal Appl.], 1982, **37**, 54–62 (in Russian).
9. A. V. Kuzhel’ and Yu. L. Kudryashov, “Simmetrichnye i samosopryazhennye dilatatsii dissipativnykh operatorov” [Symmetric and self-adjoint dilatations of dissipative operators], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1980, **253**, No. 4, 812–815 (in Russian).
10. B. S. Pavlov, “Teoriya dilatatsiy i spektral’nyy analiz nesamosopryazhennykh differentsial’nykh operatorov” [Dilatation theory and spectral analysis of non-self-adjoint differential operators], In: *Matem. programmir. i smezhn. vopr. Teoriya operatorov v lineynykh prostranstvakh* [Math. Programming and Related Issues. Theory of Operators in Linear Spaces], TsEMI, Moscow, 1976, pp. 3–69 (in Russian).
11. B. S. Pavlov, “Samosopryazhennaya dilatatsiya dissipativnogo operatora Shredingera i razlozhenie po ego sobstvennym funktsiyam” [Self-adjoint dilatation of the dissipative Schrödinger operator and expansion in its eigenfunctions], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1977, **102**, No. 4, 511–536 (in Russian).
12. B. S. Pavlov and M. D. Faddeev, “Postroenie samosopryazhennoy dilatatsii dlya zadachi s impedansnym granichnym usloviem” [Construction of a self-adjoint dilatation for a problem with impedance boundary condition], *Zap. nauch. sem. LOMI* [Notes Sci. Semin. Leningrad Dept. Math. Inst. Acad. Sci.], 1977, **73**, 217–223 (in Russian).
13. L. A. Sakhnovich, “O J-unitarnoy dilatatsii ogranichennogo operatora” [On J-unitary dilatation of a bounded operator], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1974, **8**, No. 3, 83-84 (in Russian).
14. B. Szökefalvi-Nagy, *Garmonicheskiy analiz operatorov v gil’bertovom prostranstve* [Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space], Mir, Moscow, 1970 (Russian translation).
15. B. P. Allahverdiev and E. Ugurlu, “On self-adjoint dilation of the dissipative extension of a direct sum differential operator,” *Banach J. Math. Anal.*, 2013, **7**, No. 2, 194–207.
16. Ch. Davis, “J-unitary dilation of general operators,” *Acta Sci. Math.*, 1970, **31**, No. 1-2, 75–86.
17. P. B. Kurasov and N. Elander, “Complex scaling and self-adjoint dilations,” *Int. J. Quantum Chem.*, 1993, **46**, No. 3, 415–418.
18. D. Temme, “The point spectrum of unitary dilations in Kreĭ space,” *Math. Nachr.*, 1998, **194**, No. 1, 205–224.

Yu. L. Kudryashov
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: kudryashov_2889@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 66, № 2 (2020). С. 221–271

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-221-271 УДК 519.55, 519.56

СИММЕТРИЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ. СТАРЫЕ И НОВЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ

© 2020 г. **М. А. МУРАТОВ, Б. А. РУБШТЕЙН**

Аннотация. Статья представляет собой обширный обзор по теории симметричных пространств измеримых функций. Он содержит ряд новых (недавних) и старых (известных) результатов в этой области. Для большинства результатов мы приводим их доказательства или точные ссылки, где они могут быть найдены. Рассматриваемые симметричные пространства являются банаховыми (или квази-банаховыми) пространствами измеримых функций, снабженными симметричными (перестановочно инвариантными) нормами (или квазинормами).

Мы рассматриваем симметричные пространства $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \subset \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ на общих пространствах с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, причем меры μ предполагаются конечными или бесконечными σ-конечными неатомическими, в то же время не предполагается, что пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ сепарабельно или является пространством Лебега.

В первом разделе обзора мы описываем основные классы и основные свойства симметричных пространств, рассматриваем минимальные, максимальные, ассоциированные пространства, свойства (A), (B), (C) и свойство Фату (F). Список конкретных симметричных пространств, которые мы используем, включает в себя пространства Орлича $\mathbf{L}_\Phi(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, Лоренца $\mathbf{\Lambda}_W(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, Марцинкевича $\mathbf{M}_V(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, Орлича—Лоренца $\mathbf{L}_{W,\Phi}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и, в частности, пространства $\mathbf{L}_p(w)$, $\mathbf{M}_p(w)$, $\mathbf{L}_{p,q}$ и $\mathbf{L}_\infty(U)$.

Во втором разделе мы имеем дело с индексами растяжения (Бойда) симметричных пространств и некоторыми приложениями классического оператора H Харди—Литтлвуда. Одна из основных проблем здесь заключается в следующем: когда H действует как ограниченный оператор на заданном симметричном пространстве $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$? Особое внимание уделяется симметричным пространствам, которые обладают свойством Харди—Литтлвуда $(\mathcal{HLP})$ или слабым свойством Харди—Литтлвуда $(\mathcal{WHLP})$.

В третьем разделе мы рассматриваем некоторые теоремы интерполяции для пары пространств $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$, включая классическую теорему Кальдерона—Митягина.

В качестве приложения общей теории в последнем разделе обзора мы доказываем эргодические теоремы для чезаровских средних положительных сжатий в симметричных пространствах. Изучая различные типы сходимости, мы делаем акцент на доминантной эргодической теореме $(\mathcal{DET})$, индивидуальной (поточечной) эргодической теореме $(\mathcal{IET})$, порядковой эргодической теореме $(\mathcal{OET})$ и статистической (mean) эргодической теореме $(\mathcal{MET})$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Настоящий обзор содержит ряд «новых» (недавних) и «старых» (общеизвестных) результатов из теории симметричных пространств измеримых функций. В обоих случаях «старые» и «новые» теоремы снабжены короткими доказательствами или точными ссылками. Содержание обзора можно видеть из приведенного выше оглавления. Ограничимся здесь только несколькими общими замечаниями. Отбор материала определяется исключительно личными пристрастиями авторов. Мы используем определение симметричного пространства, включающее как банаховы, так и квази-банаховы пространства. В банаховом случае это определение взято из [74, гл. II, § 4.1]. Оно принадлежит Е. М. Семенову (см. [19]). В отличие от многих авторов (см. [25, 40, 86] и др.), мы не включаем в определение симметричного пространства условие максимальности или, в случае квази-банаховых пространств, условие Фату. Это позволяет включить в рассмотрение такие интересные классы, как неинтерполяционные пространства [74, гл. II, § 5.7], или, скажем, пространства Шимогаки [115], а также пространства, для которых каноническое вложение $\mathbf{E} \to \mathbf{E}^{11}$ не изометрическое и даже не является открытым отображением.

В этой работе мы ограничиваемся рассмотрением симметричных пространств на пространствах с непрерывной (конечной или бесконечной) σ-конечной мерой. Никаких условий сепарабельности меры не предполагается. Более того, мы подробно описываем соответствие между симметричными пространствами на общих пространствах с мерой и их «стандартными» копиями на полупрямой или ее отрезке (пункт 1.2). К сожалению, из данной работы полностью исключены симметричные пространства на дискретных пространствах с мерой и, в частности, пространства последовательностей, также как и различные методы дискретизации. Мы надеемся восстановить этот пробел в другой работе.

Укажем еще несколько важных разделов теории симметричных пространства, не вошедших, по той или иной причине, в данный обзор.

1. Прежде всего отметим, что все приведенные результаты формулируются только для симметричных пространств, даже если они могут быть расширены на случай общих банаховых или квази-банаховых решеток.
2. Теория интерполяции изложена только для случая пары $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$, а не для общих пар симметричных или общих банаховых пространств.
3. Мы не затрагиваем здесь шкалы банаховых пространств и общую теорию экстраполяции даже в контексте симметричных пространств измеримых функций.
4. Эргодические теоремы, подробно изложенные в разделе 4, приводятся только для чезаровских сумм абсолютных сжатий. Обобщения на случай потоков, общих групп преобразований, а также субаддитивные процессы и т. д., не рассматриваются.
5. Наконец, по понятным причинам, мы не включили в обзор общую теорию симметричных пространств измеримых операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана, т. е. так называемые «некоммутативные» симметричные пространства.

1. Основные определения, конструкции и примеры

1.1. Симметричные банаховы и квази-банаховы пространства.

1.1.1. Равноизмеримые функции. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — измеримое пространство с конечной или бесконечной σ-конечной неатомической мерой μ, определенной на σ-алгебре $\mathcal{F}$ подмножеств Ω. Переходя, если нужно, к μ-пополнению $\mathcal{F}_\mu$ σ-алгебры $\mathcal{F}$, можно предполагать, что измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ является μ-полным, т. е. $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\mu$ и $A \subseteq B \in \mathcal{F},\ \mu(B) = 0 \implies A \in \mathcal{F}_\mu,\ \mu(A) = 0$.

Мы будем писать $(I, \mathcal{B}_m, m)$ в частном случае, когда $I = [0, \infty)$ или $I = [0, a]$ с $0 < a < \infty$, где m — обычная мера Лебега на I, а $\mathcal{B}_m = \mathcal{B}(I)_m$ является m-пополнением борелевской σ-алгебры $\mathcal{B} = \mathcal{B}(I)$ относительно меры m.

Обозначим через $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ множество всех классов μ-измеримых (равных μ-почти всюду) функций $f\colon \Omega \to \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Для каждой функции $f \in \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ определим (*верхнюю*) *функцию распределения* $\eta_{f,\mu}$ модуля $|f|$, $\eta_{f,\mu}(x) := \mu\{|f| > x\}$, где $\{|f| > x\} := \{\omega \in \Omega\colon |f(\omega)| > x\}$. Функция $\eta_{f,\mu}$ является убывающей непрерывной справа функцией на $[0, +\infty)$, такой что $\eta_{f,\mu}(x) \in [0, \mu(\Omega)]$ для всех $0 \leqslant x < \infty$.

В случае $\mu(\Omega) = \infty$ возможно, что $\eta_{f,\mu}(x) = \infty$ для некоторых и даже для всех $x \in [0, \infty)$.

Для каждой функции $f \in \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ существует единственная функция $\xi_{f,\mu}$ на $[0, \infty)$, которая является убывающей, непрерывной справа, и $\eta_{\xi_{f,\mu},m} = \eta_{f,\mu}$, $\xi_{\xi_{f,\mu},m} = \xi_{f,\mu}$. Здесь $\xi_{f,\mu} \equiv 0$, если $\eta_{f,\mu} \equiv \infty$. Функция $\xi_{f,\mu}$ может быть построена как непрерывная справа (обобщенная) обратная функция к $\eta_{f,\mu}$, т. е. $\xi_{f,\mu}(x) := \inf\{y \in [0, +\infty)\colon \eta_{f,\mu}(y) \leqslant x\}$, $x \in [0, \infty)$.

Функция $\xi_{f,\mu}$ называется *убывающей перестановкой* функции $|f|$ относительно меры μ.

В случае, если $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = (I, \mathcal{B}_m, m)$, функция $\xi_{f,\mu}$ обычно обозначается как f^* (см., например, [74]). Мы не используем это стандартное обозначение.

В случае $\mu(\Omega) = a < \infty$ функция $\xi_{f,\mu}$ определена на отрезке $[0, a]$, так как $\eta_{f,\mu}(x) \leqslant a$ для всех $x \in [0, \infty)$.

В случае $\mu(\Omega) = \infty$ функция $\xi_{f,\mu}$ определена на $[0, \infty)$ и продолжается на $[0, \infty]$ равенством $\xi_{f,\mu}(\infty) := \lim\limits_{x\to\infty} \xi_{f,\mu}(x) = \inf\{y > 0\colon \eta_f(y) < \infty\}$. В этом случае возможно, что $\eta_{f,\mu}(x) = \infty$ или $\xi_{f,\mu}(x) = \infty$ для некоторых или для всех $x \in [0, \infty)$, поэтому удобно ввести подпространство

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_0^{\xi}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) &:= \{f \in \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)\colon \xi_{f,\mu}(x) < \infty, x \in I\} = \\ &= \{f \in \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)\colon \eta_{f,\mu}(\infty) = \lim_{x\to\infty} \eta_{f,\mu}(x) = 0, x > 0\}.\end{aligned}$$

По определению, $\xi_{f,\mu} \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathbf{L}_0^{\xi}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и $\eta_{\xi_{f,\mu},m}(y) = m(\{x \in \mathbb{R}^+\colon \xi_{f,\mu}(x) > y\}) = \xi^{-1}_{f,\mu}(y) = \eta_{f,\mu}(y)$, $y > 0$.

Две неотрицательные функции $f_1 \in \mathbf{L}_0(\Omega_1, \mathcal{F}_{\mu_1}, \mu_1)$ и $f_2 \in \mathbf{L}_0(\Omega_2, \mathcal{F}_{\mu_2}, \mu_2)$ называются *равноизмеримыми*, если они имеют одинаковые функции распределения $\eta_{f_1,\mu_1} = \eta_{f_2,\mu_2}$, что, очевидно, эквивалентно $\xi_{f_1,\mu_1} = \xi_{f_2,\mu_2}$.

Следует отметить, что функции $f_1 \in \mathbf{L}_0(\Omega_1, \mathcal{F}_{\mu_1}, \mu_1)$ и $f_2 \in \mathbf{L}_0(\Omega_2, \mathcal{F}_{\mu_2}, \mu_2)$ определены, возможно, на различных пространствах с мерами $(\Omega_1, \mathcal{F}_{\mu_1}, \mu_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{F}_{\mu_2}, \mu_2)$, соответственно, в то время как их перестановки ξ_{f_1,μ_1} и ξ_{f_2,μ_2} определяются на одном и том же сегменте $[0, a]$, где $a = \mu_1(\Omega_1) = \mu_1(\Omega_2)$.

1.1.2. Симметричные пространства. Нетривиальное банахово (или, более обще, квази-банахово) пространство $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}}) = (\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu), \|\cdot\|_{\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)})$ действительных измеримых функций на пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ называется *симметричным*, если выполнены следующие два условия:

1. Если $f \in \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, $g \in \mathbf{E}$ и $|f| \leqslant |g|$, то $f \in \mathbf{E}$ и $\|f\|_{\mathbf{E}} \leqslant \|g\|_{\mathbf{E}}$.
2. Если $f \in \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, $g \in \mathbf{E}$ и $\eta_{f,\mu} = \eta_{g,\mu}$, то $f \in \mathbf{E}$ и $\|f\|_{\mathbf{E}} = \|g\|_{\mathbf{E}}$.

Условие 1 означает, что $\mathbf{E}$ является идеальной банаховой (квази-банаховой) подрешеткой в $\mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Условие 2 представляет собой *условие симметричности*, или *перестановочной инвариантности*, нормы (квазинормы) $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$.

Таким образом, симметричное пространство — это идеальная банахова (квази-банахова) решетка с симметричной нормой (квазинормой).

Так как из $|f| \leqslant |g|$ следует $\eta_{f,\mu} \leqslant \eta_{g,\mu}$ и $\xi_{f,\mu} \leqslant \xi_{g,\mu}$, то условия 1 и 2 могут быть записаны с помощью перестановок $\xi_{f,\mu}$ следующим образом: $f \in \mathbf{L}_0$, $g \in \mathbf{E}$ и $\xi_{f,\mu} \leqslant \xi_{g,\mu} \implies f \in \mathbf{E}$ и $\|f\|_{\mathbf{E}} \leqslant \|g\|_{\mathbf{E}}$.

Рассмотрим классические пространства $\mathbf{L}_p(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) := \{f \in \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)\colon \|f\|_{\mathbf{L}_p(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)} < \infty\}$ при $0 < p \leqslant \infty$, где $\|f\|_{\mathbf{L}_p} = \|f\|_{\mathbf{L}_p(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)} = \left(\int\limits_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ для $0 < p < \infty$, а $\|f\|_{\mathbf{L}_\infty} = \|f\|_{\mathbf{L}_\infty(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)} := \inf\{a > 0\colon \mu\{|f| > a\} = 0\}$.

Пространства $\mathbf{L}_p(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ являются идеальными банаховыми решетками, если $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и идеальными квази-банаховыми решетками при $0 < p < 1$.

В последнем случае квазинорма $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_p(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)}$ является p-нормой, т. е. $\|f+g\|^p_{\mathbf{L}_p} \leqslant \|f\|^p_{\mathbf{L}_p} + \|g\|^p_{\mathbf{L}_p}$, $f, g \in \mathbf{L}_p$. Таким образом, $\mathbf{L}_p$ является полным метрическим пространством относительно метрики $\delta_p(f,g) = \|f-g\|^p_{\mathbf{L}_p}$.

С другой стороны,

$$\|f\|_{\mathbf{L}_p(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)} = \left(\int\limits_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int\limits_0^\infty (\xi_{f,\mu})^p dm\right)^{\frac{1}{p}} = \|\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_p(I,\mathcal{B}_m,m)}$$

для каждого $0 < p < \infty$, и $\|f\|_{\mathbf{L}_\infty(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)} = \max\limits_{x\in\mathbb{R}^+} \xi_{f,\mu}(x) = \xi_{f,\mu}(0) = \|\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_\infty(I,\mathcal{B}_m,m)}$, так как функции $|f| \in \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и $\xi_{f,\mu} \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$ равноизмеримые.

Эти равенства показывают, что $\mathbf{L}_p(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ являются симметричными квази-банаховыми пространствами для каждого $0 < p \leqslant \infty$ и симметричными банаховыми пространствами при $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Возвращаясь к рассмотрению общих симметричных пространств $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, рассмотрим отдельно два случая.

1. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. Тогда имеют место непрерывные вложения $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \subset \mathbf{L}_0$, причем

$$\varphi_{\mathbf{E}}(1) \cdot \|f\|_{\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty} \geqslant \|f\|_{\mathbf{E}} \geqslant \varphi_{\mathbf{E}}(1) \cdot \|f\|_{\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty}, \quad f \in \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty,$$

где $\varphi_{\mathbf{E}}(t) := \|\mathbf{1}_{[0,t]}\|_{\mathbf{E}}$, $t \geqslant 0$ — фундаментальная функция симметричного пространства $\mathbf{E}$ и $\varphi_{\mathbf{E}}(1) = \|\mathbf{1}_{[0,1]}\|_{\mathbf{E}}$, см. [74, § II.4.1], а также [99, теорема 1.1], где доказана уточненная оценка $\varphi_{\mathbf{E}}(1)\| \cdot \|_{\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty} \geqslant \| \cdot \|_{\mathbf{E}}$ (вместо $2\varphi_{\mathbf{E}}(1)\| \cdot \|_{\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty} \geqslant \| \cdot \|_{\mathbf{E}}$, используемой в [74]).

В случае $\mu(\Omega) = a < \infty$ имеют место непрерывные вложения $\mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}_0$, причем $\| \cdot \|_{\mathbf{L}_\infty} \geqslant \| \cdot \|_{\mathbf{E}} \geqslant \dfrac{\varphi_{\mathbf{E}}(a)}{a}\| \cdot \|_{\mathbf{L}_1}$.

2. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное квази-банахово пространство на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, удовлетворяющее слабому неравенству треугольника

$$\|f+g\|_{\mathbf{E}} \leqslant C(\|f\|_{\mathbf{E}} + \|g\|_{\mathbf{E}}),\ f, g \in \mathbf{E} \tag{1.1}$$

с константой $C > 1$. Тогда по теореме Аоки—Ролевича [23,109] квазинорму $\| \cdot \|_{\mathbf{E}}$ можно заменить на эквивалентную p-субаддитивную квазинорму $||| \cdot |||_{\mathbf{E}}$ такую, что

$$|||f+g|||^p_{\mathbf{E}} \leqslant |||f|||^p_{\mathbf{E}} + |||g|||^p_{\mathbf{E}},\ f, g \in \mathbf{E},$$

где $p := \dfrac{\ln 2}{\ln 2 + \ln C} < 1$. Такая квазинорма $||| \cdot |||_{\mathbf{E}}$ называется *p-нормой*, а квази-банахово пространство называется *p-нормируемым*. Отметим, что $\mathbf{E}$ становится полным линейным метрическим пространством относительно трансляционно-инвариантной метрики $\delta_{\mathbf{E}}(f,g) = \|f-g\|_{\mathbf{E}}$, $f, g \in \mathbf{E}$.

Константа $C_{\mathbf{E}} = \inf\{C$ *в слабом неравенстве треугольника* (1.1)$\}$ называется *модулем вогнутости* квази-банахова пространства $\mathbf{E}$ (см. [56] и имеющиеся там ссылки). Очевидно, $C_{\mathbf{E}} = 1$, если пространство $\mathbf{E}$ нормируемо. Обратное, вообще говоря, неверно.

1.2. Равноизмеримые симметричные пространства.

1.2.1. Определения и две основные теоремы. Напомним, что здесь, как и далее, рассматриваются измеримые пространства $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ с конечной или бесконечной σ-конечной *неатомической* мерой μ.

Соответствующее пространству $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ стандартное пространство с мерой $(I, \mathcal{B}_m, m)$ определяется как $I = [0, \infty)$, если $\mu(\Omega) = \infty$, и $I = [0, a]$, если $\mu(\Omega) = a < \infty$. Здесь m — обычная мера Лебега на I, а $\mathcal{B}_m$ — m-пополнение борелевской σ-алгебры $\mathcal{B} = \mathcal{B}(I)$ относительно меры m.

Симметричное пространство $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ называется *стандартным*, если соответствующее пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ стандартно.

Для симметричного пространства $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ рассмотрим множество

$$\Xi(\mathbf{E}) := \{\xi_{f,\mu} \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m) \colon f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)\}.$$

Дополнительное условие $\xi_{f,\mu} \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$ имеет смысл только при $\mu(\Omega) = \infty$. В этом случае $\xi_{f,\mu}(x) < \infty$ для всех $x \in (0, \infty)$, т. е. $\eta_{f,\mu}(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} \eta_{f,\mu}(x) = 0$.

Функция $\|\cdot\|_{\mathbf{E}} \colon \mathbf{E} \to [0,\infty)$ индуцирует отображение $\|\cdot\|_{\Xi(\mathbf{E})} \colon \Xi(\mathbf{E}) \to [0,\infty)$ на множестве $\Xi(\mathbf{E})$, где $\|g\|_{\Xi(\mathbf{E})} = \|f\|_{\mathbf{E}}$, $g = \xi_{f,\mu} \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$ для некоторой функции $f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$.

Два симметричных пространства $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1(\Omega_1, \mathcal{F}_{\mu_1}, \mu_1)$ и $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2(\Omega_2, \mathcal{F}_{\mu_2}, \mu_2)$ будем называть *равноизмеримыми*, если $\Xi(\mathbf{E}_1) = \Xi(\mathbf{E}_2)$. Если, кроме того, $\|\cdot\|_{\Xi(\mathbf{E}_1)} = \|\cdot\|_{\Xi(\mathbf{E}_2)}$, то пространства $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1(\Omega_1, \mathcal{F}_{\mu_1}, \mu_1)$, $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2(\Omega_2, \mathcal{F}_{\mu_2}, \mu_2)$ будем называть *строго равноизмеримыми*.

Следующие две теоремы показывают, что каждый класс равноизмеримых симметричных пространств содержит стандартное симметричное пространство, в то время как все равноизмеримые стандартные симметричные пространства совпадают.

Теорема 1.1. *Пусть $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ — стандартное симметричное пространство и $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — произвольное измеримое пространство с (конечной или бесконечной σ-конечной неатомической) мерой μ, и пусть*

$$\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \{f \in \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \colon \xi_{f,\mu} \in \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)\}, \tag{1.2}$$

$$\|f\|_{\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)} = \|\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m)}, \quad f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu). \tag{1.3}$$

Тогда пространство $(\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu), \|\cdot\|_{\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)})$, определенное в (1.2) *и* (1.3), *является симметричным пространством на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. Симметричные пространства $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ и $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ строго равноизмеримы.*

Теорема 1.2. *Пусть $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное пространство на пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, и пусть*

$$\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m) := \{g \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m) \colon \xi_{g,m} = \xi_{f,\mu} \text{ для некоторой функции } f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)\}, \tag{1.4}$$

$$\|g\|_{\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m)} = \|f\|_{\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)} \text{ если } \xi_{g,m} = \xi_{f,\mu} \text{ и } f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu). \tag{1.5}$$

Тогда пространство $(\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m), \|\cdot\|_{\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m)})$, определенное в (1.4) *и* (1.5), *является стандартным симметричным пространством. Симметричные пространства $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ строго равноизмеримы.*

Следуя [100], рассмотрим сначала сепарабельные пространства с мерой, и затем сведем несепарабельный случай к рассмотренному.

1.2.2. Сепарабельный случай. Напомним, что пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ называется *сепарабельным*, если σ-алгебра $\mathcal{F}$ является счетно порожденной $\mathrm{mod}\ \mu$. Это означает, что существует счетная подалгебра $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$, такая что $\mathcal{F} \subseteq (\mathcal{F}(\mathcal{A}))_\mu \subseteq \mathcal{F}_\mu$, где $(\mathcal{F}(\mathcal{A}))_\mu$ — μ-пополнение σ-алгебры $\mathcal{F}(\mathcal{A})$, порожденной подалгеброй $\mathcal{A}$.

Счетная подалгебра $\mathcal{A}$ плотна в $\mathcal{F}$ в следующем смысле: для каждого $A \in \mathcal{F}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $B \in \mathcal{A}$, что $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$.

Теорема 1.3. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — сепарабельное пространство с σ-конечной неатомической мерой и $(I, \mathcal{B}_m, m)$ — соответствующее стандартное пространство. Тогда существует алгебраический, порядковый, топологический и сохраняющий интеграл изоморфизм*

$$\Phi \colon \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m).$$

Для каждого симметричного пространства $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \subset \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ограничение $\Phi_{\mathbf{E}} = \Phi|_{\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F},\mu)}$ является изометрическим изоморфизмом между симметричным пространством $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ и равноизмеримым с ним стандартным симметричным пространством $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$.

Эта теорема включает в себя теоремы 1.1 и 1.2 в сепарабельном случае. Изоморфизм Φ в теореме 1.3 будет описан в явном виде ниже в предложении 1.1.

Пусть $\mathcal{A}$ — счетная подалгебра в $\mathcal{F}_\mu$. Говорят, что $\mathcal{A}$ *разделяет* точки Ω, если для каждой пары точек $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ существует множество $A \in \mathcal{A}$, такое что $\omega_1 \in A$ и $\omega_2 \notin A$.

Если $\mathcal{A}$ не разделяет точки Ω, мы можем рассмотреть разбиение $\zeta = \zeta(\mathcal{A})$ в Ω, порожденное $\mathcal{A}$, полагая $\omega_1 \overset{\zeta}{\sim} \omega_2 \iff$ если не существует $A \in \mathcal{A}$ такого, что $\omega_1 \in A$ и $\omega_2 \notin A$. Разбиение ζ состоит из элементов $\zeta(\omega)$, $\omega \in \Omega$, где $\zeta(\omega)$ — это пересечение всех $A \in \mathcal{A}$, для которых $\omega \in A$.

Измеримые ζ-множества имеют вид $\zeta(F) = \bigcup\limits_{\omega \in F} \zeta(\omega)$, $F \in \mathcal{F}_\mu$. Обозначим через $\mathcal{F}^\mu(\mathcal{A})$ σ-алгебру всех μ-измеримых ζ-множеств. Очевидно, $\mathcal{F}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{F}^\mu(\mathcal{A})$ и $\mathcal{F}(\mathcal{A})_\mu \subseteq (\mathcal{F}^\mu(\mathcal{A}))_\mu$. Переходя к фактор-пространству $(\Omega/\zeta, \mathcal{F}/\zeta, \mu/\zeta)$, мы можем, не ограничивая общности, считать, что $\zeta(\Omega)$ разделяет точки Ω.

Предложение 1.1. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — сепарабельное пространство с σ-конечной неатомической мерой μ, и $\mathcal{A}$ — счетная подалгебра в $\mathcal{F}_\mu$, такая что $\mathcal{F}(\mathcal{A})_\mu = \mathcal{F}_\mu$, а $\zeta(\mathcal{A})$ разделяет точки Ω. Пусть $(I, \mathcal{B}_m, m)$ — соответствующее $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ стандартное пространство с мерой.*

Тогда существует подмножество $J \subseteq I$ полной внешней меры m^* в I и сохраняющее меру отображение $\varphi\colon (\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \to (J, \mathcal{F}_J, m_J)$ такое, что сужение $\varphi|_{\mathcal{F}^\mu(\mathcal{A})}\colon (\Omega, \mathcal{F}^\mu(\mathcal{A}), \mu|_{\mathcal{F}^\mu(\mathcal{A})}) \to (J, \mathcal{F}_J, m_J)$ является сохраняющим меру изоморфизмом между пространством $(\Omega, \mathcal{F}^\mu(\mathcal{A}), \mu|_{\mathcal{F}^\mu(\mathcal{A})})$ и пространством с мерой $(J, \mathcal{F}_J, m_J)$, индуцированным $(I, \mathcal{B}_m, m)$ на J.

Изоморфизм пространств с мерой $\varphi|_{\mathcal{F}^\mu(\mathcal{A})}$ определяет изоморфизм $\Phi\colon \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$ из теоремы 1.3.

Предложение 1.1 требует некоторых пояснений.

- Подмножество $J \subseteq I$ не обязано быть измеримым, $A \in \mathcal{F}_J$ тогда и только тогда, когда $A = B \cap J$ для некоторого $B \in \mathcal{B}_m$ и $\mu_J(A) = m(B)$, так как J — подмножество полной внешней меры m^*. Это означает, что I является измеримой оболочкой J, см. [42, § 214 A-J].
- Если $J \in \mathcal{B}_m$, т. е. является измеримым, то $m(I \setminus J) = 0$. Измеримое подпространство $(J, \mathcal{F}_J, m_J)$ является пространством Лебега, так же как и пространство $(I, \mathcal{B}_m, m)$. Эти два пространства Лебега изоморфны, и мы можем считать без ограничения общности, что в этом случае $J = I$.
- Пусть счетная подалгебра $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ разделяет точки Ω и $\mathcal{F}(\mathcal{A})_\mu = \mathcal{F}_\mu$. Тогда подмножество J m-измеримо тогда и только тогда, когда само пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ является пространством Лебега.

Доказательство предложения 1.1 использует явное описание сепарабельных пространств с мерой, неизоморфных пространствам Лебега, и некоторые другие результаты из работы В. А. Рохлина [16]. Более подробная информация содержится в работе [100].

1.2.3. Доказательство теорем 1.1 *и* 1.2.

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — общее (не обязательно сепарабельное) неатомическое пространство с мерой, и пусть $(I, \mathcal{B}_m, m)$ — соответствующее стандартное пространство с мерой.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ класс всех подалгебр $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_\mu$, таких что

- подалгебра $\mathcal{A}$ счетная,
- соответствующее сепарабельное пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}(\mathcal{A})_\mu, \mu|_{\mathcal{F}(\mathcal{A})_\mu})$ неатомическое,
- сужение $\mu|_{\mathcal{F}(\mathcal{A})_\mu}$ меры μ на σ-алгебру $\mathcal{F}(\mathcal{A})_\mu$ является σ-конечной мерой.

Напомним еще раз, что сама мера μ предполагается неатомической и σ-конечной.

Для сокращения обозначений мы будем писать: $\mathcal{F}_\mathcal{A} = \mathcal{F}(\mathcal{A})_\mu$, $\mu_\mathcal{A} = \mu|_{\mathcal{F}(\mathcal{A})_\mu}$ для $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$.

Для каждой подалгебры $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ мы выбираем и фиксируем алгебраический, порядковый, топологический и сохраняющий интеграл изоморфизм $\Phi_\mathcal{A}\colon \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A}) \to \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$, как в теореме 1.3.

Пусть $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$ — стандартное симметричное пространство и $\Xi_0 = \Xi(\mathbf{E}_0)$, $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{\Xi(\mathbf{E}_0)}$. Так как $\Phi_\mathcal{A}$ сохраняет функции распределения, пространство $\mathbf{E}_\mathcal{A} := \Phi_\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{E}_0)$ является симметричным пространством на сепарабельном пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A})$, и $\mathbf{E}_\mathcal{A} = \mathbf{E}_\mathcal{A}(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A})$ — единственное симметричное пространство на $(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A})$, которое равноизмеримо с $\mathbf{E}_0$. Таким образом, $(\Xi_\mathcal{A}, \|\cdot\|_\mathcal{A}) = (\Xi_0, \|\cdot\|_0)$ для каждой подалгебры $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$.

Переходя к пространству $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, рассмотрим пространство $(\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu), \|\cdot\|_{\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)})$, определенное в (1.2) и (1.3). Так как пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — неатомическое и σ-конечное, то $\mathcal{F}_\mu = \bigcup\limits_{\mathcal{A} \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_\mathcal{A}$, и следовательно, $\mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = \bigcup\limits_{\mathcal{A} \in \mathfrak{A}} \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A})$. Из этого равенства следует, что $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = \bigcup_{\mathcal{A} \in \mathfrak{A}} \mathbf{E}_\mathcal{A}(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A})$. Каждое $\mathbf{E}_\mathcal{A}(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A})$ является симметричным пространством на своем собственном пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A})$. Поэтому их объединение является симметричным пространством на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. Более того, $\Xi(\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)) = \Xi(\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A})) = \Xi(\mathbf{E}_0(I, \mathcal{B}_m, m)) = \Xi_0$ для любой $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$. Для каждой функции $f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ существует подалгебра $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$, такая что $f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A})$ и $\|f\|_{\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)} = \|f\|_{\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A})} = \|\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{E}_0(I, \mathcal{B}_m, m)} = \|\xi_{f,\mu}\|_0$.

Таким образом, все симметричные пространства $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A})$ и $\mathbf{E}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$ являются равноизмеримыми. Доказательство теоремы 1.1 завершено. □

Доказательство теоремы 1.2. Пусть теперь $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное пространство на пространстве с неатомической конечной или бесконечной σ-конечной мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и $(I, \mathcal{B}_m, m)$ соответствующее стандартное пространство с мерой. Пусть также $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ и $\|\cdot\|_{\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)}$ пространство и норма, определенные равенствами (1.4) и (1.5).

Выбирая фиксированную счетную подалгебру $\mathcal{A}_1 \in \mathfrak{A}$, рассмотрим сепарабельное пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_1, \mu_1) = (\Omega, \mathcal{F}_{\mathcal{A}_1}, \mu_{\mathcal{A}_1})$ и пересечение $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1(\Omega, \mathcal{F}_1, \mu_1) := \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \cap \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_{\mathcal{A}_1}, \mu_{\mathcal{A}_1})$. Тогда норма (или квазинорма) $\|\cdot\|_{\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)}$ индуцирует норму (или квазинорму) $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_{\mathbf{E}_1(\Omega, \mathcal{F}_1, \mu_1)}$ на $\mathbf{E}_1$ и $(\mathbf{E}_1, \|\cdot\|_1)$ является симметричным пространством на $(\Omega, \mathcal{F}_1, \mu_1)$.

По теореме 1.3 существует алгебраический, порядковый, топологический и сохраняющий интеграл изоморфизм $\Phi_1\colon \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_1, \mu_1) \to \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$ такой, что сужение $\Phi_1|_{\mathbf{E}_1}$ является изометрическим изоморфизм между симметричным пространством $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1(\Omega, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ и равноизмеримым с ним стандартным симметричным пространством $\mathbf{E}_1(I, \mathcal{B}_m, m)$.

Очевидно, $\mathbf{E}_1(\Omega, \mathcal{F}_1, \mu_1) \subseteq \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \iff \mathbf{E}_1(I, \mathcal{B}_m, m) \subseteq \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$. С другой стороны, пусть $g \in \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$, т. е. $\xi_{g,m} = \xi_{f,\mu}$ для некоторой функции $f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. Тогда существует подалгебра $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ такая, что $f \in \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A})$. Используя изоморфизм $\Phi_\mathcal{A}\colon \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A}) \to \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$, положим $f_1 = \Phi_1^{-1}(\Phi_\mathcal{A}(f))$. Тогда $f_1 \in \mathbf{E}_1(\Omega, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ и $\xi_{f_1,\mu_1} = \xi_{f,\mu} = \xi_{g,m}$, т. е. $g \in \mathbf{E}_1(I, \mathcal{B}_m, m)$.

Следовательно, $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m) = \mathbf{E}_1(I, \mathcal{B}_m, m)$, и $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ является стандартным симметричным пространством, так как таковым является пространство $\mathbf{E}_1(I, \mathcal{B}_m, m)$. Все пространства $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ и $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A})$, $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ строго равноизмеримы.

Доказательство теоремы 1.2 завершено. □

Простейшие несепарабельные пространства с мерой $(\Omega^\Upsilon, \mathcal{F}^\Upsilon, \mu^\Upsilon)$ можно построить следующим образом: $(\Omega^\Upsilon, \mathcal{F}^\Upsilon, \mu^\Upsilon) = (I, \mathcal{B}_m, m) \times \prod_{\upsilon \in \Upsilon} (\Omega_\upsilon, \mathcal{F}_\upsilon, \mu_\upsilon)$, где $(\Omega_\upsilon, \mathcal{F}_\upsilon, \mu_\upsilon)$ для любого $\upsilon \in \Upsilon$ определяется следующим образом: $\Omega_\upsilon = \{0, 1\}$, $\mathcal{F}_\upsilon = 2^{\{0,1\}}$, $\mu_\upsilon(0) = \mu_\upsilon(1) = 1/2$.

Выбирая индексные множества Υ различной мощности, мы получаем различные пространства с мерой $(\Omega^\Upsilon, \mathcal{F}^\Upsilon, \mu^\Upsilon)$ и различные симметричные пространства $\mathbf{E}(\Omega^\Upsilon, \mathcal{F}^\Upsilon, \mu^\Upsilon)$, равноизмеримые с одним и тем же стандартным симметричным пространством $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$.

С другой стороны, для любого счетного подмножества Υ_0 из Υ естественная проекция

$$\pi_0\colon (\Omega^\Upsilon, \mathcal{F}^\Upsilon, \mu^\Upsilon) \to (\Omega^{\Upsilon_0}, \mathcal{F}^{\Upsilon_0}, \mu^{\Upsilon_0)} = (I, \mathcal{B}_m, m) \times \prod_{\upsilon \in \Upsilon_0} (\Omega_\upsilon, \mathcal{F}_\upsilon, \mu_\upsilon)$$

порождает сепарабельное пространство с мерой $(\Omega^{\Upsilon_0}, \mathcal{F}^{\Upsilon_0}, \mu^{\Upsilon_0})$, где $\mathcal{F}^{\Upsilon_0} = \{\pi_0^{-1} A_0,\ A_0 \in \mathcal{F}^{\Upsilon_0}\}$ и $\mu^{\Upsilon_0} = \mu^\Upsilon|_{\mathcal{F}^{\Upsilon_0}}$. При произвольном выборе счетного подмножества Υ_0 симметричное пространство $\mathbf{E}(\Omega^\Upsilon, \mathcal{F}^\Upsilon, \mu^\Upsilon) \cap \mathbf{L}_0(\Omega^{\Upsilon_0}, \mathcal{F}^{\Upsilon_0}, \mu^{\Upsilon_0})$ изометрически изоморфно тому же стандартному симметричному пространству $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$. Однако оно не обязательно должно быть изоморфно исходному симметричному пространству $\mathbf{E}(\Omega^\Upsilon, \mathcal{F}^\Upsilon, \mu^\Upsilon)$, если Υ несчетно.

1.2.4. Равенство $\xi_{f,\mu} = f \circ \phi$. Как прямое следствие теоремы 1.3, мы можем получить следующий полезный результат.

Теорема 1.4. *Пусть $f \in \mathbf{L}_0^\xi(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — измеримая неотрицательная функция такая, что $\xi_{f,\mu}(\infty) = 0$. Тогда существует сохраняющее меру отображение $\phi\colon (\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \to (I, \mathcal{B}_m, m)$ такое, что $\xi_{f,\mu} = f \circ \phi$.*

Доказательство. В силу теоремы 1.3, не ограничивая общности, можно считать, что рассматриваемое пространство с мерой стандартно.

Для каждой $f \in \mathbf{L}_0^{\xi}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ обозначим через ζ_f измеримое разбиение $(I, \mathcal{B}_m, m)$, которое состоит из элементов вида

$$\zeta_f(x) = \begin{cases} f^{-1}(f(x)), & \text{если } m(\{f = x\}) = 0, \\ x, & \text{если } m(\{f = x\}) > 0. \end{cases}$$

Пусть π_{ζ_f} — естественная проекция $(I, \mathcal{B}_m, m)$ на фактор-пространство $(I/\zeta_f, \mathcal{B}_m/\zeta_f, m/\zeta_f)$. Предположение $\xi_{f,\mu}(\infty) = 0$ предусматривает, что фактор-мера m/ζ_f является σ-конечной. При этом $(I/\zeta_f, \mathcal{B}_m/\zeta_f, m/\zeta_f)$ является пространством Лебега, так как функция f, а потому и разбиение ζ_f, измеримы.

Функция $\hat{f}$, определенная на I/ζ_f равенством $f = \hat{f} \circ \pi_{\zeta_f}$, является равноизмеримой с f, так как π_{ζ_f} сохраняет меру. По построению, разбиение $\zeta_{\hat{f}}$ разделяет точки I/ζ_f, а разбиение $\zeta_{\xi_{f,\mu}}$ обладает этим свойством на I.

Поэтому существует сохраняющий меру изоморфизм $\tau\colon (I/\zeta_f, \mathcal{B}_m/\zeta_f, m/\zeta_f) \to (I, \mathcal{B}_m, m)$, такой что $\hat{f} = \xi_{f,\mu} \circ \tau$. Отображение $\phi = \tau \circ \pi_{\zeta_f}$ — требуемое. □

Теорема 1.4 хорошо известна довольно давно. Явное доказательство было дано в [25, § 2.7] и ранее в [113] для случая $\Omega = \mathbb{R}$. Для пространств Лебега теорему 1.4 можно вывести из работы Рохлина [17]. Приведенное выше доказательство является новым (см. [100]).

1.3. Минимальность. Максимальность. Условия (A), (B) и (C).

1.3.1. Минимальность. Условия (A) *и* (C). Симметричное пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ называется *минимальным*, если множество $\mathbf{F}_1$ всех простых (конечнозначных) интегрируемых функций на Ω плотно в $\mathbf{E}$, т. е. замыкание $cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{F}_1)$ совпадает с $\mathbf{E}$.

Множество $\mathbf{F}_1$ состоит из всех простых функций $f\colon \Omega \to [0, \infty)$ таких, что $0 \leqslant \mu(\{|f| = a\}) < \infty$ для всех $a > 0$. Для каждого $0 < p < \infty$ множество $\mathbf{F}_1$ плотно в $\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_\infty$ по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_\infty}$.

- Пусть $\mathbf{E}$ — симметричное квази-банахово пространство с модулем вогнутости $c_{\mathbf{E}} > 1$, и пусть $0 < p < 1$ такое, что $C = 2^{1/p-1} > c_{\mathbf{E}}$. Тогда $\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E}$, причем $\mathbf{E}$ минимально тогда и только тогда, когда $cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_\infty) = \mathbf{E}$.
- Пусть $\mathbf{E}$ — симметричное банахово пространство. Тогда $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E}$, причем $\mathbf{E}$ минимально тогда и только тогда, когда $cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty) = \mathbf{E}$.

В общем случае $\mathbf{E}^0 := cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{F}_1) \subseteq \mathbf{E}$ является симметричным пространством, называемым *минимальной частью* $\mathbf{E}$. Таким образом, $\mathbf{E}$ — минимальное симметричное пространство тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}^0 = \mathbf{E}$.

Ясно, что два равноизмеримых симметричных пространства минимальны или не минимальны одновременно.

Говорят, что симметричное пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ удовлетворяет *условию* (A) (имеет *порядково непрерывную норму*), когда

(A) *Если* $0 \leqslant f_n \in \mathbf{E}$ *и* $f_n \downarrow 0$, *то* $\|f_n\|_{\mathbf{E}} \downarrow 0$.

Говорят, что функция $f \in \mathbf{E}$ имеет *абсолютно непрерывную норму*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|\mathbf{1}_A f\| < \varepsilon$ для каждого $A \in \mathcal{F}_\mu$ с мерой $\mu(A) < \delta$.

Теорема 1.5. *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — *симметричное пространство на* $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

- $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условию* (A).
- *Каждая функция* $f \in \mathbf{E}$ *имеет абсолютно непрерывную норму.*
- $\mathbf{E}$ *минимально и* $\varphi_{\mathbf{E}}(0+) = 0$.

Этот результат хорошо известен в случае, когда $\mathbf{E}$ является симметричным банаховым пространством: см. [70, § X.3, теорема 3] и [78, утверждение 1.a.8, теорема 1.b.16]. Утверждение остается в силе, если мы заменим норму на p-норму.

Говорят, что симметричное пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ удовлетворяет *условию* (*C*) (*имеет порядково полунепрерывную норму*), если

(C) *Из* $0 \leqslant f_n \uparrow f \in \mathbf{E}$ *следует, что* $\sup_n \|f_n\|_{\mathbf{E}} = \|f\|_{\mathbf{E}}$.

Заметим, что симметричное пространство $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ удовлетворяет условию (C) тогда и только тогда, когда соответствующее ему стандартное симметричное пространство $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ удовлетворяет этому условию.

Легко видеть, что из условия (A) следуют условие (C) и минимальность.

Минимальное симметричное пространство не обязательно должно удовлетворять условию (A). В то же время, имеет место следующая теорема.

Теорема 1.6. *Любое минимальное симметричное пространство удовлетворяет условию* (C).

При доказательстве этой теоремы мы используем [99, § 2, т. 2.2], где этот результат доказан для стандартных симметричных банаховых пространств.

Доказательство. Мы можем предполагать, что $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$ является p-нормой с $0 < p \leqslant 1$.

Так как условие минимальности и условие (C) являются инвариантами для равноизмеримых симметричных пространств, то можно считать, что $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$. В этом случае $\xi_{f,m} \in \mathbf{E}$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathbf{E}$.

Если $\varphi_{\mathbf{E}}(0+) = 0$, то из минимальности по теореме 1.5 следует условие (A). А из условия (A), очевидно, следует условие (C).

Пусть теперь $\varphi_{\mathbf{E}}(0+) = c > 0$. Для каждой $f \in \mathbf{E}$ и каждой последовательности $x_n \downarrow 0$ имеем:

$$\|\xi_{f,m}\|_{\mathbf{E}} \geqslant \|\xi_{f,m} \cdot \mathbf{1}_{[0,x_n]}\|_{\mathbf{E}} \geqslant \xi_{f,m}(x_n)\|\mathbf{1}_{[0,x_n]}\|_{\mathbf{E}} = \xi_{f,m}(x_n)\varphi_{\mathbf{E}}(x_n) \geqslant c \cdot \xi_{f,m}(x_n).$$

Отсюда $\|f\|_{\mathbf{L}_\infty} = \xi_{f,m}(0) = \sup_n \xi_{f,m}(x_n) \leqslant \frac{1}{c}\|\xi_{f,m}\|_{\mathbf{E}} < \infty$, т. е. $f \in \mathbf{L}_\infty$. Таким образом, $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_\infty$.

В случае, когда I — конечный интервал, $\mathbf{E}$ совпадает с $\mathbf{L}_\infty$, и потому удовлетворяет условию (C). Остается рассмотреть случай $I = [0.\infty)$.

Покажем, что если $\mathbf{E}$ минимально и $\mathbf{E} \subset \mathbf{L}_\infty$ (включение строгое), то для каждой функции $f \in \mathbf{E}$:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f \cdot \mathbf{1}_{[0,n]}\|_{\mathbf{E}} = 0. \tag{1.6}$$

Пусть $\mathbf{F}_0$ — множество всех простых функций на I с ограниченным носителем. Простая функция g принадлежит $\mathbf{F}_0$ тогда и только тогда, когда $g \cdot \mathbf{1}_{[a,\infty)} = 0$ для некоторого конечного $a > 0$.

Так как $\mathbf{F}_0$ плотно в $\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_\infty$ для $0 < p < \infty$ и $\mathbf{E}$ минимально, то мы имеем

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 = cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_\infty) = cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{F}_0).$$

Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $g \in \mathbf{F}_0$ такая, что $\|f - g\|_{\mathbf{E}} < \varepsilon$. Отсюда

$$\|f - f \cdot \mathbf{1}_{[0,n]}\|_{\mathbf{E}}^p \leqslant \|f - g\|_{\mathbf{E}}^p + \|g - g \cdot \mathbf{1}_{[0,n]}\|_{\mathbf{E}}^p + \|g \cdot \mathbf{1}_{[0,n]} - f \cdot \mathbf{1}_{[0,n]}\|_{\mathbf{E}}^p.$$

Более того, $\|g - g \cdot \mathbf{1}_{[0,n]}\|_{\mathbf{E}} = 0$ для достаточно больших n, и

$$\|g \cdot \mathbf{1}_{[0,n]} - f \cdot \mathbf{1}_{[0,n]}\|_{\mathbf{E}} \leqslant \|f - g\|_{\mathbf{E}} < \varepsilon.$$

Следовательно, $\|f - f \cdot \mathbf{1}_{[0,n]}\|_{\mathbf{E}} < c(\varepsilon)$ для достаточно больших n, и поэтому имеет место (1.6).

Пусть теперь $0 \leqslant f_n \uparrow f \in \mathbf{E} \subset \mathbf{L}_\infty$. Тогда из (1.6) следует $\sup_n \|f_n\|_{\mathbf{E}} = \sup_n \sup_k \|f_n \cdot \mathbf{1}_{[0,k]}\|_{\mathbf{E}} = \sup_k \|f \cdot \mathbf{1}_{[0,k]}\|_{\mathbf{E}} = \|f\|_{\mathbf{E}}$. □

1.3.2. Минимальность и сепарабельность. Напомним, что пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ называется *сепарабельным*, если σ-алгебра $\mathcal{F}_\mu$ является счетно-порожденной mod μ, т. е. существует счетная σ-подалгебра $\mathcal{F}_0$ такая, что $(\mathcal{F}_0)_\mu = \mathcal{F}_\mu$.

Пространство $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ является полным метрическим пространством относительно метрики $\delta_0(f,g) = \int\limits_\Omega \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\, w\, d\mu$, $f, g \in \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и некоторой функции $w \in \mathbf{L}_1^+(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. Метрика δ_0 индуцирует топологию стохастической сходимости на $\mathbf{L}_0$, т. е. топологию сходимости по мере на всех подмножествах конечной меры.

Мы рассматриваем σ-алгебру $\mathcal{F}_\mu$ как абстрактную булеву алгебру $\nabla = \nabla(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, снабженную метрикой $\delta_\nabla(A, B) = \delta_0(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$, $A, B \in \nabla$. По определению, естественное вложение $\nabla \in A \to \mathbf{1}_A \in$

$\mathbf{L}_0$ является изометрией, (∇, δ_∇) является полным метрическим пространством, так же как и $(\mathbf{L}_0, \delta_0)$.

Известно (см., например, [70, § 1.6, т. 16]), что следующие условия эквивалентны:

- $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ сепарабельно,
- (∇, δ_∇) сепарабельно,
- $(\mathbf{L}_0, \delta_0)$ сепарабельно.

Очевидно, что сепарабельность не является инвариантом равноизмеримых симметричных пространств. Но, в отличие от сепарабельности, свойство (A), также как и минимальность, является инвариантом для равноизмеримых симметричных пространств.

Условие минимальности $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ можно сформулировать в терминах пространства $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ следующим образом. Пусть $\min(\xi_{f,\mu}, n)$ и $\xi_{f,\mu} \cdot \mathbf{1}_{[0,n]}$ — верхние и правые n-срезки функции $\xi_{f,\mu}$, где $f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и $\xi_{f,\mu} \in \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$.

- Симметричное пространство $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ является минимальным тогда и только тогда, когда $\|\xi_{f,\mu} - \min(\xi_{f,\mu}, n)\|_{\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m)} \to 0$ и $\|\xi_{f,\mu} - \xi_{f,\mu} \cdot \mathbf{1}_{[0,n]}\|_{\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m)} \to 0$ при $n \to \infty$.

Это простое замечание в сочетании с теоремами 1.1 и 1.2 приводит к следующему результату

Теорема 1.7. *Пусть $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное пространство на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, и $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ — соответствующее ему стандартное симметричное пространство на стандартном пространстве с мерой $(I, \mathcal{B}_m, m)$. Тогда*:

1. *Следующие условия эквивалентны*:
   - $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ *удовлетворяет условию* (A).
   - $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ *удовлетворяет условию* (A).
   - $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ *является сепарабельным.*
2. *Следующие условия эквивалентны в случае, когда пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ сепарабельно*:
   - $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ *удовлетворяет условию* (A).
   - $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ *удовлетворяет условию* (A).
   - $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ *сепарабельно.*

1.3.3. Ассоциированные симметричные пространства. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное пространство на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. *Ассоциированное пространство* $(\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu))^1$ симметричного пространства $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ определяется как $(\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu))^1 := \{g \in \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \colon \|g\|_{(\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu))^1} < \infty\}$, где $\|g\|_{(\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu))^1} := \sup\left\{\int\limits_\Omega fg\,d\mu,\ \|f\|_{\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)} \leqslant 1\right\}$.

Предложение 1.2. *Пусть $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ — соответствующее стандартное симметричное банахово пространство на стандартном пространстве с мерой $(I, \mathcal{B}_m, m)$.*

1. *Пространства $(\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)^1$ и $(\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m))^1$ являются симметричными банаховыми пространствами на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и $(I, \mathcal{B})_m, m)$, соответственно.*
2. *Пространства $(\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)^1$ и $(\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m))^1$ строго равноизмеримы и*

$$\|g\|_{(\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu))^1} = \|\xi_{g,\mu}\|_{(\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m))^1} = \sup\left\{\int\limits_I \xi_{f,\mu}\,\xi_{g,\mu}\,d\mu,\ \|f\|_{\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m)} \leqslant 1\right\}.$$

Доказательство. Оба утверждения 1 и 2 хорошо известны в том случае, когда пространство $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ стандартное, т. е. $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ (см. [74, § II.4] или [111, гл. 7]).

Для общего σ-конечного, неатомического пространства с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и любой фиксированной функции $g \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ можно найти счетную подалгебру $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$, как в пункте 1.2.3, такую, что $g \in \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A})$. В этом случае $\mathcal{F}_\mathcal{A} = \mathcal{F}(\mathcal{A})_\mu$, и сужение $\mu_\mathcal{A} = \mu|_{\mathcal{F}(\mathcal{A})_\mu}$ является σ-конечной мерой, в то время как пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A})$ сепарабельно.

При этом σ-конечность меры $\mu_\mathcal{A}$ позволяет нам рассмотреть условное ожидание

$$\mathbb{E}_\mu^{\mathcal{F}_\mathcal{A}} \colon (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \in f \to \mathbb{E}_\mu^{\mathcal{F}_\mathcal{A}}[f] \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A}),$$

даже если $\mu(\Omega) = \infty$, см. [39, §§ 2.3.7–2.3.9].

Элементарные свойства условных ожиданий приводят к равенствам

$$\|g\|_{(\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu))^1} = \sup\left\{ \int\limits_\Omega fg\,d\mu\colon \|f\|_{\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)} \leqslant 1\right\} = \sup\left\{ \int\limits_\Omega \mathbb{E}_\mu^{\mathcal{F}_\mathcal{A}}[f]\,g\,d\mu\colon \|f\|_{\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)} \leqslant 1\right\} =$$

$$= \sup\left\{ \int\limits_\Omega hg\,d\mu_\mathcal{A}\colon \|h\|_{\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mathcal{A},\mu_\mathcal{A})} \leqslant 1\right\} = \|g\|_{(\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mathcal{A},\mu_\mathcal{A}))^1}.$$

С другой стороны, пространство с мерой $(\Omega,\mathcal{F}_\mathcal{A},\mu_\mathcal{A})$ сепарабельно, и мы можем использовать алгебраический, порядковый, топологический, сохраняющий интеграл изоморфизм $\Phi_\mathcal{A}\colon \mathbf{L}_0(\Omega,\mathcal{F}_\mathcal{A},\mu_\mathcal{A}) \to \mathbf{L}_0(I,\mathcal{B}_m,m)$ из теоремы 1.3. Этот изоморфизм индуцирует изометрический изоморфизм между пространствами $\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mathcal{A},\mu_\mathcal{A})$ и $\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m)$ и, следовательно, определяет изометрический изоморфизм между пространствами $(\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mathcal{A},\mu_\mathcal{A}))^1$ и $(\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m))^1$.

Таким образом, $(\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m))^1$ есть стандартное пространство пространства $(\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mathcal{A},\mu_\mathcal{A}))^1$, а также пространства $(\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu))^1$. □

Далее мы будем писать $\mathbf{E}^1(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$ и $\mathbf{E}^1(I,\mathcal{B}_m,m)$ вместо $(\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu))^1$ и $(\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m))^1$.

Ассоциированное пространство $\mathbf{E}^1$ симметричного банахова пространства $\mathbf{E}$ можно отождествить с подмножеством $\{\upsilon_g\colon g\in\mathbf{E}^1\}$ дуального пространства $\mathbf{E}^*$, где $\upsilon_g(f) := \int fg\,d\mu,\ f\in\mathbf{E}$. По определению, $\upsilon_g\in\mathbf{E}^*$ и $\|\upsilon_g\|_{\mathbf{E}^*} = \|g\|_{\mathbf{E}^1}$ для каждой функции $g\in\mathbf{E}^1$.

Естественное вложение $\upsilon : \mathbf{E}^1 \ni g \to \upsilon_g \in \mathbf{E}^*$ является изометрическим изоморфизмом $\mathbf{E}^1$ на замкнутое подпространство $\{\upsilon_g, g\in\mathbf{E}^1\}$ пространства $\mathbf{E}^*$.

Следует отметить, что в общем случае $\upsilon(\mathbf{E}^1)$ может быть собственным подмножеством $\mathbf{E}^*$. Например, $\upsilon(\mathbf{E}^1)$ — собственное подмножество $\mathbf{E}^*$, если $\mathbf{E}=\mathbf{L}_\infty$.

Теорема 1.5 теперь может быть дополнена еще одним эквивалентным условием.

Теорема 1.8 (см., например, [70, § X.4]). *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$ — *симметричное банахово пространство. Тогда* $\upsilon(\mathbf{E}^1) = \{\upsilon_g,\ g\in\mathbf{E}^1\} = \mathbf{E}^*$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условию* (A).

Замечание 1.1. Приведенные выше определения и результаты формально имеют смысл для общих симметричных квази-банаховых пространств $\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$. Однако поскольку мы имеем дело только с неатомическими пространствами с мерой $(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$, то дуальное пространство $\mathbf{E}^*$ и, следовательно, ассоциированное пространство $\mathbf{E}^1$ могут быть тривиальными, если только пространство $\mathbf{E}$ не нормируемо.

Например, пусть $\mathbf{E}=\mathbf{L}_p,\ 0<p\leqslant\infty$. Для $1\leqslant p\leqslant\infty$ мы имеем $(\mathbf{L}_p)^1=\mathbf{L}_q$, где $1/p+1/q=1$, в то время как $\mathbf{L}_p=\{0\}$, если $p<1$.

Читатель может использовать обзор [56] и приведенные там ссылки, чтобы найти многие полезные результаты о дуальных пространствах $\mathbf{E}^*$ ненормируемых квази-банаховых пространств $\mathbf{E}$.

Возвращаясь к симметричным банаховым пространствам, рассмотрим ассоциированные пространства $\mathbf{E}^{11} = (\mathbf{E}^1)^1$, $\mathbf{E}^{111} = (\mathbf{E}^{11})^1$ и т. д. Непосредственно из определений следует, что $\mathbf{E}\subseteq\mathbf{E}^{11}$, причем это вложение может быть строгим. Более того, $\|f\|_{\mathbf{E}^{11}} \leqslant \|f\|_\mathbf{E},\ f\in\mathbf{E}$, т. е. естественное вложение $\mathbf{E}\to\mathbf{E}^{11}$ является сжатием.

Из условия (C) следует, что это отображение является изометрией. А именно:

Теорема 1.9. *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$ — *симметричное банахово пространство. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условию* (C).
2. $\|f\|_\mathbf{E} = \sup\{\upsilon_g(f) : \|g\|_{\mathbf{E}^1}\leqslant 1\}$.
3. $\|f\|_{\mathbf{E}^{11}} = \|f\|_\mathbf{E},\ f\in\mathbf{E}$.

Эту теорему обычно называют теоремой Накано—Амемия—Мори, см. [97] или [70, т. X.4.7].

Подпространство $\mathbf{G}\subseteq\mathbf{E}^*$ называется *нормативным*, если $\|f\|_\mathbf{E} = \sup\{g\in\mathbf{G}\colon \|g\|_{\mathbf{E}^1}\leqslant 1\}$, см. [78, §1.b]. Условие 2 в приведенной выше теореме означает, что подпространство $\upsilon(\mathbf{E}^1)$ пространства $\mathbf{E}^*$ всегда является нормативным.

Рассмотрим, для примера, пространство $\mathbf{E} = \mathbf{L}_\infty$ с новой нормой $\|f\|_{\mathbf{E}} = \|f\|_{\mathbf{L}_\infty} + \xi_{f,\mu}(\infty)$, $f \in \mathbf{E}$, где $\xi_{f,\mu}(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} \xi_{f,\mu}(x)$. Тогда $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ является симметричным банаховым пространством, которое не удовлетворяет условию (C).

В этом примере естественное вложение $\mathbf{E} \to \mathbf{L}_\infty$ не является изометричным. Однако нормы $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$ и $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_\infty}$ эквивалентны, так как для каждой функции $f \in \mathbf{E} = \mathbf{L}_\infty$: $\xi_{f,\mu}(\infty) \leqslant \xi_{f,\mu}(0) = \|f\|_{\mathbf{L}_\infty}$, $f \in \mathbf{E} = \mathbf{L}_\infty \Longrightarrow \|f\|_{\mathbf{L}_\infty} \leqslant \|f\|_{\mathbf{E}} \leqslant 2\|f\|_{\mathbf{L}_\infty}$. Поэтому отображение $\mathbf{E} \to \mathbf{E}^{11}$ является открытым.

В общем случае по теореме об открытом отображении естественное вложение $\mathbf{E} \to \mathbf{E}^{11}$ является открытым тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}$ является замкнутым в $\mathbf{E}^{11}$.

Однако существует симметричное банахово пространство, для которого $\mathbf{E}$ не является замкнутым в $\mathbf{E}^{11}$.

1.3.4. Максимальность. Условия (B) *и* (F). Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, а $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ — соответствующее ему стандартное симметричное банахово пространство на соответствующем пространстве с мерой $(I, \mathcal{B}_m, m)$.

Говорят, что симметричное пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ удовлетворяет условию (B) (*имеет монотонно полную норму*), если

(B) *Если* $0 \leqslant f_n \uparrow$, $f_n \in \mathbf{E}$, $\sup\limits_n \|f_n\|_{\mathbf{E}} < \infty$, *то* $f_n \uparrow f$ *для некоторого* $f \in \mathbf{E}$.

Заметим, что это свойство (также как и свойства (A) и (C)) инвариантно для равноизмеримых симметричных пространств.

В случае симметричных банаховых пространств мы можем использовать вложение $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^{11}$.

Симметричное пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ называется *максимальным* (или *порядково рефлексивным*), если $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{11}$ как множества.

Теорема 1.10. *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — *симметричное банахово пространство. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{11}$ *как множества, т. е.* $\mathbf{E}$ *максимально.*
2. $\mathbf{E} = \mathbf{G}^1$ *для некоторого симметричного пространства* $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$.
3. $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условию* (B).

Комбинируя теоремы 1.9 и 1.10, мы получаем:

Теорема 1.11. *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — *симметричное пространство. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{11}$ *и* $\|\cdot\|_{\mathbf{E}} = \|\cdot\|_{\mathbf{E}^{11}}$.
2. $\mathbf{E} = \mathbf{G}^1$ *и* $\|\cdot\|_{\mathbf{E}} = \|\cdot\|_{\mathbf{G}^1}$ *для некоторого симметричного пространства* $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$.
3. $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условиям* (B) *и* (C).
4. *Если* $\kappa\colon \mathbf{E} \to \mathbf{E}^{**}$ *каноническое вложение, то существует проектор* $\pi\colon \mathbf{E}^{**} \to \kappa(\mathbf{E})$ *с нормой* $\|\pi\| = 1$.
5. *Каждая центрированная последовательность замкнутых шаров имеет непустое пересечение в* $\mathbf{E}$.

В [70, теорема X.4] этот и предыдущие результаты рассматриваются для общих банаховых K-пространств.

Комбинация свойств (B) и (C) (используемых в приведенной выше теореме) означает:

(BC) *Если* $0 \leqslant f_n \uparrow$, $f_n \in \mathbf{E}$ *и* $\sup\limits_n \|f_n\|_{\mathbf{E}} < \infty$, *то* $f_n \uparrow f$ *и* $\sup\limits_n \|f_n\|_{\mathbf{E}} = \|f\|_{\mathbf{E}}$ *для некоторого* $f \in \mathbf{E}$.

Это свойство имеет смысл для общих симметричных квази-банаховых пространств и может быть переформулировано как следующее условие Фату (F) (см. [78, § 1.б]):

(F) *Если* $\{f_n\} \subset \mathbf{E}$, $f_n \overset{(п.в.)}{\longrightarrow} f$ *и* $\sup\limits_n \|f_n\|_{\mathbf{E}} < \infty$, *то* $f \in \mathbf{E}$ *и* $\|f\|_{\mathbf{E}} \leqslant \liminf\limits_n \|f_n\|_{\mathbf{E}}$.

В случае $\mathbf{E} = \mathbf{L}_1$ свойство (F) — это утверждение классической леммы Фату.

1.3.5. Слабая секвенциальная полнота и рефлексивность. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство.

Мы снова рассмотрим вложения $\mathbf{E}^0 \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^{11}$, где $\mathbf{E}^0$ — минимальная часть $\mathbf{E}$, а $\mathbf{E}^{11}$ — второе ассоциированное пространство. Наша цель — специальный случай, когда $\mathbf{E}^0 = \mathbf{E} = \mathbf{E}^{11}$, т. е. когда пространство $\mathbf{E}$ минимально и максимально одновременно.

Предполагая, в дополнение к равенству $\mathbf{E}^0 = \mathbf{E} = \mathbf{E}^{11}$, что $\varphi_{\mathbf{E}}(0) = 0$ (т. е. $\mathbf{E} \nsubseteq \mathbf{L}_\infty$), мы получим, что пространство $\mathbf{E}$ удовлетворяет обоим свойствам (A) и (B). Сочетание свойств (A) и (B) приводит нас к следующему условию:

(AB) *Если* $0 \leqslant f_n \uparrow$, $f_n \in \mathbf{E}$ *и* $\sup_n \|f_n\|_{\mathbf{E}} < \infty$, *то* $f_n \uparrow f$ *и* $\|f_n - f\|_{\mathbf{E}} \to 0$ *для некоторой функции* $f \in \mathbf{E}$.

Напомним, что для любого банахова пространства $\mathbf{E}$ имеет место каноническое вложение κ : $\mathbf{E} \ni f \to \kappa_f \in \mathbf{E}^{**}$, где κ_f — ограниченный линейный функционал на $\mathbf{E}^*$, определяемый равенством $\kappa_f(u) = u(f)$, $u \in \mathbf{E}^*$

Вложение $\kappa : \mathbf{E} \to \mathbf{E}^{**}$ является линейной изометрией пространства $\mathbf{E}$ на замкнутое подпространство $\kappa(\mathbf{E}) \subseteq \mathbf{E}^{**}$. Банахово пространство $\mathbf{E}$ называется *рефлексивным*, если $\kappa(\mathbf{E}) = \mathbf{E}^{**}$.

Напомним также, что банахово пространство $\mathbf{E}$ называется *слабо секвенциально полным*, если оно секвенциально полно в слабой топологии $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)$. Это означает, что если $\{f_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{E}$ и для каждого $u \in \mathbf{E}^*$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} u(f_n)$, то $f_n \to f$ для некоторой $f \in \mathbf{E}$ в слабой топологии $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} u(f_n) = u(f)$ для каждого $u \in \mathbf{E}^*$.

В случае симметричного банахова пространства $\mathbf{E}$ условие (AB) дает эффективный критерий слабой секвенциальной полноты и рефлексивности.

Теорема 1.12. *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — *симметричное банахово пространство. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условию* (AB).
2. *Каждая возрастающая ограниченная по норме последовательность сходится в* $\mathbf{E}$ *по норме.*
3. $\kappa(\mathbf{E})$ *является полосой в* $\mathbf{E}^{**}$.
4. $\mathbf{E}$ *слабо секвенциально полно.*

Напомним, что $\mathbf{F}$ называется полосой, если $\mathbf{F}^{\perp\perp} = (\mathbf{F}^\perp)^\perp = \mathbf{F}$, где $\mathbf{F}^\perp = \{g \in \mathbf{G}\colon |f| \wedge |g| = 0$ для всех $f \in \mathbf{F}\}$.

Теорема 1.13. *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — *симметричное пространство. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. $\mathbf{E}$ *рефлексивно.*
2. $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условиям* (A) *и* (B), *а* $\mathbf{E}^*$ *удовлетворяет условию* (A).
3. $\mathbf{E}$ *и* $\mathbf{E}^*$ *удовлетворяют условиям* (A) *и* (B).

Рассмотренные условия (A) и (AB) могут быть охарактеризованы в терминах общих банаховых пространств.

Теорема 1.14. *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — *симметричное банахово пространство. Тогда*:

1. $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условию* (A) *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{E}$ *не содержит подпространства, изометричного* $\mathbf{l}_\infty$.
2. $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условию* (AB) *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{E}$ *не содержит подпространства, изометричного* $\mathbf{c}_0$.
3. $\mathbf{E}$ *рефлексивно тогда и только тогда, когда* $\mathbf{E}$ *не содержит подпространства, изометричного* $\mathbf{c}_0$ *или* $\mathbf{l}_1$.

Доказательства трех вышеприведенных теорем можно найти в [70, гл. X.4, теоремы 8–10].

1.3.6. Порядковая полнота и порядковая сходимость. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство на пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. Напомним, что мера μ предполагается σ-конечной, поэтому существует вероятностная мера ν, которая эквивалентна μ. Каждое симметричное пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ является плотным подмножеством пространства

$\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, рассматриваемого как полное топологическое линейное пространство относительно топологии стохастической сходимости. Действительно, $\mathbf{E}$ содержит множество $\mathbf{F}_1$ всех простых интегрируемых функций, которое плотно в $\mathbf{L}_0$.

Решетка $\mathbf{L}_0$ и ее подрешетки снабжены обычным отношением порядка «$\leqslant$» на функциях.

Решетка $\mathbf{L}_0$ является σ-полной, а также порядково полной, так как мера μ σ-конечна. Это означает, что каждое порядковое ограниченное подмножество $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{L}_0$ имеет наименьшую верхнюю грань $\sup \mathbf{F} \in \mathbf{L}_0$ и наибольшую нижнюю грань $\inf \mathbf{F} \in \mathbf{L}_0$. Мы используем здесь и далее обозначение «$\sup \mathbf{F}$» и «$\inf \mathbf{F}$» для классов μ-эквивалентных функций, которое в точности соответствует $\operatorname{esssup} \mathbf{F}$ и $\operatorname{essinf} \mathbf{F}$, для индивидуальных функций.

Напомним, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ элементов частично упорядоченного множества $\mathbf{F}$ называется *порядково сходящейся* к $f \in \mathbf{F}$ ($f_n \xrightarrow{(o)} f$), если существуют $g_n \in \mathbf{F}$ и $h_n \in \mathbf{F}$ такие, что $g_n \uparrow f$, $h_n \downarrow f$, $f = \sup\limits_{n\geqslant 1} g_n = \inf\limits_{n\geqslant 1} h_n \in \mathbf{F}$. Если $\mathbf{F}$ является σ-полной решеткой, то $f_n \xrightarrow{(o)} f \in \mathbf{F}$ тогда и только тогда, когда множество $\{f_n,\, n \geqslant 1\}$ порядково ограничено в $\mathbf{F}$ и $f = \sup\limits_{n\geqslant 1} \inf\limits_{m\geqslant n} f_m = \inf\limits_{n\geqslant 1} \sup\limits_{m\geqslant n} f_m \in \mathbf{F}$. Очевидно, $f_n \xrightarrow{(o)} f \in \mathbf{E}$ тогда и только тогда, когда $|f_n - f| \xrightarrow{(o)} 0 \in \mathbf{E}$, т. е. когда существует такая последовательность $h_n \in \mathbf{E}$, что $h_n \downarrow 0$ и $|f_n - f| \leqslant h_n$. Таким образом, для каждого симметричного банахова пространства $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ мы имеем:

- $\mathbf{E}$ является порядково полной подрешеткой порядково полной решетки $\mathbf{L}_0$.
- Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ является порядково сходящейся в $\mathbf{E}$ ($f_n \xrightarrow{(o)} f \in \mathbf{E}$) тогда и только тогда, когда $\{f_n,\, n \geqslant 1\}$ порядково ограничена в $\mathbf{E}$ и $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ порядково сходится в $\mathbf{L}_0$.

Здесь порядковая сходимость в $\mathbf{L}_0$ означает сходимость почти всюду на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, т. е.

- $f_n \xrightarrow{(o)} f$ в $\mathbf{E}$ тогда и только тогда, когда $f_n \xrightarrow{(\text{п.в.})} f$ на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и $\{f_n,\, n \geqslant 1\}$ порядково ограничена в $\mathbf{E}$.

Отметим также, что

- Если $\|f_n - f\|_{\mathbf{E}} \to 0$, то существует подпоследовательность f_{n_k} последовательности f_n такая, что $f_{n_k} \xrightarrow{(o)} f$ в $\mathbf{E}$.
- Если $\mathbf{E}$ удовлетворяет условию (A), то из порядковой сходимости следует сходимость по норме в $\mathbf{E}$.

1.4. Основные классы симметричных пространств.

1.4.1. Три основные конструкции симметричных пространств. Всюду в этом разделе $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное пространство и $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ — соответствующее ему стандартное пространство.

1.4.1.1. Левые композиции и модулярные пространства. Пусть $I = [0, \infty)$ и $U\colon I \to I$ — возрастающая положительная функция такая, что $U(0) = 0$ и $U(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} U(x) = \infty$. Мы полагаем

$$\mathcal{M}^U_{\mathbf{E}}(f) = \begin{cases} \|U \circ f\|_{\mathbf{E}}, & U \circ f \in \mathbf{E}, \\ \infty, & U \circ f \notin \mathbf{E}, \end{cases}$$

$U \circ \mathbf{E} = \Big\{ f \in \mathbf{L}_0\colon \mathcal{M}^U_{\mathbf{E}}\Big(\dfrac{|f|}{a}\Big) < \infty$ для некоторого $a > 0 \Big\}$ и $\|f\|_{U\circ\mathbf{E}} = \inf \Big\{ a > 0\colon \mathcal{M}^U_{\mathbf{E}}\Big(\dfrac{|f|}{a}\Big) < 1 \Big\}$. Тогда $\mathcal{M}^U_{\mathbf{E}}$ является модулярой или квазимодулярой в случае, когда $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$ является нормой или квазинормой при условии, что функция U удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Для получения дополнительной информации о модулярных и квазимодулярных пространствах читатель может обратиться к работам [71, 101, 102, 110].

Если пространство $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ является симметричным, то пространство $(U \circ \mathbf{E}, \|\cdot\|_{U\circ\mathbf{E}})$ тоже симметрично, так как $\mathcal{M}^U_{\mathbf{E}}(f_1) = \mathcal{M}^U_{\mathbf{E}}(f_2)$ для равноизмеримых функций f_1 и f_2. Наиболее важными примерами являются пространства Орлича и Орлича—Лоренца, см. ниже пункты 1.4.2 и 1.4.6.

Следует отметить, что пространство $U \circ \mathbf{E}$ является частным случаем общей конструкции Кальдерона—Лозановского $\Psi(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ [7] с $\mathbf{F} = \mathbf{L}_\infty$ (см. также [68, 85]).

1.4.1.2. Весовая функция. Пусть опять $I = [0, \infty)$ и $V \colon I \to I$ — положительная возрастающая функция такая, что $V(0) = 0$ и $V(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} V(x) = \infty$.

Мы используем оператор умножения $g \to V \cdot g$ на стандартном пространстве $\mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$, и для данного симметричного пространства $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ положим $\mathbf{E}(V) := \mathbf{E}(V)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = \{f \in \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \colon V \cdot \xi_{f,\mu} \in \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)\}$ и $\|f\|_{\mathbf{E}(V)} = \|V \cdot \xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{E}}$.

Имеем

$$\|f+g\|_{\mathbf{E}(V)} = \|V \cdot \xi_{f+g,\mu}\|_{\mathbf{E}} \leqslant \|V \cdot D_2(\xi_{f,\mu} + \xi_{g,\mu})\|_{\mathbf{E}} \leqslant \|D_2(D_{1/2}(V) \cdot (\xi_{f,\mu} + \xi_{g,\mu})\|_{\mathbf{E}} \leqslant$$
$$\leqslant d_{\mathbf{E}}(2) V^\sharp(2) \|V \cdot (\xi_{f,\mu} + \xi_{g,\mu})\|_{\mathbf{E}} \leqslant d_{\mathbf{E}}(2) V^\sharp(2) C(\|V \cdot \xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{E}} + \|V \cdot \xi_{g,\mu}\|_{\mathbf{E}}) =$$
$$= d_{\mathbf{E}}(2) V^\sharp(2) C(\|f\|_{\mathbf{E}(V)} + \|g\|_{\mathbf{E}(V)}).$$

Здесь C взято из слабого неравенства треугольника для $\mathbf{E}$, $V^\sharp(t) = \sup\limits_{x>0} \dfrac{V(tx)}{v(x)}$, $0 < t < \infty$ — функция растяжения (определение и общие свойства функции растяжения $V^\sharp$ будут описаны ниже в пункте 2.1.1), $D_t : \mathbf{L}_0 \to \mathbf{L}_0$ — оператор растяжения, и $d_{\mathbf{E}}(t) = \|D_t\|_{\mathbf{E} \to \mathbf{E}}$, $0 < t < \infty$ (см. пункт 2.2.1).

В случае, когда $\mathbf{E}$ является симметричным банаховым пространством, $d_{\mathbf{E}}(t) \leqslant \max(1, t)$, $t > 0$, откуда $d_{\mathbf{E}}(2) \leqslant 2$. Отметим, что $\|\cdot\|_{\mathbf{E}(V)}$ является симметричной квазинормой при условии, что $d_{\mathbf{E}}(2)\, V^\sharp(2)$ ограничено. Последнее условие $V^\sharp(2) < \infty$ известно как Δ_2-условие для $V^\sharp$.

Например, пространства Лоренца, Марцинкевича и Орлича—Лоренца строятся подходящим выбором $\mathbf{E}$ и V.

1.4.1.3. Мажорантная функция $\theta_{f,\mu}$ и пространство $\mathbf{E}_\theta$. Используя оператор Харди $H \colon \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \to \mathbf{L}_0$, $Hg(x) = \dfrac{1}{x} \int\limits_0^x g\, dm$, $x \geqslant 0$, $g \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(I, \mathcal{B}_m, m)$, мы вводим мажорантную функцию Харди—Литтлвуда как $\theta_{f,\mu}(x) = H\xi_{f,\mu} = \dfrac{1}{x} \int\limits_0^x \xi_{f,\mu}\, dm$, $x \in I$, $f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. Тогда имеем:

- $0 \leqslant \xi_{f,\mu}(x) \leqslant \theta_{f,\mu}(x) < \infty$, $0 < x < \infty$.
- $\theta_{f,\mu}(x)$ является убывающей и непрерывной на I.
- $\theta_{g,\mu}(x) = \dfrac{1}{x} \sup \left\{ \int\limits_A |g| dm,\ m(A) = x \right\}$, $x > 0$, $g \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(I, \mathcal{B}_m, m)$.
- $\theta_{f_1+f_2,\mu} \leqslant \theta_{f_1,\mu} + \theta_{f_2,\mu}$, $f_1, f_2 \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$.

Последнее «неравенство треугольника» как раз показывает существенное отличие $\theta_{f,\mu}$ от $\xi_{f,\mu}$, для которого имеет место только слабое неравенство треугольника $\xi_{f_1+f_2,\mu} \leqslant D_2(\xi_{f_1,\mu} + \xi_{f_2,\mu})$.

Операция $f \to \theta_{f,\mu}$ дает эффективный способ построения новых симметричных пространств.

Действительно, пусть U — положительная функция на $I = [0, \infty)$ и $U^{(a)}(x) = U(x) \min\left(1, \dfrac{a}{x}\right)$, $x \geqslant 0$. Для каждого симметричного пространства $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ положим

$$\mathbf{E}_\theta(U) = \mathbf{E}_\theta(U)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = \{f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \colon U \cdot \theta_{f,\mu} \in \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)\},$$
$$\|f\|_{\mathbf{E}_\theta(U)} = \|f\|_{\mathbf{E}_\theta(U)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)} = \|U \cdot \theta_{f,\mu}\|_{\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)}, \quad f \in \mathbf{E}_\theta(U)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu).$$

Предложение 1.3. *Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное пространство на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и U — ненулевая измеримая функция такая, что $U^{(a)} \in \mathbf{E}$ для некоторого $a > 0$.*

Тогда $\|\cdot\|_{\mathbf{E}_\theta(U)}$ является нормой (p-нормой), если $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$ является нормой (p-нормой).

Пространство $(\mathbf{E}_\theta(U), \|\cdot\|_{\mathbf{E}_\theta(U)})$ является симметричным пространством на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ с фундаментальной функцией $\varphi_{\mathbf{E}_\theta(U)}(t) = \|U^{(t)}\|_{\mathbf{E}}$, $t \geqslant 0$.

Доказательство можно найти в [74, § II.6.1] или [111, § 11.1].

Следует отметить, что из неравенства $\xi_{f,\mu} \leqslant \theta_{f,\mu}$, $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$, следует вложение $\mathbf{E}_\theta(U) \subseteq \mathbf{E}$. Это вложение может быть строгим, и существуют симметричные банаховы пространства, для которых $cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{E}_\theta(U)) \neq \mathbf{E}$.

В частном случае, когда $U \equiv 1$, мы будем писать $\mathbf{E}_\theta$ вместо $\mathbf{E}_\theta(U)$ и называть пространство $\mathbf{E}_\theta$ *θ-частью* $\mathbf{E}$.

Во вложении $\mathbf{E}_\theta \subseteq \mathbf{E}$ случай равенства $\mathbf{E}_\theta = \mathbf{E}$ представляет особый интерес, см. пункт 2.3.2. В этом случае говорят, что пространство $\mathbf{E}$ удовлетворяет *условию Харди—Литтлвуда*, и пишут $\mathbf{E} \in (\mathcal{HLP})$.

Отметим, что наиболее важные примеры пространств $\mathbf{E}_\theta(U)$ дают пространства Марцинкевича $\mathbf{M}_V$ с $\mathbf{E} = \mathbf{L}_\infty$ и $U = V_*$, где V — квазивогнутая функция и $V_*(x) = x/V(x)$, $x > 0$.

1.4.2. Пространства Орлича $\mathbf{L}_\Phi$. Пространства Орлича $\mathbf{L}_\Phi = \mathbf{L}_\Phi(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ получаются как левая композиция $U \circ \mathbf{E}$ пространства $\mathbf{E} = \mathbf{L}_1$ с подходящей функцией Орлича $U = \Phi$.

Функция Орлича $\Phi\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty]$ представляет собой возрастающую непрерывную слева выпуклую функцию с условием $\Phi(0) = 0$. Мы также предполагаем, что Φ нетривиальна в том смысле, что $\Phi(x) > 0$ и $\Phi(y) < \infty$ для некоторых $x, y > 0$.

Соответствующая модуляра $\mathcal{M}^U_{\mathbf{E}} = \mathcal{M}^\Phi_{\mathbf{L}_1}$ имеет вид

$$\mathcal{M}^U_{\mathbf{E}}(f) = \mathcal{M}^\Phi_{\mathbf{L}_1}(f) = \int_I \Phi \circ \xi_{f,\mu}\, dm = \int_\Omega \Phi \circ |f|\, d\mu,\ f \in \mathbf{L}^\xi_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu).$$

Интеграл конечен тогда и только тогда, когда $\Phi \circ \xi_{f,\mu} \in \mathbf{L}_1(I, \mathcal{B}_m, m)$ $(\Phi \circ f \in \mathbf{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu))$.

Модуляра определяет норму (обычно называемую *нормой Люксембурга*)

$$\|f\|_{\mathbf{L}_\Phi} = \inf\{a > 0\colon \mathcal{M}^\Phi_{\mathbf{L}_1}(|f/a|) \leqslant 1\},\ f \in \mathbf{L}_\Phi,$$

где $\mathbf{L}_\Phi = \mathbf{L}_\Phi(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = \{f \in \mathbf{L}^\xi_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)\colon \mathcal{M}^\Phi_{\mathbf{L}_1}(|f/a|) < \infty$ для некоторого $a > 0\}$.

- $(\mathbf{L}_\Phi, \|\cdot\|_{\mathbf{L}_\Phi})$ является симметричным банаховым пространством с фундаментальной функцией $\varphi_{\mathbf{L}_\Phi}(x) = \widetilde{\Phi}(x) = (\Phi^{-1}(1/x))^{-1}$, $x \in I$.
- Пространство Орлича $\mathbf{L}_\Phi(I, \mathcal{B}_m, m)$ является стандартным симметричным банаховым пространством для $\mathbf{L}_\Phi(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$.
- $\mathbf{L}_\Phi$ удовлетворяет условиям (B), (C) и поэтому условию Фату (F).
- *Сердцевина* $\mathbf{H}_\Phi$ пространства Орлича $\mathbf{L}_\Phi$ определяется как $\mathbf{H}_\Phi = \{f \in \mathbf{L}_\Phi\colon \mathcal{M}^\Phi_{\mathbf{L}_1}(|f/a|) < \infty$ для всех $a > 0\}$. Это пространство совпадает с минимальной частью $\mathbf{L}^0_\Phi = cl_{\mathbf{L}_\Phi}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$ пространства $\mathbf{L}_\Phi$, если функция Орлича Φ конечна на $(0, \infty)$. В противном случае $\mathbf{L}_\Phi \subseteq \mathbf{L}_\infty$ и $\mathbf{H}_\Phi = \{0\}$.
- Следующие условия эквивалентны: $\mathbf{L}_\Phi$ удовлетворяет условию (A) $\iff$ $\mathbf{L}_\Phi = \mathbf{H}_\Phi$ $\iff$ Φ удовлетворяет Δ_2-условию, т. е. $0 < \Phi(x) < \infty$ для всех $0 < x < \infty$ и $\sup\limits_{x>0} \dfrac{\Phi(2x)}{\Phi(x)} < \infty$.
- Для классов Юнга $\mathbf{Y}^c_\Phi = \{f \in \mathbf{L}_\Phi\colon \mathcal{M}^\Phi_{\mathbf{L}_1}(f/c) < \infty\}$ имеет место равенство $\mathbf{Y}^c_\Phi = c\,\mathbf{Y}^1_\Phi$, $c > 0$, и $\mathbf{H}_\Phi = \bigcap\limits_{c>0} c\,\mathbf{Y}_\Phi \subseteq a\,\mathbf{Y}_\Phi \subseteq b\,\mathbf{Y}_\Phi \subseteq \bigcup\limits_{c>0} c\,\mathbf{Y}_\Phi = \mathbf{L}_\Phi$, $0 < a < b < \infty$, где все включения являются строгими, если Φ не удовлетворяет условию Δ_2.

  Более того, оба включения $\bigcup\limits_{a<c} a\,\mathbf{Y}_\Phi \subset c\,\mathbf{Y}_\Phi \subset \bigcup\limits_{b>c} b\,\mathbf{Y}_\Phi$, $0 < c < \infty$ также являются строгими, если классы Юнга не совпадают (см. [72, теорема II.10.1]).
- Ассоциированное пространство к $\mathbf{L}_\Phi$ совпадает с пространством Орлича $\mathbf{L}_\Psi$, где сопряженная к функции Орлича функция Ψ определяется равенством $\Psi(x) = \sup\limits_y\{xy - \Phi(y)\}$. Нормы $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^1_\Phi}$ и $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_\Psi}$ на $\mathbf{L}^1_\Phi = \mathbf{L}_\Psi$ эквивалентны, $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_\Psi} \leqslant \|\cdot\|_{\mathbf{L}^1_\Phi} \leqslant 2\|\cdot\|_{\mathbf{L}_\Psi}$.
- Норма $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^1_\Psi}$ на $\mathbf{L}^1_\Psi = \mathbf{L}_\Phi$ (обычно называемая *нормой Орлича*) эквивалентна исходной норме, точнее, $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_\Phi}$, т. е. $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_\Phi} \leqslant \|\cdot\|_{\mathbf{L}^1_\Psi} \leqslant 2\|\cdot\|_{\mathbf{L}_\Phi}$.

Пространства Орлича были введены в [103, 104], см. также [45, 72, 106, 107].

В случае, когда функция Φ не является выпуклой, пространство $\mathbf{L}_\Phi$ может быть не нормируемым, но остается квази-банаховым симметричным пространством при условии, что Φ является ϕ-функцией, удовлетворяющей Δ_2-условию (см. [57, 69], а также пункт 1.4.6).

1.4.3. Пространства Лоренца $\mathbf{\Lambda}_W$. Пусть W — возрастающая функция на $[0, +\infty)$ такая, что: $W(0) = 0$, W вогнута на $(0, +\infty)$ и $W(x) > 0$ для $x > 0$. Тогда W абсолютно непрерывна на $(0, \infty)$, в то время как значение $W(0+)$ может быть положительным.

Пространство Лоренца $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{\Lambda}_W(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ определяется как

$$\mathbf{\Lambda}_W := \left\{ f \in \mathbf{L}_0^\xi \colon \|f\|_{\mathbf{\Lambda}_W} := \xi_{f,\mu}(0) W(0+) + \int\limits_0^\infty \xi_{f,\mu}(x)\, W'(x)\, dx < \infty \right\}$$

(см. [74, 77, 78, 81, 82]).

Норму $\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_W}$ можно записать как интеграл Римана—Стилтьеса $\int\limits_0^\infty \xi_{f,\mu}(x)\, d\,W(x)$, который имеет атомарную часть $\xi_{f,\mu}(0)\, W(0+)$ в случае, когда $W(0+) > 0$.

Заметим, что в случае $W(0+) = 0$ пространство $\mathbf{\Lambda}_W$ может быть представлено как правая композиция $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{L}_1 \circ W^{-1}$ или, с помощью веса W', как $\mathbf{L}_1(W')$.

- $(\mathbf{\Lambda}_W, \|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_W})$ является симметричным банаховым пространством с фундаментальной функцией $\varphi_{\mathbf{\Lambda}_W = W}$.
- $\mathbf{\Lambda}_W \subseteq \mathbf{L}_\infty \iff W(0+) > 0$ и $\mathbf{\Lambda}_W \supseteq \mathbf{L}_\infty \iff W(\infty) < \infty$. Таким образом, $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{L}_\infty$ тогда и только тогда, когда выполнены оба условия $W(0+) > 0$ и $W(\infty) < \infty$.
- $\mathbf{\Lambda}_W$ удовлетворяет условиям (B) и (C), а значит, и условию Фату (F). Поэтому $\mathbf{\Lambda}_W$ является максимальным: $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{\Lambda}_W^{11}$.
- $\mathbf{\Lambda}_W^0 = cl_{\mathbf{\Lambda}_W}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty) = \mathbf{\Lambda}_W \cap \mathbf{R}_0 = \{f \in \mathbf{\Lambda}_W \colon \xi_{f,\mu}(\infty) = 0\}$. Поэтому $\mathbf{\Lambda}_W$ является минимальным $\iff W(\infty) = \infty \iff \mathbf{L}_\infty \not\subseteq \mathbf{\Lambda}_W$.
- $\mathbf{\Lambda}_W$ удовлетворяет условию (A) тогда и только тогда, когда $W(0+) = 0$ и $W(\infty) = \infty$).

1.4.4. Пространства Марцинкевича $\mathbf{M}_V$. Напомним, что положительная функция V на $(0, \infty)$ с $V(0) = 0$ называется *квазивогнутой*, если $V(x)$ и $V_*(x) = x/V(x)$ являются возрастающими.

Положим $\mathbf{M}_V = \mathbf{E}_\theta(U)$, где $\mathbf{E} = \mathbf{L}_\infty$ и $U = V_*$, т. е.

$$\mathbf{M}_V = \mathbf{M}_V(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = \{f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \colon V_* \cdot \theta_{f,\mu} \in \mathbf{L}_\infty(I, \mathcal{B}_m, m)\}$$

и $\|f\|_{\mathbf{M}_V(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)} = \|V_* \cdot \theta_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_\infty(I,\mathcal{B}_m,m)} = \inf \left\{ C > 0 \colon \int\limits_0^x \xi_{f,\mu}\, dm \leqslant C\, V(x) \text{ для всех } x \geqslant 0 \right\}$ для $f \in \mathbf{M}_V$. С другой стороны, мы можем начать с симметричного квази-банахова пространства $\overline{\mathbf{M}}_V = \mathbf{L}_\infty(V_*) = \{f \in \mathbf{L}_0 \colon V_* \cdot \xi_{f,\mu} \in \mathbf{L}_\infty\}$, которое снабжено квазинормой

$$\|f\|_{\overline{\mathbf{M}}_V} = \|V_* \cdot \theta_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_\infty} = \inf \left\{ C > 0 \colon \xi_{f,\mu}(x) \leqslant C\, \frac{V(x)}{x} \text{ для всех } x > 0 \right\}, \; f \in \overline{\mathbf{M}}_V$$

и называется *верхним классом Марцинкевича*.

Тогда по определению $\mathbf{M}_V = (\overline{\mathbf{M}}_V)_\theta$. Мы покажем далее в пункте 2.3, что вложение $\mathbf{M}_V \subseteq \overline{\mathbf{M}}_V$ может быть строгим, и $\mathbf{M}_V = \overline{\mathbf{M}}_V$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{M}_V$ удовлетворяет условию Харди—Литтлвуда $(\mathcal{HLP})$.

Напомним основные свойства пространства $\mathbf{M}_V$:

- $\mathbf{M}_V$ — симметричное банахово пространство с фундаментальной функцией $\varphi_{\mathbf{M}_V} = V_*$.
- $\mathbf{M}_V \subseteq \mathbf{L}_\infty \iff V_*(0+) > 0$ и $\mathbf{M}_V \supseteq \mathbf{L}_\infty \iff V_*(\infty) < \infty$. Поэтому $\mathbf{M}_V = \mathbf{L}_\infty$ тогда и только тогда, когда имеют место условия $V_*(0+) > 0$ и $V_*(\infty) < \infty$.
- $\mathbf{M}_V$ удовлетворяет условиям (B) и (C) и поэтому условию Фату (F), т. е. $\mathbf{M}_V$ является максимальным, $\mathbf{M}_V = \mathbf{M}_V^{11}$.
- Пусть $\mathbf{M}_0 = \{f \in \mathbf{M}_V \colon \lim\limits_{x\to 0+} V_*(x)\theta_{f,\mu}(x) = \lim\limits_{x\to\infty} V_*(x)\theta_{f,\mu}(x) = 0\} \subseteq \mathbf{M}_V$. Тогда подпространство $\mathbf{M}_0$ совпадает с минимальной частью $\mathbf{M}_V^0 = cl_{\mathbf{M}_V}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$ пространства $\mathbf{M}_V$ при условии $V_*(0+) = 0$. Следовательно, $\mathbf{M}_V$ удовлетворяет условию (A) тогда и только тогда, когда $\mathbf{M}_V = \mathbf{M}_0$ и $V_*(0+) = 0$.

Последний результат был получен в [19], см. также [74, гл. II] и [65].

1.4.5. Связь между пространствами Лоренца и Марцинкевича. Сначала мы опишем ассоциированные пространства к пространствам $\mathbf{\Lambda}_W$ и $\mathbf{M}_V$.

Теорема 1.15. *Пусть* $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{\Lambda}_W(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ *— пространство Лоренца, а* $\mathbf{M}_W = \mathbf{M}_W(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ *— пространство Марцинкевича с одной и той же вогнутой весовой функцией* W. *Тогда*:

1. $\mathbf{\Lambda}_W^1 = \mathbf{M}_W$ *и* $\|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_W^1} = \|\cdot\|_{\mathbf{M}_W}$;
2. $\mathbf{M}_W^1 = \mathbf{\Lambda}_W$ *и* $\|\cdot\|_{\mathbf{M}_W^1} = \|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_W}$.

Если пространство Марцинкевича $\mathbf{M}_V$ построено по квазивогнутой функции V, которая не является вогнутой, мы можем заменить V на ее наименьшую вогнутую мажоранту W. Тогда $\mathbf{M}_V = \mathbf{M}_W$ и $\mathbf{M}_V^1 = \mathbf{\Lambda}_W$, причем из неравенства $\dfrac{1}{2}V \leqslant W \leqslant V$ следует, что $\dfrac{1}{2}\|\cdot\|_{\mathbf{M}_V} \leqslant \|\cdot\|_{\mathbf{M}_W} \leqslant \|\cdot\|_{\mathbf{M}_V}$ и $\dfrac{1}{2}\|\cdot\|_{\mathbf{M}_V^1} \leqslant \|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_W} \leqslant \|\cdot\|_{\mathbf{M}_V^1}$. Доказательство теоремы 1.15 можно найти в [74, § II.5] или [111, § 11.3].

Теперь рассмотрим теорему вложения. Напомним, что $\varphi_{\mathbf{\Lambda}_W} = W$ и $\varphi_{\mathbf{M}_{V_*}} = V$, где $V_*(x) = x/V(x)$, $x > 0$.

Теорема 1.16. *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ *— симметричное банахово пространство с фундаментальной функцией* $V = \varphi_{\mathbf{E}}$ *и* W *— наименьшая вогнутая мажоранта* V. *Тогда имеют место непрерывные вложения* $\mathbf{\Lambda}_W^0 \subseteq \mathbf{E} \subsetneqq \mathbf{M}_{V_*}$, *причем* $\|f\|_{\mathbf{M}_{V_*}} \leqslant \|f\|_{\mathbf{E}}$, $f \in \mathbf{E}$ *и* $\|f\|_{\mathbf{E}} \leqslant \|f\|_{\mathbf{\Lambda}_W}$, $f \in \mathbf{\Lambda}_W^0$. *Также имеет место вложение* $\mathbf{\Lambda}_W \subseteq \mathbf{E}$, *если пространство* $\mathbf{E}$ *максимально* (*т. е.* $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{11}$), *или если* $\mathbf{\Lambda}_W$ *минимально* ($\mathbf{\Lambda}_W \subseteq \mathbf{R}_0$).

Заметим, что квазивогнутая функция V не обязательно является вогнутой, т. е. в общем случае $W = \varphi_{\mathbf{\Lambda}_W} \neq \varphi_{\mathbf{M}_{V_*}} = V$. Тем не менее, можно добиться равенства $\varphi_{\mathbf{E}} = \varphi_{\mathbf{\Lambda}_W} = \varphi_{\mathbf{M}_{W_*}} = W$, переходя к некоторой эквивалентной симметричной норме на $\mathbf{E}$.

Замечание 1.2. Вложение $\mathbf{\Lambda}_W \subseteq \mathbf{E}$, вообще говоря, не верно без дополнительных предположений, что $\mathbf{E}$ максимально или $\mathbf{\Lambda}_W$ минимально. Действительно, если $\mathbf{E}$ минимально, а $\mathbf{\Lambda}_W$ не минимально, мы имеем $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{R}_0$, в то время как $\mathbf{\Lambda}_W \nsubseteq \mathbf{R}_0$, откуда $\mathbf{\Lambda}_W \nsubseteq \mathbf{E}$.

Таким образом, теорема II.5.5 из [74], в которой утверждается вложение $\mathbf{\Lambda}_W \subseteq \mathbf{E}$ для произвольных симметричных пространств, не верна.

Теорема 1.16 была доказана в [99], см. также [111, гл. 12].

1.4.6. Пространства Орлича—Лоренца $\mathbf{\Lambda}_{W,\Phi}$. В этом и последующих пунктах мы будем считать, что пространство с мерой стандартное, т. е. $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = (I, \mathcal{B}_m, m)$. Отметим, что полученные результаты и конструкции могут быть перенесены на общие пространства с мерой с помощью теоремы 1.1.

Существует два естественных способа определения общих пространств Орлича—Лоренца.

Сначала мы построим (следуя [93]) пространство «Орлича—Орлича» $\mathbf{L}_{F,\Phi}$ с помощью двух функций Орлича F и Φ на $I = [0, \infty)$ и соответствующих пространств Орлича $\mathbf{L}_F$ и $\mathbf{L}_\Phi$.

Положим $\mathbf{L}_{F,\Phi} := \{f \in \mathbf{L}_0 \colon \|f\|_{\mathbf{L}_{F,\Phi}} := \|\xi_{f,\mu} \circ \widetilde{F} \circ \widetilde{\Phi}^{-1}\|_{\mathbf{L}_\Phi} < \infty\}$, где инверсия $U \to \widetilde{U}$ возрастающей функции $U : I \to I$ определяется как $\widetilde{U}(x) = (U(x^{-1}))^{-1}$, а U^{-1} означает (обобщенную) обратную функцию функции U.

Таким образом, мы начинаем здесь с пространства Орлича $\mathbf{L}_\Phi$ и используем правую композицию $\mathbf{L}_\Phi \circ W^{-1}$, где $W = \widetilde{\Phi} \circ \widetilde{F}^{-1}$ и $W^{-1} = \widetilde{F} \circ \widetilde{\Phi}^{-1}$. Поскольку фундаментальная функция пространства $\mathbf{L}_\phi$ имеет вид $\varphi_{\mathbf{L}_\Phi}(x) = \widetilde{\Phi}^{-1}(x) = (\Phi^{-1}(x^{-1}))^{-1}$, $x > 0$, получаем

$$\varphi_{\mathbf{L}_{F,\Phi}}(t) = \|\mathbf{1}_{[0,t]}\|_{\mathbf{L}_{F,\Phi}} = \|\mathbf{1}_{[0,t]} \circ \widetilde{F} \circ \widetilde{\Phi}^{-1}\|_{\mathbf{L}_\Phi} = \varphi_{\mathbf{L}_\Phi}(\widetilde{\Phi}(\widetilde{F}^{-1}(t))) = \widetilde{F}^{-1}(t) = \varphi_{\mathbf{L}_F}(t).$$

Равенство $\varphi_{\mathbf{L}_{F,\Phi}} = \varphi_{\mathbf{L}_F}$ означает, что основным в конструкции $\mathbf{L}_{F,\Phi}$ является пространство Орлича $\mathbf{L}_F$, которое подкручено функцией Φ.

С другой стороны, используя функцию $W = \widetilde{F} \circ \widetilde{\Phi}^{-1}$, мы видим, что

$$\|f\|_{\mathbf{L}_{F,\Phi}} = \|\xi_{f,\mu} \circ W^{-1}\|_{\mathbf{L}_\Phi} = \inf\left\{a > 0 \colon \mathcal{M}^\Phi_{\Lambda_W}\left(\frac{|f|}{a}\right) < 1\right\},$$

т. е. пространство $\mathbf{L}_{F,\Phi}$ может быть построено с помощью пространства Лоренца $\mathbf{\Lambda}_W$ и модуляры

$$\mathcal{M}^\Phi_{\mathbf{\Lambda}_W}(f) = \int\limits_I \Phi(\xi_{f,\mu})\, dW = \int\limits_I \Phi \circ \xi_{f,\mu} \circ W^{-1}\, dm.$$

Таким образом, мы можем рассматривать пространство $\mathbf{L}_{F,\Phi}$ как пространство Лоренца $\mathbf{\Lambda}_W$, подкрученное функцией Φ.

Заметим, что обозначение $\mathbf{\Lambda}_{W,\Phi}$ кажется более уместным для пространства Орлича—Лоренца, по крайней мере в том случае, когда функция W является вогнутой. Пространство $\mathbf{\Lambda}_{W,\Phi}$ строится как левая и правая композиции $\Phi \circ \mathbf{L}_1 \circ W^{-1}$ пространства $\mathbf{L}_1$. Очевидно, $\mathbf{\Lambda}_{W,\Phi} = \mathbf{L}_\Phi$, если $W(x) = x$, и $\mathbf{\Lambda}_{W,\Phi} = \mathbf{\Lambda}_W$, если $\Phi(x) = x$.

- В частном случае, когда Φ выпуклая, а W вогнутая, пространство $\mathbf{\Lambda}_{W,\Phi}$ является банаховым симметричным пространством.

Однако описание общих условий на F, Φ и W, при которых пространство $\mathbf{L}_{F,\Phi}$ или $\mathbf{\Lambda}_{W,\Phi}$ является банаховым (или квази-банаховым) симметричным пространством, может быть довольно сложной задачей. Как правило, и F, и Φ считаются ϕ-функциями, т. е. непрерывными, строго возрастающими, удовлетворяющими условиям $F(0) = \Phi(0) = 0$, $F(\infty) = \Phi(\infty) = \infty$, а также $\sup\limits_{x>0} \dfrac{F(2x)}{F(x)} < \infty$, $\sup\limits_{x>0} \dfrac{\Phi(2x)}{\Phi(x)} < \infty$. Последнее Δ_2-условие гарантирует обычно, что $\mathbf{L}_{F,\Phi}$ является симметричным пространством, которое удовлетворяет условию Фату (F). Подробнее см. в [31, 32, 47–49, 57, 62–64, 66, 73, 76, 93–95, 119] и др.

1.4.7. Пространства $\mathbf{\Lambda}_p(w)$ *и* $\mathbf{M}_p(w)$. Как и выше, в этом пункте мы считаем, что пространство с мерой стандартное, т. е. $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = (I, \mathcal{B}_m, m)$.

Пространства Лоренца $\mathbf{\Lambda}_p(w)$ и пространства Марцинкевича $\mathbf{M}_p(w)$ строятся для $0 < p < \infty$ и веса $w = W'$. Вес $w\colon I \to [0, \infty)$ предполагается положительной измеримой функцией, и $W(x) = \int\limits_0^x w\, dm < \infty,\ x \in I.$

Полагаем

$$\mathbf{\Lambda}_p(w) = \{f \in \mathbf{L}_0\colon \|f\|_{\mathbf{\Lambda}_p(w)} := \left(\int\limits_I \xi_{f,\mu}\, dW\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\},$$
$$\mathbf{M}_p(w) = \{f \in \mathbf{L}_0\colon \|f\|_{\mathbf{M}_p(w)} := \sup_{x \in I} W^{\frac{1}{p}} \xi_{f,\mu}(x) < \infty\}.$$

- Если W удовлетворяет Δ_2-условию $\sup\limits_{x\in I} \dfrac{W(2x)}{W(x)} < \infty$, то пространства $(\mathbf{\Lambda}_p(w), \|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_p(w)})$ и $(\mathbf{M}_p(w), \|\cdot\|_{\mathbf{M}_p(w)})$ являются симметричными квази-банаховыми пространствами.
- Эти пространства обладают свойством Фату (F), а их фундаментальные функции имеют вид $\varphi_{\mathbf{\Lambda}_p(w)} = \varphi_{\mathbf{M}_p(w)} = W^{1/p}$.

Следует отметить, что здесь также необходимо Δ_2-условие, см. [35, 57, 67, 114]. Если $W(x) = x$, то мы имеем $\mathbf{\Lambda}_p(w) = \mathbf{L}_p$ и $\mathbf{M}_p(w) = \mathbf{L}_{p,\infty}$. Если $p = 1$, то пространство $\mathbf{\Lambda}_p(w) = \mathbf{\Lambda}_W$ является симметричным банаховым пространством при условии, что весовая функция W является вогнутой. Пространство $\mathbf{M}_1(w)$ совпадает с $\mathbf{L}_\infty(W) = \{f \in \mathbf{L}_0\colon \|f\|_{\mathbf{L}_\infty(W)} = \|W \cdot \xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_\infty} < \infty\}$ (см. ниже, пункт 1.4.9).

1.4.8. Пространства $\mathbf{L}_{p,q}$, $0 < p, q \leqslant \infty$. Напомним, что в этом пункте рассматриваются стандартные пространства с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = (I, \mathcal{B}_m, m)$. Мы используем пространства $\mathbf{L}_p$ и $\mathbf{L}_q$ для построения пространства $\mathbf{L}_{p,q} = \mathbf{L}_{F,\Phi}$ с $\mathbf{L}_F = \mathbf{L}_p$ и $\mathbf{L}_\Phi = \mathbf{L}_q$.

В случае $0 < p, q < \infty$ с $F(x) = x^q$ и $\Phi(x) = x^p$ имеем: $\widetilde{F} = F$, $\widetilde{\Phi} = \Phi$, $W(x) = F(\Phi^{-1}(x)) = x^{q/p}$, $x > 0$. Тогда

$$\|f\|_{\mathbf{L}_{p,q}} = \|\xi_{f,\mu} \circ W^{-1}\|_{\mathbf{L}_q} = \left(\int\limits_0^\infty (\xi_{f,\mu}(W^{-1}(x)))^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} =$$
$$= \left(\int\limits_0^\infty (\xi_{f,\mu}(x))^q\, d(x^{\frac{q}{p}})\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{q}{p}\int\limits_0^\infty (\xi_{f,\mu}(x))^q\, x^{\frac{q}{p}-1}\, dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Полагая $\mathbf{L}_{p,q} = \{f \in \mathbf{L}_0\colon \|f\|_{\mathbf{L}_{p,q}} < \infty\}$, мы имеем:

- $(\mathbf{L}_{p,q}), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_{p,q}}$ является симметричным квази-банаховым пространством. Это пространство удовлетворяет условию Фату (F) и $\varphi_{\mathbf{L}_{p,q}} = \varphi_{\mathbf{L}_p} = x^{1/p},\ x \geqslant 0$.

Более того:

- Если $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$, то функции F и Φ выпуклы, а W — вогнута. Следовательно, $(\mathbf{L}_{p,q}, \|\cdot\|_{\mathbf{L}_{p,q}})$ является симметричным банаховым пространством.
- Если $1 \leqslant p < \infty$ и $1 \leqslant q < \infty$, то θ-часть $(\mathbf{L}_{p,q})_\theta = \{f \in \mathbf{L}_0 \colon \theta_{f,\mu} \in \mathbf{L}_{p,q}\} \subseteq \mathbf{L}_{p,q}$ снабжена нормой
$$\|f\|_{(\mathbf{L}_{p,q})_\theta} = \|\theta_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_{p,q}} = \left(\frac{q}{p}\int\limits_0^\infty (\theta_{f,\mu}(x))^q\, x^{\frac{q}{p}-1}\, dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$
Тогда $((\mathbf{L}_{p,q})_\theta, \|\cdot\|_{(\mathbf{L}_{p,q})_\theta})$ тоже является симметричным банаховым пространством.
- Если $1 < p < q < \infty$, то функции F и Φ выпуклы, в то время как функция W не является вогнутой. Однако пространство $\mathbf{L}_{p,q}$ удовлетворяет условию Харди—Литтлвуда $(\mathcal{HLP})$, т. е. $(\mathbf{L}_{p,q})_\theta = \mathbf{L}_{p,q}$. Пространство $\mathbf{L}_{p,q}$ нормируемо с нормой $\|f\|_{\mathbf{L}_{p,q}} \leqslant \|f\|_{(\mathbf{L}_{p,q})_\theta} \leqslant \dfrac{p}{p-1}\|f\|_{\mathbf{L}_{p,q}}$, $f \in \mathbf{L}_{p,q}$. Следовательно, $(\mathbf{L}_{p,q}, \|\cdot\|_{(\mathbf{L}_{p,q})_\theta})$ — симметричное банахово пространство.

В случае $0 < p < q = \infty$ мы рассматриваем $\mathbf{L}_{F,\Phi}$ с $\mathbf{L}_F = \mathbf{L}_p$ и $\mathbf{L}_\Phi = \mathbf{L}_\infty$, а именно $\mathbf{L}_{p,\infty} = \{f \in \mathbf{L}_0 \colon \|f\|_{\mathbf{L}_{p,\infty}} = \sup\limits_{x>0} x^{1/p}\,\xi_{f,\mu}(x) < \infty\}$. Пространство $\mathbf{L}_{p,\infty}$ является r-выпуклым для любого $0 < r < p$, но не является p-выпуклым. Например, пространство $\mathbf{L}_{1,\infty}$ не нормируемо.

Заметим, что в случае $0 < q < 1 < p < \infty$ фундаментальная функция $\varphi_{\mathbf{L}_{p,q}}(x) = x^{1/p}$ выпукла, в то время как пространство $\mathbf{L}_{p,q}$ не является нормируемым.

Более подробно $L_{p,q}$-теория изложена в [50] и [120, § V.3] в случае $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$.

1.4.9. Пространства $\mathbf{L}_\infty(U)$. В этом пункте, как и выше, мы считаем пространство с мерой стандартным, т. е. $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = (I, \mathcal{B}_m, m)$.

Мы рассматриваем пространства $\mathbf{L}_\infty(U) = \{f \in \mathbf{L}_0 \colon \|f\|_{\mathbf{L}_\infty(U)} = \|U \cdot \xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_\infty} < \infty\}$ в предположении, что вес U является ϕ-функцией, т. е. U является непрерывной строго возрастающей положительной функцией, удовлетворяющей условиям $U(0) = 0$ и $U(\infty) = \infty$. Это пространство есть не что иное, как пространство Марцинкевича $\mathbf{M}_1(w)$ с $w = U'$.

Пусть U удовлетворяет Δ_2-условию $U^\sharp(2) = \sup\limits_{x>0} \dfrac{U(2x)}{U(x)} < \infty$. Тогда:

- $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_\infty(U)}$ является квазинормой на $\mathbf{L}_\infty(U)$ с константой $C \geqslant V^\sharp(2)$ в слабом неравенстве треугольника;
- $(\mathbf{L}_\infty(U), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_\infty(U)})$ является симметричным квази-банаховым пространством;
- пространство $(\mathbf{L}_\infty(U), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_\infty(U)})$ удовлетворяет условию Фату (F), и его фундаментальная функция имеет вид $\varphi_{\mathbf{L}_\infty(U)} = U$.

Следующие утверждения справедливы даже в том случае, если U не удовлетворяет Δ_2-условию:

1a. $\mathbf{L}_\infty(U)$ является порядковым идеалом, т. е. $|g| \leqslant |h|,\ h \in \mathbf{L}_\infty(U) \implies g \in \mathbf{L}_\infty(U)$;
1b. $\lambda \in \mathbb{R},\ g \in \mathbf{L}_\infty(U) \implies \lambda g \in \mathbf{L}_\infty(U))$;
1c. $\mathbf{L}_\infty(U)$ является симметричным, т. е. $f \in \mathbf{L}_\infty(U) \iff \xi_{f,\mu} \in \mathbf{L}_\infty$;
2a. $\mathbf{L}_\infty(U) = \bigcup\{J(f) \colon 0 \leqslant f \in \mathbf{L}_0,\ \xi_{f,\mu} = 1/U\}$, где $J(f) := \{g \in \mathbf{L}_0 \colon |g| \leqslant c|f|$ для некоторого $c > 0\}$ является главным идеалом, порожденным $|f|$;
2b. $\|g\|_{\mathbf{L}_\infty(U)} = \inf\{j_f(g) \colon 0 \leqslant f \in \mathbf{L}_0,\ \xi_{f,\mu} = 1/U\}$, где $j_f(g) = \inf\{c > 0,\ |g| \leqslant c|f|\}$ с $\infty \cdot \varnothing = \infty$;
3a. $D_t(\mathbf{L}_\infty(U)) = \mathbf{L}_\infty(D_t(U))$ для всех $t > 0$, и $D_t(\mathbf{L}_\infty(U)) \supseteq D_s(\mathbf{L}_\infty(U))$ для $t \geqslant s > 0$;
3b. $D_2(\mathbf{L}_\infty(U)) = \mathbf{L}_\infty(U) + \mathbf{L}_\infty(U)$.

Очевидно, что условия 2a и 2b основаны на теореме 1.4. Условия 3a и 3b вытекают из следующих эквивалентных условий:

- U удовлетворяет Δ_2-условию;
- $0 < U^\sharp(x) < \infty$ для всех $x > 0$;
- $\mathbf{L}_\infty(U)$ является D-инвариантным, т. е. $D_t(\mathbf{L}_\infty(U)) = \mathbf{L}_\infty(U)$ для всех $t > 0$;
- $\mathbf{L}_\infty(U)$ является решеткой, т. е. оно замкнуто относительно операций max и min;
- $\mathbf{L}_\infty(U) + \mathbf{L}_\infty(U) = \mathbf{L}_\infty(U)$, т. е. $\mathbf{L}_\infty(U)$ замкнуто относительно операции сложения.

Каждое из перечисленных выше условий подразумевает, что $(\mathbf{L}_\infty(U), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_\infty(U)})$ является симметричным квази-банаховым пространством.

Предположим теперь, что $(\mathbf{L}_\infty(U), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_\infty(U)})$ является симметричным банаховым пространством. Тогда его фундаментальная функция $\varphi_{\mathbf{L}_\infty(U)} = U$ является квазивогнутой.

Мы можем использовать функцию $V(x) = U_*(x) = x/U(x),\ x > 0$, которая является, также как и U, квазивогнутой, и рассмотреть пространство Марцинкевича $\mathbf{M}_V$.

Непосредственно из определения следует, что $f \in \mathbf{M}_V \iff V_* \cdot \theta_{f,\mu} \in \mathbf{L}_\infty \implies U \cdot \xi_{f,\mu} \in \mathbf{L}_\infty \iff f \in \mathbf{L}_\infty(U)$, т. е. $\mathbf{M}_V \subseteq \mathbf{L}_\infty(U)$.

На самом деле, здесь имеет место равенство $\mathbf{M}_V = \mathbf{L}_\infty(U)$, так как $\mathbf{M}_V$ является наибольшим симметричным банаховым пространством с фундаментальной функцией $V_* = \varphi_{\mathbf{M}_V} = \varphi_{\mathbf{L}_\infty(U)} = U$. Следовательно, $f \in \mathbf{M}_V \iff \xi_{f,\mu} \in \mathbf{M}_V \iff \theta_{f,\mu} \in \mathbf{L}_\infty \implies \theta_{f,\mu} \in \mathbf{M}_V$, т. е. пространство Марцинкевича $\mathbf{M}_V$ удовлетворяет свойству Харди—Литтлвуда $(\mathcal{HLP})$. Различные условия, при которых $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{HLP})$, будут описаны ниже в разделе 2.3.3. Здесь мы используем только тот факт, что $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{HLP}) \iff \liminf\limits_{x\to 0} \dfrac{V(2x)}{V(x)} > 1 \iff \limsup_{x\to 0} \dfrac{U(2x)}{U(x)} < 2$.

Таким образом, мы доказали:

- Пространство $\mathbf{L}_\infty(U)$ нормируемо тогда и только тогда, когда $\limsup_{x\to 0} \dfrac{U(2x)}{U(x)} < 2$. В этом случае существует эквивалентная U квазивогнутая функция U_1 такая, что $L_\infty(U_1)$ является симметричным банаховым пространством.

Заметим, что последнее условие было введено в [83] для соответствующих пространств Лоренца $\mathbf{\Lambda}_U$.

2. Индексы растяжения. Оператор Харди

2.1. Индексы растяжения положительных функций.

2.1.1. Функции растяжения. Для каждой функции $V\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ определим ее *верхнюю и нижнюю функции растяжения* $V^\sharp$ и $V^\flat$ следующим образом:

$$V^\sharp(x) = \sup_{0<y<\infty} \frac{V(xy)}{V(y)}, \quad V^\flat(x) = \inf_{0<y<\infty} \frac{V(xy)}{V(y)},\ 0 < x < \infty.$$

Имеем:

- $0 \leqslant V^\flat \leqslant V^\sharp \leqslant \infty$ и $V^\sharp(1) = V^\flat(1) = 1$;
- $V^\flat = \widetilde{V}^\flat = \widetilde{V^\sharp}$ и $V^\sharp = \widetilde{V}^\sharp = \widetilde{V^\flat}$, где инверсия $U \to \widetilde{U}$ определяется как $\widetilde{U}(x) = (U(x^{-1}))^{-1},\ x > 0$;
- $V^\sharp$ является *субмультипликативной*, т. е. $V^\sharp(xy) \leqslant V^\sharp(x)V^\sharp(y)$ для всех $x, y > 0$;
- $V^\flat$ является *супермультипликативной*, т. е. $V^\flat(xy) \geqslant V^\flat(x)V^\flat(y)$ для всех $x, y > 0$;
- $V^\sharp = V$ тогда и только тогда, когда V — конечная положительная субмультипликативная функция и $V(1) = 1$;
- $V^\flat = V$ тогда и только тогда, когда V — конечная положительная супермультипликативная функция и $V(1) = 1$;
- $V^{\sharp\sharp}(t) = V^\sharp(t),\ 0 < t < \infty$;
- $V^{\sharp\flat}(t) = V^\flat(t),\ 0 < t < \infty$;
- $V^{\flat\flat}(x) = V^\flat(x),\ 0 < x < \infty$;
- $V^{\flat\sharp}(x) = V^\sharp(x),\ 0 < x < \infty$.

Функции $V^\sharp$ и $V^\flat$ в общем случае не обязательно должны быть положительными и конечными. Например, если $V(x) = e^x,\ x > 0$, то $V^\sharp(x) = \infty$ при $x > 1$ и $V^\flat(x) = 0$ при $x < 1$.

С другой стороны, $0 < V^\flat \leqslant V^\sharp < \infty$ на $(0, \infty)$ в случае, когда это неравенство выполнено на интервале (a, b) для некоторых $0 < a < 1 < b < \infty$.

- Для любой квазивогнутой функции V функция $V^\sharp$, доопределенная на $[0, \infty)$ условием $V^\sharp(0) = 0$, тоже квазивогнута и

$$0 < V^\sharp(x) \leqslant \max(x, 1), \quad x \in (0, \infty). \tag{2.1}$$

- Для любой квазивогнутой функции V функция $V^\flat$ тоже квазивогнута и

$$0 < \min(x, 1) \leqslant V^\flat(x) < \infty, \quad x \in (0, \infty). \tag{2.2}$$

2.1.2. Индексы $p(U)$ и $q(U)$. В следующем предложении определяются *индексы растяжения* $p(U)$ и $q(U)$ субмультипликативной функции U, см. [74, § II.1].

Предложение 2.1. *Пусть U субмультипликативная функция на $[0, +\infty)$. Тогда существуют пределы*

$$p(U) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln U(x)} = \sup_{x>1} \frac{\ln x}{\ln U(x)}, \quad q(U) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\ln U(x)} = \inf_{0<x<1} \frac{\ln x}{\ln U(x)} \tag{2.3}$$

такие, что $0 \leqslant p(U) \leqslant q(U) \leqslant \infty$.

Простейший пример: $p(V) = q(V) = p$ для мультипликативной функции $V(x) = x^{1/p}$, $0 < p \leqslant \infty$.

Возвращаясь к общим (не обязательно субмультипликативным) положительным функциям V, мы можем расширить понятие индексов растяжения $p(V)$ и $q(V)$, полагая

$$p(V) := p(V^\sharp) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln V^\sharp(x)} = \sup_{x>1} \frac{\ln x}{\ln V^\sharp(x)},$$
$$q(V) := q(V^\sharp) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\ln V^\sharp(x)} = \inf_{0<x<1} \frac{\ln x}{\ln V^\sharp(x)},$$

где функция растяжения $V^\sharp$ — субмультипликативная с $V^\sharp(1) = 1$.

Следующее 2-параметрическое семейство функций удобно использовать как «эталон» при изучении асимптотического поведения произвольных субмультипликативных функций.

Пример 2.1 (функция $S_{p,q}$). Для каждой пары чисел $0 < p,\ q \leqslant \infty$ положим

$$S_{p,q}(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^{\frac{1}{q}}, & 0 < x \leqslant 1, \\ x^{\frac{1}{p}}, & 1 < x < \infty, \end{cases} \tag{2.4}$$

где $x^{\frac{1}{\infty}} = 1$ для всех $x > 0$.

Тогда

- $S_{p,q}(x) = \max(x^{\frac{1}{p}}, x^{\frac{1}{q}})$, $x > 0$ и $S_{p,q} = S^\sharp_{p,q}$ для $0 < p \leqslant q \leqslant \infty$;
- $S_{p,q}(x) = \min(x^{\frac{1}{p}}, x^{\frac{1}{q}})$, $x > 0$ и $S_{p,q} = S^\flat_{p,q}$ для $0 < q \leqslant p \leqslant \infty$;
- $p(S_{p,q}) = \min(p, q)$ и $q(S_{p,q}) = \max(p, q)$ для каждой пары $0 < p,\ q \leqslant \infty$.

Возвращаясь к произвольным функциям V, мы имеем:

- В случае $p = p(V) > 0$: $V^\sharp(x) \geqslant S_{p,q}(x) = x^{\frac{1}{p}}$ для всех $x > 1$, и для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $x_1 > 1$, что $V^\sharp(x) < x^{\frac{1}{p}+\varepsilon} = x^\varepsilon S_{p,q}(x)$ для всех $x > x_1$. Таким образом, $p(V) = p = \inf\{p_1 > 0\colon V^\sharp(x) \geqslant S_{p_1,q}(x) = x^{\frac{1}{p_1}}$ для всех $x > 1\}$.
- В случае $q = q(V) < \infty$: $V^\sharp(x) \geqslant S_{p,q}(x) = x^{\frac{1}{q}}$ для всех $x < 1$, и для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $0 < x_0 < 1$, что $V^\sharp(x) < x^{\frac{1}{q}-\varepsilon} = x^{-\varepsilon} S_{p,q}(x)$ для $0 < x < x_0$. Таким образом, $q = q(V) = \inf\{0 < q_1 < \infty\colon V^\sharp(x) \geqslant S_{p,q_1}(x) = x^{\frac{1}{q_1}}$ для всех $0 < x < 1\}$.
- В случае $p(V) = 0$ имеем: $0 = p(V) = \inf\{p > 0\colon V^\sharp(x) \geqslant S_{p,q}(x) = x^{\frac{1}{p}}$ для всех $x > 1\}$, т. е. $V^\sharp(x) = \sup\limits_{0<y<\infty} \dfrac{V(xy)}{V(y)} = \infty$ для всех $x > 1$.
- В случае $q(V) = \infty$: $\infty = q(V) = \sup\{q < \infty\colon V^\sharp(x) \geqslant S_{p,q}(x) = x^{\frac{1}{q}}$ для всех $0 < x < 1\}$.

Предложение 2.2 (см. [74, § II.1]). *Пусть функция V квазивогнута на $\mathbb{R}^+$. Тогда функции $V^\sharp$ и $V^\flat$, доопределенные на $\mathbb{R}^+$ условиями $V^\sharp(0) = V^\flat(0) = 0$, будут тоже квазивогнутыми, и $0 < \min(1, x) \leqslant V^\flat(x) \leqslant V^\sharp(x) \leqslant \max(1, x) < \infty$, $0 < x < \infty$. В этом случае мы имеем $1 \leqslant p(V) \leqslant q(V) \leqslant \infty$.*

2.2. Индексы растяжения симметричных пространств.

2.2.1. Функции растяжения симметричных банаховых пространств. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ — стандартное симметричное банахово пространство, где, как и раньше, $I = [0, a]$ или $I = [0, \infty)$.

Для каждой функции $f \in \mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$ определен *оператор растяжения* $D_t : \mathbf{L}_0 \to \mathbf{L}_0$ как

$$D_t f(x) := \begin{cases} f\left(\dfrac{x}{t}\right), & \text{если } x \geqslant 0,\ t > 0,\ \dfrac{x}{t} \in I, \\ 0, & \text{если } \dfrac{x}{t} \notin I. \end{cases} \tag{2.5}$$

Нетрудно показать, что D_t действует как линейный непрерывный оператор относительно топологии стохастической сходимости на $\mathbf{L}_0$.

Теорема 2.1. *Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ — стандартное симметричное банахово пространство и $\mathbf{B}(\mathbf{E})$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов на $\mathbf{E}$. Тогда*:

1. $D_t^{\mathbf{E}} = D_t|_{\mathbf{E}} \in \mathbf{B}(\mathbf{E})$ *для каждого* $t > 0$, *и* $\{D_t^{\mathbf{E}},\ 0 < t < \infty\}$ *образует группу линейных ограниченных операторов на* $\mathbf{E}$.
2. *Функция* $d_{\mathbf{E}}(t) := \|D_t\|_{\mathbf{B}(\mathbf{E})}$ *является субмультипликативной и квазивогнутой на* $[0, \infty)$ *с* $d_{\mathbf{E}}(1) = 1$ *такой, что*
$$d_{\mathbf{E}}(t) = d_{\mathbf{E}}^{\sharp}(t) \leqslant \max(1, t) \quad \text{для всех } t \geqslant 0. \tag{2.6}$$
3. *Для каждой* $f \in \mathbf{E}$ *функция* $d_{\mathbf{E},f} = \|D_t f\|_{\mathbf{E}},\ \ t \geqslant 0$ *является квазивогнутой на* $[0, \infty)$ *и*
$$d_{\mathbf{E}}(t) = \sup\{d_{\mathbf{E},f}(t) \colon \|f\|_{\mathbf{E}} \leqslant 1\} = \sup\{d_{\mathbf{E},f}^{\sharp}(t) \colon \|f\|_{\mathbf{E}} \leqslant 1\},\ t \geqslant 0. \tag{2.7}$$
4. *Если* $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условию* (C), *то*
$$d_{\mathbf{E}}(t) = \sup\{d_{\mathbf{E},f}(t) \colon \|f\|_{\mathbf{E}} \leqslant 1\} = \sup\{d(t) \colon \|f\|_{\mathbf{E}^0} \leqslant 1\} = d_{\mathbf{E}^0}(t),\ t \geqslant 0,$$
где $\mathbf{E}^0 = cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{F}_1)$ *минимальная часть пространства* $\mathbf{E}$.

Доказательство теоремы 2.1 можно найти в [74, § II.4.3].

Для общих симметричных банаховых пространств $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ положим $d_{\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu),f} = d_{\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m),\xi_{f,\mu}}$, $d_{\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)} = d_{\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m)}$, где $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ — стандартное пространство для $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$.

Заметим, что теорема 2.1 может быть естественным образом расширена на общие симметричные квази-банаховы пространства $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ с помощью p-нормы $\|\cdot\|_{\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)}$.

2.2.2. Индексы растяжения симметричных пространств. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство с функцией растяжения $d_{\mathbf{E}} = d_{\mathbf{E}}(t),\ t > 0$. В силу теоремы 2.1 функция $d_{\mathbf{E}}^{\sharp} = d_{\mathbf{E}}$ является субмультипликативной и квазивогнутой на $[0, \infty)$ с $d_{\mathbf{E}}(1) = 1$.

Поэтому мы можем определить *индексы растяжения* (*Бойда*) симметричного пространства $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ как индексы растяжения его функции растяжения $d_{\mathbf{E}}$, т. е. $p_{\mathbf{E}} := p(d_{\mathbf{E}})$ и $q_{\mathbf{E}} := q(d_{\mathbf{E}})$, где $p(d_{\mathbf{E}})$ и $q(d_{\mathbf{E}})$ определяются как в (2.3) с $U = d_{\mathbf{E}}$, см. [27,74]. Очевидно, что $1 \leqslant p_{\mathbf{E}} \leqslant q_{\mathbf{E}} \leqslant \infty$.

Можно использовать минимальную часть $\mathbf{E}^0 = cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{F}_1)$ пространства $\mathbf{E}$ и определить $p_{\mathbf{E}}^0 := p_{\mathbf{E}^0}$ и $q_{\mathbf{E}}^0 := q_{\mathbf{E}^0}$, а также определить *фундаментальные индексы растяжения* симметричного пространства $\mathbf{E}$ как $p_{\mathbf{E}}^{\varphi} = p(\varphi_{\mathbf{E}}) = p(\varphi_{\mathbf{E}}^{\sharp})$ и $q_{\mathbf{E}}^{\varphi} = q(\varphi_{\mathbf{E}}) = q(\varphi_{\mathbb{E}}^{\sharp})$, где $\varphi_{\mathbf{E}}$ — фундаментальная функция $\mathbf{E}$, см. [129].

Из предложения 2.2 и теоремы 2.1 следует, что $1 \leqslant p_{\mathbf{E}} \leqslant p_{\mathbf{E}}^0 \leqslant p_{\mathbf{E}}^{\varphi} \leqslant q_{\mathbf{E}}^{\varphi} \leqslant q_{\mathbf{E}}^0 \leqslant q_{\mathbf{E}} \leqslant \infty$, а также $p_{\mathbf{E}} = p_{\mathbf{E}}^0$ и $q_{\mathbf{E}}^0 = q_{\mathbf{E}}$ в случае, если $\mathbf{E}$ удовлетворяет условию (C).

Пространства Лоренца и Марцинкевича $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{\Lambda}_W(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и $\mathbf{M}_V = \mathbf{M}_V(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ максимальны. Непосредственные вычисления показывают, что $d_{\mathbf{\Lambda}_W} = W^{\sharp} = \varphi_{\mathbf{\Lambda}_W}^{\sharp}$ и $d_{\mathbf{M}_V} = (V_*)^{\sharp} = (\varphi_{\mathbf{M}_V})^{\sharp}$. Поэтому, если $\mathbf{E} = \mathbf{\Lambda}_W$ или $\mathbf{E} = \mathbf{M}_V$, то имеют место равенства: $p_{\mathbf{E}} = p_{\mathbf{E}}^0 = p_{\mathbf{E}}^{\varphi}$ и $q_{\mathbf{E}} = q_{\mathbf{E}}^0 = q_{\mathbf{E}}^{\varphi}$.

С другой стороны, Шимогаки [117] построил симметричные банаховы пространства $\mathbf{E}$, для которых $p_{\mathbf{E}}^0 < p_{\mathbf{E}}^{\varphi}$ и $q_{\mathbf{E}}^{\varphi} < q_{\mathbf{E}}^0$. Точнее, как показано в [117], существуют такие симметричные банаховы пространства $\mathbf{E}$, что $\varphi_{\mathbf{E}} = \varphi_{\mathbf{L}_2}$, т. е. $p_{\mathbf{E}}^{\varphi} = q_{\mathbf{E}}^{\varphi} = 2$, в то время как $p_{\mathbf{E}} = p_{\mathbf{L}_1} = 1$. Для ассоциированных пространств $\mathbf{E}^1$, в свою очередь, $q_{\mathbf{E}^1} = q_{\mathbf{L}_\infty} = \infty$.

Более общие примеры симметричных пространств, для которых $p_{\mathbf{E}} < p_{\mathbf{E}}^{\varphi}$ и $q_{\mathbf{E}}^{\varphi} < q_{\mathbf{E}}$, построены в [74, § 6.2].

Приведенные выше определения буквально переносятся на случай, когда $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ является симметричным квази-банаховым (не обязательно банаховым) пространством, но вычисление этих индексов обычно является нетривиальной задачей, см., например, работы [22, 41, 52, 57, 68, 95, 96] и ссылки в них.

2.2.3. Индексы растяжения ассоциированных пространств. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное пространство, $\mathbf{E}^1 = \mathbf{E}^1(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и $\mathbf{E}^{11} = \mathbf{E}^{11}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — его первое и второе ассоциированные пространства. Напомним, что оба пространства, снабженные естественными нормами $\|\cdot\|_{\mathbf{E}^1}$ и $\|\cdot\|_{\mathbf{E}^{11}}$, удовлетворяют условию (C), $(\mathbf{E}^0)^1 = \mathbf{E}^1$ и $(\mathbf{E}^0)^{11} = \mathbf{E}^{11}$.

Фундаментальная функция пространства $\mathbf{E}^1$ имеет вид $\varphi_{\mathbf{E}^1} = (\varphi_{\mathbf{E}})_*$, где отображение $V \to V_*$ определяется как $V_*(x) = \dfrac{x}{V(x)} \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$, $x \geqslant 0$.

Пусть V — квазивогнутая функция на $[0, +\infty)$. Тогда $(V_*)^\sharp = (V^\flat)_*$ и $(V_*)^\flat = (V^\sharp)_*$,

$$\frac{1}{p(V_*)} = \frac{1}{p((V_*)^\sharp)} = 1 - \frac{1}{q(V^\sharp)} = 1 - \frac{1}{q(V)},$$
$$\frac{1}{p(V)} = \frac{1}{p(V^\sharp)} = 1 - \frac{1}{q((V_*)^\sharp)} = 1 - \frac{1}{q(V_*)}.$$

Теорема 2.2. *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — *симметричное банахово пространство, и* $\mathbf{E}^1 = \mathbf{E}^1(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — *ассоциированное с ним пространство. Тогда* $\dfrac{1}{p^0_{\mathbf{E}^1}} + \dfrac{1}{q^0_{\mathbf{E}}} = 1$, $\dfrac{1}{q^0_{\mathbf{E}^1}} + \dfrac{1}{p^0_{\mathbf{E}}} = 1$.

Напомним, что ассоциированное пространство $\mathbf{E}^1$ всегда удовлетворяет условию (C). Поэтому из теоремы 2.1 вытекает:

Следствие 2.1. *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — *симметричное банахово пространство,* $\mathbf{E}^1$ *и* $\mathbf{E}^{11}$ — *его первое и второе ассоциированные пространства. Тогда* $\dfrac{1}{p_{\mathbf{E}^1}} + \dfrac{1}{q_{\mathbf{E}^{11}}} = 1$ *и* $\dfrac{1}{q_{\mathbf{E}^1}} + \dfrac{1}{p_{\mathbf{E}^{11}}} = 1$, *в то время как в общем случае* $\dfrac{1}{p_{\mathbf{E}^1}} + \dfrac{1}{q_{\mathbf{E}}} \leqslant 1$ *и* $\dfrac{1}{q_{\mathbf{E}^1}} + \dfrac{1}{p_{\mathbf{E}}} \leqslant 1$, *причем оба приведенных неравенства могут быть строгими.*

2.2.4. p-выпуклость и q-вогнутость и теоремы вложения. Следующие определения обычно применяются для общих банаховых и квази-банаховых решеток (см., например, [54, 78]), но мы в дальнейшем ограничимся случаем симметричных пространств.

Пусть $0 < p < \infty$. Квази-банахова решетка $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ называется *p-выпуклой* (соответственно *p-вогнутой*), если существуют положительные константы $C^{(p)}$ и $C_{(p)}$ такие что

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^p \right)^{1/p} \right\| \leqslant C^{(p)} \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|^p \right)^{1/p},$$

(соответственно,

$$\left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|^p \right)^{1/p} \leqslant C_{(p)} \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^p \right)^{1/p} \right\|$$

в случае p-вогнутости) для каждого выбора элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathbf{E}$.

Также говорят, что пространство $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ удовлетворяет *верхней p-оценке* (соответственно, *нижней q-оценке*), если приведенные выше неравенства имеют место для каждого выбора элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ of $\mathbf{E}$ с дизъюнктными носителями.

Первый (и основной) пример:

- Пространство $\mathbf{L}_{p,q}$ является q-выпуклым, если $p \geqslant q$, и p-вогнутым, если $q \geqslant p$. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ пространство $\mathbf{L}_{p,q}$ является r-выпуклым, если $r = \min(q, p - \varepsilon)$, и r-вогнутым, если $r = \max(p,\ q + \varepsilon)$.

Эти результаты можно найти в [25, 50], а также [52, 54]. Известны следующие факты.

- Если $\mathbf{E}$ является p-выпуклым (соответственно, q-вогнутым), то $\mathbf{E}$ r-выпукло (соответственно, r-вогнуто) для $0 < r < p$.

- p-выпуклость для $0 < p \leqslant 1$ подразумевает p-нормируемость, а это, в свою очередь, дает верхнюю p-оценку. Обратное утверждение неверно. Например, пространство $\mathbf{L}_{p,\infty}$, $0 < p < 1$, на пространстве с конечной мерой является p-нормируемым, но не является p-выпуклым.
- Для $p = 1$ пространство $\mathbf{E}$ является нормируемым тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}$ является 1-выпуклым, в то время как p-выпуклость $\mathbf{E}$ с $p > 1$ влечет, что $\mathbf{E}$ нормируемо (т. е. $\mathbf{E}$ является банаховым пространством).

Следующая теорема вложения является одним из полезных следствий p-выпуклости и q-вогнутости, см. [78, утверждение 2.b.3], а также другие результаты в [78, § 2.b].

Пример 2.2. Для каждой пары $p, q \in [1, +\infty]$ $p_{\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_q} = p_{\mathbf{L}_p + \mathbf{L}_q} = \min(p, q)$ и $q_{\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_q} = q_{\mathbf{L}_p + \mathbf{L}_q} = \max(p, q)$. В частности, $p_{\mathbf{L}_p} = q_{\mathbf{L}_p} = p$ для каждого $p \in [1, +\infty]$.

Теорема 2.3. *Пусть* $(p_{\mathbf{E}}, q_{\mathbf{E}})$ — *индексы растяжения симметричного пространства* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$.

1. *Если* $1 \leqslant p < p_E^0 \leqslant q_E^0 < q \leqslant +\infty$, *то* $\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_q \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_p + \mathbf{L}_q$.
2. *Если* $1 = p = p_{\mathbf{E}}^0 \leqslant q_{\mathbf{E}}^0 < q \leqslant +\infty$, *то* $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_q \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_q$.
3. *Если* $1 \leqslant p < p_{\mathbf{E}}^0 \leqslant q_{\mathbf{E}}^0 = q = +\infty$, *то* $\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_p + \mathbf{L}_\infty$.

2.3. Оператор Харди и условие $(\mathcal{HLP})$.

2.3.1. Подпространства $\mathbf{E}_\theta \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^\theta$. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство на пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, и $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ — соответствующее ему стандартное симметричное пространство на соответствующем стандартном пространстве с мерой $(I, \mathcal{B}_m, m)$.

Напомним, что оператор Харди H определяется на $(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(I, \mathcal{B}_m, m)$ как

$$(Hf)(x) := \frac{1}{x} \int\limits_0^x f(u)\, du, \ x \in I, \ f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(I, \mathcal{B}_m, m),$$

а мажорантная функция Харди—Литтлвуда $\theta_{f,\mu}$ функции $f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — как

$$\theta_{f,\mu}(x) = H\xi_{f,\mu}(x) = \frac{1}{x} \int\limits_0^x \xi_{f,\mu}(u)\, du, \ x \in I.$$

Определим θ-часть $\mathbf{E}_\theta$ пространства $\mathbf{E}$ как

$$\mathbf{E}_\theta = \mathbf{E}_\theta(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = \{f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \colon \theta_{f,\mu} \in \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)\}$$

с $\|f\|_{\mathbf{E}_\theta(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)} := \|\theta_{f,\mu}\|_{\mathbf{E}_\theta(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)}$ для $\theta_{f,\mu} \in \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$. Так как $\xi_{f,\mu} \leqslant \theta_{f,\mu}$ для любой функции f, то мы имеем вложение $\mathbf{E}_\theta(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \subseteq \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$.

- $(\mathbf{E}_\theta, \|\cdot\|_{\mathbf{E}_\theta})$ является симметричным банаховым пространством при условии, что оно нетривиально, т. е. когда $\mathbf{E}_\theta \neq \{0\}$.

Последнее условие имеет смысл в случае, когда $\mu(\Omega) = \infty$. Поэтому мы предполагаем всюду (если не оговорено противное), что $\mathbf{1}_A \in \mathbf{E}_\theta$ для некоторого (и потому всех) $A \in \mathcal{F}_\mu$ с мерой $0 < \mu(A) < \infty$.

Во многих случаях удобнее использовать пространство $\mathbf{E}^\theta$, для которого $(\mathbf{E}^\theta)_\theta = \mathbf{E}$. Симметричное банахово пространство $\mathbf{E}^\theta$ определено корректно, если $\theta_{f,\mu} \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(I, \mathcal{B}_m, m)$ для каждой функции $f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, причем

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = \{f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \colon \theta_{f,\mu} \in \mathbf{E}^\theta(I, \mathcal{B}_m, m)\}.$$

с $\|f\|_{\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)} = \|\theta_{f,\mu}\|_{\mathbf{E}^\theta(I, \mathcal{B}_m, m)}$для $\theta_{f,\mu} \in \mathbf{E}^\theta(I, \mathcal{B}_m, m)$. В «хороших» случаях мы имеем три симметричных банаховых пространства $\mathbf{E}_\theta(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \subseteq \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \subseteq \mathbf{E}^\theta(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, для которых $H(\mathbf{E}_\theta(I, \mathcal{B}_m, m)) \subseteq \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ и $H(\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)) \subseteq \mathbf{E}^\theta(I, \mathcal{B}_m, m)$. В обоих вложениях $\mathbf{E}_\theta \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^\theta$ возможны как равенства, так и строгие вложения.

Например,

- Для всех $1 < p \leqslant \infty$ $(\mathbf{L}_p)_\theta = \mathbf{L}_p = (\mathbf{L}_p)^\theta$ и $(\mathbf{L}_p + \mathbf{L}_\infty)_\theta = \mathbf{L}_p + \mathbf{L}_\infty = (\mathbf{L}_p + \mathbf{L}_\infty)^\theta$.
- Если $\mathbf{E} = \mathbf{L} \ln \mathbf{L} = \{f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \colon |f| \ln^+ |f| \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty\}$, то $(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)_\theta = \mathbf{L} \ln \mathbf{L}$ и $(\mathbf{L} \ln \mathbf{L})^\theta = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$.

- Если $\mu(\Omega) = \infty$, то $(\mathbf{L}_1)_\theta = \{0\}$ и $(\mathbf{L}_1)^\theta \not\subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$.

Рассмотрим пространства Орлича, Лоренца и Марцинкевича.

2.3.1.1. Пространства Орлича. Пусть $\mathbf{L}_\Phi = \mathbf{L}_\Phi(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — пространство Орлича с выпуклой функцией Орлича Φ. Тогда:

- $(\mathbf{L}_\Phi)^\theta = \mathbf{L}_{\Phi^\theta}$, где $\Phi^\theta(x) = x\Phi'(x) - \Phi(x),\ x \geqslant 0$, при условии, что Φ^θ является функцией Орлича, т. е. если ее производная $x\Phi''(x)$ возрастает;
- $(\mathbf{L}_\Phi)_\theta = \mathbf{L}_{\Phi_\theta}$, где $\Phi_\theta(x) = x\int\limits_0^x \dfrac{\Phi(u)}{u^2}\,du,\ x \geqslant 0$, при условии, что $\int\limits_0^1 \dfrac{\Phi(u)}{u^2}\,du < \infty$.

Например, пусть $\mathbf{Z}_\alpha = \{\mathbf{L}_{\Phi_\alpha}, 0 < \alpha < \infty\}$ — шкала Зигмунда—Орлича, определяемая функциями Орлича

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \int\limits_1^x (\ln u)^\alpha\,dx, & x > 1. \end{cases} \tag{2.8}$$

Тогда мы имеем $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty = \mathbf{Z}_0 \supset \mathbf{Z}_\alpha \supset \mathbf{Z}_\beta \supset \mathbf{L}_p + \mathbf{L}_\infty$, $0 < \alpha < \beta < \infty$, $p \geqslant 1$.

Для $\alpha \geqslant 1$ удобнее рассматривать функции Орлича

$$\bar{\Phi}_\alpha(x) = \Phi_\alpha(x) + \alpha\Phi_{\alpha-1}(x) = x(\ln x)^\alpha \cdot \mathbf{1}_{[1,\infty}(x),\ x \geqslant 0,$$

для которых $\Phi_\alpha(x) \leqslant \bar{\Phi}_\alpha(x) \leqslant (\alpha+1)\Phi_\alpha(x)$, $x \geqslant e$. Тогда $\mathbf{L}_{\bar{\Phi}_\alpha} = \mathbf{L}_{\Phi_\alpha}$ как множества, и можно использовать стандартное обозначение $\mathbf{Z}_\alpha = \mathbf{L}\mathrm{ln}^\alpha\mathbf{L}$.

Так как для $\alpha \geqslant 1$, $(\Phi_\alpha)^\theta(x) = x\Phi'_\alpha(x) - \Phi_\alpha(x) = \alpha\Phi_{\alpha-1}(x)$, для каждого $\alpha \geqslant 1$ мы имеем $(\mathbf{Z}_\alpha)^\theta = \mathbf{Z}_\alpha$ как множества и $\|\cdot\|_{(\mathbf{Z}_\alpha)^\theta} = \alpha\|\cdot\|_{\mathbf{Z}_\alpha}$. Таким образом, имеют место строгие вложения $\mathbf{Z}_\alpha \subset (\mathbf{Z}_\alpha)^\theta$ и $p_{\mathbf{Z}_\alpha} = 1$, см. [39, § 2.2.16 и § 3.1.10] и [111, § 16.4].

2.3.1.2. Пространства Лоренца. Пусть $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{\Lambda}_W(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — пространство Лоренца с вогнутой весовой функцией W, такой что $W(0+) = 0$.

- $(\mathbf{\Lambda}_W)^\theta = \mathbf{\Lambda}_{W^\theta}$, где $W^\theta(x) = W(x) - xW'(x),\ x \geqslant 0$, при условии, что W^θ — весовая функция Лоренца.
- $(\mathbf{\Lambda}_W)^\theta = \mathbf{\Lambda}_{W_\theta}$, где $W_\theta(x) = \int\limits_0^x\int\limits_t^\infty \frac{W'(u)}{u}\,dudt$, при условии, что интеграл $\int\limits_t^\infty \dfrac{W'(u)}{u}\,du < \infty, t > 0$.

Например, шкала Зигмунда—Лоренца $\{\mathbf{\Lambda}_{W_r},\ 0 < r < \infty\}$, где W_r — весовая функция Лоренца, которая является наименьшей вогнутой мажорантой квазивогнутой функции $(V_r)_*(x) = x/V_r(x)$, определенной ниже в (2.9).

2.3.1.3. Пространства Марцинкевича. Пусть $\mathbf{M}_V = \mathbf{M}_V(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — пространство Марцинкевича с вогнутой весовой функцией V такой, что $V(0+) = 0$ и $V'(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{V(x)}{x} = 0$.

- $(\mathbf{M}_V)^\theta = \mathbf{M}_{V^\theta}$, где $V^\theta(x) = \int\limits_0^x V(u)/u\,du,\ x \geqslant 0$, при условии, что последний интеграл конечен.
- $(\mathbf{M}_V)_\theta = \mathbf{M}_{V_\theta}$, где $V_\theta(x) = xV'(x),\ x \geqslant 0$, при условии, что функция V_θ квазивогнута.

Например, пусть $\{\mathbf{M}_{V_r},\ 0 < r < \infty\}$ — шкала Зигмунда—Марцинкевича, которую мы определяем как

$$V_r(x) := \begin{cases} 0, & x = 0, \\ (-\ln x)^{-r}, & 0 < x \leqslant a_r, \\ b_r + c_r(x - a_r), & a_r < x < \infty, \end{cases} \tag{2.9}$$

где $a_r = e^{-r-1}$, $b_r = (r+1)^{-r}$, $c_r = re^{r+1}(r+1)^{-r-1}$. Так как

$$V'_r(x) := \begin{cases} rx^{-1}(-\ln x)^{-r-1}, & 0 \leqslant x \leqslant a_r, \\ c_r, & a_r < x < \infty, \end{cases}$$

$$V''_r(x) = \begin{cases} -rx^{-2}(\ln x + r + 1)(-\ln x)^{-r-1}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & a_r < x < \infty, \end{cases}$$

мы имеем $V_r(x) > 0$, $V'_r(x) > 0$, $V''_r(x) < 0$ при $0 < x < a_r$, причем $b_r = V_r(a_r)$, $c_r = V'_r(a_r)$, $V''_r(a_r) = 0$.

Поэтому для каждого $r > 0$ функция V_r является строго возрастающей положительной выпуклой на $(0,\infty)$ с $V_r(0+) = 0$, а для пространства Марцинкевича $\mathbf{M}_{V_r}$, $r > 0$, мы имеем:

- строгие вложения $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \subset \mathbf{M}_{V_{r_2}} \subset \mathbf{M}_{V_{r_1}} \subset \mathbf{L}_p + \mathbf{L}_\infty$ для всех $0 < r_1 < r_2 < \infty$ и $p > 1$;
- фундаментальная функция пространства $\mathbf{M}_{V_r}$ имеет вид

$$\varphi_{\mathbf{M}_{V_r}}(x) = (V_r)_*(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x(-\ln x)^r, & 0 < x \leqslant a_r, \\ x(b_r + c_r(x - a_r))^{-1}, & a_r < x < \infty; \end{cases}$$

- $p_{\mathbf{M}_{V_r}} = p(\varphi_{\mathbf{M}_{V_r}}) = p((V_r)_*) = 1$.

Более того, для каждого $r > 1$ и достаточно малого $x > 0$

$$(V_{r-1})_\theta(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{u(-\ln u)^{r-1}}\,du = \frac{1}{r}(-\ln x)^r = \frac{1}{r}V_r(x),$$

откуда

- $(\mathbf{M}_{V_{r-1}})_\theta = \mathbf{M}_{V_r}$ для всех $r > 1$.

Подробности можно найти в [43].

2.3.2. Свойства Харди—Литтлвуда ($\mathcal{HLP}$) *и* ($\mathcal{WHLP}$). Говорят, что симметричное пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ удовлетворяет *свойству* (*условию*) *Харди—Литтлвуда* ($\mathbf{E} \in (\mathcal{HLP})$), если $\mathbf{E}^\theta = \mathbf{E}$ как множества.

Другими словами, пусть $\Xi(\mathbf{E}) = \{\xi_{f,\mu} \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m),\ f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)\}$, и $\Theta(\mathbf{E}) = \{\theta_{f,\mu} \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m),\ f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)\}$. Тогда $\Xi(\mathbf{E}) \subseteq \Theta(\mathbf{E})$, в то время как $\mathbf{E} \in (\mathcal{HL}P) \iff \Theta(\mathbf{E}) = \Xi(\mathbf{E})$.

Например, мы имеем:

- $\mathbf{L}_p \in (\mathcal{HLP})$ и $\mathbf{L}_p + \mathbf{L}_\infty \in (\mathcal{HLP})$ для всех $1 < p \leqslant \infty$;
- $\mathbf{L}_1 \notin (\mathcal{HLP})$ и $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \in (\mathcal{HLP})$.

Свойство $\mathbf{E} \in (\mathcal{HLP})$ можно сформулировать в терминах индекса $p_\mathbf{E}$ и через асимптотическое поведение функции растяжения $d_\mathbf{E}(t)$. Напомним, что $d_\mathbf{E}(t) = \|D_t\|_{\mathbf{E}\to\mathbf{E}}$ определяется в пункте 2.2.1 (теорема 2.1).

Теорема 2.4. *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ *симметричное банахово пространство. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. $\mathbf{E} \in (\mathcal{HLP})$,
2. $p_\mathbf{E} > 1$,

3a. $d_\mathbf{E}(t) \leqslant Ct^{1/p}$, $t > 1$ *для некоторых* $C > 0$ *и* $p > 1$,
3b. $d_\mathbf{E}(t) = o(t)$ *при* $t \to \infty$,
3c. $d_\mathbf{E}(t_0) < t_0$ *для некоторого* $t_0 > 1$,
3d. $\int\limits_0^\infty d_\mathbf{E}(1/t)dt < \infty$.

Первая версия теоремы была доказана в [83, 116] для максимальных пространств $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, и в [1] для общих (не обязательно максимальных) пространств в случае конечной меры. Случай бесконечной меры был рассмотрен в [74, § II.6.1].

В случае, когда пространство $\mathbf{E}$ стандартное, условие $\mathbf{E} \in (\mathcal{HLP})$ означает, что оператор Харди—Литтлвуда H ограничен на $\mathbf{E}$, условие 3d — что $\|H\|_{\mathbf{E}\to\mathbf{E}} \leqslant \int\limits_0^\infty d_\mathbf{E}(1/t)dt$.

Условие 2 может быть заменено на $p^0_\mathbf{E} > 1$, если пространство $\mathbf{E}$ удовлетворяет условию (C), и даже на $p(\varphi_\mathbf{E}) > 1$, если $p_\mathbf{E}$ совпадает с фундаментальным индексом $p(\varphi_\mathbf{E})$ пространства $\mathbf{E}$.

Заметим также, что условие 3b вместе с (2.7) влечет

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\|D_t\xi_{f,\mu}\|_\mathbf{E}}{t} = 0 \text{ для всех } f \in \mathbf{E}. \tag{2.10}$$

Мы будем называть последнее условие *слабым свойством Харди—Литтлвуда* ($\mathbf{E} \in (\mathcal{WHLP})$). Таким образом, $\mathbf{E} \in (\mathcal{WHLP})$ тогда и только тогда, когда $d_{\mathbf{E},f}(t) := \|D_t\xi_{f,\mu}\|_\mathbf{E} = o(t)$, $t \to \infty$.

Очевидно, $(\mathcal{HLP}) \Longrightarrow (\mathcal{WHLP})$, однако обратное утверждение неверно, т. е. из условия (2.10) в общем случае не следует 3b.

С другой стороны, если взять, в частности, $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$, то $\|D_t\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{E}} = \|\mathbf{1}_{[0,t]}\|_{\mathbf{E}} = \varphi_{\mathbf{E}}(t)$ и $1/t\,\|D_t\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{E}} = 1/\varphi_{\mathbf{E}^1}(t)$. Отсюда $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\|D_t\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{E}}}{t} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{\varphi_{\mathbf{E}^1}(t)} = 0 \iff \varphi_{\mathbf{E}^1}(\infty) = \infty \iff \mathbf{E}^1 \nsubseteq \mathbf{L}_\infty \iff \mathbf{E} \nsupseteq \mathbf{L}_1$ и $\mathbf{E} \notin (\mathcal{WHLP})$ при условии $\mathbf{E} \supseteq \mathbf{L}_1$.

Рассмотрим важный частный случай, когда $\mathbf{E}$ является пространством Орлича. Покажем, что все пространства Орлича $\mathbf{L}_\Phi$, за редким исключением, удовлетворяют условию $(\mathcal{WHLP})$.

Теорема 2.5. *Пусть $\mathbf{L}_\Phi = \mathbf{L}_\Phi(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ такое пространство Орлича, что функция Орлича Φ удовлетворяет условиям*

$$0 < \Phi(x) < \infty \text{ при } 0 < x < \infty \text{ и } \lim_{x\to\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = \infty. \tag{2.11}$$

Тогда $\mathbf{L}_\Phi \in (\mathcal{WHLP})$.

Доказательство. Условие (2.11) означает, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi_{\mathbf{L}_\Phi}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\widetilde{\Phi}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{\Phi^{-1}(1/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\Phi^{-1}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = \infty,$$

т. е. что $\mathbf{L}_1 \nsubseteq \mathbf{L}_\Phi$.

Для каждой ограниченной функции $f \in \mathbf{L}_\Phi$ из неравенства $D_t\xi_{f,\mu} \leqslant \xi_{f,\mu}(0)$ следует, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\|D_t\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_\Phi}}{t} \leqslant \lim_{t\to\infty} \frac{\xi_{f,\mu}(0)}{t} = 0.$$

Поэтому условие (2.10) выполняется для всех функций f из минимальной части $\mathbf{L}_\Phi^0 = cl_{\mathbf{L}_\Phi}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$ пространства $\mathbf{L}_\Phi$, и даже из $cl_{\mathbf{L}_\Phi}(\mathbf{L}_\infty)$ в случае $\mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{L}_\Phi$.

Если $\mathbf{L}_\Phi$ не минимально и $f \notin \mathbf{L}_\Phi^0$, то существует класс Юнга $\mathbf{Y}_\Phi^c$ такой, что $f \in \mathbf{Y}_\Phi^c$, но $f \notin \mathbf{Y}_\Phi^b$ для всех $b > c$. Тогда $\|D_t\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_\Phi} = \|\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_\Phi} = c$, $t > 0$, функция $d_{\mathbf{L}_\Phi,f}(t)$ ограничена и тем более $d_{\mathbf{L}_\Phi,f}(t)/t \to 0$ при $t \to \infty$ (определение и свойства классов Юнга $\mathbf{Y}_\Phi^c$ см. в пункте 1.4.2). $\square$

Пусть $\mathbf{L}_\Phi$ — пространство Орлича такое, что $\mathbf{L}_1 \nsubseteq \mathbf{L}_\Phi$ и $p_{\mathbf{L}_\Phi} = 1$, например, пространство Зигмунда—Орлича $\mathbf{L}_{\Phi_\alpha}$, $0 < \alpha < \infty$, определяемое по функции Орлича (2.8). Тогда $\mathbf{L}_\Phi \in (\mathcal{WHLP})$, однако $\mathbf{L}_\Phi \notin (\mathcal{HLP})$.

Заметим, что в отличие от пространств Орлича, для всех пространств Марцинкевича из $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{WHLP})$ следует, что $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{HLP})$, см. ниже пункт 2.3.3.

2.3.3. Условие $(\mathcal{HLP})$ для пространства Марцинкевича. Пусть $\mathbf{M}_V = \mathbf{M}_V(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — пространство Марцинкевича с квазивогнутой функцией V. В этом разделе мы предполагаем, что $V(0+) = 0$ и $V(\infty) = \infty$.

Условие 2 в теореме 2.4 можно уточнить в случае $\mathbf{E} = \mathbf{M}_V$ следующим образом.

- $V' \in \mathbf{M}_V$, $\theta_{V',m} = 1/V_*$ и $\xi_{f,m} \in \mathbf{M}_V \iff \theta_{f,m} \leqslant C\theta_{V',m}$ для некоторого $C > 0$. Отсюда $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{HLP}) \iff 1/V_* \in \mathbf{M}_V$.
- $d_{\mathbf{M}_V} = (V_*)^\sharp = (V^\flat)_*$ влечет $p_{\mathbf{M}_V} = p((V_*)^\sharp) = p(V_*)$, в то время как $1/p(V_*) + 1/q(V) = 1$. Отсюда $p_{\mathbf{M}_V} > 1$ тогда и только тогда, когда $q(V) = q(V^\sharp) < \infty$.
- Из определения $q(V) = q(V^\sharp)$ следует, что $q(V^\sharp) = \infty \iff \liminf\limits_{x\to 0} \dfrac{V(2x)}{V(x)} = 1$.
- Из условия $d_{\mathbf{M}_V}(t) = (V_*)^\sharp(t) = o(t)$ при $t \to \infty$ следует $d_{\mathbf{M}_V,f}(t) = \|D_t\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{M}_V} = o(t)$ при $t \to \infty$ для всех $f \in \mathbf{M}_V$. Однако, полагая $f = V'$, мы получим $\|D_tV'\|_{\mathbf{M}_V} = (V_*)^\sharp$. Отсюда $d_{\mathbf{M}_V}(t) = o(t)$, $t \to \infty \iff d_{\mathbf{M}_V,f}(t) = o(t)$, $t \to \infty$ для всех $f \in \mathbf{M}_V$.

Последнее утверждение означает, что для пространств Марцинкевича $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{WHLP}) \iff \mathbf{M}_V \in (\mathcal{HLP})$.

Нижний и *верхний классы Марцинкевича* $\underline{\mathbf{M}}_V$ и $\overline{\mathbf{M}}_V$ определяются как пространства

$$\mathbf{L}_\infty(U) = \{f \in \mathbf{L}_0 \colon \|f\|_{\mathbf{L}_\infty(U)} = \|U \cdot \xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_\infty} < \infty\}$$

с весовыми функциями $U = 1/V'$ и $U = V_*$, соответственно.

Напомним, что если U квазивогнута, то $U^\sharp$ тоже квазивогнута. Следовательно, функция $U^\sharp$ конечна и удовлетворяет Δ_2-условию. Таким образом, $\|f\|_{\mathbf{L}_\infty(U)}$ является квазинормой, и $\mathbf{L}_\infty(U)$ является квазинормированным пространством, удовлетворяющим условию Фату.

Учитывая равенства $V' = \xi_{V',m}$, $\theta_{V',m} = 1/V_*$ и $V'(x) \leqslant V(x)/x$, $x > 0$, получаем:

- $\underline{\mathbf{M}}_V \subseteq \mathbf{M}_V \subseteq \overline{\mathbf{M}}_V$;
- $\overline{\mathbf{M}}_V$ является симметричным пространством с квазинормой $f \to \|V_*\,\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_\infty}$;
- $\overline{\mathbf{M}}_V$ удовлетворяет условию Фату $\varphi_{\overline{\mathbf{M}}_V} = \varphi_{\mathbf{M}_V} = V_*$;
- $\underline{\mathbf{M}}_V$ является симметричным пространством с квазинормой $f \to \|1/V'\,\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_\infty}$ при условии, что функция $x\,1/V'$ возрастает, т. е. $1/V'$ — квазивогнута; при этом $\underline{\mathbf{M}}_V$ — симметричное квази-банахово пространство со свойством Фату и $\varphi_{\underline{\mathbf{M}}_V} = \varphi_{\mathbf{M}_V} = 1/V'$.

Теорема 2.6. *Пусть V — квазивогнутая функция, такая что $V(0+) = 0$ и $V(\infty) = \infty$. Тогда*:

1. *Если $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{HLP})$, то $\underline{\mathbf{M}}_V = \mathbf{M}_V = \overline{\mathbf{M}}_V$*;
2. *Если $\mathbf{M}_V \notin (\mathcal{HLP})$, то оба вложения $\underline{\mathbf{M}}_V \subset \mathbf{M}_V \subset \overline{\mathbf{M}}_V$ строгие*;
3. *Если $(\overline{\mathbf{M}}_V, \|\cdot\|_{\overline{\mathbf{M}}_V})$ нормируемо, то $\overline{\mathbf{M}}_V = \mathbf{M}_V$ и $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{HLP})$*;
4. *Если $(\underline{\mathbf{M}}_V, \|\cdot\|_{\underline{\mathbf{M}}_V})$ нормируемо, то $\underline{\mathbf{M}}_V = \mathbf{M}_V$ и $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{HLP})$.*

Доказательство.

1. Мы имеем $\theta_{v,m} = 1/V^*$ для $v = V' = \xi_{v,m}$. Отсюда $\mathbf{M}_V = \left\{ f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \colon \dfrac{\theta_{f,\mu}}{\theta_{v,m}} \in \mathbf{L}_\infty \right\}$, а также $\underline{\mathbf{M}}_V = \left\{ f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \colon \dfrac{\xi_{f,\mu}}{\xi_{v,m}} \in \mathbf{L}_\infty \right\}$, $\overline{\mathbf{M}}_V = \left\{ f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \colon \dfrac{\xi_{f,\mu}}{\theta_{v,m}} \in \mathbf{L}_\infty \right\}$. Следовательно, $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{HLP}) \iff \theta_{v,m} \in \mathbf{M}_V \iff \underline{\mathbf{M}}_V = \mathbf{M}_V = \overline{\mathbf{M}}_V$.

2. Если $\mathbf{M}_V = \overline{\mathbf{M}}_V$, то $\theta_{v,m} \in \mathbf{M}_V$, что противоречит условию $\mathbf{M}_V \notin (\mathcal{HLP})$. Если $\underline{\mathbf{M}}_V = \mathbf{M}_V$, то $\mathbf{M}_V = \overline{\mathbf{M}}_V$, что невозможно по предыдущему.

3. Пусть на $\overline{\mathbf{M}}_V$ существует норма $\|\cdot\|$, эквивалентная квазинорме $\|\cdot\|_{\overline{\mathbf{M}}_V}$. Эта норма может быть выбрана симметричной, так что $\overline{\mathbf{M}}_V$ становится симметричным банаховым пространством, фундаментальная функция которого эквивалентна $\varphi_{\overline{\mathbf{M}}_V} = V_*$. Но $\mathbf{M}_V$ есть наибольшее симметричное банахово пространство, фундаментальная функция которого эквивалентной V_*. Поэтому $\mathbf{M}_V = \overline{\mathbf{M}}_V$.

4. Пусть существует норма $\|\cdot\|$ на $\underline{\mathbf{M}}_V$, эквивалентная квазинорме $\|\cdot\|_{\underline{\mathbf{M}}_V}$. Тогда мы можем превратить $\underline{\mathbf{M}}_V$ в симметричное банахово пространство, заменяя норму $\|\cdot\|$ на эквивалентную ей симметричную норму.

Поскольку фундаментальная функция любого симметричного банахова пространства квазивогнута, фундаментальная функция $\varphi_{\underline{\mathbf{M}}_V} = 1/V'$ эквивалентна некоторой квазивогнутой функции U.

Теперь у нас есть пространство Марцинкевича $\mathbf{M}_U$, верхний класс которого $\overline{\mathbf{M}}_V$ совпадает с нижним классом $\underline{\mathbf{M}}_V$.

Из предыдущей части 3 теоремы следует $\mathbf{M}_U = \overline{\mathbf{M}}_U$. Значит, пространство $\mathbf{M}_U$, а потому и $\mathbf{M}_V = (\mathbf{M}_U)^\theta$, имеет свойство $(\mathcal{HLP})$. □

Большая часть этих результатов содержится в [1] для случая конечной меры, см. также [92] и имеющиеся там ссылки. Случай бесконечной меры был рассмотрен в [24, 119]. Приведенное выше доказательство взято из [43].

Замечание 2.1. Особый интерес здесь представляет промежуточное пространство $\mathbf{M}_V^\dagger = cl_{\mathbf{M}_V}(\underline{\mathbf{M}}_V)$. В разделе 3.2.2 будет показано, что

- оба вложения $\underline{\mathbf{M}}_V \subset \mathbf{M}_V^\dagger \subset \mathbf{M}_V$ являются строгими, если вложение $\mathbf{M}_V^\dagger \subset \mathbf{M}_V$ строгое;
- в этом случае симметричное банахово пространство $\mathbf{M}_V^\dagger$ не является интерполяционным.

3. Интерполяция и орбиты

В этом разделе мы рассматриваем интерполяцию абсолютных сжатий или $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$-сжатий. Поэтому мы вынуждены сузить рассмотрение до симметричных банаховых пространств $\mathbf{E}$, которые удовлетворяют вложениям $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ и имеют нетривиальные двойственные пространства.

3.1. Абсолютные сжатия и интерполяционные пространства.

3.1.1. Полугруппы $\mathcal{AC}$ и $\mathcal{AC}^o$. Линейный оператор $T\colon \mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty \to \mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$ называется *абсолютным*, или $(\mathbf{L}_1,\mathbf{L}_\infty)$-*сжатием*, если T является сжатием как в $\mathbf{L}_1$, так и в $\mathbf{L}_\infty$.

Обозначим через $\mathcal{AC}$ множество всех абсолютных сжатий.

Для каждого абсолютного сжатия $T\in\mathcal{AC}$ сужение $T|_{\mathbf{L}_1}$ является сжатием в $\mathbf{L}_1$, а сопряженный оператор $(T|_{\mathbf{L}_1})^*$ является сжатием в $\mathbf{L}_\infty$. Последний оператор на $\mathbf{L}_\infty$ определен также на $\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty$ и может быть расширен с $\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty$ на $\mathbf{L}_1$ по непрерывности, а затем на $\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$ по линейности. Обозначим этот расширенный оператор через T^o и отметим, что $T^o\in\mathcal{AC}$ и $T^{oo}=(T^o)^o\in\mathcal{AC}$. По определению, связь между операторами T и T^o однозначно определяется равенством

$$\int\limits_\Omega Tf\cdot g\,d\mu=\int\limits_\Omega f\cdot T^o g\,d\mu,\ f\in\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty,\ g\in\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty. \tag{3.1}$$

Можно показать (см., например, [74, § II.3.4]), что для каждого оператора $T\in\mathcal{AC}$ следующие условия эквивалентны:

- $(T^o)^o=T$;
- Для всех $f\in\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$ и $g\in\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty$, $\int\limits_\Omega Tf\cdot g\,d\mu=\int\limits_\Omega f\cdot T^o g\,d\mu$;
- T является непрерывным оператором в топологии $\sigma(\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty,\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty)$ на $\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$.

Пусть $\mathcal{AC}^o:=\{T\in\mathcal{AC}\colon (T^o)^o=T\}$. Тогда $\mathcal{AC}^o$ является собственной подполугруппой полугруппы $\mathcal{AC}$, а именно, существуют $T\in\mathcal{AC}$ такие, что $T\neq T^{oo}$ и $T\notin\mathcal{AC}^o$.

Особый интерес представляют два подмножества полугруппы $\mathcal{AC}^o$.

3.1.1.1. Сохраняющие меру преобразования. Пусть $\tau\colon\Omega\to\Omega$ — сохраняющее меру преобразование (с.м.п.) на $(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$. Это означает, что $\mu\circ\tau^{-1}=\mu$, т. е. для $A\in\mathcal{F}_\mu$ множество $\tau^{-1}A\in\mathcal{F}_\mu$ и $\mu(\tau^{-1}A)=\mu(A)$.

Каждое сохраняющее меру преобразование τ на $(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$ индуцирует линейный оператор $T_\tau\colon\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty\to\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$ вида $T_\tau f:=f\circ\tau$, $f\in\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$.

Так как τ сохраняет меру, то функции $f\in\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$ и $T_\tau f\in\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$ равноизмеримы. Поэтому $T_\tau\in\mathcal{AC}$ и $T_\tau\mathbf{E}\subseteq\mathbf{E}$ для каждого симметричного пространства $\mathbf{E}=\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$, в то время как ограничение T_τ на $\mathbf{E}$ является изометрией в $\mathbf{E}$. В случае, когда преобразование τ обратимо, имеем также $T_\tau\in\mathcal{AC}^o$ и $T_\tau\mathbf{E}=\mathbf{E}$

3.1.1.2. Условные ожидания. Пусть $\mathcal{G}$ — σ-подалгебра $\mathcal{F}_\mu$ на пространстве с мерой $(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$, и пусть $f\in\mathbf{L}_1(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$. Условное ожидание $\mathbb{E}_\mu^{\mathcal{G}}f$ функции f (относительно $\mathcal{G}$) представляет собой функцию $g\in\mathbf{L}_1(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ такую, что $\int\limits_A g\,d\mu=\int\limits_A f\,d\mu$ для всех $A\in\mathcal{G}$. В случае $\mu(\Omega)<\infty$ в силу теоремы Радона—Никодима такая функция g существует. В случае $\mu(\Omega)=\infty$ следует дополнительно предполагать, что сужение $\mu|_{\mathcal{G}}$ меры μ на $\mathcal{G}$ является σ-конечной мерой на $(\Omega,\mathcal{G},\mu|_{\mathcal{G}})$.

Поэтому мы будем использовать следующее определение.

- Пусть $f\in(\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty)(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$, и пусть $\mathcal{G}$ — σ-подалгебра $\mathcal{F}_\mu$. Тогда $g=\mathbb{E}_\mu^{\mathcal{G}}$ является условным ожиданием тогда и только тогда, когда g является $\mathcal{G}$-измеримой и $\int\limits_A g\,d\mu=\int\limits_A f\,d\mu$ для всех $A\in\mathcal{G}$ с $\mu(A)<\infty$.

Заметим, что последнее условие $\mu(A)<\infty$ нельзя опустить, даже если $f\in\mathbf{L}_1$.

Таким образом, $\int\limits_\Omega h\,\mathbb{E}_\mu^{\mathcal{G}}f\,d\mu=\int\limits_\Omega h\,f\,d\mu$ для всех $h\in\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ и $f\in(\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty)(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$.

Отображение $f\to\mathbb{E}_\mu^{\mathcal{G}}f$ является линейным положительным оператором, таким что

$$\int\limits_\Omega \mathbb{E}_\mu^{\mathcal{G}}(hf)\,d\mu=\int\limits_\Omega h\,\mathbb{E}_\mu^{\mathcal{G}}(f)\,d\mu.$$

3.1.2. Интерполяционные пространства. Пусть $\mathbf{B}(\mathbf{E})$ — алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве $\mathbf{E}$, и пусть $\mathbf{B}_1(\mathbf{E})=\{T\in\mathbf{B}(\mathbf{E})\colon \|T\|_{\mathbf{E}}\leqslant 1\}$ — единичный шар в $\mathbf{B}(\mathbf{E})$.

Используя вложения $\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty\subseteq\mathbf{L}_i\subseteq\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$, $i=1,\infty$, рассмотрим множество $\mathbf{B}(\mathbf{L}_1,\mathbf{L}_\infty)$ всех линейных операторов $T\colon\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty\to\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$, таких что $T|_{\mathbf{L}_1}\in\mathbf{B}(\mathbf{L}_1)$ и $T|_{\mathbf{L}_\infty}\in\mathbf{B}(\mathbf{L}_\infty)$.

Если $T \in \mathbf{B}(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$, то $T \in \mathbf{B}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$, $T \in \mathbf{B}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)$, и $\mathbf{B}(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$ является банаховой алгеброй относительно нормы $|||T||| := \max(\|T\|_{\mathbf{B}(\mathbf{L}_1)}, \|T\|_{\mathbf{B}(\mathbf{L}_\infty)}) \geqslant \max(\|T\|_{\mathbf{B}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)}, \|T\|_{\mathbf{B}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)})$.

Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство на пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, и $T \in \mathbf{B}(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$. Так как $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$, то из вложения $T|_\mathbf{E}\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$ следует, что $T|_\mathbf{E}$ является замкнутым оператором в $\mathbf{E}$, потому $T|_\mathbf{E} \in \mathbf{B}(\mathbf{E})$.

Ниже (в пункте 3.2.2) будет показано, что существуют симметричные банаховы пространства, которые не являются $\mathcal{AC}$-инвариантными.

Симметричное банахово пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ называется *интерполяционным* (или, если быть более точным, $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$-*интерполяционным*) пространством, если $T|_\mathbf{E} \in \mathbf{B}(\mathbf{E})$ для всех $T \in \mathbf{B}(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$.

Можно показать, что:

- Для каждого интерполяционного пространства $\mathbf{E}$ существует константа $c > 0$ такая, что

$$||T||_\mathbf{E} \leqslant c|||T||| \quad \text{для всех } T \in \mathbf{B}(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty).$$

  Кроме того, можно считать $c = 1$, переходя к подходящей эквивалентной норме в $\mathbf{E}$.

Константа c называется *интерполяционной константой* $\mathbf{E}$. Если $c = 1$, то симметричное банахово пространство $\mathbf{E}$ называется *вполне симметричным*.

Следующее описание интерполяционных и вполне симметричных пространств связано с теоремой Кальдерона—Митягина [11, 29].

Для каждой функции $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ рассмотрим $\mathcal{AC}$-орбиту f:

$$\mathcal{O}(f) := \{Tf \colon T \in \mathcal{AC}\}.$$

Можно показать (см. [74, § II.3]), что верно следующее утверждение.

Теорема 3.1. *$\mathcal{O}(f) = \{g \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \colon \theta_{g,\mu} \leqslant \theta_{f,\mu}\}$ для каждой функции $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$, причем все орбиты являются замкнутыми в слабой топологии $\sigma(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty, \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$ на $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$.*

Например, для каждого пространства Марцинкевича $\mathbf{M}_V$ по определению $V' \in \mathbf{M}_V$ и $\mathbf{M}_V = \mathbb{R}^+\mathcal{O}(V')$, т. е. $f \in \mathbf{M}_V$ тогда и только тогда, когда $Cf \in \mathcal{O}(V')$ для некоторого $C > 0$.

Следующий центральный результат теории следует из [29] и [11], более детальное доказательство содержится в [74, § II.4].

Теорема 3.2. *Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство. Тогда*:

1. *$\mathbf{E}$ является интерполяционным пространством $\iff g \in \mathbf{E}$, лишь только $g \in \mathcal{O}(f)$ для некоторой $f \in \mathbf{E}$*;
2. *$\mathbf{E}$ вполне симметрично $\iff g \in \mathbf{E}$, лишь только $g \in \mathcal{O}(f)$ и $\|g\|_\mathbf{E} \leqslant \|f\|_\mathbf{E}$ для некоторой $f \in \mathbf{E}$.*

Теорема утверждает, что каждое интерполяционное пространство $\mathbf{E}$ имеет вид $\mathbf{E} = \bigcup\limits_{f \in \mathbf{E}} \mathcal{O}(f)$, а для вполне симметричных пространств, кроме того, что $\|g\|_\mathbf{E} = \inf\{\|f\|_\mathbf{E} \colon g \in \mathcal{O}(f)\}$, $g \in \mathbf{E}$.

Другими словами, каждое интерполяционное пространство $\mathbf{E}$ является объединением всех пространств Марцинкевича $\mathbf{M}_V$, для которых $V' \in \mathbf{E}$, т. е. $\mathbb{R}^+\mathcal{O}(V') = \mathbf{M}_V \subseteq \mathbf{E}$.

Заметим, что каждое минимальное симметричное пространство и каждое максимальное симметричное пространство являются интерполяционными, см. [74, теоремы II.4.9 и II.4.10]. В частности, пространства Орлича, Лоренца и Марцинкевича являются интерполяционными пространствами.

Более того,

- из условия $(\mathcal{HLP})$ следует условие интерполяционности.

Действительно, если $\mathbf{E} \in (\mathcal{HLP})$ и $f \in \mathbf{E}$, то $\theta_{f,\mu} \in \mathbf{E}$ и $\mathcal{O}(f) \subseteq \{g \in \mathbf{E} \colon \xi_{f,\mu} \leqslant \theta_{f,\mu}\} \subseteq \mathbf{E}$. С другой стороны, из свойства интерполяционности, в общем случае, не следует свойство $(\mathcal{HLP})$. Например, если $\mathbf{E}$ — максимальное с $p_\mathbf{E} = 1$, то $\mathbf{E}$ является интерполяционным пространством, в то время как $\mathbf{E} \notin (\mathcal{HLP})$.

Как будет показано ниже в пункте 3.2.2, существуют симметричные банаховы пространства, которые не являются интерполяционными. Первый пример такого пространства, по-видимому, был построен в [18]. С другой стороны, существуют симметричные квази-банаховы пространства, которые вполне симметричны и обладают свойством интерполяционности, но не являются нормируемыми. Как это было отмечено в [128, § 2.6], такими пространствами являются, например, пространства $\mathbf{L}_{p,q}$ с $0 < q < 1 < p < \infty$.

3.2. Положительные сжатия и интерполяционные пространства.

3.2.1. Полугруппы $\mathcal{PAC}$ и $\mathcal{PAC}^o$ и условные математические ожидания. Напомним, что оператор T, определенный на $\mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ (или на его подпространстве), называется *положительным*, если из $f \geqslant 0$ следует $Tf \geqslant 0$.

Обозначим через $\mathcal{PAC}$ множество всех положительных абсолютных сжатий. Очевидно, что $\mathcal{PAC}$ является подполугруппой полугруппы $\mathcal{AC}$.

Положительный оператор T называется *субмарковским*, если он является сжатием в $\mathbf{L}_1$. Если, кроме того, T сохраняет интеграл, т. е. $\int\limits_\Omega Tf\,d\mu = \int\limits_\Omega f\,d\mu$, $0 \leqslant f \in \mathbf{L}_1$, то оператор T называется *марковским*.

Положительный оператор T называется *монотонно непрерывным* на пространстве $\mathbf{E}$, если из $f_n \uparrow f \in \mathbf{E}$ следует, что $Tf_n \uparrow Tf$.

- Каждый положительный оператор на $\mathbf{L}_p$ является монотонно непрерывным для $1 \leqslant p < \infty$. Однако в случае $p = \infty$ положительные сжатия могут и не быть монотонно непрерывными.

С другой стороны, пусть для положительного $\mathbf{L}_1$-сжатия T сопряженный к нему оператор $T^* : \mathbf{L}_\infty \to \mathbf{L}_\infty$ определяется двойственностью $\langle Tf, g\rangle_\mu = \int\limits_\Omega Tf\,g\,d\mu = \int\limits_\Omega f\,T^*g\,d\mu = \langle f, T^*g\rangle_\mu$. Тогда:

- если T — положительное $\mathbf{L}_1$-сжатие, то сопряженный к нему оператор T^* является положительным монотонно непрерывным $\mathbf{L}_\infty$-сжатием.

Возвращаясь к полугруппе $\mathcal{AC}$, рассмотрим их общую подполугруппу $\mathcal{PAC}^o = \mathcal{AC}^o \cap \mathcal{PAC}$. Особый интерес представляют два следующих (упомянутых выше) подкласса $\mathcal{PAC}^o$.

- $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = \{T_\tau\}$, где $T_\tau f = f \circ \tau$, $f \in \mathbf{L}_0$ и τ является сохраняющим меру преобразованием $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$.
- $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = \{\mathbb{E}_\mu^{\mathcal{G}}\}$, где $\mathbb{E}_\mu^{\mathcal{G}}$ является условным математическим ожиданием, а соответствующая мера $\mu|_{\mathcal{G}}$ является σ-конечной на σ-подалгебре $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_\mu$.

Первый класс $\mathcal{T}$ не оказывает влияния на интерполяционные свойства симметричного пространства $\mathbf{E}$, так как $T_\tau\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$ и $\|T_\tau f\|_\mathbf{E} = \|f\|_\mathbf{E}$, $f \in \mathbf{E}$ для каждого $T_\tau \in \mathcal{T}$. Очевидно, если преобразование τ обратимо, то мы имеем равенство $T_\tau\mathbf{E} = \mathbf{E}$ и $\|T_\tau f\|_\mathbf{E} = \|f\|_\mathbf{E}$, $f \in \mathbf{E}$. В отличие от этого, класс $\mathcal{E}$ полностью определяет свойство интерполяции в следующем смысле.

Теорема 3.3. *Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство. Тогда*:

1. $\mathbf{E}$ *интерполяционное пространство* $\iff$ $T\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$ *для любого* $T \in \mathcal{E}$;
2. $\mathbf{E}$ *вполне симметричное пространство* $\iff$ $T\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$ *и* $\|Tf\|_\mathbf{E} \leqslant \|f\|_\mathbf{E}$, $f \in \mathbf{E}$ *для любого* $T \in \mathcal{E}$.

На самом деле, даже один оператор T (специального вида) может быть «проверяющим» интерполяционность $\mathcal{E}$. Пусть $r > 1$. Последовательность измеримых подмножеств $A_n \subseteq \Omega$, $n \geqslant 1$ будем называть *r-адической*, если $A_n \supset A_{n+1}$ и $0 < \mu(A_n) = r\mu(A_{n+1}) < \infty$ для $n \geqslant 1$.

Для данной r-адической последовательности рассмотрим σ-алгебру $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\{A_n\})$, порожденную $\{A_n,\ n \geqslant 1\}$ и $\{B \in \mathcal{F}_\mu\colon B \subseteq \Omega \setminus A_1\}$, и пусть $T_\mathcal{H} f = \mathbb{E}_\mu^\mathcal{H}(f \cdot 1_{A_1}) + f \cdot 1_{\Omega\setminus A_1}$, $f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, где $\mathbb{E}_\mu^\mathcal{H}$ — оператор условного ожидания на $\mathcal{H}$.

Теорема 3.4. *Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство, и $T_\mathcal{H}$ определяется r-адической σ-алгеброй $\mathcal{H}$. Тогда*:

1. $\mathbf{E}$ *интерполяционное пространство* $\iff$ $T_\mathcal{H}\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$;
2. $\mathbf{E}$ *вполне симметричное пространство* $\iff$ $T_\mathcal{H}\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$ *и* $\|T_\mathcal{H} f\|_\mathbf{E} \leqslant \|f\|_\mathbf{E}$, $f \in \mathbf{E}$.

Эту теорему и другие, связанные с ней результаты, можно найти в [90–92].

3.2.2. Симметричные банаховы пространства, не обладающие свойством интерполяционности. Пусть $\mathbf{M}_V = \mathbf{M}_V(I, \mathcal{B}_m, m)$ — пространство Марцинкевича на стандартном измеримом пространстве $(I, \mathbf{B}_m, m)$ с $I = [0, \infty)$. Мы опять используем нижний класс Марцинкевича $\underline{\mathbf{M}}_V$ пространства Марцинкевича $\mathbf{M}_V$ и его замыкание $\mathbf{M}_V^\dagger = cl_{\mathbf{M}_V}(\underline{\mathbf{M}}_V)$ в $\mathbf{M}_V$. Промежуточное пространство $\mathbf{M}_V^\dagger$ при вложении $\underline{\mathbf{M}}_V \subseteq \mathbf{M}_V^\dagger \subseteq \mathbf{M}_V$ является симметричным банаховым пространством. Оно удовлетворяет условию (C) как подпространство $\mathbf{M}_V$, однако (в отличии от $\mathbf{M}_V$) не обязано быть максимальным в тех случаях, когда вложение $\mathbf{M}_V^\dagger \subset \mathbf{M}_V$ строгое.

Напомним, что по теореме 2.6 $\mathbf{M}_V \notin (\mathcal{HLP})$ тогда и только тогда, когда $p_{\mathbf{M}_V} = p(V_*) = 1$, и вложение $\underline{\mathbf{M}}_V \subset \mathbf{M}_V$ в этом случае строгое.

Предположим также, что функция $U(x) = xV'(x),\ x > 0$ является квазивогнутой, также как и функция V. Тогда для соответствующего пространства Марцинкевича $\mathbf{M}_U$ имеем:

(a) $p_{\mathbf{M}_U} = p(U_*) = 1$ и $\mathbf{M}_U \notin (\mathcal{HLP})$, также как и $\mathbf{M}_V$;
(b) $\mathbf{M}_U = (\mathbf{M}_V)_\theta \subset \overline{\mathbf{M}}_U = \underline{\mathbf{M}}_V \subset \mathbf{M}_V = (\mathbf{M}_U)^\theta$, где оба включения являются строгими;
(c) $\overline{\mathbf{M}}_U = cl_{\overline{\mathbf{M}}_U}(\mathbf{M}_U)$ и $\mathbf{M}_V^\dagger = cl_{\mathbf{M}_V}(\mathbf{M}_U)$, т. е. $\mathbf{M}_U$ плотно в $\overline{\mathbf{M}}_U = \underline{\mathbf{M}}_V$, а также в $\mathbf{M}_V^\dagger$.

Чтобы найти пару (U, V) с указанными выше свойствами, можно использовать шкалу Зигмунда—Марцинкевича $\{\mathbf{M}_{V_r},\ 0 < r < \infty\}$ (которая определяется в (2.9)), и подставить, например, $U = V_2$ и $V = V_1$, $r = 1, 2$.

Теорема 3.5 предоставляет широкий класс симметричных банаховых пространств, которые не являются интерполяционными.

Теорема 3.5. *Пусть $\mathbf{M}_U$ и $\mathbf{M}_V$ — два пространства Марцинкевича с квазивогнутыми функциями U и V такими, что $U(x) = xV'(x),\ x > 0$ и $p_{\mathbf{M}_U} = p(\mathbf{M}_V) = 1$. Предположим также, что $V(0) = U(0) = 0$ и $V(\infty) = U(\infty) = \infty$. Тогда*:

1. *оба вложения $\underline{\mathbf{M}}_V \subset \mathbf{M}_V^\dagger \subset \mathbf{M}_V$ строгие*;
2. *симметричное банахово пространство $\mathbf{M}_V^\dagger = cl_{\mathbf{M}_V}(\underline{\mathbf{M}}_V)$ не является интерполяционным.*

Доказательство. Из предположений теоремы следуют условия (a), (b) и (c).

Если $\underline{\mathbf{M}}_V = \mathbf{M}_V^\dagger$, то $\underline{\mathbf{M}}_V$ нормируемо, что противоречит условию 4 теоремы 2.6. Поэтому вложение $\underline{\mathbf{M}}_V \subset \mathbf{M}_V^\dagger$ строгое.

Предположим, что $\mathbf{M}_V^\dagger = \mathbf{M}_V$. Тогда из условия (c) следует, что $\mathbf{M}_U$ плотно в $\mathbf{M}_V$, и потому единичный шар $(\mathbf{M}_U)_1$ пространства $\mathbf{M}_U$ плотен в единичном шаре $(\mathbf{M}_V)_1$ пространства $\mathbf{M}_V$. По определению пространства Марцинкевича $(\mathbf{M}_U)_1 = \{f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \colon \theta_{f,\mu} \leqslant U\} = \mathcal{O}(U')$ и $(\mathbf{M}_V)_1 = \{f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \colon \theta_{f,\mu} \leqslant V\} = \mathcal{O}(V')$, где обе орбиты $\mathcal{O}(U')$ и $\mathcal{O}(V')$ замкнуты в слабой топологии $\sigma(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty, \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$ на $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ в силу теоремы 3.1. Следовательно, $\mathcal{O}(U') = (\mathbf{M}_U)_1$ плотно в $\mathcal{O}(V') = (\mathbf{M}_V)_1$, и значит $(\mathbf{M}_U)_1 = (\mathbf{M}_V)_1$ и $\mathbf{M}_U = \mathbf{M}_V$. Равенство противоречит условиям (a) и (b), поэтому вложение $\mathbf{M}_V^\dagger \subset \mathbf{M}_V$ строго.

Предположим теперь, что симметричное банахово пространство $\mathbf{M}_V^\dagger$ — интерполяционное. Тогда по теореме 3.1 $V' \in \underline{\mathbf{M}}_V \subset \mathbf{M}_V^\dagger \implies (\mathbf{M}_V)_1 = \mathcal{O}(V') = \{TV' \colon T \in \mathcal{AC}\} \subseteq \mathbf{M}_V^\dagger \implies \mathbf{M}_V \subseteq \mathbf{M}_V^\dagger$. Противоречие с $\mathbf{M}_V^\dagger \neq \mathbf{M}_V$ завершает доказательство теоремы. □

Замечание 3.1.

- Построение «неинтерполяционных» пространств на основе строгого вложения $\mathbf{M}_V^\dagger \subset \mathbf{M}_V$ известно уже давно. Приведенная выше теорема и ее доказательство взяты из [43]. Более ранняя версия была представлена в [74, § II.5.7]. Следует отметить, что несмотря на то, что приведенная там лемма 5.5 неверна, она может быть легко исправлена дополнительным условием на пространство $\mathbf{M}_V$. А именно, следует дополнительно потребовать, чтобы соответствующая V функция $U(x) = xV'(x)$ была квазивогнутой.
- Еще одно применение строгого вложения $\mathbf{M}_V^\dagger \subset \mathbf{M}_V$ связано с существованием нетривиальных симметричных функционалов на симметричных пространствах. Отсылаем читателя к серии работ в этом направлении: [36, 58, 59, 79, 80].

4. Эргодические теоремы

4.1. Доминантные эргодические теоремы $\mathcal{DET}$.

4.1.1. Консервативные и строго консервативные операторы. В этом разделе мы описываем разложение Хопфа $\Omega = C(T) \cup D(T)$ и разложение $\Omega = \widetilde{C}(T) \cup \widetilde{D}(T))$ для положительного сжатия T на $\mathbf{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. Первое из них выделяет консервативную часть $C(T)$, а второе — строго консервативную часть $\widetilde{C}(T)$ оператора T. Хотя все понятия даны для общих положительных $\mathbf{L}_1$-сжатий, в дальнейшем мы будем использовать только операторы $T \in \mathcal{PAC}$.

Для получения более подробной информации мы отсылаем читателя к работам [75, гл. 3], [39, гл. 8] или, в частном случае, когда оператор $T = T_\tau$ определяется несингулярным преобразованием τ, к работе [21, гл. 1].

Пусть $T : \mathbf{L}_1 \to \mathbf{L}_1$ — положительное $\mathbf{L}_1$-сжатие. Дуальный оператор $T^* : \mathbf{L}_\infty \to \mathbf{L}_\infty$ является положительным $\mathbf{L}_\infty$-сжатием. Заметим, что оба оператора T и T^* монотонно непрерывны.

Пусть T_P и T_P^* — соответствующие операторы потенциала, т. е. выполнено

$$T_P f := \sum_{n=0}^{\infty} T^n f \quad \text{и} \quad T_P^* f := \sum_{n=0}^{\infty} (T^*)^n f.$$

Тогда Ω однозначно $mod\,\mu$ представимо в виде дизъюнктного объединения $\mathcal{C}(T) \cup \mathcal{D}(T)$ такого, что:

- для всех $0 \leqslant f \in \mathbf{L}_1$, $T_P f = \infty$ на $\mathcal{C}(T) \cap \{T_P > 0\}$;
- для всех $0 \leqslant f \in \mathbf{L}_1$, $T_P f < \infty$ на $\mathcal{D}(T)$.

Это разложение Хопфа $\{\mathcal{C}(T),\ \mathcal{D}(T)\}$, однозначное $mod\,\mu$, определяется следующими двумя условиями (относительно T^*):

- для всех $0 \leqslant g \in \mathbf{L}_\infty$, $T_P^* g = \infty$ на $\mathcal{C}(T) \cap \{T_P^* > 0\}$;
- существует $0 \leqslant g \in \mathbf{L}_\infty$ такая, что $T_P^* g \leqslant 1$ и $\{g > 0\} = \mathcal{D}(T)$.

Непересекающиеся множества $\mathcal{C}(T)$ и $\mathcal{D}(T)$ называются *консервативной и диссипативной частью* Ω для оператора T.

Существует и третий способ описания разложения Хопфа. А именно, множества $\mathcal{C}(T)$ и $\mathcal{D}(T)$ определяются однозначно $(mod\,\mu)$ условиями:

- если $g \geqslant 0$ и $g \geqslant T^* g$, то $g = T^* g$ на $\mathcal{C}(T)$;
- существует $0 \leqslant g \in \mathbf{L}_\infty$, такая что $g \geqslant T^* g$ и $g > T^* g$ на $\mathcal{D}(T)$.

Функцию g в последнем условии можно выбрать с дополнительными свойствами: $(T^*)^n f \to 0$ почти всюду на $\mathcal{D}(T)$ и $g = 0$ на $\mathcal{C}(T)$.

Если $\Omega = \mathcal{C}(T)$, то оператор T называется *консервативным*. Если $\Omega = \mathcal{D}(T)$, то оператор T называется *диссипативным*.

Рассмотрим теперь разложение $\Omega = \widetilde{\mathcal{C}}(T) \cup \widetilde{\mathcal{D}}(T))$. Множества $\widetilde{\mathcal{C}}(T)$ и $\widetilde{\mathcal{D}}(T)$, называемые *положительной* и *нулевой* частью оператора T, определяются однозначно $mod\,\mu$ условиями:

- существует $0 \leqslant f \in \mathbf{L}_1$, такая что $Tf = f$ и $\{f > 0\} = \widetilde{\mathcal{C}}$;
- множество $\widetilde{\mathcal{D}} = \widetilde{\mathcal{D}}(T)$ можно представить как счетное объединение $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$ непересекающихся множеств $\mathcal{D}_n$, такое что $\lim\limits_{n\to\infty} \int A_{n,T}^* \mathbf{1}_{\mathcal{D}_n}\, d\mu = 0$, где $A_{n,T}^* = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} T^{*k}$.

Разложения $(\mathcal{C}(T), \mathcal{D}(T))$ и $(\widetilde{\mathcal{C}}(T), \widetilde{\mathcal{D}}(T))$ связаны включениями $\widetilde{\mathcal{C}}(T) \subseteq \mathcal{C}(T)$ и $\mathcal{D}(T) \subseteq \widetilde{\mathcal{D}}(T)$. Таким образом, мы имеем разложение Ω на три непересекающихся подмножества

$$\Omega = \widetilde{\mathcal{C}}(T) \cup \mathcal{C}_0(T) \cup \mathcal{D}(T),$$

где $\mathcal{C}_0(T) = \mathcal{C}(T) \cap \widetilde{\mathcal{D}}(T)$. Множество $\widetilde{\mathcal{C}}(T)$ называется *строго консервативной* частью оператора T.

Если $\Omega = \widetilde{\mathcal{C}}(T)$, то оператор T называется *строго консервативным*.

Множество $A \in \mathcal{F}_\mu$ называется *T-поглощающим*, если $Tf \in \mathbf{L}_1(A)$ для любой функции $f \in \mathbf{L}_1(A)$, где $\mathbf{L}_1(A) = \{f \in \mathbf{L}_1 \colon f \geqslant 0,\ f = 0 \text{ вне } A\}$.

Консервативная часть $\mathcal{C} = \mathcal{C}(T)$ является T-поглощающим множеством, и мы используем обозначение $\mathcal{A} = \mathcal{A}(T)$ для класса всех T-поглощающих подмножеств консервативной части $\mathcal{C}(T)$:

- $T^*\mathbf{1}_C = \mathbf{1}_C$ и $C \in \mathcal{A}$;
- $\mathcal{A}$ является σ-алгеброй подмножеств $\mathcal{C}$;
- $\mathcal{A}$ представляет собой класс всех подмножеств вида $C_f := \{T_P^* f = +\infty\}$, где $0 \leqslant f \in \mathbf{L}_1$;
- $\mathcal{A}$ представляет собой класс всех подмножеств $A \subset \mathcal{C}$, таких что $T^*\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A$;
- неотрицательная измеримая функция h на $\mathcal{C}$ является $\mathcal{A}$-измеримой тогда и только тогда, когда $T^*h = h$ на $\mathcal{C}$;
- функция $h \in \mathbf{L}_\infty$ на $\mathcal{C}$ является $\mathcal{A}$-измеримой тогда и только тогда, когда $T^*h = h$ на $\mathcal{C}$.

Обозначим для сокращения записи $\widetilde{\mathcal{C}} = \widetilde{\mathcal{C}}(T)$ и $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \{A \in \mathcal{A} \colon \mu(A \cap \widetilde{\mathcal{D}}) = 0\}$. Тогда:

- $\widetilde{\mathcal{C}} \in \mathcal{A}$ и $T^*\mathbf{1}_{\widetilde{\mathcal{C}}} = \mathbf{1}_{\widetilde{\mathcal{C}}}$;
- $\widetilde{\mathcal{A}} = \{A \in \mathcal{F} \colon \mu(A \cap \widetilde{\mathcal{D}}) = 0,\ T^*\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A\}$;
- $\widetilde{\mathcal{A}} = \{A \in \mathcal{F} \colon A = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} A_n,\ \mu(A_n) < \infty,\ T\mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_{A_n}\}$;
- $\widetilde{\mathcal{A}}$ является σ-подалгеброй алгебры $\mathcal{F}$ такой, что мера $\mu_{\widetilde{\mathcal{A}}} = \mu|_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ является σ-конечной.

Мы видим, что если T — строго консервативный, то условное ожидание $\mathbb{E}_\mu^{\widetilde{\mathcal{A}}}$ индуцирует проекции $\mathbf{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \to \mathbf{L}_1(\Omega, \widetilde{\mathcal{A}}, \mu)$ и $\mathbf{L}_\infty(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \to \mathbf{L}_\infty(\Omega, \widetilde{\mathcal{A}}, \mu)$, где $\mathbf{L}_1(\Omega, \widetilde{\mathcal{A}}, \mu) = \{f \in \mathbf{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \colon Tf = f\}$ и $\mathbf{L}_\infty(\Omega, \widetilde{\mathcal{A}}, \mu) = \{f \in \mathbf{L}_\infty(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \colon T^*f = f\}$.

4.1.2. $\mathcal{DET}$ для положительных абсолютных сжатий. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство на пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, и $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ — соответствующее ему стандартное симметричное банахово пространство на стандартном пространстве с мерой $(I, \mathcal{B}_m, m)$.

Пусть $T \in \mathcal{PAC}$ и $A_{n,T} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} T^{k-1}$, $n \geqslant 1$ — соответствующие чезаровские средние.

Для каждой функции $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ рассмотрим *доминантную функцию*

$$f_T^\blacklozenge(w) := \sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (T^{k-1}|f|)(w),\ w \in \Omega. \tag{4.1}$$

Заранее не ясно, что $f_T^\blacklozenge(w) < \infty$ для почти всех $w \in \Omega$. Из классического максимального неравенства (4.4), которое приведено ниже, этот факт следует для любой функции $f \in \mathbf{L}_1$.

Для симметричного банахова пространства $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и положительного абсолютного сжатия $T \in \mathcal{PAC}$ нас интересуют следующие две проблемы.

- Что собой представляет подмножество $\mathbf{E}_{\mathcal{DET}}^T := \{f \in \mathbf{E} \colon f_T^\blacklozenge \in \mathbf{E}\}$?
- Что собой представляет подкласс симметричных банаховых пространств $\mathbf{E}$, таких что $\mathbf{E}_{\mathcal{DET}}^T = \mathbf{E}$ для $T \in \mathcal{PAC}$?

Поскольку пространство $\mathbf{E}$ — порядково полное (см. 1.3.6), то условие $f_T^\blacklozenge \in \mathbf{E}$ означает, что последовательность чезаровских средних $\{A_{n,T} f\}_{n=1}^\infty$ порядково ограничена в $\mathbf{E}$. Отсюда, конечно, следует, что $Tf \in \mathbf{E}$ и $A_{n,T} f \in \mathbf{E}$, $n \geqslant 1$.

С другой стороны, рассматривая эти проблемы, мы не предполагаем *априори*, что $T\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$. Однако, если $\mathbf{E}_{\mathcal{DET}}^T = \mathbf{E}$ для всех $T \in \mathcal{PAC}$, то $T\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$ для всех $T \in \mathcal{PAC}$, и потому $\mathbf{E}$ является интерполяционным пространством.

Напомним, что через $\mathbf{E}_\theta = \mathbf{E}_\theta(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = \{f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \colon \theta_{f,\mu} \in \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)\}$ обозначается θ-часть симметричного пространства $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство, $f \in \mathbf{E}$ и $T \in \mathcal{PAC}$ такое, что $Tf \in \mathbf{E}$. Тогда если $f \in \mathbf{E}_\theta$, то $f_T^\blacklozenge \in \mathbf{E}$ и $\|f_T^\blacklozenge\|_\mathbf{E} \leqslant \|f\|_{\mathbf{E}_\theta}$.*

Следующие три предложения определяют отношения между функциями распределения $\lambda_f(x) := \theta_{f,\mu}^{-1}(x) = m(\{\theta_{f,\mu} > x\})$, $x \geqslant 0$ функций $\theta_{f,\mu} = \theta_{\xi_{f,\mu}, m}$ и интегралами вида

$$\mathcal{I}_f(x) := \frac{1}{x} \int\limits_{\{|f| > x\}} |f| \, d\mu = \frac{1}{x} \int\limits_{\{\xi_{f,\mu} > x\}} \xi_{f,\mu} \, dm = \mathcal{I}_{\xi_{f,\mu}}(x).$$

Предложение 4.1. *Пусть $0 \leqslant f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и $C > 1$. Тогда*:

$$(C-1) m(\{\theta_{f,\mu} > Cx\}) \leqslant \mathcal{I}_f(x) \leqslant m(\{\theta_{f,\mu} > x\}) \quad \text{для всех} \quad x > \xi_{f,\mu}(\infty). \tag{4.2}$$

Доказательство.

1. Первое неравенство. Функция $\theta_{f,\mu}(x)$ непрерывна и строго убывает на $0 < x < \xi_{f,\mu}(\infty) = \theta_{f,\mu}(\infty)$. Следовательно, обратная функция λ_f непрерывна и строго убывает для всех $x > \xi_{f,\mu}(\infty)$. Тогда мы имеем $\theta_{f,\mu}(\lambda_f(x)) = x$ для всех $x > \xi_{f,\mu}(\infty)$, где $\lambda_f(x) = m\{\theta_{f,\mu} > x\} = m\{\theta_{f,\mu} \geqslant x\}$.

Положим $s = \lambda_f(Cx)$ для фиксированного $x > \xi_{f,\mu}(\infty)$ и $C > 1$. Тогда мы имеем $Cx > \xi_{f,\mu}(\infty)$ и $\theta_{f,\mu}(s) = Cx$. Если $s \leqslant \eta_{f,\mu}(x)$, то

$$s = \lambda_f(Cx) = \frac{1}{Cx}\int_0^s \xi_{f,\mu}\,dm \leqslant \frac{1}{Cx}\int_0^{\eta_{f,\mu}(x)} \xi_{f,\mu}\,dm = \frac{1}{C}\mathcal{I}_{\xi_{f,\mu}}(x),$$

откуда $(C-1)s < Cs \leqslant \mathcal{I}_{\xi_{f,\mu}}(x)$.

Если $s > \eta_{f,\mu}(x)$, то так как функция $\xi_{f,\mu}$ убывающая, имеем $\xi_{f,\mu}(s) \leqslant x$. В таком случае

$$\frac{1}{Cx}\int_{\eta_{f,\mu}(x)}^s \xi_{f,\mu}\,dm \leqslant \frac{1}{Cx}\int_0^s x\,dm = \frac{s}{C},$$

$$s - \frac{s}{C} \leqslant \frac{1}{Cx}\int_0^s \xi_{f,\mu}\,dm - \frac{1}{Cx}\int_{\eta_{f,\mu}(x)}^s \xi_{f,\mu}\,dm = \frac{1}{Cx}\int_0^{\eta_{f,\mu}(x)} \xi_{f,\mu}\,dm = \frac{1}{C}\mathcal{I}_f(x).$$

Таким образом, $s(C-1) \leqslant \mathcal{I}_f(x)$, т. е. первое неравенство в 4.1 доказано.

2. Второе неравенство. Пусть $s = \lambda_f(x)$ для фиксированного $x > \xi_{f,\mu}(\infty)$. Тогда $\theta_{f,\mu}(s) = x$ и

$$s = \frac{1}{x}\int_0^s \xi_{f,\mu}\,dm \geqslant \frac{1}{x}\int_{\{\xi_{f,\mu} > \xi_{f,\mu}(s)\}} \xi_{f,\mu}\,dm \geqslant \frac{1}{x}\int_{\{\xi_{f,\mu} > x\}} \xi_{f,\mu}\,dm = \mathcal{I}_f(x),$$

так как $x = \theta_{f,\mu}(s) \geqslant \xi_{f,\mu}(s)$. Следовательно, $\lambda_f(x) \geqslant \mathcal{I}_f(x)$. □

Напомним, что $\eta_{\xi_{f,\mu},m}(x) = \eta_{f,\mu}(x) = \mu(\{|f| > x\})$ для $x > \xi_{f,\mu}(\infty)$.

Предложение 4.2. *Пусть* $0 \leqslant f \in \mathbf{L}_0^{\xi}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, $0 \leqslant g \in \mathbf{L}_0^{\xi}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ *и* $\xi_{f,\mu}(\infty) = \xi_{g,\mu}(\infty) = 0$. *Если*

$$\eta_{f,\mu}(x) \leqslant \frac{1}{x}\int_{\{g > x\}} f\,d\mu,\ x > 0, \tag{4.3}$$

то $\xi_{g,\mu} \leqslant \theta_{f,\mu}$.

Доказательство. Из (4.3) и предложения 4.1 следует, что

$$x \leqslant \frac{1}{s}\int_{\{g > x\}} f\,d\mu \leqslant \frac{1}{s}\sup\left\{\int_A f\,d\mu,\ \mu A = s\right\} \leqslant \frac{1}{s}\int_0^s \xi_{f,\mu}\,dm = \theta_{f,\mu}(s)$$

для всех $x > \xi_{g,\mu}(\infty) = 0$ и $s = \mu\{g > x\}$, т. е. $x \leqslant \theta_{f,\mu}(\mu\{g > x\})$ для всех $x > 0$.

Так как λ_f является непрерывной убывающей функцией, то $\lambda_f \geqslant \eta_{g,\mu}$, а значит, $\theta_{f,\mu} \geqslant \xi_{g,\mu}$. □

Нам необходимо классическое максимальное неравенство Хопфа—Данфорда—Шварца для положительных абсолютных сжатий (см. [38, § VIII.6], [75, § 1.6] или [39, § 8.2]).

Для каждой функции $f \in \mathbf{L}_1$ и $T \in \mathcal{PAC}$ имеем

$$\eta_{f_T^\blacklozenge,\mu}(x) = \mu\{f_T^\blacklozenge > x\} \leqslant \frac{1}{x}\int_{\{f_T^\blacklozenge > x\}} f\,d\mu,\ x > 0. \tag{4.4}$$

Это неравенство непосредственно вытекает из максимальной эргодической теоремы Хопфа, примененной к функции $f_x(\omega) = f(\omega) - x,\ x > 0$, где используется только интегрируемость функций f_x^+. Следовательно, неравенство (4.4) справедливо для всех $f \in \mathbf{R}_0 = cl_{\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$.

Если $f \in \mathbf{R}_0$, то $f_T^\blacklozenge \in \mathbf{R}_0$, а также $\theta_{f,\mu} \in \mathbf{R}_0$, т. е. пара f и $g = f_T^\blacklozenge$ удовлетворяют условию предложения 4.2. Отсюда $\xi_{g.\mu} = \xi_{f_T^\blacklozenge,\mu} \leqslant \theta_{f,\mu}$ для всех $f \in \mathbf{R}_0$. Таким образом, переходя к функции

$f - c$, где $c = \xi_{f,\mu}(\infty) = \xi_{g,\mu}(\infty)$, мы видим, что последнее неравенство справедливо для всех $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$.

Таким образом, мы получаем

Предложение 4.3. $\xi_{f_T^\diamondsuit,\mu} \leqslant \theta_{f,\mu}$ *для всех* $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ *и* $T \in \mathcal{PAC}$.

Доказательство теоремы 4.1. В силу предложения 4.3, $f \in \mathbf{E}_\theta \iff \theta_{f,\mu} \in \mathbf{E} \implies \xi_{f_T^\blacklozenge,\mu} \in \mathbf{E} \iff f_T^\blacklozenge \in \mathbf{E}$. □

Замечание 4.1. θ-пара $\mathbf{E}_\theta \subseteq \mathbf{E}$, используемая в теореме 4.1, может быть заменена на пару $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^\theta$, определенную в пункте 2.3.1. А именно,

- Если $f \in \mathbf{E}$, то $f_T^\blacklozenge \in \mathbf{E}^\theta$ и $\|f_T^\blacklozenge\|_{\mathbf{E}^\theta} \leqslant \|f\|_{\mathbf{E}}$.

Это имеет смысл сделать, например, в том случае, когда $\mathbf{E}_\theta = \{0\}$, в то время как $\mathbf{E}^\theta \subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ вполне определено.

Теорема 4.1 была доказана в [98], и ранее в [28] для случая конечной меры.

4.1.3. Обратная $\mathcal{DET}$ для консервативных сохраняющих меру преобразований. Теорема 4.1 показывает, что для каждого симметричного банахова пространства $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и $T \in \mathcal{PAC}$ подпространство $\mathbf{E}^T_{\mathcal{DET}} = \{f \in \mathbf{E}\colon f_T^\blacklozenge \in \mathbf{E}\}$ содержит подмножество $\mathbf{E}_\theta = \{f \in \mathbf{E}\colon \theta_{f,\mu} \in \mathbf{E}\}$. Следующее обратное к $\mathcal{DET}$ утверждение описывает ситуацию, когда $\mathbf{E}^T_{\mathcal{DET}} = \mathbf{E}_\theta$.

Теорема 4.2. *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — *симметричное банахово пространство,* τ — *эргодическое консервативное сохраняющее меру преобразование на* $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, *и оператор* $T = T_\tau \in \mathcal{T}$ *имеет вид* $T_\tau f = f \circ \tau$. *Тогда из* $f_T^\blacklozenge \in \mathbf{E}$ *следует, что* $f \in \mathbf{E}_\theta$ *и* $\|f_T^\blacklozenge\|_{\mathbf{E}} \geqslant 1/2\, d_{\mathbf{E}}(1/2)\|f\|_{\mathbf{E}_\theta}$. *В частности,* $\mathbf{E}^T_{\mathcal{DET}} = \mathbf{E}_\theta$.

Нам будет необходимо следующее обратное максимальное неравенство:

$$\frac{1}{x} \int\limits_{\{f_T^\blacklozenge \geqslant x\}} f\, d\mu \leqslant 2\mu\{f_T^\blacklozenge \geqslant x\},\ x > 0, \tag{4.5}$$

где $f \geqslant 0$, $T = T_\tau$ и τ — эргодическое консервативное сохраняющее меру преобразование на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, см. [75, § 1.6.2].

Предложение 4.4. *Пусть* τ — *эргодическое консервативное сохраняющее меру преобразование на* $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ *и* $T = T_\tau$. *Тогда для каждого* $f \in \mathbf{R}_0$

$$\theta_{f,\mu}(x) \leqslant 2\xi_{f_T^\blacklozenge,\mu}\left(\frac{x}{2}\right),\ x > 0. \tag{4.6}$$

Доказательство. По предложению 4.1 с $C = 2$ имеем

$$m(\{\theta_{f,\mu} > 2x\}) \leqslant \frac{1}{x} \int\limits_{\{|f| > x\}} |f|\, d\mu,\ x > f^*(\infty),$$

где $f^*(\infty) = 0$, так как $f \in \mathbf{R}_0$. Из обратного максимального неравенства (4.5) следует, что

$$\frac{1}{x} \int\limits_{\{|f| > x\}} |f|\, d\mu \leqslant \frac{1}{x} \int\limits_{\{f_T^\blacklozenge \geqslant x\}} f\, d\mu \leqslant 2\mu\{f_T^\blacklozenge \geqslant x\},\ x > 0.$$

Таким образом, $m(\{\theta_{f,\mu} \geqslant 2x\}) \leqslant 2\mu\{f_T^\blacklozenge > x\}$, $x > 0$, и для всех $x > 0$

$$\frac{1}{2}\theta_{f,\mu}(x) = \frac{1}{2}\inf\{2y > 0\colon m(\{\theta_{f,\mu} > 2y\}) \leqslant x\} = \inf\{y > 0\colon m(\{\theta_{f,\mu} > 2y\}) \leqslant x\} \leqslant$$
$$\leqslant \inf\{y > 0\colon m(\{\theta_{f,\mu} \geqslant 2y\}) \leqslant x\} \leqslant \inf\left\{y > 0\colon \mu\left(\left\{f_T^\blacklozenge > \frac{y}{2}\right\}\right) \leqslant x\right\} = \xi_{f_T^\blacklozenge,\mu}\left(\frac{x}{2}\right).$$

□

Доказательство теоремы 4.2. Переходя к функции $f-\xi_{f,\mu}(\infty)$, мы видим, что неравенство (4.6) в предложении 4.4 выполняется для всех $f \in \mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$. Следовательно, $\xi_{f_T^\diamondsuit,\mu}(x) \geqslant \frac{1}{2}\theta_{f,\mu}(2x) = \frac{1}{2}(D_{1/2}\theta_{f,\mu})(x)$, $x>0$, откуда из $f_T^\blacklozenge \in \mathbf{E}$ следует $f \in \mathbf{E}_\theta$ и $\|f_T^\blacklozenge\|_\mathbf{E} \geqslant 1/2\, d_\mathbf{E}(1/2)\|f\|_{\mathbf{E}_\theta}$.

В силу теоремы 4.1 мы имеем также $\mathbf{E}^T_{\mathcal{DET}} = \mathbf{E}_\theta$. □

Напомним, что симметричное банахово пространство $\mathbf{E}$ удовлетворяет условию *Харди—Литтлвуда* ($\mathbf{E} \in (\mathcal{HLP})$), если $\mathbf{E}_\theta = \mathbf{E}$, Говорят, что пространство $\mathbf{E}$ *удовлетворяет* $(\mathcal{DET})$ ($\mathbf{E} \in (\mathcal{DET})$), если $f_T^\blacklozenge \in \mathbf{E}$ для любой функции $f \in \mathbf{E}$ и $T \in \mathcal{PAC}$.

Следствие 4.1. $\mathbf{E} \in (\mathcal{DET}) \iff \mathbf{E} \in (\mathcal{HLP})$.

4.2. Поточечная и порядковая сходимости.

4.2.1. Индивидуальная эргодическая теорема в $\mathbf{R}_0$. Напомним, что $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$ — минимальная часть пространства $\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$ на $(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$. Пространство $\mathbf{R}_0$ совпадает с замыканием $cl_{\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty}(\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty)$ пространства $\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty$ в $\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$ и состоит из всех функций $f \in \mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$ таких, что $\xi_{f,\mu}(\infty)=0$, или (эквивалентно) $\eta_{f,\mu}(x)<\infty$ для всех $x>0$.

Теорема 4.3. *Если $T \in \mathcal{PAC}$ и $f \in \mathbf{R}_0$, то $A_{n,T}f$ сходится почти всюду на $(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$ к конечному пределу f^∞. Если, кроме того, T строго консервативен ($\Omega = \mathcal{C}(T)$), то $f^\infty = \mathbb{E}^\mathcal{A}_\mu f$ и $f^\infty(\omega)=0$ для почти всех $\omega \in \widetilde{\mathcal{C}}_0(T)$.*

Обратно, пусть $\mu(\Omega)=\infty$ и $T=T_\tau$, где τ — эргодическое консервативное сохраняющее меру преобразование на $(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$. Тогда существует $f \in \mathbf{L}_\infty$, такая что $A_{n,T}f$ не является сходящейся почти всюду на $(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$.

Доказательство. Первая часть теоремы является улучшенной версией индивидуальной эргодической теоремы Данфорда—Шварца (см. [39, теорема 8.6.11]).

Для того, чтобы доказать «обратное» утверждение, рассмотрим эргодическое консервативное сохраняющее меру μ преобразование τ на $(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$. Условие $\mu(\Omega)=\infty$ (вместе с эргодичностью) означает, что и $T=T_\tau$ является нуль-консервативным, т. е. $\Omega=\mathcal{C}_0(T)$. Таким образом, $A_{n,T}f \overset{(\text{п.в.})}{\longrightarrow} 0$ для всех $f \in \mathbf{R}_0$.

Предположим теперь, что:

$$A_{n,T}f \text{ сходится почти всюду на } (\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu) \text{ для каждой функции } f \in \mathbf{L}_\infty. \tag{4.7}$$

Тогда для любой вероятностной меры $\nu \sim \mu$ и любого измеримого множества A существует предел

$$\widetilde{\nu}(A) := \lim_{n\to\infty}\int_\Omega A_{n,T}\mathbf{1}_A\,d\nu = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\nu(\tau^{-k}A). \tag{4.8}$$

С помощью [75, теоремы 4.3.1–4.3.3] можно показать, что слабая сходимость $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\nu\circ\tau^{-k} \to \widetilde{\nu}$ в (4.8) дает фактически сходимость по норме.

Действительно, пусть $h = \frac{d\nu}{d\mu} \in \mathbf{L}_1(\mu)$ — производная Радона—Никодима и $T^o_\tau\colon \mathbf{L}_1(\nu) \ni g \to T^o_\tau g := g\circ\tau^{-1}\,\frac{h\circ\tau^{-1}}{h} \in \mathbf{L}_1(\nu)$. Тогда

$$\int_\Omega (T^o_\tau g)(\omega)d\nu(\omega) = \int_\Omega g(\tau^{-1}\omega)\,\frac{h(\tau^{-1}\omega)}{h(\omega)}d\nu(\omega) =$$
$$= \int_\Omega g(\tau^{-1}\omega)\,h(\tau^{-1}\omega)d\mu(\omega) = \int_\Omega g(\omega)\,h(\omega)d\mu(\omega) = \int_\Omega g(\omega)\,d\nu(\omega),$$

т. е. оператор T_τ^o является положительной изометрией в $\mathbf{L}_1(\nu)$, а также его двойственный оператор T_τ является положительной изометрией в $\mathbf{L}_\infty(\nu)$. Полагая $g = \mathbf{1}_\Omega \in \mathbf{L}_1(\nu)$ и используя статистическую эргодическую теорему [75, теорема 2.1.1], получаем, что при условии (4.7) из слабой сходимости $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} T_\tau^o \mathbf{1}_\Omega$ следует сильная сходимость, а функция $\widetilde{h} \in \mathbf{L}_1(\nu)$ есть не что иное, как $\frac{d\widetilde{\nu}}{d\nu}$.

Таким образом, $\widetilde{\nu} = \frac{d\widetilde{\nu}}{d\nu}\nu$ является τ-инвариантной мерой на Ω, такой что $\widetilde{\nu} \sim \mu$ и $\widetilde{\nu}(\Omega) = 1$. Так как τ — эргодическое консервативное и $\widetilde{\nu}(\Omega) = \infty$, то каждая такая τ-инвариантная мера имеет вид $c\mu$, где константа $c > 0$. Противоречие показывает, что (4.7) не выполняется. $\square$

Доказательство обратной части теоремы 4.3 взято из [98].

Из приведенной выше теоремы имеется следствие.

Следствие 4.2. *Если $T \in \mathcal{PAC}$ и $f \in \mathbf{R}_0$, то $A_{n,T}f$ сходится стохастически на $(\Omega, \mathcal{F}, \mu))$ к $f^\infty \overset{(п.в.)}{=} -\lim\limits_{n\to\infty} A_{n,T}f$.*

Стохастическая эргодическая теорема Кренгеля [75, теорема 4.4.8] утверждает стохастическую сходимость $A_{n,T}f$ для любого положительного $\mathbf{L}_1$-сжатия T и $f \in \mathbf{L}_1$.

Теорема 4.4. *Пусть T — положительное сжатие в $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Тогда для каждой функции $f \in \mathbf{L}_1$ средние $A_{n,T}f$ сходятся стохастически на $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Предельная функция f^∞ является T-инвариантной и равна нулю на $\widetilde{\mathcal{D}}(T) = \mathcal{D}(T) \cup \mathcal{C}_0(T)$. Если $f \geqslant 0$, то f^∞ совпадает почти всюду с $\liminf\limits_{n\to\infty} A_{n,T}f$.*

Однако (п.в.)-предел в этой теореме не всегда существует (см. [75, § 3.6]), в отличие от рассматриваемого нами случая, когда $T \in \mathcal{PAC}$. Если $T \in \mathcal{PAC}$, стохастическая сходимость имеет место также и в $\mathbf{R}_0$, что следует из теоремы 4.3.

4.2.2. Порядковая эргодическая теорема. Комбинируя теоремы 4.1, 4.2 и 4.3, мы теперь можем описать условия порядковой сходимости чезаровских средних $A_{n,T}f$ для $f \in \mathbf{E}$ и $T \in \mathcal{PAC}$.

Соответствующие проблемы заключаются в следующем.

- Что собой представляет множество $\mathbf{E}^T_{\mathcal{OET}} := \{f \in \mathbf{E}\colon \{A_{n,T}f\}_{n=1}^\infty$ сходится порядково в $\mathbf{E}\}$?
- Что собой представляет подкласс пространств $\mathbf{E}$ таких, что $\mathbf{E}^T_{\mathcal{OET}} = \mathbf{E}$ для $T \in \mathcal{PAC}$?

Теорема 4.5. *Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство.*

1. *Пусть $T \in \mathcal{PAC}$. Тогда для каждой функции $f \in \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{R}_0$ последовательность средних $A_{n,T}f$ порядково сходится в $\mathbf{E}$.*
2. *Пусть $T = T_\tau$, где τ — эргодическое консервативное сохраняющее меру преобразование на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. Если $\mathbf{E} \nsubseteq \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{R}_0$, то существует $f \in \mathbf{E}$ такая, что последовательность $A_{n,T}f$ не сходится порядково в $\mathbf{E}$.*

Первая часть теоремы следует из теорем 4.1 и 4.3, вторая часть следует из теорем 4.2 и 4.3.

Говорят, что пространство $\mathbf{E}$ удовлетворяет $(\mathcal{OET})$ ($\mathbf{E} \in (\mathcal{OET})$), если последовательность средних $A_{n,T}f$ порядково сходится в $\mathbf{E}$ для любой функции $f \in \mathbf{E}$ и любого оператора $T \in \mathcal{PAC}$.

Следствие 4.3. $\mathbf{E} \in (\mathcal{OET}) \iff \mathbf{E} \in (\mathcal{HLP})$ *и* $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{R}_0$.

4.3. Статистические эргодические теоремы $\mathcal{MET}$.

4.3.1. Статистические эргодические теоремы в банаховых пространствах. Статистические (*mean*) эргодические теоремы ($\mathcal{MET}$) имеют дело со сходимостью по норме чезаровских средних $A_{n,T}f = 1/n \sum\limits_{k=1}^{n} T^{k-1}f$ для $f \in \mathbf{E}$ и $T \in \mathbf{B}(\mathbf{E})$.

Оператор T в банаховом пространстве $\mathbf{E}$ удовлетворяет $(\mathcal{MET})$ в $\mathbf{E}$, если $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}} = \mathbf{E}$, где подпространство $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}$ определяется как

$$\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}} := \{f \in \mathbf{E}\colon \{A_{n,T}f\}_{n=1}^\infty \text{ сходится по норме } \mathbf{E}\},\ T \in \mathbf{B}(\mathbf{E}). \tag{4.9}$$

Для описания множества $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}$ рассмотрим следующие условия:

(a) $\sup\limits_{n\geqslant 1}\|A_{n,T}\|_{\mathbf{B(E)}} < \infty$ (оператор T ограничен по Чезаро);

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} 1/nT^{n-1}f = 0$ для всех $f \in \mathbf{E}$.

Оба условия (a) и (b) выполняются, если

(c) $\sup\limits_{n\geqslant 0}\|T^n\|_{\mathbf{B(E)}} < \infty$ для всех $f \in \mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}$.

Положим
$$\mathbf{F^E}(T) = \{f \in \mathbf{E}\colon Tf = f\} \quad \text{и} \quad \mathbf{F^{E^*}}(T^*) = \{h \in \mathbf{E}^*\colon T^*h = h\}, \tag{4.10}$$
где T^* — дуальный к T оператор, действующий в пространстве $\mathbf{E}^*$.

Следующие результаты содержатся в классических работах [51, 108, 124, 125].

Теорема 4.6. *При выполнении условий* (a) *и* (b) *следующие условия эквивалентны для каждой пары* $f, g \in \mathbf{E}$:

1. $g \in \mathbf{F^E}(T)$ *и* $g \in \overline{co}\{T^n f,\ n \geqslant 0\}$;
2. $g = \lim\limits_{n\to\infty} A_{n.T}f$;
3. $g = w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} A_{n.T}f$;
4. g *является слабой кластер-предельной точкой последовательности* $\{A_{n.T}f\}$.

Теорема 4.7 (см. [75, § 2.1] и указанные там ссылки)**.** *Если условия* (a) *и* (b) *выполнены, то* $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}} = \mathbf{F^E}(T) \oplus cl\{f - Tf\colon f \in \mathbf{E}\}$.

Оператор $\Pi\colon \mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}} \ni f \to \Pi f := \lim\limits_{n\to\infty} A_{n.T}f \in \mathbf{E}$ *является проектором из* $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}$ *на* $\mathbf{F^E}(T)$, *таким что* $\Pi = \Pi^2 = T\Pi = \Pi T$ *и*
$$cl\{f - Tf\colon f \in \mathbf{E}\} = \{f \in \mathbf{E}\colon \Pi f = 0\} = \{f \in \mathbf{E}\colon <f, h - T^*h> = 0 \text{ для всех } f \in \mathbf{E}^*\}.$$

Нам понадобится следующий критерий Сайна (см. [118] и [75, т. 1.4]).

Теорема 4.8. $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}} = \mathbf{E}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{F^E}(T)$ *разделяет точки* $\mathbf{F^{E^*}}(T^*)$.

4.3.2. Статистические эргодические теоремы в симметричных пространствах. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство и $T \in \mathcal{PAC}$ такой, что $T\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$. Мы также предполагаем, что оператор T удовлетворяет условиям (a) и (b), необходимым для $(\mathcal{MET})$ в общих банаховых пространствах, см. пункт 4.3.1.

Заметим, что если пространство $\mathbf{E}$ является интерполяционным, то оно T-инвариантно и $T|_{\mathbf{E}} \in \mathbf{B(E)}$ для каждого $T \in \mathcal{AC}$. Более того, если $\mathbf{E}$ — вполне симметрично, то $\|T|_{\mathbf{E}}\|_{\mathbf{B(E)}} \leqslant 1$, т. е. для T выполняется условие (c) на $\mathbf{E}$, а значит и оба условия (a) и (b).

Для данного симметричного банахова пространства $\mathbf{E}$ и $T \in \mathcal{PAC}$ нас интересуют следующие две проблемы.

- Что собой представляет множество $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}} = \{f \in \mathbf{E}\colon \{A_{n,T}f\}_{n=1}^\infty$ сходится по норме в $\mathbf{E}\}$?
- Что собой представляет подкласс пространств $\mathbf{E}$ таких, что $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}} = \mathbf{E}$?

Теорема 4.9. *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — *симметричное банахово пространство,* $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условию* (A) (*т. е.* $\mathbf{E}$ *минимально и* $\varphi_{\mathbf{E}}(0+) = 0$), *и* $\mathbf{1}_\Omega \notin \mathbf{E}^1$. *Пусть* $T \in \mathcal{PAC}$ *такой, что* $T\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$, *и* T *удовлетворяет условиям* (a) *и* (b) *на* $\mathbf{E}$. *Тогда* $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}} = \mathbf{E}$, *т. е.* T *удовлетворяет* $(\mathcal{MET})$.

Доказательство. Из условия (A) в силу теоремы 1.5 следует, что $\mathbf{E}$ минимально и $\varphi_{\mathbf{E}}(0+) = 0$, т. е. $\mathbf{E} \nsubseteq \mathbf{L}_\infty$. Кроме того, по теореме 1.8 дуальное пространство $\mathbf{E}^*$ отождествляется с ассоциированным пространством $\mathbf{E}^1$, в то время как дуальный оператор $T^*_{\mathbf{E}} = (T|_{\mathbf{E}})^* \in \mathcal{B}(\mathbf{E}^*)$ оператора $T_{\mathbf{E}} = T|_{\mathbf{E}}$ отождествляется с оператором $T^o_{\mathbf{E}^1} = (T^o|_{\mathbf{E}^1}) \in \mathcal{B}(\mathbf{E}^1)$.

Напомним, что ассоциированный оператор T^o определен на $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ равенством (3.1).

Так как $T^o \in \mathcal{PAC}$ (и даже $T^o \in \mathcal{PAC}^o$), мы можем применить теорему 4.3. Так что для каждого $g \in \mathbf{R}_0$ средние $A_{n,T^o}g$ сходятся почти всюду на $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$) к некоторому конечному пределу. Предельная функция $g^\infty_{T^o} = \lim\limits_{n\to\infty} A_{n,T^o}g$ является T^o-инвариантной и обращается в нуль на $\widetilde{\mathcal{D}}(T^o)$, при этом $g^\infty_{T^o} = \mathbb{E}^{\widetilde{\mathcal{A}}^o}_\mu g$ на $\widetilde{\mathcal{C}}(T^o)$. Здесь $\widetilde{\mathcal{C}}(T^o)$ — строго консервативная часть оператора T^o и $\widetilde{\mathcal{A}}^o = \mathcal{A}(T^o) \cap \widetilde{\mathcal{C}}(T^o) = \{A \in \mathcal{A}(T^o)\colon \mu(A \cap \widetilde{\mathcal{D}}(T^o)) = 0\}$ — сужение σ-алгебры $\mathcal{A}(T^o)$ на $\widetilde{\mathcal{C}}(T^o)$.

Условное ожидание $\Pi^o = \mathbb{E}_\mu^{\widetilde{\mathcal{A}}^o}$ определяет проекцию Π^o, так что $\Pi^o g = 0$ на $\widetilde{\mathcal{D}}(T^o)$ и $\Pi^o g = \mathbb{E}_\mu^{\widetilde{\mathcal{A}}^o} g$ на $\widetilde{\mathcal{C}}(T^o)$.

Так как T^o строго консервативен на $\widetilde{\mathcal{C}}(T^o)$, то σ-подалгебра $\widetilde{\mathcal{A}}^o$ имеет вид $\widetilde{\mathcal{A}}^o = \{A \subseteq \widetilde{\mathcal{C}}(T^o)\colon T^o\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A\}$, а также $\widetilde{\mathcal{A}}^o = \{A \subseteq \widetilde{\mathcal{C}}(T^o)\colon T^{oo}\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A\}$.

Теперь сравним множества $\mathbf{F}^{\mathbf{E}}(T) = \{f \in \mathbf{E}\colon Tf = f\}$ и $\mathbf{F}^{\mathbf{E}^*}(T^*) = \{h \in \mathbf{E}^*\colon T^*h = h\}$, определенные в (4.10). Очевидно, $\mathbf{F}^{\mathbf{E}^*}(T^*)$ отождествляется с $\mathbf{F}^{\mathbf{E}^1}(T^o)$. Мы покажем, что $\mathbf{F}^{\mathbf{E}}(T)$ разделяет точки множества $\mathbf{F}^{\mathbf{E}^1}(T^o)$.

Так как $\mathbf{E}^1 \subseteq \mathbf{R}_0$, каждая T^o-инвариантная функция $g \in \mathbf{E}^1$ обращается в нуль на $\widetilde{\mathcal{D}}(T^o)$ и $\mathbb{E}_\mu^{\widetilde{\mathcal{A}}^o} g = g$, т. е. $\mathbf{F}^{\mathbf{E}^1}(T^o) = \{g \in \mathbf{E}^1\colon T^o g = g\} = \{g \in \mathbf{E}^1\colon \Pi^o g = g\} = \mathbf{E}^1(\Omega, \widetilde{\mathcal{A}}(T^o), \mu)$. Так как T^o строго консервативен на $\widetilde{\mathcal{C}}(T^o)$, получаем, что $T^o\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A \iff T^{oo}\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A$ для $A \subseteq \widetilde{\mathcal{C}}(T^o)$, откуда $\mathbf{F}^{\mathbf{E}^1}(T^o) = \{g \in \mathbf{E}^1\colon T^{oo} g = g\}$.

С другой стороны, $Tf = f$ для $f \in \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty$ означает, что

$$\int\limits_\Omega f\, g\, d\mu = \int\limits_\Omega Tf\, g\, d\mu = \int\limits_\Omega f\, T^o g\, d\mu = \int\limits_\Omega T^{oo} f\, g\, d\mu$$

для всех $g \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$, т. е. $T^{oo} f = f$. Таким образом, $(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \widetilde{\mathcal{A}}(T), \mu) \subseteq \mathbf{F}^{\mathbf{E}}(T)$ и $\mathbf{F}^{\mathbf{E}^1}(T^o) \subseteq (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \widetilde{\mathcal{A}}(T^o), \mu)$. Так как $(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \widetilde{\mathcal{A}}(T), \mu)$ разделяет точки $(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \widetilde{\mathcal{A}}(T^o), \mu)$, то множество $\mathbf{F}^{\mathbf{E}}(T)$ разделяет точки множества $\mathbf{F}^{\mathbf{E}^1}(T^o)$, которое, как было указано выше, отождествляется с $\mathbf{F}^{\mathbf{E}^*}(T^*)$. Применяя критерий Сайна (теорема 4.8), завершаем доказательство. $\square$

Пример 4.1. В следующих примерах $\mathbf{E}$ является минимальным и вполне симметричным. Каждый оператор $T \in \mathcal{PAC}$ удовлетворяет условию (c), и следовательно, условиям (a) и (b), поскольку $T\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$ и $T|_{\mathbf{E}}$ — сжатие в $\mathbf{E}$.

- Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{L}_p$, $1 < p < \infty$. Тогда каждый оператор $T \in \mathcal{PAC}$ удовлетворяет условиям теоремы 4.9, и потому T удовлетворяет $(\mathcal{MET})$, т. е. $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}} = \{f \in \mathbf{E}\colon \{A_{n,T} f\}_{n=1}^\infty$ сходится по норме в $\mathbf{E}\} = \mathbf{E}$.
- Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{L}_1$. Тогда в $\mathbf{E}$ выполняется условие (A), но $\mathbf{E}^1 = \mathbf{L}_\infty$ и $\mathbf{E}^1 \ni \mathbf{1}_\Omega$ тогда и только тогда, когда $\mu(\Omega) < \infty$. Таким образом, $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}} = \mathbf{E}$, если $\mu(\Omega) < \infty$, но $(\mathcal{MET})$ может быть не верна, если $\mu(\Omega) = \infty$.

  Действительно, пусть $\mu(\Omega) = \infty$, τ — обратимое эргодическое консервативное сохраняющее меру преобразование на Ω и $T = T_\tau$. Для каждой функции $0 < f \in \mathbf{L}_1 \subset \mathbf{R}_0$ имеем: $A_{n,T} f \overset{(\text{п.в.})}{\longrightarrow} f(\infty) = 0$ и $\|A_{n,T} f\| \to c > 0$, где $c = \|f\|_{\mathbf{L}_1}$. Таким образом, $A_{n,T} f$ не сходится по норме. При этом $\mathbf{F}^{\mathbf{E}}(T) = \{0\}$, в то время как $\mathbf{F}^{\mathbf{E}^1}(T^o) = \mathbb{R}\mathbf{1}_\Omega$. Множество $\mathbf{F}^{\mathbf{E}}(T)$ не разделяет точки множества $\mathbf{F}^{\mathbf{E}^1}(T^o)$.
- Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{R}_0 = (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)^0$ — минимальная часть $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ и $\mu(\Omega) = \infty$. Каждый оператор $T \in \mathcal{PAC}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 4.9, так что $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}} = \mathbf{E}$. Напомним, что $A_{n,T} f$ сходится почти всюду, стохастически и даже по мере для каждой функции $f \in \mathbf{R}_0$, см. пункт 4.2.1.

Возвращаясь к общим симметричным банаховым пространствам, отметим еще раз следующее.

- Если $\mathbf{E}$ — вполне симметричное пространство, то из условия $T \in \mathcal{PAC}$ вытекает, что $T\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$ и $\|T\|_{\mathbf{B}(\mathbf{E})} \leqslant 1$. Следовательно, пространство $\mathbf{E}$ удовлетворяет условию (c), а потому и условиям (a) и (b).
- Если пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ сепарабельно, то пространство $\mathbf{E}$ удовлетворяет условию (A) тогда и только тогда, когда оно сепарабельно (см. теорему 1.7). Однако статистическая эргодическая теорема может иметь место и на несепарабельных пространствах с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, например, если $\mathbf{E} = \mathbf{L}_p(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, $1 < p < \infty$.
- В случае $\mu(\Omega) < \infty$ свойство (A) означает, что $\mathbf{E} = \mathbf{E}^0$ является минимальным и $\mathbf{E} \neq \mathbf{L}_\infty$. Каждый оператор $T \in \mathcal{PAC}$ является строго консервативным и

$$\mathcal{A}(T) = \mathcal{A}(T^o) = \{A \in \mathcal{F}_\mu\colon T \cdot \mathbf{1}_A = T^o \cdot \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A\ (mod\, \mu)\}.$$

4.3.3. Описание множества $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}$. В данном разделе мы будем считать, что $\mu(\Omega) < \infty$ и $T \in \mathcal{PAC}$ имеет вид $T = T_\tau$, где $\tau \in \mathcal{T}$ — обратимое сохраняющее меру преобразование на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. Для каждого симметричного банахова пространства $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ из этих предположений следует, что $T\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$ и $\|T\|_{\mathbf{B}(\mathbf{E})} = 1$, даже если $\mathbf{E}$ не является вполне симметричным. Таким образом, в $\mathbf{E}$ выполнены условия (a), (b) и (c).

Так как $\mu(\Omega) < \infty$, то мы имеем $\mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_1$ и $\mathbf{1}_\Omega \in \mathbf{E}^1$. Если, кроме того, $\mathbf{E} \neq \mathbf{L}_\infty$, то $\varphi_{\mathbf{E}}(0+) = 0$ и минимальная часть $\mathbf{E}^0 = cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{L}_\infty)$ имеет свойство (A). Таким образом, теорема 4.9 показывает, что $\mathbf{E}^0 \subseteq \mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}$.

Нас интересует случай, когда $\mathbf{E}^0 \subset \mathbf{E}$, т. е. когда $\mathbf{E}$ — не минимально.

Теорема 4.10. *Пусть $\mu(\Omega) < \infty$ и $T \in \mathcal{PAC}$ имеет вид $T = T_\tau$, где τ — обратимое сохраняющее меру преобразование на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. Тогда*:

1. *Если τ — апериодическое, то для каждой функции $f \in \mathbf{E} \setminus \mathbf{E}^0$ существует такая функция f_1, что f и f_1 равноизмеримы, но $A_{n,T} f_1$ не сходится по норме в $\mathbf{E}$. Минимальная часть $\mathbf{E}^0$ является наибольшим симметричным подпространством $\mathbf{E}$, на котором T удовлетворяет $\mathcal{MET}$.*
2. *$\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}} = \mathbf{E}$ тогда и только тогда, когда τ — периодическое.*

Очевидно, что часть 1 вытекает из части 2, так как последовательность операторов $A_{n,T}$, $n = 1, 2, \dots$ сходится в $\mathbf{B}(\mathbf{E})$, если τ является периодическим.

Часть 1 — это основная часть теоремы. Она была опубликована впервые в [4], а с подробными доказательствами — в книгах [3, 5]. Хотя этот результат был доказан только для случая, когда пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ является пространством Лебега, он может быть расширен на класс общих пространств с мерой с помощью наших теорем 1.1 и 1.2.

Следующий результат дополняет теорему 4.10 и уточняет структуру подпространства $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}$.

Теорема 4.11. *Пусть $\mu(\Omega) < \infty$ и $T \in \mathcal{PAC}$ имеет вид $T = T_\tau$, где τ — обратимое сохраняющее меру преобразование на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. Тогда*:

1. *Пусть τ — апериодическое, а σ-алгебра T-инвариантных множеств $\mathcal{A}(T) = \{A \in \mathcal{F}_\mu \colon \mu(A \triangle \tau(A)) = 0\}$ не имеет атомов. Тогда для каждой функции $f \in \mathbf{E} \setminus \mathbf{E}^0$ существует функция $f_1 \in \mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}$ такая, что функции f_1 и f равноизмеримы.*
2. *Пусть τ — эргодическое, $g \in \mathbf{E}$ и $\rho_{\mathbf{E}}(g, \mathbf{E}^0) := \inf\limits_{g_0 \in \mathbf{E}^0} \|g - g_0\|_{\mathbf{E}}$. Тогда $f \in \mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}} \iff \lim\limits_{nto\infty} \rho_{\mathbf{E}}(A_{n,T} f, \mathbf{E}^0) = 0$.*
3. *Пусть τ — эргодическое и $\mathbf{E} \in (\mathcal{WHLP})$. Тогда для каждой функции $f \in \mathbf{E} \setminus \mathbf{E}^0$ существует функция $f_1 \in \mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}$ такая, что функции f_1 и f равноизмеримы.*

Доказательство можно найти в [3, 5], а также в [121]. Напомним, что слабое свойство Харди—Литтлвуда ($\mathcal{WHLP}$) было определено соотношением (2.10) в пункте 2.3.2. Оно слабее свойства Харди—Литтлвуда ($\mathcal{HLP}$), поэтому утверждение 3 в теореме 4.11 может быть применено ко всем не минимальным пространствам $\mathbf{E}$ с $p_{\mathbf{E}} < 1$.

Например, каждое пространство Орлича $\mathbf{L}_\Phi$ такое, что $\mathbf{L}_\Phi \subset \mathbf{L}_1$, имеет свойство ($\mathcal{WHLP}$), даже если $p_{\mathbf{L}_\Phi} = 1$. В то же время, для пространств Марцинкевича $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{WHLP})$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{HLP})$.

Пусть теперь $\mathbf{M}_V$ — пространство Марцинкевича с $p_{\mathbf{M}_V} = 1$ (например, каждое пространство Зигмунда—Марцинкевича $\mathbf{M}_{V_r}$, $r \geqslant 1$, является таким). Тогда $\mathbf{M}_V$ не имеет свойства ($\mathcal{WHLP}$) и, следовательно, существует функция $f \in \mathbf{M}_V$, для которой, с учетом (2.10),

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{\mathbf{E}}(A_{n,T} f, \mathbf{E}^0) = \lim_{t\to\infty} \frac{\|D_t \xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)}}{t} = c > 0,$$

где $(I, \mathcal{B}_m, m)$ — стандартное симметричное банахово пространство пространства $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$.

Таким образом, мы имеем, в отличии от условия 3, в предположении, что τ — эргодическое: $f \notin \mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}$ и $f_1 \notin \mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}$ для всех f_1 таких, что функции f_1 и f равноизмеримы.

Здесь $\mathbf{M}_V$ не имеет свойства ($\mathcal{WHLP}$), и часть 3 предыдущей теоремы не верна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Браверман М. Ш., Меклер А. А.* О свойстве Харди—Литтлвуда для симметричных пространств// Сиб. мат. ж. — 1977. — *18*, № 3. — С. 522–540.
2. *Векслер А. С.* Эргодическая теорема в симметричных пространствах// Сиб. мат. ж. — 1985. — *26*, № 4. — С. 189–191.
3. *Векслер А. С.* Статистические эргодические теоремы в симметричных пространствах. — Ташкент: Lambert Academic Publishing, 2018.
4. *Векслер А. С., Федоров А. Л.* Статистическая эргодическая теорема в несепарабельных симметричных пространствах функций// Сиб. мат. ж. — 1989. — *29*, № 3. — С. 183–185.
5. *Векслер А. С., Федоров А. Л.* Симметричные пространства и статистические эргодические теоремы для автоморфизмов и потоков. — Ташкент: ФАН, 2016.
6. *Винокуров В. Г., Рубштейн Б. А., Федоров А. Л.* Пространство Лебега и его измеримые разбиения. — Ташкент: ТашГУ, 1986.
7. *Лозановский Г. Я.* О банаховых структурах Кальдерона// Докл. АН СССР. — 1967. — *172*, № 5. — С. 1018–1020.
8. *Меклер А. А.* Об усредненной мажоризации функций с помощью перестановок// Тр. ЛИАП. — 1974. — *84*.
9. *Меклер А. А.* Промежуточные пространства и бистохастические проекторы// Мат. исслед. — 1975. — *10*, № 1. — С. 270–275.
10. *Меклер А. А.* Усредняющие операторы над σ-подалгебрами на идеалах в $L_1(\mu)$// Дисс. к.ф.-м.н. — Л., 1977.
11. *Митягин Б. С.* Интерполяционная теорема для модулярных пространств// Мат. сб. — 1965. — *66*. — С. 473–482.
12. *Муратов М. А., Пашкова Ю. С.* Доминантная эргодическая теорема в пространствах Орлича измеримых функций на полуоси// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2006. — № 2. — С. 47–59.
13. *Муратов М. А, Пашкова Ю. С., Рубштейн Б. А.* Доминантная эргодическая теорема в симметричных пространствах измеримых функций для последовательности абсолютных сжатий// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. — 2003. — *17*, № 2. — С. 36–48.
14. *Муратов М. А, Пашкова Ю. С., Рубштейн Б. А.* Доминантная эргодическая теорема в пространствах Лоренца// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. — 2009. — *22*, № 1. — С. 86–92.
15. *Муратов М. А, Рубштейн Б. А., Векслер А. С.* Сходимость с регулятором в эргодических теоремах// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. — 2011. — *24*, № 1. — С. 23–34.
16. *Рохлин В. А.* Об основных понятиях теории меры// Мат. сб. — 1949. — *25*, № 1. — С. 107–150.
17. *Рохлин В. А.* Метрическая классификация измеримых функций// Усп. мат. наук. — 1957. — *12*. — С. 169–174.
18. *Руссу Г. И.* Симметричные пространства функций, не обладающие свойством мажорантности// Мат. исслед. — 1969. — *4*. — С. 82–93.
19. *Семенов Е. М.* Об одной шкале пространств с интерполяционным свойством// Докл. АН СССР. — 1963. — *148*, № 5. — С. 1038–1041.
20. *Семенов Е. М.* Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций// Докл. АН СССР. — 1964. — *156*, № 6. — С. 1292–1295.
21. *Aaronson J.* An introduction to infinite ergodic theory. — Providence: AMS, 1997.
22. *Agora E., Antezana J., Carro M. J., Soria J.* Lorentz–Shmogaki an Boyd theorems for weighted Lorentz spaces// J. London Math. Soc. — 2014. — *89*. — С. 321–336.
23. *Aoki T.* Locally bounded linear topological spaces// Proc. Imp. Acad. Tokyo. — 1947. — *18*. — С. 588–594.
24. *Astashkin S. V.* On the normability of Marcinkiewicz classes// Math. Notes. — 2007. — *81*. — С. 429–431.
25. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of operators. — Boston, etc.: Academic Press, 1988.
26. *Birkhof G. D.* Proof of the ergodic theorem// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1931. — *17*. — С. 656–660.
27. *Boyd D. V.* Indices of function spaces and their relationship to interpolation// Can. J. Math. — 1969. — *21*. — С. 1245–1254.
28. *Braverman M., Rubshtein B-Z., Veksler A.* Dominated ergodic theorems in rearrangement invariant spaces// Stud. Math. — 1998. — *128*. — С. 145–157.
29. *Calderon A. P.* Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkewicz// Stud. Math. — 1966. — *26*. — С. 273–299.
30. *Calderon A. P., Zygmund A.* On the existence of certain singular integrals// Acta Math. — 1952. — *88*. — С. 85–139.
31. *Carro M. J., Soria J.* Weighted Lorentz spaces and Hardy operator// J. Funct. Anal. — 1993. — *112*. — С. 480–494.

32. *Cerda J., Hudzik H., Kaminska A., Mastylo M.* Geometric properties of symmetric spaces with applications to Orlicz–Lorentz spaces// Positivity. — 1998. — *2.* — C. 311–337.
33. *Chilin V.I., Krygin A.V., Sukochev F.A.* Extreme points of convex fully symmetric sets of measurable operators// Integral Equ. Oper. Theory. — 1992. — *15.* — C. 186–226.
34. *Chilin V., Litvinov S.* Almost uniform and strong convergence in ergodic theorems for symmetric spaces// Acta Math. Hungar. — 2019. — *157.* — C. 229–253.
35. *Cwicel M., Kaminska A., Maligranda L., Pick L.* Are generalized Lorentz “spaces” really spaces?// Proc. Am. Math. Soc. — 2003. — *132.* — C. 3615–3625.
36. *Dodds P.G., De Pagter B., Semenov E.M., Sukochev F.A.* Symmetric functionals and singular traces// Positivity. — 1998. — *2.* — C. 47–75.
37. *Dodds P.G., Sukochev F.A., Schlichtermann G.* Weak compactness criteria in symmetric spaces of measurable operators// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 2001. — *131.* — C. 363–384.
38. *Dunford N., Schwartz J.* Linear Operators. Part 1. — New York: Interscience, 1958.
39. *Edgar G.A., Sucheston L.* Stopping Times and Directed Processes. — Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
40. *Edmunds D.E., Evans W.D.* Hardy Operators, Function Spaces and Embeddings. — Berlin: Springer, 2004.
41. *Florenza A., Krbec M.* Indices of Orlicz spaces and some applications// Comment. Math. Univ. Carolin. — 1997. — *38.* — C. 433–451.
42. *Fremlin D.H.* Measure Theory. Vol. 2. Broad Foundation. — Colchester: Torres Fremlin, 2003.
43. *Grabarnik G.Ya., Rubshtein B.-Z.A.* On the Marcinkiewicz classes. — Preprint, 2020.
44. *Hardy G.H., Littlewood J.E.* A maximal theorem with function-theoretic application// Acta Math. — 1930. — *54.* — C. 81–116.
45. *Harjulehto P., Hästö P.* Orlicz Spaces and Generalized Orlicz Spaces. — Cham: Springer, 2019.
46. *Hopf E.* On the ergodic theorem for positive linear operators// J. Reine Angew. Math. — 1960. — *295.* — C. 101–106.
47. *Hudzik H., Kaminska A., Mastylo M.* Geometric properties of some Calderon–Lozanovskii and Orlicz–Lorentz spaces// Houston J. Math. — 1996. — *22.* — C. 639–663.
48. *Hudzik H., Kaminska A., Mastylo M.* Geometric properties of Orlicz–Lorentz spaces// Can. Math. Bull. — 1997. — *40.* — C. 316–329.
49. *Hudzik H., Kaminska A., Mastylo M.* On the dual of Orlicz–Lorentz spaces// Proc. Am. Math. Soc. — 2003. — *130.* — C. 1645–1654.
50. *Hunt R.* On $L(p,q)$-spaces// L’Eins. Math. — 1966. — *12.* — C. 249–276.
51. *Kakutani Sh.* Iterations of linear operator in complex Banach spaces// Proc. Imp. Acad. Tokyo. — 1938. — *14.* — C. 295–300.
52. *Kalton N.J.* Convexity, type and the three space problem// Stud. Math. — 1980. — *69.* — C. 247–287.
53. *Kalton N.J.* Linear operators on L_p, $0 < p < 1$// Trans. Am. Math. Soc. — 1980. — *259.* — C. 319–355.
54. *Kalton N.J.* Convexity conditions for non-locally convex lattices// Glasgoo Math. J. — 1984. — *25.* — C. 141–152.
55. *Kalton N.J.* Banach envelopes of non-locally convex spaces// Can. J. Math. — 1986. — *38.* — C. 65–86.
56. *Kalton N.J.* Quasi-Banach spaces// В сб.: «Handbook of the Geometry of Banach spaces». — Amsterdam: North-Holland, 2003. — C. 1099–1106.
57. *Kalton N.J., Kaminska A.* Type and order convexity of Marcinkiewicz and Lorentz spaces and applications// Glasgow Math. J. — 2005. — *47.* — C. 123–137.
58. *Kalton N.J., Sedaev A., Sukochev F.A.* Fully symmetric functionals on a Marcinkiewicz space and Dixmier traces// Adv. Math. — 2011. — *226.* — C. 3540–3549.
59. *Kalton N.J., Sukochev F.A.* Rearrangement-invariant functionals with application to traces on symmetrically normed ideals// Can. Math. Bull. — 2008. — *51.* — C. 67–80.
60. *Kalton N.J., Sukochev F.A.* Symmetric norms and spaces of operators// J. Reine Angew. Math. — 2008. — *621.* — C. 81–121.
61. *Kalton N.J., Sukochev F.A., Zanin D.* Orbits in symmetric spaces. II// Stud. Math. — 2010. — *197.* — C. 257–274.
62. *Kaminska A.* Extreme points in Orlicz–Lorentz spaces// Arch. Math. — 1990. — *55.* — C. 173–180.
63. *Kaminska A.* Some remarks on Orlicz–Lorentz spaces// Math. Nachr. — 1990. — *147.* — C. 29–38.
64. *Kaminska A.* Uniform convexity of generalized Lorentz spaces// Arch. Math. — 1991. — *56.* — C. 181–188.
65. *Kaminska A., Han Ju Lee.* M-ideal property in Marcinkiewicz spaces// Ann. Soc. Math. Pol., Ser. I, Commentat. Math. — 2004. — *44*, № 1. — C. 123–144.

66. *Kaminska A., Lin P. K., Sun H.* Uniformly normal structure of Orlicz–Lorentz spaces// В сб.: «Interaction between Functional Analysis, Harmonic Analysis, and Probability». Proc. conf. Univ. Missouri, Columbia, USA, May 29–June 3, 1994. — New York: Marcel Dekker, 1996. — С. 229–238.
67. *Kaminska A., Maligranda L.* Order convexity and concavity of Lorentz spaces $\Lambda_{p.w}, 0 < p < \infty$// Stud. Math. — 2004. — *160*, № 3. — С. 267–287.
68. *Kaminska A., Maligranda L., Persson L. E.* Indices, covexity and concavity of Calderon–Lozanovskii spaces// Math. Scand. — 2003. — *92*. — С. 141–160.
69. *Kaminska A., Zyluk M.* Local geometric properties in quasi-normed Orlicz spaces// Arxiv. — 2019. — 1911.10256v1 [Math.FA].
70. *Kantorovich L. V., Akilov G. V.* Functional Analysis. — Oxford, etc.: Pergamon Press, 1982.
71. *Koshi Sh., Shimogaki T.* On quasi-modular spaces// Stud. Math. — 1961. — *21*. — С. 15–36.
72. *Krasnoselskii M. A., Rutitzkii Ya. B.* Convex Functions and Orlicz Spaces. — Groningen–The Netherlands: P. Noordhoff, 1961.
73. *Krbec M., Lang J.* Embeddings between weighted Orlicz–Lorentz spaces// Georg. Math. J. — 1997. — *4*. — С. 117–128.
74. *Krein S. G., Petunin Yu. I., Semenov E. M.* Interpolation of Linear Operators. — Providence: AMS, 1982.
75. *Krengel U.* Ergodic Theorems. — Berlin: De Gruyter, 1985.
76. *Lin P. K., Sun H.* Some geometric properties of Orlicz–Lorentz spaces// Arch. Math. — 1995. — *64*. — С. 500–511.
77. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces I. Sequence Spaces. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1977.
78. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces II. Function Spaces. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1979.
79. *Lord S., Sedaev A., Sukochev F.* Dixmier traces as singular symmetric functionals and applications to measurable operators// J. Funct. Anal. — 2005. — *224*. — С. 72–206.
80. *Lord S., Sukochev F., Zanin Z.* Singular Traces. Theory and Applications. — Berlin: de Gruyter, 2013.
81. *Lorentz G. G.* Some new functional spaces// Ann. Math. — 1950. — *51*. — С. 37–55.
82. *Lorentz G. G.* On the theory of spaces $\mathbf{\Lambda}$// Pacific J. Math. — 1951. — *1*. — С. 411–429.
83. *Lorentz G. G.* Majorants in spaces of integrable function// Amer. J. Math. — 1955. — *77*. — С. 484–492.
84. *Lorentz G. G., Shimogaki T.* Majorants for interpolation theorems// Publ. Ramanujan Inst. — 1969. — *1*. — С. 115–122.
85. *Lozanovskii G. Ya.* On some Banach lattices II// Sib. Math. J. — 1971. — *12*. — С. 397–401.
86. *Luxemburg W. A. J.* Rearrangement invariant Banach function spaces// Queen's Papers in Pure Appl. Math. — 1967. — *10*. — С. 83–144.
87. *Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.* Riesz Spaces. Vol. I. — Amsterdam–London: North-Holland, 1971.
88. *Matuszewska W., Orlicz W.* On certain properties of ϕ-functions// Bull. Acad. Polon. Sci. — 1960. — *8*. — С. 439–443.
89. *Matuszewska W., Orlicz W.* On some classes of functions with regarg to their order of growth// Stud. Math. — 1965. — *26*. — С. 11–24.
90. *Mekler A. A.* On rearrangement invariant and majorant hulls of averages of rearrangement invariant and majorant ideals// J. Math. Anal. Appl. — 1992. — *171*. — С. 555–566.
91. *Mekler A. A.* On averaging of rearrangement ideals of the space $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ by non-atomic σ-subalgebras of Σ// Positivity. — 2010. — *14*. — С. 191–214.
92. *Mekler A. A.* Conditianal expectations and interpolation of linear operators on ordered ideals between $L_1(0,1)$ and $L_1(0,1)$// ArXiv. — 2018. — 1803.09796v1.
93. *Montgomery-Smith S. J.* Orlicz–Lorentz spaces// Proc. of the Orlicz Mem. Conf., Oxford, USA, March 21–23, 1991. — Oxford: Univ. Mississippi, 1991. — Exp. № 6. — С. 1–11.
94. *Montgomery-Smith S. J.* Comparison of Orlicz–Lorentz spaces// Stud. Math. — 1992. — *103*. — С. 161–189.
95. *Montgomery-Smith S. J.* Boyd indices of Orlicz–Lorentz spaces// Proc. Second Conf. Function Spaces, Edwardsville, USA, May 24–28, 1994. — New York: Marcel Dekker, 1995. — С. 321–334.
96. *Montgomery-Smith S. J.* The Hardy operator and Boyd indices// Proc. Conf. «Interaction between functional Analysis, Harmonic Analysis, and Probability», Columbia, USA, May 29–June 3, 1994. — New York: Marcel Dekker, 1996. — С. 359–364.
97. *Mori T., Amemiya I., Nakano H.* On the reflexivity of semi-continuous norms// Proc. Jap. Acad. — 1955. — *31*. — С. 684–685.
98. *Muratov M. A., Pashkova J. S., Rubshtein B.-Z. A.* Order convergence ergodic theorems in rearrangement invariant spaces// Oper. Theory Adv. Appl. — 2013. — *227*. — С. 123–142.

99. *Muratov M. A., Rubshtein B.-Z. A.* Main embedding theorems for symmetric spaces of measurable functions// Proc. 8th Int. Conf. «Topological Algebras and Their Applications», Playa de Villas de Mar Beach, Dominican Republic, May 26–30, 2014. — Berlin: De Gruyter, 2018. — С. 176–192.
100. *Muratov M. A., Rubshtein B.-Z. A.* Equimeasurable symmetric spaces of measurable functions// ArXiv. — 2020. — 2006.15702v1 [math.FA].
101. *Musielak J.* Orlicz Spaces and Modular Spaces. — Berlin, etc.: Springer, 1983.
102. *Nakano H.* Modular Semiordered Linear Spaces. — Tokyo: Maruzen, 1950.
103. *Orlicz W.* Über eine gewisse Klasse von Räumen von Typus B// Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Ser. A. — 1932. — № 8-9. — С. 207–220.
104. *Orlicz W.* Über Räume (L^M)// Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Ser. A. — 1936. — *1936.* — С. 93–107.
105. *Ornstein D. S.* A remark on the Birkhoff ergodic theorem// Illinois J. Math. — 1971. — *15.* — С. 77–79.
106. *Rao M. M.* Theory of Orlicz Spaces. — New York: M. Dekker, 1991.
107. *Rao M. M., Ren Z. D.* Applications of Orlicz Spaces. — New York: M. Dekker, 2002.
108. *Riesz F.* Some mean ergodic theorems// J. London Math. Soc. — 1938. — *13.* — С. 274–278.
109. *Rolewicz S.* On a certain class of metric linear spaces// Bull. Acad. Pol. Sci. Cl. III. — 1957. — *5.* — С. 471–473.
110. *Rolewicz S.* Metric Linear Spaces. — Warsaw: PWM, 1972.
111. *Rubshtein B.-Z. A., Grabarnik G. Ya., Muratov M. A., Pashkova Yu. S.* Foundations of Symmetric Spaces of Measurable Functions. Lorentz, Marcinkiewicz and Orlicz Spaces. — Cham: Springer, 2016.
112. *Ryff J. V.* Orbits of L^1-functions under doubly stochastic operators// Trans. AMS. — 1965. — *117.* — С. 92–100.
113. *Ryff J. V.* Measure preserving transformation and rearrangements// J. Math. Anal. Appl. — 1970. — *31*, № 2. — С. 449–458.
114. *Sawyer E. T.* Boundedness of classical operators in classical Lorentz spaces// Stud. Math. — 1990. — *96.* — С. 145–158.
115. *Shimogaki T.* Hardy–Littlewood majorants in function spaces// J. Math. Soc. Japan. — 1965. — *17.* — С. 365–375.
116. *Shimogaki T.* On the complete continuity of operators in an interpolation theorem// J. Funct. Anal. — 1968. — *2.* — С. 31–51.
117. *Shimogaki T.* A note on norms of compression operators// Proc. Jap. Acad. — 1970. — *46.* — С. 239–249.
118. *Sine R. C.* A mean ergodic theorem// Proc. Am. Math. Soc. — 1970. — *24.* — С. 438–439.
119. *Soria J.* Lorentz spaces of weak type// Quart. J. Math. Oxford. — 1998. — *46.* — С. 93–103.
120. *Stein E. M., Weiss G.* Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1971.
121. *Sukochev F. A., Veksler A. S.* The mean ergodic theorem in symmetric spaces// Stud. Math. — 2019. — *245.* — С. 229–253.
122. *Sukochev F. A., Zanin D.* Orbits in symmetric spaces// J. Funct. Anal. — 2009. — *257.* — С. 194–218.
123. *Sukochev F. A., Zanin D.* Traces on symmetrically normed operator ideals// J. Reine Ang. Math. — 2013. — *678.* — С. 163–299.
124. *Yosida K.* Mean ergodic theorems in Banach spaces// Proc. Imp. Acad. Tokyo. — 1938. — *14.* — С. 292–294.
125. *Yosida K., Kakutani Sh.* Operator-theoretical treatment of Markoff's process and mean ergodic theorems// Anal. Math. — 1941. — *42.* — С. 188–228.
126. *Zaanen A. C.* Integration. — Amsterdam: North-Holland, 1967.
127. *Zaanen A. C.* Riesz Spaces II. — Amsterdam–New York–Oxford: North-Holland, 1983.
128. *Zanin D.* Orbits and Khinchine-type inequalities in symmetric spaces// Ph.D. Thesis. — Flinders Univ., 2011.
129. *Zippinn M.* Interpolation of operators of weak type between rearrangement invariant spaces// J. Funct. Anal. — 1971. — *7.* — С. 267–284.

М. А. Муратов
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия
E-mail: mamuratov@gmail.com

Б. А. Рубштейн
Университет им. Д. Бен-Гуриона, Беэр-Шева, Израиль
E-mail: benzion@math.bgu.ac.il

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-221-271 UDC 519.55, 519.56

Symmetric Spaces of Measurable Functions: Old and New Advances

© 2020 **M. A. Muratov, B.-Z. A. Rubshtein**

Abstract. The article is an extensive review in the theory of symmetric spaces of measurable functions.

It contains a number of new (recent) and old (known) results in this field. For the most of the results, we give their proofs or exact references, where they can be found.

The symmetric spaces under consideration are Banach (or quasi-Banach) latices of measurable functions equipped with symmetric (rearrangement invariant) norm (or quasinorm).

We consider symmetric spaces $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \subset \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ on general measure spaces $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, where the measures μ are assumed to be finite or infinite σ-finite and nonatomic, while there are no assumptions that $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ is separable or Lebesgue space.

In the first section of the review, we describe main classes and basic properties of symmetric spaces, consider minimal, maximal, and associate spaces, the properties (A), (B), and (C), and Fatou's property.

The list of specific symmetric spaces we use includes Orlicz $\mathbf{L}_\Phi(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, Lorentz $\mathbf{\Lambda}_W(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, Marcinkiewicz $\mathbf{M}_V(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, and Orlicz–Lorentz $\mathbf{L}_{W,\Phi}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ spaces, and, in particular, the spaces $\mathbf{L}_p(w)$, $\mathbf{M}_p(w)$, $\mathbf{L}_{p,q}$, and $\mathbf{L}_\infty(U)$.

In the second section, we deal with the dilation (Boyd) indexes of symmetric spaces and some applications of classical Hardy–Littlewood operator H. One of the main problems here is: when H acts as a bounded operator on a given symmetric space $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$? A spacial attention is paid to symmetric spaces, which have Hardy–Littlewood property ($\mathcal{HLP}$) or weak Hardy–Littlewood property ($\mathcal{WHLP}$).

In the third section, we consider some interpolation theorems for the pair of spaces $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$ including the classical Calderon–Mityagin theorem.

As an application of general theory, we prove in the last section of review Ergodic Theorems for Cesaro averages of positive contractions in symmetric spaces. Studying various types of convergence, we are interested in Dominant Ergodic Theorem ($\mathcal{DET}$), Individual (Pointwise) Ergodic Theorem ($\mathcal{IET}$), Order Ergodic Theorem ($\mathcal{OET}$), and also Mean (Statistical) Ergodic Theorem ($\mathcal{MET}$).

REFERENCES

1. M. Sh. Braverman and A. A. Mekler, "O svoystve Khardi—Littlvuda dlya simmetrichnykh prostranstv" [On the Hardy–Littlewood property for symmetric spaces], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1977, **18**, No. 3, 522–540 (in Russian).
2. A. S. Veksler, "Ergodicheskaya teorema v simmetrichnykh prostranstvakh" [Ergodic theorem in symmetric spaces], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1985, **26**, No. 4, 189–191 (in Russian).
3. A. S. Veksler, *Statisticheskie ergodicheskie teoremy v simmetrichnykh prostranstvakh* [Statistical Ergodic Theorems in Symmetric Spaces], Lambert Academic Publishing, Tashkent, 2018 (in Russian).
4. A. S. Veksler and A. L. Fedorov, "Statisticheskaya ergodicheskaya teorema v neseparabel'nykh simmetrichnykh prostranstvakh funktsiy" [Statistical ergodic theorem in nonseparable symmetric spaces of functions], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1989, **29**, No. 3, 183–185 (in Russian).
5. A. S. Veksler and A. L. Fedorov, *Simmetrichnye prostranstva i statisticheskie ergodicheskie teoremy dlya avtomorfizmov i potokov* [Symmetric Spaces and Statistical Ergodic Theorems for Automorphisms and Flows], FAN, Tashkent, 2016 (in Russian).
6. V. G. Vinokurov, B. A. Rubshteyn, and A. L. Fedorov, *Prostranstvo Lebega i ego izmerimye razbieniya* [Lebesgue Space and Its Measurable Partitions], TashGU, Tashkent, 1986 (in Russian).
7. G. Ya. Lozanovskiy, "O banakhovykh strukturakh Kal'derona" [On Calderon Banach structures], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1967, **172**, No. 5, 1018–1020 (in Russian).
8. A. A. Mekler, "Ob usrednennoy mazhorizatsii funktsiy s pomoshch'yu perestanovok" [On averaged majorization of functions by means of permutations], *Tr. LIAP* [Proc. LIAP], 1974, **84** (in Russian).

9. A. A. Mekler, "Promezhutochnye prostranstva i bistokhasticheskie proektory" [Intermediate spaces and bistochastic projectors], *Mat. issled.* [Math. Research], 1975, **10**, No. 1, 270–275 (in Russian).
10. A. A. Mekler, *Usrednyayushchie operatory nad σ-podalgebrami na idealakh v $L_1(\mu)$* [Averaging operators over σ-subalgebras on ideals in $L_1(\mu)$], PhD Thesis, Leningrad, 1977 (in Russian).
11. B. S. Mityagin, "Interpolyatsionnaya teorema dlya modulyarnykh prostranstv" [Interpolational theorem for modular spaces], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1965, **66**, 473–482 (in Russian).
12. M. A. Muratov and Yu. S. Pashkova, "Dominantnaya ergodicheskaya teorema v prostranstvakh Orlicha izmerimykh funktsiy na poluosi" [Dominant ergodic theorem in Orlicz spaces of measurable functions on a semiaxis], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2006, No. 2, 47–59 (in Russian).
13. M. A Muratov A, Yu. S. Pashkova, and B. A. Rubshteyn, "Dominantnaya ergodicheskaya teorema v simmetrichnykh prostranstvakh izmerimykh funktsiy dlya posledovatel'nosti absolyutnykh szhatiy" [Dominant ergodic theorem in symmetric spaces of measurable functions for a sequence of absolute contractions], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ.], 2003, **17**, No. 2, 36–48 (in Russian).
14. M. A Muratov A, Yu. S. Pashkova, and B. A. Rubshteyn, "Dominantnaya ergodicheskaya teorema v prostranstvakh Lorentsa" [Dominant ergodic theorem in Lorentz spaces], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ.], 2009, **22**, No. 1, 86–92 (in Russian).
15. M. A Muratov A, B. A. Rubshteyn, and A. S. Veksler, "Skhodimost' s regulyatorom v ergodicheskikh teoremakh" [Convergence with a regulator in ergodic theorems], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ.], 2011, **24**, No. 1, 23–34 (in Russian).
16. V. A. Rokhlin, "Ob osnovnykh ponyatiyakh teorii mery" [On basic concepts in the measure theory], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1949, **25**, No. 1, 107–150 (in Russian).
17. V. A. Rokhlin, "Metricheskaya klassifikatsiya izmerimykh funktsiy" [Metric classification of measurable functions], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1957, **12**, 169–174 (in Russian).
18. G. I. Russu, "Simmetrichnye prostranstva funktsiy, ne obladayushchie svoystvom mazhorantnosti" [Symmetric spaces of functions without majorant property], *Mat. issled.* [Math. Research], 1969, **4**, 82–93 (in Russian).
19. E. M. Semenov, "Ob odnoy shkale prostranstv s interpolyatsionnym svoystvom" [On one scale of spaces with interpolation property], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1963, **148**, No. 5, 1038–1041 (in Russian).
20. E. M. Semenov, "Teoremy vlozheniya dlya banakhovykh prostranstv izmerimykh funktsiy" [Embedding theorems for Banach spaces of measurable functions], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1964, **156**, No. 6, 1292–1295 (in Russian).
21. J. Aaronson, *An introduction to infinite ergodic theory*, AMS, Providence, 1997.
22. E. Agora, J. Antezana, M. J. Carro, and J. Soria, "Lorentz–Shmogaki an Boyd theorems for weighted Lorentz spaces," *J. London Math. Soc.*, 2014, **89**, 321–336.
23. T. Aoki, "Locally bounded linear topological spaces," *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 1947, **18**, 588–594.
24. S. V. Astashkin, "On the normability of Marcinkiewicz classes," *Math. Notes*, 2007, **81**, 429–431.
25. C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Academic Press, Boston, etc., 1988.
26. G. D. Birkhof, "Proof of the ergodic theorem," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1931, **17**, 656–660.
27. D. V. Boyd, "Indices of function spaces and their relationship to interpolation," *Can. J. Math.*, 1969, **21**, 1245–1254.
28. M. Braverman and B-Z. Rubshtein, A. Veksler, "Dominated ergodic theorems in rearrangement invariant spaces," *Stud. Math.*, 1998, **128**, 145–157.
29. A. P. Calderon, "Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkewicz," *Stud. Math.*, 1966, **26**, 273–299.
30. A. P. Calderon and A. Zygmund, "On the existence of certain singular integrals," *Acta Math.*, 1952, **88**, 85–139.
31. M. J. Carro and J. Soria, "Weighted Lorentz spaces and Hardy operator," *J. Funct. Anal.*, 1993, **112**, 480–494.
32. J. Cerda, H. Hudzik, A. Kaminska, and M. Mastylo, "Geometric properties of symmetric spaces with applications to Orlicz–Lorentz spaces," *Positivity*, 1998, **2**, 311–337.
33. V. I. Chilin, A. V. Krygin, and F. A. Sukochev, "Extreme points of convex fully symmetric sets of measurable operators," *Integral Equ. Oper. Theory*, 1992, **15**, 186–226.
34. V. Chilin and S. Litvinov, "Almost uniform and strong convergence in ergodic theorems for symmetric spaces," *Acta Math. Hungar.*, 2019, **157**, 229–253.

35. M. Cwicel, A. Kaminska, L. Maligranda and L. Pick, “Are generalized Lorentz “spaces” really spaces?,” *Proc. Am. Math. Soc.*, 2003, **132**, 3615–3625.
36. P. G. Dodds, B. De Pagter, E. M. Semenov, and F. A. Sukochev, “Symmetric functionals and singular traces,” *Positivity*, 1998, **2**, 47–75.
37. P. G. Dodds, F. A. Sukochev, and G. Schlichtermann, “Weak compactness criteria in symmetric spaces of measurable operators,” *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 2001, **131**, 363–384.
38. N. Dunford and J. Schwartz, *Linear Operators. Part 1*, Interscience, New York, 1958.
39. G. A. Edgar and L. Sucheston, *Stopping Times and Directed Processes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
40. D. E. Edmunds and W. D. Evans, *Hardy Operators, Function Spaces and Embeddings*, Springer, Berlin, 2004.
41. A. Florenza and M. Krbec, “Indices of Orlicz spaces and some applications,” *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 1997, **38**, 433–451.
42. D. H. Fremlin, *Measure Theory. Vol. 2. Broad Foundation*, Torres Fremlin, Colchester, 2003.
43. G. Ya. Grabarnik and B.-Z. Rubshtein, “On the Marcinkiewicz classes” [On the Marcinkiewicz classes], *Preprint*, 2020.
44. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, “A maximal theorem with function-theoretic application,” *Acta Math.*, 1930, **54**, 81–116.
45. P. Harjulehto and P. Hästö, *Orlicz Spaces and Generalized Orlicz Spaces*, Springer, Cham, 2019.
46. E. Hopf, “On the ergodic theorem for positive linear operators,” *J. Reine Angew. Math.*, 1960, **295**, 101–106.
47. H. Hudzik, A. Kaminska, and M. Mastylo, “Geometric properties of some Calderon–Lozanovskii and Orlicz–Lorentz spaces,” *Houston J. Math.*, 1996, **22**, 639–663.
48. H. Hudzik, A. Kaminska, and M. Mastylo, “Geometric properties of Orlicz–Lorentz spaces,” *Can. Math. Bull.*, 1997, **40**, 316–329.
49. H. Hudzik, A. Kaminska, and M. Mastylo, “On the dual of Orlicz–Lorentz spaces,” *Proc. Am. Math. Soc.*, 2003, **130**, 1645–1654.
50. R. Hunt, “On $L(p,q)$-spaces,” *L’Eins. Math.*, 1966, **12**, 249–276.
51. Sh. Kakutani, “Iterations of linear operator in complex Banach spaces,” *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 1938, **14**, 295–300.
52. N. J. Kalton, “Convexity, type and the three space problem,” *Stud. Math.*, 1980, **69**, 247–287.
53. N. J. Kalton, “Linear operators on L_p, $0 < p < 1$,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1980, **259**, 319–355.
54. N. J. Kalton, “Convexity conditions for non-locally convex lattices,” *Glasgoo Math. J.*, 1984, **25**, 141–152.
55. N. J. Kalton, “Banach envelopes of non-locally convex spaces,” *Can. J. Math.*, 1986, **38**, 65–86.
56. N. J. Kalton, “Quasi-Banach spaces,” In: *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*, North-Holland, Amsterdam, 2003, pp. 1099–1106.
57. N. J. Kalton and A. Kaminska, “Type and order convexity of Marcinkiewicz and Lorentz spaces and applications,” *Glasgow Math. J.*, 2005, **47**, 123–137.
58. N. J. Kalton, A. Sedaev, and F. A. Sukochev, “Fully symmetric functionals on a Marcinkiewicz space and Dixmier traces,” *Adv. Math.*, 2011, **226**, 3540–3549.
59. N. J. Kalton and F. A. Sukochev, “Rearrangement-invariant functionals with application to traces on symmetrically normed ideals,” *Can. Math. Bull.*, 2008, **51**, 67–80.
60. N. J. Kalton and F. A. Sukochev, “Symmetric norms and spaces of operators,” *J. Reine Angew. Math.*, 2008, **621**, 81–121.
61. N. J. Kalton, F. A. Sukochev, and D. Zanin, “Orbits in symmetric spaces. II,” *Stud. Math.*, 2010, **197**, 257–274.
62. A. Kaminska, “Extreme points in Orlicz–Lorentz spaces,” *Arch. Math.*, 1990, **55**, 173–180.
63. A. Kaminska, “Some remarks on Orlicz–Lorentz spaces,” *Math. Nachr.*, 1990, **147**, 29–38.
64. A. Kaminska, “Uniform convexity of generalized Lorentz spaces,” *Arch. Math.*, 1991, **56**, 181–188.
65. A. Kaminska and Han Ju Lee, “M-ideal property in Marcinkiewicz spaces,” *Ann. Soc. Math. Pol., Ser. I, Commentat. Math.*, 2004, **44**, No. 1, 123–144.
66. A. Kaminska, P. K. Lin, and H. Sun, “Uniformly normal structure of Orlicz–Lorentz spaces,” In: *Interaction between Functional Analysis, Harmonic Analysis, and Probability*, Proc. Conf. Univ. Missouri, Columbia, USA, May 29–June 3, 1994, Marcel Dekker, New York, 1996, pp. 229–238.
67. A. Kaminska and L. Maligranda, “Order convexity and concavity of Lorentz spaces $\Lambda_{p.w}, 0 < p < \infty$,” *Stud. Math.*, 2004, **160**, No. 3, 267–287.
68. A. Kaminska, L. Maligranda, and L. E. Persson, “Indices, covexity and concavity of Calderon–Lozanovskii spaces,” *Math. Scand.*, 2003, **92**, 141–160.

69. A. Kaminska and M. Zyluk, “Local geometric properties in quasi-normed Orlicz spaces,” *Arxiv*, 2019, 1911.10256v1 [Math.FA].
70. L. V. Kantorovich and G. V. Akilov, *Functional Analysis*, Pergamon Press, Oxford, etc., 1982.
71. Sh. Koshi and T. Shimogaki, “On quasi-modular spaces,” *Stud. Math.*, 1961, **21**, 15–36.
72. M. A. Krasnoselskii and Ya. B. Rutitzkii, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, P. Noordhoff, Groningen–The Netherlands, 1961.
73. M. Krbec and J. Lang, “Embeddings between weighted Orlicz–Lorentz spaces,” *Georg. Math. J.*, 1997, **4**, 117–128.
74. S. G. Krein, Yu. I. Petunin, and E. M. Semenov, *Interpolation of Linear Operators*, AMS, Providence, 1982.
75. U. Krengel, *Ergodic Theorems*, De Gruyter, Berlin, 1985.
76. P. K. Lin and H. Sun, “Some geometric properties of Orlicz–Lorentz spaces,” *Arch. Math.*, 1995, **64**, 500–511.
77. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I. Sequence Spaces*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.
78. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II. Function Spaces*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1979.
79. S. Lord, A. Sedaev, and F. Sukochev, “Dixmier traces as singular symmetric functionals and applications to measurable operators,” *J. Funct. Anal.*, 2005, **224**, 72–206.
80. S. Lord, F. Sukochev, and Z. Zanin, *Singular Traces. Theory and Applications*, de Gruyter, Berlin, 2013.
81. G. G. Lorentz, “Some new functional spaces,” *Ann. Math.*, 1950, **51**, 37–55.
82. G. G. Lorentz, “On the theory of spaces $\boldsymbol{\Lambda}$,” *Pacific J. Math.*, 1951, **1**, 411–429.
83. G. G. Lorentz, “Majorants in spaces of integrable function,” *Amer. J. Math.*, 1955, **77**, 484–492.
84. G. G. Lorentz and T. Shimogaki, “Majorants for interpolation theorems,” *Publ. Ramanujan Inst.*, 1969, **1**, 115–122.
85. G. Ya. Lozanovskii, “On some Banach lattices II,” *Sib. Math. J.*, 1971, **12**, 397–401.
86. W. A. Luxemburg, “Rearrangement invariant Banach function spaces,” *Queen’s Papers in Pure Appl. Math.*, 1967, **10**, 83–144.
87. W. A. Luxemburg and A. C. Zaanen, *Riesz Spaces. Vol. I*, North-Holland, Amsterdam–London, 1971.
88. W. Matuszewska and W. Orlicz, “On certain properties of ϕ-functions,” *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 1960, **8**, 439–443.
89. W. Matuszewska and W. Orlicz, “On some classes of functions with regarg to their order of growth,” *Stud. Math.*, 1965, **26**, 11–24.
90. A. A. Mekler, “On rearrangement invariant and majorant hulls of averages of rearrangement invariant and majorant ideals,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1992, **171**, 555–566.
91. A. A. Mekler, “On averaging of rearrangement ideals of the space $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ by non-atomic σ-subalgebras of Σ,” *Positivity*, 2010, **14**, 191–214.
92. A. A. Mekler, “Conditianal expectations and interpolation of linear operators on ordered ideals between $L_1(0, 1)$ and $L_1(0, 1)$,” *ArXiv*, 26 Mar. 2018, 1803.09796v1.
93. S. J. Montgomery-Smith, “Orlicz–Lorentz spaces,” *Proc. of the Orlicz Mem. Conf., Oxford, USA, March 21–23, 1991.*, Univ. Mississippi, Oxford, 1991, Exp. No. 6, 1–11.
94. S. J. Montgomery-Smith, “Comparison of Orlicz–Lorentz spaces,” *Stud. Math.*, 1992, **103**, 161–189.
95. S. J. Montgomery-Smith, “Boyd indices of Orlicz–Lorentz spaces,” Proc. Second Conf. *Function Spaces*, Edwardsville, USA, May 24–28, 1994, Marcel Dekker, New York, 1995, pp. 321–334.
96. S. J. Montgomery-Smith, “The Hardy operator and Boyd indices,” Proc. Conf. *Interaction between functional Analysis, Harmonic Analysis, and Probability*, Columbia, USA, May 29–June 3, 1994, Marcel Dekker, New York, 1996, pp. 359–364.
97. T. Mori, I. Amemiya, and H. Nakano, “On the reflexivity of semi-continuous norms,” *Proc. Jap. Acad.*, 1955, **31**, 684–685.
98. M. A. Muratov, J. S. Pashkova, and B.-Z. Rubshtein, “Order convergence ergodic theorems in rearrangement invariant spaces,” *Oper. Theory Adv. Appl.*, 2013, **227**, 123–142.
99. M. A. Muratov and B.-Z. Rubshtein, “Main embedding theorems for symmetric spaces of measurable functions,” Proc. 8th Int. Conf. *Topological Algebras and Their Applications*, Playa de Villas de Mar Beach, Dominican Republic, May 26–30, 2014, De Gruyter, Berlin, 2018, pp. 176–192.
100. M. A. Muratov and B.-Z. Rubshtein, “Equimeasurable symmetric spaces of measurable functions,” *ArXiv*, 2020, 2006.15702v1 [math.FA].
101. J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Springer, Berlin, etc., 1983.
102. H. Nakano, *Modular Semiordered Linear Spaces*, Maruzen, Tokyo, 1950.

103. W. Orlicz, "Über eine gewisse Klasse von Räumen von Typus B," *Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Ser. A*, 1932, No. 8-9, 207–220.
104. W. Orlicz, "Über Räume (L^M)," *Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Ser. A*, 1936, **1936**, 93–107.
105. D. S. Ornstein, "A remark on the Birkhoff ergodic theorem," *Illinois J. Math.*, 1971, **15**, 77–79.
106. M. M. Rao, *Theory of Orlicz Spaces*, M. Dekker, New York, 1991.
107. M. M. Rao and Z. D. Ren, *Applications of Orlicz Spaces*, M. Dekker, New York, 2002.
108. F. Riesz, "Some mean ergodic theorems," *J. London Math. Soc.*, 1938, **13**, 274–278.
109. S. Rolewicz, "On a certain class of metric linear spaces," *Bull. Acad. Pol. Sci. Cl. III*, 1957, **5**, 471–473.
110. S. Rolewicz, *Metric Linear Spaces*, PWM, Warsaw, 1972.
111. B.-Z. Rubshtein, G. Ya. Grabarnik, M. A. Muratov, and Yu. S. Pashkova, *Foundations of Symmetric Spaces of Measurable Functions. Lorentz, Marcinkiewicz and Orlicz Spaces*, Springer, Cham, 2016.
112. J. V. Ryff, "Orbits of L^1-functions under doubly stochastic operators," *Trans. AMS*, 1965, **117**, 92–100.
113. J. V. Ryff, "Measure preserving transformation and rearrangements," *J. Math. Anal. Appl.*, 1970, **31**, No. 2, 449–458.
114. E. T. Sawyer, "Boundedness of classical operators in classical Lorentz spaces," *Stud. Math.*, 1990, **96**, 145–158.
115. T. Shimogaki, "Hardy–Littlewood majorants in function spaces," *J. Math. Soc. Japan*, 1965, **17**, 365–375.
116. T. Shimogaki, "On the complete continuity of operators in an interpolation theorem," *J. Funct. Anal.*, 1968, **2**, 31–51.
117. T. Shimogaki, "A note on norms of compression operators," *Proc. Jap. Acad.*, 1970, **46**, 239–249.
118. R. C. Sine, "A mean ergodic theorem," *Proc. Am. Math. Soc.*, 1970, **24**, 438–439.
119. J. Soria, "Lorentz spaces of weak type," *Quart. J. Math. Oxford*, 1998, **46**, 93–103.
120. E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1971.
121. F. A. Sukochev and A. S. Veksler, "The mean ergodic theorem in symmetric spaces," *Stud. Math.*, 2019, **245**, 229–253.
122. F. A. Sukochev and D. Zanin, "Orbits in symmetric spaces," *J. Funct. Anal.*, 2009, **257**, 194–218.
123. F. A. Sukochev and D. Zanin, "Traces on symmetrically normed operator ideals," *J. Reine Ang. Math.*, 2013, **678**, 163–299.
124. K. Yosida, "Mean ergodic theorems in Banach spaces," *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 1938, **14**, 292–294.
125. K. Yosida and Sh. Kakutani, "Operator-theoretical treatment of Markoff's process and mean ergodic theorems," *Anal. Math.*, 1941, **42**, 188–228.
126. A. C. Zaanen, *Integration*, North-Holland, Amsterdam, 1967.
127. A. C. Zaanen, *Riesz Spaces II*, North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1983.
128. D. Zanin, *Orbits and Khinchine-type Inequalities in Symmetric Spaces*, Ph.D. Thesis, Flinders Univ., 2011.
129. M. Zippinn, "Interpolation of operators of weak type between rearrangement invariant spaces," *J. Funct. Anal.*, 1971, **7**, 267–284.

M. A. Muratov
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: `mamuratov@gmail.com`

B.-Z. A. Rubshtein
Ben-Gurion University of the Negev, Beer-Sheva, Israel
E-mail: `benzion@math.bgu.ac.il`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 66, № 2 (2020). С. 272–291

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-272-291 УДК 517.929

ГЛАДКОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ СОСЕДНИХ ПОДОБЛАСТЕЙ

© 2020 г. **Д. А. НЕВЕРОВА**

Аннотация. Данная статья посвящена изучению качественных свойств решений краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений. Для рассматриваемых задач ранее были получены результаты о существовании обобщенных решений и доказано, что гладкость этих решений сохраняется в некоторых подобластях, но может нарушаться внутри области даже для бесконечно гладкой функции в правой части уравнения. Подобласти здесь определяются как связные компоненты множества, полученного из области Q выбрасыванием всевозможных сдвигов границы ∂Q на векторы некоторой группы, порожденной сдвигами, входящими в разностные операторы.

Для случая дифференциально-разностных уравнений, рассматриваемых на отрезке с краевыми условиями второго рода, автором были получены условия на коэффициенты разностных операторов, при выполнении которых для любой непрерывной функции в правой части уравнения существует классическое решение задачи, совпадающее с обобщенным. Гладкость решений второй краевой задачи для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений внутри некоторых подобластей, за исключением ε-окрестностей угловых точек, в шкале пространств Соболева W_2^k была также исследована автором ранее. Однако проблема гладкости обобщенных решений второй краевой задачи для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений на границе соседних подобластей оставалась неисследованной. Настоящая работа посвящена изучению этого вопроса в шкале пространств Гельдера. Будут получены необходимые и достаточные условия на коэффициенты разностных операторов, гарантирующие сохранение гладкости обобщенного решения на границе соседних подобластей для любой функции в правой части уравнения из пространства Гельдера.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Современная теория функционально-дифференциальных уравнений началась с работ А. Д. Мышкиса [12,13]. Развитием этой теории занимались также такие математики, как Л. Э. Эльсгольц [7], Г. А. Каменский [8, 23], Р. Беллман и К. Кук [2], Дж. Хейл [21] и др. Изучение эллиптических функционально-дифференциальных уравнений началось с работ Ф. Хартмана и Г. Стампакья [22], А. Б. Антоневича [1], В. С. Рабиновича [16] и др.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания: соглашение № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

Интерес к изучению подобных задач связан с целым рядом их приложений в теории управления системами с последействием [10], теории упругости многослойных пластин и оболочек [26], нелинейной оптике [4, 29], теории многомерных диффузионных процессов [28], теории нелокальных эллиптических задач [3,19], возникающих в теории плазмы, к проблеме Като о квадратном корне из оператора [30] и др.

Общая теория краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений построена в работах [17,19,28] и др. Исследования широкого класса эволюционных функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием по времени методами спектральной теории рассматривались в [5,6].

В работе [28] для краевых задач для дифференциально-разностных уравнений сформулированы необходимые и достаточные условия выполнения неравенства типа Гординга, исследованы вопросы однозначной и фредгольмовой разрешимости в пространствах Соболева, а также изучена гладкость обобщенных решений задачи Дирихле в пространствах Соболева. В частности, было показано, что гладкость обобщенных решений может нарушаться внутри области даже при бесконечно дифференцируемых правых частях уравнений и сохраняется лишь в некоторых подобластях. Вторая краевая задача для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений и параболических уравнений со сдвигом по пространственным переменным изучалась в работах [14,18,20]. Результаты о существовании классического решения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с непрерывной правой частью, а также о гладкости обобщенных решений краевых задач для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения с правой частью из пространства Гельдера и пространств Соболева W_2^k приведены в работах [14,15,24,25].

В настоящей работе изучается гладкость обобщенного решения задачи Неймана для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения на границе соседних подобластей в шкале гельдеровских пространств.

Рассмотрим уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{n}(R_{ijQ}u_{x_j})_{x_i}=f(x) \qquad (x\in Q\subset\mathbb{R}^n) \tag{1.1}$$

с краевым условием

$$\sum_{i,j=1}^{n}R_{ijQ}u_{x_j}\cos(\nu,x_i)=0 \qquad (x\in\partial Q), \tag{1.2}$$

где ν — единичный вектор внешней нормали к ∂Q, операторы R_{ijQ} определены по формуле $R_{ijQ}=P_QR_{ij}I_Q: L_2(Q)\to L_2(Q)$; $I_Q\colon L_2(Q)\to L_2(\mathbb{R}^n)$ — оператор продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n\setminus Q$; $P_Q\colon L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(Q)$ — оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q; $R_{ij}: L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R}^n)$ — симметрические разностные операторы вида

$$(R_{ij}u)(x)=\sum_{h\in\mathcal{M}}a_{ijh}(u(x+h)+u(x-h)) \quad (i,j=1,\dots,n). \tag{1.3}$$

Здесь $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n$ — множество, состоящее из конечного числа векторов h с целочисленными координатами; a_{ijh} — вещественные числа, $a_{ijh}=a_{jih}$ $(i,j=1,\dots,n,h\in\mathcal{M})$.

2. Геометрические вопросы и вспомогательные утверждения

В этом разделе мы рассмотрим некоторые геометрические вопросы, возникающие для рассматриваемого типа задач. Доказательства приводимых ниже утверждений можно найти в [28, гл. 2].

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие 2.1. *Пусть $Q\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial Q=\bigcup_i\overline{X}_i$ $(i=1,\dots,N_1)$, где X_i — открытые связные в топологии ∂Q $(n-1)$-мерные многообразия класса C^∞, $n\geqslant 2$. При этом в окрестности каждой точки $x^0\in\partial Q\setminus\bigcup_i X_i$ область Q диффеоморфна n-мерному углу раствора меньше 2π и больше 0.*

В частности, $Q \subset \mathbb{R}^n$ может быть ограниченной областью с границей $\partial Q \in C^\infty$, а также цилиндром $(0, d) \times G$ или прямоугольником, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$).

Обозначим через M аддитивную абелеву группу, порожденную множеством $\mathcal{M}$, а через Q_r — открытые связные компоненты множества $Q \setminus \bigcup\limits_{h \in M} (\partial Q + h)$.

Определение 2.1. Множества Q_r мы будем называть *подобластями*, а совокупность $\mathcal{R}$ всевозможных подобластей Q_r $(r = 1, 2, \dots)$ назовем *разбиением области* Q.

Заметим, что множество $\mathcal{R}$ не более, чем счетно.

Разбиение $\mathcal{R}$ естественным образом распадается на классы. Мы будем считать, что подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному и тому же классу, если существует вектор $h \in M$, для которого $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$. Будем обозначать подобласти Q_r через Q_{sl}, где s — номер класса $(s = 1, 2, \dots)$, а l — порядковый номер данной подобласти в s-м классе. Очевидно, каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl} и $N(s) \leqslant ([\operatorname{diam} Q] + 1)^n$.

Введем множество $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K} = \bigcup_{h_1, h_2 \in M} \left\{ \overline{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)]} \right\}.$$

Это множество играет важную роль при изучении гладкости решений. Из определения множества $\mathcal{K}$ вытекают следующие леммы.

Лемма 2.1. *Пусть* $x^0 \in \partial Q \cap \partial Q_{s_1 l_1} \cap \partial Q_{s_2 l_2}$, $(s_1, l_1) \neq (s_2, l_2)$. *Тогда* $x^0 \in \mathcal{K}$.

Лемма 2.2. *Пусть* $x^0 \in \bigcap\limits_i \partial Q_{s_i l_i}$ *и* $(s_i, l_i) \neq (s_j, l_j)$ *при* $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, 3)$. *Тогда* $x^0 \in \mathcal{K}$.

Будем также считать, что всюду далее выполнено следующее условие.

Условие 2.2. *Пусть* $\mu_{n-1}(\mathcal{K} \cap \partial Q) = 0$, *где* $\mu_{n-1}(\cdot)$ — *мера Лебега в* $\mathbb{R}^{n-1}$.

Обозначим через Γ_p компоненты связности открытого (в индуцированной на ∂Q топологии) множества $\partial Q \setminus \mathcal{K}$.

Лемма 2.3. *Если* $(\Gamma_p + h) \cap \overline{Q} \neq \varnothing$ *при некотором* $h \in M$, *то либо* $\Gamma_p + h \subset Q$, *либо существует* $\Gamma_r \subset \partial Q \setminus \mathcal{K}$ *такое, что* $\Gamma_p + h = \Gamma_r$.

В силу леммы 2.3 мы можем следующим образом разбить множество $\{\Gamma_p + h : \Gamma_p + h \subset \overline{Q},$ $p = 1, 2, \dots,$ $h \in M\}$ на классы. Множества $\Gamma_{p_1} + h_1$ и $\Gamma_{p_2} + h_2$ принадлежат одному и тому же классу, если

1. существует $h \in M$ такое, что $\Gamma_{p_1} + h_1 = \Gamma_{p_2} + h_2 + h$;
2. в случае $\Gamma_{p_1} + h_1, \Gamma_{p_2} + h_2 \subset \partial Q$, направления внутренних нормалей к ∂Q в точках $x \in \Gamma_{p_1} + h_1$ и $x - h \in \Gamma_{p_2} + h_2$ совпадают.

Очевидно, множество $\Gamma_p \subset \partial Q$ может принадлежать лишь одному классу, а множество $\Gamma_p + h \subset Q$ — не более, чем двум классам. Будем обозначать множества $\Gamma_p + h$ через Γ_{rj}, где $r = 1, 2, \dots$ — номер класса, j — номер элемента в данном классе $(1 \leqslant j \leqslant J = J(r))$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\Gamma_{r1}, \dots, \Gamma_{rJ_0} \subset Q$, $\Gamma_{r, J_0+1}, \dots, \Gamma_{rJ} \subset \partial Q$ $(0 \leqslant J_0 = J_0(r) < J(r))$.

Лемма 2.4. *Для любого* $\Gamma_{rj} \subset \partial Q$ *существует подобласть* Q_{sl} *такая, что* $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{sl}$, *и при этом* $\Gamma_{rj} \cap \partial Q_{s_1 l_1} = \varnothing$, *если* $(s_1, l_1) \neq (s, l)$.

Лемма 2.5. *Для любого* $r = 1, 2, \dots$ *существует единственное* $s = s(r)$ *такое, что* $N(s) = J(r)$, *и при этом подобласти* s*-го класса* Q_{sl} *можно перенумеровать так, что* $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$ $(l = 1, \dots, N(s))$.

Лемма 2.6. *Для любого* $\Gamma_{rj} \subset Q$ *существуют подобласти* $Q_{s_1 l_1}$ *и* $Q_{s_2 l_2}$ *такие, что* $Q_{s_1 l_1} \neq Q_{s_2 l_2}$, $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{s_1 l_1} \cap \partial Q_{s_2 l_2}$, *и при этом* $\Gamma_{rj} \cap \partial Q_{s_3 l_3} = \varnothing$, *если* $(s_3, l_3) \neq (s_1, l_1), (s_2, l_2)$.

Пример 2.1. Рассмотрим случай прямоугольника $Q = (0, 2) \times (0, 1)$, $\mathcal{M} = \{(1, 0)\}$. Разобьем прямоугольник Q на подобласти. В этом примере разбиение $\mathcal{R}$ состоит из одного класса подобластей $Q_1 = Q_{11} = (0, 1) \times (0, 1)$, $Q_2 = Q_{12} = (1, 2) \times (0, 1)$ (см. рис. 1). Легко видеть, что множество $\mathcal{K} = \{(0, 0); (1, 0); (2, 0); (0, 1); (1, 1); (2, 1)\}$.

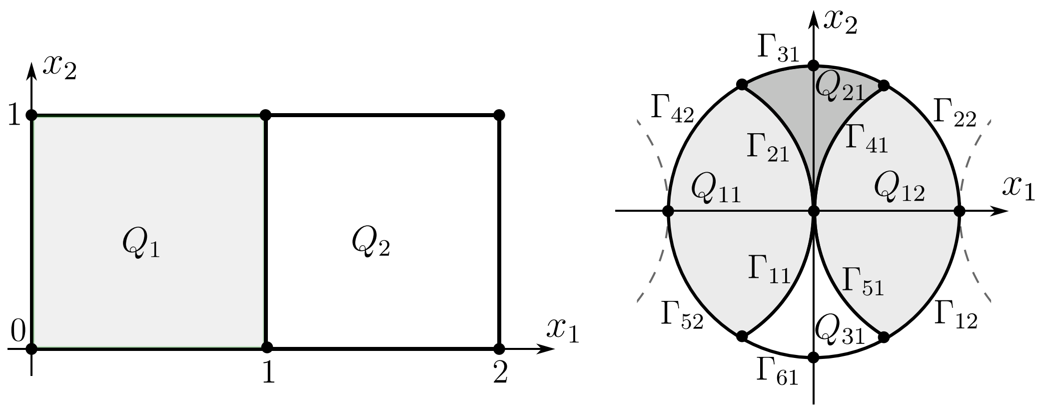


Рис. 1. Область Q и ее разбиения, рассмотренные в примерах 2.1 и 2.2. Элементы множества $\mathcal{K}$ выделены точками.

Пример 2.2. Рассмотрим случай, когда множество Q представляет собой единичный круг $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$, $\mathcal{M} = \{(1,0)\}$. Тогда множество $\mathcal{K}$ состоит из семи точек

$$\mathcal{K} = \{(0,0),\ (1,0),\ (-1,0),\ (-1/2,-\sqrt{3}/2),\ (-1/2,\sqrt{3}/2),\ (1/2,-\sqrt{3}/2),\ (1/2,\sqrt{3}/2)\}.$$

Разбиение области Q и классы границ, а также множество $\mathcal{K}$ представлены на рис. 1.

3. Разностные операторы

В этом разделе мы рассмотрим свойства разностных операторов. Введенные по формуле (1.3), разностные операторы R_{ij} действуют во всем $\mathbb{R}^n$. Чтобы рассмотреть их в области Q, мы ввели линейные операторы I_Q, P_Q, R_{ijQ}.

Лемма 3.1. *Операторы* $R_{ij}\colon L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ *и* $R_{ijQ}\colon L_2(Q) \to L_2(Q)$ *ограничены.*

Далее мы рассмотрим некоторые свойства разностных операторов R_{ijQ} в пространстве $L_2(Q)$. Оказывается, эти свойства тесно связаны со свойствами конечного числа матриц, состоящих из коэффициентов разностного оператора и нулей.

Обозначим через $L_2\left(\bigcup\limits_l Q_{sl}\right)$ подпространство функций в $L_2(Q)$, равных нулю вне $\bigcup\limits_l Q_{sl}$, а через $P_s\colon L_2(Q) \to L_2\left(\bigcup\limits_l Q_{sl}\right)$ — оператор ортогонального проектирования функций из $L_2(Q)$ на $L_2\left(\bigcup\limits_l Q_{sl}\right)$ $(l = 1,\dots,N(s))$. Так как $\mu_n(\partial Q_{sl}) = 0$, из абсолютной непрерывности интеграла Лебега следует, что $L_2(Q) = \bigoplus\limits_s L_2\left(\bigcup\limits_l Q_{sl}\right)$, где $\mu_n(\cdot)$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 3.2. $L_2\left(\bigcup\limits_l Q_{sl}\right)$ — *инвариантное подпространство операторов* R_{ijQ}.

Введем изометрический изоморфизм гильбертовых пространств $U_s\colon L_2\left(\bigcup\limits_l Q_{sl}\right) \to L_2^N(Q_{s1})$, определив вектор-функцию $(U_s u)(x)$ равенством

$$(U_s u)_l(x) = u(x + h_{sl}) \quad (x \in Q_{s1}), \tag{3.1}$$

где $l = 1,\dots,N = N(s)$, h_{sl} таково, что $Q_{s1} + h_{sl} = Q_{sl}$ $(h_{s1} = \bar{0})$, $L_2^N(Q_{s1}) = \prod\limits_l L_2(Q_{sl})$.

Введем матрицы R_{ijs} порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами

$$r_{kl}^{ijs} = \begin{cases} a_{ijh}, & \text{если } h = h_{sl} - h_{sk} \in \mathcal{M}, \\ 0, & \text{если } h = h_{sl} - h_{sk} \notin \mathcal{M}. \end{cases} \tag{3.2}$$

В соответствии с видом разностных операторов R_{ij} матрицы R_{ijs} являются симметричными.

Лемма 3.3. *Операторы* $R_{ijQs}\colon L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$, *определенные по формуле* $R_{ijQs} = U_s R_{ijQ} U_s^{-1}$, *являются операторами умножения на квадратные матрицы* R_{ijs}, *соответственно.*

Замечание 3.1. Поскольку область Q является ограниченной, а матрицы R_{ijs} состоят из конечного множества чисел a_{ijh} и нулей, то множество различных матриц конечно (см. [27]).

Введем блочную матрицу R_s вида $R_s = \|R_{ijs}\|_{i,j=1}^n$.

Условие 3.1. *Будем говорить, что дифференциально-разностное уравнение* (1.1) *удовлетворяет условию сильной эллиптичности, если матрицы* $R_s + R_s^*$ $(s = 1, 2, \dots)$ *положительно определены. Здесь матрица* R_s^* *является сопряженной к* R_s.

Поэтому если уравнение (1.1) удовлетворяет условию сильной эллиптичности, то существует константа $c > 0$ такая, что для всех $s = 1, 2, \dots$ и всех $Y \in \mathbb{C}^{nN(s)}$ справедливо $\mathrm{Re}(R_s Y, Y) \geqslant c(Y, Y)$, где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^{nN(s)}$.

Всюду далее мы будем считать, что дифференциально-разностное уравнение (1.1) удовлетворяет условию сильной эллиптичности.

Определение 3.1. Краевую задачу (1.1)-(1.2) будем называть *второй краевой задачей*, или *задачей Неймана*, для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения.

Обозначим через $W_2^k(Q)$ пространство Соболева комплекснозначных функций, состоящее из функций, принадлежащих $L_2(Q)$ и имеющих все обобщенные производные до k-го порядка из $L_2(Q)$. В пространстве $W_2^k(Q)$ вводится скалярное произведение по формуле

$$(u, v)_{W_2^k(Q)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int\limits_Q D^\alpha u(x) D^\alpha \overline{v} dx,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — вектор с неотрицательными целочисленными координатами, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $D_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Обозначим $W_{2,loc}^k(Q)$ $(k > 0)$ пространство комплекснозначных функций, состоящее из функций, принадлежащих $L_2(Q')$ и имеющих все обобщенные производные до k-го порядка из $L_2(Q')$, где Q' — произвольная внутренняя подобласть области Q, т. е. $Q' \Subset Q$.

Введем пространство $C^k(\overline{Q})$ как множество непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых функций в $\overline{Q}$ с нормой

$$\|u\|_{C^k(\overline{Q})} = \max_{0 \leqslant |\beta| \leqslant k} \sup_{x \in \overline{Q}} |D^\beta u(x)|. \tag{3.3}$$

Введем неограниченный оператор $A_R : L_2(Q) \supset D(A_R) \to L_2(Q)$, действующий по формуле

$$A_R v = -\sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ} v_{x_j})_{x_i},$$

где $D(A_R) = \{v \in W_2^1(Q) : A_R v \in L_2(Q)\}$.

Определение 3.2. Функцию u будем называть *обобщенным решением* краевой задачи (1.1)-(1.2), если $u \in W_2^1(Q)$ и для всех $v \in W_2^1(Q)$

$$\sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ} u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}. \tag{3.4}$$

Используя методы, изложенные в [11, гл. IV, §1], можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть уравнение* (1.1) *удовлетворяет условию сильной эллиптичности. Тогда вторая краевая задача для эллиптического дифференциально-разностного уравнения разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_Q f(x) dx = 0. \tag{3.5}$$

При этом существует единственное обобщенное решение $u(x)$ такое, что $\int\limits_Q u(x)dx = 0$. Всякое другое решение имеет вид $\tilde{u}(x) = u(x) + c$, где c — некоторая константа.

Приведем теперь полученные ранее результаты о гладкости решений, которые понадобятся нам в следующем разделе.

Из работ [27, с. 347] и [14] известно, обобщенное решение сохраняет гладкость в подобластях Q_{sl} $(s = 1, 2, \dots; l = 1, \dots, N(s))$, за исключением окрестности точек множества $\mathcal{K}$.

Теорема 3.2. *Пусть уравнение* (1.1) *удовлетворяет условию сильной эллиптичности и $u(x)$ — обобщенное решение краевой задачи* (1.1)-(1.2) *и $f \in W_2^k(Q)$. Тогда $u \in W_2^{k+2}(Q_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon)$ для каждого $\varepsilon > 0$, где $\mathcal{K}^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, \mathcal{K}) < \varepsilon\}$ $(s = 1, 2 \dots; l = 1, \dots, N(s))$.*

4. Гладкость обобщенных решений на границе соседних подобластей в пространствах Гельдера

Рассмотрим теперь вопрос о гладкости обобщенного решения $u(x)$ краевой задачи (1.1)-(1.2) и сформулируем условия на коэффициенты разностных операторов R_{ij}, при которых обобщенное решение $u(x)$ принадлежит пространству Гельдера $C^{2+\alpha}$ в некоторой окрестности точки, лежащей на границе соседних подобластей, для всех $f \in C^\alpha(\overline{Q})$, удовлетворяющих условию (3.5). Покажем, что, как и в случае первой краевой задачи для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения (см. [25]), гладкость обобщенного решения может нарушаться в Q.

Пусть дифференциально-разностный оператор A_R сильно эллиптический, и пусть область Q удовлетворяет условиям 2.1 и 2.2. Предположим, что $u(x)$ — обобщенное решение краевой задачи (1.1)-(1.2), где $f \in C^\alpha(\overline{Q})$.

Зафиксируем $s = p$ и рассмотрим точку $y^1 \in Q \bigcap (\partial Q_{p1} \setminus \mathcal{K})$. Обозначим $y^l = y^1 + h_{pl} \in \partial Q_{pl} \setminus \mathcal{K}$ $(l = 1, \dots, N(p))$, где $Q_{pl} = Q_{p1} + h_{pl}$. Будем предполагать, что $y^l \in Q$ $(l = 1, \dots, J_0)$, $y^l \in \partial Q$ $(l = J_0 + 1, \dots, N(p))$.

В силу леммы 2.6 существует единственная подобласть $Q_{qj} \neq Q_{p1}$ такая, что $y^1 \in \partial Q_{qj}$. Перенумеруем подобласти q-го класса так, чтобы $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{ql}$ $(l = 1, \dots, J_0)$.

Введем точки $z^l \in \overline{Q}$ $(l = 1, \dots, N(q))$, так, что $z^l = z^j - h_{qj} + h_{ql} \in \partial Q_{ql} \setminus \mathcal{K}$ $(l = 1, \dots, N(q))$, $z^j = y^1$. Не ограничивая общности, будем предполагать, что $y^l = z^l \in Q$ $(l = 1, \dots, J_0)$, $z^l \in \partial Q$ $(l = J_0 + 1, \dots, N(q))$.

В силу лемм 2.1, 2.2, мы можем выбрать $\delta > 0$ настолько малым, чтобы выполнялись следующие условия:

- $\delta < \min\limits_{s,l} \min\{\rho(x^{sl}, \mathcal{K}), 1/2\}$;
- множества $\partial Q_{sl} \bigcap B_\delta(x^{sl})$ связные и принадлежат классу C^∞ $(l = 1, \dots, N(s); s = p, q)$;
- $B_\delta(x^{sl}) \subset Q$, $B_\delta(x^{sl}) \bigcap Q_{s_1 l_1} = \varnothing$ $(s = p, q; l = 1, \dots, J_0; (s_1, l_1) \neq (s, l))$;
- $B_\delta(x^{sl}) \bigcap Q = B_\delta(x^{sl}) \bigcap Q_{sl}$ $(s = p, q; l = J_0 + 1, \dots, N(s))$;
- $x^{pl} = y^l$, $x^{ql} = z^l$.

Не ограничивая общности, будем считать, что $y^1 = 0$, а уравнение поверхности $\gamma = \Gamma_{p1} \bigcap B_\delta(0)$ имеет вид $x_n = 0$. В противном случае можно применить стандартную процедуру распрямления границы (см., например, [11, теорема 4, §2, гл. 4]).

Положим $Q_{p1} \bigcap B_\delta(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \delta, x_n < 0\}$, $\partial Q_{p1} \bigcap B_\delta(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \delta, x_n = 0\}$.

Поскольку функция $u(x)$ является обобщенным решением задачи (1.1)-(1.2), то для всех $v \in \dot{C}^\infty(B_\delta(y^l))$ $(l = 1, \dots, J_0)$ справедливо интегральное тождество

$$- \int\limits_{B_\delta(y^l)} \sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ} u_{x_j})_{x_i} \bar{v} dx = \int\limits_{B_\delta(y^l)} f \bar{v} dx. \tag{4.1}$$

В силу соотношений (3.1) и леммы 3.3, интегральное тождество (3.4) можно записать в виде

$$- \int\limits_{B_\delta(0)} \sum_{i,j=1}^n w_{x_i}^{ijl} \bar{\varphi} dx = \int\limits_{B_\delta(0)} f^l \bar{\varphi} dx \quad (l = 1, \dots, J_0), \tag{4.2}$$

где $w^{ijl}(x) = (R_{ijs}U_sP_su_{x_j})_l(x)$, $f^l(x) = (U_sP_sf)_l(x)$ для $x \in \omega_s = Q_{s1}\bigcap B_\delta(0)$ $(s = p, q)$, $\varphi \in \dot{C}^\infty(B_\delta(0))$ — произвольная функция.

Без ограничения общности положим $\mu(p) = 1$, $\mu(q) = 2$.

В силу теоремы 3.2 о гладкости обобщенных решений $w^{ijl} \in W_2^1(\omega_s)$. Поэтому, интегрируя по частям левую часть тождества (4.2), получим

$$-\int\limits_{B_\delta(0)}\sum_{i,j=1}^n w^{ijl}_{x_i}\bar{\varphi}dx = -\sum_{s=p,q}\sum_{j=1}^n(-1)^{\mu(s)}\int\limits_{\gamma_s} w^{njl}|_{\gamma_s}\,\bar{\varphi}|_{\gamma_s}dx' + \sum_{s=p,q}\sum_{i,j=1}^n\int\limits_{\omega_s} w^{ijl}\bar{\varphi}_{x_i}dx, \tag{4.3}$$

где $\gamma = \gamma_s = \{x \in \partial Q_{s1} : |x| < \delta\}$; $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $x = (x', 0)$; $w^{njl}|_{\gamma_s}$ — след функции w^{njl}, определенной в ω_s $(s = p, q)$.

С другой стороны, из интегрального тождества (3.4) следует, что

$$\sum_{i,j=1}^n\int\limits_{B_\delta(0)} w^{ijl}\bar{\varphi}_{x_i}dx = \int\limits_{B_\delta(0)} f^l\bar{\varphi}dx \quad (l = 1, \dots, J_0) \tag{4.4}$$

для любой функции $\varphi \in \dot{C}^\infty(B_\delta(0))$.

Из (4.2)–(4.4), поскольку φ — произвольная функция, получим, что обобщенное решение задачи (1.1)-(1.2) удовлетворяет условиям

$$\sum_s\sum_j(-1)^{\mu(s)+1}w^{njl}|_{\gamma_{ml}} = 0 \quad (m = 1, 2; l = 1, \dots, J_0), \tag{4.5}$$

где $\gamma_{1l} = \partial Q_{pl}\bigcap B_{2\delta}(x^{pl})$, $\gamma_{2l} = \partial Q_{ql}\bigcap B_{2\delta}(x^{ql})$. Заметим, что числа $N(p) = N_1$ и $N(q) = N_2$ не могут одновременно равняться J_0. Для определенности будем считать, что $N(q) \neq J_0$.

Из теоремы 3.2 при $k = 0$ следует, что обобщенное решение $u(x)$ удовлетворяет

$$\left.\left(\sum_{i,j=1}^n R_{ijQ}u_{x_j}\cos(\nu, x_i)\right)\right|_{\partial Q\setminus\mathcal{K}^\varepsilon} = 0.$$

Доказательство этого следствия можно найти в [20]. Отсюда получим, что на γ_{ml} $(m = 1, 2; l = J_0 + 1, \dots, N(s))$ функция $u(x)$ удовлетворяет краевому условию

$$\sum_{j=1}^n(-1)^{\mu(s)+1}R_{njQ}u_{x_j} = 0 \quad (x \in \gamma_{ml}; l = J_0 + 1, \dots, N_m, m = 1, 2). \tag{4.6}$$

Введем матрицы A_{ijs}, полученные из R_{ijs} вычеркиванием последних $N(s) - J_0$ строк; матрицы B_{ijs}, полученные из R_{ijs} вычеркиванием первых J_0 строк $(i, j = 1, \dots, n)$. Рассмотрим соответствующие им матрицы со штрихами, построенные следующим образом: матрицы A'_{ijs}, B'_{ijs} получены из матриц A_{ijs}, B_{ijs}, соответственно, вычеркиванием последних $N(s) - J_0$ столбцов; матрицы A''_{ijs}, B''_{ijs} получены из матриц A_{ijs}, B_{ijs}, соответственно, вычеркиванием первых J_0 столбцов.

Поясним, что матрица A'_{ijs} соответствует действию разностного оператора R_{ijQ}, отображающего точку x^{sk} в точку x^{sl} $(k, l = 1, \dots, J_0)$, т. е. внутренняя точка переходит во внутреннюю. В свою очередь, матрица A''_{ijs} соответствует действию разностного оператора R_{ijQ}, отображающего точку x^{sk} в точку x^{sl} $(k = 1, \dots, J_0,\ l = J_0 + 1, \dots, N(s))$, т. е. внутренняя точка переходит в точку, лежащую на границе. Аналогично, матрица B'_{ijs} соответствует отображению точки x^{sk} в точку x^{sl} $(k = J_0 + 1, \dots, N(s),\ l = 1, \dots, J_0,)$, т. е. точка, лежащая на границе ∂Q, переходит во внутреннюю. Матрица B''_{ijs} соответствует действию разностного оператора R_{ijQ}, отображающего точку x^{sk} в точку x^{sl} $(k = J_0 + 1, \dots, N(s),\ l = J_0 + 1, \dots, N(s))$, т. е. граничная точка переходит в точку, также лежащую на границе:

$$R_{ijs} = \begin{pmatrix} A'_{ijs} & A''_{ijs} \\ B'_{ijs} & B''_{ijs} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} r_{ijs}^{11} & \dots & r_{ijs}^{1J_0} & r_{ijs}^{1J_0+1} & \dots & r_{ijs}^{1N(s)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{ijs}^{J_01} & \dots & r_{ijs}^{J_0J_0} & r_{ijs}^{J_0J_0+1} & \dots & r_{ijs}^{J_0N(s)} \\ \hline r_{ijs}^{J_0+1,1} & \dots & r_{ijs}^{J_0+1,J_0} & r_{ijs}^{J_0+1,J_0+1} & \dots & r_{ijs}^{J_0+1,N(s)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{ijs}^{N(s)1} & \dots & r_{ijs}^{N(s)J_0} & r_{ijs}^{N(s)J_0+1} & \dots & r_{ijs}^{N(s)N(s)} \end{array}\right).$$

Заметим, что по построению

$$A'_{ijp} = A'_{ijq} \quad (j = 1, \dots, n). \tag{4.7}$$

Аналогичным образом введем вектор-функции $V_s = (U_s P_s u)|_\gamma$, $W_{js} = (U_s P_s u)_{x_j}|_\gamma$, $Y_{ijs} = (U_s P_s u)_{x_i x_j}|_\gamma$ $(i, j = 1, \dots, n)$ и соответствующие им векторы V'_s, W'_{js}, Y'_{ijs} размерности J_0, полученные вычеркиванием из V_s, W_{js}, Y_{ijs}, соответственно, последних $N(s) - J_0$ элементов, и векторы V''_s, W''_{js}, Y''_{ijs} размерности $N(s) - J_0$, полученные вычеркиванием из V_s, W_{js}, Y_{ijs}, соответственно, первых J_0 элементов:

$$V_s = \begin{pmatrix} V'_s \\ V''_s \end{pmatrix}, \quad W_{is} = \begin{pmatrix} W'_{is} \\ W''_{is} \end{pmatrix}, \quad Y_{ijs} = \begin{pmatrix} Y'_{ijs} \\ Y''_{ijs} \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Тогда с помощью введенных матриц и векторов условия (4.5), (4.6) можно записать в виде

$$\sum_{s=p,q} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{\mu(s)+1} A_{njs} W_{js} = 0, \tag{4.9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} B_{njs} W_{js} = 0. \tag{4.10}$$

Из теоремы 3.2 о внутренней гладкости обобщенного решения следует, что

$$V'_p = V'_q, \quad W'_{jp} = W'_{jq} \quad (j = 1, \dots, n-1). \tag{4.11}$$

Введем вектор-функцию $Z = \begin{pmatrix} W'_{np} - W'_{nq} \\ W''_{np} \end{pmatrix}$. Тогда в силу (4.7)–(4.11), вектор-функция Z удовлетворяет системе уравнений

$$A_{nnp} Z = A''_{nnq} W''_{nq} - \sum_{j=1}^{n-1} (A''_{njp} W''_{jp} - A''_{njq} W''_{jq}), \tag{4.12}$$

$$B_{nnp} Z = -B'_{nnp} W'_{nq} - \sum_{j=1}^{n-1} B_{njp} W_{jp}. \tag{4.13}$$

При этом справедливо равенство

$$B''_{nnq} W''_{nq} = -B'_{nnq} W'_{nq} - \sum_{j=1}^{n-1} B_{njq} W_{jq}. \tag{4.14}$$

Из условия сильной эллиптичности следует, что R_{nnq} положительно определена, а все ее главные миноры положительны. Поэтому существует обратная матрица $(B''_{nnq})^{-1}$, которую мы обозначим через B^{-1}. Тогда из (4.14) вытекает

$$W''_{nq} = -B^{-1} B'_{nnq} W'_{nq} - \sum_{j=1}^{n-1} B^{-1} B_{njq} W_{njq}. \tag{4.15}$$

Подставляя (4.15) в (4.12), получим

$$A_{nnp}Z=-A''_{nnq}B^{-1}B'_{nnq}W'_{nq}-\sum_{j=1}^{n-1}\left\{A''_{nnq}B^{-1}B'_{njq}W'_{jq}+A''_{njp}W''_{jp}+(A''_{nnq}B^{-1}B''_{njq}-A'_{njq})W''_{jq}\right\}. \tag{4.16}$$

Введем вектор-функции H^j размера $m(j)$ $(j=1,\dots,n)$ $H^j=\begin{pmatrix} W'_{jp}\\ W''_{jp}\\ W''_{jq}\end{pmatrix}$, $H^n=W'_{nq}$, где $m(n)=J_0$, $m(j)=N(p)+N(q)-J_0$ $(j=1,\dots,n-1)$; вектор-функцию $\mathbf{V}=\begin{pmatrix} V''_p\\ V''_q\end{pmatrix}$ размерности $N(p)+N(q)-2J_0$, а также блочные матрицы

$$T^j=\begin{pmatrix} A''_{nnq}B^{-1}B'_{njq} & A''_{njp} & A''_{njq}B^{-1}B''_{njq}-A''_{njq}\\ B'_{njp} & B''_{njp} & 0\end{pmatrix},\quad T^n=\begin{pmatrix} A''_{nnq}B^{-1}B'_{nnq}\\ B'_{nnp}\end{pmatrix},$$

$$G^j=\begin{pmatrix} B^{-1}B'_{njq} & 0 & B^{-1}B''_{njq}\end{pmatrix},\quad G^n=B^{-1}B'_{nnq}\quad (j=1,\dots,n-1).$$

Тогда в силу (4.11) уравнения (4.13), (4.16) и (4.15) можно записать в виде

$$R_{nnp}Z=-\sum_{j=1}^{n}T^jH^j, \tag{4.17}$$

$$W''_{nq}=-\sum_{j=1}^{n}G^jH^j. \tag{4.18}$$

Обозначим через Λ^j_{lk} матрицы, полученные из R_{nnp} заменой l-го столбца k-м столбцом матриц T^j. Заметим, что используя введенные обозначения, мы можем сформулировать результат, доказанный в [20], об условиях сохранения гладкости обобщенных решений краевой задачи (1.1)-(1.2) на границе соседних подобластей в пространствах Соболева для любой $f\in L_2(Q)$.

Теорема 4.1. *Для данного l $(1\leqslant l\leqslant J_0)$ обобщенное решение краевой задачи* (1.1)-(1.2) *$u(x)$ принадлежит $W_2^2(B_\delta(y^l))$ для любой $f\in L_2(Q)$, удовлетворяющей условию* (3.5)*, в том и только в том случае, когда*

$$\det\Lambda^j_{lk}=0\quad (j=1,\dots,n;k=1,\dots,m(j)). \tag{4.19}$$

Развивая использованный в [8, §15] метод доказательства теоремы 4.1 и используя введенные вектор-функции и матрицы, далее мы сформулируем условия на принадлежность обобщенного решения рассматриваемой задачи с правой частью $f\in C^\alpha(\overline{Q})$ пространству $C^{2+\alpha}(B_\delta(y^l))$.

Будем считать, что $f\in C^\alpha(\overline{Q})$ и выполнено следующее условие.

Условие 4.1. *Пусть $f\in C^\alpha(\overline{Q})$. Пусть $u(x)\in W_2^1(Q)$ — обобщенное решение краевой задачи* (1.1)-(1.2)*. Тогда $u\in C^{2+\alpha}(\overline{Q}_{sl}\setminus\mathcal{K}^\varepsilon)$ для любого $\varepsilon>0$ $(s=1,2,\dots;l=1,\dots,N(s))$.*

Заметим, что это условие не является искусственным: используя теорему 3.2 и теоремы вложения, можно гарантировать соответствующую гладкость в подобластях за счет повышения гладкости правой части в соболевских пространствах.

При $f\in C^\alpha(\overline{Q})$ обобщенное решение задачи (1.1)-(1.2) удовлетворяет условию

$$\sum_s\sum_{i,j=1}^{n}(-1)^{\mu(s)+1}R_{ijQ}u_{x_ix_j}|_{\gamma+h_{sl}}=0\quad (l=1,\dots,J_0). \tag{4.20}$$

Используя введенные выше обозначения, равенство (4.20) можно переписать в виде

$$\sum_s\sum_{i,j=1}^{n}(-1)^{\mu(s)+1}(A'_{ijs}Y'_{ijs}+A''_{ijs}Y''_{ijs})=0, \tag{4.21}$$

$$\sum_s\sum_{i,j=1}^{n}(-1)^{\mu(s)+1}(B'_{ijs}Y'_{ijs}+B''_{ijs}Y''_{ijs})=0. \tag{4.22}$$

В силу (4.7) представим (4.21) в виде

$$\sum_{i,j=1}^{n} A'_{ijp}(Y'_{ijp} - Y'_{ijq}) = \sum_s \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{\mu(s)} A''_{ijs} Y''_{ijs}.$$

Выразив из последнего равенства следы вторых нормальных производных на внутренних кусках границы и используя продифференцированные соотношения (4.17), (4.18), получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
A'_{nnp}(Y'_{nnp} - Y'_{nnq}) &= -\sum_{i+j<2n} A'_{ijp}(Y'_{ijp} - Y'_{ijq}) + \sum_s \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{\mu(s)} A''_{ijs} Y''_{ijs} = \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n-1} A'_{ijp}(Y'_{ijp} - Y'_{ijq}) - \sum_{i=1}^{n-1}(A'_{inp} + A'_{nip})(W'_{np} - W'_{nq})_{x_i} + \sum_s \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{\mu(s)} A''_{ijs} Y''_{ijs} = \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n-1} A'_{ijp}(Y'_{ijp} - Y'_{ijq}) - \sum_{i=1}^{n-1}(A_{inp} + A_{nip}) Z_{x_i} + \sum_{i,j=1}^{n-1} (A''_{ijq} Y''_{ijq} - A''_{ijp} Y''_{ijp}) - \\
&- \sum_{i,j=1}^{n-1} (A''_{inq} + A''_{niq}) G^j \begin{pmatrix} Y'_{ijp} \\ Y''_{ijp} \\ Y''_{ijq} \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^{n-1}(A''_{inp} + A''_{nip}) G^n Y'_{inq} + \sum_s (-1)^{\mu(s)} A''_{nns} Y''_{nns}.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

В силу неравенства $\det R_{nnp} \neq 0$ из (4.17) можно выразить Z и переписать (4.23) в виде

$$\begin{aligned}
A'_{nnp}(Y'_{nnp} - Y'_{nnq}) = -\sum_{i,j=1}^{n-1} A'_{ijp}(Y'_{ijp} - Y'_{ijq}) + \sum_{i,j=1}^{n-1} (A''_{ijq} Y''_{ijq} - A''_{ijp} Y''_{ijp}) + \sum_{i,j=1}^{n-1} \mathcal{H}_A^{ij} \begin{pmatrix} Y'_{ijp} \\ Y''_{ijp} \\ Y''_{ijq} \end{pmatrix} + \\
+ \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{H}_A^{in} Y'_{niq} + \sum_s \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{\mu(s)} A''_{ijs} Y''_{ijs},
\end{aligned} \tag{4.24}$$

где $\mathcal{H}_A^{ij} = (A_{inp} + A_{nip}) R_{nnp}^{-1} T^j - (A''_{inq} + A''_{niq}) G^j$, $(i, j = 1, \ldots, n-1)$, $\mathcal{H}_A^{in} = (A_{inp} + A_{nip}) R_{nnp}^{-1} T^n - (A''_{inq} + A''_{niq}) G^n$, $(i = 1, \ldots, n-1)$.

Заметим, что если выполнены условия теоремы 4.1, то $Y'_{ijp} = Y'_{ijq}$ $(i, j = 1, \ldots, n-1)$. Тогда, преобразуя последнее слагаемое в (4.24), мы получим выражение

$$A_{nnp}\Phi = \sum_{i,j=1}^{n-1} \tilde{\mathcal{H}}_A^{ij} \begin{pmatrix} Y'_{ijp} \\ Y''_{ijp} \\ Y''_{ijq} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{H}_A^{in} Y'_{niq} + A''_{nnq} Y''_{nnq}, \tag{4.25}$$

которое аналогично по своей структуре равенству (4.12). Здесь $\Phi = \begin{pmatrix} Y'_{nnp} - Y'_{nnq} \\ Y''_{nnp} \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathcal{H}}_A^{ij} = \mathcal{H}_A^{ij} + \begin{pmatrix} 0 & -A''_{ijp} & A''_{ijq} \end{pmatrix}$.

Преобразуем теперь (4.22), умножив B_{nnp} на Φ, предполагая выполненными условия теоремы 4.1 и используя продифференцированное уравнение (4.18); получим

$$\begin{aligned}
B_{nnp}\Phi = (B'_{nnq} - B'_{nnp}) Y'_{nnq} + B''_{nnq} Y''_{nnq} - \sum_s \sum_{i,j=1}^{n-1} (-1)^{\mu(s)+1} B_{ijs} Y_{ijs} - \\
- \sum_{i=1}^{n-1} (B_{inp} Y_{inp} - B_{inq} Y_{inq} + B_{nip} Y_{nip} - B_{niq} Y_{niq}) = (B'_{nnq} - B'_{nnp}) Y'_{nnq} + B''_{nnq} Y''_{nnq} - \sum_{i,j=1}^{n-1} (B'_{ijp} - B'_{ijq}) Y'_{ijp} - \\
- \sum_s \sum_{i,j=1}^{n-1} (-1)^{\mu(s)+1} B''_{ijs} Y''_{ijs} - \sum_s \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{\mu(s)+1} (B_{ins} + B_{nis}) Y_{ins} = (B'_{nnq} - B'_{nnp}) Y'_{nnq} +
\end{aligned}$$

$$+ B''_{nnq}Y''_{nnq} - \sum_{i=1}^{n-1}(B_{inp} + B_{nip})Y_{inp} + \sum_{i,j=1}^{n-1} \mathcal{H}_B^{ij} \begin{pmatrix} Y'_{ijp} \\ Y''_{ijp} \\ Y''_{ijq} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{H}_B^{in} Y'_{niq}, \quad (4.26)$$

что аналогично по своей структуре равенству (4.13). Здесь $\mathcal{H}_B^{ij} = -\begin{pmatrix} B'_{ijp} - B'_{ijq} & B''_{ijp} & -B''_{ijq} \end{pmatrix} - (B''_{inq} + B''_{niq})G^j \quad (i,j = 1,\ldots,n-1)$, $\mathcal{H}_B^{in} = (B'_{inq} - B'_{niq}) - (B''_{inq} + B''_{niq})G^n$ $(i = 1,\ldots,n-1)$.

Используя (4.25) и (4.26), мы получим, что (4.20) эквивалентно следующему равенству:

$$R_{nnp}\Phi = \sum_{i,j=1}^{n-1} \mathcal{H}^{ij} \begin{pmatrix} Y'_{ijp} \\ Y''_{ijp} \\ Y''_{ijq} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{H}^{in} Y'_{niq} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ B'_{nnq} - B'_{nnp} \end{pmatrix} Y'_{nnq} + \begin{pmatrix} A''_{nnq} \\ B''_{nnq} \end{pmatrix} Y''_{nnq} - \sum_{i=1}^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ B_{inp} + B_{nip} \end{pmatrix} Y_{inp} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n-1} \mathcal{H}^{ij} \begin{pmatrix} Y'_{ijp} \\ Y''_{ijp} \\ Y''_{ijq} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{H}^{in} Y'_{niq} + \mathcal{B}Y_{nnq} - \sum_{i=1}^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ B_{inp} + B_{nip} \end{pmatrix} Y_{inp}, \quad (4.27)$$

где $\mathcal{H}^{ij} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{H}}_A^{ij} \\ \mathcal{H}_B^{ij} \end{pmatrix}$, $\mathcal{H}^{in} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_A^{in} \\ \mathcal{H}_B^{in} \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & A''_{nnq} \\ B'_{nnq} - B'_{nnp} & B''_{nnq} \end{pmatrix}$.

Введем вектор-функции $\mathbf{Y}^{ij}$ размера $m(i,j)$ $(i = 1,\ldots,n-1; j = 1,\ldots,n)$:

$$\mathbf{Y}^{ij} = \begin{pmatrix} Y'_{ijp} \\ Y''_{ijp} \\ Y''_{ijq} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}^{in} = Y'_{niq}, \quad \mathbf{W}^i = \begin{pmatrix} W''_{ip} \\ W''_{iq} \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Тогда аналогично выражению (4.17) равенство (4.27) можно записать в виде

$$R_{nnp}\Phi = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n} \mathcal{H}^{ij}\mathbf{Y}^{ij} + \mathcal{B}Y_{nnq} - \sum_{i=1}^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ B_{inp} + B_{nip} \end{pmatrix} Y_{inp}. \quad (4.29)$$

Приведенные выше громоздкие выкладки позволили привести (4.20) к виду (4.29), где в левой части стоит невырожденная матрица, умноженная на вектор-функцию, первыми J_0 элементами которой является разность следов вторых нормальных производных обобщенного решения на общей границе соседних подобластей. В случае выполнения условий теоремы 4.1 правая часть (4.29) представлена в виде, аналогичном по своей структуре (4.17). Тогда для того, чтобы сформулировать критерий гладкости обобщенных решений задачи (1.1)-(1.2) на границе соседних подобластей в терминах алгебраических условий, аналогичных (4.19), введем следующие обозначения:

- матрицы α_{lk}^{ij}, полученные из R_{nnp} заменой l-го столбца k-м столбцом матрицы $\mathcal{H}^{ij}$ $(i = 1,\ldots,n-1;\ j = 1,\ldots,n;\ l = 1,\ldots,J_0;\ k = 1,\ldots,m(j))$;
- матрицы θ_{lk}^i, полученные из R_{nnp} заменой l-го столбца k-м столбцом матрицы $\begin{pmatrix} 0 \\ B_{inp} + B_{nip} \end{pmatrix}$ $(i = 1,\ldots,n-1; l = 1,\ldots,J_0; k = 1,\ldots,N(p))$;
- матрицы ψ_{lk}, полученные из R_{nnp} заменой l-го столбца k-м столбцом матрицы $\mathcal{B}$ $(l = 1,\ldots,J_0;$ $k = 1,\ldots,N(q))$;
- $\alpha^{ij} = \|\det \alpha_{lk}^{ij}/\Delta\|$ $(i = 1,\ldots,n-1; j = 1,\ldots,n; l = 1,\ldots,J_0; k = 1,\ldots,m(j))$;
- $\psi = \|\det \psi_{lk}/\Delta\|$ $(l = 1,\ldots,J_0; k = 1,\ldots,N(q))$;
- $\theta^i = \|\det \theta_{lk}^i/\Delta\|$ $(i = 1,\ldots,n-1; l = 1,\ldots,J_0; k = 1,\ldots,N(p))$;
- $\Delta = \det R_{nnp} \neq 0$ в виду сильной эллиптичности исходного уравнения.

Используя введенные обозначения, мы можем переписать уравнение (4.29) следующим образом:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha^{ij}\mathbf{Y}^{ij} \right) + \psi Y_{nnq} - \sum_{i=1}^{n-1} \theta^i Y_{inp}. \quad (4.30)$$

Сформулируем критерий сохранения гладкости обобщенных решений на границе соседних подобластей в пространствах Гельдера.

Теорема 4.2. *Пусть уравнение* (1.1) *сильно эллиптическое. Пусть обобщенное решение* $u(x)$ *краевой задачи* (1.1)-(1.2) *удовлетворяет условию* 4.1. *Тогда для заданного* l $(1 \leqslant l \leqslant J_0)$ *и любой* $f \in C^{\alpha}(\overline{Q})$, *удовлетворяющей условию* (3.5), *обобщенное решение* $u(x)$ *краевой задачи* (1.1)-(1.2) *принадлежит* $C^{2+\alpha}(B_\delta(y^l))$ *в том и только в том случае, когда выполнено* (4.19) *и справедливы равенства*

$$\det \alpha_{lk}^{ij} = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m(j)), \tag{4.31}$$

$$\det \psi_{lk} = 0 \quad (k = 1, \dots, N(q)), \tag{4.32}$$

$$\det \theta_{lk}^{i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1; k = J_0 + 1, \dots, N(p)). \tag{4.33}$$

Доказательство. Необходимость и достаточность условия (4.19), гарантирующего принадлежность обобщенного решения $W_2^2(B_\delta(y^l))$ (см. теорему 4.1), подробно доказаны в [20]. Ниже мы рассмотрим отдельно доказательство достаточности и необходимости условий (4.31)–(4.33).

Достаточность. Пусть для некоторого l $(1 \leqslant l \leqslant J_0)$ выполнены равенства (4.31)–(4.33). Из (4.30) следует, что элемент Φ_l вектора Φ равен нулю, т. е. $u_{x_n x_n}\big|_{\gamma_{pl}} = u_{x_n x_n}\big|_{\gamma_{ql}}$.

Отсюда вытекает, что $u \in C^{2+\alpha}(B_\delta(y^l))$.

Необходимость. Пусть одно из условий (4.31)–(4.33) нарушено. Построим функцию $u \in D(A_R)$ такую, что $A_R u \in C^{\alpha}(\overline{Q})$, но $u \notin C^{2+\alpha}(B_\delta(x^{pl}))$.

Положим

$$u(x) = \begin{cases} \left(U_s^{-1} v\right), & x \in \bigcup\limits_{l} Q_{sl}, s = p, q, \\ 0, & x \in Q \setminus \bigcup\limits_{s,l} Q_{sl}, s = p, q, \end{cases}$$

где $v(x) = \left(A_s(x') \dfrac{x_n^2}{2} + B_s(x') x_n + C_s(x')\right) \eta(x_n)$ при $x = (x', x_n) \in Q_{s1}$, $A_s(x')$, $B_s(x')$, $C_s(x')$ — гладкие вектор-функции размера $N(s)$ $(s = p, q)$, обращающиеся в нуль при $\|x'\| < 2\varepsilon$; функция $\eta(x_n) \in \dot{C}^{\infty}(\mathbb{R})$, $\eta(x_n) = 1$ при $x_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\eta(x_n) = 0$ при $x \notin (-2\varepsilon, 2\varepsilon)$, где $0 < \varepsilon < \delta/3$.

Здесь и далее мы будем использовать вектор-функции и соответствующие им вектор-функции со штрихами (см. (4.8)).

Тогда очевидно получим, что

$$\begin{gathered} \mathbf{Y}^{ij} = \begin{pmatrix} (C_p'(x'))_{x_i x_j} \\ (C_p''(x'))_{x_i x_j} \\ (C_q''(x'))_{x_i x_j} \end{pmatrix}, \mathbf{Y}^{in} = (B_q'(x'))_{x_i}, \mathbf{W}^i = \begin{pmatrix} (C_p''(x'))_{x_i} \\ (C_q''(x'))_{x_i} \end{pmatrix}, \\ \Phi = \begin{pmatrix} A_p'(x') - A_q'(x') \\ A_p''(x') \end{pmatrix}, \quad Y_{inp} = (B_p(x'))_{x_i}, \quad Y_{nnq} = A_q(x'). \end{gathered} \tag{4.34}$$

Таким образом, равенство (4.30) можно переписать в терминах $A_s(x')$, $B_s(x')$, $C_s(x')$ и их производных следующим образом:

$$\begin{pmatrix} A_p'(x') - A_q'(x') \\ A_p''(x') \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n-1} \alpha^{ij} \begin{pmatrix} (C_p(x'))_{x_i x_j} \\ (C_q''(x'))_{x_i x_j} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\alpha^{in} (B_q')_{x_i} - \theta^i (B_p(x'))_{x_i}\right] + \psi A_q(x'). \tag{4.35}$$

Заметим, что функция $u(x)$ тогда и только тогда принадлежит $W_2^1(Q)$, когда $V_p' = V_q'$, т. е.

$$C_p'(x') = C_q'(x'). \tag{4.36}$$

Аналогично, для того, чтобы $u \in W_2^2(B_\delta(y^l))$, необходимо и достаточно, чтобы, помимо равенства (4.36), выполнялось соотношение

$$B_p'(x') = B_q'(x'). \tag{4.37}$$

Зафиксируем l $(1 \leqslant l \leqslant J_0)$ и введем векторы $b_0 = (e_1, \dots, e_{J_0})$, $b_1 = (e_{J_0}, \dots, e_{J_0 + N(p)})$, $b_2 = (e_{N(p)+1}, \dots, e_{N(p)+N(q)-J_0})$ с элементами $e_k = \delta_{kr}$, где δ_{kr} — символ Кронекера ($\delta_{rr} = 1$, $\delta_{kr} = 0$, если $k \neq r$).

1. Пусть для $k=r$ выполнено $\det\psi_{lr}\neq 0$ $(1\leqslant r\leqslant N(q))$. Положим

$$A'_p(x')=(b_0-(\psi_r)')\xi(x'),\quad A''_p(x')=-(\psi_r)''\xi(x'),$$
$$A'_q(x')=\xi(x')b_0,\quad A''_q(x')=0,$$
$$B_p(x')=0,\quad B_q(x')=0,\quad C_p(x')=0,\quad C_q(x')=0,$$

где ψ_r — r-й столбец матрицы ψ; функция $\xi\in\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, $\xi(x')=1$ при $x'\in\gamma_{p1}\bigcap B_\varepsilon(0)$ и $\xi(x')=0$ при $x'\notin\gamma_{p1}\bigcap B_{2\varepsilon}(0)$.

Легко видеть, что соотношения (4.17), (4.18), (4.35)–(4.37) выполнены, и $u\in D(A_R)$ — обобщенное решение (1.1)-(1.2) при некоторой $f\in C^\alpha(\overline{Q})$. Но при этом

$$u_{x_nx_n}\big|_{\gamma_{pl}}\neq u_{x_nx_n}\big|_{\gamma_{ql}}.$$

Следовательно, $u\notin C^2(B_a(y^l))$.

2. Пусть для $i=t$, $j=u$ и $k=r$ $(t,u=1,\dots,n-1;\ 1\leqslant r\leqslant m(j)=N(p)+N(q)-J_0)$ выполнено $\det\alpha^{ij}_{lr}\neq 0$. Положим

$$A_p(x')=\sum_{i,j=1}^{n-1}\alpha^{ij}_r(x_tx_u\xi)_{x_ix_j}-\sum_{i=1}^{n-1}\theta^i\left(\begin{array}{c}0\\ -\sum\limits_{j=1}^{n-1}(\Lambda^j_r)''(x_tx_u\xi)_{x_ix_j}\end{array}\right),\quad A_q(x')=0,$$

$$B'_p(x')=0,\quad B''_p(x')=-\sum_{j=1}^{n-1}(\Lambda^j_r)''(x_tx_u\xi)_{x_j},$$

$$B'_q(x')=0,\quad B''_q(x')=-\sum_{j=1}^{n-1}G^j_r(x_tx_u\xi)_{x_j}-S\binom{b_1}{b_2}(x_tx_u\xi),$$

$$C_p(x')=\binom{b_0}{b_1}(x_tx_u\xi),\quad C_q(x')=\binom{b_0}{b_2}(x_tx_u\xi),$$

где α^{ij}_r, Λ^j_r и G^j_r — r-е столбцы матриц α^{ij}, Λ^j и G^j, соответственно. Вообще говоря, для l-й компоненты вектора A_p последнее слагаемое в выражении для A_p равно 0 в виду структуры матриц θ^i.

Как и в случае 1, $u\in D(A_R)$ — обобщенное решение (1.1)-(1.2) — при некоторой $f\in C^\alpha(\overline{Q})$ удовлетворяет соотношениям (4.17), (4.18), (4.35)–(4.37). Однако $A_p(x')\neq A_q(x')$, т. е.

$$u_{x_nx_n}\big|_{\gamma_{pl}}\neq u_{x_nx_n}\big|_{\gamma_{ql}}.$$

Следовательно, $u\notin C^2(B_a(y^l))$.

3. Пусть для $i=t$, $j=n$ и $k=r$ $(t=1,\dots,n-1;\ 1\leqslant r\leqslant J_0)$ выполнено $\det\alpha^{in}_{lr}\neq 0$. Положим

$$A_p(x')=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\alpha^{in}_r(x_t\xi)_{x_i}-\theta^i\left(\begin{array}{c}b_0\\ -(\Lambda^n_r)''\end{array}\right)(x_t\xi)_{x_i}\right),\quad A_q(x')=0,$$

$$B'_p(x')=b_0(x_t\xi),\quad B''_p(x')=-(\Lambda^n_r)''(x_t\xi),\quad B'_q(x')=b_0(x_t\xi),\quad B''_q=-G^n_r(x_t\xi),$$
$$C_p(x')=0,\quad C_q(x')=0.$$

По построению, как и ранее, $u\in D(A_R)$ при некоторой $f\in C^\alpha(\overline{Q})$ и справедливы равенства (4.17), (4.18), (4.35)–(4.37), однако $u_{x_nx_n}\big|_{\gamma_{pl}}\neq u_{x_nx_n}\big|_{\gamma_{ql}}$. Следовательно, $u\notin C^2(B_a(y^l))$.

4. Пусть для $i=t$ и $k=r$ $(t=1,\dots,n-1;\ J_0+1\leqslant r\leqslant N(p))$ выполнено $\det\theta^i_{lr}\neq 0$. Используем результат пункта 3 и положим

$$A_p(x')=-\sum_{i=1}^{n-1}\theta^i\left(\begin{array}{c}b_0\\ -(\Lambda^n_r)''\end{array}\right)(x_t\xi)_{x_i},\quad A_q(x')=0,$$

$$B'_p(x')=b_0(x_t\xi),\quad B''_p(x')=-(\Lambda^n_r)''(x_t\xi), B'_q(x')=b_0(x_t\xi),\quad B''_q=-G^n_r(x_t\xi),$$
$$C_p(x')=0,\quad C_q(x')=0.$$

По построению $u\in D(A_R)$ при некоторой $f\in C^\alpha(\overline{Q})$, однако обобщенное решение $u(x)$ не принадлежит $C^2(B_a(y^l))$. □

Случай $N(q) \neq J_0$ **и** $N(p) = J_0$**.** Отдельно рассмотрим случай, когда количество подобластей одного из классов совпадает с числом J_0, т. к. матрицы, используемые в формулировке теоремы о гладкости обобщенных решений на границе подобластей, в этой ситуации меняют свой вид. Напомним, что числа $N(p)$ и $N(q)$ не могут одновременно равняться J_0. Без ограничения общности в рамках доказательства теоремы 4.2 мы считали $N(q) \neq J_0$. Для случая $N(p) = J_0$ рассуждения, аналогичные указанным выше, приводят нас к следующему:

$$W''_{nq} = -B^{-1}B'_{nnq}W'_{nq} - \sum_{j=1}^{n-1} B^{-1}B_{jq}W_{jq} = -\sum_{j=1}^{n} G^j H^j \tag{4.38}$$

$$A'_{nnp}Z = \sum_{j=1}^{n} A''_{njq}W''_{jq} = -A''_{nnq}B^{-1}B'_{nnq}W'_{nq} - \sum_{j=1}^{n-1} A''_{nnq}B^{-1}B_{jq}W_{jq} + \sum_{j=1}^{n-1} A''_{njq}W''_{jq} = -\sum_{j=1}^{n} T^j H^j, \tag{4.39}$$

где

$$Z = (W'_{np} - W'_{nq}), \quad H^j = \begin{pmatrix} W'_{jp} \\ W''_{jq} \end{pmatrix}, \quad H^n = (W'_{nq}), \quad \mathbf{V} = (V''_q),$$
$$T^j = \begin{pmatrix} A''_{nnq}B^{-1}B'_{njq} & A''_{nnq}B^{-1}B''_{njq} - A''_{njq} \end{pmatrix}, \quad T^n = A''_{nnq}B^{-1}B'_{nnq},$$
$$G^j = B^{-1}B_{njq}, \quad G^n = B^{-1}B'_{nnq} \quad (j = 1, \ldots, n-1).$$

Отметим, что критерий сохранения гладкости решения на границе подобластей в пространствах Соболева (теорема 4.1) имеет тот же вид. Однако условия сохранения гладкости в пространствах Гельдера несколько меняются. Так, в виду того, что $N(p) = J_0$, равенство (4.21) примет вид

$$\sum_{i,j=1}^{n} A'_{ijp}(Y'_{ijp} - Y'_{ijq}) = \sum_{i,j=1}^{n} A''_{ijq}Y''_{ijq}.$$

Тогда, повторяя рассуждения, приведенные выше, получим

$$\begin{aligned} A'_{nnp}\Phi &= -\sum_{i+j<2n} A'_{ijp}(Y'_{ijp} - Y'_{ijq}) + \sum_{i,j=1}^{n} A''_{ijq}Y''_{ijq} = \\ &= -\sum_{i=1}^{n-1}(A'_{inp} + A'_{nip})Z_{x_i} - \sum_{i,j=1}^{n-1} A'_{ijp}(Y'_{ijp} - Y'_{ijq}) + \sum_{i=1}^{n-1}(A''_{inq} + A''_{niq})(W''_{nq})_{x_i} + \\ &\qquad + A''_{nnq}Y''_{nnq} + \sum_{i,j=1}^{n-1} A''_{ijq}Y''_{ijq} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n} \mathcal{H}^{ij}\mathbf{Y}^{ij} + \mathcal{B}Y_{nnq}, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{H}^{ij} = (A'_{nip} + A'_{inp})R^{-1}_{nnp}T^j - (A''_{inq} + A''_{niq})G^j + \begin{pmatrix} 0 & A''_{ijq} \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{H}^{in} = (A'_{inp} + A'_{nip})R^{-1}_{nnp}T^n - (A''_{inq} + A''_{niq})G^n,$$
$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & A''_{nnq} \\ B'_{nnq} & B''_{nnq} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}^{ij} = \begin{pmatrix} Y'_{ijp} \\ Y''_{ijq} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}^{in} = Y'_{inq}, \quad \mathbf{W}^i = W''_{iq} \quad (i, j = 1, \ldots, n-1).$$

Используя данное выше определение матриц α^{ij}_{lk}, ψ_{lk}, сформулируем необходимое и достаточное условие гладкости обобщенного решения на границе соседних подобластей в пространствах Гельдера для случая $N(p) = J_0$, $N(q) \neq J_0$.

Теорема 4.3. *Пусть* $N(p) = J_0$, $N(q) \neq J_0$ *и уравнение* (1.1) *— сильно эллиптическое. Пусть обобщенное решение* $u(x)$ *краевой задачи* (1.1)-(1.2) *удовлетворяет условию* 4.1. *Тогда для заданного* l $(1 \leqslant l \leqslant J_0)$ *и любой* $f \in C^\alpha(\overline{Q})$, *удовлетворяющей условию* (3.5)*, обобщенное решение* $u(x)$ *краевой задачи* (1.1)-(1.2) *принадлежит* $C^{2+\alpha}(B_\delta(y^l))$ *в том и только в том случае, когда выполнено* (4.19) *и справедливы равенства*

$$\det \alpha^{ij}_{lk} = 0, \quad (i = 1, \ldots, n-1; j = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, m(j)),$$
$$\det \psi_{lk} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1; k = 1, \ldots, N(q) - J_0).$$

Доказательство теоремы 4.3 проводится аналогично доказательству теоремы 4.2.

Рассмотрим примеры сохранения и нарушения гладкости обобщенных решений на границе соседних подобластей в пространствах Гельдера.

Как показывает следующий пример, для некоторых задач выполнение условий теоремы 4.1 о гладкости обобщенных решений в пространстве Соболева гарантирует гладкость решений в гельдеровских пространствах (если решение обладает необходимой гладкостью внутри подобластей).

Пример 4.1. Рассмотрим краевую задачу

$$-(R_{11Q}u_{x_1})_{x_1} - (R_{22Q}u_{x_2})_{x_2} = f(x) \qquad (x \in Q)\,, \tag{4.40}$$

$$\sum_{i=1}^{2} R_{iiQ}u_{x_i}\cos(\nu, x_i) = 0 \qquad (x \in \partial Q), \tag{4.41}$$

где $Q = (0, 2+d) \times (0,1)$, $0 < d < 1$,

$$R_{11}u = R_{22}u = u(x_1, x_2) + \gamma(u(x_1+1, x_2) + u(x_1-1, x_2)) + \vartheta(u(x_1+2, x_2) + u(x_1-2, x_2)).$$

Разбиение области $Q = (0, 2+d)\times(0,1)$, $0 < d < 1$ под действием сдвигов из $\mathcal{M} = \{(0,0), (\pm1, 0), (\pm2, 0)\}$ состоит из двух классов подобластей $Q_{ql} = (l-1, l-1+d) \times (0,1)$ $(l = 1,2,3 = N(q))$ и $Q_{pl} = (l-1+d, l) \times (0,1)$ $(l = 1, 2 = N(p))$, $J_0 = 2$.

Рассмотрим вопрос сохранения гладкости на границе подобластей Q_{11} и Q_{21}, т. е. $l = 1$. Таким образом, матрицы R_q и R_p примут вид

$$R_q = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & \vartheta & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ \vartheta & \gamma & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma & \vartheta \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \vartheta & \gamma & 1 \end{pmatrix}, \quad R_p = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & \gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Для сильной эллиптичности задачи (4.40)-(4.41) γ и ϑ должны быть такими, чтобы матрицы R_p и R_q были положительно определенными. Будем считать это условие выполненным. Тогда согласно теореме 3.1 эта задача разрешима для $f \in L_2(Q)$, удовлетворяющей условию (3.5) разрешимости задачи Неймана. Пусть $u \in W_2^1(Q)$ — обобщенное решение рассматриваемой задачи.

Согласно теореме 4.1, обобщенное решение $u(x)$ краевой задачи (4.40)-(4.41) тогда и только тогда принадлежит $W_2^2(B_\delta(y^l))$, когда каждая из матриц

$$\Lambda_{11}^1 = \Lambda_{12}^1 = \begin{pmatrix} \vartheta^2 & \gamma \\ \gamma\vartheta & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{11}^2 = \Lambda_{12}^2 = \Lambda_{131}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

является вырожденной, т. е. выполнены равенства

$$\vartheta^2 - \gamma^2\vartheta = 0. \tag{4.42}$$

Легко видеть, что $\vartheta = \gamma^2$ гарантирует $u \in W_2^2(B_\delta(y^l))$.

С другой стороны, для того, чтобы обобщенное решение $u(x)$, удовлетворяющее условию 4.1, принадлежало $C^{2+\alpha}(B_\delta(y^l))$ для любой функции $f \in C^\alpha(\overline{Q})$, необходимо и достаточно, чтобы, помимо выполнения (4.42), был нулевым определитель каждой из матриц

$$\alpha_{11}^{21} = \alpha_{12}^{21} = \alpha_{11}^{22} = \alpha_{12}^{22} = \psi_{11} = \psi_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{13}^{22} = \psi_{13} = \begin{pmatrix} \vartheta & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.43}$$

Подставив $\vartheta = \gamma^2$ в (4.43), получим, что все матрицы (4.43) вырожденные.

Таким образом, если в задаче (4.40)-(4.41) коэффициенты разностных операторов удовлетворяют соотношению $\vartheta = \gamma^2$, то для обобщенного решения этой задачи, удовлетворяющего условию 4.1, гладкость на границе подобластей Q_{11} и Q_{21} в шкале пространств Гельдера автоматически следует из гладкости $u \in W_2^2(B_\delta(y^l))$.

На следующем примере покажем, что условия гладкости обобщенного решения краевой задачи (1.1)-(1.2) в соболевских и гельдеровских пространствах, вообще говоря, могут не совпадать.

Пример 4.2. Рассмотрим краевую задачу

$$-(R_{11Q}u_{x_1})_{x_1} - (R_{12Q}u_{x_2})_{x_1} - (R_{21Q}u_{x_1})_{x_2} - (R_{22Q}u_{x_2})_{x_2} = f(x) \qquad (x \in Q)\,, \tag{4.44}$$

$$\sum_{i,j=1}^{2} R_{ijQ}u_{x_j}\cos(\nu, x_i) = 0 \qquad (x \in \partial Q), \tag{4.45}$$

где $Q = (0, 2+d) \times (0,1)$, а разностные операторы имеют вид

$$R_{11}u = u(x_1,x_2) + 0{,}5(u(x_1+1,x_2) + u(x_1-1,x_2)) + 0{,}25(u(x_1+2,x_2) + u(x_1-2,x_2)),$$
$$R_{12}u = R_{21}u = 0{,}5u(x_1,x_2) + 0{,}25(u(x_1+1,x_2) + u(x_1-1,x_2)) + 0{,}125(u(x_1+2,x_2) + u(x_1-2,x_2)),$$
$$R_{22}u = u(x_1,x_2) + 0{,}4(u(x_1+1,x_2) + u(x_1-1,x_2)) + 0{,}3(u(x_1+2,x_2) + u(x_1-2,x_2)).$$

Также как и в примере 4.1, разбиение области состоит из двух классов. Рассмотрим вопрос сохранения гладкости на границе подобластей Q_{11} и Q_{21}, т. е. $l = 1$. Матрицы R_q и R_p согласно (3.2) примут вид

$$R_q = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}125 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 1 & 0{,}125 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}125 & 1 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}4 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}125 & 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}4 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_p = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}25 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}25 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что эти матрицы являются положительно определенными и, следовательно, дифференциально-разностное уравнение (4.44) является сильно эллиптическим.

Как и прежде, будем считать, что задача (4.44)-(4.45) разрешима и $u \in W_2^1(Q)$ — обобщенное решение рассматриваемой задачи.

Согласно теореме 4.1, обобщенное решение $u(x)$ краевой задачи (4.44)-(4.45) тогда и только тогда принадлежит $W_2^2(B_\delta(y^l))$, когда каждая из матриц

$$\Lambda_{11}^1 = \begin{pmatrix} \dfrac{r_{11(\pm2,0)}^2}{r_{11(0,0)}} & r_{11(\pm1,0)} \\ \dfrac{r_{11(\pm1,0)}r_{11(\pm2,0)}}{r_{11(0,0)}} & r_{11(0,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0625 & 0{,}5 \\ 0{,}125 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.46}$$

$$\Lambda_{12}^1 = \begin{pmatrix} \dfrac{r_{11(\pm1,0)}r_{11(\pm2,0)}}{r_{11(0,0)}} & r_{11(\pm1,0)} \\ \dfrac{r_{11(\pm1,0)}^2}{r_{11(0,0)}} & r_{11(0,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.47}$$

$$\Lambda_{11}^2 = \begin{pmatrix} \dfrac{r_{11(\pm2,0)}r_{12(\pm2,0)}}{r_{11(0,0)}} & r_{11(\pm1,0)} \\ \dfrac{r_{11(\pm1,0)}r_{12(\pm2,0)}}{r_{11(0,0)}} & r_{11(0,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}03125 & 0{,}5 \\ 0{,}0625 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.48}$$

$$\Lambda_{12}^2 = \begin{pmatrix} \dfrac{r_{11(\pm2,0)}r_{12(\pm1,0)}}{r_{11(0,0)}} & r_{11(\pm1,0)} \\ \dfrac{r_{11(\pm1,0)}r_{12(\pm1,0)}}{r_{11(0,0)}} & r_{11(0,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0625 & 0{,}5 \\ 0{,}125 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.49}$$

$$\Lambda_{13}^2 = \begin{pmatrix} \dfrac{r_{11(\pm2,0)}r_{12(0,0)}}{r_{11(0,0)}} - r_{12(\pm2,0)} & r_{11(\pm1,0)} \\ \dfrac{r_{11(\pm1,0)}r_{12(0,0)}}{r_{11(0,0)}} - r_{12(\pm1,0)} & r_{11(0,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.50}$$

является вырожденной. Из (4.46)–(4.50) видно, что справедливость соотношений

$$r_{12(\pm2,0)} = \frac{r_{22(\pm1,0)}r_{12(\pm1,0)}}{r_{22(0,0)}}, \quad r_{22(\pm2,0)} = \frac{r_{22(\pm1,0)}^2}{r_{22(0,0)}} \tag{4.51}$$

гарантирует принадлежность $u(x)$ пространству $W_2^2(B_\delta(y^l))$. Коэффициенты разностных операторов в постановке задачи подобраны соответствующим образом, следовательно, $u \in W_2^2(B_\delta(y^l))$.

С другой стороны, для того, чтобы обобщенное решение $u(x)$, удовлетворяющее условию 4.1, принадлежало $C^{2+\alpha}(B_\delta(y^l))$ для любой функции $f \in C^\alpha(\overline{Q})$, необходимо и достаточно, чтобы, помимо выполнения (4.46)–(4.50), каждая из матриц α_{lk}^{ij} ($i = 1, \ldots, n-1$; $j = 1, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, m(j)$), ψ_{lk} ($i = 1, \ldots, n-1$; $k = 1, \ldots, N(q) - J_0$) была вырожденной. Общий вид формул элементов этих матриц очень громоздкий, поэтому приведем только формулы расчета, например, для элементов матрицы α_{11}^{21}:

$$\alpha_{11}^{21}[1,1] = \frac{-2r_{11(\pm 2,0)}}{r_{11(0,0)}(r_{11(0,0)}^2 - r_{11(\pm 1,0)}^2)} \Big(r_{11(0,0)}^2 r_{12(\pm 2,0)} - r_{11(0,0)} r_{11(\pm 1,0)} r_{12(\pm 1,0)} - \\ - r_{11(0,0)} r_{11(\pm 2,0)} r_{12(0,0)} + r_{11(\pm 1,0)}^2 r_{12(0,0)} - r_{11(\pm 1,0)}^2 r_{12(\pm 2,0)} + r_{11(\pm 1,0)} r_{11(\pm 2,0)} r_{12(\pm 1,0)} \Big),$$

$$\alpha_{11}^{21}[2,1] = \frac{-2r_{11(\pm 2,0)}}{r_{11(0,0)}(r_{11(0,0)}^2 - r_{11(\pm 1,0)}^2)} \Big(r_{11(0,0)}^2 r_{12(\pm 1,0)} - \\ - r_{11(0,0)} r_{11(\pm 1,0)} r_{12(0,0)} - r_{11(0,0)} r_{11(\pm 2,0)} r_{12(\pm 1,0)} + r_{11(\pm 1,0)} r_{11(\pm 2,0)} r_{12(0,0)} \Big),$$

$$\alpha_{11}^{21}[1,2] = r_{11(\pm 1,0)}, \quad \alpha_{11}^{21}[2,2] = r_{11(0,0)}.$$

Подставив числовые значения, получим

$$\alpha_{11}^{21} = \alpha_{12}^{21} = \alpha_{11}^{22} = \alpha_{12}^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{13}^{22} = \begin{pmatrix} 0{,}175 & 0{,}5 \\ 0{,}15 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.52}$$

$$\psi_{11} = \psi_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \psi_{13} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.53}$$

Очевидно, что это не так при заданных коэффициентах разностных операторов: $\det \alpha_{13}^{22} \neq 0$. Таким образом, $u \notin C^{2+\alpha}(B_\delta(y^1))$. Отметим, что при выполнении условий 3.1, 4.1 и справедливости соотношений (4.51) можно гарантировать гладкость обобщенного решения рассматриваемой краевой задачи (4.44)-(4.45) на границе подобластей Q_{11} и Q_{21} для любой правой части $f \in C^\alpha(\overline{Q})$ при $r_{12(\pm 1,0)} = \dfrac{r_{11(\pm 1,0)} r_{12(0,0)}}{r_{11(0,0)}}$, $r_{22(\pm 2,0)} = \dfrac{r_{11(\pm 1,0)} r_{22(\pm 1,0)}}{r_{11(0,0)}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антоневич А. Б.* Об индексе и нормальной разрешимости общей эллиптической краевой задачи с конечной группой сдвигов на границе// Дифф. уравн. — 1972. — *8*, № 2. — С. 309–317.
2. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.
3. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач// Докл. АН СССР. — 1969. — *185*, № 4. — С. 739-740.
4. *Варфоломеев Е. М.* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных операторов, возникающих в нелинейной оптике// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — *21*. — С. 5–36.
5. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.
6. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Исследование функционально-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 6. — С. 641–645.
7. *Зверкин А. М., Каменский Г. А., Норкин С. Б., Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом// Усп. мат. наук. — 1962. — *17*, № 2. — С. 77–164.
8. *Каменский Г. А., Скубачевский А. Л.* Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. — М.: Изд-во МАИ, 1992.
9. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
10. *Красовский Н. Н.* Теория управления движения. — М.: Наука, 1968.
11. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.

12. *Мышкис А. Д.* Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом// Усп. мат. наук. — 1949. — *4*, № 5 (33). — С. 99–141.
13. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.—Л.: Гостехиздат, 1951.
14. *Неверова Д. А.* Гладкость обобщенных решений второй и третьей краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2019. — *65*, № 4. — С. 655–671.
15. *Неверова Д. А., Скубачевский А. Л.* О классических и обобщенных решениях краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами// Мат. заметки. — 2013. — *94*, № 5. — С. 702–719.
16. *Рабинович В. С.* О разрешимости дифференциально-разностных уравнений на $\mathbb{R}^n$ и в полупространстве// Докл. АН СССР. — 1978. — *243*, № 5. — С. 1134–1137.
17. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *54*. — С. 31–38.
18. *Селицкий А. М., Скубачевский А. Л.* Вторая краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2007. — *26*. — С. 324–347.
19. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 3–112.
20. *Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л.* Вторая краевая задача для эллиптических дифференциально-разностных уравнений// Дифф. уравн. — 1989. — *25*, № 10. — С. 1766–1776.
21. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.
22. *Hartman F., Stampacchia G.* On some nonlinear elliptic differential-functional equations// Acta Math. — 1966. — *115*. — С. 271–310.
23. *Kamenskii G.* Extrema of nonlocal functionals and boundary-value problems for functional differential equations. — New York: Nova Science Publ., 2007.
24. *Neverova D. A.* Generalized and classical solutions to the second and third boundary value problem for difference-differential equations// Funct. Differ. Equ. — 2014. — *21*. — С. 47–65.
25. *Neverova D. A., Skubachevskii A. L.* On the smoothness of generalized solutions to boundary-value problems for strongly elliptic differential-difference equations on a boundary of neighboring subdomains// Russ. J. Math. Phys. — 2015. — *22*, № 4. — С. 504–517.
26. *Onanov G. G., Skubachevskii A. L.* Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — *12*. — С. 192–207.
27. *Skubachevskii A. L.* The first boundary-value problem for strongly elliptic differential-difference equations// J. Differ. Equ. — 1986. — *63*, № 3. — С. 332–361.
28. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 1997.
29. *Skubachevskii A. L.* Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics// Nonlinear Anal. — 1998. — *32*, № 2. — С. 261–278.
30. *Skubachevskii A. L.* Elliptic differential-difference operators with degeneration and the Kato square root problem// Math. Nachr. — 2018. — *291*. — С. 2660–2692.

Д. А. Неверова
Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: dneverova@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-272-291 UDC 517.929

Smoothness of Generalized Solutions of the Neumann Problem for a Strongly Elliptic Differential-Difference Equation on the Boundary of Adjacent Subdomains

© 2020 **D. A. Neverova**

Abstract. This paper is devoted to the study of the qualitative properties of solutions to boundary-value problems for strongly elliptic differential-difference equations. Some results for these equations such as existence and smoothness of generalized solutions in certain subdomains of Q were obtained earlier. Nevertheless, the smoothness of generalized solutions of such problems can be violated near the boundary of these subdomains even for infinitely differentiable right-hand side. The subdomains are defined as connected components of the set that is obtained from the domain Q by throwing out all possible shifts of the boundary ∂Q by vectors of a certain group generated by shifts occurring in the difference operators.

For the one dimensional Neumann problem for differential-difference equations there were obtained conditions on the coefficients of difference operators, under which for any continuous right-hand side there is a classical solution of the problem that coincides with the generalized solution.

Also there was obtained the smoothness (in Sobolev spaces W_2^k) of generalized solutions of the second and the third boundary-value problems for strongly elliptic differential-difference equations in subdomains excluding ε-neighborhoods of certain points.

However, the smoothness (in Hölder spaces) of generalized solutions of the second boundary-value problem for strongly elliptic differential-difference equations on the boundary of adjacent subdomains was not considered. In this paper, we study this question in Hölder spaces. We establish necessary and sufficient conditions for the coefficients of difference operators that guarantee smoothness of the generalized solution on the boundary of adjacent subdomains for any right-hand side from the Hölder space.

REFERENCES

1. A. B. Antonevich, “Ob indekse i normal’noy razreshimosti obshchey ellipticheskoy kraevoy zadachi s konechnoy gruppoy sdvigov na granitse” [On the index and normal solvability of a general elliptic boundary-value problem with a finite group of translations on the boundary], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1972, **8**, No. 2, 309–317 (in Russian).
2. R. Bellman and K. Cooke, *Differentsial’no-raznostnye uravneniya* [Differential-Difference Equations], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
3. A. V. Bitsadze and A. A. Samarskii, “O nekotorykh prosteyshikh obobshcheniyakh lineynykh ellipticheskikh kraevykh zadach” [On some simplest generalizations of linear elliptic boundary-value problems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **185**, No. 4, 739-740 (in Russian).
4. E. M. Varfolomeev, “O nekotorykh svoystvakh ellipticheskikh i parabolicheskikh funktsional’no-differentsial’nykh operatorov, voznikayushchikh v nelineynoy optike” [On some properties of elliptic and parabolic functional differential operators arising in nonlinear optics], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Probl. Math. Fundam. Directions], 2007, **21**, 5–36 (in Russian).
5. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral’nyy analiz funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equations], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).
6. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, “Issledovanie funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy s neogranichennymi operatornymi koeffitsientami” [Investigation of functional differential equations with unbounded operator coefficients], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2017, **477**, No. 6, 641–645 (in Russian).
7. A. M. Zverkin, G. A. Kamenskii, S. B. Norkin, and L. E. El’sgol’ts, “Differentsial’nye uravneniya s otklonyayushchimsya argumentom” [Differential equations with deviating argument], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1962, **17**, No. 2, 77–164 (in Russian).
8. G. A. Kamenskii and A. L. Skubachevskii, *Lineynye kraevye zadachi dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy* [Linear Boundary-Value Problems for Differential-Difference Equations], MAI, Moscow, 1992 (in Russian).
9. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).

10. N. N. Krasovskii, *Teoriya upravleniya dvizheniya* [Theory of Motion Control], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
11. V. P. Mikhaylov, *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial Differential Equations], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
12. A. D. Myshkis, "Obshchaya teoriya differentsial'nykh uravneniy s zapazdyvayushchim argumentom" [General Theory of Differential Equations with Delayed Argument], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1949, **4**, No. 5 (33), 99–141 (in Russian).
13. A. D. Myshkis, *Lineynye differentsial'nye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom* [Linear Differential Equations with Delayed Argument], Gostekhizdat, Moscow–Leningrad, 1951 (in Russian).
14. D. A. Neverova, "Gladkost' obobshchennykh resheniy vtoroy i tret'ey kraevykh zadach dlya sil'no ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy" [Smoothness of generalized solutions of the second and third boundary-value problems for strongly elliptic differential-difference equations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2019, **65**, No. 4, 655–671 (in Russian).
15. D. A. Neverova and A. L. Skubachevskii, "O klassicheskikh i obobshchennykh resheniyakh kraevykh zadach dlya differentsial'no-raznostnykh uravneniy s peremennymi koeffitsientami" [On classical and generalized solutions of boundary-value problems for differential-difference equations with variable coefficients], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2013, **94**, No. 5, 702–719 (in Russian).
16. V. S. Rabinovich, "O razreshimosti differentsial'no-raznostnykh uravneniy na $\mathbb{R}^n$ i v poluprostranstve" [On solvability of differential-difference equations in $\mathbb{R}^n$ and in the half-space], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1978, **243**, No. 5, 1134–1137 (in Russian).
17. L. E. Rossovskii, "Ellipticheskie funktsional'no-differentsial'nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii" [Elliptic functional differential equations with contractions and dilatations of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 31–38 (in Russian).
18. A. M. Selitskii and A. L. Skubachevskii, "Vtoraya kraevaya zadacha dlya parabolicheskogo differentsial'no-raznostnogo uravneniya" [The second boundary-value problem for parabolic functional differential equation], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2007, **26**, 324–347 (in Russian).
19. A. L. Skubachevskii, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy i ikh prilozheniya" [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112 (in Russian).
20. A. L. Skubachevskii and E. L. Tsvetkov, "Vtoraya kraevaya zadacha dlya ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy" [The second boundary-value problem for elliptic differential-difference equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1989, **25**, No. 10, 1766–1776 (in Russian).
21. J. Hale, *Teoriya funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Theory of Functional Differential Equations], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
22. F. Hartman and G. Stampacchia, "On some nonlinear elliptic differential-functional equations," *Acta Math.*, 1966, **115**, 271–310.
23. G. Kamenskii, *Extrema of Nonlocal Functionals and Boundary-Value Problems for Functional Differential Equations*, Nova Science Publ., New York, 2007.
24. D. A. Neverova, "Generalized and classical solutions to the second and third boundary value problem for difference-differential equations," *Funct. Differ. Equ.*, 2014, **21**, 47–65.
25. D. A. Neverova and A. L. Skubachevskii, "On the smoothness of generalized solutions to boundary-value problems for strongly elliptic differential-difference equations on a boundary of neighboring subdomains," *Russ. J. Math. Phys.*, 2015, **22**, No. 4, 504–517.
26. G. G. Onanov and A. L. Skubachevskii, "Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells," *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, **12**, 192–207.
27. A. L. Skubachevskii, "The first boundary-value problem for strongly elliptic differential-difference equations," *J. Differ. Equ.*, 1986, **63**, No. 3, 332–361.
28. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 1997.
29. A. L. Skubachevskii, "Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics," *Nonlinear Anal.*, 1998, **32**, No. 2, 261–278.
30. A. L. Skubachevskii, "Elliptic differential-difference operators with degeneration and the Kato square root problem," *Math. Nachr.*, 2018, **291**, 2660–2692.

D. A. Neverova
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: dneverova@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 66, № 2 (2020). С. 292–313

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-292-313 УДК 517.957

К ТЕОРИИ ЭНТРОПИЙНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2020 г. **Е. Ю. ПАНОВ**

Аннотация. Рассматривается нелинейное вырождающееся параболического уравнение второго порядка в случае, когда вектор потока и нестрого возрастающая функция диффузии лишь непрерывны. При нулевой диффузии это уравнение вырождается в квазилинейное уравнение первого порядка (закон сохранения). Известно, что в рассматриваемом общем случае энтропийное решение (в смысле Кружкова—Карильо) задачи Коши может быть неединственно. Поэтому актуально исследование специальных энтропийных решений задачи Коши и нахождение дополнительных условий на входные данные задачи, достаточных для единственности. В работе получен ряд новых результатов в этом направлении. Именно, доказано существование наибольшего и наименьшего энтропийного решения задачи Коши. С помощью этого результата установлена единственность энтропийного решения с периодическими начальными данными. Более обще, доказан принцип сравнения для энтропийных суб- и суперрешений в случае, когда хотя бы одна из начальных функций является периодической. Полученные результаты обобщают на параболический случай результаты, известные для законов сохранения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В полупространстве $\Pi = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, рассмотрим нелинейное параболическое уравнение

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) - \Delta_x g(u) = 0, \tag{1.1}$$

в котором вектор потока $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u))$ и функция диффузии $g(u)$ предполагаются лишь непрерывными: $\varphi_i(u) \in C(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$, $g(u) \in C(\mathbb{R})$, причем функция $g(u)$ нестрого возрастает. Поскольку $g(u)$ может быть постоянной на нетривиальных интервалах, уравнение (1.1) вырождающееся (гиперболически-параболическое). В частном случае $g \equiv \mathrm{const}$ оно превращается в закон сохранения первого порядка

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) = 0. \tag{1.2}$$

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1.1) с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.3}$$

Работа выполнена при поддержке Программы РУДН «5-100», Министерства науки и образования РФ (проект 1.445.2016/1.4) и РФФИ (грант 18-01-00258-а).

Напомним понятие энтропийного решения (а заодно введем понятия энтропийных суб- и суперрешений) задачи (1.1), (1.3) в смысле Карильо [10]. Пусть $v^+ = \max(v, 0)$,

$$H(v) = \operatorname{sign}^+ v = \begin{cases} 1, & v > 0, \\ 0, & v \leqslant 0, \end{cases} \qquad \text{— функция Хевисайда.}$$

Определение 1.1. Функция $u = u(t,x) \in L^\infty(\Pi)$ называется *энтропийным субрешением* (коротко — *э.субр.*) задачи (1.1), (1.3), если обобщенный градиент $\nabla_x g(u) \in L^2_{loc}(\Pi, \mathbb{R}^n)$, для всех $k \in \mathbb{R}$

$$((u-k)^+)_t + \operatorname{div}_x[H(u-k)(\varphi(u) - \varphi(k))] - \Delta_x((g(u) - g(k))^+) \leqslant 0 \tag{1.4}$$

в смысле распределений на Π (в $\mathcal{D}'(\Pi)$) и

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0+}(u(t,x) - u_0(x))^+ = 0 \ \text{ в } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n). \tag{1.5}$$

Функция $u = u(t,x) \in L^\infty(\Pi)$ называется *энтропийным суперрешением* (*э.суперр.*) задачи (1.1), (1.3), если $\nabla_x g(u) \in L^2_{loc}(\Pi, \mathbb{R}^n)$, для всех $k \in \mathbb{R}$

$$((k-u)^+)_t + \operatorname{div}_x[H(k-u)(\varphi(k) - \varphi(u))] - \Delta_x((g(k) - g(u))^+) \leqslant 0 \ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi), \tag{1.6}$$

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0+}(u_0(x) - u(t,x))^+ = 0 \ \text{ в } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n). \tag{1.7}$$

Наконец, функция $u = u(t,x) \in L^\infty(\Pi)$ называется *энтропийным решением* (*э.р.*) задачи (1.1), (1.3), если эта функция э.субр. и э.суперр. этой задачи.

Энтропийное условие (1.4) означает, что для любой пробной функции $f = f(t,x) \in C_0^\infty(\Pi)$, $f \geqslant 0$,

$$\int_\Pi H(u-k)\{(u-k)f_t + [\varphi(u) - \varphi(k) - \nabla_x g(u)] \cdot \nabla_x f\} dtdx =$$

$$= \int_\Pi \{(u-k)^+ f_t + H(u-k)(\varphi(u) - \varphi(k)) \cdot \nabla_x f + (g(u) - g(k))^+ \Delta_x f\} dtdx \geqslant 0 \tag{1.8}$$

(здесь и ниже мы обозначаем через «$\cdot$» скалярное умножение конечномерных векторов). Аналогично понимается энтропийное условие (1.6).

На самом деле в статье [10] понятие э.р. было введено независимо от понятий э.субр. и э.суперр. в смысле следующего определения.

Определение 1.2. Функция $u = u(t,x) \in L^\infty(\Pi)$ называется *э.р.* задачи (1.1), (1.3), если $\nabla_x g(u) \in L^2_{loc}(\Pi, \mathbb{R}^n)$, для всех $k \in \mathbb{R}$

$$|u-k|_t + \operatorname{div}_x[\operatorname{sign}(u-k)(\varphi(u) - \varphi(k))] - \Delta_x|g(u) - g(k)| \leqslant 0 \ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi), \tag{1.9}$$

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0+}|u(t,x) - u_0(x)| = 0 \ \text{ в } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n). \tag{1.10}$$

Для доказательства эквивалентности определений 1.1 и 1.2 заметим сначала, что соотношение (1.9) получается при сложении (1.4) и (1.6). Аналогично, (1.10) следует из начальных условий (1.5) и (1.7) путем их суммирования. Обратно, если функция u удовлетворяет условию (1.9), то подставив в это условие $k = \pm M$, где $M \geqslant \|u\|_\infty$, получим, что

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) - \Delta_x g(u) = 0 \ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi), \tag{1.11}$$

т. е. u — слабое решение уравнения (1.1). С помощью тождеств $2v^+ = |v| + v$, $2H(v) = \operatorname{sign} v + 1$, где $v = \pm(u-k)$, условия (1.4), (1.6) вытекают из (1.9) и (1.11). Наконец, ввиду очевидного соотношения $|u - u_0| = (u-u_0)^+ + (u_0 - u)^+$, начальные условия (1.5), (1.7) следуют из (1.10).

В случае законов сохранения (1.2) понятие э.р. задачи (1.2), (1.3) совпадает с известным понятием обобщенного энтропийного решения в смысле Кружкова [1]. Известно, что э.р. задачи (1.1), (1.3) всегда существует, но в многомерном случае $n > 1$ может быть не единственным. Для законов сохранения (1.2) соответствующие примеры содержатся в [2,11]. Заметим, что в случае $\varphi(u) \in C^1(\mathbb{R})$ единственность хорошо известна. Некоторые достаточные условия единственности, обобщающие результаты [11], были найдены в [8].

Замечание 1.1.

(i) Как непосредственно следует из определений, функция $u = u(t,x)$ является э.суперр. задачи (1.1), (1.3) тогда и только тогда, когда функция $-u$ является э.субр. задачи

$$u_t - \operatorname{div}_x \varphi(-u) - \Delta(-g(-u)) = 0, \quad u(0,x) = -u_0(x). \tag{1.12}$$

(ii) Подставив в (1.4) значение $k = -\|u\|_\infty$, получим что э.субр. $u = u(t,x)$ удовлетворяет соотношению

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) - \Delta_x g(u) \leqslant 0 \ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi). \tag{1.13}$$

Аналогично, подставив в (1.6) $k = \|u\|_\infty$, приходим к соотношению

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) - \Delta_x g(u) \geqslant 0 \ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi). \tag{1.14}$$

Из (1.13) и (1.14) следует уже отмеченное свойство, что э.р. уравнения (1.1) удовлетворяет этому уравнению в $\mathcal{D}'(\Pi)$, т. е. является слабым решением.

Естественно называть функцию $u = u(t,x) \in L^\infty(\Pi)$, такую что $\nabla_x g(u) \in L^2_{loc}(\Pi, \mathbb{R}^n)$, *слабым субр.* (соответственно — *слабым суперр.*) задачи (1.1), (1.3), если u удовлетворяет условиям (1.13), (1.5) (соответственно — (1.14), (1.7)).

Основные результаты работы содержатся в следующих трех теоремах.

Теорема 1.1. *Существуют единственные наибольшее э.р. $u_+(t,x)$ и наименьшее э.р. $u_-(t,x)$ задачи* (1.1), (1.3), *причем $u_-(t,x) \leqslant u_+(t,x)$. Эти решения являются, соответственно, наибольшим э.субр. и наименьшим э.суперр. задачи* (1.1), (1.3).

Заметим, что существование наибольшего э.субр. и наименьшего э.суперр. доказано другими методами в недавней работе [14], в которой, впрочем, не было установлено, что эти функции являются также и э.р.

Наибольшее и наименьшее э.р. удовлетворяют свойству монотонной и непрерывной (в L^1-норме) зависимости от начальных данных. Точнее, справедлив следующий результат:

Теорема 1.2. *Пусть u_{1+}, u_{2+} — наибольшие э.р. задачи* (1.1), (1.3) *с начальными функциями u_{10}, u_{20}. Тогда для п.в. $t > 0$*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_{1+}(t,x) - u_{2+}(t,x))^+ dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_{10}(x) - u_{20}(x))^+ dx.$$

Аналогичное свойство верно и для наименьших э.р. u_{1-} и u_{2-}: для п.в. $t > 0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_{1-}(t,x) - u_{2-}(t,x))^+ dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_{10}(x) - u_{20}(x))^+ dx.$$

С помощью теоремы 1.1 устанавливается следующий *принцип сравнения*.

Теорема 1.3. *Предположим, что функции $u = u(t,x)$, $v = v(t,x)$ являются, соответственно, э.субр. и э.суперр. задачи* (1.1), (1.3) *с начальными данными $u_0(x)$, $v_0(x)$, причем $u_0(x) \leqslant v_0(x)$. Если по крайней мере одна из начальных функций периодическая, то $u(t,x) \leqslant v(t,x)$ п.в. в Π.*

Ясно, что из принципа сравнения вытекает единственность э.р. задачи (1.1), (1.3) с периодическими начальными данными.

2. Некоторые вспомогательные утверждения

Полезно переформулировать понятие э.субр. задачи (1.1), (1.3) в виде единого интегрального неравенства.

Предложение 2.1. *Функция $u = u(t,x) \in L^\infty(\Pi)$, такая что $\nabla_x g(u) \in L^2_{loc}(\Pi, \mathbb{R}^n)$, является э.субр. задачи* (1.1), (1.3) *тогда и только тогда, когда для всех $k \in \mathbb{R}$ и любой неотрицательной пробной функции $f = f(t,x) \in C_0^\infty(\bar{\Pi})$, где $\bar{\Pi} = [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\Pi} H(u-k)[(u-k)f_t + (\varphi(u)-\varphi(k))\cdot\nabla_x f + (g(u)-g(k))\Delta_x f]dtdx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_0(x)-k)^+ f(0,x)dx \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть E состоит из таких значений $t > 0$, что (t, x) является точкой Лебега функции $u(t, x)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Известно (см., например, [13, Lemma 1.2]), что E — множество полной меры и что $t \in E$ — общая точка Лебега функций $t \to \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(t, x)b(x)dx$, где $b(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Так как точка Лебега функции u является также точкой Лебега и композиции $p(u)$ для любой непрерывной функции $p \in C(\mathbb{R})$ (здесь нужно принять во внимание ограниченность $u = u(t, x)$), мы можем заменить u в указанном выше свойстве на $p(u)$ и, в частности, на $(u-k)^+$, $k \in \mathbb{R}$. Выберем функцию $\omega(s) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ со свойствами $\omega(s) \geqslant 0$, $\operatorname{supp}\omega \subset [0, 1]$, $\int \omega(s)ds = 1$ и определим последовательности $\omega_r(s) = r\omega(rs)$, $\theta_r(s) = \int\limits_{-\infty}^{s} \omega_r(\sigma)d\sigma = \int\limits_{-\infty}^{rs} \omega(\sigma)d\sigma$, $r \in \mathbb{N}$. Очевидно, последовательность $\omega_r(s)$ сходится при $r \to \infty$ к δ-мере Дирака слабо в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, а последовательность $\theta_r(s)$ сходится к функции Хевисайда $H(s)$ поточечно, а также и в $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Заметим, что $0 \leqslant \theta_r(s) \leqslant 1$. Пусть $f = f(t, x) \in C_0^\infty(\bar{\Pi})$, $f \geqslant 0$, и $t_0 \in E$. Применяя (1.4) к неотрицательной пробной функции $\theta_r(t - t_0)f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$, приходим к соотношению

$$\int\limits_{\Pi} (u-k)^+ \omega_r(t-t_0) f dtdx + \\ + \int\limits_{\Pi} H(u-k)[(u-k)f_t + (\varphi(u) - \varphi(k)) \cdot \nabla_x f + (g(u) - g(k))\Delta_x f]\theta_r(t - t_0)dtdx \geqslant 0. \quad (2.2)$$

Так как

$$\int\limits_{\Pi} (u-k)^+ \omega_r(t-t_0) f dtdx = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u(t,x) - k)^+ f(t,x)dx \right) \omega_r(t-t_0)dt,$$

в то время как t_0 — точка Лебега функции $t \to \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u(t,x) - k)^+ f(t,x)dx$, из (2.2) в пределе при $r \to \infty$ следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u(t_0,x) - k)^+ f(t_0,x)dx + \\ + \int\limits_{(t_0,+\infty)\times\mathbb{R}^n} H(u-k)[(u-k)f_t + (\varphi(u) - \varphi(k)) \cdot \nabla_x f + (g(u) - g(k))\Delta_x f]dtdx \geqslant 0. \quad (2.3)$$

Перейдем в (2.3) к пределу при $E \ni t_0 \to 0$. Так как $(u(t,x) - k)^+ \leqslant (u_0(x) - k)^+ + (u(t,x) - u_0(x))^+$, получим, что

$$\limsup_{E\ni t_0\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u(t_0,x) - k)^+ f(t_0,x)dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - k)^+ f(0,x)dx + \\ + \lim_{E\ni t_0\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u(t_0,x) - u_0(x))^+ f(t_0,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - k)^+ f(0,x)dx,$$

где мы учитываем начальное условие (1.5). С помощью этого соотношения требуемое неравенство (2.1) следует из (2.3) в пределе при $E \ni t_0 \to 0$.

Обратно, допустим, что соотношение (2.1) выполнено. Из этого соотношения в случае неотрицательной финитной пробной функции $f \in C_0^\infty(\Pi)$ следует, что

$$\int\limits_{\Pi} H(u-k)[(u-k)f_t + (\varphi(u) - \varphi(k)) \cdot \nabla_x f + (g(u) - g(k))\Delta_x f]dtdx \geqslant 0.$$

Это означает, что $((u-k)^+)_t + \operatorname{div}_x[H(u-k)(\varphi(u) - \varphi(k))] - \Delta_x((g(u) - g(k))^+) \leqslant 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$, и энтропийное условие (1.4) выполнено. Остается проверить начальное условие (1.5) определения 1.1. Фиксируем неотрицательную функцию $h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и рассмотрим пробную функцию

$f = h(x)(1-\theta_r(t-t_0))$, где $t_0 \in E$. Применив (2.1) к пробной функции f, получим, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_0(x)-k)^+h(x)dx - \int\limits_{\Pi}(u(t,x)-k)^+\omega_r(t-t_0)hdtdx +$$

$$+\int\limits_{(0,t_0+1/r)\times\mathbb{R}^n} H(u-k)[(\varphi(u)-\varphi(k))\cdot\nabla h + (g(u)-g(k))\Delta h](1-\theta_r(t-t_0))dtdx \geqslant 0.$$

В пределе при $r\to\infty$ из этого соотношения следует неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_0(x)-k)^+h(x)dx - \int\limits_{\mathbb{R}^n}(u(t_0,x)-k)^+h(x)dx +$$

$$+\int\limits_{(0,t_0)\times\mathbb{R}^n} H(u-k)[(\varphi(u)-\varphi(k))\cdot\nabla h + (g(u)-g(k))\Delta h]dtdx \geqslant 0,$$

из которого в пределе при $E\ni t_0\to 0$ следует, что

$$\limsup_{E\ni t_0\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u(t_0,x)-k)^+h(x)dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_0(x)-k)^+h(x)dx. \tag{2.4}$$

Ясно, что (2.4) верно и для неотрицательных суммируемых функций $h(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Фиксируем $\varepsilon>0$. Так как $u_0(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, найдется ступенчатая функция $v(x)=\sum\limits_{i=1}^m v_i\chi_{A_i}(x)$, где $v_i\in\mathbb{R}$, а $\chi_{A_i}(x)$ — характеристические функции измеримых множеств $A_i\subset\mathbb{R}^n$, такая что $\|u_0-v\|_\infty<\varepsilon$. Можно считать множества A_i, $i=1,\ldots,m$, дизъюнктными. Ввиду (2.4)

$$\limsup_{E\ni t_0\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u(t_0,x)-v(x))^+h(x)dx = \limsup_{E\ni t_0\to 0}\sum_{i=1}^m\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u(t_0,x)-v_i)^+\chi_{A_i}(x)h(x)dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^m\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_0(x)-v_i)^+\chi_{A_i}(x)h(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_0(x)-v(x))^+h(x)dx \leqslant \varepsilon\|h\|_1. \tag{2.5}$$

Поскольку $(u(t_0,x)-u_0(x))^+ \leqslant (u(t_0,x)-v(x))^+ + (v(x)-u_0(x))^+ < (u(t_0,x)-v(x))^+ + \varepsilon$, из (2.5) следует, что $\limsup_{E\ni t_0\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u(t_0,x)-u_0(x))^+h(x)dx \leqslant 2\varepsilon\|h\|_1$, и ввиду произвольности $\varepsilon>0$ получаем, что $\lim\limits_{E\ni t_0\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u(t_0,x)-u_0(x))^+h(x)dx = 0$ для всех $h(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$, откуда вытекает желаемое соотношение $\operatorname{ess}\lim_{t\to 0+}(u(t,x)-u_0(x))^+=0$ в $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Для э.суперр. u интегральное неравенство (2.1) следует заменить на следующий его аналог:

$$\int\limits_{\Pi} H(k-u)[(k-u)f_t+(\varphi(k)-\varphi(u))\cdot\nabla_x f+(g(k)-g(u))\Delta_x f]dtdx+\int\limits_{\mathbb{R}^n}(k-u_0(x))^+f(0,x)dx\geqslant 0 \tag{2.6}$$

$\forall k\in\mathbb{R}$, $f=f(t,x)\in C_0^\infty(\bar\Pi)$, $f\geqslant 0$. Это соотношение эквивалентно (2.1) для задачи (1.12), и с учетом замечания 1.1 (i) из предложения 2.1 следует, что условие (2.6) эквивалентно (1.6), (1.7). Складывая (2.1), (2.6) в случае э.р. $u=u(t,x)$, получим, что для любой $f\in C_0^\infty(\bar\Pi)$, $f\geqslant 0$

$$\int\limits_{\Pi}\operatorname{sign}(u-k)[(u-k)f_t+(\varphi(u)-\varphi(k))\cdot\nabla_x f+(g(u)-g(k))\Delta_x f]dtdx+\int\limits_{\mathbb{R}^n}|u_0(x)-k|f(0,x)dx\geqslant 0. \tag{2.7}$$

Так же, как в предложении 2.1, доказывается, что (2.1) эквивалентно соотношениям (1.9), (1.10).

Нам потребуются некоторые полезные априорные оценки э.субр.

Предложение 2.2. *Если $u=u(t,x)$ является э.субр. задачи* (1.1), (1.3), *то* $\forall k\in\mathbb{R}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u(t,x)-k)^+dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_0(x)-k)^+dx \tag{2.8}$$

для п.в. $t>0$.

Доказательство. Пусть $M = \|u\|_\infty$. Заметим, что неравенство (2.8) нетривиально только в случае, когда $\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_0(x)-k)^+dx < +\infty$, что и будем далее предполагать. Рассмотрим сначала случай $k=0$. Обозначим при $m \geqslant n$, $\delta > 0$

$$\alpha(s) = \min((s^+)^m, 1),\ \beta(k) = \alpha(k/\delta),\ \eta(u) = \int\limits_{-\infty}^{u}\beta(k)dk = \begin{cases} 0, & u \leqslant 0, \\ \dfrac{u^{m+1}}{(m+1)\delta^m}, & 0 < u \leqslant \delta, \\ u - \dfrac{m\delta}{m+1}, & u > \delta, \end{cases}$$

и проинтегрируем (2.1) по неотрицательной конечной мере $\beta'(k)dk$. Учитывая тождество

$$\int (u-k)^+\beta'(k)dk = \int\limits_0^u \beta(k)dk = \eta(u),$$

получим, что для любой неотрицательной пробной функции $f = f(t,x) \in C_0^\infty(\bar\Pi)$

$$\int\limits_\Pi [\eta(u)f_t + \psi(u)\cdot\nabla_x f + h(u)\Delta_x f]dtdx + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta(u_0(x))f(0,x)dx \geqslant 0, \tag{2.9}$$

где $\psi(u) = \int\limits_0^u(\varphi(u)-\varphi(k))\beta'(k)dk \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, $h(u) = \int\limits_0^u(g(u)-g(k))\beta'(k)dk \in C(\mathbb{R})$. Заметим, что при $|u| \leqslant M$ выполнено $|\psi(u)| \leqslant 2\max\limits_{|u|\leqslant M}|\varphi(u)|\int\limits_0^u\beta'(k)dk = 2\max\limits_{|u|\leqslant M}|\varphi(u)|\beta(u)$ и, аналогично, имеет место $0 \leqslant h(u) \leqslant 2\max\limits_{|u|\leqslant M}|g(u)|\beta(u)$ (здесь и ниже $|v|$ обозначает евклидову норму конечномерного вектора v). Из этих оценок следует, что для любого $\varepsilon > 0$ верны неравенства $\dfrac{|\psi(u)|}{\eta(u)+\varepsilon} \leqslant \dfrac{C_1\beta(u)}{\eta(u)+\varepsilon}$, $\dfrac{h(u)}{\eta(u)+\varepsilon} \leqslant \dfrac{C_2\beta(u)}{\eta(u)+\varepsilon}$, где $C_1 = 2\max\limits_{|u|\leqslant M}|\varphi(u)|$, $C_2 = 2\max\limits_{|u|\leqslant M}|g(u)|$.

Так как $\beta(u) = 1$ при $u > \delta$, функция $H(u) \doteq \dfrac{\beta(u)}{\eta(u)+\varepsilon}$ убывает на $[\delta,+\infty)$. Поэтому

$$\max H(u) = \max_{[0,\delta]} H(u) \leqslant \max_{u>0}\frac{(u/\delta)^m}{\delta(u/\delta)^{m+1}/(m+1)+\varepsilon} = \max_{v=u/\delta>0}\frac{m+1}{\delta v + (m+1)\varepsilon v^{-m}}.$$

Путем прямых вычислений находим $\min\limits_{v>0}(\delta v + (m+1)\varepsilon v^{-m}) = \dfrac{\delta(m+1)}{m}\Big(\dfrac{m(m+1)\varepsilon}{\delta}\Big)^{\frac{1}{m+1}}$. Поэтому $H(u) \leqslant \dfrac{m}{\delta}\Big(\dfrac{\delta}{m(m+1)}\Big)^{\frac{1}{m+1}}\varepsilon^{-\frac{1}{m+1}}$. Итак,

$$\frac{|\psi(u)|}{\eta(u)+\varepsilon} \leqslant C\varepsilon^{-\frac{1}{m+1}}, \quad \frac{h(u)}{\eta(u)+\varepsilon} \leqslant C\varepsilon^{-\frac{1}{m+1}}, \tag{2.10}$$

где $C = \max(C_1,C_2)\dfrac{m}{\delta}\Big(\dfrac{\delta}{m(m+1)}\Big)^{\frac{1}{m+1}} = \mathrm{const}$. Заметим, что $\int\limits_\Pi f_t dtdx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(0,x)dx$ и из (2.9) следует, что

$$\int\limits_\Pi [(\eta(u)+\varepsilon)f_t + \psi(u)\cdot\nabla_x f + h(u)\Delta_x f]dtdx + \int\limits_{\mathbb{R}^n}(\eta(u_0(x))+\varepsilon)f(0,x)dx \geqslant 0. \tag{2.11}$$

Выберем нестрого убывающую функцию $\rho(r) \in C^\infty(\mathbb{R})$ со свойствами: $\rho(r) = 1$ при $r \leqslant 0$, $\rho(r) = e^{-r}$ при $r \geqslant 1$, $\rho(r)$ вогнута на $(-\infty, 1/2]$ и выпукла на $[1/2,+\infty)$ (так что $1/2$ — точка перегиба функции $\rho(r)$). Такая функция удовлетворяет неравенству

$$\rho''(r) \leqslant c|\rho'(r)| = -c\rho'(r) \tag{2.12}$$

с некоторой положительной константой c. Действительно, $\rho''(r) \leqslant 0 \leqslant |\rho'(r)|$ при $r < 1/2$, $\rho''(r) = -\rho'(r) = e^{-r}$ при $r > 1$, а на оставшемся отрезке $[1/2, 1]$ верно неравенство $-\rho'(r) \geqslant -\rho'(1) = e^{-1}$ ввиду выпуклости $\rho(r)$, откуда следует оценка $\rho''(r) \leqslant -c\rho'(r)$, где $c = e \max\limits_{1/2 \leqslant r \leqslant 1} \rho''(r) \geqslant e\rho''(1) = 1$.

Итак, (2.12) выполнено с указанной константой c. Возьмем пробную функцию вида $f(t,x) = \rho(N(t-t_0) + |x| - R)\theta_r(t_0 - t)$, где $0 < t_0 < T$, $R > 1$, константа $N = N(\varepsilon)$ будет указана позднее, а последовательность $\theta_r(s)$, $r \in \mathbb{N}$, определена в доказательстве предложения 2.1 выше. Заметим, что функция f не зависит от x (именно, $f = \theta_r(t_0 - t)$) в окрестности $|x| < R$ луча $x = 0$, так что нулевая особенность функции $|x|$ не портит гладкости f: $f(t,x) \in C^\infty(\bar{\Pi})$. Поскольку функция f вместе со всеми своими производными экспоненциально убывает при $|x| \to \infty$, мы можем использовать ее в качестве пробной функции в (2.11). Заметим, что

$$f_t(t,x) = N\rho'(N(t-t_0) + |x| - R)\theta_r(t_0 - t) - \rho(N(t-t_0) + |x| - R)\omega_r(t_0 - t), \tag{2.13}$$

$$\nabla_x f = \rho'(N(t-t_0) + |x| - R)\theta_r(t_0 - t)\frac{x}{|x|}, \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} \Delta_x f = \left(\rho''(N(t-t_0) + |x| - R) + \rho'(N(t-t_0) + |x| - R)\frac{n-1}{|x|}\right)\theta_r(t_0 - t) \leqslant \\ \leqslant -c\rho'(N(t-t_0) + |x| - R)\theta_r(t_0 - t) \end{aligned} \tag{2.15}$$

ввиду (2.12) и условия $\rho' \leqslant 0$. С помощью соотношений (2.13), (2.14) и (2.15) из (2.11) следует, что для достаточно больших $r \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} -\int\limits_{\Pi} [(\eta(u) + \varepsilon)\omega_r(t_0 - t)\rho(N(t-t_0) + |x| - R)dtdx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\eta(u_0(x)) + \varepsilon)\rho(|x| - Nt_0 - R)dx + \\ + \int\limits_{\Pi} [N(\eta(u) + \varepsilon) - |\psi(u)| - ch(u)]\rho'(N(t-t_0) + |x| - R)\theta_r(t_0 - t)dtdx \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Подставив в (2.16) $N = C(1+c)\varepsilon^{-\frac{1}{m+1}}$, получим что $N(\eta(u) + \varepsilon) - |\psi(u)| - ch(u) \geqslant 0$ ввиду (2.10). Так как $\rho' \leqslant 0$, последний интеграл в (2.16) неположителен и из (2.16) вытекает неравенство

$$\int\limits_{\Pi} [(\eta(u) + \varepsilon)\omega_r(t_0 - t)\rho(N(t-t_0) + |x| - R)dtdx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\eta(u_0(x)) + \varepsilon)\rho(|x| - Nt_0 - R)dx.$$

Предположим, что $t_0 \in E$, где $E \subset \mathbb{R}_+$ — множество полной меры, введенное в доказательстве предложения 2.1. Тогда в пределе при $r \to \infty$ из полученного выше неравенства следует соотношение

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(u(t_0, x))\rho(|x| - R)dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\eta(u_0(x)) + \varepsilon)\rho(|x| - Nt_0 - R)dx \leqslant \\ \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(u_0(x))dx + \varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(|x| - Nt_0 - R)dx. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(|x| - Nt_0 - R)dx \leqslant \int\limits_{|x| \leqslant Nt_0 + R + 1} dx + e^{Nt_0 + R} \int\limits_{|x| > Nt_0 + R + 1} e^{-|x|}dx \leqslant \\ \leqslant c_n(Nt_0 + R + 1)^n + nc_n e^{Nt_0 + R} \int\limits_{Nt_0 + R + 1}^{+\infty} e^{-r}r^{n-1}dr, \end{aligned} \tag{2.18}$$

где c_n — это мера единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Так как

$$\int\limits_{Nt_0 + R + 1}^{+\infty} e^{-r}r^{n-1}dr = \int\limits_0^{+\infty} e^{-s - Nt_0 - R - 1}(s + Nt_0 + R + 1)^{n-1}ds \leqslant$$

$$\leqslant (Nt_0+R+1)^{n-1}e^{-Nt_0-R-1}\int\limits_0^{+\infty} e^{-s}(1+s)^{n-1}ds = a(Nt_0+R+1)^{n-1}e^{-Nt_0-R-1},$$

$a=\mathrm{const}$, из (2.18) следует, что для некоторых констант a_1, a_2

$$\varepsilon\int\limits_{\mathbb{R}^n}\rho(|x|-N(\varepsilon)t_0-R)dx \leqslant a_1\varepsilon(N(\varepsilon)t_0+R+1)^n \leqslant a_2\varepsilon(1+\varepsilon^{-\frac{1}{m+1}})^n \underset{\varepsilon\to 0+}{\to} 0$$

(напомним, что $m+1>n$). Поэтому, переходя в (2.17) к пределу при $\varepsilon\to 0+$, получим, что для всех $t_0\in E$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta(u(t_0,x))\rho(|x|-R)dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta(u_0(x))dx. \tag{2.19}$$

Заметим, что $0\leqslant\eta(u)\leqslant u^+$ и $\eta(u)\to u^+$ при $\delta\to 0$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла из (2.19) в пределе при $\delta\to 0$ следует, что для п.в. $t=t_0>0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u(t,x))^+\rho(|x|-R)dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_0(x))^+dx < +\infty.$$

Переходя в левом интеграле к пределу при $R\to\infty$, получим неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u(t,x))^+dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_0(x))^+dx, \tag{2.20}$$

совпадающее с (2.8) при $k=0$. В общем случае $k\in\mathbb{R}$ заметим, что $u-k$ является э.субр. задачи

$$u_t+\operatorname{div}_x\varphi(u+k)-\Delta_x g(u+k), \quad u(0,x)=u_0(x)-k.$$

Применяя к этому э.субр. неравенство (2.20), получим требуемую оценку (2.8). □

Следствие 2.1. *Если $u=u(t,x)$ — э.суперр. задачи* (1.1), (1.3), *то* $\forall k\in\mathbb{R}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(k-u(t,x))^+dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}(k-u_0(x))^+dx \tag{2.21}$$

для п.в. $t>0$.

Доказательство. По замечанию 1.1 (i) функция $-u$ является э.субр. задачи (1.12). Применяя к этому э.субр. (2.8) с константой $-k$ вместо k, получим (2.21). □

Следствие 2.2. *Любое э.субр.* $u=u(t,x)$ *задачи* (1.1), (1.3) *удовлетворяет следующему принципу максимума* $u(t,x)\leqslant b=\operatorname{ess\,sup} u_0(x)$ *для п.в.* $(t,x)\in\Pi$.

Аналогично, любое э.суперр. $u=u(t,x)$ *задачи* (1.1), (1.3) *удовлетворяет принципу минимума* $u(t,x)\geqslant a=\operatorname{ess\,inf} u_0(x)$ *для п.в.* $(t,x)\in\Pi$.

Доказательство. Принципы максимума/мнимума непосредственно следуют из (2.8), (2.21) при $k=b$ и $k=a$, соответственно. □

Лемма 2.1. *Пусть* $u=u(t,x)\in L^\infty(\Pi)$ *— слабое субр. задачи* (1.1), (1.3). *Допустим также, что* $\eta(u)\in C^1(\mathbb{R})$, $\eta'(u)=p(g(u))$, *где* $p(v)$ *— непрерывная по Липшицу неотрицательная и нестрого возрастающая функция. Тогда для любой пробной функции* $f=f(t,x)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $f\geqslant 0$,

$$\langle\eta(u)_t,f\rangle = -\int\limits_\Pi \eta(u)f_t dtdx \leqslant \int\limits_\Pi(\varphi(u)-\nabla_x g(u))\cdot\nabla_x(p(g(u))f)dtdx.$$

Доказательство. Поскольку $\eta'(u)=p(g(u))$ возрастает, то функция $\eta(u)$ выпукла, откуда следует, что для любых $(t,x)\in\Pi$ и $h>0$

$$\eta(u(t+h,x))-\eta(u(t,x)) \leqslant \eta'(u(t+h,x))(u(t+h,x)-u(t,x)) = p(g(u(t+h,x)))(u(t+h,x)-u(t,x)).$$

Умножим это неравенство на $f(t+h,x)$ и проинтегрируем по $(t,x)\in\Pi$. В результате получим, что при $0<h<\min\{t\mid(t,x)\in\operatorname{supp} f\}$

$$\int\limits_{\Pi} \eta(u(t,x))(f(t,x)-f(t+h,x))dtdx = \int\limits_{\Pi} \eta((u(t+h,x))-\eta(u(t,x)))f(t+h,x)dtdx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\Pi} p(g(u(t+h,x)))(u(t+h,x)-u(t,x))f(t+h,x)dtdx. \quad (2.22)$$

Применяя (1.13) к пробной функции $f = a(t)b(x)$ с $a(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, $b(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $a(t), b(x) \geqslant 0$, получим неравенство

$$-\int\limits_0^\infty I(t)a'(t)dt \leqslant \int\limits_{\Pi} [\varphi(u) - \nabla_x g(u)] \cdot \nabla_x b(x)a(t)dtdx,$$

где обозначено $I(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(t,x)b(x)dx$. Это неравенство означает, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$

$$I'(t) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} [\varphi(u(t,x)) - \nabla_x g(u(t,x))] \cdot \nabla_x b(x)dx. \quad (2.23)$$

Пусть E — множество полной меры, определенное выше в доказательстве предложения 2.1. Предположим, что $t_1, t_2 \in E$, $t_2 > t_1$. Тогда t_1, t_2 — точки Лебега функции $I(t)$ и из (2.23) следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u(t_2,x)-u(t_1,x))b(x)dx = I(t_2)-I(t_1) \leqslant \int\limits_{(t_1,t_2)\times\mathbb{R}^n} [\varphi(u(\tau,x))-\nabla_x g(u(\tau,x))]\cdot\nabla_x b(x)d\tau dx. \quad (2.24)$$

Ясно, что это свойство верно и для функций $b(x)$ из пространства Соболева $W_2^1(\mathbb{R}^n)$. В частности, можно взять $b = p(g(u(t+h,x)))f(t+h,x)$ при почти всех фиксированных t. Тогда для всех таких t, удовлетворяющих также условию $t, t+h \in E$, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u(t+h,x)-u(t,x))p(g(u(t+h,x)))f(t+h,x)dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{(t,t+h)\times\mathbb{R}^n} [\varphi(u(\tau,x)) - \nabla_x g(u(\tau,x))] \cdot \nabla_x(p(g(u(t+h,x)))f(t+h,x))d\tau dx. \quad (2.25)$$

Подставив (2.25) в (2.22), получим, что

$$\int\limits_{\Pi} \eta(u(t,x))(f(t,x)-f(t+h,x))dtdx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\Pi} \int\limits_t^{t+h} [\varphi(u(\tau,x)) - \nabla_x g(u(\tau,x))] \cdot \nabla_x(p(g(u(t+h,x)))f(t+h,x))d\tau dtdx =$$
$$= \int\limits_{\Pi} \int\limits_{\tau-h}^{\tau} [\varphi(u(\tau,x)) - \nabla_x g(u(\tau,x))] \cdot \nabla_x(p(g(u(t+h,x)))f(t+h,x))dtd\tau dx =$$
$$= \int\limits_{\Pi} [\varphi(u(\tau,x)) - \nabla_x g(u(\tau,x))] \cdot \nabla_x q_h(\tau,x)d\tau dx, \quad (2.26)$$

где мы применили теорему Фубини и обозначили

$$q_h(\tau,x) = \int\limits_{\tau-h}^{\tau} p(g(u(t+h,x)))f(t+h,x)dt = \int\limits_{\tau}^{\tau+h} p(g(u(t,x)))f(t,x)dt.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{h}\nabla_x q_h(\tau,x) = \frac{1}{h}\int\limits_{\tau}^{\tau+h} \nabla_x(p(g(u(t,x)))f(t,x))dt \underset{h\to 0}{\to} \nabla_x(p(g(u(\tau,x)))f(\tau,x)) =$$
$$= p'(g(u(\tau,x)))\nabla_x g(u(\tau,x))f(\tau,x) + p(g(u(\tau,x)))\nabla_x f(\tau,x) \quad (2.27)$$

в $L^2_{loc}(\Pi)$. Здесь мы берем борелевский представитель обобщенной производной $p'(v)$ (напомним, что эта функция определена с точностью до равенства почти всюду). Разделим (2.26) на h и перейдем к пределу при $h\to 0$ с учетом соотношения (2.27). В итоге придем к требуемому неравенству

$$-\int\limits_{\Pi}\eta(u(t,x))f_t(t,x)dtdx \leqslant \int\limits_{\Pi}[\varphi(u(\tau,x)) - \nabla_x g(u(\tau,x))]\cdot\nabla_x(p(g(u(\tau,x)))f(\tau,x))d\tau dx =$$
$$= \int\limits_{\Pi}[\varphi(u(t,x)) - \nabla_x g(u(t,x))]\cdot\nabla_x(p(g(u(t,x)))f(t,x))dtdx.$$

□

Следствие 2.3. *Пусть $u = u(t,x)$ — слабое субр. задачи* (1.1), (1.3), $\|u\|_\infty \leqslant M$. *Тогда для любой неотрицательной функции $\alpha(t)\in C^1_0(\mathbb{R}_+)$*

$$\int\limits_{\Pi}|\nabla_x g(u)|^2 e^{-|x|}\alpha(t)dtdx \leqslant C(\alpha,M), \quad (2.28)$$

где константа $C(\alpha,M)$ зависит только от α и M.

Доказательство. Обозначим $a=-M$ и применим лемму 2.1 к функции $p(v) = (v-g(a))^+$. Получим соотношение

$$\int\limits_{\Pi}\{\eta(u)f_t + (\varphi(u) - \nabla_x g(u))\cdot\nabla_x(p(g(u))f)\}dtdx \geqslant 0, \quad (2.29)$$

где $\eta(u) = \int\limits_a^u (g(s)-g(a))^+ds$. Подставляя в (2.29) $f=\alpha(t)e^{-|x|}$ и используя тождество $\nabla_x p(g(u)) = \nabla_x(g(u)-g(a)) = \nabla_x g(u)$, получим, что

$$\int\limits_{\Pi}|\nabla_x g(u)|^2 f dtdx \leqslant \int\limits_{\Pi}[\eta(u)f_t + f\varphi(u)\cdot\nabla_x g(u) + p(g(u))(\varphi(u)-\nabla_x g(u))\cdot\nabla_x f]dtdx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\Pi}[\eta(u)|f_t| + |\varphi(u)||\nabla_x g(u)|f + p(g(u))(|\varphi(u)| + |\nabla_x g(u)|)f]dtdx =$$
$$= \int\limits_{\Pi}[\eta(u)|f_t| + p(g(u))|\varphi(u)|f + (p(g(u)) + |\varphi(u)|)|\nabla_x g(u)|f]dtdx, \quad (2.30)$$

где мы учли, что $\nabla_x f = -\dfrac{x}{|x|}f$, а значит,

$$|(\varphi(u)-\nabla_x g(u))\cdot\nabla_x f| = |(\varphi(u)-\nabla_x g(u))\cdot x/|x||f \leqslant |\varphi(u)-\nabla_x g(u)|f \leqslant (|\varphi(u)| + |\nabla_x g(u)|)f.$$

Из (2.30) с помощью неравенства Юнга следует оценка

$$\int\limits_{\Pi}|\nabla_x g(u)|^2 f dtdx \leqslant \int\limits_{\Pi}[\eta(u)|\alpha'(t)| + p(g(u))|\varphi(u)|\alpha(t)]e^{-|x|}dtdx +$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Pi}|\nabla_x g(u)|^2 f dtdx + \int\limits_{\Pi}\frac{1}{2}(p(g(u)) + |\varphi(u)|)^2 f dtdx,$$

из которой получаем

$$\int\limits_{\Pi}|\nabla_x g(u)|^2 f dtdx \leqslant C(\alpha,M)$$

$$\doteq \max_{|u|\leqslant M}[2(\eta(u)+p(g(u))|\varphi(u)|)+(p(g(u))+|\varphi(u)|)^2]\int\limits_\Pi \max(\alpha(t),|\alpha'(t)|)e^{-|x|}dtdx,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Пусть $H_r(u)=\max(0,\min(1,ru))$, $r\in\mathbb{N}$ — последовательность аппроксимаций функции Хевисайда $H(u)=\operatorname{sign}^+(u)$. Обозначим через $S=S_g$ множество значений $v\in\mathbb{R}$, таких что прообраз $g^{-1}(v)$ состоит из одной точки. Следующая лемма аналогична [10, Lemma 5].

Лемма 2.2. *Пусть $u=u(t,x)\in L^\infty(\Pi)$ — слабое субр. задачи* (1.1), (1.3). *Тогда для всех $k\in\mathbb{R}$, таких что $g(k)\in S$, для любой пробной функции $f=f(t,x)\in C_0^\infty(\Pi)$, $f\geqslant 0$,*

$$\int\limits_\Pi H(u-k)[(u-k)f_t+(\varphi(u)-\varphi(k)-\nabla_x g(u))\cdot\nabla_x f]dtdx\geqslant$$
$$\geqslant \limsup_{r\to\infty}\int\limits_\Pi H_r'(g(u)-g(k))|\nabla_x g(u)|^2 f dtdx\geqslant 0. \quad (2.31)$$

Доказательство. Так как $g(k)\in S$, то $H(u-k)=H(g(u)-g(k))=\lim\limits_{r\to\infty}H_r(g(u)-g(k))$. Пусть $\eta_r(u)=\int\limits_k^u H_r(g(s)-g(k))ds$. Очевидно, $\eta_r(u)\to(u-k)^+$ при $r\to\infty$ равномерно по u. По лемме 2.1 с $p(v)=H_r(v-g(k))$, для всех $f=f(t,x)\in C_0^\infty(\Pi)$, $f\geqslant 0$

$$\int\limits_\Pi\{\eta_r(u)f_t+((\varphi(u)-\varphi(k))-\nabla_x g(u))\cdot\nabla_x(H_r(g(u)-g(k))f)\}dtdx=$$
$$=\int\limits_\Pi\{\eta_r(u)f_t+(\varphi(u)-\nabla_x g(u))\cdot\nabla_x(H_r(g(u)-g(k))f)\}dtdx\geqslant 0, \quad (2.32)$$

где мы также учли, что вектор $\int\limits_\Pi \nabla_x(H_r(g(u)-g(k))f)dtdx=0$. Поскольку

$$\nabla_x(H_r(g(u)-g(k))f)=fH_r'(g(u)-g(k))\nabla_x g(u)+H_r(g(u)-g(k))\nabla_x f,$$

из (2.32) следует, что

$$\int\limits_\Pi\{\eta_r(u)f_t+H_r(g(u)-g(k))((\varphi(u)-\varphi(k))-\nabla_x g(u))\cdot\nabla_x f\}dtdx+$$
$$+\int\limits_\Pi fH_r'(g(u)-g(k))(\varphi(u)-\varphi(k))\cdot\nabla_x g(u)dtdx-\int\limits_\Pi fH_r'(g(u)-g(k))|\nabla_x g(u)|^2dtdx\geqslant 0. \quad (2.33)$$

Перейдем в (2.33) к пределу при $r\to\infty$. Учитывая, что $\nabla_x g(u)=0$ п.в. на множестве, где $g(u)=g(k)$, мы видим, что первый интеграл

$$\int\limits_\Pi\{\eta_r(u)f_t+H_r(g(u)-g(k))((\varphi(u)-\varphi(k))-\nabla_x g(u))\cdot\nabla_x f\}dtdx\underset{r\to\infty}{\to}$$
$$\underset{r\to\infty}{\to}\int\limits_\Pi H(u-k)[(u-k)f_t+(\varphi(u)-\varphi(k)-\nabla_x g(u))\cdot\nabla_x f]dtdx. \quad (2.34)$$

Предельный переход во втором интеграле осуществляется по той же схеме, что и в доказательстве леммы [10, Lemma 1]. Пусть $M\geqslant\max(\|u\|_\infty,|k|)$, $g_0^{-1}(v)$, где $v\in[g(-M),g(M)]$ — точка в $g^{-1}(v)$ с минимальным модулем. В случае $v\notin[g(-M),g(M)]$ будет удобно положить $g_0^{-1}(v)=k$. Очевидно, $u=g_0^{-1}(g(u))$ как только $|u|\leqslant M$, $g(u)\in S$, в то время как $\nabla_x g(u(t,x))=0$ почти всюду на множестве таких (t,x), что $g(u)\notin S$. Поэтому

$$I_r=\int\limits_\Pi fH_r'(g(u)-g(k))(\varphi(u)-\varphi(k))\cdot\nabla_x g(u)dtdx=$$

$$= \int_\Pi f H_r'(g(u) - g(k))(\varphi(g_0^{-1}(g(u))) - \varphi(k)) \cdot \nabla_x g(u) dtdx = \int_\Pi \operatorname{div}_x F_r(g(u)) f dtdx, \quad (2.35)$$

где обозначено

$$F_r(v) = \int_{g(k)}^{v} H_r'(s - g(k))(\varphi(g_0^{-1}(s)) - \varphi(k)) ds. \quad (2.36)$$

Ясно, что

$$|F_r(v)| \leqslant r \int_{g(k)}^{g(k)+1/r} |\varphi(g_0^{-1}(s)) - \varphi(k)| ds \underset{r\to\infty}{\to} 0,$$

поскольку функция $g_0^{-1}(s)$ непрерывна в точке $g(k) \in S$ и $g_0^{-1}(g(k)) = k$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла из (2.35) вытекает, что

$$I_r = -\int_\Pi F_r(g(u)) \cdot \nabla_x f dtdx \to 0 \text{ при } r \to \infty. \quad (2.37)$$

С учетом (2.34), (2.37) из соотношения (2.33) в пределе при $r \to \infty$ следует требуемое неравенство (2.31). □

Замечание 2.1. Как видно из доказательства леммы 2.2, при $M \geqslant \max(\|u\|_\infty, |k|)$ для всех $r \in \mathbb{N}$

$$\int_\Pi f H_r'(g(u) - g(k)) |\nabla_x g(u)|^2 dtdx \leqslant C(M) \int_\Pi (|f_t| + |\nabla_x f| + |\Delta_x f|) dtdx, \quad (2.38)$$

где $C(M)$ — константа, зависящая только от M.

Действительно, обозначим $p_r(v) = \int\limits_{g(k)}^{v} H_r(s - g(k)) ds$, так что $0 \leqslant p_r(v) \leqslant (v - g(k))^+$ и $\nabla_x p_r(g(u)) = H_r(g(u) - g(k)) \nabla_x g(u)$. Тогда ввиду (2.33), (2.35) и (2.37)

$$\int_\Pi f H_r'(g(u) - g(k)) |\nabla_x g(u)|^2 dtdx \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Pi \{\eta_r(u) f_t + H_r(g(u) - g(k))((\varphi(u) - \varphi(k)) - \nabla_x g(u)) \cdot \nabla_x f\} dtdx + I_r =$$

$$= \int_\Pi \{\eta_r(u) f_t + H_r(g(u) - g(k))(\varphi(u) - \varphi(k)) \cdot \nabla_x f + p_r(g(u)) \Delta_x f - F_r(g(u)) \cdot \nabla_x f\} dtdx \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Pi \{\eta_r(u)|f_t| + (|\varphi(u) - \varphi(k)| + |F_r(g(u))|)|\nabla_x f| + |g(u) - g(k)||\Delta_x f|\} dtdx. \quad (2.39)$$

По (2.36) при $u, k \in [-M, M]$ получим, что $|F_r(g(u))| \leqslant \max\limits_{|u|\leqslant M} |\varphi(u) - \varphi(k)| \leqslant 2 \max\limits_{|u|\leqslant M} |\varphi(u)|$, и оценка (2.38) непосредственно вытекает из (2.39).

Следствие 2.4. *Если функция диффузии $g(u)$ строго возрастает и $u = u(t,x)$ — слабое субр.* (*суперр.*) *задачи* (1.1), (1.3)*, то и является и э.субр.* (*э.суперр.*) *этой задачи.*

Доказательство. Так как функция $g(u)$ строго возрастает, $g(k) \in S$ для всех $k \in \mathbb{R}$. По лемме 2.2 соотношение (2.31) выполнено для всех $k \in \mathbb{R}$. Поэтому u удовлетворяет энтропийному условию (1.4), а значит, является э.субр. задачи (1.1), (1.3).

Если же u слабое суперр. задачи (1.1), (1.3), то, как следует из (1.14),

$$(-u)_t + \operatorname{div}_x(-\varphi(u)) - \Delta_x(-g(u)) = -[u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) - \Delta_x g(u)] \leqslant 0 \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi),$$

т. е. функция $-u$ удовлетворяет условию (1.13) для уравнения (1.12). Поэтому, функция $-u$ является слабым субр. задачи (1.12). Как уже установлено, $-u$ является и э.субр. этой задачи. Но тогда функция u есть э.суперр. исходной задачи (1.1), (1.3) в силу замечания 1.1 (i). □

Следствие 2.5. *Если* $u = u(t,x)$ — *слабое суперр. задачи* (1.1), (1.3), *то для всех* $k \in \mathbb{R}$ *таких, что* $g(k) \in S$ *и любой пробной функции* $f = f(t,x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $f \geqslant 0$

$$\int\limits_\Pi H(k-u)[(k-u)f_t + (\varphi(k) - \varphi(u) + \nabla_x g(u)) \cdot \nabla_x f]dtdx \geqslant$$

$$\geqslant \limsup_{r\to\infty} \int\limits_\Pi H_r'(g(k) - g(u))|\nabla_x g(u)|^2 f dtdx \geqslant 0. \quad (2.40)$$

Доказательство. Как было показано в доказательстве предыдущего следствия 2.4, $-u$ есть слабое субр. задачи (1.12). Очевидно, $-g(k) \in S_{-g(-u)}$. По лемме 2.2, примененной к слабому э.субр. $-u$ задачи (1.12) с константой $-k$ вместо k, имеем

$$\int\limits_\Pi H(k-u)[(k-u)f_t + (\varphi(k) - \varphi(u) + \nabla_x g(u)) \cdot \nabla_x f]dtdx \geqslant \limsup_{r\to\infty} \int\limits_\Pi H_r'(g(k) - g(u))|\nabla_x g(u)|^2 f dtdx,$$

что и требовалось доказать. □

3. Основные результаты

Теорема 3.1. *Пусть* $u_1 = u_1(t,x)$, $u_2 = u_2(t,x)$ — *э.субр. и э.суперр. задачи* (1.1), (1.3), *соответственно* (*со своими начальными функциями*). *Тогда*

$$((u_1-u_2)^+)_t + \operatorname{div}_x[H(u_1-u_2)(\varphi(u_1) - \varphi(u_2))] - \Delta_x[H(u_1-u_2)(g(u_1)-g(u_2))] \leqslant 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi). \quad (3.1)$$

Доказательство. В случае э.р. u_1, u_2, соотношение (3.1) было доказано в [10, Theorem 13]. Общий случай требует лишь небольшой коррекции. Для полноты изложения приведем детали. Как и в [10], будем использовать технику удвоения переменных. Именно, будем рассматривать u_2 как функцию новых переменных $(s,y) \in \Pi$. Подставив в (1.4) $k = u_2(s,y)$, получим, что

$$((u_1-u_2)^+)_t + \operatorname{div}_x[H(u_1-u_2)(\varphi(u_1) - \varphi(u_2))] - \Delta_x(g(u_1)-g(u_2))^+ \leqslant 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi).$$

Поэтому для любой неотрицательной пробной функции $f = f(t,x;s,y) \in C_0^\infty(\Pi\times\Pi)$ и всех $(s,y) \in \Pi$

$$\int\limits_\Pi \{(u_1-u_2)^+ f_t + H(u_1-u_2)[(\varphi(u_1)-\varphi(u_2)) - \nabla_x g(u_1)] \cdot \nabla_x f\}dtdx \geqslant 0. \quad (3.2)$$

Кроме того, если $(s,y) \in D_2 \doteq \{\ (s,y) \in \Pi \mid g(u_2(s,y)) \in S_g\ \}$, то по лемме 2.2

$$\int\limits_\Pi \{(u_1-u_2)^+ f_t + H(u_1-u_2)[(\varphi(u_1)-\varphi(u_2)) - \nabla_x g(u_1)] \cdot \nabla_x f\}dtdx \geqslant$$

$$\geqslant \limsup_{r\to\infty} \int\limits_\Pi H_r'(g(u_1) - g(u_2))|\nabla_x g(u_1)|^2 f dtdx. \quad (3.3)$$

После интегрирования по переменным (s,y) из (3.2), (3.3) следует, что

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi} \{(u_1-u_2)^+ f_t + H(u_1-u_2)[(\varphi(u_1)-\varphi(u_2)) - \nabla_x g(u_1)] \cdot \nabla_x f\}dtdxdsdy \geqslant$$

$$\geqslant \limsup_{r\to\infty} \int\limits_{\Pi\times D_2} H_r'(g(u_1) - g(u_2))|\nabla_x g(u_1)|^2 f dtdxdsdy =$$

$$= \limsup_{r\to\infty} \int\limits_{D_1\times D_2} H_r'(g(u_1) - g(u_2))|\nabla_x g(u_1)|^2 f dtdxdsdy, \quad (3.4)$$

где обозначено $D_1 = \{\ (t,x) \in \Pi \mid g(u_1(t,x)) \in S_g\ \}$. В (3.4) мы учли, что $\nabla_x g(u_1) = 0$ п.в. на дополнении множества D_1. Мы также используем свойство, что при $J_r(s,y) = \int\limits_\Pi H_r'(g(u_1) - g(u_2))|\nabla_x g(u_1)|^2 f dtdx$ справедливо соотношение

$$\int\limits_{D_2} \limsup_{r\to\infty} J_r(s,y)dsdy \geqslant \limsup_{r\to\infty} \int\limits_{D_2} J_r(s,y)dsdy. \tag{3.5}$$

Действительно, по замечанию 2.1 последовательность $J_r(s,y)$ равномерно ограничена и имеет общий компактный носитель (в качестве которого можно взять проекцию носителя f на пространство переменных (s,y)). Поэтому $0 \leqslant J_r(s,y) \leqslant q(s,y)$ для некоторой суммируемой функции $q \in L^1(\Pi)$. Применяя лемму Фату к последовательности $q - J_r$, получаем (3.5).

Аналогично, так как $u_2 = u_2(s,y)$ — э.суперр. уравнения $u_s + \operatorname{div}_y \varphi(u) - \Delta_y g(u) = 0$, то подставив в соотношение (1.6), выписанное для $u = u_2(s,y)$, значение $k = u_1(t,x)$, получим после применения к пробной функции $f(t,x;\cdot)$ и последующего интегрирования по $(t,x) \in \Pi$, что

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi} \{(u_1-u_2)^+ f_s + H(u_1-u_2)[(\varphi(u_1)-\varphi(u_2)) + \nabla_y g(u_2)]\cdot\nabla_y f\}dtdxdsdy \geqslant$$
$$\geqslant \limsup_{r\to\infty} \int\limits_{D_1\times D_2} H_r'(g(u_1)-g(u_2))|\nabla_y g(u_2)|^2 f dtdxdsdy, \tag{3.6}$$

где учтено соотношение (2.40). Так как, очевидно, для всех $r \in \mathbb{N}$

$$0 = \int\limits_{\Pi\times\Pi} \nabla_x g(u_1)\cdot\nabla_y(H_r(g(u_1)-g(u_2))f)dtdxdsdy =$$
$$= -\int\limits_{\Pi\times\Pi} H_r'(g(u_1)-g(u_2))\nabla_x g(u_1)\cdot\nabla_y g(u_2) f dtdxdsdy +$$
$$+ \int\limits_{\Pi\times\Pi} H_r(g(u_1)-g(u_2))\nabla_x g(u_1)\cdot\nabla_y f dtdxdsdy,$$

$$0 = \int\limits_{\Pi\times\Pi} \nabla_y g(u_2)\cdot\nabla_x(H_r(g(u_1)-g(u_2))f)dtdxdsdy =$$
$$= \int\limits_{\Pi\times\Pi} H_r'(g(u_1)-g(u_2))\nabla_x g(u_1)\cdot\nabla_y g(u_2) f dtdxdsdy +$$
$$+ \int\limits_{\Pi\times\Pi} H_r(g(u_1)-g(u_2))\nabla_y g(u_2)\cdot\nabla_x f dtdxdsdy,$$

приходим к следующим предельным соотношениям:

$$-\int\limits_{\Pi\times\Pi} H(u_1-u_2)\nabla_x g(u_1)\cdot\nabla_y f dtdxdsdy = -\int\limits_{\Pi\times\Pi} H(g(u_1)-g(u_2))\nabla_x g(u_1)\cdot\nabla_y f dtdxdsdy =$$
$$= -\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\Pi\times\Pi} H_r'(g(u_1)-g(u_2))\nabla_x g(u_1)\cdot\nabla_y g(u_2) f dtdxdsdy =$$
$$= -\lim_{r\to\infty} \int\limits_{D_1\times D_2} H_r'(g(u_1)-g(u_2))\nabla_x g(u_1)\cdot\nabla_y g(u_2) f dtdxdsdy; \tag{3.7}$$

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi} H(u_1-u_2)\nabla_y g(u_2)\cdot\nabla_x f dtdxdsdy = \int\limits_{\Pi\times\Pi} H(g(u_1)-g(u_2))\nabla_y g(u_2)\cdot\nabla_x f dtdxdsdy =$$

$$= -\lim_{r\to\infty} \int\limits_{D_1\times D_2} H_r'(g(u_1)-g(u_2))\nabla_x g(u_1)\cdot\nabla_y g(u_2) f dtdxdsdy, \quad (3.8)$$

где учитывается, что $H_r(s) \underset{r\to\infty}{\to} H(s)$.

Складывая соотношения (3.4), (3.6), (3.7) и (3.8), получим неравенство

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi} \{(u_1-u_2)^+(f_t+f_s) + H(u_1-u_2)[(\varphi(u_1)-\varphi(u_2)) -$$
$$- (\nabla_x g(u_1) - \nabla_y g(u_2))]\cdot(\nabla_x+\nabla_y)f\} dtdxdsdy \geqslant$$
$$\geqslant \limsup_{r\to\infty} \int\limits_{D_1\times D_2} H_r'(g(u_1)-g(u_2))|\nabla_x g(u_1) - \nabla_y g(y_2)|^2 f dtdxdsdy \geqslant 0. \quad (3.9)$$

Поскольку $H(u_1-u_2)(\nabla_x g(u_1) - \nabla_y g(u_2)) = (\nabla_x+\nabla_y)(g(u_1)-g(u_2))^+$, соотношение (3.9) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi} \{(u_1-u_2)^+(f_t+f_s) + H(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot(\nabla_x+\nabla_y)f +$$
$$+ (g(u_1)-g(u_2))^+(\nabla_x+\nabla_y)\cdot(\nabla_x+\nabla_y)f\} dtdxdsdy \geqslant 0. \quad (3.10)$$

Пусть $\delta_r(t,x) = \omega_r(t)\prod\limits_{i=1}^{n}\omega_r(x_i)$, где $t\in\mathbb{R}$, $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, а последовательность $\omega_r(s)$, $r\in\mathbb{N}$, была определена в доказательстве предложения 2.1. Возьмем в (3.10) пробную функцию $f = h(t,x)\delta_r(t-s,x-y)$, где $h = h(t,x)\in C_0^\infty(\Pi)$, $h\geqslant 0$. Ясно, что $f\in C_0^\infty(\Pi\times\Pi)$ при достаточно больших r, $f\geqslant 0$. Поскольку $(\partial_t+\partial_s)\delta_r(t-s,x-y) = 0$ и $(\nabla_x+\nabla_y)\delta_r(t-s,x-y) = 0$, из (3.10) следует, что

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi} \{(u_1-u_2)^+ h_t + H(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot\nabla_x h + (g(u_1)-g(u_2))^+\Delta_x h\}\delta_r(t-s,x-y) dtdxdsdy \geqslant 0. \quad (3.11)$$

Заметим, что

$$|(u_1(t,x)-u_2(s,y))^+ - (u_1(t,x)-u_2(t,x))^+| \leqslant |u_2(s,y)-u_2(t,x)|,$$
$$|H(u_1(t,x)-u_2(s,y))(\varphi(u_1(t,x))-\varphi(u_2(s,y))) - H(u_1(t,x)-u_2(t,x))(\varphi(u_1(t,x))-\varphi(u_2(t,x)))| \leqslant$$
$$\leqslant \mu_\varphi(|u_2(s,y)-u_2(t,x)|),$$
$$|(g(u_1(t,x))-g(u_2(s,y)))^+ - (g(u_1(t,x))-g(u_2(s,y)))^+| \leqslant \mu_g(|u_2(s,y)-u_2(t,x)|),$$

где $\mu_\varphi(\sigma) = \max\{|\varphi(u)-\varphi(v)| \mid u,v\in[-M,M], |u-v|\leqslant\sigma\}$, $\mu_g(\sigma) = \max\{\ |g(u)-g(v)| \mid u,v\in[-M,M], |u-v|\leqslant\sigma\}$ — модули непрерывности вектор-функции $\varphi(u)$ и функции $g(u)$, соответственно, на отрезке $[-M,M]$, $M = \|u_2\|_\infty$. Из этих оценок следует, что

$$\int\limits_{\Pi} \{(u_1(t,x)-u_2(s,y))^+ h_t + H(u_1(t,x)-u_2(s,y))(\varphi(u_1(t,x))-\varphi(u_2(s,y)))\cdot\nabla_x h +$$
$$+ (g(u_1(t,x))-g(u_2(s,y)))^+\Delta_x h\}\delta_r(t-s,x-y) dsdy \underset{r\to\infty}{\to}$$
$$(u_1(t,x)-u_2(t,x))^+ h_t(t,x) + H(u_1(t,x)-u_2(t,x))(\varphi(u_1(t,x))-\varphi(u_2(t,x)))\cdot\nabla_x h(t,x) +$$
$$+ (g(u_1(t,x))-g(u_2(s,y)))^+\Delta_x h(t,x) \quad (3.12)$$

для всех (t,x) из множества полной меры точек Лебега функции u_2. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла из (3.12) следует предельное соотношение

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi} \{(u_1-u_2)^+ h_t + H(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot\nabla_x h +$$
$$+ (g(u_1)-g(u_2))^+\Delta_x h\}\delta_r(t-s,x-y) dtdxdsdy \underset{r\to\infty}{\to}$$

$$\underset{r\to\infty}{\to}\int\limits_{\Pi}\{(u_1-u_2)^+h_t+H(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot\nabla_x h+(g(u_1)-g(u_2))^+\Delta_x h\}dtdx$$

(в левом интеграле $u_2=u_2(s,y)$, в то время как в правом $u_2=u_2(t,x)$). Ввиду (3.11), из этого соотношения вытекает, что

$$\int\limits_{\Pi}\{(u_1-u_2)^+h_t+H(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot\nabla_x h+(g(u_1)-g(u_2))^+\Delta_x h\}dtdx\geqslant 0$$

для всех неотрицательных пробных функций $h\in C_0^\infty(\Pi)$, т. е.

$$((u_1-u_2)^+)_t+\operatorname{div}_x[H(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))]-\Delta_x(g(u_1)-g(u_2))^+\leqslant 0\quad\text{в } \mathcal{D}'(\Pi),\tag{3.13}$$

что и требовалось доказать. □

Соотношение (3.1) лежит в основе доказательства принципа сравнения и единственности э.р. Однако, в рассматриваемом случае лишь непрерывных нелинейностей эти свойства могут нарушаться, и необходимы дополнительные условия. Некоторые такие условия можно найти в [7,8,12]. Следующий результат является непосредственным обобщением [6, Lemma 1] на параболический случай.

Лемма 3.1. *Пусть $u_1=u_1(t,x)$ — э.субр., а $u_2=u_2(t,x)$ — э.суперр. задачи* (1.1), (1.3) *с начальными функциями u_{01}, u_{02}, соответственно. Предположим, что для любого $T>0$ множество $A_T\doteq\{\ (t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^n\mid u_1(t,x)>u_2(t,x)\ \}$ имеет конечную меру Лебега. Тогда для п.в. $t>0$*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_1(t,x)-u_2(t,x))^+dx\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_{01}(x)-u_{02}(x))^+dx.$$

В частности, если $u_{01}\leqslant u_{02}$, то $u_1\leqslant u_2$ п.в. на Π (*принцип сравнения*).

Доказательство. Выберем $0<t_0<t_1$ и положим $f=f(t,x)=(\theta_r(t-t_0)-\theta_r(t-t_1))p(x/l)$, где $r,l\in\mathbb{N}$, неотрицательная функция $p(y)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такова, что $0\leqslant p(y)\leqslant p(0)=1$, а последовательность $\theta_r(s)=\int\limits_{-\infty}^{s}\omega_r(\sigma)d\sigma$ аппроксимаций функции Хевисайда определена в предложении 2.1 выше. Применяя (3.1) к пробной функции f, получим после простых преобразований неравенство

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Pi}(u_1(t,x)-u_2(t,x))^+\omega_r(t-t_1)p(x/l)dtdx\leqslant\int\limits_{\Pi}(u_1(t,x)-u_2(t,x))^+\omega_r(t-t_0)p(x/l)dtdx+\\+\frac{1}{l}\int\limits_{\Pi}H(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot\nabla_y p(x/l)(\theta_r(t-t_0)-\theta_r(t-t_1))dtdx+\\+\frac{1}{l^2}\int\limits_{\Pi}(g(u_1)-g(u_2))^+\Delta_y p(x/l)(\theta_r(t-t_0)-\theta_r(t-t_1))dtdx.\end{gathered}\tag{3.14}$$

Пусть $t_0,t_1\in E$, где E — множество полной меры значений t, для которых (t,x) является точкой Лебега функции $(u_1(t,x)-u(t,x))^+$ для п.в. $x\in\mathbb{R}^n$. Тогда t_0,t_1 — точки Лебега функций $t\to\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_1(t,x)-u_2(t,x))^+p(x/l)dx$, $l\in\mathbb{N}$, и из (3.14) в пределе при $r\to\infty$ следует, что

$$\begin{gathered}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_1(t_1,x)-u_2(t_1,x))^+p(x/l)dx\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_1(t_0,x)-u_2(t_0,x))^+p(x/l)dx+\\+\frac{1}{l}\int\limits_{(t_0,t_1)\times\mathbb{R}^n}H(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot\nabla_y p(x/l)dtdx+\\+\frac{1}{l^2}\int\limits_{(t_0,t_1)\times\mathbb{R}^n}(g(u_1)-g(u_2))^+\Delta_y p(x/l)dtdx\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_1(t_0,x)-u_2(t_0,x))^+dx+\\+\left(\frac{1}{l}\|\varphi(u_1)-\varphi(u_2)\|_\infty\|\nabla_y p\|_\infty+\frac{1}{l^2}\|g(u_1)-g(u_2)\|_\infty\|\Delta_y p\|_\infty\right)\int\limits_{(0,t_1)\times\mathbb{R}^n}H(u_1-u_2)dtdx.\end{gathered}\tag{3.15}$$

Заметим, что по условию леммы выполнено $\int\limits_{(0,t_1)\times\mathbb{R}^n} H(u_1-u_2)dtdx < +\infty$. Переходя к пределу при $E \ni t_0 \to 0+$, получим, что для всех $t = t_1 \in E$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_1(t,x)-u_2(t,x))^+p(x/l)dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_{01}(x)-u_{02}(x))^+p(x/l)dx + \\ + \left(\frac{1}{l}\|\varphi(u_1)-\varphi(u_2)\|_\infty\|\nabla_y p\|_\infty + \frac{1}{l^2}\|g(u_1)-g(u_2)\|_\infty\|\Delta_y p\|_\infty\right)\int\limits_{(0,t)\times\mathbb{R}^n} H(u_1-u_2)dtdx, \quad (3.16)$$

где мы пользуемся неравенством

$$(u_1(t_0,x)-u_2(t_0,x))^+ \leqslant (u_1(t_0,x)-u_{01}(x))^+ + (u_{01}(x)-u_{02}(x))^+ + (u_{02}(x)-u_2(t_0,x))^+$$

вместе с начальными условиями (1.5), (1.7). По лемме Фату из (3.16) в пределе при $l\to\infty$ вытекает соотношение $\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_1(t,x)-u_2(t,x))^+dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_{01}(x)-u_{02}(x))^+dx$. Лемма доказана. □

Мы готовы доказать существование наибольшего и наименьшего э.р. нашей задачи.

3.1. Доказательство теоремы 1.1. Выберем строго убывающую последовательность b_r, $r\in\mathbb{N}$, такую что $b_r > b = \operatorname{ess\,sup} u_0(x)$ при всех $r\in\mathbb{N}$, и определим последовательность начальных функций

$$u_{0r}(x) = \begin{cases} u_0(x), & |x|\leqslant r, \\ b_r, & |x|>r. \end{cases}$$

Пусть $u_r = u_r(t,x)$ — э.р. задачи (1.1), (1.3) с начальными данными u_{0r}. Заметим, что $\forall r\in\mathbb{N}$ $u_0(x)\leqslant u_{0r+1}(x)\leqslant u_{0r}(x)\leqslant b_r$ п.в. $\mathbb{R}^n$ и $\lim\limits_{r\to\infty}u_{0r}(x)=u_0(x)$. Обозначим $d_r = b_r - b_{r+1} > 0$. По принципу максимума $u_r\leqslant b_r$ для всех $r\in\mathbb{N}$. Поэтому

$$\{(t,x)|u_{r+1}(t,x)>u_r(t,x)\}\subset\{(t,x)|b_{r+1}>u_r(t,x)\}=\{(t,x)|b_r-u_r(t,x)>d_r\}.$$

По неравенству Чебышева и следствию 2.1

$$\operatorname{meas}\{(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^n \mid u_{r+1}(t,x)>u_r(t,x)\}\leqslant\operatorname{meas}\{(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^n \mid b_r-u_r(t,x)>d_r\}\leqslant \\ \leqslant\frac{1}{d_r}\int\limits_{(0,T)\times\mathbb{R}^n}(b_r-u_r)^+dtdx\leqslant\frac{T}{d_r}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(b_r-u_{0r})^+dx=\frac{T}{d_r}\int\limits_{|x|<r}(b_r-u_0)dx<+\infty.$$

Итак, выполнены условия леммы 3.1 для э.субр. u_{r+1} и э.суперр. u_r, и по этой лемме $u_{r+1}\leqslant u_r$ п.в. на Π. Так как $u_{0r}\geqslant u_0\geqslant a \doteq \operatorname{ess\,inf} u_0(x)$, то $u_r\geqslant a$ по принципу минимума. Поэтому $u_r(t,x)\to_{r\to\infty}u_+(t,x)\doteq\inf\limits_{r>0}u_r(t,x)$ п.в. на Π, а также и в $L^1_{loc}(\Pi)$. Далее, $\|u_r\|_\infty\leqslant M=\mathrm{const}$, и по следствию 2.3 последовательность градиентов $\nabla_x g(u_r)$ ограничена в $L^2_{loc}(\Pi,\mathbb{R}^n)$. Переходя, если потребуется, к подпоследовательности, мы можем считать, что $\nabla_x g(u_r)\rightharpoonup p$ при $r\to\infty$ слабо в $L^2_{loc}(\Pi,\mathbb{R}^n)$. Из тождества

$$\int\limits_\Pi g(u_r)\nabla_x f dtdx = -\int\limits_\Pi f\nabla_x g(u_r)dtdx, \quad f=f(t,x)\in C_0^\infty(\Pi),$$

в пределе при $r\to\infty$ следует, что

$$\int\limits_\Pi g(u_+)\nabla_x f dtdx = -\int\limits_\Pi fpdtdx, \quad \forall f=f(t,x)\in C_0^\infty(\Pi),$$

т. е. $\nabla_x g(u_+) = p\in L^2_{loc}(\Pi,\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$. Мы видим, что функция u_+ удовлетворяет требованию частичной соболевской регулярности из определения 1.1.

По предложению 2.1 э.р. u_r удовлетворяет интегральному соотношению (2.7):

$$\int\limits_\Pi[|u_r-k|f_t+\operatorname{sign}(u_r-k)(\varphi(u_r)-\varphi(k))\cdot\nabla_x f+|g(u_r)-g(k)|\Delta_x f]dtdx+\int\limits_{\mathbb{R}^n}|u_{0r}(x)-k)|f(0,x)dx\geqslant 0$$

для любого $k \in \mathbb{R}$ и всех неотрицательных пробных функций $f = f(t,x) \in C_0^\infty(\bar{\Pi})$. В пределе при $r \to \infty$ из этого соотношения следует, что функция u_+ также удовлетворяет (2.7):

$$\int\limits_{\Pi} [|u_+ - k|f_t + \operatorname{sign}(u_+ - k)(\varphi(u_+) - \varphi(k)) \cdot \nabla_x f + |g(u_+) - g(k)|\Delta_x f]dtdx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u_0(x) - k|f(0,x)dx \geqslant 0.$$

Итак, u_+ — э.р. задачи (1.1), (1.3).

Покажем, что u_+ — наибольшее э.субр. этой задачи. Для этого возьмем произвольное э.субр. $u = u(t,x)$ задачи (1.1), (1.3). По принципу максимума $u \leqslant b$. Поэтому в множестве $\Pi_T = (0,T) \times \mathbb{R}^n$ имеет место цепочка включений $\{u > u_r\} \subset \{b > u_r\} = \{b_r - u_r > b_r - b\}$, из которой следует, что

$$\operatorname{meas}\{u > u_r\} \leqslant \frac{1}{b_r - b} \int\limits_{\Pi_T} (b_r - u_r)^+ dx \leqslant \frac{T}{b_r - b} \int\limits_{|x|<r} (b_r - u_0)dx < +\infty,$$

где мы снова использовали неравенство Чебышева и следствие 2.1. Итак, выполнены условия леммы 3.1, примененной к э.субр. u и э.суперр. u_r. По этой лемме справедлив принцип сравнения, а значит, из неравенства $u_0 \leqslant u_{0r}$ вытекает, что $u \leqslant u_r$ п.в. на Π. В пределе при $r \to \infty$ получаем, что $u \leqslant u_+$ п.в. на Π. Итак, u_+ является наибольшим э.субр. задачи (1.1), (1.3).

Далее, пусть $v_+ = v_+(t,x)$ — наибольшее э.субр. задачи (1.12). Тогда по замечанию 1.1 (i) функция $u_-(t,x) = -v_+(t,x)$ будет наименьшим э.суперр. (и э.р.) исходной задачи (1.1), (1.3). Очевидно, $u_- \leqslant u_+$. Теорема полностью доказана.

3.2. Доказательство теоремы 1.2. Пусть u_{1+}, u_{2+} — наибольшие э.р. задачи (1.1), (1.3) с начальными данными u_{10}, u_{20}. Выберем строго возрастающую последовательность b_r, $r \in \mathbb{N}$, такую что $b_r > \max(\|u_{10}\|_\infty, \|u_{20}\|_\infty)$, и определим последовательности

$$u_{1r}^0(x) = \begin{cases} u_{10}(x), & |x| \leqslant r, \\ b_r, & |x| > r, \end{cases} \qquad u_{2r}^0(x) = \begin{cases} u_{20}(x), & |x| \leqslant r, \\ b_r + 1, & |x| > r. \end{cases}$$

Как показано в доказательстве теоремы 1.1, соответствующие последовательности э.р. u_{1r}, u_{2r} при $r \to \infty$ сильно (поточечно и в $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$) сходятся к наибольшим э.р. u_{1+}, u_{2+}, соответственно. По принципу максимума $u_{1r} \leqslant b_r$. Поэтому для любого $T > 0$

$$\{(t,x) \in \Pi_T | u_{1r}(t,x) > u_{2r}(t,x)\} \subset \{(t,x) \in \Pi_T | b_r > u_{2r}(t,x)\} = \{(t,x) \in \Pi_T | b_r + 1 - u_{2r}(t,x) > 1\},$$

так что по неравенству Чебышева и следствию 2.1

$$\operatorname{meas}\{(t,x) \in \Pi_T | u_{1r}(t,x) > u_{2r}(t,x)\} \leqslant \int\limits_{\Pi_T} (b_r + 1 - u_{2r}(t,x))dtdx \leqslant T \int\limits_{|x|<r} (b_r + 1 - u_{20}(x))dx < \infty.$$

По лемме 3.1 для п.в. $t > 0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_{1r}(t,x) - u_{2r}(t,x))^+ dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_{1r}^0(x) - u_{2r}^0(x))^+ dx =$$
$$= \int\limits_{|x|<r} (u_{10}(x) - u_{20}(x))^+ dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_{10}(x) - u_{20}(x))^+ dx.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $r \to \infty$ с помощью леммы Фату, приходим к желаемой оценке

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_{1+}(t,x) - u_{2+}(t,x))^+ dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_{10}(x) - u_{20}(x))^+ dx.$$

Случай наименьших э.р. сводится к уже разобранному с учетом равенств $u_{1-} = -v_{1+}$, $u_{2-} = -v_{2+}$, где v_{1+}, v_{2+} — наибольшие э.р. задачи (1.12) с соответствующими начальными данными $-u_{10}(x)$, $-u_{20}(x)$. Как уже доказано, верна оценка

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (v_{2+}(t,x) - v_{1+}(t,x))^+ dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_{10}(x) - u_{20}(x))^+ dx,$$

эквивалентная требуемому соотношению

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u_{1-}(t,x) - u_{2-}(t,x))^+ dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} (u_{10}(x) - u_{20}(x))^+ dx.$$

3.3. Случай периодических начальных данных. Предположим теперь, что начальная функция $u_0(x)$ — периодическая. Не умаляя общности, можно считать, что решетка периодов совпадает со стандартной целочисленной решеткой $\mathbb{Z}^n$. Таким образом, $u_0(x+e) = u_0(x)$ п.в. на $\mathbb{R}^n$ для всех $e \in \mathbb{Z}^n$.

Теорема 3.2. *Наибольшее э.р. u_+ и наименьшее э.р. u_- задачи* (1.1), (1.3) *являются периодическими по пространственным переменным функциями, и они совпадают: $u_+ = u_-$.*

Доказательство. Пусть $e \in \mathbb{Z}^m$. Ввиду периодичности начальной функции ясно, что функция $u(t, x+e)$ является э.р. задачи (1.1), (1.3) тогда и только тогда, когда $u(t,x)$ — э.р. этой задачи. Отсюда следует, что $u_+(t, x+e)$ является наибольшим э.р. задачи (1.1), (1.3) вместе с u_+. По единственности $u_+(t,x+e) = u_+(t,x)$ п.в. на Π для всех $e \in \mathbb{Z}^n$, т. е. u_+ — пространственно периодическая функция. Аналогично доказывается пространственная периодичность наименьшего э.р. u_-. Поскольку $u_\pm$ — слабые решения уравнения (1.1), имеем

$$(u_+ - u_-)_t + \operatorname{div}_x(\varphi(u_+) - \varphi(u_-)) - \Delta_x(g(u_+) - g(u_-)) = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi). \tag{3.17}$$

Пусть $\alpha(t) \in C_0^1(\mathbb{R}_+)$, $\beta(y) \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \beta(y)dy = 1$. Применяя (3.17) к пробной функции $\alpha(t)\beta(x/k)$, где $k \in \mathbb{N}$, получим соотношение

$$\int_\Pi (u_+ - u_-)\alpha'(t)\beta(x/k)dtdx + k^{-1}\int_\Pi (\varphi(u_+) - \varphi(u_-)) \cdot \nabla_y \beta(x/k)\alpha(t)dtdx +$$
$$+ k^{-2}\int_\Pi (g(u_+) - g(u_-))\Delta_y\beta(x/k)\alpha(t)dtdx = 0.$$

Умножим это равенство на k^{-n} и перейдем к пределу при $k \to \infty$. Используя известное свойство

$$\lim_{k\to\infty} k^{-n}\int_\Pi \mu(t,x)\alpha(t)\beta(x/k)dtdx = \int_{\mathbb{R}_+\times P} \alpha(t)\mu(t,x)dtdx,$$

где $\mu(t,x) \in L^1_{loc}(\Pi)$ — x-периодическая функция, а $P = [0,1)^n$ — ячейка периодичности, получим равенство

$$\int_{\mathbb{R}_+\times P} (u_+(t,x) - u_-(t,x))\alpha'(t)dtdx = 0. \tag{3.18}$$

Ввиду произвольности $\alpha(t) \in C_0^1(\mathbb{R}_+)$ тождество (3.18) означает, что

$$\frac{d}{dt}\int_P (u_+(t,x) - u_-(t,x))dx = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+).$$

Поэтому для п.в. t, t_0, $t > t_0$

$$\int_P (u_+(t,x) - u_-(t,x))dx = \int_P (u_+(t_0,x) - u_-(t_0,x))dx. \tag{3.19}$$

Принимая во внимание начальные условия (1.5), (1.7), находим, что

$$\int_P (u_+(t_0,x) - u_-(t_0,x))dx \leqslant \int_P (u_+(t_0,x) - u_0(x))^+dx + \int_P (u_0(x) - u_-(t_0,x))^+dx \to 0,$$

когда $t_0 \to 0$, пробегая некоторое множество полной меры. Таким образом, из (3.19) в пределе при $t_0 \to 0$ следует, что

$$\int_P (u_+(t,x) - u_-(t,x))dx = 0$$

для п.в. $t > 0$. Так как $u_+ \geqslant u_-$, заключаем, что $u_+ = u_-$ п.в. на Π. Теорема доказана. $\square$

Поскольку любое э.р. задачи (1.1), (1.3) расположено между u_- и u_+, из теоремы 3.2 вытекает единственность э.р.:

Следствие 3.1. *Если начальная функция периодическая, то э.р. задачи* (1.1), (1.3) *единственно и совпадает с* u_+.

Более обще, справедлив принцип сравнения из теоремы 1.3.

3.4. Доказательство теоремы 1.3. Допустим для определенности, что функция $u_0(x)$ — периодическая. Случай периодической начальной функции v_0 разбирается аналогично. По теореме 3.2 функции $u_+ = u_-$ совпадают с единственным э.р. задачи (1.1), (1.3). Так как u_+ — это наибольшее э.субр., то $u \leqslant u_+ = u_-$. Ясно, что функция v — э.суперр. задачи (1.1), (1.3) с начальной функцией u_0 (поскольку $u_0 \leqslant v_0$), и так как u_- — наименьшее э.суперр. этой задачи, верно неравенство $u_- \leqslant v$. Итак, $u \leqslant u_+ = u_- \leqslant v$, что и требовалось доказать.

Подчеркнем, что для законов сохранения (1.2) теоремы 1.1–1.3 доказаны в [3–5]. При этом принцип сравнения и единственность э.р. справедливы и в более общем случае, когда начальные данные периодичны в $n-1$ независимых направлениях. Адаптируя методы работ [4, 5], нетрудно установить, что эти результаты верны и для параболических уравнений (1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кружков С. Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными// Мат. сб. — 1970. — *81*, № 2. — С. 228–255.
2. *Кружков С. Н., Панов Е. Ю.* Консервативные квазилинейные законы первого порядка с бесконечной областью зависимости от начальных данных// Докл. АН СССР. — 1990. — *314*, № 1. — С. 79–84.
3. *Панов Е. Ю.* К теории обобщенных энтропийных суб- и суперрешений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка// Дифф. уравн. — 2001. — *37*, № 2. — С. 252–259.
4. *Панов Е. Ю.* О наибольших и наименьших обобщенных энтропийных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка// Мат. сб. — 2002. — *193*, № 5. — С. 95–112.
5. *Панов Е. Ю.* К теории обобщенных энтропийных решений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка в классе локально суммируемых функций// Изв. РАН. — 2002. — *66*, № 6. — С. 91–136.
6. *Andreianov B. P., Bénilan Ph., Kruzhkov S. N.* L^1-theory of scalar conservation law with continuous flux function// J. Funct. Anal. — 2000. — *171*, № 1. — С. 15–33.
7. *Andreianov B. P., Igbida N.* On uniqueness techniques for degenerate convection–diffusion problems// Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. — 2012. — *4*, № 1-2. — С. 3–34.
8. *Andreianov B. P., Maliki M.* A note on uniqueness of entropy solutions to degenerate parabolic equations in $\mathbb{R}^N$// NoDEA: Nonlinear Differ. Equ. Appl. — 2010. — *17*, № 1. — С. 109–118.
9. *Bénilan Ph., Kruzhkov S. N.* Conservation laws with continuous flux function// NoDEA: Nonlinear Differ. Equ. Appl. — 1996. — *3*. — С. 395–419.
10. *Carrillo J.* Entropy solutions for nonlinear degenerate problems// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1999. — *147*. — С. 269–361.
11. *Kruzhkov S. N., Panov E. Yu.* Osgood's type conditions for uniqueness of entropy solutions to Cauchy problem for quasilinear conservation laws of the first order// Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat. — 1994. — *40*. — С. 31–54.
12. *Maliki M., Touré H.* Uniqueness of entropy solutions for nonlinear degenerate parabolic problem// J. Evol. Equ. — 2003. — *3*, № 4. — С. 603–622.
13. *Panov E. Yu.* On the Cauchy problem for scalar conservation laws in the class of Besicovitch almost periodic functions: Global well-posedness and decay property// J. Hyperbolic Differ. Equ. — 2016. — *13*. — С. 633–659.
14. *Panov E. Yu.* To the theory of entropy sub-solutions of degenerate nonlinear parabolic equations// Math. Methods Appl. Sci. — 2020. — DOI: 10.1002/mma.6262.

Е. Ю. Панов
Новгородский государственный университет, Великий Новгород, Россия;
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: eugeny.panov@novsu.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-292-313 UDC 517.957

On the Theory of Entropy Solutions of Nonlinear Degenerate Parabolic Equations

© 2020 **E. Yu. Panov**

Abstract. We consider a second-order nonlinear degenerate parabolic equation in the case when the flux vector and the nonstrictly increasing diffusion function are merely continuous. In the case of zero diffusion, this equation degenerates into a first order quasilinear equation (conservation law). It is known that in the general case under consideration an entropy solution (in the sense of Kruzhkov–Carrillo) of the Cauchy problem can be non-unique. Therefore, it is important to study special entropy solutions of the Cauchy problem and to find additional conditions on the input data of the problem that are sufficient for uniqueness. In this paper, we obtain some new results in this direction. Namely, the existence of the largest and the smallest entropy solutions of the Cauchy problem is proved. With the help of this result, the uniqueness of the entropy solution with periodic initial data is established. More generally, the comparison principle is proved for entropy sub- and super-solutions, in the case when at least one of the initial functions is periodic. The obtained results are generalization of the results known for conservation laws to the parabolic case.

REFERENCES

1. S. N. Kruzhkov, "Kvazilineynye uravneniya pervogo poryadka so mnogimi nezavisimymi peremennymi" [Quasilinear first-order equations with many independent variables], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1970, **81**, No. 2, 228–255 (in Russian).
2. S. N. Kruzhkov and E. Yu. Panov, "Konservativnye kvazilineynye zakony pervogo poryadka s beskonechnoy oblast'yu zavisimosti ot nachal'nykh dannykh" [Conservative quasilinear first-order laws with infinite domain of dependence on initial data], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1990, **314**, No. 1, 79–84 (in Russian).
3. E. Yu. Panov, "K teorii obobshchennykh entropiynykh sub- i super-resheniy zadachi Koshi dlya kvazilineynogo uravneniya pervogo poryadka" [To the theory of generalized entropic sub- and super-solutions of the Cauchy problem for first-order quasilinear equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2001, **37**, No. 2, 252–259 (in Russian).
4. E. Yu. Panov, "O naibol'shikh i naimen'shikh obobshchennykh entropiynykh resheniyakh zadachi Koshi dlya kvazilineynogo uravneniya pervogo poryadka" [On greatest and least generalized entropic solutions of the Cauchy problem for quasilinear first-order equation], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2002, **193**, No. 5, 95–112 (in Russian).
5. E. Yu. Panov, "K teorii obobshchennykh entropiynykh resheniy zadachi Koshi dlya kvazilineynogo uravneniya pervogo poryadka v klasse lokal'no summiruemykh funktsiy" [To the theory of generalized entropic solutions of the Cauchy problem for first-order quasilinear equation in the class of locally summable functions], *Izv. RAN* [Bull. Russ. Acad. Sci.], 2002, **66**, No. 6, 91–136 (in Russian).
6. B. P. Andreianov, Ph. Bénilan, and S. N. Kruzhkov, "L^1-theory of scalar conservation law with continuous flux function," *J. Funct. Anal.*, 2000, **171**, No. 1, 15–33.
7. B. P. Andreianov and N. Igbida, "On uniqueness techniques for degenerate convection–diffusion problems," *Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ.*, 2012, **4**, No. 1-2, 3–34.
8. B. P. Andreianov and M. Maliki, "A note on uniqueness of entropy solutions to degenerate parabolic equations in $\mathbb{R}^N$," *NoDEA*: *Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 2010, **17**, No. 1, 109–118.
9. Ph. Bénilan and S. N. Kruzhkov, "Conservation laws with continuous flux function," *NoDEA*: *Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 1996, **3**, 395–419.
10. J. Carrillo, "Entropy solutions for nonlinear degenerate problems," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1999, **147**, 269–361.

11. S. N. Kruzhkov and E. Yu. Panov, “Osgood’s type conditions for uniqueness of entropy solutions to Cauchy problem for quasilinear conservation laws of the first order,” *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat.*, 1994, **40**, 31–54.
12. M. Maliki and H. Touré, “Uniqueness of entropy solutions for nonlinear degenerate parabolic problem,” *J. Evol. Equ.*, 2003, **3**, No. 4, 603–622.
13. E. Yu. Panov, “On the Cauchy problem for scalar conservation laws in the class of Besicovitch almost periodic functions: Global well-posedness and decay property,” *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 2016, **13**, 633–659.
14. E. Yu. Panov, “To the theory of entropy sub-solutions of degenerate nonlinear parabolic equations,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2020, DOI: 10.1002/mma.6262.

E. Yu. Panov
Novgorod State University, Velikiy Novgorod, Russia
E-mail: eugeny.panov@novsu.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 66, № 2 (2020). С. 314–334

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-314-334 УДК 517.97

L^2-АППРОКСИМАЦИИ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА В ПЕРФОРИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2020 г. **С. Е. ПАСТУХОВА**

Аннотация. Изучается усреднение эллиптического дифференциального оператора A_ε второго порядка, действующего в пространстве с ε-периодической перфорацией, ε — малый параметр. Коэффициенты оператора A_ε — измеримые ε-периодические функции. Интерес представляет и самый простой случай, когда коэффициенты оператора постоянны. Найдена аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon + 1)^{-1}$ с остаточным членом порядка ε^2 при $\varepsilon \to 0$ в операторной L^2-норме по перфорированному пространству. Аппроксимация имеет вид суммы резольвенты усредненного оператора $(A_0 + 1)^{-1}$ и некоторого корректирующего оператора $\varepsilon\mathcal{C}_\varepsilon$. Доказательство этого результата проведено модифицированным методом первого приближения с использованием сглаживания по Стеклову.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Усреднение дифференциальных уравнений в перфорированных областях было предметом интенсивного исследования в теории усреднения с самого начала. Например, в широко известных монографиях по усреднению [1, 2, 8, 12, 18] этой задаче в различных постановках уделено много внимания.

Данная статья продолжает линию работ [5, 7, 9–11, 13–15, 19–21, 24–27, 31, 34–36] (см. также указанную в обзоре [11] библиографию), в которых с позиций, очень близких к классическому методу двухмасштабных разложений, изложенному во всех монографиях [1, 2, 8, 12, 18] в том или ином виде, изучается усреднение периодического эллиптического дифференциального оператора

$$A_\varepsilon = -\operatorname{div} a(x/\varepsilon)\nabla,$$

действующего в $\mathbb{R}^d$ с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами, зависящими от x/ε, ε — малый параметр, при минимальных условиях регулярности. А именно, исходная 1-периодическая матрица коэффициентов $a(\cdot)$ измерима, ограничена и равномерно положительно определена, т. е. $a(\cdot)$ удовлетворяет условию эллиптичности. В указанных статьях основной предмет рассмотрения — это операторные оценки усреднения для эллиптических и параболических уравнений. Более точно, это оценки в операторных нормах, например, для разности резольвенты исходного эллиптического оператора $(A_\varepsilon + 1)^{-1}$ и ее соответствующих аппроксимаций. В операторной L^2-норме подходящей аппроксимацией порядка ε будет резольвента $(A_0+1)^{-1}$ усредненного оператора с постоянными коэффициентами

$$A_0 = -\operatorname{div} a^0 \nabla,$$

хорошо известного в усреднении. При этом выполнена оценка

$$\|(A_\varepsilon+1)^{-1} - (A_0+1)^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c\varepsilon,$$

где константа в правой части зависит лишь от размерности d и константы эллиптичности для матрицы коэффициентов a. Интерес к подобного сорта оценкам возник с появлением статьи [3], где приведенная выше операторная L^2-оценка впервые была доказана в рамках более общего результата. При этом в [3] применялся спектральный подход, основанный на преобразовании Флоке—Блоха и некоторых полученных авторами результатах из теории возмущения самосопряженных операторов. В последние годы усилиями многих математиков установлены различные результаты по операторным оценкам усреднения, причем с использованием различных подходов. Что касается работ [5,7,9–11,13–15,19–21,24–27,31,34–36], операторные оценки усреднения доказываются в них с помощью иного, по сравнению с [3], метода.

Для этой цели В. В. Жиковым был предложен *модифицированный метод первого приближения*, впервые изложенный в [5]. Метод получил дальнейшее развитие в [34, 35]. Уже в работе [34] изучались эллиптические уравнения в ε-периодическом перфорированном пространстве, в том числе система уравнений теории упругости, и для резольвенты исходного оператора A_ε были получены аппроксимации порядка ε в операторных нормах $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)}$ и $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}$. В данной работе нас интересуют аналогичные аппроксимации резольвенты в операторной норме $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)}$, но порядка ε^2.

Назовем кратко основные особенности модифицированного метода первого приближения, согласно которому решение исходного уравнения аппроксимируется специально построенной функцией, по структуре напоминающей первое приближение из классической теории (отсюда и название метода). Во-первых, это — специальный анализ невязки первого приближения в эллиптическом уравнении. Во-вторых, это — введение дополнительного параметра интегрирования за счет непосредственного сдвига в коэффициентах или за счет сглаживания, например, по Стеклову, в нулевом приближении и корректоре, из-за чего метод часто именуется как *метод сдвига*. (Отметим, что сглаживание по Стеклову называют нередко *обобщенным сдвигом*.) Именно дополнительный параметр интегрирования позволяет обойти технические трудности, связанные с минимальными предположениями о регулярности данных задачи.

Основные результаты этой работы сформулированы в теоремах 2.1 и 2.2, касающихся самосопряженного случая, а также в теореме 6.1, относящейся к несамосопряженному случаю. Доказательство теорем приведено в разделах 4 и 6. Отдельный интерес представляют (по-видимому, замеченные лишь в последнее время) свойства сглаживания из лемм 3.3, 3.4, 3.5, которые играют важную роль в получении L^2-оценок порядка ε^2. Для полноты изложения приведено их доказательство в разделе 7.

2. Усреднение в перфорированном пространстве

2.1. Основная задача и ее усреднение. Пусть Q есть периодическая область в $\mathbb{R}^d$, $d\geqslant 2$, ячейка периодичности — единичный куб $\square = [-1/2, 1/2)^d$. Считаем, что Q — липшицева область, связная в $\mathbb{R}^d$. Множество $\mathbb{R}^d\setminus Q$ есть объединение «дыр» в перфорированном пространстве; в общем случае оно не обязательно дисперсно.

Введем нормированную характеристическую функцию $\rho_Q(y)=\rho(y)$, такую что $\rho(y)=1/|\square\cap Q|$, если $y\in Q$, и $\rho(y)=0$ вне Q; и пусть $\rho_\varepsilon(x)=\rho(\varepsilon^{-1}x)$. Очевидно,

$$\langle\rho\rangle := \int\limits_{\square} \rho\,dy = 1 \quad \text{и} \quad \int\limits_{\varepsilon\square} \rho_\varepsilon\,dx = \varepsilon^d, \tag{2.1}$$

где $\varepsilon\square = [-\varepsilon/2, \varepsilon/2)^d$. Как следствие $(2.1)_2$, имеет место слабая сходимость мер

$$\rho_\varepsilon\,dx \rightharpoonup dx \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0. \tag{2.2}$$

Обозначим через $H^1(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx)$ замыкание $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ по норме $\|\cdot\|_{1,\varepsilon}$, определенной равенством $\|\varphi\|^2_{1,\varepsilon} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} (|\varphi|^2+|\nabla\varphi|^2)\rho_\varepsilon dx$. Это — гильбертово пространство, аналогичное во многом классическому пространству Соболева $H^1(\mathbb{R}^d, dx) = H^1(\mathbb{R}^d)$.

Пусть $a_\varepsilon(x) = a(\varepsilon^{-1}x)$ и $a(y)$ — измеримая симметрическая периодическая матрица, ячейка периодичности — куб $\square = [-1/2, 1/2)^d$. Предполагаем условия эллиптичности и ограниченности:

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant a\xi\cdot\xi \leqslant \lambda^{-1}|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \tag{2.3}$$

для некоторой константы $\lambda \in (0, 1)$.

Рассмотрим эллиптическое уравнение в ε-периодическом перфорированном пространстве с характеристической функцией ρ_ε:

$$u^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx), \quad A_\varepsilon u^\varepsilon + \rho_\varepsilon u^\varepsilon = \rho_\varepsilon f, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad A_\varepsilon = -\operatorname{div}(\rho_\varepsilon a_\varepsilon \nabla). \tag{2.4}$$

Решение понимается в смысле интегрального тождества

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} (a_\varepsilon \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla\varphi + u^\varepsilon\varphi)\,\rho_\varepsilon dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f\varphi\,\rho_\varepsilon dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

т. е. в смысле распределений на $\mathbb{R}^d$. По замыканию в качестве пробной можно брать любую функцию из $H^1(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx)$. Разрешимость уравнения (2.4) устанавливается по лемме Лакса—Мильграма. Из интегрального тождества легко выводится энергетическая оценка для решения задачи (2.4)

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx)} \leqslant c\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx)}, \quad c = const(\lambda).$$

Усредненным будем называть следующее уравнение с постоянными коэффициентами во всем пространстве $\mathbb{R}^d$:

$$u \in H^1(\mathbb{R}^d, dx), \quad (A_0 + 1)u = \rho_\varepsilon f, \quad A_0 = -\operatorname{div} a^0\nabla, \tag{2.5}$$

решение которого понимается в смысле распределений на $\mathbb{R}^d$, т. е. в смысле интегрального тождества

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} (a^0\nabla u \cdot \nabla\varphi + u\varphi)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon f\varphi\,dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \tag{2.6}$$

Решение уравнения (2.5) зависит от ε через правую часть, но для простоты этот момент в обозначениях не отражается. Ниже (см. (2.10)) сформулирован один из результатов [34], показывающих, в каком смысле можно понимать близость решения u^ε исходного уравнения к решению u усредненного уравнения (2.6).

Согласно классическим канонам, матрица коэффициентов a^0 в усредненном уравнении (2.5) находится через решения задачи на ячейке

$$N^j \in H^1_{\mathrm{per}}(\square, \rho\,dy), \quad \operatorname{div}_y[\rho(y)a(y)(e^j + \nabla_y N^j)] = 0, \quad \langle\rho N^j\rangle = 0, \quad j = 1, \ldots, d, \tag{2.7}$$

по формуле

$$a^0 e^j = \langle\rho a(e^j + \nabla_y N^j)\rangle, \quad j = 1, \ldots, d, \tag{2.8}$$

где $e^1, \ldots, e^d$ — векторы канонического базиса в $\mathbb{R}^d$, а через $\langle\cdot\rangle$ обозначено среднее по ячейке периодичности $\square = [-1/2, 1/2)^d$ (см. (2.1)).

В (2.7) использовано пространство $H^1_{\mathrm{per}}(\square, \rho\,dy)$: замыкание $C^\infty_{\mathrm{per}}(\square)$ по норме $\langle\rho(|\varphi|^2+|\nabla\varphi|^2)\rangle^{1/2}$. На множестве функций $\varphi \in H^1_{\mathrm{per}}(\square, \rho\,dy)$, таких что $\langle\rho\varphi\rangle = 0$, эквивалентной нормой будет $\langle\rho|\nabla\varphi|^2)\rangle^{1/2}$, что является следствием неравенства Пуанкаре $\langle\rho|\varphi|^2\rangle \leqslant c_P\langle\rho|\nabla\varphi|^2\rangle$, если $\langle\rho\varphi\rangle = 0$, $\varphi \in C^\infty_{\mathrm{per}}(\square)$. Это неравенство имеет место, поскольку в наших предположениях есть так называемая связность Q на торе (т. е. связность области Q на ячейке периодичности — кубе $\square$, у которого отождествлены противоположные грани).

Решение задачи на ячейке понимается в смысле интегрального тождества

$$\langle\rho a(e^j + \nabla N^j)\cdot\nabla\varphi\rangle = 0, \quad \varphi \in C^\infty_{\mathrm{per}}(\square), \tag{2.9}$$

где по замыканию в качестве пробной можно брать любую функцию из $H^1_{\mathrm{per}}(\square, \rho\,dy)$. Существование решения устанавливается по лемме Лакса—Мильграма. Решение единственно в силу условия $\langle\rho N^j\rangle = 0$.

С другой стороны, уравнение (2.7) можно рассматривать в смысле распределений на $\mathbb{R}^d$, что является известным фактом в усреднении. Таким образом, решение этого уравнения удовлетворяет интегральному тождеству на пробных функциях из $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, т. е.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \rho a(e^j + \nabla N^j) \cdot \nabla \varphi dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

где фактически интегрирование идет по области Q.

Из связности периодической области Q в $\mathbb{R}^d$ вытекает свойство $a^0 > 0$. Последнее свойство заведомо имеет место для перфорированной среды с дисперсным распределением «дыр» в пространстве $\mathbb{R}^d$ (по определению дисперсности). Простейший пример такой среды наблюдается, если в качестве множества «дыр» $\mathbb{R}^d \setminus Q$ взять объединение всех шаров радиуса $r \in (0, 1/4)$ с центрами в целочисленных точках.

В силу эллиптичности матрицы a^0 усредненная задача имеет единственное решение. Усредненное уравнение намного проще исходного уравнения (2.4), несмотря на то, что мы не избавляемся окончательно в (2.5) от ε-периодической осцилляции, которая остается в правой части уравнения. Уравнение (2.6) имеет постоянные коэффициенты, ставится во всем пространстве $\mathbb{R}^d$ без перфорации, и лишь правая часть $\rho_\varepsilon f$ сохраняет память об исходной ε-периодической перфорации пространства.

В [34] (см. также [11]) доказан следующий факт: если u^ε, u — решения задач (2.4) и (2.5), то для их разности справедлива оценка

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx)} \leqslant C\varepsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx)}, \tag{2.10}$$

где константа C зависит от размерности d, постоянной эллиптичности λ и перфорированной области Q. Здесь задействовано L^2-пространство с меняющейся мерой $\rho_\varepsilon dx$. Нетрудно понять, что оценка (2.10) допускает формулировку в терминах фиксированного (не зависящего от ε) пространства $L^2(\mathbb{R}^d)$ с мерой Лебега dx, а именно,

$$\|\rho_\varepsilon (A_\varepsilon + \rho_\varepsilon)^{-1} \rho_\varepsilon - \rho_\varepsilon (A_0 + 1)^{-1} \rho_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c\varepsilon, \quad c = const(d, \lambda, Q). \tag{2.11}$$

Наша цель — найти такой корректирующий оператор $\mathcal{C}_\varepsilon : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$, чтобы выполнялась оценка

$$\|\rho_\varepsilon (A_\varepsilon + \rho_\varepsilon)^{-1} \rho_\varepsilon - \rho_\varepsilon (A_0 + 1)^{-1} \rho_\varepsilon - \varepsilon \mathcal{C}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c\varepsilon^2, \quad c = const(d, \lambda, Q). \tag{2.12}$$

Точный результат о корректирующем операторе $\mathcal{C}_\varepsilon$ предъявлен ниже в теореме 2.1.

2.2. Техника продолжения. Усреднение в перфорированных областях можно изучать без техники продолжения. Однако для наших целей полезно вспомнить известные факты об операторах продолжения функций, заданных в перфорированном пространстве (см., например, [12, гл. I], [8, гл. III], а также [17]).

Как элемент пространства $H^1_{\mathrm{per}}(\square, \rho\, dy)$, решение N^j задачи на ячейке (2.7) определено на множестве $\square \cap Q$. Часто удобно считать, что N^j продолжено с $\square \cap Q$ на $\square$ до функции $\tilde{N}^j$, при этом

$$\|\nabla \tilde{N}^j\|_{L^2(\square)} \leqslant c_0 \|\nabla N^j\|_{L^2(\square \cap Q)}, \qquad \|\tilde{N}^j\|_{L^2(\square)} \leqslant c_0 \|N^j\|_{L^2(\square \cap Q)}, \tag{2.13}$$

где константа зависит лишь от Q.

Аналогично будем считать, если это необходимо, функции $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx)$ продолженными до функций $\tilde{\varphi} \in H^1(\mathbb{R}^d, dx)$ так, что выполнены равномерные по ε оценки

$$\|\tilde{\varphi}\|_{H^1(\mathbb{R}^d, dx)} \leqslant c_0 \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx)}, \qquad \|\nabla \tilde{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^d, dx)} \leqslant c_0 \|\nabla \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx)}, \tag{2.14}$$

где константа зависит лишь от Q.

Далее для заданной 1-периодической перфорированной области Q берутся линейные операторы продолжения на ячейке периодичности и в ε-периодическом пространстве $P : H^1_{\mathrm{per}}(\square, \rho\, dy) \to H^1_{\mathrm{per}}(\square, dy)$ и $P^\varepsilon : H^1(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx) \to H^1(\mathbb{R}^d, dx)$ с контролем норм в виде оценок типа (2.13) и (2.14). Например, если $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx)$ и $P^\varepsilon \varphi = \tilde{\varphi}$, то выполнены оценки (2.14).

Области, для которых существуют подобные операторы продолжения, описаны в [12, гл. I, § 4] и [8, гл. III, § 1]. Например, это области с так называемой дисперсной перфорацией. Наиболее общие результаты о существовании операторов продолжения с оценками (2.13) и (2.14) получены в [17]. От перфорированной области Q достаточно требовать связность и липшицевость.

2.3. L^2-оценка с корректором. Зададим оператор $\mathcal{K}_\varepsilon : L^2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)$ формулой

$$\mathcal{K}_\varepsilon f = N_\varepsilon \cdot \nabla S^\varepsilon (A_0+1)^{-1} f, \qquad N_\varepsilon(x) = N(\varepsilon^{-1}x), \tag{2.15}$$

где $N = (N^1, \dots, N^d)$ — вектор, составленный из решений задачи на ячейках, продолженных на всю ячейку $\square$; S^ε — оператор сглаживания по Стеклову, определенный в (3.1). Тогда

$$\|\varepsilon \mathcal{K}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant c, \quad c = const(d, \lambda, Q) \tag{2.16}$$

в силу свойств сглаживания (см. лемму 3.1) и эллиптической оценки (4.12). С другой стороны, заданный в (2.15) оператор $\mathcal{K}_\varepsilon$ ограниченно действует в $L^2(\mathbb{R}^d)$, при этом $\|\mathcal{K}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c$ (константа того же типа, что в (2.16)) и имеет сопряженный $(\mathcal{K}_\varepsilon)^* : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$, такой что $(\mathcal{K}_\varepsilon)^* f := (A_0+1)^{-1} S^\varepsilon \operatorname{div}(N_\varepsilon f)$.

Оператор $\varepsilon \mathcal{C}_\varepsilon = \varepsilon \rho_\varepsilon (\mathcal{K}_\varepsilon + (\mathcal{K}_\varepsilon)^*)\rho_\varepsilon$ ограниченно действует в $L^2(\mathbb{R}^d)$, имеет норму порядка ε и является правильным корректирующим оператором к $\rho_\varepsilon (A_0+1)^{-1}\rho_\varepsilon$ в аппроксимации с остатком порядка ε^2 для резольвенты $\rho_\varepsilon(A_\varepsilon+\rho_\varepsilon)^{-1}\rho_\varepsilon$, так что выполнена искомая оценка (2.12). Это показывает следующая теорема.

Теорема 2.1. *Справедлива оценка*

$$\begin{gathered}\|\rho_\varepsilon(A_\varepsilon+\rho_\varepsilon)^{-1}\rho_\varepsilon - \rho_\varepsilon(A_0+1)^{-1}\rho_\varepsilon - \varepsilon\rho_\varepsilon\mathcal{K}_\varepsilon\rho_\varepsilon - \varepsilon\rho_\varepsilon(\mathcal{K}_\varepsilon)^*\rho_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^2,\\ \mathcal{K}_\varepsilon = N_\varepsilon \cdot S^\varepsilon \nabla (A_0+1)^{-1}\end{gathered} \tag{2.17}$$

с константой C, зависящей лишь от размерности d, постоянной эллиптичности λ из условия (2.3) *и* 1*-периодической перфорированной области Q.*

Поскольку в скалярном случае в предположении (2.3) решение N^j задачи на ячейке (2.7) принадлежит $L^\infty(\square)$ в силу обобщенного принципа максимума, то в оценке (2.17) оператор $\mathcal{K}_\varepsilon$ можно заменить на более простой оператор $K_\varepsilon = N_\varepsilon \cdot \nabla(A_0+1)^{-1}$, не содержащий сглаживания.

Теорема 2.2. *Справедлива оценка с константой C того же типа, что в* (2.17):

$$\begin{gathered}\|\rho_\varepsilon(A_\varepsilon+\rho_\varepsilon)^{-1}\rho_\varepsilon - \rho_\varepsilon(A_0+1)^{-1}\rho_\varepsilon - \varepsilon\rho_\varepsilon K_\varepsilon\rho_\varepsilon - \varepsilon\rho_\varepsilon(K_\varepsilon)^*\rho_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^2,\\ K_\varepsilon = N_\varepsilon \cdot \nabla (A_0+1)^{-1}.\end{gathered} \tag{2.18}$$

Теоремы 2.1 и 2.2 доказаны в разделе 4.

3. Оператор сглаживания и его свойства

Используем обозначение

$$S^\varepsilon\varphi(x) = \int\limits_\square \varphi(x-\varepsilon\omega)\,d\omega \tag{3.1}$$

для среднего по Стеклову, называемого также сглаживанием по Стеклову.

Сначала перечислим наиболее простые и известные свойства среднего по Стеклову:

$$\|S^\varepsilon\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{3.2}$$

$$\|S^\varepsilon\varphi - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant (\sqrt{d}/2)\varepsilon\|\nabla\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{3.3}$$

$$\|S^\varepsilon\varphi - \varphi\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \leqslant (\sqrt{d}/2)\varepsilon\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{3.4}$$

Отметим также очевидное свойство $S^\varepsilon(\nabla\varphi) = \nabla(S^\varepsilon\varphi)$, которое далее систематически используется. Это свойство позволяет коммутировать оператор сглаживания с дифференциальными операторами, имеющими постоянные коэффициенты.

Во взаимодействии с ε-периодическими множителями проявляются следующие свойства сглаживания по Стеклову.

Лемма 3.1. *Если $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $b \in L^2_{\mathrm{per}}(\square)$ и $b_\varepsilon(x) = b(\varepsilon^{-1}x)$, то $b_\varepsilon S^\varepsilon\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ и*

$$\|b_\varepsilon S^\varepsilon\varphi\|^2 \leqslant \langle b^2\rangle \|\varphi\|^2. \tag{3.5}$$

Лемма 3.2. *Если $b \in L^2_{\rm per}(\square)$, $\langle b\rangle = 0$, $b_\varepsilon(x) = b(\varepsilon^{-1}x)$, $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ и $\psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$, то*

$$(b_\varepsilon S^\varepsilon\varphi, \psi) \leqslant C\varepsilon\langle b^2\rangle^{1/2}\|\varphi\|\|\nabla\psi\|, \quad C = const(d). \tag{3.6}$$

Выше и в дальнейшем изложении используем упрощенное обозначение для нормы и скалярного произведения в $L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad (\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{3.7}$$

Доказательство свойств (3.2)–(3.6) можно найти, например, в [11, 34, 35]; в этой работе оно не приводится.

Оценки (3.3) и (3.6) можно уточнить в условиях большей регулярности. Например, для функции $\varphi \in H^2(\mathbb{R}^d)$ выполнена оценка

$$\|S^\varepsilon\varphi - \varphi\| \leqslant C\varepsilon^2\|\nabla^2\varphi\|, \quad C = const(d). \tag{3.8}$$

В самом деле, из равенства $\varphi(x+h) - \varphi(x) - \nabla\varphi(x)\cdot h = \int\limits_0^1 (1-t)\nabla(\nabla\varphi(x+th)\cdot h)\cdot h\,dt$, полагая $h = -\varepsilon\omega$, интегрированием по $\omega \in \square = [-1/2, 1/2)^d$ получаем интегральное представление разности $S^\varepsilon\varphi - \varphi$ через матрицу вторых производных $\nabla^2\varphi$. Следовательно, по неравенству Коши—Буняковского имеем

$$|S^\varepsilon\varphi(x) - \varphi(x)|^2 \leqslant \varepsilon^4 \int\limits_\square \int\limits_0^1 |\nabla(\nabla\varphi(x - t\varepsilon\omega)\cdot\omega)\cdot\omega|^2\,dt\,d\omega,$$

откуда легко вывести (3.8).

Что касается леммы 3.2, следующие утверждения обобщают или уточняют ее.

Лемма 3.3. *Пусть $b \in L^2_{\rm per}(\square)$, $\langle b\rangle = 0$, $b_\varepsilon(x) = b(x/\varepsilon)$ и $\varphi, \psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Тогда*

$$(b_\varepsilon S^\varepsilon\varphi, S^\varepsilon\psi) \leqslant C\varepsilon^2\langle b^2\rangle^{1/2}\|\nabla\varphi\|\,\|\nabla\psi\|, \quad C = const(d). \tag{3.9}$$

Лемма 3.4. *Пусть $\alpha, \beta \in L^2_{\rm per}(\square)$, $\langle\alpha\beta\rangle = 0$, $\alpha_\varepsilon(x) = \alpha(x/\varepsilon)$, $\beta_\varepsilon(x) = \beta(x/\varepsilon)$ и $\varphi, \psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Тогда*

$$(\alpha_\varepsilon S^\varepsilon\varphi, \beta_\varepsilon S^\varepsilon\psi) \leqslant C\varepsilon^2\langle\alpha^2\rangle^{1/2}\langle\beta^2\rangle^{1/2}\|\nabla\varphi\|\,\|\nabla\psi\|, \quad C = const(d). \tag{3.10}$$

Лемма 3.5. *Пусть $\alpha, \beta \in L^2_{\rm per}(\square)$, $\alpha_\varepsilon(x) = \alpha(x/\varepsilon)$, $\beta_\varepsilon(x) = \beta(x/\varepsilon)$, $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Тогда*

$$|(\alpha_\varepsilon S^\varepsilon\varphi, \beta_\varepsilon S^\varepsilon\psi) - \langle\alpha\beta\rangle(\varphi, \psi)| \leqslant C\varepsilon\langle\alpha^2\rangle^{1/2}\langle\beta^2\rangle^{1/2}\|\varphi\|\,\|\nabla\psi\|, \quad C = const(d). \tag{3.11}$$

Заметим, что рассматриваемая в (3.10) и (3.11) форма $(\alpha_\varepsilon S^\varepsilon\varphi, \beta_\varepsilon S^\varepsilon\psi)$ корректно определена, так как функции $\alpha_\varepsilon S^\varepsilon\varphi$ и $\beta_\varepsilon S^\varepsilon\psi$ лежат в $L^2(\mathbb{R}^d)$ по лемме 3.1.

Доказательство трех последних лемм вынесено в раздел 7.

4. Доказательство L^2-оценок с корректором

В этом разделе дан вывод основных результатов для самосопряженного случая.

4.1. H^1-оценка порядка ε. Чтобы избежать громоздких формул, используем обозначения

$$u^{,\varepsilon}(x) := S^\varepsilon u(x), \quad U^\varepsilon(x) := N_\varepsilon(x)\cdot\nabla u^{,\varepsilon}(x), \quad N_\varepsilon(x) = N(\varepsilon^{-1}x). \tag{4.1}$$

Здесь u — решение усредненного уравнения (2.5), S^ε — оператор сглаживания по Стеклову (см. (3.1)), $N(y) = \{N^j(y)\}_{j=1}^d$ — периодический вектор, составленный из решений задачи на ячейке (2.7).

Справедливы оценки

$$\|u^\varepsilon - u^{,\varepsilon} - \varepsilon U^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)} \leqslant c\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)}, \quad c = const(d, \lambda, Q), \tag{4.2}$$

$$\|u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)} \leqslant c\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)}, \quad c = const(d, \lambda, Q). \tag{4.3}$$

Эти оценки доказаны в [34], но мы воспроизведем сейчас доказательство оценки (4.2), поскольку далее систематически будут использованы элементы этого доказательства, а также и сама оценка (4.2). Оценка (4.3) следует из (4.2) по свойствам сглаживания. В свою очередь, из (4.3) по свойствам сглаживания вытекает L^2-оценка (2.10).

Согласно простым вычислениям:

$$\begin{gathered}\nabla(u^{,\varepsilon}+\varepsilon U^{\varepsilon})=\nabla(u^{,\varepsilon}+\varepsilon N_{\varepsilon}\cdot\nabla u^{,\varepsilon})=\left(\nabla N_{\varepsilon}^{j}+e^{j}\right)\frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}+\varepsilon N_{\varepsilon}^{j}\nabla\frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j},\\ \rho_{\varepsilon}a_{\varepsilon}\nabla(u^{,\varepsilon}+\varepsilon U^{\varepsilon})-a^0\nabla u^{,\varepsilon}=g_{\varepsilon}^{j}\frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}+\varepsilon\rho_{\varepsilon}a_{\varepsilon}N_{\varepsilon}^{j}\nabla\frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}\end{gathered}\tag{4.4}$$

(как обычно, по повторяющимся индексам подразумеваем суммирование от 1 до d), где $\nabla N_{\varepsilon}^{j}(x)=(\nabla_y N^j)(\frac{x}{\varepsilon})$, $g_{\varepsilon}^{j}(x)=g^j(\frac{x}{\varepsilon})$, а 1-периодический вектор

$$g^j(y):=\rho(y)a(y)\left(\nabla N^j(y)+e^j\right)-a^0e^j,\quad j=1,\dots,d,\tag{4.5}$$

соленоидален и имеет нулевое среднее, т. е.

$$\operatorname{div}g^j(y)=0,\quad \langle g^j\rangle=0,\tag{4.6}$$

согласно (2.7) и (2.8), соответственно. Отсюда

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\left(\rho_{\varepsilon}a_{\varepsilon}\nabla(u^{,\varepsilon}+\varepsilon U^{\varepsilon})-a^0\nabla u^{,\varepsilon}\right)=r^{\varepsilon}+\operatorname{div}R^{\varepsilon},\\ r^{\varepsilon}=g_{\varepsilon}^{j}\cdot\nabla\frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j},\quad R^{\varepsilon}=\varepsilon\rho_{\varepsilon}a_{\varepsilon}N_{\varepsilon}^{j}\nabla\frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j},\end{gathered}\tag{4.7}$$

и можно оценить невязку приближения $\tilde v^{\varepsilon}:=u^{,\varepsilon}+\varepsilon U^{\varepsilon}$ в уравнении (2.4). А именно,

$$\begin{gathered}-\operatorname{div}[(\rho_{\varepsilon}a_{\varepsilon}\nabla(\tilde v^{\varepsilon}-u^{\varepsilon})]+\rho_{\varepsilon}(\tilde v^{\varepsilon}-u^{\varepsilon})=-\operatorname{div}\rho_{\varepsilon}a_{\varepsilon}\nabla\tilde v^{\varepsilon}+\rho_{\varepsilon}\tilde v^{\varepsilon}-\rho_{\varepsilon}f=\\ =-\operatorname{div}\rho_{\varepsilon}a_{\varepsilon}\nabla\tilde v^{\varepsilon}+\rho_{\varepsilon}\tilde v^{\varepsilon}+\operatorname{div}a^0\nabla u^{,\varepsilon}-u^{,\varepsilon}+(\rho_{\varepsilon}f)^{,\varepsilon}-\rho_{\varepsilon}f\overset{(4.7)}{=}\\ =(\rho_{\varepsilon}-1)u^{,\varepsilon}+\varepsilon\rho_{\varepsilon}N_{\varepsilon}^{j}\frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}-r_{\varepsilon}-\operatorname{div}R_{\varepsilon}+((\rho_{\varepsilon}f)^{,\varepsilon}-\rho_{\varepsilon}f)=:\sum_{i=1}^{5}T_i.\end{gathered}\tag{4.8}$$

Здесь использовано соотношение $-\operatorname{div}a^0\nabla u^{,\varepsilon}+u^{,\varepsilon}=(\rho_{\varepsilon}f)^{,\varepsilon}$, в котором $(\rho_{\varepsilon}f)^{,\varepsilon}$ обозначает сглаживание по Стеклову функции $\rho_{\varepsilon}f$. Равенство (4.8) означает, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\rho_{\varepsilon}[a_{\varepsilon}\nabla(\tilde v^{\varepsilon}-u^{\varepsilon})\nabla\varphi+(\tilde v^{\varepsilon}-u^{\varepsilon})\varphi]\,dx=\sum_{i=1}^{5}\int\limits_{\mathbb{R}^d}T_i\varphi\,dx\tag{4.9}$$

для любой $\varphi\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^d)$.

Далее используем оператор продолжения P^{ε}, введенный в разделе 2.2. Оператор P^{ε} продолжает функции, заданные в связной ε-периодической области $Q_{\varepsilon}=\varepsilon Q$ (что получена из Q гомотетическим сжатием, характеристической функцией для Q_{ε} является ρ_{ε}) до функций, заданных во всем пространстве $\mathbb{R}^d$, с указанным в (2.14) контролем H^1-нормы.

По замыканию в (4.9) в качестве пробной функции можно взять

$$\varphi=z_{\varepsilon}:=P^{\varepsilon}[(\tilde v^{\varepsilon}-u^{\varepsilon})|_{Q_{\varepsilon}}].\tag{4.10}$$

Далее левую часть (4.9) оценим снизу по эллиптичности. Правую часть (4.9) оценим сверху следующим образом: интегралы с T_1 и T_3 — по лемме 3.2, интегралы с T_2 и T_4 — по лемме 3.1, а интеграл с T_5 — по свойству (3.4). В итоге получаем

$$\|z_{\varepsilon}\|_{1,\varepsilon}^2=\int\limits_{\mathbb{R}^d}(|z_{\varepsilon}|^2+|\nabla z_{\varepsilon}|^2)\rho_{\varepsilon}\,dx\leqslant C\varepsilon\|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|z_{\varepsilon}\|_{1,\varepsilon},$$

или

$$\|z_{\varepsilon}\|_{1,\varepsilon}\leqslant C\varepsilon\|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},\tag{4.11}$$

где положили $|\Phi|^2=|\nabla u^{,\varepsilon}|^2+|\nabla^2u^{,\varepsilon}|^2$ и использовали оценку $\|z_{\varepsilon}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\leqslant c\|z_{\varepsilon}\|_{1,\varepsilon}$ для функции (4.10).

Для решения задачи (2.5) верна эллиптическая оценка

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}\leqslant c\|\rho_{\varepsilon}f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},\quad c=const(\lambda).\tag{4.12}$$

Следовательно, $\|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\leqslant c\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_{\varepsilon}dx)}$, что вместе с (4.11) приводит к неравенству (4.2).

4.2. L^2-оценки порядка ε^2. Из (4.3) следует L^2-оценка

$$\|u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)} \leqslant c\varepsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)}, \quad c = const(d, \lambda).$$

Далее, изучая L^2-форму

$$(u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon, \rho_\varepsilon h), \quad h \in L^2(\mathbb{R}^d), \tag{4.13}$$

найдем дополнительные корректоры к $\varepsilon U^\varepsilon$ для того, чтобы получить аппроксимацию решения u^ε с остаточным членом порядка ε^2. Форма (4.13) участвует в интегральном тождестве для решения уравнения

$$v^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx), \quad -\operatorname{div}(\rho_\varepsilon a_\varepsilon \nabla v^\varepsilon) + \rho_\varepsilon v^\varepsilon = \rho_\varepsilon h, \quad h \in L^2(\mathbb{R}^d), \tag{4.14}$$

если тождество взять на пробной функции $u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon$. Воспользуемся этим в дальнейшем.

Предварительно заметим, что соответствующее (4.14) усредненное уравнение имеет вид

$$v \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad (A_0 + 1)v = \rho_\varepsilon h; \tag{4.15}$$

H^1-приближением к v^ε будет функция

$$v^{,\varepsilon}(x) + \varepsilon V^\varepsilon(x), \quad \text{ где } V^\varepsilon(x) = N_\varepsilon(x) \cdot \nabla v^{,\varepsilon}(x), \quad v^{,\varepsilon}(x) = S^\varepsilon v(x), \tag{4.16}$$

с оценкой

$$\|v^\varepsilon - v^{,\varepsilon} - \varepsilon V^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)} \leqslant c\varepsilon \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)}, \quad c = const(d, \lambda, Q), \tag{4.17}$$

которая есть аналог оценки (4.2).

Отметим также энергетическую оценку для решения задачи (4.14)

$$\|v^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)} \leqslant c\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)}, \quad c = const(\lambda), \tag{4.18}$$

и эллиптическую оценку для решения усредненной задачи (4.15)

$$\|v\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)}, \quad c = const(\lambda). \tag{4.19}$$

Поскольку $A_\varepsilon = -\operatorname{div} \rho_\varepsilon a_\varepsilon \nabla$ и уравнения в (2.4) и (4.14) записываются коротко как

$$(A_\varepsilon + \rho_\varepsilon)u^\varepsilon = \rho_\varepsilon f, \quad (A_\varepsilon + \rho_\varepsilon)v^\varepsilon = \rho_\varepsilon h,$$

форма (4.13) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
&(u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon, \rho_\varepsilon h) \overset{(4.14)}{=} (u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon, (A_\varepsilon + \rho_\varepsilon)v^\varepsilon) = \\
&= ((A_\varepsilon + \rho_\varepsilon)u^\varepsilon - (A_\varepsilon + \rho_\varepsilon)(u + \varepsilon U^\varepsilon), v^\varepsilon) = ((A_0 + 1)u - (A_\varepsilon + \rho_\varepsilon)(u + \varepsilon U^\varepsilon), v^\varepsilon) = \\
&= (A_0 u^{,\varepsilon} - A_\varepsilon(u^{,\varepsilon} + \varepsilon U^\varepsilon), v^\varepsilon) + (A_0(u - u^{,\varepsilon}), v^\varepsilon) - (A_\varepsilon(u - u^{,\varepsilon}), v^\varepsilon) + (u(1 - \rho_\varepsilon), v^\varepsilon) - \varepsilon(\rho_\varepsilon U^\varepsilon, v^\varepsilon) =: \\
&:= T_1 + T_2 - T_3 + T_4 - T_5,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

где на третьем шаге преобразований учтено равенство $(A_\varepsilon + \rho_\varepsilon)u^\varepsilon = \rho_\varepsilon f = (A_0 + 1)u$ в смысле распределений на $\mathbb{R}^d$.

Заметим, что в (4.20) формально не все слагаемые T_i представляют собой L^2-формы: T_1 есть значение функционала $A_0 u^{,\varepsilon} - A_\varepsilon(u^{,\varepsilon} + \varepsilon U^\varepsilon)$ из $H^{-1}(\mathbb{R}^d)$ на функции $v^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d)$, а T_3 есть значение функционала $A_\varepsilon(u - u^{,\varepsilon}) \in H^{-1}(\mathbb{R}^d)$ на функции $v^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Правильнее было бы использовать здесь специальное обозначение, например, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1},H^1}$, для подобных значений функционала из $H^{-1}(\mathbb{R}^d)$ на элементе из $H^1(\mathbb{R}^d)$. Но мы этого не делаем, чтобы не усложнять обозначения, тем более что такие формы возникают мимолетно и преобразуются тут же в L^2-формы (см., например, ниже в (4.22) преобразование T_3 к L^2-форме).

Исходная форма (4.13) фактически есть интеграл по перфорированной области Q_ε, но в процессе преобразований в (4.20) в ее представлении возникли формы по всему пространству, в которых участвует v^ε. Поэтому изначально считаем, что решение $v^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx)$ продолжено с помощью оператора P^ε, введенного в разделе 2.2, до функции из $H^1(\mathbb{R}^d, dx)$ с указанным в (2.14) контролем H^1-нормы. Договоримся не делать различия в обозначениях между функцией v^ε и ее продолжением, чтобы не загромождать формулы.

Оценим слагаемые T_i в (4.20). Начнем с последнего слагаемого:

$$T_5 := \varepsilon(\rho_\varepsilon U^\varepsilon, v^\varepsilon) \overset{(4.1)}{=} \varepsilon(\rho_\varepsilon N_\varepsilon \cdot \nabla u^{,\varepsilon}, v^\varepsilon) \leqslant \varepsilon^2 C \langle |\rho N|^2 \rangle^{1/2} \|\nabla u\| \, \|\nabla v^\varepsilon\|,$$

где неравенство записано по лемме 3.2 (напомним, что $\langle \rho N\rangle = 0$, см. задачу (2.7)). Отсюда с учетом (4.12) и (4.18) получаем

$$T_5 \cong 0. \tag{4.21}$$

В (4.21) и далее через $\cong$ обозначаем равенство по модулю слагаемых T, имеющих оценку $|T| \leqslant c\varepsilon^2 \|f\|\,\|h\|$, $c = const(d,\lambda)$, и такие слагаемые T будем называть *несущественными*.

Следующим рассмотрим слагаемое

$$T_3 := (A_\varepsilon(u - u^{,\varepsilon}), v^\varepsilon) = (u - u^{,\varepsilon}, A_\varepsilon v^\varepsilon) \overset{(4.14)}{=} (u - u^{,\varepsilon}, \rho_\varepsilon h - \rho_\varepsilon v^\varepsilon) \cong 0, \tag{4.22}$$

где последнее «равенство» записано в силу неравенства Гельдера

$$(u - u^{,\varepsilon}, \rho_\varepsilon h - \rho_\varepsilon v^\varepsilon) \leqslant \|u - u^{,\varepsilon}\|\,\|\rho_\varepsilon h - \rho_\varepsilon v^\varepsilon\|,$$

свойства сглаживания (3.8) и оценок (4.12) и (4.18).

Аналогичные соображения, как при выводе (4.22), дают

$$T_2 := (A_0(u - u^{,\varepsilon}), v^\varepsilon) \overset{(2.5)}{=} (\rho_\varepsilon f - (\rho_\varepsilon f)^{,\varepsilon}, v^\varepsilon) - (u - u^{,\varepsilon}, v^\varepsilon) \cong (\rho_\varepsilon f - (\rho_\varepsilon f)^{,\varepsilon}, v^\varepsilon).$$

Далее преобразуем T_2, привлекая H^1-приближение (4.16). Это приближение определено на всем $\mathbb{R}^d$, если считать 1-периодический множитель $N(\cdot)$ продолженным с самого начала на всю ячейку $\square$ с помощью оператора P с контролем H^1-нормы (см. раздел 2.2). В результате получаем

$$T_2 \cong (\rho_\varepsilon f - (\rho_\varepsilon f)^{,\varepsilon}, v^\varepsilon - v^{,\varepsilon} - \varepsilon V^\varepsilon) + (\rho_\varepsilon f - (\rho_\varepsilon f)^{,\varepsilon}, v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon) \cong (\rho_\varepsilon f - (\rho_\varepsilon f)^{,\varepsilon}, v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon),$$

где на последнем шаге отброшено одно слагаемое как несущественное, потому что

$$\|f - f^{,\varepsilon}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \overset{(3.4)}{\leqslant} C\varepsilon\|f\|, \quad \|v^\varepsilon - v^{,\varepsilon} - \varepsilon V^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \overset{(4.17)}{\leqslant} c\varepsilon\|h\|,$$

а кроме того, неявно задействованный здесь оператор продолжения P удовлетворяет оценкам (2.13).

Полученное представление для T_2 упрощаем за счет того, что

$$(\rho_\varepsilon f - (\rho_\varepsilon f)^{,\varepsilon}, v^{,\varepsilon}) \overset{(2.5)}{=} ((A_0 + 1)(u - u^{,\varepsilon}), v^{,\varepsilon}) = (u - u^{,\varepsilon}, (A_0 + 1)v^{,\varepsilon}) \overset{(4.15)}{=} (u - u^{,\varepsilon}, (\rho_\varepsilon h)^{,\varepsilon}) \overset{(3.8)}{\cong} 0.$$

В итоге

$$T_2 \cong (\rho_\varepsilon f - (\rho_\varepsilon f)^{,\varepsilon}, \varepsilon V^\varepsilon) = (\rho_\varepsilon f, \varepsilon V^\varepsilon) - ((\rho_\varepsilon f)^{,\varepsilon}, \varepsilon V^\varepsilon),$$

где

$$((\rho_\varepsilon f)^{,\varepsilon}, \varepsilon V^\varepsilon) \overset{(4.16)}{=} \varepsilon((\rho_\varepsilon f)^{,\varepsilon}, N_\varepsilon \cdot \nabla v^{,\varepsilon}) \cong \varepsilon\langle N\rangle \cdot (\rho_\varepsilon f, \nabla v)$$

по лемме 3.5. Здесь $\langle N\rangle$ — среднее по ячейке $\square$ от продолжения на $\square$ решения задачи (2.7) (см. раздел 2.2). В итоге

$$T_2 \cong (\rho_\varepsilon f, \varepsilon V^\varepsilon) - \varepsilon\langle N\rangle \cdot (\rho_\varepsilon f, \nabla v). \tag{4.23}$$

Слагаемое T_4 в (4.20) преобразуем, используя похожие соображения, как выше:

$$T_4 := (u(1 - \rho_\varepsilon), v^\varepsilon) = (u^{,\varepsilon}(1 - \rho_\varepsilon), v^\varepsilon) + ((u - u^{,\varepsilon})(1 - \rho_\varepsilon), v^\varepsilon) \overset{(3.8)}{\cong} (u^{,\varepsilon}(1 - \rho_\varepsilon), v^\varepsilon).$$

Далее, привлекая H^1-приближение (4.16), получаем

$$T_4 \cong (u^{,\varepsilon}(1 - \rho_\varepsilon), v^\varepsilon - v^{,\varepsilon} - \varepsilon V^\varepsilon) + (u^{,\varepsilon}(1 - \rho_\varepsilon), v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon) \cong (u^{,\varepsilon}(1 - \rho_\varepsilon), v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon),$$

где несущественность отброшенного слагаемого показываем, используя лемму 3.2 (имеем $\langle 1 - \rho\rangle = 0$), оценки (4.12) и (4.17), а также свойства подразумеваемого здесь продолжения. Учтем также, что $(u^{,\varepsilon}(1 - \rho_\varepsilon), v^{,\varepsilon}) \cong 0$ по лемме 3.3; кроме того, $\varepsilon(u^{,\varepsilon}(1 - \rho_\varepsilon), V^\varepsilon) \cong \varepsilon(u^{,\varepsilon}, V^\varepsilon)$, так как

$$(u^{,\varepsilon}\rho_\varepsilon, V^\varepsilon) \overset{(4.16)}{=} (u^{,\varepsilon}\rho_\varepsilon, N_\varepsilon \cdot \nabla v^{,\varepsilon}) = (u^{,\varepsilon}, \rho_\varepsilon N_\varepsilon \cdot \nabla v^{,\varepsilon}) \cong 0$$

по лемме 3.3 (имеем здесь $\langle \rho N\rangle = 0$, см. задачу (2.7)). В итоге заключаем, что

$$T_4 \cong \varepsilon(u^{,\varepsilon}, V^\varepsilon) = \varepsilon(u^{,\varepsilon}, N_\varepsilon \cdot \nabla v^{,\varepsilon}) \cong \varepsilon(u, \langle N\rangle \cdot \nabla v), \tag{4.24}$$

где последнее «равенство» записано по лемме 3.5 и $\langle N\rangle$ обозначает среднее по ячейке периодичности от продолженного на ячейку решения задачи (2.7) (ранее договорились не различать в обозначениях определенные на перфорированном пространстве функции и их продолжения на все $\mathbb{R}^d$).

Наконец, изучим слагаемое T_1 в (4.20):

$$T_1 := (A_0 u^{,\varepsilon} - A_\varepsilon(u^{,\varepsilon} + \varepsilon U^\varepsilon), v^\varepsilon) \overset{(4.7)}{=} (g_\varepsilon^j \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, v^\varepsilon) - \varepsilon(\rho_\varepsilon a_\varepsilon N_\varepsilon^j \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \nabla v^\varepsilon) =: I + II. \tag{4.25}$$

Привлекая приближение (4.16), имеем

$$I = (g_\varepsilon^j \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, v^\varepsilon - v^{,\varepsilon} - \varepsilon V^\varepsilon) + (g_\varepsilon^j \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon),$$

где первое слагаемое несущественно по лемме 3.2 в силу соотношений $(4.6)_2$,(4.12) и (4.17). Поэтому, учитывая соленоидальность вектора g_ε^j, запишем

$$I \cong -(g_\varepsilon^j \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \nabla(v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon)) = -\left(g_\varepsilon^j \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \left(\nabla N_\varepsilon^k + e^k\right) \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k} + \varepsilon N_\varepsilon^k \nabla \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k}\right) =$$

$$= -\left(\left(\nabla N_\varepsilon^k + e^k\right) \cdot g_\varepsilon^j \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k}\right) - \varepsilon\left(N_\varepsilon^k g_\varepsilon^j \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \nabla \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k}\right),$$

где градиент $\nabla(v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon)$ вычислен аналогичным образом, как в (4.4).

Периодический вектор $(\nabla N^k + e^k) \cdot g^j$ имеет нулевое среднее:

$$\langle g^j \cdot (\nabla N^k + e^k)\rangle = \langle g^j \cdot \nabla N^k\rangle + \langle g^j\rangle \cdot e^k = 0$$

в силу соотношений (4.6). Тогда по лемме 3.4 и в силу эллиптических оценок для решений u и v получаем $\Big(\left(\nabla N_\varepsilon^k + e^k\right) \cdot g_\varepsilon^j \dfrac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \dfrac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k}\Big) \cong 0$ и, значит,

$$I \cong -\varepsilon\left(N_\varepsilon^k g_\varepsilon^j \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \nabla \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k}\right) \cong -\varepsilon(\langle N^k g^j\rangle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \nabla \frac{\partial v}{\partial x_k}), \tag{4.26}$$

где последнее «равенство» записано в силу леммы 3.5 и эллиптических оценок для u и v.

Для слагаемого II из (4.25) запишем представление, привлекая приближение (4.16):

$$II = -\varepsilon(\rho_\varepsilon a_\varepsilon N_\varepsilon^j \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \nabla(v^\varepsilon - v^{,\varepsilon} - \varepsilon V^\varepsilon)) - \varepsilon(\rho_\varepsilon a_\varepsilon N_\varepsilon^j \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \nabla(v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon)).$$

Нетрудно показать, что здесь первое слагаемое несущественное. В самом деле, надо применить неравенство Гельдера, лемму 3.1 и оценки (4.12), (4.17). Далее, производя вычисления типа (4.4) для градиента $\nabla(v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon)$, запишем

$$II \cong -\varepsilon\left(\rho_\varepsilon a_\varepsilon N_\varepsilon^j \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \left(\nabla N_\varepsilon^k + e^k\right) \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k} + \varepsilon N_\varepsilon^k \nabla \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k}\right) =$$

$$= -\varepsilon\left(\rho_\varepsilon a_\varepsilon N_\varepsilon^j \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \left(\nabla N_\varepsilon^k + e^k\right) \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k}\right) - \varepsilon^2\left(\rho_\varepsilon a_\varepsilon N_\varepsilon^j \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, N_\varepsilon^k \nabla \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k}\right),$$

где последнее слагаемое несущественное. Это легко показать, снова используя неравенство Гельдера, лемму 3.1 и эллиптические оценки для u и v. Тогда

$$II \cong -\varepsilon\left(\rho_\varepsilon a_\varepsilon N_\varepsilon^j \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \left(\nabla N_\varepsilon^k + e^k\right) \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k}\right) = -\varepsilon\left(N_\varepsilon^j \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \rho_\varepsilon a_\varepsilon \left(\nabla N_\varepsilon^k + e^k\right) \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k}\right) =$$

$$= -\varepsilon\left(N_\varepsilon^j \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, g_\varepsilon^k \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k} + a^0 \nabla v^{,\varepsilon}\right),$$

где ввели определенный в (4.5) вектор g^k через равенство $\rho a(\nabla N^k + e^k) = g^k + a^0 e^k$. Заметим, что по лемме 3.5 $\varepsilon\Big(N_\varepsilon^j \nabla \dfrac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, g_\varepsilon^k \dfrac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k}\Big) \cong \varepsilon\langle g^k N^j\rangle \cdot \Big(\nabla \dfrac{\partial u}{\partial x_j}, \dfrac{\partial v}{\partial x_k}\Big)$ и $\varepsilon\Big(N_\varepsilon^j \nabla \dfrac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, a^0 \nabla v^{,\varepsilon}\Big) \cong \varepsilon\langle N^j\rangle\Big(\nabla \dfrac{\partial u}{\partial x_j}, a^0 \nabla v\Big)$. Следовательно, подводя итоги, имеем

$$II \cong -\varepsilon\langle g^k N^j\rangle \cdot \left(\nabla \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_k}\right) - \varepsilon\langle N^j\rangle \left(\nabla \frac{\partial u}{\partial x_j}, a^0 \nabla v\right). \tag{4.27}$$

Из (4.25)–(4.27) выводим

$$T_1 \cong -\varepsilon\langle N^k g^j\rangle \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \nabla\frac{\partial v}{\partial x_k}\right) - \varepsilon\langle g^k N^j\rangle \cdot \left(\nabla\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_k}\right) - \varepsilon\langle N^j\rangle \left(\nabla\frac{\partial u}{\partial x_j}, a^0\nabla v\right).$$

Покажем, что в этой сумме первые два члена взаимно уничтожаются. В самом деле, преобразуя слагаемые

$$J_1 := \left(\langle N^k g^j\rangle\frac{\partial u}{\partial x_j}, \nabla\frac{\partial v}{\partial x_k}\right) = \left(\langle N^j g^k\rangle\frac{\partial u}{\partial x_k}, \nabla\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) = \langle N^j g_i^k\rangle \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right),$$

$$J_2 := \left(\langle g^k N^j\rangle \cdot \nabla\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_k}\right) = \langle g_i^k N^j\rangle \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_k}\right),$$

видим, что $J_1 = -J_2$ за счет равенства $\Big(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_k}, \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_j}\Big) = -\Big(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}, \dfrac{\partial\psi}{\partial x_k}\Big)$ $\forall\varphi,\psi\in H^2(\mathbb{R}^d)$.

Таким образом, $T_1 \cong -\varepsilon\langle N^j\rangle\Big(\nabla\dfrac{\partial u}{\partial x_j}, a^0\nabla v\Big)$, а в силу уравнения (4.15)

$$T_1 \cong -\varepsilon\langle N^j\rangle(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho_\varepsilon h - v) = -\varepsilon\langle N\rangle\cdot(\nabla u, \rho_\varepsilon h - v). \tag{4.28}$$

Итак, изучены все слагаемые T_i в (4.20). Опуская несущественные слагаемые T_3, T_5 и учитывая «равенства» (4.23), (4.24), (4.28) для остальных, запишем представление

$$(u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon, h) \cong (\rho_\varepsilon f, \varepsilon V^\varepsilon) - \varepsilon\langle N\rangle\cdot(\rho_\varepsilon f, \nabla v) + \varepsilon(u, \langle N\rangle\cdot\nabla v) - \varepsilon\langle N\rangle\cdot(\nabla u, \rho_\varepsilon h) + \varepsilon\langle N\rangle\cdot(\nabla u, v). \tag{4.29}$$

Здесь попарно взаимно уничтожаются слагаемые третье и пятое, а также второе и четвертое за счет того, что $(u, \langle N\rangle\cdot\nabla v) + \langle N\rangle\cdot(\nabla u, v) = 0$ и $\langle N\rangle\cdot(\rho_\varepsilon f, \nabla v) + \langle N\rangle\cdot(\nabla u, \rho_\varepsilon h) = 0$. Последнее равенство нулю становится очевидным, если учесть равенства

$$\left(\rho_\varepsilon f, \frac{\partial v}{\partial x_j}\right) = \left((A_0+1)u, \frac{\partial v}{\partial x_j}\right), \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho_\varepsilon h\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, (A_0+1)v\right) = -\left((A_0+1)u, \frac{\partial v}{\partial x_j}\right).$$

Таким образом, (4.29) существенно упрощается:

$$(u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon, h) \cong (\rho_\varepsilon f, \varepsilon V^\varepsilon), \tag{4.30}$$

где, согласно (4.1) и (4.16), $U^\varepsilon(x) = N_\varepsilon(x)\cdot S^\varepsilon\nabla u(x)$.

Перейдем к записи равенства (4.30) в операторной форме. Поскольку

$$u^\varepsilon = (A_\varepsilon + \rho_\varepsilon)^{-1}\rho_\varepsilon f, \qquad u = (A_0+1)^{-1}\rho_\varepsilon f,$$

$$\varepsilon U^\varepsilon = \varepsilon N_\varepsilon\cdot S^\varepsilon\nabla(A_0+1)^{-1}\rho_\varepsilon f =: \varepsilon\mathcal{K}_\varepsilon(\rho_\varepsilon f), \qquad \varepsilon V^\varepsilon = \varepsilon N_\varepsilon\cdot S^\varepsilon\nabla(A_0+1)^{-1}\rho_\varepsilon h =: \varepsilon\mathcal{K}_\varepsilon(\rho_\varepsilon h),$$

то (4.30) переписываем в виде $\big((A_\varepsilon+\rho_\varepsilon)^{-1}\rho_\varepsilon f - (A_0+1)^{-1}\rho_\varepsilon f - \varepsilon\mathcal{K}_\varepsilon\rho_\varepsilon f - \varepsilon(\mathcal{K}_\varepsilon)^*\rho_\varepsilon f, \rho_\varepsilon h\big) \cong 0$. Вспоминая соглашение о равенстве $\cong$ (см. абзац после (4.21)), выводим отсюда оценку

$$\begin{gathered}\|\rho_\varepsilon(A_\varepsilon+1)^{-1}\rho_\varepsilon f - \rho_\varepsilon(A_0+1)^{-1}\rho_\varepsilon f - \varepsilon\rho_\varepsilon\mathcal{K}_\varepsilon\rho_\varepsilon f - \varepsilon\rho_\varepsilon(\mathcal{K}_\varepsilon)^*\rho_\varepsilon f\| \leqslant C\varepsilon^2\|f\|,\\ \mathcal{K}_\varepsilon = N_\varepsilon\cdot S^\varepsilon\nabla(A_0+1)^{-1}\end{gathered} \tag{4.31}$$

с константой $C = const(d,\lambda,Q)$. Из (4.31) следует (2.17). Теорема 2.1 доказана.

Теперь вспомним, что решение N^j задачи на ячейке (2.7) принадлежит $L^\infty(\square)$. В таком случае корректно определены как элементы пространства $L^2(\mathbb{R}^d)$ функции $N_\varepsilon\cdot\nabla u$ и $N_\varepsilon\cdot\nabla v$, которые получаются из определенных в (4.1) и (4.16) функций U^ε и V^ε, если опускаем сглаживание. В «приближенном» равенстве (4.30) заменяем U^ε и V^ε на $N_\varepsilon\cdot\nabla u$ и $N_\varepsilon\cdot\nabla v$ соответственно, что приводит к допустимой погрешности в силу свойства (3.3) для сглаживания S^ε, а также в силу эллиптических оценок для u и v. Отсюда выводятся последующие оценки с оператором K_ε вместо $\mathcal{K}_\varepsilon$, в том числе (2.18). Теорема 2.2 доказана.

5. Некоторые обсуждения

Сделаем ряд замечаний о постановке исходной и усредненной задач; о нашем методе доказательства и возможности обобщений; о родственных результатах, а также публикациях, которые подвигли написать данную статью.

Замечание 5.1. В классических результатах (см. [1, 8, 12]) усреднения исходной задачи (2.4) характерно выписывать предельное (усредненное) уравнение без какой-либо осцилляции в правой части, т. е. в виде

$$u^0 \in H^1(\mathbb{R}^d, dx), \quad -\operatorname{div}(a^0\nabla u^0) + u^0 = f. \tag{5.1}$$

Такой принцип усреднения является отражением слабой сходимости мер (2.2): мера $\rho_\varepsilon\, dx$, сосредоточенная на ε-периодическом перфорированном пространстве, имеет пределом меру Лебега dx при $\varepsilon \to 0$.

До работы [34] обычно, если предполагалась минимальная регулярность матрицы коэффициентов $a(\cdot)$ и правой части f в исходном уравнении, близость решений уравнений (2.4) и (5.1) доказывалась в виде сходимости

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx)} = 0 \tag{5.2}$$

без оценки скорости сходимости, которая имеется в (2.10). Доказательство сходимости (5.2) можно провести различными методами, например, используя компенсированную компактность, или двухмасштабную сходимость, или вариационный метод, близкий к методу Г-сходимости. С другой стороны, среди классических результатов можно найти оценку погрешности усреднения вида

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx)} \leqslant C\varepsilon,$$

доказанную при повышенных предположениях о регулярности матрицы $a(\cdot)$, где константа C зависит от высоких соболевских норм $\|u^0\|_{H^k}$, $k \geqslant 3$. Эту оценку нельзя переписать в операторном виде.

Замечание 5.2. Решения уравнений (2.5) и (5.1) близки друг другу при малых ε, например, они связаны слабой сходимостью в $H^1(\mathbb{R}^d)$. В самом деле, вспомним, что решение уравнения (2.5) зависит (через правую часть уравнения) от ε, т. е. $u = u_\varepsilon$; при этом семейство u_ε равномерно ограниченно в $H^1(\mathbb{R}^d)$. Действительно, по замыканию в интегральное тождество (2.6), где имеем в виду $u = u_\varepsilon$, можно подставить в качестве пробной функции само решение u_ε и получить энергетическое равенство. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} (a^0\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon + |u_\varepsilon|^2)\, dx = (\rho_\varepsilon f, u_\varepsilon) \leqslant \|\rho_\varepsilon f\| \|u_\varepsilon\|$$

(см. обозначения (3.7)), откуда $\|u_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant c\|f\|$, $c = const(\lambda, Q)$. Более того, $u_\varepsilon \rightharpoonup u^0$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$, что легко установить предельным переходом в интегральном тождестве (2.6), где $u = u_\varepsilon$. При этом для правой части (2.6) будет наблюдаться сходимость $\int\limits_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon f\varphi\, dx \to \int\limits_{\mathbb{R}^d} f\varphi\, dx$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, поскольку $\rho_\varepsilon \rightharpoonup \langle\rho\rangle = 1$ в $L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$ по свойству среднего значения периодической функции (см., например, [8, гл. I, § 1]) и условию нормировки в (2.1).

Замечание 5.3. В том случае, когда коэффициенты и правая часть в уравнении достаточно гладки, классический вариант задачи (2.4) формулируется как краевая задача в перфорированной области $Q_\varepsilon = \{x : \rho_\varepsilon(x) = 1\}$ с условием Неймана на границе «дыр», т. е. на границе ∂Q_ε, причем эта граница имеет ε-периодическую структуру, а задаваемое на ней условие Неймана содержит вектор конормали, естественно, тоже ε-периодический. А именно, классическая формулировка задачи (2.4) имеет вид

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a_\varepsilon\nabla u^\varepsilon) + u^\varepsilon = f \quad &\text{в} \quad Q_\varepsilon, \\ a_\varepsilon\nabla u^\varepsilon\cdot\nu_\varepsilon = 0 \quad &\text{на} \quad \partial Q_\varepsilon, \end{aligned} \tag{5.3}$$

где ν_ε — внешняя единичная нормаль к границе ∂Q_ε. Принятая в (2.4) обобщенная постановка краевой задачи в перфорированной области (в смысле соответствующего интегрального тождества) позволяет избежать рассмотрения сложного по структуре краевого условия из (5.3) и не упоминать вообще множество Q_ε.

Замечание 5.4. Наша цель в данной работе — показать, что результаты работы [28] и их доказательство, соответствующим образом адаптированные, переносятся на случай уравнения в периодически перфорированной области.

В [28] модифицированным методом первого приближения в версии из [34] доказана операторная L^2-оценка погрешности усреднения с учетом корректора, имеющая порядок ε^2, для эллиптического уравнения во всем пространстве. Такого сорта оценки получены еще в 2005 году в рамках более общих результатов независимо В. В. Жиковым [6], а также М. Ш. Бирманом и Т. А. Суслиной [4]. Авторы обеих работ использовали спектральный подход применительно к самосопряженным операторам, основанный на преобразовании Флоке—Блоха, которое ограничивает предложенные методы сугубо для периодических постановок. В последующие годы появились аналогичные оценки для несамосопряженных операторов (см. [22, 23, 32], где также в основе исследования лежит преобразование Флоке—Блоха, позволяющее сводить задачу во всем пространстве к задаче на ячейке).

Долгое время оставался открытым вопрос, можно ли L^2-оценки порядка ε^2 получить методом из работ [5, 34]. Написание работы [28] мотивировано публикациями [16, 33], в которых изучается операторная L^2-оценка с учетом корректора для эллиптических операторов с локально периодическими коэффициентами, при этом явно или неявно используется модифицированный метод первого приближения.

Наша задача — в серии работ продемонстрировать возможности модифицированного метода первого приближения в версиях [5, 34] для доказательства операторных L^2-оценок порядка ε^2 в самых разных ситуациях. Помимо [28], см. к настоящему моменту публикации [29, 30], где охвачены несамосопряженные операторы, соответственно, с локально периодическими или периодическими неограниченными коэффициентами. При этом модифицированный метод первого приближения применялся в [29] в версии [5], а в [30] — в версии [34].

Замечание 5.5. Чтобы доказательство получилось нагляднее и проще для восприятия, мы ограничились в подробном изложении скалярным случаем. При этом рассмотрели уравнение диффузии в классической постановке с симметрической ε-периодической матрицей диффузии в перфорированном пространстве произвольной размерности $d \geqslant 2$ с условием непроницаемости на границе «дыр».

Возможны обобщения в разных направлениях, например, на операторы несамосопряженные или матричные. Особенно интересна для приложений задача теории упругости в перфорированном трехмерном пространстве со свободной от напряжений границей полостей. Эта задача изучена в [34] с точки зрения операторных оценок усреднения, имеющих порядок ε.

Для указанных выше обобщений надо подключать к изложенным здесь идеям конструкции и соображения из опубликованных ранее работ, например, [11, 27, 34] и других. Кроме того, в [12, гл. I, § 4] показано существование необходимых для задачи теории упругости операторов продолжения, которые удовлетворяют оценкам типа (2.13)-(2.14), где в роли обычного градиента вектор-функции выступает симметрический градиент.

Особенности скалярной несамосопряженной задачи разбираются в разделе 6.

Замечание 5.6. Изучая классическое уравнение диффузии, в основном доказательстве мы не опирались на справедливый в скалярном случае принцип максимума и его следствия. Лишь в самом конце (при выводе теоремы 2.2) указаны упрощения, которые можно сделать в аппроксимациях на основе этого принципа.

Таким образом, упомянутая в замечании 5.5 задача трехмерной теории упругости может быть исследована аналогично, как задача диффузии, и для нее справедлив аналог теоремы 2.1 с более сложным по структуре корректором. Хотя эта задача теории упругости самосопряженная, при анализе слагаемых, аналогичных T_i (см. доказательство в разделе 4), отбрасываемых по модулю равенства $\cong$ членов будет меньше. Как следствие, вклад в корректор от слагаемого, аналогичного T_1, будет более существенным, чем в скалярном случае, изученном подробно в разделе 4. Здесь наблюдается тот же эффект, что и в несамосопряженном случае (см. раздел 6), а именно, «появление третьего члена в корректоре». В этой связи интересен приведенный в [3] конкретный пример плоской задачи теории упругости в слоистой среде, где просчитываются усредненный тензор и все корректоры.

Для системы теории упругости принцип максимума не имеет места; как следствие, решение соответствующей задачи на ячейке (типа задачи (2.7)) не является, вообще говоря, ограниченной функцией. Однако для аналогичной задачи теории упругости в размерности $d = 2$ ограниченность решения все-таки будет наблюдаться, но не по принципу максимума, а по свойству повышенной суммируемости градиента с показателем $p > 2$. Отметим, что это свойство — особенность задачи на ячейке, как в скалярном случае, так и в векторном, в любой размерности. Но только при $d = 2$ свойство повышенной суммируемости градиента дает ограниченность решения задачи на ячейке через теорему вложения Соболева ($W^{1,p}(\square) \subset C^{0,\alpha}(\square)$ для некоторого $\alpha > 0$, если $p > d = 2$). Таким образом, для двумерной системы теории упругости верны аналоги обеих теорем 2.1 и 2.2 со сглаживанием в корректоре и без него.

6. Случай несамосопряженного оператора

6.1. Атрибуты усреднения в несамосопряженном случае. Рассмотрим задачу (2.4), когда 1-периодическая измеримая вещественнозначная матрица $a(\cdot)$ не симметрична и удовлетворяет условию

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant a\xi \cdot \xi, \quad a\xi \cdot \eta \leqslant \lambda^{-1}|\xi|\,|\eta| \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^d \tag{6.1}$$

для некоторой константы $\lambda > 0$. Тогда оператор A_ε в уравнении (2.4) несамосопряженный. Но по прежнему принципу определяются усредненная задача (2.6), задача на ячейке (2.7), усредненная матрица (2.9), и верны без какого-либо изменения L^2-оценки (2.10) или (2.11). Отличия несамосопряженного случая от самосопряженного начинают проявляться на этапе L^2-оценок с корректором: в (2.17) и (2.18) корректор строится с учетом несамосопряженности, вовлекает при своем построении большее число объектов, становясь более сложным по структуре. В данном разделе мы укажем, какие изменения возникают в формулировке основного результата и его доказательстве в несамосопряженном случае по сравнению с тем, что изложено для самосопряженного случая. Для этого необходимо ввести некоторые новые объекты, связанные с усреднением несамосопряженного уравнения.

Пусть оператор A_ε^* — сопряженный к A_ε. Сопряженным к (2.4) будет уравнение

$$\begin{gathered} v^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad A_\varepsilon^* v^\varepsilon + \rho_\varepsilon v^\varepsilon = \rho_\varepsilon h, \quad h \in L^2(\mathbb{R}^d), \\ A_\varepsilon^* = -\operatorname{div}(\rho_\varepsilon\, a_\varepsilon^*(x)\nabla), \quad a_\varepsilon^*(x) = a^*(\varepsilon^{-1}x), \end{gathered} \tag{6.2}$$

где a^* — транспонированная к a матрица. В качестве усредненного для (6.2) берется уравнение

$$v \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad A_0^* v + v = -\operatorname{div}(a^0)^*\nabla v + v = \rho_\varepsilon h, \tag{6.3}$$

где участвует сопряженный к A_0 оператор A_0^*, имеющий матрицу $(a^0)^*$, транспонированную к a^0. Таким образом,

$$(a^*)^0 = (a^0)^*, \tag{6.4}$$

т. е. коммутируют операции усреднения и перехода к сопряженной задаче. Подробное объяснение этого правила коммутирования в случае классической задачи усреднения (когда нет перфорации и $\rho \equiv 1$) можно найти в [8].

Тем не менее, введем прямой аналог задачи на ячейке (2.7) для сопряженного уравнения (6.2):

$$\begin{gathered} \tilde N^j \in H^1_{\mathrm{per}}(\square), \quad \operatorname{div}_y \rho(y) a^*(y)(e^j + \nabla_y \tilde N^j) = 0, \\ \langle \rho \tilde N^j \rangle = 0, \quad j = 1, \ldots, d. \end{gathered} \tag{6.5}$$

Через решения задачи (6.5) формально находится усредненная матрица $(a^*)^0$ для сопряженного уравнения (6.2), и для нее можно выписать формулы, аналогичные (2.9). Таким образом, в силу (6.4) имеем равенство

$$(a^0)^* e^j = \langle \rho a^*(e^j + \nabla \tilde N^j)\rangle, \quad j = 1, \ldots, d. \tag{6.6}$$

Положим

$$\tilde g^j(y) := \rho(y) a^*(y)\left(\nabla \tilde N^j(y) + e^j\right) - (a^0)^* e^j, \quad j = 1, \ldots, d. \tag{6.7}$$

Благодаря (6.5) и (6.6) выполнены соотношения $\operatorname{div} \tilde g^j(y) = 0$, $\langle \tilde g^j \rangle = 0$.

В дальнейшем используются энергетическая и эллиптическая оценки для решений уравнений (6.2) и (6.3):

$$\|v^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant c\|\rho_\varepsilon f\|, \quad c = const(\lambda), \tag{6.8}$$

$$\|v\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c\|\rho_\varepsilon f\|, \quad c = const(\lambda). \tag{6.9}$$

6.2. Коррективы в L^2-оценке порядка ε^2. Повторим рассуждения раздела 4.2 с учетом того, что форма (4.13) участвует в интегральном тождестве для решения сопряженного уравнения (6.2), а именно,
$$v^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx), \quad (A_\varepsilon^* + \rho_\varepsilon)v^\varepsilon = \rho_\varepsilon h, \quad h \in L^2(\mathbb{R}^d), \tag{6.10}$$
если это интегральное тождество, взять на пробной функции $u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon$. Соответствующее усредненное уравнение имеет вид
$$v \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad (A_0^* + 1)v = \rho_\varepsilon h, \tag{6.11}$$
и через его решение определяется H^1-приближение к v^ε. Это будет функция
$$v^{,\varepsilon}(x) + \varepsilon V^\varepsilon(x), \quad \text{где } V^\varepsilon(x) = \tilde{N}_\varepsilon(x) \cdot \nabla v^{,\varepsilon}(x), \quad v^{,\varepsilon}(x) = S^\varepsilon v(x), \tag{6.12}$$
а вектор $\tilde{N}$ составлен из решений сопряженной задачи на ячейке (6.5). Выполнена оценка
$$\|v^\varepsilon - v^{,\varepsilon} - \varepsilon V^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx)} \leqslant c\varepsilon \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx)}, \quad c = const(d, \lambda, Q), \tag{6.13}$$
которая есть аналог оценки (4.2).

Цепочка равенств (4.20) начинается с равенства
$$(u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon, \rho_\varepsilon h) \overset{(6.10)}{=} ((A_\varepsilon^* + \rho_\varepsilon)v^\varepsilon, u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon)$$
и далее продолжается без изменения. В итоге получаем ту же сумму из T_i, что стоит в конце цепочки (4.20). Слагаемые T_i изучаются аналогично, как раньше, но с использованием сопряженных операторов A_ε^*, A_0^*, а также введенных выше функций $\tilde{N}^j$, $\tilde{g}^j$, v, V^ε (см. (6.5), (6.7)), (6.11), (6.12) и оценок (6.8), (6.9). Отдельного рассмотрения заслуживает лишь слагаемое T_1, для которого представление (4.28) должно быть пересмотрено.

С учетом несамосопряженного случая в качестве промежуточного представления получим (см. абзац после (4.27)): $T_1 \cong -\varepsilon\langle \tilde{N}^k g^j\rangle \cdot \Big(\dfrac{\partial u}{\partial x_j}, \nabla \dfrac{\partial v}{\partial x_k}\Big) - \varepsilon \langle \tilde{g}^k N^j\rangle \cdot \Big(\nabla \dfrac{\partial u}{\partial x_j}, \dfrac{\partial v}{\partial x_k}\Big) - \varepsilon\langle N^j\rangle \Big(\nabla \dfrac{\partial u}{\partial x_j}, (a^0)^* \nabla v\Big)$. В этой сумме первые два слагаемые не компенсируют друг друга, как раньше. Здесь участвуют пары функций $\tilde{g}^k$ и g^k, а также $\tilde{N}^k$ и N^k, $k = 1, \ldots, d$, в которых элементы, вообще говоря, не совпадают.

Введем постоянные векторы
$$c^{kj} = \langle N^j \tilde{g}^k\rangle, \quad \tilde{c}^{jk} = \langle \tilde{N}^k g^j\rangle \tag{6.14}$$
и запишем
$$\begin{aligned} T_1 &\cong -\varepsilon \left(\tilde{c}^{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \nabla \frac{\partial v}{\partial x_k}\right) - \varepsilon \left(c^{kj} \cdot \nabla \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_k}\right) - \varepsilon\langle N^j\rangle \left(\nabla \frac{\partial u}{\partial x_j}, (a^0)^* \nabla v\right) = \\ &= \varepsilon \left(u, \tilde{c}_i^{jk} \, \frac{\partial^3 v}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k}\right) + \varepsilon \left(c_i^{kj} \frac{\partial^3 u}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k}, v\right) - \varepsilon\langle N^j\rangle \left(\nabla \frac{\partial u}{\partial x_j}, (a^0)^* \nabla v\right), \end{aligned}$$
т. е. $T_1 \cong \varepsilon(u, \tilde{L}v) + \varepsilon(Lu, v) - \varepsilon\langle N^j\rangle\Big(\nabla \dfrac{\partial u}{\partial x_j}, (a^0)^* \nabla v\Big)$, где введены дифференциальные операторы третьего порядка с постоянными коэффициентами
$$L := c_i^{kj} \frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k}, \quad \tilde{L} := \tilde{c}_i^{jk} \, \frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k}. \tag{6.15}$$

Собрав все существенные составляющие из представления (4.20), получим вместо (4.30), «равенство»
$$(u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon, h) \cong (\rho_\varepsilon f, \varepsilon V^\varepsilon) + \varepsilon\,(Lu, v) + \varepsilon \left(u, \tilde{L}v\right), \tag{6.16}$$
которое перепишем в операторной форме. Вспомним, что
$$u^\varepsilon = (A_\varepsilon + 1)^{-1}\rho_\varepsilon f, \quad u = (A_0 + 1)^{-1}\rho_\varepsilon f, \quad v = (A_0^* + 1)^{-1}\rho_\varepsilon h,$$
$$U^\varepsilon = N_\varepsilon \cdot S^\varepsilon \nabla (A_0 + 1)^{-1}\rho_\varepsilon f =: \mathcal{K}_\varepsilon \rho_\varepsilon f, \quad V^\varepsilon = \tilde{N}_\varepsilon \cdot S^\varepsilon \nabla (A_0^* + 1)^{-1}\rho_\varepsilon h =: \tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon \rho_\varepsilon h,$$
и введем оператор
$$\mathcal{L} := (A_0 + 1)^{-1}\left(L + \tilde{L}^*\right)(A_0 + 1)^{-1}, \tag{6.17}$$

где

$$L + \tilde{L}^* \overset{(6.15)}{=} \left(c_i^{kj} - \tilde{c}_i^{jk}\right) \frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k} \tag{6.18}$$

— дифференциальный оператор третьего порядка с постоянными коэффициентами. Тогда (6.16) дает

$$\Big((A_\varepsilon + 1)^{-1}\rho_\varepsilon f - (A_0+1)^{-1}\rho_\varepsilon f - \varepsilon\mathcal{K}_\varepsilon\rho_\varepsilon f - \varepsilon(\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon)^*\rho_\varepsilon f - \varepsilon\mathcal{L}\rho_\varepsilon f, \rho_\varepsilon h\Big) \cong 0. \tag{6.19}$$

Вспоминая соглашение о равенстве $\cong$ (см. абзац после (4.21)), выводим из (6.19) оценку

$$\|\rho_\varepsilon(A_\varepsilon+1)^{-1}\rho_\varepsilon f - \rho_\varepsilon(A_0+1)^{-1}\rho_\varepsilon f - \varepsilon\rho_\varepsilon(\mathcal{K}_\varepsilon + (\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon)^* + \mathcal{L})\rho_\varepsilon f\| \leqslant C\varepsilon^2\|f\|,$$
$$\mathcal{K}_\varepsilon = N_\varepsilon \cdot S^\varepsilon\nabla(A_0+1)^{-1}, \quad \tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon = \tilde{N}_\varepsilon \cdot S^\varepsilon\nabla(A_0^*+1)^{-1}$$

с константой $C = const(d, \lambda, Q)$.

Итогом наших рассмотрений в несамосопряженном случае является следующая теорема.

Теорема 6.1. *Справедлива оценка*

$$\|\rho_\varepsilon(A_\varepsilon+\rho_\varepsilon)^{-1}\rho_\varepsilon - \rho_\varepsilon(A_0+1)^{-1}\rho_\varepsilon - \varepsilon\rho_\varepsilon(\mathcal{K}_\varepsilon + (\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon)^* + \mathcal{L})\rho_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^2, \tag{6.20}$$

где $\mathcal{K}_\varepsilon = N_\varepsilon \cdot S^\varepsilon\nabla(A_0+1)^{-1}$, $\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon = \tilde{N}_\varepsilon \cdot S^\varepsilon\nabla(A_0^*+1)^{-1}$, *оператор* $\mathcal{L}$ *определен в* (6.17), (6.18), (6.15); *константа* C *зависит только от размерности* d, *постоянной эллиптичности* λ *из условия* (6.1) *и* 1*-периодической перфорированной области* Q.

Заметим, что коэффициенты операторов (6.15) вычисляются по формулам (6.14), а значит, определяются лишь решениями задач на ячейке (2.7) и (6.5).

В скалярном случае решения N^j и $\tilde{N}^j$ задач на ячейке (2.7) и (6.5) принадлежат $L^\infty(\square)$ в силу обобщенного принципа максимума. Как следствие, в операторах $\mathcal{K}_\varepsilon$ и $\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon$ можно опустить сглаживание, так что оценка (6.20) верна, если оператор $\mathcal{K}_\varepsilon$ заменить на $K_\varepsilon = N_\varepsilon \cdot \nabla(A_0+1)^{-1}$, а оператор $\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon$ заменить на $\tilde{K}_\varepsilon = \tilde{N}_\varepsilon \cdot \nabla(A_0^*+1)^{-1}$.

7. Доказательство лемм о сглаживании

Доказательство леммы 3.3. Пусть для простоты обозначений

$$\tilde{\varphi}(x) := S^\varepsilon\varphi(x) = \int\limits_\square \varphi(x-\varepsilon\omega)\,d\omega, \quad \tilde{\psi}(x) := S^\varepsilon\psi(x) = \int\limits_\square \psi(x-\varepsilon\sigma)\,d\sigma. \tag{7.1}$$

Тогда надо оценить сверху форму $I := (b_\varepsilon\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$. Стандартные преобразования дают

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_\square b(\frac{x}{\varepsilon})\varphi(x-\varepsilon\omega)\tilde{\psi}(x)\,d\omega\,dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_\square b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega)\varphi(x)\tilde{\psi}(x+\varepsilon\omega)\,d\omega\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_\square b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega)\varphi(x)\left(\tilde{\psi}(x+\varepsilon\omega) - \tilde{\psi}(x)\right)\,d\omega\,dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_\square b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega)\varphi(x)\int\limits_0^1 \nabla\tilde{\psi}(x+t\varepsilon\omega)\cdot\varepsilon\omega\,dt\,d\omega\,dx =$$
$$= \int\limits_0^1\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_\square b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega)\varphi(x)\nabla\tilde{\psi}(x+t\varepsilon\omega)\cdot\varepsilon\omega\,d\omega\,dx\,dt.$$

Здесь использовали, во-первых, условие $\langle b\rangle = 0$ и свойство стационарности периодической функции: $\int\limits_\square b\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}+\omega\Big)\,d\omega = \langle b\rangle$ для любого x и ε, следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_\square b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega)\varphi(x)\tilde{\psi}(x)\,d\omega\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_\square b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega)\,d\omega\right)\varphi(x)\tilde{\psi}(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d}\langle b\rangle\varphi(x)\tilde{\psi}(x)\,dx = 0;$$

а во-вторых, представление

$$\tilde{\psi}(x+h) - \tilde{\psi}(x) = \int_0^1 \nabla\tilde{\psi}(x+th)\cdot h\,dt. \tag{7.2}$$

Теперь вспомним определение $\tilde{\psi}(x)$ в (7.1) и продолжим стандартные преобразования:

$$I = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\square} \int_{\square} b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega)\varphi(x)\nabla\psi(x-\varepsilon\sigma+t\varepsilon\omega)\cdot\varepsilon\omega\,d\omega\,d\sigma\,dx\,dt =$$
$$= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\square} \int_{\square} b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega+\sigma)\varphi(x+\varepsilon\sigma)\nabla\psi(x+t\varepsilon\omega)\cdot\varepsilon\omega\,d\omega\,d\sigma\,dx\,dt =$$
$$= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\square} \int_{\square} b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega+\sigma)\left(\varphi(x+\varepsilon\sigma)-\varphi(x)\right)\nabla\psi(x+t\varepsilon\omega)\cdot\varepsilon\omega\,d\omega\,d\sigma\,dx\,dt =$$
$$= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\square} \int_{\square} b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega+\sigma)\left(\int_0^1 \nabla\varphi(x+s\varepsilon\sigma)\cdot\varepsilon\sigma\,ds\right)\nabla\psi(x+t\varepsilon\omega)\cdot\varepsilon\omega\,d\omega\,d\sigma\,dx\,dt =$$
$$= \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\square} \int_{\square} b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega+\sigma)\left(\nabla\varphi(x+s\varepsilon\sigma)\cdot\sigma\right)\nabla\psi(x+t\varepsilon\omega)\cdot\omega\,d\omega\,d\sigma\,dx\,dt\,ds,$$

где снова использовали свойство $\langle b\rangle = 0$ и интегральное представление для $\varphi(x+\varepsilon\sigma)-\varphi(x)$, аналогичное (7.2). Применяя к последнему многомерному интегралу неравенство Гельдера, получаем

$$\begin{aligned} I^2 \leqslant \varepsilon^4 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\square} \int_{\square} |b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega+\sigma)|^2 |\nabla\varphi(x+s\varepsilon\sigma)\cdot\sigma|^2\,d\omega\,d\sigma\,dx\,dt\,ds \times \\ \times \int_0^1 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\square} \int_{\square} |\nabla\psi(x+t\varepsilon\omega)\cdot\omega|^2\,d\omega\,d\sigma\,dx\,dt\,ds, \end{aligned} \tag{7.3}$$

где оба интегральных множителя легко оцениваются, так что

$$I^2 \leqslant \varepsilon^4 C\langle |b|^2\rangle \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\nabla\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad C = const(d). \tag{7.4}$$

Отсюда следует оценка (3.9). Лемма доказана. $\square$

Доказательство леммы 3.4. При выводе оценки (3.10) можно считать, что $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, и, рассматривая осциллирующий множитель $b = \alpha\beta$, повторим стандартные преобразования формы I из предыдущего доказательства до этапа (7.3). Прежде чем применить неравенство Гельдера, вспомним, что $b = \alpha\beta$ и распределим функции α и β в разные интегральные множители. Таким образом, получим вместо (7.3) неравенство

$$\begin{aligned} I^2 \leqslant \varepsilon^4 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\square} \int_{\square} |\alpha(\frac{x}{\varepsilon}+\omega+\sigma)|^2 |\nabla\varphi(x+s\varepsilon\sigma)\cdot\sigma|^2\,d\omega\,d\sigma\,dx\,dt\,ds \times \\ \times \int_0^1 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\square} \int_{\square} |\beta(\frac{x}{\varepsilon}+\omega+\sigma)|^2 |\nabla\psi(x+t\varepsilon\omega)\cdot\omega|^2\,d\omega\,d\sigma\,dx\,dt\,ds, \end{aligned}$$

где оба интегральных множителя легко оценивается. В итоге вместо (7.4) доказываем неравенство $I^2 \leqslant \varepsilon^4 C\langle|\alpha|^2\rangle\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\langle|\beta|^2\rangle\|\nabla\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}$, $C = const(d)$, эквивалентное (3.10). $\square$

Доказательство леммы 3.5. Поступая аналогично, как при доказательстве леммы 3.3, записываем следующее представление, полагая $b = \alpha\beta$:

$$I := (\alpha_\varepsilon S^\varepsilon\varphi, \beta_\varepsilon S^\varepsilon\psi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}\int\limits_{\square} b(\frac{x}{\varepsilon})\varphi(x-\varepsilon\omega)\psi(x-\varepsilon\sigma)\,d\omega\,d\sigma\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}\int\limits_{\square} b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega+\sigma)\varphi(x+\varepsilon\sigma)\psi(x+\varepsilon\omega)\,d\omega\,d\sigma\,dx.$$

Поскольку $\psi(x+\varepsilon\omega) = \psi(x) + (\psi(x+\varepsilon\omega)-\psi(x))$, имеем $I = I_1 + I_2$, где

$$I_1 := \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}\int\limits_{\square} b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega+\sigma)\varphi(x+\varepsilon\sigma)\psi(x)\,d\omega\,d\sigma\,dx = \langle b\rangle \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}\varphi(x+\varepsilon\sigma)\psi(x)\,d\sigma\,dx =$$

$$= \langle b\rangle \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}\varphi(x)\psi(x-\varepsilon\sigma)\,d\sigma\,dx = \langle b\rangle(\varphi, S^\varepsilon\psi)$$

в силу стационарности периодической функции и по определению оператора сглаживания S^ε (см. (3.1)),

$$I_2 := \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}\int\limits_{\square} b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega+\sigma)\varphi(x+\varepsilon\sigma)(\psi(x+\varepsilon\omega)-\psi(x))\,d\omega\,d\sigma\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}\int\limits_{\square} b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega+\sigma)\varphi(x+\varepsilon\sigma)\int\limits_0^1 \nabla\psi(x+t\varepsilon\omega)\cdot\varepsilon\omega\,dt\,d\omega\,d\sigma\,dx$$

в силу интегральной формулы (7.2). Используя те же соображения, что и при доказательстве леммы 3.4, можно утверждать, что $I_2 \leqslant C\varepsilon\langle\alpha^2\rangle^{1/2}\langle\beta^2\rangle^{1/2}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|\nabla\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$.

Что касается I_1, очевидна его запись в виде суммы $I_1 = \langle b\rangle(\varphi,\psi) + \langle b\rangle(\varphi, S^\varepsilon\psi - \psi)$, где второе слагаемое имеет оценку $\langle b\rangle(\varphi, S^\varepsilon\psi-\psi) \leqslant C\varepsilon\langle\alpha^2\rangle^{1/2}\langle\beta^2\rangle^{1/2}\|\varphi\|\,\|\nabla\psi\|$, $C = const(d)$, по свойству сглаживания. Из полученных оценок следует (3.11). Лемма доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. — М.: Наука, 1984.
2. *Беляев А. Ю.* Усреднение в задачах фильтрации. — М.: Наука, 2004.
3. *Бирман М. Ш., Суслина Т. А.* Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства усреднения// Алгебра и анализ. — 2003. — *15*, № 5. — С. 1–108.
4. *Бирман М. Ш., Суслина Т. А.* Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора// Алгебра и анализ. — 2005. — *17*, № 6. — С. 1–104.
5. *Жиков В. В.* Об операторных оценках в теории усреднения// Докл. РАН. — 2005. — *403*, № 3. — С. 305–308.
6. *Жиков В. В.* О спектральном методе в теории усреднения// Тр. МИАН. — 2005. — *250*. — С. 95–104.
7. *Жиков В. В.* О некоторых оценках из теории усреднения// Докл. РАН. — 2006. — *406*, № 5. — С. 597–601.
8. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1993.
9. *Жиков В. В., Пастухова С. Е.* Усреднение вырождающихся эллиптических уравнений// Сиб. мат. ж. — 2008. — *49*, № 1. — С. 101–124.
10. *Жиков В. В., Пастухова С. Е., Тихомирова С. В.* Об усреднении вырождающихся эллиптических уравнений// Докл. РАН. — 2006. — *410*, № 5. — С. 587–591.
11. *Жиков В. В., Пастухова С. Е.* Об операторных оценках в теории усреднения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 3. — С. 3–98.
12. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические основы сильно неоднородных упругих сред. — М.: МГУ, 1990.
13. *Пастухова С. Е.* О некоторых оценках из усреднения задач теории упругости// Докл. РАН. — 2006. — *406*, № 5. — С. 604–608.
14. *Пастухова С. Е., Тихомиров Р. Н.* Операторные оценки повторного и локально периодического усреднения// Докл. РАН. — 2007. — *415*, № 3. — С. 304–305.

15. *Пастухова С. Е., Тихомирова С. В.* Эллиптическое уравнение с несимметрической матрицей. Усреднение «вариационных решений»// Мат. заметки. — 2007. — *81*, № 4. — С. 631–635.
16. *Сеник Н. Н.* Об усреднении несамосопряженных локально периодических эллиптических операторов// Функц. анализ и его прилож. — 2017. — *51*, № 2. — С. 92–96.
17. *Acerbi E., Chiado Piat V., Dal Maso G., Percivale D.* An extension theorem from connected sets, and homogenization in general periodic domains// Nonlinear Anal. — 1992. — *18*, № 5. — С. 481–496.
18. *Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G.* Asymptotic Analysis for Periodic Structures. — Amsterdam: North Holland, 1978.
19. *Cardone G., Pastukhova S. E., Zhikov V. V.* Some estimates for nonlinear homogenization// Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. — 2005. — *29*. — С. 101–110.
20. *Pastukhova S. E.* Operator estimates in nonlinear problems of reiterated homogenization// Proc. Steklov Inst. Math. — 2008. — *261*. — С. 214–228.
21. *Pastukhova S. E.* Estimates in homogenization of parabolic equations with locally periodic coefficients// Asymptot. Anal. — 2010. — *66*. — С. 207–228.
22. *Pastukhova S. E.* Approximations of the operator exponential in a periodic diffusion problem with drift// Sb. Math. — 2013. — *204*, № 2. — С. 280–306.
23. *Pastukhova S. E.* Approximations of the resolvent for a non-self-adjoint diffusion operator with rapidly oscillating coefficients// Math. Notes. — 2013. — *94*. — С. 127–145.
24. *Pastukhova S. E.* Approximation of the exponential of a diffusion operator with multiscale coefficients// Funct. Anal. Appl. — 2014. — *48*, № 3. — С. 183–198.
25. *Pastukhova S. E.* Estimates in homogenization of higher-order elliptic operators// Appl. Anal. — 2016. — *95*. — С. 1449–1466.
26. *Pastukhova S. E.* Operator error estimates for homogenization of fourth order elliptic equations// St. Petersburg Math. J. — 2017. — *28*. — С. 273—289.
27. *Pastukhova S. E.* Operator estimates in homogenization of elliptic systems of equations// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2017. — *226*, № 4. — С. 445–461.
28. *Pastukhova S. E.* L^2-estimates for homogenization of elliptic operators// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2020. — *244*, № 4. — С. 671–685.
29. *Pastukhova S. E.* On resolvent approximations of elliptic differential operators with locally periodic coefficients// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 5. — С. 814–834.
30. *Pastukhova S. E.* On resolvent approximations of elliptic differential operators with periodic coefficients// ArXiv. — 2020. — 2001.01701 [math.AP].
31. *Pastukhova S. E., Tikhomirov R. N.* Operator-type estimates in homogenization of elliptic equations with lower order terms// St. Petersburg. Math. J. — 2018. — *29*. — С. 841–861.
32. *Senik N. N.* Homogenization for non-self-adjoint periodic elliptic operators on an infinite cylinder// SIAM J. Math. Anal. — 2017. — *49*. — С. 874–898.
33. *Senik N. N.* Homogenization for non-self-adjoint locally periodic elliptic operators// ArXiv. — 2017. — 1703.02023v2 [math.AP].
34. *Zhikov V. V., Pastukhova S. E.* On operator estimates for some problems in homogenization theory// Russ. J. Math. Phys. — 2005. — *12*, № 4. — С. 515–524.
35. *Zhikov V. V., Pastukhova S. E.* Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients// Russ. J. Math. Phys. — 2006. — *13*, № 4. — С. 224–237.
36. *Zhikov V. V., Pastukhova S. E.* Homogenization estimates of operator type for an elliptic equation with quasiperiodic coefficients// Russ. J. Math. Phys. — 2015. — *22*, № 4. — С. 264–278.

С. Е. Пастухова
Российский технологический университет (МИРЭА), Москва, Россия
E-mail: pas-se@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-314-334 UDC 517.97

Resolvent Approximations in L^2-Norm for Elliptic Operators Acting in a Perforated Space

© 2020 **S. E. Pastukhova**

Abstract. We study homogenization of a second-order elliptic differential operator $A_\varepsilon = -\operatorname{div} a(x/\varepsilon)\nabla$ acting in an ε-periodically perforated space, where ε is a small parameter. Coefficients of the operator A_ε are measurable ε-periodic functions. The simplest case where coefficients of the operator are constant is also interesting for us. We find an approximation for the resolvent $(A_\varepsilon + 1)^{-1}$ with remainder term of order ε^2 as $\varepsilon \to 0$ in operator L^2-norm on the perforated space. This approximation turns to be the sum of the resolvent $(A_0 + 1)^{-1}$ of the homogenized operator $A_0 = -\operatorname{div} a^0\nabla$, $a^0 > 0$ being a constant matrix, and some correcting operator $\varepsilon\mathcal{C}_\varepsilon$. The proof of this result is given by the modified method of the first approximation with the usage of the Steklov smoothing operator.

REFERENCES

1. N. S. Bakhvalov and G. P. Panasenko, *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh* [Homogenization of Processes in Periodic Media], Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).
2. A. Yu. Belyaev, *Usrednenie v zadachakh fil'tratsii* [Homogenization in Filtration Problems], Nauka, Moscow, 2004 (in Russian).
3. M. Sh. Birman and T. A. Suslina, "Periodicheskie differentsial'nye operatory vtorogo poryadka. Porogovye svoystva usredneniya" [Periodic second-order differential operators: threshold homogenization properties], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2003, **15**, No. 5, 1–108 (in Russian).
4. M. Sh. Birman and T. A. Suslina, "Usrednenie periodicheskikh ellipticheskikh differentsial'nykh operatorov s uchetom korrektora" [Homogenization of periodic elliptic differential operators with a corrector], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2005, **17**, No. 6, 1–104 (in Russian).
5. V. V. Zhikov, "Ob operatornykh otsenkakh v teorii usredneniya" [On operator estimates in the homogenization theory], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2005, **403**, No. 3, 305–308 (in Russian).
6. V. V. Zhikov, "O spektral'nom metode v teorii usredneniya" [On the spectral method in homogenization theory], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2005, **250**, 95–104 (in Russian).
7. V. V. Zhikov, "O nekotorykh otsenkakh iz teorii usredneniya" [On some estimates in the homogenization theory], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2006, **406**, No. 5, 597–601 (in Russian).
8. V. V. Zhikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleynik, *Usrednenie differentsial'nykh operatorov* [Homogenization of Differential Operators], Nauka, Moscow, 1993 (in Russian).
9. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, "Usrednenie vyrozhdayushchikhsya ellipticheskikh uravneniy" [Homogenization of degenerating elliptic equations], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 2008, **49**, No. 1, 101–124 (in Russian).
10. V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, and S. V. Tikhomirova, "Ob usrednenii vyrozhdayushchikhsya ellipticheskikh uravneniy" [On homogenization of degenerating elliptic equations], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2006, **410**, No. 5, 587–591 (in Russian).
11. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, "Ob operatornykh otsenkakh v teorii usredneniya" [On operator estimates in homogenization theory], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 3, 3–98 (in Russian).
12. O. A. Oleynik, G. A. Iosif'yan, and A. S. Shamaev, *Matematicheskie osnovy sil'no neodnorodnykh uprugikh sred* [Mathematical Fundamentals of Strongly Nonhomogeneous Elastic Media], MGU, Moscow, 1990 (in Russian).

13. S. E. Pastukhova, “O nekotorykh otsenkakh iz usredneniya zadach teorii uprugosti” [On some estimates from homogenization of problems of elasticity theory], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2006, **406**, No. 5, 604–608 (in Russian).
14. S. E. Pastukhova and R. N. Tikhomirov, “Operatornye otsenki povtornogo i lokal’no periodicheskogo usredneniya” [Operator estimates in reiterated and locally periodic homogenization], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2007, **415**, No. 3, 304–305 (in Russian).
15. S. E. Pastukhova and S. V. Tikhomirova, “Ellipticheskoe uravnenie s nesimmetricheskoy matritsey. Usrednenie «variatsionnykh resheniy»” [Elliptic equation with nonsymmetric matrix: homogenization of «variational solutions»], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2007, **81**, No. 4, 631–635 (in Russian).
16. N. N. Senik, “Ob usrednenii nesamosopryazhennykh lokal’no periodicheskikh ellipticheskikh operatorov” [On homogenization of non-self-adjoint locally periodic elliptic operators], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2017, **51**, No. 2, 92–96 (in Russian).
17. E. Acerbi, V. Chiado Piat, G. Dal Maso, and D. Percivale, “An extension theorem from connected sets, and homogenization in general periodic domains,” *Nonlinear Anal.*, 1992, **18**, No. 5, 481–496.
18. A. Bensoussan, J. L. Lions, and G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North Holland, Amsterdam, 1978.
19. G. Cardone, S. E. Pastukhova, and V. V. Zhikov, “Some estimates for nonlinear homogenization,” *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl.*, 2005, **29**, 101–110.
20. S. E. Pastukhova, “Operator estimates in nonlinear problems of reiterated homogenization,” *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2008, **261**, 214–228.
21. S. E. Pastukhova, “Estimates in homogenization of parabolic equations with locally periodic coefficients,” *Asymptot. Anal.*, 2010, **66**, 207–228.
22. S. E. Pastukhova, “Approximations of the operator exponential in a periodic diffusion problem with drift,” *Sb. Math.*, 2013, **204**, No. 2, 280–306.
23. S. E. Pastukhova, “Approximations of the resolvent for a non-self-adjoint diffusion operator with rapidly oscillating coefficients,” *Math. Notes*, 2013, **94**, 127–145.
24. S. E. Pastukhova, “Approximation of the exponential of a diffusion operator with multiscale coefficients,” *Funct. Anal. Appl.*, 2014, **48**, No. 3, 183–198.
25. S. E. Pastukhova, “Estimates in homogenization of higher-order elliptic operators,” *Appl. Anal.*, 2016, **95**, 1449–1466.
26. S. E. Pastukhova, “Operator error estimates for homogenization of fourth order elliptic equations,” *St. Petersburg Math. J.*, 2017, **28**, 273—289.
27. S. E. Pastukhova, “Operator estimates in homogenization of elliptic systems of equations,” *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2017, **226**, No. 4, 445–461.
28. S. E. Pastukhova, “L^2-estimates for homogenization of elliptic operators,” *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2020, **244**, No. 4, 671–685.
29. S. E. Pastukhova, “On resolvent approximations of elliptic differential operators with locally periodic coefficients,” *Lobachevskii J. Math.*, 2020, **41**, No. 5, 814–834.
30. S. E. Pastukhova, “On resolvent approximations of elliptic differential operators with periodic coefficients,” *ArXiv*, 2020, 2001.01701 [math.AP].
31. S. E. Pastukhova and R. N. Tikhomirov, “Operator-type estimates in homogenization of elliptic equations with lower order terms,” *St. Petersburg. Math. J.*, 2018, **29**, 841–861.
32. N. N. Senik, “Homogenization for non-self-adjoint periodic elliptic operators on an infinite cylinder,” *SIAM J. Math. Anal.*, 2017, **49**, 874–898.
33. N. N. Senik, “Homogenization for non-self-adjoint locally periodic elliptic operators,” *ArXiv*, 2017, 1703.02023v2 [math.AP].
34. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, “On operator estimates for some problems in homogenization theory,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2005, **12**, No. 4, 515–524.
35. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, “Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2006, **13**, No. 4, 224–237.
36. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, “Homogenization estimates of operator type for an elliptic equation with quasiperiodic coefficients,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2015, **22**, No. 4, 264–278.

S. E. Pastukhova
Russian Technological University (MIREA), Moscow, Russia
E-mail: pas-se@yandex.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 66, № 2 (2020). С. 335–371

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-335-371 УДК 517.984.5

О СПЕКТРАЛЬНЫХ И ЭВОЛЮЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ПОЛУТОРАЛИНЕЙНОЙ ФОРМОЙ

© 2020 г. **А. Р. ЯКУБОВА**

Аннотация. На базе рассмотренных ранее краевых, спектральных и начально-краевых задач в случае одной области изучаются соответствующие задачи, порожденные полуторалинейной формой, для двух областей. Подробно изучены возникшие операторные пучки с соответствующими операторными коэффициентами, действующие в гильбертовом пространстве и зависящие от двух параметров. В возмущенном и в невозмущенном случаях рассматриваются оба возможных варианта, когда один из параметров спектральный, а другой фиксированный. В исследовании использован принцип суперпозиции, позволяющий представить решение исходной проблемы в виде суммы решений вспомогательных краевых задач, содержащих неоднородность либо в уравнении, либо в одном из краевых условий. Получены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости краевых задач на произвольном промежутке времени. Доказаны теоремы о свойствах спектра, а также о полноте и базисности системы корневых элементов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

В данной работе продолжены исследования краевых, спектральных и начально-краевых задач на основе полуторалинейной формы (см. [20]). В предыдущей статье [20] эти проблемы были исследованы в случае одной области. На этой основе изучаются смешанные краевые, спектральные и начально-краевые задачи, порожденные полуторалинейной формой для двух областей.

В первом разделе изучаются краевые задачи, порожденные полуторалинейной несимметрической формой на основе оператора Лапласа. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости этих проблем.

Во втором разделе изучаются смешанные спектральные задачи сопряжения, порожденные полуторалинейной формой. Установлено, что исходные проблемы приводятся к исследованию операторного пучка, который зависит от двух комплексных параметров, один из которых считают фиксированным, а другой — спектральным. Изучены свойства решений возмущенных и невозмущенных спектральных задач при первом и втором условиях сопряжения.

В третьем разделе изучены смешанные возмущенные начально-краевые задачи математической физики при первом и втором условиях сопряжения. Доказаны теоремы о существовании и единственности сильного решения со значениями в соответствующем гильбертовом пространстве.

Автор благодарит Н. Д. Копачевского за постановку задачи и обсуждение результатов работы. Работа основана на статьях [20, 34].

1. Краевые задачи, порожденные полуторалинейной несимметрической формой на основе оператора Лапласа

1.1. Формула Грина для невозмущенной задачи. Рассмотрим тройку гильбертовых пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$ и обычный оператор следа $\gamma u := u\,|_\Gamma$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — область с липшицевой границей $\Gamma := \partial\Omega$.

Тогда, как было установлено ранее, в этом случае имеет место следующая обобщенная формула Грина, порожденная оператором Лапласа:

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega (\eta\bar{u} + \nabla\eta\cdot\nabla\bar{u})\,d\Omega = \langle\eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle\gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall\,\eta, u \in H^1(\Omega), \tag{1.1}$$

$$u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \quad \gamma\eta \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{1.2}$$

Здесь слева в (1.1) стоит скалярное произведение в $H^1(\Omega)$, и оно является симметрической полуторалинейной формой в $H^1(\Omega):\ \Phi_0(\eta, u) := (\eta, u)_{H^1(\Omega)}$.

На основе этой формулы Грина можно исследовать слабые решения классических краевых задач для оператора Лапласа, т. е. задач Дирихле, Неймана и других, а также соответствующие спектральные и начально-краевые проблемы.

Целью дальнейших рассмотрений является исследование подобных задач в несимметрическом случае, когда вместо скалярного произведения $(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \Phi_0(\eta, u)$ имеется полуторалинейная несимметрическая форма $\Phi_\varepsilon(\eta, u)$, определенная на пространстве $H^1(\Omega)$, ограниченная на нем и являющаяся равномерно аккретивной. Параметр $\varepsilon \in \mathbb{R}$ будет введен для удобства дальнейших рассмотрений, причем все изучаемые задачи при $\varepsilon \to 0$ будут переходить в проблемы, отвечающие соответствующим невозмущенным задачам.

Отметим еще, что в (1.1) дифференциальное выражение имеет вид $L_0 u = u - \Delta u$, а производная по внешней нормали $\partial_0 u := (\partial u/\partial n)_\Gamma$.

1.2. О формуле Грина для возмущенной задачи. Рассмотрим дифференциальное выражение

$$L_\varepsilon u := u - \Delta u + \varepsilon\sum_{k=1}^m c_k\frac{\partial u}{\partial x_k}, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1,m}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

а также соответствующую обобщенную формулу Грина для полуторалинейной формы. Как было видно из предыдущих рассмотрений, и дифференциальное выражение, и вид полуторалинейной формы можно выбирать неоднозначно, а краевые, спектральные и начально-краевые задачи затем формулировать на основе этой выбранной формулы Грина.

При дальнейшем рассмотрении проблем, основываясь на тождествах

$$\int\limits_\Omega \eta\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_k}d\Omega = -\int\limits_\Omega \frac{\partial\eta}{\partial x_k}\bar{u}d\Omega + \int\limits_\Gamma \cos(\widehat{\vec{n},\vec{e}_k})\eta\bar{u}\,d\Gamma, \quad \forall\,\eta, u \in H^1(\Omega), \tag{1.4}$$

и учитывая вид $L_\varepsilon u$ из (1.3), приходим к выводу на основе формулы (1.1), что имеет место следующая обобщенная формула Грина для полуторалинейной формы:

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(\eta, u) &:= (\eta, u)_{H^1(\Omega)} + 2\varepsilon\sum_{k=1}^m c_k\left[\left(\eta, \frac{\partial u}{\partial x_k}\right)_{L_2(\Omega)} - \left(\frac{\partial\eta}{\partial x_k}, u\right)_{L_2(\Omega)}\right] = \\ &= \langle\eta, L_\varepsilon u\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle\gamma\eta, \partial_\varepsilon u\rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall\,\eta, u \in H^1(\Omega),\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\partial_\varepsilon u := \partial_0 u - \varepsilon\sigma\gamma u, \quad \sigma := \sum_{k=1}^m c_k\cos(\widehat{\vec{n},\vec{e}_k}), \quad \partial_\varepsilon u \in H^{-1/2}(\Gamma), \tag{1.6}$$

где $L_\varepsilon u \in (H^1(\Omega))^*$ — дифференциальное выражение (1.3), а $\partial_0 u := (\partial u/\partial n)_\Gamma$. Все дальнейшие проблемы будем формулировать на базе этой формулы Грина.

Отметим еще, что $L_\varepsilon u = L_0 u + L_1 u$, где $L_1 u$ — дифференциальное выражение первого порядка, в то время как $L_0 u = u - \Delta u$ — дифференциальное выражение второго порядка.

Проверим, что полуторалинейная форма $\Phi_\varepsilon(\eta,u)$ из (1.5) ограничена в $H^1(\Omega)$ и равномерно аккретивна. Имеем

$$\begin{aligned}\Big|\Big(\eta,\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big)_{L_2(\Omega)}-\Big(\frac{\partial \eta}{\partial x_k},u\Big)_{L_2(\Omega)}\Big| &\leqslant \|\eta\|_{L_2(\Omega)}\cdot\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\|_{L_2(\Omega)}+\\ &+\|\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\|_{L_2(\Omega)}\cdot\|u\|_{L_2(\Omega)}\leqslant 2\|\eta\|_{H^1(\Omega)}\cdot\|u\|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Поэтому $|\Phi_\varepsilon(\eta,u)|\leqslant \tilde{c_1}\|\eta\|_{H^1(\Omega)}\cdot\|u\|_{H^1(\Omega)}$, $\tilde{c_1}=\Big(1+4|\varepsilon|\sum\limits_{k=1}^m|c_k|\Big)$, т. е. $\Phi_\varepsilon(\eta,u)$ ограничена в $H^1(\Omega)$. Далее, сопряженная форма имеет вид

$$\Phi^*(\eta,u)=\overline{\Phi(u,\eta)}=(\eta,u)_{H^1(\Omega)}-2\varepsilon\sum_{k=1}^m c_k\Big[\Big(\eta,\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big)_{L_2(\Omega)}-\Big(\frac{\partial \eta}{\partial x_k},u\Big)_{L_2(\Omega)}\Big]. \tag{1.8}$$

Отсюда и из (1.5) получаем, что $\operatorname{Re}\Phi_\varepsilon(u,u)=\dfrac{1}{2}[\Phi_\varepsilon(u,u)+\Phi_\varepsilon^*(u,u)]=(u,u)_{H^1(\Omega)}=\|u\|^2_{H^1(\Omega)}$, т. е. $\Phi_\varepsilon(u,u)$ равномерно аккретивна в $H^1(\Omega)$ с константой $c_2=1$.

Тогда из общей теории таких полуторалинейных форм следует, во-первых, что форме $\Phi_\varepsilon(\eta,u)$ однозначно отвечает оператор $A_\varepsilon : H^1(\Omega)\to(H^1(\Omega))^*$, связанный с формой соотношениями $\Phi_\varepsilon(\eta,u)=\langle\eta,A_\varepsilon u\rangle_{L_2(\Omega)}$, $\forall\ \eta,u\in H^1(\Omega)$, $A_\varepsilon u\in(H^1(\Omega))^*$, а во-вторых, этот оператор имеет ограниченный обратный $A_\varepsilon^{-1}:(H^1(\Omega))^*\to H^1(\Omega)$ (теорема Лакса—Мильграма).

Заметим еще, что пространство $L_2(\Omega)$ имеет оснащение $H^1(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow(H^1(\Omega))^*$ (с компактными вложениями левых пространств в правые).

Отметим, наконец, что связь оператора A_ε, отвечающего форме $\Phi_\varepsilon(\eta,u)$, и оператора A_0, отвечающего невозмущенной форме $\Phi_0(\eta,u)=(\eta,u)_{H^1(\Omega)}$, будет выяснена ниже.

1.3. Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач. В математической физике часто встречаются такие краевые задачи, когда на одной части границы $\Gamma=\partial\Omega$ области $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ задают краевое условие Дирихле, на другой — условие Неймана, а на третьей — условие Ньютона. Подобные задачи называют смешанными. Для таких задач функционал, связанный с $\Gamma=\partial\Omega$ и фигурирующий в формуле Грина (см. [20]), естественно разбить на части, отвечающие тому или иному краевому условию.

Переходя к рассмотрению этой проблемы в абстрактной форме, приходим к выводу, что в формуле (1.1) необходимо выражение $\langle\gamma\eta,\partial u\rangle_G$ заменить на выражение $\Sigma_{k=1}^l\langle\gamma_k\eta,\partial_k u\rangle_{G_k}$, где $\gamma_k\eta$ — абстрактный аналог следа элемента $\eta\in F$ на части Γ_k границы Γ, а $\partial_k u$ — соответствующий аналог производной по внешней нормали на этой части границы.

Будем считать, что для тройки пространств E,F,G и оператора следа γ выполнены условия, обеспечивающие существование формулы Грина, а также следующие условия.

4°. *Имеет место ортогональное разложение и оснащения*: $G=\bigoplus\limits_{k=1}^l G_k$, $\exists\ (G_+)_k$, $(G_+)_k^*$: $(G_+)_k\hookrightarrow G_k\hookrightarrow(G_+)_k^*$, $k=\overline{1,l}$.

5°. *В пространстве G действует ограниченный оператор $\rho_k :\ G_+\to(G_+)_k$ — абстрактный оператор сужения на часть границы.*

Теорема 1.1. *Пусть для тройки пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$ ($\Gamma=\partial\Omega$, $\Omega\in\mathbb{R}^m$) и оператора следа γ липшицева граница Γ неодносвязна и разбита на несколько односвязных частей Γ_k, $k=\overline{1,l}$ (в частности, $l=2$), находящихся на положительном расстоянии друг от друга, т. е. $\Gamma=\bigcup\limits_{k=1}^l\Gamma_k$, $dist(\Gamma_k,\Gamma_j)\geqslant d>0$, $k\neq j$, $j,k=\overline{1,l}$. Тогда имеет место следующая обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач*:

$$(\eta,u)_{H^1(\Omega)}=\langle\eta,u-\Delta u\rangle_{L_2(\Omega)}+\sum_{k=1}^l\langle\gamma_k\eta,\partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)},\quad\forall\ \eta,u\in H^1(\Omega), \tag{1.9}$$

$$\gamma_k\eta:=\eta\,|_{\Gamma_k}\in H^{1/2}(\Gamma_k),\ \partial_k u=\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k}\in H^{-1/2}(\Gamma_k),\quad k=\overline{1,l},\quad u-\Delta u\in(H^1(\Omega))^*. \tag{1.10}$$

1.4. К постановке задачи. Рассмотрим в области Ω, разбитой на две подобласти Ω_1, Ω_2 (см. рис. 1) следующую задачу сопряжения:

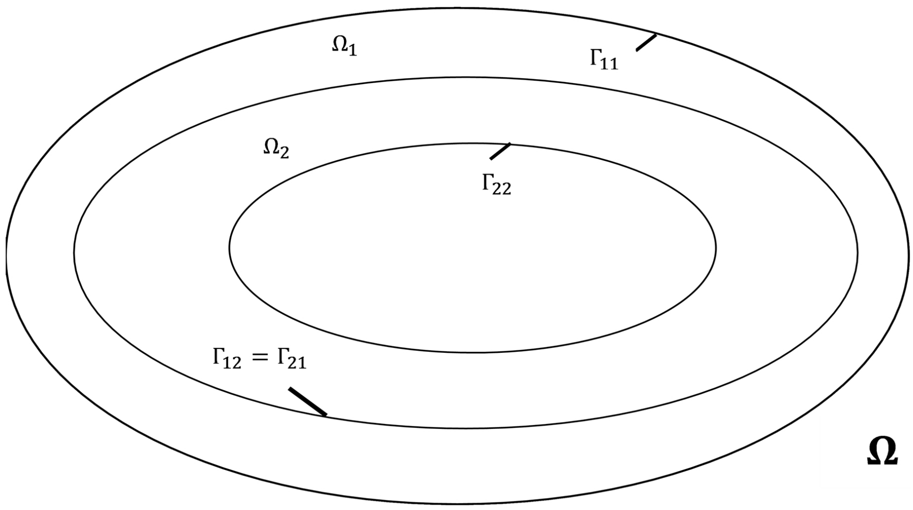


Рис. 1

$$
\begin{aligned}
&u_1 - \Delta u_1 + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} = \lambda u_1 := f_1 \quad (\text{в } \Omega_1); \qquad \gamma_{11} u_1 = \varphi_1 \ (\text{на } \Gamma_{11}),\\
&u_2 - \Delta u_2 + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} = \lambda u_2 := f_2 \quad (\text{в } \Omega_2); \qquad \gamma_{22} u_2 = \varphi_2 \ (\text{на } \Gamma_{22}),\\
&\gamma_{21} u_1 - \gamma_{12} u_2 = \varphi_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}),\\
&\left(\frac{\partial u_1}{\partial n_{12}} - \varepsilon \sigma_{12} \gamma_{21} u_1\right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial n_{21}} - \varepsilon \sigma_{21} \gamma_{12} u_2\right) = \psi_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}),\\
&\qquad \sigma_{12} := \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \cos(\widehat{\vec{n}_{12}, \vec{e}_k}), \quad \sigma_{21} := \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \cos(\widehat{\vec{n}_{21}, \vec{e}_k}).
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Будем считать, что задача (1.11) имеет слабое решение $u = (u_1; u_2) \in H^1(\Omega) = H^1(\Omega_1 \oplus H^1(\Omega_2))$, и выведем уравнение, которому удовлетворяет это решение. С этой целью перепишем задачу в виде неоднородной невозмущенной:

$$
\begin{aligned}
&u_1 - \Delta u_1 = f_1 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} =: \widetilde{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1); \qquad \gamma_{11} u_1 = \varphi_1 \ (\text{на } \Gamma_{11}),\\
&u_2 - \Delta u_2 = f_2 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} =: \widetilde{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2); \qquad \gamma_{22} u_2 = \varphi_2 \ (\text{на } \Gamma_{22}),\\
&\gamma_{21} u_1 - \gamma_{12} u_2 = \varphi_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}),\\
&\partial_{12} u_1 + \partial_{21} u_2 = \varepsilon(\sigma_{12} \gamma_{21} u_1 - \sigma_{21} \gamma_{12} u_2) + \psi_{21} =: \widetilde{\psi_{21}} \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}),\\
&\qquad \sigma_{12} := \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \cos(\widehat{\vec{n}_{12}, \vec{e}_k}), \quad \sigma_{21} := \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \cos(\widehat{\vec{n}_{21}, \vec{e}_k}).
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

Здесь через Γ_{jj}, $j = \overline{1,2}$ обозначены внешние свободные границы, а через Γ_{ij}, $i \neq j$ — граница стыка областей. При этом очевидно, что $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$. Полагаем, что области $\Omega_i \subset \mathbb{R}^m$ имеют липшицевы границы, разбитые на липшицевы куски Γ_{ij}. Через φ_1, φ_2 обозначены следы функций u_j, а через $\partial_{ij} u_j$ — соответствующие производные по внешней нормали; f_j — заданные функции в Ω_j, $j = \overline{1,2}$, φ_j — заданные функции на внешних границах Γ_{jj}, $j = \overline{1,2}$. Функция φ_{21} задает разрыв следов, а ψ_{21} — разрыв производных по внешней нормали на границе стыка областей.

Целью является нахождение функций $u_j \in H^1(\Omega)$, $j = \overline{1,2}$, для которых выполнены уравнения в (1.12), внешние граничные условия, а также условия сопряжения на стыках областей. Исследование будем проводить на основе формулы Грина для полуторалинейной формы следующего вида (напомним, что выбор полуторалинейной формы изначально может быть произвольным):

$$\begin{aligned}
&\Phi_\varepsilon(\eta, u) := (\eta, u)_{H^1(\Omega)} + 2\varepsilon \sum_{k=1}^m c_{1k} \left[\left(\eta_1, \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \right)_{L_2(\Omega_1)} - \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x_k}, u_1 \right)_{L_2(\Omega_1)} \right] + \\
&+ 2\varepsilon \sum_{k=1}^m c_{2k} \left[\left(\eta_2, \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \right)_{L_2(\Omega_2)} - \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x_k}, u_2 \right)_{L_2(\Omega_2)} \right] = \\
&= \langle \eta_1, u_1 - \Delta u_1 + \varepsilon \sum_{k=1}^m c_{1k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle \eta_2, u_2 - \Delta u_2 + \varepsilon \sum_{k=1}^m c_{2k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \rangle_{L_2(\Omega_2)} + \\
&+ \langle \gamma_{11}\eta_1, \frac{\partial u_1}{\partial n_{12}} - \varepsilon \sigma_{12} \gamma_{11} u_1 \rangle_{L_2(\Gamma_{11})} + \langle \gamma_{22}\eta_2, \frac{\partial u_2}{\partial n_{21}} - \varepsilon \sigma_{21} \gamma_{12} u_2 \rangle_{L_2(\Gamma_{22})} + \\
&+ \langle \gamma_{21}\eta_1, \frac{\partial u_1}{\partial n_{12}} - \varepsilon \sigma_{12} \gamma_{21} u_1 \rangle_{L_2(\Gamma_{12})} + \langle \gamma_{12}\eta_2, \frac{\partial u_1}{\partial n_{21}} - \varepsilon \sigma_{21} \gamma_{12} u_2 \rangle_{L_2(\Gamma_{21})}.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Целью дальнейших рассмотрений является получение необходимых и достаточных условий разрешимости задачи (1.13), а также представление этого решения через операторы вспомогательных краевых задач. При этом будет использован принцип суперпозиции, позволяющий представить решение задачи (1.13) в виде суммы решений четырех вспомогательных краевых задач (невозмущенных), содержащих неоднородность лишь в одном месте, т. е. либо в уравнении, либо в одном из краевых условий.

Решение ищем в виде $u = (u_1; u_2) = \sum_{j=1}^4 (u_{j1}, u_{j2}) =: \sum_{j=1}^4 u_{(j)}$, где $u_{(j)}$ — решения вспомогательных задач.

1.4.1. Первая вспомогательная задача (*невозмущенная задача Зарембы*).

$$u_{11} - \Delta u_{11} = 0 \ (\text{в } \Omega_1); \ \gamma_{11} u_{11} = \varphi_1 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \ \partial_{12} u_{11} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{21}); \tag{1.14}$$

$$u_{12} - \Delta u_{12} = 0 \ (\text{в } \Omega_2); \ \gamma_{22} u_{12} = \varphi_2 \ (\text{на } \Gamma_{22}), \ \partial_{21} u_{12} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}). \tag{1.15}$$

Здесь φ_1, φ_2 заданы, т. е. условия Дирихле на внешних границах неоднородны, а уравнения и условия Неймана на стыке однородные. Таким образом, для $u_{(1)} = (u_{11}; u_{12})$ имеем задачу Зарембы, которая распадается на две независимые задачи (1.14), (1.15).

Рассматривая первую из них, т. е. задачу (1.14), будем считать, что ее решение $u_{11}(x) \in H_h^1(\Omega_1) := \{u_1 \in H^1(\Omega_1) : u_1 - \Delta u_1 = 0\}$. Тогда (по теореме Гальярдо, см. [40]) ее след $\gamma_1 u_{11}(x)$ на $\partial\Omega_1 = \Gamma_1$ есть функция из $H^{1/2}(\Gamma_1)$, а на Γ_{11} след является функцией из $H^{1/2}(\Gamma_{11})$. Таким образом, необходимым условием разрешимости задачи (1.14) является условие

$$\varphi_1 \in H^{1/2}(\Gamma_{11}). \tag{1.16}$$

Так как между элементами из $H_h^1(\Omega_1)$ и $H^{1/2}(\Gamma_1)$ имеет место взаимно однозначное соответствие (и даже изометрия при соответствующем выборе эквивалентной нормы в $H^{1/2}(\Gamma_1)$), то существует единственный элемент

$$v_{11} = \widehat{\gamma}_1^{-1} \varphi_1 \in H_h^1(\Omega_1), \tag{1.17}$$

который является решением задачи

$$v_{11} - \Delta v_{11} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1); \qquad \gamma_{11} v_{11} = \varphi_1 \quad (\text{на } \Gamma_1 = \partial\Omega_1). \tag{1.18}$$

Тогда для функции $w_{11} := u_{11} - v_{11}$ из (1.14), (1.18) возникает задача Неймана

$$w_{11} - \Delta w_{11} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1); \qquad \gamma_{11} w_{11} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{11}); \qquad \partial_{21} w_{11} = -\partial_{21} v_{11} \quad (\text{на } \Gamma_{21}). \tag{1.19}$$

Ее слабое решение естественно рассматривать в пространстве $H_{0,\Gamma_{11}}^1(\Omega_1) := \{u_1 \in H^1(\Omega_1) : \gamma_{11} u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11})\}$.

Из условия на Γ_{11} в (1.19) следует, что $\gamma_{21}w_{11} \in H^{1/2}(\Gamma_{21})$ (см. [14, п. 3.3.2]), и тогда с помощью [14, лемма 3.3.4] имеем: $w_{11} \in H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1) = H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap H^1_h(\Omega_1)$. Отсюда получаем, что в задаче (1.19) должно быть выполнено необходимое условие

$$\partial_{21}v_{11} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}). \tag{1.20}$$

Покажем, что это условие является и достаточным для существования слабого решения задачи (1.19), причем оно действительно имеет место.

Воспользуемся формулой

$$(\eta_1, w_{11})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \eta_1, w_{11} - \Delta w_{11}\rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle \gamma_{21}\eta_1, \partial_{21}w_{11}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})}, \tag{1.21}$$

$$\gamma_{21}\eta_1 \in H^{1/2}(\Gamma_{21}),\ \partial_{21}w_{11} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}), \quad \forall\, \eta_1, w_{11} \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1), \tag{1.22}$$

которая следует из формулы

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega_1)} = \langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega_1)} + \sum_{k=1}^{2}\langle \gamma_k\eta_1, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_{21})}, \quad \forall\, \eta, u \in H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1). \tag{1.23}$$

На ее основе легко определяется слабое решение $w_{11} \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap H^1_h(\Omega_1)$ задачи (1.19)

$$(\eta_1, w_{11})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \gamma_{21}\eta_1, (-\partial_{21}v_{11})\rangle_{L_2(\Gamma_{21})}, \quad \forall\, \eta \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1). \tag{1.24}$$

Здесь в силу (1.19) и теоремы Гальярдо правая часть является линейным ограниченным функционалом в $H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1)$. Действительно, из условия $v_{11} \in H^1_h(\Omega_1)$ (см. (1.17)) имеем $\gamma_1 v_{11} \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, $\partial_1 v_{11} \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$, а потому $\partial_{21}v_{11} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21})$. Кроме того, $\gamma_{21}\eta_1 \in H^{1/2}(\Gamma_{21})$, и потому правая часть в (1.24) не превышает $\|\partial_{21}v_{11}\|_{H^{-1/2}(\Gamma_{11})}\,\|\gamma_{21}\eta_1\|_{H^{1/2}(\Gamma_{21})} \leqslant c_{11}\|\eta_1\|_{H^1(\Omega_1)}$. Значит, при любом $\varphi_1 \in H^{1/2}(\Gamma_{11})$ существует единственное $w_{11} \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega)$. В частности, если $\eta_1 \in H^1_0(\Omega_1)$, тогда в (1.24) получаем, что $(\eta_1, w_{11})_{H^1(\Omega_1)} = 0$, следовательно, w_{11} ортогонально $H^1_0(\Omega_1)$ и $w_{11} \in H^1_h(\Omega_1)$. При этом w_{11} является слабым решением задачи (1.19):

$$\begin{gathered} w_{11} := V_{21}(-\partial_{21}v_{11}) = -V_{21}\partial_{21}\widehat{\gamma}_1^{-1}\varphi_1 \in H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1), \\ V_{21} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21}); H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap H^1_h(\Omega_1)). \end{gathered} \tag{1.25}$$

Отсюда окончательно приходим к выводу, что условие (1.16) является необходимым и достаточным условием существования слабого решения u_{11} задачи Зарембы (1.14), и это решение выражается формулой $u_{11} = v_{11} + w_{11} = \widehat{\gamma}_1^{-1}\varphi_1 - V_{21}\partial_{21}\widehat{\gamma}_1^{-1}\varphi_1 =: \widetilde{\gamma}_{11}^{-1}\varphi_1$, $\widetilde{\gamma}_{11}^{-1} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_{11}); H^1_h(\Omega_1))$.

Аналогично рассматривается задача (1.15). Ее решение выражается формулой $u_{12} = \widetilde{\gamma}_{22}^{-1}\varphi_2$.

Итогом рассмотрения является следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Каждая из задач Зарембы* (1.14), (1.15) *имеет единственное слабое решение* $u_{1k} \in H^1_h(\Omega_k)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_{kk}),\ k = \overline{1,2}, \tag{1.26}$$

и это решение выражается формулой $u_{1k} = \widetilde{\gamma}_{kk}^{-1}\varphi_k$, $\widetilde{\gamma}_{kk}^{-1} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_{kk}); H^1_h(\Omega_k))$, $k = \overline{1,2}$.

1.4.2. Вторая вспомогательная задача (*невозмущенная задача Стеклова*). Перейдем теперь ко второму этапу — рассмотрению задачи Стеклова применительно к проблеме (1.12). Необходимо исследовать проблему нахождения набора функций $u_{(2)} = (u_{21}; u_{22}) \in \oplus_{k=1}^2 H^1_{0,\Gamma_{kk}}(\Omega_k)$ из следующих уравнений и краевых условий:

$$\begin{aligned} &u_{21} - \Delta u_{21} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1);\ \gamma_{11}u_{21} = 0\ (\text{на } \Gamma_{11}), \\ &u_{22} - \Delta u_{22} = 0 \quad (\text{в } \Omega_2);\ \gamma_{22}u_{22} = 0\ (\text{на } \Gamma_{22}), \end{aligned} \tag{1.27}$$

$$\begin{aligned} &\gamma_{21}u_{21} - \gamma_{12}u_{22} = \varphi_{21} - \gamma_{21}u_{11} + \gamma_{12}u_{12} := \widetilde{\varphi}_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ &\partial_{12}u_{21} = -\partial_{21}u_{22} (=: \chi_{21}) \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}). \end{aligned} \tag{1.28}$$

Здесь $(u_{11}; u_{12})^\tau = u_{(1)}$ — решение задачи Зарембы (1.14)-(1.15), а φ_{21} — заданная функция.

Если функция χ_{21} известна, то вместо (1.27), (1.28) возникают две распадающиеся задачи Неймана. В частности, для функции u_{21} имеем задачу

$$u_{21} - \Delta u_{21} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1);\ \gamma_{11}u_{21} = 0\ (\text{на } \Gamma_{11}); \quad \partial_{21}u_{21} = \chi_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \tag{1.29}$$

слабое решение которой будем разыскивать в пространстве $H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap H^1_h(\Omega_1) =: H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1)$, а также с помощью формулы Грина

$$(\eta_1, u_{21})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \eta_1, u_{21} - \Delta u_{21} \rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle \gamma_{21}\eta_1, \chi_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})}. \tag{1.30}$$

Эта задача уже рассмотрена выше (см. (1.18), (1.21)). Для ее слабой разрешимости необходимо и достаточно (см. (1.20)), чтобы выполнялось условие $\chi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21})$. Тогда слабое решение определяется в виде

$$(\eta_1, u_{21})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \gamma_{21}\eta_1, \chi_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})}, \quad \forall\, \eta_1 \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \tag{1.31}$$

и выражается формулой

$$u_{21} = V_{21}\chi_{21}, \quad V_{21} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21}); H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1)). \tag{1.32}$$

Аналогичное рассмотрение другой задачи Неймана, возникающей из проблемы (1.27), (1.28), основанное на обобщенной формуле Грина

$$(\eta_2, u_{22})_{H^1(\Omega_2)} = \langle \eta_2, u_{22} - \Delta u_{22} \rangle_{L_2(\Omega_2)} + \langle \gamma_{12}\eta_2, \partial_{12}u_{22} \rangle_{L_2(\Gamma_{12})}, \tag{1.33}$$

приводит к следующему выводу:

$$u_{22} = -V_{12}\chi_{21}, \quad V_{12} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21}); H^1_{0,\Gamma_{22},h}(\Omega_2)). \tag{1.34}$$

Имея представления (1.32), (1.34), из главных граничных условий в (1.28) получаем:

$$\gamma_{21}u_{21} - \gamma_{12}u_{22} = (\gamma_{21}V_{21} + \gamma_{12}V_{12})\chi_{21} := C\chi_{21} = \widetilde{\varphi}_{21}. \tag{1.35}$$

Здесь C — оператор Стеклова $C \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21}); H^{1/2}(\Gamma_{21}))$, он отображает $H^{-1/2}(\Gamma_{21})$ на $H^{1/2}(\Gamma_{21})$ и является положительным оператором. Для доказательства используем следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Оператор Стеклова* $C := \gamma_{21}V_{21} + \gamma_{12}V_{12}$, $C \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21}); H^{1/2}(\Gamma_{21}))$, *является положительным*:

$$\langle C\chi, \chi \rangle = \sum_{k=1}^{2} \| u_{2k} \|^2_{H^1(\Omega_k)}, \tag{1.36}$$

где u_{2k}, $k = \overline{1,2}$ — *слабые решения вспомогательных задач* (1.27)-(1.28).

Доказательство. Оно основано на тождествах (1.31), (1.33), представлениях (1.32), (1.34) и свойствах взаимной сопряженности операторов γ_{jk} и V_{jk}. Имеем

$$\langle C\chi_{21}, \chi_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})} = \langle \gamma_{21}V_{21}\chi_{21}, \chi_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})} + \langle \gamma_{12}V_{12}\chi_{21}, \chi_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{12})} =$$
$$= \|V_{21}\chi_{21}\|^2_{H^1(\Omega_1)} + \|V_{12}\chi_{21}\|^2_{H^1(\Omega_2)} = \sum_{k=1}^{2} \| u_{2k} \|^2_{H^1(\Omega_k)}\ .$$

□

Из тождества (1.36) следует, что оператор C положителен и действует из $H^{-1/2}(\Gamma_{21})$ на все $H^{1/2}(\Gamma_{21})$, и потому существует обратный оператор, который согласно теореме Банаха ограничен. Поэтому задача (1.35) имеет единственное решение $\chi_{21} = C^{-1}\widetilde{\varphi}_{21}$, $C^{-1} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_{21}); H^{-1/2}(\Gamma_{21}))$. Таким образом, решение задачи (1.35) существует и единственно при $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}_{21} \in H^{1/2}(\Gamma_{21})$.

Теорема 1.3. *Пусть в задаче Стеклова* (1.27), (1.28) *выполнено условие* (1.26). *Тогда существует единственное слабое решение* $u_{(2)} = (u_{21}; u_{22}) \in H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1)(\dot{+})H^1_{0,\Gamma_{22},h}(\Omega_2)$, *представимое в виде* $u_{(2)} = (V_{21}\chi_{21}; -V_{12}\chi_{21})$, $\chi_{21} = C^{-1}\widetilde{\varphi}_{21}$, *где операторы* V_{jk} *введены формулами*

$$\begin{aligned} &(\eta_1, V_{21}\chi_{21})_{H^1(\Omega_1)} := \langle \gamma_{21}\eta_1, \chi_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})}, \forall\, \eta_1 \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1),\ \forall\, \chi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}); \\ &(\eta_2, V_{12}\chi_{21})_{H^1(\Omega_2)} := \langle \gamma_{12}\eta_2, \chi_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})}, \forall\, \eta_2 \in H^1_{0,\Gamma_{22}}(\Omega_1),\ \forall\, \chi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}). \end{aligned} \tag{1.37}$$

Соответственно оператор Стеклова C *введен посредством элементов* (1.34), *а операторы* γ_{jk} — *операторы следа из* $H^1_{0,\Gamma_{kk}}(\Omega_k)$ *на* $H^{1/2}(\Gamma_{jk})$ $(j \neq k)$.

1.4.3. Третья вспомогательная задача (*первая возмущенная задача С. Г. Крейна*). Следующим этапом является рассмотрение первой вспомогательной задачи С. Г. Крейна, порожденной проблемой (1.12):

$$u_{(3)} = (u_{31}; u_{32}) \in \oplus_{k=1}^{2} H^1(\Omega_k) =: H^1(\Omega), \tag{1.38}$$

$$\begin{aligned} u_{31} - \Delta u_{31} = \widetilde{f}_1 = f_1 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \ (\text{в } \Omega_1),\ \gamma_{11} u_{31} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\ u_{32} - \Delta u_{32} = \widetilde{f}_2 = f_2 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \ (\text{в } \Omega_2),\ \gamma_{22} u_{32} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22}), \end{aligned} \tag{1.39}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{21} u_{31} - \gamma_{12} u_{32} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ \partial_{21} u_{31} + \partial_{12} u_{32} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}). \end{aligned} \tag{1.40}$$

Исходя из граничных условий Дирихле на Γ_{21} (см. (1.40)), введем в $H^1(\Omega)$ подпространство $H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ наборов элементов $(u_1; u_2)$, для которых выполнены главные (с вариационной точки зрения) краевые условия задачи (1.39), (1.40), т. е.

$$H^1_{0,\Gamma}(\Omega) := \Big\{ (u_{31}; u_{32}) \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \oplus H^1_{0,\Gamma_{22}}(\Omega_2) : \gamma_{21} u_{31} - \gamma_{12} u_{32} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{12}) \Big\}. \tag{1.41}$$

Это пространство плотно вложено в пространство $L_2(\Omega) := \oplus_{k=1}^{2} L_2(\Omega_k)$, так как $H^1_{0,\Gamma}$ содержит подпространство $H^1_0(\Omega)$:

$$H^1_0(\Omega) := \Big\{ (u_{31}; u_{32}) : \gamma_{21} u_{31} = 0,\ \gamma_{12} u_{32} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12}),\ \gamma_{11} u_{21} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}),\ \gamma_{22} u_{22} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22}) \Big\}.$$

Поэтому $(H^1_{0,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega))$ — гильбертова пара пространств, оператор которой обозначим через A_0. Опираясь на обобщенную формулу Грина для областей Ω_k, $k = \overline{1,2}$ (см. (1.23), (1.33)), для набора функций $\eta = (\eta_1; \eta_2)$ и $u_{(3)} := (u_{31}; u_{32})$ из $H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ получим следующую формулу Грина:

$$\begin{aligned} (\eta, u_{(3)})_{H^1(\Omega)} = \sum_{k=1}^{2} (\eta_k, u_{3k})_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{2} \langle \eta_k, u_{3k} - \Delta u_{3k} \rangle_{L_2(\Omega_k)} + \\ + \langle \gamma_{21} \eta_1, \partial_{21} u_{31} + \partial_{12} u_{32} \rangle_{L_2(\Gamma_{12})}, \quad \forall\, \eta, u_{(3)} \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega), \quad \gamma_{21} \eta_1 = \gamma_{12} \eta_2 \in H^{1/2}(\Gamma_{12}). \end{aligned} \tag{1.42}$$

Отсюда и из (1.39), (1.40) естественно дается определение слабого решения этой задачи: это такой набор $u_{(3)} = (u_{31}; u_{32}) \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$, для которого выполнено тождество

$$(\eta, u_{(3)})_{H^1(\Omega)} = \sum_{k=1}^{2} (\eta_k, u_{3k})_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{2} \langle \eta_k, \widetilde{f}_k \rangle_{L_2(\Omega_k)}, \quad \forall\, \eta \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega). \tag{1.43}$$

Теорема 1.4. *Первая вспомогательная задача С. Г. Крейна* (1.39), (1.40) *имеет единственное слабое решение* $u_{(3)} \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда* $f := (f_1; f_2) \in (H^1_{0,\Gamma}(\Omega))^*$. *Это решение выражается формулой*

$$u_{(3)} = A_0^{-1} \widetilde{f} = A_0^{-1} \Big\{ \widetilde{f}_1 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k}; \widetilde{f}_2 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \Big\}, \tag{1.44}$$

где A_0 — *оператор гильбертовой пары* $(H^1_{0,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega))$.

Если, в частности, $f := (f_1; f_2) \in L_2(\Omega) := \oplus_{k=1}^{2} L_2(\Omega_k)$, *то исходная задача имеет единственное обобщенное решение* $u_{(3)} \in \mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(A_0^{1/2}) = H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$, $\mathcal{R}(A) = L_2(\Omega)$, *выражаемое той же формулой* (1.44).

1.4.4. Четвертая вспомогательная задача (*вторая возмущенная задача С. Г. Крейна*). Рассмотрим, наконец, четвертый этап исследования задачи сопряжения (1.12). Здесь для набора функций $u_{(4)} = (u_{41}; u_{42}) \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ получаем следующую проблему:

$$\begin{aligned} &u_{41} - \Delta u_{41} = 0 \ (\text{в } \Omega_1); \ \gamma_{11} u_{41} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\ &u_{42} - \Delta u_{42} = 0 \ (\text{в } \Omega_2); \ \gamma_{22} u_{42} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22}), \end{aligned} \tag{1.45}$$

$$\begin{aligned} &\gamma_{21} u_{41} - \gamma_{12} u_{42} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ &\partial_{21} u_{41} + \partial_{12} u_{42} = \widetilde{\psi}_{21} := \psi_{21} + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}u_1 - \sigma_{21}\gamma_{12}u_2) \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}). \end{aligned} \tag{1.46}$$

Согласно условиям (1.45), здесь снова для решений из $H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ имеем свойства

$$\begin{aligned} &\gamma_{21} u_{41} = \gamma_{12} u_{42} \in H^{1/2}(\Gamma_{21}), \qquad \gamma_{21} u_{41} - \gamma_{12} u_{42} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ &\partial_{12} u_{41} + \partial_{21} u_{42} = \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}u_1 - \sigma_{21}\gamma_{12}u_2) + \psi_{21} =: \widetilde{\psi}_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}). \end{aligned} \tag{1.47}$$

Поэтому необходимое условие разрешимости задачи (1.45), (1.46) таково:

$$\psi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}). \tag{1.48}$$

При этом слабое решение определяется тождеством

$$(\eta, u_{(4)})_{H^1(\Omega)} := \sum_{k=1}^{2} (\eta_k, u_{4k})_{H^1(\Omega_k)} = \langle \gamma_{21}\eta_1, \widetilde{\psi}_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})}, \quad \forall\, \eta \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega), \tag{1.49}$$

которое следует из формулировки задачи (1.45), (1.46), а также из формулы Грина (1.42) (с заменой $u_{(3)}$ на $u_{(4)}$).

Теорема 1.5. *Вторая вспомогательная задача С. Г. Крейна* (1.45), (1.46) *имеет единственное слабое решение* $u_{(4)} \in H^1_{0,\Gamma,h}(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие* (1.48). *Это решение имеет вид* $u_{(4)} = W_{21}\psi_{21}$, $W_{21} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21}); H^1_{0,\Gamma,h}(\Omega))$, $H^1_{0,\Gamma,h}(\Omega) := H^1_{0,\Gamma}(\Omega) \cap H^1_h(\Omega)$, $H^1_h(\Omega) := \oplus_{k=1}^2 H^1_h(\Omega_k)$. *При этом оператор* W_{21} *обладает свойством* $(W_{21})^* = \gamma_{21}\rho_1 = \gamma_{12}\rho_2$, *где* $\rho_k : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega_k)$, $k = \overline{1,2}$ — *операторы сужения,* $\rho_k u = \rho_k(u_1, u_2) := u_k$, $k = \overline{1,2}$.

Доказательство. Свойство $\gamma_{21}\rho_1 = \gamma_{12}\rho_2$ следует из определения подпространства $H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ (см. (1.41)), а свойство $\gamma_{21}\rho_1 = (W_{21})^*$ — из определения слабого решения (см. (1.49)) задачи (1.45), (1.46), $u_{(4)} = W_{21}\widetilde{\psi}_{21}$. □

1.4.5. Итоговый результат. Складывая решения четырех вспомогательных задач, рассмотренных выше, получаем следующую связь решений возмущенной и невозмущенной задач:

$$\begin{aligned} u + \varepsilon A^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m} c_{1k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k}; \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \right) - \varepsilon W_{21}(\sigma_{12}\gamma_{21}u_1 - \sigma_{21}\gamma_{12}u_2) = \\ = (I + \widehat{C})\widehat{\varphi} + V\varphi_{21} + A^{-1} f + W_{21}\psi_{21} =: u_0, \end{aligned} \tag{1.50}$$

или $(I + \varepsilon S)u_\varepsilon = u_0$, $u_0, u = u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$, $S \in \mathfrak{S}_\infty(H^1(\Omega))$. Окончательно получаем следующее утверждение.

Теорема 1.6. *Если* $I + \varepsilon S$ *обратим, в частности, если* $|\varepsilon| \|S\| < 1$, *то исходная возмущенная краевая задача* (1.12) *разрешима, т. е. существует единственное слабое решение, которое выражается формулой* $u_\varepsilon = (I + \varepsilon S)^{-1} u_0$, $u_0, u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$, $S \in \mathfrak{S}_\infty(H^1(\Omega))$, *где* u_0 — *сумма слагаемых в* (1.50).

Замечание 1.1. То, что сумма решений четырех вспомогательных краевых задач (Зарембы, Стеклова и двух задач С. Г. Крейна) действительно дает решение исходной задачи (1.12), легко проверяется непосредственно. Можно убедиться, опираясь на формулы Грина (см. (1.23), (1.33)), что однородная задача имеет лишь нулевое решение. Следовательно, представление решения исходной задачи в виде суммы решений четырех вспомогательных задач выражается итоговыми формулами единственно.

2. Смешанные спектральные задачи сопряжения, порожденные полуторалинейной формой

2.1. Спектральные задачи для случая двух областей при первом условии сопряжения.

2.1.1. Невозмущенные смешанные спектральные задачи сопряжения при первом условии сопряжения. Снова в области Ω, разбитой на две подобласти Ω_1, Ω_2 (см. рис. 1), рассмотрим сначала невозмущенную ($\varepsilon = 0$) спектральную задачу сопряжения для искомых функций $u_k(x)$, заданных в областях Ω_k, $k = 1, 2$, с соответствующими граничными условиями. Имеем: в областях Ω_1, Ω_2 и на внешних границах:

$$\begin{aligned} &u_1 - \Delta u_1 = \lambda u_1 =: f_1 \ (\text{в } \Omega_1); \quad \partial_{11} u_1 = \lambda \gamma_{11} u_1 =: \psi_1 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\ &u_2 - \Delta u_2 = \lambda u_2 =: f_2 \ (\text{в } \Omega_2); \quad \partial_{12} u_2 = \lambda^{-1} \gamma_{22} u_2 =: \psi_2 \ (\text{на } \Gamma_{22}), \end{aligned} \tag{2.1}$$

на границах стыка задается два вариационных условия:

1°. либо

$$\gamma_{11} u_1 - \gamma_{12} u_2 = 0, \ \partial_{21} u_1 + \partial_{12} u_2 = \mu \gamma_{21} u_1 =: \psi_{21} \ (\text{на } \Gamma_{21}), \tag{2.2}$$

2°. либо

$$\partial_{21} u_1 = -\partial_{12} u_2 = \psi_{21} := \mu(\gamma_{21} u_1 - \gamma_{12} u_2) \quad (\text{на } \Gamma_{12}). \tag{2.3}$$

В этой проблеме имеется два параметра λ и μ, один из которых можно считать спектральным, а второй — фиксированным. В частности, в задачах дифракции спектральным параметром является параметр $\mu \in \mathbb{C}$. Другой вариант, когда спектральным является $\lambda \in \mathbb{C}$, рассматривается в работах В. И. Горбачук (см. [5]).

Задачу будем исследовать с помощью общего подхода, который был сформулирован в предыдущем разделе 1.

Из постановки задачи (2.1)-(2.2) видно, что ее слабое решение $u = (u_1; u_2)$ естественно искать в пространстве $H^1_\Gamma(\Omega) \subset H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2)$.

Представим решение задачи в виде суммы решений вспомогательных задач, в которых «неоднородности» (т. е. f_k и ψ_k) содержатся либо в уравнениях, либо в одном из краевых условий. Имеем $u = \sum_{k=1}^{5} u_{(k)} = \sum_{k=1}^{5} (u_{k1}; u_{k2})$:

$$\begin{aligned} 1)\ &u_{11} - \Delta u_{11} = 0 \ (\text{в } \Omega_1); \quad \partial_{11} u_{11} = \psi_1 := \lambda \gamma_{11} u_1 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\ &u_{12} - \Delta u_{12} = 0 \ (\text{в } \Omega_2); \quad \partial_{22} u_{12} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22}), \\ &\gamma_{21} u_{11} - \gamma_{12} u_{12} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \qquad \partial_{21} u_{11} + \partial_{12} u_{12} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}); \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} 2)\ &u_{21} - \Delta u_{21} = 0 \ (\text{в } \Omega_1); \quad \partial_{11} u_{21} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\ &u_{22} - \Delta u_{22} = 0 \ (\text{в } \Omega_2); \quad \partial_{22} u_{22} = \lambda^{-1} \gamma_{22} u_2 := \psi_2 \ (\text{на } \Gamma_{22}), \\ &\gamma_{21} u_{21} - \gamma_{12} u_{22} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \qquad \partial_{21} u_{21} + \partial_{12} u_{22} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}); \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} 3)\ &u_{31} - \Delta u_{31} = f_1 := \lambda u_1 \ (\text{в } \Omega_1); \quad \partial_{11} u_{31} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\ &u_{32} - \Delta u_{32} = 0 \ (\text{в } \Omega_2); \quad \partial_{22} u_{32} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22}), \\ &\gamma_{21} u_{31} - \gamma_{12} u_{32} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \qquad \partial_{21} u_{31} + \partial_{12} u_{32} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}); \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} 4)\ &u_{41} - \Delta u_{41} = 0 \ (\text{в } \Omega_1); \quad \partial_{11} u_{41} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\ &u_{42} - \Delta u_{42} = f_2 = \lambda u_2 \ (\text{в } \Omega_2); \quad \partial_{22} u_{42} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22}), \\ &\gamma_{21} u_{41} - \gamma_{12} u_{42} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \qquad \partial_{21} u_{41} + \partial_{12} u_{42} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}); \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} 5)\ &u_{51} - \Delta u_{51} = 0 \ (\text{в } \Omega_1); \quad \partial_{11} u_{51} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\ &u_{52} - \Delta u_{52} = 0 \ (\text{в } \Omega_2); \quad \partial_{22} u_{52} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22}), \\ &\gamma_{21} u_{51} - \gamma_{12} u_{52} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \qquad \partial_{21} u_{51} + \partial_{12} u_{52} = \mu \gamma_{21} u_{51} =: \psi_{21} \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Задачи исследуются с помощью следующей обобщенной формулы Грина:

$$\begin{gathered}(\eta, u)_{H^1(\Omega)} := \sum_{k=1}^{2}(\eta_k, u_k)_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{2}\langle \eta_k, u_k - \Delta u_k\rangle_{L_2(\Omega_k)} + \\ + \sum_{k=1}^{2}\langle \gamma_{kk}\eta_k, \partial_{kk}u_k\rangle_{L_2(\Gamma_{kk})} + \langle \gamma_{21}\eta_1, \partial_{21}u_1 + \partial_{12}u_2\rangle_{L_2(\Gamma_{21})} + \\ + \langle \gamma_{21}\eta_1 - \gamma_{12}\eta_2, \partial_{21}u_1\rangle_{L_2(\Gamma_{21})}, \ \forall\, \eta, u \in H^1_\Gamma(\Omega),\end{gathered} \tag{2.9}$$

где следы таковы, что $\gamma_{kl}\eta_l \in H^{1/2}(\Gamma_{kl})$, а $\partial_{kl}u_l \in H^{-1/2}(\Gamma_{kl})$.

$$H^1_\Gamma(\Omega) := \{(u_1; u_2) \in H^1_{\Gamma_{11}(\Omega_1)} \oplus H^1_{\Gamma_{22}(\Omega_2)} : \gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21})\}.$$

Отметим, что $H^1_\Gamma(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega) := L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2)$, так как оно содержит подпространство $H^1_0(\Omega_1) \oplus H^1_0(\Omega_2)$, плотное в $L_2(\Omega)$.

Для первой вспомогательной задачи (2.4) формула Грина имеет вид

$$\begin{gathered}(\eta, u)_{H^1(\Omega)} := \sum_{k=1}^{2}(\eta_k, u_k)_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{2}\langle \eta_k, u_k - \Delta u_k\rangle_{L_2(\Omega_k)} + \\ + \sum_{k=1}^{2}\langle \gamma_{kk}\eta_k, \partial_{kk}u_k\rangle_{L_2(\Gamma_{kk})} + \langle \gamma_{11}\eta_1, \partial_{21}u_1 + \partial_{12}u_2\rangle_{L_2(\Gamma_{12})}, \ \forall\, \eta, u \in H^1_\Gamma(\Omega).\end{gathered} \tag{2.10}$$

Тогда слабое решение задачи (2.4) определяется тождеством

$$(\eta, u_{(1)})_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_{21}\eta_1, \psi_1\rangle_{L_2(\Gamma_{12})} = \langle \gamma_{11}\eta_1, \lambda\gamma_{11}u_1\rangle_{L_2(\Gamma_{11})}, \ \forall\, \eta \in H^1_\Gamma(\Omega). \tag{2.11}$$

Это решение задается формулой

$$u_{(1)} = (u_{11}; u_{12}) = V_{11}\psi_1 = V_{11}(\lambda\gamma_{11}u_1) = \lambda V_{11}\gamma_{11}u_1 = \lambda V_{11}\gamma_{11}p_1u, \tag{2.12}$$

где $p_ku = p_k(u_1; u_2) := u_k$, $k = \overline{1,2}$. Отметим еще, что выполнено $V_{kk} = (\gamma_{kk}p_k)^*$, $k = \overline{1,2}$.

Затем аналогичным образом определяются слабые решения вспомогательных задач (2.5)–(2.8). Имеем $u_{(2)} = (u_{21}; u_{22}) = V_{22}\psi_2 = V_{22}(\lambda^{-1}\gamma_{22}u_2) = \lambda^{-1}V_{22}\gamma_{22}p_2u$. Используя формулу Грина (2.9), получим решение третьей вспомогательной задачи $u_{(3)} = A^{-1}(f_1; 0) = \lambda A^{-1}(u_1; 0) = \lambda A^{-1}(\widetilde{p}_1u)$, $\widetilde{p}_1u = (u_1; 0)$, где A — оператор гильбертовой пары $(H^1_\Gamma(\Omega); L_2(\Omega))$.

Далее,

$$u_{(4)} = A^{-1}(0; f_2) = A^{-1}(\lambda(0; u_2)) = \lambda A^{-1}(\widetilde{p}_2u), \tag{2.13}$$

$$u_{(5)} = V_{21}\psi_{21} = V_{21}(\mu\gamma_{21}u_1) = \mu V_{21}\gamma_{21}p_1u. \tag{2.14}$$

Итогом проведенных построений является такой вывод: слабое решение $u = (u_1; u_2)$ задачи (2.1)–(2.8) удовлетворяет уравнению

$$u = \sum_{k=1}^{5} u_{(k)} = \lambda V_{11}\gamma_{11}p_1u + \lambda^{-1}V_{22}\gamma_{22}p_2u + \lambda A^{-1}\widetilde{p}_1u + \lambda A^{-1}\widetilde{p}_2u + \mu V_{21}\gamma_{21}p_1u. \tag{2.15}$$

Используя теперь свойство $u = (u_1; u_2) = \widetilde{p}_1u + \widetilde{p}_2u = (\widetilde{p}_1u_1; 0) + (0; \widetilde{p}_2u_2)$, получаем

$$u = \lambda(A^{-1} + V_{11}\gamma_{11}p_1)u + \lambda^{-1}V_{22}\gamma_{22}p_2u + \mu V_{21}\gamma_{21}p_1u, \tag{2.16}$$

где $u \in H^1_\Gamma(\Omega)$, A — оператор гильбертовой пары $(H^1_\Gamma(\Omega); L_2(\Omega))$.

Уравнение (2.16) можно привести к более симметрической форме, воспользовавшись тем, что имеет место свойство $A^{1/2}V_k = (\gamma_kA^{-1/2})^* \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_k); L_2(\Omega))$, $k = \overline{1,2}$. Действительно, представим элемент $u \in H^1_\Gamma(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2})$, $\mathcal{R}(A^{1/2}) = L_2(\Omega)$, в виде

$$u = A^{-1/2}v, \quad v \in L_2(\Omega), \tag{2.17}$$

и подставим его в (2.16), затем подействуем на обе части полученного соотношения оператором $A^{1/2}$ (это можно сделать в силу свойства $H^1_\Gamma(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2})$). Тогда взамен (2.16) возникает спектральная задача

$$L(\lambda, \mu)v := (I - \lambda(A^{-1} + B_{11}) - \lambda^{-1}B_{22} - \mu K_{22})v = 0, \quad v \in L_2(\Omega), \tag{2.18}$$

$$0 < A^{-1},$$

$$
\begin{gathered}
0 \leqslant B_{11} := A^{1/2} V_{11} (V_{11})^* A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)), \\
0 \leqslant B_{22} := A^{1/2} V_{22} (V_{22})^* A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)), \\
0 \leqslant K_{22} := A^{1/2} V_{21} (V_{21})^* A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))
\end{gathered}
\tag{2.19}
$$

для операторного пучка $L(\lambda, \mu)$ с параметрами λ и μ, один из которых можем считать фиксированным, другой — спектральным.

2.1.2. Возмущенные смешанные спектральные задачи сопряжения при первом условии сопряжения. Рассмотрим теперь спектральную задачу при $\varepsilon \neq 0$. Тогда имеем в областях Ω_1, Ω_2 для искомых функций $u_k(x)$:

$$
\begin{aligned}
u_1 - \Delta u_1 = \lambda u_1 =: f_1 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} =: \widetilde{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \\
u_2 - \Delta u_2 = \lambda u_2 =: f_2 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} =: \widetilde{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2);
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

на внешних границах:

$$
\begin{aligned}
\partial_{11} u_1 = \lambda \gamma_{11} u_1 + \varepsilon \sigma_1 \gamma_{11} u_1 =: \psi_1 + \varepsilon \sigma_1 \gamma_{11} u_1 =: \widetilde{\psi_1} \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\
\partial_{12} u_2 = \lambda^{-1} \gamma_{22} u_2 + \varepsilon \sigma_2 \gamma_{22} u_2 =: \psi_2 + \varepsilon \sigma_2 \gamma_{22} u_2 =: \widetilde{\psi_2} \ (\text{на } \Gamma_{22});
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

на границах стыка два вариационных условия:

1°. либо

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{11} u_1 - \gamma_{12} u_2 = 0, \quad \partial_{21} u_1 + \partial_{12} u_2 = \varphi_{21} + \varepsilon(\sigma_{12} \gamma_{21} u_1 - \sigma_{12} \gamma_{12} u_2) = \\
&= \mu \gamma_{12} u_1 + \varepsilon(\sigma_{12} \gamma_{21} u_1 - \sigma_{12} \gamma_{12} u_2) =: \widetilde{\psi_{21}} \quad (\text{на } \Gamma_{21}),
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

2°. либо

$$
\begin{aligned}
&\partial_{21} u_1 + \partial_{12} u_2 = \psi_{21} + \varepsilon(\sigma_{12} \gamma_{21} u_1 - \sigma_{12} \gamma_{12} u_2) = \mu(\gamma_{12} u_1 - \gamma_{12} u_2) + \\
&+ \varepsilon(\sigma_{12} \gamma_{21} u_1 - \sigma_{12} \gamma_{12} u_2) =: \widetilde{\psi_{21}} \quad (\text{на } \Gamma_{21}).
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Решение задачи (2.20)–(2.22) ищем в виде суммы решений пяти вспомогательных задач:

$$
\begin{aligned}
1)\ &u_{11} - \Delta u_{11} = 0 \ (\text{в } \Omega_1); \quad \partial_{11} u_{11} = \widetilde{\psi}_1 := \psi_1 + \varepsilon \sigma_1 \gamma_{11} u_1 = \lambda \gamma_{11} u_1 + \varepsilon \sigma_1 \gamma_{11} u_1 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\
&u_{12} - \Delta u_{12} = 0 \ (\text{в } \Omega_2); \quad \partial_{22} u_{12} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22}), \\
&\gamma_{21} u_{11} - \gamma_{12} u_{12} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12}), \qquad \partial_{21} u_{11} + \partial_{12} u_{12} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12});
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

$$
\begin{aligned}
2)\ &u_{21} - \Delta u_{21} = 0 \ (\text{в } \Omega_1); \quad \partial_{11} u_{21} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\
&u_{22} - \Delta u_{22} = 0 \ (\text{в } \Omega_2); \quad \partial_{22} u_{22} = \widetilde{\psi}_2 := \psi_2 + \varepsilon \sigma_2 \gamma_{22} u_2 = \lambda^{-1} \gamma_{22} u_2 + \varepsilon \sigma_2 \gamma_{22} u_2 \ (\text{на } \Gamma_{22}), \\
&\gamma_{21} u_{21} - \gamma_{12} u_{22} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12}), \qquad \partial_{21} u_{21} + \partial_{12} u_{22} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12});
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

$$
\begin{aligned}
3)\ &u_{31} - \Delta u_{31} = \widetilde{f}_1 := f_1 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} = \lambda u_1 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \ (\text{в } \Omega_1); \quad \partial_{11} u_{31} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\
&u_{32} - \Delta u_{32} = 0 \ (\text{в } \Omega_2); \quad \partial_{22} u_{32} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22}), \\
&\gamma_{21} u_{31} - \gamma_{12} u_{32} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12}), \qquad \partial_{21} u_{31} + \partial_{12} u_{32} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12});
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

$$
\begin{aligned}
4)\ &u_{41} - \Delta u_{41} = 0 \ (\text{в } \Omega_1); \quad \partial_{11} u_{41} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\
&u_{42} - \Delta u_{42} = \widetilde{f}_2 := f_2 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} = \lambda u_2 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \ (\text{в } \Omega_2); \quad \partial_{22} u_{42} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22}), \\
&\gamma_{21} u_{41} - \gamma_{12} u_{42} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12}), \qquad \partial_{21} u_{41} + \partial_{12} u_{42} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12});
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

$$
\begin{aligned}
5)\ &u_{51} - \Delta u_{51} = 0 \ (\text{в } \Omega_1); \quad \partial_{11} u_{51} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\
&u_{52} - \Delta u_{52} = 0 \ (\text{в } \Omega_2); \quad \partial_{22} u_{52} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22}), \\
&\gamma_{21} u_{51} - \gamma_{12} u_{52} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12}), \qquad \partial_{21} u_{51} + \partial_{12} u_{52} = \widetilde{\psi}_{21} := \\
&\qquad := \psi_{21} + \varepsilon(\partial_{12} \gamma_{21} u_1 - \partial_{21} \gamma_{12} u_2) = \mu \gamma_{21} u_1 + \varepsilon(\partial_{12} \gamma_{21} u_1 - \partial_{21} \gamma_{12} u_2) \ (\text{на } \Gamma_{12}).
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Аналогично (2.4)–(2.8), задачи исследуем с помощью формулы Грина (2.9). Тогда слабые решения задач (2.24)–(2.28) имеют соответственно вид:

$$u_{(1),\varepsilon} = V_{11}\widetilde{\psi}_1 = V_{11}(\psi_1 + \varepsilon\sigma_1\gamma_{11}u_1) = V_{11}(\lambda\gamma_{11}u_1 + \varepsilon\sigma_1\gamma_{11}u_1) = \lambda V_{11}\gamma_{11}p_1u + \varepsilon V_{11}\sigma_1\gamma_{11}p_1u; \quad (2.29)$$

$$u_{(2),\varepsilon} = V_{22}\widetilde{\psi}_2 = V_{22}(\lambda^{-1}\gamma_{22}u_2 + \varepsilon\sigma_2\gamma_{22}u_2); \quad (2.30)$$

$$u_{(3),\varepsilon} = A^{-1}(\widetilde{f}_1;0) = A^{-1}(f_1 - \varepsilon\sum_{k=1}^{m} c_{1k}\frac{\partial u_1}{\partial x_k};0) = A^{-1}(\lambda u_1 - \varepsilon\sum_{k=1}^{m} c_{1k}\frac{\partial u_1}{\partial x_k};0); \quad (2.31)$$

$$u_{(4),\varepsilon} = A^{-1}(0;\widetilde{f}_2) = A^{-1}(0;f_2 - \varepsilon\sum_{k=1}^{m} c_{2k}\frac{\partial u_2}{\partial x_k}) = A^{-1}(0;\lambda u_2 - \varepsilon\sum_{k=1}^{m} c_{2k}\frac{\partial u_2}{\partial x_k}); \quad (2.32)$$

$$u_{(3),\varepsilon} + u_{(4),\varepsilon} = \lambda A^{-1}(u_1;u_2) - \varepsilon A^{-1}(\sum_{k=1}^{m} c_{1k}\frac{\partial u_1}{\partial x_k};\sum_{k=1}^{m} c_{2k}\frac{\partial u_2}{\partial x_k}); \quad (2.33)$$

$$u_{(5),\varepsilon} = V_{21}\widetilde{\psi}_{21} = V_{21}(\mu\gamma_{21}u_1 + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}u_1 - \sigma_{21}\gamma_{12}u_2)). \quad (2.34)$$

Итогом является следующий результат: слабое решение задачи (2.24)–(2.28) удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered} u_\varepsilon - \varepsilon V_{11}\sigma_1\gamma_{11}p_1u_\varepsilon - \varepsilon V_{22}\sigma_2\gamma_{22}p_2u_\varepsilon + \varepsilon A^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m} c_{1k}\frac{\partial u_1}{\partial x_k};\sum_{k=1}^{m} c_{2k}\frac{\partial u_2}{\partial x_k}\right) - \\ - \varepsilon V_{21}(\sigma_{12}\gamma_{21}u_1 - \sigma_{21}\gamma_{12}u_2) = \lambda(A^{-1} + V_{11}V_{11}^*)u_\varepsilon + \lambda^{-1}(V_{22}(V_{22})^*)u_\varepsilon + \mu V_{21}(V_{21})^*u_\varepsilon, \end{gathered} \quad (2.35)$$

где $V_{kk} = (\gamma_{kk}p_k)^*$. Аналогично (2.17) осуществим замену $u_\varepsilon = A^{-1/2}v_\varepsilon$, $v_\varepsilon \in L_2(\Omega)$, $\mathcal{D}(A^{1/2}) = H^1_\Gamma(\Omega)$. Далее, действуя на обе части полученного соотношения оператором $A^{1/2}$, получаем следующую спектральную задачу:

$$L(\lambda,\mu)v_\varepsilon := ((I - \varepsilon S) - \lambda(A^{-1} + B_{11}) - \lambda^{-1}B_{22} - \mu K_{22})v_\varepsilon = 0, \quad v_\varepsilon \in L_2(\Omega), \quad (2.36)$$

где A — оператор гильбертовой пары $(H^1_\Gamma(\Omega);L_2(\Omega))$, $S \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$, операторы B_{11}, B_{22}, K_{22} описаны в (2.19),

$$\begin{gathered} S := A^{1/2}V_{11}\sigma_1\gamma_{11}p_1A^{-1/2} + A^{1/2}V_{22}\sigma_2\gamma_{22}p_2A^{-1/2} + A^{-1/2}\left(\sum_{k=1}^{m} c_{1k}\frac{\partial u_1}{\partial x_k};\sum_{k=1}^{m} c_{2k}\frac{\partial u_2}{\partial x_k}\right)A^{-1/2} - \\ - A^{1/2}V_{21}(\sigma_{12}\gamma_{21}p_1 - \sigma_{21}\gamma_{12}p_2). \end{gathered}$$

2.2. О свойствах решений невозмущенных спектральных проблем при первом условии сопряжения.

2.2.1. Свойства решений при спектральном параметре μ. Изучим свойства решений спектральной задачи (2.1) при первых граничных условиях на стыке (2.2). Итак, операторный пучок (2.18) содержит два параметра λ и μ. Это позволяет исследовать два класса задач: при фиксированном $\mu \in \mathbb{C}$ возникают задачи со спектральным параметром λ в уравнении, а при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ — задачи со спектральным параметром μ в краевом условии на границе сопряжения.

Рассмотрим сначала случай, когда в пучке $L(\lambda,\mu)$ параметр λ фиксирован, а μ — спектральный.

2.2.1.1. Отрицательные значения параметра λ. Пусть в задаче (2.18) параметр $\lambda < 0$. Обозначим

$$T(\lambda) := \lambda(A^{-1} + B_{11}) + \lambda^{-1}B_{22}. \quad (2.37)$$

Так как $T(\lambda) < 0$, то $I - T(\lambda) \geqslant I$ равномерно по λ. Значит, существует обратный оператор $(I - T(\lambda))^{-1} : \|\, (I - T(\lambda)^{-1}\, \| \leqslant 1$.

Оператор $K_{22} := (A^{1/2}V_{21})((V_{21})^*A^{-1/2})$ ограниченно действует из $L_2(\Omega)$ в пространство $L_{2,h}(\Omega) := \{v \in L_2(\Omega) : v = A^{1/2}u, u \in H^1_\Gamma(\Omega) \subset H^1(\Omega)\}$, поэтому $\ker K_{22} = L_{2,0} = L_2(\Omega) \ominus L_{2,h}(\Omega)$. Более того, оператор K_{22} неотрицателен и компактен в $L_2(\Omega)$; $T(\lambda)$ также неотрицателен и компактен. Это дает возможность перейти от задачи (2.18) к спектральной проблеме на собственные значения компактного положительного оператора и воспользоваться теоремой Гильберта—Шмидта.

С этой целью введем взаимно дополнительные ортопроекторы P_0, P_1, отвечающие разложению: $H = H_0 \oplus H_1$, $H_0 = \ker K_{22} = L_{2,0}(\Omega)$, $H_1 = \overline{\mathcal{R}(K_{22})} = L_{2,h}(\Omega)$, и I_0, I_1 — единичные операторы в H_0, H_1 соответственно.

Представим элемент v в виде $v = v_0 + v_1$, тогда

$$(I - T(\lambda))(v_0 + v_1) = \mu K_{22}(v_0 + v_1) = \mu K_{22}v_0 + \mu\widetilde{K}_{22}v_1 = \mu\widetilde{K}_{22}v_1, \tag{2.38}$$

где $\widetilde{K}_{22} = P_1 K_{22} P_1$, $K_{22}v_0 = 0$, $v_0 = P_0 v_0$, $v_1 = P_1 v_1$.

Применим к обеим частям уравнения (2.38) ортопроекторы P_0, P_1, получим

$$P_0(I - T(\lambda))P_0 v_0 + P_0(I - T(\lambda))P_1 v_1 = \mu P_0 \widetilde{K}_{22} v_1 = 0, \tag{2.39}$$

$$P_1(I - T(\lambda))P_0 v_0 + P_1(I - T(\lambda))P_1 v_1 = \mu P_1 \widetilde{K}_{22} v_1 = \mu\widetilde{K}_{22} v_1. \tag{2.40}$$

Оператор $P_0(I-T(\lambda))P_0 = I_0 - P_0 T(\lambda))P_0 \geqslant I_0$ в H_0, и потому существует его обратный, причем $\|(P_0(I - T(\lambda))P_0)^{-1}\| \leqslant 1$ равномерно по $\lambda < 0$. Тогда из (2.39) имеем

$$v_0 = -(P_0(I - T(\lambda))P_0)^{-1}(P_0(I - T(\lambda))P_1 v_1). \tag{2.41}$$

Подставим (2.41) в (2.40), получим уравнение для v_1:

$$(I_1 - T_1(\lambda))v_1 = \mu\widetilde{K}_{22}v_1, \quad v_1 \in H_1, \tag{2.42}$$

$$T_1(\lambda) = P_1 T(\lambda) P_1 + P_1 T(\lambda) P_0 (I_0 - P_0 T(\lambda) P_0)^{-1} P_0 T(\lambda) P_1. \tag{2.43}$$

Лемма 2.1. *Имеет место свойство* $\ker(I_1 - T_1(\lambda)) = \{0\}$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$(I_1 - T_1(\lambda))v_1 = 0, \tag{2.44}$$

где $T_1(\lambda)$ определен в (2.43). По формуле (2.41) введем v_0 и подставим в (2.44). Тогда получим формулу (2.40) с $\mu = 0$:

$$P_1(I - T(\lambda))P_0 v_0 + P_1(I - T(\lambda))P_1 v_1 = 0, \tag{2.45}$$

а из (2.44) получаем (2.39).

Уравнение (2.45) с $\mu = 0$ равносильно следующему: $(I - T(\lambda))v = 0$, $v = v_0 + v_1$, которое имеет тривиальное решение $v = 0$, так как $I - T(\lambda) \geqslant I \geqslant 0$. Следовательно, $v_0 = v_1 = 0$. $\square$

Отметим, что при $\lambda < 0$ оператор $I - T(\lambda)$ из (2.43) самосопряжен и положительно определен. В самом деле, если имеется связь (2.41), то

$$((I - T(\lambda))(v_0 + v_1), v_0 + v_1)_{L_2(\Omega)} = ((I_1 - T_1(\lambda))v_0, v_1)_{L_2(\Omega)} \geqslant (\|v_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|v_1\|^2_{L_2(\Omega)}) \geqslant \|v_1\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{2.46}$$

Основываясь на оценке (2.46), сделаем в (2.42) замену

$$(I_1 - T_1(\lambda))^{1/2} v_1 = \psi_1. \tag{2.47}$$

Далее, действуя слева ограниченным оператором $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}$, получаем следующую задачу:

$$\psi_1 = \mu\widehat{K}_{22}\psi_1, \quad \psi_1 \in L_{2,h}(\Omega), \tag{2.48}$$

$$\widehat{K}_{22} := (I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} P_1 K_{22} P_1 (I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} = \widehat{K}^*_{22} > 0, \quad \widehat{K}_{22} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)). \tag{2.49}$$

Определение 2.1. Базис $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty \subset H$, получаемый из ортонормированного базиса $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty \subset H$ по закону $\psi_j = A\varphi_j$, $j = 1, 2, \ldots$, где A — некоторый линейный ограниченный и ограниченно обратимый оператор $(A, A^{-1} \in \mathcal{L}(H))$, называется базисом, *эквивалентным ортонормированному*, или *базисом Рисса*.

Определение 2.2. Базис Рисса $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty \subset H$ будем называть *p-базисом*, $0 < p \leqslant \infty$, если $\psi_j = (I + T)\varphi_j$, $j = 1, 2, \ldots$, $T \in \mathfrak{S}_p(H)$, где $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ — ортонормированный базис в H.

Теорема 2.1. *При* $\lambda < 0$ *задача* (2.18) *имеет дискретный спектр, состоящий из положительных конечнократных собственных значений* $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ *с предельной точкой* $+\infty$. *Собственные элементы* $\{v_k\}_{k=1}^\infty = \{(v_{1k}, v_{2k})\}_{k=1}^\infty$, *т. е. элементы* $\{v_{1k}\}_{k=1}^\infty$, $v_{1k} = P_1 v_k$, *образуют базис Рисса* *в* H_1*, причем* $v_{1k} = (I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}\psi_{1k}$*, где* $\{\psi_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ *— ортонормированный базис, отвечающий оператору* $\widehat{K}_{22}$ *из* (2.48). *Более того, элементы* v_{1k} *для* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *образуют* p*-базис в* H_1 *при*

$$p > p_0 = m - 1. \tag{2.50}$$

Доказательство. Утверждение о дискретности и положительности спектра и базисности Рисса следует из теоремы Гильберта—Шмидта, примененной к проблеме (2.48), а также свойства $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\infty)$.

Перейдем к доказательству свойства (2.50). Из формулы (2.37) вытекает принадлежность $T(\lambda)$ классу компактных операторов $\mathfrak{S}_p(L_2(\Omega))$, где

$$p > p_0 = \max(p_{A^{-1}}; p_{B_{11}}; p_{B_{22}}). \tag{2.51}$$

Можно убедиться, что собственные значения $\lambda_k(A^{-1})$ положительного самосопряженного компактного оператора A^{-1} суть последовательные максимумы вариационного отношения

$$\|A^{-1/2}v\|^2_{L_2(\Omega)} / \|v\|^2_{L_2(\Omega)} = \|u\|^2_{L_2}(\Omega) / \|u\|^2_{H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)}, \quad u = A^{-1/2}v \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega). \tag{2.52}$$

Поэтому их асимптотика при $k \to \infty$ дается классической формулой Вейля (см. [31])

$$\lambda_k(A^{-1}) = (a_m(\Omega))^{2/m} k^{-2/m}[1 + o(1)] \quad (k \to \infty),\ a_m(\Omega) > 0,\ a_3(\Omega) = \frac{|\Omega|}{6\pi^2}, \tag{2.53}$$

и потому $p_{A^{-1}} > m/2$.

Аналогично для оператора B_{11} получаем, что его положительные собственные значения суть последовательные максимумы вариационного отношения

$$\|\gamma_{11}A^{-1/2}v\|_{L_2(\Gamma)} / \|v\|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Gamma_{11}} |u|^2 d\Gamma_{11} / \int\limits_{\Omega} (|u|^2 + |\nabla u|^2) d\Omega, \quad u \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega). \tag{2.54}$$

Отсюда и из [4] получаем, что асимптотическое поведение собственных значений $\lambda_k(B_{11})$ таково:

$$\begin{gathered} \lambda_k(B_{11}) = (d_{m,11}(\Gamma_{11}))^{1/(m-1)} k^{-1/(m-1)}[1 + o(1)] \quad (k \to \infty), \\ d_{m,11}(\Gamma_{11}) > 0,\ d_{3,1}(\Gamma_{11}) = \frac{|\Gamma_{11}|}{4\pi}. \end{gathered} \tag{2.55}$$

Следовательно, $p_{B_{11}} > m - 1$.

Проводя аналогичные рассуждения, получаем следующую формулу для оператора B_{22}:

$$\begin{gathered} \lambda_k(B_{22}) = (d_{m,22}(\Gamma_{22}))^{1/(m-1)} k^{-1/(m-1)}[1 + o(1)] \quad (k \to \infty), \\ d_{m,22}(\Gamma_{22}) > 0,\ d_{3,22}(\Gamma_{22}) = \frac{|\Gamma_{22}|}{4\pi}, \end{gathered} \tag{2.56}$$

и потому $p_{B_{22}} > m - 1$. Из формул (2.51), (2.53), (2.55), (2.56) приходим к выводу, что $T(\lambda)$ из (2.37) принадлежит классу $\mathfrak{S}_p$ при $p > p_0 = m - 1$.

Отметим, наконец, что $(I - T_1(\lambda))^{-1/2} = I_1 + \widetilde{T}_1(\lambda)$; $\widetilde{T}_1(\lambda) \in \mathfrak{S}_p$, $p > p_0 = m - 1$.

Отсюда и из (2.47) вытекает свойство p-базисности элементов $\{v_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ при $p > m - 1$. □

2.2.1.2. Положительные значения параметра λ. Будем теперь считать, что в задаче (2.18) параметр $\lambda > 0$, но

$$\lambda \notin \sigma(I - T(\lambda)) \cap \sigma(I_0 - P_0 T(\lambda) P_0). \tag{2.57}$$

Тогда аналогично предыдущему случаю можно перейти от проблемы (2.18) к уравнению (2.42) с $T_1(\lambda)$ из (2.43) путем проектирования на подпространство $H_0 = L_{2,0}(\Omega)$ и $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$ и исключения v_0 (см. (2.39), (2.41)).

Здесь снова справедливы утверждения леммы 2.1, причем $T_1(\lambda)$ — компактный самосопряженный оператор, действующий в H_1. Отсюда следует, что оператор $(I_1 - T_1(\lambda))$ может иметь не более конечного числа (с учетом их кратностей) отрицательных собственных значений, а остальные положительны и имеют предельную точку $+1$. Обозначая количество отрицательных собственных значений через κ_1, приходим к заключению, что квадратичная форма $(I_1 - T_1(\lambda))$ индефинитна, а пространство H_1 разбивается на ортогональную сумму $\varkappa_1$-мерного отрицательного подпространства H_- и бесконечномерного положительного подпространства H_+. Тогда возникает индефинитная метрика Понтрягина

$$H_1 = \Pi_{\varkappa_1} = \Pi_- \oplus \Pi_+, \quad \Pi_- = H_-, \quad \Pi_+ = H_+, \quad \dim \Pi_- = \varkappa_1,\ \dim \Pi_+ = \infty. \tag{2.58}$$

Теорема 2.2. *Пусть* $\lambda > 0$ *и выполнено условие* (2.57), *а также имеет место разложение* (2.58). *Тогда спектр задачи* (2.18) *вещественный, дискретный и состоит из* $\varkappa_1$ *штук отрицательных собственных значений, остальные положительны и имеют предельную точку* $\mu = +\infty$:

$$\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \dots \leqslant \mu_{\varkappa_1} < 0 < \mu_{\varkappa_1+1} \leqslant \dots < \mu_\varkappa \dots, \quad \lim_{k\to\infty} \mu_\varkappa = +\infty. \tag{2.59}$$

Собственные значения (*присоединенных нет*) *задачи* (2.42) *образуют ортонормированный по форме* $I_1 - T_1(\lambda)$ *базис и базис Рисса в* $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$. *Элементы базиса можно выбрать удовлетворяющими соотношениям*:

$$(I_1 - T_1(\lambda)v_{1k}, v_{1j})_{H_1} = \begin{cases} -\delta_{kj}, & 1 \leqslant k,\ j \leqslant \varkappa_1, \\ \delta_{kj}, & k, j \geqslant \varkappa_1 + 1, \\ 0, & k \leqslant \varkappa_1,\ j \geqslant \varkappa_1 + 1, \end{cases} \tag{2.60}$$

$$(\widetilde{K}_{22} v_{1k}, v_{1j})_{H_1} = |\mu_k^{-1}|\delta_{kj}.$$

Доказательство. С учетом (2.57), (2.58) представим оператор $I_1 - T_1(\lambda)$ в виде

$$(I_1 - T_1(\lambda)) = |I_1 - T_1(\lambda)|^{1/2} J_{\varkappa_1} |I_1 - T_1(\lambda)|^{1/2}, \tag{2.61}$$

где $J_{\varkappa_1}$ — каноническая симметрия: $J_{\varkappa_1} = J_{\varkappa_1}^* = J_{\varkappa_1}^{-1}$. Тогда с учетом (2.61) задача (2.42) преобразуется к виду

$$\varphi_1 = \mu J_{\varkappa_1} \widetilde{K}_{22}(\lambda)\varphi_1, \tag{2.62}$$

где

$$\varphi_1 = |I_1 - T_1(\lambda)|^{1/2} v_1, \quad \widetilde{K}_{22}(\lambda) := |I_1 - T_1(\lambda)|^{-1/2} \widetilde{K}_{22} |I_1 - T_1(\lambda)|^{-1/2}. \tag{2.63}$$

Из компактности и положительности оператора $\widetilde{K}_{22}(\lambda)$ следует компактность $J_{\varkappa_1}\widetilde{K}_{22}(\lambda)$ и его положительность, т. е. $[J_\varkappa \widetilde{K}_{22}(\lambda)\varphi_1, \varphi_1] := (J_\varkappa(J_\varkappa \widetilde{K}_{22}(\lambda)\varphi_1, \varphi_1)) = (\widetilde{K}_{22}(\lambda)\varphi_1, \varphi_1) > 0$, $\varphi_1 \neq 0$.

Тогда по теореме Л. С. Понтрягина (см. [33]) получаем, что задача (2.62), (2.63) имеет дискретный вещественный спектр $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ со свойствами (2.59), а собственные элементы $\{\varphi_{1k}\}_{k=1}^\infty$, отвечающие собственным значениям $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$, образуют базис Рисса в H_1. Отсюда и из замены (2.63) приходим к заключению, что собственные элементы $\{v_{1k}\}_{k=1}^\infty$, $v_{1k} = |I_1 - T_1(\lambda)|^{-1/2}\varphi_{1k}$ образуют базис Рисса в H_1. Далее, из условий ортонормировки $[\varphi_{1k}, \varphi_{1j}] = (J_{\varkappa_1} v_{1k}, v_{1,j})_{H_1} = \pm\delta_{kj}$, $(\widetilde{K}_{22} v_{1k}, v_{1j})_{H_1} = |\mu_k^{-1}|\delta_{kj}$ приходим к выводу, что имеют место формулы (2.60). □

2.2.1.3. Случай общего положения. Перейдем теперь к рассмотрению более общего случая:

$$\operatorname{Im} \lambda \neq 0,\ \lambda \notin \sigma(I - T(\lambda)) \cap \sigma(I_0 - P_0 T(\lambda) P_0). \tag{2.64}$$

Как известно (см. [10]), операторный пучок типа С. Г. Крейна

$$I - T(\lambda) := I - \lambda(A^{-1} + B_{11}) - \lambda^{-1} B_{22}, \quad A^{-1}, B_{11}, B_{22} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)) \tag{2.65}$$

(с самосопряженными операторными коэффициентами) может иметь вне вещественной оси не более конечного числа невещественных собственных значений, расположенных симметрично относительно вещественной оси в правой комплексной полуплоскости.

Если, в частности, $\operatorname{Re} \lambda \leqslant 0$, то из неравенства

$$\|(I - T(\lambda))v\|_H \cdot \|v\|_H \geqslant |(I - T(\lambda)v, v)|_H \geqslant \operatorname{Re}(I - T(\lambda)v, v)|_H \geqslant \|v\|_H^2 \tag{2.66}$$

при $\operatorname{Re} \lambda \leqslant 0$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ получаем оценку $\|(I - T(\lambda))^{-1}\| \leqslant 1$ равномерно по λ. Также получаем $\|(I_0 - P_0 T(\lambda) P_0)^{-1}\| \leqslant 1$, так как в силу (2.66)

$$((I_0 - P_0 T(\lambda) P_0)v_0, v_0)_H = ((I - T(\lambda))v_0, v_0)_H \geqslant \|v_0\|_H^2, \quad v_0 \in H_0.$$

Снова, как и ранее, от исходной проблемы (2.18) можно перейти к уравнению (2.42) с $T_1(\lambda)$ из (2.43), при этом для связи (2.41) оператор $(I_1 - T_1(\lambda))$ снова ограниченно обратим. Следовательно, задачу (2.42) можно переписать в виде

$$v_1 = \mu(I_1 - T_1(\lambda))^{-1}\widetilde{K}_{22}v_1, \quad v_1 \in H_1 = L_{2,h}, \quad \widetilde{K}_{22} = P_1K_{22}P_1. \tag{2.67}$$

Прежде чем сформулировать итоговый результат для данного случая, вспомним определение *базисности по Абелю—Лидскому*. Это понятие относится к системе корневых элементов оператора L с дискретным спектром или обратного к нему компактного (несамосопряженного) оператора $A = L^{-1}$ (см. [10]).

Допустим, что все собственные значения μ_j оператора L (характеристические числа оператора $A = L^{-1}$), кроме, быть может, конечного их числа, содержатся в угле

$$\Lambda_\theta := \{\mu : |\arg\mu| < \theta\}, \tag{2.68}$$

и пусть α — положительное число, $\alpha\theta < \pi/2$. Положим $\mu^\alpha := |\mu|^\alpha e^{i\alpha\arg\mu}$ в этом угле, так что $|\exp(-\mu^\alpha t)| \to 0$ при $t = const > 0$, $\mu \in \Lambda_\theta$, $\mu \to \infty$. Пусть в системе $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ корневых элементов оператора L имеются и собственные, и присоединенные элементы, отвечающие собственным значениям $\mu_j \in \Lambda_\theta$.

Пусть $\varphi_p, \cdots, \varphi_q$ — базис в корневом подпространстве $\mathcal{L}_{\mu_0}$ оператора L, отвечающий собственному значению $\mu_0 \in \Lambda_\theta$. Тогда будем говорить, что $\{\varphi_{j=1}^\infty\}$ — *базис Абеля—Лидского* порядка α, если существует такая последовательность номеров $0 = m_0 < m_1 < \cdots < m_l < \cdots$, что для любого $\varphi \in \mathcal{H}$ при $t > 0$ сходится интеграл

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\mu-\mu_0|=\varepsilon} \exp(-\mu^\alpha t)(L-\mu I)^{-1}\varphi d\mu, \tag{2.69}$$

где контур интегрирования лежит в Λ_θ и окружает только одно собственное значение μ_0 с обходом против часовой стрелки. Этот интеграл при $t = 0$ становится равным проекции элемента φ на корневое подпространство $\mathcal{L}_{\mu_0}$ оператора L, т. е. величине $c_p\varphi_p + \cdots + c_q\varphi_q$. Если вместо L рассматривается обратный ему оператор $A = L^{-1}$, то в (2.68) резольвенту $(L - \mu I)^{-1}$ следует заменить на модифицированную резольвенту $A(I - \mu A)^{-1}$.

Опираясь на определение базисности по Абелю—Лидскому, сформулируем следующие результаты, относящиеся к операторам L с дискретным спектром либо к операторам $A = L^{-1}$.

Рассмотрим оператор $A = L^{-1}$, который допускает представление $A = A_0(I + T_1)$, где $T_1 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, а оператор A_0 самосопряжен и компактен, причем все его собственные значения, кроме, быть может, конечного их числа, отрицательны или положительны. Тогда:

1. Если выполнено условие $s_j(A_0) = |\lambda_j(A_0)| \leqslant cj^{-p}$, $j = 1, 2, \ldots$, то система корневых элементов оператора A образует базис Абеля—Лидского порядка $\alpha = p^{-1} + \varepsilon$ $\forall$, $\varepsilon > 0$.
2. Если характеристические числа $\nu_j(A_0)$ оператора A_0 (т. е. собственные значение оператора $L_0 = A_0^{-1}$) имеют асимптотическое поведение $\nu_j(A_0) = cj^p + o(j^p)$, $j \to \infty$, $c \neq 0$, то та же формула имеет место для характеристических чисел оператора $A = L^{-1} : \nu_j(A) = cj^p + o(j^p)$, $j \to \infty$, $c \neq 0$.

Теорема 2.3. *Пусть в задаче* (2.18) *выполнены условия* (2.64). *Тогда спектр этой задачи дискретен, состоит из конечнократных собственных значений* $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ *с предельной точкой* $\mu = \infty$. *Сколь бы ни было мало* $\varepsilon > 0$, *все собственные значения, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в угле* $\Lambda_\varepsilon := \{\mu \in \mathbb{C} : |arg\,\mu| < \varepsilon,\ \mathrm{sign}\,\mathrm{Im}\,\mu = -\mathrm{sign}\,\mathrm{Im}\,\lambda\}$.

Система собственных и присоединенных элементов $\{v_{1k}\}_{k=1}^\infty$, $v_{1k} = P_1v_k$, *т. е. система собственных и присоединенных элементов задачи* (2.18), *после их проектирования на* $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$ *является полной в* H_1, *более того, она образует базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha > m - 1$ *в* $L_{2,h}$. *Далее, собственные значения* $\mu_k = \mu_k(\lambda)$ *имеют асимптотическое поведение*

$$\mu_k(\lambda) = \lambda_k^{-1}(K_{22})[1 + o(1)],\ k \to \infty, \tag{2.70}$$

$$\lambda_k(K_{22}) = (d_{m,22}(\Gamma_{22}))^{1/(m-1)}k^{-1/(m-1)}[1 + o(1)], \quad k \to \infty, \quad d_{m,22}(\Gamma_{22}) > 0. \tag{2.71}$$

Доказательство. Отметим, что асимптотическая формула (2.71), так же как и асимптотические формулы (2.53), (2.55), вытекает из работы [4]. Далее, из условий (2.57) получаем, что от задачи (2.18) можно перейти к задаче (2.42) и затем к (2.67).

Отсюда следует, что к проблеме (2.67) можно применить теоремы М. В. Келдыша (см. [6]), так как в силу (2.71) оператор $\widetilde{K}_{22} = P_1 K_{22} P_1$ имеет те же ненулевые собственные значения, что и оператор K_{22}. Поэтому $\widetilde{K}_{22}$ — полный положительный компактный оператор класса $\mathfrak{S}_p$ при $p > m-1$. Кроме того, оператор $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1} = I_1 + T_2(\lambda)$, $T_2(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty(H_1)$ и, очевидно, обратим. Отсюда вытекают первые утверждения исходной теоремы.

Например, свойство, определяющее связь знаков $\operatorname{Im}\mu$ и $\operatorname{Im}\lambda$, вытекает из соотношения $(I - T(\lambda)v, v)_H = \mu(K_{22}v, v)_H$ с учетом формулы (2.65) для $T(\lambda)$ и свойства операторов A^{-1}, B_{11}, B_{22}, K_{22}.

Свойство базисности по Абелю—Лидскому порядка $\alpha > m-1$ вытекает также из (2.71) и утверждения из [38, с. 292]. Далее, асимптотическая формула (2.70) следует из результатов А. С. Маркуса и В. И. Мацаева (см. [29]), примененных к уравнению $(I_1 - T_1(\lambda))v_1 = \mu \widetilde{K}_{22} v_1$, в силу компактности и вида оператора $T_1(\lambda)$, а числа $\lambda_k(\widetilde{K}_{22}) = \lambda_k(K_{22})$ и имеют асимптотику (2.71). $\square$

2.2.2. Свойства решений при спектральном параметре λ. Рассмотрим теперь случай, когда в задаче

$$L(\lambda,\mu)v := (I - \lambda(A^{-1} + B_{11}) - \lambda^{-1}B_{22} - \mu K_{22})v = 0, \quad v \in L_2(\Omega) \tag{2.72}$$

параметр $\mu \in \mathbb{C}$ фиксирован, а λ — спектральный (см. (2.18)).

2.2.2.1. Неположительные значения фиксированного параметра. Если $\mu \leqslant 0$, то $(I - \mu K_{22}) \geqslant I \gg 0$ и $\| (I - \mu K_{22})^{-1} \| \leqslant 1$. Осуществим в (2.72) замену $(I - \mu K_{22})^{1/2} v = \psi$. Тогда получим следующую задачу:

$$\psi = \lambda(I - \mu K_{22})^{-1/2}(A^{-1} + B_{11})(I - \mu K_{22})^{-1/2}\psi + \lambda^{-1}(I - \mu K_{22})^{-1/2}B_{22}(I - \mu K_{22})^{-1/2}\psi, \tag{2.73}$$

т. е. задачу на собственные значения для операторного пучка С. Г. Крейна. Именно, здесь оператор $(I - \mu K_{22})^{-1/2}(A^{-1} + B_{11})(I - \mu K_{22})^{-1/2}$ — компактный и положительный, а $(I - \mu K_{22})^{-1/2}B_{22}(I - \mu K_{22})^{-1/2}$ — компактный и неотрицательный.

Далее будем полагать, что выполнено условие

$$4 \| A^{-1} + B_{11} \| \| B_{22} \| < 1. \tag{2.74}$$

Тогда будем иметь следующее неравенство:

$$\begin{aligned} &4 \| (I - \mu K_{22})^{-1/2}(A^{-1} + B_{11})(I - \mu K_{22})^{-1/2} \| \cdot \| (I - \mu K_{22})^{-1/2}B_{22}(I - \mu K_{22})^{-1/2} \| \leqslant \\ &\leqslant 4 \| (I - \mu K_{22})^{-1} \|^2 \| A^{-1} + B_{11} \| \| B_{22} \| \leqslant 4 \| A^{-1} + B_{11} \| \| B_{22} \| < 1, \end{aligned} \tag{2.75}$$

достаточное для факторизации операторного пучка

$$(I - \lambda(I - \mu K_{22})^{-1/2}(A^{-1} + B_{11})(I - \mu K_{22})^{-1/2} - \lambda^{-1}(I - \mu K_{22})^{-1/2}B_{22}(I - \mu K_{22})^{-1/2}, \tag{2.76}$$

отвечающего задаче (2.73) (см., например, [10, с. 82–86]).

Теорема 2.4. *Пусть в задаче* (2.72) *выполнено условие* (2.74). *Тогда имеют место следующие утверждения.*

1°. *Задача* (2.72) *при* $\mu \leqslant 0$ *имеет дискретный вещественный спектр с предельными точками* $0, +\infty$.

2°. *Предельной точке* $\lambda = 0$ *отвечает ветвь* $\{\lambda_k^\circ\}_{k=1}^\infty$ *изолированных конечнократных собственных значений, расположенных на отрезке*

$$(0, r_-), \quad r_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \| A^{-1} + B_{11} \| \| B_{22} \|}}{2 \| A^{-1} + B_{11} \|}.$$

Отвечающая ей система собственных элементов (*присоединенных нет*) *после проектирования на подпространство* $H_1 = L_2(\Omega) \ominus H_0$, $H_0 := \ker(I - \mu K_{22})^{-1/2} \cdot B_{22}(I - \mu K_{22})^{-1/2}$, *образует базис Рисса в* H_1. *Далее, эта система элементов образует в* H_1 *также* p-*базис при* $p > p_0 = (m-2)/2$.

3°. *Предельной точке $\lambda = +\infty$ отвечает ветвь изолированных конечнократных собственных значений $\{\lambda_k^\circ\}_{k=1}^\infty$, расположенных на промежутке $(r_+, +\infty)$, а отвечающая этой ветви система собственных элементов задачи* (2.72) *образует базис Рисса в $H = L_2(\Omega)$ и даже p-базис при тех же $p > p_0 = (m-2)/2$.*

4°. *Собственные значения имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_k^0 = \lambda_k(B_{22})[1 + o(1)] = (d_{m,22}(\Gamma_{22}))^{-1/(m-1)} k^{1/(m-1)}[1 + o(1)], \ k \to \infty, \tag{2.77}$$

$$\begin{aligned} \lambda_k^\infty &= \lambda_k^{-1}(A^{-1} + B_{11})[1 + o(1)] = \lambda_k^{-1}(B_{11})[1 + o(1)] = \\ &= (d_{m,11}(\Gamma_{11}))^{-1/(m-1)} k^{1/(m-1)}[1 + o(1)], \ k \to \infty. \end{aligned} \tag{2.78}$$

Доказательство. Оно почти дословно повторяет доказательство теорем 3.1.2 и 3.2.1 из [10, с. 83–92], но с учетом того, что при условии (2.74) пучок (2.76) допускает каноническую факторизацию, является самосопряженным, а для собственных значений $\lambda_k(A^{-1} + B_{11})$ и $\lambda_k(B_{22})$ имеют место асимптотические формулы (2.53), (2.56) $\lambda_k(A^{-1} + B_{11}) = \lambda_k(B_{11})[1 + o(1)]$, $k \to \infty$. Отметим также, что асимптотические формулы (2.77), (2.78) следуют из теорем А. С. Маркуса и В. И. Мацаева (см. [26]). □

2.2.2.2. Вещественная часть μ неположительна. Пусть

$$\operatorname{Re} \mu \leqslant 0, \quad \operatorname{Im} \mu \neq 0. \tag{2.79}$$

Тогда в силу неравенств $\|(I - \mu K_{22})v\| \cdot \|v\| \geqslant |(I - \mu K_{22})v, v| \geqslant \operatorname{Re} ((I - \mu K_{22})v, v) \geqslant \|v\|^2$ при условиях (2.79) имеет место оценка $\|(I - \mu K_{22})^{-1}\| \leqslant 1$. Далее, применяя слева в (2.72) оператор $(I - \mu K_{22})^{-1}$, получаем следующую задачу:

$$v = \lambda(I - \mu K_{22})^{-1}(A^{-1} + B_{11})v + \lambda^{-1}(I - \mu K_{22})^{-1} B_{22} v. \tag{2.80}$$

Таким образом, снова возникает спектральная задача для пучка С. Г. Крейна, но пучок уже не является самосопряженным.

Теорема 2.5. *Пусть в задаче* (2.80) *выполнены условия* (2.79), (2.74). *Тогда имеют место следующие утверждения.*

1°. *Задача* (2.80) *имеет дискретный спектр, состоящий из двух ветвей конечнократных собственных значений с предельными точками $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, соответственно.*

2°. *Предельной точке $\lambda = 0$ отвечает ветвь $\{\lambda_k^\circ\}_{k=1}^\infty$ конечнократных собственных значений, расположенных в области*

$$|\lambda| \leqslant r_-, \quad r_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \parallel A^{-1} + B_{11} \parallel \parallel B_{22} \parallel}}{2 \parallel A^{-1} + B_{11} \parallel}, \tag{2.81}$$

при этом для $\forall \varepsilon > 0$ все собственные значения λ_k^0, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе

$$|\arg \lambda| < \varepsilon. \tag{2.82}$$

Система собственных и присоединенных элементов $\{v_k^0\}_{k=1}^\infty$, отвечающая собственным значениям $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^\infty$, после ее проектирования на подпространство $H_1 = L_2(\Omega) \ominus H_0$, $H_0 := \ker B_{22}$, является полной в H_1 и образует в H_1 базис Абеля—Лидского порядка $\alpha > m-1$.

3°. *Предельной точке $\lambda = \infty$ отвечает ветвь изолированных конечнократных собственных значений $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, расположенных в области $|\lambda| \geqslant r_+$, при этом для $\forall \varepsilon > 0$ все собственные значения λ_k^∞, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе* (2.82). *Система собственных и присоединенных элементов $\{v_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, отвечающая собственным значениям $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, является полной в $H = L_2(\Omega)$ и образует в H базис Абеля—Лидского порядка $\alpha > m - 1$.*

Доказательство. Оно проводится аналогично схеме, изложенной в [10, с. 82–86]. Поэтому здесь приведем лишь некоторые построения, связанные с утверждением 2°. Если выполнено условие (2.74), то пучок $L(\lambda)$, отвечающий уравнению (2.80), допускает факторизацию

$$\begin{aligned} \lambda L(\lambda) &:= \lambda I - (I - \mu K_{22})^{-1} B_{22} - \lambda^2 (I - \mu K_{22})^{-1}(A^{-1} + B_{11}) = \\ &= Y^{-1}(I - \lambda Y (I - \mu K_{22})^{-1}(A^{-1} + B_{11}))(\lambda I - Y(I - \mu K_{22})^{-1} B_{22}), \end{aligned} \tag{2.83}$$

причем при $|\lambda| \leqslant t \in (r_-, r_+)$ оператор—функция $I - \lambda Y(I - \mu K_{22})^{-1}(A^{-1} + B_{11})$ обратима, а оператор Y также обратим и является решением операторного уравнения

$$Y = I + (I - \mu K_{22})^{-1}(A^{-1} + B_{11})Y(I - \mu K_{22})^{-1}B_{22}Y. \tag{2.84}$$

Более того, спектр $\sigma(Z) := \sigma(Y(I - \mu K_{22})^{-1}B_{22}) \subset \{\lambda : |\lambda| \leqslant r_-\}$. Основываясь на этих фактах, рассмотрим задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} &Zv = Y(I - \mu K_{22})^{-1}B_{22}v = \\ &= (I + (I - \mu K_{22})^{-1}(A^{-1} + B_{11})Y(I - \mu K_{22})^{-1}Y)(I - \mu K_{22})^{-1}B_{22}v =: \\ &=: (I + \Phi)B_{22}v = \lambda v, \quad v \in L_2(\Omega) = H, \quad |\lambda| \leqslant r_-. \end{aligned} \tag{2.85}$$

Здесь $\Phi \in \mathfrak{S}_\infty(H)$, и оператор $I + \Phi$ обратим, а $B_{22} = B_{22}^* \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ имеет бесконечномерное ядро $H_0 = \ker B_{22}$.

Спроектируем теперь обе части (2.85) на H_0 и H_1, соответственно. С этой целью представим элемент v в виде $v = v_0 + v_1$, $v_0 \in H_0$, $v_1 \in H_1 = H \ominus H_0$, и введем ортопроекторы P_0 и P_1. Учитывая соотношения $P_0B_{22} = 0$, $P_1B_{22}P_1 =: \widetilde{B}_{22} > 0$ (в H_1), имеем

$$P_0(I + \Phi)P_1\widetilde{B}_{22}v_1 = \lambda v_0,\ (I_1 + P_1\Phi P_1)\widetilde{B}_{22}v_1 = \lambda v_1. \tag{2.86}$$

По постановке задачи $\lambda \neq 0$, значит, из первого соотношения (2.86) можно выразить v_0 через v_1, а второе уравнение не содержит v_0. Более того, можно доказать (см., например, [10, с. 85]), что оператор $I_1 + P_1\Phi P_1$ обратим в H_1. Далее, из асимптотической формулы (2.56) следует, что $\widetilde{B}_{22} \in \mathfrak{S}_p(H_1)$ при $p > m - 1$.

Из этих свойств следует, что ко второму уравнению (2.86) применима теорема М. В. Келдыша о свойствах спектра слабо возмущенного самосопряженного оператора класса $\mathfrak{S}_p(H)$ (см. [6, с. 313–320]). Отсюда вытекают утверждения из 2° о локализации спектра в исходной задаче (2.80) при $|\lambda| \leqslant r_-$, а также о полноте проекций корневых элементов в пространстве H_1. Утверждение о базисности по Абелю—Лидскому этих корневых элементов следует из [38, с. 292], а также из асимптотической формулы (2.56).

Аналогично доказывается утверждение 3°, но без проектирования на H_1, так как $A^{-1} + B_{11}$ полный, т. е. имеет тривиальное ядро $\ker(A^{-1} + B_{11}) = \{0\}$. Также при этом используется тот факт, что $\lambda_k(A^{-1} + B_{11}) = \lambda_k(B_{11})[1 + o(1)]$, $k \to \infty$, и асимптотическая формула (2.56). Далее, в пучке $L(\lambda)$ нужно сделать замену $\lambda \mapsto \widetilde{\lambda}^{-1}$ и вместо (2.83) использовать аналогичную факторизацию для пучка $\widetilde{\lambda}L(\widetilde{\lambda}^{-1})$ (см. [10, с. 86]). □

Следствие 2.1. *В задаче* (2.72) *при любом фиксированном* $\mu \in \mathbb{C}$ *имеются две ветви конечнократных собственных значений* $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^\infty$ *и* $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$ *с предельными точками* $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$. *Эти ветви имеют асимптотическое поведение* (2.77), (2.78), *соответственно. Данный результат следует из теоремы А. С. Маркуса и В. И. Мацаева* (*см.* [29]).

2.3. О свойствах решений возмущенных спектральных проблем при первом условии сопряжения.

2.3.1. Свойства решений при спектральном параметре μ. Рассмотрим операторный пучок

$$L(\lambda, \mu)v_\varepsilon := ((I - \varepsilon S) - \lambda(A^{-1} + B_{11}) - \lambda^{-1}B_{22} - \mu K_{22})v_\varepsilon = 0, \quad v_\varepsilon \in L_2(\Omega), \tag{2.87}$$

где A — оператор гильбертовой пары $(H_\Gamma^1(\Omega); L_2(\Omega))$, $S \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$, а операторы B_{11}, B_{22}, K_{22} описаны в (2.19). Изучим свойства решений спектральной проблемы (2.1) при первых граничных условиях на стыке (2.2). Снова задача (2.87) содержит два параметра λ и μ. Это позволяет исследовать два класса задач: при фиксированном $\mu \in \mathbb{C}$ возникают задачи со спектральным параметром λ в уравнении, а при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ — задачи со спектральным параметром μ в краевом условии на границе сопряжения.

Рассмотрим сначала случай, когда в пучке $L(\lambda, \mu)$ параметр λ фиксирован, а μ — спектральный.

Полагаем, что в задаче (2.87)

$$\lambda \neq 0,\ \lambda \notin \sigma(I - \varepsilon S - T(\lambda)) \cap \sigma(I_0 - \varepsilon P_0SP_0 - P_0T(\lambda)P_0), \tag{2.88}$$

где через $T(\lambda)$ обозначен оператор $T(\lambda) := \lambda(A^{-1} + B_{11}) + \lambda^{-1}B_{22}$.

Заметим, что оператор $K_{22} := (A^{1/2}V_{21})(V_{21}^*)A^{-1/2}$ ограниченно действует из $L_2(\Omega)$ в $L_{2,h}(\Omega)$, значит, $\ker K_{22} = L_{2,0} = L_2(\Omega) \ominus L_{2,h}(\Omega)$. Кроме того, этот оператор неотрицателен и компактен в $L_2(\Omega)$. Далее, $T(\lambda)$ также является компактным. Это позволяет преобразовать проблему (2.87) к спектральной задаче на собственные значения для слабо возмущенного оператора и воспользоваться теоремой Келдыша.

Так же, как и в предыдущем разделе, спроектируем обе части полученного уравнения на H_0 и H_1, соответственно, с помощью ортопроекторов P_0, P_1. С этой целью представим элемент v_ε в виде $v_\varepsilon = v_{\varepsilon,0} + v_{\varepsilon,1}$, $v_{\varepsilon,0} \in H_0$, $v_{\varepsilon,1} \in H_1 = H \ominus H_0$. При этом $v_{\varepsilon,0} = P_0 v_{\varepsilon,0}$, $v_{\varepsilon,1} = P_1 v_{\varepsilon,1}$, $K_{22} = P_1 K_{22} P_1$, $K_{22} v_{\varepsilon,0} = 0$. Подставим сначала $v_{\varepsilon,0}$, $v_{\varepsilon,1}$ в уравнение. Имеем

$$(I - \varepsilon S - T(\lambda))(P_0 v_{\varepsilon,0} + P_1 v_{\varepsilon,1}) = \mu K_{22}(P_0 v_{\varepsilon,0} + P_1 v_{\varepsilon,1}) = \mu K_{22} P_1 v_{\varepsilon,1} v_{\varepsilon,1},\ P_0^2 = P_0. \tag{2.89}$$

Применим теперь к обеим частям последнего уравнения ортопроектор P_0 и получим

$$(I_0 - \varepsilon P_0 S P_0 - P_0 T(\lambda) P_0) v_{\varepsilon,0} = (P_0 T(\lambda) P_1 + \varepsilon P_0 S P_1) v_{\varepsilon,1}. \tag{2.90}$$

Если $\lambda \notin \sigma(I_0 - \varepsilon P_0 S P_0 - P_0 T(\lambda) P_0)$, то существует обратный оператор $(I_0 - \varepsilon P_0 S P_0 - P_0 T(\lambda) P_0)^{-1}$.

Далее, применив ортопроектор P_1 к (2.89), имеем

$$(I_1 P_1 v_{\varepsilon,1} - \varepsilon P_1 S P_0 v_{\varepsilon,0} - \varepsilon P_1 S P_1 v_{\varepsilon,1} - P_1 T(\lambda) P_0 v_{\varepsilon,0} - P_1 T(\lambda) P_1 v_{\varepsilon,1} = \mu P_1 K_{22} P_1 v_{\varepsilon,1}. \tag{2.91}$$

Тогда из (2.90) вытекает $v_{\varepsilon,0} = (I_0 - \varepsilon P_0 S P_0 - P_0 T(\lambda) P_0)^{-1}(P_0 T(\lambda) P_1 + \varepsilon P_0 S P_1) v_{\varepsilon,1}$. Запишем (2.91) в виде $(I_1 - \varepsilon P_1 S P_1 - P_1 T(\lambda) P_1) v_{\varepsilon,1} = (\varepsilon P_1 S P_0 + P_1 T(\lambda) P_0) v_{\varepsilon,0} + \mu P_1 K_{22} P_1 v_{\varepsilon,1}$ и подставим в последнее выражение $v_{\varepsilon,0}$:

$$\begin{gathered}[(I_1 - \varepsilon P_1 S P_1 - P_1 T(\lambda) P_1) - (\varepsilon P_1 S P_0 + P_1 T(\lambda) P_0)(I_0 - \\ - \varepsilon P_0 S P_0 - P_0 T(\lambda) P_0)^{-1}(P_0 T(\lambda) P_1 + \varepsilon P_0 S P_1)] v_{\varepsilon,1} = \mu P_1 K_{22} P_1 v_{\varepsilon,1}.\end{gathered} \tag{2.92}$$

Получилось уравнение для $v_{\varepsilon,1}$: $(I_1 + S_1(\varepsilon,\lambda)) v_{\varepsilon,1} = \mu \widetilde{K}_{22} v_{\varepsilon,1}$, $\widetilde{K}_{22} = P_1 K_{22} P_1$, $v_{\varepsilon,1} \in H_1$, $S_1(\varepsilon,\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$. В силу условия (2.88) оператор, стоящий слева в выражении (2.92), обратим. Поэтому $v_{\varepsilon,1} = \mu(I_1 + S_1(\varepsilon,\lambda))^{-1}\widetilde{K}_{22} v_{\varepsilon,1}$, $v_{\varepsilon,1} = \mu(I_1 + S_2(\varepsilon,\lambda)\widetilde{K}_{22} v_{\varepsilon,1}$, $S_2(\varepsilon,\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty(H_1)$, $v_{\varepsilon,1} \in H_1 = L_{2,h}(\Omega)$. Таким образом, получено уравнение для слабого возмущения оператора $\widetilde{K}_{22}$, который является положительным и компактным в $L_{2,h}(\Omega)$ класса $\mathfrak{S}_p$ при $p > m-1$.

Теорема 2.6. *Пусть в задаче* (2.87) *выполнены условия* (2.88)*. Тогда спектр этой задачи дискретен, состоит из конечнократных собственных значений* $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ *с предельной точкой* $\mu = \infty$*. Сколь бы ни было мало* $\varepsilon > 0$*, все собственные значения, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в угле* $\Lambda_\varepsilon := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg \mu| < \varepsilon\}$.

Система собственных и присоединенных элементов $\{v_{\varepsilon,1k}\}_{k=1}^\infty$, $v_{\varepsilon,1k} = P_1 v_{\varepsilon,k}$, *т. е. система собственных и присоединенных элементов задачи* (2.87)*, после их проектирования на* $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$ *является полной в* H_1*, более того, она образует базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha > m-1$ *в* $L_{2,h}$*. Далее, собственные значения* $\mu_k = \mu_k(\lambda)$ *имеют асимптотическое поведение*

$$\mu_k(\lambda) = \lambda_k^{-1}(K_{22})[1 + o(1)],\ k \to \infty, \tag{2.93}$$

$$\lambda_k(K_{22}) = (d_{m,22}(\Gamma_{22}))^{1/(m-1)} k^{-1/(m-1)}[1 + o(1)], \quad k \to \infty,\ d_{m,22}(\Gamma_{22}) > 0. \tag{2.94}$$

Доказательство. Оно проводится аналогично доказательству теоремы 2.3. Разница заключается лишь в том, что это уже возмущенный случай ($\varepsilon \neq 0$), и здесь возникает несамосопряженный компактный оператор $S_2(\varepsilon,\lambda)$. □

2.3.2. Свойства решений при спектральном параметре λ. В возмущенном случае ($\varepsilon \neq 0$) был получен операторный пучок (см. (2.87))

$$L(\lambda,\mu) v_\varepsilon := ((I - \varepsilon S + \mu K_{22}) - \lambda(A^{-1} + B_{11}) - \lambda^{-1} B_{22}) v_\varepsilon = 0, \quad v_\varepsilon \in H = L_2(\Omega). \tag{2.95}$$

Если выполнено условие

$$\mu \notin \sigma(I - \varepsilon S + \mu K_{22}), \tag{2.96}$$

то существует единственный обратный $(I - \varepsilon S + \mu K_{22})^{-1}$. Тогда возникает спектральная задача для пучка С. Г. Крейна, но этот пучок не является самосопряженным. Применяя слева в (2.95) оператор $(I - \varepsilon S + \mu K_{22})^{-1}$, получаем следующую задачу:

$$v_\varepsilon = \lambda(I - \varepsilon S + \mu K_{22})^{-1}(A^{-1} + B_{11}) v_\varepsilon + \lambda^{-1}(I - \varepsilon S + \mu K_{22})^{-1} B_{22} v_\varepsilon. \tag{2.97}$$

Теорема 2.7. *Пусть в задаче* (2.97) *выполнено условие* (2.96), *а также условие*

$$4\|(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}\|^2\|A^{-1}+B_{11}\|\|B_{22}\|<1. \tag{2.98}$$

Тогда имеют место следующие утверждения.

1°. *Задача* (2.97) *имеет дискретный спектр, состоящий из двух ветвей конечнократных собственных значений с предельными точками* $\lambda=0,\ \lambda=\infty$, *соответственно.*

2°. *Предельной точке* $\lambda=0$ *отвечает ветвь* $\{\lambda_k^\circ\}_{k=1}^\infty$ *конечнократных собственных значений, расположенных в области*

$$|\lambda|\leqslant r_-,\quad r_\pm:=\frac{1\pm\sqrt{1-4\|(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}\|^2\parallel A^{-1}+B_{11}\parallel\parallel B_{22}\parallel}}{2\|(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}\|^2\parallel B_{22}\parallel}, \tag{2.99}$$

при этом для $\forall\varepsilon>0$ *все собственные значения* λ_k^0, *кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе*

$$|\arg\lambda|<\varepsilon. \tag{2.100}$$

Система собственных и присоединенных элементов $\{v_{\varepsilon,k}^0\}_{k=1}^\infty$, *отвечающая собственным значениям* $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^\infty$, *после ее проектирования на подпространство* $H_1=L_2(\Omega)\ominus H_0$, $H_0:=\ker B_{22}$, *является полной в* H_1 *и образует в* H_1 *базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha>m-1$.

3°. *Предельной точке* $\lambda=\infty$ *отвечает ветвь изолированных конечнократных собственных значений* $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, *расположенных в области* $|\lambda|\geqslant r_+$, *при этом для* $\forall\varepsilon>0$ *все собственные значения* λ_k^∞, *кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе* (2.100).

Система собственных и присоединенных элементов $\{v_{\varepsilon,k}^\infty\}_{k=1}^\infty$, *отвечающая собственным значениям* $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, *является полной в* $H=L_2(\Omega)$ *и образует в* H *базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha>m-1$.

Доказательство. Оно проводится аналогично схеме, изложенной в [10, с. 82–86]. Утверждение 1° будет доказано в процессе доказательства утверждений 2° и 3°.

Докажем утверждение 2°. Введем пучок

$$M(\lambda):=Y^{-1}(I-\lambda Y(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}(A^{-1}+B_{11}))(\lambda I-Y(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}B_{22}), \tag{2.101}$$

причем оператор-функция $(I-\lambda Y(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}(A^{-1}+B_{11}))$ при $|\lambda|\leqslant t\in(r_-,r_+)$ обратима, а оператор Y также обратим и является решением операторного уравнения

$$Y=I+(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}(A^{-1}+B_{11})Y(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}B_{22}Y. \tag{2.102}$$

Более того, спектр $\sigma(Z):=\sigma(Y(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}B_{22})\subset\{\lambda:|\lambda|\leqslant r_-\}$. Основываясь на этих фактах, рассмотрим задачу на собственные значения

$$\begin{aligned}&Zv_\varepsilon=Y(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}B_{22}v_\varepsilon=\\&=(I+(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}(A^{-1}+B_{11})Y(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}Y)(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}B_{22}v_\varepsilon=:\\&=:(I+\Phi)B_{22}v_\varepsilon=\lambda v_\varepsilon,\quad v_\varepsilon\in L_2(\Omega)=H,\quad|\lambda|\leqslant r_-,\end{aligned} \tag{2.103}$$

где $\Phi\in\mathfrak{S}_\infty(H)$ и $I+\Phi$ обратим, а $B_{22}=B_{22}^*\in\mathfrak{S}_\infty(H)$ имеет бесконечномерное ядро $H_0=\ker B_{22}$.

Спроектируем теперь обе части (2.103) на H_0 и H_1, соответственно. С этой целью представим элемент v_ε в виде $v_\varepsilon=v_{\varepsilon,0}+v_{\varepsilon,1}$, $v_{\varepsilon,0}\in H_0$, $v_{\varepsilon,1}\in H_1=H\ominus H_0$ и введем ортопроекторы P_0 и P_1. Учитывая соотношения $P_0B_{22}=0$, $P_1B_{22}P_1=:\widetilde B_{22}>0$ (в H_1), имеем

$$P_0(I+\Phi)P_1\widetilde B_{22}v_{\varepsilon,1}=\lambda v_{\varepsilon,0},\ (I_1+P_1\Phi P_1)\widetilde B_{22}v_{\varepsilon,1}=\lambda v_{\varepsilon,1}. \tag{2.104}$$

Так как по условию задачи $\lambda\neq0$, то из первого соотношения (2.104) можно выразить $v_{\varepsilon,0}$ через $v_{\varepsilon,1}$, а второе уравнение не содержит $v_{\varepsilon,0}$. Здесь уже $B_{22}P_1=P_1B_{22}P_1=:\widetilde B_{22}=\widetilde B_{22}^*$ — полный оператор в H_1 ($\ker\widetilde B_{22}=\{0\}$), являющийся также самосопряженным и положительным. Перепишем второе соотношение из (2.104) в виде $P_1(I+\Phi)B_{22}P_1v_{\varepsilon,1}=\lambda v_{\varepsilon,1}$, а затем в виде $Z_1v_{\varepsilon,1}:=P_1(I+\Phi)P_1\widetilde B_{22}v_{\varepsilon,1}=\lambda v_{\varepsilon,1}$, $v_{\varepsilon,1}\in H_1$.

Далее, рассуждая так же как и в [10, теорема 3.1.2, с. 85], мы доказываем утверждение о полноте системы корневых элементов в пространстве $L_{2,h}$. Учитывая еще, что собственные значения оператора K_{22} имеют степенную асимптотику, приходим также к выводу, что эта совокупность корневых элементов образует базис Абеля—Лидского порядка $\alpha > m-1$. Аналогичным образом, только проще, без проектирования на подпространство H_1, так как $H_0 = \ker \widetilde{B}_{22} = \{0\}$, доказывается утверждение 3°.

□

2.4. Спектральные задачи для случая двух областей при втором условии сопряжения.

2.4.1. Невозмущенные смешанные спектральные задачи при втором условии сопряжения. Исследуем теперь невозмущенную спектральную проблему (2.1) с граничным условием на стыке (2.3), т. е.

$$\begin{aligned} &v_1 - \Delta v_1 = \lambda v_1 := f_1 \text{ (в } \Omega_1); \quad \partial_{11} v_1 = \lambda \gamma_{11} v_1 =: \psi_1 \text{ (на } \Gamma_{11}), \\ &v_2 - \Delta v_2 = \lambda v_2 := f_2 \text{ (в } \Omega_2); \quad \partial_{22} v_2 = \lambda^{-1} \gamma_{22} v_2 =: \psi_2 \text{ (на } \Gamma_{22}), \end{aligned} \tag{2.105}$$

$$\partial_{21} v_1 = -\partial_{12} v_2 = \mu(\gamma_{21} v_1 - \gamma_{12} v_2) =: \psi_{21} \quad \text{(на } \Gamma_{12}). \tag{2.106}$$

Представим решение задачи (2.105), (2.106) в виде суммы решений вспомогательных задач, в которых неоднородности содержатся либо в уравнениях, либо в одном из краевых условий.

1°.

$$v_{11} - \Delta v_{11} = 0 \text{ (в } \Omega_1); \quad \partial_{11} v_{11} = \psi_1 := \lambda \gamma_{11} v_1 \text{ (на } \Gamma_{11}), \quad \partial_{21} v_{11} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12}), \tag{2.107}$$

$$v_{22} - \Delta v_{22} = 0 \text{ (в } \Omega_2); \quad \partial_{22} v_{22} = \psi_{12} := \lambda^{-1} \gamma_{22} v_2 \text{ (на } \Gamma_{22}), \quad \partial_{12} v_{22} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12}). \tag{2.108}$$

Таким образом, возникают две разные задачи Неймана. Здесь $v_{kk} \in H_h^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$. Для задачи (2.107) формула Грина имеет вид

$$(\eta_1, v_{11})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \eta_1, v_{11} - \Delta v_{11} \rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle \gamma_{11} \eta_1, \partial_{11} v_{11} \rangle_{L_2(\Gamma_{11})} + \langle \gamma_{21} \eta_1, \partial_{21} v_{11} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})}. \tag{2.109}$$

Тогда слабое решение задачи (2.107) определяется тождеством $(\eta_1, v_{11})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \gamma_{11}\eta_1, \psi_1 \rangle_{L_2(\Gamma_{11})}$ $\forall \eta_1 \in H^1(\Omega_1)$, и решение дается формулой $v_{11} = V_{11}\psi_1 = \lambda V_{11} \gamma_{11} v_1$, $v_{11} \in H_h^1(\Omega_1)$, где $V_{11} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_{11}); H_h^1(\Omega_1))$.

Аналогично для задачи (2.108) формула Грина принимает вид

$$(\eta_2, v_{22})_{H^1(\Omega_2)} = \langle \eta_2, v_{22} - \Delta v_{22} \rangle_{L_2(\Omega_2)} + \langle \gamma_{22} \eta_2, \partial_{22} v_{22} \rangle_{L_2(\Gamma_{22})} + \langle \gamma_{12} \eta_2, \partial_{12} v_{22} \rangle_{L_2(\Gamma_{12})}. \tag{2.110}$$

Тогда слабое решение определяется тождеством $(\eta_2, v_{22})_{H^1(\Omega_2)} = \langle \gamma_{22}\eta_2, \psi_2 \rangle_{L_2(\Gamma_{22})}$, $\forall\, \eta_2 \in H^1(\Omega_2)$. Это решение задается формулой $v_{22} = V_{22}\psi_2 = \lambda^{-1} V_{22} \gamma_{22} v_2$, $v_{22} \in H_h^1(\Omega_2)$, где $V_{22} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{22}); H_h^1(\Omega_2))$.

2°.

$$v_{21} - \Delta v_{21} = \lambda v_1 =: f_1 \text{ (в } \Omega_1); \quad \partial_{11} v_{21} = 0 \text{ (на } \Gamma_{11}), \quad \partial_{21} v_{21} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12}), \tag{2.111}$$

$$v_{22} - \Delta v_{22} = \lambda v_2 = f_2 \text{ (в } \Omega_2); \quad \partial_{22} v_{22} = 0 \text{ (на } \Gamma_{22}), \quad \partial_{12} v_{22} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12}). \tag{2.112}$$

Здесь снова имеем две задачи (2.111), (2.112). Используя формулу Грина (2.9), получим решение вспомогательной задачи (2.111) $(\eta_1, v_{21})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \eta_1, f_1 \rangle_{L_2(\Omega_1)}$, $\forall\, \eta_1 \in H^1(\Omega_1)$. Это слабое решение дается формулой $v_{21} = A_1^{-1} f_1 = \lambda A_1^{-1} v_1$, $v_{21} \in H^1(\Omega_1)$, где A_1 — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_1); L_2(\Omega_1)$.

Аналогично для задачи (2.112), используя соответствующую формулу Грина, получаем слабое решение вида $v_{22} = A_2^{-1} f_2 = \lambda A_2^{-1} v_2$, $v_{22} \in H^1(\Omega_2)$, где A_2 — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_2); L_2(\Omega_2)$.

3°.

$$v_{31} - \Delta v_{31} = 0 \text{ (в } \Omega_1); \quad \partial_{11} v_{11} = 0 \text{ (на } \Gamma_{11}), \quad \partial_{21} v_{11} = \psi_{21} = \mu(\gamma_{21} v_1 - \gamma_{12} v_2) \text{ (на } \Gamma_{12}), \tag{2.113}$$

$$v_{32} - \Delta v_{32} = 0 \text{ (в } \Omega_2); \quad \partial_{22} v_{32} = 0 \text{ (на } \Gamma_{22}), \quad \partial_{12} v_{32} = -\psi_{21} = -\mu(\gamma_{21} v_1 - \gamma_{12} v_2) \text{ (на } \Gamma_{12}). \tag{2.114}$$

Как и в предыдущих случаях, опираясь на формулу Грина (2.9), получаем решение задачи (2.113). Имеем $(\eta_3, v_{31})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \gamma_{21}\eta_3, \psi_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})}$, $v_{31} \in H_h^1(\Omega_1)$. В частности, если $\eta_3 \in H_0^1(\Omega)$, тогда $(\eta_3, v_{31})_{H^1(\Omega_1)} = 0$ и $v_{31} \in H_h^1(\Omega_1)$. Далее, слабое решение дается формулой $v_{31} = V_{21}\psi_{21} = \mu V_{21}(\gamma_{21} v_1 - \gamma_{12} v_2)$.

Аналогично для задачи (2.114) получаем $v_{32} = -V_{12}\psi_{21} = -\mu V_{12}(\gamma_{21} v_1 - \gamma_{12} v_2)$, где $V_{21} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{12}); H_h^1(\Omega_1))$, $V_{12} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{12}); H_h^1(\Omega_2))$.

Складывая решения вспомогательных задач 1°, 2°, 3°, получим систему уравнений относительно v_1, v_2:

$$\begin{cases} v_1 = \lambda V_{11}\gamma_{11}v_1 + \lambda A_1^{-1}v_1 + \mu V_{21}(\gamma_{21}v_1 - \gamma_{12}v_2), \\ v_2 = \lambda^{-1}V_{22}\gamma_{22}v_2 + \lambda A_2^{-1}v_2 - \mu V_{12}(\gamma_{21}v_1 - \gamma_{12}v_2). \end{cases} \tag{2.115}$$

Здесь возникает матрица, которая обладает свойством неотрицательности. Применяя формулы взаимной сопряженности $V_{21} = \gamma_{21}^*$, $V_{12} = \gamma_{12}^*$, получим

$$(V_{21}(\gamma_{21}v_1 - \gamma_{12}v_2), v_1)_{H^1(\Omega_1)} + (-V_{12}(\gamma_{21}v_1 - \gamma_{12}v_2), v_2)_{H^1(\Omega_2)} =$$

$$= (\gamma_{21}v_1 - \gamma_{12}v_2, \gamma_{21}v_1)_{L_2(\Gamma_{21})} + (\gamma_{21}v_1 - \gamma_{12}v_2, -\gamma_{12}v_2)_{L_2(\Gamma_{21})} = \|\gamma_{21}v_1 - \gamma_{12}v_2\|^2_{L_2(\Gamma_{21})} \geqslant 0.$$

Сделаем замену в (2.115): $v_k = A_k^{-1/2}w_k$, $w_k \in L_2(\Omega_k)$, где A_k — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_k); L_2(\Omega_k))$. Действуя на обе части полученных уравнений операторами $A_1^{1/2}$, $A_2^{1/2}$, соответственно, получим следующую задачу:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} (A_1^{1/2}V_{11})(\gamma_{11}A_1^{-1/2}) + A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \tag{2.116}$$

$$+ \lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (A_2^{1/2}V_{22})(\gamma_{22}A_2^{-1/2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} (A_1^{1/2}V_{21})(\gamma_{21}A_1^{-1/2}) & -(A_1^{1/2}V_{21})(\gamma_{12}A_2^{-1/2}) \\ -(A_2^{1/2}V_{12})(\gamma_{21}A_1^{-1/2}) & (A_2^{1/2}V_{12})(\gamma_{12}A_2^{-1/2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

где

$$(A_1^{1/2}V_{11}) = (\gamma_{11}A_1^{-1/2})^*,\ (A_2^{1/2}V_{22}) = (\gamma_{22}A_2^{-1/2})^*,$$
$$(A_1^{1/2}V_{21}) = (\gamma_{21}A_1^{-1/2})^*,\ (A_1^{1/2}V_{21}) = (\gamma_{12}A_2^{-1/2})^*,$$
$$(A_2^{1/2}V_{12}) = (\gamma_{21}A_1^{-1/2})^*,\ (A_2^{1/2}V_{12}) = (\gamma_{12}A_2^{-1/2})^*.$$

Далее, вводим операторы

$$\begin{aligned} &0 \leqslant B_{11} := (A_1^{1/2}V_{11})(\gamma_{11}A_1^{-1/2}) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega_1)), \quad 0 \leqslant B_{22} := (A_2^{1/2}V_{22})(\gamma_{22}A_2^{-1/2}) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega_2)), \\ &0 \leqslant F_{11} := (A_1^{1/2}V_{21})(\gamma_{21}A_1^{-1/2}) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega_1)), \quad 0 \leqslant F_{22} := (A_2^{1/2}V_{12})(\gamma_{12}A_2^{-1/2}) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega_2)), \\ &F_{12} := (A_1^{1/2}V_{21})(\gamma_{12}A_2^{-1/2}) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega_2); L_2(\Omega_1)), \\ &F_{21} := (A_2^{1/2}V_{12})(\gamma_{21}A_1^{-1/2}) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega_1); L_2(\Omega_2)). \\ &F_{12}^* := (A_2^{1/2}V_{12})(\gamma_{21}A_1^{1/2}) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega_1); L_2(\Omega_2)). \end{aligned} \tag{2.117}$$

Окончательно получаем спектральную задачу

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} B_{11} + A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} F_{11} & -F_{12} \\ -F_{12}^* & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \tag{2.118}$$

в пространстве $L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2)$.

2.4.2. Возмущенные смешанные спектральные задачи при втором условии сопряжения. Рассмотрим теперь спектральную проблему (2.20), (2.21) с граничным условием на стыке (2.23). Решение этой задачи ищем в виде суммы решений вспомогательных задач:

1°.

$$v_{11} - \Delta v_{11} = 0 \ (\text{в } \Omega_1);\ \partial_{11}v_{11} = \widetilde{\psi}_1 := \psi_1 + \varepsilon\sigma_1\gamma_{11}v_1 = \lambda\gamma_{11}v_1 + \varepsilon\sigma_1\gamma_{11}v_1 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \tag{2.119}$$

$$v_{22} - \Delta v_{22} = 0 \ (\text{в } \Omega_2);\ \partial_{22}v_{22} = \widetilde{\psi}_2 := \psi_2 + \varepsilon\sigma_2\gamma_{22}v_2 = \lambda^{-1}\gamma_{22}v_2 + \varepsilon\sigma_2\gamma_{22}v_2 \ (\text{на } \Gamma_{22}). \tag{2.120}$$

Снова, как и в невозмущенном случае, основываясь на формуле Грина (2.9), получаем соответственно решения задач (2.119), (2.120):

$$v_{\varepsilon,11} = V_{11}\widetilde{\psi}_1 = V_{11}(\psi_1 + \varepsilon\sigma_1\gamma_{11}v_1) = V_{11}(\lambda\gamma_{11}v_1 + \varepsilon\sigma_1\gamma_{11}v_1), \tag{2.121}$$

$$v_{\varepsilon,12} = V_{22}\widetilde{\psi}_2 = V_{22}(\lambda^{-1}\gamma_{22}v_2 + \varepsilon\sigma_2\gamma_{22}v_2). \tag{2.122}$$

Далее возникает полная задача Неймана для уравнения Пуассона:
2°.

$$\begin{aligned} &v_{21} - \Delta v_{21} = \widetilde{f}_1 := f_1 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \frac{\partial v_1}{\partial x_k} = \lambda v_1 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \frac{\partial v_1}{\partial x_k} \ (\text{в } \Omega_1);\\ &\partial_{11} v_{21} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \quad \partial_{21} v_{21} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12}), \end{aligned} \tag{2.123}$$

$$\begin{aligned} &v_{22} - \Delta v_{22} = \widetilde{f}_2 := f_2 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \frac{\partial v_2}{\partial x_k} = \lambda v_2 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \frac{\partial v_2}{\partial x_k} \ (\text{в } \Omega_2);\\ &\partial_{22} v_{22} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22}), \quad \partial_{22} v_{22} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12}). \end{aligned} \tag{2.124}$$

Здесь снова имеем две разные задачи (2.123), (2.124), решения которых принимают вид

$$v_{\varepsilon,21} = A_1^{-1} \widetilde{f}_1 = A_1^{-1}(f_1 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \frac{\partial v_1}{\partial x_k}) = A_1^{-1}(\lambda v_1 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \frac{\partial v_1}{\partial x_k}), \tag{2.125}$$

где A_1 — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_1); L_2(\Omega_1))$,

$$v_{\varepsilon,22} = A_2^{-1} \widetilde{f}_2 = A_2^{-1}(f_1 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \frac{\partial v_2}{\partial x_k}) = A_2^{-1}(\lambda v_1 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \frac{\partial v_2}{\partial x_k}), \tag{2.126}$$

где A_2 — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_2); L_2(\Omega_2))$.

Наконец, имеем также следующие две вспомогательные задачи
3°.

$$\begin{aligned} &v_{31} - \Delta v_{31} = 0 \ (\text{в } \Omega_1); \quad \partial_{11} v_{31} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}),\\ &\partial_{21} v_{31} = \widetilde{\psi}_{21} := \psi_{21} + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21} v_1 - \sigma_{21}\gamma_{12} v_2) =\\ &\quad = \mu(\gamma_{21} v_1 - \gamma_{12} v_2) + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21} v_1 - \sigma_{21}\gamma_{12} v_2) \ (\text{на } \Gamma_{12}), \end{aligned} \tag{2.127}$$

$$\begin{aligned} &v_{32} - \Delta v_{32} = 0 \ (\text{в } \Omega_2); \quad \partial_{22} v_{32} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}),\\ &\partial_{12} v_{32} = -\widetilde{\psi}_{21} := -(\psi_{21} + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21} v_1 - \sigma_{21}\gamma_{12} v_2)) =\\ &= -\mu(\gamma_{21} v_1 - \gamma_{12} v_2) + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21} v_1 - \sigma_{21}\gamma_{12} v_2) \ (\text{на } \Gamma_{12}). \end{aligned} \tag{2.128}$$

Проводя аналогичные преобразования, как и в предыдущих случаях, получаем решения задач (2.127), (2.128)

$$v_{\varepsilon,31} = V_{21}(\mu(\gamma_{21} v_1 - \gamma_{12} v_2) + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21} v_1 - \sigma_{21}\gamma_{12} v_2)), \tag{2.129}$$

$$v_{\varepsilon,32} = -V_{12}(\mu(\gamma_{21} v_1 - \gamma_{12} v_2) + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21} v_1 - \sigma_{21}\gamma_{12} v_2)), \tag{2.130}$$

где $V_{12} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{12}); H_h^1(\Omega_2))$, $V_{21} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{12}); H_h^1(\Omega_1))$.

Складывая решения вспомогательных задач (2.119), (2.120), (2.123), (2.124), (2.127), (2.128), осуществляя замену $v_{\varepsilon,k} = A_k^{-1/2} w_{\varepsilon,k}$, $w_{\varepsilon,k} \in L_2(\Omega_k)$, где A_k — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_k); L_2(\Omega_k))$, и действуя на обе части полученных уравнений операторами $A_1^{1/2}$, $A_2^{1/2}$ соответственно, окончательно получаем следующую спектральную задачу:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \varepsilon \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} w_{\varepsilon,1} \\ w_{\varepsilon,2} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} B_{11} + A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{\varepsilon,1} \\ w_{\varepsilon,2} \end{pmatrix} + \\ &\quad + \lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{\varepsilon,1} \\ w_{\varepsilon,2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} F_{11} & -F_{12} \\ -F_{12}^* & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{\varepsilon,1} \\ w_{\varepsilon,2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.131}$$

Операторные коэффициенты B_{11}, B_{22}, F_{11}, F_{22}, F_{12}, F_{21}, F_{12}^* описаны в (2.117), а остальные таковы:

$$\begin{aligned} &S_1 := A_1^{1/2} V_{11} \sigma_1 \gamma_{11} A_1^{-1/2} - A_1^{1/2} \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \frac{\partial}{\partial x_k} (A_1^{-1/2} \ldots) + A_1^{1/2} \partial_{12} \gamma_{21} A_1^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega_1)),\\ &S_2 := A_1^{1/2} \partial_{21} \gamma_{12} A_2^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega_2); L_2(\Omega_1)),\\ &S_3 := A_2^{1/2} \partial_{12} \gamma_{21} A_1^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega_1); L_2(\Omega_2)),\\ &S_4 := A_2^{1/2} V_{22} \sigma_2 \gamma_{22} A_2^{-1/2} - A_2^{1/2} \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \frac{\partial}{\partial x_k} (A_2^{-1/2} \ldots) - A_2^{1/2} \partial_{21} \gamma_{12} A_2^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega_2)). \end{aligned} \tag{2.132}$$

2.4.3. О свойствах решений невозмущенных спектральных проблем при втором условии сопряжения. В пункте 2.4.1 было получено уравнение (2.118). Для удобства обозначим в нем матрицы следующим образом:

$$\begin{pmatrix} B_{11}+A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} =: N, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} =: M, \quad \begin{pmatrix} F_{11} & -F_{12} \\ -F_{12}^* & F_{22} \end{pmatrix} =: F. \tag{2.133}$$

Тогда (2.118) можно переписать в виде $w = \lambda N w + \lambda^{-1} M w + \mu F w$. Отсюда получаем следующую спектральную задачу:

$$L(\lambda,\mu)w := (I - \lambda N - \lambda^{-1} M - \mu F)w = 0, \quad w \in L_2(\Omega). \tag{2.134}$$

Проверим, какими свойствами обладают операторные коэффициенты в (2.118). Операторы $B_{11}+A_1^{-1}$ и A_2 являются положительными и компактными. Следовательно, оператор N также является положительным и компактным, $\ker N = \{0\}$. Далее, оператор B_{22} — неотрицателен и компактен, $\ker B_{22} \neq \{0\}$. Более того, $\{0\} \neq \ker B_{22} = L_{2,0}(\Omega_2) \ominus L_{2,h}(\Omega_2)$, так как B_{22} ограниченно действует из пространства $L_2(\Omega)$ в $L_{2,h}(\Omega)$. Нетрудно доказать,что оператор F является самосопряженным и неотрицательным. Действительно, $F = F^*$, если $(Fz_1, z_2) = (z_1, Fz_2)$. Проверим это:

$$(Fz_1, z_2) = \left(\begin{pmatrix} F_{11} & -F_{12} \\ -F_{12}^* & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} F_{11}u_1 - F_{12}v_1 \\ -F_{12}^*u_1 + F_{22}v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= (F_1u_1 - F_{12}v_1, u_2) + (-F_{12}^*u_1 + F_{22}v_1, v_2) = (F_{11}u_1, u_2) + (-F_{12}v_1, u_2) +$$

$$+(-F_{12}^*u_1, v_2) + (F_{22}v_1, v_2) = (u_1, F_{11}u_2) + (v_1, -F_{12}^*u_2) + (u_1, -F_{12}v_2) + (v_1, F_{22}v_2) =$$

$$= (u_1, F_{11}u_2 - F_{12}v_2) + (v_1, -F_{12}^*u_2 + F_{22}v_2) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_{11}u_2 - F_{12}v_2 \\ -F_{12}^*u_2 + F_{22}v_2 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_{11} & -F_{12} \\ -F_{12}^* & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = (z_1, Fz_2).$$

Докажем неотрицательность оператора F. Для этого рассмотрим квадратичную форму

$$Fw = \begin{pmatrix} F_{11} & -F_{12} \\ -F_{12}^* & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}w_1 - F_{12}w_2 \\ -F_{12}^*w_1 + F_{22}w_2 \end{pmatrix},$$

$$\|Fw\|^2 = \|F_{11}w_1 - F_{12}w_2\|^2 + \| - F_{12}^*w_1 + F_{22}w_2\|^2 \geqslant 0.$$

Найдем теперь ядро оператора F. Для этого рассмотрим уравнение $Fw = 0$. В исходном уравнении оператор F стоит перед параметром μ, поэтому

$$\mu(V_{21}(\gamma_{21}A_1^{-1/2}w_1 - \gamma_{12}A_2^{-1/2}w_2); -V_{12}(\gamma_{21}A_1^{-1/2}w_1 - \gamma_{22}A_2^{-1/2}w_2)) = 0.$$

В силу того, что операторы V_{21} и V_{12} обратимы, из системы уравнений

$$\begin{cases} V_{21}(\gamma_{21}A_1^{-1/2}w_1 - \gamma_{12}A_2^{-1/2}w_2) = 0, \\ -V_{12}(\gamma_{21}A_1^{-1/2}w_1 - \gamma_{22}A_2^{-1/2}w_2) = 0 \end{cases}$$

следует, что $\gamma_{21}A_1^{-1/2}w_1 - \gamma_{12}A_2^{-1/2}w_2 = 0$. А это и есть главные граничные условия, такие что $H^1(\Omega) := H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2) = H^1_\Gamma(\Omega) \oplus H^1_h(\Omega)$, следовательно, $\ker F = H^1_\Gamma(\Omega)$.

Лемма 2.2. *Если выполнено условие $\gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = 0$, то формула Грина принимает вид*

$$\sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} (\nabla u_k \nabla v_k + u_k v_k) d\Omega_k = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} u_k (v_k - \Delta u_k) d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Gamma_{kk}} u_k \frac{\partial v_k}{\partial n_k} d\Gamma_{kk} + \int\limits_{\Gamma_{12}} u_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial n_1} + \frac{\partial v_2}{\partial n_2} \right) d\Gamma_{12}. \tag{2.135}$$

Из нее следует, что ортогональным дополнением в $H^1(\Omega)$ к H^1_Γ, где $H^1_\Gamma(\Omega) = \{(u_1; u_2)^\tau : \gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = 0$ (на Γ_{12})$\}$, является подпространство

$$\begin{aligned} &H^1_h(\Omega) = \{(v_1; v_2)^\tau : v_1 - \Delta v_1 = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \ \frac{\partial v_1}{\partial n_1} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\ &v_2 - \Delta v_2 = 0 \ (\text{в } \Omega_2), \ \frac{\partial v_2}{\partial n_2} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22}), \ \frac{\partial v_1}{\partial n_1} = -\frac{\partial v_2}{\partial n_2} := \psi \in H^{-1/2}(\Gamma_{12})\}. \end{aligned} \tag{2.136}$$

Тогда приходим к ортогональному разложению следующего вида: $H^1(\Omega) = H^1_\Gamma(\Omega) \oplus H^1_h(\Omega)$.

Таким образом, общие свойства операторов в (2.134) такие же, как в задаче (2.18), (2.19). Очевидно, что решение проблемы (2.134) обладает теми же общими свойствами, что и (2.18), с учетом замены операторных коэффициентов из (2.18) на операторные матрицы из (2.134). Здесь снова пучок (2.134) содержит два параметра λ и μ, что дает возможность исследовать два класса задач: при фиксированном $\mu \in \mathbb{C}$, λ — спектральный, и наоборот.

2.4.4. О свойствах решений возмущенных спектральных проблем при втором условии сопряжения. В возмущенном случае было получено уравнение (2.131) с операторными коэффициентами (2.117), (2.132). Для простоты перепишем задачу (2.131) в виде

$$L(\lambda,\mu)w_\varepsilon := ((I-\varepsilon\widetilde{S}) - \lambda N - \lambda^{-1}M - \mu F)w_\varepsilon = 0, \quad w_\varepsilon \in L_2(\Omega), \tag{2.137}$$

где операторы N, M, F обозначены в (2.133) и имеют такие же свойства, как и в предыдущем разделе. Оператор $\widetilde{S}$ имеет вид $\widetilde{S} := \begin{pmatrix} S_{11} & -S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$. Таким образом, снова имеем операторный пучок, аналогичный (2.87), но в матричной форме.

Здесь также можно исследовать свойства решений спектральных проблем при втором условии сопряжения. В случае, когда μ является спектральным параметром, а λ — фиксированным, учитывая условие $\lambda \neq 0$, $\lambda \notin \sigma(I-\varepsilon\widetilde{S} - T(\lambda)) \cap \sigma(I_0 - \varepsilon P_0\widetilde{S}P_0 - P_0T(\lambda)P_0)$ и обозначая через $T(\lambda)$ оператор вида $T(\lambda) := \lambda N + \lambda^{-1}M$, проводя выкладки, аналогичные пункту (2.3.1), приходим к заключению, что и в этом случае имеет место аналог теоремы 2.6.

Далее, при спектральном параметре λ полагаем, что выполнено условие $\mu \notin \sigma(I-\varepsilon\widetilde{S}+\mu F)$. Тогда задача (2.137) сводится к проблеме

$$v_\varepsilon = \lambda(I-\varepsilon\widetilde{S}+\mu K_{22})^{-1}(A^{-1}+B_{11})v_\varepsilon + \lambda^{-1}(I-\varepsilon\widetilde{S}+\mu K_{22})^{-1}B_{22}v_\varepsilon. \tag{2.138}$$

Для нее имеют место результаты типа теоремы 2.7.

3. Начально-краевые задачи сопряжения

3.1. Возмущенные начально-краевые задачи при первом условии сопряжения.

3.1.1. Возмущенная начально-краевая задача при спектральном параметре λ. Рассмотрим в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, разбитой на две подобласти Ω_1 и Ω_2 с липшицевыми границами Γ_{11}, Γ_{22} и границами стыка $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$, начально-краевую задачу, которая порождает соответствующую спектральную, где один из параметров (λ либо μ) является искомым спектральным, а другой — фиксированным. Здесь удобно, как в задаче гидродинамики (проблема С. Г. Крейна), вместо поля скоростей $u(t,x)$ ввести поле перемещений сплошной среды $w_\varepsilon(t,x)$, $u_\varepsilon(t,x) = \partial w_\varepsilon/\partial t$. Тогда начально-краевая задача, отвечающая спектральной проблеме (2.35), имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 w_{\varepsilon,1}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(w_{\varepsilon,1} - \Delta w_{\varepsilon,1} + \varepsilon\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial x_k}\right) = \widetilde{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \\ &\frac{\partial^2 w_{\varepsilon,2}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(w_{\varepsilon,2} - \Delta w_{\varepsilon,2} + \varepsilon\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial x_k}\right) = \widetilde{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2); \end{aligned} \tag{3.1}$$

на внешних границах:

$$\begin{aligned} &\partial_{11}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t} + \gamma_{11}\frac{\partial^2 w_{\varepsilon,1}}{\partial t^2} + \varepsilon\sigma_1\gamma_{11}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t} =: \psi_1 + \varepsilon\sigma_1\gamma_{11}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t} := \widetilde{\psi}_1 \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \\ &\partial_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t} + \gamma_{22}w_{\varepsilon,2} + \varepsilon\sigma_2\gamma_{22}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t} =: \psi_2 + \varepsilon\sigma_2\gamma_{22}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t} := \widetilde{\psi}_2 \quad (\text{на } \Gamma_{22}); \end{aligned} \tag{3.2}$$

на границах стыка:

1°. либо

$$\begin{aligned} &\gamma_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t} - \gamma_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t} = 0; \\ &\partial_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t} + \partial_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t} = \psi_{21} + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t} - \sigma_{21}\gamma_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t}) = \\ &= \mu\gamma_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t} + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t} - \sigma_{21}\gamma_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t}) := \widetilde{\psi}_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{21}); \end{aligned} \tag{3.3}$$

2°. либо

$$\begin{aligned}&\partial_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t}+\partial_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t}=\psi_{21}+\varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t}-\sigma_{21}\gamma_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t})=\\&=\mu(\gamma_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t}-\gamma_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t})+\varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t}-\sigma_{21}\gamma_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t}):=\widetilde{\psi}_{21}\quad (\text{на } \Gamma_{12}),\end{aligned}\tag{3.4}$$

$$w_{\varepsilon,k}(0)=w^\circ_{\varepsilon,k},\quad \frac{\partial w_{\varepsilon,k}}{\partial t}(0)=w^1_{\varepsilon,k}=u^\circ_{\varepsilon,k}.\tag{3.5}$$

Опираясь на построения и методы разделов 1-2, можно исследовать задачу (3.1)–(3.3), (3.5) и доказать теорему о ее сильной разрешимости на произвольном конечном промежутке времени.

Представим, как и ранее, решение $w_\varepsilon(t,x)$ задачи (3.1)–(3.3), (3.5) в виде суммы решений пяти вспомогательных задач, в каждой из которых неоднородности входят в уравнение либо в одно из краевых условий лишь в одном месте.

Не выписывая формулировки этих задач, можно представить решение в виде, аналогичном (2.35). Имеем:

$$\begin{aligned}&\frac{dw_\varepsilon}{dt}=A^{-1}(\widetilde{f}-\frac{d^2w_\varepsilon}{dt^2})+V_{21}(\widetilde{\psi}_{21}-\mu\gamma_{21}p_1\frac{dw_\varepsilon}{dt}-\varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}p_1\frac{dw_\varepsilon}{dt}-\sigma_{21}\gamma_{12}p_2\frac{dw_\varepsilon}{dt}))+\\&+V_{11}(\widetilde{\psi}_1-\gamma_{11}p_1\frac{d^2w_\varepsilon}{dt}-\varepsilon\sigma_1\gamma_{11}p_1\frac{dw_\varepsilon}{dt})+V_{22}(\widetilde{\psi}_2-\gamma_{22}p_2w_\varepsilon-\varepsilon\sigma_2\gamma_{22}p_2\frac{dw_\varepsilon}{dt})+(I+\varepsilon S)\frac{dw_\varepsilon}{dt}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Здесь $p_1(u_1;0):=u_1$, $p_2(0;u_2):=u_2$ – ортопроекторы, где $w_\varepsilon=(w_{\varepsilon,1};w_{\varepsilon,2})$, $\widetilde{f}=(\widetilde{f}_1;\widetilde{f}_2)$, A — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_1)\oplus H^1(\Omega_2);L_2(\Omega))$, $A=\mathrm{diag}\,(A_1;A_2)$, A_1 — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_1);L_2(\Omega_1))$, A_2 — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_2);L_2(\Omega_2))$, $H^1(\Omega)=H^1(\Omega_1)\oplus H^1(\Omega_2)$.

Тогда возникает задача Коши

$$\begin{aligned}&(A^{-1}+V_{11}\gamma_{11}p_1)\frac{d^2w_\varepsilon}{dt^2}+\Big[(I+\varepsilon S)-\mu V_{21}(\gamma_{21}p_1+\varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}p_1-\sigma_{21}\gamma_{12}p_2))-\\&-\varepsilon V_{11}\sigma_1\gamma_{11}p_1+\varepsilon V_{22}\sigma_2\gamma_{22}p_2\Big]\frac{dw_\varepsilon}{dt}+V_{22}\gamma_{22}p_2w_\varepsilon=A^{-1}f+V_{21}\psi_{21}+V_{11}\psi_1+V_{22}\psi_2,\\&w_\varepsilon(0)=w^\circ_\varepsilon,\quad \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}(0)=w^1_\varepsilon=u^\circ_\varepsilon.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Кратко (3.7) можно записать в виде

$$\begin{aligned}&(A^{-1}+V_{11}\gamma_{11}p_1)\frac{d^2w_\varepsilon}{dt^2}+\Big[(I+\varepsilon\widehat{S})-\mu V_{21}\gamma_{21}p_1\Big]\frac{dw_\varepsilon}{dt}+V_{22}\gamma_{22}p_2w_\varepsilon=A^{-1}f+V_{21}\psi_{21}+V_{11}\psi_1+V_{22}\psi_2,\\&w_\varepsilon(0)=w^\circ_\varepsilon,\quad \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}(0)=w^1_\varepsilon=u^\circ_\varepsilon.\end{aligned}$$

В последнем уравнении осуществим замену $w_\varepsilon=A^{-1/2}\eta_\varepsilon$. Это можно сделать в силу того, что $A^{1/2}H^1(\Omega)=L_2(\Omega)$. Тогда получаем

$$\begin{aligned}&(A^{-1}+B_1p_1)\frac{d^2\eta_\varepsilon}{dt^2}+\Big[(I+\varepsilon\widetilde{S})-\mu B_{21}p_1\Big]\frac{d\eta_\varepsilon}{dt}+B_2p_2\eta_\varepsilon=\\&=A^{-1/2}f+A^{1/2}V_{21}\psi_{21}+A^{1/2}V_{11}\psi_1+A^{1/2}V_{22}\psi_2:=f_1(t),\\&\eta_\varepsilon(0)=A^{1/2}w^\circ_\varepsilon,\quad \frac{\partial\eta_\varepsilon}{\partial t}(0)=A^{1/2}w^1_\varepsilon=A^{1/2}u^\circ_\varepsilon,\end{aligned}\tag{3.8}$$

где $B_1:=V_{11}\gamma_{11}$, $B_{21}:=V_{21}\gamma_{21}$, $B_2:=V_{22}\gamma_{22}$.

Оператор $A^{-1}+B_1p_1$ обратим, так как он является полным, т. е. $\ker(A^{-1}+B_1p_1)=\{0\}$. Тогда можно сделать еще одну замену

$$\frac{d\eta_\varepsilon}{dt}=(A^{-1}+B_1p_1)^{-1}\varphi_\varepsilon,\tag{3.9}$$

и отсюда получаем задачу Коши для интегродифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{aligned}&\frac{d\eta_\varepsilon}{dt}+((I+\varepsilon\widetilde{S}_1)-\mu B_{21}p_1)(A^{-1}+B_1p_1)^{-1}\varphi_\varepsilon+\int\limits_0^t B_2p_2(A^{-1}+B_1p_1)^{-1}\varphi_\varepsilon(s)ds=\\&=-B_2p_2A^{1/2}w_\varepsilon^0+A^{-1/2}f+A^{1/2}V_{21}\psi_{21}+A^{1/2}V_{22}\psi_2+A^{1/2}V_{11}\psi_1,\\&\varphi_\varepsilon(0)=(A^{-1}+B_1p_1)A^{1/2}w_\varepsilon^1.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Для исследования проблемы разрешимости задачи (3.10) воспользуемся утверждением, доказательство которого можно найти в [12, теоремы 1.3.2, 1.3.4, с. 21–25]. В упрощенной форме оно имеет следующий вид.

Лемма 3.1. *Пусть в задаче Коши для интегродифференциального уравнения первого порядка, рассматриваемого в гильбертовом пространстве H, т. е. в задаче*

$$\frac{du}{dt}=A_0u+\int\limits_0^t G(t,s)A_1u(s)ds+f(t),\quad u(0)=u^\circ,\tag{3.11}$$

выполнены следующие условия:

1°. *A_0 является генератором аналитической полугруппы*;
2°. $\mathcal{D}(A_1)\supset\mathcal{D}(A_0)$;
3°. $G(t,s)$, $\partial G(t,s)/dt\in C(\triangle_t;H)$, $\triangle_t:=\{(t,s):0\leqslant s\leqslant t\in T\}$;
4°. $f(t)\in C^\beta([0,T];H)$, $0<\beta\leqslant 1$;
5°. $u^0\in\mathcal{D}(A_0)$.

Тогда задача (3.10) *имеет единственное сильное решение* $u(t)\in C([0,T];\mathcal{D}(A_0))\cap C^1([0,T];H)$, *для которого все слагаемые в* (3.10) *являются элементами из* $C([0,T];H)$, *и выполнены начальные условия.*

Воспользуемся леммой 3.1. В задаче (3.10) оператор $-((I+\varepsilon\widehat{S})-\mu B_{21}p_1)(A^{-1}+B_1p_1)^{-1}$является генератором аналитической полугруппы, при этом области определения этого генератора и оператора, стоящего под знаком интеграла, совпадают. Далее, можно считать, что в (3.10) $G(t,s)\equiv I$, поэтому выполнено условие 3° леммы 3.1.

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Если в задаче* (3.10) *выполнены условия*

$$w_\varepsilon^0,\ w_\varepsilon^1\in H_\Gamma^1(\Omega),\tag{3.12}$$

$$f(t)\in C^\beta([0,T];(H_\Gamma^1(\Omega))^*),\quad \psi_k\in C^\beta([0,T];H^{-1/2}(\Gamma_{jk})),\ j,k=\overline{1,2},\ 0<\beta\leqslant 1,\tag{3.13}$$

то существует единственное сильное решение $\varphi_\varepsilon(t)$ задачи (3.10) *на отрезке* $[0,T]$, *и для этого решения все слагаемые в уравнении* (3.10) *являются непрерывными функциями* $t\in[0,T]$ *со значениями в* $L_2(\Omega)$.

Из этой леммы следует такой факт.

Теорема 3.1. *Пусть в задаче* (3.1)–(3.3), (3.5) *выполнены условия* (3.12), (3.13) *и условие*

$$\mu\notin\sigma((I+\varepsilon\widetilde{S}_1)-\mu B_{21}p_1).\tag{3.14}$$

Тогда эта задача имеет сильное решение

$$w\in C^2([0,T];(H_\Gamma^1(\Omega))^*)\cap C^1([0,T];H_\Gamma^1(\Omega)),\tag{3.15}$$

для которого выполнены уравнения (3.1), *где все слагаемые являются элементами из* $C([0,T];(H_\Gamma^1(\Omega))^*)$, *граничные условия* (3.2)-(3.3), *где все слагаемые на Γ_{jk} являются элементами из* $C([0,T];H^{-1/2}(\Gamma_{jk}))$, $j,k=\overline{1,2}$, *а также начальные условия* (3.5).

Доказательство. Если выполнены условия (3.12), (3.13), тогда задача (3.10), а значит, и задача (3.9), имеют решения, для которых все слагаемые в этих уравнениях являются элементами из $C([0,T];L_2(\Omega))$. Тогда в силу (3.13) имеем $d\eta_\varepsilon/dt \in C([0,T];L_2(\Omega))$. Далее, в задаче (3.7), а потому и в (3.6), $dw_\varepsilon/dt \in C([0,T];H^1_\Gamma(\Omega))$. Отсюда получаем, что $L_\varepsilon(dw_\varepsilon/dt) \in C([0,T];(H^1_\Gamma(\Omega))^*)$, $\partial_{\varepsilon,k}(dw_\varepsilon/dt) \in C([0,T];H^{-1/2}(\Gamma_{jk}))$.

Основываясь на (3.6), аналогично рассуждениям, проведенным выше, устанавливаем, что для $w_\varepsilon(t,x)$ выполнены уравнения и краевые условия задачи (3.1)–(3.3), (3.5); поэтому, в силу доказанных свойств для уравнения (3.6), в уравнении (3.1) все слагаемые — элементы из $C([0,T];(H^1_\Gamma(\Omega))^*)$, а в граничных условиях — элементы из $C([0,T];H^{-1/2}(\Gamma_{jk}))$, $j,k=\overline{1,2}$.

Отсюда получаем, что имеют место свойства (3.15), $\gamma_{11}p_1w_\varepsilon \in C^2([0,T];H^{-1/2}(\Gamma_{11}))$, а также выполнены начальные условия (3.12) $\square$

3.1.2. Возмущенная начально-краевая задача при спектральном параметре μ. Считаем теперь, что μ — спектральный, а λ — фиксированный параметр в задаче (2.20)–(2.22). Приведем формулировку начально-краевой проблемы, отвечающей этому случаю. Имеем следующие уравнения и краевые условия:

$$\begin{aligned}&\Big(w_{\varepsilon,1}-\Delta w_{\varepsilon,1}+\varepsilon\sum_{k=1}^m\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial x_k}\Big)w_{\varepsilon,1}=\lambda w_{\varepsilon,1}+\widetilde{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1),\\ &\Big(w_{\varepsilon,2}-\Delta w_{\varepsilon,2}+\varepsilon\sum_{k=1}^m\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial x_k}\Big)w_{\varepsilon,2}=\lambda w_{\varepsilon,2}+\widetilde{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2);\end{aligned} \tag{3.16}$$

на внешних границах:

$$\begin{aligned}&\partial_{11}w_{\varepsilon,1}=\lambda\gamma_{11}w_{\varepsilon,1}+\varepsilon\sigma_1\gamma_{11}w_{\varepsilon,1}=:\widetilde{\psi}_1 \quad (\text{на } \Gamma_{11}),\\ &\partial_{12}w_{\varepsilon,2}=\lambda^{-1}\gamma_{22}w_{\varepsilon,2}+\varepsilon\sigma_2\gamma_{22}w_{\varepsilon,2}=:\widetilde{\psi}_2 \quad (\text{на } \Gamma_{22});\end{aligned} \tag{3.17}$$

на границах стыка:

$$\begin{aligned}&\gamma_{21}w_{\varepsilon,1}-\gamma_{12}w_{\varepsilon,2}=0,\\ &\partial_{21}w_{\varepsilon,1}+\partial_{12}w_{\varepsilon,2}=-\frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{21}p_1w_\varepsilon)+\varepsilon(\sigma_{21}\gamma_{21}p_1w_\varepsilon-\sigma_{21}\gamma_{12}p_2w_\varepsilon):=\widetilde{\psi}_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{21}),\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$w_\varepsilon(0,x)=w^\circ_{\varepsilon,i}(x), \quad x\in\Omega_i,\ i=\overline{1,2}. \tag{3.19}$$

Снова считаем, что $w_\varepsilon \in H^1_\Gamma(\Omega)$ есть сумма решений пяти вспомогательных задач. Тогда для искомой функции $w_\varepsilon = w_\varepsilon(t,x)$ приходим к уравнению

$$\begin{aligned}&w_\varepsilon=A^{-1}(\lambda w_\varepsilon+f)+V_{21}(\psi_{21}+\frac{d}{dt}(\gamma_{21}p_1w_\varepsilon)-\varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}p_1w_\varepsilon-\sigma_{21}\gamma_{12}p_2w_\varepsilon))+\\ &+V_{11}(\psi_1+\lambda\gamma_{11}p_1w_\varepsilon+\varepsilon\sigma_1\gamma_{11}p_1w_\varepsilon)+V_{22}(\psi_2+\lambda^{-1}\gamma_{22}p_2w_\varepsilon+\varepsilon\sigma_2\gamma_{22}p_2w_\varepsilon)+(I+\varepsilon S)w_\varepsilon\end{aligned} \tag{3.20}$$

и соответствующей задаче Коши

$$\begin{aligned}&V_{21}\gamma_{21}p_1\frac{dw_\varepsilon}{dt}+\Big[(I+\varepsilon S)-\lambda A^{-1}+\varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}p_1-\sigma_{21}\gamma_{12}p_2)-\\ &-\lambda V_{11}\gamma_{11}p_1+\varepsilon\sigma_1\gamma_{11}p_1+V_{22}(\lambda^{-1}\gamma_{22}p_2+\varepsilon\sigma_2\gamma_{22}p_2)\Big]w_\varepsilon=\\ &=A^{-1}f+V_{21}\psi_{21}+V_{11}\psi_1+V_{22}\psi_2, \quad w_\varepsilon(0)=w^\circ_\varepsilon.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Кратко (3.21) можно записать в виде

$$\begin{aligned}&V_{21}\gamma_{21}p_1\frac{dw_\varepsilon}{dt}+\Big[(I+\varepsilon\widehat{S})-\lambda(A^{-1}+V_{11}\gamma_{11}p_1)-\lambda^{-1}V_{22}\gamma_{22}p_2\Big]w_\varepsilon=\\ &=A^{-1}f+V_{21}\psi_{21}+V_{11}\psi_1+V_{22}\psi_2, \quad w_\varepsilon(0)=w^\circ_\varepsilon.\end{aligned} \tag{3.22}$$

В силу того, что $A^{1/2}H^1(\Omega) = L_2(\Omega)$, в (3.22) можно сделать замену $w_\varepsilon = A^{-1/2}\eta_\varepsilon$, $\eta_\varepsilon \in L_2(\Omega)$. Тогда получаем следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned}&B_{21}p_1\frac{d\eta_\varepsilon}{dt} + \Big[(I+\varepsilon\widetilde{S}) - \lambda(A^{-1}+B_1p_1) - \lambda^{-1}B_2p_2\Big]\eta_\varepsilon = \\ &= A^{-1/2}f + A^{1/2}V_{21}\psi_{21} + A^{1/2}V_{11}\psi_1 + A^{1/2}V_{22}\psi_2 =: f_1(t), \\ &\eta_\varepsilon(0) = \eta_\varepsilon^\circ = A^{1/2}w_\varepsilon^0,\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$B_{21} := (A^{1/2}V_{21})(\gamma_{21}p_1A^{-1/2}) = (\gamma_{21}p_1A^{-1/2})^*(\gamma_{21}p_1A^{-1/2}). \tag{3.24}$$

Особенностью этой задачи является тот факт, что оператор B_{21} лишь неотрицательный и имеет бесконечномерное ядро. С учетом этого рассмотрим проблему (3.23) в абстрактной форме. Полагаем, что исследуется задача Коши в произвольном гильбертовом пространстве H

$$B\frac{d\eta_\varepsilon}{dt} + ((I+\varepsilon\widetilde{S}) - \Phi)\eta_\varepsilon = f_1(t), \quad \eta_\varepsilon(0) = \eta_\varepsilon^0, \tag{3.25}$$

где B является неотрицательным компактным оператором,

$$\ker B \neq \{0\},\ \ker B =: H_0,\ \Phi \in \mathfrak{S}_\infty(H). \tag{3.26}$$

Используем разложение $H = H_0 \oplus H_1$, $H_1 = \overline{R(B)}$. Преобразуем задачу (3.25) к задаче Коши для дифференциального уравнения в подпространстве H_1. Для этого представим элемент $\eta_\varepsilon = \eta_{\varepsilon,0} + \eta_{\varepsilon,1}$, $\eta_{\varepsilon,0} = P_0\eta_\varepsilon = P_0\eta_{\varepsilon,0} \in H_0$, $\eta_{\varepsilon,1} = P_1\eta_\varepsilon = P_1\eta_{\varepsilon,1} \in H_1$, где P_0, P_1 — ортопроекторы на H_0 и H_1, соответственно.

Будем предполагать, что выполнены условия

$$\ker((I+\varepsilon\widetilde{S}) - \Phi) = \{0\}, \quad \ker((I_0+\varepsilon P_0\widetilde{S}P_0) - P_0\Phi P_0) = \{0\}. \tag{3.27}$$

Тогда в силу второго условия оператор $((I_0+\varepsilon P_0\widetilde{S}P_0) - P_0\Phi P_0)$ обратим. Отсюда получаем задачу Коши

$$\widehat{B}_1\frac{d\eta_\varepsilon}{dt} + ((I_1+\varepsilon P_1\widetilde{S}P_1) - \Phi_1)\eta_{\varepsilon,1} = f_2(t), \quad \eta_{\varepsilon,1}(0) = \eta_{\varepsilon,1}^0 = P_1\eta_\varepsilon^0, \tag{3.28}$$

$$\widehat{B}_1 := P_1BP_1, \quad \Phi_1 = P_1\Phi P_1 + (P_1\Phi P_0)((I_0+\varepsilon P_0\widetilde{S}P_0) - P_0\Phi P_0)^{-1}(P_0\Phi P_1),$$

$$f_2 := P_1f + (P_1\Phi P_0)((I_0+\varepsilon P_0\widetilde{S}P_0) - P_0\Phi P_0)^{-1}P_0f,$$

$$\eta_{\varepsilon,0} = ((I_0+\varepsilon P_0\widetilde{S}P_0) - P_0\Phi P_0)^{-1}((P_0\Phi P_1)\eta_{\varepsilon,1} + P_0f).$$

Здесь оператор $\widehat{B}_1 : H_1 \to H_1$ — положительный и компактный, $\Phi_1 \in \mathfrak{S}_\infty(H_1)$.

Снова осуществляя замену в (3.28)

$$\widehat{B}_1\eta_{\varepsilon,1} = \xi_{\varepsilon,1}, \tag{3.29}$$

получаем задачу Коши

$$\frac{d\xi_{\varepsilon,1}}{dt} + ((I_1+\varepsilon\widetilde{S}_1) - \Phi_1)\widehat{B}_1^{-1}\xi_{\varepsilon,1} = f_2(t), \quad \xi_{\varepsilon,1}(0) = \widehat{B}_1\eta_{\varepsilon,1}(0) = B_1P_1\eta_\varepsilon^0. \tag{3.30}$$

Лемма 3.3. *Пусть в задаче* (3.25), (3.26) *выполнены условия* (3.27)*, а также условия*

$$f_1(t) \in C^\beta([0,T];H), \quad \eta_\varepsilon^0 \in H,\ 0 < \beta \leqslant 1. \tag{3.31}$$

Тогда эта задача имеет единственное решение $\eta_\varepsilon(t) \in C^1([0,T];H)$, *для которого все слагаемые в уравнении* (3.25) *являются непрерывными функциями* t *со значениями в* H, *и выполнены начальные условия* (3.25).

Доказательство. Если выполнены условия (3.31), то в задаче (3.30) $\widetilde{f}_2(t) \in C^\beta([0,T];H_1)$, $\xi_{\varepsilon,1}(0) \in \mathcal{D}((\widehat{B}_1)^{-1})$. Далее, уравнение (3.30) является абстрактным параболическим, так как $\widehat{B}_1^{-1}$ — положительно определенный самосопряженный неограниченный оператор, а $\Phi_1 \in \mathfrak{S}_\infty(H_1)$. Следовательно, задача (3.29) имеет единственное сильное решение на промежутке $[0,T]$, т. е. $\xi_{\varepsilon,1}(t) \in C^1([0,T];H_1) \cap C([0,T];\mathcal{D}((\widehat{B}_1)^{-1}))$. Отсюда следует, что существует единственное решение $\eta_\varepsilon(t)$ задачи (3.28), для которого все слагаемые в уравнении — элементы из $C([0,T];H_1)$. Так как $(I_1+\varepsilon\widetilde{S}_1)-\Phi_1$ обратим в силу условий (3.27), получаем, что $\eta_{\varepsilon,1}(t) \in C([0,T];H_1)$. Возвращаясь от (3.28) к исходной задаче (3.25), получаем утверждение леммы. □

Теорема 3.2. *Пусть в задаче* (3.16)–(3.18) *выполнены условия*

$$f_1(t) \in C^{\beta}([0,T];(H^1_\Gamma(\Omega))^*), \quad \psi_k \in C^{\beta}([0,T];H^{-1/2}(\Gamma_{jk})), \quad 0<\beta\leqslant 1,\ j,k=1,2, \\ w_\varepsilon(0)=w^0_\varepsilon \in H^1_\Gamma(\Omega), \tag{3.32}$$

$$\lambda \notin \sigma((I+\varepsilon\widetilde{S}_1)-\lambda(A^{-1}+B_1p_1)-\lambda^{-1}B_2p_2)\cap\sigma((I_0+\varepsilon P_0\widetilde{S}_1P_0)- \\ -\lambda P_0(A^{-1}+B_1p_1)P_0-\lambda^{-1}P_0B_2p_2P_0), \quad P_0H:=\ker B_2. \tag{3.33}$$

Тогда эта задача имеет единственное решение $w_\varepsilon \in C([0,T];H^1_\Gamma(\Omega))$, *для которого каждое слагаемое является элементом из* $C([0,T];(H^1_\Gamma(\Omega))^*)$, *а в граничных условиях — элементами из* $C([0,T];H^{-1/2}(\Gamma_{jk}))$, $j,k=\overline{1,2}$.

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3.1 с учетом утверждения леммы 3.1.

При выполнении условий (3.32), (3.33) из леммы 3.1 следует, что задача (3.28) имеет единственное решение $\eta_{\varepsilon,1}(t)\in C([0,T];H_1)$, $H_1:=L_2(\Omega)\ominus\ker B_{21}$. Возвращаясь от (3.28) к (3.20), (3.21) и рассуждая, как при доказательстве теоремы 3.1, получаем утверждения исходной теоремы. □

Следствие 3.1. *Выясним теперь, как выглядят в явной форме условия* (3.33). *Очевидно, это те собственные значения, для которых два приведенных в* (3.33) *пучка Крейна имеют нетривиальные решения. Значит, нужно рассматривать две спектральные задачи*

$$((I+\varepsilon\widetilde{S}_1)-\lambda(A^{-1}+B_1p_1)-\lambda^{-1}B_2p_2)\xi_\varepsilon=0; \\ (I_0+\varepsilon P_0\widetilde{S}_1P_0)-\lambda P_0(A^{-1}+B_1p_1)P_0-\lambda^{-1}P_0B_2p_2P_0)\xi_{\varepsilon,0}=0. \tag{3.34}$$

Тогда обычным образом можно показать (*см.* [10]), *что первый из этих пучков имеет дискретный спектр с двумя предельными точками* $\lambda=0$, $\lambda=\infty$, *причем ветви имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_k^{(\infty)}=\lambda_k^{-1}(A^{-1}+B_1p_1)[1+o(1)]=\lambda_k^{-1}(B_1p_1)[1+o(1)] \quad (k\to\infty), \\ \lambda_k^{(0)}=\lambda_k(B_2p_2)[1+o(1)] \quad (k\to\infty). \tag{3.35}$$

Аналогичным образом рассматривая второе из уравнений (3.34) *в пространстве* H_0, *приходим к выводу, что это уравнение также имеет дискретный спектр, состоящий из двух ветвей собственных значений с предельными точками* $\lambda_{k,0}^{(\infty)}=\infty$, $\lambda_{k,0}^{(0)}=0$.

3.2. Возмущенные начально-краевые задачи при втором условии сопряжения.

3.2.1. Возмущенная начально-краевая задача при спектральном параметре λ. Рассмотрим теперь задачу (3.1)-(3.2) при втором условии сопряжения (3.3) с начальными данными (3.5). Имеем:

$$\frac{dw_\varepsilon}{dt}=A^{-1}(f-\frac{d^2w_\varepsilon}{dt^2})+V_{21}(\psi_{21}-\mu(\gamma_{21}p_1\frac{dw_\varepsilon}{dt}-\gamma_{12}p_2\frac{dw_\varepsilon}{dt}))+ \\ +V_{11}(\psi_1-\gamma_{11}p_1\frac{d^2w_\varepsilon}{dt^2})+V_{22}(\psi_2-\gamma_{22}p_2w_\varepsilon)+(I+\varepsilon S)\frac{dw_\varepsilon}{dt}, \tag{3.36}$$

где $w_\varepsilon=(w_{\varepsilon,1};w_{\varepsilon,2})$, $f=(f_1;f_2)$, A — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_1)\oplus H^1(\Omega_2);L_2(\Omega))$, $A=\mathrm{diag}\,(A_1;A_2)$, A_1 — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_1);L_2(\Omega_1))$, A_2 — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_2);L_2(\Omega_2))$, $H^1(\Omega)=H^1(\Omega_1)\oplus H^1(\Omega_2)$.

Далее, проводя те же преобразования, что и в пункте 3.1.2, получаем задачу Коши для интегродифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{d\eta_\varepsilon}{dt}+((I+\varepsilon\widetilde{S})-\mu(B_{21}p_1-B_{12}p_2))(A^{-1}+B_1p_1)^{-1}\varphi_\varepsilon+\int_0^t B_2p_2(A^{-1}+B_1p_1)^{-1}\varphi_\varepsilon(s)ds= \\ =-B_2p_2A^{1/2}w^0_\varepsilon+A^{-1/2}f+A^{1/2}V_{21}\psi_{21}+A^{1/2}V_{22}\psi_2+A^{1/2}V_{11}\psi_1, \\ \varphi_\varepsilon(0)=(A^{-1}+B_1p_1)A^{1/2}w^1_\varepsilon. \tag{3.37}$$

Для нее также можно доказать теорему о единственности слабого решения, аналогичную теореме 3.1, с учетом замены условия (3.14) на $\mu\notin\sigma((I+\varepsilon\widetilde{S})-\mu(B_{21}p_1-B_{12}p_2)$.

3.2.2. Возмущенная начально-краевая задача при спектральном параметре μ. Рассмотрим, наконец, начально-краевую задачу при втором условии сопряжения, где μ — спектральный, а λ — фиксированный параметр:

$$\begin{aligned} &\left(w_{\varepsilon,1} - \Delta w_{\varepsilon,1} + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial x_k}\right) w_{\varepsilon,1} = \lambda w_{\varepsilon,1} + \widetilde{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \\ &\left(w_{\varepsilon,2} - \Delta w_{\varepsilon,2} + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial x_k}\right) w_{\varepsilon,2} = \lambda w_{\varepsilon,2} + \widetilde{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2); \end{aligned} \tag{3.38}$$

на внешних границах:

$$\begin{aligned} &\partial_{11} w_{\varepsilon,1} = \lambda \gamma_{11} w_{\varepsilon,1} + \varepsilon \sigma_1 \gamma_{11} w_{\varepsilon,1} + \widetilde{\psi}_1 \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \\ &\partial_{12} w_{\varepsilon,2} = \lambda^{-1} \gamma_{22} w_{\varepsilon,2} + \varepsilon \sigma_2 \gamma_{22} w_{\varepsilon,2} + \widetilde{\psi}_2 \quad (\text{на } \Gamma_{22}); \end{aligned} \tag{3.39}$$

на границах стыка:

$$\partial_{21} w_{\varepsilon,1} + \partial_{12} w_{\varepsilon,2} = -\frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{21} p_1 w_\varepsilon - \gamma_{12} p_2 w_\varepsilon) + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21} p_1 w_\varepsilon - \sigma_{21}\gamma_{12} p_2 w_\varepsilon) := \widetilde{\psi}_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{12}); \tag{3.40}$$

$$w_\varepsilon(0,x) = w^\circ_{\varepsilon,i}(x), \quad x \in \Omega_i, \ i = \overline{1,2}. \tag{3.41}$$

Здесь снова получаем аналогичное уравнение, как и в случае с первым условием сопряжения (см. пункт 3.1.2):

$$\begin{aligned} w_\varepsilon = A^{-1}(\lambda w_\varepsilon + f) + V_{21}(\psi_{21} + \frac{d}{dt}(\gamma_{21} p_1 - \gamma_{12} p_2) w_\varepsilon) + \\ + V_{11}(\psi_1 + \lambda \gamma_{11} p_1 w_\varepsilon) + V_{22}(\psi_2 + \lambda^{-1} \gamma_{22} p_2 w_\varepsilon) + (I + \varepsilon S) w_\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Далее, проводя те же преобразования, замены и проектируя на подпространства H_0, H_1, в итоге приходим к тем же выводам, что и в пункте 3.1.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. — М.: МЦМНО, 2013.
2. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и ее приложения: специальный курс. — Симферополь: ФЛП «Бондаренко О. А.», 2011.
3. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д., Старков П. А.* Многокомпонентнные задачи сопряжения и вспомогательные абстрактные краевые задачи// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *34*. — С. 5–44.
4. *Вулис И. Л., Соломяк М. З.* Спектральная асимптотика вырождающейся задачи Стеклова// Вестн. ЛГУ. — 1973. — *19*. — С. 148–150.
5. *Горбачук В. И.* Диссипативные граничные задачи для эллиптических дифференциальных уравнений// В сб.: «Функциональные и численные методы математической физики». — Киев: Наукова думка, 1998. — С. 60–63.
6. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
7. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и задача Стокса// Изв. вузов. Сев.-Кавказ рег. Естеств. науки. Мат. и мех. сплош. среды. — 2004. — С. 137–141.
8. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложениях к задаче Стокса// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2004. — *2*. — С. 52–80.
9. *Копачевский Н. Д.* Операторные методы математической физики: специальный курс лекций. — Симферополь: ООО «ФОРМА», 2008.
10. *Копачевский Н. Д.* Спектральная теория операторных пучков: специальный курс лекций. — Симферополь: ООО «ФОРМА», 2009.
11. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и ее приложениях// Спектр. и эволюц. задачи. — 2011. — *21*, № 1. — С. 2–39.
12. *Копачевский Н. Д.* Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве. — Симферополь: ФЛП «Бондаренко О. А.», 2012.
13. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и полуторалинейных форм// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *57*. — С. 71–107.
14. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения. — Симферополь: ООО «ФОРМА», 2016.

15. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г.* Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи// Укр. мат. вестн. — 2004. — *1*, № 1. — С. 69–97.
16. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
17. *Копачевский Н. Д., Радомирская К. А.* Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения и их приложения// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *61*. — С. 67–102.
18. *Копачевский Н. Д., Якубова А. Р.* О краевых, спектральных и начально-краевых задачах, порожденных полуторалинейными формами// Тр. XXIV Межд. конф. «Математика. Экономика. Образование»; IX Межд. симп. «Ряды Фурье и их прилож.»; Межд. конф. по стох. мет. — Ростов-на-Дону: Фонд науки и образования, 2016. — С. 57–63.
19. *Копачевский Н. Д., Якубова А. Р.* О некоторых спектральных и начально-краевых задачах, порожденных полуторалинейными формами// Сб. тезисов межд. конф. «XXVII Крымская осенняя матем. школа-симпоз. по спектральным и эволюционным задачам», Батилиман (Ласпи), Россия, 17–29 сент. 2016. — Симферополь: ООО «ФОРМА», 2016. — С. 84–85.
20. *Копачевский Н. Д., Якубова А. Р.* О некоторых задачах, порожденных полуторалинейной формой// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2017. — *63*, № 2. — С. 278–315.
21. *Крейн С. Г.* О колебаниях вязкой жидкости в сосуде// Докл. АН СССР. — 1964. — *159*, № 2. — С. 262–265.
22. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
23. *Крейн С. Г., Лаптев Г. И.* К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде// Функц. анализ и его прилож. — 1968. — *1*, № 2. — С. 40–50.
24. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.
25. *Лионс Ж.-Л., Манженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
26. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.
27. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Теоремы о сравнении спектров линейных операторов и спектральные асимптотики// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1982. — *45*. — С. 133–1381.
28. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Теоремы о сравнении спектров линейных операторов и спектральные асимптотики для пучков Келдыша// Мат. сб. — 1984. — *123*, № 3. — С. 391–406.
29. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* О базисности некоторой части собственных и присоединенных векторов самосопряженного операторного пучка// Мат. сб. — 1987. — *133*, № 3. — С. 293–313.
30. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. — М.—Л.: Гостехиздат, 1952.
31. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970.
32. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1977.
33. *Понтрягин Л. С.* Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1944. — *8*, № 6. — С. 243–280.
34. *Радомирская К. А.* Спектральные и начально-краевые задачи сопряжения// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2017. — *63*, № 2. — С. 316–339.
35. *Старков П. А.* Операторный подход к задачам сопряжения// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Мат. Мех. Информ. Киберн. — 2002. — *15*, № 1. — С. 58–62.
36. *Старков П. А.* Случай общего положения для операторного пучка, возникающего при исследовании задач сопряжения// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Мат. Мех. Информ. Киберн. — 2002. — *15*, № 2. — С. 82–88.
37. *Agranovich M. S.* Remarks on potential and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary// Russ. J. Math. Phys. — 2008. — *15*, № 2. — С. 146–155.
38. *Agranovich M. S., Katsenelenbaum B. Z., Sivov A. N., Voitovich N. N.* Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory. — Berlin–Toronto: Wiley-VCH, 1999.
39. *Chueshov I., Eller M., Lasieska I.* Finite dimensionally of the attractor for a semilinear wave equation with nonlinear boundary dissipation// Commun. Part. Differ. Equ. — 2004. — *29*, № 11-12. — С. 1847–1876.
40. *Gagliardo E.* Caratterizazioni delle trace sullo frontiera relative ad alcune classi de funzioni n variabili// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1957. — *27*. — С. 284–305.
41. *McLean W.* Strongly elliptic systems and boundary integral equations. — Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

А. Р. Якубова
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия
E-mail: alika.yakubova.1993@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-335-371 UDC 517.984.5

On Spectral and Evolutional Problems Generated by a Sesquilinear Form

© 2020 **A. R. Yakubova**

Abstract. On the base of boundary-value, spectral and initial-boundary value problems studied earlier for the case of single domain, we consider corresponding problems generated by sesquilinear form for two domains. Arising operator pencils with corresponding operator coefficients acting in a Hilbert space and depending on two parameters are studied in detail. In the perturbed and unperturbed cases, we consider two situations when one of the parameters is spectral and the other is fixed. In this paper, we use the superposition principle that allow us to present the solution of the original problem as a sum of solutions of auxiliary boundary-value problems containing inhomogeneity either in the equation or in one of the boundary conditions. The necessary and sufficient conditions for the correct solvability of boundary-value problems on given time interval are obtained. The theorems on properties of the spectrum and on the completeness and basicity of the system of root elements are proved.

REFERENCES

1. M. S. Agranovich, *Sobolevskie prostranstva, ikh obobshcheniya i ellipticheskie zadachi v oblastyakh s gladkoy i lipshitsevoy granitsey* [Sobolev Spaces, Their Generalizations, and Elliptic Problems is Domains with Smooth and Lipschitz Boundary], MTsMNO, Moscow, 2013 (in Russian).
2. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevsky, *Abstraktnaya formula Grina i ee prilozheniya: spetsial'nyy kurs* [Abstract Green Formula and Its Applications: Special Course], FLP O. A. Bondarenko, Simferopol', 2011 (in Russian).
3. V. I. Voytitsky, N. D. Kopachevsky, and P. A. Starkov, "Mnogokomponentnnye zadachi sopryazheniya i vspomogatel'nye abstraktnye kraevye zadachi" [Multicomponent conjugation problems and auxiliary abstract boundary-value problems], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **34**, 5–44 (in Russian).
4. I. L. Vulis and M. Z. Solomyak, "Spektral'naya asimptotika vyrozhdayushcheysya zadachi Steklova" [Spectral asymptotic of degenerating Steklov problem], *Vestn. LGU* [Bull. LGU], 1973, **19**, 148–150 (in Russian).
5. V. I. Gorbachuk, "Dissipativnye granichnye zadachi dlya ellipticheskikh differentsial'nykh uravneniy" [Dissipative boundary-value problems for elliptic differential equation], In: *Funktsional'nye i chislennye metody matematicheskoy fiziki* [Functional and Numerical Methods of Mathematical Physics], Naukova dumka, Kiev, 1998, pp. 60–63 (in Russian).
6. I. Ts. Gokhberg and M. G. Kreyn, *Vvedenie v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov v gil'bertovom prostranstve* [Introduction to the Theory of Linear Non-self-adjoint Operators in Hilbert Space], Nauka, Moscow, 1965 (in Russian).
7. N. D. Kopachevsky, "Abstraktnaya formula Grina i zadacha Stoksa" [Abstract Green formula and the Stocks Problem], *Izv. vuzov. Sev.-Kavkaz reg. Estestv. nauki. Mat. i mekh. splosh. sredy* [Bull. Higher Edu. Inst. North-Caucasian reg. Nat. Sci. Math. Mech. Contin. Media], 2004, 137–141 (in Russian).
8. N. D. Kopachevsky, "Ob abstraktnoy formule Grina dlya troyki gil'bertovykh prostranstv i ee prilozheniyakh k zadache Stoksa" [On abstract Green formula for a triple of Hilbert spaces and its applications to the Stokes problem], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2004, **2**, 52–80 (in Russian).
9. N. D. Kopachevsky, *Operatornye metody matematicheskoy fiziki: spetsial'nyy kurs lektsiy* [Operator Methods of Mathematical Physics: Special Course of Lectures], OOO «FORMA», Simferopol', 2008 (in Russian).
10. N. D. Kopachevsky, *Spektral'naya teoriya operatornykh puchkov: spetsial'nyy kurs lektsiy* [Spectral Theory of Operator Pencils: Special Course of Lectures], OOO «FORMA», Simferopol', 2009 (in Russian).

11. N. D. Kopachevsky, “Ob abstraktnoy formule Grina dlya smeshannykh kraevykh zadach i ee prilozheniyakh” [On abstract Green formula for mixed boundary-value problems and its applications], *Spektr. i evolyuts. zadachi* [Spectral Evolution Probl.], 2011, **21**, No. 1, 2–39 (in Russian).
12. N. D. Kopachevsky, *Integrodifferentsial’nye uravneniya Vol’terra v gil’bertovom prostranstve* [Integrodifferential Equations in Hilbert Space], FLP O. A. Bondarenko, Simferopol’, 2012 (in Russian).
13. N. D. Kopachevsky, “Ob abstraktnoy formule Grina dlya troyki gil’bertovykh prostranstv i polutoralineynykh form” [On abstract Green formula for triples of Hilbert spaces and sesquilinear forms], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **57**, 71–107 (in Russian).
14. N. D. Kopachevsky, *Abstraktnaya formula Grina i nekotorye ee prilozheniya* [Abstract Green Formula and Some Its Applications], OOO «FORMA», Simferopol’, 2016 (in Russian).
15. N. D. Kopachevsky and S. G. Kreyn, “Abstraktnaya formula Grina dlya troyki gil’bertovykh prostranstv, abstraktnye kraevye i spektral’nye zadachi” [Abstract Green formula for a triple of Hilbert spaces and abstract boundary-value and spectral problems], *Ukr. mat. vestn.* [Ukr. Math. Bull.], 2004, **1**, No. 1, 69–97 (in Russian).
16. N. D. Kopachevsky, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: Evolyutsionnye i spektral’nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolutional and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
17. N. D. Kopachevsky and K. A. Radomirskaya, “Abstraktnye smeshannye kraevye i spektral’nye zadachi sopryazheniya i ikh prilozheniya” [Abstract mixed boundary-value and spectral conjugation problems and their applications], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **61**, 67–102 (in Russian).
18. N. D. Kopachevsky and A. R. Yakubova, “O kraevykh, spektral’nykh i nachal’no-kraevykh zadachakh, porozhdennykh polutoralineynymi formami” [On boundary-value, spectral, and initial-boundary problems generated by sesquilinear forms], Tr. XXIV Mezhd. konf. *Matematika. Ekonomika. Obrazovanie*; IX Mezhd. simp. *Ryady Fur’e i ikh prilozh.*; Mezhd. konf. po stokh. met. [Proc. XXIV Int. Conf. Math. Economics. Education; IX Int. Symp. Fourier Ser. Appl.; Int. Conf. Stoch. Methods], Fond nauki i obrazovaniya, Rostov-na-Donu, 2016, pp. 57–63 (in Russian).
19. N. D. Kopachevsky and A. R. Yakubova, “O nekotorykh spektral’nykh i nachal’no-kraevykh zadachakh, porozhdennykh polutoralineynymi formami” [On some spectral and initial-boundary problems generated by sesquilinear forms], Sb. tezisov mezhd. konf. *XXVII Krymskaya osennyaya matem. shkola-simpoz. po spektral’nym i evolyutsionnym zadacham*, Batiliman (Laspi), Rossiya, 17–29 sent. 2016 [Abstr. Int. Conf. XXVII Crimean Autumnal Math. School-Symp. Spectral Evol. Probl., Batiliman (Laspi), Russia, 17–29 Sent. 2016], OOO «FORMA», Simferopol’, 2016, pp. 84–85 (in Russian).
20. N. D. Kopachevsky and A. R. Yakubova, “O nekotorykh zadachakh, porozhdennykh polutoralineynoy formoy” [On some problems generated by a sesquilinear form], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2017, **63**, No. 2, 278–315 (in Russian).
21. S. G. Kreyn, “O kolebaniyakh vyazkoy zhidkosti v sosude” [On oscillations of a viscous fluid in a vessel], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1964, **159**, No. 2, 262–265 (in Russian).
22. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial’nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
23. S. G. Kreyn and G. I. Laptev, “K zadache o dvizhenii vyazkoy zhidkosti v otkrytom sosude” [To the problem on motion of a viscous fluid in an open vessel], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1968, **1**, No. 2, 40–50 (in Russian).
24. O. A. Ladyzhenskaya, *Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti* [Mathematical Problems in Dynamics of a Viscous Incompressible Fluid], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
25. J. L. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
26. A. S. Markus, *Vvedenie v spektral’nuyu teoriyu polinomial’nykh operatornykh puchkov* [Introduction to Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils], Shtiintsa, Kishinev, 1986 (in Russian).
27. A. S. Markus and V. I. Matsaev, “Teoremy o sravnenii spektrov lineynykh operatorov i spektral’nye asimptotiki” [Comparability theorems for spectra of linear operators and spectral asymptotics], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1982, **45**, 133–1381 (in Russian).
28. A. S. Markus and V. I. Matsaev, “Teoremy o sravnenii spektrov lineynykh operatorov i spektral’nye asimptotiki dlya puchkov Keldysha” [Comparability theorems for spectra of linear operators and spectral asymptotics for Keldysh pencils], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1984, **123**, No. 3, 391–406 (in Russian).
29. A. S. Markus and V. I. Matsaev, “O bazisnosti nekotoroy chasti sobstvennykh i prisoedinennykh vektorov samosopryazhennogo operatornogo puchka” [On basis property of some part of eigenvectors and adjoined vectors of a self-adjoint operator pencil], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1987, **133**, No. 3, 293–313 (in Russian).

30. S. G. Mikhlin, *Problema minimuma kvadratichnogo funktsionala* [The Problem of Minimum of a Quadratic Functional], Gostekhizdat, Moscow–Leningrad, 1952 (in Russian).
31. S. G. Mikhlin, *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike* [Variational Methods in Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
32. J.-P. Aubin, *Priblizhennoe reshenie ellipticheskikh kraevykh zadach* [Approximation of Elliptic Boundary-Value Problems], Mir, Moscow, 1977 (Russian translation).
33. L. S. Pontryagin, "Ermitovy operatory v prostranstve s indefinitnoy metrikoy" [Hermitian operators in a space with indefinite metric], *Izv. AN SSSR. Ser. mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1944, **8**, No. 6, 243–280 (in Russian).
34. K. A. Radomirskaya, "Spektral'nye i nachal'no-kraevye zadachi sopryazheniya" [Spectral and initial-boundary conjugation problems], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2017, **63**, No. 2, 316–339 (in Russian).
35. P. A. Starkov, "Operatornyy podkhod k zadacham sopryazheniya" [Operator approach to conjugation problems], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. Mat. Mekh. Inform. Kibern.* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ. Ser. Math. Mech. Inform. Cybern.], 2002, **15**, No. 1, 58–62 (in Russian).
36. P. A. Starkov, "Sluchay obshchego polozheniya dlya operatornogo puchka, voznikayushchego pri issledovanii zadach sopryazheniya" [Case of general position for operator pencil arising in research of conjugation problems], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. Mat. Mekh. Inform. Kibern.* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ. Ser. Math. Mech. Inform. Cybern.], 2002, **15**, No. 2, 82–88 (in Russian).
37. M. S. Agranovich, "Remarks on potential and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary," *Russ. J. Math. Phys.*, 2008, **15**, No. 2, 146–155.
38. M. S. Agranovich, B. Z. Katsenelenbaum, A. N. Sivov, and N. N. Voitovich, *Generalized Method of Eigen-oscillations in Diffraction Theory*, Wiley-VCH, Berlin–Toronto, 1999.
39. I. Chueshov, M. Eller, and I. Lasieska, "Finite dimensionally of the attractor for a semilinear wave equation with nonlinear boundary dissipation," *Commun. Part. Differ. Equ.*, 2004, **29**, No. 11-12, 1847–1876.
40. E. Gagliardo, "Caratterizazioni delle trace sullo frontiera relative ad alcune classi de funzioni n variabili," *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1957, **27**, 284–305.
41. W. McLean, *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

A. R. Yakubova
V. I. Vernadskii Crimean Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: alika.yakubova.1993@mail.ru