РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 63, № 4, 2017

Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4
http://journals.rudn.ru/cmfd

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print)
4 выпуска в год
http://journals.rudn.ru/cmfd
Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.
Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.
Индексируется в международных базах данных научных публикаций *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.
Полный текст журнала размещен в базах данных компании *EBSCO Publishing* на платформе *EBSCOhost*.
Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты. Объем статьи, занимающий целый том, должен составлять 140–190 страниц в стиле нашего журнала.

Правила оформления статей, архив публикаций и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала на Общероссийском математическом портале: http://www.mathnet.ru/cmfd.

Редактор: *Е. М. Варфоломеев*
Компьютерная верстка: *Е. М. Варфоломеев*

Адрес редакции:
115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: journal.cmfd@gmail.com

Подписано в печать 27.11.2017. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.
Усл. печ. л. 19,53. Тираж 150 экз. Заказ 1870.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов» (РУДН)
117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН
115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 952-04-41; e-mail: ipk@rudn.university

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 63, No. 4, 2017
Differential and Functional Differential Equations

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4
http://journals.rudn.ru/cmfd

Founded in 2003
Founder: PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS
Published by the Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print)
4 issues per year
http://journals.rudn.ru/cmfd
Reviewed in *MathSciNet* and *Zentralblatt Math*.
The full texts can be found in the *EBSCOhost* databases by *EBSCO Publishing*.
Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results. Occupying the whole volume, an article should make up 140–190 pages in the format of the journal.

Guidelines for authors, archive of issues, and other information can be found at the journal's website at *All-Russian Mathematical Portal*: http://www.mathnet.ru/eng/cmfd.

Editor: ***E. M. Varfolomeev***
Computer design: ***E. M. Varfolomeev***
Address of the Editorial Office:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: journal.cmfd@gmail.com
Printing run 150 copies.
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia
Printed at RUDN Publishing House:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: ipk@rudn.university

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 4 (2017). С. 543–556

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-543-556 УДК 517.929

ОТОБРАЖЕНИЯ, НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ПО МИХАЛУ—БАСТИАНИ, НО НЕ ПО ФРЕШЕ

© 2017 г. **Х.-О. ВАЛЬТЕР**

Аннотация. Строятся примеры нелинейных отображений в функциональных пространствах, которые непрерывно дифференцируемы в смысле Михала—Бастиани, но не в смысле Фреше. Интерес к таким примерам возникает при изучении дифференциальных уравнений с запаздыванием, в которых запаздывание переменно и не обязательно ограничено.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Дифференциальное исчисление на бесконечномерных пространствах может быть основано на различных понятиях непрерывной дифференцируемости. Хорошо известны производные Фреше отображений между банаховыми пространствами, есть понятие непрерывной дифференцируемости в смысле Михала (см. [10]) и Бастиани (см. [1]), широко используемое для отображений между пространствами Фреше (см., например, [3, 4, 7]), есть и много других определений [1, 11]. Если f — непрерывное отображение из открытого подмножества U топологического векторного пространства V в топологическое векторное пространство W, т. е. $f : V \supset U \to W$, то его непрерывная дифференцируемость по Михалу—Бастиани (для краткости будем называть ее C^1_{MB}-*гладкостью*) означает, что все производные по направлению

$$Df(u)v = \lim_{0\neq t\to 0} \frac{1}{t}(f(u+tv) - f(u)), \quad u \in U, \quad v \in V,$$

существуют и отображение

$$U \times V \ni (u, v) \mapsto Df(u)v \in W$$

непрерывно. Под непрерывной дифференцируемостью f по Фреше (для краткости будем называть ее C^1_F-*гладкостью*) будем понимать, что все производные по направлению существуют (как и ранее), каждая производная

$$Df(u) : V \ni v \mapsto Df(u)v \in W, \quad u \in U,$$

линейна и непрерывна, а отображение

$$Df : U \ni u \mapsto Df(u) \in L_c(V, W)$$

непрерывно на векторном пространстве $L_c(V, W)$ линейных непрерывных отображений из V в W относительно топологии β равномерной сходимости на ограниченных множествах. Легко видеть, что если V и W — нормированные пространства, то отображение C^1_F-гладко тогда и только тогда, когда оно дифференцируемо по Фреше и его производная по Фреше непрерывна относительно обычной нормы в $L_c(V,W)$, и что C^1_{MB}-гладкость слабее C^1_F-гладкости (см. [18]). То, что C^1_{MB}-гладкость не требует выбора топологии в $L_c(V,W)$ можно считать преимуществом, в частности, при переходе к производным высших порядков.

Если I — интервал положительной длины (не обязательно компактный) на $\mathbb{R}$, то через C_I обозначим пространство Фреше непрерывных функций из I в $\mathbb{R}$ с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах, а через C^1_I — пространство Фреше непрерывно дифференцируемых функций из I в $\mathbb{R}$ с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах для отображений и их производных. В настоящей работе предъявляются функционалы из C_I в $\mathbb{R}$ и функционалы из C^1_I в $\mathbb{R}$, которые C^1_{MB}-гладки, но не C^1_F-гладки.

Интерес к поиску таких функционалов вызван изучением дифференциальных уравнений с непостоянным запаздыванием. Рассмотрим, например, уравнение

$$x'(t) = g(x(t-d)), \quad d = \Delta(x(t)), \tag{1.1}$$

где $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, а $\Delta : \mathbb{R} \to [0,\infty)$. Такие уравнения с *переменным* запаздыванием не покрываются современной теорией начальных задач вида

$$x'(t) = f(x_t) \text{ при } t > 0,\ x_0 = \phi, \tag{1.2}$$

для *функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием*, изложенной в многочисленных монографиях от [5] до [2, 6]. Начальными данными в задаче (1.2) являются отображения $\phi : I \to \mathbb{R}^n$, определенные на *начальном интервале* $I \subset \mathbb{R}$, для которого $\max I = 0 \in \mathbb{R}$, и истории (или отрезки) $x_t : I \to \mathbb{R}^n$ решения $x : I + (0, t_x) \to \mathbb{R}^n$, $0 < t_x \leqslant \infty$, заданные соотношениями $x_t(s) = x(t+s)$.

Теория начальных задач вида (1.2) (ее можно применять и к уравнениям с запаздыванием, зависящим от состояния, и получать с ее помощью существование, единственность и дифференцируемость по начальным данным) для случая компактных начальных интервалов развита в [8, 12, 13], а для случая, когда $I = (-\infty, 0]$, развита в [16–18]. В обоих случаях требуется, чтобы отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$ было определено на открытом подмножестве множества $(C^1_I)^n$, а также было непрерывно дифференцируемо и удовлетворяло некоторому *свойству расширения* (e). При этих условиях максимальные решения начальной задачи (1.2) определяют непрерывный полупоток разрешающих операторов на *многообразии решений* $\{\phi \in U : \phi'(0) = f(\phi)\}$, которое действительно является непрерывно дифференцируемым подмногообразием коразмерности n в $(C^1_I)^n$. Результаты для случая, когда вместо $(C^1_I)^n$ рассматриваются банаховы пространства отображений $(-\infty, 0] \to \mathbb{R}^n$, а также для неавтономных начальных задач, доступны и в [14, 15].

Если начальный интервал I компактен, а $(C^1_I)^n$ — банахово пространство, то теория использует исчисление, основанное на C^1_F-гладкости. Для случая $I = (-\infty, 0]$, в котором в $C^1_I(n)$ не существует нормы, разработаны две версии теории. Первая основана на C^1_{MB}-гладкости (см. [16, 17]) под впечатлением того, что исчисление, основанное на C^1_{MB}-гладкости, широко используется в пространствах Фреше — возможно, так же, как исчисление в банаховых пространствах, как правило, опирается на дифференцируемость по Фреше. Теории создаются для приложений, и проверка обычных примеров показывает, что, если выполняется предположение о гладкости, то всегда имеет место более сильная C^1_F-гладкость. Это наблюдение показало необходимость второй версии указанной теории: для случая, в котором $I = (-\infty, 0]$. Эта версия включает результаты, связанные с более сильной C^1_F-гладкостью, и некоторые ее доказательства несколько более сложны, чем в первой версии (см. [18]). Ее преимущество заключается в том, что техническая гипотеза (d) предыдущего подхода (см. [17]), фактически требующая C^1_F-гладкости некоторого сопряженного отображения, становится излишней.

Поскольку у нас есть две версии теории, но ни одного примера, удовлетворяющего более слабому предположению из [16, 17], возникает вопрос, как могут могут выглядеть C^1_{MB}-функционалы на C^1_I, не являющиеся C^1_F-гладкими.

В [18, Sec. 8] приведены примеры таких отображений, действующих в некоторых других пространствах, а именно:

- отображение, действующее в банаховом пространстве c_0 последовательностей $x = (x_j)$ из $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, сходящихся к началу координат вещественной оси, где $|x| = \max\limits_{j \in \mathbb{N}} |x_j|$;
- отображение из l^1 в $\mathbb{R}$;

- отображения из C_I в c_0 и из C_I^1 в c_0.

В разделах 2-3 ниже мы вначале построим C^1_{MB}-функционал, который не является C^1_F-гладким в банаховом пространстве

$$C_{I,0} = \{\phi \in C_I : \phi(\min I) = 0\}$$

с компактным I. Далее, применение композиции с подходящими линейными непрерывными отображениями дает искомые функционалы на банаховых пространствах C_I и C_I^1, а также на $C^1_{\mathcal{I}}$, где $\mathcal{I}$ уже не обязательно компактен.

Отметим, что, в рамках теории дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием, особый интерес к C^1-гладкости (без учета производных высших порядков) может быть обоснован результатом из [9], согласно которому многообразие решений начальной задачи (1.2), вообще говоря, не более чем C^1-гладко, вне зависимости от того, насколько гладки такие компоненты каждого конкретного примера, как функции g и Δ в уравнении (1.1). То же самое имеет место для локально устойчивых многообразий в стационарных точках (см. [9]).

Обозначения. Граница, внутренность и замыкание подмножества M топологического пространства обозначаются через ∂M, $int\, M$ и $cl\, M$ соответственно. Для компактного интервала $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, нормы, рассматриваемые на C_I и на C_I^1, задаются соотношениями

$$|p| = \max_{t\in I} |p(t)| \quad \text{и} \quad |p|_1 = |p| + |\partial\, p|$$

соответственно, где

$$\partial : C_I^1 \to C_I$$

есть линейное непрерывное отображение дифференцирования.

Имеет место разложение

$$C_I = C_{I,0} \oplus \mathbb{R}\mathbf{1},$$

на замкнутые подпространства, где $\mathbf{1}(t) = 1$ на I. Сопряженная проекция

$$pr : C_I \to C_I$$

вдоль $\mathbb{R}\mathbf{1}$ на $C_{I,0}$ линейна и непрерывна.

Билинейное отображение $(\cdot,\cdot)_2 : C_{I,0} \times C_{I,0} \ni (p,q) \mapsto \int\limits_a^b p(s)q(s)ds \in \mathbb{R}$ непрерывно по переменной $|\cdot|$, а соотношение

$$|p|_2 = \sqrt{(p,p)_2}$$

определяет норму в $C_{I,0}$, где

$$|p|_2 \leqslant \sqrt{b-a}|p| \quad \text{для любого} \quad p \quad \text{из} \quad C_{I,0}.$$

Для положительных r положим

$$\begin{aligned} N_{2,r} &= \{p \in C_{I,0} : |p|_2 < r\}, \\ B_{2,r} &= \{p \in C_{I,0} : |p|_2 \leqslant r\}. \end{aligned}$$

Тогда $N_{2,r}$ — открытое подмножество пространства $C_{I,0}$, $B_{2,r}$ — замкнутое подмножество пространства $C_{I,0}$, а

$$\partial\, N_{2,r} = \{p \in C_{I,0} : |p|_2 = r\} = \partial\, B_{2,r},$$

где ∂ обозначает границу множества $N_{2,r}$, рассматриваемую как подмножество банахова пространства $C_{I,0}$ с нормой $|\cdot|$.

Если интервал $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ некомпактен, а подынтервал $I \subset \mathcal{I}$ положительной длины компактен, то сужением определяется линейное непрерывное отображение $R : C^1_{\mathcal{I}} \to C^1_I$, а продолжение прямыми линиями с подходящими углами наклона определяет линейное непрерывное отображение

$$E : C^1_I \to C^1_{\mathcal{I}},$$

для которых $REp = p$ на C^1_I.

2. Последовательности конусов в $C_{I,0}$; случай компактного I

В этом и следующем разделах применяются обозначения $I = [a,b]$ (где $a < b$), $C = C_I$, $C_0 = C_{I,0}$ и $C^1 = C^1_I$.

Для любого натурального j положим $t_j = a + \dfrac{b-a}{2j}$ и выберем открытый интервал $I_j \subset (a,b)$, для которого $t_j \in I_j$ и $cl\, I_j \cap cl\, I_k = \varnothing$ при $j \neq k$. Выберем e_j из C^1, для которого

$$e_j([a,b]) \subset [0,1], \quad \operatorname{supp} e_j \subset I_j, \quad e_j(t_j) = 1$$

и числовая последовательность $|e_j|_2$, $j \in \mathbb{N}$, строго убывает. Отметим, что

$$\begin{aligned} |e_j| &= 1 \quad \text{для всех} \quad j \quad \text{из} \quad \mathbb{N}, \\ |e_j|_2 &\to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty, \\ |e_j - e_k|_2^2 &= |e_j|_2^2 + |e_k|_2^2, \quad \text{если} \quad j \neq k \quad \text{в} \quad \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Для любого натурального j выберем такое положительное δ_j, что

$$\delta_j < \frac{|e_j|_2}{2}, \tag{2.1}$$

$$\delta_j^2 + 2\delta_j(b-a)^2 < |e_j|_2^2. \tag{2.2}$$

Замкнутые множества $e_j + B_{2,\delta_j}$ попарно не пересекаются, потому что если натуральные m и j удовлетворяют неравенству $m < j$, а $p \in e_j + B_{2,\delta_j}$, то неравенство (2.1) и монотонность влекут за собой следующие соотношения:

$$|p - e_m|_2 \geqslant |e_m - e_j|_2 - |e_j - p|_2 \geqslant |e_m|_2 - \delta_j > |e_m|_2 - \frac{|e_j|_2}{2} > |e_m|_2 - \frac{|e_m|_2}{2} = \frac{|e_m|_2}{2} > \delta_m.$$

Для натуральных j обозначим через H_j ядро линейного непрерывного отображения вычисления

$$ev_j : C_0 \ni p \mapsto p(t_j) \in \mathbb{R}$$

и положим

$$L_j = \{p \in C_0 : ev_j p = 1\} = \{p \in C_0 : p(t_j) = 1\}.$$

Тогда $e_j \in L_j$ и, если $p \in C_0$ и $p(t_j) > 0$, то

$$q = \frac{1}{p(t_j)} p \in L_j \quad \text{и} \quad p = rq \quad \text{при} \quad r = p(t_j).$$

Для конусов

$$\begin{aligned} U_j &= (0,\infty) \cdot (L_j \cap (e_j + N_{2,\delta_j})), \\ R_j &= [0,\infty) \cdot (L_j \cap (e_j + \partial\, N_{2,\delta_j})), \\ K_j &= [0,\infty) \cdot (L_j \cap (e_j + B_{2,\delta_j}) \end{aligned}$$

справедливы соотношения

$$\begin{aligned} U_j &= \left\{ p \in C_0 : p(t_j) > 0, \quad \left| \frac{1}{p(t_j)} p - e_j \right|_2 < \delta_j \right\}, \\ R_j &= \{0\} \cup \left\{ p \in C_0 : p(t_j) > 0, \quad \left| \frac{1}{p(t_j)} p - e_j \right|_2 = \delta_j \right\}, \\ K_j &= \{0\} \cup \left\{ p \in C_0 : p(t_j) > 0, \quad \left| \frac{1}{p(t_j)} p - e_j \right|_2 \leqslant \delta_j \right\}, \end{aligned}$$

$$U_j \cup R_j = K_j, \quad 0 \in R_j \subset K_j, \quad U_j \cap R_j = \varnothing.$$

Предложение 2.1. *Для любого натурального j справедливы следующие утверждения*:

(i) *U_j — открытое подмножество пространства C_0, а R_j и K_j — замкнутые подмножества пространства C_0*;

(ii) $\partial K_j = R_j = \partial\, U_j$;

(iii) *если натуральные m и n не равны друг другу, то $K_m \cap K_n = \{0\}$.*

Доказательство.

(i). Открытость множества U_j следует из непрерывности отображений ev_j и $(\cdot,\cdot)_2$. Аналогично, множество

$$V_j = \left\{p \in C_0 : p(t_j) > 0 \text{ и } \left|\frac{1}{p(t_j)}p - e_j\right|_2 > \delta_j\right\}$$

открыто. Справедливо соотношение

$$C_0 \setminus K_j = (H_j \setminus \{0\}) \cup V_j \cup \{p \in C_0 : p(t_j) < 0\}.$$

Теперь, чтобы доказать замкнутость множества K_j, остается показать, что точки множества $H_j \setminus \{0\}$ имеют окрестности в $(H_j \setminus \{0\}) \cup V_j \cup \{p \in C_0 : p(t_j) < 0\}$. Пусть $p \in H_j \setminus \{0\}$. Рассмотрим положительное ϵ, удовлетворяющее неравенству

$$\epsilon < \frac{|p|_2}{1 + 2(\delta_j + |e_j|_2)}.$$

Соотношения

$$|q - p| < \epsilon \quad \text{и} \quad |q - p|_2 < \frac{|p|_2}{2}$$

определяют открытую окрестность N точки p в $C_0 \setminus \{0\}$. Если $q \in N$, то либо $q(t_j) < 0$, либо $q \in H_j \setminus \{0\}$, либо $q(t_j) > 0$. В последнем случае справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{q(t_j)}q - e_j\right|_2 &\geqslant \frac{1}{|q(t_j)|}|q|_2 - |e_j|_2 = \frac{1}{|q(t_j) - p(t_j)|}|q|_2 - |e_j|_2 \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{|q-p|}(|p|_2 - |q-p|_2) - |e_j|_2 \geqslant \frac{1}{\epsilon}\frac{|p|_2}{2} - |e_j|_2 > \delta_j,\end{aligned}$$

откуда следует, что $q \in V_j$.

Множество R_j замкнуто, потому что $R_j = K_j \setminus U_j$.

(ii). Вначале докажем, что $R_j \subset cl\, U_j$. Поскольку

$$U_j \ni \frac{1}{n}e_j \to 0 \quad \text{при} \quad \mathbb{N} \ni n \to \infty,$$

получаем, что $0 \in cl\, U_j$. Для любой точки p из $R_j \setminus \{0\}$ величина $p(t_j)$ положительна. Точка $q = \dfrac{1}{p(t_j)}p$ принадлежит множеству L_j и удовлетворяет соотношению $\delta_j = |q - e_j|_2$. Если $0 < s < 1$, то

$$q_s = s\,q + (1-s)e_j \in L_j,$$
$$|q_s - q| \leqslant (s-1)|q| + (1-s)|e_j| = (s-1)|q| + (1-s),$$
$$\delta_j = |q - e_j|_2 > |s(q - e_j)|_2 = |(s\,q + (1-s)e_j) - e_j|_2 = |q_s - e_j|_2.$$

Следовательно, $q_s \in L_j \cap (e_j + N_{2,\delta_j})$ и $p(t_j)q_s \in U_j$. Из предельного соотношения $q_s \to q$ при $s \to 1$ следует предельное соотношение

$$U_j \ni p(t_j)q_s \to p(t_j)q = p \quad \text{при} \quad s \to 1,$$

доказывающее, что $p \in cl\, U_j$. Отсюда следует, что $R_j \subset cl\, U_j$.

Теперь докажем, что $\partial\, U_j = R_j$. Из включения $R_j \subset cl\, U_j$, соотношения $R_j \cap U_j = \varnothing$ и замкнутости множества K_j, подмножеством которого является U_j, получаем соотношения

$$K_j \setminus U_j = R_j \subset (cl\, U_j) \setminus U_j \subset K_j \setminus U_j = R_j,$$

доказывающие, что $\partial\, U_j = cl\, U_j \setminus U_j = R_j$.

Теперь докажем, что $\partial\, K_j = R_j$. Из открытости подмножества U_j множества K_j вытекает, что

$$\partial\, K_j = cl\, K_j \setminus int\, K_j \subset K_j \setminus U_j = R_j.$$

Чтобы показать, что $R_j \subset \partial K_j$, рассмотрим $R_j \subset K_j = cl\, K_j$. Остается доказать, что $R_j \subset cl(C_0 \setminus K_j)$. Итак, пусть $p \in R_j$. Если $p \neq 0$, то $p(t_j) > 0$, $q = \dfrac{1}{p(t_j)}p \in L_j$ и $|q - e_j|_2 = \delta_j$. Если $s > 1$, то $q_s = s\,q + (1-s)e_j$ из L_j удовлетворяет соотношениям

$$\delta_j = |q - e_j|_2 < |s(q - e_j)|_2 = |q_s - e_j|_2;$$

значит, $q_s \in L_j \cap \{r \in C_0 : |r - e_j|_2 > \delta_j\}$ и $p(t_j)q_s \in C_0 \setminus K_j$. Учитывая, что $q_s \to q$ при $s \to 1$, получаем, что $C_0 \setminus K_j \ni p(t_j)q_s \to p(t_j)q = p$ при $s \to 1$. Следовательно, $p \in cl(C_0 \setminus K_j)$. Осталось рассмотреть случай, в котором $p = 0 \in R_j$. В этом случае выберем $h \in H_j \setminus \{0\} \subset C_0 \setminus K_j$. Тогда

$$C_0 \setminus K_j \ni \frac{1}{n}h \to 0 = p \quad \text{при} \quad \mathbb{N} \ni n \to \infty$$

и, тем самым, $p = 0 \in cl(C_0 \setminus K_j)$.

(iii). Пусть натуральные m и n не равны друг другу и $0 \neq p \in K_m \cap K_n$. Тогда $p(t_m) > 0$, $p(t_n) > 0$ и существуют такие q из $L_m \cap (e_m + B_{2,\delta_m})$, r из $L_n \cap (e_n + B_{2,\delta_n})$ и положительные s и t, что

$$s\,q = p = t\,r.$$

Можно считать, что $s \geqslant t$. Тогда

$$\begin{aligned} &|e_m|_2^2 + |e_n|_2^2 = |e_m - e_n|_2^2 \leqslant (|e_m - q|_2 + |q - e_n|_2)^2 \leqslant \\ &\leqslant \left(\delta_m + \left|\frac{t}{s}r - e_n\right|_2\right)^2 \leqslant \left(\delta_m + \left|\frac{t}{s}r - \frac{t}{s}e_n\right|_2 + \left|\frac{t}{s}e_n - e_n\right|_2\right)^2 \leqslant \left(\delta_m + \frac{t}{s}\delta_n + \left|\frac{t}{s} - 1\right| |e_n|_2\right)^2 \leqslant \\ &\leqslant \left(\delta_m + \frac{t}{s}|e_n|_2 + \left(1 - \frac{t}{s}\right)|e_n|_2\right)^2 = (\delta_m + |e_n|_2)^2 = \delta_m^2 + 2\delta_m|e_n|_2 + |e_n|_2^2 \leqslant \delta_m^2 + 2\delta_m\sqrt{b-a} + |e_n|_2^2, \end{aligned}$$

что в сочетании с неравенством (2.2) приводит к противоречию. □

Предложение 2.2. $\partial \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_j$. *Для любой точки q из $(\partial \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j) \setminus \{0\}$ существует единственное $J = J_q$, для которого $q \in R_J$. Если последовательность $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ из $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j$ сходится к q из $\partial(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j) \setminus \{0\}$, то существует подпоследовательность $(p_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, содержащаяся в U_{J_q}.*

Доказательство. Пусть $q \in \partial \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j$. Поскольку $0 \in R_j$ для всех j, можно считать, что $q \neq 0$. Тогда существует последовательность $(p_n)_{n=1}^{\infty}$, содержащаяся в $(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j) \setminus \{0\}$ и стремящаяся к q при $n \to \infty$. Согласно предложению 2.1(iii), для любой такой последовательности соотношение $p_n \in U_{j(n)}$ определяет последовательность (не обязательно инъективную)

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto j(n) \in \mathbb{N}.$$

Если эта последовательность ограничена, то существует постоянная подпоследовательность $\mathbb{N} \ni k \mapsto j(n_k) \in \mathbb{N}$ со значением $J = j(n_k)$ для любого натурального k. Поскольку $p_{n_k} \in U_J$ для любого натурального k, мы заключаем, что $q \in R_J$. Этим соотношением J определено однозначно в силу соотношения $q \neq 0$ и предложения 2.1(iii).

Осталось рассмотреть случай, в котором последовательность $(j(n))_{n\in\mathbb{N}}$ неограничена. В этом случае существует подпоследовательность $\mathbb{N} \ni k \mapsto j(n_k) \in \mathbb{N}$, стремящаяся к бесконечности. Тогда для любого положительного ϵ существует такое натуральное k, что

$$|e_{j(n_k)}|_2 < \epsilon, \quad |q - p_{n_k}|_2 \leqslant \sqrt{b-a}|q - p_{n_k}| < \epsilon \quad \text{и} \quad \delta_{j(n_k)} < \epsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} |q|_2 &\leqslant |q - p_{n_k}|_2 + |p_{n_k} - p_{n_k}(t_{j(n_k)})e_{j(n_k)}|_2 + |p_{n_k}(t_{j(n_k)})||e_{j(n_k)}|_2 < \\ &< \epsilon + |p_{n_k}(t_{j(n_k)})|(\delta_{j(n_k)} + \epsilon) \leqslant \epsilon + |p_{n_k}|(\delta_{j(n_k)} + \epsilon) \leqslant \epsilon + \left(|q| + \frac{\epsilon}{\sqrt{b-a}}\right) 2\,\epsilon, \end{aligned}$$

что противоречит соотношению $q \neq 0$. □

Предложение 2.3. *Для любого q из $(\partial \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j) \setminus \{0\}$ существует такое натуральное J и такое положительное r, что*

$$\{p \in C_0 : |p - q| < r\} \subset \left\{p \in U_J : \left|\frac{1}{p(t_J)}p - e_J\right|_2 > \frac{\delta_j}{2}\right\} \cup (C_0 \setminus (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j)).$$

Доказательство. Пусть $q \in (\partial \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j) \setminus \{0\}$. Возьмем натуральное $J = J_q$, существование и единственность которого доказаны в предложении 2.2, и докажем, что существует такое положительное ρ, что

$$\{p \in C_0 : |p-q| < \rho\} \subset U_J \cup (C_0 \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j). \tag{2.3}$$

Предположим обратное, т. е. что существует такая последовательность $(p_n)_{n=1}^{\infty}$, что

$$|p_n - q| < \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad p_n \in (C_0 \setminus U_J) \cap (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j) \quad \text{для всех} \quad n \quad \text{из} \quad \mathbb{N}.$$

У этой последовательности нет подпоследовательности, содержащейся в U_J, что противоречит предложению 2.2.

Из соотношения $0 \neq q \in R_J$ получаем соотношение

$$\left|\frac{1}{q(t_J)} q - e_J\right|_2 = \delta_J.$$

Существует такое r из $(0,\rho)$, что если $p \in C_0$ и $|p-q| < r$, то

$$p(t_J) > 0 \quad \text{и} \quad \left|\frac{1}{p(t_J)} p - e_J\right|_2 > \frac{\delta_J}{2}.$$

Используя это и вложение (2.3), мы получаем, что если $p \in C_0$ и $|p-q| < r < \rho$, то

$$p \in U_J \quad \text{и} \quad \frac{\delta_J}{2} < \left|\frac{1}{p(t_J)} p - e_J\right|_2$$

либо

$$p \in C_0 \setminus (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j).$$

□

3. C^1_{MB}-функционал на $C_{I,0}$, не являющийся C^1_F-гладким; случай компактного I

Для любого натурального j выберем непрерывно дифференцируемое отображение

$$g_j : \mathbb{R} \to [0,1] \subset \mathbb{R},$$

для которого

$$g_j(\xi) = 1 \quad \text{при} \quad |\xi| \leqslant \frac{\delta_j}{4}, \quad g_j(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \geqslant \frac{\delta_j}{2}$$

и

$$|g_j'(\xi)| \leqslant \frac{8}{\delta_j} \quad \text{для любого вещественного} \quad \xi. \tag{3.1}$$

Тогда соотношение

$$\phi_j(p) = g_j(|p - e_j|_2)$$

определяет C^1_F-гладкое отображение $\phi_j : L_j \to \mathbb{R}$.

Теперь выберем такую непрерывную функцию

$$r_j : \mathbb{R} \to [0,1] \subset \mathbb{R},$$

что

$$r_j(s) = 0 \quad \text{при} \quad |s| \leqslant \frac{1}{2j}, \quad r_j\left(\frac{1}{j}\right) = 1 \quad \text{и}$$

$$\left|\int_0^{\xi} r_j(s)\,ds\right| \leqslant \delta_j |\xi|^3 \quad \text{для любого вещественного} \quad \xi. \tag{3.2}$$

Отметим, что отображения r_j, $j \in \mathbb{N}$, не являются равностепенно непрерывными в начале координат вещественной оси.

Функции

$$f_j : \mathbb{R} \ni \xi \mapsto \int\limits_a^\xi r_j(s)ds \in \mathbb{R}, \quad j \in \mathbb{N},$$

непрерывно дифференцируемы.

Рассмотрим отображение $f : C_0 \to \mathbb{R}$, заданное следующим образом:

$$f(p) = \phi_j\left(\frac{1}{p(t_j)}p\right) \cdot f_j(p(t_j)) \quad \text{при} \quad j \quad \text{из} \quad \mathbb{N} \quad \text{и} \quad p \quad \text{из} \quad K_j \setminus \{0\}, \tag{3.3}$$

$$f(p) = 0 \quad \text{при} \quad p \quad \text{из} \quad C_0 \setminus (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j), \tag{3.4}$$

$$f(0) = 0.$$

Это определение корректно в силу предложения 2.1(iii).

Отметим, что

$$f(p) = 0 \quad \text{на} \quad \bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_j.$$

Сужение f на объединение попарно непересекающихся открытых множеств $U_j \subset K_j$, $j \in \mathbb{N}$, C^1_F-гладко.

Предложение 3.1. *Любая точка q из $C_0 \setminus (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j)$, отличная от начала координат пространства C_0, имеет такую окрестность N, что $f(p) = 0$ на N.*

Доказательство.

1. В случае, когда q — внутренняя точка замкнутого множества $C_0 \setminus (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j)$, существует такое положительное r, что множество

$$N = \{p \in C_0 : |p - q| < r\}$$

содержится в $C_0 \setminus (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j)$. Пусть $p \in N$. Тогда

$$p \in C_0 \setminus U_j = (C_0 \setminus K_j) \cup R_j$$

для любого натурального j.

Если существует такое натуральное j, что $p \in R_j$, то $f(p) = 0$ по определению отображения f. В противном случае $p \in C_0 \setminus R_j$ для любого натурального j, откуда следует, что $p \in C_0 \setminus K_j$ для любого натурального j. Значит, $f(p) = 0$ по определению отображения f.

2. В случае, когда $0 \neq q \in \partial(C_0 \setminus (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j)) = \partial \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j$, из предложения 2.3 вытекает существование такого натурального J и такого положительного r, что множество

$$N = \{p \in C_0 : |p - q| < r\}$$

содержится в

$$\left\{p \in U_J : \left|\frac{1}{p(t_J)}p - e_J\right|_2 > \frac{\delta_j}{2}\right\} \cup (C_0 \setminus (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j)).$$

Пусть $p \in N$. Если

$$p \in C_0 \setminus (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j),$$

то соотношение $f(p) = 0$ доказывается так же, как и первой части доказательства. Если

$$p \in U_J \quad \text{и} \quad \left|\frac{1}{p(t_J)}p - e_J\right|_2 > \frac{\delta_j}{2},$$

то соотношение $f(p) = 0$, как и выше, следует из определения отображения f. □

Следствие 3.1. *Сужение f на $C_0 \setminus \{0\}$ является C^1_F-гладким и $Df(q) = 0$ для любого ненулевого q из $C_0 \setminus (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j)$.*

Доказательство. Используется предложение 3.1, замечание, предшествующее ему, и соотношение

$$C_0 = (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j) \cup (C_0 \setminus (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j)).$$

□

Предложение 3.2. *Отображение f непрерывно, и для каждого $\hat{p}$ из C_0 производная по направлению*

$$Df(0)\hat{p} = \lim_{0\neq t\to 0} \frac{1}{t}[f(0+t\hat{p}) - f(0)] = \lim_{0\neq t\to 0} \frac{f(t\hat{p})}{t}$$

существует и равна нулевому элементу пространства C_0.

Доказательство.

1. Из следствия 3.1 вытекает непрерывность f на $C_0 \setminus \{0\}$. Непрерывность в начале координат пространства C_0 следует из соотношения $f(p) = 0$, справедливого на $C_0 \setminus (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j)$, и оценки

$$|f(p) - f(0)| = |f(p)| = \left| g_j\left(\left|\frac{1}{p(t_j)}p - e_j\right|_2\right) \cdot f_j(p(t_j))\right| \leqslant \left|\int_0^{p(t_j)} r_j(s)ds\right| \leqslant |p(t_j)| \leqslant |p|,$$

верной при условии, что $0 \neq p \in K_j$ и $j \in \mathbb{N}$.

2. Если $0 \neq \hat{p} \in C_0$ и $0 \neq t \in \mathbb{R}$, то либо $t\hat{p} \in C_0 \setminus (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j)$, что влечет за собой соотношение $f(t\hat{p}) = 0$, либо $t\hat{p} \in K_j$ для некоторого натурального j. В последнем случае справедливо неравенство

$$|f(t\hat{p})| \leqslant |f_j((t\hat{p})(t_j))| \leqslant \delta_j |(t\hat{p})(t_j)|^3 \leqslant \frac{\sqrt{b-a}}{2}|t|^3|\hat{p}|^3.$$

В сочетании с неравенством

$$\frac{|f(t\hat{p})|}{|t|} \leqslant |t|^2 \frac{\sqrt{b-a}}{2}|\hat{p}|$$

оно дает соотношение

$$Df(0)\hat{p} = \lim_{0\neq t\to 0} \frac{f(t\hat{p})}{t} = 0.$$

□

Следующее утверждение исключает возможность того, что f C^1_F-гладко: производные $Df\left(\frac{1}{j}e_j\right)$ из $L_c(C_0, \mathbb{R})$ не сходятся к $Df(0) = 0$ равномерно на ограниченном множестве $\{e_k \in C_0 : k \in \mathbb{N}\}$.

Предложение 3.3.

$$Df\left(\frac{1}{j}e_j\right)e_j = 1 \quad \textit{для любого натурального} \quad j.$$

Доказательство. Если $j \in \mathbb{N}$ и $t > 0$, то

$$f\left(\frac{1}{j}e_j + te_j\right) - f\left(\frac{1}{j}e_j\right) = f\left(\left(\frac{1}{j} + t\right)e_j\right) - f\left(\frac{1}{j}e_j\right) =$$

$$= g_j(0) \cdot f_j\left(\frac{1}{j} + t\right) - g_j(0) \cdot f_j\left(\frac{1}{j}\right) = f_j\left(\frac{1}{j} + t\right) - f_j\left(\frac{1}{j}\right).$$

При $0 < t \to 0$ слагаемое

$$\frac{1}{t}\left[f_j\left(\frac{1}{j} + t\right) - f_j\left(\frac{1}{j}\right)\right]$$

стремится к

$$f_j'\left(\frac{1}{j}\right) = r_j\left(\frac{1}{j}\right) = 1.$$

□

Чтобы убедиться в C^1_{MB}-гладкости f, нужно исследовать производные по направлению $Df(p)\hat{p}$ для значений p, близких к точкам 0 и $\hat{p}$ пространства C_0. На каждом множестве U_j, $j \in \mathbb{N}$, справедливо соотношение

$$f(p) = g_j\left(\sqrt{Q_j(p)}\right) \cdot f_j(p(t_j)),$$

где

$$Q_j : \{p \in C_0 : p(t_j) > 0\} \ni p \mapsto \left(\frac{1}{p(t_j)}p - e_j, \frac{1}{p(t_j)}p - e_j\right)_2 \in \mathbb{R}, \quad j \in \mathbb{N},$$

есть C^1_F-гладкое отображение. Для любого натурального j и любого p из C_0, удовлетворяющего условию $p(t_j) > 0$, справедливо соотношение

$$Q_j(p) = \frac{1}{p(t_j)^2}(p,p)_2 - \frac{2}{p(t_j)}(p,e_j)_2 + (e_j,e_j)_2.$$

При $\hat{p} \in C_0$, дифференцируя произведение и дифференцируя сложную функцию, получаем, что

$$\begin{aligned} DQ_j(p)\hat{p} &= \frac{1}{p(t_j)^4}\left[2 \cdot (p,\hat{p})_2 \cdot p(t_j)^2 - (p,p)_2 \cdot 2 \cdot p(t_j) \cdot \hat{p}(t_j)\right] - \\ &\quad - \frac{2}{p(t_j)^2}[(\hat{p},e_j)_2 \cdot p(t_j) - (p,e_j)_2 \cdot \hat{p}(t_j)] = \\ &= \frac{2}{p(t_j)^2}\left[(p,\hat{p})_2 - \left(\frac{1}{p(t_j)}p, p\right)_2 \cdot \hat{p}(t_j) - (\hat{p},e_j)_2 \cdot p(t_j) + (p,e_j)_2 \cdot \hat{p}(t_j)\right] = \\ &= \frac{2}{p(t_j)^2}\left[p(t_j)\left(\hat{p}, \frac{1}{p(t_j)}p - e_j\right)_2 - \hat{p}(t_j) \cdot \left(p, \frac{1}{p(t_j)}p - e_j\right)_2\right]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Предложение 3.4. *Для любого натурального j, любого p из U_j и любого $\hat{p}$ из C_0 справедливо неравенство*

$$|Df(p)\hat{p}| \leqslant 16 \cdot |p| \cdot \sqrt{b-a} \cdot |\hat{p}| \cdot |p| + |r_j(p(t_j))| \cdot |\hat{p}(t_j)|.$$

Доказательство.

1. Если $p \in U_j \setminus \mathbb{R} \cdot e_j$, $j \in \mathbb{N}$ и $\hat{p} \in C_0$, то $Q_j(p) \neq 0$. Комбинируя формулу для производной произведения, правило дифференцирования сложной функции и соотношение $D\,ev_j(p)\hat{p} = ev_j\hat{p} = \hat{p}(t_j)$, получаем, что

$$Df(p)\hat{p} = g_j'\left(\sqrt{Q_j(p)}\right)\frac{1}{2\sqrt{Q_j(p)}}DQ_j(p)\hat{p} \cdot f_j(p(t_j)) + g_j\left(\sqrt{Q_j(p)}\right) \cdot Df_j(p(t_j))\hat{p}(t_j),$$

что, с учетом (3.5), дает формулу

$$\begin{aligned} Df(p)\hat{p} = g_j'\left(\sqrt{Q_j(p)}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{Q_j(p)}}\frac{1}{p(t_j)^2}\left[p(t_j)\left(\hat{p}, \frac{1}{p(t_j)}p - e_j\right)_2 - \hat{p}(t_j) \cdot \left(p, \frac{1}{p(t_j)}p - e_j\right)_2\right] \times \\ \times f_j(p(t_j)) + g_j\left(\sqrt{Q_j(p)}\right) \cdot r_j(p(t_j)) \cdot \hat{p}(t_j). \end{aligned}$$

используя соотношения

$$|g_j'(\xi)| \leqslant \frac{8}{\delta_j}, \qquad g_j(\mathbb{R}) \subset [0,1],$$

$$|f_j(\xi)| = \left|\int_0^\xi r_j(s)ds\right| \leqslant \delta_j|\xi|^3,$$

$$\sqrt{Q_j(p)} = \left|\frac{1}{p(t_j)}p - e_j\right|_2 \quad \text{и} \quad |(u,v)_2| \leqslant |u|_2|v|_2,$$

получаем, что

$$|Df(p)\hat{p}| \leqslant \frac{8}{\delta_j}\frac{1}{p(t_j)^2} \cdot [|\hat{p}|_2 \cdot |p(t_j)| + |\hat{p}(t_j)| \cdot |p|_2] \cdot \delta_j |p(t_j)|^3 + |r_j(p(t_j))| \cdot |\hat{p}(t_j)| \leqslant$$
$$\leqslant 8 \cdot |p(t_j)| \cdot \Big[\sqrt{b-a} \cdot |\hat{p}| \cdot |p(t_j)| + |\hat{p}| \cdot \sqrt{b-a} \cdot |p|\Big] + |r_j(p(t_j))| \cdot |\hat{p}(t_j)| \leqslant$$
$$\leqslant 16 \cdot |p(t_j)| \cdot \sqrt{b-a} \cdot |\hat{p}| \cdot |p| + |r_j(p(t_j))| \cdot |\hat{p}(t_j)|.$$

2. Если $p \in U_j \cap \mathbb{R} \cdot e_j$, $j \in \mathbb{N}$, то $Q_j(p) = 0$. В силу непрерывности неравенство $\left|\sqrt{Q_j(\tilde{p})}\right| < \dfrac{\delta_j}{4}$ выполняется в окрестности N точки p в U_j, а значит, $f(\tilde{p}) = 1 \cdot f_j(\tilde{p}(t_j))$ в N и, следовательно, $Df(p)\hat{p} = f_j'(p(t_j)\hat{p}(t_j) = r_j(p(t_j))\hat{p}(t_j)$ для всех $\hat{p}$ из C_0. Отсюда следует, что

$$|Df(p)\hat{p}| \leqslant |r_j(p(t_j))| \cdot |\hat{p}(t_j)|.$$

□

Предложение 3.5. *Для всех последовательностей $C_0 \ni p_n \to 0 \in C_0$ и $C_0 \ni \hat{p}_n \to \hat{p} \in C_0$ справедливо предельное соотношение $Df(p_n)\hat{p}_n \to 0$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Пусть $C_0 \ni p_n \to 0 \in C_0$ и $C_0 \ni \hat{p}_n \to \hat{p} \in C_0$. Поскольку $Df(p) = 0$ на $C_0 \setminus (\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} U_j)$, достаточно рассмотреть случай, в котором $p_n \in \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} U_j$ для всех натуральных n. В этом случае достаточно показать, что из любой подпоследовательности последовательности $(Df(p_n)\hat{p}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ можно, в свою очередь, извлечь подпоследовательность, стремящуюся при $n \to \infty$ к началу координат вещественной оси. Итак, пусть $\mathbb{N} \ni k \mapsto n_k \in \mathbb{N}$ строго возрастает. Поскольку множества U_j попарно не пересекаются, каждое натуральное число k однозначно определяет такое натуральное число $j(k)$, что $p_{n_k} \in U_{j(k)}$ (в силу предложения 2.1(iii) и условия, что $0 \notin U_j$ для каждого натурального j).

Рассмотрим случай, в котором последовательность $(j(k))_{k\in\mathbb{N}}$ ограничена. Пусть $j_{\max} = \max\limits_{k\in\mathbb{N}} j(k)$. Тогда существует такое натуральное k_0, что

$$|p_{n_k}| < \frac{1}{2j_{\max}} \quad \text{для всех целых} \quad k, \quad \text{больше либо равных} \quad k_0.$$

В частности,

$$|p_{n_k}(t_{j(k)})| \leqslant |p_{n_k}| < \frac{1}{2j_{\max}} \leqslant \frac{1}{2j(k)} \quad \text{для всех целых} \quad k, \quad \text{больше либо равных} \quad k_0,$$

откуда следует, что $0 = r_{j(k)}(p_{n_k}(t_{j(k)}))$ для указанных целых k. Используя предложение 3.4, мы заключаем, что

$$|Df(p_{n_k})\hat{p}_{n_k}| \leqslant 16 \cdot |p_{n_k}|^2 \sqrt{b-a}|\hat{p}_{n_k}| \quad \text{для всех целых} \quad k, \quad \text{больше либо равных} \quad k_J.$$

Отсюда следует, что $|Df(p_{n_k})\hat{p}_{n_k}$ стремится к началу координат вещественной оси при $k \to \infty$.

Теперь рассмотрим случай, в котором последовательность $(j(k))_{k\in\mathbb{N}}$ неограничена. В этом случае существует ее подпоследовательность $(j(k_m))_{m\in\mathbb{N}}$, стремящаяся к бесконечности при $m \to \infty$. Отсюда следует, что

$$t_{j(k_m)} \to a \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Используя это, оценку

$$|\hat{p}_{n_{k_m}}(t_{j(k_m)})| \leqslant |\hat{p}_{n_{k_m}}(t_{j(k_m)}) - \hat{p}(t_{j(k_m)})| + |\hat{p}(t_{j(k_m)})| \leqslant |\hat{p}_{n_{k_m}} - \hat{p}| + |\hat{p}(t_{j(k_m)})|$$

и тот факт, что $\hat{p}(a) = 0$, заключаем, что

$$\hat{p}_{n_{k_m}}(t_{j(k_m)}) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{3.6}$$

Теперь, объединяя оценку из предложения 3.5 с предельными соотношениями $p_{n_{k_m}} \to 0$ при $m \to \infty$ и $\hat{p}_{n_{k_m}} \to \hat{p}$ при $m \to \infty$, справедливыми при $r_{j(k_m)}(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$, и с предельным соотношением (3.6), получаем, что

$$Df(p_{n_{k_m}})\hat{p}_{n_{k_m}} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

□

Объединяя следствие 3.1, предложение 3.3 и предложение 3.5, получаем, что $f : C_0 \to \mathbb{R}$ является C^1_{MB}-гладким.

Отметим, что работать в пространстве C_0 (вместо пространства C) требуется только в самом последнем случае доказательства предложения 3.5 — когда последовательность $(j(k))_{k\in\mathbb{N}}$ является неограниченной.

4. Функционалы на C_I и C^1_I в случае компактного интервала I и функционалы на $C^1_{\mathcal{I}}$ в случае произвольного интервала $\mathcal{I}$

Следствие 4.1. *Пусть $a < b$ и $I = [a, b]$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Функционалы $h : C_I \to \mathbb{R}$, заданные формулами $h(p) = f(pr\, p)$ при $pr : C_I \to C_{\mathcal{I},0}$ из раздела 1 и $H = h \circ \partial$ на C^1_I, являются C^1_{MB}-гладкими, но не C^1_F-гладкими.*

(ii) *Пусть I — подмножество интервала $\mathcal{I}$. Тогда отображение $F = H \circ R$, где $R : C^1_{\mathcal{I}} \to C^1_I$ — сужение, является C^1_{MB}-гладким, но не является C^1_F-гладким.*

Доказательство.

1. Отображение h является C^1_{MB}-гладким и $Dh(0) = 0 \in L_c(C_I, \mathbb{R})$, потому что

$$Dh(0)\hat{p} = Df(pr\,0)pr\,\hat{p} = Df(0)pr\,\hat{p} = 0 \quad \text{для всех} \quad \hat{p} \quad \text{из} \quad C_I.$$

Для любого натурального j справедливы соотношения

$$Dh\left(\frac{1}{j}e_j\right)e_j = Df\left(pr\left(\frac{1}{j}e_j\right)\right)pr\,e_j = Df\left(\frac{1}{j}e_j\right)e_j = 1,$$

откуда следует, что на ограниченном множестве

$$\{e_j : j \in \mathbb{N}\} \subset C_I$$

отсутствует равномерная сходимость производных $Dh\Big(\dfrac{1}{j}e_j\Big)$ из пространства $L_c(C_I, \mathbb{R})$ к $Dh(0)$, являющемуся нулем этого пространства. Следовательно, h не является C^1_F-гладким.

2. Отображение H является C^1_{MB}-гладким и $DH(0) = 0 \in L_c(C^1_I, \mathbb{R})$, потому что

$$DH(0)\hat{p} = Dh(\partial\,0)\partial\hat{p} = Dh(0)\partial\hat{p} = 0 \quad \text{для всех} \quad \hat{p} \quad \text{из} \quad C^1_I.$$

Для любого натурального j определим e^1_j из C^1_I формулой $e^1_j(t) = \int\limits_a^t e_j(s)ds$. Тогда

$$\{e^1_j \in C^1_I : j \in \mathbb{N}\}$$

— ограниченное подмножество пространства C^1_I, $\dfrac{1}{j}e^1_j \to 0$ при $j \to \infty$ и

$$DH\left(\frac{1}{j}e^1_j\right)e^1_j = Dh\left(\partial\left(\frac{1}{j}e^1_j\right)\right)\partial\,e^1_j = Dh\left(\frac{1}{j}e_j\right)e_j = 1 \quad \text{для всех} \quad j \quad \text{из} \quad \mathbb{N}.$$

Отсюда следует, что на ограниченном множестве $\{e^1_j \in C^1_I : j \in \mathbb{N}\}$ производные $DH\Big(\dfrac{1}{j}e^1_j\Big)$ принадлежат пространству $L_c(C^1_I, \mathbb{R})$, но их равномерная сходимость к нулевому элементу этого пространства не имеет места. Значит, H не является C^1_F-гладким.

3. Пусть I содержится в интервале $\mathcal{I}$. Рассмотрим сужение $R : C^1_{\mathcal{I}} \to C^1_I$ и положим $F = H \circ R$. Отображение F является C^1_{MB}-гладким в силу формулы дифференцирования сложной функции:

$$DF(0) = DH(R0) \circ R = DH(0) \circ R = 0 \in L_c(C^1_{\mathcal{I}}, \mathbb{R}).$$

Напомним, что линейное ограниченное отображение $E : C^1_I \to C^1_{\mathcal{I}}$ из раздела 1 переводит ограниченное подмножество $\{e^1_j : j \in \mathbb{N}\} \subset C^1_I$ в ограниченное подмножество

$$\{Ee^1_j : j \in \mathbb{N}\}$$

пространства $C^1_{\mathcal{I}}$. Имеет место сходимость $\dfrac{1}{j}Ee^1_j \to 0$ в $C^1_{\mathcal{I}}$, а для любого натурального j справедливо соотношение

$$DF\left(\frac{1}{j}Ee^1_j\right)Ee^1_j = DH\left(RE\frac{1}{j}e^1_j\right)REe^1_j = DH\left(\frac{1}{j}e^1_j\right)e^1_j = 1,$$

показывающее, что на ограниченном множестве $\{Ee^1_j : j \in \mathbb{N}\}$ производные $DF\Big(\dfrac{1}{j}Ee^1_j\Big)$ принадлежат $L_c(C^1_{\mathcal{I}}, \mathbb{R})$, однако их равномерная сходимость к $DF(0) = 0$ не имеет места. Следовательно, F не является C^1_F-гладким. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bastiani A.* Applications différentiables et varietés de dimension infinie// J. Anal. Math. — 1964. — *13.* — С. 1–114.
2. *Diekmann O., van Gils S. A., Verduyn Lunel S. M., Walther H. O.* Delay equations: functional-, complex- and nonlinear analysis. — New York: Springer, 1995.
3. *Glöckner H.* Implicit functions from topological vector spaces to Banach spaces// Israel J. Math. — 2006. — *155.* — С. 205–252.
4. *Glöckner H.* Finite order differentiability properties, fixed points and implicit functions over valued fields// `http://arxiv.org/pdf/math/0511218`. — 2007.
5. *Hale J. K.* Functional differential equations. — New York: Springer, 1971.
6. *Hale J. K., Verduyn Lunel S. M.* Introduction to functional differential equations. — New York: Springer, 1993.
7. *Hamilton R. S.* The inverse function theorem of Nash and Moser// Bull. Am. Math. Soc. (N. S.). — 1982. — *7.* — С. 65–222.
8. *Hartung F., Krisztin T., Walther H. O., Wu J.* Functional differential equations with state-dependent delays: theory and applications// Handb. Differ. Equ. — 2006. — *3.* — С. 435–545.
9. *Krisztin T., Walther H. O.* Smoothness issues in differential equations with state-dependent delay// Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. — 2017. — *49.* — С. 95–112.
10. *Michal A. D.* Differential calculus in linear topological spaces// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1938. — *24.* — С. 340–342.
11. *Szilasi J., Lovas R. L.* Some aspects of differential theories// В сб.: Handbook of global analysis. — Amsterdam: Elsevier, 2007. — С. 1071–1116.
12. *Walther H. O.* The solution manifold and C^1-smoothness of solution operators for differential equations with state dependent delay// J. Differ. Equ. — 2003. — *195.* — С. 46–65.
13. *Walther H. O.* Smoothness properties of semiflows for differential equations with state dependent delay// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2004. — *124.* — С. 5193–5207.
14. *Walther H. O.* Differential equations with locally bounded delay// J. Differ. Equ. — 2012. — *252.* — С. 3001–3039.
15. *Walther H. O.* Evolution systems for differential equations with variable time lags// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2014. — *202.* — С. 911–933.
16. *Walther H. O.* Semiflows for differential equations with locally bounded delay on solution manifolds in the space $C^1((-\infty, 0], \mathbb{R}^n)$// Topol. Methods Nonlinear Anal. — 2016. — *48.* — С. 507–537.
17. *Walther H. O.* Local invariant manifolds for delay differential equations with state space in $C^1((-\infty, 0], \mathbb{R}^n)$// Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2016. — *85.* — С. 1–29.
18. *Walther H. O.* Fréchet differentiability in Fréchet spaces, and differential equations with unbounded variable delay// Preprint, 2016.

Hans-Otto Walther
Mathematisches Institut, Universität Gießen, Arndtstr. 2, D 35392 Gießen, Germany
E-mail: `Hans-Otto.Walther@math.uni-giessen.de`

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-543-556 UDC 517.929

Maps Which Are Continuously Differentiable in the Sense of Michal and Bastiani but not of Fréchet

© 2017 **H.-O. Walther**

Abstract. We construct examples of nonlinear maps on function spaces which are continuously differentiable in the sense of Michal and Bastiani but not in the sense of Fréchet. The search for such examples is motivated by studies of delay differential equations with the delay variable and not necessarily bounded.

REFERENCES

1. A. Bastiani, “Applications différentiables et varietés de dimension infinie,” *J. Anal. Math.*, 1964, **13**, 1–114.
2. O. Diekmann, S. A. van Gils, S. M Verduyn Lunel, and H. O. Walther, *Delay Equations: Functional-, Complex- and Nonlinear Analysis*, Springer, New York, 1995.
3. H. Glöckner, “Implicit functions from topological vector spaces to Banach spaces,” *Israel J. Math.*, 2006, **155**, 205–252.
4. H. Glöckner, “Finite order differentiability properties, fixed points and implicit functions over valued fields,” http://arxiv.org/pdf/math/0511218, 2007.
5. J. K. Hale, *Functional Differential Equations*, Springer, New York, 1971.
6. J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer, New York, 1993.
7. R. S. Hamilton, “The inverse function theorem of Nash and Moser,” *Bull. Am. Math. Soc. (N. S.)*, 1982, **7**, 65–222.
8. F. Hartung, T. Krisztin, H. O. Walther, and J. Wu, “Functional differential equations with state-dependent delays: theory and applications,” *Handb. Differ. Equ.*, 2006, **3**, 435–545.
9. T. Krisztin and H. O. Walther, “Smoothness issues in differential equations with state-dependent delay,” *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, 2017, **49**, 95–112.
10. A. D. Michal, “Differential calculus in linear topological spaces,” *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.*, 1938, **24**, 340–342.
11. J. Szilasi and R. L. Lovas, “Some aspects of differential theories,” In: *Handbook of Global Analysis*, Elsevier, Amsterdam, 2007, 1071–1116.
12. H. O. Walther, “The solution manifold and C^1-smoothness of solution operators for differential equations with state dependent delay,” *J. Differ. Equ.*, 2003, **195**, 46–65.
13. H. O. Walther, “Smoothness properties of semiflows for differential equations with state dependent delay,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2004, **124**, 5193–5207.
14. H. O. Walther, “Differential equations with locally bounded delay,” *J. Differ. Equ.*, 2012, **252**, 3001–3039.
15. H. O. Walther, “Evolution systems for differential equations with variable time lags,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2014, **202**, 911–933.
16. H. O. Walther, “Semiflows for differential equations with locally bounded delay on solution manifolds in the space $C^1((-\infty, 0], \mathbb{R}^n)$,” *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 2016, **48**, 507–537.
17. H. O. Walther, “Local invariant manifolds for delay differential equations with state space in $C^1((-\infty, 0], \mathbb{R}^n)$,” *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2016, **85**, 1–29.
18. H. O. Walther, “Fréchet differentiability in Fréchet spaces, and differential equations with unbounded variable delay,” Preprint, 2016.

Hans-Otto Walther
Mathematisches Institut, Universität Gießen, Arndtstr. 2, D 35392 Gießen, Germany
E-mail: Hans-Otto.Walther@math.uni-giessen.de

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 4 (2017). С. 557–572

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-557-572 УДК 517.956.45, 517.968.74.

СУЩЕСТВОВАНИЕ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АГРЕГАЦИИ

© 2017 г. **В. Ф. ВИЛЬДАНОВА, Ф. Х. МУКМИНОВ**

Аннотация. Работа посвящена изучению смешанной задачи для анизотропного интегро-дифференциального уравнения с переменными показателями нелинейности. Методом дискретизации по времени доказано существование слабого решения в ограниченном цилиндре. Дана оценка времени существования решения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с границей класса C^1. Рассмотрим в цилиндрической области $D^T = \Omega \times (0,T)$ уравнение

$$\beta(x,u)_t = \operatorname{div}(a(x,u,\nabla u) - \beta(x,u)G(u)) + f(x,u) \tag{1.1}$$

с начальным и краевым условиями

$$u(x,0) = u_0, \;\; u_0(x) \geqslant 0, \;\; x \in \Omega, \tag{1.2}$$

$$(a(x,u,\nabla u) - uG(u)) \cdot \nu = 0 \quad \text{на} \;\; \partial\Omega \times (0,T), \tag{1.3}$$

где ν — вектор внешней нормали. Здесь $\beta(x,r)$, $f(x,r)$, $a(x,r,y)$ — каратеодориевы функции. Функция β, $\beta(x,0) = 0$ — нечетная и возрастает по r. Требование нечетности несущественно, поскольку нас интересуют только неотрицательные решения уравнения (1.1). Интегральный оператор $G(u) = (G_1(u), G_2(u), \dots, G_n(u))$ определяется формулами

$$G_i(v) = \int\limits_\Omega g_i(x,y)b(v(y))dy.$$

В настоящей работе доказывается существование слабого решения задачи (1.1)–(1.3) для анизотропного уравнения с переменным показателем нелинейности. Модельный пример уравнений (1.1) можно получить из уравнения агрегации

$$v_t = \operatorname{div}\left(|\nabla A(v)|^{p(x)-2}\nabla A(v) - v\nabla K * v\right), \quad 0 < p_- \leqslant p(x) \leqslant p^+, \; x \in \Omega,$$

рассмотренного в случае $p(x) = 2$ в работе [9]. В этой работе доказывается существование и единственность решения задачи для указанного уравнения. После замены $v = b(u)$, где $b(u)$ — обратная к монотонно возрастающей функции $A(u)$, приходим к уравнению вида

$$b(u)_t = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - b(u)\nabla K * b(u)\right).$$

Здесь оператор свертки определяется формулой $K * u(x,t) = \int\limits_\Omega K(x-y)u(y,t)dy$.

Функция $K(x)$ подчиняется условиям (см. [9]):

$$K \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x)dx = 1; \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial K(x-y)}{\partial \nu_x} \leqslant 0, \ x \in \partial\Omega, \ y \in \Omega. \tag{1.5}$$

За последние 15 лет появилось огромное число работ, посвященных изучению явлений агрегации в биологических системах. Был предложен ряд нелокальных моделей, см. [11, 15, 17, 18, 21] и имеющиеся там ссылки. Модели агрегации без диффузии изучались в работе [20]. В основном рассматриваются уравнения без слагаемого f, отвечающего за процессы рождения-уничтожения в колониях бактерий.

В работе [12] приводится вывод одномерного уравнения агрегации. Кроме того, для этого уравнения в работе найдены стабильные состояния и изучены их свойства.

Отметим еще интересную работу [10], в которой изучается задача для системы

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \operatorname{div}[\nabla u^m(x,t) - u(x,t)\nabla\phi(x,t)], \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geqslant 3, \quad m>1, \\ -\triangle\phi(x,t) = u(x,t), \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

В этой работе показано, что при $m = 2 - \dfrac{2}{n}$ существует критическое значение M_c массы $M = \int\limits_{\mathbb{R}^d} u_0(x)dx$ такое, что если $0 < M < M_c$, то решение существует глобально, а если $M > M_c$, то решение «взрывается» за конечное время.

Следует отметить также работы об оптимальной эксплуатации возобновляемых ресурсов (см. [2] и имеющиеся там ссылки).

В работе [13] для уравнения агрегации

$$u_t(x,t) = \operatorname{div}[\nabla u^m(x,t) - u(x,t)\nabla K * u(x,t)], \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geqslant 2, \quad m>1,$$

дан хороший обзор результатов. В частности, при $m > 2 - \dfrac{2}{n}$ решение существует глобально при всех $t > 0$. Если же $m < 2 - \dfrac{2}{n}$, то решение «взрывается» за конечное время. В этой работе доказано, что при $m > 2 - \dfrac{2}{n}$ существует единственное (с точностью до трансляций) стационарное решение задачи при любой массе, оно радиально симметрично и имеет компактный носитель. В двумерном случае с ньютоновским взаимодействием при любой массе доказана сходимость решений уравнения агрегации к этому равновесному состоянию.

Отметим, что методы доказательства единственности ренормализованного решения для уравнений с двойной нелинейностью, использованные в работах [6, 14], основанные на методе удвоения С. Н. Кружкова [4], не пригодны для уравнения (1.1) ввиду наличия нелокального интегрального оператора.

2. Функциональные пространства и предположения

Через $L_{p(\cdot)}(Q)$ обозначим пространство Орлича

$$L_{p(\cdot)}(Q) = \{u : \int\limits_Q |u(x)|^{p(x)}dx < \infty\},$$

соответствующее функции $p(x)$, $1 < p_- \leqslant p(x) \leqslant p^+$, с нормой Люксембурга

$$||u||_{p(\cdot),Q} = \inf\{k > 0 : \int\limits_Q \left|\frac{u(x)}{k}\right|^{p(x)} dx \leqslant 1\}.$$

Ниже в качестве Q могут выступать области Ω, D^T и другие, причем индекс $Q = \Omega$ может быть опущен. Будут рассматриваться только функции $p(x)$, удовлетворяющие условию

$$|p(x) - p(y)| \leqslant \frac{C}{-\ln|x-y|} \tag{2.1}$$

при $|x-y| \leqslant 1/2$, $x, y \in \overline{\Omega}$. При таком условии имеет место сходимость осреднений (см. [1]): если $f \in L_{p(\cdot)}(Q)$ продолжена нулем вне ограниченной области Q и

$$f_{\rho_m}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\rho_m(x-y)dy,$$

то $f_{\rho_m} \to f$ в пространстве $L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ при $m \to \infty$. Здесь $\rho_m(x) = m^n\rho(m|x|)$ — ядро осреднения. Сходимость имеет место и для осреднений Стеклова: $f_h \to f$ в пространстве $L_{p(\cdot)}(D^T)$ при $h \to 0$, $f_h(x,t) = \dfrac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} f(x,\tau)d\tau$.

Определим анизотропное пространство Соболева—Орлича $W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$ как пополнение пространства $C^1(\overline{\Omega})$ по норме

$$||u||_{W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)} = \sum_{i=1}^n ||u_{x_i}||_{p_i(\cdot),\Omega} + \|u\|_{1,\Omega} = ||\nabla u||_{\mathbf{p},\Omega} + \|u\|_{1,\Omega},$$

где функции $p_i(x)$ удовлетворяют условиям (2.1) и $1 < p_- \leqslant p_i(x) \leqslant p_+$, $x \in \overline{\Omega}$.

Пространство $W^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T)$ определяется как пополнение пространства $C^1(\overline{D^T})$ по норме

$$||u||_{W^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T)} = \sum_{i=1}^n ||u_{x_i}||_{p_i(\cdot),D^T} + \|u\|_{1,D^T} = ||\nabla u||_{\mathbf{p},D^T} + \|u\|_{1,D^T}.$$

Пусть $X = \{\nabla u |\ u \in W^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T)\}$.

Пространство $\prod\limits_{i=1}^n L_{\overline{p}_i(\cdot)}(D^T)$, $\overline{p}_i^{-1} + p_i^{-1} = 1$, обозначим через X'. Элементы $v \in X'$ действуют как функционалы на элементы $u \in W^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T)$ по формуле $(v,u)_{D^T} = \int\limits_{D^T} v \cdot \nabla u dxdt$.

Неравенство Пуанкаре $\|\overline{u}\|_{p_-,\Omega} \leqslant C\|\nabla\overline{u}\|_{p_-,\Omega}$, где $\overline{u} = u - c$, $c = |\Omega|^{-1}\displaystyle\int\limits_\Omega udx$, $u \in W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$, устанавливает вложение $W^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T) \subset L_{p_-}(D^T)$. Компактность этого вложения при $p_- < n$ следует из теоремы Реллиха—Кондрашова.

Другое вложение установлено в работе [16]. Положим

$$p_M(x) = \max(p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)),\ x \in \Omega.$$

Тогда [16, следствие 2.1] если

$$\operatorname{ess\,inf}(p_M(x) - p_*(x)) > 0,$$

то вложение

$$W^1_{\mathbf{p}}(\Omega) \hookrightarrow L_{p_*(\cdot)}(\Omega)$$

компактно.

Определим еще пространство

$$V = L_{p_-}(0,T; W^{0,1}_{\mathbf{p}}(\Omega))$$

с нормой

$$||u||_V = \left(\int\limits_0^T ||u(t)||^{p_-}_{\mathbf{p},\Omega}dt\right)^{1/p_-}.$$

Через $\mathrm{Lip}_0(Q)$ обозначим пространство липшицевых функций с компактным носителем, лежащим в Q.

Приведем условия на функции, входящие в уравнение (1.1). Функция $\beta(x,r)$ нечетна по $r\in\mathbb{R}$ и при некоторых M_0, M_T удовлетворяет условиям:

$$s\beta(x,r)\leqslant r\beta(x,s) \text{ при } 0<M_0\leqslant r<s\leqslant M_T,\ x\in\Omega; \tag{2.2}$$

$$\beta(x,M_T)\in L_{\overline{p}_m(\cdot)}, \quad \text{где} \quad \overline{p}_m(x)=\max_j(\overline{p}_j(x)),\ x\in\Omega. \tag{2.3}$$

Пусть функция $q(x,r)$ определяется равенством $f=\beta(x,r)q(x,r)$ и ограничена:

$$|q(x,r)|\leqslant q_0 \text{ при } |r|\leqslant M_T. \tag{2.4}$$

Будем предполагать, что неотрицательная измеримая начальная функция u_0 ограничена: $u_0(x)\leqslant M_0$. Очевидно, что $\beta(x,u_0)\in L_1(\Omega)$, и при любом $\delta>0$ найдется функция $v\in C_0^1(\Omega)$ такая, что

$$\int\limits_\Omega |\beta(x,u_0)-\beta(x,v)|dx<\delta.$$

Функции $a_i(x,r,y)$ непрерывны по $r\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}^n$ и измеримы по $x\in\Omega$. Положим

$$S(x,y)=\sum_{i=1}^n |y_i|^{p_i(x)}.$$

Пусть существуют функция $F(x)\in L_1(\Omega)$ и непрерывная функция $C(m)$, $m\geqslant 0$, такие, что

$$|a_j(x,r,y)|^{\overline{p}_j(x)}\leqslant C(m)(F(x)+S(x,y)) \tag{2.5}$$

при всех $r\in[-m,m]$, $y\in\mathbb{R}^n$, $x\in\Omega$. Отметим, что из этого условия легко следует, что

$$a_j(x,u,\nabla v)\in L_{p_j(\cdot)}(D^T) \tag{2.6}$$

при всех $u\in L_\infty(D^T)$, $v\in W^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T)$.

Условия монотонности и коэрцитивности записываются в следующем виде:

$$\Lambda(x,r,y,z)=(a(x,r,y)-a(x,r,z))\cdot(y-z)\geqslant 0,\ y\neq z; \tag{2.7}$$

$$a(x,r,y)\cdot y\geqslant \delta_0 S(x,y)-F(x), \quad \forall r\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}^n,\ x\in\Omega. \tag{2.8}$$

Опишем теперь условия на функции, определяющие интегральный оператор $G(v)$: $g_i(x,y)\in C^1(P)$, $P=\{(x,y): x,y\in\overline{\Omega}, x\neq y\}$,

$$|\sum_{i=1}^n (g_i(x,y))_{x_i}|+|g_i(x,y)|\leqslant C(1+|x-y|^{-\lambda}), \quad \lambda\in(0,n), \quad (x,y)\in P. \tag{2.9}$$

Функция $b(s)\geqslant 0$, $b(0)=0$, удовлетворяет условию Липшица:

$$|b(s_1)-b(s_2)|\leqslant L_k|s_1-s_2|, \quad s_1,s_2\in[0,k], \quad \forall k>0. \tag{2.10}$$

Предполагается, что

$$\sum_{i=1}^n \nu_i g_i(x,y)\leqslant 0, \quad x\in\partial\Omega, \quad y\in\Omega. \tag{2.11}$$

Мы будем использовать следующее утверждение об оценках интегралов типа потенциалов [7, гл. I, §6].

Лемма 2.1. *Если* $\lambda<\dfrac{n}{\overline{q}}$, $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{\overline{q}}=1$, $1<p<\infty$, $f(x)\in L_q(\Omega)$, *то функция*

$$v(x)=\int\limits_\Omega \frac{f(y)dy}{|x-y|^\lambda}$$

непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$|v(x)|\leqslant C\|f\|_{q,\Omega}.$$

Из этой леммы и условий (2.9), (2.10) следует, что

$$G(v)\in C^1(\mathbb{R}^n), \quad |G(v)|\leqslant C_G, \quad |\mathrm{div} G(v)|\leqslant d_G \quad \text{при} \quad |v(x)|\leqslant M_T. \tag{2.12}$$

Отметим, что из (2.12) следует, что $G(u(t))\in C^1(\mathbb{R}^n)$ при почти всех $t\in(0,T)$.

3. Формулировка результатов

Определим функции

$$T_k v = \begin{cases} k & \text{при } v > k, \\ v & \text{при } |v| \leqslant k, \\ -k & \text{при } v < -k; \end{cases} \qquad \eta(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r > 1, \\ 1-r & \text{при } 0 \leqslant r \leqslant 1, \\ 1 & \text{при } r < 0. \end{cases}$$

Обозначим через $\mathrm{sign}^+(s)$ многозначную функцию, равную 1 при $s > 0$, нулю при $s < 0$, $[0,1]$ при $s = 0$; $r^+ = \max(r, 0)$.

Пусть $\chi(P)$ обозначает логическую функцию, равную 1, когда P истинно, и 0, когда P ложно.

Определение 3.1. Функция $u : D^T \to [0, \infty)$ называется *слабым решением* задачи (1.1)–(1.3), если $u \in L_\infty(D^T)$, $u \in V$ и для всех пробных функций $\phi \in C^\infty(\overline{D^T})$ таких, что $\phi(T) = 0$, выполнено равенство

$$\int\limits_{D^T} ((\beta(x,u_0) - \beta(x,u))\phi_t + (a(x,u,\nabla u) - \beta(x,u)G(u)) \cdot \nabla\phi)\, dxdt = \int\limits_{D^T} f(x,u)\phi dxdt.$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (2.1)–(2.11), $B(x,u_0) \in L_1(\Omega)$, $0 \leqslant u_0(x) \leqslant M_0$. *Положим* $T = \mu^{-1} \ln |\dfrac{M_T}{M_0} - 1|$, *где* $\mu = 1 + q_0 + d_G$.

Тогда существует слабое решение задачи (1.1)–(1.3) *такое, что*

$$\int\limits_\Omega B(x,u(x,t))dx \leqslant C,\ t \in [0,T],$$

$$0 \leqslant u(x,t) \leqslant M_T.$$

4. Существование слабого решения

Следуя [8], положим

$$B(x,r) = \beta(x,r)r - \Phi(x,r),\ \Phi(x,r) = \int\limits_0^r \beta(x,s)ds, \tag{4.1}$$

$$B(x,r) = \Psi(x, \beta(x,r));\ \Psi(x,r) = \sup_s\{sr - \Phi(x,s)\}.$$

Поскольку $\beta(x,r) \in L_1(\Omega)$ — возрастающая по r функция, то Φ и Ψ — выпуклые функции при фиксированных x, $B(x,r)$ возрастает по r на $[0,\infty)$. Интегрированием по частям устанавливается формула

$$B(x,r) = \int\limits_0^r s d\beta(x,s),$$

из которой следует, что $B(x,r) \in L_1(\Omega)$, $B(x,r) \geqslant 0$ и

$$B(x,r) - B(x,r_0) \geqslant (\beta(x,r) - \beta(x,r_0))r_0,\ r, r_0 \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Решение задачи (1.1)–(1.3) будем строить как предел решений уравнений, полученных дискретизацией уравнения (1.1) по переменной t. Выберем целое $m > 0$. Пусть $h = T/m$ (всюду в этом параграфе) и положим

$$\partial_t^{-h}\beta(x,u(t,x)) = \frac{\beta(x,u(t,x)) - \beta(x,u(t-h,x))}{h}.$$

Будем предполагать сначала, что

$$a(x,r,y) = a(x,T_\rho r,y), \tag{4.3}$$

где $\rho = M_T$, и пусть

$$\beta(x,r) = \beta(x,\rho) + (r-\rho)^{p_- - 1},\quad r > \rho. \tag{4.4}$$

Эти ограничения несущественны, поскольку построенное решение будет удовлетворять неравенству $0 \leqslant u(x,t) \leqslant \rho$, $(x,t) \in D^T$.

Введем обозначения $\beta_1(x,r) = \beta(x,T_\rho r)$, $u^1(x,t) = T_\rho u(x,t-h)$. Рассмотрим эллиптическое уравнение

$$\partial_t^{-h}\beta(x,u(t)) = \operatorname{div}(a(x,u^1(t),\nabla u(t)) - \beta_1(x,u(t))G(u^1(t))) + \beta_1(x,u(t))q(x,u^1(t)), \tag{4.5}$$

которое решается последовательно на интервалах $((k-1)h,kh]$, $k=1,2,\dots,m$, с ограниченным начальным условием

$$u(t,x) = u_{0m}(x), \quad t\in(-h,0]. \tag{4.6}$$

Начальные функции берутся гладкие, $u_{0m}(x)\in C_0^\infty(\Omega)$, так, чтобы $B(x,u_{0m}(x))\to B(x,u_0(x))$ в $L_1(\Omega)$ при $m\to\infty$. Краевое условие имеет вид:

$$\big(a(x,u^1(t),\nabla u(t)) - \beta_1(x,u(t,x))G(u^1(t))\big)\cdot\nu = 0 \quad \text{на } \partial\Omega\times(0,T). \tag{4.7}$$

Зафиксируем m. Определим кусочно постоянную функцию $M(t)=M_0$ при $t\leqslant 0$, $M(t+h) = M(t)/(1-\mu h)$ при $t>0$. Тогда при малых h справедливо неравенство

$$M(T) = \frac{M_0}{(1-\mu h)^m} \leqslant M_0(\exp(\mu T)+1) = M_T.$$

Докажем индукцией по k разрешимость задачи (4.5), (4.6) и неравенства

$$0\leqslant u(x,t)\leqslant M(t),\ x\in\Omega,\ t\in((k-1)h,kh]. \tag{4.8}$$

При $k=0$ неравенства выполнены. Пусть для $k-1$ решение задачи существует и удовлетворяет (4.8). Зафиксируем $t\in((k-1)h,kh]$. Разрешимость задачи (4.5)–(4.7) будет следовать из разрешимости операторного уравнения

$$\mathcal{A}(v) = \mathcal{F} = \beta_1(x,u^1(t))/h$$

(см. [5, теорема 2.1, гл. 2]), где оператор $\mathcal{A}: W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)\to W^{-1}_{\mathbf{p}}(\Omega)$ определяется формулой

$$(\mathcal{A}(v),\varphi) = \int_\Omega [(h^{-1}\beta(x,v) - q(x,u^1(t))\beta_1(x,v))\varphi +$$

$$+ (a(x,u^1(t)),\nabla v) - \beta_1(x,v)G(u^1(t)))\cdot\nabla\varphi]dx,\ \varphi\in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Покажем, что $\mathcal{A}(v)\in W^{-1}_{\mathbf{p}}(\Omega)$ для любого $v\in W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$. Из (2.5) и неравенства Юнга следует, что

$$\int_\Omega |a(x,u^1(t),\nabla v)\cdot\nabla\varphi|dx \leqslant \int_\Omega C(M_T)(F(x)+S(x,\nabla v)) + S(x,\nabla\varphi)dx < C(v)$$

при всех $v\in W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$ и φ таких, что $\|\varphi\|_{W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)} = 1$. Тогда в силу (4.4) и (2.3)

$$\left|\int_\Omega \beta(x,v)\varphi dx\right| \leqslant 2\int_\Omega |\beta(x,\rho)\varphi|dx + \int_\Omega |\varphi|\chi(v>\rho)(v-\rho)^{\frac{p_-}{p_--1}}dx \leqslant$$

$$\leqslant 4\|\beta(x,\rho)\|_{\overline{p}_1(\cdot),\Omega}\|\varphi\|_{p_1(\cdot),\Omega} + \int_\Omega (|\varphi|^{p_-} + |v|^{p_-})dx \leqslant C(v)$$

при всех $v\in W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$ и φ таких, что $\|\varphi\|_{W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)} = 1$. Далее запишем неравенства, вытекающие из (2.3):

$$\int_\Omega (|\beta(x,M_T)\varphi_{x_i}|dx \leqslant 2\|\beta(x,M_T)\|_{\overline{p}_i(\cdot)}\|\varphi_{x_i}\|_{p_i(\cdot)} \leqslant C\|\varphi_{x_i}\|_{p_i(\cdot)}. \tag{4.9}$$

Теперь с помощью неравенства (2.12) устанавливаем, что

$$\left|\int_\Omega \beta_1(x,v)G(u^1(t)))\cdot\nabla\varphi(t)dx\right| \leqslant C_G\int_\Omega (|\beta(x,M_T)\nabla\varphi|dx \leqslant C_1.$$

Из полученных оценок следует, что $\mathcal{A}(v)\in W^{-1}_{\mathbf{p}}(\Omega)$.

Монотонность оператора $\widetilde{\mathcal{A}}$, определяемого формулой

$$(\widetilde{\mathcal{A}}(v),\varphi)=\int\limits_{\Omega}[(h^{-1}\beta(x,v)-q(x,u^1(t))\beta_1(x,v))\varphi+a(x,u^1(t),\nabla v)\cdot\nabla\varphi]dx,$$

при достаточно малых h следует из монотонности функции β и условия (2.7). Далее, псевдомонотонность оператора, определяемого формулой

$$(\mathcal{B}(v),\varphi)=\int\limits_{\Omega}[-\beta_1(x,v)G(u^1(t))\cdot\nabla\varphi]dx,$$

легко следует из неравенства $\int\limits_{\Omega}|\beta_1(x,v)|^{\overline{p}_m(x)}dx\leqslant\int\limits_{\Omega}|\beta_1(x,\rho)|^{\overline{p}_m(x)}dx<\infty$. Действительно, из компактности вложения $W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)\subset L_{p_-}(\Omega)$ и слабой сходимости $v_j\to v$ в пространстве $W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$ следует сильная сходимость $v_j\to v$ в пространстве L_{p_-}. Тогда можно выделить подпоследовательность v_{j_k} такую, что $v_{j_k}\to v$ почти всюду. Так как $|\beta_1(x,v_j)|\leqslant\beta(x,\rho)$ и из (2.3) следует, что $\beta(x,\rho)\in L_{\overline{p}_m(\cdot)}(\Omega)$, то по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\int\limits_{\Omega}|\beta_1(x,v_{j_k})-\beta_1(x,v)|^{\overline{p}_m(x)}dx\to 0,\quad k\to\infty.$$

Легко видеть, что сходимость имеет место для всей последовательности, а не только для подпоследовательности. Поэтому $\lim\limits_{i\to\infty}(\mathcal{B}(v_j),v_j-\varphi)=(\mathcal{B}(v),v-\varphi)$, что доказывает псевдомонотонность оператора $\mathcal{B}$. Из равенства $\mathcal{A}=\widetilde{\mathcal{A}}+\mathcal{B}$ следует псевдомонотонность оператора $\mathcal{A}$.

Осталось проверить условие коэрцитивности. Пользуясь (2.12) и неравенством Юнга, запишем неравенства

$$\int\limits_{\Omega}|\beta_1(x,v)G(u^1(t)))\cdot\nabla v|dx\leqslant C_G\int\limits_{\Omega}\beta(x,\rho)|\nabla v|dx\leqslant \tag{4.10}$$
$$\leqslant\int\limits_{\Omega}(C(\delta_0)\beta(x,\rho)^{\overline{p}_m(x)}+\frac{\delta_0}{4}S(x,\nabla v))dx.$$

Воспользовавшись неравенствами (2.8), (4.10), получим

$$(\mathcal{A}(v),v)=\int\limits_{\Omega}h^{-1}v\beta(x,v)+(a(x,u^1(t),\nabla v)- \tag{4.11}$$
$$-\beta_1(x,v)G(u^1(t)))\cdot\nabla v-\beta_1(x,v)q(x,u^1(t))vdx\geqslant$$
$$\geqslant\int\limits_{\Omega}\left(\frac{3\delta_0}{4}S(x,\nabla v)+v(\beta(x,v)h^{-1}-q_0\beta_1(x,v))\right)dx-C_1(\delta_0).$$

Отсюда следует коэрцитивность: $\mathcal{A}((v),v)/\|v\|_{W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)}\to\infty$ при $\|v\|\to\infty$ и достаточно малых h. Действительно, пусть $\|v\|_{W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)}=A$, где A достаточно большое число, причем $\|\nabla v\|_{\mathbf{p},\Omega}\geqslant A/2$. Тогда $\|v\|^{-1}_{W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)}\int\limits_{\Omega}S(x,\nabla v)dx\geqslant C(A)$, где $\lim\limits_{A\to\infty}C(A)=\infty$. Если же $\|v\|_1\geqslant A/2$, то $\|v\|_{p_-}\geqslant C_1A$. Поэтому из (4.4) следует

$$\int\limits_{\Omega}v\beta(x,v)dx\geqslant\int\limits_{\Omega}\chi(|v|\geqslant 2\rho)|v-\rho|^{p_-}dx\geqslant C\|v\|^{p_-}_{p_-}-C_2\geqslant C_3A^{p_-}-C_2.$$

Таким образом, при $A\to\infty$ $\|v\|_1\geqslant A/2$ и имеем

$$\|v\|^{-1}_{W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)}\int\limits_{\Omega}v\beta(x,v)dx\to\infty.$$

Итак, разрешимость уравнения $\mathcal{A}(v)=\mathcal{F}$ установлена. Таким образом, если положить $u(x,t)=v(x)$, $t\in((k-1)h,kh]$, то будем иметь решение задачи (4.5)–(4.7).

Докажем индукцией по k неравенства (4.8). Пусть $u^{(s)} = \max(0, u - s)$, $s \geqslant 0$. Умножим уравнение (4.5) на $(-u)^{(0)}(t)$ и проинтегрируем по Ω:

$$\int\limits_\Omega (-u)^{(0)}(t)(\partial_t^{-h}\beta(x,u(t)) - \beta_1(x,u(t))q(x,u^1(t)))dx =$$
$$= -\int\limits_\Omega (a(x,u,\nabla u(t)) - \beta_1(x,u(t))G(u^1(t)))\cdot\nabla(-u)^{(0)}(t)dx.$$

Пользуясь индукционными предположениями

$$M(t-h) \geqslant u(t-h) \geqslant 0,$$

нечетностью функции β и неравенством (2.8), будем иметь

$$\int\limits_\Omega \Big((-u)^{(0)}(t)\beta(x,u(t))/h - \beta_1(x,u(t))G(u(t-h))\cdot\nabla(-u)^{(0)}(t)\Big)dx \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_\Omega \beta_1(x,u(t))q(x,u(t-h))(-u)^{(0)}(t)dx \geqslant \int\limits_\Omega q_0\beta_1(x,u(t))(-u)^{(0)}(t)dx.$$

Пользуясь (2.11), запишем соотношения

$$-\int\limits_\Omega \beta_1(x,u(t))G(u(t-h))\cdot\nabla(-u)^{(0)}(t)dx = \int\limits_\Omega G\cdot\nabla \int\limits_0^{-(-u)^{(0)}(t)} \beta_1(x,r)drdx \leqslant$$

$$\leqslant -\int\limits_\Omega \int\limits_0^{-(-u)^{(0)}(t)} \beta_1(x,r)dr\mathrm{div}G(u(t-h))dx \leqslant d_G\int\limits_\Omega -(-u)^{(0)}(t)\beta_1(x,-(-u)^{(0)}(t))dx.$$

Предыдущие выкладки приводят к неравенству

$$\int\limits_\Omega (-u)^{(0)}(t)\beta(x,u(t))(1/h - q_0 - d_G)dx \geqslant 0.$$

При достаточно малых h в силу нечетности функции β отсюда следует, что $(-u)^{(0)}(t) = 0$.

Умножим теперь уравнение (4.5) на $u^{(s)}(t)$, $s > 0$, и проинтегрируем по Ω:

$$\int\limits_\Omega u^{(s)}(t)(\partial_t^{-h}\beta(x,u(t)) - \beta(x,u(t))q(x,u(t-h))dx =$$
$$= -\int\limits_\Omega (a(x,u,\nabla u(t)) - \beta(x,u(t))G(u(t-h)))\cdot\nabla u^{(s)}(t)dx.$$

Пользуясь (2.8) и индукционным предположением, запишем неравенство

$$\int\limits_\Omega \Big(u^{(s)}(\beta(x,u(t)) - \beta(x,M(t-h))/h - G(u(t-h))\cdot\nabla \int\limits_0^{u^{(s)}(t)} \beta(x,s+r)dr\Big)dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_\Omega q_0\beta(x,u(t))u^{(s)}(t)dx.$$

Используя (2.11), находим, что

$$\int_\Omega G(u(t-h))\cdot\nabla\int_0^{u^{(s)}(t)}\beta(x,s+r)drdx\leqslant$$

$$\leqslant-\int_\Omega\int_0^{u^{(s)}(t)}\beta(x,s+r)dr\mathrm{div}G(u(t-h))dx\leqslant d_G\int_\Omega u^{(s)}(t)\beta(x,s+u^{(s)}(t))dx.$$

Из проведенных выкладок устанавливаем соотношение

$$\int_\Omega u^{(s)}(\beta(x,u(t))(1-q_0h-d_Gh)-\beta(x,M(t-h)))dx\leqslant 0.$$

Поскольку при $s>M(t-h)$ из (2.2) следует неравенство $\dfrac{s}{M(t-h)}\beta(x,M(t-h))\leqslant\beta(x,s)$, то

$$\int_\Omega u^{(s)}\Big(\frac{s}{M(t-h)}(1-q_0h-d_Gh)-1\Big)\beta(x,M(t-h))dx\leqslant 0.$$

При $s=\dfrac{M(t-h)}{1-(q_0+1)h-d_Gh}=\dfrac{M(t-h)}{1-\mu h}=M(t)$ отсюда следует равенство $u^{(s)}=0$, завершающее индукцию. Таким образом, из доказанного неравенства $u(x,t)\leqslant M(t)$ следует, что $\beta_1(x,u(t))=\beta(x,u(t))$ и $u^1(t)=u(t-h)$.

Решение задачи (4.5)–(4.7) в дальнейшем будем обозначать через $u_m(t)$.

После умножения уравнений (4.5) на $\alpha(t)u_m(t)$, $\alpha\in C^\infty(\mathbb{R})$, $\alpha\geqslant 0$, и интегрирования по Ω будем иметь

$$\int_\Omega\Big(\alpha u_m\partial_t^{-h}\beta(x,u_m(t))+(a(x,u_{mh},\nabla u_m(t))-\beta(x,u_m(t))G(u_{mh}))\cdot\nabla\alpha u_m\Big)dx=$$

$$=\int_\Omega u_m(t)\alpha\beta(x,u_m(t))q(x,u_{mh})dx, \tag{4.12}$$

где $u_{mh}=u_m(t-h)$. Оценим снизу параболический член с помощью неравенства (4.2) при $\alpha\geqslant 0$:

$$\int_\Omega\alpha u_m\partial_t^{-h}\beta(x,u_m(t))dx\geqslant\int_\Omega\alpha(B(x,u_m(t))-B(x,u_m(t-h)))/hdx. \tag{4.13}$$

Тогда

$$\int_0^T\int_\Omega\alpha u_m\partial_t^{-h}\beta(x,u_m(t))dxdt\geqslant h^{-1}\int_0^{T-h}\int_\Omega B(x,u_m(t))(\alpha(t)-\alpha(t+h))dxdt. \tag{4.14}$$

Отметим, что правая часть в (4.12) ограничена числом, не зависящим от m и t. Пользуясь (2.8), (4.10) и (4.13), из (4.12) (с $\alpha=1$) после интегрирования по $t\in[0,\tau]$ выводим неравенство

$$\int_\Omega h^{-1}\int_{\tau-h}^{\tau}B(x,u_m(t))dtdx+\frac{3\delta_0}{4}\int_0^\tau\int_\Omega S(x,\nabla u_m(t))dxdt\leqslant \tag{4.15}$$

$$\leqslant C(T+\int_\Omega B(x,u_0)dx).$$

Поскольку функция $B(x,u_m(t))$ кусочно постоянна по времени, при достаточно больших m (и малых h) устанавливаем неравенство

$$\max_{[0,T]}\int_\Omega B(x,u_m(t))dx+\int_{D^T}S(x,\nabla u_m)dxdt\leqslant C. \tag{4.16}$$

Отсюда и из (4.8) следует ограниченность последовательности u_m в пространствах $W^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T)$ и $L_\infty(D^T)$. Неравенство (4.16) при помощи условий (2.5), (2.8) позволяет установить ограниченность последовательности $a(x, u_{mh}\nabla u_m)$ в пространстве X':

$$\|a(x, u_{mh}\nabla u_m)\|_{X'} \leqslant C. \tag{4.17}$$

Это влечет сходимость при $m \to \infty$ (по подпоследовательности):

$$a_i(x, u_{mh}, \nabla u_m(t)) \to v_i, \ i = 1, 2, \dots, n, \tag{4.18}$$

слабо в пространствах $L_{\overline{p}_i(\cdot)}(D^T)$, а также

$$u_m \to u, \tag{4.19}$$

слабо в пространстве $W^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T)$.

Далее, как и в работе [8], устанавливается компактность последовательности $\beta(x, u_m(t))$ в пространстве $L_1(D^T)$.

В следующей лемме из работы [8] функция β предполагается неубывающей.

Лемма 4.1. *Пусть последовательность $u_m \to u$ слабо в $L_q(D^T)$, $q > 1$, ограничена в $L_1([0,T]; W^1_1(\Omega))$, и выполнено*

$$\int\limits_\Omega B(x, u_m(t))dx \leqslant c, t \in (0, T),$$

$$\int\limits_0^{T-\mu}\int\limits_\Omega (\beta(x, u_m(t+\mu)) - \beta(x, u_m(t)))(u_m(t+\mu) - u_m(t))dxdt \leqslant c\mu \tag{4.20}$$

при $0 < \mu < \mu_0$ и любом $m > 1/\mu$.

Тогда найдется подпоследовательность такая, что $\beta(x, u_m) \to \beta(x, u)$ в $L_1(D^T)$ и почти всюду в D^T.

Для доказательства неравенства (4.20) установим оценку

$$I := \int\limits_0^{T-kh}\int\limits_\Omega (\beta(x, u_m(t+kh)) - \beta(x, u_m(t)))\Delta_{kh}u_m(t)dxdt \leqslant Ckh, \tag{4.21}$$

где $\Delta_{kh}u_m(t) = u_m(t+kh) - u_m(t)$, $k = 0, \dots, m$.

Пусть $\gamma(x) \in W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$, $t_i = ih$, $i = 0, \dots, m$. Из (4.5) следует равенство

$$\int\limits_\Omega (\beta(x, u_m(t_i+h)) - \beta(x, u_m(t_i)) - h\beta(x, u_m(t_i+h))q(x, u_m(t_i)))\gamma dx =$$
$$= h\int\limits_\Omega (\beta(x, u_m(t_i+h))G(u_m(t_i)) - a(x, u_m(t_i), \nabla u_m(t_i+h)) \cdot \nabla\gamma dx.$$

После суммирования по $i = s, \dots, s+k-1$ будем иметь

$$\int\limits_\Omega (\beta(x, u_m(t_{s+k})) - \beta(x, u_m(t_s)))\gamma dx =$$
$$= h\sum_{l=0}^{k-1}\int\limits_\Omega \beta(x, u_m(t_{s+l+1}))q(x, u_m(t_{s+l}))\gamma dx+$$
$$+h\sum_{l=0}^{k-1}\int\limits_\Omega (\beta(x, u_m(t_{s+l+1}))G(u_m(t_{s+l})) - a(x, u_m(t_{s+l}), \nabla u_m(t_{s+l+1}))) \cdot \nabla\gamma dx.$$

Выберем $\gamma_s(x) = h(u_m(t_{s+k}, x) - u_m(t_s, x))$ и просуммируем по $s = 0, \ldots, m-k$. Получим

$$I = h\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{s=0}^{m-k}\int\limits_{\Omega}(\beta(x, u_m(t_{s+l+1}))G(u_m(t_{s+l})) - a(x, u_m(t_{s+l}), \nabla u_m(t_{s+l+1}))) \times$$
$$\times \nabla\gamma_s(x)dx + h\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{s=0}^{m-k}\int\limits_{\Omega}\nu\beta(x, u_m(t_{s+l+1}))q(x, u_m(t_{s+l}))\gamma_s dx.$$

Следовательно,

$$I = h\sum_{l=0}^{k-1}\int\limits_{0}^{T-kh}\int\limits_{\Omega}\big((\beta(x, u_m(t+lh+h))G(u_m(t+lh)) -$$
$$-a(x, u_m(t+lh), \nabla u_m(t+lh+h))) \cdot \nabla\Delta_{kh}u_m +$$
$$+\beta(x, u_m(t_{s+l+1}))q(x, u_m(t_{s+l}))\Delta_{kh}u_m\big)dxdt.$$

Пользуясь (4.9), (2.12), выводим оценку

$$\sum_{l=0}^{k-1}\int\limits_{0}^{T-kh}\int\limits_{\Omega}\big|\beta(x, u_m(t+lh+h))G(u_m(t+lh))\nabla u_m(t+lh+h))\big|dxdt \leqslant$$
$$\leqslant Ck||\nabla u_m(t+lh+h))||_{\mathbf{p}, D^T} \leqslant C_1 k.$$

В силу (4.17) имеем

$$\sum_{l=0}^{k-1}\int\limits_{0}^{T-kh}\int\limits_{\Omega}|a(x, u_m(t+lh), \nabla u_m(t+lh+h)) \cdot \nabla(u_m(t+kh) - u_m(t))|dxdt \leqslant$$
$$\leqslant 2k||a(x, u_m(t), \nabla u_m(t+h))||_{X'(D^{T-h})}||u_m||_{W^1_{\mathbf{p}}(D^T)} \leqslant Ck.$$

Постоянная C не зависит от m и h. В итоге имеем оценку (4.21). В силу того, что функция $u_m(t)$ кусочно постоянна, из нее следует неравенство (4.20) при $\mu \in [1/m, T]$.

По лемме 4.1 выбираем подпоследовательность $\beta(x, u_m)$ такую, что $\beta(x, u_m) \to \beta(x, u)$ в $L_1(D^T)$ и почти всюду в D^T. В силу строгой монотонности функции β отсюда следует также сходимость

$$u_m \to u \text{ почти всюду в } D^T \tag{4.22}$$

по некоторой подпоследовательности. Тогда $u_{mh} \to u$ и $B(x, u_m) \to B(x, u)$ почти всюду в D^T. В силу ограниченности решений имеем также сходимость $u_m \to u$ в пространстве $L_q(D^T)$ при любом $q > 1$.

Из леммы 2.1, а также из (2.9) и (2.10), следует неравенство

$$|G_i(u_1) - G_i(u_2)| \leqslant C\|u_1 - u_2\|_{q,\Omega}, \ i = \overline{1, n}, \tag{4.23}$$

при достаточно большом $q > 1$. Поэтому ограниченность последовательности $G(u_{mh})$ в пространстве $L_\infty(D^T)$ влечет сходимость при $m \to \infty$ (по подпоследовательности)

$$G_i(u_{mh}) \to G_i(u) \ \text{ сильно в } L_q(D^T). \tag{4.24}$$

при любом $q > 1$.

Докажем, что

$$a_j(x, u_{mh}, \nabla u) \to a_j(x, u, \nabla u) \tag{4.25}$$

сильно в $L_{\overline{p}_j(\cdot)}(D^T)$. В силу (2.5) интегралы $\int\limits_{D^T}|a(x, u_{mh}, \nabla u)|^{\overline{p}_j(x)}dxdt$ равностепенно абсолютно непрерывны. Поэтому (4.25) легко следует из теоремы Витали [3, гл. III, § 6, теорема 15].

После умножения уравнений (4.5) на $\varphi(t) \in C_0^\infty(-1, T-\delta)$ и интегрирования по D^T получим:

$$\int\limits_{D^T} \varphi(\partial_t^{-h}\beta(x, u_m(t)) - \beta(x, u_m(t))q(x, u_{mh})+ \tag{4.26}$$
$$+(a(x, u_{mh}, \nabla u_m(t)) - \beta(x, u_m(t))G(u_{mh})) \cdot \nabla\varphi dxdt = 0.$$

Нетрудно видеть, что при $2h < \delta$, $m \to \infty$, имеет место соотношение

$$\int\limits_{D^T} \varphi\partial_t^{-h}\beta(x, u_m)dxdt = -\int\limits_0^{T-h}\int\limits_\Omega \beta(x, u_m)\partial_t^h\varphi(t)dxdt - \frac{1}{h}\int\limits_0^h\int\limits_\Omega \varphi(t)\beta(x, u_{0m})dxdt \to \tag{4.27}$$
$$\to -\int\limits_{D^T} \beta(x, u)\varphi_t dxdt - \int\limits_\Omega \varphi(0)\beta(x, u_0)dx.$$

После предельного перехода в (4.26) с учетом (4.18), (4.24) и (4.27), будем иметь

$$\int\limits_{D^T} \left((\beta(x, u_0) - \beta(x, u))\varphi_t + v_i D_i\varphi - \beta(x, u)G(u) \cdot \nabla\varphi\right) dxdt = \tag{4.28}$$
$$= \int\limits_{D^T} \beta(x, u)q(x, u)\varphi dxdt.$$

Следующая лемма использует идею работы [19].

Лемма 4.2. *Пусть $\beta(x, r)$ — каратеодориева функция, неубывающая по r, и измеримые функции $v : D^T \to \mathbb{R}$, $v_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ таковы, что $\beta(x, v) \in L_1(D^T)$, $\beta(x, v_0) \in L_1(\Omega)$. Пусть $w \in X' + L_1(D^T)$ и*

$$\int\limits_{D^T} \phi_t(\beta(x, v) - \beta(x, v_0))dxdt + (w, \phi)_{D^T} = 0$$

при всех $\phi \in C_0^\infty((-1, T) \times \mathbb{R}^n)$.

Тогда

$$-(\beta(x, v)_t, \xi(x, v)\varphi)_{D^T} = \int\limits_{D^T} \varphi_t \int\limits_{v_0}^{v} \xi(x, r)d\beta(x, r)dxdt \tag{4.29}$$

при всех ограниченных $\xi(x, s)$, монотонных и липшицевых по s, таких, что $\nabla\xi(x, v) \in X$, и $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times (-1, T))$ (либо $\xi = \xi(s) \in \operatorname{Lip}_0 \mathbb{R}$).

Доказательство см. в [6]. Обычно формулу (4.29), в частной форме установленную впервые в работе [8], называют «формулой интегрирования по частям» и доказывают только для функций $\xi = \xi(v)$ (см. [14]).

Из (4.28) легко следует, что $\beta(x, u)_t \in X' + L_1(D^T)$. Действительно, в силу (4.18) $v = (v_1, \ldots, v_n) \in X'$, и из (2.3), (2.4), (4.8) находим, что

$$\beta(x, u)G(u) \in X', \tag{4.30}$$

а также

$$\beta(x, u)G(u) \in L_1(D^T), \quad \beta(x, u)q(x, u) \in L_1(D^T). \tag{4.31}$$

Применяя к (4.28) лемму 4.2, получаем

$$\int\limits_{D^T} \left(\varphi_t \int\limits_{u_0}^{u} \xi(r)d\beta(x, r) - \sum_{i=1}^n v_i D_i(\xi(u)\varphi) + \beta(x, u)G(u) \cdot \nabla(\varphi\xi(u))\right) dxdt = \tag{4.32}$$
$$= -\int\limits_{D^T} \beta(x, u)q(x, u)\xi(u)\varphi dxdt,$$

где $\xi(r) = T_k(r)$, $\varphi = \varphi(t) \in C_0^\infty(0,T)$ (либо $\xi \in \mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$, $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n \times (-1,T))$). Тогда, в силу неравенств $0 \leqslant u(x,t) \leqslant M_T$, будем иметь при $k > M_T$ равенство $\xi(u) = u$, поэтому (4.32) принимает вид

$$\int\limits_{D^T} \left(\varphi_t B(x,u(t)) - \sum_{i=1}^n v_i \varphi D_i u + \beta(x,u) G(u) \cdot \nabla(\varphi u) \right) dxdt = \tag{4.33}$$

$$= - \int\limits_{D^T} \beta(x,u) q(x,u) u \varphi dxdt.$$

Отсюда следует, что функция $\int\limits_{\Omega} B(x,u(t))dx$ абсолютно непрерывна по t.

Проинтегрировав (4.12) по $t \in (0,T)$, после предельного перехода $m \to \infty$, используя (4.14), получим при неотрицательных функциях $\alpha \in C_0^\infty(0,T)$

$$- \int\limits_{D^T} \alpha_t B(x,u) dxdt \leqslant \liminf_{m\to\infty} \int\limits_{D^T} -\alpha a(x,u_{mh},\nabla u_m) \cdot \nabla u_m dxdt +$$

$$+ \int\limits_{D^T} \left(\alpha \beta(x,u) G(u) \cdot \nabla u + \beta(x,u) q(x,u) u \alpha \right) dxdt.$$

Сложив это с (4.33), в котором выбрано $\varphi = \alpha$, будем иметь

$$\limsup_{m\to\infty} \int\limits_{D^T} \alpha a(x,u_{mh},\nabla u_m) \cdot \nabla u_m dxdt \leqslant \sum_{i=1}^n \int\limits_{D^T} \alpha v_i D_i u dxdt. \tag{4.34}$$

Воспользуемся условием (2.7) при $\varphi \in W_{\mathbf{p}}^{0,1}(D^T)$:

$$0 \leqslant \int\limits_{D^T} \alpha (a(x,u_{mh},\nabla u_m) - a(x,u_{mh},\nabla\varphi)) \cdot \nabla(u_m - \varphi) dxdt =$$

$$= \int\limits_{D^T} \alpha a(x,u_{mh},\nabla u_m) \cdot \nabla u_m dxdt - \int\limits_{D^T} \alpha a(x,u_{mh},\nabla u_m) \cdot \nabla \varphi) dxdt -$$

$$- \int\limits_{D^T} \alpha a(x,u_{mh},\nabla\varphi) \cdot \nabla(u_m - \varphi) dxdt.$$

После предельного перехода $m \to \infty$ с использованием соотношений (4.19), (4.25), (4.34) устанавливаем неравенство

$$0 \leqslant \int\limits_{D^T} \alpha v \cdot \nabla u dxdt - \int\limits_{D^T} \alpha v \cdot \nabla \varphi dxdt - \int\limits_{D^T} \alpha a(x,u,\nabla\varphi) \cdot \nabla(u - \varphi) dxdt.$$

Перепишем его в виде

$$0 \leqslant \int\limits_{D^T} \alpha (v - a(x,u,\nabla\varphi)) \cdot \nabla(u-\varphi) dxdt.$$

Подставляя сюда $\varphi = u - \varepsilon\psi$, получим

$$0 \leqslant \int\limits_{D^T} \alpha (v - a(x,u,\nabla(u - \varepsilon\psi))) \cdot \nabla\psi dxdt.$$

Предельный переход $\varepsilon \to 0$ приводит к соотношению

$$0 \leqslant \int\limits_{D^T} \alpha (v - a(x,u,\nabla u)) \cdot \nabla\psi dxdt.$$

Ввиду произвольности $\psi \in W_{\mathbf{p}}^{0,1}(D^T)$, а также $\alpha \geqslant 0$, это влечет равенства $v_i = a_i(x,u,\nabla u)$. Тогда (4.28) совпадает с (3.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алхутов Ю. А., Жиков В. В.* Теоремы существования и единственности решений параболических уравнений с переменным порядком нелинейности// Мат. сб. — 2014. — *205*, № 3. — С. 3–14.
2. *Беляков А. О., Давыдов А. А.* Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса// Тр. ИММ УрО РАН. — 2016. — *22*, № 2. — С. 38–46.
3. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
4. *Кружков С. Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными// Мат. сб. — 1970. — *81(123)*, № 2. — С. 228–255.
5. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
6. *Мукминов Ф. Х.* Единственность ренормализованного решения эллиптико-параболической задачи в анизотропных пространствах Соболева—Орлича// Мат. сб. — 2017. — *208*, № 8. — С. 1187–1206.
7. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988.
8. *Alt H. W., Luckhaus S.* Quasilinear elliptic-parabolic differential equations// Math. Z. — 1983. — *183*. — С. 311–341.
9. *Bertozzi A., Slepcev D.* Existence and uniqueness of solutions to an aggregation equation with degenerate diffusion// Commun. Pur. Appl. Anal. — 2010. — *9*, № 6. — С. 1617–1637.
10. *Blanchet A., Carrillo J. A., Laurencot P.* Critical mass for a Patlak—Keller—Segel model with degenerate diffusion in higher dimensions// Calc. Var. — 2009. — *35*. — С. 133–168.
11. *Boi S., Capasso V., Morale D.* Modeling the aggregative behavior of ants of the species Polyergus rufescens// Nonlinear Anal. Real World Appl. — 2000. — *1*. — С. 163–176.
12. *Burger M., Fetecau R. C., Huang Y.* Stationary states and asymptotic behaviour of aggregation models with nonlinear local repulsion// SIAM J. Appl. Dyn. Syst. — 2014. — *13*, № 1. — С. 397–424.
13. *Carrillo J. A., Hittmeir S., Volzone B., Yao Y.* Nonlinear aggregation-diffusion equations: radial symmetry and long time asymptotics// `arxiv:1603.07767v1[math.ap]`. — 2016.
14. *Carrillo J., Wittbold P.* Uniqueness of renormalized solutions of degenerate elliptic-parabolic problems// J. Differ. Equ. — 1999. — *156*. — С. 93–121.
15. *Eftimie R., Vries G., Lewis M. A., Lutscher F.* Modeling group formation and activity patterns in self-organizing collectives of individuals// Bull. Math. Biol. — 2007. — *146*, № 69. — С. 1537–1565.
16. *Fan X.* Anisotropic variable exponent Sobolev spaces and $p(x)$-Laplacian equations// Complex Var. Elliptic Equ. — 2011. — *56*, № 7-9. — С. 623-642.
17. *Milewski P. A., Yang X.* A simple model for biological aggregation with asymmetric sensing// Commun. Math. Sci. — 2008. — *6*. — С. 397–416.
18. *Morale D., Capasso V., Oelschlager K.* An interacting particle system modelling aggregation behavior: from individuals to populations// J. Math. Biol. — 2005. — *50*. — С. 49–66.
19. *Otto F.* L1-contraction and uniqueness for quasilinear elliptic-parabolic equations// J. Differ. Equ. — 1996. — *131*. — С. 20–38.
20. *Topaz C. M., Bertozzi A. L.* Swarming patterns in a two-dimensional kinematic model for biological groups// SIAM J. Appl. Math. — 2004. — *65*. — С. 152–174.
21. *Topaz C. M., Bertozzi A. L., Lewis M. A.* A nonlocal continuum model for biological aggregation// Bull. Math. Biol. — 2006. — *68*. — С. 1601–1623.

В. Ф. Вильданова
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,
450000, г. Уфа, ул. Октябрьской революции, 3а
E-mail: `gilvenera@mail.ru`

Ф. Х. Мукминов
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112;
Уфимский государственный авиационный технический университет,
450008, г. Уфа, ул. Карла Маркса, 12
E-mail: `mfkh@rambler.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-557-572 UDC 517.956.45, 517.968.74.

Existence of Weak Solution of the Aggregation Integro-Differential Equation

© 2017 **V. F. Vildanova, F. Kh. Mukminov**

Abstract. In this work, we investigate the mixed problem for anisotropic integro-differential equation with variable nonlinearity indices. Using the discretization method with respect to time, we prove the existence of a weak solution in a bounded cylinder. We give an estimate of the lifetime of the solition.

REFERENCES

1. Yu. A. Alkhutov and V. V. Zhikov, “Teoremy sushchestvovaniya i edinstvennosti resheniy parabolicheskikh uravneniy s peremennym poryadkom nelineynosti” [Theorems on existence and uniqueness of solutions of parabolic equations with variable nonlinearity order], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2014, **205**, No. 3, 3–14 (in Russian).
2. A. O. Belyakov and A. A. Davydov, “Optimizatsiya effektivnosti tsiklicheskogo ispol’zovaniya vozobnovlyaemogo resursa” [Optimization of efficiency of cyclic use of renewable resource], *Tr. IMM UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Branch Russ. Acad. Sci.], 2016, **22**, No. 2, 38–46 (in Russian).
3. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Lineynye operatory. Obshchaya teoriya* [Linear Operators, Part 1: General Theory], IL, M., 1962 (Russian translation).
4. S. N. Kruzhkov, “Kvazilineynye uravneniya pervogo poryadka so mnogimi nezavisimymi peremennymi” [First-order quasilinear equationa with many independent variables], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1970, **81(123)** , No. 2, 228–255 (in Russian).
5. J.-L. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications], Mir, M., 1971 (Russian translation).
6. F. Kh. Mukminov, “Edinstvennost’ renormalizovannogo resheniya elliptiko-parabolicheskoy zadachi v anizotropnykh prostranstvakh Soboleva—Orlicha” [Uniqueness of renormalized solution of an elliptic-parabolic problem in anisotropic Sobolev–Orlicz spaces], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2017, **208**, No. 8, 1187–1206 (in Russian).
7. S. L. Sobolev, *Nekotorye primeneniya funktsional’nogo analiza v matematicheskoy fizike* [Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1988 (in Russian).
8. H. W. Alt and S. Luckhaus, “Quasilinear elliptic-parabolic differential equations,” *Math. Z.*, 1983, **183**, 311–341.
9. A. Bertozzi and D. Slepcev, “Existence and uniqueness of solutions to an aggregation equation with degenerate diffusion,” *Commun. Pur. Appl. Anal.*, 2010, **9**, No. 6, 1617–1637.
10. A. Blanchet, J. A. Carrillo, and P. Laurencot, “Critical mass for a Patlak—Keller—Segel model with degenerate diffusion in higher dimensions,” *Calc. Var.*, 2009, **35**, 133–168.
11. S. Boi, V. Capasso, and D. Morale, “Modeling the aggregative behavior of ants of the species Polyergus rufescens,” *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2000, **1**, 163–176.
12. M. Burger, R. C. Fetecau, and Y. Huang, “Stationary states and asymptotic behaviour of aggregation models with nonlinear local repulsion,” *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2014, **13**, No. 1, 397–424.
13. J. A. Carrillo, S. Hittmeir, B. Volzone, and Y. Yao, “Nonlinear aggregation-diffusion equations: radial symmetry and long time asymptotics,” *arxiv:1603.07767v1[math.ap]*, 2016.
14. J. Carrillo and P. Wittbold, “Uniqueness of renormalized solutions of degenerate elliptic-parabolic problems,” *J. Differ. Equ.*, 1999, **156**, 93–121.
15. R. Eftimie, G. Vries, M. A. Lewis, and F. Lutscher, “Modeling group formation and activity patterns in self-organizing collectives of individuals,” *Bull. Math. Biol.*, 2007, **146**, No. 69, 1537–1565.
16. X. Fan, “Anisotropic variable exponent Sobolev spaces and $p(x)$-Laplacian equations,” *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2011, **56**, No. 7–9, 623-642.
17. P. A. Milewski and X. Yang, “A simple model for biological aggregation with asymmetric sensing,” *Commun. Math. Sci.*, 2008, **6**, 397–416.
18. D. Morale, V. Capasso, and K. Oelschlager, “An interacting particle system modelling aggregation behavior: from individuals to populations,” *J. Math. Biol.*, 2005, **50**, 49–66.

19. F. Otto, “L1-contraction and uniqueness for quasilinear elliptic-parabolic equations,” *J. Differ. Equ.*, 1996, **131**, 20–38.
20. C. M. Topaz and A. L. Bertozzi, “Swarming patterns in a two-dimensional kinematic model for biological groups,” *SIAM J. Appl. Math.*, 2004, **65**, 152–174.
21. C. M. Topaz, A. L. Bertozzi, and M. A. Lewis, “A nonlocal continuum model for biological aggregation,” *Bull. Math. Biol.*, 2006, **68**, 1601–1623.

V. F. Vildanova
Bashkir State Pedagogical University,
3a Oktyabrskoy Revolyutsii st., 450000 Ufa, Russia
E-mail: `gilvenera@mail.ru`

F. Kh. Mukminov
Institute of Mathematics with Computer Center of the RAS,
112 Chernyshevskogo st., 450008 Ufa, Russia
Ufa State Aviation Technical University,
12 Karla Marksa st., 450008 Ufa, Russia
E-mail: `mfkh@rambler.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 4 (2017). С. 573–585

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-573-585 УДК 517.956.25

ОБ ОТСУТСТВИИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МОНОТОННЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КОЭРЦИТИВНЫХ НЕРАВЕНСТВ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

© 2017 г. **Е. И. ГАЛАХОВ, О. А. САЛИЕВА**

Аннотация. В работе на основе метода нелинейной емкости проводится исследование вопроса об отсутствии неотрицательных монотонных решений для квазилинейного эллиптического неравенства вида $\Delta_p u \geqslant u^q$ в полупространстве в терминах параметров p и q.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Необходимые условия существования нетривиальных неотрицательных решений квазилинейных уравнений вида $Au = u^q$ и неравенств вида $Au \geqslant u^q$, где A — некоторый эллиптический оператор, в полупространстве $\mathbb{R}^N_+$ представляют значительный интерес как сами по себе, так и в связи с априорными оценками решений краевых задач в ограниченных областях. Это связано с тем, что при масштабировании области последовательность решений соответствующих задач, вообще говоря, может сходиться к решению некоторой предельной задачи в полупространстве (см., например, [3]). При этом операторы A могут быть как коэрцитивными (оператор Лапласа Δ, оператор p-Лапласа Δ_p), так и антикоэрцитивными (противоположного знака).

Целью исследования является нахождение диапазона значений q, при которых соответствующее уравнение или неравенство в полупространстве $\mathbb{R}^N_+$ не имеет нетривиальных неотрицательных решений.

Первые результаты в этом направлении для дифференциальных неравенств с антикоэрцитивными операторами были получены А. Берестики, И. Капуццо Дольчетта и Л. Ниренбергом [4], доказавшими отсутствие решений неравенства $-\Delta u \geqslant u^q$ при $1 < q < \dfrac{N+1}{N-1}$. Оптимальность этих результатов была показана И. Бириนделли и Э. Митидиери [6]. Неравенства вида $Au \geqslant u^q$ с оператором $Au = -\Delta_p u$, где $\Delta_p u := \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du)$, в полупространстве изучались М. Ф. Бидо-Верон и С. И. Похожаевым [5], а позднее — Л. Вероном и А. Порреттой [14]. Им принадлежат результаты об отсутствии решений в полупространстве с выколотой окрестностью нуля, а следовательно, и во всем полупространстве при $p-1 < q < q_{\mathrm{cr}}(p,n)$, где $q_{\mathrm{cr}}(p,n) = p-1+\dfrac{p}{\beta_{p,n}}$, а $\beta_{p,n}$ — показатель роста сингулярных решений вблизи нуля, в явном виде полученный только при $n=2$ ($\beta_{p,2} = \dfrac{3-p+\sqrt{(p-1)^2+2-p}}{3(p-1)}$). Следует отметить также работы Р. Филиппуччи [11] о критических показателях для полулинейных неравенств вида $-\operatorname{div}(u^\alpha|x|^\beta Du) \geqslant |x|^\gamma u^q$ во всем полупространстве, Э. Н. Дансера, И. Доу и М. Эфендиева [7] и Х. Зоу [15] об отсутствии решений задачи Дирихле

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^q & (x \in \mathbb{R}^N_+), \\ u(x) = 0 & (x \in \mathbb{R}^N_+) \end{cases} \tag{1.1}$$

для нелинейного уравнения с оператором p-Лапласа в полупространстве, а также А. Фарины, Л. Монторо и Б. Шиунци [8–10] о монотонности существенно ограниченных решений той же задачи, из которой следуют утверждения об их отсутствии при значениях q, которые будут указаны ниже. Эллиптические задачи с сингулярными коэффициентами вблизи неограниченных множеств рассматривались, в частности, авторами настоящей работы в [12, 13]. Что касается неравенств с коэрцитивными операторами, нам известны лишь результаты во всем пространстве [1].

В настоящей работе исследуются необходимые условия существования нетривиальных неотрицательных решений эллиптического неравенства $\Delta_p u \geqslant u^q$ в полупространстве. На основе метода нелинейной емкости [1, 2] такие условия получены в некотором подклассе монотонных функций. Отметим, что при $p = 2$ они совпадают с оптимальными условиями для оператора с противоположным знаком [6].

Буквой c в тексте обозначены различные положительные константы, зависящие от параметров задачи и, возможно, от условий роста, накладываемых на решение.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки России (соглашение № 05.Y09.21.0013 от 19 мая 2017).

Авторы благодарят рецензента за ценные замечания.

2. Постановка задачи и формулировка основного результата

Обозначим $\mathbb{R}^N_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \Delta_p u \geqslant u^q & (x \in \mathbb{R}^N_+), \\ u(x) \geqslant 0 & (x \in \mathbb{R}^N_+). \end{cases} \tag{2.1}$$

Будем понимать слабые решения задачи (2.1) в следующем смысле.

Определение 2.1. *Слабым решением* задачи (2.1) будем называть неотрицательную функцию $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N_+)$, удовлетворяющую интегральному неравенству

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |Du|^{p-2}(Du, D\varphi)\, dx \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^q \varphi\, dx$$

для любой неотрицательной пробной функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N_+)$.

Замечание 2.1. Методом аппроксимации можно показать, что класс слабых решений задачи (2.1) не изменится, если в качестве класса пробных функций рассматривать неотрицательные функции $\varphi \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$.

Замечание 2.2. Отметим, что на решения задачи (2.1) не накладываются граничные условия.

Замечание 2.3. Слабые решения задач, рассматриваемых ниже, определяются аналогично.

Далее будем рассматривать решения, удовлетворяющие условию

$$u(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N) \leqslant cu(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N + 2R) \tag{2.2}$$

для любых $(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N_+$ и $R > 0$, где $c > 0$ — константа, не зависящая от $(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N)$ и от R.

Замечание 2.4. В частности, для функций $u(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N)$, неубывающих по переменной x_N, условие (2.2) выполняется с константой $c = 1$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть* $p > \dfrac{2N+2}{N+2}$ *и*

$$\max\{1, p-1\} < q \leqslant \frac{(N+1)(p-1)}{N-p+1}. \tag{2.3}$$

Тогда задача (2.1) *не имеет нетривиальных слабых решений* $u \in C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N_+)$, *удовлетворяющих условию* (2.2) *и монотонных по переменной* x_N, *т. е. таких, что*

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_N} \geqslant 0 \text{ или } \frac{\partial u(x)}{\partial x_N} \leqslant 0 \quad (x \in \mathbb{R}^N_+). \tag{2.4}$$

Замечание 2.5. Частный случай условия (2.4), а именно требование монотонного неубывания решений, для некоторых квазилинейных антикоэрцитивных задач в полупространстве рассматривался А. Фариной, Л. Монторо и Б. Шиунци (см. [10]). В частности, ими было показано, что если функция $f : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ непрерывна по Липшицу, то условие (2.4) выполняется для решений задачи Дирихле

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) & (x \in \mathbb{R}^N_+), \\ u(x) = 0 & (x \in \partial\mathbb{R}^N_+) \end{cases} \tag{2.5}$$

с $|Du| \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, откуда вытекает отсутствие решений частного случая этой задачи (1.1) с $f(u) = u^q$ при

$$\begin{cases} q > p-1, & \text{если } N \leqslant \dfrac{p(p+3)}{p-1}, \\ p-1 < q < q_{\mathrm{cr}}(p,N), & \text{если } N > \dfrac{p(p+3)}{p-1}, \end{cases}$$

где $q_{\mathrm{cr}}(p,N) = \dfrac{[(p-1)N-p]^2 + p^2(p-2) - p^2(p-1)N + 2p^2\sqrt{(p-1)(N-1)}}{(N-p)[(p-1)N-p(p+3)]}$.

Замечание 2.6. При $p = 2$ условие (2.3) совпадает с полученным в [4] условием отсутствия нетривиальных неотрицательных решений неравенства $-\Delta u \geqslant u^q$, оптимальность которого была показана в [6].

Замечание 2.7. Условие $u \in C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N_+)$ вводится для упрощения формулировки и доказательства. Отсутствие решений может быть доказано и в более широком классе функций, удовлетворяющих некоторым условиям локальной интегрируемости. Результаты об отсутствии произвольных слабых решений задачи (2.1) нам неизвестны.

3. Доказательство теоремы 2.1

Воспользуемся методом нелинейной емкости [1, 2]. Выберем семейство неотрицательных пробных функций $\xi_R^\lambda \in C^1_0(\mathbb{R}^N)$ таких, что $\lambda > 0$ и $\xi_R(x) = \prod\limits_{k=1}^{N-1} \chi_R(x_k) \cdot \chi_R(x_N - 3R)$ с

$$\chi_R(t) = \begin{cases} 1 & (|t| \leqslant R), \\ 0 & (|t| \geqslant 2R), \end{cases} \tag{3.1}$$

причем

$$|D\xi_R(x)| \leqslant cR^{-1} \quad (x \in \mathbb{R}^N_+). \tag{3.2}$$

Умножим обе части (2.1) на $u^\alpha \xi_R x_N$, где $\alpha > 0$, и проинтегрируем по частям. При этом будем использовать обозначение

$$Q_{kR} = \{(x_1, \ldots, x_{N-1}) : -kR \leqslant x_1 \leqslant kR, \ldots, -kR \leqslant x_{N-1} \leqslant kR\},\ k = 1, 2.$$

Отметим, что в рассматриваемом случае пробная функция $u^\alpha \xi_R x_N$ является допустимой даже для решений, обращающихся в 0, так как $\alpha > 0$, в отличие от случая антикоэрцитивного неравенства.

Используя монотонность подынтегральной функции $u^{q+\alpha}x_N$ по x_N при любых фиксированных $(x_1,\dots,x_{N-1})$, после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} &c\int\limits_{Q_{2R}\times[0,4R]} u^{q+\alpha}x_N\,dx \leqslant \int\limits_{Q_{2R}\times[2R,4R]} u^{q+\alpha}x_N\,dx \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{q+\alpha}\xi_R^\lambda x_N\,dx + \alpha\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha-1}|Du|^p\xi_R^\lambda x_N\,dx \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha}|Du|^{p-1}|D\xi_R^\lambda|x_N\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha}|Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R^\lambda\,dx. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Применение параметрического неравенства Юнга с показателями $\dfrac{p}{p-1}$ и p к первому интегралу в правой части (3.3) дает

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{q+\alpha}\xi_R^\lambda x_N\,dx + \frac{\alpha}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha-1}|Du|^p\xi_R^\lambda x_N\,dx \leqslant \\ &\leqslant C(\alpha)\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha+p-1}|D\xi_R^\lambda|^p\xi_R^{1-p}x_N\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha}|Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R^\lambda\,dx. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Повторно применив параметрическое неравенство Юнга к первому интегралу в правой части (3.4) с показателями $\dfrac{q+\alpha}{\alpha+p-1}$ и $\dfrac{q+\alpha}{q-p+1}$, получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{q+\alpha}\xi_R^\lambda x_N\,dx + \frac{\alpha}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha-1}|Du|^p\xi_R^\lambda x_N\,dx \leqslant \\ &\leqslant C(\alpha,\lambda)\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |D\xi_R|^{-\frac{p(q+\alpha)}{q-p+1}}\xi_R^{\lambda-\frac{p(q+\alpha)}{q-p+1}}x_N\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha}|Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R^\lambda\,dx := I_1(R)+I_2(R). \end{aligned} \tag{3.5}$$

При $\lambda > \dfrac{p(q+\alpha)}{q-p+1}$ интеграл $I_1(R)$ оценивается как

$$I_1(R) \leqslant CR^{N+1-\frac{p(q+\alpha)}{q-p+1}} \to 0 \text{ при } R\to\infty. \tag{3.6}$$

Если $\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_N} \geqslant 0$, то $I_2(R)\leqslant 0$. Если же $\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_N} \leqslant 0$, то интеграл $I_2(R)$ оценивается разными способами в случаях $\dfrac{2N+2}{N+2} < p < 2$ и $p>2$ (случай $p=2$ рассмотрен в [4]).

Случай $\dfrac{2N+2}{N+2} < p < 2$. *Первый способ.* Используя неравенство Гельдера и интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} I_2(R) &= -\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha}|Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R^\lambda\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha}\left(-\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^{p-1}\xi_R^\lambda\,dx = \\ &= c(\alpha,p)\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}\left(-\frac{\partial u^{1+\frac{\alpha}{p-1}}}{\partial x_N}\right)^{p-1}\xi_R^\lambda\,dx \leqslant c(\alpha,p)\left(-\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}\frac{\partial u^{1+\frac{\alpha}{p-1}}}{\partial x_N}\xi_R^\lambda\,dx\right)^{p-1} R^{N(2-p)} = \\ &= c(\alpha,p)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{1+\frac{\alpha}{p-1}}\frac{\partial\xi_R^\lambda}{\partial x_N}\,dx\right)^{p-1} R^{N(2-p)} = c(\alpha,p)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{1+\frac{\alpha}{p-1}}\frac{\partial\xi_R^\lambda}{\partial x_N}\,dx\right)^{p-1} R^{N(2-p)} \leqslant \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant c(\alpha,p,q)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{q+\alpha}\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{\alpha+p-1}{q+\alpha}}\cdot R^{N(2-p)}\times\\
&\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}\left|\frac{\partial\xi_R^\lambda}{\partial x_N}\right|^{\frac{(q+\alpha)(p-1)}{(q+\alpha-1)(p-1)-\alpha}}(\xi_R^\lambda x_N)^{-\frac{\alpha+p-1}{(q+\alpha-1)(p-1)-\alpha}}\,dx\right)^{\frac{(q+\alpha-1)(p-1)-\alpha}{q+\alpha}}\leqslant\\
&\leqslant\frac14\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{q+\alpha}\xi_R^\lambda x_N\,dx+c(\alpha,p,q)R^{\frac{N[(2-p)(q+\alpha)+(q+\alpha-1)(p-1)-\alpha]-(q+\alpha+1)(p-1)-\alpha}{q-p+1}},
\end{aligned}
$$

где последнее слагаемое стремится к 0 при $R\to\infty$ при $\alpha>0$ настолько малом, что показатель степени R в предыдущем неравенстве отрицателен (это имеет место при $\alpha=0$ в силу условия теоремы на параметры p,q и N).

Второй способ. Если в правой части (2.3) имеет место строгое неравенство, выберем β так, чтобы

$$
\frac{2q-(N+1)(q-1)}{q(p-2)}<\beta<-\frac{N}{p-1}, \tag{3.7}
$$

и разобьем интеграл $I_2(R)$ на два интеграла:

$$
\begin{aligned}
&I_2(R)=I_2^1(R)+I_2^2(R)=\\
&=-\int\limits_{|D(u^{1+\frac{\alpha}{p-1}})(x)|<R^\beta} u^\alpha|Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R\,dx-\int\limits_{|D(u^{1+\frac{\alpha}{p-1}})(x)|\geqslant R^\beta} u^\alpha|Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R\,dx\leqslant\\
&\leqslant\int\limits_{|D(u^{1+\frac{\alpha}{p-1}})(x)|<R^\beta} u^\alpha|Du|^{p-1}\,dx-\int\limits_{|D(u^{1+\frac{\alpha}{p-1}})(x)|\geqslant R^\beta} u^\alpha|Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R\,dx.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Оценка $I_2^1(R)$ следует непосредственно из (3.7):

$$
I_2^1(R)\leqslant cR^{N+\beta(p-1)}\to 0 \text{ при } R\to\infty. \tag{3.9}
$$

Оценка $I_2^2(R)$. При $\dfrac{\partial u}{\partial x_N}\geqslant 0$ это слагаемое неположительно. При $\dfrac{\partial u}{\partial x_N}\leqslant 0$ и $\dfrac{2N+2}{N+2}<p<2$ имеем

$$
\begin{aligned}
&I_2^2(R):=\int\limits_{|D(u^{1+\frac{\alpha}{p-1}})(x)|\geqslant R^\beta} u^\alpha|Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R^\lambda\,dx\leqslant\\
&\leqslant cR^{\beta(p-2)}\int\limits_{|D(u^{1+\frac{\alpha}{p-1}})(x)|\geqslant R^\beta} u^{\frac{\alpha}{p-1}}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R^\lambda\,dx\leqslant cR^{\beta(p-2)}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\frac{\alpha}{p-1}}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R^\lambda\,dx=\\
&=cR^{\beta(p-2)}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}\frac{\partial(u^{1+\frac{\alpha}{p-1}})}{\partial x_N}\xi_R^\lambda\,dx=-cR^{\beta(p-2)}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{1+\frac{\alpha}{p-1}}\frac{\partial\xi_R}{\partial x_N}\xi_R^{\lambda-1}\,dx\leqslant\\
&\leqslant cR^{\beta(p-2)}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{1+\frac{\alpha}{p-1}}\left|\frac{\partial\xi_R}{\partial x_N}\right|\xi_R^{\lambda-1}\,dx\leqslant cR^{\beta(p-2)-1}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{1+\frac{\alpha}{p-1}}\left|\frac{\partial\xi_R}{\partial x_N}\right|x_N\xi_R^{\lambda-1}\,dx.
\end{aligned}
$$

Применяя к последнему интегралу из этой цепочки неравенство Юнга с показателями

$$
a=\frac{(q+\alpha)(p-1)}{\alpha+p-1},\quad \frac1a+\frac1{a'}=1,
$$

получим

$$
I_2^2(R)\leqslant\frac14\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{q+\alpha}\xi_R^\lambda x_N\,dx+cR^{N+1+a'(\beta(p-2)-2)}. \tag{3.10}
$$

В силу (3.7) при достаточно малых α имеем $N+1+a'(\beta(p-2)-2)<0$. Комбинируя (3.5)–(3.10), приходим к

$$\frac{1}{4}\int\limits_{Q_{2R}\times[2R,4R]} u^{q+\alpha}x_N\,dx \leqslant cR^{N+1+a'(\beta(p-2)-2)} \to 0 \text{ при } R\to\infty, \tag{3.11}$$

что с учетом (3.3) завершает доказательство теоремы в случае $1<p<2$ при строгом неравенстве в правой части условия (2.3).

Если же при $\dfrac{2N+2}{N+2}<p<2$ в правой части (2.3) имеет место равенство, то, повторяя предыдущие рассуждения с $\beta=\dfrac{2q-(N+1)(q-1)}{q(p-2)}=-\dfrac{N}{p-1}$, получаем в пределе

$$I:=\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{q+\alpha}x_N\,dx<+\infty,$$

откуда

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{Q_R\times[2R,4R]} u^{q+\alpha}x_N\,dx=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{Q_R\times[0,4R]} u^{q+\alpha}x_N\,dx-\lim_{R\to\infty}\int\limits_{Q_R\times[0,2R]} u^{q+\alpha}x_N\,dx=I-I=0,$$

и в силу условия (2.2)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{q+\alpha}x_N\,dx=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{Q_R\times[0,2R]} u^{q+\alpha}x_N\,dx\leqslant c\lim_{R\to\infty}\int\limits_{Q_R\times[2R,4R]} u^{q+\alpha}x_N\,dx=0,$$

что влечет утверждение теоремы.

Случай $p>2$. В этом случае при $\dfrac{\partial u}{\partial x_N}\geqslant 0$ имеем $I_2(R)\leqslant 0$, а при $\dfrac{\partial u}{\partial x_N}\leqslant 0$ получим

$$I_2(R)=-\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^\alpha|Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^\alpha|Du|^{p-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right|\xi_R\,dx=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^\alpha|Du|^{p-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right|^{\frac{p-2}{p-1}}\left|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right|^{\frac{1}{p-1}}\xi_R^\lambda\,dx\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^\alpha|Du|^{p-2+\frac{p-2}{p-1}}\left|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right|^{\frac{1}{p-1}}\xi_R^\lambda\,dx,$$

и в силу неравенства Юнга с показателями $\dfrac{p-1}{p-2}$ и $p-1$

$$I_2(R)\leqslant\frac{\alpha}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha-1}|Du|^p\xi_R^\lambda x_N\,dx+c\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha+p-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right|x_N^{2-p}\xi_R^\lambda\,dx=$$
$$=\frac{\alpha}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha-1}|Du|^p\xi_R^\lambda x_N\,dx-c\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha+p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}x_N^{2-p}\xi_R^\lambda\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\alpha}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha-1}|Du|^p\xi_R^\lambda x_N\,dx+cR^{2-p}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha+p-1}\left|\frac{\partial \xi}{\partial x_N}\right|\xi_R^{\lambda-1}\,dx,$$

откуда, вновь применяя неравенство Юнга с показателями $\dfrac{q+\alpha}{\alpha+p-1}$ и $\dfrac{q+\alpha}{q-p+1}$, будем иметь

$$\begin{aligned}I_2(R)\leqslant{}&\frac{\alpha}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha-1}|Du|^p\xi_R^\lambda x_N\,dx+\frac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{q+\alpha}\xi_R^\lambda x_N\,dx+\\&+cR^{\frac{(2-p)(q+\alpha)}{q-p+1}}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} x_N^{-\frac{\alpha+p-1}{q-p+1}}\left|\frac{\partial\xi_R}{\partial x_N}\right|^{\frac{q+\alpha}{q-p+1}}\xi_R^{\lambda-\frac{q+\alpha}{q-p+1}}\,dx.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Доказательство при $q < \dfrac{(N+1)(p-1)}{N-p+1}$ завершается аналогично случаю $\dfrac{2N+2}{N+2} < p < 2$. При $q = \dfrac{(N+1)(p-1)}{N-p+1}$ получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^q \xi_R^\lambda x_N\,dx < \infty$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R} u^q \xi_R^\lambda x_N\,dx \to 0 \text{ при } R \to \infty, \tag{3.13}$$

где

$$\operatorname{supp} D\xi_R = ((Q_{2R} \setminus Q_R) \times [R, 5R]) \cup (Q_{2R} \times ([R, 5R] \setminus [2R, 4R])).$$

Умножая первое из неравенств (2.1) на $\xi_R^\lambda x_N$, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^q \xi_R^\lambda x_N\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |Du|^{p-1} |D\xi_R^\lambda| x_N\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |Du|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_N} \xi_R^\lambda\,dx. \tag{3.14}$$

Применяя к первому интегралу в правой части (3.14) неравенство Гельдера, с учетом (3.12) получаем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |Du|^{p-1} |D\xi_R^\lambda| x_N\,dx = \int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R} |Du|^{p-1} |D\xi_R^\lambda| x_N\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R} u^{\alpha-1} |Du|^p \xi_R^\lambda x_N\,dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R} u^{(1-\alpha)(p-1)} |D\xi_R^\lambda|^p \xi_R^{\lambda(1-p)} x_N\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R} u^{\alpha-1} |Du|^p \xi_R^\lambda x_N\,dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^q \xi_R^\lambda x_N\,dx \right)^{\frac{(1-\alpha)(p-1)}{pq}} \times$$
$$\times \left(\int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R} |D\xi_R^\lambda|^{\frac{pq}{q-(1-\alpha)(p-1)}} \xi_R^{\frac{\lambda(1-p)(q+\alpha-1)}{q-(1-\alpha)(p-1)}}\,dx \right)^{\frac{q-(1-\alpha)(p-1)}{pq}} \leqslant$$
$$\leqslant cR^{\frac{(N+1)(q-p+1)}{q}-p} \left(\int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R} u^q \xi_R^\lambda x_N\,dx \right)^{\frac{p-1}{q}},$$

т. е.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |Du|^{p-1} |D\xi_R^\lambda| x_N\,dx \leqslant cR^{\frac{(N+1)(q-p+1)}{q}-p} \left(\int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R} u^q \xi_R^\lambda x_N\,dx \right)^{\frac{p-1}{q}}. \tag{3.15}$$

Второй интеграл в правой части (3.14) при $\dfrac{\partial u}{\partial x_N} \geqslant 0$ неположителен, а при $\dfrac{\partial u}{\partial x_N} \leqslant 0$, используя неравенство Гельдера и интегрируя по частям, имеем

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N_+}\left(-\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^{p-1}\xi_R^\lambda\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c(p)\left(\int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R} u\frac{\partial \xi_R^\lambda}{\partial x_N}\,dx\right)^{p-1} R^{N(2-p)} \leqslant c(p,q)\left(\int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R} u^q\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{p-1}{q}}\cdot R^{N(2-p)}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R}\left|\frac{\partial \xi_R^\lambda}{\partial x_N}\right|^{\frac{q}{q-1}}(\xi_R^\lambda x_N)^{-\frac{1}{q-1}}\,dx\right)^{\frac{(q-1)(p-1)}{q}},$$

откуда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}|Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R\,dx \leqslant cR^{\frac{(N+1)(q-p+1)}{q}-p}\left(\int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R} u^q\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{p-1}{q}}. \tag{3.16}$$

Комбинируя (3.14)–(3.16), получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^q\xi_R^\lambda x_N\,dx \leqslant cR^{\frac{(N+1)(q-p+1)}{q}-p}\left(\int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R} u^q\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{p-1}{q}}, \tag{3.17}$$

где в силу (3.13) правая, а следовательно, и левая часть неравенства стремится к 0 при $R\to\infty$ и в случае $q = \dfrac{(N+1)(p-1)}{N-p+1}$, что завершает доказательство.

Замечание 3.1. Пусть $\gamma\in\mathbb{R}$. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \Delta_p u \geqslant (1+x_N^\gamma)u^q & (x\in\mathbb{R}^N_+),\\ u(x)\geqslant 0 & (x\in\mathbb{R}^N_+). \end{cases} \tag{3.18}$$

Аналогично предыдущему результату доказывается

Теорема 3.1. *Пусть* $p > \dfrac{2N+\gamma+2}{N+\gamma+2}$ *и*

$$\max\{p-1,1\} < q \leqslant \frac{(N+\gamma+1)(p-1)}{N-p+1}. \tag{3.19}$$

Тогда задача (3.18) *не имеет неотрицательных нетривиальных слабых решений* $u\in C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N_+)$, *удовлетворяющих условию* (2.2) *и монотонных по переменной* x_N, *т.е. таких, что выполняется неравенство* (2.4).

4. Обобщение на случай систем неравенств

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \Delta_p u \geqslant v^{q_1} & (x\in\mathbb{R}^N_+),\\ \Delta_q v \geqslant u^{p_1} & (x\in\mathbb{R}^N_+),\\ u(x)\geqslant 0 & (x\in\mathbb{R}^N_+),\\ v(x)\geqslant 0 & (x\in\mathbb{R}^N_+). \end{cases} \tag{4.1}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 4.1. *Пусть* $\dfrac{2N+2}{N+2} < p < 2$, $\dfrac{2N+2}{N+2} < q < 2$, $\min\{p_1, q_1\} > 1$ *и*

$$\max\{p_1(q-1)(q_1+1), q_1(p-1)(p_1+1)\} > (N+1)(p_1q_1 - (p-1)(q-1)). \tag{4.2}$$

Тогда задача (4.1) *не имеет неотрицательных нетривиальных слабых решений* $(u,v) \in C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N_+)$, *удовлетворяющих условию* (2.2) *для* u, *а также аналогичному условию для* v *и монотонных по переменной* x_N, *т. е. таких, что выполняется неравенство* (2.4) *для* u *и соответствующее неравенство для* v.

Доказательство. Умножая первое из неравенств (4.1) на $u^\alpha \xi_R^\lambda x_N$, аналогично (3.5) получаем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} v^{q_1} u^\alpha \xi_R^\lambda x_N\,dx + \frac{\alpha}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha-1}|Du|^p \xi_R^\lambda x_N\,dx \leqslant \\
&\leqslant C(\alpha)\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha+p-1}|D\xi_R^\lambda|^p \xi_R^{1-p} x_N\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^\alpha |Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R^\lambda\,dx.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Применим к первому интегралу в правой части (4.3) неравенство Гельдера:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha+p-1}|D\xi_R^\lambda|^p \xi_R^{1-p} x_N\,dx \leqslant \\
&\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{\alpha+p-1}{p_1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |D\xi_R^\lambda|^{\frac{pp_1}{p_1-\alpha-p+1}} \xi_R^{\frac{\lambda((1-p)(p_1+1)-\alpha)}{p_1-\alpha-p+1}} x_N\right)^{\frac{p_1-\alpha-p+1}{p_1}} dx \leqslant \\
&\leqslant cR^{\frac{(N+1)(p_1-(1-\alpha)(p-1))}{pp_1}-1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{\alpha+p-1}{p_1}}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Второй интеграл в правой части (4.3) при $\dfrac{\partial u}{\partial x_N} \geqslant 0$ неположителен, а при $\dfrac{\partial u}{\partial x_N} \leqslant 0$, используя неравенство Гельдера и интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned}
&-\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^\alpha |Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^\alpha\left(-\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^{p-1}\xi_R^\lambda\,dx = \\
&= c(\alpha,p)\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}\left(-\frac{\partial u^{1+\frac{\alpha}{p-1}}}{\partial x_N}\right)^{p-1}\xi_R^\lambda\,dx \leqslant c(\alpha,p)\left(-\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}\frac{\partial u^{1+\frac{\alpha}{p-1}}}{\partial x_N}\xi_R^\lambda\,dx\right)^{p-1} R^{N(2-p)} \leqslant \\
&\leqslant c(\alpha,p)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{1+\frac{\alpha}{p-1}}\frac{\partial\xi_R^\lambda}{\partial x_N}\,dx\right)^{p-1} R^{N(2-p)} \leqslant c(\alpha,p)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{1+\frac{\alpha}{p-1}}\left|\frac{\partial\xi_R^\lambda}{\partial x_N}\right|dx\right)^{p-1} R^{N(2-p)} \leqslant
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant c(\alpha,p,p_1)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{\alpha+p-1}{p_1}} \cdot R^{N(2-p)} \times \\
&\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}\left|\frac{\partial\xi_R^\lambda}{\partial x_N}\right|^{\frac{p_1(p-1)}{(p_1-1)(p-1)-\alpha}} (\xi_R^\lambda x_N)^{-\frac{\alpha+p-1}{(p_1-1)(p-1)-\alpha}}\,dx\right)^{\frac{(p_1-1)(p-1)-\alpha}{p_1}},
\end{aligned}$$

откуда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^\alpha |Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R\,dx \leqslant cR^{\frac{(N+1)(p_1-(1-\alpha)(p-1))}{pp_1}-1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{\alpha+p-1}{p_1}}. \tag{4.5}$$

Комбинируя (4.3)–(4.5), получаем

$$\begin{gathered}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} v^{q_1}u^\alpha\xi_R^\lambda x_N\,dx+\frac{\alpha}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha-1}|Du|^p\xi_R^\lambda x_N\,dx\leqslant\\ \leqslant cR^{\frac{(N+1)(p_1-(1-\alpha)(p-1))}{pp_1}-1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{\alpha+p-1}{p_1}}.\end{gathered} \tag{4.6}$$

Аналогично

$$\begin{gathered}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1}u^\alpha\xi_R^\lambda x_N\,dx+\frac{\alpha}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} v^{\alpha-1}|Dv|^q\xi_R^\lambda x_N\,dx\leqslant\\ \leqslant cR^{\frac{(N+1)(q_1-(1-\alpha)(q-1))}{qq_1}-1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} v^{q_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{\alpha+q-1}{q_1}}.\end{gathered} \tag{4.7}$$

Далее, умножая первое из неравенств (4.1) на $\xi_R^\lambda x_N$, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} v^{q_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}|Du|^{p-1}|D\xi_R^\lambda|x_N\,dx-\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}|Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R^\lambda\,dx. \tag{4.8}$$

Применяя к первому интегралу в правой части (4.8) неравенство Гельдера, с учетом (4.6) получаем:

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}|Du|^{p-1}|D\xi_R^\lambda|x_N\,dx\leqslant\\ &\leqslant\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha-1}|Du|^p\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{(1-\alpha)(p-1)}|D\xi_R^\lambda|^p\xi_R^{\lambda(1-p)}x_N\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\\ &\qquad\leqslant\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha-1}|Du|^p\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{(1-\alpha)(p-1)}{pp_1}}\times\\ &\qquad\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}|D\xi_R^\lambda|^{\frac{pp_1}{p_1-(1-\alpha)(p-1)}}\xi_R^{\frac{\lambda(1-p)(p_1+\alpha-1)}{p_1-(1-\alpha)(p-1)}}\right)^{\frac{p_1-(1-\alpha)(p-1)}{pp_1}}\leqslant\\ &\qquad\leqslant cR^{\frac{(N+1)(p_1-p+1)}{p_1}-p}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{p-1}{p_1}},\end{aligned}$$

т. е.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}|Du|^{p-1}|D\xi_R^\lambda|x_N\,dx\leqslant cR^{\frac{(N+1)(p_1-p+1)}{p_1}-p}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{p-1}{p_1}}. \tag{4.9}$$

Второй интеграл в правой части (4.8) при $\dfrac{\partial u}{\partial x_N} \geqslant 0$ неположителен, а при $\dfrac{\partial u}{\partial x_N} \leqslant 0$, используя неравенство Гельдера и интегрируя по частям, имеем

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N_+}\left(-\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^{p-1}\xi_R^\lambda\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c(p)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u\frac{\partial \xi_R^\lambda}{\partial x_N}\,dx\right)^{p-1} R^{N(2-p)} \leqslant c(p,p_1)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{p-1}{p_1}}\cdot R^{N(2-p)}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}\left|\frac{\partial\xi_R^\lambda}{\partial x_N}\right|^{\frac{p_1}{p_1-1}}(\xi_R^\lambda x_N)^{-\frac{1}{p_1-1}}\,dx\right)^{\frac{(p_1-1)(p-1)}{p_1}},$$

откуда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R\,dx \leqslant cR^{\frac{(N+1)(p_1-p+1)}{p_1}-p}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{p-1}{p_1}}. \tag{4.10}$$

Комбинируя (4.8)–(4.10), получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} v^{q_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx \leqslant cR^{\frac{(N+1)(p_1-p+1))}{p_1}-p}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{p-1}{p_1}}. \tag{4.11}$$

Аналогично,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx \leqslant cR^{\frac{(N+1)(q_1-q+1)}{q_1}-q}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} v^{q_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{q-1}{q_1}}. \tag{4.12}$$

Подставляя (4.11) в (4.12) и обратно, после упрощения получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx \leqslant cR^{N+1-\frac{p_1(q-1)(q_1+1)}{p_1q_1-(p-1)(q-1)}},$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} v^{q_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx \leqslant cR^{N+1-\frac{q_1(p-1)(p_1+1)}{p_1q_1-(p-1)(q-1)}}.$$

Устремляя $R\to+\infty$, при условиях теоремы получаем противоречие, которое завершает доказательство.

Замечание 4.1. Для системы неравенств

$$\begin{cases} \Delta_p u \geqslant (1+x_N)^\gamma v^{q_1} & (x\in\mathbb{R}^N_+),\\ \Delta_q v \geqslant (1+x_N)^\delta u^{p_1} & (x\in\mathbb{R}^N_+),\\ u(x)\geqslant 0 & (x\in\mathbb{R}^N_+),\\ v(x)\geqslant 0 & (x\in\mathbb{R}^N_+), \end{cases} \tag{4.13}$$

где $\gamma\in\mathbb{R}$, $\delta\in\mathbb{R}$, аналогичным образом доказывается

Теорема 4.2. *Пусть* $\dfrac{2N+\gamma+2}{N+\gamma+2} < p < 2$, $\dfrac{2N+\delta+2}{N+\delta+2} < q < 2$, $\min\{p_1,q_1\} > 1$ *и*

$$\max\{p_1(q-1)(q_1+\gamma+1), q_1(p-1)(p_1+\delta+1)\} > (N+1)(p_1q_1-(p-1)(q-1)). \tag{4.14}$$

Тогда задача (4.13) *не имеет неотрицательных нетривиальных слабых решений* $(u, v) \in C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N_+)$, *удовлетворяющих условию* (2.2) *для* u, *а также аналогичному условию для* v *и монотонных по переменной* x_N, *т. е. таких, что выполняется неравенство* (2.4) *для* u *и соответствующее неравенство для* v.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Митидиери Э., Похожаев С. И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных// Тр. МИАН. — 2001. — *234*. — С. 3–383.
2. *Похожаев С. И.* Существенно нелинейные емкости, порожденные дифференциальными операторами// Докл. РАН. — 1997. — *357*. — С. 592–594.
3. *Azizieh C., Clément P.* A priori estimates and continuation methods for positive solutions of p-Laplace equations// J. Differ. Equ. — 2002. — *179*. — С. 213–245.
4. *Berestycki H., Capuzzo Dolcetta I., Nirenberg L.* Superlinear indefinite elliptic problems and nonlinear Liouville theorems// Topol. Methods Nonlinear Anal. — 1994. — *4*. — С. 59–78.
5. *Bidaut-Véron M. F., Pohozaev S. I.* Nonexistence results and estimates for some nonlinear elliptic problems// J. Anal. Math. — 2001. — *84*. — С. 1–49.
6. *Birindelli I., Mitidieri E.* Liouville theorems for elliptic inequalities and applications// Proc. Roy. Soc. Edinburgh. — 1998. — *128A*. — С. 1217–1247.
7. *Dancer E. N., Du Y., Efendiev M.* Quasilinear elliptic equations on half- and quarter-spaces// Adv. Nonlinear Stud. — 2013. — *13*. — С. 115–136.
8. *Farina A., Montoro L., Sciunzi B.* Monotonicity and one-dimensional symmetry for solutions of $-\Delta_p u = f(u)$ in half-spaces// Calc. Var. Part. Differ. Equ. — 2012. — *43*. — С. 123–145.
9. *Farina A., Montoro L., Sciunzi B.* Monotonicity of solutions of quasilinear degenerate elliptic equation in half-spaces// Math. Ann. — 2013. — *357*. — С. 855–893.
10. *Farina A., Montoro L., Sciunzi B.* Monotonicity in half-spaces of positive solutions to $-\Delta_p u = f(u)$ in the case $p > 2$// `arXiv:1509.03897v1 [math.AP]`. — 2015.
11. *Filippucci R.* A Liouville result on a half space// В сб.: «Recent Trends in Nonlinear Partial Differential Equations, II: Stationary Problems»: Proc. Workshop, Perugia, 2012. — Providence: Am. Math. Soc., 2013. — С. 237–252.
12. *Galakhov E., Salieva O.* On blow-up of solutions to differential inequalities with singularities on unbounded sets// J. Math. Anal. Appl. — 2013. — *408*. — С. 102–113.
13. *Galakhov E., Salieva O.* Blow-up for nonlinear inequalities with singularities on unbounded sets// Current Trends in Analysis and its Applications: Proc. IXth ISAAC Congress, Krakow, Poland, 2014. — Basel: Birkhäuser, 2015. — С. 299-305.
14. *Porretta A., Veron L.* Separable solutions of quasilinear Lane—Emden equations// J. Eur. Math. Soc. — 2013. — *15*. — С. 755–774.
15. *Zou H.* A priori estimates and existence for quasi-linear elliptic equations// Calc. Var. Part. Differ. Equ. — 2008. — *33*. — С. 417–437.

Е. И. Галахов

Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

E-mail: `galakhov@rambler.ru`

О. А. Салиева

Московский государственный технологический университет «Станкин», 127055, Москва, Вадковский пер., д. 1

E-mail: `olga.a.salieva@gmail.com`

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-573-585 UDC 517.956.25

On Absence of Nonnegative Monotone Solutions for Some Coercive Inequalities in a Half-Space

© 2017 **E. I. Galakhov, O. A. Salieva**

Abstract. Using the nonlinear capacity method, we investigate the problem of absence of nonnegative monotone solutions for a quasilinear elliptic inequality of type $\Delta_p u \geqslant u^q$ in a half-space in terms of parameters p and q.

REFERENCES

1. E. Mitidieri and S. I. Pohozaev, "Apriornye otsenki i otsutstvie resheniy nelineynykh uravneniy i neravenstv v chastnykh proizvodnykh" [A priori estimates and absence of solutions of nonlinear partial derivatives equations and inequalities], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2001, **234**, 3–383 (in Russian).
2. S. I. Pohozaev, "Sushchestvenno nelineynye emkosti, porozhdennye differentsial'nymi operatorami" [Essentially nonlinear capacities generated by differential operators], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1997, **357**, 592–594 (in Russian).
3. C. Azizieh and P. Clément, "A priori estimates and continuation methods for positive solutions of p-Laplace equations," *J. Differ. Equ.*, 2002, **179**, 213–245.
4. H. Berestycki, I. Capuzzo Dolcetta, and L. Nirenberg, "Superlinear indefinite elliptic problems and nonlinear Liouville theorems," *Topol. Methods Nonlinear Anal.* , 1994, **4**, 59–78.
5. M. F. Bidaut-Véron and S. I. Pohozaev, "Nonexistence results and estimates for some nonlinear elliptic problems," *J. Anal. Math.*, 2001, **84**, 1–49.
6. I. Birindelli and E. Mitidieri, "Liouville theorems for elliptic inequalities and applications," *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 1998, **128A**, 1217–1247.
7. E. N. Dancer and Y. Du, M. Efendiev, "Quasilinear elliptic equations on half- and quarter-spaces," *Adv. Nonlinear Stud.*, 2013, **13**, 115–136.
8. A. Farina, L. Montoro, and B. Sciunzi, "Monotonicity and one-dimensional symmetry for solutions of $-\Delta_p u = f(u)$ in half-spaces," *Calc. Var. Part. Differ. Equ.*, 2012, **43**, 123–145.
9. A. Farina, L. Montoro, and B. Sciunzi, "Monotonicity of solutions of quasilinear degenerate elliptic equation in half-spaces," *Math. Ann.*, 2013, **357**, 855–893.
10. A. Farina, L. Montoro, and B. Sciunzi, "Monotonicity in half-spaces of positive solutions to $-\Delta_p u = f(u)$ in the case $p > 2$," *arXiv:1509.03897v1 [math.AP]*, 2015.
11. R. Filippucci, "A Liouville result on a half space," In: *Recent Trends in Nonlinear Partial Differential Equations, II: Stationary Problems*, Workshop, Perugia, 2012, Am. Math. Soc., Providence, 2013, 237–252.
12. E. Galakhov and O. Salieva, "On blow-up of solutions to differential inequalities with singularities on unbounded sets," *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, **408**, 102–113.
13. E. Galakhov and O. Salieva, "Blow-up for nonlinear inequalities with singularities on unbounded sets," *Current Trends in Analysis and its Applications*: Proc. IXth ISAAC Congress, Krakow, Poland, 2014, Birkhäuser, Basel, 2015, 299–305.
14. A. Porretta and L. Veron, "Separable solutions of quasilinear Lane—Emden equations," *J. Eur. Math. Soc.*, 2013, **15**, 755–774.
15. H. Zou, "A priori estimates and existence for quasi-linear elliptic equations," *Calc. Var. Part. Differ. Equ.*, 2008, **33**, 417–437.

E. I. Galakhov
RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., 117198 Moscow, Russia
E-mail: `galakhov@rambler.ru`

O. A. Salieva
Moscow State Technological University "Stankin," 1 Vadkovskii per., 127055 Moscow, Russia
E-mail: `olga.a.salieva@gmail.com`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 4 (2017). С. 586–598

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-586-598 УДК 517.956.4

О СКОРОСТИ СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕДИВЕРГЕНТНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С РАСТУЩИМ МЛАДШИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

© 2017 г. **В. Н. ДЕНИСОВ**

Аннотация. В задаче Коши

$$L_1 u \equiv Lu + (b, \nabla u) + cu - u_t = 0, \quad (x,t) \in D,$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

для недивергентного параболического уравнения с растущим младшим коэффициентом в полупространстве $\overline{D} = \mathbb{R}^N \times [0,\infty)$ при $N \geqslant 3$ получены достаточные условия экспоненциальной скорости стабилизации решения при $t \to +\infty$ равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$ для любой ограниченной непрерывной в $\mathbb{R}^N$ начальной функции $u_0(x)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В полупространстве $\overline{D} = \mathbb{R}^N \times [0,\infty)$ рассмотрим задачу Коши при $N \geqslant 3$

$$L_1 u \equiv Lu + (b, \nabla u) + cu - u_t = 0, \quad (x,t) \in D, \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.2}$$

где

$$Lu = \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x,t) u_{x_i x_k}, \qquad (b, \nabla u) = \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t) u_{x_i}, c(x,t) \leqslant 0. \tag{1.3}$$

Предполагается, что коэффициенты уравнения (1.1) непрерывны в $\overline{D} = \mathbb{R}^N \times [0,\infty)$ и удовлетворяют условию Гельдера равномерно по x, t на каждой ограниченной области G в D. Коэффициенты при старших производных в (1.1) симметричны, $a_{ik} = a_{ki}$, $i,k = 1,\ldots,N$, и удовлетворяют условию

$$\lambda_0^2 |\xi|^2 \leqslant \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x,t)\xi_i\xi_k \leqslant \lambda_1^2 |\xi|^2, \tag{1.4}$$

где $\lambda_0 > 0, \lambda_1 > 0$ для $\forall (x,t) \in D$,

Будем говорить, что коэффициенты $b_1(x,t),\ldots,b_N(x,t)$ удовлетворяют условию (B), если существует $B > 0$ такое, что

$$\sup_D (1+r) \sum_{i=1}^{N} |b_i(x,\, t)| \leqslant B, r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_N^2}. \tag{1.5}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15-01-00471).

Будем говорить, что коэффициенты $c(x,t)$ удовлетворяют условию (C), если для всех (x,t) в D справедливо неравенство

$$c(x,t) \leqslant k_\alpha(r) = \begin{cases} -\alpha^2 & \text{при } r \leqslant 1, \\ -\alpha^2 r^{2l} & \text{при } r > 1, \end{cases} \tag{1.6}$$

где $0 < l \leqslant 1$.

Задача Коши (1.1), (1.2) изучалась во многих работах (см., например, [2, 4–7, 9, 10, 22]).

При сделанных здесь предположениях существует и единственно классическое ограниченное решение задачи (1.1), (1.2) (см. [15, с. 78, теорема 4]).

Скорость стабилизации решений параболических уравнений изучалась, например, в работах [4–6, 11–14]. В [15, с. 181] методом барьеров, основанном на принципе максимума, установлено, что для ограниченной начальной функции $u_0(x)$ решение задачи Коши (1.1), (1.2) с ограниченными коэффициентами при выполнении условия

$$c(x,t) \leqslant C_0 < 0 \tag{1.7}$$

удовлетворяет неравенству

$$|u(x,t)| \leqslant M \exp(-at), a > 0, t > 0.$$

Отметим, что в работах [4–6] получены другие оценки стремления к нулю при $t \to +\infty$ решения краевых задач, однако при этом от начальной функции $u_0(x)$ требовалось, чтобы эта функция была финитной и достаточно гладкой [4, с. 5] или чтобы $u_0(x)$ была ограниченной, непрерывной и существовал в смысле Лебега интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u_0(x)| dx.$$

Целью настоящей работы является получение достаточных условий, обеспечивающих экспоненциальную скорость стабилизации решения при $t \to +\infty$ равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$ для любой ограниченной непрерывной в $\mathbb{R}^N$ начальной функции $u_0(x)$. Метод доказательства основан на построении точных по порядку роста на бесконечности антибарьеров [22], учитывающих поведение коэффициентов уравнения (1.1) при больших $|x|$, и не использует оценок фундаментального решения задачи Коши.

Будем говорить, что решение задачи Коши (1.1), (1.2) *стабилизируется* в точке $x \in \mathbb{R}^N$ (равномерно относительно x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$), если существует предел

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0.$$

Стабилизация решения задачи Коши для параболических уравнений второго порядка для различных классов начальных функций изучалась в работах [7, 8, 10].

С обзором работ по стабилизации решений параболических уравнений можно ознакомиться в работе [8]. Интересные результаты по параболическим уравнениям содержатся в работе [2].

2. Формулировка результата

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Если коэффициенты $b_i(x,t)$, $i = 1,\dots,N$, в* (1.1) *удовлетворяют условию* (B), *коэффициент $c(x,t)$ удовлетворяет условию (C), функция $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^N$, то для решения задачи Коши* (1.1), (1.2) *при*

$$n = n(l), \text{ где } \frac{1}{3} < \frac{1}{n(l)} \leqslant \frac{1}{2},$$

справедлива оценка

$$|u(x,t)| \leqslant M_2 \exp[-m^2 t^{\frac{1}{n}}], m = m(K) > 0, \tag{2.1}$$

равномерная по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

В случае, когда в уравнении (1.1) $L = \Delta$ — оператор Лапласа, $b_i(x,t) = 0$, $i = 1,\dots,N$, $c(x,t) = c(x)$, теорема 2.1 была установлена в работе [14], т. е. теорема 2.1 уточняет теорему 1 из работы [14].

Замечание 2.1. Утверждение теоремы 2.1 не допускает усиления, т. е. нельзя заменить компакт K в $\mathbb{R}^N$ на все пространство $\mathbb{R}^N$.

3. О растущих суперрешениях для эллиптических уравнений в $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$

В области $D = \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$ рассмотрим стационарное решение $\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha(r)$ неравенства

$$L_2\Gamma \equiv L\Gamma_\alpha + (b, \nabla\Gamma_\alpha) + k_\alpha(r)\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0, \tag{3.1}$$

где L — оператор в (1.3), $b_i(x,t)$, $i = 1, \dots, N$, удовлетворяет условию (B). Функция $k_\alpha(r)$ взята из неравенства (1.6).

Будем искать решение $\Gamma_\alpha(r)$ неравенства (3.1) такое, что $\Gamma_\alpha(r) > 0$, $\Gamma'_\alpha(r) \geqslant 0$, и для которого имеет место асимптотика при $r \to \infty$

$$\Gamma_\alpha(r) \sim C_1 r^{-\frac{s+l-1}{2}} \exp\left(\frac{\alpha}{(1+l)\lambda_1} r^{1+l}\right), \tag{3.2}$$

где $C_1 > 0, 0 < l < 1, \lambda_1$ — постоянная из (1.4).

Применяя формулы дифференцирования

$$\Gamma_{x_i} = \frac{x_i}{r}\Gamma', \quad \Gamma_{x_i x_k} = \frac{x_i x_k}{r^2}\left[\Gamma'' - \frac{1}{r}\Gamma'\right], \quad \Gamma_{x_i x_i} = \frac{x_i^2}{r^2}\left[\Gamma'' - \frac{\Gamma'}{r}\right] + \frac{\Gamma'}{r},$$

получим равенство

$$L_2\Gamma_\alpha = Q\left\{\left[\Gamma''_\alpha - \frac{\Gamma'_\alpha}{r}\right] + \frac{\Gamma'_\alpha}{r}\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} a_{ii} + b_i x_i}{Q} + \frac{k_\alpha(r)\Gamma_\alpha}{Q}\right\}, \tag{3.3}$$

где $Q = Q(x,t) = \sum\limits_{i,\,k=1}^{N} a_{ik}(x,\,t)\dfrac{x_i x_k}{r^2}$.

Из неравенств (1.4) следует, что

$$\lambda_0^2 \leqslant Q(x,t) \leqslant \lambda_1^2, \ \frac{1}{Q}\sum_{i=1}^{N} a_{ii} \leqslant \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2}{\lambda_0^2}. \tag{3.4}$$

Учитывая в (3.3) условия (B) и (C), и неравенства (1.5), (1.6) и очевидное неравенство $\dfrac{B}{1+r} \leqslant \dfrac{B}{r}$, при $t > 0$, $0 < r \leqslant 1$, будем иметь

$$L_2\Gamma \leqslant Q\left[\Gamma''_\alpha + \left(\frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2 + B}{\lambda_0^2} - 1\right)\frac{\Gamma'_\alpha}{r} - \frac{\alpha^2}{\lambda_1^2}\Gamma_\alpha\right]. \tag{3.5}$$

Обозначим

$$s = \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2 + B}{\lambda_0^2}, \quad \overline{\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda_1} \tag{3.6}$$

и для функции $Z_\alpha(r)$ рассмотрим задачу

$$Z''_\alpha(r) + \frac{s-1}{r}Z'_\alpha(r) - \overline{\alpha}^2 Z_\alpha(r) = 0, \quad 0 < r \leqslant 1, \quad Z_\alpha(0) = 1, \quad Z'_\alpha(0) = 0. \tag{3.7}$$

Положим в (3.5) $\Gamma = \Gamma_\alpha(r) = Z_\alpha(r)$, где $Z_\alpha(r)$ — решение задачи (3.7), получим неравенство

$$L_2\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0, \quad 0 < r \leqslant 1, \quad t > 0. \tag{3.8}$$

Из теории функций Бесселя [3, с. 91] следует, что решение задачи (3.7) существует, единственно и представимо в виде

$$Z_\alpha(r) = q_1(s)\frac{I_{\frac{s-2}{2}}(r\overline{\alpha})}{(r\overline{\alpha})^{\frac{s-2}{2}}}, \quad q_1(s) = 2^{\frac{s-2}{2}}\Gamma\frac{s}{2}, \tag{3.9}$$

где $\Gamma\Big(\dfrac{s}{2}\Big)$ — функция Эйлера [16, т. 1, с. 235], $I_\nu(r)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода [3, с. 94]. Из представления (3.9) и формул [3, п. 3.71], следует, что $Z_\alpha(r) > 0$ при $r > 0$ и

$$b_0(\alpha) = Z_\alpha|_{r=1} = q_1(s)\overline{\alpha}^{\frac{2-s}{2}} I_{\frac{s-2}{2}}(\overline{\alpha}) > 0, \quad b_1(\alpha) = Z'_\alpha(r)|_{r=1} = q_1(s)\overline{\alpha}^{2-\frac{s}{2}} I_{\frac{s}{2}}(\overline{\alpha}), \tag{3.10}$$

$$\frac{d}{dr}\frac{I_\nu(r)}{r^\nu} = \frac{I_{\nu+1}(r)}{r^\nu} > 0.$$

При $r \geqslant 1$ имеет место равенство $b_\alpha(r) = -\dfrac{\alpha^2}{r^2}$, поэтому, учитывая в (3.3) неравенство (3.4) и неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^N b_i x_i\right| \leqslant \frac{B}{1+r} \leqslant \frac{B}{r}, \quad r \geqslant 1,$$

справедливое в силу условия (B), будем иметь:

$$L_2\Gamma_\alpha(r) \leqslant \lambda_1^2[\Gamma''_\alpha + \frac{s-1}{r}\Gamma'_\alpha - \frac{\alpha^2 r^{2\ell}}{\lambda_1^2}\Gamma_\alpha], \tag{3.11}$$

где

$$S = \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2 + B}{\lambda_0^2}, \quad \overline{\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda_1}.$$

Рассмотрим для функции $h_\alpha(r)$, $r \geqslant 1$, задачу

$$h''_\alpha(r) + \frac{s-1}{r}h_\alpha(r) - \frac{\alpha^2 r^{2l}}{\lambda_1^2}h_\alpha(r) = 0, \quad r > 1, \tag{3.12}$$

$$h_\alpha(1) = b_0(\alpha), \quad h'_\alpha(1) = b_1(\alpha),$$

где использованы обозначения (3.6) и постоянные $b_0(\alpha)$ и $b_1(\alpha)$, определенные в (3.10). Ясно, что решение задачи (3.12) существует и единственно (см. [18, с. 167]).

Положив в (3.11) $\Gamma_\alpha(r) = h_\alpha(r)$ при $r \geqslant 1$, где $h_\alpha(r)$ — решение задачи (3.12), получим неравенство

$$L_2\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0, \quad r \geqslant 1, \quad t > 0. \tag{3.13}$$

Нами определена функция

$$\Gamma = \Gamma_\alpha(r) = \begin{cases} Z_\alpha(r) & \text{при } r \leqslant 1, \\ h_\alpha(r) & \text{при } r \geqslant 1, \end{cases} \tag{3.14}$$

где $Z_\alpha(r)$, $h_\alpha(r)$ — решения задач (3.7) и (3.12) соответственно.

Функция (3.14) непрерывна и имеет непрерывные первые и вторые производные. В самом деле, непрерывность функции и указанных производных при $r \neq 1$ очевидна, а при $r = 1$ справедливы условия «склейки» из (3.12):

$$Z_\alpha(1) = h_\alpha(1) = b_0(\alpha), Z'_\alpha(1) = h'_\alpha(1) = b_(\alpha).$$

Поэтому из непрерывности коэффициентов уравнений (3.6) и (3.12) имеем:

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{s-1}{r} = \lim_{r\to 1+0}\frac{s-1}{r} = s-1,$$

$$\lim_{r\to 1+0}\overline{\alpha}^2 r^{2l} = \overline{\alpha}^2 = \lim_{r\to 1-0}\overline{\alpha}^2.$$

Из этих равенств и условия «склейки» (3.12) следует, что

$$Z''_\alpha(1) = h''_\alpha(1).$$

Из (3.8) и (3.13) вытекают неравенства

$$L_2\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0, \quad r \geqslant 0, \quad t > 0. \tag{3.15}$$

Изучим некоторые качественные свойства решений задачи (3.12).

Лемма 3.1. *Решение задачи* (3.12) *обладает следующими свойствами*:

1. $h_\alpha(r) > 0$, $r > 1$;
2. $h'_\alpha(r) > 0$, $r > 1$;

3. $\lim\limits_{r\to\infty} h_\alpha(r) = +\infty$.

Доказательство. Запишем уравнение (3.12) в виде

$$\frac{d}{dr}\left(r^{s-1}\frac{dh_\alpha(r)}{dr}\right) = \overline{\alpha}^2 r^{s-1+2l} h_\alpha(r),$$

$$h_\alpha(1) = b_0(\alpha), \quad h'_\alpha(1) = b_1(\alpha).$$

Дважды проинтегрируем последнее уравнение от 1 и r и получим

$$\frac{dh_\alpha(r)}{dr} = \frac{b_1(\alpha)}{r^{s-1}} + \frac{\overline{\alpha}^2}{r^{s-1}}\int\limits_1^r \tau^{s-1+2l} h_\alpha(\tau)d\tau, \tag{3.16}$$

$$h_\alpha(r) = b_0(\alpha) + b_1(\alpha)\int\limits_1^r \tau^{1-s}d\tau + \overline{\alpha}^2\int\limits_1^r h_\alpha(\xi)\xi^{s-1+2l}d\xi. \tag{3.17}$$

В силу положительности $b_0(\alpha)$ и $b_1(\alpha)$, вытекающей из непрерывности функции $h_\alpha(r)$, правая часть (3.17) будет положительна в достаточно малой окрестности $r = 1$, т.е. при достаточно малом $r - 1 > 0$. Докажем, что она остается положительной и при всех $r > 1$. Предположим противное, тогда при некотором $r = r_1 > 1$ функция $h_\alpha(r)$ обратится в нуль (первый нуль $h_\alpha(r)$ при $r > 1$). Тогда из (3.17) при $r = 1$ получим

$$h_\alpha(r_1) = 0 = b_0(\alpha) + b_1(\alpha)\int\limits_1^r \tau^{1-s}d\tau + \overline{\alpha}^{-2}\int\limits_1^r \tau^{1-s}d\tau\int\limits_1^\tau h_\alpha(\xi)\xi^{s-1+2l}d\xi. \tag{3.18}$$

Так как при $1 \leqslant \xi \leqslant r_1$, $s > 1$ имеем $h_\alpha(\xi) > 0$, то очевидно, что правая часть (3.18) является положительной. Полученное противоречие доказывает, что $h_\alpha(r) > 0$ при всех $r > 1$. Утверждение 1 леммы 3.1 доказано. Из (3.16) тогда следует, что

$$\frac{dh_\alpha(r)}{dr} > 0, \quad r \geqslant 1. \tag{3.19}$$

Утверждение 2 леммы 3.1 доказано. Из (3.17) тогда вытекает, что $h_\alpha(r) \geqslant b_0(\alpha) > 0$ при $r \geqslant 1$. Поэтому из (3.17) и (3.19)получим

$$h_\alpha(r) - b_0(\alpha) = \int\limits_1^r \frac{dh_\alpha(\tau)}{d\tau}d\tau > \overline{\alpha}^2 b_0(\alpha)\int\limits_1^r \tau^{1-s}d\tau\int\limits_1^\tau \sigma^{s-1+2l}d\sigma =$$

$$= \frac{\overline{\alpha}^2 b_0(\alpha)}{s+2l}\left[\int\limits_1^r \tau^{1-s}(\tau^{s+2l}-1)d\tau\right] = \frac{\overline{\alpha}^2 b_0(\alpha)}{s+2l}\left[\frac{r^{2+2l}}{2+2l} - \frac{r^{2-s}-1}{2-s}\right] \to \infty$$

при $r \to \infty$, поскольку $s = \dfrac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2 + B}{\lambda_0^2} > N > 2$. Утверждение 3 доказано. Лемма 3.1 доказана. □

Лемма 3.2. *Функция* (3.14) *обладает следующими свойствами*:

1. $L_2\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0$, *при* $r \geqslant 0$, $t > 0$;
2. $\Gamma_\alpha(r_1) > \Gamma_\alpha(r_2)$, $r_1 > r_2$;
3. $\Gamma_{\alpha_1}(r) > \Gamma_{\alpha_2}(r)$, $\alpha_1 > \alpha_2$, $r > 0$;
4. $\Gamma_\alpha(r) = C_1 r^{-\frac{s+l-1}{2}} \exp\left(\dfrac{\alpha}{\lambda_1(1+l)} r^{1+l}\right)[1+\varepsilon(r)]$, *где* $\lim\limits_{r\to\infty}\varepsilon(r) = 0$, $C_1 > 0$, $0 < l \leqslant 1$, s *из* (3.6).

Доказательство. Из неравенств (3.8) и (3.13) следует, что функция удовлетворяет свойству 1. Свойство 2 при $r \leqslant 1$ непосредственно следует из (3.9) и (3.10), а при $r \geqslant 1$ из утверждения 2 леммы 3.1. Докажем свойство 3. Пусть $\alpha_1 > \alpha_2$, $r > 0$, тогда, определяя $\Gamma_\alpha(r)$ по формуле (3.14) и вводя соответствующую функцию $W(r)$ по формуле

$$W(r) = r^{s-1}[\Gamma'_{\alpha_1}(r)\Gamma_{\alpha_2}(r) - \Gamma_{\alpha_1}(r)\Gamma'_{\alpha_2}(r)],$$

после дифференцирования $W(r)$ по r получим неравенство

$$W'(r) = \frac{s-1}{r}W(r) + r^{s-1}[\Gamma''_{\alpha_1}(r)\Gamma_{\alpha_2}(r) - \Gamma_{\alpha_1}(r)\Gamma''_{\alpha_2}(r)] =$$
$$= \frac{s-1}{r}W(r) - \frac{s-1}{r}W(r) + \frac{r^{s-1}}{\lambda_1^2}\Gamma_{\alpha_1}(r)\Gamma_{\alpha_2}(r)(k_{\alpha_1}(r) - k_{\alpha_2}(r)) > 0.$$

Так как $W(0) = 0$, то из неравенства $W'(r) > 0$ вытекает, что $W(r) > 0$, $r > 0$. Следовательно,

$$\left(\frac{\Gamma_{\alpha_1}(r)}{\Gamma_{\alpha_2}(r)}\right)' = \frac{W(r)}{r^{s-1}\Gamma^2_{\alpha_2}(r)} > 0, \quad r > 0, \quad \alpha_1 > \alpha_2.$$

Интегрируя последнее неравенство и учитывая, что $\dfrac{\Gamma_{\alpha_1}(0)}{\Gamma_{\alpha_2}(0)} = 1$, получим

$$\frac{\Gamma_{\alpha_1}(r)}{\Gamma_{\alpha_2}(r)} - 1 = \int\limits_0^r \frac{W(\tau)d\tau}{\tau^{s-1}\Gamma^2_{\alpha_2}(\tau)} > 0.$$

Свойство 3 доказано.

Докажем асимптотическую формулу в свойстве 4.

В уравнении (3.12) сделаем замену $h_\alpha(r) = H(r)r^{\frac{1-s}{2}}$, при этом получим, что функция $H(r)$ является решением задачи

$$H'' - H\left(\overline{\alpha}^2 r^{2l} + \frac{(s-1)(s-3)}{4r^2}\right) = 0, \quad r > 1, \tag{3.20}$$
$$H|_{r=1} = b_0(\alpha), \quad H'|_{r=1} = b_1(\alpha) + \frac{s-1}{2}b_0(\alpha) = b_2(\alpha),$$

где $b_0(\alpha)$ и $b_1(\alpha)$ определены в (3.10).

Пусть

$$q(r) = \overline{\alpha}^2 r^{2l} + \frac{(s-1)(s-3)}{4r^2}, \quad r \geqslant 1. \tag{3.21}$$

Тогда задачу (3.20) можно записать в виде

$$H'' - q(r)H = 0, \quad r > 1, \tag{3.22}$$
$$H(1) = b_0(\alpha), \quad H'(1) = b_2(\alpha).$$

Ясно, что $q(r) > 0$ при $r > 1$, $q''(r)$ — непрерывная функция при $r > 1$ и, кроме того, как легко видеть, сходится интеграл

$$\int\limits_1^\infty |d(r)|dr, \text{ где } d(r) = \frac{1}{8}\frac{q''(r)}{q^{3/2}(r)} - \frac{5}{32}\frac{(q'(r))^2}{q^{5/2}(r)}$$

и существует предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{q'(r)}{q^{3/2}(r)} = 0.$$

Поэтому для решений уравнения (3.22) выполнены все условия известной теоремы об асимптотике Грина—Лиувилля [18, т. 3, с. 394] (см. также [21, с. 300] и монографию [20]). По этой теореме существует фундаментальная система решений $x_1(r)$, $x_2(r)$ уравнения (3.22) такая, что

$$x_{1,2}(r) = q^{-1/4}(r)\exp\left(\pm S(r)\right)[1 + \varepsilon_{1,2}(r)], \tag{3.23}$$

где $S(r) = \int\limits_1^r \sqrt{q(\tau)}d\tau \to +\infty$, $\varepsilon_{1,2}(r) \to 0$ при $r \to +\infty$, и эту асимптотику можно дифференцировать:

$$x'_{1,2}(r) = \pm q^{1/4}\exp\left(\pm S(r)\right)[1 + \varepsilon_{3,4}(r)], \tag{3.24}$$

$\varepsilon_{3,4}(r) \to 0$, $r \to +\infty$.

Применяя формулу Остроградского—Лиувилля [17, с. 50] и формулы (3.23), (3.24), вычислим определитель Вронского:

$$x_1(r)x'_2(r) - x'_1(r)x_2(r) = -2. \tag{3.25}$$

Поэтому решения $x_1(r)$, $x_2(r)$ линейно независимы. Так как $\lim\limits_{r\to+\infty}\int\limits_1^r \sqrt{q(\tau)}d\tau \to +\infty$, то решение $x_1(r)$ монотонно возрастает и существует

$$\lim_{r\to+\infty} x_1(r) = +\infty, \tag{3.26}$$

а решение $x_2(r)$ — монотонно убывает,

$$\lim_{r\to+\infty} x_2(r) = 0. \tag{3.27}$$

Решение задачи (3.22) с заданными условиями при $r = 1$ будем искать в виде

$$H(r) = C_1x_1(r) + C_2x_2(r), \tag{3.28}$$

где постоянные C_1 и C_2 однозначно определяются из системы

$$C_1x_1(1) + C_2x_2(1) = b_0(\alpha),$$
$$C_1x_1'(1) + C_2x_2'(1) = b_2(\alpha)$$

с ненулевым определителем (3.25).

Докажем, что в (3.28) постоянная

$$C_1 > 0. \tag{3.29}$$

Если предположить, что это не так, то из леммы 3.2 при $C_1 < 0$ следует, что

$$\lim_{r\to+\infty} h_\alpha(r) = \lim_{r\to+\infty} \Gamma_\alpha(r) = \lim_{r\to+\infty} H(r)r^{\frac{1-s}{2}} = -\infty,$$

что противоречит утверждению 3 леммы 3.2, согласно которому

$$\lim_{r\to+\infty} h_\alpha(r) = \lim_{r\to+\infty} H(r)r^{\frac{1-s}{2}} = +\infty,$$

поэтому $\lim\limits_{r\to+\infty} H(r) = +\infty$. Таким образом, из (3.28), (3.29), (3.27), (3.26) следует, что $H(r) \sim C_1x_1(r), r \to +\infty$.

Подставляя (3.21) в (3.22), (3.23), мы получим для $\Gamma_\alpha(r)$ искомую асимптотику. Лемма 3.2 доказана. □

Рассмотрим функцию

$$v(r) = (1 - \frac{r^2}{4h^2}), \quad r \leqslant 2h. \tag{3.30}$$

Лемма 3.3. *Функция* (3.30) *обладает свойствами*:

1. $0 \leqslant v(r) \leqslant 1$ *для* $0 \leqslant r \leqslant 2h$;
2. $3/4 \leqslant v(r) \leqslant 1$ *для* $0 \leqslant r \leqslant h$;
3. *выполнено*

$$L_2v \equiv Lv(r) + \sum_{i=1}^N b_i(x,t)v_{x_i} + k_\alpha(r)v + \beta v(r) \leqslant 0, r \leqslant h, \tag{3.31}$$

где

$$\beta = \frac{\lambda_0^2N - B}{2h^2} > 0. \tag{3.32}$$

Доказательство. Свойства 1, 2 легко проверяются прямым вычислением. Докажем (3.31). Из неравенств (1.4) и того, что $a_\alpha(r)v \leqslant 0$, $\lambda v(r) \leqslant \lambda$, получим

$$\sum_{i=1}^N a_{ii}(x,t) \geqslant \lambda_0^2 N, -B \leqslant \sum_{i=1}^N b_i(x,t)x_i \leqslant B.$$

Поэтому

$$L_2v = -\frac{\sum\limits_{i=1}^N a_{ii}}{2h^2} - \frac{\sum\limits_{i=1}^N b_ix_i}{2h^2} + k_\alpha(r)v + \beta v \leqslant -\frac{B - \lambda_0^2N}{2h^2} + \beta = 0,$$

так как $v \leqslant 1$ и $k_\alpha(r)v(r) \leqslant 0$. Лемма 3.3 доказана. □

Лемма 3.4. *Пусть $B < N\lambda_0^2$, тогда*

$$G_1(x,t) = v(r)e^{-\beta t}, \tag{3.33}$$

где $v(r)$ — функция (3.30)*,*

$$\beta = \frac{\lambda_0^2 N - B}{2h^2} > 0, \tag{3.34}$$

удовлетворяет соотношениям

$$LG_1 + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)G_{1x_i} + k_\alpha(r)G_1 \leqslant \frac{\partial G_1}{\partial t}, \quad r \leqslant h, \quad t > 0, \tag{3.35}$$

$$G_1(x,0) = v(r), \quad r < h, \tag{3.36}$$

$$\lim_{t\to+\infty} G_1(x,t) = 0, \tag{3.37}$$

равномерно по $x \in r \leqslant h$.

Доказательство. Используя свойства 1–3 леммы 3.3 и функцию (3.30), получим

$$L_1 v \leqslant e^{-\beta t}[Lv + (b, \nabla v_1) + k_\alpha(r)v + \beta v] \leqslant 0, r \leqslant h, t > 0.$$

Лемма 3.4 доказана. □

Так как функция $u_0(x)$ ограничена и $c(x,t) \leqslant 0$, то решение задачи (1.1), (1.2) является ограниченным в D. Следовательно, и решение задачи

$$Lu_1 + (b, \nabla u_1) + cu_1 - u_{1t} = 0 \text{ в } D, \tag{3.38}$$

$$u_1(x,0) = u_1(x),$$

где

$$0 \leqslant u_1(x) \leqslant B_1,$$

тоже является ограниченным в D.

4. Доказательство теоремы 2.1

Достаточно доказать утверждения теоремы 2.1 для решения задачи Коши

$$Lv + (b, \nabla v) + k_\alpha(r)v - v_t = 0 \text{ в } D, \tag{4.1}$$

$$v(x,0) = B_1 > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{4.2}$$

Ясно, что $v(x,t) > 0$ (см. [15, п. 4]).

Фиксируем произвольный компакт K в $\mathbb{R}^N$, выберем $m > 1$ так, чтобы замкнутый шар $\overline{B_m} = \{r \leqslant m\}$ содержал внутри компакт K. По теореме Вейерштрасса [16, с. 90] функция $\Gamma_\alpha(r)$ достигает максимума $\Gamma_\alpha(m)$ в шаре $\overline{B_m}$. Так как $\Gamma_\alpha(r) > 0$, то нормируем эту функцию, полагая:

$$\overline{\Gamma_\alpha}(r) = \frac{\Gamma_\alpha(r)}{\Gamma_\alpha(m)}. \tag{4.3}$$

Ясно, что $\dfrac{\Gamma_\alpha(r)}{\Gamma_\alpha(m)} \leqslant 1$ при $r \leqslant m$. Для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$ положим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда очевидно, что

$$\delta\overline{\Gamma_\alpha} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.4}$$

при $r \leqslant m$.

Рассмотрим задачу Коши (4.1), (4.2). Из принципа максимума [15, с. 28] и однородности линейных уравнений (1.1) и (4.1) вытекает, что для доказательства теоремы 2.1 достаточно установить оценку вида (2.1), т. е. для решения задачи (4.1), (4.2)

$$v(x,t) \leqslant M_1 \exp(-at^{\frac{1}{n}}),$$

где

$$t \geqslant t_1, \quad a = a(\lambda_0, \lambda_1, l, K, \alpha) > 0, \quad M = M(K), n = n(l)$$

и
$$\frac{1}{n} = \frac{1+l}{3+l}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{3} < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2}, \quad 0 < l \leqslant 1,$$
равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Кроме того, по тем же свойствам можно, не ограничивая общности, считать, что $v(x,0) = u_1 = 1$, $x \in \mathbb{R}^N$, т. е. $B_1 = 1$.

Рассмотрим функцию
$$W(x,t) = \delta\overline{\Gamma}_\alpha(r) - v(x,t), \tag{4.5}$$
где $\overline{\Gamma_\alpha}(r)$ функция (4.3), $v(x,t)$ — решение задачи Коши (4.1), (4.2), в которой $v(x,0) = 1$.

Из свойства 4 леммы 3.2 очевидно следует, что найдется $r_1 > m > 1$ такое, что
$$r^{-\frac{s+l-1}{2}} \exp\big(\frac{\alpha}{2(1+l)\lambda_1} r^{1+l}\big) \geqslant 1 \quad \text{при } r \geqslant r_1. \tag{4.6}$$
Поэтому при $r \geqslant r_1$ справедлива оценка снизу
$$\delta\overline{\Gamma_\alpha}(r) \geqslant \frac{\delta}{2}\frac{C_1}{\Gamma(m)} \exp\left(ar^{S_1}\right), \tag{4.7}$$
где
$$a = \frac{\alpha}{2(1+l)\lambda_1}, \quad S_1 = 1+l, \quad 0 < l \leqslant 1.$$

Для $\forall\varepsilon > 0$ выберем $h > 0$ настолько большим, чтобы $r \geqslant h > m$ и
$$W(x,t)|_{|x|=h} \geqslant 0 \quad \text{для всех } t > 0. \tag{4.8}$$
Такой выбор $h > 0$ возможен, так как функция $v(x,t)$ является ограниченной: $0 < v(x,t) \leqslant 1$, а функция
$$\delta\frac{C_1}{2\Gamma(m)} \exp\left(ar^{S_1}\right), \quad S_1 = 1+l, a = \frac{\alpha}{2(1+l)\lambda_1},$$
является экспоненциально растущей при $r \to \infty$. В силу (4.7) достаточно выбрать h из условия
$$\frac{C_1\varepsilon}{4\Gamma(m)} \exp\left(ah^{S_1}\right) = 1. \tag{4.9}$$

Из (4.9) следует
$$ah^{S_1} = \ln\frac{B_2}{\varepsilon}, \tag{4.10}$$
где
$$B_2 = \frac{4\Gamma(m)}{C_1} > 0, \quad a = \frac{\alpha^2}{2(1+l)\lambda_1}.$$

Из (4.10) получаем
$$h^2(\varepsilon) = a^{-\frac{2}{S_1}}\Big(\ln\frac{B_2}{\varepsilon}\Big)^{\frac{2}{S_1}}. \tag{4.11}$$

Очевидно, что при этом функция (4.5) удовлетворяет соотношениям
$$L_2W(x,t) \leqslant 0, \quad |x| < h, \quad t > 0, \tag{4.12}$$
$$W(x,t)|_{|x|=h} \geqslant 0, \quad t > 0, \tag{4.13}$$
$$W(x,0) = \delta\overline{\Gamma}_\alpha(r) - 1, \quad |r| < 1. \tag{4.14}$$

Введем функцию
$$G_2(x,t) = AG_1(x,t), \quad |x| \leqslant h, \quad t > 0, \tag{4.15}$$
где $G_1(x,t)$ — функция (3.33), а число $A < 0$ выберем ниже. Докажем, что если выбрать достаточно большое отрицательное $A < 0$, то получим
$$W(x,t) \geqslant G_2(x,t), \quad |x| \leqslant h, \quad t > 0. \tag{4.16}$$
Введем функцию
$$g(x,t) = W(x,t) - G_2(x,t). \tag{4.17}$$
Ясно, что в силу (4.12), (4.8) (3.35) получим
$$L_2g(x,t) \leqslant 0, \quad |x| \leqslant h, \quad t > 0. \tag{4.18}$$

При $|x| < h$ из (4.8), (4.15), и того, что $A < 0$, следует неравенство

$$g(x,t)|_{|x|=h} \geqslant 0, \quad |x| < h, \quad t > 0. \tag{4.19}$$

При $t = 0$ имеем

$$g(x,0) = \delta\overline{\Gamma}_\alpha(r) - 1 - Av(r). \tag{4.20}$$

Выберем $A < 0$ из условия: $g(x,0) > 0$. Так как $\dfrac{3}{4} \leqslant v(r) \leqslant 1$, $r \leqslant h$, то $-Av(r) \geqslant \dfrac{-3}{4}A$ при $A < 0$. Отсюда

$$\delta\overline{\Gamma}(r) - Av(r) > \Big(\frac{\varepsilon}{4\Gamma(m)} - 1\Big) - \frac{3}{4}A = 0. \tag{4.21}$$

поэтому при $A = -\dfrac{4}{3}\Big(1 - \dfrac{\varepsilon}{4\Gamma(m)}\Big) < 0$ мы получим неравенство (4.16). Тогда из (4.21), (4.20) и (4.19) и из принципа максимума [15, с. 15] следует, что неравенство (4.16) доказано. Запишем неравенство (4.16) в виде:

$$v(x,t) \leqslant \delta\overline{\Gamma}(r) - G_2(x,t), \quad |x| < h, \quad t > 0. \tag{4.22}$$

Пусть в (4.22) $|x| \leqslant m$, тогда первое слагаемое в (4.22) в силу (4.4) удовлетворяет неравенству

$$\delta\overline{\Gamma}(r) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad r \leqslant m. \tag{4.23}$$

Для оценки второго слагаемого в (4.22) используем неравенство

$$-A = +\frac{4}{3}\Big(1 - \frac{\varepsilon}{4\Gamma(m)}\Big) < \frac{4}{3}, \quad v(r) \leqslant 1.$$

Для фиксированного $\varepsilon > 0$ найдем $t_1 = t_1(\varepsilon) > 0$ из условия

$$\frac{4}{3}\exp{(-\beta t_1)} = \frac{4}{3}\frac{\varepsilon}{B_2}, \tag{4.24}$$

где $\beta = \dfrac{\lambda_0^2 N - B}{2h^2} > 0$, $B_2 > 0$ — постоянная из (4.10).

Тогда при любом $t > t_1$ тем более выполняется неравенство

$$-G_2 < \frac{4}{3}\exp{(-\beta t)} < \frac{4}{3B_2}\varepsilon, \tag{4.25}$$

где β из формулы (3.32) в лемме 3.3.

Решая уравнение (4.24) относительно t_1, получим

$$t_1 = \frac{2h^2}{\lambda_0^2 N - B}\ln\frac{B_2}{\varepsilon}. \tag{4.26}$$

Учитывая (4.11) в (4.26), получим

$$t_1 = \frac{2}{\lambda_0^2 N - B}\ln{(\frac{B_2}{\varepsilon})}^{1+\frac{2}{S_1}} a^{-\frac{2}{S_1}}, \tag{4.27}$$

где

$$S_1 = 1 + l, \quad a = \frac{\alpha^2}{2(1+l)\lambda_1}, \quad B_2 \text{ — постоянная из (4.10).}$$

Вводя обозначения

$$m_1 = 1 + \frac{2}{S_1}, \quad B_3 = \frac{\lambda_0^2 N - B}{2}a^{\frac{2}{S_1}},$$

запишем (4.27) в виде:

$$B_3^{\frac{1}{m_1}} t_1^{\frac{1}{m_1}} = \ln\frac{B_2}{\varepsilon}, \quad \frac{1}{m_1} = \frac{1+l}{3+l}.$$

Отсюда из тождества $\ln\Big[\exp{(B_3^{\frac{1}{m_1}} t_3^{\frac{1}{m_1}})}\Big] = \ln\dfrac{B_2}{\varepsilon}$ получим

$$\varepsilon = B_2\exp\Big[-B_3^{\frac{1}{m_1}} t_1^{\frac{1}{m_1}}\Big]. \tag{4.28}$$

Из (4.23), (4.25), (4.22) получим

$$|v(x,t)| < \varepsilon\Big(1 + \frac{4}{3B_2}\Big), \quad t > t_1.$$

Из (4.28) и последнего неравенства следует, что

$$|v(x,t)| \leqslant M_3 \exp\Big[-bt^{\frac{1+l}{3+l}}\Big], \quad t > t_1,$$

где

$$M_2 = B_2\Big(1 + \frac{4}{3B_2}\Big), \quad b = B_3^{\frac{1}{m_1}}.$$

Теорема 2.1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айнс Э.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Факториал Пресс, 2005.
2. *Богачев В. И., Крылов Н. В., Рекнер М., Шапошников С. В.* Уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова. — М.: Ин-т комп. иссл., 2013.
3. *Ватсон Г.* Теория бесселевых функций. Т. 1. — М.: ИЛ, 1949.
4. *Гущин А. К.* Некоторые оценки решений краевых задач для уравнения теплопроводности в неограниченной области// Тр. МИАН. — 1967. — *91.* — С. 5–18.
5. *Гущин А. К.* О стабилизации решения параболического уравнения// Тр. МИАН. — 1969. — *93.* — С. 51–57.
6. *Гущин А. К.* О скорости стабилизации решения краевой задачи для параболического уравнения// Сиб. мат. ж. — 1969. — *10*, № 1. — С. 43–57.
7. *Денисов В. Н.* О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с младшим коэффициентом// Дифф. уравн. — 2003. — *39*, № 4. — С. 506–515.
8. *Денисов В. Н.* О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 4. — С. 145–212.
9. *Денисов В. Н.* Достаточные условия стабилизации решения задачи Коши для недивергентного параболического уравнения с младшими коэффициентами// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *36.* — С. 61–71.
10. *Денисов В. Н.* Стабилизация решения задачи Коши для недивергентного параболического уравнения// Соврем. мат. и ее прилож. — 2012. — *78.* — С. 17–49.
11. *Денисов В. Н.* Стабилизация решения задачи Коши для недивергентного параболического уравнения с убывающими младшими коэффициентами// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2012. — *45.* — С. 62–74.
12. *Денисов В. Н.* О скорости стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с младшими коэффициентами// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *59.* — С. 53–73.
13. *Денисов В. Н.* О поведении при больших значениях времени решений параболических недивергентных уравнений с растущими старшими коэффициентами// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *62.* — С. 72–84.
14. *Денисов В. Н.* О скорости стабилизации решения задачи Коши с растущим коэффициентом// Тезисы науч. конф. «Ломоносовские чтения-2017». — М.: МГУ, 2017. — С. 23.
15. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2001. — *17.* — С. 9–193.
16. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ. Т. 1. — М.: Высшая школа, 1970.
17. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1. — М.: ИЛ, 1953.
18. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1985.
19. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968.
20. *Marić V.* Regular Variation and Differential Equations. — Springer, 2000.
21. *Marić V., Tomić M.* On Liouville—Green (WKB) approximation for second order linear differential equations// Differ. Integral Equ. — 1988. — *1*, № 3. — С. 299–304.
22. *Meyers N., Serrin J.* The exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations// J. Math. Mech. — 1960. — *9*, № 4. — С. 513–538.

Василий Николаевич Денисов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва
E-mail: `vdenisov2008@yandex.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-586-598 UDC 517.956.4

On the Stabilization Rate of Solutions of the Cauchy Problem for Nondivergent Parabolic Equations with Growing Lower-Order Term

© 2017 **V. N. Denisov**

Abstract. In the Cauchy problem

$$L_1 u \equiv Lu + (b, \nabla u) + cu - u_t = 0, \quad (x,t) \in D,$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

for nondivergent parabolic equation with growing lower-order term in the half-space $\overline{D} = \mathbb{R}^N \times [0, \infty)$, $N \geqslant 3$, we prove sufficient conditions for exponential stabilization rate of solution as $t \to +\infty$ uniformly with respect to x on any compact K in $\mathbb{R}^N$ with any bounded and continuous in $\mathbb{R}^N$ initial function $u_0(x)$.

REFERENCES

1. E. Ince, *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Faktorial Press, M., 2005 (Russian translation).
2. V. I. Bogachev, N. V. Krylov, M. Rekner, and S. V. Shaposhnikov, *Uravneniya Fokkera—Planka—Kolmogorova* [Fokker–Planck–Kolmogorov Equations], In-t komp. issl., Moscow, 2013 (in Russian).
3. G. Watson, *Teoriya besselevykh funktsiy. T. 1* [A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Vol. 1], IL, M., 1949 (Russian translation).
4. A. K. Gushchin, "Nekotorye otsenki resheniy kraevykh zadach dlya uravneniya teploprovodnosti v neogranichennoy oblasti" [Some estimates of solutions of boundary-value problems for the thermal conductivity equation in unbounded domain], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1967, **91**, 5–18 (in Russian).
5. A. K. Gushchin, "O stabilizatsii resheniya parabolicheskogo uravneniya" [On stabilization of solution of a parabolic equation], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1969, **93**, 51–57 (in Russian).
6. A. K. Gushchin, "O skorosti stabilizatsii resheniya kraevoy zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya" [On the stabilization rate of solution of boundary-value problem for a parabolic equation], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1969, **10**, No. 1, 43–57 (in Russian).
7. V. N. Denisov, "O stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya parabolicheskogo uravneniya s mladshim koeffitsientom" [On stabilization of solution of the Cauchy problem for a parabolic equation with lower-order coefficient], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2003, **39**, No. 4, 506–515 (in Russian).
8. V. N. Denisov, "O povedenii resheniy parabolicheskikh uravneniy pri bol'shikh znacheniyakh vremeni" [On behavior of solutions of parabolic equations for large values of time], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2005, **60**, No. 4, 145–212 (in Russian).
9. V. N. Denisov, "Dostatochnye usloviya stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya nedivergentnogo parabolicheskogo uravneniya s mladshimi koeffitsientami" [Sufficient conditions for stabilization of solution of the Cauchy problem for nondivergent parabolic equations with lower-order coefficients], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **36**, 61–71 (in Russian).
10. V. N. Denisov, "Stabilizatsiya resheniya zadachi Koshi dlya nedivergentnogo parabolicheskogo uravneniya" [Stabilization of solution of the Cauchy problem for a nondivergent parabolic equation], *Sovrem. mat. i ee prilozh.* [Contemp. Math. Appl.], 2012, **78**, 17–49 (in Russian).
11. V. N. Denisov, "Stabilizatsiya resheniya zadachi Koshi dlya nedivergentnogo parabolicheskogo uravneniya s ubyvayushchimi mladshimi koeffitsientami" [Stabilization of solutions of Cauchy problems for divergence-free parabolic equations with decreasing minor coefficients], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2012, **45**, 62–74 (in Russian).
12. V. N. Denisov, "O skorosti stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya parabolicheskogo uravneniya s mladshimi koeffitsientami" [On the stabilization rate of solutions of the Cauchy problem for a parabolic equation with lower-order terms], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **59**, 53–73 (in Russian).

13. V. N. Denisov, "O povedenii pri bol'shikh znacheniyakh vremeni resheniy parabolicheskikh nedivergentnykh uravneniy s rastushchimi starshimi koeffitsientami" [On behavior of solutions of parabolic nondivergent equations with increasing higher-order coefficients at large values of time], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **62**, 72–84 (in Russian).
14. V. N. Denisov, "O skorosti stabilizatsii resheniya zadachi Koshi s rastushchim koeffitsientom" [On the stabilization rate of solutions of Cauchy problems with growing coefficient], Abstr. Sci. Conf. *Lomonosovskie chteniya-2017* [Lomonosov Reading-2017], MSU, Moscow, 2017, 23 (in Russian).
15. A. M. Il'in, A. S. Kalashnikov, and O. A. Oleynik, "Lineynye uravneniya vtorogo poryadka parabolicheskogo tipa" [Second-order linear equations of parabolic type], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2001, **17**, 9–193 (in Russian).
16. L. D. Kudryavtsev, *Matematicheskiy analiz. T. 1* [Mathematical Analysis. Vol. 1], Vysshaya shkola, Moscow, 1970 (in Russian).
17. G. Sansone, *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya. T. 1* [Ordinary Differential Equations. Vol. 1], IL, Moscow, 1953 (Russian translation).
18. M. V. Fedoryuk, *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Nauka, Moscow, 1985 (in Russian).
19. A. Friedman, *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa* [Partial Differential Equations of Parabolic Type], Mir, Moscow, 1968 (Russian translation).
20. V. Marić, *Regular Variation and Differential Equations*, Springer, 2000.
21. V. Marić and M. Tomić, "On Liouville—Green (WKB) approximation for second order linear differential equations," *Differ. Integral Equ.*, 1988, **1**, No. 3, 299–304.
22. N. Meyers and J. Serrin, "The exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations," *J. Math. Mech.*, 1960, **9**, No. 4, 513–538.

V. N. Denisov
M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: vdenisov2008@yandex.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 4 (2017). С. 599–614

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-599-614 УДК 517.97

МУЛЬТИПЛИКАТИВНО ВОЗМУЩЕННОЕ СЛУЧАЙНЫМ ШУМОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2017 г. **В. Г. ЗАДОРОЖНИЙ, М. А. КОНОВАЛОВА**

Аннотация. Рассматривается задача о нахождении моментных функций решения задачи Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве со случайными коэффициентами. Задача сводится к начальной задаче для не случайного дифференциального уравнения с обычными и вариационными производными. Получены явные формулы для нахождения математического ожидания и смешанных моментных функций второго порядка решения уравнения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Пусть X, Y — банаховы пространства с нормами $\|.\|_X$, $\|.\|_Y$, $T = [t_0, t_1]$ — отрезок вещественной оси $\mathbb{R}$, $L(X,Y)$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y, X^* — сопряженное пространство к X, $\langle x, g\rangle$ — обозначает значение линейного функционала $g \in X^*$ на элементе $x \in X$, U — нормированное пространство отображений $u : T \to X$ с нормой $\|u\|_U$ и $f : U \to Y$ — отображение из X в Y.

Определение. Если приращение $\Delta f(u) = f(u+h) - f(u)$ записывается в виде $\Delta f(u) = \int\limits_T \varphi(t,u)h(t)dt + o(h)$, где $h \in U$, интеграл понимается в смысле Лебега [8, с. 90] и является линейным ограниченным оператором на U, $o(h)$ — бесконечно малая высшего порядка относительно $h \in U$, то отображение $\varphi : T \times U \to L(X,Y)$ называется *вариационной производной* (ср. [5, с. 14]) отображения f и обозначается $\dfrac{\delta f(u)}{\delta u(t)}$.

Для однозначности определения вариационной производной достаточно, чтобы выполнялось условие: если $g : T \to L(X,Y)$ и $\int\limits_T g(s)h(s)ds = 0$ $\forall h \in U$, то $g = 0$. Предполагается, что это свойство выполняется. Техника вариационного дифференцирования во многом аналогична технике обычного дифференцирования (см. [5]).

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ — вероятностное пространство [2, с. 30] с вероятностной мерой μ. Тогда определяются μ-интегрируемые отображения [4, с. 127] $g : \Omega \to \mathbb{C}$ и среднее значение (математическое ожидание) $Mg = \int\limits_{\Omega} g(\omega)\mu(d\omega)$. Пусть $f(t,\omega)$ — случайный процесс [2, с. 321] со значениями в пространстве X, где $t \in T$, ω — случайное событие, в дальнейшем (если нет необходимости) зависимость от ω в записи не отражается. Пусть V — пространство отображений $v : T \to X$ и V^* — сопряженное пространство, причем двойственность между ними задается интегралом Лебега $\int\limits_T \langle w(t), v(t)\rangle dt$, где $v \in V$, $w \in V^*$.

Определение. Если реализации случайного процесса f лежат в пространстве V^*, то

$$\psi_f(v) = \int\limits_{\Omega} exp(i \int\limits_T \langle f(s,\omega), v(s)\rangle ds)\mu(d\omega) = M(\exp i \int\limits_T \langle f(s), v(s)\rangle ds),$$

где i — мнимая единица, называется *характеристическим функционалом* процесса f.

Если под знаком математического ожидания возможно вариационное дифференцирование, то для $w \in X^*$ справедливы равенства

$$\frac{\delta\psi_f(v)}{\delta v(t)} = M[exp(i \int\limits_T \langle f(s), v(s)\rangle ds) i f(t)],$$

$$\frac{\delta^2\psi_f(v)}{\delta v(t_1)\delta v(t_2)} w = i^2 M[exp(i \int\limits_T \langle f(s), v(s)\rangle ds)\langle f(t_2), w\rangle f(t_1)].$$

Если операция двойственности перестановочна с операцией вычисления среднего значения, то

$$\langle \frac{\delta^2\psi_f(v)}{\delta v(t_1)\delta v(t_2)} w, w\rangle = i^2 \langle M[exp(i \int\limits_T \langle f(s), v(s)\rangle ds)\langle f(t_2), w\rangle f(t_1)], w\rangle =$$

$$= i^2 M\langle exp(i \int\limits_T \langle f(s), v(s)\rangle ds)\langle f(t_2), w\rangle f(t_1), w\rangle =$$

$$= i^2 M[exp(i \int\limits_T \langle f(s), v(s)\rangle ds)\langle f(t_1), w\rangle\langle f(t_2), w\rangle].$$

Отсюда при $v = 0$ получаем представление математического ожидания и второй моментной функции случайного процесса с помощью характеристического функционала

$$\frac{\delta\psi_f(0)}{\delta v(t)} = iMf(t),$$

$$\langle \frac{\delta^2\psi_f(0)}{\delta v(t_1)\delta v(t_2)} w, w\rangle = i^2 M[\langle f(t_1), w\rangle\langle f(t_2), w\rangle].$$

Пусть ε — случайный процесс со значениями в $\mathbb{R}$, f — случайный процесс со значениями в X, тогда

$$\psi(u,v) = M \exp(i \int\limits_T (\varepsilon(s)u(s) + \langle f(s), v(s)\rangle)ds)$$

— характеристический функционал пары процессов ε и f, и пусть $\dfrac{\delta_p\psi}{\delta u(t)}$ обозначает частную вариационную производную по переменной u. При этом, если возможно вариационное дифференцирование под знаком среднего значения, то

$$\frac{\delta_p\psi(0,0)}{\delta u(t)} = iM\varepsilon(t), \quad \frac{\delta_p\psi(0,0)}{\delta v(t)} = iMf(t), \tag{1.1}$$

$$\frac{\delta_p^2\psi(0,0)}{\delta u(t_1)\delta v(t_2)} = i^2 M(\varepsilon(t_1)f(t_2)), \quad \frac{\delta_p^2\psi(0,0)}{\delta u(t_1)\delta u(t_2)} = i^2 M(\varepsilon(t_1)\varepsilon(t_2)), \tag{1.2}$$

$$\langle \frac{\delta_p^2\psi(0,0)}{\delta v(t_1)\delta v(t_2)} w, w\rangle = i^2 M[\langle f(t_1), w\rangle\langle f(t_2), w\rangle]. \tag{1.3}$$

2. Мультипликативно возмущенное дифференциальное уравнение

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon(t)Ax + f(t), \tag{2.1}$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Здесь $t \in T, \varepsilon$ — случайный процесс со значениями в $\mathbb{R}$, $x : T \to X$ — искомое отображение, $A \in L(X, X)$ — линейный ограниченный оператор, f — случайный процесс со значениями в X, $t_0 \in T$, $x_0 \in X$ — заданный случайный вектор. Уравнение (2.1) называется мультипликативно возмущенным случайным шумом линейным дифференциальным уравнением в банаховом пространстве. Предполагается, что процессы ε, f заданы характеристическим функционалом $\psi(u, v)$.

Обычно обсуждают задачи нахождения либо функции распределения решения уравнения (2.1), либо плотности распределения решения, либо задачу нахождения характеристического функционала решения. Здесь рассматривается более скромная задача: найти первую и вторую моментные функции решения задачи для случая гауссовых процессов ε, f.

Если уравнение является скалярным и процессы ε, f гауссовы, то первые две моментные функции решения разными способами получили В. И. Тихонов [6] и Дж. Адомиан [1].

3. Переход к детерминированной задаче

Введем обозначение $e(u, v) = \exp(i \int\limits_T (\varepsilon(s)u(s) + \langle f(s), v(s)\rangle)ds)$. Умножим уравнение (2.1) и начальное условие на $e(u, v)$ и запишем средние значения полученных равенств:

$$M(\frac{dx}{dt}e(u, v)) = M(\varepsilon(t)Axe(u, v)) + M(f(t)e(u, v)), \tag{3.1}$$

$$M(x(t_0)e(u, v)) = M(x_0e(u, v)). \tag{3.2}$$

Введем отображение $y = y(t, u, v) = M(x(t)e(u, v))$. Отметим, что $y(t, 0, 0) = Mx(t)$. Далее (пока формально):

$$\frac{\partial y}{\partial t} = M(\frac{dx}{dt}e(u, v)), \frac{\delta_p y}{\delta u(t)} = M(x(t)i\varepsilon(t)e(u, v)),$$

$$\frac{\delta_p \psi}{\delta v(t)} = M(ie(u, v)f(t)).$$

При этом равенства (3.1), (3.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -iA\frac{\delta_p y}{\delta u(t)} - i\frac{\delta_p \psi}{\delta v(t)}, \tag{3.3}$$

$$y(t_0, u, v) = M(x_0e(u, v)).$$

Будем предполагать, что x_0 статистически не зависит от процессов ε, f, тогда получаем начальное условие

$$y(t_0, u, v) = M(x_0)\psi(u, v). \tag{3.4}$$

Проведенные формальные рассуждения служат основанием для следующего определения.

Определение. *Математическим ожиданием* $Mx(t)$ решения задачи (2.1) называется $y(t, 0, 0)$, где y — решение задачи (3.3), (3.4) в некоторой окрестности точки с компонентами $u = 0$, $v = 0$.

Определение. *Решением* задачи (3.3), (3.4) называется отображение $y = y(t, u, v)$, имеющее в некоторой окрестности точки с компонентами $u = 0$, $v = 0$ вариационную производную $\dfrac{\delta_p y}{\delta u(t)}$, почти всюду на T имеющее производную $\dfrac{\partial y}{\partial t}$ и удовлетворяющее почти всюду на T равенству (3.3).

Для решения полученной задачи нам потребуются некоторые дополнительные факты.

4. Характеристический функционал гауссовых процессов ε и f

В дальнейшем считается, что случайные процессы заданы гауссовым характеристическим функционалом [3, с. 324]

$$\psi(u,v)=\exp[i\int\limits_T(a_1(s)u(s)+\langle a_2(s),v(s)\rangle)ds-\frac{1}{2}\int\limits_T\int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2)ds_1ds_2-$$
$$-\int\limits_T\int\limits_T\langle b_{12}(s_1,s_2)u(s_1),v(s_2)\rangle ds_1ds_2-\frac{1}{2}\int\limits_T\int\limits_T\langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1),v(s_2)\rangle ds_1ds_2]. \quad (4.1)$$

Здесь u принадлежит пространству $L_1(T)$ суммируемых на Т функций с нормой $\|u\|_1=\int\limits_T|u(s)|ds$, v принадлежит пространству $L_{1v}(T)$ суммируемых на Т векторных функций $v:T\to X$ с нормой $\|v\|_{1v}=\int\limits_T\|v(s)\|ds$, $a_1:T\to\mathbb{R}$, $b_{11}:T\times T\to\mathbb{R}$ — заданные функции, $a_2:T\to X^*$ — векторная функция, $b_{12}:T\times T\to X^*$ — заданная векторная функция, $b_{22}:T\times T\to L(X,X^*)$ — заданное отображение.

Выясним смысл коэффициентов $a_1,a_2,b_{11},b_{12},b_{22}$.

Лемма 4.1. *Если $B:T\times T\to L(X,X^*)$ непрерывно, $B(s_1,s_2)=B(s_2,s_1)$, $v\in L_{1v}(T)$, то*

$$\frac{\delta}{\delta v(t)}\int\limits_T\int\limits_T\langle B(s_1,s_2)v(s_1),v(s_2)\rangle ds_1ds_2=2\int\limits_T B(t,s_2)v(s_2)ds_2.$$

Доказательство. Пусть $h\in L_{1v}(T)$, тогда, в силу симметричности B,

$$\int\limits_T\int\limits_T\langle B(s_1,s_2)(v(s_1)+h(s_1)),v(s_2)+h(s_2)\rangle ds_1ds_2-\int\limits_T\int\limits_T\langle B(s_1,s_2)v(s_1),v(s_2)\rangle ds_1ds_2=$$
$$=\int\limits_T\int\limits_T\langle B(s_1,s_2)v(s_1),h(s_2)\rangle ds_1ds_2+\int\limits_T\int\limits_T\langle B(s_1,s_2)h(s_1),v(s_2)\rangle ds_1ds_2+$$
$$+\int\limits_T\int\limits_T\langle B(s_1,s_2)h(s_1),h(s_2)\rangle ds_1ds_2=$$
$$=\int\limits_T 2\int\limits_T\langle B(s_1,s_2)v(s_1),h(s_2)\rangle ds_1ds_2+\int\limits_T\int\limits_T\langle B(s_1,s_2)h(s_1),h(s_2)\rangle ds_1ds_2.$$

При этом

$$|\int\limits_T\int\limits_T\langle B(s_1,s_2)h(s_1),h(s_2)\rangle ds_1ds_2|\leqslant\int\limits_T\int\limits_T|\langle B(s_1,s_2)h(s_1),h(s_2)\rangle|ds_1ds_2\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_T\int\limits_T\|B(s_1,s_2)h(s_1)\|\|h(s_2)\|ds_1ds_2\leqslant\max_{T\times T}\|B(s_1,s_2)\|\int\limits_T\int\limits_T\|h(s_1)\|\|h(s_2)\|ds_1ds_2=$$
$$=\max_{T\times T}\|B(s_1,s_2)\|\|h\|^2_{L_{1v}(T)}=o(h^2).$$

Отсюда, согласно определению вариационной производной, следует утверждение леммы. Лемма доказана. □

Воспользуемся равенствами (1.1):

$$iM\varepsilon(t)=\frac{\delta_p\psi(0,0)}{\delta u(t)}=[\psi(u,v)(ia_1(t)-\int\limits_T b_{11}(t,s_2)u(s_2)ds_2-\int\limits_T\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)ds_2\rangle)]|_{u=0,v=0}=ia_1(t).$$

Следовательно, $a_1(t)=M\varepsilon(t)$. Аналогично получаем $a_2(t)=Mf(t)$.

Используя лемму, находим

$$\langle\frac{\delta_p\psi(u,v)}{\delta v(t_2)},w\rangle=\psi(u,v)\langle ia_2(t_2)-\int\limits_T b_{12}(s_1,t_2)u(s_1)ds_1-\int\limits_T b_{22}(s_1,t_2)v(s_1)ds_1,w\rangle.$$

Воспользуемся равенством (1.2):

$$i^2M[\langle f(t_1),w\rangle\langle f(t_2),w\rangle] = \langle\frac{\delta_p^2\psi(0,0)}{\delta v(t_2)\delta v(t_1)}w,w\rangle = [\psi(u,v)[\langle ia_2(t_1) - \int\limits_T b_{12}(s_1,t_1)u(s_1)ds_1 -$$

$$-\int\limits_T b_{22}(s_1,t_1)v(s_1)ds_1, w\rangle\langle ia_2(t_2) - \int\limits_T b_{12}(s_1,t_2)u(s_1)ds_1 - \int\limits_T b_{22}(s_1,t_2)v(s_1)ds_1, w\rangle -$$

$$-\langle b_{22}(t_1,t_2)w,w\rangle]]|_{u=0,v=0} = -\langle a_2(t_1),w\rangle\langle a_2(t_2),w\rangle - \langle b_{22}(t_1,t_2)w,w\rangle.$$

Из этого равенства находим

$$\langle b_{22}(t_1,t_2)w,w\rangle = M[\langle f(t_1),w\rangle\langle f(t_2),w\rangle] - \langle Mf(t_1),w\rangle\langle Mf(t_2),w\rangle.$$

Аналогично находим $b_{11}(t_1,t_2) = M(\varepsilon(t_1)\varepsilon(t_2)) - M\varepsilon(t_1)M\varepsilon(t_2)$.

Воспользуемся первым из равенств (1.2):

$$\langle i^2M(\varepsilon(t_1)f(t_2)),w\rangle = \langle\frac{\delta_p^2\psi(0,0)}{\delta u(t_1)\delta v(t_2)},w\rangle =$$

$$= [\psi(u,v)[(ia_1(t_1) - \int\limits_T b_{11}(t_1,s_2)u(s_2)ds_2 - \int\limits_T b_{12}(t_1,s_2)v(s_2)ds_2)\langle ia_2(t_2) -$$

$$-\int\limits_T b_{12}(s_1,t_2)u(s_1)ds_1 - \int\limits_T b_{22}(s_1,t_2)v(s_1)ds_1, w\rangle] - b_{12}(t_1,t_2)]|_{u=0,v=0} =$$

$$= \langle -a_1(t_1)a_2(t_2) - b_{12}(t_1,t_2), w\rangle.$$

Отсюда находим

$$b_{12}(t_1,t_2) = M(\varepsilon(t_1)f(t_2)) - M(\varepsilon(t_1))M(f(t_2)).$$

5. Операторная функция

Пусть $\chi(\tau) = \chi(s,t,\tau)$ — функция, которая равна $\operatorname{sign}(\tau - s)$ при τ, принадлежащем отрезку $[\min(s,t),\max(s,t)]$, и равна нулю при $\tau \notin [\min(s,t),\max(s,t)]$. Если $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ — аналитическая на всей комплексной плоскости функция $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $A \in L(X,X)$, то определяют операторную функцию $f(At) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k A^k t^k$. Нам потребуются аналогичные построения операторных функций, которые определяются функционалами.

Пусть $\varphi : L_1(T) \to \mathbb{C}$ — аналитический функционал

$$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_T \ldots \int\limits_T c_k(s_1,\ldots,s_k)u(s_1)\cdots u(s_k)ds_1\cdots ds_k, A \in L(X,X).$$

Здесь $c_k(s_1,\ldots,s_k)$ симметрично по любой паре аргументов. Тогда определена операторная функция

$$\varphi(Au) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \int\limits_T \ldots \int\limits_T c_k(s_1,\ldots,s_k)u(s_1)\cdots u(s_k)ds_1\cdots ds_k.$$

Пусть E обозначает тождественный оператор, действующий в пространстве X. На множестве аналитических операторных функций определим оператор $U(t,t_0)$

$$U(t,t_0)\varphi(uE) = \sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_T \ldots \int\limits_T c_k(s_1,\ldots,s_k)(u(s_1)E - i\chi(t_0,t,s_1)A)\cdots(u(s_k)E - i\chi(t_0,t,s_k)A)ds_1\cdots ds_k.$$

Теорема 5.1. *Для оператора $U(t,t_0)$ справедливы следующие свойства*:

1. $U(t_0,t_0)\varphi(uE) = \varphi(uE) = \varphi(u)E$,
2. $U(t,t_0)(\alpha\varphi_1(uE) + \beta\varphi_2(uE)) = \alpha U(t,t_0)\varphi_1(uE) + \beta U(t,t_0)\varphi_2(uE), \alpha,\beta \in \mathbb{C}$,
3. $U(t,\tau)U(\tau,t_0) = U(t,t_0)$,
4. $U(t_0,t) = U^{-1}(t,t_0)$,

5. $\dfrac{\delta}{\delta u(t)}U(t,t_0)\varphi(uE)=U(t_0,t)\dfrac{\delta\varphi(uE)}{\delta u(t)}$.

Доказательство. Первые четыре свойства легко проверяются. Докажем пятое свойство. Вариационная производная находится из вида приращения отображения (см. введение). Выпишем приращение для левой части равенства 5:

$$U(t,t_0)\varphi((u+h)E)-U(t,t_0)\varphi(uE).$$

Приращение для правой части равенства имеет вид

$$U(t,t_0)(\varphi((u+h)E)-\varphi(uE)).$$

Эти выражения равны, следовательно, справедливо равенство 5. □

6. Вычисление производных

Пусть ψ — характеристический функционал (4.1). Определим отображение

$$\Phi=U(t,t_0)\psi(uE,v)=\psi(uE-i\chi(t_0,t)A,v).$$

Теорема 6.1. *Если в* (4.1) $a_1,a_2,b_{11},b_{12},b_{22}$ *непрерывны,* $u\in L_1(T)$, $\|u\|_1\leqslant r$, *при* t,s, *принадлежащих* T, *выполняются условия* $|a_1(t)|\leqslant M_1$, $\|a_2(t)\|\leqslant M_2$, $|b_{11}(t,s)|\leqslant M_{11}$, $\|b_{12}(t,s)\|\leqslant M_{12}$, $\|b_{22}(t,s)\|\leqslant M_{22}$, *тогда существует вариационная производная* $\dfrac{\delta_p\Phi}{\delta u(t)}$, *причем*

$$\frac{\delta_p\Phi}{\delta u(t)}=(ia_1(t)E-\int\limits_T b_{11}(s_1,t)Eds_1+i\int\limits_{t_0}^{t} b_{11}(s_1,t)Ads_1-\int\limits_T\langle b_{12}(t,s_2),v(s_2)\rangle Eds_2)\Phi. \tag{6.1}$$

Доказательство. Воспользуемся определением вариационной производной. Пусть h — приращение переменной u. В дальнейшем $O(h)$ обозначает бесконечно малую одного порядка с бесконечно малой h, а $o(h)$ обозначает бесконечно малую высшего порядка относительно h. Вычислим соответствующее приращение для Φ:

$$\Delta_u\Phi=U(t,t_0)\psi((u+h)E)-U(t,t_0)\psi(uE)=\psi((u+h)E-i\chi(t_0,t)A,v)-\psi(uE-i\chi(t_0,t)A,v)=$$
$$=\psi(uE-i\chi(t_0,t)A,v)[exp(i\int\limits_T a_1(s)h(s)Eds-$$
$$-\int\limits_T\int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)(u(s_1)E-i\chi(t_0,t,s_1)A)h(s_2)Eds_1ds_2-$$
$$-\int\limits_T\int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)h(s_1)h(s_2)Eds_1ds_2-\int\limits_T\int\limits_T\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle h(s_1)Eds_1ds_2)-E].$$

Нам потребуются следующие оценки:

$$\|\int\limits_T\int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)(u(s_1)E-i\chi(t_0,t,s_1)A)h(s_2)Eds_1ds_2\|\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_T\int\limits_T|b_{11}(s_1,s_2)|(\|u(s_1)E\|+\|A\|)\|h(s_1)E\|ds_1ds_2\leqslant M_1(\|u\|_1+\|A\|)\|h\|_1=O(h),$$
$$\|\int\limits_T\int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)h(s_1)h(s_2)Eds_1ds_2\|\leqslant M_1\|h\|_1^2=o(h),$$
$$\|\int\limits_T\int\limits_T\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle h(s_1)Eds_1ds_2\|\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_T\int\limits_T\|b_{12}(s_1,s_2)\|\|v(s_2)\|\|h(s_1)\|ds_1ds_2\leqslant M_3\|h\|_1\int\limits_T\|v(s_2)\|ds_2=O(h).$$

Если $B \in L(X,X)$ и α — бесконечно малая величина, то

$$\exp(B\alpha) - E = E + B\alpha + \frac{(B\alpha)^2}{2!} + \frac{(B\alpha)^3}{3!} + \ldots - E = B\alpha + o(\alpha).$$

Тогда, учитывая последние три оценки, имеем

$$\Delta\Phi = \psi(uE - i\chi(t_0,t)A, v)(i\int\limits_T a_1(s)h(s)Eds -$$

$$-\int\limits_t \int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)(u(s_1)E - i\chi(t_0,t,s_1)A)h(s_2)Eds_1ds_2 -$$

$$-\int\limits_T \int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)h(s_1)h(s_2)Eds_1ds_2 - \int\limits_T \int\limits_T \langle b_{12}(s_1,s_2), v(s_2)\rangle h(s_1)Eds_1ds_2 + o(h).$$

Поскольку

$$\int\limits_T \int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)(-i\chi(t_0,t,s_1)A)h(s_2)Eds_1ds_2 = -i\int\limits_T \int\limits_{t_0}^{t} b_{11}(s_1,s_2)Ah(s_2)Eds_1ds_2,$$

то, согласно определению вариационной производной, вариационная производная $\dfrac{\delta_p\Phi}{\delta u(t)}$ существует и справедливо равенство (6.1). Теорема доказана. □

Теорема 6.2. *Пусть* $u \in L_1(T)$, $\|u\|_1 < r$, $a_1 : T \to \mathbb{R}$ — *непрерывная на* T *функция* $|a_1(t)| \leqslant M_1$, $a_2 : T \to X$ *непрерывная функция,* $\|a_2(s)\| \leqslant M_2$, $b_{11} : T \times T \to \mathbb{R}$, $b_{12} : T \times T \to L(X,X)$ — *равномерно непрерывны и ограничены,* $|b_{11}(s_1,s_2)| \leqslant M_{11}$, $\|b_{12}(s_1,s_2)\| \leqslant M_{12}$. *Тогда существует производная* $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$ *и справедливо равенство*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = iA(ia_1(t)E - \int\limits_T b_{11}(s_1,t)Eds_1 + i\int\limits_{t_0}^{t} b_{11}(s_1,t)Ads_1 - \int\limits_T \langle b_{12}(t,s_2), v(s_2)\rangle Eds_2)\Phi. \qquad (6.2)$$

Доказательство. Пусть Δt — приращение переменной t и $\Delta_t\Phi$ — соответствующее приращение Φ. Учитывая свойства функции χ и определение экспоненты от ограниченного оператора, находим

$$\frac{1}{\Delta t}\Delta_t\Phi = \frac{1}{\Delta t}[U(t+\Delta t, t_0)\psi(uE,v) - U(t,t_0),v)\psi(uE,v)] =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}[\psi(uE - i\chi(t_0, t+\Delta t)A, v) - \psi(uE - i\chi(t_0,t)A, v)] =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\{\exp[i\int\limits_T a_1(s)(u(s)E - i\chi(t_0,t,s)A - i\chi(t,t+\Delta t,s)A)ds + i\int\limits_T \langle a_2(s), v(s)\rangle ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_T \int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)(u(s_1)E - i\chi(t_0,t,s_1)A - i\chi(t,t+\Delta t,s_1)A)(u(s_2)E - i\chi(t_0,t,s_2)A -$$

$$-i\chi(t,t+\Delta t,s_2)A)ds_1ds_2 - \int\limits_T \int\limits_T \langle b_{12}(s_1,s_2), v(s_2)\rangle(u(s_1)E - i\chi(t,t+\Delta t,s_1)A)ds_1ds_2 -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_T \int\limits_T \langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1), v(s_2)\rangle ds_1ds_2] - \exp[i\int\limits_T a_1(s)(u(s)E - i\chi(t_0,t,s)A)ds + i\int\limits_T \langle a_2(s), v(s)\rangle ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_T \int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)(u(s_1)E - i\chi(t_0,t,s_1)A)(u(s_2)E - i\chi(t_0,t,s_2)A)ds_1ds_2 -$$

$$-\int\limits_T \int\limits_T \langle b_{12}(s_1,s_2), v(s_2)\rangle(u(s_1)E - i\chi(t_0,t)A)ds_1ds_2 - \frac{1}{2}\int\limits_T \int\limits_T \langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1), v(s_2)\rangle ds_1ds_2]\} =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\psi(uE - i\chi(t_0,t)A, v)\{[\exp(\int\limits_t^{t+\Delta t} a_1(s)Ads + i\int\limits_T \int\limits_t^{t+\Delta t} b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)Ads_1ds_2+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_t^{t+\Delta t} b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2 + \int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2 - i\int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_T \langle b_{12}(s_1,s_2), v(s_2)\rangle A) - E]\} =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\psi(uE - i\chi(t_0,t)A)[\exp W - E] = \frac{1}{\Delta t}\Phi[W + o(W)],$$

где

$$W = \int\limits_t^{t+\Delta t} a_1(s)Ads + i\int\limits_T \int\limits_t^{t+\Delta t} b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)Ads_1ds_2+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_t^{t+\Delta t} b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2 + \int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2 - i\int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_T \langle b_{12}(s_1,s_2), v(s_2)\rangle Ads_2ds_1.$$

Согласно теореме о среднем значении [7, с. 113], $\int\limits_t^{t+\Delta t} a_1(s)Ads = a(c)A\Delta t$, где c — точка из интервала с концами t и $t+\Delta t$. Поскольку a_1 — непрерывная функция, то

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} a_1(s)Ads = a(t)A.$$

Аналогично получаем

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[i\int\limits_T \int\limits_t^{t+\Delta t} b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)Ads_1ds_2+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_t^{t+\Delta t} b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2] = i\int\limits_T b_{11}(s_1,t)u(s_1)Ads_1 + \int\limits_{t_0}^{t} b_{11}(s_1,t)A^2ds_1,$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[-i\int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_T \langle b_{12}(s_1,s_2), v(s_2)\rangle Ads_2ds_1] = -i\int\limits_T \langle b_{12}(t,s_2), v(s_2)\rangle Ads_2.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — любое число. Поскольку b_{11} — равномерно непрерывная функция на $T\times T$, то найдется число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что неравенство $|s-t| < \delta(\varepsilon)$, влечет неравенство $|b_{11}(s_1,s) - b(s_1,t)| < \varepsilon$ при всех $s_1 \in T$. Тогда при $0 < |\Delta t| < \delta(\varepsilon)$, $\|u\|_1 < r$ имеем

$$\|\int\limits_{t_0}^{t}\{\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1 - b_{11}(s_1,t)A^2\}ds_2\| =$$

$$= \|\int\limits_{t_0}^{t}\{\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} (b_{11}(s_1,s_2) - b_{11}(s_1,t))A^2ds_1\}ds_2\| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{t}\{\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} |b_{11}(s_1,s_2) - b_{11}(s_1,t)|\|A\|^2ds_1\}ds_2 < \varepsilon(t-t_0)\|A\|^2.$$

Аналогично получаем

$$\|\int\limits_T\{\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)Ads_1 - b_{11}(s_1,t)u(s_1)A\}ds_2\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_T \{\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} |b_{11}(s_1, s_2) - b_{11}(s_1, t)||u(s_1)|\|A\|ds_1\}ds_2\| < \varepsilon\|A\|\|u\|_1 < \varepsilon\|A\|r,$$

$$\|\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} b_{11}(s_1, s_2)A^2 ds_1 ds_2\| \leqslant M_{11}\|A\|^2\Delta t = O(\Delta t),$$

Поскольку ε — произвольное положительное число, то из этих оценок следует, что при $\Delta t \to 0$ существует предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} W = a_1(t)A + i\int_T b_{11}(s_1, t)u(s_1)Ads_1 + \int_{t_0}^t b_{11}(s_1, t)A^2 ds_1 - i\int_T \langle b_{12}(t, s_2), v(s_2)\rangle Ads_2 ds_1.$$

Устремляя Δt к нулю, получаем равенство (6.2). Теорема доказана. □

7. Решение однородного уравнения

Теорема 7.1. *Пусть выполняются условия теорем* 6.1 *и* 6.2*, тогда*

$$y = U(t, t_0)\psi(uE, v) = \psi(uE - i\chi(t_0, t)A, v)M(x_0) \tag{7.1}$$

является решением задачи

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -iA\frac{\delta_p y}{\delta u(t)}, \tag{7.2}$$

$$y(t_0, u, v) = M(x_0)\psi(u, v)). \tag{7.3}$$

Доказательство.

$$y(t_0, u, v) = \psi(uE - i\chi(t_0, t_0)A, v)M(x_0) = \psi(uE, v)M(x_0) = \psi(u, v)M(x_0),$$

т. е. условие (7.3) выполнено. Из теорем 6.1 и 6.2 следует, что выполняется равенство

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -iA\frac{\delta_p \Phi}{\delta u(t)}. \tag{7.4}$$

Подставляя (7.1) в (7.2) и используя при этом последнее равенство, убеждаемся, что (7.1) является решением уравнения (7.2). Теорема доказана. □

Теорема 7.2. *Решение* (7.1) *задачи* (7.2), (7.3) *единственно в классе аналитических по переменной* t (*в некоторой окрестности точки* t_0) *решений.*

Доказательство. Пусть y_1 еще одно аналитическое по переменной t решение задачи (7.1), (7.2). Рассмотрим $z = y - y_1$. Отображение z является решением задачи

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -iA\frac{\delta_p z}{\delta u(t)},$$

$$z(t_0, u, v) = 0.$$

Рассмотрим разложение z в степенной ряд $z = \sum_{k=0}^{\infty} z_k(u, v)(t - t_0)^k$. Из начального условия получаем $z_0 = 0$. Подставим разложение для z в уравнение, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} kz_k(u, v)(t - t_0)^{k-1} = -iA\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_p z_k(u, v)}{\delta u(t)}(t - t_0)^k.$$

При $t = t_0$ из этого равенства получаем $z_1 = -iA\frac{\delta_p z_0}{\delta u(t)} = 0$. Сокращая на $t - t_0$ и полагая $t = t_0$, получаем $z_2 = -iA\frac{\delta_p z_1}{\delta u(t)} = 0$. Продолжая этот процесс далее, получим $z_k = 0$ при всех k. Тогда $z = 0$ и $y = y_1$. Теорема доказана. □

8. Решение линейной неоднородной задачи (3.3), (3.4)

В задаче (3.3), (3.4) переменная v является параметром.

Теорема 8.1. *Пусть выполняются условия*: $u \in L_1(T)$, $\|u\|_1 < r > 0$, $v \in L_{1v}(T)$, $a_1 : T \to \mathbb{R}$, $a_2 : T \to X$ — *непрерывны,* b_{11}, b_{12} — *равномерно непрерывны и симметричны по переменным* s_1, s_2 *на* $T \times T$, b_{22} *непрерывно и симметрично по переменным* s_1, s_2. *Тогда*

$$y = U(t, t_0)\psi(uE, v)M(x_0) - i\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\delta_p}{\delta v(s)}U(t, s)\psi(uE, v)ds =$$

$$= \psi(uE - i\chi(t_0, t)A, v)M(x_0) - i\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\delta_p}{\delta v(s)}\psi(uE - i\chi(s, t)A, v)ds \tag{8.1}$$

является решением задачи (3.3), (3.4).

Доказательство. Произведем подстановку (8.1) в (3.3), (3.4):

$$y(t_0, u, v) = U(t, t_0)\psi(uE, v)M(x_0) = \psi(uE - i\chi(t_0, t_0)A, v)M(x_0) =$$
$$= \psi(uE, v)M(x_0) = \psi(u, v)M(x_0).$$

Начальное условие (3.4) выполняется.

Используя теоремы 6.1 и 6.2, а также равенство (7.4), находим

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -iA\frac{\delta_p(U(t, t_0)\psi(uE, v))}{\delta u(t)}M(x_0) - i\frac{\delta_p(U(t, t)\psi(uE, v))}{\delta v(t)} - i\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\delta_p^2}{\delta v(s)\delta u(t)}U(t, s)\psi(uE, v)ds =$$

$$= -iA\frac{\delta_p}{\delta u(t)}[\psi(uE - i\chi(t_0, t)A, v)M(x_0) - i\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\delta_p}{\delta v(s)}\psi(uE - i\chi(s, t)A, v)ds] - i\frac{\delta_p\psi(uE, v)}{\delta v(t)} =$$

$$= -iA\frac{\delta_p y}{\delta u(t)} - i\frac{\delta_p\psi(uE, v)}{\delta v(t)}.$$

Следовательно, y является решением уравнения (3.3). Теорема доказана. □

Используя вид функционала ψ и определение $U(t, t_0)$ и функции χ, формулу (8.1) можно записать в виде

$$y = \exp[i\int\limits_T a_1(s)Eu(s)ds + \int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)Ads - \frac{1}{2}\int\limits_T\int\limits_T b_{11}(s_1, s_2)u(s_1)u(s_2)Eds_1ds_2+$$

$$+i\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_T b_{11}(s_1, s_2)u(s_1)Ads_1ds_2 + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t} b_{11}(s_1, s_2)A^2ds_1ds_2-$$

$$-\int\limits_T\int\limits_T u(s_1)E\langle b_{12}(s_1, s_2), v(s_2)\rangle ds_1ds_2+$$

$$+i\int\limits_T\int\limits_{t_0}^{t} A\langle b_{12}(s_1, s_2), v(s_2)\rangle ds_1ds_2]exp(i\int\limits_T \langle a_2(s), v(s)\rangle ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_T\int\limits_T \langle b_{22}(s_1, s_2)v(s_1), v(s_2)\rangle ds_1ds_2)M(x_0)-$$

$$-i\int\limits_{t_0}^{t} exp[i\int\limits_T a_1(\tau)Eu(\tau)d\tau + \int\limits_s^{t} a_1(\tau)Ad\tau - \frac{1}{2}\int\limits_T\int\limits_T b_{11}(s_1, s_2)u(s_1)u(s_2)Eds_1ds_2+$$

$$+i\int_s^t\int_T b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)Ads_1ds_2+\frac{1}{2}\int_s^t\int_s^t b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2-$$

$$-\int_T\int_T u(s_1)E\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle ds_1ds_2+$$

$$+i\int_T\int_s^t A\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle ds_1ds_2]\exp(i\int_T\langle a_2(\tau),v(\tau)\rangle d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_T\int_T\langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1),v(s_2)\rangle ds_1ds_2)[ia_2(s)-$$

$$-\int_T Eu(s_1)b_{12}(s_1,s)ds_1+i\int_s^t Ab_{12}(s_1,s)ds_1-\int_T b_{22}(s,s_2)v(s_2)ds_2]ds. \tag{8.2}$$

9. Математическое ожидание решения уравнения (2.1)

Теорема 9.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 8.1, *тогда математическое ожидание решения задачи* (2.1) *можно записать в виде*

$$M(x(t))=\psi(-i\chi(t_0,t)A,0)M(x_0)-i\int_{t_0}^t\frac{\delta}{\delta v(s)}\psi(-i\chi(s,t)A,0)ds$$

или в другой форме:

$$M(x(t))=\exp[\int_{t_0}^t a_1(s)Ads+\frac{1}{2}\int_{t_0}^t\int_{t_0}^t b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2]M(x_0)+$$

$$+\int_{t_0}^t\exp[\int_s^t a_1(\tau)Ad\tau+\frac{1}{2}\int_s^t\int_s^t b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2](a_2(s)+\int_s^t Ab_{12}(s_1,s)ds_1)ds. \tag{9.1}$$

Доказательство. Согласно определению, $M(x(t))=y(t,0,0)$. Полагая в полученных выше выражениях (8.1) $u=0$, $v=0$, получаем искомые формулы. □

Замечание 9.1. Если коэффициент b_{12} равен нулю, то процессы ε и f статистически независимы. Поскольку выражение (9.1) зависит от b_{12}, то формулы для математического ожидания $M(x(t))$ различаются для статистически зависимых процессов ε, f и для статистически независимых.

Замечание 9.2. Если $b_{11}=0$, то $\varepsilon=a_1$ является не случайной функцией и (9.1) определяет математическое ожидание решения задачи (2.1), в которой только f является случайным векторным процессом.

Замечание 9.3. Если $a_1\geqslant 0$, спектр оператора A не имеет кратных собственных значений и лежит на мнимой оси, то спектр оператора $A^2\int_{t_0}^t\int_{t_0}^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2$ имеет отрицательные собственные значения (b_{11} по своему смыслу неотрицательная функция). В этом случае

$$M(x(t))=\exp[A\int_{t_0}^t a_1(s)ds+\frac{A^2}{2}\int_{t_0}^t\int_{t_0}^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2]M(x_0)$$

при возрастании t убывает. Это означает, что при этих условиях случайный шум $\varepsilon(t)$ оказывает на систему стабилизирующее влияние!

10. Смешанные моментные функции

Основные трудности в наших построениях были связаны с нахождением формул (8.1), (8.2) для решения задачи (3.3), (3.4). Оказывается, что эти формулы полезны не только для нахождения математического ожидания $M(x(t))$.

Из определения y следует

$$\frac{\delta_p y}{\delta u(\tau)}\Big|_{u=0,v=0} = iM(x(t)\varepsilon(\tau)).$$

Таким образом, смешанная моментная функция $M(x(t)\varepsilon(\tau))$ может быть получена из y с помощью операции вариационного дифференцирования.

Теорема 10.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 8.1*, тогда*

$$M(x(t)\varepsilon(\tau)) = \exp[i\int_{t_0}^{t} a_1(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} b_{11}(s_1,s_2)A^2 ds_1 ds_2](a_1(\tau)E + \int_{t_0}^{t} b_{11}(\tau,s_2)Ads_2)M(x_0)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\{\exp[i\int_{s}^{t} a_1(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} b_{11}(s_1,s_2)A^2 ds_1 ds_2][(a_1(\tau)E+$$

$$+\int_{s}^{t} b_{11}(\tau,s_2)Ads_2)(a_2(s) + \int_{s}^{t} Ab_{12}(s_1,s)ds_1) + b_{12}]\}ds$$

Доказательство. Поскольку вариационное дифференцирование не столь очевидно, то вычислим сначала вариационную производную:

$$\frac{\delta_p y}{\delta u(\tau)} = \exp[i\int_{T} a_1(s)Eu(s)ds + \int_{t_0}^{t} a_1(s)Ads - \frac{1}{2}\int_{T}\int_{T} b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2)Eds_1ds_2+$$

$$+i\int_{t_0}^{t}\int_{T} b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)Ads_1ds_2 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2-$$

$$-\int_{T}\int_{T} u(s_1)E\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle ds_1ds_2+$$

$$+i\int_{T}\int_{t_0}^{t} A\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle ds_1ds_2](ia_1(\tau)E - \int_{T} b_{11}(\tau,s_2)u(s_2)Eds_2 + i\int_{t_0}^{t} b_{11}(\tau,s_2)Ads_2-$$

$$-\int_{T} E\langle b_{12}(\tau,s_2),v(s_2)\rangle ds_2)\exp(i\int_{T}\langle a_2(s),v(s)\rangle ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{T}\int_{T}\langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1),v(s_2)\rangle ds_1ds_2)M(x_0)-$$

$$-i\int_{t_0}^{t}\{\exp[i\int_{T} a_1(\xi)Eu(\xi)d\xi + \int_{s}^{t} a_1(\xi)Ad\xi - \frac{1}{2}\int_{T}\int_{T} b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2)Eds_1ds_2+$$

$$+i\int_{s}^{t}\int_{T} b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)Ads_1ds_2 + \frac{1}{2}\int_{s}^{t}\int_{s}^{t} b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2-$$

$$-\int_{T}\int_{T} u(s_1)E\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle ds_1ds_2+$$

$$+i\int_T\int_s^t A\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle ds_1ds_2](ia_1(\tau)E-\int_T b_{11}(\tau,s_2)u(s_2)Eds_2+i\int_s^t b_{11}(\tau,s_2)Ads_2-$$

$$-\int_T E\langle b_{12}(\tau,s_2),v(s_2)\rangle ds_2)[\exp(i\int_T\langle a_2(\xi),v(\xi)\rangle d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\int_T\int_T\langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1),v(s_2)\rangle ds_1ds_2)][ia_2(s)-\int_T Eu(s_1)b_{12}(s_1,s)ds_1+$$

$$+i\int_s^t Ab_{12}(s_1,s)ds_1-\int_T b_{22}(s,s_2)v(s_2)ds_2]+$$

$$+\exp[i\int_T a_1(\tau)Eu(\tau)d\tau+\int_s^t a_1(\tau)Ad\tau-\frac{1}{2}\int_T\int_T b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2)Eds_1ds_2+$$

$$+i\int_s^t\int_T b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)Ads_1ds_2+\frac{1}{2}\int_s^t\int_s^t b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2-$$

$$-\int_T\int_T u(s_1)E\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle ds_1ds_2+$$

$$+i\int_T\int_s^t A\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle ds_1ds_2]\exp(i\int_T\langle a_2(\xi),v(\xi)\rangle d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\int_T\int_T\langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1),v(s_2)\rangle ds_1ds_2)(-Eb_{12}(\tau,s))\}ds.$$

Полагая в этом выражении $u=0$, $v=0$, приходим к указанному в теореме выражению для смешанной моментной функции. Теорема доказана. □

Более громозко выражение для второй смешанной функции $\langle M(x(t)\langle f(\tau),\omega\rangle),\omega\rangle$.

Теорема 10.2. *Если выполняются условия теоремы* 8.1*, то*

$$\langle M(x(t)\langle f(\tau),\omega\rangle),\omega\rangle=\langle\exp(\int_{t_0}^t a_1(s)Ads)\{\langle\int_{t_0}^t Ab_{12}(s_1,\tau)ds_1,\omega\rangle+\langle a_2(\tau),\omega\rangle\}M(x_0),\omega\rangle+$$

$$+\langle\int_{t_0}^t\{\exp(\int_s^t a_1(\xi)Ad\xi)\{\langle\int_s^t Ab_{12}(s_1,\tau)ds_1,\omega\rangle a_2(s)+\langle a_2(\tau),\omega\rangle a_2(s)+b_{22}(s,\tau)\omega\}\}ds,\omega\rangle. \tag{10.1}$$

Доказательство. Используя определение y, находим

$$\langle\frac{\delta_p}{\delta v(\tau)}\langle y,\omega\rangle,\omega\rangle|_{u=0,v=0}=\langle M(x(t)e(u,v)i\langle f(\tau),\omega\rangle),\omega\rangle|_{u=0,v=0}=i\langle M(x(t)\langle f(\tau),\omega\rangle),\omega\rangle.$$

Таким образом, $\langle M(x(t)\langle f(\tau),\omega\rangle),\omega\rangle$ можно найти вариационным дифференцированием y.

Используя выражение (8.2), находим

$$\langle\frac{\delta_p}{\delta v(\tau)}\langle y,\omega\rangle,\omega\rangle=\langle\exp[i\int_T a_1(s)Eu(s)ds+\int_{t_0}^t a_1(s)Ads-\frac{1}{2}\int_T\int_T b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2)Eds_1ds_2+$$

$$+i\int_{t_0}^t\int_T b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)Ads_1ds_2+\frac{1}{2}\int_{t_0}^t\int_{t_0}^t b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2-$$

$$-\int_T\int_T u(s_1)E\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle ds_1ds_2+$$

$$+i\int_T\int_{t_0}^t A\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle ds_1ds_2]\{\langle(-\int_T u(s_1)Eb_{12}(s_1,\tau)ds_1+$$

$$+i\int_{t_0}^t Ab_{12}(s_1,\tau)ds_1),\omega\rangle\exp(i\int_T\langle a_2(s),v(s)\rangle ds-\frac{1}{2}\int_T\int_T\langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1),v(s_2)\rangle ds_1ds_2)+$$

$$+\exp(i\int_T\langle a_2(s),v(s)\rangle ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_T\int_T\langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1),v(s_2)\rangle ds_1ds_2)\langle(ia_2(\tau)-\int_T b_{22}(\tau,s_2)v(s_2)ds_2),\omega\rangle\}M(x_0),\omega\rangle-$$

$$-\langle i\int_{t_0}^t\exp[i\int_T a_1(\xi)Eu(\xi)d\xi+\int_s^t a_1(\xi)Ad\xi-\frac{1}{2}\int_T\int_T b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2)Eds_1ds_2+$$

$$+i\int_s^t\int_T b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)Ads_1ds_2+\frac{1}{2}\int_s^t\int_s^t b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2-$$

$$-\int_T\int_T u(s_1)E\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle ds_1ds_2+$$

$$+i\int_T\int_s^t A\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle ds_1ds_2]\{\langle(-\int_T u(s_1)Eb_{12}(s_1,\tau)ds_1+$$

$$+i\int_s^t Ab_{12}(s_1,\tau)ds_1),\omega\rangle\exp(i\int_T\langle a_2(s),v(s)\rangle ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_T\int_T\langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1),v(s_2)\rangle ds_1ds_2)[ia_2(s)-\int_T Eu(s_1)b_{12}(s_1,s)ds_1-\int_T b_{22}(s,s_2)v(s_2)ds_2]+$$

$$+\exp(i\int_T\langle a_2(s),v(s)\rangle ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_T\int_T\langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1),v(s_2)\rangle ds_1ds_2)\langle(ia_2(\tau)-\int_T b_{22}(\tau,s_2)v(s_2)ds_2),\omega\rangle(ia_2(s)-$$

$$-\int_T Eu(s_1)b_{12}(s_1,s)ds_1-\int_T b_{22}(s,s_2)v(s_2)ds_2)+\exp(i\int_T\langle a_2(s),v(s)\rangle ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_T\int_T\langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1),v(s_2)\rangle ds_1ds_2)(-b_{22}(s,\tau)\omega)\}\}ds,\omega\rangle.$$

Подставляя в это выражение $u=0$, $v=0$, находим (10.1). Теорема доказана. □

11. Заключение

В статье рассмотрена задача о нахождении моментных функций решения задачи Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения в банаховом пространстве. Все изложение проводится без использования базиса. Рассматривается задача, когда случайные коэффициенты заданы гауссовым характеристическим функционалом и могут быть статистически зависимыми. Однако для нахождения математического ожидания решения (см. формулу (9.1)) достаточно знать математическое ожидание и ковариационную функцию случайного коэффициента ε и всего лишь математическое ожидание $a_2(t) = M(f(t))$ случайного процесса f и $b_{12}(s_1, s) = M(\varepsilon(s_1)f(s)) - M(\varepsilon(s_1))M(f(s))$. Полученные в процессе исследования формулы (8.1), (8.2) для вспомогательного отображения y позволяют находить при помощи сравнительно простой операции вариационного дифференцирования смешанные моментные функции более высокого порядка, например, $M(x(t)\varepsilon(\tau))$, $\langle M(x(t)\langle f(\tau), \omega\rangle), \omega\rangle$. Аналогично можно найти, например, $M(x(t)\varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2)) = -\dfrac{\delta_p^2 y}{\delta u(\tau_1)\delta u(\tau_2)}\Big|_{u=0,v=0}$ и другие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Адомиан Дж.* Стохастические системы. — М.: Мир, 1987.
2. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1986.
3. *Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.* Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. — М.: ФМ, 1961.
4. *Данфорд Н., Шварц Д.* Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
5. *Задорожний В. Г.* Методы вариационного анализа. — М.—Ижевск: РХД, 2006.
6. *Тихонов В. И.* Стохастическая радиотехника. — М.: Сов. радио, 1966.
7. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. — М.: ФМ, 1959.
8. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962.

Владимир Григорьевич Задорожний
Воронежский государственный университет, 394006, г. Воронеж, Университетская пл., д. 1
E-mail: zador@amm.vsu.ru

Мария Александровна Коновалова
Воронежский государственный университет, 394006, г. Воронеж, Университетская пл., д. 1
E-mail: thereallmariya@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-599-614 UDC 517.97

Differential Equation in a Banach Space Multiplicatively Perturbed by Random Noise

© 2017 **V. G. Zadorozhniy, M. A. Konovalova**

Abstract. We consider the problem of finding the moment functions of the solution of the Cauchy problem for a first-order linear nonhomogeneous differential equation with random coefficients in a Banach space. The problem is reduced to the initial problem for a nonrandom differential equation with ordinary and variational derivatives. We obtain explicit formula for the mathematical expectation and the second-order mixed moment functions for the solution of the equation.

REFERENCES

1. G. Adomian, *Stokhasticheskie sistemy* [Stochastic Systems], Mir, Moscow, 1987 (Russian translation).
2. A. A. Borovkov, *Teoriya veroyatnostey* [Probability Theory], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).

3. I. M. Gel'fand, N. Ya. Vilenkin, *Nekotorye primeneniya garmonicheskogo analiza. Osnashchennye gil'bertovy prostranstva* [Some Applications of Harmonic Analysis. Equipped Hilbert Spaces], FM, Moscow, 1961 (in Russian).
4. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Lineynye operatory. Obshchaya teoriya* [Linear Operators, Part 1: General Theory], IL, M., 1962 (Russian translation).
5. V. G. Zadorozhniy, *Metody variatsionnogo analiza* [Methods of Variational Analysis], RKhD, Moscow—Izhevsk, 2006 (in Russian).
6. V. I. Tikhonov, *Stokhasticheskaya radiotekhnika* [Stochastic Radio Engineering], Sov. Radio, Moscow, 1966 (in Russian).
7. G. M. Fikhtengol'ts, *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. 2* [A Course of Differential and Integral Calculus. Vol. 2], FM, Moscow, 1959 (in Russian).
8. E. Hille, R. Phillips, *Funktsional'nyy analiz i polugruppy* [Functional Analysis And Semi-Groups], IL, Moscow, 1962 (Russian translation).

V. G. Zadorozhniy
Voronezh State University, 1 Universitetskaya sq., 394006 Voronezh, Russia
E-mail: zador@amm.vsu.ru

M. A. Konovalova
Voronezh State University, 1 Universitetskaya sq., 394006 Voronezh, Russia
E-mail: thereallmariya@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 4 (2017). С. 615–626

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-615-626 УДК 517.957

КОНУСЫ ГОРДИНГА И УРАВНЕНИЯ БЕЛЛМАНА В ТЕОРИИ ГЕССИАНОВСКИХ ОПЕРАТОРОВ И УРАВНЕНИЙ

© 2017 г. **Н. М. ИВОЧКИНА, Н. В. ФИЛИМОНЕНКОВА**

Аннотация. В работе продолжено изучение алгебраических свойств конусов Гординга в пространстве симметричных матриц. На этой базе намечен новый подход к исследованию полностью нелинейных дифференциальных операторов и уравнений в частных производных второго порядка. Найдены теоремы сравнения нового типа для эволюционных гессиановских операторов, а также установлена связь гессиановских уравнений с уравнениями Беллмана.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Современная теория полностью нелинейных дифференциальных уравнений с гессиановскими операторами является результатом взаимодействия двух факторов. Первый — классическая теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, обогащенная в начале 80-х результатами из [6,10,11,14]. В публикациях [8,13,20] предпринята попытка создания общей теории полностью нелинейных уравнений по аналогии с теорией линейных и квазилинейных уравнений в частных производных второго порядка.

Второй фактор — теория однородных a-гиперболических многочленов многих переменных, представленная в 1959 г. Л. Гордингом в статье [15]. Приведем несколько фрагментов этой теории.

Начинается статья с понятия a-гиперболического многочлена $P_m(x)$, $m > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$ [15, с. 957]:

Определение 1.1. Пусть $a \in \mathbb{R}^N$, $P_m(a) \neq 0$, $P_m(tx) = t^m P_m(x)$, $t \in \mathbb{R}$. Многочлен $P_m(x)$ называется *a-гиперболическим*, если многочлен одной переменной $p(t) = P_m(ta + x)$ имеет m вещественных корней для любого $x \in \mathbb{R}^N$.

Естественными примерами a-гиперболических многочленов с $a = (1, \ldots, 1)$ являются элементарные симметрические функции порядка m.

В [15, с. 960] любому a-гиперболическому многочлену, $a \in \mathbb{R}^N$, сопоставляется конус

$$C(P_m, a) = \{x \in \mathbb{R}^N : P_m(ta + x) \neq 0,\ t \geqslant 0\}. \tag{1.1}$$

Наконец, как следствие основной теоремы 1 из [15, с. 961], сформулирована работающая в приложениях теорема 2. Приведем ее укороченную версию.

Теорема 1.1. *Пусть P_m — a-гиперболический многочлен. Тогда конус $C_m(P_m, a)$ есть выпуклое множество. Более того, если $b \in C_m(P_m, a)$, то P_m является b-гиперболическим и $C_m(P_m, b) = C_m(P_m, a)$.*

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-01-07650.

Удивительная алгебраическая теория Л. Гординга проникла в область полностью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных благодаря авторам статьи [13], где содержится первое упоминание о ней в этом контексте.

Независимо от публикаций [13, 15], примеры гиперболических многочленов и конусов (1.1) под именем конусов устойчивости дифференциальных операторов составляют содержание заметки [1] (1983 г.). Причем в [1] эти конструкции рассматриваются для многочленов с аргументами не только из $\mathbb{R}^N$, но также из пространства симметричных матриц. Автору [1] не удалось доказать выпуклость конусов устойчивости в общем случае, пока не выяснилось, что они являются матричными аналогами конусов Гординга (1.1). С этого времени алгебраическая теория Л. Гординга является полноправным фундаментом теории полностью нелинейных уравнений.

В статьях [4, 12] воспроизводятся основные положения теории Л. Гординга (в том числе для многочленов с матричным аргументом), а также демонстрируется ее роль в теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Помимо синтеза с алгебраической теорией Л. Гординга, исследование полностью нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка привело к появлению новых направлений в дифференциальной геометрии и функциональном анализе. Такая смесь затрудняет восприятие результатов, полученных непосредственно для уравнений. В надежде сделать современную теорию полностью нелинейных уравнений более прозрачной, в статьях [3, 4, 17, 18] предпринята попытка отделить те новые алгебро-геометрические структуры, которые сопровождают эту теорию, от самих уравнений.

В предлагаемой статье продолжено отделение новых направлений в алгебре от их приложений к полностью нелинейным уравнениям.

Так, раздел 2 данной работы содержат модернизированный обзор новых алгебраических понятий, возникших в результате развития теории Л. Гординга, и формулировку некоторых нелинейных алгебраических проблем, интересных независимо от каких-либо приложений.

Раздел 3 посвящен следствиям этой деятельности для теории полностью нелинейных уравнений. Рассматриваются операторы и уравнения гессиановского типа, т. е. $F(u_{xx}) = f$.

В пункте 3.1 мы демонстрируем принцип построения гессиановских операторов, для которых корректно понятие конуса допустимых функций, т. е. множества, контролируемого только знаком оператора.

В публикациях Н. В. Крылова [6–8, 20] показано, что многие полностью нелинейные уравнения допускают эквивалентное представление в форме уравнений Беллмана. На основе дуальных конусов Гординга, построенных в разделе 2, в пункте 3.2 мы устанавливаем новую связь между гессиановскими операторами и операторами Беллмана. В качестве примеров рассмотрим здесь классическое уравнение Монжа—Ампера

$$\det u_{xx} = f_1^n, \quad x \in \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

и его эволюционный аналог

$$-u_t \det u_{xx} = f_2^{n+1}, \quad (x,t) \in \bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0;T]. \tag{1.3}$$

Как это следует из результатов пункта 3.2 данной статьи, справедливы теоремы:

Теорема 1.2. *Пусть $\omega \in \mathrm{Sym}^+(n)$, $\det\omega = 1$, где $\mathrm{Sym}^+(n)$ — пространство симметричных положительно определенных $n \times n$-матриц. Предположим, что функция $u \in C^2(\bar{\Omega})$ есть решение уравнения*

$$\inf_{\{\omega\}}(\omega, u_{xx}) = f_1 > 0, \quad f_1 \in C(\bar{\Omega}). \tag{1.4}$$

Тогда u — выпуклая в $\bar{\Omega}$ функция, для которой справедливо равенство (1.2).

С другой стороны, для того, чтобы C^2-решение u уравнения (1.2) *было решением уравнения* (1.4), *необходимо и достаточно, чтобы u была выпуклой в $\bar{\Omega}$ функцией.*

В (1.4) и далее символом (S^1, S^2) обозначено скалярное произведение симметричных матриц.

Теорема 1.3. *Пусть $\omega \in \mathrm{Sym}^+(n)$. Предположим, что $u \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ — решение уравнения*

$$\inf_{\{\omega\}}\left(\frac{-u_t}{\det\omega} + (\omega, u_{xx})\right) = f_2 > 0, \quad f_2 \in C(\bar{Q}_T). \tag{1.5}$$

Тогда u — монотонно-выпуклое в $\bar{Q}_T$ решение уравнения (1.3).

С другой стороны, для того, чтобы $C^{2,1}$-решение u уравнения (1.3) *удовлетворяло уравнению* (1.5)*, необходимо и достаточно, чтобы функция u была монотонно-выпуклой в $\bar{Q}_T$.*

Отметим, что в статье [22] *монотонно-выпуклыми* названы функции $u = u(x,t)$, отрицательно монотонные по t и выпуклые по x. В теореме 1.3 мы следуем этой терминологии.

Если уравнение Монжа—Ампера (1.2) было предметом исследования с давних пор (см. [9]), то его параболический аналог (1.3) впервые появился в книге [7, с. 307, пример 8]. В статье [16] уравнение (1.3) включено в семейство m-гессиановских эволюционных уравнений, $m = n$.

Новым примером является уравнение

$$-u_{tt} \det u_{xx} = f_3^{n+1}, \quad (x,t) \in \bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0;T], \tag{1.6}$$

По аналогии с монотонно-выпуклыми, назовем *вогнуто-выпуклыми* функции, вогнутые по t и выпуклые по x. Справедлива

Теорема 1.4. *Пусть $\omega \in \mathrm{Sym}^+(n)$. Предположим, что $u \in C^{2,2}(\bar{Q}_T)$ — решение уравнения*

$$\inf_{\{\omega\}} \left(\frac{-u_{tt}}{\det \omega} + (\omega, u_{xx}) \right) = f_3 > 0, \quad f_2 \in C(\bar{Q}_T). \tag{1.7}$$

Тогда функция u — вогнуто-выпуклая в $\bar{Q}_T$ и удовлетворяет уравнению (1.6).

С другой стороны, для того, чтобы $C^{2,2}$-решение u уравнения (1.6) *удовлетворяло уравнению* (1.7)*, необходимо и достаточно, чтобы u была вогнуто-выпуклой в $\bar{Q}_T$ функцией.*

Мы привели эти однотипные теоремы для того, чтобы подчеркнуть, что в отличие от линейного случая, в теории уравнений с нелинейными гессиановскими операторами главным контролером является знак оператора. Заметим еще, что уравнения (1.4), (1.5) и (1.7) являются уравнениями Беллмана.

В пункте 3.3 продемонстрировано применение алгебраических результатов из раздела 2 для получения новых теорем сравнения для гессиановских эволюционных операторов. Хорошо известно, что в современной теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений теоремы сравнения являются ключом к построению априорных оценок решений. Мы приводим простейшие примеры такого взаимодействия для допустимых решений гессиановских эволюционных уравнений.

2. Конусы Гординга в пространстве симметричных матриц

2.1. Конусы m-положительных матриц. В этом параграфе и далее используем следующие обозначения:

$\mathrm{Sym}(n)$ — пространство симметричных $n \times n$-матриц $S = (s_{ij})_{i,j=1}^n$;

$\mathrm{Sym}^+(n) \subset \mathrm{Sym}(n)$ — подпространство положительно определенных матриц;

$(S^1, S^2) = \mathrm{tr}(S^1 S^2)$ — скалярное произведение симметричных матриц, равное следу их произведения;

I — единичная матрица;

$\det S$ — определитель матрицы S;

$T_m(S)$ — m-след матрицы S, равный сумме всех главных миноров $\det S$ порядка m, $0 < m \leqslant n$;

$\nabla T_m(S) = \left(\dfrac{\partial T_m(S)}{\partial s_{ij}} \right)_{i,j=1}^n$ — градиент матричной функции T_m.

В статьях [1, 2] впервые были рассмотрены операторы, вычисляющие m-след гессиана C^2-функций, и введены конусы их устойчивости как естественные множества разрешимости задачи Дирихле. Матричными репликами этих конструкций служили функции $T_m(S)$ и конусы

$$K_m = \{S \in \mathrm{Sym}(n) : T_p(S) > 0,\ p = 1, \ldots, m\}, \quad m = 1, \ldots, n. \tag{2.1}$$

В [1] показано, что корни многочлена $p(t) = T_m(S + tI)$, $t \in \mathbb{R}$, вещественны для любой матрицы $S \in \mathrm{Sym}(n)$, указано представление

$$T_m(S + tI) = C_n^m \sum_{k=0}^{m} \frac{C_m^k}{C_n^k} T_k(S) t^{m-k}, \tag{2.2}$$

и отмечен очевидный факт, что все коэффициенты многочлена положительны тогда и только тогда, когда все его корни отрицательны. Впоследствии это привело автора [1] к справедливому заключению, что если рассматривать симметричные матрицы S как элементы пространства $\mathbb{R}^N$ с $N = n(n+1)/2$, то, согласно определению 1.1, многочлен $T_m(S)$ является I-гиперболическим в смысле Гординга, а конус (2.1) совпадает с соответствующим конусом Гординга (1.1): $K_m = C(T_m, I)$.

При этом определение (2.1) позволяет заменить вычисление корней многочлена $T_m(S+tI)$ вычислением m-следов $\det S$ и делает очевидной цепочку вложений

$$\mathrm{Sym}^+(n) = K_n \subset K_{n-1} \cdots \subset K_1 = \{S \in \mathrm{Sym}(n):\ \mathrm{tr} S > 0\}. \tag{2.3}$$

Из теоремы 1.1 для конусов Гординга следует, что конус (2.1) есть выпуклое множество в пространстве $\mathrm{Sym}(n)$, и если $S^0 \in K_m$, то $K_m = C(T_m, S^0)$, т. е. справедлива следующая лемма:

Лемма 2.1. *Пусть $S^0 \in K_m$, $S \in \mathrm{Sym}(n)$. Для того, чтобы $S \in K_m$, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты многочлена $p_m(t) = T_m(S+tS^0)$ были положительны.*

В некоторых ситуациях удобно использовать иные описания конусов K_m. Например, такое:

$$K_m = \{S \in \mathrm{Sym}(n) : \inf_{t>0} T_m(S+tI) > 0\}, \tag{2.4}$$

естественным дополнением которого является

$$\mathrm{Sym}(n) \backslash K_m = \{S \in \mathrm{Sym}(n) : \inf_{t>0} T_m(S+tI) \leqslant 0\}.$$

Из равенств (2.2) и (2.4) получаем еще одно определение:

$$K_m = \{S \in \mathrm{Sym}(n) : \inf_{t>0} T_m(S+tI) = T_m(S)\}. \tag{2.5}$$

Наконец, большое теоретическое значение имеет следующая простая лемма, доказанная, например, в [5].

Лемма 2.2. *Конус K_m есть компонента связности множества $\{S \in \mathrm{Sym}(n) : T_m(S) > 0\}$, содержащая I. Причем единичную матрицу можно заменить на любую матрицу $S^0 \in K_m$.*

Далее матрицы из конуса K_m мы называем *m-положительными*. Подробное исследование m-положительных матриц содержится в публикациях [4, 17], а в работе [5] на них распространен критерий Сильвестра. Именно, справедлива

Теорема 2.1. *Пусть $S \in \mathrm{Sym}(n)$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Обозначим символом $S^{\langle i_1, i_2, \ldots, i_k\rangle}$ матрицу, полученную из матрицы S заменой строк и столбцов с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ на нулевые.*

(i) *Для произвольного номера $1 \leqslant i \leqslant n$ верно следующее*:

$$K_m = \{S \in \mathrm{Sym}(n) : T_m(S) > 0,\ S^{<i>} \in K_{m-1}\}. \tag{2.6}$$

(ii) *Для произвольного набора различных номеров $1 \leqslant i_1, i_2, \ldots, i_{m-1} \leqslant n$ верно следующее*:

$$K_m = \{S \in \mathrm{Sym}(n) : T_m(S) > 0,\ T_{m-1}(S^{\langle i_1\rangle}) > 0, \ldots, T_1(S^{\langle i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}\rangle}) > 0\}.$$

В приложениях центральную роль играет пункт (i) теоремы 2.1.

2.2. Дуальные конусы. Определением

$$K_d^m = \{S_d \in \mathrm{Sym}(n) : (S_d, S) > 0, S \in K_m\}, \quad m = 1, \ldots, n,$$

введем в рассмотрение *дуальные конусы* K_d^m. Поскольку $K_d^n = \bar{K}_n \backslash \{\mathbf{0}\}$, то вместе с соотношениями (2.3) приходим к цепочке вложений:

$$K_d^1 \subset K_d^2 \cdots \subset K_d^n \subset \bar{K}_n \subset \bar{K}_{n-1} \cdots \subset \bar{K}_1.$$

Очевидно, что $K^1 = \{\lambda I, \lambda > 0\}$, $I = \nabla T_1(S)$, $K_d^n \backslash \partial K_d^n = \{\nabla T_n(S), S \in K_n\}$. В связи с этим можно предложить иную версию дуальных конусов при $m > 1$:

$$K^m = \{\nabla T_m(S), S \in K_m\}, \quad 1 < m \leqslant n.$$

Справедлива

Лемма 2.3. *Для $m = 2, \ldots, n$ выполнены равенства $K^m = K_d^m \backslash \partial K_d^m$.*

Заметим, что вложение $K^m \subset K_d^m \backslash \partial K_d^m$ является простым следствием хорошо известных в теории Л. Гординга [15] неравенств

$$(\nabla T_m(S^1), S^2) \geqslant m T_m^{\frac{m-1}{m}}(S^1) T_m^{\frac{1}{m}}(S^2), \quad S^1, S^2 \in K_m, \quad m = 1, \ldots, n. \tag{2.7}$$

Доказательство обратного вложения для $1 < m < n$ мы оставляем читателю.

Введем теперь 1-однородную функцию

$$F_m(S) := T_m^{\frac{1}{m}}(S).$$

Реплика неравенства (2.7) для F_m выглядит особенно просто:

$$(\nabla F_m(S^1), S^2) \geqslant F_m(S^2), \quad S^1, S^2 \in K_m, \tag{2.8}$$

и означает, что функция F_m вогнута в конусе m-положительных матриц.

Замечание 2.1. Неравенства (2.7), (2.8) точные, причем равенство достигается на $S^1 = S^2$.

Введем обозначение

$$\omega_m = \{\nabla F_m(S), S \in K_m\}.$$

Множество ω_m является нормированным подмножеством K^m в том смысле, что состоит из 0-однородных матриц-функций ∇F_m. Сформулируем одно простое следствие лемм 2.2, 2.3 и неравенства (2.8).

Лемма 2.4. *Справедливы соотношения*:

$$K_m = \{S \in \mathrm{Sym}(n) : \inf_{\omega_m}(\omega, S) > 0\}, \quad m = 1, \ldots, n.$$

При этом для m-положительных матриц выполнено равенство $\inf\limits_{\omega_m}(\omega, S) = F_m(S)$.

Безусловно существует описание множеств ω_m, независимое от $\nabla F_m(S)$. Сформулируем гипотезу:

$$\omega_m = \{S \in K_n : T_p(S) = C_n^p, p = m, \ldots, n\}, \quad 1 \leqslant m \leqslant n. \tag{2.9}$$

Отметим, что при $m = 1$ и $m = n$ равенства (2.9) очевидны.

Замечание 2.2. Поскольку следы T_m ортогонально инвариантны, т. е. справедливы тождества $T_m(S) = T_m(BSB^T)$, $BB^T = I$, утверждения этого параграфа автоматически переносятся на любое подпространство $\mathrm{Sym}(n)$. В частности, они справедливы для подпространства диагональных матриц, эквивалентного $\mathbb{R}^n$. В приложениях используется также подпространство эволюционных матриц $\mathrm{Sym}^{ev}(n+1) \subset \mathrm{Sym}(n+1)$, у элементов которого в первой строке и столбце отличен от 0 может быть лишь диагональный элемент.

2.3. Сравнение m-положительных матриц. Аппаратом такого сравнения являются неравенства (2.7), (2.8) и монотонность m-следов в K_m. Именно, справедлива

Теорема 2.2. *Для любых $S^1 \in K_m$, $S^2 \in \bar{K}_m \backslash \{\mathbf{0}\}$ справедливо неравенство*

$$T_m(S^1 + tS^2) > T_m(S^1), \quad t > 0. \tag{2.10}$$

Доказательство. Рассмотрим разложение многочлена $T_m(S^1 + tS^2)$ по степеням t с коэффициентами α_k, зависящими от S^1 и S^2:

$$T_m(S^1 + tS^2) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k t^{m-k} + T_m(S^1).$$

Из условия данной теоремы и леммы 2.1 следует, что $\alpha_k \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, m$. Если $\alpha_k = 0$ для всех $k = 1, \ldots, m$, то $T_m(S^1 + tS^2) \in K_m$ при любом значении $t \in \mathbb{R}$, что невозможно. Следовательно, существует хотя бы один положительный коэффициент α_k, и неравенство (2.10) доказано. □

Сформулируем условия, достаточные для того, чтобы разность m-положительной и симметричной матриц не попадала в замкнутый конус $\bar{K}_m$. Заметим, что в приложениях к дифференциальным уравнениям (см. раздел 3) важно лишь, что разность не попадает в более узкий конус $\bar{K}_n \subset \bar{K}_m$.

Следствие 2.1. *Пусть $S \in K_m$, $S \neq S^1$ и для матрицы S^1 выполнено хотя бы одно из неравенств*

1. $\inf\limits_{t>0} T_m(S^1 + tI) \leqslant T_m(S)$;
2. $T_m(S^1) \leqslant T_m(S)$;
3. $(\nabla F_m(S^2), S^1) \leqslant F_m(S)$ *с некоторой матрицей* $S^2 \in K_m$.

Тогда $(S^1 - S) \notin \bar{K}_m$.

Доказательство. Предположим, что $(S^1 - S) \in \bar{K}_m$. Тогда $S^1 = S^1 - S + S \in K_m$ по теореме 2.2 и $T_m(S^1) = T_m(S^1 - S + S) > T_m(S)$, что противоречит условию 2. Это предположение также не совместимо ни с одним из условий 1 и 3, так как $\inf\limits_{t>0} T_m(S^1 + tI) = T_m(S^1)$ согласно (2.5) и $(\nabla F_m(S^2), S^1) \geqslant F_m(S^1)$ по неравенству (2.8). $\square$

В заключение этого параграфа отметим, что множество m-положительных матриц является центральным и для дробей

$$T_{m,l}(S) = \frac{T_m}{T_l}(S), \quad F_{m,l}(S) = T_{m,l}^{\frac{1}{m-l}}(S), \quad 0 \leqslant l < m \leqslant n,$$

введенных в статьях [21,23,24]. Именно, все вышесказанное, включая определение (1.1), справедливо и для функций $T_{m,l}$. Было бы интересно найти аналитическое описание всех функций такого типа.

3. Гессиановские дифференциальные операторы

3.1. Конусы допустимых функций. В теории дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка одним из основных объектов является матрица Гессе $u_{xx} = (u_{ij})_{i,j=1}^n$. Термин «гессиановские уравнения» был введен в публикации [25] (1995 г.) для уравнений вида $F(u_{xx}) = f$ и с тех пор является общепринятым как для уравнений, так и для операторов $F[u] := F(u_{xx})$. Для того чтобы учесть специфику операторов

$$T_m[u] := T_m(u_{xx}),$$

мы назвали их *m-гессиановскими*.

В статье [13] предпринята попытка описать общий класс гессиановских уравнений, для которых существует функциональный конус корректной постановки задачи Дирихле. Элементы этих конусов были названы допустимыми функциями, [13, с. 263]. Следуя этой терминологии, мы называем функцию *m-допустимой*, если она принадлежит функциональному аналогу матричного конуса (2.1):

$$\mathbb{K}_m(\bar{\Omega}) = \{u \in C^2(\bar{\Omega}) : T_p[u](x) > 0,\ p = 1, \ldots, m\}. \tag{3.1}$$

Согласно лемме 2.2, для проверки m-допустимости функции u достаточно убедиться, что $T_m[u] > 0$ для всех $x \in \bar{\Omega}$ и $u_{xx}(x_0) \in K_m$ хотя бы в одной точке $x_0 \in \bar{\Omega}$.

На основе стационарного m-гессиановского оператора $T_m[u]$ в статьях [16, 19] введены понятия m-гессиановского эволюционного оператора и m-допустимых эволюций. В данной работе вводим новое понятие m-гессиановских гиперэволюций. Следующие определения сформулированы с учетом того, что $T_{n+1}(S) \equiv 0$.

Определение 3.1. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $Q_T = \Omega \times (0; T)$. Операторы

$$E_m[u] := -u_t T_{m-1}(u_{xx}) + T_m(u_{xx}), \quad m = 1, \ldots, n+1, \tag{3.2}$$

называем *m-гессиановскими эволюционными*, а функции из конуса

$$\mathbb{K}_m^{ev}(\bar{Q}_T) = \{u \in C^{2,1}(\bar{Q}_T) : E_p[u](x,t) > 0,\ p = 1, \ldots, m\} \tag{3.3}$$

— *m-допустимыми эволюциями*.

Определение 3.2. Операторы

$$H_m[u] := -u_{tt} T_{m-1}(u_{xx}) + T_m(u_{xx}), \quad m = 1, \ldots, n+1, \tag{3.4}$$

назовем *m-гессиановскими гиперэволюционными*, а функции из конуса

$$\mathbb{K}_m^{he}(\bar{Q}_T) = \{u \in C^{2,2}(\bar{Q}_T) : H_p[u](x,t) > 0,\ p = 1, \ldots, m\} \tag{3.5}$$

— *m-допустимыми гиперэволюциями.*

Определения 3.1, 3.2 следует рассматривать как иллюстрации к замечанию 2.2. Введем подпространство $\mathrm{Sym}^{ev}(n+1) \subset \mathrm{Sym}(n+1)$, состоящее из матриц вида

$$\hat{S} = (s_{ij})_{i,j=0}^n,\ s_{00} = s \in \mathbb{R},\ s_{0i} = s_{i0} = 0,\ (s_{ij})_{i,j=1}^n = S \in \mathrm{Sym}(n).$$

Будем называть такие матрицы *эволюционными* и обозначать их для краткости парой $(s;S)$:

$$\mathrm{Sym}^{ev}(n+1) = \{\hat{S} = (s;S), s \in \mathbb{R}, S \in \mathrm{Sym}(n)\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} E_m[u] &= T_m(\hat{S}[u]), \quad \hat{S}[u] = (-u_t; u_{xx}), \\ H_m[u] &= T_m(\hat{S}[u]), \quad \hat{S}[u] = (-u_{tt}; u_{xx}). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Следовательно, согласно замечанию 2.2, все утверждения раздела 2 можно применить как к оператору T_m, так и к E_m, H_m.

Например, сочетание леммы 2.2 и теоремы 2.1 (критерий Сильвестра) дает достаточные условия того, чтобы знак операторов E_m, H_m контролировал m-допустимость эволюций.

Теорема 3.1. *Пусть $D \subset Q_T$ — связная область, $u \in C^{2,2}(\bar{D})$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Предположим, что имеется точка $(x_0,t_0) \in \bar{D}$, для которой $u_{xx}(x_0,t_0) \in K_{m-1}$. Тогда*

(i) *если для всех $(x,t) \in \bar{D}$ выполнено неравенство $E_m[u] > 0$, то $u \in \mathbb{K}_m^{ev}(\bar{D})$;*

(ii) *если для всех $(x,t) \in \bar{D}$ выполнено неравенство $H_m[u] > 0$, то $u \in \mathbb{K}_m^{he}(\bar{D})$.*

Доказательство. Чтобы доказать утверждение (i), рассмотрим эволюционные матрицы $\hat{S}[u] = (-u_t; u_{xx})$. Из (3.6), (2.1) следует, что

$$u \in \mathbb{K}_m^{ev}(\bar{D}) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{S}[u](x,t) \in K_m \subset \mathrm{Sym}(n+1),\ (x,t) \in \bar{D}. \tag{3.7}$$

Множество эволюционных матриц $\{\hat{S}[u](x,t), (x,t) \in \bar{D}\}$ связно в пространстве $\mathrm{Sym}(n+1)$ и, по условию (i) теоремы, $T_m(\hat{S}[u]) = E_m[u] > 0$ для всех $(x,t) \in \bar{D}$. Тогда по лемме 2.2 для справедливости (3.7) достаточно, чтобы матрица $\hat{S}[u]$ была m-положительна хотя бы в одной точке области $\bar{D}$. Такая точка имеется по условию теоремы и равенству (2.6). Утверждение (i) доказано.

Чтобы доказать утверждение (ii), надо повторить это рассуждение для $\mathbb{K}_m^{he}(\bar{D})$, положив $\hat{S}[u] = (-u_{tt}; u_{xx})$. □

3.2. Связь с операторами Беллмана. Покажем, что для m-гессиановских операторов $T_m[u]$, $E_m[u]$, $H_m[u]$ в конусах допустимых функций существует иное представление.

Теорема 3.2. *Справедливы утверждения*:

(i) *для любого $1 \leqslant m \leqslant n$ уравнение $T_m[u] = f^m$ равносильно в конусе* (3.1) *равенству*

$$B_m[u] := \inf_{\omega_m}(\omega, u_{xx}) = f > 0, \quad \omega_m = \{\omega \in \mathrm{Sym}^+(n) : T_p(\omega) = C_n^p, p = m, \dots, n\}; \tag{3.8}$$

(ii) *для любого $1 \leqslant m \leqslant n+1$ уравнение $E_m[u] = f^m$ равносильно в конусе* (3.3) *равенству*

$$B_m^e[u] := \inf_{\omega_m^e}\big(-u_t\omega^0 + (\omega, u_{xx})\big) = f, \tag{3.9}$$

$$\omega_m^e = \{(\omega^0;\omega) \in \mathrm{Sym}^{ev}(n+1) \cap \mathrm{Sym}^+(n+1) : T_m(\omega^0;\omega) = C_{n+1}^p, p = m, \dots, n+1\};$$

(iii) *для любого $1 \leqslant m \leqslant n+1$ уравнение $H_m[u] = f^m$ равносильно в конусе* (3.5) *равенству*

$$B_m^h[u] := \inf_{\omega_m^e}\big(-u_{tt}\omega^0 + (\omega, u_{xx})\big) = f. \tag{3.10}$$

Доказательство. Заметим, что в случае $m = 1$ утверждения теоремы очевидны, а соответствующие операторы приобретают классический вид:

$$T_1[u] = B_1[u] = \Delta u, \quad E_1[u] = B_1^e[u] = -u_t + \Delta u, \quad H_1[u] = B_1^h[u] = -u_{tt} + \Delta u.$$

Докажем утверждения (i)–(iii) для общего случая.

Начнем с утверждения (i). Вследствие леммы 2.4 и представления (2.9) справедливо равенство

$$T_m^{\frac{1}{m}}[u] = \inf_{\omega_m}(\omega, u_{xx}), \quad u \in \mathbb{K}_m(\bar{\Omega}), \tag{3.11}$$

и поэтому m-допустимые решения уравнения $T_m[u] = f^m$ удовлетворяют уравнению (3.8), и наоборот.

В соответствии с замечанием 2.2 справедливы эволюционные аналоги (3.11). Именно, для всех $m = 1, \ldots, n+1$ справедливы равенства

$$E_m^{\frac{1}{m}}[u] = \inf_{\omega_m^e}(-u_t\omega^0 + (\omega, u_{xx})), \quad u \in \mathbb{K}_m^{ev}(\bar{Q}_T),$$

$$H_m^{\frac{1}{m}}[u] = \inf_{\omega_m^e}(-u_{tt}\omega^0 + (\omega, u_{xx})), \quad u \in \mathbb{K}_m^{he}(\bar{Q}_T),$$

что и доказывает утверждения (ii), (iii). □

Уравнения (3.8), (3.9), (3.10) называются уравнениями Беллмана, и мы переносим эту терминологию на соответствующие операторы.

Покажем, что знак операторов Беллмана контролирует принадлежность возможных решений уравнений Беллмана соответствующим функциональным конусам.

Лемма 3.1. *Пусть функция $f > 0$ непрерывна. Тогда любое C^2-решение уравнения* (3.8) *является m-допустимой функцией, $C^{2,1}$-решение уравнения* (3.9) *— m-допустимой эволюцией, а $C^{2,2}$-решение уравнения* (3.10) *— m-допустимой гиперэволюцией.*

Действительно, множества ω_m в (3.8), ω_m^e в (3.9), (3.10) являются полномочными представителями дуальных к $\mathbb{K}_m$, $\mathbb{K}_m^{ev}$, $\mathbb{K}_m^{he}$ конусов, и утверждение леммы есть следствие леммы 2.4 и равенства (2.9).

Заметим, что теорема 3.2 и лемма 3.1 доказаны нами при условии справедливости гипотезы (2.9). Утверждения теорем 1.2–1.4, сформулированных во введении, являются следствиями теоремы 3.2 и леммы 3.1.

3.3. Сравнение m-допустимых эволюций. В теории дифференциальных уравнений одной из основных является проблема корректной постановки задач. Очевидно, с этого момента пути исследования свойств допустимых функций (3.1), эволюций (3.3) и гиперэволюций (3.5) расходятся.

Условиям разрешимости задачи Дирихле для гессиановских уравнений посвящено достаточно работ, начиная с [13] и кончая [18], где проводится алгебро-геометрический анализ таких условий для m-гессиановских уравнений.

Эволюционные m-гессиановские уравнения впервые были представлены в работе [16], где обсуждается разрешимость первой-начально краевой задачи в цилиндре.

О разрешимости гиперэволюционных m-гессиановских уравнениях мы ничего сказать не можем.

В этом разделе статьи мы выясняем, что дают алгебраические результаты раздела 2 для m-гессиановских эволюционных уравнений.

Итак, имеется функция $u \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, эволюционная матрица $\hat{S}[u] = (-u_t; u_{xx}) \in \mathrm{Sym}^{ev}(n+1)$, m-гессиановские эволюционные операторы $E_m[u] = T_m(\hat{S}[u])$, явно выписанные в (3.2). Сформулируем функциональную транскрипцию следствия 2.1 при справедливости его условия 1.

Теорема 3.3. *Предположим, что для функции $v \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ и m-допустимой эволюции u выполнено неравенство*

$$\inf_{\tau > 0} E_m(-v_t + \tau; v_{xx} + \tau I) \leqslant E_m[u], \quad (x,t) \in Q_T = \Omega \times (0;T). \tag{3.12}$$

Тогда

$$u - v \leqslant \sup_{\partial' Q_T}(u - v), \quad \partial' Q_T = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T]). \tag{3.13}$$

Доказательство. Неравенство (3.12) означает, что в любой точке $(x,t) \in \bar{Q}_T \backslash \partial' Q_T$ выполнено условие 1 следствия 2.1 для эволюционных матриц

$$\hat{S} = (-u_t; u_{xx})(x,t), \quad \hat{S}^1 = (-v_t; v_{xx})(x,t).$$

Поэтому либо $\hat{S}=\hat{S}^1$, либо $(\hat{S}^1-\hat{S})\notin\bar{K}_m\supset\bar{K}_{n+1}$, а следовательно $(v-u)\notin\bar{\mathbb{K}}^{ev}_{n+1}(Q_T)$. Но тогда на множестве $\bar{Q}_T\backslash\partial' Q_T$ функция $(v-u)$ не имеет точек минимума, что и доказывает (3.13). $\square$

Результаты типа теоремы 3.3 называют теоремами сравнения. Одним из ее следствий является предложение, которое принятое называть «принцип максимума».

Следствие 3.1. *Любое m-допустимое в Q_T решение неравенства $E_m[u]>0$ принимает наибольшее значение на параболической границе цилиндра Q_T.*

Для доказательства достаточно положить $v\equiv 0$ в теореме 3.3.

Для того чтобы сформулировать еще одно следствие классического типа, поставим в цилиндре Q_T первую начально-краевую задачу:

$$E_m[u]=f>0, \quad u|_{\partial' Q_T}=\Phi \tag{3.14}$$

и, следуя линейной терминологии, назовем m-допустимую эволюцию $\underline{u}$ *субрешением* уравнения (3.14), если $E_m[\underline{u}]\geqslant f$, а эволюцию $\bar{u}\in C^{2,1}$ назовем *суперрешением*, если $\inf\limits_{\tau>0}E_m(-\bar{u}_t+\tau,\bar{u}_{xx}+\tau I)\leqslant f$. *Решением* назовем функцию, которая одновременно является суб- и суперрешением. Очевидным следствием теоремы 3.3 является

Следствие 3.2. *Предположим, что на параболической границе цилиндра Q_T выполнено равенство $\underline{u}=\bar{u}$. Тогда $\underline{u}\leqslant\bar{u}$ в Q_T. В частности, задача* (3.14) *может иметь не более одного m-допустимого решения.*

На самом деле справедливо более информативное предложение:

Теорема 3.4. *Предположим, что функция $\Phi(x,0)$ является $(m-1)$-допустимой в области Ω. Тогда задача* (3.14) *может иметь не более одного $C^{2,1}$-решения, и если такое решение существует, то оно является m-допустимой эволюцией.*

Для доказательства априорной ограниченности производных решения задачи (3.14) удобно использовать функциональную адаптацию следствия 2.1 при справедливости его условия 2. А именно, если ввести обозначение

$$F^{ev}_m[u]:=T_m^{\frac{1}{m}}(\hat{S}[u]), \quad \hat{S}[u]=(-u_t;u_{xx}),$$

то следствие 2.1 приводит к еще одной теореме сравнения:

Теорема 3.5. *Пусть $v\in C^{2,1}(Q_T)$, $u,w\in\mathbb{K}^{ev}_m(\bar{Q}_T)$. Предположим, что выполнено неравенство*

$$\Big(\nabla F^{ev}_m(\hat{S}[u]),\hat{S}[v]\Big)\leqslant F^{ev}_m[w], \quad (x,t)\in Q_T. \tag{3.15}$$

Тогда $(w-v)\leqslant\sup\limits_{\partial' Q_T}(w-v)$.

Основной проблемой в доказательстве разрешимости краевых задач для полностью нелинейных уравнений является построение априорных оценок вторых производных решения. Используя теорему 3.5, сделаем первый шаг в этом направлении для m-гессиановских эволюционных уравнений.

Теорема 3.6. *Пусть $f>0$, $f\in C^{2,1}(Q_T)$. Предположим, что функция $u\in C^{4,2}(\bar{Q}_T)$ является m-допустимым решением уравнения*

$$F^{ev}_m[u]=f, \quad (x,t)\in Q_T. \tag{3.16}$$

Тогда найдется постоянная $c=c\left(n,m,\|f\|_{C^{2,0}(Q_T)},\operatorname{diam}(\Omega)\right)$ такая, что

$$|u_{ii}(x,t)|\leqslant\sup_{\partial' Q^T}|u_{ii}(x,t)|+c, \quad i=1,\ldots,n. \tag{3.17}$$

Доказательство. Согласно (2.8) и замечанию 2.2, функция $F^{ev}_m(\hat{S})$, $\hat{S}\in\operatorname{Sym}^{ev}(n+1)$, является вогнутой в конусе $K_m\subset\operatorname{Sym}(n+1)$. Дифференцируя дважды по x^i уравнение (3.16), выводим неравенство

$$\Big(\nabla F^{ev}_m[u],\hat{S}[u_{ii}]\Big)\geqslant f_{ii}, \quad \hat{S}[u_{ii}]=\left(-u_{iit},(u_{ii})_{xx}\right). \tag{3.18}$$

Положим $v = -u_{ii}$. Тогда из (3.18) следует, что

$$(\nabla F_m^{ev}[u], \hat{S}[v]) \leqslant \|f\|_{C^{2,0}(Q_T)}, \quad (x,t) \in Q_T. \tag{3.19}$$

Функция

$$w = \frac{\|f\|_{C^{2,0}(Q_T)}}{2C_n^m}|x|^2$$

несомненно является m-допустимой эволюцией, и для нее выполнено равенство $F_m^{ev}[w] = \|f\|_{C^{2,0}(Q_T)}$. Этот факт вместе с (3.19) приводит к неравенству (3.15) теоремы 3.5, и поэтому

$$u_{ii}(x,t) \leqslant \sup_{\partial' Q^T} (w + u_{ii}(x,t)) \leqslant \sup_{\partial' Q^T} u_{ii}(x,t) + \frac{\|f\|_{C^{2,0}(Q_T)}}{2C_n^m}\mathrm{diam}^2(\Omega). \tag{3.20}$$

Неравенство (3.20) содержательно лишь для положительных u_{ii}. Однако $\Delta u > 0$ для m-допустимой эволюции u, что вместе (3.20) гарантирует существование постоянной c в (3.17). □

Исследование поведения решения уравнения (3.16) и его производных вплоть до второго порядка на границе области является актуальной и трудоемкой задачей теории m-гессиановских эволюционных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивочкина Н. М.* Описание конусов устойчивости, порождаемых дифференциальными операторами типа Монжа—Ампера// Мат. сб. — 1983. — *22*. — С. 265–275.
2. *Ивочкина Н. М.* Решение задачи Дирихле для некоторых уравнений типа Монжа—Ампера// Мат. сб. — 1985. — *128*. — С. 403–415.
3. *Ивочкина Н. М.* От конусов Гординга к p-выпуклым гиперповерхностям// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2012. — *45*. — С. 94–104.
4. *Ивочкина Н. М., Прокофьева С. И., Якунина Г. В.* Конусы Гординга в современной теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка// Проблемы мат. анализа. — 2012. — *64*. — С. 63–80.
5. *Ивочкина Н. М., Филимоненкова Н. В.* О новых структурах в теории полностью нелинейных уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *58*. — С. 82–95.
6. *Крылов Н. В.* Ограниченно неоднородные эллиптические и параболические уравнения в области// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1983. — *47*, № 1. — С. 75–108.
7. *Крылов Н. В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. — М.: Наука, 1985.
8. *Крылов Н. В.* О первой краевой задаче для нелинейных вырождающихся эллиптических уравнений// Изв. АН СССР. — 1987. — *51*, № 2. — С. 242–269.
9. *Погорелов А. В.* Многомерная проблема Минковского. — М.: Наука, 1975.
10. *Сафонов М. В.* Неравенство Харнака для эллиптических уравнений и гельдеровость их решений// Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1983. — *12*. — С. 272–287.
11. *Сафонов М. В.* О гладкости вблизи границы решений эллиптических уравнений Беллмана// Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1985. — *17*. — С. 150–154.
12. *Филимоненкова Н. В., Бакусов П. А.* Гиперболические многочлены и конусы Гординга// Мат. просвещ. Третья сер. — 2016. — *20*. — С. 143–166.
13. *Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J.* The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, III. Functions of the eigenvalues of the Hessian// Acta Math. — 1985. — *155*. — С. 261–301.
14. *Evans L. C.* Classical solutions of fully nonlinear convex second order elliptic equations// Commun. Pure Appl. Math. — 1982. — *25*. — С. 333–363.
15. *Gårding L.* An inequality for hyperbolic polynomials// J. Math. Mech. — 1959. — *8*, № 2. — С. 957–965.
16. *Ivochkina N. M.* On classic solvability of the m-Hessian evolution equation// Am. Math. Soc. Transl. — 2010. — *229*. — С. 119–129.
17. *Ivochkina N. M., Filimonenkova N. V.* On the backgrounds of the theory of m-Hessian equations// Commun. Pure Appl. Anal. — 2013. — *12*, № 4. — С. 1687–1703.
18. *Ivochkina N. M., Filimonenkova N. V.* On algebraic and geometric conditions in the theory of Hessian equations// J. Fixed Point Theory Appl. — 2015. — *16*, № 1. — С. 11–25.
19. *Ivochkina N. M., Filimonenkova N. V.* Attractors of m-Hessian evolutions// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2015. — *207*, № 2. — С. 226–235.

20. *Krylov N. V.* On general notion of fully nonlinear second order elliptic equation// Trans. Am. Math. Soc. — 1995. — *347*, № 3. — С. 857–895.
21. *Lin M., Trudinger N. S.* On some inequalities for elementary symmetric functions// Bull. Aust. Math. Soc. — 1994. — *50*. — С. 317–326.
22. *Nazarov A. I., Uraltseva N. N.* Convex-monotone hulls and an estimate of the maximum of the solution of a parabolic equation// J. Soviet Math. — 1987. — *37*. — С. 851–859.
23. *Trudinger N. S.* The Dirichlet problem for the prescribed curvature equations// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1990. — *111*. — С. 153–179.
24. *Trudinger N. S.* On the Dirichlet problem for Hessian equations// Acta Math. — 1995. — *175*. — С. 151–164.
25. *Urbas Jh. I.* Nonlinear oblique boundary value problems for Hessian equations in two dimensions// Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire — 1995. — *12*. — С. 507–575.

Н. М. Ивочкина
Санкт-Петербургский государственный университет, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9
E-mail: ninaiv@NI1570.spb.edu

Н. В. Филимоненкова
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., д. 29
E-mail: nf33@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-615-626 UDC 517.957

Gårding Cones and Bellman Equations in the Theory of Hessian Operators and Equations

© 2017 **N. M. Ivochkina, N. V. Filimonenkova**

Abstract. In this work, we continue investigation of algebraic properties of Gårding cones in the space of symmetric matrices. Based on this theory, we propose a new approach to study of fully nonlinear differential operators and second-order partial differential equations. We prove new-type comparison theorems for evolution Hessian operators and establish a relation between Hessian and Bellman equations.

REFERENCES

1. N. M. Ivochkina, "Opisanie konusov ustoychivosti, porozhdaemykh differentsial'nymi operatorami tipa Monzha—Ampera" [Description of stability cones generated by differential operators of the Monge–Ampère type], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1983, **22**, 265–275 (in Russian).
2. N. M. Ivochkina, "Reshenie zadachi Dirikhle dlya nekotorykh uravneniy tipa Monzha—Ampera" [Solution of the Dirichlet problem for some equations of the Monge–Ampère type], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1985, **128**, 403–415 (in Russian).
3. N. M. Ivochkina, "Ot konusov Gordinga k p-vypuklym giperpoverkhnostyam" [From Gårding's cones to p-convex hypersurfaces], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2012, **45**, 94–104 (in Russian).
4. N. M. Ivochkina, S. I. Prokof'eva, and G. V. Yakunina, "Konusy Gordinga v sovremennoy teorii polnost'yu nelineynykh differentsial'nykh uravneniy vtorogo poryadka" [Gårding's cones in contemporary theory of fully nonlinear second-order differential equations], *Problemy mat. analiza* [Probl. Math. Anal.], 2012, **64**, 63–80 (in Russian).
5. N. M. Ivochkina and N. V. Filimonenkova, "O novykh strukturakh v teorii polnost'yu nelineynykh uravneniy" [On new structures in the theory of fully nonlinear equations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **58**, 82–95 (in Russian).

6. N. V. Krylov, “Ogranichenno neodnorodnye ellipticheskie i parabolicheskie uravneniya v oblasti” [Boundedly nonhomogeneous elliptic and parabolic equations in a domain], *Izv. AN SSSR. Ser. mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1983, **47**, No. 1, 75–108 (in Russian).
7. N. V. Krylov, *Nelineynye ellipticheskie i parabolicheskie uravneniya vtorogo poryadka* [Nonlinear Second-Order Elliptic and Parabolic Equations], Nauka, Moscow, 1985 (in Russian).
8. N. V. Krylov, “O pervoy kraevoy zadache dlya nelineynykh vyrozhdayushchikhsya ellipticheskikh uravneniy” [On the first boundary-value problem for nonlinear degenerating elliptic equations], *Izv. AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1987, **51**, No. 2, 242–269 (in Russian).
9. A. V. Pogorelov, *Mnogomernaya problema Minkovskogo* [Multidimensional Minkowski Problem], Nauka, Moscow, 1975 (in Russian).
10. M. V. Safonov, “Neravenstvo Kharnaka dlya ellipticheskikh uravneniy i gel’derovost’ ikh resheniy” [Harnack’s inequality for elliptic equations and the Hölder property of their solutions], *Zap. nauch. sem. LOMI* [Notes Sci. Semin. Leningrad Dept. Math. Inst. Acad. Sci.], 1983, **12**, 272–287 (in Russian).
11. M. V. Safonov, “O gladkosti vblizi granitsy resheniy ellipticheskikh uravneniy Bellmana” [On smoothness of solutions of elliptic Bellman equations near the boundary], *Zap. nauch. sem. LOMI* [Notes Sci. Semin. Leningrad Dept. Math. Inst. Acad. Sci.], 1985, **17**, 150–154 (in Russian).
12. N. V. Filimonenkova and P. A. Bakusov, “Giperbolicheskie mnogochleny i konusy Gordinga” [Hyperbolic polynomials and Gårding’s cones], *Mat. prosveshch. Tret’ya ser.* [Math. Educ. Third Ser.], 2016, **20**, 143–166 (in Russian).
13. L. Caffarelli, L. Nirenberg, and J. Spruck, “The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, III. Functions of the eigenvalues of the Hessian,” *Acta Math.*, 1985, **155**, 261–301.
14. L. C. Evans, “Classical solutions of fully nonlinear convex second order elliptic equations,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1982, **25**, 333–363.
15. L. Gårding, “An inequality for hyperbolic polynomials,” *J. Math. Mech.*, 1959, **8**, No. 2, 957–965.
16. N. M. Ivochkina, “On classic solvability of the m-Hessian evolution equation,” *Am. Math. Soc. Transl.*, 2010, **229**, 119–129.
17. N. M. Ivochkina and N. V. Filimonenkova, “On the backgrounds of the theory of m-Hessian equations,” *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2013, **12**, No. 4, 1687–1703.
18. N. M. Ivochkina and N. V. Filimonenkova, “On algebraic and geometric conditions in the theory of Hessian equations,” *J. Fixed Point Theory Appl.*, 2015, **16**, No. 1, 11–25.
19. N. M. Ivochkina and N. V. Filimonenkova, “Attractors of m-Hessian evolutions,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2015, **207**, No. 2, 226–235.
20. N. V. Krylov, “On general notion of fully nonlinear second order elliptic equation,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1995, **347**, No. 3, 857–895.
21. M. Lin and N. S. Trudinger, “On some inequalities for elementary symmetric functions,” *Bull. Aust. Math. Soc.*, 1994, **50**, 317–326.
22. A. I. Nazarov and N. N. Uraltseva, “Convex-monotone hulls and an estimate of the maximum of the solution of a parabolic equation,” *J. Soviet Math.*, 1987, **37**, 851–859.
23. N. S. Trudinger, “The Dirichlet problem for the prescribed curvature equations,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1990, **111**, 153–179.
24. N. S. Trudinger, “On the Dirichlet problem for Hessian equations,” *Acta Math.*, 1995, **175**, 151–164.
25. Jh. I. Urbas, “Nonlinear oblique boundary value problems for Hessian equations in two dimensions,” *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1995, **12**, 507–575.

N. M. Ivochkina
Saint Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya nab., 199034 St. Petersburg, Russia
E-mail: `ninaiv@NI1570.spb.edu`

N. V. Filimonenkova
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
29 Polytechnic st., 195251 St. Petersburg, Russia
E-mail: `nf33@yandex.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 4 (2017). С. 627–677

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-627-677 УДК 517.98, 517.955, 532.5

О КОЛЕБАНИЯХ ДВУХ СОЧЛЕНЕННЫХ МАЯТНИКОВ, СОДЕРЖАЩИХ ПОЛОСТИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

© 2017 г. Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ, В. И. ВОЙТИЦКИЙ, З. З. СИТШАЕВА

Аннотация. Рассматривается линеаризованная задача о малых колебаниях двух маятников, присоединенных один к другому с помощью сферического шарнира. Каждый маятник имеет полость, частично заполненную несжимаемой жидкостью. В работе изучается начально-краевая проблема, а также соответствующая спектральная проблема о нормальных движениях гидромеханической системы. Доказаны теоремы о корректной разрешимости задачи на произвольном отрезке времени как для случая идеальных, так и вязких жидкостей в полостях, а также изучены соответствующие спектральные вопросы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. История вопроса

1.1. Вклад отечественных ученых. Первой работой, посвященной задаче о малых колебаниях твердого тела с полостью, полностью заполненной идеальной жидкостью, была работа Н. Е. Жуковского [13]. В ней впервые были введены вспомогательные функции, зависящие только от формы полости, которые сейчас называют потенциалами Жуковского. С их помощью удается задачу динамики тела с полостью, целиком заполненной идеальной жидкостью, заменить на задачу о движении эквивалентного твердого тела с видоизмененным тензором инерции.

Если жидкость заполняет полость лишь частично, то гидромеханическая система имеет уже бесконечное число степеней свободы. Эта проблема исследовалась в пятидесятые-шестидесятые годы прошлого века весьма интенсивно многими авторами, так как она была связана с началом космических полетов, в частности, с проблемой колебаний жидкого топлива в баке космической ракеты. Среди первых отметим работы Н. Н. Моисеева (1952), затем Г. С. Нариманова, Д. Е. Охоцимского, Б. И. Рабиновича и Л. Н. Сретенского (1956).

Начиная с работ Н. Н. Моисеева и совместной работы С. Г. Крейна и Н. Н. Моисеева [22], исследование этих проблем проводится, в частности, методами функционального анализа и теории операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Это позволяет в простой и весьма прозрачной форме представить и изучить проблему, а также установить общие свойства ее решений.

В шестидесятые и семидесятые годы появилось достаточно много работ и монографий, посвященных задачам динамики тела с полостью, содержащей жидкость: Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. (1965), Моисеев Н. Н., Петров А. А. (1966), Рапопорт И. М. (1967), Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. (1968), Черноусько Ф. Л. (1968), Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В. (1969), Луковский И. А. (1975), Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А. (1977), а также другие монографии.

Что касается задач динамики твердого тела с полостью, содержащей вязкую жидкость и частично ее заполняющую, то здесь пионерскими работами, использующими методы функционального анализа, являются статьи С. Г. Крейна (1964), а также С. Г. Крейна и его учеников (1968), а затем работы Н. Д. Копачевского (1966–1980), Нго Зуй Кана (1968–1981). Эти исследования отражены в монографии Н. Д. Копачевского, С. Г. Крейна и Нго Зуй Кана [16], а затем в двухтомной монографии Н. Д. Копачевского и С. Г. Крейна [30, 31]. В настоящее время направление исследований методами функционального анализа задач динамики твердого тела с полостью, заполненной идеальной либо вязкой жидкостью, продолжает активно развиваться.

Далее, в работах П. В. Харламова (1972) изучался вопрос о совместных движениях сочлененных твердых тел (маятников), соединенных сферическими шарнирами. Затем Ю. Н. Кононов (1997–2006) исследовал движения тела и системы связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость. Наконец в последнее время Э. И. Батыр и Н. Д. Копачевский (см. [4–8]) изучали проблему малых движений системы сочлененных твердых тел (гиростатов), соединенных сферическими шарнирами и имеющих полости, целиком заполненные идеальной либо вязкой жидкостью.

1.2. О содержании работы. В данной работе используются как методы функционального анализа, развитые С. Г. Крейном и позже Н. Д. Копачевским (см. монографии [16,30,31]), так и новые рассмотрения (см. [10, 15]).

В первой части работы изучается задача о малых колебаниях двух сочлененных маятников с полостями, частично заполненными идеальной жидкостью. В разделе 2 дается постановка задачи и на ее основе выводится закон баланса полной энергии для классического решения проблемы. Далее (в разделе 3) применяется операторный подход к ее исследованию, и возникает задача Коши в некотором гильбертовом пространстве, естественно связанном с изучаемой задачей. В разделе 4 доказывается теорема о разрешимости задачи Коши, а на ее основе — теорема о корректной разрешимости исходной задачи на произвольном отрезке времени. Наконец, в разделе 5 исследуется проблема собственных колебаний гидромеханической системы в случае отсутствия трения в шарнирах. Для нахождения статической устойчивости системы доказано обращение теоремы Лагранжа об устойчивости.

По такой же схеме в части II исследована проблема малых движений и нормальных колебаний системы в случае, когда жидкости в полостях маятников являются вязкими (разделы 6–9). Здесь также доказана теорема о корректной разрешимости задачи, исследован спектр нормальных колебаний (пучок С. Г. Крейна), доказано обращение теоремы Лагранжа об устойчивости. Отметим, что эта задача изучалась также в статье [10] с использованием другого операторного подхода и неизвестных полей перемещений жидкостей. Также в этой работе приведен подробный вывод уравнений изменения кинетического момента.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке первого из соавторов грантом Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

Часть 1

СЛУЧАЙ ИДЕАЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОЛОСТЯХ

2. Постановка задачи

2.1. Основные уравнения, краевые и начальные условия. Будем считать, что имеется гидромеханическая система, состоящая из двух твердых тел G_{01} и G_{02}, у которых плотности равны соответственно ρ_{01} и ρ_{02}. Эти тела (маятники) последовательно соединены сферическими шарнирами: первое тело закреплено в неподвижной точке O_1, а второе аналогичным образом соединено с первым телом в точке O_2. Предполагаем также, что оба тела имеют полости, частично заполненные идеальными однородными несжимаемыми жидкостями с плотностями ρ_1 и ρ_2 соответственно.

Будем считать, что на данную систему действует однородное гравитационное поле постоянной интенсивности. Тогда в состоянии покоя гидромеханической системы точки подвеса O_1 и O_2 этих тел находятся на одной вертикальной оси, а центры масс C_1 и C_2 этих тел — также на этой оси. При этом жидкости в полостях (в состоянии равновесия) занимают области Ω_1 и Ω_2 соответственно, причем границы этих областей состоят из твердых стенок S_1 и S_2, а также свободных поверхностей Γ_1 и Γ_2 соответственно, которые являются горизонтальными, т. е. перпендикулярными действию однородного гравитационного поля.

Приведем теперь постановку задачи о малых движениях данной гидромеханической системы, близких к состоянию покоя. Для описания этих движений введем неподвижную систему координат $O_1x^1x^2x^3$ с ортами $\vec{e}^{\,j}$, $j=\overline{1,3}$, так, чтобы ускорение гравитационного поля $\vec{g}=-g\vec{e}^{\,3}$, $g>0$. Кроме того, введем подвижные системы координат $O_kx_k^1x_k^2x_k^3$ $(k=1,2)$, жестко связанные с телами G_{0k}, с единичными векторами $\vec{e}_k^{\,j}$, $j=\overline{1,3}$. Наконец, в состоянии покоя считаем, что подвижная система координат $O_1x_1^1x_1^2x_1^3$ совпадает с неподвижной системой $O_1x^1x^2x^3$, а подвижная система $O_2x_2^1x_2^2x_2^3$ получается переносом по вертикальной оси системы $O_1x_1^1x_1^2x_1^3$ из точки O_1 в точку O_2. (Напомним, что в состоянии покоя точки O_1, O_2, C_1 и C_2 находятся на одной оси O_1x^3.)

Положение подвижной системы координат $O_kx_k^1x_k^2x_k^3$ $(k=1,2)$ относительно неподвижной системы $O_1x^1x^2x^3$ в процессе малых движений гидромеханической системы будем задавать малым вектором углового перемещения

$$\vec{\delta}_k(t)=\sum_{j=1}^{3}\delta_k^j(t)\vec{e}_k^{\,j},\quad k=1,2.$$

Тогда угловая скорость $\vec{\omega}_k(t)$ тела G_{0k} будет, очевидно, равна $\vec{\omega}_k=d\vec{\delta}_k/dt$, а угловое ускорение этого тела равно $d^2\vec{\delta}_k/dt^2=d\vec{\omega}_k/dt$.

Приведем теперь для каждого из тел (маятников) линеаризованные уравнения изменения кинетического момента относительно точки $O_k, k=1,2$, а также следствия из этих уравнений.

Вид этих уравнений можно найти в [10], см. также [5] и [16, с. 129–132, 145, 136]. Кроме того, в данной постановке учитываются отклонения свободных границ Γ_1 и Γ_2 в процессе малых движений системы (см. [16, с. 143–145]). Наконец, отметим еще такой факт. Из уравнений изменения кинетических моментов тел следует, что левые и правые части последующего (второго) уравнения целиком входят в левые и правые части предыдущего (первого) уравнения. Тогда, беря соответствующие разности левых и правых частей, а также второе уравнение, приходим к следующим уравнениям изменения кинетических моментов для двух сочлененных маятников.

Первое уравнение:

$$\int\limits_{G_1}\vec{r}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)dm_1+\rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{r}_1\times\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t}\,d\Omega_1+\int\limits_{G_2}\vec{h}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2+\frac{\partial\vec{u}_2}{\partial t}\right)dm_2+$$
$$+\alpha_1\vec{\omega}_1-\alpha_2\left(\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1\right)+g\left(m_1l_1+m_2h_1\right)P_2\vec{\delta}_1-g\rho_1\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_1)\zeta_1\,d\Gamma_1=$$
$$=\int\limits_{G_1}\vec{r}_1\times\vec{f}_1\,dm_1+\int\limits_{G_2}\vec{h}_1\times\vec{f}_2\,dm_2=:\vec{M}_1(t).\quad(2.1)$$

Здесь $G_k=G_{0k}\cup\Omega_k$ — область, занятая твердым телом и жидкостью для данного маятника, $k=1,2$, $\vec{r}_k$ — радиус-вектор точки в G_k, причем использовано обозначение

$$\int\limits_{G_k}(\ldots)\,dm_k:=\rho_{0k}\int\limits_{G_{0k}}(\ldots)\,d\Omega_k+\rho_k\int\limits_{\Omega_k}(\ldots)\,d\Omega_k.\quad(2.2)$$

Далее, через $\vec{u}_k(t,x)$ обозначено поле относительной скорости жидкости в области Ω_k, $\vec{h}_1=\overrightarrow{O_1O_2}$, $\alpha_k>0$, $k=1,2,$ — коэффициенты трения в шарнирах, $h_1=|\overrightarrow{O_1O_2}|$, $x_k^3=\zeta_k(t,x_k^1,x_k^2)$,

$(x_k^1, x_k^2) \in \Gamma_k$, — отклонения свободных поверхностей жидкостей в процессе малых движений маятников, m_k — масса маятника с жидкостью, $l_k = |\overrightarrow{O_k C_k}|$,

$$P_2\vec{\delta}_k = \sum_{j=1}^{2} \delta_k^j \vec{e}_k^{\,j} \tag{2.3}$$

является проекцией на плоскость Γ_k вектора углового перемещения $\vec{\delta}_k$. Наконец, предполагается, что в процессе малых движений системы на нее действует поле, мало отклоняющееся от гравитационного, т. е. поле

$$-g\vec{e}^{\,3} + \vec{f}, \quad \vec{f}_1 := \vec{f}|_{G_1}, \ \vec{f}_2 := \vec{f}|_{G_2}. \tag{2.4}$$

Уравнение изменения кинетического момента для второго маятника таково:

$$\begin{gathered}\int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times (\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2)\, dm_2 + \int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1)\, dm_2 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{r}_2 \times \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t}\, d\Omega_2 + \alpha_2(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) + \\ + g m_2 l_2 P_2 \vec{\delta}_2 - g\rho_2 \int\limits_{\Gamma_2} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2)\zeta_2\, d\Gamma_2 = \int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times \vec{f}_2\, dm_2 =: \vec{M}_2(t).\end{gathered} \tag{2.5}$$

Здесь обозначения те же, что были введены выше.

Приведем теперь линеаризованные уравнения движения жидкостей в полостях, а также граничные условия на твердых стенках S_k и свободных поверхностях Γ_k, $k = 1, 2$.

Уравнения движения для идеальных жидкостей (уравнения Эйлера) имеют вид

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 \right) + \nabla p_1 = \rho_1 \vec{f}_1, \quad \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \tag{2.6}$$

$$\rho_2 \left(\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 \right) + \nabla p_2 = \rho_2 \vec{f}_2, \quad \operatorname{div} \vec{u}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \tag{2.7}$$

где через $p_k = p_k(t, x)$, $x \in \Omega_k$, обозначено отклонение давления в области Ω_k от равновесного давления в этой области в состоянии покоя.

Далее, в процессе движения идеальных жидкостей на твердых стенках S_k полостей Ω_k должны выполняться условия непротекания:

$$\vec{u}_k \cdot \vec{n}_k = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad k = 1, 2, \tag{2.8}$$

где $\vec{n}_k$ — (внешняя) нормаль к $\partial\Omega_k$.

В исследуемой задаче должны выполняться также кинематические условия следующего вида:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\left(P_2\vec{\delta}_k\right) = P_2\vec{\omega}_k, \quad \frac{d}{dt}\vec{\delta}_k^{\,3} = \vec{\omega}_k^{\,3}, \\ \frac{\partial \zeta_k}{\partial t} = u_k^3 = \vec{u}_k \cdot \vec{n}_k \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad k = 1, 2.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Здесь для удобства последующих построений связь $d\vec{\delta}_k/dt = \vec{\omega}_k$ расщеплена на две, так как в уравнения движения, а также в граничные условия на Γ_k входит лишь $P_2\vec{\delta}_k$ (см. ниже).

Эти динамические условия имеют следующий вид:

$$p_k = \rho_k g(\zeta_k + (P_2\vec{\delta}_k \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^{\,3}) \quad (\text{на } \Gamma_k), \ k = 1, 2. \tag{2.10}$$

Отметим еще, что из свойства несжимаемости жидкостей следуют условия сохранения объемов жидкостей:

$$\int\limits_{\Gamma_k} \zeta_k\, d\Gamma_k = 0, \ k = 1, 2. \tag{2.11}$$

Наконец, для полной постановки начально-краевой задачи к уравнениям (2.1), (2.5)–(2.7) и краевым условиям (2.8)–(2.11) следует добавить начальные условия

$$
\begin{aligned}
\vec{u}_k(0,x) = \vec{u}_k^{\,0}(x), \quad x \in \Omega_k,\\
\zeta_k(0,x) = \zeta^0(x), \quad x \in \Gamma_k,\\
\vec{\omega}_k(0) = \vec{\omega}_k^{\,0}, \quad \vec{\delta}_k(0) = \vec{\delta}_k^{\,0}, \quad k=1,2.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

2.2. Закон баланса полной энергии гидромеханической системы. Будем считать, что задача (2.1), (2.5)–(2.12) имеет классическое решение при $t \geqslant 0$, и выведем закон баланса полной энергии.

С этой целью умножим (скалярно) обе части уравнения (2.6) на $\vec{u}_1$ и проинтегрируем по Ω_1. Будем иметь

$$
\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} \cdot \vec{u}_1 \, d\Omega_1 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{u}_1 \, d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_1} \nabla p_1 \cdot \vec{u}_1 \, d\Omega_1 = \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \vec{f}_1 \cdot \vec{u}_1 \, d\Omega_1. \tag{2.13}
$$

Здесь в силу граничных условий (2.9)–(2.11)

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega_1} \nabla p_1 \cdot \vec{u}_1 \, d\Omega_1 = \int\limits_{\Omega_1} \operatorname{div}(p_1 \vec{u}_1) \, d\Omega_1 = \int\limits_{\Gamma_1} p_1 (\vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1) \, d\Gamma_1 = \int\limits_{\Gamma_1} \rho_1 g (\zeta_1 + (P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3}) \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} \, d\Gamma_1 = \\
= \frac{1}{2} \rho_1 g \frac{d}{dt} \int\limits_{\Gamma_1} |\zeta_1|^2 \, d\Gamma_1 + \rho_1 g \int\limits_{\Gamma_1} ((P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3}) \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} \, d\Gamma_1.
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Умножая теперь обе части (2.7) на $\vec{u}_2$ и интегрируя по Ω_2, получаем соотношение

$$
\begin{aligned}
\rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} \cdot \vec{u}_2 \, d\Omega_2 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1) \cdot \vec{u}_2 \, d\Omega_2 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} (\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2) \cdot \vec{u}_2 \, d\Omega_2 + \int\limits_{\Omega_2} \nabla p_2 \cdot \vec{u}_2 \, d\Omega_2 = \\
= \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{f}_2 \cdot \vec{u}_2 \, d\Omega_2,
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

причем

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega_1} \nabla p_2 \cdot \vec{u}_2 \, d\Omega_2 = \ldots = \int\limits_{\Gamma_2} p_2 (\vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2) \, d\Gamma_2 = \int\limits_{\Gamma_2} \rho_2 g (\zeta_2 + (P_2 \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_2^{\,3}) \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} \, d\Gamma_2 = \\
= \frac{1}{2} \rho_2 g \frac{d}{dt} \int\limits_{\Gamma_2} |\zeta_2|^2 \, d\Gamma_2 + \rho_2 g \int\limits_{\Gamma_2} ((P_2 \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_2^{\,3}) \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} \, d\Gamma_2.
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

Далее, умножение обеих частей (2.1) на $\vec{\omega}_1$ с учетом обозначения (2.2) дает соотношение

$$
\begin{aligned}
\rho_{01} \int\limits_{\Omega_{01}} \Big(\vec{r}_1 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1)\Big) \cdot \vec{\omega}_1 \, d\Omega_{01} + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \Big(\vec{r}_1 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1)\Big) \cdot \vec{\omega}_1 \, d\Omega_1 + \\
+ \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \Big(\vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}\Big) \cdot \vec{\omega}_1 \, d\Omega_1 + \rho_{02} \int\limits_{\Omega_{02}} \Big(\vec{h}_1 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{\partial t} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{\partial t} \times \vec{r}_2)\Big) \cdot \vec{\omega}_1 \, d\Omega_{02} + \\
+ \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \Big(\vec{h}_1 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{\partial t} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{\partial t} \times \vec{r}_2 + \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t})\Big) \cdot \vec{\omega}_1 \, d\Omega_2 + (\alpha_1 + \alpha_2) |\vec{\omega}_1|^2 - \\
- \alpha_2 \vec{\omega}_2 \cdot \vec{\omega}_1 + g(m_1 l_1 + m_2 h_1) P_2 \vec{\delta}_1 \cdot \vec{\omega}_1 - g\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} \Big((\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1)\zeta_1\Big) \cdot \vec{\omega}_1 \, d\Gamma_1 = \vec{M}_1(t) \cdot \vec{\omega}_1.
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Соответственно при умножении обеих частей (2.5) на $\vec{\omega}_2$ получаем

$$\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}\Big(\vec{r}_2\times(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2)\Big)\cdot\vec{\omega}_2\,d\Omega_{02}+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\Big(\vec{r}_2\times(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2)\Big)\cdot\vec{\omega}_2\,d\Omega_2+$$
$$+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\Big(\vec{r}_2\times\frac{\partial\vec{u}_2}{\partial t}\Big)\cdot\vec{\omega}_2\,d\Omega_2+\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}\Big(\vec{r}_2\times(\frac{d\vec{\omega}_1}{\partial t}\times\vec{h}_1)\Big)\cdot\vec{\omega}_2\,d\Omega_{02}+$$
$$+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\Big(\vec{r}_2\times(\frac{d\vec{\omega}_1}{\partial t}\times\vec{h}_1)\Big)\cdot\vec{\omega}_2\,d\Omega_2+\alpha_2(|\vec{\omega}_2|^2-\vec{\omega}_1\cdot\vec{\omega}_2)+gm_2l_2P_2\vec{\delta}_2\cdot\vec{\omega}_2-$$
$$-g\rho_2\int\limits_{\Gamma_2}\Big((\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_2)\zeta_2\Big)\cdot\vec{\omega}_2\,d\Gamma_2=\vec{M}_2(t)\cdot\vec{\omega}_2. \quad (2.18)$$

Учитывая свойства сохранения объема (2.11), введем для удобства записи дальнейших формул ортопроекторы

$$\theta_k:\ L_2(\Gamma_k)\to L_{2,\Gamma_k}:=L_2(\Gamma_k)\ominus\{1_k\},\quad k=1,2, \quad (2.19)$$

на подпространства L_{2,Γ_k} функций из $L_2(\Gamma_k)$, ортогональных к единичной функции $1_k\equiv 1$, заданной на Γ_k.

Складывая теперь левые и правые части в (2.13), (2.15), (2.17), (2.18) и учитывая (2.14), (2.16), после преобразований (с учетом свойств смешанного произведения векторов) приходим к тождеству

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\rho_{01}\int\limits_{\Omega_{01}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1|^2\,d\Omega_{01}+\rho_1\int\limits_{\Omega_1}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_1|^2\,d\Omega_1+\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2|^2\,d\Omega_{02}+$$
$$+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2+\vec{u}_2|^2\,d\Omega_2\Big\}+$$
$$+\frac{1}{2}g\frac{d}{dt}\Big\{\sum_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_{\Gamma_k}\Big(|\zeta_k+\theta_k((P_2\vec{\delta}_k\times\vec{r}_k)\cdot\vec{e}_k^{\,3})|^2-|\theta_k((P_2\vec{\delta}_k\times\vec{r}_k)\cdot\vec{e}_k^{\,3})|^2\Big)\,d\Gamma_k\Big\}+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{(m_1l_1+m_2h_1)|P_2\vec{\delta}_1|^2+m_2l_2|P_2\vec{\delta}_2|^2\Big\}=$$
$$=-\Big(\alpha_1|\vec{\omega}_1|^2+\alpha_2|\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1|^2\Big)+\sum_{k=1}^{2}\vec{M}_k(t)\cdot\vec{\omega}_k+\sum_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}\vec{f}_k\cdot\vec{u}_k\,d\Omega_k. \quad (2.20)$$

Это соотношение — закон баланса полной энергии системы в дифференциальной форме. Здесь слева в первых фигурных скобках стоит удвоенная кинетическая энергия гидромеханической системы, состоящая из суммы кинетических энергий твердых тел и кинетических энергий жидкостей в полостях маятников. При этом $\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_1$ — поле абсолютной скорости жидкости в первой полости, а $\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2+\vec{u}_2$ — поле абсолютной скорости во второй полости. Далее, вторая фигурная скобка после умножения на g дает потенциальную энергию системы, отвечающую возмущениям ζ_k свободной поверхности Γ_k в процессе малых движений; в частности, если $\zeta_k\equiv 0$, то это выражение дает нулевой вклад в потенциальную энергию. Наконец, последняя фигурная скобка после умножения на g соответствует изменению потенциальной энергии системы, отвечающему перемещению энергии системы из состояния покоя на углы поворота $\vec{\delta}_1$ и $\vec{\delta}_2$ для тел.

Справа в (2.20) стоит мощность сил трения в шарнирах (первое слагаемое), а также мощность внешних сил, отвечающих действию внешнего дополнительного поля $\vec{f}$ (см. (2.4)) в жидкостях и твердых телах.

Таким образом, соотношение (2.20) означает, что изменение со временем полной энергии гидромеханической системы равно мощности внутренних и внешних сил, действующих на систему.

При $\vec{f}_k \equiv \vec{0}$, $k = 1, 2$, с учетом определений $\vec{M}_k(t)$ (см. (2.1), (2.5)), получаем из (2.20) закон сохранения полной энергии изучаемой системы.

3. Операторный подход к исследованию начально-краевой задачи

В этом разделе вводятся функциональные пространства, позволяющие применить к задаче (2.1), (2.5)–(2.12) операторный подход, основные идеи которого изложены, например, в [16]. Именно, к этой задаче применяется метод ортогонального проектирования на введенные ниже подпространства, и на этой основе получена задача Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в некотором гильбертовом пространстве, равносильная исходной начально-краевой задаче (2.1), (2.5)–(2.12). В целом примененный здесь подход отличается от подходов, изложенных в [22], [16, с. 143–158], и является развитием подходов из статьи [15].

3.1. Выбор функциональных пространств. Так как кинетическая энергия жидкостей в полостях Ω_k в любой момент времени должна быть конечной, то из (2.20) следует, что поля относительных скоростей $\vec{u}_k(t,x)$ должны быть функциями переменной t со значениями в гильбертовых пространствах $\vec{L}_2(\Omega_k)$ со скалярными произведениями

$$(\vec{u}_k, \vec{v}_k)_{\vec{L}_2(\Omega_k)} := \int\limits_{\Omega} \vec{u}(x) \cdot \overline{\vec{v}_k}\, d\Omega. \tag{3.1}$$

Опираясь на свойство соленоидальности $\vec{u}_k$ и граничные условия исследуемой проблемы, воспользуемся ортогональным разложением пространства $\vec{L}_2(\Omega_k)$ на подпространства, естественно возникающие в этой задаче (см. [16, с. 106]):

$$\vec{L}_2(\Omega_k) = \vec{G}_{0,\Gamma_k}(\Omega_k) \oplus \vec{J}_0(\Omega_k) \oplus \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k), \quad k = 1, 2, \tag{3.2}$$

где

$$\vec{G}_{0,\Gamma_k}(\Omega_k) := \{\nabla\varphi_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \ \varphi_k = 0 \quad (\text{на } \Gamma_k)\}, \tag{3.3}$$

$$\vec{J}_0(\Omega_k) := \Big\{\vec{w}_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \ \operatorname{div}\vec{w}_k = 0 \quad (\text{в} \quad \Omega_k), \quad \vec{w}_k \cdot \vec{n}_k = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega)\Big\}, \tag{3.4}$$

$$\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k) := \big\{\nabla\Phi_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \ \Delta\Phi_k = 0 \text{ (в } \Omega_k), \ \frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k} = 0 \text{ (на } S_k), \ \int\limits_{\Gamma_k} \Phi_k d\Gamma_k = 0\big\}. \tag{3.5}$$

Здесь $\vec{n}_k$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega_k$, а операции вычисления дивергенции и производной по нормали понимаются в смысле теории обобщенных функций (распределений), см. [16, п. 2.1], а также [19]. Отметим еще, что границы $\partial\Omega_k$ предполагаются липшицевыми, причем S_k и Γ_k — липшицевы куски этих границ (см. [19,20]).

Так как потенциальная энергия жидкостей (и всей гидромеханической системы) также должна быть конечной в любой момент времени $t \geqslant 0$, то снова в силу (2.20) следует считать, что $\zeta_k(t,x), x \in \Gamma_k$, являются функциями переменной t со значениями в гильбертовом пространстве $L_2(\Gamma_k)$ со скалярным произведением

$$(\zeta_k, \eta_k)_{L_2(\Gamma_k)} := \int\limits_{\Gamma_k} \zeta_k \overline{\eta_k}\, d\Gamma_k, \quad k = 1, 2. \tag{3.6}$$

Тогда из условий сохранения объемов жидкостей при колебаниях, т. е. из условий (2.11), следует, что в рассматриваемой задаче

$$\zeta_k \in L_{2,\Gamma_k} = L_2(\Gamma_k) \ominus \{1_k\}, \tag{3.7}$$

см. (2.19).

3.2. Применение метода ортогонального проектирования. Опираясь на приведенные выше соображения, применим метод ортогонального проектирования на подпространства (3.3)–(3.5) уравнений движения (2.6), (2.7).

Так как $\operatorname{div}\vec{u}_k = 0$ в Ω_k и $\vec{u}_k \cdot \vec{n}_k = 0$ на S_k, то в силу разложения (3.2) имеем

$$\vec{u}_k = \vec{w}_k + \nabla\Phi_k, \quad \vec{w}_k \in \vec{J}_0(\Omega_k),\ \nabla\Phi_k \in \vec{G}_{h,\,S_k}(\Omega_k), \quad k = 1, 2. \tag{3.8}$$

Далее заметим, что давления $p_k(t, x)$, $x \in \Omega_k$, определены с точностью до произвольной функции t. Поэтому, используя условия (2.11) и вводя ортопроекторы θ_k (см. (2.19)),

$$\theta_k\zeta_k = \zeta_k - |\Gamma_k|^{-1}\int\limits_{\Gamma_k} \zeta_k\, d\Gamma_k, \quad \forall\zeta_k \in L_2(\Gamma_k), \tag{3.9}$$

перепишем условия (2.10) в виде

$$p_k = \rho_k g(\zeta_k + \theta_k(P_2\vec{\delta}_k \times \vec{r}_k)\cdot\vec{e}_k^{\,3}) \quad (\text{на } \Gamma_k)\,, \quad \int\limits_{\Gamma_k} p_k\, d\Gamma_k = 0, \tag{3.10}$$

где теперь p_k — нормированные давления, $k = 1, 2$. Поэтому в силу (3.3)–(3.5)

$$\nabla p_k = \nabla\widetilde{p_k} + \nabla\varphi_k, \quad \nabla\widetilde{p_k} \in \vec{G}_{h,\,S_k}(\Omega_k),\ \nabla\varphi_k \in \vec{G}_{0,\,\Gamma_k}(\Omega_k). \tag{3.11}$$

Пусть P_{0,Γ_k}, $P_{0,k}$ и P_{h,S_k} — ортопроекторы на соответствующие подпространства (3.3)–(3.5). Тогда, подставляя представления (3.8) и (3.11) при $k = 1$ в уравнение (2.6) и действуя этими ортопроекторами на обе части (2.6), приходим к соотношениям

$$\rho_1 P_{0,\Gamma_1}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) + \nabla\varphi_1 = \rho_1 P_{0,\Gamma_1}\vec{f}_1, \tag{3.12}$$

$$\rho_1\frac{d\vec{w}_1}{dt} + \rho_1 P_{0,1}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) = \rho_1 P_{0,1}\vec{f}_1, \tag{3.13}$$

$$\rho_1\frac{d}{dt}\nabla\Phi_1 + \rho_1 P_{h,S_1}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) + \nabla\widetilde{p_1} = \rho_1 P_{h,S_1}\vec{f}_1. \tag{3.14}$$

Здесь производные $\partial/\partial t$ у векторных полей скоростей заменены на d/dt, так как эти поля и поля градиентов давлений считаем функциями переменной t со значениями в соответствующих гильбертовых пространствах.

Аналогичная процедура проектирования для уравнения движения (2.7) приводит к соотношениям

$$\rho_2 P_{0,\Gamma_2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) + \nabla\varphi_2 = \rho_2 P_{0,\Gamma_2}\vec{f}_2, \tag{3.15}$$

$$\rho_2\frac{d\vec{w}_2}{dt} + \rho_2 P_{0,2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) = \rho_2 P_{0,2}\vec{f}_2, \tag{3.16}$$

$$\rho_2\frac{d}{dt}\nabla\Phi_2 + \rho_2 P_{h,S_2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) + \nabla\widetilde{p_2} = \rho_2 P_{h,S_2}\vec{f}_2. \tag{3.17}$$

Отметим теперь, что в силу нормировки (3.10) для p_k и определения $\vec{G}_{0,\,\Gamma_k}(\Omega_k)$ (см. (3.2)) граничные условия (3.10) можно переписать в виде

$$\widetilde{p_k} = \rho_k g(\zeta_k + \theta_k(P_2\vec{\delta}_k \times \vec{r}_k)\cdot\vec{e}_k^{\,3}) \quad (\text{на } \Gamma_k)\,, \quad k = 1, 2. \tag{3.18}$$

Далее, кинематические условия (2.9) для ζ_k с учетом (3.8) теперь переписываются следующим образом:

$$\frac{d\zeta_k}{dt} = \gamma_{n,k}\nabla\Phi_k := \frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k} \quad (\text{на } \Gamma_k)\,, \tag{3.19}$$

где $\gamma_{n,k}$ — операция взятия нормальной компоненты поля на Γ_k:

$$\gamma_{n,k}\vec{u}_k = (\vec{u}_k \cdot \vec{n}_k)_{\Gamma_k}, \quad k = 1, 2. \tag{3.20}$$

Отметим теперь важное обстоятельство: поле $\nabla\varphi_1$ не входит в систему уравнений (3.13), (3.14), а $\nabla\varphi_2$ — в систему уравнений (3.16), (3.17). Поэтому эти поля могут быть найдены по известным решениям $\vec{\omega}_k(t)$ и заданным $\vec{f}_k$ из формул (3.12), (3.15). Далее, векторы $\vec{\delta}_k^3(t) = \delta_k^3(t)\vec{e}_k^{\,3}$, $k = 1,2$, также не входят в эти уравнения и находятся по $\vec{\omega}_k^3(t) = \omega_k^3(t)\vec{e}_k^{\,3}$, $k = 1,2$, и начальным условиям. Поэтому в дальнейшем достаточно исследовать начально-краевую задачу (3.13), (3.14), (3.16), (3.17), (2.1), (2.5), (2.11), (3.18), (3.19) при соответствующих начальных условиях.

3.3. Переход к дифференциально-операторному уравнению в гильбертовом пространстве. Рассмотрим сначала две вспомогательные краевые задачи Зарембы, помогающие в дальнейшем исключить давления $\widetilde{p_k}$ в областях Ω_k, выразив их через ζ_k и $P_2\vec{\delta}_k$. Эти задачи таковы:

$$\Delta\widetilde{p_k} = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial\widetilde{p_k}}{\partial n_k} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad \widetilde{p_k} = \psi_k \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad \int\limits_{\Gamma_k} \psi_k \, d\Gamma_k = 0. \tag{3.21}$$

Для области Ω_k с липшицевой границей $\partial\Omega_k$, разбитой на липшицевы куски S_k и Γ_k, задача (3.21) имеет единственное слабое решение

$$\widetilde{p_k} \in H^1_{h,S_k}(\Omega_k) := \Big\{\widetilde{p_k} \in H^1(\Omega_k): \ \Delta\widetilde{p_k} = 0 \ (\text{в } \Omega_k), \ \frac{\partial\widetilde{p_k}}{\partial n_k} = 0 \quad (\text{на } S_k), \ \widetilde{p_k} = \psi_k \quad (\text{на } \Gamma_k)\Big\} \tag{3.22}$$

тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\psi_k \in H^{1/2}_{\Gamma_k} := H^{1/2}(\Gamma_k) \cap L_{2,\Gamma_k}, \tag{3.23}$$

(см., например, [16, с. 45-46], а также [19, 20]). Поэтому можно считать, что

$$\nabla\widetilde{p_k} = V_k\psi_k, \quad V_k \in \mathcal{L}(H^{1/2}_{\Gamma_k}; \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)). \tag{3.24}$$

(Заметим, что между элементами $\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$ из (3.5) и $H^1_{h,S_k}(\Omega_k)$ с квадратом нормы

$$\|\widetilde{p_k}\|^2_{H^1_{h,S_k}(\Omega_k)} := \int\limits_{\Omega_k} |\nabla\widetilde{p_k}|^2 \, d\Omega_k, \quad \int\limits_{\Gamma_k} \widetilde{p_k} \, d\Gamma_k = 0, \tag{3.25}$$

имеет место изометрический изоморфизм.)

С помощью введенных операторов V_k вместо граничных условий (3.18) будем иметь соотношения

$$\nabla\widetilde{p_k} = \rho_k g V_k(\zeta_k + \theta_k(P_2\vec{\delta}_k \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^{\,3}) \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad k = 1,2. \tag{3.26}$$

Опираясь на эти факты, получим дифференциально-операторную связь между искомыми функциями в исследуемой проблеме. С этой целью введем в качестве искомых объектов наборы элементов

$$z := (z_1; z_2)^\tau, \ z_1 := (z_{1,1}; z_{1,2})^\tau, \ z_{1,1} = (\vec{w}_1; \nabla\Phi_1; \vec{\omega}_1)^\tau, \ z_{1,2} = (\vec{w}_2; \nabla\Phi_2; \vec{\omega}_2)^\tau,$$
$$z_2 := (z_{2,1}; z_{2,2})^\tau, \ z_{2,1} = (\zeta_1; P_2\vec{\delta}_1)^\tau, \ z_{2,2} = (\zeta_2; P_2\vec{\delta}_2)^\tau, \tag{3.27}$$

и будем считать, что они являются функциями переменной t со значениями в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \quad \mathcal{H}_1 = (\vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3),$$
$$\mathcal{H}_2 = (L_{2,\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (L_{2,\Gamma_2} \oplus \mathbb{C}^2). \tag{3.28}$$

Тогда уравнения (3.13), (3.14), (2.1), (3.16), (3.17), (2.5) с учетом (3.8) и (3.26) можно в векторно-матричной форме переписать в терминах (3.27) в следующем виде:

$$C_1\frac{dz_1}{dt} + A_1z_1 + gB_{12}z_2 = f_1(t). \tag{3.29}$$

Здесь C_1, A_1 и B_{12} — операторные матрицы размера 6×6, 6×6 и 6×4, отвечающие ортогональным разложениям (3.28). При этом

$$C_1z_1 = \Big(\rho_1\vec{w}_1 + \rho_1P_{0,1}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1); \quad \rho_1\nabla\Phi_1 + \rho_1P_{h,S_1}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1);$$

$$\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} (\vec{r}_1 \times \vec{w}_1)\, d\Omega_1 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} (\vec{r}_1 \times \nabla\Phi_1)\, d\Omega_1 + \vec{J}_1\omega_1 + \int\limits_{G_2} \vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)\, dm_2 +$$

$$+ \int\limits_{G_2} \vec{h}_1 \times \vec{w}_2\, dm_2 + \int\limits_{G_2} \vec{h}_1 \times \nabla\Phi_2\, dm_2 + \int\limits_{G_2} \vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2)\, dm_2;$$

$$\rho_2\vec{w}_2 + \rho_2 P_{0,2}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1) + \rho_2 P_{0,2}(\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2); \rho_2\nabla\Phi_2 + \rho_2 P_{h,S_2}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1) + \rho_2 P_{h,S_2}(\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2);$$

$$\rho_2 \int\limits_{\Omega_2} (\vec{r}_2 \times \vec{w}_2)\, d\Omega_2 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} (\vec{r}_2 \times \nabla\Phi_2)\, d\Omega_2 + \vec{J}_2\vec{\omega}_2 + \int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)\, dm_2\Big)^{\tau}, \tag{3.30}$$

где $\vec{J}_1$ и $\vec{J}_2$ — тензоры инерции маятников вместе с жидкостью:

$$\vec{J}_k\vec{\omega}_k := \rho_{0k} \int\limits_{\Omega_{0k}} \vec{r}_k \times (\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k)\, d\Omega_{0k} + \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{r}_k \times (\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k)\, d\Omega_k, \quad k = 1, 2. \tag{3.31}$$

Далее, операторная матрица A_1 из (3.29) имеет ненулевые элементы лишь следующего вида

$$A_{1,33} = \alpha_1 + \alpha_2, \quad A_{1,36} = -\alpha_2 = A_{1,63}, \quad A_{1,66} = \alpha_2. \tag{3.32}$$

Наконец, операторная матрица B_{12} действует по закону

$$B_{12}z_2 = \Big(0;\ \rho_1 V_1(\zeta_1 + \theta_1(P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3}); -\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1)\zeta_1\, d\Gamma_1 + (m_1 l_1 + m_2 h_1) P_2\vec{\delta}_1;$$

$$0;\ \rho_2 V_2(\zeta_2 + \theta_2(P_2\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_2^{\,3}); -\rho_2 \int\limits_{\Gamma_2} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2)\zeta_2\, d\Gamma_2 + m_2 l_2 P_2\vec{\delta}_2\Big)^{\tau}. \tag{3.33}$$

Лемма 3.1. *Операторная матрица C_1 из* (3.30) *является ограниченным самосопряженным и положительно определенным оператором, действующим в $\mathcal{H}_1$. Квадратичная форма $(C_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1}$ равна удвоенной кинетической энергии гидромеханической системы (см.* (2.20)*), т. е. C_1 является оператором кинетической энергии.*

Доказательство. Очевидно, каждый элемент матрицы C_1 из (3.30) является ограниченным оператором, действующим из одного пространства в другое (см. (3.28)), так что область определения оператора C_1 есть все пространство $\mathcal{H}_1$.

Покажем, что $C_1 = C_1^*$. Из (3.30) видим, что диагональные элементы C_1 являются самосопряженными и положительно определенными операторами, так как $\vec{J}_k :\ \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ положительно определенные, $k = 1, 2$, и, кроме того $\int\limits_{G_2} \vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)\, dm_2 = m_2 h_1^2 P_2\vec{\omega}_1$. Поэтому

$$C_{1,0} := \operatorname{diag}(\rho_1 I; \rho_1 I; \vec{J}_1 + m_2 h_1^2 P_2; \rho_2 I; \rho_2 I; \vec{J}_2) \gg 0. \tag{3.34}$$

Проверим теперь, что соответствующие внедиагональные элементы в C_1 взаимно сопряжены. Этот факт основан на тождествах

$$(P_{0,1}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1), \vec{w}_1)_{\vec{L}_2(\Omega_1)} = \int\limits_{\Omega_1} (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \overline{\vec{w}_1}\, d\Omega_1 = \vec{\omega}_1 \cdot \int\limits_{\Omega_1} (\vec{r}_1 \times \overline{\vec{w}_1})\, d\Omega_1,$$

$$(P_{h,S_1}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1), \nabla\Phi_1)_{\vec{L}_2(\Omega_1)} = \int\limits_{\Omega_1} (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \overline{\nabla\Phi_1}\, d\Omega_1 = \vec{\omega}_1 \cdot \int\limits_{\Omega_1} (\vec{r}_1 \times \overline{\nabla\Phi_1})\, d\Omega_1,$$

а также на аналогичных формулах с индексом 2.

Далее устанавливаем также, что

$$\int\limits_{G_2} (\vec{h}_1 \times \vec{w}_2)\, dm_2 \cdot \overline{\vec{\omega}_1} = \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} (\vec{h}_1 \times \vec{w}_2) \cdot \overline{\vec{\omega}_1}\, d\Omega_2 = \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{w}_2 \cdot (\overline{\vec{\omega}_1} \times \vec{h}_1)\, d\Omega_2 = \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{w}_2 \cdot \overline{P_{0,2}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)}\, d\Omega_2,$$

$$\int\limits_{G_2} (\vec{h}_1 \times \nabla\Phi_2)\, dm_2 \cdot \overline{\vec{\omega}_1} = \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} (\vec{h}_1 \times \nabla\Phi_2) \cdot \overline{\vec{\omega}_1}\, d\Omega_2 =$$

$$= \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \nabla\Phi_2 \cdot (\overline{\vec{\omega}_1} \times \vec{h}_1)\, d\Omega_2 = \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \nabla\Phi_2 \cdot \overline{P_{h,S_2}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)}\, d\Omega_2,$$

$$\int\limits_{G_2} (\vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2))\, dm_2 \cdot \overline{\vec{\omega}_1} = \int\limits_{G_2} (\overline{\vec{\omega}_1} \times \vec{h}_1) \cdot (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2)\, dm_2 =$$

$$= \int\limits_{G_2} (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2) \cdot (\overline{\vec{\omega}_1} \times \vec{h}_1)\, dm_2 = \vec{\omega}_2 \cdot \overline{\int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)\, dm_2}.$$

Из приведенных тождеств и следует свойство самосопряженности операторной матрицы C_1. Следствием этих же формул является тождество

$$(C_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} = \Big[\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\vec{w}_1 + \nabla\Phi_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1|^2\, d\Omega_1 + \rho_{01} \int\limits_{\Omega_{01}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1|^2\, d\Omega_{01}\Big] +$$
$$+ \Big[\rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{w}_2 + \nabla\Phi_2 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2|^2\, d\Omega_2 + \rho_{02} \int\limits_{\Omega_{02}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2|^2\, d\Omega_{02}\Big], \quad (3.35)$$

откуда следует, что C_1 — положительный оператор, причем правая часть равна удвоенной кинетической энергии системы. Так как C_1 равен сумме положительно определенного оператора $C_{1,0}$ из (3.34) и конечномерного оператора, образованного внедиагональными элементами, то C_1 положительно определен в $\mathcal{H}_1$. □

Лемма 3.2. *Операторная матрица A_1 с элементами* (3.32) *является ограниченным самосопряженным неотрицательным оператором. Квадратичная форма оператора A_1 равна*

$$(A_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} = \alpha_1 |\vec{\omega}_1|^2 + \alpha_2 |\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1|^2 \geqslant 0, \quad (3.36)$$

и потому A_1 можно назвать оператором диссипации энергии гидромеханической системы.

Лемма 3.3. *Оператор $B_{12} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$, определенный формулой* (3.33), *является блочно-диагональным неограниченным оператором, заданным на области определения*

$$\mathcal{D}(B_{12}) = (H^{1/2}_{\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (H^{1/2}_{\Gamma_2} \oplus \mathbb{C}^2), \quad (3.37)$$

плотной в $\mathcal{H}_2$.

Доказательство. Оно следует из того, что операторы V_k, дающие решения вспомогательных задач Зарембы (3.21), заданы на $\mathcal{D}(V_k) = H^{1/2}_{\Gamma_k}$ и $H^{1/2}_{\Gamma_k}$ плотно в L_{2,Γ_k}, причем $V_k \in \mathcal{L}(H^{1/2}_{\Gamma_k}; \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k))$ и область значений $\mathcal{R}(V_k) = \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$. □

Дальнейшее применение операторного подхода в исследуемой задаче основано на том, что кинематические условия на Γ_k (см. (2.9), (3.19), (3.20)), т. е. условия

$$\frac{d\zeta_k}{dt} = \frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k} = \gamma_{n,k}\nabla\Phi_k, \quad \frac{d}{dt} P_2\vec{\delta}_k = P_2\vec{\omega}_k, \quad k = 1, 2, \quad (3.38)$$

можно переписать в эквивалентной форме, позволяющей ввести в рассмотрение оператор потенциальной энергии системы.

Очевидно, если выполнены условия (3.38), то справедливы также условия

$$\rho_1 g \frac{d\zeta_1}{dt} + \rho_1 g \frac{d}{dt}(\theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3})) - \rho_1 g \gamma_{n,1}\nabla\Phi_1 - \rho_1 g \theta_1((P_2\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3}) = 0,$$

$$-\rho_1 g \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1) \frac{d\zeta_1}{dt}\, d\Gamma_1 + g(m_1 l_1 + m_2 h_1) \frac{d}{dt} P_2\vec{\delta}_1 +$$
$$+ \rho_1 g \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1) \gamma_{n,1} \nabla\Phi_1\, d\Gamma_1 - g(m_1 l_1 + m_2 h_1) P_2\vec{\omega}_1 = 0,$$

$$\rho_2 g \frac{d\zeta_2}{dt} + \rho_2 g \frac{d}{dt}(\theta_2((P_2\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_2^{\,3})) - \rho_2 g \gamma_{n,2}\nabla\Phi_2 - \rho_2 g \theta_2((P_2\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_2^{\,3}) = 0,$$

$$-\rho_2 g\int_{\Gamma_2}(\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_2)\frac{d\zeta_2}{dt}\,d\Gamma_2+gm_2l_2\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_2+\rho_2 g\int_{\Gamma_2}(\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_2)\gamma_{n,2}\nabla\Phi_2\,d\Gamma_2-gm_2l_2P_2\vec{\omega}_2=0. \tag{3.39}$$

Коротко эти условия можно переписать в виде

$$gC_2\frac{d\zeta_2}{dt}+gB_{21}z_1=0, \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}C_2z_2=\Big(&\rho_1\zeta_1+\rho_1\theta_1((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3});\ -\rho_1\int_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_1)\zeta_1\,d\Gamma_1+(m_1l_1+m_2h_1)P_2\vec{\delta}_1;\\ &\rho_2\zeta_2+\rho_2\theta_2((P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3});\ -\rho_2\int_{\Gamma_2}(\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_2)\zeta_2\,d\Gamma_2+m_2l_2P_2\vec{\delta}_2\Big)^{\tau},\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}B_{21}z_1=\Big(&-\rho_1\gamma_{n,1}\nabla\Phi_1-\rho_1\theta_1((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3});\ \rho_1\int_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_1)\gamma_{n,1}\nabla\Phi_1\,d\Gamma_1-(m_1l_1+m_2h_1)P_2\vec{\omega}_1;\\ &-\rho_2\gamma_{n,2}\nabla\Phi_2-\rho_2\theta_2((P_2\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3});\ \rho_2\int_{\Gamma_2}(\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_2)\nabla\Phi_2\,d\Gamma_2-m_2l_2P_2\vec{\omega}_2\Big)^{\tau}.\end{aligned} \tag{3.42}$$

Здесь оператор $C_2:\ (L_{2,\Gamma_1}\oplus\mathbb{C}^2)\oplus(L_{2,\Gamma_2}\oplus\mathbb{C}^2)=\mathcal{H}_2\to\mathcal{H}_2$ — блочно диагональный, а оператор $B_{21}:\ \mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_1$ — аналогичного вида с размерами матрицы 4×6.

Лемма 3.4. *Оператор $C_2:\ \mathcal{H}_2\to\mathcal{H}_2$ — ограничен и самосопряжен. Квадратичная форма $g(C_2z_2,z_2)_{\mathcal{H}_2}$ равна удвоенной потенциальной энергии гидромеханической системы.*

Доказательство. Оно основано на непосредственном подсчете квадратичной формы. Выражение для потенциальной энергии системы приведено в (2.20): это умноженное на g выражение во второй фигурной скобке, причем ниже в тексте объяснен физический смысл отдельных слагаемых. □

Выясним теперь, когда соотношения (3.38) и (3.39) эквивалентны. Введем обозначения, имеющие смысл осевых моментов инерции:

$$\beta_{jl}^{(k)}:=\int_{\Gamma_k}x_j^1(\theta_kx_l^1)\,d\Gamma_k=\beta_{lj}^{(k)},\quad j,l=1,2,\quad k=1,2. \tag{3.43}$$

Введем также определители:

$$\begin{aligned}\Delta_2^{(1)}&:=\det\begin{pmatrix}m_1l_1+m_2h_1-\rho_1\beta_{22}^{(1)} & \rho_1\beta_{21}^{(1)}\\ \rho_1\beta_{12}^{(1)} & (m_1l_1+m_2h_1)-\rho_1\beta_{11}^{(1)}\end{pmatrix},\\ \Delta_2^{(2)}&:=\det\begin{pmatrix}m_2l_2-\rho_2\beta_{22}^{(2)} & \rho_2\beta_{21}^{(1)}\\ \rho_2\beta_{12}^{(1)} & m_2l_2-\rho_2\beta_{11}^{(2)}\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.44}$$

Лемма 3.5. *Если выполнены условия общего положения*

$$\Delta_2^{(1)}\neq 0,\quad \Delta_2^{(2)}\neq 0, \tag{3.45}$$

то соотношения (3.38) *и* (3.39) *эквивалентны.*

Доказательство. Достаточно проверить, что из (3.39) следуют соотношения (3.38) при выполнении условий (3.45).

Перепишем соотношения (3.39) в виде

$$\varphi_1+\theta_1((\vec{\psi}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3})=0,\quad -\rho_1\int_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_1)\varphi_1\,d\Gamma_1+(m_1l_1+m_2h_1)\vec{\psi}_1=\vec{0}, \tag{3.46}$$

$$\varphi_1:=\frac{d\zeta_1}{dt}-\gamma_{n,1}\nabla\Phi_1,\quad \vec{\psi}_1:=\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_1-P_2\vec{\omega}_1;$$

$$\varphi_2 + \theta_2((\vec{\psi}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_2^{\,3}) = 0, \quad -\rho_2 \int\limits_{\Gamma_2} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2)\varphi_2 \, d\Gamma_2 + m_2 l_2 \vec{\psi}_2 = \vec{0}, \tag{3.47}$$

$$\varphi_2 := \frac{d\zeta_2}{dt} - \gamma_{n,2}\nabla\Phi_2, \quad \vec{\psi}_2 := \frac{d}{dt} P_2\vec{\delta}_2 - P_2\vec{\omega}_2,$$

и докажем, что из первого условия (3.45) следует, что задача (3.46) имеет лишь тривиальное решение.

Подставляя выражение для φ_1 из первого уравнения (3.46) во второе, приходим к векторному уравнению в $\mathbb{C}^2$:

$$(m_1 l_1 + m_2 h_1)\vec{\psi}_1 + \rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1) \cdot \theta_1((\vec{\psi}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3}) \, d\Gamma_1 = \vec{0}. \tag{3.48}$$

Представим $\vec{\psi}_1$ в виде $\vec{\psi}_1 = \sum\limits_{j=1}^{2} \psi_{1,j} \, \vec{e}_1^{\,j}$. Тогда

$$\theta_1((\vec{\psi}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3}) = \psi_{1,1}(\theta_1 x_1^2) - \psi_{1,2}(\theta_1 x_1^1), \quad \vec{r}_1 = \sum_{j=1}^{3} x_1^j \vec{e}_1^{\,j},$$

и из (3.48) получаем систему двух скалярных уравнений

$$\begin{aligned} &(m_1 l_1 + m_2 h_1)\psi_{1,1} - \rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} x_1^2(\psi_{1,1}(\theta_1 x_1^2) - \psi_{1,2}(\theta_1 x_1^1)) \, d\Gamma_1 = 0, \\ &(m_1 l_1 + m_2 h_1)\psi_{1,2} + \rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} x_1^1(\psi_{1,1}(\theta_1 x_1^2) - \psi_{1,2}(\theta_1 x_1^1)) \, d\Gamma_1 = 0. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Нетрудно видеть, что определитель этой однородной системы уравнений относительно $\psi_{1,1}$, $\psi_{1,2}$ равен $\Delta_2^{(1)}$ и потому в силу первого условия (3.45) он ненулевой. Отсюда следует, что $\vec{\psi}_1 = \vec{0}$, а потому и $\varphi_1 = 0$.

Для системы уравнений (3.47) доказательство такое же. □

Далее будем предполагать, что в исследуемой проблеме выполнены условия общего положения (3.45). Тогда исходная начально-краевая задача о малых колебаниях двух сочлененных маятников с полостями, частично заполненными идеальными жидкостями, будет равносильна совокупности соотношений (3.11), (3.15), тривиальным связям (см. (2.9))

$$\frac{d\delta_k^3}{dt} = \omega_k^3, \quad k = 1, 2, \tag{3.50}$$

а также задаче Коши для системы уравнений (см. (3.29), (3.40))

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dz_1}{dt} + A_1 z_1 + g B_{12} z_2 = f_1(t), \quad z_1(0) = z_1^0, \\ g C_2 \frac{dz_2}{dt} + g B_{21} z_1 = 0, \quad z_2(0) = z_2^0, \\ z_1 = \Big(\vec{w}_1; \nabla\Phi_1; \vec{\omega}_1; \vec{w}_2; \nabla\Phi_2; \vec{\omega}_2\Big)^\tau \in \mathcal{H}_1, \quad z_2 = \Big(\zeta_1; P_2\vec{\delta}_1; \zeta_2; P_2\vec{\delta}_2\Big)^\tau \in \mathcal{H}_2. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Дальнейшее изучение свойств решений исходной задачи основано на изучении свойств решений задачи Коши (3.51).

3.4. Свойства матричных операторных коэффициентов задачи Коши. Рассмотрим дополнительные свойства оператора потенциальной энергии C_2, а также операторов B_{12} и B_{21}. Для оператора C_2 выяснение этих свойств проводится по схеме из [16, с. 151-152].

Воспользуемся ортогональным разложением

$$\mathcal{H}_2 = (L_{2,\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (L_{2,\Gamma_2} \oplus \mathbb{C}^2) = \mathcal{H}_{21} \oplus \mathcal{H}_{22}, \tag{3.52}$$

$$\mathcal{H}_{21} = \mathcal{H}_{21,1} \oplus \mathcal{H}_{21,2}, \quad \mathcal{H}_{21,k} := \Big\{(\zeta_k; 0)^\tau : \int\limits_{\Gamma_k} \zeta_k x_k^j \, d\Gamma_k = 0, \; j = 1, 2\Big\}, k = 1, 2,$$
$$\mathcal{H}_{22} = \mathcal{H}_{22,1} \oplus \mathcal{H}_{22,2}, \quad \mathcal{H}_{22,k} := \mathrm{Lin}\Big\{(0; \vec{e}_k^{\,1})^\tau; (0; \vec{e}_k^{\,2})^\tau; (\theta_k x_k^1; 0)^\tau; (\theta_k x_k^2; 0)^\tau\Big\}, \tag{3.53}$$

где Lin — обозначение линейной оболочки элементов.

Лемма 3.6. *Если выполнено первое условие* (3.45), *т. е. условие*

$$\Delta_2^{(1)} = (m_1 l_1 + m_2 h_1 - \rho_1 \beta_{22}^{(1)})(m_1 l_1 + m_2 h_1 - \rho_1 \beta_{11}^{(1)}) - \rho_1^2 |\beta_{12}^{(1)}|^2 \neq 0, \tag{3.54}$$

то оператор C_{21} из блочно-диагонального представления (3.41)

$$C_2 = \mathrm{diag}(C_{21}; C_{22})$$

ограниченно обратим и обладает следующими свойствами.

1°. *На подпространстве $\mathcal{H}_{21,1}$ из* (3.53) *оператор C_{21} положительно определен*:

$$(C_{21} z_2, z_2)_{\mathcal{H}_{21}} = \rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} |\eta_1|^2 \, d\Gamma_1 = \rho_1 \|z_2\|^2_{\mathcal{H}_{21}}, \quad \forall z_2 = (\eta_1; 0)^\tau \in \mathcal{H}_{21,1}. \tag{3.55}$$

2°. *Оператор C_{21} неотрицателен на подпространстве $\mathcal{H}_{21,2}$ тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\Delta_1^{(1)} := m_1 l_1 + m_2 h_1 - \rho_1 \beta_{11}^{(1)} \geqslant 0, \quad \Delta_2^{(1)} \geqslant 0, \tag{3.56}$$

и положительно определен, если и только если

$$\Delta_1^{(1)} > 0, \quad \Delta_2^{(1)} > 0. \tag{3.57}$$

Аналогичные свойства имеют место для оператора C_{22} из (3.54).

1°. *На подпространстве $\mathcal{H}_{22,1}$ оператор C_{22} положительно определен*:

$$(C_{22} z_2, z_2)_{\mathcal{H}_2} = \rho_2 \int\limits_{\Gamma_2} |\eta_2|^2 \, d\Gamma_2 = \rho_2 \|z_2\|^2_{\mathcal{H}_{22}}, \quad \forall z_2 = (\eta_2; 0)^\tau \in \mathcal{H}_{22,1}. \tag{3.58}$$

2°. *Оператор C_{22} неотрицателен на подпространстве $\mathcal{H}_{22,2}$ тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\Delta_1^{(2)} := m_2 l_2 - \rho_2 \beta_{11}^{(2)} \geqslant 0, \quad \Delta_2^{(2)} \geqslant 0, \tag{3.59}$$

и положительно определен, если и только если

$$\Delta_1^{(2)} > 0, \quad \Delta_2^{(2)} > 0. \tag{3.60}$$

Доказательство. То, что оператор C_{21} обратим, следует из определения (3.41) для оператора C_2 (первый блок) и того факта, что система уравнений (3.46) (см. также (3.48), (3.49)) имеет лишь тривиальные решения при первом условии (3.45). Далее, так как оператор C_{21} равен сумме положительно определенного оператора

$$\mathrm{diag}(\rho_1 I_1; (m_1 l_1 + m_2 h_1) P_2), \tag{3.61}$$

действующего в $L_{2,\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2$, и конечномерного, то обратный оператор $(C_{21})^{-1}$ ограничен.

1°. На подпространстве $\mathcal{H}_{21,1}$ оператор C_{21}, как легко видеть, действует по закону $C_{21} z_2 = \rho_1 z_2$, откуда следует свойство (3.55). Так как C_{21} самосопряжен и $\mathcal{H}_{21,1}$ инвариантно для C_{21}, то $\mathcal{H}_{21,2}$ также инвариантно для C_{21}.

2°. На четырехмерном подпространстве $\mathcal{H}_{21,2}$ оператор C_{21}, очевидно, ограничен снизу. Выясним, когда он будет неотрицательным на $\mathcal{H}_{21,2}$.

Представим произвольный элемент $z_{21} = (\zeta_1; P_2 \vec{\delta}_1)^\tau$ из $\mathcal{H}_{21}$ в виде

$$z_{21} = z_{21,1} + z_{21,2}, \quad z_{21,1} = (\zeta_{11}; 0)^\tau, \quad \zeta_{11} = \zeta_1 + \theta_1((P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3}),$$
$$z_{21,2} = (-\theta_1((P_2 \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3}); P_2 \vec{\delta}_1)^\tau. \tag{3.62}$$

Тогда (см. (3.41))

$$C_{21}z_{21,1} = (0;\ (m_1l_1+m_2h_1)P_2\vec{\delta}_1 + \rho_1\int\limits_{\Gamma_1}(\theta_1(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_1))\cdot((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3})\,d\Gamma_1)^\tau,$$

$$C_{21}z_{21,2} = (\rho_1\zeta_{11};\ -\rho_1\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_1)\zeta_{11}\,d\Gamma_1)^\tau. \tag{3.63}$$

Отсюда получаем, что

$$(z_{21,1}, C_{21}z_{21,2})_{\mathcal{H}_{21}} = (C_{21}z_{21,1}, z_{21,2})_{\mathcal{H}_{21}} = 0,$$

так как подпространства $\mathcal{H}_{21,1}$ и $\mathcal{H}_{21,2}$ инвариантны для C_{21}, а также свойство

$$(C_{21}z_{21}, z_{21})_{\mathcal{H}_{21}} = (C_{21}z_{21,1}, z_{21,1})_{\mathcal{H}_{21}} + (C_{21}z_{21,2}, z_{21,2})_{\mathcal{H}_{21}} = \rho_1\int\limits_{\Gamma_1}|\zeta_{11}|^2\,d\Gamma_1 + (C_{21}z_{21,2}, z_{21,2})_{\mathcal{H}_{21}}.$$

Значит, C_{21} будет неотрицательным на $\mathcal{H}_{21,2}$ тогда и только тогда, когда при некотором $c \geqslant 0$ будет выполнено неравенство

$$(C_{21}z_{21,2}, z_{21,2})_{\mathcal{H}_{21}} \geqslant c\|z_{21,2}\|^2_{\mathcal{H}_{21}}, \quad z_{21,2}\in\mathcal{H}_{21,2}.$$

Из (3.41), (3.62), (3.63) имеем, используя определение (3.43),

$$(C_{21}z_{21,2}, z_{21,2})_{\mathcal{H}_{21}} = (m_1l_1+m_2h_1)|P_2\vec{\delta}_1|^2 - \rho_1\int\limits_{\Gamma_1}|\theta_1(\delta_{1,2}x_1^1 - \delta_{1,1}x_1^2)|^2\,d\Gamma_1 =$$
$$= (m_1l_1+m_2h_1-\rho_1\beta_{22}^{(1)})|\delta_{1,1}|^2 + 2\rho_1\beta_{12}^{(1)}\mathrm{Re}(\delta_{1,1},\overline{\delta_{1,2}}) + (m_1l_1+m_2h_1-\rho_1\beta_{11}^{(1)})|\delta_{1,2}|^2,$$

$$P_2\vec{\delta}_1 = \sum_{j=1}^{2}\delta_{1,j}\vec{e}_1^{\,j}. \tag{3.64}$$

Отсюда, используя критерий Сильвестра, получаем, что для неотрицательности оператора C_{21} на подпространстве $\mathcal{H}_{21,2}$, а значит и на всем пространстве $\mathcal{H}_{21}$, необходимо и достаточно выполнения условий (3.56). Соответственно для положительной определенности C_{21} на $\mathcal{H}_{21,2}$ требуется выполнение условий (3.57).

Вторая часть доказательства леммы повторяет выкладки и рассуждения из первой части, однако теперь применительно ко второму блоку из (3.41). Поэтому она здесь не приводится. □

Из доказательства леммы 3.6 следует, что ранг индефинитности квадратичной формы $(C_2z_1, z_2)_{\mathcal{H}_2}$ не может превышать $\varkappa = 4$, т. е. в $\mathcal{H}_2$ может быть не более чем четырехмерное подпространство элементов, на котором квадратичная форма принимает отрицательные значения.

Определение 3.1. Будем говорить, что рассматриваемая гидромеханическая система *статически устойчива по линейному приближению*, если оператор C_2 потенциальной энергии системы положительно определен, и тогда выполнены условия (3.57), (3.60).

Формулы (3.44) и (3.56), (3.59), определяющие $\Delta_1^{(k)}$ и $\Delta_2^{(k)}$, $k=1,2$, показывают, что условия статической устойчивости системы выполнены для тел достаточно большой массы с расположенными достаточно далеко от точек подвеса центрами масс этих тел-маятников.

Перейдем теперь к изучению свойств операторных матриц B_{12} из (3.33) и B_{21} из (3.42). Напомним (лемма 3.3), что оператор B_{12} задан на области определения (3.37), он неограничен и действует из плотной в $\mathcal{H}_2$ области определения $\mathcal{D}(B_{12})$ на пространство $\mathcal{H}_1$. При этом в матричном представлении (3.33) оператора B_{12} все элементы-операторы, кроме V_1 и V_2, являются ограниченными двумерными операторами и потому $\mathcal{D}(B_{12})$ имеет вид (3.37). Так как операторы $V_k:\ H^{1/2}_{\Gamma_k}\to\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$, $k=1,2$, замкнуты, то оператор B_{12} также замкнут на $\mathcal{D}(B_{12})$.

Что касается матричного оператора B_{21} из (3.42), то он также неограничен, поскольку неограниченными являются операторы $\gamma_{n,k}$, $k=1,2$. Поэтому естественно B_{21} задать на области определения

$$\mathcal{D}(B_{21}) = (\vec{J}_0(\Omega_1)\oplus\mathcal{D}(\gamma_{n,1})\oplus\mathbb{C}^3)\oplus(\vec{J}_0(\Omega_2)\oplus\mathcal{D}(\gamma_{n,1})\oplus\mathbb{C}^3). \tag{3.65}$$

Здесь под $\gamma_{n,k}$ понимается оператор нормального следа (см. (3.19), (3.20)), суженный на подпространство $\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$.

Лемма 3.7. *Задача Неймана*

$$\Delta\Phi_k = 0 \quad (\textit{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k} = 0 \quad (\textit{на } S_k),$$
$$\frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k} = \gamma_{n,k}\nabla\Phi_k = \psi_k \quad (\textit{на } \Gamma_k), \quad \int\limits_{\Gamma_k} \Phi_k\, d\Gamma_k = 0, \tag{3.66}$$

имеет единственное слабое решение $\nabla\Phi_k \in \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi_k \in (H^{1/2}_{\Gamma_k})^* = \widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_k}$. *Если* ψ_k *— любой элемент из* L_{2,Γ_k}, *то* $\nabla\Phi_k \in \mathcal{D}(\gamma_{n,k})$, *т. е.*

$$\mathcal{D}(\gamma_{n,k}) = \{\nabla\Phi_k \in \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k) :\ \gamma_{n,k}\nabla\Phi_k = \frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k}|_{\Gamma_k} = \psi_k,\ \forall\psi_k \in L_{2,\Gamma_k}\}. \tag{3.67}$$

При этом оператор $\gamma_{n,k}$, *заданный на области определения* (3.67), *является замкнутым неограниченным оператором, действующим из* $\mathcal{D}(\gamma_{n,k})$ *на* L_{2,Γ_k}. *Его область определения* $\mathcal{D}(\gamma_{n,k})$ *плотна в* $\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$, *а элементы* $\nabla\Phi_k$ *являются обобщенными решениями задачи* (3.66).

Доказательство. Задача (3.66) достаточно подробно изучена в произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega$, разбитой на липшицевы куски S и Γ (см., например, [16, с. 137-138], а также [19, 20]). При ее исследовании используют обобщенную формулу Грина для оператора Лапласа в следующем виде:

$$(\eta, \Phi)_{\breve{H}^1_\Gamma(\Omega)} := \int\limits_\Omega \nabla\eta \cdot \nabla\Phi\, d\Omega = \langle\eta, -\Delta\Phi\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle\gamma\eta, \frac{\partial\Phi}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma)} + \langle\gamma\eta, \frac{\partial\Phi}{\partial n}\rangle_{L_2(S)}, \quad \eta, \Phi \in \breve{H}^1_\Gamma(\Omega). \tag{3.68}$$

Здесь $\breve{H}^1_\Gamma(\Omega)$ — пространство с квадратом нормы

$$\|\eta\|^2_{\breve{H}^1_\Gamma(\Omega)} := \int\limits_\Omega |\nabla\eta|^2\, d\Omega, \quad \int\limits_\Gamma \eta\, d\Gamma = 0,$$
$$\gamma\eta := \eta|_{\partial\Omega}, \quad (\gamma\eta)|_\Gamma \in H^{1/2}_\Gamma, \quad (\gamma\eta)|_S \in H^{1/2}_S,$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} \in H^{-1/2}(\partial\Omega), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_\Gamma \in \widetilde{H}^{-1/2}_\Gamma, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_S \in \widetilde{H}^{-1/2}_S, \quad -\Delta\Phi \in (\breve{H}^1_\Gamma(\Omega))^*,$$

а косыми скобками обозначено значение функционала из сопряженного пространства (второй сомножитель) на элементе из основного пространства (первый сомножитель).

В частности, для задачи (3.66) слабое решение определяется посредством тождества

$$(\eta, \Phi)_{\breve{H}^1_\Gamma(\Omega)} = \langle\gamma\eta, \psi_k\rangle_{L_{2,\Gamma_k}} \quad \forall\eta_k \in \breve{H}^1_{\Gamma_k}(\Omega_k), \tag{3.69}$$

а обобщенное решение — тождеством

$$(\eta, \Phi)_{\breve{H}^1_\Gamma(\Omega)} = (\gamma\eta, \psi_k)_{L_{2,\Gamma_k}} \quad \forall\eta_k \in \breve{H}^1_{\Gamma_k}(\Omega_k). \tag{3.70}$$

Отсюда и следуют утверждения леммы. В частности, $\nabla\Phi_k = (\gamma_{n,k})^{-1}\psi_k$, и оператор $(\gamma_{n,k})^{-1}$ для обобщенных решений ограниченно действует из L_{2,Γ_k} в $\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$. □

Следующее свойство оказывается весьма важным в исследуемой проблеме.

Лемма 3.8. *Операторы*

$$V_k :\ \mathcal{D}(V_k) = H^{1/2}_{\Gamma_k} \subset L_{2,\Gamma_k} \to \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$$

и

$$\gamma_{n,k} :\ \mathcal{D}(\gamma_{n,k}) \subset \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k) \to L_{2,\Gamma_k}, \quad k = 1, 2,$$

см. (3.24), (3.19), (3.20), *взаимно сопряжены*:

$$(V_k\zeta_k, \nabla\Phi_k)_{\vec{L}_2(\Omega_k)} = (\zeta_k, \gamma_{n,k}\nabla\Phi_k)_{L_{2,\Gamma_k}} \quad \forall\zeta_k \in \mathcal{D}(V_k),\ \forall\nabla\Phi_k \in \mathcal{D}(\gamma_{n,k}), \quad k = 1, 2.$$

Доказательство. Для вспомогательной задачи Зарембы (3.22)–(3.24) с заданной функцией $\zeta_k \in H^{1/2}_{\Gamma_k}$ и $\nabla\Phi_k \in \mathcal{D}(\gamma_{n,k})$ имеем в силу (3.70), (3.66)

$$(V_k\zeta_k, \nabla\Phi_k)_{\vec{L}_2(\Omega_k)} = \int\limits_{\Omega_k} \nabla\widetilde{p}_k \cdot \nabla\overline{\Phi_k}\, d\Omega_k = (\widetilde{p}_k, \Phi_k)_{\check{H}^1_{\Gamma_k}(\Omega_k)} = (\zeta_k, \psi_k)_{L_{2,\Gamma_k}} = (\zeta_k, \gamma_{n,k}\nabla\Phi_k)_{L_{2,\Gamma_k}}.$$

□

Опираясь на лемму 3.8, теперь легко установить следующее основное свойство операторных матриц B_{12} и B_{21}.

Лемма 3.9. *Операторы B_{12} и B_{21}, заданные формулами* (3.33), (3.42) *на областях определения* (3.37) *и* (3.65) *соответственно, являются кососамосопряженными*: $B^*_{12} = -B_{21}$, *т. е.*

$$(B_{12}z_2, z_1)_{\mathcal{H}_1} = -(z_2, B_{21}z_1)_{\mathcal{H}_2} \quad \forall z_1 \in \mathcal{D}(B_{21}),\ \forall z_2 \in \mathcal{D}(B_{12}). \tag{3.71}$$

Доказательство. Напомним, что B_{12} и B_{21} имеют блочно-диагональный вид,

$$B_{12} = \mathrm{diag}(B_{12,1}; B_{12,2}), \quad B_{21} = \mathrm{diag}(B_{21,1}; B_{21,2}), \tag{3.72}$$

и проверим свойство (3.71) на соответствующих элементах этих блоков.

Пусть

$$z_{1,1} = (\vec{w}_1;\ \nabla\Phi_1;\ \vec{\omega}_1)^\tau \in \mathcal{D}(B_{21,1}), \quad z_{2,1} = (\zeta_1;\ P_2\vec{\delta}_1)^\tau \in \mathcal{D}(B_{12,1}).$$

Тогда для $\nabla\Psi_1 = V_1\zeta_1$ имеем:

$$\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} (V_1\zeta_1) \cdot \overline{\nabla\Phi_1}\, d\Omega_1 = \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \nabla\Psi_1 \cdot \overline{\nabla\Phi_1}\, d\Omega_1,$$

$$-\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} \zeta_1(\gamma_{n,1}\overline{\nabla\Phi_1})\, d\Gamma_1 = -\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} \Psi_1 \overline{\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}}\, d\Gamma_1 = -\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \nabla\Psi_1 \cdot \overline{\nabla\Phi_1}\, d\Omega_1,$$

т. е. для выбранных операторных элементов из (3.33) и (3.42) свойство кососамосопряженности выполнено.

Аналогично для $\nabla\Psi_1 = V_1(\theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}^{\,3}_1))$ получаем

$$-\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}^{\,3}_1 \times \vec{r}_1)\zeta_1\, d\Gamma_1 \cdot \overline{\vec{\omega}_1} = -\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}^{\,3}_1 \times \vec{r}_1)\zeta_1 \cdot \overline{\vec{\omega}_1}\, d\Gamma_1 =$$

$$= \rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{r}_1 \times \vec{e}^{\,3}_1) \cdot \overline{\vec{\omega}_1}\zeta_1\, d\Gamma_1 = \rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\overline{\vec{\omega}_1} \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}^{\,3}_1\zeta_1\, d\Gamma_1,$$

$$-\rho_1 \overline{\int\limits_{\Gamma_1} \theta_1((\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}^{\,3}_1)\zeta_1\, d\Gamma_1} = -\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\overline{\vec{\omega}_1} \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}^{\,3}_1\zeta_1\, d\Gamma_1.$$

Далее имеем также

$$\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} (V_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}^{\,3}_1)) \cdot \overline{\nabla\Phi_1}\, d\Omega_1 = \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \nabla\Psi_1 \cdot \overline{\nabla\Phi_1}\, d\Omega_1,$$

$$\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}^{\,3}_1 \times \vec{r}_1)\gamma_{n,1}\nabla\Phi_1\, d\Gamma_1 \cdot \overline{P_2\vec{\delta}_1} = \rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} ((\vec{e}^{\,3}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \overline{P_2\vec{\delta}_1})\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\, d\Gamma_1 =$$

$$= -\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\theta_1(\overline{P_2\vec{\delta}_1} \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}^{\,3}_1)\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\, d\Gamma_1 = -\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \nabla\Phi_1 \cdot \overline{\nabla\Psi_1}\, d\Omega_1.$$

Из приведенных тождеств следует, что

$$B^*_{12,1} = -B_{21,1}.$$

Свойство $B^*_{12,2} = -B_{21,2}$ аналогично проверяется на элементах

$$z_{1,2} = (\vec{w}_2;\ \nabla\Phi_2;\ \vec{\omega}_2)^\tau \in \mathcal{D}(B_{21,2}), \quad z_{2,2} = (\zeta_2;\ P_2\vec{\delta}_2)^\tau \in \mathcal{D}(B_{12,2}).$$

□

Итогом рассмотрения свойств операторных матриц изучаемой задачи является следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Исходная задача о малых колебаниях двух сочлененных маятников с полостями, частично заполненными идеальными жидкостями, равносильна, после отделения тривиальных соотношений* (3.12), (3.15), (2.9) *(для* δ_k^3*), задаче Коши*

$$C\frac{dz}{dt} + Az + gBz = f(t), \quad z(0) = z^0, \quad f(t) = (f_1(t); 0)^\tau, \tag{3.73}$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, *где*

$$C = \operatorname{diag}(C_1; gC_2) = C^* \in \mathcal{L}(H) \tag{3.74}$$

— оператор полной энергии гимдромеханической системы,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} = -B^*, \quad \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B_{21}) \oplus \mathcal{D}(B_{12}), \tag{3.75}$$

— оператор обмена между кинетической и потенциальной энергиями,

$$0 \leqslant A = \operatorname{diag}(A_1; 0) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \tag{3.76}$$

— оператор диссипации энергии, учитывающий трение в шарнирах.

Если выполнено условие (3.45)*, то оператор* C *ограниченно обратим, а если система статически устойчива по линейному приближению* ($C_2 \gg 0$)*, т. е. выполнены условия* (3.60)*, то оператор* C *положительно определен.*

4. Теорема об однозначной разрешимости начально-краевой задачи

4.1. О разрешимости задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения. В этом разделе доказывается теорема об однозначной разрешимости задачи Коши (3.73)–(3.76), а на ее основе — теорема существования и единственности сильного решения исходной начально-краевой гидромеханической задачи.

Перейдем к исследованию задачи Коши (3.73) как в случае статической устойчивости по линейному приближению, так и при ее отсутствии.

Определение 4.1. *Сильным решением* задачи Коши (3.73) на отрезке $[0;T]$ назовем такую функцию $z(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$, для которой выполнены следующие условия.

1°. При любом $t \in [0;T]$ элемент $z(t) \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B_{21}) \oplus \mathcal{D}(B_{12})$ и функция $Bz(t)$ непрерывна по t, т. е. $Bz(t) \in C([0;T];\mathcal{H})$.

2°. Функция dz/dt непрерывна по t, т. е. $z(t) \in C^1([0;T];\mathcal{H})$.

3°. При любом $t \in [0;T]$ выполнено уравнение (3.73), а также выполнено начальное условие.

Заметим, что необходимыми условиями существования сильного решения задачи (3.73) на отрезке на отрезке $[0;T]$ являются условия

$$z^0 \in \mathcal{D}(B), \quad f(t) \in C([0;T];\mathcal{H}). \tag{4.1}$$

Теорема 4.1. *Пусть для исследуемой гидромеханической системы выполнены условия* (3.57), (3.60) *статической устойчивости по линейному приближению, а также условия*

$$z^0 \in \mathcal{D}(B), \quad f(t) \in C^1([0;T];\mathcal{H}). \tag{4.2}$$

Тогда задача (3.73) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0;T]$.

Доказательство. В силу условий теоремы оператор C полной энергии ограничен и положительно определен (леммы 3.1, 3.4, 3.6) и поэтому имеет ограниченный обратный положительно определенный оператор C^{-1}. Поэтому задача (3.73) равносильна задаче Коши

$$\frac{dz}{dt} = -C^{-1}Az - gC^{-1}Bz + C^{-1}f(t), \quad z(0) = z^0. \tag{4.3}$$

Для ее исследования введем в рассмотрение гильбертово пространство $\mathcal{H}_C$ со скалярным произведением

$$(u,v)_C := (Cu,v)_{\mathcal{H}} = (C^{1/2}u, C^{1/2}v)_{\mathcal{H}}, \quad u,v \in \mathcal{H}, \tag{4.4}$$

и нормой, эквивалентной норме пространства $\mathcal{H}$. В новом скалярном произведении оператор $C^{-1}B$ определен на множестве

$$\mathcal{D}(C^{-1}B) = \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{H}_C = \mathcal{H} \tag{4.5}$$

и обладает свойством кососамосопряженности. В самом деле, при любых u и v из $\mathcal{D}(B)$ имеем

$$(C^{-1}Bu,v)_C = (Bu,v)_{\mathcal{H}} = (u,B^*v)_{\mathcal{H}} = -(u,Bv)_{\mathcal{H}} = -(Cu,C^{-1}Bv)_{\mathcal{H}} = -(u,C^{-1}Bv)_C. \tag{4.6}$$

Отсюда следует (см. [21, с. 110–112]), что оператор $C^{-1}B$ является консервативным оператором, т. е.

$$\mathrm{Re}(C^{-1}Bz,z)_C = 0 \quad \forall z \in \mathcal{D}(B), \tag{4.7}$$

и потому — генератором группы унитарных операторов $U(t) := \exp(-tC^{-1}B)$, действующих в $\mathcal{H}_C$.

Далее, аналогично устанавливаем, что оператор $C^{-1}A$ является (конечномерным) ограниченным неотрицательным оператором, действующим в $\mathcal{H}_C$. Отсюда следует, что оператор $-C^{-1}(A+gB)$ является генератором сжимающей полугруппы операторов

$$V(t) = \exp(-tC^{-1}(A+gB)), \tag{4.8}$$

действующей в $\mathcal{H}_C$.

Если выполнены условия (4.2), то $z^0 \in \mathcal{D}(C^{-1}(A+gB))$, $C^{-1}f(t) \in C^1([0;T];\mathcal{H}_C)$, и потому (см. [21, с. 166]) задача Коши (4.3) имеет единственное сильное решение

$$z(t) = V(t)z^0 + \int_0^t V(t-s)z(s)\,ds. \tag{4.9}$$

Отсюда и следует утверждение теоремы. □

Следствием теоремы 4.1 является такой факт: для сильного решения $z(t)$ задачи (3.73) выполнен закон баланса полной энергии (в дифференциальной форме):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(Cz(t),z(t))_{\mathcal{H}} = -(Az,z)_{\mathcal{H}} + \mathrm{Re}(f(t),z(t))_{\mathcal{H}}. \tag{4.10}$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда гидромеханическая система не является статически устойчивой по линейному приближению, и для нее выполнены лишь условия (3.45).

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* (3.45) *и условия* (4.2). *Тогда задача* (3.73) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0;T]$.

Доказательство. Если выполнены условия (3.45), то согласно леммам 3.1, 3.4, 3.5, 3.6 оператор $C = C^*$ ограничен, обратим, причем его квадратичная форма может быть индефинитной и иметь не более четырех отрицательных квадратов. Поэтому C допускает представление

$$C = J_\varkappa|C| = |C|^{1/2}J_\varkappa|C|^{1/2} = |C|J_\varkappa, \quad J_\varkappa = J_\varkappa^* = J_\varkappa^{-1}, \quad |C| = (C^2)^{1/2} \gg 0, \tag{4.11}$$

где $\varkappa$ — ранг индефинитности оператора канонической симметрии $J_\varkappa$, причем $1 \leqslant \varkappa \leqslant 4$.

Применяя к обеим частям (3.73) оператор $C^{-1} = J_\varkappa|C|^{-1}$, приходим к задаче Коши

$$\frac{dz}{dt} = -J_\varkappa|C|^{-1}Az - gJ_\varkappa|C|^{-1}Bz + J_\varkappa|C|^{-1}f(t), \quad z(0) = z^0. \tag{4.12}$$

Введем, как и выше, энергетическое пространство $\mathcal{H}_{|C|}$ с дефинитным скалярным произведением

$$(u,v)_{|C|} := (|C|u,v)_{\mathcal{H}} = (|C|^{1/2}u, |C|^{1/2}v)_{\mathcal{H}} \tag{4.13}$$

и нормой, эквивалентной норме пространства $\mathcal{H}$, а также пространство Л. С. Понтрягина $\Pi_\varkappa$ с индефинитным скалярным произведением

$$[u,v] := (J_\varkappa u,v)_{|C|} = (|C|J_\varkappa u,v)_{\mathcal{H}} = (J_\varkappa|C|^{1/2}u, |C|^{1/2}v)_{\mathcal{H}}. \tag{4.14}$$

В скалярном произведении (4.14) оператор $J_\varkappa|C|^{-1}B$, заданный на области определения $\mathcal{D}(B)$, является $J_\varkappa$-кососамосопряженным, т. е. выполнено свойство

$$[J_\varkappa|C|^{-1}Bu, v] = -[u, J_\varkappa|C|^{-1}Bv] \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(B). \tag{4.15}$$

В самом деле,

$$[J_\varkappa|C|^{-1}Bu, v] = (|C|^{-1}Bu, v)_{|C|} = (Bu, v)_{\mathcal{H}} =$$
$$= -(u, Bv)_{\mathcal{H}} = -(u, |C|^{-1}Bv)_{|C|} = -[u, J_\varkappa|C|^{-1}Bv].$$

Поэтому, как следует из работы [25] (см. также [3]), пространство $\Pi_\varkappa$ допускает $J_\varkappa$-ортогональное разложение на два подпространства, инвариантные относительно $J_\varkappa|C|^{-1}B$:

$$\Pi_\varkappa = \Pi_+[\oplus]\Pi_-, \quad \dim \Pi_+ = \infty, \quad \dim \Pi_- = 2\varkappa. \tag{4.16}$$

При этом сужение оператора $J_\varkappa|C|^{-1}B$ на Π_+ является кососамосопряженным оператором (и потому удовлетворяет построениям, проведенным в теореме 4.1), а Π_- не более чем $2\varkappa$-мерно.

Учитывая эти факты, будем разыскивать решение задачи (4.12) в виде

$$z = (z_+; z_-)^\tau, \quad z_+ \in \mathcal{D}((J_\varkappa|C|^{-1}B)\Big|_{\Pi_+}) \subset \Pi_+, \quad z_- \in \Pi_-,$$

и подействуем ортопроекторами P_+ и P_-, $J_\varkappa = P_+ - P_-$, на обе части уравнения (4.12). Тогда возникает задача Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_+}{dt} = -P_+(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_+} z_+ - P_+(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_-} z_- -$$
$$- gP_+(J_\varkappa|C|^{-1}B)\Big|_{\Pi_+} z_+ + P_+(J_\varkappa|C|^{-1}f(t)), \quad z_+(0) = z_+^0 = P_+z^0, \tag{4.17}$$

$$\frac{dz_-}{dt} = -P_-(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_+} z_+ - P_-(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_-} z_- -$$
$$- gP_-(J_\varkappa|C|^{-1}B)\Big|_{\Pi_-} z_- + P_-(J_\varkappa|C|^{-1}f(t)), \quad z_-(0) = z_-^0 = P_-z^0, \tag{4.18}$$

Так как Π_- не более чем конечномерно ($2\varkappa$-мерно), то из (4.18) можно выразить $z_-(t)$ через $z_+(t)$:

$$z_-(t) = \exp(-tP_-(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_-}) z_-^0 +$$
$$+ \int_0^t \exp(-(t-s)P_-(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_-}) \left[-P_-(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_+} z_+(s) + P_-(J_\varkappa|C|^{-1}f(s)) \right] ds. \tag{4.19}$$

Подставляя это решение в (4.17), придем к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения первого порядка следующего вида:

$$\frac{dz_+}{dt} = A_0 z_+ + \int_0^t G(t,s)A_1 z_+(s)\, ds + f_+(t), \quad z_+(0) = z_+^0 = P_+z^0, \tag{4.20}$$

$$A_0 := -gP_+(J_\varkappa|C|^{-1}B)\Big|_{\Pi_+} - P_+(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_+};$$

$$G(t,s)A_1 := -P_+(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_-} \exp(-(t-s)(P_-(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_-}))(P_-(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_+}),$$

$$f_+(t) := -P_+(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_-} \Big\{ \exp(-tP_-(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_-}) z_-^0 +$$
$$+ \int_0^t \exp(-(t-s)P_-(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_-}) P_-(J_\varkappa|C|^{-1}f(s)) ds \Big\} + P_+(J_\varkappa|C|^{-1}f(t)).$$

Здесь в силу установленного выше, оператор A_0 является генератором сжимающей полугруппы в Π_+, а оператор A_1 ограничен. Опираясь на эти факты, воспользуемся следующим утверждением о разрешимости задачи Коши для интегродифференциального уравнения первого порядка (см., например, [18, теорема 1.3.2]). Если оператор A_0 является генератором C_0-полугруппы, $\mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(A_1)$, оператор-функция $G(t,s)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по t в треугольнике $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, то при выполнении условий $z_+^0 \in \mathcal{D}(A_0)$, $f_+(t) \in C^1([0;T];\Pi_+)$ уравнение (4.20) имеет сильное решение на отрезке $[0;T]$.

Нетрудно видеть, что при выполнении условий (4.2) выполнены условия разрешимости задачи (4.20), приведенные выше. Поэтому задача (4.20), а вместе с ней и исходная задача (4.12) имеют сильное решение на отрезке $[0;T]$. Отсюда и следует утверждение теоремы. $\square$

Замечание 4.1. Если трение в шарнирах отсутствует, то оператор A в (4.12) нулевой, и задача (4.17), (4.18) распадается на две независимые задачи Коши, каждая из которых при выполнении условий (4.2) имеет сильное решение. При этом в приведенных выше формулах везде следует положить $A = 0$.

4.2. О разрешимости начально-краевой задачи о малых движениях гидромеханической системы. Установленные выше общие теоремы позволяют доказать теорему о существовании и единственности решений исходной начально-краевой задачи (2.1), (2.5)–(2.12).

Определение 4.2. Будем говорить, что задача (2.1), (2.5)–(2.12) имеет *сильное по переменной t решение* на отрезке $[0;T]$, если выполнены следующие условия.

1°. Функции $\vec{u}_k(t,x) \in C^1([0;T];\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k))$, функции $\nabla p_k(t,x) \in C^1([0;T];\vec{G}(\Omega_k))$, а $\vec{\omega}(t) \in C^1([0;T];\mathbb{C}^3)$.

2°. Функции $\zeta_k(t,x_1,x_2) \in C^1([0;T];L_{2,\Gamma_k})$, $(x_1,x_2) \in \Gamma_k$, а $\vec{\delta}_k(t) \in C^2([0;T];\mathbb{C}^3)$.

3°. При любом $t \in [0;T]$ выполнены первые уравнения Эйлера (2.6) и (2.7), где слагаемые непрерывны по t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega_k)$ соответственно; выполнены соотношения (2.10), где слагаемые из $C^1([0;T];H^{1/2}_{\Gamma_k})$; выполнены кинематические условия для ζ_k из (2.9), где слагаемые из $C^1([0;T];L_{2,\Gamma_k})$, а также кинематические условия для $\vec{\delta}_k$, где слагаемые из $C^1([0;T];\mathbb{C}^3)$.

4°. При любом $t \in [0;T]$ выполнены уравнения (2.1), (2.5), где слагаемые-элементы из $C([0;T];\mathbb{C}^3)$.

5°. Выполнены начальные условия (2.12).

Подведем теперь итог изучения исходной начально-краевой задачи.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия*

$$\begin{gathered}\vec{u}_k^0 \in \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k), \quad P_{h,S_k}\vec{u}_k^0 =: \nabla\Phi_k^0 \in \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k): \ \frac{\partial \Phi_k^0}{\partial n_k}\Big|_{\Gamma_k} \in L_{2,\Gamma_k}, \\ \zeta_k^0 \in H^{1/2}_{\Gamma_k}, \quad \vec{\omega}_k^0 \in \mathbb{C}^3, \quad \vec{\delta}_k^0 \in \mathbb{C}^3, \quad \vec{f}_k(t,x) \in C^1([0;T];\vec{L}_2(\Omega_k)), \quad k=1,2.\end{gathered} \tag{4.21}$$

Тогда начально-краевая задача (2.1), (2.5)–(2.12) *о малых движениях двух сочлененных маятников с полостями, частично заполненными тяжелой однородной идеальной жидкостью, имеет единственное сильное по t решение на отрезке $[0;T]$. Для этого решения выполнен закон баланса полной энергии в форме* (2.20)*, где все слагаемые являются непрерывными функциями переменной t.*

Доказательство. Если выполнены условия (4.21), то в задаче Коши (3.73)–(3.76) выполнены условия

$$\begin{gathered}z^0 = (z_1^0; z_2^0)^\tau = (\vec{w}_1^0;\ \nabla\Phi_1^0;\ \vec{\omega}_1^0;\ \vec{w}_2^0;\ \nabla\Phi_2^0;\ \vec{\omega}_2^0)^\tau \in \mathcal{D}(B_{21}) \oplus \mathcal{D}(B_{11}) = \mathcal{D}(B), \\ f(t) = (f_1(t);0)^\tau = (\rho_1 P_{0,1}\vec{f}_1;\ \rho_1 P_{h,S_1}\vec{f}_1;\ \vec{M}_1;\ 0;\ 0;\ \rho_2 P_{0,2}\vec{f}_2;\ \rho_2 P_{h,S_2}\vec{f}_2;\ \vec{M}_2;\ 0;\ 0)^\tau \in \\ \in C^1([0;T];\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) = C^1([0;T];\mathcal{H}),\end{gathered} \tag{4.22}$$

см. (3.26), (3.28), (3.33), (3.51), (3.37), (3.65), (3.67), (3.75). Поэтому по теореме 4.1 (либо 4.2) задача Коши (3.73)–(3.76) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0;T]$, т. е. выполнены уравнения системы (3.51), где каждое слагаемое является непрерывной функцией t со значениями в H_1 и H_2 соответственно. Отсюда следует, что выполнены уравнения (3.39) с теми же свойствами решений. Далее по лемме 3.5 в силу (3.45) приходим к условиям (3.38), где в первом соотношении (при выбранном k) все слагаемые из $C([0;T];L_{2,\Gamma_k})$, а во втором — из $C([0;T];\mathbb{C}^2)$. Теперь из (3.26) получаем, что $\nabla\widetilde{p_k} \in C^1([0;T];\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k))$, а также выполнены уравнения (3.13), (3.14), (3.16), (3.17), где все слагаемые — непрерывные функции t со значениями в соответствующих пространствах. Определяя еще $\nabla\varphi_k$ из (3.12), (3.15) и $d\vec{\delta}_3/dt$ из (2.9), приходим к выводу, что

$$\nabla\varphi_k \in C^1([0;T];\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)), \quad \vec{\delta}_3(t) \in C^1([0;T];\mathbb{C}).$$

Поэтому из (3.11) имеем

$$\nabla p_k = \nabla\widetilde{p_k} + \nabla\varphi_k \in C^1([0;T];\vec{G}(\Omega_k)),$$

а из (3.12)–(3.14), (3.15)–(3.17) получаем, что выполнены первые уравнения (2.6), (2.7), где все слагаемые — из $C([0;T];\vec{L}_2(\Omega_k))$, а также кинематические соотношения (2.9), причем в соотношении для ζ_k слагаемые из $C^1([0;T];H^{1/2}_{\Gamma_k})$, а для $P_2\vec{\delta}_k$ — в $C^1([0;T];\mathbb{C}^2)$. Наконец, выполнены также соотношения (2.1), (2.5), где все слагаемые из $C([0;T];\mathbb{C}^3)$, и начальные условия (2.12).

Таким образом, задача (2.1), (2.5)–(2.12) имеет сильное решение на отрезке $[0;T]$. Для него выполнен закон баланса полной энергии в виде (2.20). Доказательство этого факта повторяет соответствующие выкладки из пункта 2.2. $\square$

Замечание 4.2. В качестве следствия из теоремы 4.3 отметим такой факт. Если выполнены условия

$$\vec{u}_k^0 \in \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k) = \vec{J}_0(\Omega_k) \oplus \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k), \quad \zeta_k^0 \in L_{2,\Gamma_k},\ \vec{\omega}_k^0 \in \mathbb{C}^3,\ \vec{\delta}_k \in \mathbb{C}^3, \vec{f}_k(t,x) \in C([0;T];\vec{L}_2(\Omega_k)), \tag{4.23}$$

то задача (2.1), (2.5)–(2.12) имеет обобщенное решение с непрерывной полной энергией: для этого решения выполнен закон баланса полной энергии в форме

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Bigg\{\rho_{01}\int\limits_{\Omega_{01}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1|^2\,d\Omega_{01} + \rho_1\int\limits_{\Omega_1} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_1|^2\,d\Omega_1 + \rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2|^2\,d\Omega_{02} + \\
&\qquad + \rho_2\int\limits_{\Omega_2} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2|^2\,d\Omega_2\Bigg\} + \\
&\qquad + \frac{1}{2}g\Bigg\{\sum_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_{\Gamma_k}\Big(|\zeta_k + \theta_k((P_2\vec{\delta}_k \times \vec{r}_k)\cdot\vec{e}_k^{\,3})|^2 - |\theta_k((P_2\vec{\delta}_k \times \vec{r}_k)\cdot\vec{e}_k^{\,3})|^2\Big)\,d\Gamma_k\Bigg\} + \\
&\qquad + \frac{1}{2}\Big\{(m_1l_1 + m_2h_1)|P_2\vec{\delta}_1|^2 + m_2l_2|P_2\vec{\delta}_2|^2\Big\} = \\
&= \frac{1}{2}\Bigg\{\rho_{01}\int\limits_{\Omega_{01}} |\vec{\omega}_1^0 \times \vec{r}_1|^2\,d\Omega_{01} + \rho_1\int\limits_{\Omega_1} |\vec{\omega}_1^0 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_1^0|^2\,d\Omega_1 + \rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}} |\vec{\omega}_1^0 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2^0 \times \vec{r}_2|^2\,d\Omega_{02} + \\
&+ \rho_2\int\limits_{\Omega_2} |\vec{\omega}_1^0 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2^0 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2^0|^2\,d\Omega_2\Bigg\} + \frac{1}{2}\Big\{(m_1l_1 + m_2h_1)|P_2\vec{\delta}_1^0|^2 + m_2l_2|P_2\vec{\delta}_2^0|^2\Big\} + \\
&\qquad + \frac{1}{2}g\Bigg\{\sum_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_{\Gamma_k}\Big(|\zeta_k^0 + \theta_k((P_2\vec{\delta}_k^0 \times \vec{r}_k)\cdot\vec{e}_k^{\,3})|^2 - |\theta_k((P_2\vec{\delta}_k^0 \times \vec{r}_k)\cdot\vec{e}_k^{\,3})|^2\Big)\,d\Gamma_k\Bigg\} = \\
&= -\int\limits_0^t\Big(\alpha_1|\vec{\omega}_1|^2 + \alpha_2|\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1|^2\Big)\,dt + \sum_{k=1}^{2}\int\limits_0^t(\vec{M}_k(t)\cdot\vec{\omega}_k)\,dt + \sum_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_0^t\Big(\int\limits_{\Omega_k}\vec{f}_k\cdot\vec{u}_k\,d\Omega_k\Big)\,dt.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

В самом деле, для сильных решений соотношение (4.24) есть следствие тождества (2.20), а для обобщенных оно получается предельным переходом в процессе, когда от условий (4.2) по замыканию переходим к условиям (4.23).

5. Проблема собственных колебаний

В этом разделе рассматривается задача о собственных колебаниях сочлененных маятников с полостями, частично заполненными однородной идеальной жидкостью, в случае, когда отсутствует трение в шарнирах и потому система становится консервативной. Исследуются свойства спектра и системы собственных функций задачи как при условии статической устойчивости по линейному приближению, так и при отсутствии этого условия.

5.1. Случай нулевого собственного значения. Рассмотрим решения однородной задачи (3.73) при $A = 0$, зависящие от t по закону

$$z(t) = e^{i\lambda t} z, \quad z \in \mathcal{H}, \tag{5.1}$$

где λ — частота колебаний гидромеханической системы, а $z = (z_1; z_2)^\tau$ — амплитудный элемент. Для элементов z_1, z_2 с учетом формул (3.74), (3.75) приходим к системе уравнений

$$gB_{12}z_2 + i\lambda C_1 z_1 = 0, \quad gB_{21}z_1 + i\lambda g C_2 z_2 = 0, \tag{5.2}$$

$$z_1 = (\vec{w}_1;\ \nabla\Phi_1;\ \vec{\omega}_1;\ \vec{w}_2;\ \nabla\Phi_2;\ \vec{\omega}_2)^\tau, \quad z_2 = (\zeta_1;\ P_2\vec{\delta}_1;\ \zeta_2;\ P_2\vec{\delta}_2)^\tau.$$

Отметим предварительно, что операторные блоки B_{12}, B_{22} и C_2 обладают следующими свойствами:

$$\begin{gathered} B_{12} = \operatorname{diag}(B_{12,1}; B_{12,2}), \quad B_{21} = \operatorname{diag}(B_{21,1}; B_{21,2}), \\ B_{12,k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \widetilde{B}_{12,k} \end{pmatrix}, \quad B_{21,k} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{B}_{21,k} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \end{gathered} \tag{5.3}$$

$$\begin{gathered} \widetilde{B}_{12,1} = \begin{pmatrix} \rho_1 V_1(\ldots) & \rho_1 V_1(\theta_1((\ldots)\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3}) \\ -\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_1)(\ldots)\,d\Gamma_1 & (m_1 l_1 + m_2 h_1)P_2(\ldots) \end{pmatrix}, \\ \widetilde{B}_{12,2} = \begin{pmatrix} \rho_2 V_2(\ldots) & \rho_2 V_2(\theta_2((\ldots)\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3}) \\ -\rho_2 \int\limits_{\Gamma_2} (\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_2)(\ldots)\,d\Gamma_2 & m_2 l_2 P_2 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{5.4}$$

$$\begin{gathered} \widetilde{B}_{21,1} = \begin{pmatrix} -\rho_1\gamma_{n,1}(\ldots) & -\rho_1\theta_1(((\ldots)\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3}) \\ \rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_1)\gamma_{n,1}(\ldots)\,d\Gamma_1 & -(m_1 l_1 + m_2 h_1)P_2(\ldots) \end{pmatrix}, \\ \widetilde{B}_{21,2} = \begin{pmatrix} -\rho_2\gamma_{n,2}(\ldots) & -\rho_2\theta_2(((\ldots)\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3}) \\ \rho_2 \int\limits_{\Gamma_2} (\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_2)\gamma_{n,2}(\ldots)\,d\Gamma_2 & -m_2 l_2 P_2 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{5.5}$$

$$\begin{gathered} C_2 = \operatorname{diag}(C_{21}; C_{22}), \\ C_{21} = \begin{pmatrix} \rho_1 I_1 & \rho_1\theta_1(((\ldots)\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3}) \\ -\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_1)(\ldots)\,d\Gamma_1 & (m_1 l_1 + m_2 h_1)P_2 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B}_{21,1} = -C_{21}\widetilde{\gamma}_{n,1}, \\ C_{22} = \begin{pmatrix} \rho_2 I_2 & \rho_2\theta_2(((\ldots)\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3}) \\ -\rho_2 \int\limits_{\Gamma_2} (\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_2)(\ldots)\,d\Gamma_2 & m_2 l_2 P_2 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B}_{21,2} = -C_{22}\widetilde{\gamma}_{n,2}, \\ \widetilde{\gamma}_{n,1} := \operatorname{diag}(\gamma_{n,1}; P_2), \quad \widetilde{\gamma}_{n,2} := \operatorname{diag}(\gamma_{n,2}; P_2), \end{gathered} \tag{5.6}$$

$$\begin{gathered} \widetilde{B}_{12,1} = \widetilde{V}_1 C_{21}, \quad \widetilde{B}_{12,2} = \widetilde{V}_2 C_{22}, \\ \widetilde{V}_1 = \operatorname{diag}(V_1; I_1), \quad \widetilde{V}_2 = \operatorname{diag}(V_2; I_1). \end{gathered} \tag{5.7}$$

Эти формулы непосредственно следуют из определений (3.33), (3.41), (3.42) операторных матриц B_{12}, B_{21} и C_1.

Лемма 5.1. *Спектральная задача* (5.2) *имеет бесконечнократное нулевое собственное значение, которому отвечают решения вида*

$$z_1 = (\vec{w}_1;\ \vec{0};\ \vec{0};\ \vec{w}_2;\ \vec{0};\ \vec{0})^\tau, \quad z_2 = (\zeta_1;\ P_2\vec{\delta}_1;\ \zeta_2;\ P_2\vec{\delta}_2)^\tau = 0 \quad \forall \vec{w}_k \in \vec{J}_0(\Omega_k), \quad \forall \delta_1^3,\ \delta_2^3 \in \mathbb{C}. \tag{5.8}$$

Доказательство. Напомним сначала, что в исследуемой проблеме имеется еще тривиальная связь (3.50), которая в спектральной задаче дает соотношение

$$w_k^3 = i\lambda\delta_k^3, \quad k = 1, 2. \tag{5.9}$$

Полагая теперь в (5.2) $\lambda = 0$, получаем

$$B_{12}z_2 = 0, \quad B_{21}z_1 = 0. \tag{5.10}$$

Здесь первое соотношение в силу (5.3) приводит к условию $\widetilde{B}_{12}z_2 = 0$, а поэтому, в силу (5.7) и обратимости операторов $\widetilde{V}_k$ и C_2 (см. начало пункта 3.3 и лемм 3.5, 3.6), $z_2 = 0$.

Второе соотношение (5.10) с использованием свойств (5.5), (5.6) дает уравнения

$$-C_{2k}\widetilde{\gamma}_{n,k}\widetilde{z}_{1,k} = 0, \quad \widetilde{z}_{1,k} = (\nabla\Phi_k; \vec{\omega}_k)^\tau, \tag{5.11}$$

отсюда заключаем, что

$$\nabla\Phi_k = \vec{0}, \quad P_2\omega_k = \vec{0}, \quad k = 1, 2.$$

Наконец, из (5.9) при $\lambda = 0$ получаем, что $\omega_k^3 = 0$.

Отсюда и следуют свойства (5.8) для решений, отвечающих $\lambda = 0$. □

Замечание 5.1. Решениям вида (5.8) отвечают стационарные по времени движения идеальной жидкости в каждой полости маятников без отклонения свободных поверхностей Γ_k. При этом тела остаются неподвижными, т. е. маятники с полостями не покачиваются.

5.2. Собственные колебания при условиях статической устойчивости. Рассмотрим теперь в задаче (5.2) случай $\lambda \neq 0$ в предположении, что выполнены условия (3.57), (3.60) статической устойчивости по линейному приближению.

Первое уравнение (5.2) с учетом (5.7) и формулы (3.30) приводит к соотношению

$$\vec{w}_k = -P_{0,k}(\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k), \quad k = 1, 2, \tag{5.12}$$

а также связи

$$g\widetilde{V}_k C_{2k} z_{2,k} + i\lambda\widetilde{C}_{1k}\widetilde{z}_{1,k} = 0, \quad k = 1, 2, \tag{5.13}$$

$$\widetilde{C}_{1k}\widetilde{z}_{1,k} = \begin{pmatrix} \rho_k\nabla\Phi_k + \rho_k P_{h,S_k}(\omega_k \times \vec{r}_k) \\ \rho_k \int\limits_{\Omega_k} (\vec{r}_k \times \nabla\Phi_k)\, d\Omega_k + (\vec{J}_{t,k} + \vec{J}_{pr,k})\vec{\omega}_k \end{pmatrix}, \tag{5.14}$$

где уже учтены соотношения (5.12) и определения присоединенных элементов инерции (см., например, [16, с. 141–143]):

$$\begin{aligned} \vec{J}_k\vec{\omega}_k - \rho_k \int\limits_{\Omega_k} (\vec{r}_k \times P_{0,k}(\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k))\, d\Omega_k &= (\vec{J}_{t,k} + \vec{J}_{pr,k})\vec{\omega}_k - \rho_k \int\limits_{\Omega_k} (\vec{r}_k \times P_{0,k}(\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k))\, d\Omega_k = \\ = \vec{J}_{t,k}\vec{\omega}_k + \rho_k \int\limits_{\Omega_k} (\vec{r}_k \times (\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k))\, d\Omega_k &- \rho_k \int\limits_{\Omega_k} (\vec{r}_k \times P_{0,k}(\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k))\, d\Omega_k = \\ = \vec{J}_{t,k}\vec{\omega}_k + \rho_k \int\limits_{\Omega_k} (\vec{r}_k \times (I_k - P_{0,k})(\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k))\, d\Omega_k &= (\vec{J}_{t,k} + \vec{J}_{pr,k})\vec{\omega}_k. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Здесь $\vec{J}_{t,k}$ — момент инерции для k-го тела, а $\vec{J}_{pr,k}$ — присоединенный момент инерции для k-й жидкости.

Второе уравнение (5.2) с учетом (5.5), (5.6) приводит к уравнению

$$\widetilde{\gamma}_{n,k}\widetilde{z}_{1,k} = i\lambda z_{2k}, \quad k = 1, 2, \tag{5.16}$$

так как $C_2 = \mathrm{diag}(C_{21}; C_{22})$ обратим. Таким образом, при $\lambda \neq 0$ следует рассматривать систему уравнений (5.13), (5.16).

Лемма 5.2. *Операторная матрица* $\widetilde{C}_1 = \mathrm{diag}(\widetilde{C}_{1,1}; \widetilde{C}_{1,2})$ *(см.* (5.14)*) является ограниченным положительно определенным оператором, действующим в пространстве*

$$\widetilde{\mathcal{H}}_1 := (\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3) =: \widetilde{\mathcal{H}}_{1,1} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_{1,2}. \tag{5.17}$$

Доказательство. Напомним, что операторная матрица C_1 согласно лемме 3.1 является положительно определенным оператором, действующим в $\mathcal{H}_1 = (\vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_{1,1}) \oplus (\vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_{1,2})$. Однако можно непосредственно проверить, что

$$(C_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} = (\widetilde{C}_1 \widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\widetilde{\mathcal{H}}_1}, \quad z_1 = (\vec{w}_1;\ \nabla\Phi_1;\ \vec{\omega}_1;\ \vec{w}_2;\ \nabla\Phi_2;\ \vec{\omega}_2)^\tau, \tag{5.18}$$

если $\vec{w}_k$ и $\vec{\omega}_k$ связаны соотношениями (5.12). Поэтому

$$(\widetilde{C}_1 \widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\widetilde{\mathcal{H}_1}} \geqslant c^2 \|z_1\|^2_{\mathcal{H}_1} \geqslant c^2 \|\widetilde{z}_1\|^2_{\widetilde{\mathcal{H}}_1}, \quad c^2 > 0.$$

□

Замечание 5.2. Для проверки тождества (5.18) воспользуемся формулой (3.35) при связи (5.12). Тогда

$$(C_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} = \left[\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1 + (I_1 - P_{0,1})(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1)|^2 \, d\Omega_1 + \rho_{01} \int\limits_{\Omega_{01}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1|^2 \, d\Omega_{01}\right] +$$

$$\left[\rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \nabla\Phi_2 + (I_2 - P_{0,2})(\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2)|^2 \, d\Omega_1 + \rho_{02} \int\limits_{\Omega_{02}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2|^2 \, d\Omega_{02}\right]. \tag{5.19}$$

Далее, из (5.14) при $k = 1$ имеем, используя также свойство (5.15),

$$(\widetilde{C}_{1,1} \widetilde{z}_{1,1}, \widetilde{z}_{1,1})_{\widetilde{\mathcal{H}}_{1,1}} = \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2 \, d\Omega_1 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} (P_{h,S_1}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1)) \cdot \overline{\nabla\Phi_1} \, d\Omega_1 +$$

$$+\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} (\vec{r}_1 \times \nabla\Phi_1) \cdot \overline{\vec{\omega}_1} \, d\Omega_1 + ((\vec{J}_{t,1} + \vec{J}_{pr,1})\vec{\omega}_1) \cdot \overline{\vec{\omega}_1} = \rho_{01} \int\limits_{\Omega_{01}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1|^2 \, d\Omega_{01} +$$

$$+\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \left[|\nabla\Phi_1|^2 + 2\mathrm{Re}(\nabla\Phi_1 \cdot (P_{h,S_1}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1))) + ((I_1 - P_{0,1})(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1)) \cdot (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1)|^2\right] \, d\Omega_1 =$$

$$= \rho_{01} \int\limits_{\Omega_{01}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1|^2 \, d\Omega_{01} + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1 + (I_1 - P_{0,1})(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1)|^2 \, d\Omega_1,$$

т. е. первую группу слагаемых в (5.19). Аналогично проверяем

$$(\widetilde{C}_{1,2} \widetilde{z}_{1,2}, \widetilde{z}_{1,2})_{\widetilde{\mathcal{H}}_{1,2}} = \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \nabla\Phi_2 + (I_2 - P_{0,2})(\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2)|^2 \, d\Omega_2 + \rho_{02} \int\limits_{\Omega_{02}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2|^2 \, d\Omega_{02},$$

и потому тождество (5.18) имеет место.

Возвращаясь к системе уравнений (5.13), (5.16), исключим в них переменную $z_2 = (z_{2,1}; z_{2,2})^\tau$ (при $\lambda \neq 0$). Это дает уравнение

$$\widetilde{V} C_2 \widetilde{\gamma}_n \widetilde{z}_1 = \mu \widetilde{C}_1 \widetilde{z}_1, \quad \mu := \lambda^2/g, \tag{5.20}$$

$$\widetilde{V} := \mathrm{diag}(\widetilde{V}_1; \widetilde{V}_2), \quad \widetilde{\gamma}_n := \mathrm{diag}(\widetilde{\gamma}_{n,1}; \widetilde{\gamma}_{n,2}). \tag{5.21}$$

Здесь $\widetilde{V}$ и $\widetilde{\gamma}_n$, в силу леммы 3.8, — это неограниченные взаимно сопряженные операторы, а C_2 и $\widetilde{C}_1$, согласно леммам 3.7 и 5.2, — ограниченные положительно определенные операторы, так как выполнены условия (3.57), (3.60).

Из (5.20) следует, что по решению $\widetilde{z}_1$ число μ можно найти по формуле

$$\mu = \frac{(C_2 \widetilde{\gamma}_n \widetilde{z}_1, \widetilde{\gamma}_n \widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_2}}{(\widetilde{C}_1 \widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\widetilde{\mathcal{H}}_1}}, \tag{5.22}$$

где знаменатель вычисляется по формуле (5.19), а числитель — по формуле (2.20), т. е.

$$(C_2 \widetilde{\gamma}_n \widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_2} = \rho_1 \Big[\int\limits_{\Gamma_1} |\frac{\partial\Phi_1}{\partial n_1} + \theta_1((P_2 \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2 \, d\Gamma_1 - \int\limits_{\Gamma_1} |\theta_1((P_2 \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2 \, d\Gamma_1 \Big] +$$

$$+\rho_2\left[\int\limits_{\Gamma_2}|\frac{\partial\Phi_2}{\partial n_2}+\theta_2((P_2\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3})|^2\,d\Gamma_2-\int\limits_{\Gamma_2}|\theta_2((P_2\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3})|^2\,d\Gamma_2\right]+$$
$$+(m_1l_l+m_2h_1)|P_2\vec{\omega}_1|^2+m_2l_2|P_2\vec{\omega}_2|^2. \tag{5.23}$$

Введем еще в рассмотрение потенциальные поля и соответствующие потенциалы Н. Е. Жуковского $\psi_{k,j},\ j=1,2,3,\ k=1,2$ (см. [13]). Так как $\operatorname{div}(\vec{\omega}_k\times\vec{r}_k)=0$, то поле $\nabla\psi_k=(I_k-P_{0,k})(\vec{\omega}_k\times\vec{r}_k)$ находится с помощью решения задачи

$$\Delta\psi_k=0\ (\text{в }\Omega_k),\quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n_k}=(\vec{\omega}_k\times\vec{r}_k)\cdot\vec{n}_k\quad(\text{на }\partial\Omega_k). \tag{5.24}$$

Тогда

$$P_{0,k}(\vec{\omega}_k\times\vec{r}_k)=\vec{\omega}_k\times\vec{r}_k-\nabla\psi_k,\quad \nabla\psi_k=\sum_{j=1}^{3}\omega_{k,j}\nabla\psi_{k,j}, \tag{5.25}$$

$$\Delta\psi_{k,j}=0\ (\text{в }\Omega_k),\quad \frac{\partial\psi_{k,j}}{\partial n_k}=(\vec{e}_k^{\,j}\times\vec{r}_k)\cdot\vec{n}_k\ (\text{на }\partial\Omega_k),\quad j=1,2,3,\ k=1,2. \tag{5.26}$$

Решение каждой из задач (5.26) зависит лишь от формы области Ω_k, заполненной жидкостью.

С помощью потенциалов Жуковского квадратичная форма оператора $\widetilde{C}_1$ представляется в виде (см. (5.19))

$$(\widetilde{C}_1\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_1)_{\widetilde{\mathcal{H}}_1}=\rho_1\int\limits_{\Omega_1}|\nabla\Phi_1+\sum_{j=1}^{3}\omega_{1,j}\nabla\psi_{1,j}|^2\,d\Omega_1+\rho_{01}\int\limits_{\Omega_{01}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1|^2\,d\Omega_{01}+$$
$$+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\nabla\Phi_2+\sum_{j=1}^{3}\omega_{2,j}\nabla\psi_{2,j}|^2\,d\Omega_2+\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2|^2\,d\Omega_{02}, \tag{5.27}$$

поэтому соотношение (5.22) принимает форму

$$\mu=\Big\{\rho_1\left[\int\limits_{\Gamma_1}|\frac{\partial\Phi_1}{\partial n_1}+\theta_1((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3})|^2\,d\Gamma_1-\int\limits_{\Gamma_1}|\theta_1((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3})|^2\,d\Gamma_1\right]+$$
$$+\rho_2\left[\int\limits_{\Gamma_2}|\frac{\partial\Phi_2}{\partial n_2}+\theta_2((P_2\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3})|^2\,d\Gamma_2-\int\limits_{\Gamma_2}|\theta_2((P_2\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3})|^2\,d\Gamma_2\right]+$$
$$+(m_1l_l+m_2h_1)|P_2\vec{\omega}_1|^2+m_2l_2|P_2\vec{\omega}_2|^2\Big\}\ /\ \Big\{\rho_1\int\limits_{\Omega_1}|\nabla\Phi_1+\sum_{j=1}^{3}\omega_{1,j}\nabla\psi_{1,j}|^2\,d\Omega_1+$$
$$+\rho_{01}\int\limits_{\Omega_{01}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1|^2\,d\Omega_{01}+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\nabla\Phi_2+\sum_{j=1}^{3}\omega_{2,j}\nabla\psi_{2,j}|^2\,d\Omega_2+$$
$$+\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2|^2\,d\Omega_{02}\Big\}. \tag{5.28}$$

Теорема 5.1. *Задача* (5.20), (5.21) *имеет дискретный спектр* $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$, *состоящий из конечнократных положительных собственных значений* μ_j *с предельной точкой* $\mu=+\infty$. *Соответствующая им система собственных элементов* $\{\widetilde{z}_{1,j}\}_{j=1}^{\infty}$, $\widetilde{z}_{1,j}=(\nabla\Phi_{1,j};\ \vec{\omega}_{1,j};\ \nabla\Phi_{2,j};\ \vec{\omega}_{2,j})^{\tau}_{j=1}$, *образует базис в пространстве* $\widetilde{\mathcal{H}}_1=\widetilde{\mathcal{H}}_{1,1}\oplus\widetilde{\mathcal{H}}_{1,2}=(\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)\oplus\mathbb{C}^3)\oplus(\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2)\oplus\mathbb{C}^3)$, *ортогональный по формам* (5.23), (5.27).

Собственные значения и собственные элементы задачи (5.20), (5.21) *можно найти, рассматривая последовательные минимумы вариационного отношения* (5.28) *или последовательные минимумы функционала* (5.23) *при дополнительном условии, что функционал* (5.27) *равен единице. При этом для функций сравнения* Φ_k *должны иметь место соотношения*

$$\Delta\Phi_k = 0 \ (\textit{в}\ \Omega_k), \quad \frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k} = 0 \ (\textit{на}\ S_k), \quad \int\limits_{\Gamma_k} \Phi_k \, d\Gamma_k = 0, \quad k = 1, 2. \tag{5.29}$$

Для нахождения приближенных решений задачи (5.20), (5.21) *можно применить метод Ритца к функционалу*

$$F(\widetilde{z}_1) := (C_2\widetilde{\gamma}_n\widetilde{z}_1, \widetilde{\gamma}_n\widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_2} - \mu(\widetilde{C}_1\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\widetilde{\mathcal{H}}_1}, \tag{5.30}$$

и этот метод сходится.

Наконец, асимптотическое поведение собственных значений μ_j *при* $j \to \infty$ *таково*:

$$\mu_j = \left(\frac{1}{4\pi}(|\Gamma_1| + |\Gamma_2|)^{-1/2}\right) j^{1/2}[1 + o(1)]. \tag{5.31}$$

Доказательство. Заметим сначала, что совокупность элементов $\widetilde{z}_1$, для которых при условиях (5.29) конечна квадратичная форма (5.27), компактна в $\widetilde{\mathcal{H}}_1$, а так как норма, задаваемая формой (5.27), эквивалентна стандартной норме пространства $\widetilde{\mathcal{H}}_1$, то указанная совокупность элементов компактна и по форме (5.27). Поэтому по теореме С. Г. Михлина (см., например, [24]) задача (5.20), (5.21) имеет дискретный положительный спектр $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\mu_j \to +\infty$ $(j \to \infty)$, а система собственных элементов $\{\widetilde{z}_{1,j}\}_{j=1}^{\infty}$, отвечающая собственным значениям $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$, образует ортогональный базис как по форме (5.27), так и по форме (5.23). В частности, при соответствующей нормировке выполнены свойства

$$(\widetilde{C}_1\widetilde{z}_{1,j}, \widetilde{z}_{1,l})_{\widetilde{\mathcal{H}}_1} = \delta_{jl}, \quad (C_2\widetilde{\gamma}_n\widetilde{z}_{1,j}, \widetilde{\gamma}_n\widetilde{z}_{1,l})_{\mathcal{H}_2} = \mu_j\delta_{jl}. \tag{5.32}$$

Остальные утверждения теоремы также следуют из [24]. Наконец, последнее утверждение (асимптотика спектра) следует из такого рассуждения. Квадратичная форма (5.23) отличается от «невозмущенной» квадратичной формы

$$\sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Gamma_k} \left|\frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k}\right|^2 d\Gamma_k \tag{5.33}$$

тем, что (5.23) является расширением невозмущенной формы (5.33) на дополнительное конечномерное (шестимерное) пространство. Далее, аналогично, квадратичная форма (5.27) является расширением формы

$$\sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} |\nabla\Phi_k|^2 \, d\Omega_k \tag{5.34}$$

на это же дополнительное пространство. Отсюда и из общих результатов М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка (см., например, [9]) следует, что асимптотическое поведение чисел μ_j такое же, как для вариационного отношения

$$\sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Gamma_k} \left|\frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k}\right|^2 d\Gamma_k \Big/ \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} |\nabla\Phi_k|^2 \, d\Omega_k \tag{5.35}$$

при дополнительных условиях (5.29). Однако этому отношению отвечают две независимые спектральные задачи для отношений

$$\int\limits_{\Gamma_k} \left|\frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k}\right|^2 d\Gamma_k \Big/ \int\limits_{\Omega_k} |\nabla\Phi_k|^2 \, d\Omega_k, \quad k = 1, 2,$$

или, что равносильно, для отношений

$$\int\limits_{\Omega_k} |\nabla\Phi_k|^2 \, d\Omega_k \Big/ \int\limits_{\Gamma_k} |\Phi_k|^2 \, d\Gamma_k, \quad k = 1, 2,$$

при условиях (5.29).

Отсюда, а также из результатов И. Л. Вулис и М. З. Соломяка (см. [11, 12]) получаем, что для задачи (5.20), (5.21) имеет место асимптотическая формула (5.31). □

Замечание 5.3. Вариационная задача (5.28), (5.29) обобщает задачу (5.35), (5.29), которая соответствует проблеме собственных колебаний идеальных жидкостей в двух неподвижных сосудах, т. е. в полостях без маятников. При $\vec{\omega}_1 = \vec{0}$, $\vec{\omega}_2 = \vec{0}$ первая проблема переходит во вторую.

5.3. Обращение теоремы Лагранжа об устойчивости. Будем теперь считать, что условия (3.57), (3.60) статической устойчивости по линейному приближению не выполнены, и снова рассмотрим спектральную задачу (5.20), (5.21):

$$\widetilde{V} C_2 \widetilde{\gamma}_n \widetilde{z}_1 = \mu \widetilde{C}_1 \widetilde{z}_1, \quad \mu := \lambda^2/g, \quad \widetilde{z}_1 \in \widetilde{\mathcal{H}}_1, \quad \widetilde{V} = \operatorname{diag}(\widetilde{V}_1; \widetilde{V}_2), \quad \widetilde{\gamma}_n = \operatorname{diag}(\widetilde{\gamma}_{n,1}; \widetilde{\gamma}_{n,2}). \tag{5.36}$$

Здесь все операторы, кроме C_2, имеют прежние свойства, а оператор C_2, согласно лемме 3.6, при выполнении условий (3.45), а также из замечаний после ее доказательства, ограниченно обратим, причем ранг индефинитности квадратичной формы $(C_2 z_2, z_2)_{\mathcal{H}_2}$ равен $\varkappa$, $1 \leqslant \varkappa \leqslant 4$.

Отсюда следует, что при доказательстве теоремы 4.2

$$C_2 = J_\varkappa |C_2| = |C_2|^{1/2} J_\varkappa |C_2|^{1/2}, \quad J_\varkappa = J_\varkappa^{-1} = J_\varkappa^*, \quad 0 \ll |C_2| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2), \tag{5.37}$$

где $J_\varkappa$—каноническая симметрия.

Отметим еще, что в (5.36) операторы $\widetilde{\gamma}_n$ и $\widetilde{V}$ взаимно сопряжены и имеют ограниченные (и даже компактные) обратные. Учитывая эти свойства, выполним в (5.36) замену по формуле

$$|C_2|^{1/2} \widetilde{\gamma}_n \widetilde{z}_1 =: v \in \mathcal{H}_2. \tag{5.38}$$

Тогда вместо (5.36) придем к задаче

$$v = \mu J_\varkappa C v, \quad C := |C_2|^{-1/2} \widetilde{V}^{-1} \widetilde{C}_1 \widetilde{\gamma}_n^{-1} |C_2|^{-1/2}, \tag{5.39}$$

где C— компактный положительный оператор, действующий в пространстве $\mathcal{H}_2 = (L_{2,\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (L_{2,\Gamma_2} \oplus \mathbb{C}^2)$. Свойство положительности оператора C проверяется непосредственно с учетом того, что $\widetilde{C}_1 \gg 0$ (лемма 5.2) и $(\widetilde{V})^* = \widetilde{\gamma}_n$.

Теорема 5.2. *Задача* (5.36) *имеет дискретный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений* $\mu_j \in \mathbb{R}$ *с предельной точкой* $\mu = +\infty$. *При этом первые* $\varkappa$ *собственных значений отрицательны, а остальные положительны. Собственные элементы* $\{\widetilde{z}_{1,j}\}_{j=1}^{\infty}$ *задачи* (5.36) *образуют базис, ортогональный по форме* $(\widetilde{C}_1 \widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\widetilde{\mathcal{H}}}$. *При этом выполнены формулы ортогональности* (5.32)*, где теперь* $\mu_j < 0$ *при* $j \leqslant \varkappa$, $\mu_j > 0$, $j \geqslant \varkappa + 1$.

Асимптотическое поведение собственных значений μ_j *при* $j \to \infty$ *по-прежнему имеет вид* (5.31).

Доказательство. Так как в (5.39) оператор $J_\varkappa C$ является $J_\varkappa$— самосопряженным компактным положительным оператором, т. е.

$$[J_\varkappa C v, v] = (J_\varkappa (J_\varkappa C) v, v)_{\mathcal{H}_2} = (Cv, v)_{\mathcal{H}_2} > 0, \quad v \neq 0, \tag{5.40}$$

то по теореме Л. С. Понтрягина из [25], а также из [3], получаем, что задача (5.39) имеет ровно $\varkappa$ отрицательных собственных значений, а остальные положительны и (в силу компактности оператора C) образуют счетное множество конечнократных собственных значений с предельной точкой $\mu = +\infty$. Кроме того, собственные элементы задачи (5.39) образуют базис Рисса в пространстве $\mathcal{H}_2$, и этот базис является $J_\varkappa$— ортогональным:

$$(Cv_j, v_l)_{\mathcal{H}_2} = \delta_{jl}, \quad (J_\varkappa v_j, v_l)_{\mathcal{H}_2} = \mu_j \delta_{jl}. \tag{5.41}$$

Осуществляя здесь обратную замену (5.38), приходим к выводу, что справедливы последние утверждения теоремы и выполнены формулы ортогональности (5.32) с новыми свойствами для собственных значений μ_j. □

Следствием установленных фактов является утверждение, которое называют обращением теоремы Лагранжа об устойчивости.

Теорема 5.3. *Пусть выполнены условия* (3.45) *и не выполнены условия* (3.57), (3.60), *т. е. изучаемая гидромеханическая система не является статически устойчивой по линейному приближению. Тогда она является и динамически неустойчивой, т. е. имеются решения однородной начально-краевой задачи* (2.1), (2.5)–(2.12), *экспоненциально возрастающие по t при $t \to +\infty$.*

Доказательство. Оно очевидно, так как в этом случае спектральная задача (5.36) при $\varkappa \geqslant 1$ имеет отрицательные собственные значения $\mu = \lambda^2/g$ (не более четырех), и тогда числа λ являются чисто мнимыми, что с учетом (5.1) приводит к экспоненциальной неустойчивости гидромеханической системы. $\square$

Часть 2

СЛУЧАЙ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОЛОСТЯХ

6. Постановка задачи, закон баланса полной энергии

6.1. К постановке задачи. Будем теперь считать, что жидкости в полостях тел-маятников являются не идеальными, а вязкими с коэффициентом динамической вязкости μ_k, $k = 1, 2$. В этом случае уравнения движения маятников не изменяются и по-прежнему имеют вид (2.1), (2.5). Поэтому ниже будут приведены лишь линеаризованные уравнения движения вязких жидкостей в полостях, а также краевые и начальные условия.

Прежде всего, вместо (2.6), (2.7) теперь имеем уравнения движения в Ω_1 и Ω_2 в подвижных системах координат $O_k x_k^1 x_k^2 x_k^3$, $k = 1, 2$, в следующей форме:

$$\begin{aligned} &\rho_1 \left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 \right) + \nabla p_1 - \mu_1 \Delta \vec{u}_1 = \rho_1 \vec{f}_1, \ \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \ (\text{в} \ \ \Omega_1), \\ &\rho_2 \left(\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 \right) + \nabla p_2 - \mu_2 \Delta \vec{u}_2 = \rho_2 \vec{f}_2, \ \ \operatorname{div} \vec{u}_2 = 0 \ (\text{в} \ \ \Omega_2), \end{aligned} \tag{6.1}$$

учитывающей действие вязких сил в исследуемой системе. Здесь, как и ранее в части 1, $\rho_k > 0$ — плотности жидкостей, $\vec{u}_k(t, x)$ — поля относительных скоростей в каждой полости, $p_k(t, x)$ — динамические добавки к стационарным давлениям в полостях, $\vec{f}_k(t, x)$ — малые добавки к основному гравитационному полю сил, действующему «сверху вниз» с ускорением $g > 0$. Далее, $\vec{\omega}_k$ — угловые скорости тел, Δ — векторный оператор Лапласа, $\vec{r}_k$ — радиус-векторы, идущие в подвижных системах координат от O_k в заданную точку.

В процессе движения вязких жидкостей на твердых стенках S_k полостей теперь должны выполняться условия прилипания:

$$\vec{u}_k = \vec{0} \ \ (\text{на} \ \ S_k), \quad k = 1, 2. \tag{6.2}$$

Кинематические условия (2.9) по-прежнему сохраняют свой вид, а динамические условия преобразуются следующим образом. После линеаризации они записываются на Γ_k и состоят в том, что касательные напряжения на Γ_k равны нулю, а нормальное напряжение компенсируется скачком гравитационных сил, возникших при линеаризации задачи. Поэтому динамические условия принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} &\mu_k \tau_{j3}(\vec{u}_3) := \mu_k \left(\frac{\partial u_k^3}{\partial x_k^j} + \frac{\partial u_k^j}{\partial x_k^3} \right) = 0, \quad j = 1, 2, \\ &- p_k + 2\mu_k \frac{\partial u_k^3}{\partial x_k^3} = -\rho_k g (\zeta_k + (P_2 \vec{\delta}_k \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^{\,3}), \quad k = 1, 2 \ \ (\text{на} \ \ \Gamma_k), \end{aligned} \tag{6.3}$$

где

$$\tau_{jl}(\vec{u}_k) := \frac{\partial u_k^l}{\partial x_k^j} + \frac{\partial u_k^j}{\partial x_k^l}, \quad j, l = \overline{1, 3}, \quad k = 1, 2, \tag{6.4}$$

— элементы тензора деформаций в вязкой жидкости, $P_2\vec{\delta}_k$ — проекция вектора углового перемещения $\vec{\delta}_k$ на равновесную поверхность Γ_k, а ζ_k — отклонения от Γ_k границы подвижной жидкости перпендикулярно к Γ_k.

Эти функции, как и ранее, удовлетворяют условиям сохранения объема каждой жидкости в процессе малых колебаний системы, т. е. условиям (2.11). Наконец, начальные условия по-прежнему имеют вид (2.12).

Таким образом, в случае вязких жидкостей в полостях маятников следует изучать начально-краевую задачу (2.1), (2.5), (6.1)–(6.4), (2.9), (2.11), (2.12).

6.2. Закон баланса полной энергии. Как и в пункте 2.2, будем считать, что поставленная задача имеет классическое решение при $t \geqslant 0$, и выведем закон баланса полной энергии, учитывающий не только действие сил трения в шарнирах, но и действие диссипативных сил в жидкостях.

С этой целью проделаем в задаче те же преобразования, которые для случая идеальных жидкостей были осуществлены в пункте 2.2 (см. (2.13)–(2.18)). Что касается нового слагаемого в уравнениях движения (6.1), а также условий прилипания (6.2) и динамических условий (6.3), то здесь следует воспользоваться формулой Грина для векторного оператора Лапласа, которая имеет место в задачах о движении вязкой жидкости в сосуде при наличии свободной поверхности (см. [16, с. 115]). Именно, если поля $\vec{v}_k$ и $\vec{u}_k$ соленоидальные и удовлетворяют условию прилипания на твердой стенке S_k, то имеет место тождество

$$\int\limits_{\Omega_k} \vec{v}_k \cdot (-\mu_k \Delta \vec{u}_k + \nabla p_k) d\Omega_k = \mu_k E_k(\vec{v}_k, \vec{u}_k) - \int\limits_{\Gamma_k} \sum_{j=1}^{3} v_k^j (\mu_k \tau_{j3}(\vec{u}_k) - p_k \delta_{j3}) d\Gamma_k, \tag{6.5}$$

$$\mu_k E_k(\vec{v}_k, \vec{u}_k) = \frac{1}{2}\mu_k \int\limits_{\Omega_k} \Big[\sum_{j,l=1}^{3} \tau_{jl}(\vec{v}_k) \tau_{jl}(\vec{u}_k) \Big] d\Omega_k. \tag{6.6}$$

При этом квадратичный функционал

$$\mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k) \tag{6.7}$$

равен скорости диссипации энергии в вязкой жидкости, находящейся в области Ω_k.

Учитывая (6.5), получаем, что вместо (2.14), (2.16) теперь будем иметь соотношения

$$\int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot (-\mu_k \Delta \vec{u}_k + \nabla p_k) d\Omega_k = \mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k) + \frac{1}{2}\rho_k g \frac{d}{dt} \int\limits_{\Gamma_k} |\zeta_k|^2 d\Gamma_k + \rho_k g \int\limits_{\Gamma_k} ((P_2\vec{\delta}_k \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^{\,3})) \frac{\partial \zeta_k}{\partial t} \, d\Gamma_k. \tag{6.8}$$

Поэтому закон баланса полной энергии системы при наличии вязких жидкостей в полостях маятников выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\bigg\{ \Big[\rho_{0,1} \int\limits_{\Omega_{0,1}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1|^2 d\Omega_{0,1} + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_1|^2 d\Omega_1 \Big] + \\
&\qquad + \Big[\rho_{0,2} \int\limits_{\Omega_{0,2}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2|^2 d\Omega_{0,2} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2|^2 d\Omega_2 \Big] \bigg\} + \\
&\quad + \frac{g}{2}\frac{d}{dt}\bigg\{ \sum_{k=1}^{2} \rho_k \Big[\int\limits_{\Gamma_k} |\zeta_k + \theta_k((P_2\vec{\delta}_k \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^{\,3})|^2 d\Gamma_k - \int\limits_{\Gamma_k} |\theta_k((P_2\vec{\delta}_k \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^{\,3})|^2 \, d\Gamma_k \Big] + \\
&\qquad\qquad + (m_1 l_1 + m_2 h_1)|P_2\vec{\delta}_1|^2 + m_2 l_2 |P_2\vec{\delta}_2|^2 \bigg\} = \\
&= -\bigg\{ \sum_{k=1}^{2} \mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k) + \alpha_1 |\vec{\omega}_1|^2 + \alpha_2 |\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1|^2 \bigg\} + \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{f}_k \cdot \vec{u}_k \, d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2} \vec{M}_k \cdot \vec{\omega}_k.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Здесь справа по отношению к закону баланса полной энергии (2.20) для идеальных жидкостей в сосудах добавлены слагаемые, дающие скорости диссипации энергии в вязких жидкостях.

7. Операторный подход

7.1. Выбор функциональных пространств. В процессе движения вязкой жидкости в области Ω_k не только ее кинетическая и потенциальная энергии должны быть конечны, как следует из (2.20) и (6.9), но также и скорость диссипации энергии, т. е. поле скорости $\vec{u}(t,x)$ должно быть функцией переменной t с конечной $E_k(\vec{u}_k,\vec{u}_k)$ (см. (6.7), (6.6)).

Учитывая этот факт, введем в рассмотрение функциональные пространства, следующие из (3.2)–(3.5):

$$\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k) := \Big\{\vec{u}_k \in \vec{L}_2(\Omega_k):\ \operatorname{div}\vec{u}_k = 0\ (\text{в } \Omega_k),\ \ \vec{u}_k\cdot\vec{n}_k = 0\ (\text{на } S_k)\Big\},\ \ k=1,2, \tag{7.1}$$

а также пространства с конечной скоростью диссипации энергии

$$\vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k) := \Big\{\vec{u}_k \in \vec{H}^1(\Omega_k):\ \operatorname{div}\vec{u}_k = 0\ (\text{в } \Omega_k),\ \ \vec{u}_k = \vec{0}\ (\text{на } S_k)\Big\},\ \ k=1,2. \tag{7.2}$$

Как отмечено в [16, с. 114-115], подпространство $\vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k)$ пространства $\vec{H}^1(\Omega_k)$ является плотным множеством в подпространстве $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$ и имеет место неравенство Корна в следующей форме:

$$\|\vec{u}_k\|^2_{\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)} := E_k(\vec{u}_k,\vec{u}_k) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_k}\Big(\sum_{j,l=1}^{3}|\tau_{jl}(\vec{u}_k)|^2\Big)d\Omega_k \geqslant \widetilde{c}_k\|\vec{u}_k\|^2_{\vec{H}^1(\Omega_k)} \geqslant$$
$$\geqslant c_k\|\vec{u}_k\|^2_{\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)} = c_k\int\limits_{\Omega_k}|\vec{u}_k|^2 d\Omega_k,\quad c_k>0. \tag{7.3}$$

Поскольку неравенство противоположного смысла очевидно, то норма (7.3) в $\vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k)$ эквивалентна стандартной норме $\vec{H}^1(\Omega_k)$, и потому в силу теорем вложения всякое множество, ограниченное в $\vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k)$, компактно в $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$.

Из этих рассуждений следует, что пространства $\vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k)$ и $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$ образуют гильбертову пару пространств $(\vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k);\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k))$, причем оператор этой пары, рассматриваемой на области определения из $\vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k) \subset \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$ с областью значений $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$, является самосопряженным положительно определенным оператором, имеющим компактный обратный оператор, действующий в $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$.

Для удобства дальнейших преобразований обозначим этот оператор символом A_{kk} и будем считать далее, что он действует в оснащенном гильбертовом пространстве

$$\vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k) \subset \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k) \subset (\vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k))^* \tag{7.4}$$

и имеет область определения $\mathcal{D}(A_{kk}) = \vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k)$, а область значений $\mathcal{R}(A_{kk}) = (\vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k))^*$. Тогда

$$A^{1/2}_{kk}: \vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k) \to \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k),\ \ A^{1/2}_{kk}: \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k) \to (\vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k))^* \tag{7.5}$$

— ограниченные операторы, причем

$$(\vec{v}_k,\vec{u}_k)_{\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)} = E_k(\vec{v}_k,\vec{u}_k) = (A^{1/2}_{kk}\vec{v}_k, A^{1/2}_{kk}\vec{u}_k)_{\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)} = \langle\vec{v}_k, A_{kk}\vec{u}_k\rangle_{\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)}\ \ \forall\vec{v}_k,\vec{u}_k \in \vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k). \tag{7.6}$$

Здесь символом $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_0}$ обозначено значение функционала, представленного элементом на втором месте, действующим на элемент, стоящий на первом месте, если имеется оснащение $H_+ \hookrightarrow H_0 \hookrightarrow H_- = (H_+)^*$.

В этой части работы будем по-прежнему считать, что границы $\partial\Omega_k$ областей $\Omega_k \subset \mathbb{R}^3$ разбиты на липшицевы куски S_k и Γ_k, имеющие, в свою очередь, липшицевы границы ∂S_k и $\partial\Gamma_k$. В этом случае, как доказано в [19,20], имеет место следующая обобщенная формула Грина для векторного оператора Лапласа:

$$\begin{aligned} &\mu_k E_k(\vec{v}_k, \vec{u}_k) = \langle \vec{v}_k, -\mu_k \Delta \vec{u}_k + \nabla p_k \rangle_{\vec{L}_2(\Omega_k)} + \sum_{j=1}^{3} \langle \gamma_k v_k^j, \mu_k \tau_{j3}(\vec{u}_k) - p_k \delta_{j3} \rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \\ &\vec{v}_k = \sum_{j=1}^{3} v_k^j \vec{e}_k^{\,j}, \quad \vec{v}_k,\ \vec{u}_k \in \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k),\ \ \nabla p_k \in \vec{G}(\Omega_k) = \vec{G}_{0,\Gamma_k}(\Omega_k) \oplus \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k), \end{aligned} \tag{7.7}$$

где $\gamma_k \varphi := \varphi|_{\Gamma_k}\ \forall \varphi \in H^1(\Omega_k)$, а подпространства $\vec{G}_{0,\Gamma_k}(\Omega_k)$ и $\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$ определены в (3.3), (3.5).

7.2. Переход к дифференциально-операторным уравнениям в гильбертовом пространстве. Опираясь на закон баланса полной энергии (6.9) и формулу Грина (7.7), будем далее считать, что искомые поля скоростей $\vec{u}_k(t,x)$ являются функциями переменной t со значениями в $\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k) \subset \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$, а ∇p_k — функциями t со значениями в $\vec{G}_{0,\Gamma_k}(\Omega_k) \oplus \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$.

Далее, введем ортопроекторы $P_{0,\Gamma_k} : \vec{L}_2(\Omega_k) \to \vec{G}_{0,\Gamma_k}(\Omega_k)$, а также $P_{0,S_k} : \vec{L}_2(\Omega_k) \to \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$, $P_{0,\Gamma_k} + P_{0,S_k} = I_k$, $k = 1,2$, и применим к уравнениям движения (6.1) процедуру проектирования на взаимно ортогональные подпространства $\vec{G}_{0,\Gamma_k}(\Omega_k)$ и $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$, считая, что $\vec{u}_k \in \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$, а

$$\nabla p_k = \nabla \widetilde{p}_k + \nabla \varphi_k,\ \ \nabla \widetilde{p}_k \in \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k) \subset \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k),\ \ \nabla \varphi_k \in \vec{G}_{0,\Gamma_k}(\Omega_k). \tag{7.8}$$

Тогда возникает система соотношений

$$\begin{aligned} &\rho_1 \left(\frac{d\vec{u}_1}{dt} + P_{0,S_1}\Big(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 \Big) \right) + \nabla \widetilde{p}_1 - \mu_1 P_{0,S_1} \Delta \vec{u}_1 = \rho_1 P_{0,S_1} \vec{f}_1, \\ &\rho_2 \left(\frac{d\vec{u}_2}{dt} + P_{0,S_2}\Big(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 \Big) \right) + \nabla \widetilde{p}_2 - \mu_2 P_{0,S_2} \Delta \vec{u}_2 = \rho_2 P_{0,S_2} \vec{f}_2, \end{aligned} \tag{7.9}$$

$$\begin{aligned} &\rho_1 P_{0,\Gamma_1} \Big(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 \Big) + \nabla \varphi_1 - \mu_1 P_{0,\Gamma_1} \Delta \vec{u}_1 = \rho_1 P_{0,\Gamma_1} \vec{f}_1, \\ &\rho_2 P_{0,\Gamma_2} \Big(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 \Big) + \nabla \varphi_2 - \mu_2 P_{0,\Gamma_2} \Delta \vec{u}_2 = \rho_2 P_{0,\Gamma_2} \vec{f}_2, \end{aligned} \tag{7.10}$$

из которой видно, что поля $\nabla\varphi_1$ и $\nabla\varphi_2$ находятся из (7.10), если известны поля $\vec{u}_k$ и $\nabla\widetilde{p}_k$, а также угловые скорости $\vec{\omega}_k$, $k = 1,2$. Поэтому в дальнейшем будем принимать во внимание лишь уравнения (7.9), а также законы изменения кинетических моментов, видоизмененные краевые и начальные условия.

В частности, поскольку $\varphi_k = 0$ на Γ_k, то $p_k = \widetilde{p}_k$ на Γ_k. Кроме того, как показано, например, в [16, с. 115], в задаче о движении вязких несжимаемых жидкостей выполнены условия

$$\int_{\Gamma_k} \frac{\partial u_k^3}{\partial x_k^3}\, d\Gamma_k = 0,\ \ k = 1,2. \tag{7.11}$$

Эти факты позволяют переписать последние условия в (6.3) в виде

$$-\widetilde{p}_k + 2\mu_k \frac{\partial u_k^3}{\partial x_k^3} = -\rho_k g(\zeta_k + \theta_k((P_2\vec{\delta}_k \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^{\,3})), \quad k = 1,2, \tag{7.12}$$

где $\theta_k : L_2(\Gamma_k) \to L_{2,\Gamma_k}$ — ортопроекторы на подпространство $L_{2,\Gamma_k} = L_2(\Gamma_k) \ominus \{1_{\Gamma_k}\}$ (см. (3.9)).

Заметим еще, что кинематические соотношения на Γ_k (см. (3.19), (3.20)) теперь переписываются в виде

$$\frac{d\zeta_k}{dt} = \gamma_{n,k} \vec{u}_k := (\vec{u}_k \cdot \vec{n}_k)_{\Gamma_k}, \quad k = 1,2. \tag{7.13}$$

Введем далее в качестве искомых объектов наборы элементов

$$z = (z_1; z_2)^\tau,\ \ z_1 = (\vec{u}_1; \vec{\omega}_1; \vec{u}_2; \vec{\omega}_2)^\tau,\ \ z_2 = (\zeta_1; P_2\vec{\delta}_1; \zeta_2; P_2\vec{\delta}_2)^\tau, \tag{7.14}$$

и будем считать, что они являются функциями переменной t со значениями в пространстве

$$\begin{aligned} &\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2,\ \ \mathcal{H}_1 = (\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3), \\ &\mathcal{H}_2 = (L_{2,\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (L_{2,\Gamma_2} \oplus \mathbb{C}^2). \end{aligned} \tag{7.15}$$

Здесь, в отличие от построений пункта 3.3 (см. (3.28)), сумма подпространств $\vec{J}_0(\Omega_k) \oplus \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$ объединена в одно:

$$\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k) = \{\vec{u}_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \operatorname{div} \vec{u}_k = 0 \ \ (\text{в } \Omega_k), \ \ \vec{u}_k \cdot \vec{n}_k = 0 \ \ (\text{на } \partial\Omega_k)\}, \ k = 1, 2. \tag{7.16}$$

Поэтому дальнейшие построения несколько отличаются от схемы преобразований, примененной для идеальных жидкостей в пункте 3.3, однако проводятся по тому же плану.

Наша цель — получить видоизмененные уравнения движений вязких жидкостей и уравнения изменения кинетических моментов в виде дифференциального уравнения вида (3.29) с учетом тех особенностей, которые возникают в исследуемой задаче ввиду наличия вязких жидкостей в полостях.

Реализуя эту схему, рассмотрим так называемую первую вспомогательную краевую задачу, которая систематически использовалась С. Г. Крейном при изучении малых движений вязкой жидкости в открытом неподвижном сосуде (см. [16, с. 277–279]).

Это задача вида

$$\begin{aligned}
&-\mu_k P_{0,S_k} \Delta \vec{u}_k + \nabla \widetilde{p}_{k1} = \vec{f}_k, \quad \operatorname{div} \vec{u}_k = 0 \ \ (\text{в } \ \Omega_k), \\
&\vec{u}_k = \vec{0} \ \ (\text{на } \ S_k), \quad \mu_k \tau_{j3}(\vec{u}_k) = 0, \quad j = 1, 2, \\
&-\widetilde{p}_{k1} + 2\mu_k \frac{\partial u_k^3}{\partial x_k^3} = 0 \ \ (\text{на } \ \Gamma_k).
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Определение 7.1. Назовем *обобщенным решением* задачи (7.17) такую функцию $\vec{u}_k \in \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)$, для которой при любом $\vec{v}_k \in \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)$ выполнено тождество

$$\mu_k E_k(\vec{v}_k, \vec{u}_k) = (\vec{v}_k, \vec{f}_k)_{\vec{L}_2(\Omega_k)}, \tag{7.18}$$

и *слабым решением* этой задачи, если

$$\mu_k E_k(\vec{v}_k, \vec{u}_k) = \langle \vec{v}_k, \vec{f}_k \rangle_{\vec{L}_2(\Omega_k)} \quad \forall \vec{v}_k \in \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k). \tag{7.19}$$

(Заметим, что в определении обобщенного и слабого решений используется формула Грина (7.7), причем в первом слагаемом справа стоит дополнительный множитель P_{0,S_k}, который переброшен слева от сомножителя $\vec{v}_k = P_{0,S_k} \vec{v}_k$.)

Обе задачи (7.18) и (7.19) равносильны операторному уравнению

$$\mu_k A_{kk} \vec{u}_k = \vec{f}_k, \tag{7.20}$$

где A_{kk} — оператор гильбертовой пары пространств $(\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k); \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k))$. При этом для $\vec{f}_k \in \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$ задача (7.17) имеет единственное обобщенное решение

$$\vec{u}_k = (\mu_k A_{kk})^{-1} \vec{f}_k \in \mathcal{D}(A_{kk}) \subset \mathcal{D}(A_{kk}^{1/2}) = \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k), \tag{7.21}$$

а при $\vec{f}_k \in (\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k))^*$ — слабое решение, выражаемое той же формулой, однако здесь $\mathcal{D}(A_{kk}) = \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)$, а $\mathcal{R}(A_{kk}) = (\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k))^*$.

Опираясь на приведенные факты, будем разыскивать решения краевых задач (7.9), (7.12), (6.3) (первые два условия), (6.2) в виде суммы решений двух вспомогательных задач, первая из которых имеет вид (7.17) с заменой $\vec{f}_k$ на

$$\begin{aligned}
\widehat{\vec{f}}_k &= \rho_k P_{0,S_k} \vec{f}_k - \rho_k \Big(\frac{d\vec{u}_k}{dt} + P_{0,S_k} \Big(\frac{d\vec{\omega}_k}{dt} \times \vec{r}_k \Big) \Big) - \nabla \widetilde{p}_{k2}, \\
\nabla \widetilde{p}_k &= \nabla \widetilde{p}_{k1} + \nabla \widetilde{p}_{k2}, \quad \nabla \widetilde{p}_{ki} \in \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k), \quad i = 1, 2,
\end{aligned} \tag{7.22}$$

а для потенциалов $\widetilde{p}_{k2}$ возникает скалярная задача

$$\begin{aligned}
&\Delta \widetilde{p}_{k2} = 0 \ \ (\text{в } \ \Omega_k), \quad \frac{\partial \widetilde{p}_{k2}}{\partial n_k} = 0 \ \ (\text{на } \ S_k), \\
&\widetilde{p}_{k2} = \rho_k g(\zeta_k + \theta_k(((P_2 \vec{\delta}_k) \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^{\,3})) =: \psi_k \ \ (\text{на } \ \Gamma_k).
\end{aligned} \tag{7.23}$$

Тогда решение задачи (7.22) имеет вид (см. (7.21))

$$\vec{u}_k = (\mu_k A_{kk})^{-1} \widehat{\vec{f}}_k, \tag{7.24}$$

а для задачи (7.23) получаем (см. (3.21)–(3.24))

$$\nabla\widetilde{p}_{k2} = V_k\psi_k, \quad V_k \in \mathcal{L}(H^{1/2}_{\Gamma_k}; \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)). \tag{7.25}$$

Из (7.24), (7.25) и обозначений для $\widehat{\vec{f}}_k$ и ψ_k приходим к следующим дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$\rho_k\Big(\frac{d\vec{u}_k}{dt} + P_{0,S_k}\Big(\frac{d\vec{\omega}_k}{dt}\times\vec{r}_k\Big)\Big) + \mu_k A_{kk}\vec{u}_k + \rho_k g V_k(\zeta_k + \theta_k(((P_2\vec{\delta}_k)\times\vec{r}_k)\cdot\vec{e}^{\,3}_k)) = \rho_k P_{0,S_k}\vec{f}_k \tag{7.26}$$

в пространствах $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$, $k=1,2$.

Заметим теперь, что уравнения изменения кинетических моментов (уравнения движения маятников), как уже упоминалось, для случая вязких жидкостей в полостях имеют тот же вид, что и для идеальных, т. е. имеют место соотношения (2.1), (2.5). Таким образом, возникает задача Коши на базе уравнений (7.26), (2.1), (2.5), которую в векторно-матричной форме можно переписать в виде одного дифференциального уравнения первого порядка, близкого к (3.29):

$$C_1\frac{dz_1}{dt} + A_1z_1 + gB_{12}z_2 = f_1(t), \quad z_1(0) = z_1^0, \tag{7.27}$$

в пространстве $\mathcal{H}_1$ (см. (7.15)).

Здесь, в отличие от (3.30), операторная матрица C_1 имеет размер 4×4 и действует по закону

$$C_1z_1 = \begin{pmatrix} \rho_1\vec{u}_1 + \rho_1P_{0,S_1}(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1) \\ \rho_1\int\limits_{\Omega_1}(\vec{r}_1\times\vec{u}_1)\,d\Omega_1 + \vec{J}_1\vec{\omega}_1 + \int\limits_{G_1}(\vec{h}_1\times(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1 + \vec{\omega}_2\times\vec{r}_2 + \vec{u}_2))\,dm_1 \\ \rho_2\vec{u}_2 + \rho_2P_{0,S_2}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1 + \vec{\omega}_2\times\vec{r}_2) \\ \rho_2\int\limits_{\Omega_2}(\vec{r}_2\times\vec{u}_2)\,d\Omega_2 + \vec{J}_2\vec{\omega}_2 + \int\limits_{G_2}(\vec{r}_2\times(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1))\,dm_2 \end{pmatrix}, \tag{7.28}$$

где $\vec{J}_k$ — момент инерции k-го тела с жидкостью.

Далее, оператор A_1 (оператор диссипации системы) теперь имеет вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1+\alpha_2 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(A_1) = (\mathcal{D}(A_{11})\oplus\mathbb{C}^3)\oplus(\mathcal{D}(A_{22})\oplus\mathbb{C}^3), \tag{7.29}$$

а оператор B_{12} действует по закону (сравните с (5.4), (3.33))

$$B_{12}z_2 = \begin{pmatrix} \rho_1V_1\zeta_1 + \rho_1V_1(\theta_1(((P_2\vec{\delta}_1)\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}^{\,3}_1)) \\ -\rho_1\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}^{\,3}_1\times\vec{r}_1)\zeta_1\,d\Gamma_1 + (m_1l_1 + m_2h_1)P_2\vec{\delta}_1 \\ \rho_2V_2\zeta_2 + \rho_2V_2(\theta_2((P_2\vec{\delta}_2)\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}^{\,3}_2) \\ -\rho_2\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{e}^{\,3}_2\times\vec{r}_2)\zeta_2\,d\Gamma_2 + m_2l_2P_2\vec{\delta}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(B_{12}) = (H^{1/2}_{\Gamma_1})\oplus\mathbb{C}^2)\oplus(H^{1/2}_{\Gamma_2})\oplus\mathbb{C}^2). \tag{7.30}$$

Проведем теперь преобразование кинематических условий (2.9) по той же схеме, которая соответствовала переходу от (3.38) к (3.39): достаточно в (3.39) заменить $\gamma_{n,k}\nabla\Phi_k$ на $\gamma_{n,k}\vec{u}_k$. Тогда возникнет соотношение вида (3.40), а именно:

$$gC_2\frac{dz_2}{dt} + gB_{21}z_1 = 0, \quad z_2(0) = z_2^0, \tag{7.31}$$

где C_2 определено в (3.41):

$$C_2z_2 = \begin{pmatrix} \rho_1\zeta_1 + \rho_1\theta_1(((P_2\vec{\delta}_1)\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}^{\,3}_1) \\ -\rho_1\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}^{\,3}_1\times\vec{r}_1)\zeta_1\,d\Gamma_1 + (m_1l_1 + m_2h_1)P_2\vec{\delta}_1 \\ \rho_2\zeta_2 + \rho_2\theta_2(((P_2\vec{\delta}_2)\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}^{\,3}_2) \\ -\rho_2\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{e}^{\,3}_2\times\vec{r}_2)\zeta_2\,d\Gamma_2 + m_2l_2P_2\vec{\delta}_2 \end{pmatrix}, \tag{7.32}$$

$$B_{21}z_1 = \begin{pmatrix} -\rho_1\gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \rho_1\theta_1(((P_2\vec{\omega}_1)\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3}) \\ \rho_1\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_1)\gamma_{n,1}\vec{u}_1\,d\Gamma_1 - (m_1l_1+m_2h_1)P_2\vec{\omega}_1 \\ -\rho_2\gamma_{n,2}\vec{u}_2 - \rho_2\theta_2(((P_2\vec{\omega}_2)\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3}) \\ \rho_2\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_2)\gamma_{n,2}\vec{u}_2\,d\Gamma_2 - m_2l_2P_2\vec{\omega}_2 \end{pmatrix}. \tag{7.33}$$

Итогом проведенных построений является следующее утверждение.

Теорема 7.1. *Исходная задача о малых движениях двух сочлененных маятников с полостями, частично заполненными вязкими жидкостями, равносильна, после отделения тривиальных соотношений* (7.10), (2.9) (*для* δ_k^3), *задаче Коши*

$$C\frac{dz}{dt} + Az + gBz = f(t), \quad z(0) = z^0, \quad f(t) := (f_1(t);0)^\tau, \tag{7.34}$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ (*см.* (7.15)), *где*

$$C = \operatorname{diag}(C_1; gC_2), \quad A = \operatorname{diag}(A_1; 0), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B_{21}) \oplus \mathcal{D}(B_{12}), \tag{7.35}$$

а операторные матрицы C_1, C_2, A_1, B_{12} *и* B_{21} *определены в* (7.28), (7.32), (7.29), (7.30) *и* (7.33) *соответственно.*

7.3. О свойствах матричных операторных коэффициентов. Приведем теперь свойства и физический смысл операторных коэффициентов (7.35), опираясь на соответствующие построения и леммы из пунктов 3.3-3.4.

Лемма 7.1. *Операторная матрица* C_1 *из* (7.28) *является ограниченным и положительно определенным оператором, действующим в* $\mathcal{H}_1$. *Квадратичная форма* $(C_1z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1}$ *равна удвоенной кинетической энергии гидромеханической системы, т. е.* C_1 *является оператором кинетической энергии.*

Доказательство. Оно проводится по схеме, изложенной в лемме 3.1. В частности, устанавливается, что

$$(C_1z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} = \Big[\rho_1\int\limits_{\Omega_1}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_1|^2d\Omega_1 + \rho_{01}\int\limits_{\Omega_{01}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1|^2d\Omega_{01}\Big] +$$
$$+\Big[\rho_2\int\limits_{\Omega_2}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2+\vec{u}_2|^2d\Omega_2 + \rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2|^2d\Omega_{02}\Big],$$

т. е. правая часть равна удвоенной кинетической энергии системы (см. (2.20)). Отсюда и следует утверждение леммы. □

Лемма 7.2. *Оператор* $C_2 : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ *есть оператор потенциальной энергии системы, он ограничен и самосопряжен. Если выполнены условия* (3.45), *то соотношения* (2.9) *и* (7.31) *эквивалентны. Если выполнены условия* (3.56), (3.59), *то оператор* C_2 *неотрицателен, а если выполнены условия* (3.57), (3.60), *то* C_2 *положительно определен.*

Доказательство. Оно непосредственно следует из лемм 3.4–3.6. □

Лемма 7.3. *Оператор* A_1, *заданный на области определения*

$$\mathcal{D}(A_1) = (\mathcal{D}(A_{11}) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\mathcal{D}(A_{22}) \oplus \mathbb{C}^3), \tag{7.36}$$

плотной в $\mathcal{H}_1$, *является неограниченным положительно определенным оператором с положительным компактным обратным оператором* A_1^{-1}. *Его квадратичная форма равна мощности диссипативных сил* (*трение в шарнирах и в слоях вязкой жидкости*), *т. е.* A_1 *является оператором диссипации в системе.*

Доказательство. Используя непосредственный подсчет и тождество (3.36) из леммы 3.2 (там A_1 учитывает лишь трение в шарнирах), убеждаемся, что для A_1 из (7.29)

$$(A_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} = \sum_{k=1}^{2} \mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k) + \alpha_1 |\vec{\omega}_1|^2 + \alpha_2 |\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1|^2, \tag{7.37}$$

т. е. правая часть есть мощность диссипативных сил (см. (6.9)). Отсюда непосредственно получаем, что A_1 положительно определен. Кроме того, отсюда следует также, что всякое множество, ограниченное в энергетическом пространстве этого оператора, т. е. в пространстве

$$\mathcal{D}(A_1^{1/2}) = (\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3), \tag{7.38}$$

компактно в $\mathcal{H}_1 = (\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\vec{J}^1_{0,S_2}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3)$, и потому A_1^{-1} — компактный оператор. □

Для уточнения связи операторов B_{12} и B_{21} из (7.30), (7.33) предварительно докажем одно вспомогательное утверждение, связанное с расширением оператора нормального следа $\gamma_{n,k}$ на границах Γ_k, $k = 1, 2$.

Будем считать, что $\gamma_{n,k}$ задан не на плотном подмножестве (3.67) пространства $\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$, а на всем пространстве

$$\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k) = \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k) \oplus \vec{J}_0(\Omega_k). \tag{7.39}$$

Именно, на $\vec{J}_0(\Omega_k)$, по определению этого подпространства (см. (3.2)–(3.5)), для любого $\vec{w}_k \in \vec{J}_0(\Omega_k)$ нормальный след, т. е. $\vec{w}_k \cdot \vec{n}_k$ на Γ_k, равен нулю. Далее, так как любой $\vec{u}_k$ представим в виде $\vec{u}_k = \vec{w}_k + \nabla\Phi_k$, то тогда $\gamma_{n,k}\vec{u}_k = \gamma_{n,k}\nabla\Phi_k$, и потому по лемме 3.7 этот след принадлежит пространству $\widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_k}$, сопряженному к $H^{1/2}_{\Gamma_k}$.

Напомним теперь, что оператор V_k, дающий решение вспомогательной задачи Зарембы (3.21), согласно (3.24), ограниченно действует из $H^{1/2}_{\Gamma_k}$ на $\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k) \subset \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$. Поэтому можно формально считать, что область его значений есть $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$. Эти рассуждения показывают, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 7.4. *Операторы*

$$V_k : \mathcal{D}(V_k) = H^{1/2}_{\Gamma_k} \subset L_{2,\Gamma_k} \to \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k) \tag{7.40}$$

и

$$\gamma_{n,k} : \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k) \to \widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_k} \supset L_{2,\Gamma_k} \tag{7.41}$$

взаимно сопряжены, т. е. имеет место тождество

$$(V_k\zeta_k, \vec{u}_k)_{\vec{L}_2(\Omega_k)} = \langle \zeta_k, \gamma_{n,k}\vec{u}_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)} \ \ \forall \zeta_k \in H^{1/2}_{\Gamma_k}, \ \ \forall \vec{u}_k \in \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k). \tag{7.42}$$

Если

$$\vec{u}_k = \vec{w}_k + \nabla\Phi_k, \ \ \vec{w}_k \in \vec{J}_0(\Omega_k), \ \ \nabla\Phi_k \in \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k), \ \ \gamma_{n,k}\nabla\Phi_k = \frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k} \in L_{2,\Gamma_k}, \tag{7.43}$$

то вместо (7.42) *имеем*

$$(V_k\zeta_k, \vec{u}_k)_{\vec{L}_2(\Omega_k)} = (\zeta_k, \gamma_{n,k}\vec{u}_k)_{L_2(\Gamma_k)}. \tag{7.44}$$

Доказательство. Утверждения леммы следуют из проведенных выше рассуждений и тождеств (3.69), (3.70), если заметить, что в этих тождествах

$$(n_k, \Phi_k)_{\check{H}^1_{\Gamma_k}(\Omega_k)} = \int_{\Omega_k} \nabla\eta_k \cdot \overline{\nabla\Phi}_k \, d\Omega_k = (\nabla\eta_k, \nabla\Phi_k)_{\vec{L}_2(\Omega_k)}.$$

□

Следствием леммы 7.4 является такое утверждение.

Лемма 7.5. *Операторы* B_{12} *и* B_{21}, *заданные формулами* (7.30) *и* (7.33) *на областях определения*

$$\mathcal{D}(B_{12}) = (H^{1/2}_{\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (H^{1/2}_{\Gamma_2} \oplus \mathbb{C}^2), \tag{7.45}$$

$$\mathcal{D}(B_{21}) = (\mathcal{D}(\gamma_{n,1}) \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (\mathcal{D}(\gamma_{n,2}) \oplus \mathbb{C}^2), \tag{7.46}$$

являются кососамосопряженными:

$$(B_{12}z_2, z_1)_{\mathcal{H}_1} = -(z_2, B_{21}z_1)_{\mathcal{H}_2} \ \ \forall z_1 \in \mathcal{D}(B_{21}), \ \ \forall z_2 \in \mathcal{D}(B_{12}). \tag{7.47}$$

Доказательство. Оно проводится по тому же плану, что и в лемме 3.9, однако на основе формул (7.30), (7.33) и с учетом утверждений леммы 7.4. □

Замечание 7.1. Если $\vec{u}_k \in \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)$, то $\gamma_{n,k}\vec{u}_k \in H^{1/2}_{\Gamma_k} = \mathcal{D}(V_k)$ и потому для неположительного самосопряженного оператора $B_{12}B_{21} = -(B_{21})^*B_{21}$ имеем

$$\mathcal{D}(B^*_{12}B_{21}) = (\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (\vec{J}^1_{0,S_2}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^2). \tag{7.48}$$

8. О разрешимости начально-краевой задачи о малых движениях сочлененных маятников с полостями, частично заполненными вязкой жидкостью

8.1. О разрешимости задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения. Опираясь на установленные факты, исследуем задачу Коши (7.34)-(7.35) и докажем теорему о ее разрешимости на произвольном отрезке времени $[0, T]$ сразу как для случая статической устойчивости системы по линейному приближению (определение 3.1), так и при отсутствии такой устойчивости.

Определение 8.1. Будем говорить, что задача (7.34)-(7.35) имеет *сильное решение* $z(t)$ на отрезке $[0, T]$, если выполнены следующие условия.

1°. Функция

$$\begin{gathered} z(t) \in C([0,T]); \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)) \cap C^1([0,T]; \mathcal{H}), \\ \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_1) \oplus \mathcal{H}_2, \ \ \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B_{21}) \oplus \mathcal{D}(B_{12}). \end{gathered} \tag{8.1}$$

2°. При любом $t \in [0, T]$ выполнено уравнение (7.34), где все слагаемые являются элементами из $C([0, T]; \mathcal{H})$.

3°. Выполнено начальное условие (7.34).

Замечание 8.1. Из этого определения следует, что необходимыми условиями сильной разрешимости задачи (7.34)-(7.35) являются условия

$$f(t) \in C([0,T]; \mathcal{H}), \ \ z^0 \in \mathcal{D}(A). \tag{8.2}$$

Теорема 8.1. *Пусть в задаче* (7.34)-(7.35) *выполнены условия*

$$f(t) = (f_1(t); 0)^\tau \in C^\beta([0,T]; \mathcal{H}) \ \ (0 < \beta < 1), \qquad z^0 = (z^0_1; z^0_2), \ \ z^0_1 \in \mathcal{D}(A_1), \ \ z^0_2 \in \mathcal{D}(B_{12}). \tag{8.3}$$

Тогда эта задача имеет единственное сильное (*в смысле определения* 8.1) *решение на отрезке* $[0, T]$.

Доказательство. Перепишем задачу (7.34)-(7.35) снова в виде системы двух уравнений (7.27) и (7.31):

$$C_1 \frac{dz_1}{dt} + A_1 z_1 + gB_{12}z_2 = f_1(t), \quad z_1(0) = z^0_1, \tag{8.4}$$

$$gC_2 \frac{dz_2}{dt} + gB_{21}z_1 = 0, \quad z_2(0) = z^0_2. \tag{8.5}$$

Так как выполнены условия (3.45), то согласно лемме 3.5 уравнение (8.5) равносильно соотношению

$$\frac{dz_2}{dt} = \widehat{\gamma}_n z_1 := (\gamma_{n,1}\vec{u}_1; P_2\vec{\omega}_1; \gamma_{n,2}\vec{u}_2; P_2\vec{\omega}_2)^\tau, \tag{8.6}$$

$$\mathcal{D}(\widehat{\gamma}_n) := (\mathcal{D}(\gamma_{n,1}) \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (\mathcal{D}(\gamma_{n,2}) \oplus \mathbb{C}^2) = \mathcal{D}(B_{21}). \tag{8.7}$$

Отсюда получаем, что

$$z_2(t) = z_2^0 + \int\limits_0^t (\widehat{\gamma}_n z_1)(s)\,ds. \tag{8.8}$$

Подставляя это соотношение в (8.4), приходим к следующему интегро-дифференциальному уравнению Вольтерра первого порядка в пространстве $\mathcal{H}_1$:

$$C_1 \frac{dz_1}{dt} + A_1 z_1 + g \int\limits_0^t (B_{12}\widehat{\gamma}_n) z_1(s)\,ds = f_1(t) - gB_{12}z_2^0, \quad z_1(0) = z_1^0. \tag{8.9}$$

Эта задача, в свою очередь, равносильна задаче

$$\frac{dz_1}{dt} + C_1^{-1}A_1 z_1 + gC_1^{-1} \int\limits_0^t (B_{12}\widehat{\gamma}_n) z_1(s)\,ds = C_1^{-1}(f_1(t) - gB_{12}z_2^0), \quad z_1(0) = z_1^0, \tag{8.10}$$

поскольку C_1 — ограниченный положительно определенный оператор, действующий в $\mathcal{H}_1$ (лемма 3.1).

Введем в $\mathcal{H}_1$ новое скалярное произведение

$$[z_1, \eta_1] := (C_1 z_1, \eta_1)_{\mathcal{H}_1}, \tag{8.11}$$

порождающее эквивалентную норму, и рассмотрим задачу (8.10) в этом пространстве, которое обозначим через $\mathcal{H}_{C_1}$. Тогда $C_1^{-1}A_1$ — самосопряженный положительно определенный оператор, действующий в $\mathcal{H}_{C_1}$ и заданный на области определения

$$\mathcal{D}(C_1^{-1}A_1) = \mathcal{D}(A_1). \tag{8.12}$$

Отсюда приходим к выводу, что оператор $-C_1^{-1}A_1$ является генератором аналитической сжимающей полугруппы операторов, действующей в $\mathcal{H}_{C_1}$.

Отметим теперь еще одно важное обстоятельство: в задаче (8.10) имеет место соотношение

$$\mathcal{D}(A_1) \subset \mathcal{D}(B_{12}\widehat{\gamma}_n). \tag{8.13}$$

В самом деле, в силу (8.7), (7.48) и (7.41) получаем, что

$$\mathcal{D}(B_{12}\widehat{\gamma}_n) = \mathcal{D}(B_{12}B_{21}) = \mathcal{D}(A_1^{1/2}) \supset \mathcal{D}(A_1). \tag{8.14}$$

Далее, если согласно условиям (8.3) $z_2^0 \in \mathcal{D}(B_{12})$, то справа в (8.10) $B_{12}z_2^0 \in \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_{C_1}$, а также $f_1(t) \in C^\beta([0,T];\mathcal{H}_1)$, и тогда правая часть в (8.10) принадлежит $C^\beta([0,T];\mathcal{H}_{C_1})$. Поэтому из данного факта и (8.14) по теореме о разрешимости задачи (8.10) в пространстве $\mathcal{H}_{C_1}$ (см., например, [18, теорема 1.3.4, а также теорема 1.3.2]) получаем, что задача (8.10) имеет сильное решение $z_1(t)$ на отрезке $[0,T]$.

Для этого решения выполнено также уравнение (8.9), где все слагаемые являются непрерывными функциями $t \in [0,T]$ со значениями в $\mathcal{H}_1$. Если теперь ввести функцию $z_2(t)$ по формуле (8.8), то получаем, что выполнены соотношения (8.6), (8.7), а потому и (8.5). Значит, задача (7.34)-(7.35) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$.

□

8.2. О разрешимости начально-краевой задачи о малых движениях гидромеханической системы с вязкой жидкостью. Опираясь на теорему 8.1, докажем утверждение о корректной разрешимости исходной начально-краевой задачи (см. (2.1), (2.5), (6.1)–(6.4), (2.9), (2.11), (2.12)).

Теорема 8.2. *Пусть выполнены условия* 8.1, *т. е.*

$$f_1(t) := (\rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1; \vec{M}_1(t); \rho_2 P_{0,S_2}\vec{f}_2; \vec{M}_2(t))^\tau \in C^\beta([0,T];\mathcal{H}_1), \quad 0 < \beta \leqslant 1, \tag{8.15}$$

$$\begin{aligned} z_1^0 = (\vec{u}_1^0; \vec{\omega}_1^0; \vec{u}_2^0; \vec{\omega}_2^0)^\tau \in \mathcal{D}(A_1) = (\mathcal{D}(A_{11}) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\mathcal{D}(A_{22}) \oplus \mathbb{C}^3) \subset \mathcal{D}(A_1^{1/2}) = \\ = (\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\vec{J}^1_{0,S_2}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3), \end{aligned} \tag{8.16}$$

$$z_2^0 = (\zeta_1^0; P_2\vec{\delta}_1^0; \zeta_2^0; P_2\vec{\delta}_2^0)^\tau \in \mathcal{D}(B_{12}) = (H^{1/2}_{\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (H^{1/2}_{\Gamma_2} \oplus \mathbb{C}^2). \tag{8.17}$$

Тогда исходная начально-краевая задача (с вязкой жидкостью) имеет единственное решение на отрезке $[0,T]$, которое обладает следующими свойствами.

1°. *Функции*

$$z_1(t) = (\vec{u}_1(t,x); \vec{\omega}_1(t); \vec{u}_2(t,x); \vec{\omega}_2(t))^\tau \in$$
$$C^1([0,T]; (\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3)) \cap C([0,T]; (\mathcal{D}(A_{11}) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\mathcal{D}(A_{22}) \oplus \mathbb{C}^3)), \quad (8.18)$$

$$z_2(t) = (\zeta_1(t,x); P_2\vec{\delta}_1(t); \zeta_2(t,x); P_2\vec{\delta}_2(t))^\tau \in$$
$$C^1([0,T]; (L_{2,\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (L_{2,\Gamma_2} \oplus \mathbb{C}^2)) \cap C([0,T]; (H^{1/2}_{\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (H^{1/2}_{\Gamma_2} \oplus \mathbb{C}^2)). \quad (8.19)$$

2°. *При любом $t \in [0,T]$ выполнены уравнения* (7.26) *движения двух жидкостей в полостях, где все слагаемые являются элементами $C([0,T]; \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k))$, $k = 1,2$.*

3°. *При любом $t \in [0,T]$ выполнены уравнения* (2.1) *и* (2.5) *движения маятников, где все слагаемые являются элементами из $C([0,T]; \mathbb{C}^3)$.*

4°. *Выполнены при любом $t \in [0,T]$ кинематические условия* (7.13), *где слагаемые — элементы из $C([0,T]; H^{1/2}_{\Gamma_k})$, $k = 1,2$, а также кинематические условия* (2.9) *для угловых скоростей и угловых перемещений, где все слагаемые — элементы из $C([0,T]; \mathbb{C}^3)$.*

5°. *Выполнены начальные условия исходной задачи* (*см.* (2.12)).

Доказательство. Так как выполнены условия теоремы 8.1, то задача (7.34)-(7.35), согласно этой теореме, имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. Это означает, что существуют единственные функции $z_1(t)$, $z_2(t)$, $t \in [0,T]$, обладающие свойствами (8.18) и (8.19), для которых выполнены уравнения (8.4) и (8.5), где все слагаемые — элементы из $C([0,T]; \mathcal{H}_k)$, $k = 1,2$. В частности, из (8.4) следует, что выполнены уравнения (7.26), где все слагаемые — элементы из $C([0,T]; \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k))$. Другая группа уравнений (8.4) дает соотношения (2.1) и (2.5), где все слагаемые — элементы из $C([0,T]; \mathbb{C}^3)$.

Далее, в силу условий (3.45) уравнение (8.5) равносильно соотношению (8.6), откуда следуют свойства (8.19). В частности, $d\zeta_k/dt = \gamma_{n,k}\vec{u}_k \in C([0,T]; H^{1/2}_{\Gamma_k})$, $k = 1,2$, поскольку $\vec{u}_k \in C([0,T]; \mathcal{D}(A_{kk})) \subset C([0,T]; \mathcal{D}(A^{1/2}_{kk})) = C([0,T]; \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k))$. Из (8.6), (8.7) следует также, что $d(P_2\vec{\delta}_k)/dt = P_2\vec{\omega}_k \in C^1([0,T]; \mathbb{C}^2)$, а из тривиальной связи (см. (2.9)) $d\delta^3_k/dt = \omega^3_k \in C^1([0,T]; \mathbb{C})$.

Наконец, для сильного решения (7.34)-(7.35) выполнены начальные условия, если в (7.34) начальные данные принадлежат $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$, т. е. справедливы соотношения (8.16), (8.17).

$\square$

Замечание 8.2. Из доказанных свойств решений задачи следует также, что существуют поля давлений $\widetilde{p}_{k,2}$, являющиеся решениями вспомогательной задачи (7.23) и обладающие свойствами

$$\nabla\widetilde{p}_{k,2} \in C([0,T]; \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)), \quad k = 1,2, \quad (8.20)$$

поскольку функция $\psi_k \in C([0,T]; H^{1/2}_{\Gamma_k})$.

Установленные в теореме 8.2 свойства решений исходной задачи характерны для обобщенных решений задач подобного рода, рассматриваемых в областях с липшицевой границей $\partial\Omega_k$.

Замечание 8.3. Если $\partial\Omega_k$ почти гладкая (см. [2]), т. е. состоит из гладких кусков с гладкими $\partial\Gamma_k$ и ненулевыми внутренними и внешними углами между Γ_k и S_k, то решение может обладать свойствами

$$\vec{u}_k \in C([0,T]; \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k) \cap \vec{H}^2(\Omega_k)), \quad k = 1,2. \quad (8.21)$$

В этом случае в первой вспомогательной задаче (7.17) $\nabla\widetilde{p}_{k,1} \in \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$, так как

$$\nabla\widetilde{p}_{k,1} = 0 \ \ (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial\widetilde{p}_{k,1}}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S_k), \quad \widetilde{p}_{k,1} = 2\mu_k\frac{\partial u^3_k}{\partial x^3_k} \in H^{1/2}_{\Gamma_k}. \quad (8.22)$$

При этом из (7.26) следует, что справедливы уравнения движения жидкостей в форме (7.8)–(7.10) с $\nabla\widetilde{p}_k = \nabla\widetilde{p}_{k,1} + \nabla\widetilde{p}_{k,2}$, а потому и в искомой форме (6.1), где все слагаемые — элементы из $C([0,T];\vec{L}_2(\Omega_k))$. Тогда касательные напряжения на Γ_k (см. (6.3)) являются элементами из $C([0,T];H^{1/2}(\Gamma_k))$, а нормальные напряжения — из $C([0,T];H^{1/2}_{\Gamma_k})$.

9. Проблема нормальных колебаний

9.1. Постановка задачи. Случай нулевого собственного значения. Рассмотрим решения однородной задачи (7.34)-(7.35), т. е. задачи (8.4), (8.5), зависящие от t по закону

$$z_k(t) = \exp(-\lambda t)z_k, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad k = 1,2, \tag{9.1}$$

где λ — комплексный декремент затухания, а $z_k \in \mathcal{H}_k$ — амплитудный элемент. Движения гидромеханической системы вида (9.1) называют нормальными свободными колебаниями.

Из (8.4), (8.5) для амплитудных элементов z_k приходим к спектральной проблеме

$$A_1z_1 + gB_{12}z_2 = \lambda C_1z_1, \quad B_{21}z_1 = \lambda C_2z_2. \tag{9.2}$$

Рассмотрим сначала вопрос о том, имеет ли задача (9.2) нулевое собственное значение. Полагая в (9.2) $\lambda = 0$, будем иметь систему уравнений

$$A_1z_1 + gB_{12}z_2 = 0, \quad B_{21}z_1 = 0. \tag{9.3}$$

Отсюда получаем, что

$$(A_1z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} + (B_{12}z_2, z_1)_{\mathcal{H}_1} = \|A_1^{1/2}z_1\|^2_{\mathcal{H}_1} - g(z_2, B_{21}z_1)_{\mathcal{H}_2} = \|A_1^{1/2}z_1\|^2_{\mathcal{H}_1} = 0,$$

поскольку $B_{12}^* = -B_{21}$ (см. (7.47)). Значит, $z_1 = 0$.

Далее, так как

$$\begin{aligned} &B_{12} = \operatorname{diag}(B_{12,1}; B_{12,2}), \quad C_2 = \operatorname{diag}(C_{2,1}; C_{2,2}), \\ &B_{12,k} = \widetilde{V}_kC_{2,k}, \quad \widetilde{V}_k := \operatorname{diag}(V_k; I_k), \end{aligned} \tag{9.4}$$

см. (7.30), (7.32), и операторы $C_{2,k}$ и $\widetilde{V}_k$ обратимы (см. (3.21)–(3.25)) и лемму 3.5), то оператор B_{12} обратим, и из первого условия (9.3), которое теперь имеет вид $B_{12}z_2 = 0$, следует, что $z_2 = 0$. Таким образом, при $\lambda = 0$ задача (9.2) имеет лишь тривиальное решение $z = (z_1; z_2)^\tau = 0$.

Заметим теперь, что второе соотношение (2.9) для нормальных движений системы приводит к связи

$$-\lambda\delta_k^3 = \omega_k^3, \quad k = 1,2. \tag{9.5}$$

откуда при $\lambda = 0$ следует ввиду свойства $\omega_k^3 = 0$, что $\delta_k^3 = 0$ — произвольный элемент из $\mathbb{C}$, $k = 1,2$.

Итогом проведенных рассуждений является следующее утверждение.

Лемма 9.1. *Собственному значению $\lambda = 0$ отвечает новое состояние покоя гидромеханической системы, которое получается из исходного состояния покоя поворотом маятников на произвольные углы $\delta_1^3\vec{e}_1^{\,3}$ и $\delta_2^3\vec{e}_2^{\,3}$ соответственно.*

9.2. Нормальные движения, отличные от состояния покоя. Переход к операторному пучку С. Г. Крейна. Рассмотрим теперь в задаче (9.2) вариант, когда $\lambda \neq 0$. Так как оператор C_2 обратим, то из второго уравнения (9.2) получаем, что $z_2 = \lambda^{-1}C_2^{-1}B_{21}z_1$. Подставляя z_2 в первое уравнение (9.2), имеем спектральную задачу

$$A_1z_1 = \lambda C_1z_1 + g\lambda^{-1}B_{21}^*C_2^{-1}B_{21}z_1, \tag{9.6}$$

где уже учтено, что $B_{12} = -B_{21}^*$.

Осуществляя еще в (9.6) замену

$$A_1^{1/2}z_1 = \varphi_1 \tag{9.7}$$

и действуя слева оператором $A_1^{-1/2}$, получаем спектральную задачу

$$L_1(\lambda)\varphi_1 = (I_1 - \lambda A_1^{-1/2}C_1A_1^{-1/2} - g\lambda^{-1}A_1^{-1/2}B_{21}^*C_2^{-1}B_{21}A_1^{-1/2})\varphi_1 = 0, \tag{9.8}$$

где спектральный параметр λ входит в первой и минус первой степенях.

Лемма 9.2. *В задаче* (9.8) *операторы*

$$\widetilde{A}_1 := A_1^{-1/2} C_1 A_1^{-1/2}, \ \ \widetilde{B}_1 := A_1^{-1/2} B_{21}^* C_2^{-1} B_{21} A_1^{-1/2} \tag{9.9}$$

обладают следующими свойствами.

1°. *Оператор* $\widetilde{A}_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ *является компактным положительным оператором.*

2°. *Если* $C_2 \gg 0$ (*система статически устойчива по линейному приближению*), *то оператор* $\widetilde{B}_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ *является компактным неотрицательным оператором.*

Доказательство. 1°. Свойство неотрицательности $\widetilde{A}_1$ проверяется непосредственно. Так как C_1 ограничен и положительно определен (лемма 3.1), то $\widetilde{A}_1$ — положительный оператор, а так как $A_1^{-1/2} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ компактен, то $\widetilde{A}_1$ — компактный оператор. 2°. Учитывая, что

$$B_{21} = -C_2 \widehat{\gamma}_n \tag{9.10}$$

(см. (7.32), (7.33), (8.6), (9.10)), перепишем $\widetilde{B}_1$ в виде

$$\widetilde{B}_1 := -A_1^{-1/2} B_{12} C_2^{-1} B_{21} A_1^{-1/2} = A_1^{-1/2} (B_{12} \widehat{\gamma}_n) A_1^{-1/2} \tag{9.11}$$

и заметим, что $(B_{12}\widehat{\gamma}_n) A_1^{-1/2} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ — ограниченный оператор (см. (8.14)), а $A_1^{-1/2} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ — компактен. Отсюда следует, что $\widetilde{B}_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ — компактный оператор. Его свойство неотрицательности проверяются непосредственно:

$$(\widetilde{B}_1 \varphi_1, \varphi_1)_{\mathcal{H}_1} = (C_2^{-1} B_{21} A_1^{-1/2} \varphi_1, B_{21} A_1^{-1/2} \varphi_1)_{\mathcal{H}_1} \geqslant 0, \tag{9.12}$$

так как $C_2^{-1} \gg 0$.

□

Замечание 9.1. Если выполнено условие 2° леммы 9.2, то операторный пучок $L_1(\lambda)$ из (9.8) есть вариант хорошо изученного пучка С. Г. Крейна (см., например, [16, гл. 7, п. 1–3]).

9.3. Дальнейшие свойства операторных коэффициентов пучка С. Г. Крейна. Основываясь на формуле Метивье асимптотического поведения

$$\lambda_j(A_{kk}) = \rho_k \mu_k^{-1} \Big(\frac{|\Omega_k|}{3\pi^2} \Big)^{-2/3} j^{2/3} [1 + o(1)], \ \ j \to \infty, \ \ k = 1, 2, \tag{9.13}$$

собственных значений операторов A_{kk}, отвечающих вариационному отношению

$$\mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k) / (\rho_k \int\limits_{\Omega_k} |\vec{u}_k|^2 d\Omega_k), \ \ \vec{u}_k \in \vec{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k) \tag{9.14}$$

(см. [32], а также [16, с. 279]), получим асимптотическую формулу для собственных значений оператора $\widetilde{A}_1$ из (9.9).

Лемма 9.3. *Имеет место асимптотическая формула*

$$\lambda_j(\widetilde{A}_1) = \Big(\frac{1}{3\pi^2} \sum_{k=1}^{2} (\rho_k/\mu_k)^{3/2} |\Omega_k| \Big)^{2/3} j^{-2/3} [1 + o(1)], \ \ j \to \infty. \tag{9.15}$$

Доказательство. Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора $\widetilde{A}_1$:

$$\widetilde{A}_1 \varphi_1 := \widetilde{A}_1^{-1/2} C_1 \widetilde{A}_1^{-1/2} \varphi_1 = \lambda \varphi_1, \ \ \varphi_1 \in \mathcal{H}_1. \tag{9.16}$$

Эта задача равносильна задаче

$$C_1 z_1 = \lambda A_1 z_1, \ \ z_1 \in \mathcal{D}(A_1) \subset \mathcal{H}_1. \tag{9.17}$$

Отсюда и из свойств операторов $\widetilde{A}_1$ и C_1 получаем, что собственные значения λ_j этих задач суть последовательные максимумы вариационного отношения

$$(C_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} / (A_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1},$$

которое с учетом определений этих операторов (см. (7.28), (7.29)) принимает вид

$$\Big\{\rho_{01}\int\limits_{\Omega_{01}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1|^2d\Omega_{01}+\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2|^2d\Omega_{02}+\rho_1\int\limits_{\Omega_1}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_1|^2d\Omega_1+$$

$$+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2+\vec{u}_2|^2d\Omega_{02}\Big\}\Big/\Big\{\sum_{k=1}^{2}\mu_kE_k(\vec{u}_k,\vec{u}_k)+\alpha_1|\vec{\omega}_1|^2+\alpha_2|\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1|^2\Big\}. \quad (9.18)$$

Здесь, как и при доказательстве теоремы 5.1, убеждаемся, что в силу конечномерности подпространств $\mathbb{C}^3$, входящих в $\mathcal{H}_1$, и опираясь снова на работу [9], что асимптотическое поведение собственных значений λ_j для вариационного отношения (9.18) такое же, как и для вариационного отношения

$$\sum_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}|\vec{u}_k|^2d\Omega_k\Big/\sum_{k=1}^{2}\mu_kE_k(\vec{u}_k,\vec{u}_k). \quad (9.19)$$

Этому отношению, в свою очередь, отвечают две независимые спектральные задачи

$$\lambda\mu_kA_{kk}\vec{u}_k=\rho_k\vec{u}_k,\ \ k=1,2, \quad (9.20)$$

соответствующие колебаниям вязкой жидкости в неподвижных сосудах Ω_k. Поэтому для совокупности этих задач, опираясь на (9.13), приходим к выводу, что имеет место формула (9.15) (соответствующие выкладки см., например, в [17, с. 104-105]).

□

Рассмотрим теперь более подробно спектральные свойства оператора $\widetilde{B}_1$ из (9.9).

Лемма 9.4. *Пусть исследуемая гидромеханическая система не является статически устойчивой по линейному приближению* (*выполнены лишь условия* (3.45)) *и квадратичная форма оператора потенциальной энергии* C_2 *индефинитна и имеет* $\varkappa$ *отрицательных квадратов,* $1\leqslant\varkappa\leqslant 4$ (*см. леммы* 3.5, 3.6). *Тогда оператор* $\widetilde{B}_1$ *имеет бесконечномерное ядро элементов вида*

$$\ker\,\widetilde{B}_1=\{\varphi_1=A_1^{1/2}z_1:\ z_1\in\mathcal{D}(A_1^{1/2})\subset\mathcal{H}_1,\ \ \widehat{\gamma}_nz_1=0\}, \quad (9.21)$$

а квадратичная форма оператора $\widetilde{B}_1$ *также индефинитна и имеет ровно* $\varkappa$ *отрицательных квадратов, т. е.* $\widetilde{B}_1$ *имеет* $\varkappa$ (*с учетом кратностей*) *отрицательных собственных значений, бесконечномерное нулевое собственное значение и счетное множество положительных собственных значений с предельной точкой* $\lambda=0$.

Доказательство. Заметим сначала, что при условиях данной леммы оператор $\widetilde{B}_1$ является компактным самосопряженным оператором, действующим в $\mathcal{H}_1$. Этот факт доказывается точно также, как свойство 2° в лемме 9.2.

Отсюда следует, что его положительные собственные значения находятся как последовательные максимумы вариационного отношения

$$(\widetilde{B}_1\varphi_1,\varphi_1)_{\mathcal{H}_1}/(\varphi_1,\varphi_1)_{\mathcal{H}_1}, \quad (9.22)$$

а отрицательные — как последовательные минимумы этого отношения. Учитывая связь (9.10) и представление (9.9), получим из (9.22) вариационное отношение

$$\frac{(C_2\widehat{\gamma}_nz_1,\widehat{\gamma}_nz_1)_{\mathcal{H}_2}}{\|A_1^{1/2}z_1\|^2_{\mathcal{H}_1}},\ \ z_1=A_1^{-1/2}\varphi_1\in\mathcal{D}(A_1^{1/2})\subset\mathcal{H}_1. \quad (9.23)$$

Оно, очевидно, обращается в нуль на тех элементах из $\mathcal{D}(A_1^{1/2})$, для которых $\widehat{\gamma}_nz_1=0$. Совокупность таких элементов образует ядро оператора $\widetilde{B}_1$. Действительно, если $\widetilde{B}_1\varphi_1=0$, то $B_{12}\widehat{\gamma}_nz_1=0$, $z_1=A_1^{-1/2}\varphi_1$, и так как оператор B_{12} обратим (см. (9.4)), то $\widehat{\gamma}_nz_1=0$, и потому имеет место (9.21).

Далее, на элементах, для которых $\widehat{\gamma}_nz_1\neq 0$, квадратичная форма в числителе (9.23) принимает отрицательные значения на подпространстве размерности $\varkappa$ и потому, на основе вариационного принципа для отрицательных собственных значений оператора $\widetilde{B}_1$, получаем, что этот оператор имеет ровно $\varkappa$ отрицательных собственных значений (с учетом их кратностей).

Остальные собственные значения, кроме нулевого, положительны, и так как $\widetilde{B}_1$ компактен, то они образуют счетное множество конечнократных собственных значений с предельной точкой $\lambda = 0$.

□

Замечание 9.2. Из определения (8.6), (8.7) оператора $\widehat{\gamma}_n$ следует, что

$$\ker \widehat{\gamma}_n = \{z_1 \in \mathcal{D}(\widehat{\gamma}_n) : \ \gamma_{n,k}\vec{u}_k = 0, \ \ P_2\vec{\omega}_k = \vec{0}, \ \ k = 1, 2\}, \tag{9.24}$$

причем здесь считаем, что

$$\mathcal{D}(\widehat{\gamma}_n) = \mathcal{D}(A_1^{1/2}) \subset \mathcal{H}_1, \quad \mathcal{D}(A_1^{1/2}) = (\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3). \tag{9.25}$$

Лемма 9.5. *Для ненулевых собственных значений оператора $\widetilde{B}_1$ имеет место асимптотическая формула*

$$\lambda_j(\widetilde{B}_1) = \Big(\frac{1}{16\pi}\sum_{k=1}^{2}\Big(\frac{\rho_k}{\mu_k}\Big)^2|\Gamma_k|\Big)^{1/2} j^{-1/2}[1 + o(1)] \ \ (j \to \infty). \tag{9.26}$$

Доказательство. Вариационное отношение (9.23) в силу определений (7.32) и (7.29) операторов C_2 и A_1 имеет вид

$$\Big\{\sum_{k=1}^{2}\rho_k\Big[\int\limits_{\Gamma_k}|\gamma_{n,k}\vec{u}_k + \theta_k((P_2\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k)\cdot\vec{e}_k^{\,3})|^2 d\Gamma_k - \int\limits_{\Gamma_k}|\theta_k((P_2\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k)\cdot\vec{e}_k^{\,3})|^2 d\Gamma_k\Big] +$$
$$+ (m_1l_1 + m_2h_1)|P_2\vec{\omega}_1|^2 + m_2l_2|P_2\vec{\omega}_2|^2\Big\}\Big/\Big\{\sum_{k=1}^{2}\mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k) + \alpha_1|\vec{\omega}_1|^2 + \alpha_2|\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1|^2\Big\}, \tag{9.27}$$

и оно лишь конечномерными слагаемыми отличается от вариационного отношения

$$\sum_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_{\Gamma_k}|\gamma_{n,k}\vec{u}_k|^2 d\Gamma_k\Big/\sum_{k=1}^{2}\mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k). \tag{9.28}$$

Это отношение, в свою очередь, отвечает двум независимым спектральным задачам

$$\begin{aligned}
&-P_{0,S_k}\Delta\vec{u}_k + \nabla\widetilde{p}_k = \vec{0}, \ \ \operatorname{div}\vec{u}_k = 0 \ \ (\text{в} \ \ \Omega_k), \ \ \vec{u}_k = \vec{0} \ \ (\text{на} \ \ S_k),\\
&\tau_{j3}(\vec{u}_k) := \mu_k\Big(\frac{\partial u_k^j}{\partial x_k^3} + \frac{\partial u_k^3}{\partial x_k^j}\Big) = 0, \ \ j = 1, 2, \ \ k = 1, 2,\\
&\lambda\Big(-\widetilde{p}_k + 2\mu_k\frac{\partial u_k^3}{\partial x_k^3}\Big) = \rho_k\gamma_{n,k}\vec{u}_k, \ \ k = 1, 2,
\end{aligned} \tag{9.29}$$

соответствующим вариационным отношениям

$$\rho_k\int\limits_{\Gamma_k}|\gamma_{n,k}\vec{u}_k|^2 d\Gamma_k\Big/\Big(\mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k)\Big), \ \ k = 1, 2. \tag{9.30}$$

Отношения (9.30) порождают положительный дискретный спектр $\{\lambda_{j,k}\}_{j=1}^{\infty}$ с предельной точкой $\lambda = 0$ и асимптотическим поведением

$$\lambda_{j,k} = \frac{\rho_k}{\mu_k}\Big(\frac{|\Gamma_k|}{16\pi}\Big)^{1/2} j^{-1/2}[1 + o(1)] \ \ (j \to \infty), \ \ k = 1, 2, \tag{9.31}$$

см. [14], а также [27–29].

Отсюда и из предыдущих рассуждений следует утверждение леммы.

□

Замечание 9.3. Как показано в [16, с. 118], имеет место ортогональное разложение

$$\vec{J}_{0,S_k}^{1}(\Omega_k) = \vec{N}_1(\Omega_k) \oplus \vec{M}_1(\Omega_k), \tag{9.32}$$

где $\vec{N}_1(\Omega_k)$ — ядро оператора $\gamma_{n,k}$ в пространстве $\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)$:

$$\vec{N}_1(\Omega_k) = \{\vec{u}_k \in \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k) : \ \gamma_{n,k}\vec{u}_k = 0\}, \tag{9.33}$$

$\gamma_{n,k} : \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k) \to \widetilde{H}^{1/2}_{\Gamma_k}$. Ортогональным дополнением к нему является подпространство $\vec{M}_1(\Omega_k)$, состоящее из обобщенных решений задачи

$$\begin{gathered} -\mu_k P_{0,S_k}\Delta\vec{u}_k + \nabla p_k = \vec{0}, \ \operatorname{div}\vec{u}_k = 0 \ (\text{в } \Omega_k), \ \vec{u}_k = \vec{0} \ (\text{на } S_k), \\ \tau_{j3}(\vec{u}_k) = 0, \ j = 1,2, \ \gamma_{n,k}\vec{u}_k = \varphi_k \in \widetilde{H}^{1/2}_{\Gamma_k}, \ k = 1,2. \end{gathered} \tag{9.34}$$

9.4. Нормальные колебания в случае статической устойчивости. Как уже отмечалось, спектральная задача для пучка С. Г. Крейна вида (9.8) достаточно хорошо изучена (см. [16, гл. 7, п. 2, 3]). Поэтому далее приведем без доказательств свойства решений этой задачи, основанные на общих построениях из [16] и установленных выше свойствах операторов $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{B}_1$.

Сначала будем считать, что оператор $\widetilde{B}_1$ неотрицателен (выполнено свойство статической устойчивости системы).

1°. Спектр задачи (9.8) состоит из не более чем счетного множества собственных значений конечной алгебраической кратности, расположенных в правой конечной полуплоскости. Точками сгущения спектра являются точки $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$. Невещественные собственные значения расположены симметрично относительно вещественной оси.

Невещественные собственные значения, а также те вещественные собственные значения, которым отвечают не только собственные, но и присоединенные элементы, расположены в сегменте

$$\operatorname{Re}\lambda \geqslant (2\|\widetilde{A}_1\|)^{-1}, \ \ |\lambda| \leqslant 2\|\widetilde{B}_1\|, \tag{9.35}$$

причем их конечное число.

Если выполнено грубое условие сильной демпфированности системы, т. е. условие

$$4g\|\widetilde{A}_1\| \cdot \|\widetilde{B}_1\| < 1, \tag{9.36}$$

то все собственные значения вещественные (и положительные), и присоединенных элементов задача (9.8) не имеет.

2°. Если выполнено условие (9.36), то оператор-функция

$$M(\lambda) := \lambda L_1(\lambda) = \lambda I_1 - g\widetilde{B}_1 - \lambda^2\widetilde{A}_1 \tag{9.37}$$

(см. (9.8)) допускает спектральную факторизацию

$$M(\lambda) = M_+(\lambda)(\lambda I_1 - Z), \ \ \sigma(Z) \subset [-r, r], \ \ Z = Y\widetilde{B}_1, \ \ Y, Y^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1), \tag{9.38}$$

$$r \in (r_-, r_+), \ \ r_\pm = (1 \pm \sqrt{1 - 4g\|\widetilde{A}_1\| \cdot \|\widetilde{B}_1\|}/(2\|\widetilde{A}_1\|), \tag{9.39}$$

а $M_+(\lambda)$ — голоморфная и голоморфно обратимая оператор-функция в окрестности отрезка $[-r, r]$ (и даже в круге любого радиуса $r \in (r_-, r_+)$).

Далее, для оператора Z существует ограниченный положительно определенный правый симметризатор F, поэтому Z подобен самосопряженному оператору. При этом

$$\ker Z = \ker \widetilde{B}_1 \neq \{0\}. \tag{9.40}$$

Пусть $P_0 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{10} := \ker Z$ — ортопроектор, а $P_1 := I_1 - P_0$ — дополнительный ортопроектор. Тогда спектральная задача (см. (9.38))

$$Z\varphi_1 = \lambda\varphi_1, \ \ \lambda \in (0, r), \ \ r \in (r_-, r_+), \tag{9.41}$$

после применения ортопроекторов P_0 и P_1, переходит в задачу

$$P_1ZP_1\varphi_{11} = \lambda\varphi_{11}, \ \ \varphi_{10} = \lambda P_0ZP_1\varphi_{11}, \ \ \varphi_{10} = P_0\varphi_1, \ \ \varphi_{11} = P_1\varphi_1. \tag{9.42}$$

Далее, из условия $ZF = (ZF)^*$ следует, что

$$P_1ZP_1 = K_1F_1^{-1}, \ \ F_1 := P_1FP_1 \gg 0, \ \ K_1 = K_1^*, \tag{9.43}$$

и первое уравнение (9.42) преобразуется к виду

$$K_1F_1^{-1}\varphi_{11} = \lambda\varphi_{11}, \ \ \varphi_{11} \in \mathcal{H}_{11}. \tag{9.44}$$

После замены

$$F_1^{-1/2}\varphi_{11} =: \psi_{11} \in \mathcal{H}_{11} \tag{9.45}$$

из (9.44) приходим к спектральной задаче для компактного положительного оператора:

$$F_1^{-1/2}K_1F_1^{-1/2}\psi_{11} = \lambda\psi_{11}. \tag{9.46}$$

Используя теорему Гильберта—Шмидта, из (9.46) приходим к выводу, что эта задача имеет дискретный положительный спектр с предельной точкой $\lambda = 0$, а система собственных элементов задачи (9.46) образует ортонормированный базис в $\mathcal{H}_{11}$.

Итогом проведенных кратких пояснений является следующее утверждение. Если выполнено условие (9.36), то задача (9.8) имеет на промежутке $(0,r)$, $r \in (r_-, r_+)$, счетное множество конечнократных собственных значений $\{\lambda_j^-\}_{j=1}^\infty$ с предельной точкой $\lambda = 0$. Этим собственным значениям отвечает система собственных элементов $\{\varphi_{1j}^-\}_{j=1}^\infty$ задачи (9.8), которая после проектирования на $\mathcal{H}_{11} = \mathcal{H}_1 \ominus \ker \widetilde{B}_1$ образует базис Рисса в $\mathcal{H}_{11}$.

3°. Осуществляя в (9.8) замену λ на λ^{-1} и пользуясь тем, что $\ker \widetilde{A}_1 = \{0\}$, получаем аналогично рассуждениям из 2° такой вывод. Если выполнено условие (9.36), то задача (9.8) имеет на промежутке $[r_+, +\infty)$ счетное множество конечнократных собственных значений $\{\lambda_j^+\}_{j=1}^\infty$ с предельной точкой $\lambda = +\infty$. Этим собственным значениям отвечают собственные элементы $\{\varphi_{1j}^+\}_{j=1}^\infty$, образующие базис Рисса в $\mathcal{H}_1$.

4°. Для собственных значений λ_j^- имеют место вариационные принципы

$$\begin{aligned}\lambda_j^- &= \min_{\dim N^\perp = j-1}\ \max_{0\neq\varphi_1\in N} p_-(\varphi_1),\\ \lambda_j^- &= \max_{\dim M = j}\ \min_{0\neq\varphi_1\in M} p_-(\varphi_1),\end{aligned} \tag{9.47}$$

где M — произвольное j-мерное подпространство из $\mathcal{H}_1$, N — произвольное подпространство из $\mathcal{H}_1$ коразмерности $j-1$, а

$$p_\pm(\varphi_1) := \frac{(\varphi_1,\varphi_1)_{\mathcal{H}_1} \pm \sqrt{(\varphi_1,\varphi_1)_{\mathcal{H}_1}^2 - 4g(\widetilde{A}_1\varphi_1,\varphi_1)_{\mathcal{H}_1}\cdot(\widetilde{B}_1\varphi_1,\varphi_1)_{\mathcal{H}_1}}}{2(\widetilde{A}_1\varphi_1,\varphi_1)_{\mathcal{H}_1}}. \tag{9.48}$$

Для собственных значений λ_j^+ аналогичные утверждения (вариационные принципы) также имеют место; они получаются из (9.47) формальной заменой λ_j^- на $1/\lambda_j^+$, $\widetilde{A}_1$ на $g\widetilde{B}_1$, $g\widetilde{B}_1$ на $\widetilde{A}_1$.

Из приведенных вариационных принципов получаем следующие двусторонние оценки:

$$\begin{aligned}&g\lambda_j(\widetilde{B}_1) \leqslant \lambda_j^- \leqslant g\lambda_j(\widetilde{B}_1)/(1 - 2\lambda_j(\widetilde{B}_1)\|\widetilde{A}_1)\|),\ \ j = 1,2,\ldots,\\ &1/\lambda_j(\widetilde{A}_1) - 2g\|\widetilde{B}_1)\| \leqslant \lambda_j^+ \leqslant 1/\lambda_j(\widetilde{A}_1),\ \ j = 1,2,\ldots.\end{aligned} \tag{9.49}$$

Из них, в свою очередь, имеем асимптотические формулы

$$\begin{aligned}\lambda_j^- &= g\lambda_j(\widetilde{B}_1)[1 + o(1)],\ \ j\to\infty,\\ \lambda_j^+ &= (\lambda_j(\widetilde{A}_1))^{-1}[1 + o(1)],\ \ j\to\infty.\end{aligned} \tag{9.50}$$

5°. Сначала напомним известные определения (см. [23], [17, с. 76]).

Определение 9.1. Будем говорить, что оператор $A \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$ имеет *конечный порядок*, если A принадлежит классу $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ $(0 < p < \infty)$, т. е. его s-числа (собственные значения оператора $(A^*A)^{1/2}$) суммируемы со степенью p:

$$\sum_{j=1}^\infty (s_j(A))^p < \infty. \tag{9.51}$$

Нижнюю грань значений p для оператора A называют *порядком оператора* A и обозначают $p(A)$.

Определение 9.2. Базис Рисса $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$, получаемый из ортонормированного базиса $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ по закону

$$\psi_j = (I+T)\varphi_j, \quad T \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}), \quad \exists\, (I+T)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \tag{9.52}$$

называют *p-базисом* (см. [26]). При $p=2$ говорят о *базисе Бари*.

Для задачи (9.8) в приведенных терминах имеем следующее утверждение. Система собственных элементов, отвечающее собственным значениям λ_j^- операторного пучка (9.8), расположенным на отрезке $[-r,r]$, $r \in (r_-, r_+)$, после проектирования на подпространство $\mathcal{H}_{11} = P_1\mathcal{H}_1$, образует p-базис в $\mathcal{H}_{11}$ при

$$p \geqslant p_0, \quad p_0^{-1} = (p_{\widetilde{A}_1})^{-1} + (p_{\widetilde{B}_1})^{-1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}, \quad p_0 = \frac{6}{7}. \tag{9.53}$$

Соответственно, система собственных элементов, отвечающая собственным элементам λ_j^+ из промежутка $[r_+, +\infty)$, образует p-базис во всем пространстве $\mathcal{H}_1$ при тех же p.

Доказательство сформулированных фактов можно найти в [17], если заметить, что в силу асимптотических формул (9.15), (9.26)

$$\widetilde{A}_1 \in \mathfrak{S}_{3/2}(\mathcal{H}_1), \quad \widetilde{B}_1 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}_1), \tag{9.54}$$

и воспользоваться теоремой 3.2.1 из [17, с. 89].

6°. Если условие (9.36) сильной демпфированности не выполнено, то задача (9.8) по-прежнему имеет дискретный спектр с предельными точками $\lambda = 0$ и $\lambda = +\infty$. При этом ветвь собственных значений λ_j^- с предельной точкой $\lambda = 0$ расположена на положительной полуоси и по-прежнему имеет асимптотическое поведение (9.50), а проекции собственных элементов образуют в $\mathcal{H}_{11}$ базис Рисса с точностью конечного дефекта. Соответственно ветвь собственных значений λ_j^+ с предельной точкой $\lambda = +\infty$ также расположена на положительной полуоси и по-прежнему имеет асимптотическое поведение (9.50) (вторая формула), а собственные элементы, отвечающие этой ветви, образуют базис Рисса в $\mathcal{H}_1$ с точностью конечного дефекта. Кроме того, как уже упоминалось, в секторе (9.35) может быть не более конечного числа невещественных собственных значений, а также тех вещественных, у которых имеются не только собственные, но и присоединенные элементы.

9.5. Обращение теоремы Лагранжа об устойчивости. Будем теперь считать, что квадратичная форма оператора $\widetilde{B}_1$ в задаче (9.8) индефинитна и имеет $\varkappa$ отрицательных квадратов, $1 \leqslant \varkappa \leqslant 4$ (лемма 3.6), т. е. гидромеханическая система не является статически устойчивой по линейному приближению. Покажем, что в этом случае система и динамически неустойчива.

Теорема 9.1. *Пусть выполнено условие* (9.36)*, а также условия общего положения* (3.45)*, причем квадратичная форма оператора потенциальной энергии* C_2 *имеет* $\varkappa$ *отрицательных квадратов. Тогда задача* (9.8) *имеет ровно* $\varkappa$ *отрицательных собственных значений, расположенных на промежутке* $[-r_-, 0)$.

Доказательство. Введем, как и выше, функцию

$$f(\lambda) := (\lambda L_1(\lambda)\varphi_1, \varphi_1)_{\mathcal{H}_1} = \lambda(\varphi_1,\varphi_1)_{\mathcal{H}_1} - (\widetilde{B}_1\varphi_1,\varphi_1)_{\mathcal{H}_1} - \lambda^2(\widetilde{A}_1\varphi_1,\varphi_1)_{\mathcal{H}_1} \tag{9.55}$$

и корни квадратного трехчлена $f(\lambda)$, т. е. функционалы $p_\pm(\varphi_1)$ из (9.48). Так как $\widetilde{A}_1 > 0$, а квадратичная форма оператора $\widetilde{B}_1$ имеет $\varkappa$ отрицательных квадратов (лемма 9.4), то собственные значения λ в левой полуплоскости могут существовать лишь для функционала $p_-(\varphi_1)$ и при условии $(\widetilde{B}_1\varphi_1,\varphi_1)_{\mathcal{H}_1} < 0$, т. е. на подпространстве размерности $\varkappa$. При условии факторизации (9.36) эти собственные значения могут располагаться на промежутке $[-r_-, 0)$.

Здесь снова возникает спектральная задача (9.41), однако теперь на промежутке $(-r,r)$, $r \in (r_-, r_+)$. Она затем переходит в задачу (9.42), а после в (9.46), где теперь оператор K_1 имеет ровно $\varkappa$ отрицательных собственных значений. Отсюда получаем, что и исходная задача (9.8) имеет на промежутке $[-r_-, 0)$ ровно $\varkappa$ отрицательных собственных значений (с учетом их кратностей).

Для обоснования сформулированных выводов заметим, что для задачи (9.8) на промежутке $(-r,r)$, $r \in (r_-, r_+)$, выполнены следующие свойства.

1°. Для любого $\varphi_1 \in \mathcal{H}_1$ функция $f(\lambda)$ имеет на этом промежутке ровно один корень $p_-(\varphi_1)$.
2°. Функция $f(\lambda)$ возрастает в точке $p_-(\varphi_1)$:

$$f'(\lambda)\Big|_{\lambda=p_-(\varphi_1)} = \sqrt{(\varphi_1,\varphi_1)_{\mathcal{H}_1} - 4g(\widetilde{A}_1\varphi_1,\varphi_1)_{\mathcal{H}_1}(\widetilde{B}_1\varphi_1,\varphi_1)_{\mathcal{H}_1}} > 0, \ \ \varphi_1 \neq 0.$$

3°. Функционал $p_-(\varphi_1)$ при $\varphi_1 \neq 0$ непрерывен.
4°. Имеют место неравенства

$$\sup p_-(\varphi_1) \leqslant r_- < r, \ \ r \in (r_-, r_+), \qquad \inf p_-(\varphi_1) \geqslant -r_- > -r.$$

5°. Операторный пучок $M(\lambda) = \lambda L_1(\lambda)$ имеет на промежутке $(-r, r)$ последовательность конечнократных собственных значений с предельной точкой $\lambda = 0$. Этот факт доказывается так же, как соответствующие преобразования из (9.37)–(9.46) с учетом того, что Z_1 подобен самосопряженному оператору.
6°. Система собственных элементов задачи (9.41), отвечающая собственным значениям из $(-r, r)$, полна в $\mathcal{H}_1$ с учетом того, что бесконечнократному собственному значению $\lambda = 0$ отвечает ортонормированный базис из подпространства $\mathcal{H}_{10} = \ker Z = \ker \widetilde{B}_1$.

При выполнении свойств 1°–6° для отрицательных собственных значений $\lambda_j^{-,-}$ задачи (9.8) справедлив следующий вариационный принцип Пуанкаре—Ритца (см. [1]):

$$\lambda_j^{-,-} = \min_{\dim M = j} \ \max_{0 \neq \varphi_1 \in M} p_-(\varphi_1),$$

где M — произвольное j-мерное подпространство в $\mathcal{H}_1$. Так как $p_-(\varphi_1)$ принимает отрицательные значения на подпространстве максимальной размерности $\varkappa$, то задача (9.8) имеет ровно $\varkappa$ отрицательных собственных значений.

□

В качестве следствия из теоремы 9.1 получаем такое утверждение.

Теорема 9.2 (обращение теоремы Лагранжа об устойчивости)**.** *Пусть выполнены условия теоремы* 9.1*, т. е. исследуемая система является статически неустойчивой и индекс неустойчивости* (*количество отрицательных квадратов квадратичной формы оператора потенциальной энергии* C_2) — *число* $\varkappa \geqslant 1$. *Тогда данная гидромеханическая система является и динамически неустойчивой, причем неустойчивость системы теряется на экспоненциально возрастающих по времени нормальных движениях* (*см.* (9.1) *при* $\lambda < 0$)*, т. е. неколебательным образом* ($\operatorname{Im}\lambda = 0$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов Ю. Ш.* Вариационные методы в теории операторных пучков. Спектральная оптимизация. — Л.: ЛГУ, 1983.
2. *Агранович М. С.* Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 5. — С. 3–78.
3. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.
4. *Батыр Э. И.* Малые движения системы последовательно сочлененных тел с полостями, содержащими вязкую несжимаемую жидкость// Динам. сист. — 2001. — *17*. — С. 120–125.
5. *Батыр Э. И.* Малые движения системы последовательно сочлененных тел с полостями, содержащими идеальную несжимаемую жидкость// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. — 2002. — *15* (*54*), № 2. — С. 5–10.
6. *Батыр Э. И.* Малые движения и нормальные колебания системы трех сочлененных тел с полостями, заполненными идеальной несжимаемой жидкостью// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. — 2010. — *23* (*62*), № 2. — С. 19–38.
7. *Батыр Э. И., Дудик О. А., Копачевский Н. Д.* Малые колебания тел с полостями, заполненными несжимаемой вязкой жидкостью// Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. — 2009. — *49*. — С. 15–29.
8. *Батыр Э. И., Копачевский Н. Д.* Малые движения и нормальные колебания системы сочлененных гиростатов// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2013. — *49*. — С. 5–88.
9. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений// Итоги науки и техн. Мат. анализ. — 1977. — *14*. — С. 5–52.

10. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д.* Малые движения системы двух сочлененных тел с полостями, частично заполненными тяжелой вязкой жидкостью// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2017. — № 2 (35) (в печати).
11. *Вулис И. Л., Соломяк М. З.* Спектральная асимптотика вырождающейся задачи Стеклова// Вестн. ЛГУ. — 1973. — *19*. — С. 148–150.
12. *Вулис И. Л., Соломяк М. З.* Спектральная асимптотика вырождающихся эллиптических операторов второго порядка// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1974. — *38*, № 6. — С. 1362–1392.
13. *Жуковский Н. Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью// В сб. «Избранные сочинения. Т. 1». — М., Л.: Гостехиздат, 1948. — С. 31–52.
14. *Каразеева Н. А., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра задач типа Стеклова в составных областях// Пробл. мат. анализа. — 1981. — *8*. — С. 36–48.
15. *Копачевский Н. Д.* О колебаниях тела с полостью, частично заполненной тяжелой идеальной жидкостью: теоремы существования, единственности и устойчивости сильных решений// Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем. Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2005. — *1*, № 1. — С. 158–194.
16. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
17. *Копачевский Н. Д.* Спектральная теория операторных пучков: специальный курс лекций. — Симферополь: Форма, 2009.
18. *Копачевский Н. Д.* Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве: специальный курс лекций. — Симферополь: ФЛП Бондаренко О. А., 2012.
19. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и полуторалинейных форм// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *57*. — С. 71–105.
20. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения. — Симферополь: Форма, 2016.
21. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
22. *Крейн С. Г., Моисеев Н. Н.* О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной границей// Прикл. мат. мех. — 1957. — *21*, № 2. — С. 169–174.
23. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.
24. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970.
25. *Понтрягин Л. С.* Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1944. — *8*, № 6. — С. 243–280.
26. *Пригорский В. А.* О некоторых классах базисов гильбертова пространства// Усп. мат. наук. — 1965. — *20*, Вып. 125, № 5. — С. 231–236.
27. *Суслина Т. А.* Асимптотика спектра вариационных задач на решениях однородного эллиптического уравнения при наличии связей на части границы// Пробл. мат. анализа. — 1984. — *9*. — С. 84–97.
28. *Суслина Т. А.* Асимптотика спектра вариационных задач на решениях эллиптического уравнения в области с кусочно-гладкой границей// Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1985. — *147*. — С. 179-183.
29. *Суслина Т. А.* Асимптотика спектра некоторых задач, связанных с колебаниями жидкостей. — Л.: Ленинградский электротехн. институт связи, 1985. — Деп. в ВИНИТИ 21.11.85, № 8058-В.
30. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint problems for an ideal fluid. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 2001.
31. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint problems for viscous fluids. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 2003.
32. *Metivier G.* Valeurs propres d'operation definis par restriction de systemes variationelles a des sous-espaces// J. Math. Pures Appl. — 1978. — Ser. IX, *57*, № 2. — С. 133–156.

Н. Д. Копачевский
Таврическая академия Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского,
факультет математики и информатики, кафедра математического анализа,
295007, г. Симферополь, пр-т Академика Вернадского, д. 4
E-mail: `kopachevsky@crimea.edu`

В. И. Войтицкий
Таврическая академия Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского,
факультет математики и информатики, кафедра математического анализа,

295007, г. Симферополь, пр-т Академика Вернадского, д. 4
E-mail: victor.voytitsky@gmail.com

З. З. Ситшаева
Крымский инженерно-педагогический университет, кафедра математики,
295015, г. Симферополь, пер. Учебный, д. 8
E-mail: szz2008@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-627-677 UDC 517.98, 517.955, 532.5

On Oscillations of Two Connected Pendulums Containing Cavities Partially Filled with Incompressible Fluid

© 2017 **N. D. Kopachevsky, V. I. Voytitsky, Z. Z. Sitshaeva**

Abstract. We consider the linearized problem on small oscillations of two pendulums connected to each other with a spherical hinge. Each pendulum has a cavity partially filled with incompressible fluid. We study the initial-boundary value problem as well as the corresponding spectral problem on normal motions of the hydromechanic system. We prove theorems on correct solvability of the problem on an arbitrary interval of time both in the case of ideal and viscous fluids in the cavities, and we study the corresponding spectral problems as well.

REFERENCES

1. Yu. Sh. Abramov, *Variatsionnye metody v teorii operatornykh puchkov. Spektral'naya optimizatsiya* [Variational Methods in the Theory of Operator Pencils. Spectral Optimization], LGU, Leningrad, 1983 (in Russian).
2. M. S. Agranovich, "Spektral'nye zadachi dlya sil'no ellipticheskikh sistem vtorogo poryadka v oblastyakh s gladkoy i negladkoy granitsey" [Spectral problems for second-order strongly elliptic systems in domains with smooth and nonsmooth boundary], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2002, **57**, No. 5, 3–78 (in Russian).
3. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Osnovy teorii lineynykh operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy* [Basics of the Theory of Linear Operators in Spaces with Indefinite Metrics], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
4. E. I. Batyr, "Malye dvizheniya sistemy posledovatel'no sochlenennykh tel s polostyami, soderzhashchimi vyazkuyu neszhimaemuyu zhidkost'" [Small motions of system of serially connected bodies with cavities containing viscous incompressible fluid], *Dinam. sist.* [Dynam. Syst.], 2001, **17**, 120–125 (in Russian).
5. E. I. Batyr, "Malye dvizheniya sistemy posledovatel'no sochlenennykh tel s polostyami, soderzhashchimi ideal'nuyu neszhimaemuyu zhidkost'" [Small motions of system of serially connected bodies with cavities containing ideal incompressible fluid], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ.], 2002, **15** (**54**), No. 2, 5–10 (in Russian).
6. E. I. Batyr, "Malye dvizheniya i normal'nye kolebaniya sistemy trekh sochlenennykh tel s polostyami, zapolnennymi ideal'noy neszhimaemoy zhidkost'yu" [Small motions and normal oscillations of a system of three connected bodies with cavities filled with ideal incompressible fluid], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ.], 2010, **23** (**62**), No. 2, 19–38 (in Russian).
7. E. I. Batyr, O. A. Dudik, and N. D. Kopachevsky, "Malye kolebaniya tel s polostyami, zapolnennymi neszhimaemoy vyazkoy zhidkost'yu" [Small motions of bodies with cavities filled with incompressible viscous fluid], *Izv. vuzov. Sev.-Kavkaz. region. Estestv. nauki* [Bull. Higher Edu. North Caucas. Reg. Nat. Sci.], 2009, **49**, 15–29 (in Russian).
8. E. I. Batyr and N. D. Kopachevsky, "Malye dvizheniya i normal'nye kolebaniya sistemy sochlenennykh girostatov" [Small motions and normal oscillations in systems of connected gyrostats], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2013, **49**, 5–88 (in Russian).

9. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, “Asimptotika spektra differentsial’nykh uravneniy” [Asymptotics of spectrum of differential equations], *Itogi nauki i tekhn. Mat. analiz* [Totals Sci. Tech. Math. Anal.], 1977, **14**, 5–52 (in Russian).
10. V. I. Voytitskiy and N. D. Kopachevsky, “Malye dvizheniya sistemy dvukh sochlenennykh tel s polostyami, chastichno zapolnennymi tyazheloy vyazkoy zhidkost’yu” [Small motions of a system of two connected bodies with cavities partially filled with heavy viscous fluid], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2017, No. 2 (35), to be published (in Russian).
11. I. L. Vulis and M. Z. Solomyak, “Spektral’naya asimptotika vyrozhdayushcheysya zadachi Steklova” [Spectral asymptotics of the degenerating Steklov problem], *Vestn. LGU* [Bull. Leningrad State Univ.], 1973, **19**, 148–150 (in Russian).
12. I. L. Vulis and M. Z. Solomyak, “Spektral’naya asimptotika vyrozhdayushchikhsya ellipticheskikh operatorov vtorogo poryadka” [Spectral asymptotics of second-order degenerating elliptic operators], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1974, **38**, No. 6, 1362–1392 (in Russian).
13. N. E. Zhukovskiy, “O dvizhenii tverdogo tela, imeyushchego polosti, napolnennye odnorodnoy kapel’noy zhidkost’yu” [On motion of a solid body with cavities filled with homogeneous dropping fluid], In: *Izbrannye sochineniya. T. 1* [Selected Works. Vol. 1], Gostekhizdat, Moscow–Leningrad, 1948, 31–52 (in Russian).
14. N. A. Karazeeva and M. Z. Solomyak, “Asimptotika spektra zadach tipa Steklova v sostavnykh oblastyakh” [Asymptotics of spectrum of Steklov-type problems in composite domains], *Probl. mat. analiza* [Probl. Math. Anal.], 1981, **8**, 36–48 (in Russian).
15. N. D. Kopachevsky, “O kolebaniyakh tela s polost’yu, chastichno zapolnennoy tyazheloy ideal’noy zhidkost’yu: teoremy sushchestvovaniya, edinstvennosti i ustoychivosti sil’nykh resheniy” [On oscillations of a body with cavity partially filled with heavy ideal fluid: theorems of existence, uniqueness, and stability of strong solutions], *Problemi dinamiki ta stiykosti bagatovimirnikh sistem. Zb. prats’ Institutu matematiki NAN Ukraïni* [Probl. Dynamics Stability Multidimen. Syst.: Digest Works Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine], 2005, **1**, No. 1, 158–194 (in Russian).
16. N. D. Kopachevsky, S. G. Krein, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: evolyutsionnye i spektral’nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolutional and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
17. N. D. Kopachevsky, *Spektral’naya teoriya operatornykh puchkov: spetsial’nyy kurs lektsiy* [Spectral Theory of Operator Pencils: A Special Course], Forma, Simferopol’, 2009 (in Russian).
18. N. D. Kopachevsky, *Integrodifferentsial’nye uravneniya Vol’terra v gil’bertovom prostranstve: spetsial’nyy kurs lektsiy* [Integrodifferential Equations in a Hilbert Space: A Special Course], FLP Bondarenko, Simferopol’, 2012.
19. N. D. Kopachevsky, “Ob abstraktnoy formule Grina dlya troyki gil’bertovykh prostranstv i polutoralineynykh form” [Abstract Green formulas for triples of Hilbert spaces and sesquilinear forms], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **57**, 71–105 (in Russian).
20. N. D. Kopachevsky, *Abstraktnaya formula Grina i nekotorye ee prilozheniya* [Abstract Green Formula and Some Its Applications], Forma, Simferopol’, 2016 (in Russian).
21. S. G. Krein, *Lineynye differentsial’nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in a Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
22. S. G. Krein and N. N. Moiseev, “O kolebaniyakh tverdogo tela, soderzhashchego zhidkost’ so svobodnoy granitsey” [On oscillations of solid body containing fluid with a free boundary], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1957, **21**, No. 2, 169–174 (in Russian).
23. A. S. Markus, *Vvedenie v spektral’nuyu teoriyu polinomial’nykh operatornykh puchkov* [Introduction to Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils], Shtiintsa, Kishinev, 1986 (in Russian).
24. S. G. Mikhlin, *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike* [Variational Methods in Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
25. L. S. Pontryagin, “Ermitovy operatory v prostranstve s indefinitnoy metrikoy” [Hermit operators in spaces with indefinite metrics], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1944, **8**, No. 6, 243–280 (in Russian).
26. V. A. Prigorskiy, “O nekotorykh klassakh bazisov gil’bertova prostranstva” [On some classes of bases of Hilbert spaces], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1965, **20**, Issue 125, No. 5, 231–236 (in Russian).
27. T. A. Suslina, “Asimptotika spektra variatsionnykh zadach na resheniyakh odnorodnogo ellipticheskogo uravneniya pri nalichii svyazey na chasti granitsy” [Asymptotics of spectrum of variational problems on solutions of homogeneous elliptic equation with relations on part of the boundary], *Probl. mat. analiza* [Probl. Math. Anal.], 1984, **9**, 84–97 (in Russian).

28. T. A. Suslina, “Asimptotika spektra variatsionnykh zadach na resheniyakh ellipticheskogo uravneniya v oblasti s kusochno-gladkoy granitsey” [Asymptotics of spectrum of variational problems on solutions of elliptic equation in a domain with piecewise smooth boundary], *Zap. nauch. sem. LOMI* [Notes Sci. Semin. Leningrad Dept. Math. Inst. Acad. Sci.], 1985, **147**, 179–183 (in Russian).
29. T. A. Suslina, “Asimptotika spektra nekotorykh zadach, svyazannykh s kolebaniyami zhidkostey” [Asymptotics of spectrum of some problems related to oscillations of fluids], Dep. to VINITI 21.11.85, No. 8058-B, Leningrad Electrotech. Inst. Commun., Leningrad, 1985 (in Russian).
30. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Self-Adjoint Problems for an Ideal Fluid*, Birkhauser, Basel—Boston—Berlin, 2001.
31. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-Adjoint Problems for Viscous Fluids*, Birkhauser, Basel—Boston—Berlin, 2003.
32. G. Metivier, “Valeurs propres d’operation definis par restriction de systemes variationelles a des sous-espaces,” *J. Math. Pures Appl.*, 1978, Ser. IX, **57**, No. 2, 133–156.

N. D. Kopachevsky
Taurida Academy, V. I. Vernadsky Crimea Federal University,
Faculty of Mathematics and Informatics, Department of Mathematical Analysis,
4 Vernadsky Avenue, 295007 Simferopol, Russia
E-mail: kopachevsky@list.ru

V. I. Voytitsky
Taurida Academy, V. I. Vernadsky Crimea Federal University,
Faculty of Mathematics and Informatics, Department of Mathematical Analysis,
4 Vernadsky Avenue, 295007 Simferopol, Russia
E-mail: victor.voytitsky@gmail.com

Z. Z. Sitshaeva
Crimean Engineering-Pedagogical University,
Department of Mathematics,
8 Uchebnyi Per., 295015 Simferopol, Russia
E-mail: szz2008@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 4 (2017). С. 678–688

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-678-688 УДК 517.929

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

© 2017 г. **А. Б. МУРАВНИК**

Аннотация. В полуплоскости $\{-\infty < x < +\infty\} \times \{0 < y < +\infty\}$ рассматривается задача Дирихле для дифференциально-разностных уравнений вида $u_{xx} + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k u_{xx}(x + h_k, y) + u_{yy} = 0$, где количество нелокальных членов уравнения m произвольно, а на их коэффициенты $a_1, \dots, a_m$ и параметры $h_1, \dots, h_m$, определяющие сдвиги независимой переменной x, не накладывается никаких условий соизмеримости. Единственное условие, накладываемое на коэффициенты и параметры изучаемого уравнения — отрицательность вещественной части символа оператора, действующего по переменной x.

Ранее было доказано, что при выполнении указанного условия (т. е. условия сильной эллиптичности соответствующего дифференциально-разностного оператора) рассматриваемая задача разрешима в смысле обобщенных функций (по Гельфанду—Шилову), построено интегральное представление решения формулой пуассоновского типа, установлена гладкость этого решения вне граничной прямой.

В настоящей работе исследуется поведение указанного решения при $y \to +\infty$. Доказывается теорема об асимптотической близости исследуемого решения и решения классической задачи Дирихле для дифференциального эллиптического уравнения (с той же самой граничной функцией, что и в исходной нелокальной задаче), определяемого следующим образом: в исходном дифференциально-разностном эллиптическом уравнении все параметры $h_1, \dots, h_m$ полагаются равными нулю. Как следствие, устанавливается, что для исследуемых решений справедлив классический критерий стабилизации Репникова—Эйдельмана: решение стабилизируется при $y \to +\infty$ тогда и только тогда, когда среднее значение граничной функции на интервале $(-R, +R)$ имеет предел при $R \to +\infty$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Теория дифференциально-разностных (и, более широко — функционально-дифференциальных) эллиптических уравнений в частных производных в настоящее время активно развивается как в теоретическом плане, так и в плане многочисленных приложений. Для задач в ограниченных областях глубокое и полное изложение указанной теории (а также тесной связанной с ней теории нелокальных задач для эллиптических дифференциальных уравнений) можно найти, например, в [3, 14, 16–18, 23] (см. также имеющуюся там библиографию). Задачи в неограниченных областях к настоящему времени изучены в меньшей степени.

В настоящей работе рассматривается следующая задаче Дирихле для модельного дифференциально-разностного сильно эллиптического уравнения в полуплоскости:

$$u_{xx} + \sum_{k=1}^{m} a_k u_{xx}(x + h_k, y) + u_{yy} = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad y \in (0, +\infty), \tag{1}$$

$$u\big|_{y=0} = u_0(x), \ x \in (-\infty, +\infty), \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по Программе повышения конкурентоспособности РУДН «5-100» среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2016–2020 гг., а также при поддержке гранта Президента Российской Федерации НШ-4479.2014.1 и гранта РФФИ 17-01-00401.

где коэффициенты a_k и h_k, $k = \overline{1,m}$, — вещественные параметры, а начальная функция u_0 непрерывна и ограничена.

Отметим, что в классическом случае эллиптических дифференциальных уравнений такие задачи корректно разрешимы в естественных (и достаточно широких) классах краевых функций (см., например, [2, 7]). В то же время для качественных свойств их решений имеет место принципиальная (сравнительно с задачами в ограниченных областях) новизна: возникают эффекты, характерные, вообще говоря, для параболического случая (см. [5, 19]).

Из [22] известно, что, если существует такая положительная постоянная C, что на всей вещественной оси выполняется неравенство

$$1 + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos h_k \xi \geqslant C \tag{3}$$

(ср. с условием сильной эллиптичности уравнения (1) в [23, §9]), то задача (1)-(2) разрешима в смысле обобщенных функций (согласно определению [1, §10]), а ее решение является классическим в полуплоскости $\mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$ и представляется следующим образом:

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x-\xi, y) u_0(\xi) d\xi, \tag{4}$$

где

$$\mathcal{E}(x,y) = \int_{0}^{\infty} e^{-yG_1(\xi)} \cos\left[x\xi - yG_2(\xi)\right] d\xi, \tag{5}$$

$$G_1(\xi) = \xi\sqrt{\frac{\varphi(\xi)+a(\xi)+1}{2}}, \quad G_2(\xi) = \xi\sqrt{\frac{\varphi(\xi)-a(\xi)-1}{2}},$$

$$\varphi(\xi) = \Big[a^2(\xi) + b^2(\xi) + 2a(\xi) + 1\Big]^{\frac{1}{2}}, \quad a(\xi) = \sum_{k=1}^{m} a_k \cos h_k \xi, \quad b(\xi) = \sum_{k=1}^{m} a_k \sin h_k \xi.$$

В настоящей работе исследуется поведение найденного решения при неограниченном возрастании y. Доказывается теорема о его (асимптотической) близости к решению аналогичной задачи для некоторого эллиптического *дифференциального* уравнения и устанавливается необходимое и достаточное условие его стабилизации, заключающееся в существовании предела среднего значения краевой функции задачи.

Отметим, что сходство с качественными свойствами решений *параболических* уравнений, характерное для классической теории, имеет место и в изучаемом неклассическом (а именно, *нелокальном*) случае: теоремы о близости и стабилизации решений, полученные в настоящей работе, аналогичны соответствующим результатам для *дифференциально-разностных параболических* уравнений (см. [8–10, 21]).

Отметим также, что никаких условий соизмеримости сдвигов, содержащихся в нелокальных членах исследуемого уравнения, не накладывается. Как известно (см., например, [6, 15, 18, 20] и имеющуюся там библиографию), для теории нелокальных задач и функционально-дифференциальных уравнений разница между случаем, когда имеют место только целочисленные или соизмеримые сдвиги, и случаем, когда сдвиги несоизмеримы, принципиальная: даже в ограниченных областях во втором случае возникают качественно новые трудности (связанные, в частности, с нарушением гладкости решений, проверкой условий сильной эллиптичности дифференциально-разностных операторов, неустойчивостью этих условий относительно возмущений сдвигов), не имеющие места в первом случае. Таким образом, в настоящей работе задача рассматривается в максимально общей постановке.

1. Поведение решения при $y \to +\infty$

Зафиксируем произвольное вещественное x_0 и применим в (4) замену переменной $\eta = \dfrac{x_0 - \xi}{y}$. Получим, что

$$u(x_0, y) = \frac{y}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(y\eta, y) u_0(x_0 - y\eta) d\eta.$$

Функцию $y\mathcal{E}(y\eta, y)$ можно представить в виде

$$y \int\limits_0^{\infty} e^{-yG_1(\xi)} \cos\left[y\xi\eta - yG_2(\xi)\right] d\xi = y \int\limits_0^{\infty} e^{-y\xi\sqrt{\frac{\varphi(\xi)+a(\xi)+1}{2}}} \cos\left[y\xi\eta - y\xi\sqrt{\frac{\varphi(\xi)-a(\xi)-1}{2}}\right] d\xi,$$

что после замены переменных $y\xi = z$ дает следующее равенство:

$$y\mathcal{E}(y\eta, y) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}} \cos\left[z\eta - \frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right) - a\left(\frac{z}{y}\right) - 1}\right] dz.$$

Если в правой части последнего равенства перейти (формально) к пределу при $y \to +\infty$ под знаком интеграла, то получим

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-z\sqrt{a_0+1}} \cos z\eta dz = \frac{e^{-z\sqrt{a_0+1}}}{\eta^2 + a_0 + 1}\Bigg|_{z=0}^{z=+\infty} = \frac{\sqrt{a_0+1}}{\eta^2 + a_0 + 1},$$

где через a_0 обозначена постоянная $\sum\limits_{k=1}^{m} a_k$; отметим, что $a_0 + 1 \geqslant C$ (для доказательства этого факта достаточно положить $\xi = 0$ в (3)).

Таким образом, формальный переход к пределу под знаком интеграла приводит к (поточечному) предельному соотношению

$$\lim_{y\to+\infty} \left[u(x, y) - \frac{\sqrt{a_0+1}}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_0(x - yz)}{z^2 + a_0 + 1} dz\right] = 0. \tag{1.6}$$

Перейдем к обоснованию указанного предельного перехода. Докажем следующее утверждение:

Теорема 1.1. *Предельное соотношение* (1.6) *выполняется для любого вещественного* x.

Доказательство. При произвольном фиксированном вещественном x_0 рассмотрим разность

$$u(x_0, y) - \frac{\sqrt{a_0+1}}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_0(x_0 - yz)}{z^2 + a_0 + 1} dz = \tag{1.7}$$

$$= \frac{y}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(y\eta, y) u_0(x_0 - y\eta) d\eta - \frac{\sqrt{a_0+1}}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_0(x_0 - y\eta)}{\eta^2 + a_0 + 1} d\eta.$$

Используя определение функции $\mathcal{E}$, приводим эту разность к виду

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(x_0 - y\eta) \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}} \cos\left[z\eta - \frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right) - a\left(\frac{z}{y}\right) - 1}\right] dz d\eta -$$

$$- \frac{\sqrt{a_0+1}}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_0(x_0 - y\eta)}{\eta^2 + a_0 + 1} d\eta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(x_0 - y\eta) \left[\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}} \cos\left[z\eta - \frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right) - a\left(\frac{z}{y}\right) - 1}\right] dz - \frac{\sqrt{a_0+1}}{\eta^2 + a_0 + 1}\right] d\eta.$$

Второй сомножитель подынтегральной функции (в интеграле по переменной η) равен

$$\int\limits_0^{\infty} \left(e^{-\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}} \cos\left[z\eta - \frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right) - a\left(\frac{z}{y}\right) - 1}\right] - e^{-z\sqrt{a_0+1}} \cos z\eta\right) dz =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \left(e^{-\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}} \cos z\eta \cos\left[\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right) - a\left(\frac{z}{y}\right) - 1}\right] - e^{-z\sqrt{a_0+1}} \cos z\eta\right) dz +$$

$$+ \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}} \sin z\eta \sin\left[\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right) - a\left(\frac{z}{y}\right) - 1}\right] dz. \qquad (1.8)$$

Докажем, что он стремится к нулю при $y \to +\infty$ равномерно по η.

Абсолютная величина второго интеграла в последнем выражении не превосходит

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}} \left|\sin\left[\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right) - a\left(\frac{z}{y}\right) - 1}\right]\right| dz \qquad (1.9)$$

в силу условия сильной эллиптичности $1 + a(\xi) \geqslant C$ для любого вещественного ξ. С другой стороны, функция $\varphi(\xi)$ может быть представлена в виде $\sqrt{\left[1+a(\xi)\right]^2 + b^2(\xi)}$, а значит, она тоже ограничена снизу постоянной C. Отсюда вытекает, что выражение (1.9) ограничено сверху выражением

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\sqrt{C}z} \left|\sin\left[\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right) - a\left(\frac{z}{y}\right) - 1}\right]\right| dz \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\infty} e^{-\sqrt{C}z} z\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right) - a\left(\frac{z}{y}\right) - 1}\, dz.$$

Чтобы оценить последнее подкоренное выражение, представим разность $\varphi(\xi) - a(\xi) - 1$ в виде

$$\frac{\left(\left[a^2(\xi) + b^2(\xi) + 2a(\xi) + 1\right]^{\frac{1}{2}} - a(\xi) - 1\right)\left(\left[a^2(\xi) + b^2(\xi) + 2a(\xi) + 1\right]^{\frac{1}{2}} + a(\xi) + 1\right)}{\left[a^2(\xi) + b^2(\xi) + 2a(\xi) + 1\right]^{\frac{1}{2}} + a(\xi) + 1} =$$

$$= \frac{b^2(\xi)}{\left[a^2(\xi) + b^2(\xi) + 2a(\xi) + 1\right]^{\frac{1}{2}} + a(\xi) + 1}.$$

Знаменатель последней дроби равен $\varphi(\xi) + a(\xi) + 1$, что, как мы только что выяснили, ограничено снизу постоянной $2C$. Таким образом, последний интеграл не превосходит

$$\frac{1}{2\sqrt{C}}\int\limits_0^{\infty} e^{-\sqrt{C}z} z\left|b\left(\frac{z}{y}\right)\right| dz = \frac{1}{2\sqrt{C}}\left(\int\limits_0^{A} + \int\limits_A^{\infty}\right) \stackrel{\text{def}}{=} I_{1,A}(y) + I_{2,A}(y), \qquad (1.10)$$

где A — положительный параметр.

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда в силу сходимости интеграла $\int\limits_0^{\infty} ze^{-\sqrt{C}} dz$ и ограниченности функции b (например, постоянной $\sum\limits_{k=1}^{m} |a_k|$) существует такое положительное A, что $|I_{2,A}(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ для любого положительного y. Зафиксируем найденное A и найдем такое положительное y_0, что неравенство

$$\left|b\left(\frac{z}{y}\right)\right| \leqslant 2\varepsilon\sqrt{C}\left(\int\limits_0^\infty z e^{-\sqrt{C}z}dz\right)^{-1}$$

выполняется для любого y из интервала $(y_0,+\infty)$ и любого z из интервала $(0,A)$. Таким образом, $|I_{1,A}(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ для любого y из интервала $(y_0,+\infty)$. Тем самым, в силу произвольности выбора положительного ε, доказана равномерная (относительно $\eta\in\mathbb{R}^1$) сходимость к нулю второго слагаемого выражения (1.8) при $y\to+\infty$. Теперь оценим его первое слагаемое

$$\int\limits_0^\infty \left(e^{-\frac{z}{\sqrt2}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}}\cos\left[\frac{z}{\sqrt2}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)-a\left(\frac{z}{y}\right)-1}\right]-e^{-z\sqrt{a_0+1}}\right)\cos z\eta dz.$$

Разобьем этот интеграл на два слагаемых аналогично (1.10). Оценка второго из этих слагаемых (т. е., интеграла по бесконечному промежутку) ничем не отличается от случая (1.10), поскольку имеем два интеграла, в каждом из которых один из сомножителей подынтегральной функции ограничен, а интеграл от другого сомножителя сходится. Чтобы оценить первое слагаемое (т. е., интеграл по конечному промежутку), отметим, что для любого вещественного η абсолютная величина этого слагаемого не превосходит

$$\int\limits_0^\infty\left|e^{-z\left[\frac{1}{\sqrt2}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}-\sqrt{a_0+1}\right]}\cos\left[\frac{z}{\sqrt2}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)-a\left(\frac{z}{y}\right)-1}\right]-1\right|e^{-z\sqrt{a_0+1}}dz, \qquad (1.11)$$

и используем полученное выше представление разности $\varphi(\xi)-a(\xi)-1$. Получим, что модуль аргумента косинуса не превосходит

$$\frac{A}{2\sqrt{C}}\left|b\left(\frac{z}{y}\right)\right| = \frac{A}{2\sqrt{C}}\left|\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{h_k z}{y}\right| \leqslant \frac{A\sum\limits_{k=1}^m|a_k h_k|}{2\sqrt{C}}\frac{z}{y}.$$

Значит, найдется такое положительное y_1, что, если $y\geqslant y_1$, то $\cos\left[\frac{z}{\sqrt2}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)-a\left(\frac{z}{y}\right)-1}\right]$ принадлежит интервалу $(1-\sqrt{\varepsilon/2A}, 1+\sqrt{\varepsilon/2A})$ для любого z из промежутка интегрирования (напомним, что в данном случае промежуток интегрирования конечен). Далее, чтобы оценить (первую) подынтегральную экспоненту, представим ее показатель в виде

$$-z\sqrt{a_0+1}\left[\sqrt{\frac{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}{2(a_0+1)}}-1\right]$$

и рассмотрим числитель последней дроби. Он равен

$$\left[a^2\left(\frac{z}{y}\right)+b^2\left(\frac{z}{y}\right)+2a\left(\frac{z}{y}\right)+1\right]^{\frac12}+a\left(\frac{z}{y}\right)+1=$$
$$=\sqrt{\left(\sum_{k=1}^m a_k\cos\frac{h_k z}{y}\right)^2+\left(\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{h_k z}{y}\right)^2+2\sum_{k=1}^m a_k\cos\frac{h_k z}{y}+1}+a\left(\frac{z}{y}\right)+1.$$

Выбрав y достаточно большим, можно сделать величину $\frac{1}{y}A\max\limits_{k=\overline{1,m}}|h_k|$ настолько малой, чтобы каждая величина $\cos\frac{h_k z}{y}$ была сколь угодно близка к единице (а каждая величина $\sin\frac{h_k z}{y}$ — к нулю) на всем промежутке интегрирования. Тогда для указанных y и вся рассматриваемая дробь сколь угодно близка к единице на всем промежутке интегрирования. Теперь выберем такое положительное y_2, что, если $y \geqslant y_2$, то

$$e^{-A\sqrt{a_0+1}\left[\sqrt{\frac{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}{2(a_0+1)}}-1\right]} \in (1-\sqrt{\varepsilon/2A},\ 1+\sqrt{\varepsilon/2A})$$

для любого z из промежутка интегрирования. Тогда тому же интервалу и для тех же значений z принадлежит и величина

$$e^{-z\sqrt{a_0+1}\left[\sqrt{\frac{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}{2(a_0+1)}}-1\right]},$$

а значит, интеграл (1.11) оценивается точно так же, как первое слагаемое из (1.10).

Таким образом, равномерная (относительно $\eta \in \mathbb{R}^1$) сходимость к нулю выражения (1.8) при $y \to +\infty$ доказана.

Осталось показать, что внутренний интеграл в представлении разности (1.7), т. е. функция

$$\int\limits_0^\infty e^{-yG_1\left(\frac{z}{y}\right)} \cos\left[z\eta - yG_2\left(\frac{z}{y}\right)\right] dz =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-yG_1\left(\frac{z}{y}\right)} \cos\left[yG_2\left(\frac{z}{y}\right)\right] \cos z\eta dz + \int\limits_0^\infty e^{-yG_1\left(\frac{z}{y}\right)} \sin\left[yG_2\left(\frac{z}{y}\right)\right] \sin z\eta dz \qquad (1.12)$$

вещественной переменной η, зависящая от положительного параметра y, оценивается сверху (по абсолютной величине) функцией вида $\dfrac{M_1}{M_2+\eta^2}$, начиная с некоторого положительного y_0.

Сделав замену переменных $\dfrac{z}{y} = \xi$, получаем, что первое и второе слагаемые выражения (1.12) равны $y\mathcal{E}_1(y\eta, y)$ и $y\mathcal{E}_2(y\eta, y)$ соответственно, где функции $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ введены в [22]. Далее, из [22] известно, что $x^2\mathcal{E}_2(x,y) = y\int\limits_0^\infty \psi(\xi)\sin x\xi d\xi$, где $\psi \in L_1(0,+\infty)$. Следовательно,

$$y^2\eta^2\mathcal{E}_2(y\eta, y) = y\int\limits_0^\infty \psi(\xi)\sin y\eta\xi d\xi,$$

т. е. $\eta^2|y\mathcal{E}_2(y\eta,y)| \leqslant \|\psi\|_1$. При $\eta \geqslant 1$ из этого неравенства вытекает оценка

$$|y\mathcal{E}_2(y\eta,y)| \leqslant \frac{\|\psi\|_1}{\eta^2} = \frac{2\|\psi\|_1}{2\eta^2} = \frac{2\|\psi\|_1}{\eta^2+\eta^2} \leqslant \frac{2\|\psi\|_1}{1+\eta^2},$$

т. е. требуемое неравенство выполняется с $M_1 = 2\|\psi\|_1$ и $M_2 = 1$. При $\eta < 1$ вернемся к представлению второго слагаемого выражения (1.12), т. е. $y\mathcal{E}_2(y\eta,y)$, в виде

$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+a\left(\frac{z}{y}\right)+1}} \sin\left[\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi\left(\frac{z}{y}\right) - a\left(\frac{z}{y}\right) - 1}\right] \sin z\eta\, dz$$

и учтем полученную выше оценку $\varphi(\xi) + a(\xi) + 1 \geqslant 2C$. Получим, что

$$|y\mathcal{E}_2(y\eta,y)| \leqslant \|e^{-\sqrt{C}z}\|_1 = \frac{2\|e^{-\sqrt{C}z}\|_1}{1+1} \leqslant \frac{2\|e^{-\sqrt{C}z}\|_1}{1+\eta^2},$$

т. е. требуемая оценка для второго слагаемого выражения (1.12) верна и при $\eta < 1$.

Теперь исследуем первое слагаемое выражения (1.12). Из [22] известно, что

$$x^2\mathcal{E}_1(x,y) = y\int\limits_0^\infty \psi_1(\xi)\cos x\xi d\xi + y\sqrt{\sum_{k=1}^m a_k + 1},$$

где $\psi_1 \in L_1(0, +\infty)$. Следовательно,

$$y^2\eta^2\mathcal{E}_1(y\eta, y) = y\int\limits_0^\infty \psi_1(\xi)\cos y\eta\xi d\xi + y\sqrt{\sum_{k=1}^m a_k + 1}, \text{ т. е. } \eta^2|y\mathcal{E}_2(y\eta, y)| \leqslant \left(\|\psi\|_1 + \sqrt{\sum_{k=1}^m a_k + 1}\right).$$

Далее вывод требуемой оценки для второго слагаемого выражения (1.12) полностью аналогичен выводу для первого слагаемого. □

2. Теорема о близости решений

Наряду с исследуемым *дифференциально-разностным* уравнением (1) рассмотрим *дифференциальное* уравнение

$$(a_0 + 1)\, u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{2.1}$$

Оно является эллиптическим в силу условия (3), поэтому существует (и притом единственное) классическое ограниченное решение задачи (2.1), (2) (см., например, [2, 7]). Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2.1. *Если условие* (3) *выполнено,* $u(x, y)$ — *решение задачи* (1)-(2)*, представленное формулой* (4)*, а* $v(x, y)$ — *классическое ограниченное решение задачи* (2.1)*,* (2)*, то*

$$\lim_{y\to+\infty}[u(x, y) - v(x, y)] = 0$$

для любого вещественного x.

Доказательство. Применяя замену переменной $yz = \xi$, представим функцию

$$\frac{\sqrt{a_0+1}}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{u_0(x - yz)}{z^2 + a_0 + 1}\, dz$$

в виде

$$\frac{\sqrt{a_0+1}}{\pi}\frac{1}{y}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{u_0(x-\xi)}{\left(\frac{\xi}{y}\right)^2 + a_0 + 1}\, d\xi = \frac{\sqrt{a+1}}{\pi}\, y\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{u_0(x-\xi)}{\xi^2 + (a_0+1)y^2}\, d\xi.$$

Последняя функция совпадает с $v(x, y)$ (см., например, [2, 7]). Теперь для завершения доказательства остается применить теорему 1.1. □

Из [4] (см. также [5]) известен следующий критерий стабилизации решений задачи (2.1), (2): *если* $x, l \in (-\infty, +\infty)$*, а* $v(x, y)$ — *классическое ограниченное решение задачи* (2.1)*,* (2)*, то* $\lim\limits_{y\to+\infty} v(x, y) = l$ *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{2R}\int\limits_{-R}^{R} u_0(x)dx = l.$$

Отсюда и из теоремы 2.1 вытекает следующее утверждение:

Следствие 2.1. *Если условие* (3) *выполнено,* $u(x, y)$ — *решение задачи* (1)-(2)*, представленное формулой* (4)*, а* $x, l \in \mathbb{R}^1$*, то* $\lim\limits_{y\to+\infty} u(x, y) = l$ *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2R}\int\limits_{-R}^{R} u_0(x)dx = l.$$

Отметим, что следствие 2.1 представляет классическую стабилизационную альтернативу: при $y \to +\infty$ решение либо имеет предел (причем один и тот же) *для каждого вещественного* x (иными словами, поточечно стабилизируется к постоянной), либо не имеет предела *ни для какого вещественного* x. А какой из этих двух альтернативных вариантов имеет место, определяется классическим критерием стабилизации Репникова—Эйдельмана (см. [13]), заключающимся в существовании предельного среднего граничной функции задачи.

Отметим также, что теорема 2.1, будучи теоремой о *близости* решений, является более сильным утверждением, чем следствие 2.1: в отличие от последнего, являющегося теоремой о *стабилизации* решения, она предоставляет определенную информацию о поведении решения даже в том случае, когда последнее не имеет предела.

Замечание 2.1. Эллиптичность «предельного» дифференциального уравнения (2.1) гарантируется тем же условием (3), которое обеспечивает разрешимость исходной нелокальной задачи и представление ее решения формулой пуассоновского типа. В модельном случае, когда нелокальный член — единственный (см. [11, 12]), ситуация такая же, однако природа этого условия менее очевидна: оно заключается в том, что коэффициент при единственном нелокальном члене по модулю меньше единицы, т. е. выглядит, как некое условие малости нелокального члена уравнения сравнительно с остальными его членами. В действительности это — условие положительной определенности оператора, что и подтверждается его формой (3) для общего случая.

3. Свойства ядра Пуассона

В классическом случае *дифференциальных* эллиптических уравнений некоторые важные свойства ядра Пуассона (такие, как положительность и величина его интеграла по всей оси x) вытекают непосредственно из явного вида указанного ядра. В рассматриваемом нами *нелокальном* случае это не так, и, в частности, вопрос о знакопостоянстве функции (5) остается открытым. Однако результаты о стабилизации, полученные в предыдущем разделе, позволяют вывести некоторые ее свойства. А именно, справедливо следующее утверждение.

Следствие 3.1. *Для любых векторов* $(a_1, \dots, a_m)$ *и* $(h_1, \dots, h_m)$, *удовлетворяющих условию* (3), *справедливо тождество*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x, y)dx = 1.$$

Доказательство. Из доказательства [22, теорема 1] ясно, что функция (5) настолько быстро убывает при $x \to \infty$ (при каждом фиксированном положительном y), что функция

$$\mathcal{E}_0(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x, y)dx \tag{3.1}$$

корректно определена на положительной полуоси. Функцию (3.1) можно представить в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(\xi, y)d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(\xi, y)\psi(x-\xi)d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x-\xi, y)\psi(\xi)d\xi,$$

где $\psi(\xi) \equiv 1$ — непрерывная и ограниченная на $(-\infty, +\infty)$ функция. Тогда в силу [22, теорема 1] функция $\mathcal{E}_0(y)$ удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению (1) в полуплоскости $\{y > 0\}$. Отсюда, поскольку $\mathcal{E}_0$ — функция только одной переменной y, вытекает, что все ее производные по x (любого порядка) тождественно равны нулю, а значит, на положительной полуоси она удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению $\mathcal{E}_0'' = 0$. Поэтому $\mathcal{E}_0(y) = py + q$, где p и q — вещественные постоянные. Кроме того, из [22, теорема 1] известно, что функция $\mathcal{E}_0(y)$ удовлетворяет задаче (1)-(2) в смысле обобщенных функций (по Гельфанду—Шилову). Поскольку эта функция — гладкая, она удовлетворяет этой задаче и в классическом смысле, а значит, $\mathcal{E}_0(0) = 1$, т. е. $q = 1$. Таким образом, на $[0, +\infty)$ справедливо тождество

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x, y)dx = py + 1, \tag{3.2}$$

где p — вещественная постоянная. Тогда

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\mathcal{E}_0(y)}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x, y)dx = \lim_{y\to+\infty} \left(p + \frac{1}{y}\right) = p.$$

С другой стороны, функция $\mathcal{E}_0(y)$ является решением задачи (1)-(2) с граничной функцией $\psi(\xi) \equiv 1$, для которого, по построению, справедлив критерий стабилизации, установленный следствием 2.1. Отсюда, поскольку $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{1}{2R}\int\limits_{-R}^{R} \psi(x)dx = 1$, вытекает, что $\lim\limits_{y\to+\infty} \mathcal{E}_0(y) = 1$, из чего следует, что постоянная p в тождестве (3.2) равна нулю. □

Автор глубоко признателен А. Л. Скубачевскому за постоянное внимание к работе, а также В. Н. Денисову и А. И. Назарову за ценные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши// Усп. мат. наук. — 1953. — *8*, № 6. — С. 3–54.
2. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические уравнения второго порядка. — М.: Мир, 1989.
3. *Гуревич П. Л.* Эллиптические задачи с нелокальными краевыми условиями и полугруппы Феллера// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *38*. — С. 3–173.
4. *Денисов В. Н.* Об асимптотике решений эллиптических уравнений// Докл. РАН. — 1993. — *329*, № 6. — С. 695–697.
5. *Денисов В. Н., Муравник А. Б.* Об асимптотике решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения в полупространстве// В сб. «Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения». — М.: Физматлит, 2003. — С. 397–417.
6. *Иванова Е. П.* О коэрцитивности дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *62*. — С. 85–99.
7. *Кондратьев В. А., Ландис Е. М.* Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. — 1988. — *32*. — С. 99–218.
8. *Муравник А. Б.* Об асимптотике решения задачи Коши для некоторых дифференциально-разностных параболических уравнений// Дифф. уравн. — 2005. — *41*, № 4. — С. 538–548.
9. *Муравник А. Б.* Об асимптотике решений некоторых параболических уравнений с нелокальными старшими членами// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2006. — *25*. — С. 143–183.
10. *Муравник А. Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *52*. — С. 3–143.
11. *Муравник А. Б.* О задаче Дирихле в полуплоскости для дифференциально-разностных эллиптических уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *60*. — С. 102–113.
12. *Муравник А. Б.* Асимптотические свойства решений задачи Дирихле в полуплоскости для некоторых дифференциально-разностных эллиптических уравнений// Мат. заметки. — 2016. — *100*, № 4. — С. 566–576.
13. *Репников В. Д., Эйдельман С. Д.* Необходимые и достаточные условия установления решения задачи Коши// Докл. АН СССР. — 1966. — *167*, № 2. — С. 298–301.
14. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *54*. — С. 3–138.
15. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами// Докл. РАН. — 1992. — *324*, № 6. — С. 1158–1163.
16. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — *26*. — С. 3–132.
17. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. II// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *33*. — С. 3–179.
18. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 3–112.
19. *Denisov V. N., Muravnik A. B.* On asymptotic behavior of solutions of the Dirichlet problem in half-space for linear and quasi-linear elliptic equations// Electron. Res. Announc. Am. Math. Soc. — 2003. — *9*. — С. 88–93.
20. *Ivanova E. P.* Elliptic differential-difference equations with incommensurable shifts of arguments// Eurasian Math. J. — 2016. — *7*, № 3. — С. 33–40.
21. *Muravnik A. B.* On the Cauchy problem for differential-difference parabolic equations with high-order nonlocal terms of general kind// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2006. — *16*, № 3. — С. 541–561.

22. *Muravnik A. B.* On the half-plane Dirichlet problem for differential-difference elliptic equations with several nonlocal terms// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — *12*, № 6. — С. 130–143.
23. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

А. Б. Муравник
АО «Концерн «Созвездие», 394018, г. Воронеж, ул. Плехановская, 14;
Российский университет дружбы народов, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: amuravnik@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-678-688 UDC 517.929

Asymptotic Properties of Solutions of Two-Dimensional Differential-Difference Elliptic Problems

© 2017 **A. B. Muravnik**

Abstract. In the half-plane $\{-\infty < x < +\infty\} \times \{0 < y < +\infty\}$, the Dirichlet problem is considered for differential-difference equations of the kind $u_{xx} + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k u_{xx}(x + h_k, y) + u_{yy} = 0$, where the amount m of nonlocal terms of the equation is arbitrary and no commensurability conditions are imposed on their coefficients $a_1, \dots, a_m$ and the parameters $h_1, \dots, h_m$ determining the translations of the independent variable x. The only condition imposed on the coefficients and parameters of the studied equation is the nonpositivity of the real part of the symbol of the operator acting with respect to the variable x.

Earlier, it was proved that the specified condition (i. e., the strong ellipticity condition for the corresponding differential-difference operator) guarantees the solvability of the considered problem in the sense of generalized functions (according to the Gel'fand—Shilov definition), a Poisson integral representation of a solution was constructed, and it was proved that the constructed solution is smooth outside the boundary line.

In the present paper, the behavior of the specified solution as $y \to +\infty$ is investigated. We prove the asymptotic closedness between the investigated solution and the classical Dirichlet problem for the differential elliptic equation (with the same boundary-value function as in the original nonlocal problem) determined as follows: all parameters $h_1, \dots, h_m$ of the original differential-difference elliptic equation are assigned to be equal to zero. As a corollary, we prove that the investigated solutions obey the classical Repnikov—Eidel'man stabilization condition: the solution stabilizes as $y \to +\infty$ if and only if the mean value of the boundary-value function over the interval $(-R, +R)$ has a limit as $R \to +\infty$.

REFERENCES

1. I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, "Preobrazovaniya Fur'e bystro rastushchikh funktsiy i voprosy edinstvennosti resheniya zadachi Koshi" [Fourier transformations for fast growing functions and questions of uniqueness of solution of the Cauchy problem], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1953, **8**, No. 6, 3–54 (in Russian).
2. D. Gilbarg and N. Trudinger, *Ellipticheskie uravneniya vtorogo poryadka* [Elliptic Partial Differential Equations of Second Order], Mir, Moscow, 1989 (Russian translation).
3. P. L. Gurevich, "Ellipticheskie zadachi s nelokal'nymi kraevymi usloviyami i polugruppy Fellera" [Elliptic problems with nonlocal boundary conditions and Feller semigroups], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **38**, 3–173 (in Russian).
4. V. N. Denisov, "Ob asimptotike resheniy ellipticheskikh uravneniy" [On asymptotics of solutions of elliptic equations], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1993, **329**, No. 6, 695–697 (in Russian).
5. V. N. Denisov and A. B. Muravnik, "Ob asimptotike resheniya zadachi Dirikhle dlya ellipticheskogo uravneniya v poluprostranstve" [On asymptotics of solutions of the Dirichlet problem for elliptic equations in a half-space], In: *Nelineynyy analiz i nelineynye differentsial'nye uravneniya* [Nonlinear Analysis and Nonlinear Differential Equations], Fizmatlit, Moscow, 2003, 397–417 (in Russian).

6. E. P. Ivanova, "O koertsitivnosti differentsial'no-raznostnykh uravneniy s nesoizmerimymi sdvigami argumentov" [On coercivity of differential-difference equations with incommensurable translations of arguments], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **62**, 85–99 (in Russian).
7. V. A. Kondrat'ev and E. M. Landis, "Kachestvennaya teoriya lineynykh differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh vtorogo poryadka" [Qualitative theory of linear second-order partial differential equations], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math.], 1988, **32**, 99–218 (in Russian).
8. A. B. Muravnik, "Ob asimptotike resheniya zadachi Koshi dlya nekotorykh differentsial'no-raznostnykh parabolicheskikh uravneniy" [On asymptotics of solutions of the Cauchy problem for some differential-difference parabolic equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2005, **41**, No. 4, 538–548 (in Russian).
9. A. B. Muravnik, "Ob asimptotike resheniy nekotorykh parabolicheskikh uravneniy s nelokal'nymi starshimi chlenami" [On asymptotics of solutions of some parabolic equations with nonlocal higher-order terms], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2006, **25**, 143–183 (in Russian).
10. A. B. Muravnik, "Funktsional'no-differentsial'nye parabolicheskie uravneniya: integral'nye predstavleniya i kachestvennye svoystva resheniy zadachi Koshi" [Functional differential parabolic equations: integral transformations and qualitative properties of the Cauchy problem solutions], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **52**, 3–143 (in Russian).
11. A. B. Muravnik, "O zadache Dirikhle v poluploskosti dlya differentsial'no-raznostnykh ellipticheskikh uravneniy" [On the Dirichlet problem for differential-difference elliptic equations in a half-plane], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **60**, 102–113 (in Russian).
12. A. B. Muravnik, "Asimptoticheskie svoystva resheniy zadachi Dirikhle v poluploskosti dlya nekotorykh differentsial'no-raznostnykh ellipticheskikh uravneniy" [Asymptotic properties of solutions of the Dirichlet problem in a half-plane for some differential-difference elliptic equations], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2016, **100**, No. 4, 566–576 (in Russian).
13. V. D. Repnikov and S. D. Eydel'man, "Neobkhodimye i dostatochnye usloviya ustanovleniya resheniya zadachi Koshi" [Necessary and sufficient conditions for stabilization of the solution of the Cauchy problem], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1966, **167**, No. 2, 298–301 (in Russian).
14. L. E. Rossovskiy, "Ellipticheskie funktsional'no-differentsial'nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii" [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 3–138 (in Russian).
15. A. L. Skubachevskiy, "Kraevye zadachi dlya differentsial'no-raznostnykh uravneniy s nesoizmerimymi sdvigami" [Boundary-value problems for differential-difference equations with incommensurable shifts], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1992, **324**, No. 6, 1158–1163 (in Russian).
16. A. L. Skubachevskiy, "Neklassicheskie kraevye zadachi. I" [Nonclassical boundary-value problems. I], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2007, **26**, 3–132 (in Russian).
17. A. L. Skubachevskiy, "Neklassicheskie kraevye zadachi. II" [Nonclassical boundary-value problems. II], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **33**, 3–179 (in Russian).
18. A. L. Skubachevskiy, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy i ikh prilozheniya" [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112 (in Russian).
19. V. N. Denisov and A. B. Muravnik, "On asymptotic behavior of solutions of the Dirichlet problem in half-space for linear and quasi-linear elliptic equations," *Electron. Res. Announc. Am. Math. Soc.*, 2003, **9**, 88–93.
20. E. P. Ivanova, "Elliptic differential-difference equations with incommensurable shifts of arguments," *Eurasian Math. J.*, 2016, **7**, No. 3, 33–40.
21. A. B. Muravnik, "On the Cauchy problem for differential-difference parabolic equations with high-order nonlocal terms of general kind," *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2006, **16**, No. 3, 541–561.
22. A. B. Muravnik, "On the half-plane Dirichlet problem for differential-difference elliptic equations with several nonlocal terms," *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, **12**, No. 6, 130–143.
23. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.

A. B. Muravnik
JSC Concern "Sozvezdie", 14 Plekhanovskaya, 394018 Voronezh, Russia;
RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., 117198 Moscow, Russia
E-mail: amuravnik@yandex.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 4 (2017). С. 689–702

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-689-702 УДК 517.984.52

ОПЕРАТОР ТИПА КАЛЬДЕРОНА—ЗИГМУНДА И ЕГО СВЯЗЬ С АСИМПТОТИЧЕСКИМИ ОЦЕНКАМИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2017 г. **А. М. САВЧУК**

Аннотация. Изучается задача об оценке выражений вида $\Upsilon(\lambda) = \sup\limits_{x\in[0,1]}\left|\int\limits_0^x f(t)e^{i\lambda t}\,dt\right|$. В частности, для случая $f \in L_p[0,1]$, $p \in (1,2]$, доказана оценка $\|\Upsilon(\lambda)\|_{L_q(\mathbb{R})} \leqslant C\|f\|_{L_p}$ для любого $q > p'$, где $1/p + 1/p' = 1$. Такая же оценка получена для пространства $L_q(d\mu)$, где $d\mu$ — произвольная мера Карлесона в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Кроме того, проведены оценки более сложных выражений типа $\Upsilon(\lambda)$, возникающих при изучении асимптотики фундаментальной системы решений систем вида $\mathbf{y}' = B\mathbf{y} + A(x)\mathbf{y} + C(x,\lambda)\mathbf{y}$ размера n при $|\lambda| \to \infty$ в подходящих секторах комплексной плоскости.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Для произвольной суммируемой на отрезке $[0,1]$ функции f положим

$$\upsilon(x,\lambda) := \int\limits_0^x f(t)e^{i\lambda t}\,dt, \tag{1.1}$$

где $x \in [0,1]$, а λ — вещественный или комплексный параметр. Дискретный аналог такого преобразования имеет вид

$$f \mapsto \{\upsilon_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}, \qquad \text{где } \upsilon_n := \int\limits_0^x f(t)e^{i\lambda_n t}\,dt. \tag{1.2}$$

Нас будет интересовать связь между степенью суммируемости функции f и функции $\upsilon(x,\lambda)$ при $\lambda \to \infty$. Наряду с функцией $\upsilon(x,\lambda)$ рассмотрим более общую ситуацию

$$\upsilon(x,\lambda;\omega) := \int\limits_0^x f(t)e^{i\lambda\omega(t)}\,dt, \tag{1.3}$$

где фазовая функция $\omega(t)$ имеет положительную почти всюду на $[0,1]$ производную $\omega' = \rho \in L_1[0,1]$ (для сокращения записи мы не будем указывать зависимость от функции ρ, если это ясно из контекста).

Нашим основным побудительным мотивом для такой постановки задачи являются вопросы об асимптотическом поведении резольвенты, собственных значений и собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов порядка $n \geqslant 2$ на отрезке $x \in [0,1]$ (см. [2, 13]). При этом

Исследования поддержаны грантом РНФ 17-11-00754.

задача оценки выражений типа (1.1) возникает в теории обыкновенных дифференциальных операторов еще на стадии получения асимптотических формул для фундаментальной системы решений соответствующего дифференциального уравнения вида $l(y) = \lambda y$ или системы дифференциальных уравнений того же вида. Библиография этой тематики весьма обширна и восходит к классическим работам Биркгофа [7] и Тамаркина [14]. Впрочем, выражения типа (1.2) возникают в этой теории вне зависимости от метода вывода асимптотических формул (по поводу сравнения методов, основанных на асимптотике фундаментальной системы решений, и методов, связанных с абстрактной теорией возмущений, см. [6]). Например (см. [3]), для оператора Штурма—Лиувилля, порождаемого выражением $l(y) = -y'' + qy$ и краевыми условиями Дирихле $y(0) = y(1) = 0$, асимптотическое представление собственных функций имеет вид

$$y_n(x) = \sin(\pi n x) + \sin(\pi n x)\left(-\int_0^x u(t)\cos(2\pi n t)dt + \int_0^1 u(t)\,(1-t)\cos(2\pi n t)dt\right) +$$
$$+ \cos(\pi n x)\left(-x\int_0^1 u(t)\sin(2\pi n t)dt + \int_0^x u(t)\sin(2\pi n t)dt\right) + \psi_n(x),$$

где $u(x) = \int_0^x q(t)\,dt$, а слагаемые $\psi_n(x)$ имеют больший порядок малости, чем первые члены представления. Что касается обобщений вида (1.3), то они естественным образом возникают при рассмотрении весовых задач типа $l(y) = \lambda\rho(x)y$.

В случае, когда точка x фиксирована, мы возвращаемся к классическому преобразованию Фурье. Хорошо известно, что если $f \in L_p[0,1]$, $p \in [1,2]$, то $\upsilon_x(\lambda) \in L_{p'}(\mathbb{R})$, где $1/p + 1/p' = 1$, а выходя в комплексную плоскость, получаем $\upsilon_x \in H^{p'}(\mathbb{C}_+)$ — пространство Харди в верхней полуплоскости. При этом преобразование $f \mapsto \upsilon$ является ограниченным линейным оператором между соответствующими пространствами. В данной работе мы покажем, в какой мере эти результаты переносятся на случай преобразования (1.1). Более точно, нас будет интересовать вывод перечисленных результатов для функций

$$\Upsilon_p(\lambda) := \left(\int_0^1 |\upsilon(x,\lambda)|^p\,dx\right)^{1/p}, \ p \in [1,\infty); \qquad \Upsilon(\lambda) := \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |\upsilon(x,\lambda)|. \tag{1.4}$$

При этом оценки для последовательностей $\{\Upsilon(\lambda_n)\}$ вытекают, в силу известной теоремы Карлесона (см. точные формулировки ниже), из оценок для нормы $\|\upsilon(x,\cdot)\|$ в соответствующем пространстве Харди.

Сформулированные выше задачи естественным образом ведут к исследованию одномерных операторов типа Кальдерона—Зигмунда. Пусть, например, $f \in L_2[0,1]$. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ определим функцию $\varphi(\lambda) := \inf\{x \in [0,1] : |\upsilon(x,\lambda)| = \Upsilon(\lambda)\}$. Несложно проверить, что эта функция измерима (более того, она является борелевской). Тогда

$$\Upsilon(\lambda) \;=\; |\upsilon(\varphi(\lambda),\lambda)| \;=\; \left|\int_{\mathbb{R}} f(t)\chi_{[0,\varphi(\lambda)]}(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| \;=\; |(\hat{f} * \hat{\chi})(\lambda)| \;=\; \left|\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda-\mu)\frac{e^{i\mu\varphi(\mu)}-1}{\mu}\,d\mu\right|.$$

Поскольку $g = \hat{f} \in L_2(\mathbb{R})$, а оператор Гильберта ограничен в $L_2(\mathbb{R})$, то $\Upsilon(\lambda) \in L_2(\mathbb{R})$ в точности тогда, когда оператор

$$T:\, g \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(\lambda-\mu)\frac{e^{i\mu\varphi(\mu)}}{\mu}\,d\mu \tag{1.5}$$

ограниченно действует в $L_2(\mathbb{R})$. Изучению такого рода операторов посвящена обширная литература. Подробный обзор можно найти в монографиях [8–10]. Тем не менее, найти в литературе подходящий результат нам не удалось. Ограниченность оператора Гильберта и его многомерных аналогов вида $\int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda-\mu)\frac{\omega(\mu)}{|\mu|}\,d\mu$ выводится с использованием однородности и «нечетности» функции $\omega(\mu)$ (равенства нулю интеграла $\int_{S^n}\omega(\mu)\,d\mu$ по единичной сфере), см. монографию Стейна [4]. Методы, описанные в [10], позволяют изучать более общие операторы вида $\int_{\mathbb{R}^n} g(\mu)K(\lambda,\mu)\,d\mu$ с ядром, имеющим особенность порядка $|\mu-\lambda|^{-n}$ на диагонали, но, так или иначе, требуют оценок на производные $\frac{\partial}{\partial\lambda}K(\lambda,\mu)$ и $\frac{\partial}{\partial\mu}K(\lambda,\mu)$. Ясно, что в нашем случае такие оценки не выполнены в силу произвольности функции $\varphi(\mu)$. В этой работе мы получим в данном направлении только простые результаты, связанные с оценками модуля интегрального ядра. В результате мы приходим к сингулярному интегральному оператору вида $\int_{\mathbb{R}} k(x-y)f(y)\,dy$. Таким операторам (их часто называют операторами конволюции) также посвящена обширная литература (см. монографии [8, 9] и библиографию в них). Применив теорему Юнга о свертке, мы докажем ограниченность оператора вида (1.5) $T: L_p(\mathbb{R})\to L_{p+\varepsilon}(\mathbb{R})$ для произвольного $\varepsilon>0$. Продвинуться дальше и доказать окончательный результат (с $\varepsilon=0$) пока не удалось[1]. При этом условие $\varepsilon>0$ нельзя опустить, если речь идет об операторе, полученном *после* оценки модуля интегрального ядра.

2. Случай $n=2$

Задача об оценке функций $\upsilon(x,\lambda)$, $\Upsilon(\lambda)$ и $\Upsilon_p(\lambda)$ в верхней полуплоскости возникает при асимптотическом анализе системы обыкновенных дифференциальных уравнений размера $n=2$ типа системы Дирака. В общем случае ситуация сложнее — мы разберем ее в следующем разделе.

Теорема 2.1. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $\rho(x)$ *суммируемы на* $[0,1]$, $\rho(x)>0$ *почти всюду, а* $\omega(x):=\int_0^x\rho(t)\,dt$. *Тогда функция*

$$\Upsilon(\lambda)=\sup_{x\in[0,1]}\int_0^x f(t)e^{i\lambda\omega(t)}\,dt$$

непрерывна и ограничена в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$ *и убывает к нулю при* $\lambda\to\infty$ *в этой полуплоскости.*

Доказательство. Поскольку функция $\upsilon(x,\lambda)$ является непрерывной функцией двух аргументов x и λ, то непрерывна и функция $\Upsilon(\lambda)=\sup_{x\in[0,1]}|\upsilon(x,\lambda)|$. Докажем ограниченность $\Upsilon(\lambda)$. Функция $\omega(t)$ абсолютно непрерывна и монотонно возрастает на $[0,1]$, а значит, имеет абсолютно непрерывную обратную функцию ω^{-1}. Положим $a:=\omega(1)$ и сделаем замену $\xi=\omega(t)\in[0,a]$, откуда

$$\Upsilon(\lambda)=\sup_{y\in[0,a]}\int_0^y f(\omega^{-1}(\xi))e^{i\lambda\xi}\cdot\frac{d\xi}{\rho(\omega^{-1}(\xi))}.$$

Обозначим $g(\xi)=\dfrac{f(\omega^{-1}(\xi))}{\rho(\omega^{-1}(\xi))}$ и заметим, что в силу той же замены,

$$\int_0^a|g(\xi)|\,d\xi=\int_0^1|f(t)|\,dt,$$

[1] В процессе подготовки статьи к печати автору удалось доказать, что результат остается верен и при $\varepsilon=0$. При $n=2$ этот факт требует применения известной теоремы Карлесона—Ханта, а при $n>2$ дополнительных рассуждений, связанных с определенной технической работой. Кроме того, соответствующие оценки удалось получить и для случая пространств Харди $T: L_p\to H^p$. Полные доказательства этих теорем будут опубликованы в следующих работах автора.

так что $g(\xi) \in L_1[0,a]$. Тогда

$$|\Upsilon(\lambda)| \leqslant \int\limits_0^a |g(\xi)|\,d\xi$$

при $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$, а доказательство убывания к нулю функции $\Upsilon(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$ в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ совпадает с доказательством леммы Римана—Лебега. Действительно, для данного $\varepsilon > 0$ найдем непрерывно дифференцируемую функцию $\widetilde{g}(\xi)$ такую, что $\int\limits_0^a |g(\xi) - \widetilde{g}(\xi)|\,d\xi < \varepsilon/2$. Тогда

$$|\Upsilon(\lambda)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sup_{x\in[0,a]} \left| \int\limits_0^x \widetilde{g}(\xi)e^{i\lambda\xi}\,d\xi \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{|\lambda|}\sup_{x\in[0,a]} \left| \widetilde{g}(x)e^{i\lambda x} - \widetilde{g}(0) - \int\limits_0^x \widetilde{g}'(x)e^{i\lambda x}\,dx \right| \leqslant \varepsilon$$

при достаточно большом $|\lambda|$. □

Напомним, что пространство Харди $H^p(\mathbb{C}_+)$, $p \in [1,\infty)$, состоит из аналитических в открытой верхней полуплоскости функций $F(\lambda)$, с конечной нормой

$$\|F(\lambda)\|_{H^p} = \sup_{\tau\geqslant 0} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |F(\sigma + i\tau)|^p\,d\sigma \right)^{1/p}.$$

Теорема Пэли—Винера утверждает, что одностороннее преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{i\lambda t} f(t)\,dt$ любой функции $f \in L_p(\mathbb{R})$, $p \in [1,2]$, есть функция пространства Харди $H^{p'}$ с сопряженным индексом $p' = p/(p-1)$ (для краткости дальнейших формулировок договоримся везде далее обозначать штрихом сопряженный индекс). Конечно, функция $\Upsilon(\lambda)$ не может лежать в пространстве Харди, поскольку она не аналитична по переменной $\lambda \in \mathbb{C}_+$, но свойства аналитичности и гладкости функции $\Upsilon(\lambda)$ нас не интересуют. Напомним, что эта функция нужна нам для оценивания остаточных членов в асимптотических формулах, возникающих в теории обыкновенных дифференциальных операторов (см., например, [3,12,13]). Таким образом, нам интересен «характер убывания» функции $\Upsilon(\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$ в $\mathbb{C}_+$. Оказывается, что в этом отношении свойства функции $\Upsilon(\lambda)$ полностью повторяют свойства функций пространства Харди $H^{p'}(\mathbb{C}_+)$.

Теорема 2.2. *Пусть функция* $\rho(x)$ *суммируема на* $[0,1]$ *и* $\operatorname*{essinf}_{x\in[0,1]} \rho(x) > 0$. *Тогда для любой* $f \in L_p[0,1]$, $p \in (1,2]$, *справедлива оценка*

$$\sup_{\tau\geqslant 0} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \Upsilon^q(\sigma + i\tau)\,d\tau \right)^{1/q} \leqslant C\|f\|_{L_p} \tag{2.1}$$

для произвольного $q > p'$, *где величина* C *зависит только от функции* $\rho(x)$ *и выбора* q.

Доказательство. Вновь положим $\xi = \omega(t) \in [0,a]$, $g(\xi) = \dfrac{f(\omega^{-1}(\xi))}{\rho(\omega^{-1}(\xi))}$ и заметим, что

$$\int\limits_0^a |g(\xi)|^p\,d\xi = \int\limits_0^1 |f(t)|^p\,\frac{dt}{|\rho(t)|^{p-1}} \leqslant C\|f\|^p_{L_p},$$

поскольку функция $\dfrac{1}{|\rho(t)|^{p-1}}$ измерима и ограничена. Теперь

$$\upsilon(x,\lambda) = \int\limits_0^y g(\xi)e^{i\lambda\xi}\,d\xi = \int\limits_0^a \chi_y(\xi)g(\xi)e^{i\lambda\xi}\,d\xi, \qquad \text{где} \quad y := \omega(x),$$

а $\chi_y(\xi)$ — характеристическая функция отрезка $[0,y]$. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}+i\tau$, где $\tau \geqslant 0$ фиксировано. Положим $\lambda=\sigma+i\tau$ и обозначим $h(\xi)=g(\xi)e^{-\tau\xi}$,

$$\hat{h}=F[h]=\int_0^a f(\xi)e^{i\sigma\xi}\,d\xi=\upsilon(1,\sigma+i\tau)$$

— преобразование Фурье функции h. Легко видеть, что

$$\upsilon(x,\lambda)=F[\chi_y\cdot h]=F[\chi_y]*F[h], \qquad \text{где } \ F[\chi_y](\mu)=\frac{e^{iy\mu}-1}{i\mu}.$$

Теперь заметим, что $|F[\chi_y](\mu)|\leqslant\varphi(\mu)$, где через $\varphi(\mu)$ мы обозначили функцию

$$\min\{a,\frac{2}{|\mu|}\}=\begin{cases} a, & \text{если } \ |\mu|\leqslant 2/a,\\ 2/|\mu|, & \text{если } \ |\mu|\geqslant 2/a.\end{cases}$$

В силу классической теоремы Пэли—Винера функция $\upsilon(1,\lambda)$ переменной $\lambda\in\mathbb{C}^+$ лежит в пространстве $H^{p'}$. При этом

$$\|\upsilon(1,\lambda)\|_{H^{p'}}\leqslant C\|g\|_{L_p}\leqslant C\|f\|_{L_p},$$

где величина C зависит только от функции ρ. По определению пространства Харди,

$$\|\upsilon(1,\sigma+i\tau)\|_{L_{p'}}\leqslant C\|f\|_{L_p}$$

(здесь $\tau\geqslant 0$ фиксировано), где C не зависит от выбора числа $\tau\geqslant 0$. Далее,

$$|\upsilon(x,\sigma+i\tau)|\leqslant\int_{\mathbb{R}}\varphi(\sigma-\mu)|\upsilon(1,\mu+i\tau)|\,d\mu$$

для любого $x\in[0,1]$, и задача сводится к оценке нормы оператора свертки с функцией φ. Мы воспользуемся здесь теоремой Юнга о свертке:

Теорема (Юнг). *Оператор свертки с функцией k, лежащей в $L_\rho(\mathbb{R})$, $1\leqslant\rho\leqslant\infty$, ограниченно действует из L_r в L_q, если $1\leqslant r\leqslant\rho'$, $1/q=1/r-1/\rho'$.*

В нашем случае $r=p'$, $q>p'$, $1/\rho=1/q+1/p$, так что $\rho\in(1,p)$, $\rho'\in(p',\infty)$ и все условия теоремы Юнга выполнены. То, что функция φ суммируема в любой степени $\rho>1$, следует из ее определения. Итак, для любого фиксированного $\tau\geqslant 0$ имеем

$$\left(\int_{\mathbb{R}}\Upsilon^q(\sigma+i\tau)\,d\sigma\right)^{1/q}=\left(\int_{\mathbb{R}}\sup_{x\in[0,1]}|\upsilon(x,\sigma+i\tau)|^q\,d\sigma\right)^{1/q}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{bR}\varphi(\sigma-\mu)|\upsilon(1,\mu+i\tau)\,d\mu\right)^q d\sigma\right)^{1/q}\leqslant C(q)\left(\int_{\mathbb{R}}|\upsilon(1,\mu+i\tau)|^{p'}\,d\mu\right)^{1/p'}\leqslant C\|f\|_{L_p},$$

где величина C зависит только от функции ρ и выбора q. Переходя к максимуму по $\tau\geqslant 0$, получаем утверждение теоремы. □

Для формулировки дальнейших результатов напомним следующее классическое определение.

Определение. Положительная мера μ с носителем в $\mathbb{C}_+$ называется *мерой Карлесона*, если величина

$$\gamma:=\sup_{x\in\mathbb{R},\,y>0}\mu(Q_{x,y})y^{-1}, \qquad Q_{x,y}=\{z:\operatorname{Re}z\in(x,x+y),\ \operatorname{Im}z\in(0,y)\}, \tag{2.2}$$

конечна.

Если μ — мера Карлесона, то (см., например, [1, теорема II.3.9])

$$\forall f\in H^r(\mathbb{C}_+): \quad \int|f|^r\,d\mu\leqslant C\|f\|^r_{H^r}, \quad \text{где } \ C=C(\gamma), \tag{2.3}$$

для любого $r\in[1,\infty)$.

Теорема 2.3. *Пусть функция $\rho(x)$ суммируема на $[0,1]$ и $\operatorname*{essinf}_{x\in[0,1]}\rho(x)>0$. Тогда для любой $f\in L_p[0,1]$, $p\in(1,2]$, и для любой меры Карлесона μ справедлива оценка*

$$\|\Upsilon\|_{L_q(\mu)}\leqslant C\|f\|_{L_p}$$

для произвольного $q>p'$, где величина C зависит только от функции $\rho(x)$, выбора q и характеристики γ меры $d\mu$.

Доказательство. Мы уже доказали, что функция $\Upsilon(\lambda)$ интегрируема в степени $q>p'$ по каждой горизонтальной прямой, лежащей в замкнутой верхней полуплоскости. Заметим теперь, что $\Upsilon(\lambda)$ субгармонична в открытой верхней полуплоскости. Действительно, пусть точка λ_0 лежит в $\mathbb{C}_+$ вместе со своей окрестностью радиуса δ. Зафиксируем $x\in[0,1]$ и запишем формулу среднего значения для голоморфной функции переменной λ:

$$\upsilon(x,\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\upsilon(x,\lambda+\delta e^{i\theta})\,d\theta.$$

Тогда

$$|\upsilon(x,\lambda)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\upsilon(x,\lambda+\delta e^{i\theta})|\,d\theta\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Upsilon(\lambda+\delta e^{i\theta})\,d\theta,$$

и остается перейти к супремуму по $x\in[0,1]$. Поскольку функция $\Upsilon(t)$, $t\in\mathbb{R}$, суммируема в степени q, то интеграл Пуассона

$$u(\lambda)=\int_{\mathbb{R}}P_\tau(\sigma-t)\Upsilon(t)\,dt,\quad \lambda=\sigma+i\tau,\qquad P_\tau(\xi)=\frac{1}{\pi}\frac{\tau}{\xi^2+\tau^2},$$

корректно определяет гармоническую в $\mathbb{C}_+$ функцию $u(\lambda)$. Эта функция непрерывна в $\overline{\mathbb{C}}_+$ и совпадает с $\Upsilon(\lambda)$ при $\lambda\in\mathbb{R}$, а значит, является гармонической мажорантой: $\Upsilon(\lambda)\leqslant|u(\lambda)|$ для всех $\lambda\in\overline{\mathbb{C}}_+$. Поскольку $\Upsilon(t)\in L_q(\mathbb{R})$, то $u(\lambda)\in H^q$ (см. [1, теорема I.3.5]), откуда $u\in L_q(d\mu)$ (см. [1, теорема II.3.9]), а значит, и $\Upsilon(\lambda)\in L_q(d\mu)$ с соответствующей оценкой на норму $\|\Upsilon(\lambda)\|_{L_q(d\mu)}\leqslant C\|\Upsilon(t)\|_{L_q(\mathbb{R})}$, где величина C зависит только от характеристики меры — числа γ. Оценка (2.1) завершает доказательство. □

Для приложений полученного результата рассмотрим следующий частный случай.

Определение. Назовем последовательность точек λ_n, $n\in\mathbb{N}$, *несгущающейся*, если

1. $\alpha_1<\operatorname{Im}\lambda_n<\alpha_2$ для некоторых α_1 и α_2, $0<\alpha_1<\alpha_2$;
2. найдется число $\beta>0$ такое, что в любом прямоугольнике $\operatorname{Re}\lambda\in[x,x+1]$, $\operatorname{Im}\lambda\in[\alpha_1,\alpha_2]$ заключено не более β элементов последовательности.

Следствие 2.1. *Пусть $\{\lambda_n\}$ — несгущающаяся последовательность. Тогда для любой функции $f\in L_p[0,1]$, $p\in(1,2]$, справедлива оценка*

$$\|\{\Upsilon(\lambda_n)\}\|_{l_q}\leqslant C\|f\|_{L_p}$$

для произвольного $q>p'$, где величина C зависит только от функции ρ, выбора q и последовательности $\{\lambda_n\}$.

Доказательство. Достаточно заметить, что мера $d\mu=\sum\delta(\lambda-\lambda_n)$ является мерой Карлесона. Действительно, для каждого прямоугольника $Q_{x,y}$ имеем

$$\mu(Q_{x,y})\leqslant\begin{cases}\beta(y+1), & \text{если } y\geqslant\alpha_1,\\ 0, & \text{если } y\in(0,\alpha_1).\end{cases}$$

Остается воспользоваться теоремой 2.3. □

Видно, что функция φ, введенная в доказательстве теоремы 2.2, не суммируема на $\mathbb{R}$, чем и продиктован выбор индекса $q \gneqq p'$. Не помогает здесь и тот факт, что функция φ лежит в слабом пространстве $L_1(\mathbb{R})$ — пространстве Лоренца[1] $L_{1,\infty}(\mathbb{R})$, поскольку в хорошо известной теореме О'Нейла (см., например, [5, 1.18.9]): *оператор свертки с функцией k, лежащей в $L_{\rho,\infty}(\mathbb{R})$, $1 < \rho < \infty$, ограниченно действует из L_r в L_q, если $1 < r < \rho'$, $1/q = 1/r - 1/\rho'$* — не выполнено условие $\rho > 1$. Нам не известно, справедливы ли утверждения теорем 2.2 и 2.3 для $q = p'$. Тем не менее, выбрать $q = p'$ можно, если ослабить норму $\|\cdot\|_{L_\infty}$, вычисляемую по переменной $x \in [0,1]$.

Теорема 2.4. *Пусть функция $\rho(x)$ суммируема на $[0,1]$ и $\operatorname*{essinf}_{x\in[0,1]} \rho(x) > 0$. Тогда для любой $f \in L_p[0,1]$, $p \in (1,2]$, для функции*

$$\Upsilon_{p'}(\lambda) = \left(\int\limits_0^1 \left| \int\limits_0^x f(t) e^{i\lambda\omega(t)}\, dt \right|^{p'} dx \right)^{1/p'}$$

справедлива оценка

$$\sup_{\tau\geqslant 0} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \big(\Upsilon_{p'}(\sigma + i\tau)\big)^{p'} d\tau \right)^{1/p'} \leqslant C\|f\|_{L_p},$$

где величина C зависит только от функции $\rho(x)$. Далее, пусть $d\mu$ — карлесонова мера в $\mathbb{C}_+$. Тогда $\Upsilon_{p'} \in L_{p'}(d\mu)$ и

$$\|\Upsilon_{p'}\|_{L_{p'}(d\mu)} \leqslant C\|f\|_{L_p},$$

где величина C зависит только от функции $\rho(x)$ и характеристики γ меры $d\mu$.

Доказательство. Пусть $\xi = \omega(t)$, $g(\xi) = \dfrac{f(\omega^{-1}(\xi))}{\rho(\omega^{-1}(\xi))}$, $\lambda = \sigma + i\tau$, где $\tau \geqslant 0$ фиксировано, $h(\xi) = g(\xi)e^{-\tau\xi}$. В силу теоремы Пэли—Винера при каждом фиксированном $x \in [0,1]$ имеем

$$\|\upsilon(x, \sigma + i\tau)\|_{L_{p'}(\mathbb{R})} \leqslant C\|\chi_y(\xi)h(\xi)\|_{L_p} \leqslant C\|f\|_{L_p},$$

где C зависит только от функции ρ. Применяя теорему Фубини к неотрицательной функции $|\upsilon(x,\sigma)|^{p'}$, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \big(\Upsilon_{p'}(\sigma + i\tau)\big)^{p'}\, d\sigma = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_0^1 |\upsilon(x, \sigma + i\tau)|^{p'}\, dx\, d\sigma =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_{\mathbb{R}} |\upsilon(x, \sigma + i\tau)|^{p'}\, d\sigma\, dx = \int\limits_0^1 \|\upsilon(x, \sigma + i\tau)\|^{p'}_{L_{p'}(\mathbb{R})}\, dx \leqslant C\|f\|^{p'}_{L_p}.$$

Остается перейти к максимуму по $\tau \geqslant 0$, и первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения проверим, что функция $\big(\Upsilon_{p'}(\lambda)\big)^{p'}$ субгармонична в $\mathbb{C}_+$. Пусть точка λ_0 лежит в $\mathbb{C}_+$ вместе со своей окрестностью радиуса δ. Зафиксируем $x \in [0,1]$ и, применив формулу среднего значения для голоморфной функции переменной λ, получим оценку

$$|\upsilon(x, \lambda_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |\upsilon(x, \lambda_0 + \delta e^{i\theta})|\, d\theta \leqslant (2\pi)^{\frac{1}{p}-1} \left(\int\limits_0^{2\pi} |\upsilon(x, \lambda_0 + \delta e^{i\theta})|^{p'} d\theta \right)^{1/p'}.$$

[1]Напомним, что пространство Лоренца $L_{\rho,\infty}(\mathbb{R})$ состоит из измеримых функций, норма которых конечна:

$$\|f\|_{L_{\rho,\infty}} := \sup_h \Big(h\, (\operatorname{mes}(\{x : |f(x)| > h\})^{1/\rho} \Big).$$

После возведения в степень p' и интегрирования по $x \in [0,1]$, имеем

$$\big(\Upsilon_{p'}(\lambda_0)\big)^{p'} = \int_0^1 |\upsilon(x,\lambda_0)|^{p'} dx \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} |\upsilon(x,\lambda_0+\delta e^{i\theta}|^{p'}\, d\theta\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\Upsilon_{p'}(\lambda_0+\delta e^{i\theta})\Big)^{p'}\, d\theta.$$

Определим гармоническую в $\mathbb{C}_+$, непрерывную в $\overline{\mathbb{C}}_+$ и совпадающую с $\big(\Upsilon_{p'}(\lambda)\big)^{p'}$ на $\mathbb{R}$ функцию $u(x)$ интегралом Пуассона

$$u(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} P_\tau(\sigma - t)\,\big(\Upsilon_{p'}(t)\big)^{p'}\, dt, \quad \lambda = \sigma + i\tau, \qquad P_\tau(\xi) = \frac{1}{\pi}\frac{\tau}{\xi^2+\tau^2}.$$

В силу субгармоничности $\big(\Upsilon_{p'}(\lambda)\big)^{p'}$ имеем $\big(\Upsilon_{p'}(\lambda)\big)^{p'} \leqslant |u(\lambda)|$ везде в $\mathbb{C}_+$. Поскольку функция $\big(\Upsilon_{p'}(t)\big)^{p'}$ суммируема на $\mathbb{R}$, то $u \in H^1(\mathbb{C}_+)$ (см. [1, теорема I.3.5]). Тогда для любой меры Карлесона $d\mu$ в $\mathbb{C}_+$ имеем $u \in L_1(d\mu)$ (см. [1, теорема II.3.9]) с оценкой $\|u\|_{L_1(d\mu)} \leqslant C\|u\|_{H^1}$, где величина C зависит только от числа γ — характеристики меры $d\mu$. Отсюда

$$\|\Upsilon_{p'}\|_{L_{p'}(d\mu)} = \|(\Upsilon_{p'})^{p'}\|_{L_1(d\mu)}^{1/p'} \leqslant \|u\|_{L_1(d\mu)}^{1/p'} \leqslant C\|u\|_{H^1}^{1/p'} \leqslant$$
$$\leqslant C\|u\|_{L_1(\mathbb{R})}^{1/p'} = C\|\,\big(\Upsilon_{p'}(t)\big)^{p'}\,\|_{L_1(\mathbb{R})}^{1/p'} = C\|\Upsilon_{p'}\|_{L_{p'}(\mathbb{R})} \leqslant C\|f\|_{L_p},$$

где величина C зависит только от характеристики γ меры $d\mu$ и функции $\rho(x)$. □

3. Случай $n > 2$

Асимптотические оценки для систем размера $n \times n$, $n > 2$, дифференциальных уравнений вида

$$\mathbf{y}'(x,\lambda) = \lambda\rho(x)B\mathbf{y}(x,\lambda) + A(x)\mathbf{y}(x,\lambda) + C(x,\lambda)\mathbf{y}(x,\lambda) \tag{3.1}$$

с постоянной матрицей B, суммируемой матрицей $A(x)$ и «малой по порядку» матрицей $C(x,\lambda)$ связаны с оценкой остаточных членов более сложного вида. При этом системы вида (3.1) естественным образом возникают при изучении обыкновенных дифференциальных операторов высокого порядка $n = 2m$ с коэффициентами-распределениями (см. [13]) и полиномиальных пучков (см. [11]). В первом случае матрица B диагональна, причем ее диагональные элементы b_j, $j = 1,\dots,n$ — корни порядка n из $(-1)^m$.

Мы будем предполагать, что b_j, $j = 1,\dots,n$ — набор попарно различных ненулевых комплексных чисел. Определим семейство секторов $\Gamma_\kappa = \{\lambda : \arg\lambda \in (\alpha_{\kappa-1},\alpha_\kappa)\}$, $\kappa = 1,\dots,J$, следующим образом. Зафиксируем два произвольных индекса $1 \leqslant k < l \leqslant n$ и рассмотрим уравнение

$$\operatorname{Re}(b_k\lambda) = \operatorname{Re}(b_l\lambda) \iff \operatorname{Re}((b_k - b_l)\lambda) = 0. \tag{3.2}$$

Легко видеть, что решением этого уравнения является некоторая прямая, проходящая через начало координат. Общее число уравнений вида (3.2) равно $n(n-1)/2$, так что в результате получаем разбиение комплексной плоскости на $1 \leqslant J \leqslant (n^2 - n)$ секторов. При $J > 1$ каждый сектор ограничен двумя полярными лучами, которые мы занумеруем по возрастанию аргумента $\alpha_0 \leqslant 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{J-1} < \alpha_J = \alpha_0 + 2\pi$. Именно при $\lambda \in \Gamma_\kappa$ система (3.1) имеет матрицу фундаментальных решений $\mathrm{Y}(x,\lambda)$ с подходящим асимптотическим поведением при $|\lambda| \to \infty$. При этом наибольший интерес для дальнейшего изучения представляют *критические полуполосы*, сосредоточенные вдоль лучей, ограничивающих сектор Γ_κ. Именно в этих полуполосах лежат (в случае регулярности по Биркгофу краевых условий) собственные значения соответствующего дифференциального оператора. Поэтому разумно искать асимптотические формулы для матрицы-функции $\mathrm{Y}(x,\lambda)$ в «расширенных» секторах.

Определим сектор $\widetilde{\Gamma}_\kappa$ как результат параллельного переноса сектора Γ_κ вдоль его биссектрисы (точнее, вдоль продолжения этой биссектрисы за пределы Γ_κ):

$$\widetilde{\Gamma}_\kappa = \widetilde{\Gamma}_\kappa(r) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda + re^{\frac{i}{2}(\alpha_{\kappa-1}+\alpha_\kappa)} \in \Gamma_\kappa\},$$

где $r > 0$ фиксировано.

Заметим, что для любой пары индексов $1 \leqslant k, l \leqslant n$ в секторе Γ_κ выполнено следующее свойство: либо $\mathrm{Re}(b_k\lambda) > \mathrm{Re}(b_l\lambda)$ для всех $\lambda \in \Gamma_\kappa$, либо $\mathrm{Re}(b_k\lambda) < \mathrm{Re}(b_l\lambda)$ для всех $\lambda \in \Gamma_\kappa$. Пусть ν — число различных чисел b_j. Перенумеруем числа b_j так, что

$$\mathrm{Re}(b_1\lambda) > \mathrm{Re}(b_2\lambda) > \dots > \mathrm{Re}(b_n\lambda) \quad \forall \lambda \in \Gamma_\kappa. \tag{3.3}$$

В секторе $\widetilde{\Gamma}_\kappa$ неравенства (3.3), естественно, не выполнены.

Лемма 3.1. *Найдутся такие числа $h > 0$ и $\lambda_0 > 0$ (они зависят от величины сдвига r), что в области $\mathcal{D}om_{\kappa,\lambda_0} := \{\lambda \in \widetilde{\Gamma}_\kappa,\ |\lambda| > \lambda_0\}$ справедливы неравенства*

$$\mathrm{Re}((b_k - b_l)\lambda) > -h, \quad 1 \leqslant k < l \leqslant n. \tag{3.4}$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что сектор $\widetilde{\Gamma}_\kappa$ ограничен лучом ℓ_1 вида $\lambda = -re^{\frac{i}{2}(\alpha_{\kappa-1}+\alpha_\kappa)} + te^{i\alpha_{\kappa-1}}$, $t > 0$, параллельным лучу $\arg\lambda = \alpha_{\kappa-1}$, и лучом ℓ_2 вида $\lambda = -re^{\frac{i}{2}(\alpha_{\kappa-1}+\alpha_\kappa)} + te^{\,i\alpha_\kappa}$, $t > 0$, параллельным лучу $\arg\lambda = \alpha_\kappa$. Очевидно, что луч ℓ вида $\lambda = a + te^{i\varphi}$, $t > 0$, начиная с некоторого t, не попадает в сектор $\Gamma = \{\lambda : \arg\lambda \in (\varphi_0, \varphi_1)\}$, если $\varphi \notin [\varphi_0, \varphi_1]$. Таким образом, луч ℓ_1 лежит, начиная с некоторого $t = t_1$, либо в секторе Γ_κ, либо в соседнем секторе $\Gamma_{\kappa-1}$ (мы считаем, что $\Gamma_0 := \Gamma_J$, а $\Gamma_{J+1} := \Gamma_1$). Первое невозможно, поскольку по определению $\widetilde{\Gamma}_\kappa \supset \Gamma_\kappa$. Аналогично, луч ℓ_2 лежит, начиная с некоторого $t = t_2$, в секторе $\Gamma_{\kappa+1}$. Выбрав число λ_0 равным максимуму из $|\ell_1(t_1)|$ и $|\ell_2(t_2)|$, получим, что область D_{κ,λ_0} вложена в объединение секторов $\Gamma_{\kappa-1} \cup \overline{\Gamma_\kappa} \cup \Gamma_{\kappa+1}$.

Зафиксируем теперь произвольную пару индексов $1 \leqslant k < l \leqslant n$ и найдем такое число h_{kl}, что неравенство $\mathrm{Re}((b_k - b_l)\lambda) > -h_{kl}$ выполнено всюду в D_{κ,λ_0}. Для этого рассмотрим $\mathbb{R}$-линейную функцию $w_{kl}(\lambda) = \mathrm{Re}((b_k - b_l)\lambda)$. Будем считать, что $b_k \neq b_l$, иначе мы положим $h_{kl} = 0$. В силу (3.3) эта функция положительна при $\lambda \in \Gamma_\kappa$. Возможны четыре случая: эта функция может оказаться положительной и в $\Gamma_{\kappa-1}$, и в $\Gamma_{\kappa+1}$. В этом случае мы положим $h_{kl} = 0$ и придем к неравенству $w_{kl}(\lambda) > -h_{kl}$ при $\lambda \in D_{\kappa,\lambda_0}$. Функция w_{kl} может оказаться положительной в $\Gamma_{\kappa-1}$ и в Γ_κ, но равной нулю на луче $\arg\lambda = \alpha_\kappa$. Тогда w_{kl} отрицательна в $\Gamma_{\kappa+1}$, а так как луч ℓ_2 параллелен лучу $\arg\lambda = \alpha_\kappa$, то w_{kl} постоянна на ℓ_2. В этом случае мы положим $h_{kl} = -w_{kl}|_{\ell_2}$. Тогда на каждом параллельном ℓ_2 луче, лежащем в полосе между лучами ℓ_2 и $\arg\lambda = \alpha_\kappa$, функция w_{kl} также постоянна и принимает значения в промежутке $(-h_{kl}, 0)$. Отсюда следует неравенство $w_{kl}(\lambda) > -h_{kl}$ в D_{κ,λ_0}. Функция w_{kl} может оказаться положительной в Γ_κ и в $\Gamma_{\kappa+1}$, но отрицательной в $\Gamma_{\kappa-1}$ — эта ситуация аналогична предыдущей, мы положим $h_{kl} = -w_{kl}|_{\ell_1}$ и вновь придем к неравенству $w_{kl}(\lambda) > -h_{kl}$ всюду в D_{κ,λ_0}. Наконец, возможен случай, когда w_{kl} положительна только в секторе Γ_κ, а в секторах $\Gamma_{\kappa-1}$ и $\Gamma_{\kappa+1}$ отрицательна. Тогда $w_{kl} = 0$ и на луче $\arg\lambda = \alpha_\kappa$, и на луче $\arg\lambda = \alpha_{\kappa-1}$. В силу линейности w_{kl} это возможно только тогда, когда эти лучи параллельны. Поскольку $\alpha_\kappa \neq \alpha_{\kappa-1}$, то $\alpha_\kappa = \alpha_{\kappa-1} + \pi$. В этом случае сектор Γ_κ превращается в полуплоскость, а значит лучи ℓ_1 и ℓ_2 составляют одну прямую. Положим $h_{kl} = -w_{kl}|_{\ell_1} = -w_{kl}|_{\ell_2}$ и вновь получим $w_{kl}(\lambda) > -h_{kl}$ в D_{κ,λ_0}. Остается обозначить $h = \max\limits_{1\leqslant k<l\leqslant n} h_{kl}$. □

Далее будем считать сектор $\widetilde{\Gamma}_\kappa$ фиксированным. При асимптотическом анализе поведения фундаментальной матрицы решений системы дифференциальных уравнений в секторе $\widetilde{\Gamma}_\kappa$ возникает задача оценивания следующих выражений:

$$v_{jkl}(s,x,\lambda) = (\pm)_{jk}(\pm)_{lk} \int q_{jl}(t) e^{(b_l-b_k)\lambda(\omega(t)-\omega(s)) + (b_j-b_k)\lambda(\omega(x)-\omega(t))}\, dt, \tag{3.5}$$

где пределы интегрирования равны (мы считаем, что интеграл равен нулю, если нижний предел больше верхнего)

$$\begin{cases} \text{от } x \text{ до } s & \text{при } j,\, l < k; \\ \text{от } \max\{x,s\} \text{ до } 1 & \text{при } j < k \leqslant l; \\ \text{от } 0 \text{ до } \min\{x,s\} & \text{при } l < k \leqslant j; \\ \text{от } s \text{ до } x & \text{при } k \leqslant j,\, l. \end{cases} \tag{3.6}$$

Здесь q_{jl} — элементы матрицы $\mathrm{Q}(x) = \mathrm{M}^{-1}(x)(\mathrm{A}(x) - \mathrm{D}(x))\mathrm{M}(x)$, $\mathrm{D}(x) = \mathrm{diag}\{a_{11}(x), \dots, a_{nn}(x)\}$ — диагональная часть матрицы A, а $\mathrm{M}(x)$ также диагональна и равна

$$\mathrm{M}(x) = \mathrm{diag}\left\{\exp\left\{\int\limits_0^x a_{1,1}(t)\,dt\right\}, \dots, \exp\left\{\int\limits_0^x a_{n,n}(t)\,dt\right\}\right\}.$$

Для нас сейчас главное то, что функции q_{jl} суммируемы на отрезке $x \in [0,1]$. Для оценки остатков в асимптотических формулах для функции $\mathrm{Y}(x,\lambda)$ будем использовать функции

$$\Upsilon(\lambda) = \Upsilon_\infty(\lambda) = \max_{j,\,k,\,l,\,s,\,x} |\upsilon_{jkl}(s,x,\lambda)|, \qquad \Upsilon(x,\lambda) = \max_{j,\,k} |\upsilon_{jkk}(0,x,\lambda)|,$$

$$\Upsilon_\mu(\lambda) = \max_{j,\,k,\,l}\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^1 |\upsilon_{jkl}(s,x,\lambda)|^\mu\,ds\,dx\right)^{1/\mu} + \max_{j,\,k}\left(\int\limits_0^1 |\upsilon_{jkk}(0,x,\lambda)|^\mu dx\right)^{1/\mu}, \tag{3.7}$$

где $\mu \in [1,\infty)$. Легко видеть, что $\Upsilon_\mu(\lambda) \leqslant \Upsilon(\lambda)$ и $\Upsilon(x,\lambda) \leqslant \Upsilon(\lambda)$ для любого $x \in [0,1]$.

Условимся называть меру $d\mu$ с носителем в $\widetilde{\Gamma}_\kappa$ *допустимой*, если она является мерой Карлесона в каждой полуплоскости $\{z : \mathrm{Re}((\beta_k - \beta_l)z) > -h\}$, $k < l$. По определению, среди пар индексов $k < l$ найдутся две пары, для которых $\mathrm{Re}((\beta_k - \beta_l)z) = 0$ на левой и правой границе сектора Γ_κ соответственно. Это означает, что мера $d\mu$ является допустимой в $\widetilde{\Gamma}_\kappa$ в точности тогда, когда величина $y^{-1}d\mu(Q_{x,y})$ ограничена сверху величиной, не зависящей от x, в то время как квадрат $Q_{x,y}$ со стороной y скользит по сторонам сектора.

Приведем важный для нас пример допустимой меры. Пусть $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность точек сектора $\widetilde{\Gamma}_\kappa$. Эта последовательность называется *несгущающейся*, если конечна величина $\omega = \sup\limits_{t>0}(n(t+1) - n(t))$. Здесь $n(t)$ — количество точек последовательности, лежащих в пересечении сектора $\widetilde{\Gamma}_\kappa$ и круга $|z| \leqslant t$ (т. е. $n(\cdot)$ — считающая функция последовательности). Положим $d\mu = \sum\limits_{n=1}^\infty \delta_{z_n}$, где δ_a — мера Дирака, сосредоточенная в точке a. Тогда $d\mu$ — допустимая мера. Действительно, легко видеть, что $\sup\limits_{t>0}(n(t+r) - n(t)) \leqslant \omega(r+1)$. Теперь, поскольку любой квадрат $Q_{x,y}$ в комплексной плоскости вкладывается в кольцо ширины $y\sqrt{2}$, то $d\mu(Q_{x,y}) \leqslant n(t + y\sqrt{2}) - n(t) \leqslant \sqrt{2}\omega(r+1)$.

Теорема 3.1. *Пусть все функции q_{jl} лежат в пространстве $L_p[0,1]$ для некоторого $p \in [1,2]$. Зафиксируем некоторую допустимую меру $d\mu$ в секторе $\widetilde{\Gamma}_\kappa$ с носителем в области $\mathcal{D}om_{\kappa,\lambda_0} = \{\lambda \in \widetilde{\Gamma} : |\lambda| > \lambda_0\}$. Тогда при любых $1 \leqslant j,\,k,\,l \leqslant n$ и $0 \leqslant s,\,x \leqslant 1$ функция $\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda)$ переменной λ, определенная выше, принадлежит пространству $L_{p'}(d\mu)$, $1/p + 1/p' = 1$. При этом*

$$\|\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda)\|_{L_{p'}(d\mu)} \leqslant C\|q_{jl}\|_{L_p[0,1]}, \tag{3.8}$$

где величина C не зависит от q, j, k, l, x и s (при этом функцию ρ, меру $d\mu$ и числа h, λ_0, введенные в лемме 3.1, мы считаем фиксированными). Похожая оценка справедлива для функции $\mathrm{Y}(\lambda)$:

$$\|\Upsilon(\lambda)\|_{L_q(d\mu)} \leqslant C\max_{j,l}\|q_{jl}\|_{L_p[0,1]} \tag{3.9}$$

для любого $q > p'$, где C зависит только от функции ρ, меры $d\mu$, чисел h и λ_0, а также от выбора индекса $q > p'$.

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев.

1. $\mathrm{Re}(b_j\lambda) > \mathrm{Re}(b_k\lambda) \geqslant \mathrm{Re}(b_l\lambda)$ в Γ_κ и $0 \leqslant s \leqslant x \leqslant 1$. В этом случае индексы располагаются в порядке $j < k \leqslant l$. Сделаем замену $\xi = \omega(t) - \omega(x)$. Тогда

$$\upsilon_{jkl}(s, x; \lambda) = \int\limits_x^1 q_{jl}(t) e^{(b_l - b_k)\lambda(\omega(t) - \omega(s)) + (b_j - b_k)\lambda(\omega(x) - \omega(t))}\, dt = \\ = -\int\limits_0^{\omega(1)-\omega(x)} f(\xi) e^{\lambda(b_l - b_j)\xi}\, d\xi \cdot e^{\lambda(b_l - b_k)(\omega(x) - \omega(s))},$$

где $f(\xi) = q_{jl}(t(\xi))/\rho(\omega^{-1}(\xi))$ (через ω^{-1} обозначено обратное к ω отображение). Заметим сразу же, что функция $e^{\lambda(b_l - b_k)(\omega(x)-\omega(s))}$ ограничена в секторе $\widetilde{\Gamma}_\kappa$ величиной e^{hp}, поскольку $\mathrm{Re}(\lambda(b_l - b_k))) \leqslant h$ (см. лемму 3.1). Далее, по условию,

$$\|f(\xi)\|^p_{L_p} = \int\limits_0^1 |q_{jl}(t)|^p |\rho(t)|^{1-p}\, dt < \infty.$$

В силу теоремы Пэли—Винера, функция $\int\limits_0^{\omega(1)-\omega(x)} f(\xi) e^{\lambda(b_l - b_j)\xi}\, d\xi$ лежит в пространстве Харди $H^{p'}$ в полуплоскости $\{\lambda : \mathrm{Re}(\lambda(b_l - b_j)) \leqslant h\}$. Из леммы 3.1 следует, что сектор $\widetilde{\Gamma}_\kappa$ вложен в эту полуплоскость, а значит $d\mu$ — мера Карлесона в ней. Учитывая (2.3), приходим к (3.8). В случае функции $\Upsilon(\lambda)$ воспользуемся теоремой 2.3, согласно которой

$$\left\| \sup_x \left| \int\limits_0^{\omega(1)-\omega(x)} f(\xi) e^{\lambda(b_l - b_j)\xi}\, d\xi \right| \right\|_{L_q(d\mu)} \leqslant C\|f\|_{L_p},$$

поскольку $d\mu$ — мера Карлесона в полуплоскости $\{\lambda : \mathrm{Re}(\lambda(b_l - b_j)) \leqslant h\}$. Остальные случаи разбираются аналогично — кратко перечислим их.

2. $\mathrm{Re}(b_j\lambda) > \mathrm{Re}(b_k\lambda) \geqslant \mathrm{Re}(b_l\lambda)$ в Γ_κ и $0 \leqslant x \leqslant s \leqslant 1$. В этом случае вновь $j < k \leqslant l$, но замена иная: $\xi = \omega(t) - \omega(s)$, откуда

$$\upsilon_{jkl}(s, x; \lambda) = -\int\limits_0^{\omega(1)-\omega(s)} f(\xi) e^{\lambda(b_l - b_j)\xi}\, d\xi \cdot e^{\lambda(b_k - b_j)(\omega(s) - \omega(x))}.$$

Дальнейшие рассуждение те же.

3. $\mathrm{Re}(b_j\lambda) > \mathrm{Re}(b_l\lambda) > \mathrm{Re}(b_k\lambda)$ в Γ_κ. Здесь $j < l < k$, функция υ_{jkl} отлична от нуля только при $x < s$, $\xi := \omega(t) - \omega(x)$, откуда

$$\upsilon_{jkl}(s, x; \lambda) = \int\limits_0^{\omega(s)-\omega(x)} f(\xi) e^{\lambda(b_l - b_j)\xi}\, d\xi \cdot e^{\lambda(b_k - b_l)(\omega(s) - \omega(x))}.$$

4. $\mathrm{Re}(b_k\lambda) \geqslant \mathrm{Re}(b_j\lambda) > \mathrm{Re}(b_l\lambda)$ в Γ_κ. Здесь $k \leqslant j < l$, функция υ_{jkl} отлична от нуля только при $x > s$, $\xi := \omega(t) - \omega(s)$, откуда

$$\upsilon_{jkl}(s, x; \lambda) = \int\limits_0^{\omega(x)-\omega(s)} f(\xi) e^{\lambda(b_l - b_j)\xi}\, d\xi \cdot e^{\lambda(b_j - b_k)(\omega(x) - \omega(s))}.$$

5. $\mathrm{Re}(b_k\lambda) \geqslant \mathrm{Re}(b_l\lambda) > \mathrm{Re}(b_j\lambda)$ в Γ_κ. Здесь $k \leqslant l \leqslant j$, функция υ_{jkl} отлична от нуля только при $x > s$, $\xi := \omega(x) - \omega(t)$, откуда

$$\upsilon_{jkl}(s, x; \lambda) = \int\limits_0^{\omega(x)-\omega(s)} f(\xi) e^{\lambda(b_j - b_l)\xi}\, d\xi \cdot e^{\lambda(b_l - b_k)(\omega(x) - \omega(s))}.$$

6. $\mathrm{Re}(b_l\lambda) > \mathrm{Re}(b_j\lambda) > \mathrm{Re}(b_k\lambda)$ в Γ_κ. Здесь $l \leqslant j < k$, функция υ_{jkl} отлична от нуля только при $x < s$, $\xi := \omega(s) - \omega(t)$, откуда

$$\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda) = \int\limits_0^{\omega(x)-\omega(s)} f(\xi)e^{\lambda(b_j-b_l)\xi}\,d\xi \cdot e^{\lambda(b_k-b_j)(\omega(s)-\omega(x))}.$$

7. $\mathrm{Re}(b_l\lambda) > \mathrm{Re}(b_k\lambda) \geqslant \mathrm{Re}(b_j\lambda)$ в Γ_κ, $0 \leqslant s \leqslant x \leqslant 1$. Здесь $l < k \leqslant j$, $\xi := \omega(s) - \omega(t)$, откуда

$$\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda) = \int\limits_0^{\omega(s)} f(\xi)e^{\lambda(b_j-b_l)\xi}\,d\xi \cdot e^{\lambda(b_j-b_k)(\omega(x)-\omega(s))}.$$

8. $\mathrm{Re}(b_l\lambda) > \mathrm{Re}(b_k\lambda) \geqslant \mathrm{Re}(b_j\lambda)$ в Γ_κ, $0 \leqslant x \leqslant s \leqslant 1$. Здесь снова $l < k \leqslant j$, $\xi := \omega(x) - \omega(t)$, откуда

$$\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda) = \int\limits_0^{\omega(x)} f(\xi)e^{\lambda(b_j-b_l)\xi}\,d\xi \cdot e^{\lambda(b_k-b_l)(\omega(s)-\omega(x))}.$$

Легко проверить, что здесь разобраны все возможные ситуации. □

Следствие 3.1. *В условиях теоремы* 3.1 *при любых* $1 \leqslant j,\, k,\, l \leqslant n$

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left\| \left(\int\limits_0^1 |\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda)|^{p'}\,ds \right)^{1/p'} \right\|_{L_{p'}(d\mu)} &\leqslant C\|f_{jl}\|_{L_p[0,a]}, \\
\sup_{0\leqslant s\leqslant 1}\left\| \left(\int\limits_0^1 |\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda)|^{p'}\,dx \right)^{1/p'} \right\|_{L_{p'}(d\mu)} &\leqslant C\|f_{jl}\|_{L_p[0,a]}, \qquad (3.10)\\
\left\| \left(\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 |\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda)|^{p'}\,ds\,dx \right)^{1/p'} \right\|_{L_{p'}(d\mu)} &\leqslant C\|f_{jl}\|_{L_p[0,a]}
\end{aligned}$$

с константами, не зависящими от j, k *и* l. *Из последнего неравенства следует, что*

$$\|\Upsilon_{p'}(\lambda)\|_{L_{p'}(d\mu)} \leqslant C \max_{1\leqslant j,\, l\leqslant n} \|f_{jl}\|_{L_p[0,a]}.$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой Тонелли (вариант теоремы Фубини).

Теорема (Тонелли). *Пусть* f — *неотрицательная* $\mu\otimes\nu$-*измеримая функция на* $X \times Y$, *где* μ *и* ν — σ-*конечные неотрицательные меры. Тогда из условия*

$$\int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y)\mu(dx) \right) \nu(dy) < \infty$$

следует, что $f \in L_1(\mu\otimes\nu)$, *причем*

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\otimes\nu) \leqslant \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y)\mu(dx) \right) \nu(dy).$$

Действительно, докажем, например, первое неравенство в (3.10). Из определения легко видеть, что функция υ_{jkl} непрерывна по переменным s, x и λ. Обозначив через K носитель меры $d\mu$, а через μ_L меру Лебега на $[0,1] \ni s$, имеем

$$\int\limits_{[0,1]\times K} |\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda)|^{p'}\,d(\mu_L\otimes d\mu) \leqslant \int\limits_0^1 \left(\int\limits_K |\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda)|^{p'}\,d\mu \right) ds \leqslant C,$$

где C не зависит от x, j, k и l. Применяя теперь классическую теорему Фубини, получим

$$\left\| \int_0^1 |\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda)|^{p'}\,ds \right\|_{L_{p'}(d\mu)}^{p'} = \int_{[0,1]\times K} |\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda)|^{p'}\,d(\mu_L \otimes d\mu) \leqslant C.$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. — М.: Мир, 1984.
2. *Мирзоев К. А., Шкаликов А. А.* Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами — распределениями// Мат. заметки. — 2016. — *99*, № 5. — С. 788–793.
3. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма—Лиувилля с потенциалами-распределениями// Тр. Моск. мат. об-ва. — 2003. — *64*. — С. 159–219.
4. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: Мир, 1973.
5. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.
6. *Шкаликов А. А.* Возмущения самосопряженных и нормальных операторов с дискретным спектром// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5 (431). — С. 113–174.
7. *Birkhoff G. D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear diferential equations containing a parameter// Trans. Am. Math. Soc. — 1908. — *9*. — С. 21–231.
8. *Grafakos L.* Classical Fourier analysis. — Springer Science+Business Media, LLC, 2008.
9. *Grafakos L.* Modern Fourier analysis. — Springer Science+Business Media, LLC, 2009.
10. *Meyer Y., Coifman R.* Wavelets Calderon—Zygmund and multilinear operators. — Cambridge Univ. Press, 1997.
11. *Rykhlov V. S.* Asymptotical formulas for solutions of linear differential systems of the first order// Result. Math. — 1999. — *36*. — С. 342–353.
12. *Savchuk A. M., Shkalikov A. A.* The Dirac operator with complex-valued summable potential// Math. Notes. — 2014. — *96*, № 5. — С. 3–36.
13. *Savchuk A. M., Shkalikov A. A.* Asymptotic formulas for fundamental system of solutions of high order ordinary differential equations with coefficients-distributions// arXiv:1704.02736, 04/2017.
14. *Tamarkin J. D.* On some general problems of the theory of ordinary linear differential operators and on expansion of arbitrary functions into series. — Petrograd, 1917.

А. М. Савчук
Россия, Москва, Ленинские горы, д.1
E-mail: artem_savchuk@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-689-702 UDC 517.984.52

The Calderon–Zygmund Operator and Its Relation to Asymptotic Estimates for Ordinary Differential Operators

© 2017 **A. M. Savchuk**

Abstract. We consider the problem of estimating of expressions of the kind $\Upsilon(\lambda) = \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x f(t)e^{i\lambda t}\,dt \right|$. In particular, for the case $f \in L_p[0,1]$, $p \in (1,2]$, we prove the estimate $\|\Upsilon(\lambda)\|_{L_q(\mathbb{R})} \leqslant C\|f\|_{L_p}$ for any $q > p'$, where $1/p + 1/p' = 1$. The same estimate is proved for the space $L_q(d\mu)$, where $d\mu$ is an arbitrary Carleson measure in the upper half-plane $\mathbb{C}_+$. Also, we estimate more complex expressions of the kind $\Upsilon(\lambda)$ arising in study of asymptotics of the fundamental system of solutions for systems of the kind $\mathbf{y}' = B\mathbf{y} + A(x)\mathbf{y} + C(x,\lambda)\mathbf{y}$ with dimension n as $|\lambda| \to \infty$ in suitable sectors of the complex plane.

REFERENCES

1. J. Garnett, *Ogranichennye analiticheskie funktsii* [Bounded Analytic Functions], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
2. K. A. Mirzoev and A. A. Shkalikov, "Differentsial'nye operatory chetnogo poryadka s koeffitsientami-raspredeleniyami" [Even-order differential operators with distributions as coefficients], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2016, **99**, No. 5, 788–793 (in Russian).
3. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, "Operatory Shturma—Liuvillya s potentsialami-raspredeleniyami" [Sturm–Liouville operators with distributions as potentials], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 2003, **64**, 159–219 (in Russian).
4. E. M. Stein, *Singulyarnye integraly i differentsial'nye svoystva funktsiy* [Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions], Mir, Moscow, 1973 (Russian translation).
5. H. Triebel, *Teoriya interpolyatsii, funktsional'nye prostranstva, differentsial'nye operatory* [Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators], Mir, Moscow, 1980 (Russian translation).
6. A. A. Shkalikov, "Vozmushcheniya samosopryazhennykh i normal'nykh operatorov s diskretnym spektrom" [Perturbations of self-adjoin operators with discrete spectrum], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5 (431), 113–174 (in Russian).
7. G. D. Birkhoff, "On the asymptotic character of the solutions of certain linear diferential equations containing a parameter," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1908, **9**, 21–231.
8. L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Springer Science+Business Media, 2008.
9. L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis*, Springer Science+Business Media, 2009.
10. Y. Meyer, R. Coifman, *Wavelets Calderon—Zygmund and Multilinear Operators*, Cambridge Univ. Press, 1997.
11. V. S. Rykhlov, "Asymptotical formulas for solutions of linear differential systems of the first order," *Result. Math.*, 1999, **36**, 342–353.
12. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, "The Dirac operator with complex-valued summable potential," *Math. Notes*, 2014, **96**, No. 5, 3–36.
13. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, "Asymptotic formulas for fundamental system of solutions of high order ordinary differential equations with coefficients-distributions," *arXiv:1704.02736*, 04/2017.
14. J. D. Tamarkin, *On Some General Problems of the Theory of Ordinary Linear Differential Operators and on Expansion of Arbitrary Functions into Series*, Petrograd, 1917.

A. M. Savchuk
Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskiye Gory, 119992 Moscow, Russia
E-mail: artem_savchuk@mail.ru