

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ



СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 63, № 3, 2017

Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-3

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Главный редактор

Р. В. Гамкрелидзе,

д.ф.-м.н., профессор,
академик РАН, Математический
институт им. В. А. Стеклова
РАН (Москва, Россия)

E-mail: gam@mi.ras.ru

Зам. главного редактора

А. Л. Скубачевский,

д.ф.-м.н., профессор,
Российский университет
дружбы народов (Москва,
Россия)

E-mail: skub@lector.ru

Ответственный секретарь

Е. М. Варфоломеев,

к.ф.-м.н., Российский
университет дружбы народов
(Москва, Россия)

E-mail: journal.cmfd@gmail.com

Члены редакционной коллегии

А. А. Аграчев, д.ф.-м.н., профессор, Международная школа передовых исследований (SISSA) (Триест, Италия), Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (Москва, Россия)

Е. С. Голод, д.ф.-м.н., профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (Москва, Россия)

Н. Д. Копачевский, д.ф.-м.н., профессор, Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского (Симферополь, Россия)

П. С. Красильников, д.ф.-м.н., профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (Москва, Россия)

А. В. Овчинников, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (Москва, Россия)

В. Л. Попов, д.ф.-м.н., профессор, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (Москва, Россия)

А. В. Сарычев, д.ф.-м.н., профессор, Флорентийский университет (Флоренция, Италия)

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print)

4 выпуска в год

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.

Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.

Индексируется в международных базах данных научных публикаций *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.

Языки: русский, английский.

Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences (New York)*.

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты. Объем статьи, занимающий целый том, должен составлять 140–170 страниц в стиле нашего журнала.

Правила оформления статей, архив публикаций и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала на Общероссийском математическом портале: <http://www.mathnet.ru/cmfd>.

Редактор: Е. М. Варфоломеев

Компьютерная верстка: Е. М. Варфоломеев

Адрес редакции:

115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

тел. +7 495 955-07-10; e-mail: journal.cmfd@gmail.com

Подписано в печать 29.09.2017. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 20,46. Тираж 150 экз. Заказ 1533.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Российский университет дружбы народов» (РУДН)

117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Макляя, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3

тел. +7 495 952-04-41; e-mail: ipk@rudn.university

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)



CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 63, No. 3, 2017

Differential and Functional Differential Equations

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-3

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Founded in 2003

Founder: PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA

EDITOR-IN-CHIEF

Revaz Gamkrelidze,
Steklov Mathematical Institute of
Russian Academy of Sciences
(Moscow, Russia)
E-mail: gam@mi.ras.ru

DEPUTY EDITOR

Alexander Skubachevskii,
RUDN University
(Moscow, Russia)
E-mail: skub@lector.ru

EXECUTIVE SECRETARY

Evgeniy Varfolomeev,
RUDN University
(Moscow, Russia)
E-mail: journal.cmfd@gmail.com

EDITORIAL BOARD

Andrei Agrachev, International School for Advanced Studies (SISSA) (Trieste, Italy), Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia)

Evgeniy Golod, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russia)

Nikolai Kopachevskii, Vernadskiy Tavricheskiy National University (Simferopol', Russia)

Pavel Krasil'nikov, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

Andrei Ovchinnikov, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russia)

Vladimir Popov, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia)

Andrei Sarychev, University of Florence (Florence, Italy)

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS
Published by the Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University),
Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print)

4 issues per year

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Reviewed in *MathSciNet* and *Zentralblatt Math*.

Languages: Russian, English.

English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences (New York)*.

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results. Occupying the whole volume, an article should make up 140–170 pages in the format of the journal.

Guidelines for authors, archive of issues, and other information can be found at the journal's website at *All-Russian Mathematical Portal*: <http://www.mathnet.ru/eng/cmfd>.

Editor: E. M. Varfolomeev

Computer design: E. M. Varfolomeev

Address of the Editorial Office:

3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia

Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: journal.cmfd@gmail.com

Printing run 150 copies.

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia

6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

Printed at RUDN Publishing House:

3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia

Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: ipk@rudn.university

СОДЕРЖАНИЕ

О лакунах в нижней части спектра периодического магнитного оператора в полосе (<i>Д. И. Борисов</i>)	373
Оптимальные возмущения систем с запаздывающим аргументом для управления динамикой инфекционных заболеваний на основе многокомпонентных воздействий (<i>Г. А. Бочаров, Ю. М. Нечепуренко, М. Ю. Христиченко, Д. С. Гребенников</i>)	392
Лагранжевы представления для линейного и нелинейного переноса (<i>С. Бьянкини, П. Боникатто, Э. Маркони</i>)	418
Метод монотонных решений для уравнений реакции-диффузии (<i>В. Вольперт, В. Вугальтер</i>)	437
Динамические системы и топология магнитных полей в проводящей среде (<i>В. З. Гринес, Е. В. Жужома, О. В. Починка</i>)	455
Об энтропийных решениях анизотропных эллиптических уравнений с переменными показате- лями нелинейностей в неограниченных областях (<i>Л. М. Кожевникова</i>)	475
О формуле объема гиперболического четырехмерного симплекса (<i>В. А. Краснов</i>)	494
Об эллиптичности гиперупругих моделей, восстанавливаемых по экспериментальным дан- ным (<i>В. Ю. Саламатова, Ю. В. Василевский</i>)	504
Частичное сохранение частот и показателей Флоке инвариантных торов в обратимом контек- сте 2 теории КАМ (<i>М. Б. Севрюк</i>)	516

CONTENTS

On Lacunas in the Lower Part of the Spectrum of the Periodic Magnetic Operator in a Strip (<i>D. I. Borisov</i>)	373
Optimal Perturbations of Systems with Delayed Argument for Control of Dynamics of Infectious Diseases Based on Multicomponent Actions (<i>G. A. Bocharov, Yu. M. Nechepurenko, M. Yu. Khristichenko, D. S. Grebennikov</i>)	392
Lagrangian Representations for Linear and Nonlinear Transport (<i>S. Bianchini, P. Bonicatto, E. Marconi</i>)	418
Method of Monotone Solutions for Reaction-Diffusion Equations (<i>V. Volpert, V. Vougalter</i>) . .	437
Dynamical Systems and Topology of Magnetic Fields in Conducting Medium (<i>V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, O. V. Pochinka</i>)	455
On Entropy Solutions of Anisotropic Elliptic Equations with Variable Nonlinearity Indices (<i>L. M. Kozhevnikova</i>)	475
On the Volume Formula for Hyperbolic 4-Dimensional Simplex (<i>V. A. Krasnov</i>)	494
On Ellipticity of Hyperelastic Models Based on Experimental Data (<i>V. Yu. Salamatova, Yu. V. Vasilevskii</i>)	504
Partial Preservation of Frequencies and Floquet Exponents of Invariant Tori in the Reversible KAM Context 2 (<i>M. B. Sevryuk</i>)	516

О ЛАКУНАХ В НИЖНЕЙ ЧАСТИ СПЕКТРА ПЕРИОДИЧЕСКОГО МАГНИТНОГО ОПЕРАТОРА В ПОЛОСЕ

© 2017 г. Д. И. БОРИСОВ

Аннотация. В работе рассматривается периодический магнитный оператор Шредингера в бесконечной плоской прямой полосе. Показано, что при определенных условиях на магнитный потенциал и достаточно малом периоде нижняя часть зонного спектра не содержит внутренних лакун. Длина нижней части зонного спектра, в которой гарантируется отсутствие внутренних лакун, получена в явном виде. Верхняя оценка на величину малого параметра, гарантирующая описанный выше результат, также получена в виде конкретного числа.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение		373
2. Постановка задачи и основные результаты		374
3. Считающие функции		375
4. Отсутствие лакун		378
Список литературы		389

1. ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день гипотеза Бете—Зоммерфельда, предполагающая конечность числа внутренних спектральных лакун у многих периодических дифференциальных операторов, установлена доказана для ряда операторов в многомерных пространствах. Все они представляют собой оператор с постоянными коэффициентами с возмущением меньшего порядка. Гипотеза Бете—Зоммерфельда была доказана для оператора Шредингера с периодическим потенциалом разных размерностей с различными потенциалами [4, 5, 13, 14, 17, 20]. Случай магнитного оператора Шредингера был разобран в статьях [15, 16]. В работах [7, 18, 19] гипотеза была доказана для полигармонического оператора с различными возмущениями, в том числе, для псевдодифференциального оператора меньшего порядка. Дальнейшие работы по данной теме можно найти в списках литературы цитированных статей.

Смысл гипотезы Бете—Зоммерфельда состоит в том, что в верхней части спектра, то есть выше (правее) некоторой точки, отсутствуют внутренние лакуны. Независимо можно рассматривать и другую интересную задачу об отсутствии лакун в нижней части спектра, то есть ниже (левее) некоторой точки. Насколько нам известно, первый подобный результат содержится в [4, гл. 15]. Здесь рассматривался оператор Лапласа в многомерном пространстве размерности три и больше, возмущенный ограниченным самосопряженным периодическим оператором. Было доказано (теоремы 15.2 и 16.2), что при достаточно малой норме возмущающего оператора в спектре рассматриваемого оператора вовсе нет спектральных лакун.

В 2017 г. появилась новая работа, где рассматривался более простой вопрос об отсутствии лакун лишь в нижней части спектра, но для более сложного оператора [1]. Здесь вместо возмущения оператором вводилась периодическая смена типа краевого условия. Основным результатом этой работы — отсутствие внутренних лакун в нижней части спектра для достаточно малых периодов. При этом верхняя оценка на допустимые значения периодов была получена в максимально явном

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01004).

виде конкретного числа. Длина нижней части спектра, в которой гарантируется отсутствие лакун, также была получена в виде явной несложной функции периода.

Исследование периодического дифференциального оператора с малым периодом в [1] мотивировано в определенной степени относительно недавними работами по усреднению операторов с быстро осциллирующими коэффициентами и различными возмущениями из теории граничного усреднения в областях типа полос и бесконечных цилиндров [3, 6, 8–12]. В случае чисто периодических возмущений все рассматриваемые операторы оказывались периодическими с малым периодом. Один из основных полученных результатов — это равномерная резольвентная сходимости возмущенных операторов к усредненным. Отсюда вытекает сходимость спектров возмущенных операторов к спектрам усредненных, в которых могут отсутствовать внутренние лакуны. Однако результаты о сходимости устроены таким образом, что отсутствие внутренних лакун в спектре усредненных операторов не означает отсутствие лакун в спектре возмущенных операторов. Единственное, что здесь можно утверждать — это увеличение длины части спектра, свободной от лакун, для возмущенного оператора. С помощью двучленных асимптотик первых зонных функций, построенных в [8–10] для оператора Лапласа с частой сменой краевых условий, можно получить оценку длины такой зоны — по крайней мере, это есть величина порядка $O(\varepsilon^{-2})$, где ε — период. В работе [1] для длины первой зоны получен существенно лучший результат — по крайней мере, это величина порядка $O(\varepsilon^{-6})$, причем длина выписана явно, без каких-либо оценок с неизвестными константами.

Настоящую работу можно рассматривать как продолжение исследований, начатых в статье [1]. Здесь мы рассматриваем магнитный оператор в полосе с краевым условием Дирихле. Магнитный потенциал предполагается периодическим и не слишком большим по модулю. Показано, что при достаточно малом периоде в нижней части спектра отсутствуют внутренние лакуны. Верхняя оценка на период, гарантирующая такой результат, получена явно. Длина нижней части спектра, в которой гарантированно отсутствуют лакуны, также выписана в виде явной функции от периода; вид функции весьма простой. В настоящей работе мы использовали в целом тот же подход, что и в [1]. Однако специфика магнитного поля потребовала определенных изменений. Кроме того, многие оценки в процессе доказательств мы провели более аккуратным образом по сравнению с [1], что несколько усложнило счет, но позволило в итоге расширить интервал значений малого параметра, на котором имеется описанный эффект.

Отметим еще, что данную работу можно рассматривать как первый шаг к доказательству усиленной гипотезы Бете—Зоммерфельда, предложенной в работе [1]. Суть этой гипотезы — полное отсутствие внутренних лакун в спектрах многомерных операторов при достаточно малом периоде. Вместе с тем, техники настоящей работы недостаточно для доказательства такой гипотезы и необходимо привлекать дополнительные новые идеи.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $x = (x_1, x_2)$ — декартовы координаты на плоскости, Π — горизонтальная полоса ширины π , а именно, $\Pi := \{x : 0 < x_2 < \pi\}$, ε — положительное число. Через $A^\varepsilon = A^\varepsilon(x) = (A_1^\varepsilon(x), A_2^\varepsilon(x))$ обозначим магнитный потенциал, где $A_j^\varepsilon(x) = A_j\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2\right)$, $j = 1, 2$, и функции $A_j(y_1, y_2)$ вещественны и 2π -периодичны по y_1 . Также предполагаем, что функции A_j измеримы и выполнена оценка:

$$|A_1(y_1, y_2)|^2 + |A_2(y_1, y_2)|^2 \leq a^2 < 1, \quad a = \text{const}, \quad y_1 \in \mathbb{R}, \quad y_2 \in [0, \pi]. \quad (2.1)$$

В настоящей работе рассматривается магнитный оператор Шредингера

$$\mathcal{H}_\varepsilon := (i\nabla + A^\varepsilon)^2$$

в полосе Π с краевым условием Дирихле. Строго его определяем как самосопряженный оператор в $L_2(\Pi)$, соответствующий квадратичной форме

$$\mathfrak{h}_\varepsilon[u] := \|(i\nabla + A^\varepsilon)u\|_{L_2(\Pi)}^2$$

в $L_2(\Pi)$ на области определения $\dot{W}_2^1(\Pi)$, где $\dot{W}_2^1(\Pi)$ — пространство Соболева функций из $W_2^1(\Pi)$ с нулевым следом на $\partial\Pi$.

Через $[\cdot]$ обозначим целую часть числа, через $\sigma(\cdot)$ — спектр оператора.

Оператор \mathcal{H}_ε имеет зонный спектр, который вводится как объединение образов зонных функций. Наш основной результат устанавливает отсутствие внутренних лакун в нижней части спектра оператора \mathcal{H}_ε .

Теорема 2.1. Пусть выполнено условие (2.1) и

$$0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \frac{17567}{10^6}, \quad \varepsilon_1 := \frac{539772289\sqrt{509}}{63625 \cdot 10^7 \sqrt{\pi+1}} < \varepsilon_0. \quad (2.2)$$

Обозначим:

$$K_\varepsilon := \begin{cases} 3, & \varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0, \\ \max\{3, [\mu^2(\varepsilon)] + 1\}, & \varepsilon < \varepsilon_1, \end{cases}$$

где

$$\mu(\varepsilon) := \frac{\beta}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{\beta^2}{\varepsilon^2} - 4\gamma}, \quad \beta := \frac{539772289\sqrt{2}}{15625 \cdot 10^6(\pi+1)}, \quad \gamma := \frac{1018}{625(\pi+1)}.$$

Тогда часть спектра

$$[0, (K_\varepsilon - \varepsilon a)^2 \varepsilon^{-2}] \cap \sigma(\mathcal{H}_\varepsilon)$$

оператора \mathcal{H}_ε не содержит внутренних лакун.

Обсудим кратко теорему. Основная ее суть — это отсутствие лакун в нижней части спектра при достаточно малом периоде у рассматриваемого оператора. Под нижней частью спектра понимается зона спектра от начала до некоторой точки; в нашем случае это точка $(K_\varepsilon - \varepsilon a)^2 \varepsilon^{-2}$. Теорема гарантирует отсутствие лакун только в данной части спектра. Выше (правее) указанной точки спектр может как иметь, так и не иметь внутренние лакуны, наша теорема по этому поводу ничего не утверждает.

Длина указанной нижней части спектра зависит от периода, причем чем меньше период, тем больше данная длина. Как следует из формулы для K_ε , при $\varepsilon \rightarrow +0$ длина данной части спектра растет по крайней мере как $O(\varepsilon^{-6})$. Этот результат существенно лучше оценки, которую можно получить на основе двучленных асимптотик первых зонных функций аналогично работам [8–10] — здесь максимально возможная оценка есть величина $O(\varepsilon^{-2})$. Наша оценка схожа по порядку с аналогичной оценкой работы [1].

Обсудим еще методику настоящей работы. В целом она воспроизводит подход работы [1]. Однако здесь имеется ряд отличий. Первое из них состоит в том, что необходимые оценки считающих функций для магнитного оператора, которые мы приводим в следующем разделе, потребовали определенных усилий и их вывод отличается от простого применения принципа минимакса в работе [1]. Следующее отличие состоит в том, что ключевой параметр τ_{max} , который вводится в четвертом разделе, здесь выбирается ближе к значениям, подсказанным предварительным численным счетом. Кроме того, многочисленные технические оценки в четвертом разделе проведены аккуратнее, нежели в [1], что в итоге привело к увеличению константы ε_0 по сравнению с аналогичной константой из цитированной работы.

Условие (2.1) является существенным и используется в доказательстве одной из ключевых лемм, леммы 3.2, в следующем разделе. В случае нарушения условия (2.1) утверждение леммы 3.2, видимо, также будет нарушаться, что делает неприменимыми дальнейшие рассуждения доказательства теоремы 2.1.

3. СЧИТАЮЩИЕ ФУНКЦИИ

В настоящем разделе приводится первая часть доказательства теорем 2.1.

Через \square_ε обозначим ячейку периодичности $\square_\varepsilon := \{x : |x_1| < \varepsilon\pi, 0 < x_2 < \pi\}$. Зонные функции оператора \mathcal{H}_ε — это упорядоченные по возрастанию с учетом кратностей собственные значения $E_k^\varepsilon(\tau, A)$, $k \geq 1$, оператора

$$\mathcal{H}_\varepsilon(\tau, A) := \left(i \frac{\partial}{\partial x_1} + A_1^\varepsilon + \frac{\tau}{\varepsilon} \right)^2 + \left(i \frac{\partial}{\partial x_2} + A_2^\varepsilon \right)^2$$

на \square_ε с краевым условием Дирихле на $\partial\square_\varepsilon \cap \partial\Pi$ и периодическими краевыми условиями на боковых сторонах \square_ε . Строго оператор $\mathcal{H}_\varepsilon(\tau)$ вводим как самосопряженный оператор в $L_2(\square_\varepsilon)$, соответствующий квадратичной форме

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(\tau, A)[u] := \left\| \left(i \frac{\partial}{\partial x_1} + A_1^\varepsilon + \frac{\tau}{\varepsilon} \right) u \right\|_{L_2(\square_\varepsilon)}^2 + \left\| \left(i \frac{\partial}{\partial x_2} + A_2^\varepsilon \right) u \right\|_{L_2(\square_\varepsilon)}^2, \quad \tau \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \quad (3.1)$$

в $L_2(\square)$ на области определения $\dot{W}_{2,per}^1(\square)$, где последнее пространство вводится как множество функций из $W_2^1(\square_\varepsilon)$, удовлетворяющих периодическому краевому условию на боковых сторонах \square_ε и имеющих нулевой след на $\partial\Pi \cap \partial\square_\varepsilon$.

В силу положительности формы $\mathfrak{h}_\varepsilon(\tau, A)$ собственные значения $E_k^\varepsilon(\tau, A)$ неотрицательны для всех значений ε, τ, k .

Для произвольного $L > 0$ через $N_\varepsilon(L^2, \tau, A)$ обозначим масштабированную считающую функцию оператора $\mathcal{H}_\varepsilon(\tau, A)$, а именно, число собственных значений $E_k^\varepsilon(\tau, A)$, не превосходящих $\frac{L^2}{\varepsilon^2}$:

$$N_\varepsilon(L^2, \tau, A) := \max \left\{ k : E_k^\varepsilon(\tau, A) \leq \frac{L^2}{\varepsilon^2} \right\}.$$

Отметим, что при $A = 0$ считающая функция $N_\varepsilon(L^2, \tau, 0)$ соответствует оператору Лапласа.

Для всех $L > 0$ число зонных функций $E_k^\varepsilon(\tau, A)$, чьи минимумы не превосходят $\frac{L^2}{\varepsilon^2}$, совпадает с $\sup_\tau N_\varepsilon(L^2, \tau, A)$. Аналогично, число зонных функций, чьи максимумы не превосходят $\frac{L^2}{\varepsilon^2}$, дается числом $\inf_\tau N_\varepsilon(L^2, \tau, A)$. Поэтому условие перекрытия соседних зон спектра, $[\min_\tau E_k^\varepsilon(\tau, A), \max_\tau E_k^\varepsilon(\tau, A)]$ и $[\min_\tau E_{k+1}^\varepsilon(\tau, A), \max_\tau E_{k+1}^\varepsilon(\tau, A)]$, эквивалентно неравенству

$$\sup_\tau N_\varepsilon(L^2, \tau, A) - \inf_\tau N_\varepsilon(L^2, \tau, A) \geq 1 \quad (3.2)$$

для всех L , удовлетворяющих неравенству

$$\min_\tau E_k^\varepsilon(\tau, A) \leq \frac{L^2}{\varepsilon^2} \leq \max_\tau E_{k+1}^\varepsilon(\tau, A).$$

Следовательно, отсутствие лагун в части спектра $[\lambda_-, \lambda_+]$ оператора \mathcal{H}_ε эквивалентно выполнению неравенства (3.2) для $L^2 \in [\varepsilon^2 \lambda_-, \varepsilon^2 \lambda_+]$.

Отметим, что при $A = 0$ собственные значения и собственные функции оператора $\mathcal{H}_\varepsilon(\tau, 0)$ легко находятся разделением переменных

$$E_k^\varepsilon(\tau, 0) = \frac{(n + \tau)^2}{\varepsilon^2} + m^2, \quad \Psi_k^\varepsilon(x) = e^{\frac{inx_1}{\varepsilon}} \sin mx_2, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (3.3)$$

где индекс k следует выбирать из условия упорядочения собственных значений $\frac{(n + \tau)^2}{\varepsilon^2} + m^2$.

Далее нам понадобятся две вспомогательные леммы.

Лемма 3.1. Для всех ε, L, k, τ выполнено неравенство

$$N_\varepsilon(L^2, \tau, 0) \leq N_\varepsilon((L + \varepsilon a)^2, \tau, A),$$

где a — из (2.1).

Доказательство. Выберем $L > 0$, и пусть $E_k^\varepsilon(\tau, 0)$ — собственные значения Лапласиана $\mathcal{H}_\varepsilon(\tau, 0)$, удовлетворяющие условию

$$E_k^\varepsilon(\tau, 0) \leq \frac{L^2}{\varepsilon^2}, \quad k = 1, \dots, N_\varepsilon(L^2, \tau, 0).$$

Через u обозначим произвольную линейную комбинацию собственных функций Ψ_k^ε , соответствующих $E_k^\varepsilon(\tau, 0)$. Тогда в силу (2.1), (3.1), (3.3) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{h}_\varepsilon(\tau, A)[u]}{\|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}^2} &\leq \frac{\mathfrak{h}_\varepsilon(\tau, 0)[u] + 2a(\mathfrak{h}_\varepsilon(\tau, 0)[u])^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)} + a^2\|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}^2}{\|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}^2} \leq \\ &\leq E_k^\varepsilon(\tau, 0) + 2a(E_k^\varepsilon(\tau, 0))^{\frac{1}{2}} + a^2 \leq \left(\frac{L}{\varepsilon} + a\right)^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Таким образом, в области определения формы $\mathfrak{h}_\varepsilon(\tau, A)$ найдено подпространство размерности $N_\varepsilon(L^2, \tau, A)$ такое, что для всех $u \neq 0$ из этого подпространства выполнено неравенство (3.4). Отсюда в силу принципа минимакса уже вытекает требуемая оценка. \square

Лемма 3.2. Для всех k, ε, τ справедливы неравенства

$$E_k^\varepsilon(\tau, A) \geq \left(\sqrt{E_k^\varepsilon(\tau, 0)} - a\right)^2 \quad (3.5)$$

и при $L \geq \varepsilon a$

$$N_\varepsilon(L^2, \tau, 0) \geq N_\varepsilon((L - \varepsilon a)^2, \tau, A). \quad (3.6)$$

Доказательство. Ясно, что оценка (3.6) есть прямое следствие неравенств (3.5), поэтому достаточно доказать только последние неравенства.

Для всех $u \in \dot{W}_{2,per}^1(\square_\varepsilon)$ очевидным образом имеем:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_\varepsilon(\tau, A)[u] &\geq \mathfrak{h}_\varepsilon(\tau, 0)[u] - 2a(\mathfrak{h}_\varepsilon(\tau, 0)[u])^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)} + a^2\|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}^2 = \\ &= \left((\mathfrak{h}_\varepsilon(\tau, 0)[u])^{\frac{1}{2}} - a\|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}\right)^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

И так как функция u обращается в нуль на $\partial\square_\varepsilon \cap \partial\Pi$, то

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(\tau, 0)[u] = \|\nabla u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}^2 \geq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\|_{L_2(\square_\varepsilon)}^2 \geq \|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}^2 > a^2\|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}^2. \quad (3.8)$$

Поэтому в силу принципа минимакса и соотношений (2.1), (3.7) выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} E_k^\varepsilon(\tau, A) &= \sup_{u_1, \dots, u_{k-1} \in L_2(\square_\varepsilon)} \inf_{\substack{u \in \dot{W}_{2,per}^1(\square_\varepsilon) \\ (u, u_j)_{L_2(\square_\varepsilon)} = 0, j=1, \dots, k-1}} \frac{\mathfrak{h}_\varepsilon(\tau, A)[u]}{\|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}^2} \geq \\ &\geq \sup_{u_1, \dots, u_{k-1} \in L_2(\square_\varepsilon)} \inf_{\substack{u \in \dot{W}_{2,per}^1(\square_\varepsilon) \\ (u, u_j)_{L_2(\square_\varepsilon)} = 0, j=1, \dots, k-1}} \frac{\left((\mathfrak{h}_\varepsilon(\tau, 0)[u])^{\frac{1}{2}} - a\|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}\right)^2}{\|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}^2} = \\ &= \sup_{u_1, \dots, u_{k-1} \in L_2(\square_\varepsilon)} \inf_{\substack{u \in \dot{W}_{2,per}^1(\square_\varepsilon) \\ (u, u_j)_{L_2(\square_\varepsilon)} = 0, j=1, \dots, k-1}} \left(\frac{\|\nabla u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}}{\|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}} - a\right)^2 = \\ &= \left(\left(\sup_{u_1, \dots, u_{k-1} \in L_2(\square_\varepsilon)} \inf_{\substack{u \in \dot{W}_{2,per}^1(\square_\varepsilon) \\ (u, u_j)_{L_2(\square_\varepsilon)} = 0, j=1, \dots, k-1}} \frac{\|\nabla u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}}{\|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}} \right)^{\frac{1}{2}} - a \right)^2 = \\ &= \left(\sqrt{E_k^\varepsilon(\tau, 0)} - a\right)^2, \end{aligned}$$

что завершает доказательство леммы. \square

Из доказанных лемм выводим двустороннюю оценку считающей функции $N_\varepsilon(L^2, \tau, A)$:

$$N_\varepsilon((L - \varepsilon a)^2, \tau, 0) \leq N_\varepsilon(L^2, \tau, A) \leq N_\varepsilon((L + \varepsilon a)^2, \tau, 0).$$

Из этой оценки следует, что

$$\begin{aligned} \sup_{\tau} N_{\varepsilon}(L^2, \tau, A) &\geq \sup_{\tau} N_{\varepsilon}((L - \varepsilon a)^2, \tau, 0), \\ \inf_{\tau} N_{\varepsilon}(L^2, \tau, A) &\leq \inf_{\tau} N_{\varepsilon}((L + \varepsilon a)^2, \tau, 0). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Тогда для выполнения неравенства (3.2) достаточно потребовать выполнения условия

$$\sup_{\tau} N_{\varepsilon}((L - \varepsilon a)^2, \tau, 0) - \inf_{\tau} N_{\varepsilon}((L + \varepsilon a)^2, \tau, 0) \geq 1.$$

В свою очередь, для проверки этого неравенства достаточно подобрать точки $\tau_{min}, \tau_{max} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ такие, что

$$N_{\varepsilon}((L - \varepsilon a)^2, \tau_{max}, 0) - N_{\varepsilon}((L + \varepsilon a)^2, \tau_{min}, 0) \geq 1. \quad (3.10)$$

Для упрощения обозначений положим

$$M_{\varepsilon}(L^2, \tau) := N_{\varepsilon}(L^2, \tau, 0).$$

Тогда неравенство (3.10) переписывается в виде

$$M_{\varepsilon}((L - \varepsilon a)^2, \tau_{max}) - M_{\varepsilon}((L + \varepsilon a)^2, \tau_{min}) \geq 1.$$

Так как величины $M_{\varepsilon}((L - \varepsilon a)^2, \tau_{max})$ и $M_{\varepsilon}((L + \varepsilon a)^2, \tau_{min})$ целочисленные, то для проверки последнего неравенства достаточно проверить, что

$$M_{\varepsilon}((L - \varepsilon a)^2, \tau_{max}) - M_{\varepsilon}((L + \varepsilon a)^2, \tau_{min}) > 0. \quad (3.11)$$

Именно это неравенство мы и будем проверять далее в доказательстве теоремы 2.1.

Отметим еще, что если при некотором L и некотором $\tau_{min} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ выполнено

$$M_{\varepsilon}((L + \varepsilon a)^2, \tau_{min}) = 0, \quad (3.12)$$

то это означает, что в спектре оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon}$ ниже (левее) точки $\frac{L^2}{\varepsilon^2}$ отсутствуют внутренние лакуны. Действительно, в этом случае в силу (3.9)

$$\inf_{\tau} N_{\varepsilon}(L^2, \tau, A) = 0$$

и это означает, что ниже (левее) точки $\frac{L^2}{\varepsilon^2}$ отсутствуют максимумы зонных функций $E_k^{\varepsilon}(\tau, A)$.

При $A = 0$ функции $E_k^{\varepsilon}(\tau, 0)$ даются формулами (3.3), а потому $M_{\varepsilon}(L^2, \tau)$ есть число точек (n, m) , $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{(n + \tau)^2}{\varepsilon^2} + m^2 \leq \frac{L^2}{\varepsilon^2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} M_{\varepsilon}(L^2, \tau) &= \#\{(n, m) : (n + \tau)^2 + \varepsilon^2 m^2 \leq L^2, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\} = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}: |n + \tau| \leq L} \left[\frac{\sqrt{L^2 - (n + \tau)^2}}{\varepsilon} \right] = \sum_{n = -[L + \tau]}^{[L - \tau]} \left[\frac{\sqrt{L^2 - (n + \tau)^2}}{\varepsilon} \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

4. ОТСУТСТВИЕ ЛАКУН

В настоящем разделе мы заканчиваем доказательство теоремы 2.1, начатое в выше. Здесь нашей целью будет проверка неравенства (3.11) с подходящими τ_{min}, τ_{max} для максимально возможных значений L . Ключевым моментом станет достаточно нетривиальный выбор чисел τ_{min}, τ_{max} .

Вначале выясним положение нижней границы спектра оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon}$. Согласно диамагнитному неравенству, см., например, [2, гл. 7, § 7.21], для всех $u \in \dot{W}_2^1(\Pi)$ верно неравенство

$$\|(\nabla + iA^{\varepsilon})u\|_{L_2(\Pi)}^2 \geq \|\nabla|u|\|_{L_2(\Pi)}^2.$$

Отсюда в силу принципа минимакса выводим оценку для нижнего края спектра оператора \mathcal{H}_ε :

$$\inf \sigma(\mathcal{H}_\varepsilon) = \inf_{\substack{u \in \dot{W}_2^1(\Pi) \\ u \neq 0}} \frac{\|(\nabla + iA^\varepsilon)u\|_{L_2(\Pi)}^2}{\|u\|_{L_2(\Pi)}^2} \geq \inf_{\substack{u \in \dot{W}_2^1(\Pi) \\ u \neq 0}} \frac{\|\nabla|u|\|_{L_2(\Pi)}^2}{\|u\|_{L_2(\Pi)}^2} = \inf_{\substack{u \in \dot{W}_2^1(\Pi) \\ u \neq 0}} \frac{\|\nabla u\|_{L_2(\Pi)}^2}{\|u\|_{L_2(\Pi)}^2} \geq 1,$$

где в последнем неравенстве мы воспользовались оценкой (3.8). Таким образом, достаточно рассмотреть значения $L \geq \varepsilon$.

Рассмотрим значения $\varepsilon \leq L < \frac{1}{2} - \varepsilon a$. Положим $\tau_{min} := \frac{1}{2}$. Тогда на основе формул (3.13) несложно проверить, что выполнено равенство (3.12) и, следовательно, ниже (левее) точки $\frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2} - \varepsilon a \right)^2$ в спектре оператора \mathcal{H}_ε отсутствуют внутренние лакуны.

Переходим к случаю

$$L \geq \frac{1}{2} - \varepsilon a. \tag{4.1}$$

Обозначим: $K := [L + \varepsilon a]$, $\alpha := L + \varepsilon a - K$ — дробная часть числа $L + \varepsilon a$, так что

$$L + \varepsilon a = K + \alpha. \tag{4.2}$$

Величины τ_{min} , τ_{max} будем выбирать по следующим правилам:

$$\tau_{min} := \begin{cases} \alpha & \text{при } 0 \leq \alpha < \frac{1}{2}, \\ 1 - \alpha & \text{при } \frac{1}{2} \leq \alpha < 1, \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\tau_{max} := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } 0 \leq \alpha \leq \frac{13}{100} \text{ или } \frac{39267}{62500} \leq \alpha \leq 1, \\ 0 & \text{при } \frac{13}{100} < \alpha < \frac{39267}{62500}. \end{cases}$$

Поясним указанный выбор чисел τ_{min} , τ_{max} . Ясно, что наиболее оптимальный выбор этих чисел — это точка глобального минимума функции $M_\varepsilon(L + \varepsilon a, \tau)$ по τ в качестве τ_{min} и точка глобального максимума $M_\varepsilon(L - \varepsilon a, \tau)$ в качестве τ_{max} . Отыскать аналитически подобные точки экстремума — крайне нетривиальная задача. Вместе с тем, предварительные численные эксперименты показали, что при указанном выборе τ_{min} и τ_{max} соответствующие значения функций $M_\varepsilon(L + \varepsilon a, \tau_{min})$ и $M_\varepsilon(L - \varepsilon a, \tau_{max})$ близки к экстремальным. Окончательный вид числовых констант в определении τ_{max} уточнялся из условия максимальности константы ε_0 в рамках аналитических вычислений, которые мы приводим ниже.

Ввиду указанного выбора чисел τ_{min} и τ_{max} далее мы будем рассматривать отдельно четыре случая:

$$0 \leq \alpha \leq \frac{13}{100}, \quad \frac{13}{100} < \alpha < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{39267}{62500}, \quad \frac{39267}{62500} \leq \alpha < 1.$$

Напомним также, что всюду далее считаем выполненным условие (4.1).

Для рассмотрения указанных случаев нам понадобятся предварительные вспомогательные оценки.

4.1. Вспомогательные оценки. Положим:

$$F_0(L, \xi, t) := 2F_1(L, \xi, 0) - F_1(L, \xi, t) - F_1(L, \xi, -t), \quad F_1(L, \xi, t) := \sqrt{L^2 - (\xi + t)^2}.$$

Несложно проверить, что

$$F_0(L, \xi, t) = t^2 \left(\frac{1}{F_2(L, \xi, 0, t)} + \frac{1}{F_2(L, \xi, 0, -t)} \right) + \frac{8t^2 \xi^2}{F_2(L, \xi, 0, t)F_2(L, \xi, 0, -t)F_2(L, \xi, t, -t)},$$

$$F_2(L, \xi, t, s) := F_1(L, \xi, t) + F_1(L, \xi, s).$$

Следовательно, функция $F_0(L, \xi, A)$ положительна при положительных подкоренных выражениях в ее определении. Кроме того, при $A \geq 0$, $\xi \geq A$, $\xi + A \leq L$ монотонно возрастает по ξ и выполнено

неравенство:

$$F_0(L, \xi, t) \geq t^2 \left(\frac{1}{F_1(L, \xi, -t)} + \frac{\xi^2}{F_1^3(L, \xi, -t)} \right) \geq t^2 \frac{L^2 + 2t(\xi - t)}{(L^2 - (\xi - t)^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.4)$$

Непосредственными вычислениями легко проверить, что

$$F_3(L, s, \xi) := F_1(L + s, \xi, 0) - F_1(L - s, \xi, 0) = \frac{4sL}{F_1(L + s, \xi, 0) + F_1(L - s, \xi, 0)}.$$

И так как в силу выпуклости функции $z \mapsto \sqrt{z^2 - 1}$ верна оценка

$$F_1(L + s, \xi, 0) + F_1(L - s, \xi, 0) \leq 2F_1(L, \xi, 0),$$

то имеем:

$$F_3(L, s, \xi) \leq \frac{2sL}{\sqrt{L^2 - \xi^2}}. \quad (4.5)$$

4.2. Случай $0 \leq \alpha \leq \frac{13}{100}$. В данном случае из (4.1) следует, что $K \geq 1$.

Из (3.13), (2.2), (4.3) выводим:

$$\begin{aligned} M_\varepsilon(L - \varepsilon a, \tau_{max}) - M_\varepsilon(L + \varepsilon a, \tau_{min}) &= M_\varepsilon\left(L - \varepsilon a, \frac{1}{2}\right) - M_\varepsilon(L + \varepsilon a, \alpha) = \\ &= \sum_{n=-K}^{K-1} \left[\frac{\sqrt{(L - \varepsilon a)^2 - (n + \frac{1}{2})^2}}{\varepsilon} \right] - \sum_{n=-K}^K \left[\frac{\sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (n + \alpha)^2}}{\varepsilon} \right] = \\ &= \sum_{n=-K}^{K-1} \left[\frac{\sqrt{(L - \varepsilon a)^2 - (n + \frac{1}{2})^2}}{\varepsilon} \right] - \sum_{n=-K}^{K-1} \left[\frac{\sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (n + \alpha)^2}}{\varepsilon} \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{K-1} \left(2 \left[\frac{\sqrt{(L - \varepsilon a)^2 - (n + \frac{1}{2})^2}}{\varepsilon} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (n + \alpha)^2}}{\varepsilon} \right] - \left[\frac{\sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (n + 1 - \alpha)^2}}{\varepsilon} \right] \right). \end{aligned}$$

И так как $z - 1 \leq [z] \leq z$, имеем:

$$M_\varepsilon(L - \varepsilon a, \tau_{max}) - M_\varepsilon(L + \varepsilon a, \tau_{min}) \geq \frac{S_1(L, \varepsilon)}{\varepsilon} - 2K, \quad (4.6)$$

где

$$S_1(L, \varepsilon) := \sum_{n=0}^{K-1} F_4(L, n, \varepsilon), \quad (4.7)$$

$$F_4(L, \xi, \varepsilon) := 2\sqrt{(L - \varepsilon a)^2 - \left(\xi + \frac{1}{2}\right)^2} - \sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (\xi + \alpha)^2} - \sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (\xi + 1 - \alpha)^2}.$$

Рассмотрим отдельно случаи $K = 1, 2$. Здесь функция S_1 имеет вид:

$$S_1(L, \varepsilon) = 2\sqrt{(1 + \alpha - 2\varepsilon a)^2 - \frac{1}{4}} - \sqrt{(1 + \alpha)^2 - \alpha^2} - \sqrt{(1 + \alpha)^2 - (1 - \alpha)^2}$$

при $K = 1$ и

$$\begin{aligned} S_1(L, \varepsilon) &= 2\sqrt{(2 + \alpha - 2\varepsilon a)^2 - \frac{1}{4}} - \sqrt{(2 + \alpha)^2 - \alpha^2} - \sqrt{(2 + \alpha)^2 - (1 - \alpha)^2} + \\ &\quad + 2\sqrt{(2 + \alpha - 2\varepsilon a)^2 - \frac{9}{4}} - \sqrt{(2 + \alpha)^2 - (1 + \alpha)^2} - \sqrt{(2 + \alpha)^2 - (2 - \alpha)^2} \end{aligned}$$

при $K = 2$. В обоих случаях минимум правых частей достигается при $\alpha = \frac{13}{100}$, $\varepsilon a = \varepsilon_0$. Здесь и всюду далее подобные утверждения проверяются вычислением соответствующих производных. В работе мы не приводим данных вычислений, чтобы не перегружать текст громоздкими техническими вычислениями. В результате имеем:

$$S_1(L, \varepsilon) \geq S_1(L, \varepsilon) \Big|_{\substack{\alpha = \frac{13}{100} \\ \varepsilon a = \varepsilon_0}} > \frac{29}{5} \varepsilon_0 \quad \text{при } K = 1,$$

$$S_1(L, \varepsilon) \geq S_1(L, \varepsilon) \Big|_{\substack{\alpha = \frac{13}{100} \\ \varepsilon a = \varepsilon_0}} > \frac{11}{2} \varepsilon_0 \quad \text{при } K = 2.$$

Отсюда и из (4.6) вытекает, что

$$M_\varepsilon(L - \varepsilon a, \tau_{max}) - M_\varepsilon(L + \varepsilon a, \tau_{min}) > \frac{3}{2} \tag{4.8}$$

при $K = 1, 2$.

Далее рассматриваем случай $K \geq 3$. Функцию F_4 представим в виде:

$$F_4(L, \xi, \varepsilon) = F_0\left(L + \varepsilon a, \xi + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) - 2F_3\left(L, \varepsilon a, \xi + \frac{1}{2}\right). \tag{4.9}$$

Из свойств функции F_0 , описанных в пункте 4.2, следует положительность величины $F_0\left(L + \varepsilon a, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right)$ и оценка

$$\sum_{n=0}^{K-1} F_0\left(L + \varepsilon a, n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) \geq F_0\left(L + \varepsilon a, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) + \int_0^{K-1} F_0\left(L + \varepsilon a, \xi + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) d\xi. \tag{4.10}$$

Оценим снизу интеграл в последнем неравенстве. В силу (4.4) имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^{K-1} F_0\left(L + \varepsilon a, \xi + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha, 0\right) dx &\geq \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^2 \int_0^{K-1} \frac{(K + \alpha)^2 + (1 - 2\alpha)(\xi + \alpha)}{\left((K + \alpha)^2 - (\xi + \alpha)^2\right)^{\frac{3}{2}}} d\xi = \\ &= \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^2 \int_\alpha^{K-1+\alpha} \frac{(K + \alpha)^2 + (1 - 2\alpha)\xi}{\left((K + \alpha)^2 - \xi^2\right)^{\frac{3}{2}}} d\xi = \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^2 \frac{\xi + 1 - 2\alpha}{\sqrt{(K + \alpha)^2 - \xi^2}} \Big|_\alpha^{K-1+\alpha} = \\ &= \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^2 \left(\frac{K - \alpha}{\sqrt{2(K + \alpha) - 1}} - \frac{1 - \alpha}{\sqrt{K^2 + 2\alpha K}} \right). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Применяя оценку (4.5) с $s = \varepsilon a$, $\xi = n + \alpha$ и $\xi = n + 1 - \alpha$, немедленно получаем:

$$\begin{aligned} -2 \sum_{n=0}^{K-1} F_3\left(L, \varepsilon a, \xi + \frac{1}{2}\right) &\geq - \sum_{n=0}^{K-1} \frac{4\varepsilon a L}{\sqrt{L^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}} \geq \\ &\geq -4\varepsilon a L \left(\frac{1}{\sqrt{L^2 - \frac{1}{4}}} + \int_{\frac{1}{2}}^{K-\frac{1}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{L^2 - \xi^2}} \right) = \\ &= -4\varepsilon a L \left(\frac{1}{\sqrt{L^2 - \frac{1}{4}}} + \arcsin\left(\frac{K - \frac{1}{2}}{L}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{2L}\right) \right) \geq \\ &\geq -\frac{105697}{5 \cdot 10^4} \varepsilon a - 4\varepsilon a \left(K - \frac{1}{2}\right) \frac{L}{K - \frac{1}{2}} \arcsin\left(\frac{K - \frac{1}{2}}{L}\right). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Воспользуемся теперь тем, что функция $z \mapsto \frac{\arcsin z}{z}$ монотонно растет при $z \in [0, 1]$ и ограничена сверху константой $\frac{\pi}{2}$. Тогда окончательно выводим:

$$-2 \sum_{n=0}^{K-1} F_3 \left(L, \varepsilon a, \xi + \frac{1}{2} \right) \geq -\frac{105697}{5 \cdot 10^4} \varepsilon a - 2\pi \varepsilon a \left(K - \frac{1}{2} \right). \quad (4.13)$$

Из последней оценки, (4.7), (4.9), (4.10), (4.11) получаем оценку для S_1 в случае $K \geq 3$:

$$S_1(L, \varepsilon) \geq F_5(K, \alpha) - \varepsilon a \left(2\pi K + \pi - \frac{105697}{5 \cdot 10^4} \right),$$

$$F_5(K, \alpha) := 2\sqrt{(K + \alpha)^2 - \frac{1}{4}} - \sqrt{(K + \alpha)^2 - \alpha^2} - \sqrt{(K + \alpha)^2 - (1 - \alpha)^2} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - \alpha \right)^2 \left(\frac{K - \alpha}{\sqrt{2(K + \alpha) - 1}} - \frac{1 - \alpha}{\sqrt{K^2 + 2\alpha K}} \right).$$

Минимум функции F_5 достигается при $\alpha = \frac{13}{100}$. Кроме того, функция

$$K \mapsto \frac{F_5 \left(K, \frac{13}{100} \right)}{\sqrt{K}}$$

монотонно убывает по $K \geq 2$ и потому

$$\frac{F_5 \left(K, \frac{13}{100} \right)}{\sqrt{K}} \geq \frac{F_5 \left(K, \frac{13}{100} \right)}{\sqrt{K}} \Big|_{K=+\infty} > \frac{1369\sqrt{2}}{2 \cdot 10^4}.$$

Следовательно,

$$S_1(L, \varepsilon) \geq \frac{1369\sqrt{2}}{2 \cdot 10^4} \sqrt{K} - \varepsilon a \left(2\pi K + \pi - \frac{105697}{5 \cdot 10^4} \right).$$

Таким образом, из (4.6) окончательно выводим:

$$M_\varepsilon(L - \varepsilon a, \tau_{max}) - M_\varepsilon(L + \varepsilon a, \tau_{min}) \geq Q_1(K, a, \varepsilon), \quad (4.14)$$

$$Q_1(K, a, \varepsilon) := \frac{1369\sqrt{2} \sqrt{K}}{2 \cdot 10^4} - a \left(2\pi K + \pi - \frac{105697}{5 \cdot 10^4} \right)$$

при $K \geq 3$.

4.3. Случай $\frac{13}{100} < \alpha < \frac{1}{2}$. Как и в предыдущем случае, здесь условие (4.1) вновь означает, что $K \geq 1$. Согласно (3.13), (2.2), (4.3) имеем:

$$M_\varepsilon(L - \varepsilon a, \tau_{max}) - M_\varepsilon(L + \varepsilon a, \tau_{min}) = M_\varepsilon(L - \varepsilon a, 0) - M_\varepsilon(L + \varepsilon a, \alpha) =$$

$$= \sum_{n=-K}^K \left[\frac{\sqrt{(L - \varepsilon a)^2 - n^2}}{\varepsilon} \right] - \sum_{n=-K}^{K-1} \left[\frac{\sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (n + \alpha)^2}}{\varepsilon} \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{K-1} \left(2 \left[\frac{\sqrt{(L - \varepsilon a)^2 - n^2}}{\varepsilon} \right] - \left[\frac{\sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (n + \alpha)^2}}{\varepsilon} \right] - \left[\frac{\sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (n - \alpha)^2}}{\varepsilon} \right] \right) +$$

$$+ \left[\frac{L - \varepsilon a}{\varepsilon} \right] - \left[\frac{\sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - \alpha^2}}{\varepsilon} \right] + 2 \left[\frac{\sqrt{(L - \varepsilon a)^2 - K^2}}{\varepsilon} \right] - \left[\frac{\sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (K - \alpha)^2}}{\varepsilon} \right],$$

откуда следует:

$$M_\varepsilon(L - \varepsilon a, \tau_{max}) - M_\varepsilon(L + \varepsilon a, \tau_{min}) \geq \frac{S_2(L, \varepsilon)}{\varepsilon} - 2K - 1, \quad (4.15)$$

где

$$S_2(L, \varepsilon) := \sum_{n=1}^{K-1} F_6(L, n, \varepsilon) + F_7(L, \varepsilon), \tag{4.16}$$

$$F_6(L, \xi, \varepsilon) := 2\sqrt{(L - \varepsilon a)^2 - \xi^2} - \sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (\xi + \alpha)^2} - \sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (\xi - \alpha)^2},$$

$$F_7(L, \varepsilon) := L - \varepsilon a - \sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - \alpha^2} + 2\sqrt{(L - \varepsilon a)^2 - K^2} - \sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (K - \alpha)^2}.$$

Вновь случаи $K = 1, 2$ рассматриваем отдельно. Имеем:

$$S_2(L, \varepsilon) = 1 + \alpha - 2\varepsilon a - \sqrt{(1 + \alpha)^2 - \alpha^2} + 2\sqrt{(1 + \alpha - 2\varepsilon a)^2 - 1} - \sqrt{(1 + \alpha)^2 - (1 - \alpha)^2}$$

при $K = 1$ и

$$S_2(L, \varepsilon) = 2\sqrt{(2 + \alpha - 2\varepsilon a)^2 - 1} - \sqrt{(2 + \alpha)^2 - (1 + \alpha)^2} - \sqrt{(2 + \alpha)^2 - (1 - \alpha)^2} + \\ + 2 + \alpha - 2\varepsilon a - \sqrt{(2 + \alpha)^2 - \alpha^2} + 2\sqrt{(2 + \alpha - 2\varepsilon a)^2 - 4} - \sqrt{(2 + \alpha)^2 - (2 - \alpha)^2}$$

при $K = 2$. Минимумы этих функций достигаются при $\alpha = \frac{13}{100}$, $\varepsilon a = \varepsilon_0$, то есть,

$$S_2(L, \varepsilon) \geq S_2(L, \varepsilon) \Big|_{\substack{\alpha = \frac{13}{100} \\ \varepsilon a = \varepsilon_0}} > 8\varepsilon_0 \quad \text{при } K = 1,$$

$$S_2(L, \varepsilon) \geq S_2(L, \varepsilon) \Big|_{\substack{\alpha = \frac{13}{100} \\ \varepsilon a = \varepsilon_0}} > 7\varepsilon_0 \quad \text{при } K = 2.$$

Тогда при $K = 1, 2$ в силу (4.15)

$$M_\varepsilon(L - \varepsilon a, \tau_{max}) - M_\varepsilon(L + \varepsilon a, \tau_{min}) > 2. \tag{4.17}$$

Далее рассматриваем случай $K \geq 3$. Функцию F_6 представим в виде

$$F_6(L, \xi, \varepsilon) = F_0(L + \varepsilon a, \xi, \alpha) - 2F_3(L, \varepsilon a, \xi). \tag{4.18}$$

Аналогично (4.10) имеем:

$$\sum_{n=1}^{K-1} F_0(L + \varepsilon a, n, \alpha) \geq F_0(L + \varepsilon a, 1, \alpha) + \int_1^{K-1} F_0(L + \varepsilon a, \xi, \alpha) d\xi.$$

Используя оценку (4.4), аналогично (4.11) получаем:

$$\int_1^{K-1} F_0(L + \varepsilon a, \xi, \alpha) d\xi \geq \alpha^2 \int_1^{K-1} \frac{(K + \alpha)^2 + 2\alpha(\xi - \alpha)}{((K + \alpha)^2 - (\xi - \alpha)^2)^{\frac{3}{2}}} d\xi = \alpha^2 \int_{1-\alpha}^{K-1-\alpha} \frac{(K + \alpha)^2 + 2\alpha\xi}{((K + \alpha)^2 - \xi^2)^{\frac{3}{2}}} d\xi = \\ = \alpha^2 \frac{\xi + 2\alpha}{\sqrt{(K + \alpha)^2 - \xi^2}} \Big|_{1-\alpha}^{K-1-\alpha} = \alpha^2 \left(\frac{K + \alpha - 1}{\sqrt{(2K - 1)(2\alpha + 1)}} - \frac{1 + \alpha}{\sqrt{(K + \alpha)^2 - (1 - \alpha)^2}} \right).$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{K-1} F_0(L + \varepsilon a, n, \alpha) \geq 2\sqrt{(K + \alpha)^2 - 1} - \sqrt{(K + \alpha)^2 - (1 + \alpha)^2} - \sqrt{(K + \alpha)^2 - (1 - \alpha)^2} + \\ + \alpha^2 \left(\frac{K + \alpha - 1}{\sqrt{(2K - 1)(2\alpha + 1)}} - \frac{1 + \alpha}{\sqrt{(K + \alpha)^2 - (1 - \alpha)^2}} \right).$$

Аналогично (4.12), (4.13) выводим:

$$-2 \sum_{n=1}^{K-1} F_3(L, \varepsilon a, \xi) \geq -4\varepsilon a L \left(\frac{1}{\sqrt{L^2 - 1}} + \int_1^{K-1} \frac{d\xi}{\sqrt{L^2 - \xi^2}} \right) \geq \\ \geq -4\varepsilon a L \left(\frac{1}{\sqrt{L^2 - 1}} + \arcsin \left(\frac{K - 1}{L} \right) - \arcsin \left(\frac{1}{L} \right) \right) \geq$$

$$\geq -\frac{3841}{25000}\varepsilon a - 2\pi\varepsilon a(K-1).$$

Складывая последние две оценки и учитывая (4.18), (4.16), приходим к следующему неравенству:

$$S_2(L, \varepsilon) \geq F_8(K, \alpha, \varepsilon) - 2\pi\varepsilon a(K-1) - \frac{53841}{25 \cdot 10^3}\varepsilon a, \tag{4.19}$$

$$F_8(K, \alpha, \varepsilon) := K + \alpha - \sqrt{(K + \alpha)^2 - \alpha^2} + 2\sqrt{(K + \alpha - 2\varepsilon a)^2 - K^2} - \\ - \sqrt{(K + \alpha)^2 - (K - \alpha)^2} + 2\sqrt{(K + \alpha)^2 - 1} - \sqrt{(K + \alpha)^2 - (1 + \alpha)^2} - \\ - \sqrt{(K + \alpha)^2 - (1 - \alpha)^2} + \alpha^2 \left(\frac{K + \alpha - 1}{\sqrt{(2K - 1)(2\alpha + 1)}} - \frac{1 + \alpha}{\sqrt{(K + \alpha)^2 - (1 - \alpha)^2}} \right).$$

Для функции F_8 верна оценка

$$\frac{F_8(K, \alpha, \varepsilon)}{\sqrt{K}} \geq \frac{F_8(K, \alpha, \varepsilon)}{\sqrt{K}} \Big|_{K=+\infty, \alpha=\frac{13}{100}, \varepsilon=\varepsilon_0} > \frac{1607}{10^4}.$$

Следовательно, в силу (4.19), (4.15) выполнено:

$$M_\varepsilon(L - \varepsilon a, \tau_{max}) - M_\varepsilon(L + \varepsilon a, \tau_{min}) \geq Q_2(K, a, \varepsilon), \tag{4.20}$$

$$Q_2(K, a, \varepsilon) := \frac{1607 \sqrt{K}}{10^4 \varepsilon} - 2K(\pi a + 1) + a \left(2\pi - \frac{53841}{25 \cdot 10^3} \right) - 1$$

при $K \geq 3$.

4.4. Случай $\frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{39267}{62500}$. В данном случае условие (4.1) не накладывает никаких дополнительных ограничений на K , поэтому считаем, что $K \geq 0$.

В силу (3.13), (2.2), (4.3) получаем:

$$M_\varepsilon(L - \varepsilon a, \tau_{max}) - M_\varepsilon(L + \varepsilon a, \tau_{min}) = M_\varepsilon(L - \varepsilon a, 0) - M_\varepsilon(L + \varepsilon a, 1 - \alpha) = \\ = \sum_{n=-K}^K \left[\frac{\sqrt{(L - \varepsilon a)^2 - n^2}}{\varepsilon} \right] - \sum_{n=-K-1}^K \left[\frac{\sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (n + 1 - \alpha)^2}}{\varepsilon} \right] = \\ = \sum_{n=-K}^K \left[\frac{\sqrt{(L - \varepsilon a)^2 - n^2}}{\varepsilon} \right] - \sum_{n=-K}^K \left[\frac{\sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (n + 1 - \alpha)^2}}{\varepsilon} \right] = \\ = \sum_{n=1}^K \left(2 \left[\frac{\sqrt{(L - \varepsilon a)^2 - n^2}}{\varepsilon} \right] - \left[\frac{\sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (n + 1 - \alpha)^2}}{\varepsilon} \right] - \left[\frac{\sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (n - 1 + \alpha)^2}}{\varepsilon} \right] \right) + \\ + \left[\frac{L - \varepsilon a}{\varepsilon} \right] - \left[\frac{\sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (1 - \alpha)^2}}{\varepsilon} \right].$$

Отсюда выводим:

$$M_\varepsilon(L - \varepsilon a, \tau_{max}) - M_\varepsilon(L + \varepsilon a, \tau_{min}) \geq \frac{S_3(L, \varepsilon)}{\varepsilon} - 2K - 1, \tag{4.21}$$

где

$$S_3(L, \varepsilon) = \sum_{n=1}^K F_9(L, n, \varepsilon) + F_{10}(L, \varepsilon), \tag{4.22}$$

$$F_9(L, \xi, \varepsilon) := 2\sqrt{(L - \varepsilon a)^2 - \xi^2} - \sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (\xi + 1 - \alpha)^2} - \sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (\xi - 1 + \alpha)^2},$$

$$F_{10}(L, \varepsilon) := L - \varepsilon a - \sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (1 - \alpha)^2}.$$

Рассмотрим отдельно случаи $K = 0, 1, 2$. Здесь функция S_3 имеет вид:

$$S_3(L, \varepsilon) = \alpha - 2\varepsilon a - \sqrt{2\alpha - 1} \quad \text{при } K = 0,$$

$$S_3(L, \varepsilon) = 2\sqrt{(1 + \alpha - 2\varepsilon a)^2 - 1} - \sqrt{(1 + \alpha)^2 - (2 - \alpha)^2} - \sqrt{(1 + \alpha)^2 - \alpha^2} +$$

$$\begin{aligned}
 &+ 1 + \alpha - 2\varepsilon a - \sqrt{(1 + \alpha)^2 - (1 - \alpha)^2} \quad \text{при } K = 1, \\
 S_3(L, \varepsilon) &= 2\sqrt{(2 + \alpha - 2\varepsilon a)^2 - 1} - \sqrt{(2 + \alpha)^2 - (2 - \alpha)^2} - \sqrt{(2 + \alpha)^2 - \alpha^2} + \\
 &+ 2\sqrt{(2 + \alpha - 2\varepsilon a)^2 - 1} - \sqrt{(2 + \alpha)^2 - (3 - \alpha)^2} - \sqrt{(2 + \alpha)^2 - (1 + \alpha)^2} + \\
 &+ 2 + \alpha - 2\varepsilon a - \sqrt{(2 + \alpha)^2 - (1 - \alpha)^2} \quad \text{при } K = 2.
 \end{aligned}$$

Минимумы этих функций достигается при $\varepsilon a = \varepsilon_0$, $\alpha = \frac{39267}{62500}$ и

$$S_3(L, \varepsilon) > 4\varepsilon_0 \quad \text{при } K = 0, \quad S_3(L, \varepsilon) > 6\varepsilon_0 \quad \text{при } K = 1,$$

$$S_3(L, \varepsilon) > \left(5 + \frac{1}{2000}\right) \varepsilon_0 \quad \text{при } K = 2.$$

Таким образом, в силу последних неравенств и (4.21) имеем:

$$M_\varepsilon(L - \varepsilon a, \tau_{max}) - M_\varepsilon(L + \varepsilon a, \tau_{min}) \geq \frac{1}{2000} \tag{4.23}$$

при $K = 0, 1, 2$.

Переходим к случаю $K \geq 3$. Функцию F_9 представляем в виде:

$$F_9(L, \xi, \alpha) = F_0(L + \varepsilon a, \xi, 1 - \alpha) - 2F_3(L, \varepsilon a, \xi).$$

Аналогично (4.10) получаем оценку:

$$\sum_{n=1}^K F_0(L + \varepsilon a, n, 1 - \alpha) \geq F_0(L + \varepsilon a, 1, 1 - \alpha) + \int_1^K F_0(L + \varepsilon a, \xi, 1 - \alpha) d\xi. \tag{4.24}$$

Используя (4.4), оценим интеграл в последнем неравенстве:

$$\begin{aligned}
 &\int_1^K F_0(L + \varepsilon a, \xi, 1 - \alpha) d\xi \geq (1 - \alpha)^2 \int_1^K \frac{(K + \alpha)^2 + 2(1 - \alpha)(\xi - 1 + \alpha)}{((K + \alpha)^2 - (\xi - 1 + \alpha)^2)^{\frac{3}{2}}} d\xi = \\
 &= (1 - \alpha)^2 \int_\alpha^{K-1+\alpha} \frac{(K + \alpha)^2 + 2(1 - \alpha)\xi}{((K + \alpha)^2 - \xi^2)^{\frac{3}{2}}} d\xi = \alpha^2 \frac{\xi + 2(1 - \alpha)}{((K + \alpha)^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \Big|_\alpha^{K-1+\alpha} = \\
 &= (1 - \alpha)^2 \left(\frac{K + 1 - \alpha}{\sqrt{2(K + \alpha) - 1}} - \frac{2 - \alpha}{\sqrt{K^2 + 2\alpha K}} \right).
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Для функций $F_3(L, \varepsilon a, \xi)$ на основе (4.5) выпишем оценки, аналогичные (4.12), (4.13):

$$\begin{aligned}
 -2 \sum_{n=1}^K F_3(L, \varepsilon a, n) &\geq -4\varepsilon a L \left(\frac{1}{\sqrt{L^2 - 1}} + \int_1^K \frac{d\xi}{\sqrt{L^2 - \xi^2}} \right) = \\
 &= -4\varepsilon a L \left(\frac{1}{\sqrt{L^2 - 1}} + \arcsin\left(\frac{K}{L}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{L}\right) \right) \geq -\frac{161}{625} \varepsilon a - 2\pi \varepsilon a K.
 \end{aligned}$$

Из последней оценки, (4.22), (4.24), (4.25) выводим оценку для S_3 :

$$S_3(L, \varepsilon) \geq F_{11}(K, \alpha) - \frac{1411}{625} \varepsilon a - 2\pi \varepsilon a K,$$

$$\begin{aligned}
 F_{11}(K, \alpha) &:= K + \alpha - \sqrt{(K + \alpha)^2 - (1 - \alpha)^2} + 2\sqrt{(K + \alpha)^2 - 1} - \sqrt{(K + \alpha)^2 - \alpha^2} - \\
 &- \sqrt{(K + \alpha)^2 - (2 - \alpha)^2} + \alpha^2 \left(\frac{K + 1 - \alpha}{\sqrt{2(K + \alpha) - 1}} - \frac{2 - \alpha}{\sqrt{K^2 + 2\alpha K}} \right).
 \end{aligned}$$

Для функции $F_{11}(K, \alpha)$ верна оценка

$$\frac{F_{11}(K, \alpha)}{\sqrt{K}} \geq \frac{F_{11}(K, \alpha)}{\sqrt{K}} \Big|_{\substack{\alpha = \frac{39267}{62500} \\ K = +\infty}} = \frac{539772289\sqrt{2}}{78125 \cdot 10^5}.$$

Отсюда, из предыдущей оценки и (4.21) выводим:

$$M_\varepsilon(L - \varepsilon a, \tau_{max}) - M_\varepsilon(L + \varepsilon a, \tau_{min}) \geq Q_3(K, a, \varepsilon), \quad (4.26)$$

$$Q_3(K, a, \varepsilon) := \frac{539772289\sqrt{2}\sqrt{K}}{78125 \cdot 10^5 \varepsilon} - 2K(\pi a + 1) - 1 - \frac{1411}{625}a$$

при $K \geq 3$.

4.5. Случай $\frac{39267}{62500} \leq \alpha < 1$. Как и в предыдущем случае, здесь считаем, что $K \geq 0$. Согласно (3.13), (2.2), (4.3) имеем:

$$\begin{aligned} M_\varepsilon(L - \varepsilon a, \tau_{max}) - M_\varepsilon(L + \varepsilon a, \tau_{min}) &= M_\varepsilon\left(L - \varepsilon a, \frac{1}{2}\right) - M_\varepsilon(L + \varepsilon a, 1 - \alpha) = \\ &= \sum_{n=-K-1}^K \left[\frac{\sqrt{(L - \varepsilon a)^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}}{\varepsilon} \right] - \sum_{n=-K-1}^K \left[\frac{\sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (n + 1 - \alpha)^2}}{\varepsilon} \right] = \\ &= \sum_{n=-K-1}^K \left[\frac{\sqrt{(L - \varepsilon a)^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}}{\varepsilon} \right] - \sum_{n=-K}^K \left[\frac{\sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (n + 1 - \alpha)^2}}{\varepsilon} \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{K-1} \left(2 \left[\frac{\sqrt{(L - \varepsilon a)^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}}{\varepsilon} \right] - \left[\frac{\sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (n + 1 - \alpha)^2}}{\varepsilon} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (n + \alpha)^2}}{\varepsilon} \right] \right) + 2 \left[\frac{\sqrt{(L - \varepsilon a)^2 - \left(K + \frac{1}{2}\right)^2}}{\varepsilon} \right] - \\ &\quad - \left[\frac{\sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (K + 1 - \alpha)^2}}{\varepsilon} \right], \end{aligned}$$

откуда вытекает

$$M_\varepsilon(L - \varepsilon a, \tau_{max}) - M_\varepsilon(L + \varepsilon a, \tau_{min}) \geq \frac{S_4(L, \varepsilon)}{\varepsilon} - 2K - 2, \quad (4.27)$$

где

$$S_4(L, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{K-1} F_{12}(L, n, \varepsilon) + F_{13}(L, \varepsilon), \quad (4.28)$$

$$F_{12}(L, n, \varepsilon) := 2\sqrt{(L - \varepsilon a)^2 - \left(\xi + \frac{1}{2}\right)^2} - \sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (\xi + 1 - \alpha)^2} - \sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (\xi + \alpha)^2},$$

$$F_{13}(L, \varepsilon) := 2\sqrt{(L - \varepsilon a)^2 - \left(K + \frac{1}{2}\right)^2} - \sqrt{(L + \varepsilon a)^2 - (K + 1 - \alpha)^2}. \quad (4.29)$$

Случаи $K = 0, 1, 2$ вновь рассматриваем отдельно:

$$S_4(L, \varepsilon) = 2\sqrt{(\alpha - 2\varepsilon a)^2 - \frac{1}{4}} - \sqrt{\alpha^2 - (1 - \alpha)^2} \quad \text{при } K = 0,$$

$$\begin{aligned} S_4(L, \varepsilon) &= 2\sqrt{(1 + \alpha - 2\varepsilon a)^2 - \frac{1}{4}} - \sqrt{(1 + \alpha)^2 - (1 - \alpha)^2} - \sqrt{(1 + \alpha)^2 - \alpha^2} + \\ &\quad + 2\sqrt{(1 + \alpha - 2\varepsilon a)^2 - \frac{9}{4}} - \sqrt{(1 + \alpha)^2 - (2 - \alpha)^2} \quad \text{при } K = 1, \end{aligned}$$

$$S_4(L, \varepsilon) = 2\sqrt{(2 + \alpha - 2\varepsilon a)^2 - \frac{1}{4}} - \sqrt{(2 + \alpha)^2 - (1 - \alpha)^2} - \sqrt{(2 + \alpha)^2 - \alpha^2} +$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2\sqrt{(2 + \alpha - 2\varepsilon a)^2 - \frac{9}{4}} - \sqrt{(2 + \alpha)^2 - (2 - \alpha)^2} - \sqrt{(2 + \alpha)^2 - (1 + \alpha)^2} + \\
 &+ 2\sqrt{(2 + \alpha - 2\varepsilon a)^2 - \frac{25}{4}} - \sqrt{(2 + \alpha)^2 - (3 - \alpha)^2} \quad \text{при } K = 2.
 \end{aligned}$$

Минимумы этих функций достигаются при $\alpha = \frac{39267}{62500}$, $\varepsilon a = \varepsilon_0$:

$$\begin{aligned}
 S_4(L, \varepsilon) &> 7\varepsilon_0 \quad \text{при } K = 0, 1, \\
 S_4(L, \varepsilon) &> \left(6 + \frac{1}{10^3}\right) \varepsilon_0 \quad \text{при } K = 2.
 \end{aligned}$$

Таким образом, с учетом (4.27) при $K = 0, 1, 2$ справедливо неравенство

$$M_\varepsilon(L - \varepsilon a, \tau_{max}) - M_\varepsilon(L + \varepsilon a, \tau_{min}) > \frac{1}{10^3}. \tag{4.30}$$

Переходим к случаю $K \geq 3$. Функцию $F_{12}(L, \xi, \varepsilon)$ переписываем в виде

$$F_{12}(L, \xi, \varepsilon) = F_0\left(L + \varepsilon a, \xi + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) - 2F_3\left(L, \varepsilon a, \xi + \frac{1}{2}\right).$$

Аналогично (4.10), (4.11) оцениваем:

$$\sum_{n=0}^{K-1} F_0\left(L + \varepsilon a, n + \frac{1}{2}, \alpha - \frac{1}{2}\right) \geq F_0\left(L + \varepsilon a, \frac{1}{2}, \alpha - \frac{1}{2}\right) + \int_0^{K-1} F_0\left(L + \varepsilon a, \xi + \frac{1}{2}, \alpha - \frac{1}{2}\right) d\xi \tag{4.31}$$

и

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{K-1} F_0\left(L + \varepsilon a, \xi + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) d\xi = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 \int_0^{K-1} \frac{(K + \alpha)^2 + (2\alpha - 1)(\xi + 1 - \alpha)}{\left((K + \alpha)^2 - (\xi + 1 - \alpha)^2\right)^{\frac{3}{2}}} d\xi = \\
 &= \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 \int_{1-\alpha}^{K-\alpha} \frac{(K + \alpha)^2 + (2\alpha - 1)\xi}{\left((K + \alpha)^2 - \xi^2\right)^{\frac{3}{2}}} d\xi = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\xi + 2\alpha - 1}{\sqrt{(K + \alpha)^2 - \xi^2}} \Big|_{1-\alpha}^{K-\alpha} = \\
 &= \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{K + \alpha - 1}{2\sqrt{\alpha K}} - \frac{\alpha}{\sqrt{(K + \alpha)^2 - (1 - \alpha)^2}}\right).
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

В силу (4.12), (4.13) получаем:

$$\begin{aligned}
 -2 \sum_{n=0}^{K-1} F_3\left(L, \varepsilon a, \xi + \frac{1}{2}\right) &\geq -4\varepsilon a L \left(\frac{1}{\sqrt{L^2 - \frac{1}{4}}} + \arcsin\left(\frac{K - \frac{1}{2}}{L}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{2L}\right)\right) > \\
 &> -2\pi\varepsilon a K + \left(\pi - \frac{20639}{10^4}\right) \varepsilon a.
 \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.31), (4.32), (4.28) выводим:

$$S_4(L, \varepsilon) \geq F_{14}(K, \alpha, \varepsilon) - 2\pi\varepsilon a K + \left(\pi - \frac{20639}{10^4}\right) \varepsilon a, \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}
 F_{14}(K, \varepsilon a) &:= 2\sqrt{(K + \alpha - 2\varepsilon a)^2 - \left(K + \frac{1}{2}\right)^2} - \sqrt{(K + \alpha)^2 - (K + 1 - \alpha)^2} + \\
 &+ \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{K + \alpha - 1}{2\sqrt{\alpha K}} - \frac{\alpha}{\sqrt{(K + \alpha)^2 - (1 - \alpha)^2}}\right) + \\
 &+ 2\sqrt{(K + \alpha)^2 - \frac{1}{4}} - \sqrt{(K + \alpha)^2 - \alpha^2} - \sqrt{(K + \alpha)^2 - (1 - \alpha)^2}.
 \end{aligned}$$

Для функции F_{14} верна оценка

$$\frac{F_{14}(K, \alpha, \varepsilon a)}{\sqrt{K}} \geq \frac{F_{14}(K, \varepsilon a)}{\sqrt{K}} \Big|_{K=2, \alpha=\frac{39267}{62500}, \varepsilon a=\varepsilon_0} > \frac{157271}{10^6}$$

Из этой оценки, (4.33) и (4.25) окончательно получаем:

$$M_\varepsilon(L - \varepsilon a, \tau_{max}) - M_\varepsilon(L + \varepsilon a, \tau_{min}) \geq Q_4(K, a, \varepsilon), \quad (4.34)$$

$$Q_4(K, a, \varepsilon) := \frac{157271}{10^6} \frac{\sqrt{K}}{\varepsilon} - 2(\pi a + 1)K + \left(\pi - \frac{20639}{10^4} \right) a - 2.$$

4.6. Завершение доказательства. Как следует из оценок (4.8), (4.17), (4.23), (4.30), неравенство (3.11) выполнено для $K = 0, 1, 2$ и $\alpha \in [0, 1)$, где K и α связаны с L формулой (4.2), и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. В терминах L это означает, что

$$L < 3 - \varepsilon a. \quad (4.35)$$

Выясним, при каких иных K выполнено неравенство (3.11). Для этого мы используем оценки (4.14), (4.20), (4.26), (4.34) и выясним, в каком случае правые части $Q_j(K, a, \varepsilon)$ всех этих оценок положительны. Минимальные значения правых частей достигаются при $a = 1$, поэтому далее мы будем рассматривать их именно при таком значении a .

Непосредственными вычислениями несложно проверить, что

$$Q_4(K, 1, \varepsilon) > Q_3(K, 1, \varepsilon), \quad Q_2(K, 1, \varepsilon) > Q_3(K, 1, \varepsilon).$$

Поэтому далее мы рассматриваем лишь функции Q_1 и Q_3 .

Решая неравенства $Q_1 > 0$ и $Q_3 > 0$ как квадратные относительно \sqrt{K} , заключаем, что величина K должна удовлетворять неравенству:

$$\sqrt{K} < \frac{\mu_1(\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad \sqrt{K} < \frac{\mu_2(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

где

$$\mu_i(\varepsilon) := \beta_i + \sqrt{\beta_i^2 - 4\gamma_i\varepsilon^2},$$

$$\beta_1 := \frac{1369\sqrt{2}}{4 \cdot 10^4\pi}, \quad \gamma_1 := \frac{1}{2} - \frac{105697}{10^5\pi}, \quad \beta_2 := \frac{539772289\sqrt{2}}{15625 \cdot 10^6(\pi + 1)}, \quad \gamma_2 := \frac{1018}{625(\pi + 1)}.$$

Функция $\mu_2(\varepsilon)$ вещественна лишь для

$$\varepsilon \leq \frac{\beta_2}{2\sqrt{\gamma_2}} = \varepsilon_1 < \varepsilon_0.$$

Это означает, что только при таких ε функция $Q_3(K, 1, \varepsilon)$ принимает положительные значения. Поэтому далее рассматриваем только такие значения ε .

Непосредственными вычислениями легко проверяем, что

$$\mu_1(\varepsilon_1) > \mu_2(\varepsilon_1), \quad \frac{\varepsilon^2}{(\mu_1'(\varepsilon))^2} > \frac{\varepsilon^2}{(\mu_2'(\varepsilon))^2},$$

откуда уже следует, что

$$\mu_1(\varepsilon) > \mu_2(\varepsilon), \quad \varepsilon \leq \varepsilon_1.$$

Следовательно, функции Q_1, Q_3 будут положительны при

$$K < \frac{\mu_2^2(\varepsilon)}{\varepsilon^2}.$$

и неравенство (3.11) будет выполнено для

$$L < \left[\frac{\mu_2^2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right] + 1 - \varepsilon a.$$

Так как спектр оператора — замкнутое множество и положительность функции Q_3 может нарушаться лишь при $K = \frac{\mu_2^2(\varepsilon)}{\varepsilon^2}$, $\varepsilon = \varepsilon_1$, можно считать, что

$$L \leq \left[\frac{\mu_2^2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right] + 1 - \varepsilon a.$$

Если целая часть в последнем неравенстве меньше двух, то с учетом сказанного в начале данного раздела (см. (4.35)), ее всегда можно заменить на два. Поэтому неравенство (3.11) будет гарантированно выполнено при

$$L \leq \max \left\{ 3, \left[\frac{\mu_2(\varepsilon)^2}{\varepsilon^2} \right] + 1 \right\} - \varepsilon a,$$

откуда уже вытекает утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов Д. И. Об отсутствии лакун в нижней части спектра Лапласиана с частым чередованием краевых условий в полосе // Теор. мат. физ. — принято к печати.
2. Либ Э., Лосс М. Анализ. — Новосибирск: Научная книга, 1998.
3. Сеник Н. Н. Усреднение периодического эллиптического оператора в полосе при различных граничных условиях // Алгебра и анализ. — 2013. — 25, № 4. — С. 182–259.
4. Скриганов М. М. Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов // Тр. МИАН. — 1985. — 171. — С. 3–122.
5. Скриганов М. М., Соболев А. В. Асимптотические оценки для спектральных зон периодических операторов Шредингера // Алгебра и анализ. — 2005. — 17, № 1. — С. 276–288.
6. Суслина Т. А. Об усреднении периодического эллиптического оператора в полосе // Алгебра и анализ. — 2004. — 16, № 1. — С. 269–292.
7. Barbatis G., Parnowski L. Bethe–Sommerfeld conjecture for pseudo-differential perturbation // Commun. Part. Differ. Equ. — 2009. — 34, № 4. — С. 383–418.
8. Borisov D., Bunoiu R., Cardone G. On a waveguide with frequently alternating boundary conditions: homogenized Neumann condition // Ann. Henri Poincaré. — 2010. — 11, № 8. — С. 1591–1627.
9. Borisov D., Bunoiu R., Cardone G. Waveguide with non-periodically alternating Dirichlet and Robin conditions: homogenization and asymptotics // Z. Angew. Math. Phys. — 2013. — 64, № 3. — С. 439–472.
10. Borisov D., Cardone G. Homogenization of the planar waveguide with frequently alternating boundary conditions // J. Phys. A: Math. Gen. — 2009. — 42, № 36. — Id 365205.
11. Borisov D., Cardone G., Durante T. Homogenization and uniform resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve // Proc. R. Soc. Edin. Sec. A. Math. — 2016. — 146, № 6. — С. 1115–1158.
12. Borisov D., Cardone G., Faella L., Perugia C. Uniform resolvent convergence for a strip with fast oscillating boundary // J. Differ. Equ. — 2013. — 255, № 12. — С. 4378–4402.
13. Dahlberg B. E. J., Trubowitz E. A remark on two dimensional periodic potentials // Comment. Math. Helv. — 1982. — 57, № 1. — С. 130–134.
14. Helffer B., Mohamed A. Asymptotics of the density of states for the Schrödinger operator with periodic electric potential // Duke Math. J. — 1998. — 92, № 1. — С. 1–60.
15. Karpeshina Y. Spectral properties of the periodic magnetic Schrödinger operator in the high-energy region. Two-dimensional case // Commun. Math. Phys. — 2004. — 251, № 3. — С. 473–514.
16. Mohamed A. Asymptotic of the density of states for the Schrödinger operator with periodic electromagnetic potential // J. Math. Phys. — 1997. — 38, № 8. — С. 4023–4051.
17. Parnowski L. Bethe–Sommerfeld conjecture // Ann. Henri Poincaré. — 2008. — 9, № 3. — С. 457–508.
18. Parnowski L., Sobolev A. On the Bethe–Sommerfeld conjecture for the polyharmonic operator // Duke Math. J. — 2001. — 107, № 2. — С. 209–238.
19. Parnowski L., Sobolev A. V. Bethe–Sommerfeld conjecture for periodic operators with strong perturbations // Invent. Math. — 2010. — 181, № 3. — С. 467–540.
20. Skriganov M. M., Sobolev A. V. Variation of the number of lattice points in large balls // Acta Arith. — 2005. — 120, № 3. — С. 245–267.

Денис Иванович Борисов
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112;

Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,
450000, Уфа, ул. Октябрьской революции, 3а;
Университет Градца Кралове,
500 03, Градец Кралове, Чешская Республика, Рокитанского 62
E-mail: borisovdi@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-3-373-391

UDC 517.958, 517.984, 519.21

On Lacunas in the Lower Part of the Spectrum of the Periodic Magnetic Operator in a Strip

© 2017 D. I. Borisov

Abstract. We consider the Schrödinger periodic magnetic operator in an infinite flat straight strip. We prove that if the magnetic potential satisfies certain conditions and the period is small enough, then the lower part of the band spectrum has no inner lacunas. The length of the lower part of the band spectrum with no inner lacunas is calculated explicitly. The upper estimate for the small parameter allowing these results is calculated as a number as well.

REFERENCES

1. D. I. Borisov, "Ob otsutstvii lakun v nizhney chasti spektra Laplasiana s chastym cheredovaniem kraevykh usloviy v polose" [On absence of lacunas in the lower part of Laplacian spectrum with fast alternation of boundary-value conditions in a strip], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], to be published (in Russian).
2. E. Lieb and M. Loss, *Analiz* [Analysis], Nauchnaya kniga, Novosibirsk, 1998 (Russian translation).
3. N. N. Senik, "Usrednenie periodicheskogo ellipticheskogo operatora v polose pri razlichnykh granichnykh usloviyakh" [Averaging of a periodic elliptic operator in a strip under various boundary conditions], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2013, **25**, No. 4, 182–259 (in Russian).
4. M. M. Skriganov, "Geometricheskie i arifmeticheskie metody v spektral'noy teorii mnogomernykh periodicheskikh operatorov" [Geometric and arithmetic methods in the spectral theory of multidimensional periodic operators], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1985, **171**, 3–122 (in Russian).
5. M. M. Skriganov and A. V. Sobolev, "Asimptoticheskie otsenki dlya spektral'nykh zon periodicheskikh operatorov Shredingera" [Asymptotic estimates for spectral zones of periodic Schrödinger operators], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2005, **17**, No. 1, 276–288 (in Russian).
6. T. A. Suslina, "Ob usrednenii periodicheskogo ellipticheskogo operatora v polose" [On averaging of periodic elliptic operator in a strip], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2004, **16**, No. 1, 269–292 (in Russian).
7. G. Barbatis and L. Parnovski, "Bethe–Sommerfeld conjecture for pseudo-differential perturbation," *Commun. Part. Differ. Equ.*, 2009, **34**, No. 4, 383–418.
8. D. Borisov, R. Bunoiu, and G. Cardone, "On a waveguide with frequently alternating boundary conditions: homogenized Neumann condition," *Ann. Henri Poincaré*, 2010, **11**, No. 8, 1591–1627.
9. D. Borisov, R. Bunoiu, and G. Cardone, "Waveguide with non-periodically alternating Dirichlet and Robin conditions: homogenization and asymptotics," *Z. Angew. Math. Phys.*, 2013, **64**, No. 3, 439–472.
10. D. Borisov and G. Cardone, "Homogenization of the planar waveguide with frequently alternating boundary conditions," *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2009, **42**, No. 36, ID 365205.
11. D. Borisov, G. Cardone, and T. Durante, "Homogenization and uniform resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve," *Proc. R. Soc. Edin. Sec. A. Math.*, 2016, **146**, No. 6, 1115–1158.
12. D. Borisov, G. Cardone, L. Faella, and C. Perugia, "Uniform resolvent convergence for a strip with fast oscillating boundary," *J. Differ. Equ.*, 2013, **255**, No. 12, 4378–4402.
13. B. E. Dahlberg and E. Trubowitz, "A remark on two dimensional periodic potentials," *Comment. Math. Helv.*, 1982, **57**, No. 1, 130–134.
14. B. Helffer and A. Mohamed, "Asymptotics of the density of states for the Schrödinger operator with periodic electric potential," *Duke Math. J.*, 1998, **92**, No. 1, 1–60.

15. Y. Karpeshina, “Spectral properties of the periodic magnetic Schrödinger operator in the high-energy region. Two-dimensional case,” *Commun. Math. Phys.*, 2004, **251**, No. 3, 473–514.
16. A. Mohamed, “Asymptotic of the density of states for the Schrödinger operator with periodic electromagnetic potential,” *J. Math. Phys.*, 1997, **38**, No. 8, 4023–4051.
17. L. Parnowski, “Bethe–Sommerfeld conjecture,” *Ann. Henri Poincaré*, 2008, **9**, No. 3, 457–508.
18. L. Parnowski and A. Sobolev, “On the Bethe–Sommerfeld conjecture for the polyharmonic operator,” *Duke Math. J.*, 2001, **107**, No. 2, 209–238.
19. L. Parnowski and A. V. Sobolev, “Bethe–Sommerfeld conjecture for periodic operators with strong perturbations,” *Invent. Math.*, 2010, **181**, No. 3, 467–540.
20. M. M. Skriganov and A. V. Sobolev, “Variation of the number of lattice points in large balls,” *Acta Arith.*, 2005, **120**, No. 3, 245–267.

Denis I. Borisov

Institute of Mathematics with Computer Center, Ufa Science Center, Russian Academy of Sciences,
112 Chernyshevskogo st., 450008 Ufa, Russia;

Bashkir State Pedagogical University,

3a Oktyabr'skoy Revolutsii st., 450000 Ufa, Russia;

University of Hradec Králové,

62 Rokitanského st., 500 03 Hradec Králové, Czech Republic

E-mail: borisovdi@yandex.ru

ОПТИМАЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ ИНФЕКЦИОННЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ НА ОСНОВЕ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

© 2017 г. **Г. А. БОЧАРОВ, Ю. М. НЕЧЕПУРЕНКО, М. Ю. ХРИСТИЧЕНКО, Д. С. ГРЕБЕННИКОВ**

Аннотация. Работа посвящена применению оптимальных возмущений для управления математическими моделями инфекционных заболеваний, сформулированными в виде систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Разработан алгоритм вычисления возмущений начального состояния динамической системы с запаздыванием, обладающих максимальной амплификацией в заданной локальной норме с учетом значимости компонент возмущения. Для модели экспериментальной вирусной инфекции построены оптимальные возмущения для двух типов стационарных состояний, с низким и высоким уровнем вирусной нагрузки, отвечающих различным вариантам течения хронической вирусной инфекции.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение		392
2. Оптимальные возмущения стационарных решений динамических систем		394
3. Математические модели вирусных инфекций и фармакокинетики лечебных препаратов		396
4. Оптимальные возмущения стационарных состояний динамических систем с запаздыванием		399
5. Вычисление оптимальных возмущений		401
6. Результаты численных экспериментов		402
7. Выводы		412
Список литературы		413

1. ВВЕДЕНИЕ

Новые направления прикладной математики в различных областях естествознания формируются на основе новых понятий и постулатов, конструктивных принципов и методов исследований. Становление математического моделирования в науках о жизни связано с пионерскими работами В. Вольтерра, А. Н. Колмогорова, Н. Винера и др., в которых были предложены такие основы. В иммунологии, одной из бурно развивающихся дисциплин современной биомедицины, основы математического моделирования были заложены Г. И. Марчуком [2, 4–6, 33, 34]. Им был предложен и успешно реализован подход, связанный с «координатизацией» (понятие, введенное Г. Вейлем [40]) явлений сложной природы, изучаемых иммунологами, таких как тяжесть заболевания, уровень иммунитета, иммунореактивность. В основу построения проблемно-ориентированных математических моделей иммунных процессов был положен принцип выделения из большого числа признаков и факторов изучаемых процессов набора «главных» параметров, доступных количественному оцениванию по клиническим и экспериментальным данным. Был найден некоторый «оптимальный» уровень идеализации для математического описания сложной системы на основе нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, в рамках которого оказалось возможным проводить калибровку и исследование моделей для реальных инфекций, а также строить логические выводы, имеющие содержательную ценность для иммунологии. Г. И. Марчук задолго

до появления современной системно-биологической парадигмы исследования иммунных процессов [19, 27, 29] осознал необходимость применения многопараметрических моделей иммунного ответа: «... будущее медицины — лечение индивидуального больного на основе слежения за его индивидуальными иммунологическими, эндокринологическими, сосудистыми особенностями с учетом непрерывно приобретаемых с возрастом хронических локусов различной этиологии...» на основе многомасштабных моделей. Такой взгляд полностью отвечает современному развитию системной иммунологии [20, 31], которое нацелено на разработку и применение методов коррекции иммунофизиологических процессов на различных уровнях регуляции (генно-молекулярном, клеточном, тканевом, органном и системном). Таким образом, изучение многоуровневых регуляторных механизмов, лежащих в основе наблюдаемого спектра динамики вирусных заболеваний в категориях причинно-следственных взаимоотношений и откликов организма человека на действие противовирусных и иммуномодулирующих препаратов, является фундаментальной междисциплинарной задачей.

Разработка математических моделей для описания и исследования динамики инфекционных заболеваний имеет своей конечной целью анализ характеристик чувствительности процессов к воздействиям различной природы, изменяющих параметры соответствующей динамической системы и ее состояние. На их основе могут быть рассчитаны количественные характеристики устойчивости и чувствительности фенотипически различных траекторий динамики системы. В рамках реализуемого в настоящее время системного подхода мы рассматриваем инфекционное заболевание как траекторию некоторой динамической системы в пространстве признаков. Неблагоприятное течение заболевания можно рассматривать как выход за пределы области в окрестности «нормальной» траектории или аттрактора. Математическая модель инфекционного заболевания используется для исследования характеристик робастности и хрупкости динамики системы [28] по отношению к возмущениям параметров процессов или состояния системы с целью поиска набора управляющих воздействий для коррекции неблагоприятной динамики.

В работе [12] впервые для задач математической иммунологии нами был реализован подход к построению возмущений начального состояния динамической системы с запаздыванием с помощью так называемых оптимальных возмущений, обеспечивающих максимально возможную амплификацию возмущения в заданной норме. В основе этого подхода — методы, заимствованные из теории аэродинамической устойчивости и обобщенные на системы с запаздыванием. С помощью оптимальных возмущений, выбираемых из подпространства кусочно-постоянных функций, были найдены малые возмущения стационарного состояния системы с запаздыванием, оказывающие максимальное воздействие на ее динамику с точки зрения заданных критериев. Для двух типов устойчивых стационарных состояний модели экспериментальной вирусной инфекции, отвечающих биологическим сценариям персистенции вирусов ниже порога обнаружения и хроническим вирусным инфекциям с высоким уровнем вирусной нагрузки, были рассчитаны несколько структурно различных оптимальных возмущений и исследовано их влияние на динамику инфекционного процесса. При этом были сформулированы следующие вопросы, требующие дальнейшего исследования, которым и посвящена данная работа:

1. Значимость отдельных компонент оптимальных возмущений или, в более широком плане, построение наиболее простых оптимальных возмущений при заданных ограничениях на длительность возмущения и эффективность воздействия.
2. Выбор подпространства, в котором ищется возмущение, и его связь с характеристиками реакции инфекционного и иммунного процессов на действие антивирусных и иммуномодулирующих препаратов с учетом их фармакокинетики и фармакодинамики.

Работа состоит из семи разделов. В разделе 2 кратко поясняется, что такое оптимальные возмущения динамических систем без запаздывания и обсуждаются известные методы их вычисления. В разделе 3 описана математическая модель динамики экспериментальной вирусной инфекции, сформулированная в виде системы четырех нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. В модели учитываются два различных запаздывания, отражающие длительность деления клеток иммунной системы в ходе формирования противовирусного иммунного ответа и длительность программирования процесса гибели клеток, вызванного присутствием вирусных антигенов. Исследуются два биологически содержательных положения равновесия системы, с низкой и высокой вирусной нагрузкой. Они соответствуют различным вариантам хронического вирусного

заболевания. Рассматриваются общие закономерности фармакокинетики и фармакодинамики противовирусных и иммуномодулирующих препаратов, которые определяют выбор подпространства начальных возмущений для задачи управления. В разделе 4, следуя работе [12], вводится понятие оптимального возмущения для системы с запаздыванием, а в разделе 5 описывается простейший метод его вычисления. Результаты расчетов оптимальных возмущений при различных значениях их параметров приводятся в разделе 6, где также дается их содержательная интерпретация. Итог работы подводится в заключительном разделе 7.

2. ОПТИМАЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В качестве возмущений стационарного состояния системы мы будем использовать так называемые оптимальные возмущения, широко применяемые в теории аэродинамической устойчивости в рамках моделей без запаздывания. В аэродинамике различают естественный (надкритический) и обходной (докритический) сценарии ламинарно-турбулентного перехода [13]. С увеличением числа Рейнольдса при превышении им критического значения, определяющего границу устойчивости к бесконечно малым возмущениям, ламинарное течение заведомо теряет устойчивость, что, как правило, приводит к его турбулизации. При этом основную роль играют неустойчивые моды. Однако из-за наличия в реальных течениях малых конечных возмущений ламинарно-турбулентный переход на практике часто происходит при докритических числах Рейнольдса (докритические сценарии перехода). Одним из основных факторов, вызывающих докритический ламинарно-турбулентный переход, является возможность существенного роста энергии возмущения на конечных временных интервалах. Этот рост обеспечивают возмущения, представляющие собой суперпозиции большого числа существенно неортогональных устойчивых мод. Развитие такого малого возмущения может привести к переходу основного течения в квазистационарное линейно неустойчивое состояние, в котором начинает развиваться вторичная неустойчивость, приводящая к ламинарно-турбулентному переходу.

Максимально возможный при данном докритическом числе Рейнольдса «подскок»

$$\Gamma_{\max} = \sup \frac{\mathcal{E}(\mathbf{v}(t))}{\mathcal{E}(\mathbf{v}(0))}$$

средней плотности кинетической энергии возмущения, где $\mathbf{v}(t)$ означает скорость возмущения в момент времени t и супремум берется по всем допустимым ненулевым начальным возмущениям и всем $t > 0$, называют *максимальной амплификацией* средней плотности кинетической энергии возмущений. Начальное возмущение $\mathbf{v}(0)$, при котором достигается Γ_{\max} , называют *оптимальным возмущением*.

Задача определения максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии возмущений в рамках полных уравнений эволюции возмущений представляет значительную сложность, и в настоящее время нет каких-либо известных алгоритмов ее решения. Однако для моделирования и анализа докритических сценариев ламинарно-турбулентного перехода достаточно рассматривать возмущения, оптимальные в рамках линеаризованных уравнений [24, 38]. Поэтому на практике ограничиваются вычислением максимальной амплификации и соответствующих оптимальных возмущений для линеаризованных уравнений. Поскольку для линеаризованных уравнений максимальная амплификация не зависит от величины первоначального возмущения, для определенности полагают $\mathcal{E}(\mathbf{v}(0)) = 1$.

Оптимальные возмущения могут играть существенную роль и в поведении любой другой динамической системы в окрестности положения равновесия, если уравнения эволюции возмущений этой системы, линеаризованные относительно стационарного состояния, имеют существенно неортогональные моды, отвечающие существенно различным собственным значениям (этому условию удовлетворяют, например, модели ядерных реакторов с запаздывающими нейтронами [3, 30]). В этом случае всегда найдутся начальные возмущения, нормы которых будут значительно возрастать на конечных временных интервалах. Такие возмущения могут существенно повлиять на динамику системы.

Следует отметить, что не только оптимальные возмущения, но вообще возмущения, растущие по норме на конечных временных интервалах, весьма специфичны. Как правило, если начальное

возмущение устойчивого стационарного состояния выбирать случайным образом, то норма возмущения будет монотонно убывать с вероятностью единица. Вычисление оптимального возмущения требует специальных алгоритмов. Разработанные ранее методы [14, 15, 36, 37] позволяют эффективно вычислять максимальную амплификацию второй (евклидовой) нормы решения и оптимальные возмущения с заданной точностью для систем обыкновенных дифференциальных уравнений без запаздывания.

Пусть v означает возмущение устойчивого стационарного состояния некоторой конечномерной автономной динамической системы и линеаризованные уравнения эволюции возмущения этого стационарного состояния записаны в виде

$$\frac{dv}{dt} = Av, \quad (2.1)$$

где A — заданная постоянная матрица. Тогда $v(t) = \exp\{tA\}v(0)$ и расчет максимальной амплификации второй нормы возмущений сводится к вычислению максимальной амплификации второй нормы решений задач Коши для системы (2.1), которая очевидно равна

$$\Gamma_{\max} = \max_{t \geq 0} \|\exp\{tA\}\|_2. \quad (2.2)$$

При этом оптимальным возмущением будет правый сингулярный вектор v_{opt} матрицы $\exp\{t_{\text{opt}}A\}$, отвечающий ее максимальному сингулярному числу [21], где t_{opt} означает значение t , при котором достигается максимум (2.2).

Обычно множество оптимальных возмущений ограничивают теми из них, при которых максимальная амплификация достигается при наименьшем значении t , то есть при

$$t_{\text{opt}} = \min \arg \max_{t \geq 0} \|\exp\{tA\}\|_2.$$

Описанный выше подход к вычислению максимальной амплификации второй нормы возмущений и соответствующих оптимальных возмущений сводится, таким образом, к задаче вычисления для заданной квадратной комплексной матрицы A глобального максимума функции

$$\Gamma(t) = \|\exp\{tA\}\|_2,$$

и минимального t_{opt} , при котором достигается этот максимум. Предполагается, что спектр матрицы A лежит в левой полуплоскости (условие устойчивости рассматриваемого стационарного состояния), а максимальное собственное значение h_{\max} матрицы $A + A^*$ положительное (иначе $t_{\text{opt}} = 0$, а $\Gamma_{\max} = 1$).

Найти \hat{t}_{opt} , дающее максимум $\Gamma(t)$ с заданной относительной точностью δ , можно, вычислив $\Gamma(t)$ на равномерной сетке с узлами $t_j = \tau j$ и достаточно мелким шагом τ . Для этого вычисляем матрицу $E_1 = \exp\{\tau A\}$ методом, описанным в [25]. В остальных узлах сетки значение матричной экспоненты $E_j = \exp\{t_j A\}$ вычисляем по формуле $E_j = E_1 E_{j-1}$. Нормы полученных матриц вычисляем с помощью соответствующей процедуры пакета LAPACK [9]. Остановить вычисления достаточно, если $\|E_j\|_2 < 1$ (можно показать, что в этом случае $t_j > t_{\text{opt}}$), взяв в качестве \hat{t}_{opt} узел сетки, в котором норма матричной экспоненты максимальная. Этот алгоритм мы далее будем называть простейшим.

Основываясь на неравенстве $\Gamma(t)^2 \leq \exp(h_{\max} t)$, непосредственно следующем из очевидной оценки

$$\frac{d}{dt} \|v(t)\|_2^2 \leq h_{\max} \|v(t)\|_2^2,$$

несложно показать, что найденное таким образом \hat{t}_{opt} будет удовлетворять неравенству

$$|\Gamma(\hat{t}_{\text{opt}})^2 - \Gamma(t_{\text{opt}})^2| / \Gamma(t_{\text{opt}})^2 \leq \delta, \quad (2.3)$$

если выбрать $\tau = \ln(1 + \delta) / h_{\max}$. Однако, как правило, вычислительные затраты такого алгоритма будут катастрофически большими, поскольку из-за большой величины $t_{\text{opt}} h_{\max}$ будет очень большой величина j , при которой $\Gamma(t_j)$ достигает максимума.

Для уменьшения вычислительных затрат в работе [36] было предложено заменять матрицу A ее формой Шура [21] (то есть верхней треугольной матрицей, унитарно подобной исходной) с

диагональными элементами, упорядоченными по невозрастанию вещественных частей, а для ускорения вычисления матриц E_j , которые для верхней треугольной матрицы будут также верхними треугольными, и их норм применять аппроксимацию вида

$$E_k \approx \begin{bmatrix} P_k \\ 0 \end{bmatrix} Q_k, \quad (2.4)$$

где P_k — квадратная верхняя треугольная матрица меньшего порядка, чем E_k , а Q_k — унитарная прямоугольная матрица. Учитывая, что норма правой части (2.4) равна $\|P_k\|_2$, такая аппроксимация позволит вычислять, начиная с $j = k + 1$, матрицы $\widetilde{E}_1^{j-k} P_k$ вместо E_j , где \widetilde{E}_1 означает главную подматрицу матрицы E_1 того же порядка, что и P_k . В работе [36] показано, что если такую редукцию выполнять время от времени в процессе работы исходного алгоритма, то вычислительные затраты существенно уменьшатся (в тысячи раз) при той же точности результата в смысле (2.3).

Аппроксимацию (2.4) можно выполнить с заданной точностью следующим образом. Разбиваем матрицу E_k по строкам на два блока:

$$E_k = \begin{bmatrix} E_k^{(1)} \\ E_k^{(2)} \end{bmatrix}$$

так, чтобы норма нижнего блока не превосходила заданную малую пороговую величину, и, отбросив нижний блок, выполняем разложение верхнего блока в произведение квадратной верхней треугольной и унитарной прямоугольной матриц, что сводится к вычислению QL-разложения транспонированной матрицы.

В пакете LAPACK имеются процедуры, необходимые для вычисления всех упомянутых выше разложений. Поэтому вычисление максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии возмущений и соответствующего оптимального возмущения можно организовать так, чтобы основной объем вычислений выполнялся стандартными матричными процедурами.

Этот, а также методы, предложенные в недавней работе [37] для систем с большими разреженными матрицами и основанные на минимизации функционала

$$\frac{(\exp\{tA\}v^0, \exp\{tA\}v^0)}{(v^0, v^0)}$$

по t и v^0 , представляется целесообразным в будущем перенести на системы с запаздыванием. В данной работе мы использовали алгоритм, предложенный в работе [12] и являющийся обобщением на системы с запаздыванием описанного выше простейшего алгоритма.

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВИРУСНЫХ ИНФЕКЦИЙ И ФАРМАКОКИНЕТИКИ ЛЕЧЕБНЫХ ПРЕПАРАТОВ

Математические модели вирусных инфекций описывают процессы деления, дифференцировки и гибели клеток иммунной системы, которые характеризуются значительной продолжительностью по сравнению с характерными временами размножения вирусов. По этой причине использование дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом является адекватным способом моделирования иммунных процессов [2, 4, 5, 33]. Модели описывают различные варианты динамики вирусных инфекций, включая стационарные решения. Стационарные решения соответствуют хроническим вариантам течения заболеваний и являются объектом изучения для разработки новых подходов к их лечению. В основе таких подходов лежит комбинация противовирусных и иммуномодулирующих препаратов. Для теоретического исследования возможностей построения эффективных мультимодальных воздействий на хронические вирусные инфекции нами рассмотрена математическая модель динамики инфекции, вызванной вирусами лимфоцитарного хориоменингита (ВЛХМ), разработанная в [10]. Данная модель сформулирована в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и описывает динамику следующих

переменных, зависящих от времени: концентрации вирусных частиц $V(t)$, двух популяций специфических к ВЛХМ цитотоксических лимфоцитов (ЦТЛ) — клеток-прекурсоров $E_p(t)$ и клеток-эффекторов $E_e(t)$, а также кумулятивной вирусной нагрузки $W(t)$. Система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}V(t) &= \beta V(t) \left(1 - \frac{V(t)}{V_{mvc}}\right) - \gamma_{VE} E_e(t) V(t), \\
 \frac{d}{dt}E_p(t) &= \alpha_{E_p}(E_p^0 - E_p(t)) + \beta_p g_p(W) V(t - \tau) E_p(t - \tau) - \\
 &\quad - \alpha_{AP} V(t - \tau_A) V(t) E_p(t), \\
 \frac{d}{dt}E_e(t) &= b_d g_e(W) V(t - \tau) E_p(t - \tau) - \\
 &\quad - \alpha_{AE} V(t - \tau_A) V(t) E_e(t) - \alpha_{E_e} E_e(t), \\
 \frac{d}{dt}W(t) &= b_W V(t) - \alpha_W W(t),
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

где $g_p(W) = 1/(1 + W/\theta_p)^2$, $g_e(W) = 1/(1 + W/\theta_E)^2$. Биологический смысл параметров модели пояснен в табл. 1.

ТАБЛИЦА 1. Биологический смысл параметров модели (3.1).

Параметр	Биологические смысл
β	Константа скорости репликации вирусных частиц
γ_{VE}	Константа скорости элиминации вирусов за счет клеток-эффекторов
V_{mvc}	Максимально возможная концентрация вирусных частиц в селезенке
τ	Характерная продолжительность цикла деления ЦТЛ
b_p	Константа скорости стимуляции ЦТЛ
b_d	Константа скорости дифференциации ЦТЛ
θ_p	Порог вирусной нагрузки для перехода прекурсоров в состояние анергии
θ_E	Порог вирусной нагрузки для перехода эффекторов в состояние анергии
α_{E_p}	Константа скорости естественной гибели прекурсоров
α_{E_e}	Константа скорости естественной гибели эффекторов
E_p^0	Концентрация прекурсоров в селезенке мыши, не имевшей контакта с ВЛХМ
τ_A	Характерная продолжительность перехода ЦТЛ к апоптозу
α_{AP}	Константа скорости апоптоза прекурсоров
α_{AE}	Константа скорости апоптоза эффекторов
b_W	Константа скорости роста кумулятивной вирусной нагрузки
α_W	Константа скорости восстановления организма от воздействий вирусной нагрузки

Для определения решения при $t > 0$ достаточно задать значения $V(t)$ при $-\tau_A \leq t \leq 0$, значения $E_p(t)$ при $-\tau \leq t \leq 0$, значения $E_e(0)$ и $W(0)$. Однако для единообразия далее мы будем предполагать, что начальные значения для всех переменных модели заданы при $-\tau_A \leq t \leq 0$.

Задача Коши для системы уравнений (3.1) с неотрицательными начальными условиями и неотрицательными параметрами глобально разрешима на любом конечном интервале времени $t \in [0, T]$. Данное утверждение можно доказать, используя технику, описанную в [4], на основе метода шагов Беллмана [1], с использованием теоремы Такуэти о положительной инвариантности систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [39] и рассматривая линейную систему ОДУ, мажорирующую правую часть системы уравнений модели.

Обозначив вектор переменных системы (3.1) через

$$U(t) = (V(t), E_p(t), E_e(t), W(t))^T,
 \tag{3.2}$$

будем записывать эту систему в следующем компактном виде:

$$\frac{d}{dt}U(t) = F(U(t), U(t - \tau), U(t - \tau_A)). \quad (3.3)$$

В соответствии со сказанным выше будем считать, что вектор переменных модели $U(t)$ задан при $-\tau_A \leq t \leq 0$.

Модель (3.3) допускает существование различных стационарных решений, которым можно дать различную биологическую интерпретацию. Нами рассмотрены два варианта стационарных решений модели. Первое стационарное состояние соответствует латентной форме инфекции с низким уровнем вирусной нагрузки и большой численностью клеток иммунологической памяти [17]. Второе стационарное решение описывает клинически выраженную хроническую инфекцию с большой вирусной нагрузкой и частичным истощением популяции Т-лимфоцитов, специфичных к антигенам вируса [18, 35]. Вариацией параметров в области допустимых значений, указанных в [32], были найдены стационарные состояния, описывающие два вышеуказанных варианта хронической инфекции. Стационарные состояния вычислялись на основе системы нелинейных алгебраических уравнений модели $F(U, U, U) = 0$ с помощью метода Ньютона. Поиск наборов параметров, при которых стационарные состояния модели (3.3) обладают требуемыми свойствами, и соответствующих начальных значений для метода Ньютона был выполнен, основываясь на результатах численного бифуркационного анализа, проведенного в работе [32]. Были определены два набора параметров, для каждого из которых было найдено устойчивое положение равновесия. Значения параметров модели (3.3), соответствующие указанным двум стационарным состояниям \bar{U}_I и \bar{U}_{II} , приведены в табл. 2, а значения компонент этих стационарных состояний — в табл. 3. Соответственно, целью возмущения системы в первом случае может являться либо активация инфекционного процесса с последующим удалением вирусного резервуара, либо непосредственная нейтрализация инфекции, а во втором — восстановление реактивности истощенного звена иммунной системы и снижение вирусной нагрузки. Заметим, что данные сценарии динамики процесса имеют место при ВИЧ инфекции и соответствуют фенотипически различным вариантам инфекции, наблюдаемым у «элит-контроллеров» и «прогрессоров» соответственно [22, 26].

Для лечения хронических форм инфекционных заболеваний перспективным представляется применение комбинированной терапии, т. е. сочетание антиретровирусных и иммуномодулирующих воздействий. Результатом подобных возмущений системы вирус-организм хозяина будет изменение динамики системы. Нас интересует построение мультикомпонентных воздействий на состояние системы в положении равновесия, которые будут иметь своим следствием формирование реакции, характеризующейся активацией иммунного ответа и уменьшением численности вирусной популяции. Для параметризации эффекта комбинированной терапии воспользуемся базовыми зависимостями фармакокинетики, описывающими распространение препаратов в организме.

Если в момент времени t_0 была введена некоторая доза препарата, то концентрация препарата $C(t, t_0)$ тождественно равна нулю при $t < t_0$ и меняется далее по закону, который определяется соответствующей фармакокинетической моделью [8], в том числе, $C(t, t_0) = a_1 \exp\{-\alpha_1(t - t_0)\}$ в случае однокамерной модели, $a_1 \exp\{-\alpha_1(t - t_0)\} - a_2 \exp\{-\alpha_2(t - t_0)\}$ в случае однокамерной модели с всасыванием, $a_1 \exp\{-\alpha_1(t - t_0)\} + a_3 \exp\{-\alpha_3(t - t_0)\}$ в случае двухкамерной модели и $a_1 \exp\{-\alpha_1(t - t_0)\} - a_2 \exp\{-\alpha_2(t - t_0)\} + a_3 \exp\{-\alpha_3(t - t_0)\}$ в случае двухкамерной модели с всасыванием, где a_j , α_j означают некоторые положительные величины. Если за время лечения пациент принимал лекарства l раз в моменты времени t_0^1, \dots, t_0^l , то с учетом конкретного выбора терапии концентрация препарата в любой момент времени будет равна

$$C(t) = \sum_{i=1}^l C^i(t, t_0^i),$$

где $C^i(t, t_0^i)$ означает концентрацию препарата, введенного в момент времени t_0^i .

В дополнение к приведенным стандартным моделям фармакокинетики, следует рассматривать и модели, описывающие процессы увеличения численностей клеток и антигена, реализуемых путем адаптивного переноса вирус-специфических лимфоцитов (введение в организм реципиента генетически близких лимфоцитов, которые продолжают функционировать в организме реципиента)

и введения вирусных антигенов, соответственно. С учетом поведения перечисленных выше фармакокинетических моделей, в качестве базисных функций начального возмущения представляется корректным использовать функции, качественно аппроксимирующие поведение препаратов в рамках однокамерных и двухкамерных моделей, в том числе, и с положительными показателями экспонент, а именно, функции вида

$$\begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0, \\ \exp\{\beta(t - t_0)\} - 1, & t_0 \leq t \leq 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

для переменных V и W и

$$\begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0, \\ \exp\{\beta(t - t_0)\}, & t_0 \leq t \leq 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

для переменных E_p и E_e . Примеры таких функций приведены на рис. 1-2. Заметим, что линейная комбинация нескольких таких воздействий может приводить к немонотонным по времени возмущениям стационарного состояния системы.

4. ОПТИМАЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В работе [12] для систем с запаздыванием были впервые предложены физически обоснованные аналоги максимальной амплификации нормы решения и оптимального возмущения. Описанию этих новых понятий посвящен данный раздел. В отличие от работы [12], мы введем более общие определения, позволяющее варьировать значимость отдельных компонент отклика на оптимальное возмущение.

Нас будет интересовать поведение системы (3.3) вблизи устойчивого стационарного состояния. Записывая решение вблизи стационарного состояния в виде $U(t) = \bar{U} + \varepsilon U'(t) + O(\varepsilon^2)$, где ε — малый по абсолютной величине параметр, подставляя это решение в (3.3) и требуя, чтобы полученные равенства выполнялись при всех сколь угодно малых значениях ε , для функции $U'(t)$ получим следующую систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt}U'(t) = L_0U'(t) + L_\tau U'(t - \tau) + L_{\tau_A}U'(t - \tau_A), \quad (4.1)$$

где

$$L_0 = \begin{pmatrix} \beta - \frac{2\beta\bar{V}}{V_{vmc}} - \gamma_{VE}\bar{E}_e & 0 & -\gamma_{VE}\bar{V} & 0 \\ -\alpha_{AP}\bar{V}\bar{E}_p & -\alpha_{E_p} - \alpha_{AP}\bar{V}^2 & 0 & \frac{-2b_p\bar{V}\bar{E}_p g_p(\bar{W})}{\theta_p + \bar{W}} \\ -\alpha_{AE}\bar{V}\bar{E}_e & 0 & -\alpha_{E_e} - \alpha_{AE}\bar{V}^2 & \frac{-2b_d\bar{V}\bar{E}_p g_e(\bar{W})}{\theta_E + \bar{W}} \\ b_W & 0 & 0 & -\alpha_W \end{pmatrix},$$

$$L_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_p\bar{E}_p g_p(\bar{W}) & b_p\bar{V} g_p(\bar{W}) & 0 & 0 \\ b_d\bar{E}_p g_e(\bar{W}) & b_d\bar{V} g_e(\bar{W}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{\tau_A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{AP}\bar{V}\bar{E}_p & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{AE}\bar{V}\bar{E}_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Систему (4.1) будем называть *линеаризованными уравнениями эволюции возмущений*. Начальные значения этой системы будем задавать, как и начальные значения системы (3.3), в интервале $-\tau_A \leq t \leq 0$.

Для вектора переменных системы (4.1) введем в рассмотрение следующее семейство локальных норм в момент времени t :

$$\|U'\|_{D,t} = \left(\int_{t-\tau_A}^t \|DU'(\xi)\|_2^2 d\xi \right)^{1/2}, \quad (4.2)$$

где D — заданная положительно определенная диагональная матрица, а $\|\cdot\|_2$ — вторая (евклидова) векторная норма.

Под оптимальным возмущением $U'_{opt}(t)$ будем понимать решение системы (4.1), обеспечивающее максимальный подскок значения локальной нормы (4.2) по сравнению с ее первоначальным значением, то есть такое возмущение $U'(t)$, при котором достигается максимум величины

$$\max_{t \geq 0} \frac{\|U'\|_{SD,t}}{\|U'\|_{D,0}},$$

где S — заданная положительно определенная диагональная матрица, позволяющая варьировать значимость отдельных компонент отклика на возмущение.

Поскольку оптимальное возмущение по определению является некоторым решением линейной системы (4.1) и, следовательно, полностью определяется своим значением в интервале $-\tau_A \leq t \leq 0$, при построении оптимального возмущения наряду с выбором нормы, в которой проводится оптимизация, принципиальным является вопрос о том, из какого пространства функций, заданных в интервале $-\tau_A \leq t \leq 0$, мы берем начальные значения. Это подпространство функций $[-\tau_A, 0] \rightarrow \mathbb{R}^4$ мы далее будем обозначать через \mathcal{Q} . Для существования максимума необходимо, чтобы \mathcal{Q} было полным пространством в норме $\|\cdot\|_{D,0}$. На практике достаточно выбирать в качестве \mathcal{Q} линейную оболочку какого-либо конечного набора базисных функций. Это, в частности, гарантирует его полноту.

Искать оптимальное возмущение удобнее в два этапа. Сначала вычисляем максимальную амплификацию

$$\Gamma(t) = \max_{U'} \frac{\|U'\|_{SD,t}}{\|U'\|_{D,0}} \quad (4.3)$$

локальной нормы решения системы (4.1), где максимум берется по всем решениям, начальные значения которых ненулевые и принадлежат \mathcal{Q} , и находим $t = t_{opt}$, при котором функция $\Gamma(t)$ достигает максимального значения. Если таких t несколько, то для определенности берем из них минимальное. Таким образом,

$$t_{opt} = \min \arg \max_{t \geq 0} \Gamma(t).$$

Затем находим

$$U'_{opt} \in \arg \max_{U'} \frac{\|U'\|_{SD,t_{opt}}}{\|U'\|_{D,0}}. \quad (4.4)$$

Если D , S и \mathcal{Q} фиксированы, то любое найденное оптимальное возмущение обеспечивает один и тот же максимальный подскок локальной нормы решения. Обычно максимальная амплификация имеет только одну точку максимума, а решение оптимизационной задачи (4.4) однозначно с точностью до ненулевой мультипликативной константы.

Найденное оптимальное возмущение мы будем использовать для возмущения стационарных состояний исходной нелинейной модели (3.3). Для этого в качестве начальных значений мы будем брать

$$U(t) = \bar{U} + \varepsilon \tilde{U}'_{opt}(t) \quad (4.5)$$

при $-\tau_A \leq t \leq 0$, где $\tilde{U}'_{opt}(t)$ означает нормированное оптимальное возмущение, а ε — параметр. Варьируя этот параметр, можно увеличивать или уменьшать начальное возмущение стационарного состояния. Если абсолютная величина ε мала, то следует ожидать, что полученное решение $U(t)$ системы (3.3) будет близко к (4.5) при $t > 0$. При больших по абсолютной величине ε из-за влияния нелинейности решение системы (3.3) будет значительно отличаться от (4.5) при $t > 0$. Существенную роль играет и знак ε . В зависимости от него плотность популяции вируса при $t > 0$ либо начинает нарастать, либо убывать. Если оптимальное возмущение в (4.5) нормировано так, что первая компонента вектора

$$L_0 \tilde{U}'_{opt}(0) + L_\tau \tilde{U}'_{opt}(-\tau) + L_{\tau_A} \tilde{U}'_{opt}(-\tau_A)$$

является положительной, то плотность популяции вируса нарастает при $t > 0$ в случае $\varepsilon > 0$.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Оптимальные возмущения можно вычислять на основе любой разностной схемы, подходящей для решения задач Коши для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Следуя работе [12], мы будем использовать неявную схему второго порядка BDF2 [23] на равномерной сетке

$$\{t_k = \delta k : k = -m_A + 1, -m_A + 2, \dots\},$$

построенной в полуинтервале $(-\tau_A, \infty)$ с шагом $\delta > 0$. Величины $m = \lceil \tau/\delta \rceil$ и $m_A = \lceil \tau_A/\delta \rceil$, где $\lceil \cdot \rceil$ означает целую часть числа, являются дискретными аналогами задержек τ и τ_A соответственно. После дискретизации описанным выше способом система (4.1) примет вид

$$\frac{1,5U_k - 2U_{k-1} + 0,5U_{k-2}}{\delta} = L_0U_k + L_\tau U_{k-m} + L_{\tau_A} U_{k-m_A}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.1)$$

где U_k — сеточная функция, аппроксимирующая $U(t_k)$. В качестве начальных данных для решения задачи Коши нужно задать значения U_{-m_A+1}, \dots, U_0 .

Запишем уравнение (5.1) в виде

$$U_k = C_1U_{k-1} + C_2U_{k-2} + C_mU_{k-m} + C_{m_A}U_{k-m_A}, \quad (5.2)$$

где

$$C_1 = 2(1,5I - \delta L_0)^{-1}, \quad C_2 = -0,5(1,5I - \delta L_0)^{-1}, \\ C_m = (1,5I - \delta L_0)^{-1}\delta L_\tau, \quad C_{m_A} = (1,5I - \delta L_0)^{-1}\delta L_{\tau_A},$$

а I означает единичную матрицу четвертого порядка, и дополним уравнение (5.2) тождествами $U_j = U_j$, $j = k - 1, \dots, k - m_A + 1$. Полученную таким образом систему из m_A уравнений можно записать в виде

$$X_k = MX_{k-1}, \quad (5.3)$$

где

$$X_k = \begin{pmatrix} U_k \\ \vdots \\ U_{k-m_A+1} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1m_A} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{m_A1} & \cdots & M_{m_Am_A} \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Матрица M в (5.4) является блочной, блочного порядка m_A с блоками порядка 4. Все блоки этой матрицы нулевые, кроме поддиагональных блоков $M_{j+1,j} = I$ ($j = 1, \dots, m_A - 1$) и четырех блоков $M_{11} = C_1$, $M_{12} = C_2$, $M_{1m} = C_m$ и $M_{1m_A} = C_{m_A}$, стоящих в первой блочной строке.

В силу (5.3), (5.4) сеточный аналог Γ_k максимальной амплификации (4.3) нормы решения можно записать следующим образом:

$$\Gamma_k = \max_{X_0 \in \text{span}(Q) \setminus \{0\}} \frac{\|\tilde{H}M^k X_0\|_2}{\|HX_0\|_2},$$

где Q — матрица размера $4m_A \times p$ ($p \leq 4m_A$), столбцы которой образуют базис в сеточном аналоге подпространства \mathcal{Q} , $\text{span}(Q)$ означает линейную оболочку столбцов матрицы Q , $H = I_{m_A} \otimes D$, $\tilde{H} = I_{m_A} \otimes (SD)$, D и S — диагональные матрицы, задающие локальные нормы, в которых вычисляется оптимальное возмущение, а \otimes — символ Кронекерова произведения.

С учетом того, что

$$\Gamma_k = \|\tilde{H}M^k H^{-1}\tilde{Q}\|_2,$$

где \tilde{Q} — матрица, полученная ортогонализацией столбцов матрицы HQ , вычисление Γ_k сводится к формированию матрицы $Y_0 = H^{-1}\tilde{Q}$ и вычислению матриц Y_k по рекуррентной формуле $Y_k = MY_{k-1}$ с одновременным вычислением норм матриц $\tilde{H}Y_k$.

Пусть k_{opt} означает значение k , при котором достигается максимум Γ_k . Вычислив нормированный правый сингулярный вектор η матрицы

$$\tilde{H}M^{k_{opt}} H^{-1}\tilde{Q}, \quad (5.5)$$

отвечающий ее максимальному сингулярному числу [21], начальное значение X_0^{opt} сеточного аналога оптимального возмущения X_k^{opt} можно найти по формуле $X_0^{opt} = H^{-1}\tilde{Q}\eta$.

Отметим, что для повышения эффективности описанного выше алгоритма матрицу M надо хранить и умножать на векторы в разреженном формате.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Оптимальные возмущения искались в подпространстве \mathcal{Q} заданных в интервале $[0, \tau_A]$ функций $U(t)$, представляющих собой экспоненциальные зависимости вида (3.4) для переменных V и W и вида (3.5) для переменных E_e и E_p . В качестве значений параметра t_0 для этих базисных функций брались величины $-i\tau_A/l$ ($i = 0, \dots, l-1$), то есть правые концы l равных подынтервалов, на которые предварительно разбивался интервал $[-\tau_A, 0]$. В качестве весов нормы (диагональные элементы матрицы D) брались величины, обратные к компонентам рассматриваемого стационарного решения. Для расчета оптимальных возмущений использовалась сетка с шагом $\delta = 5 \cdot 10^{-3}$.

Для стационарного состояния \bar{U}_I вычислялось одно оптимальное возмущение, соответствующее следующему набору параметров базисных функций: $l = 2$, $\beta = -1, 0,5$ и 1 . Матрица S была взята единичной, т. е. все компоненты возмущения считались равнозначными. Далее это возмущение мы будем называть *первым*.

Для стационарного состояния \bar{U}_{II} были найдены и исследованы четыре оптимальных возмущения, которые мы далее будем называть *вторым*, *третьим*, *четвертым* и *пятым*, соответственно. При расчете второго оптимального возмущения в качестве \mathcal{Q} выбиралось подпространство функций, у которых компонента W является тождественным нулем. При расчете остальных оптимальных возмущений ненулевыми допускались все компоненты. Параметры возмущений выбирались следующими: для второго оптимального возмущения $l = 2$, $\beta = -1$ для компоненты V и $l = 14$, $\beta = 1$ для компонент E_p и E_e ; для третьего и четвертого оптимальных возмущений $l = 2$, $\beta = -1, 0,5$ и 1 для всех компонент; для пятого оптимального возмущения $l = 2$, $\beta = -12, -6, -1, 0,5$ и 1 для всех компонент. При расчете второго и четвертого оптимальных возмущений матрица S была выбрана единичной, при расчете третьего и пятого оптимальных возмущений диагональные элементы этой матрицы, отвечающие компонентам E_p и E_e , были увеличены в 10 раз, что повысило значимость этих компонент.

Во всех рассмотренных случаях максимальная амплификация, т. е. максимальное сингулярное число $\Gamma(t_{opt})$ матрицы (5.5), и второе максимальное сингулярное число $\tilde{\Gamma}(t_{opt})$ этой матрицы были достаточно хорошо отделены друг от друга (см. табл. 4), что свидетельствовало о единственности оптимального возмущения с точностью до ненулевой мультипликативной константы.

Для интегрирования системы (3.3) с начальными данными (4.5) шаг сетки выбирался равным 10^{-4} и использовалась та же схема BDF2, что и при вычислении оптимальных возмущений. Оптимальные возмущения интерполировались на более мелкую сетку с помощью стандартного алгоритма кубической интерполяции, сохраняющего монотонность и выпуклость. Параметр ε выбирался по абсолютной величине таким, чтобы получить достаточно большой отклик при малом начальном возмущении. Отметим, что для численного интегрирования исходной системы (3.1) ее авторы использовали код DIFSUB-DDE, предназначенный для численного решения жестких систем нелинейных дифференциальных уравнений с постоянными запаздываниями [11]. В коде реализована модификация Гира линейного многошагового метода по схеме BDF p переменного порядка $p \leq 6$ с обработкой точек разрыва производных до $p+1$ порядка, при этом для аппроксимации запаздывающих компонент используется интерполяционный вектор Нордсика. С помощью этого кода были проведены верификационные расчеты, показавшие хорошее совпадение с результатами расчетов с помощью метода BDF2.

Стационарное состояние \bar{U}_I , возмущенное начальное значение, полученное добавлением к этому стационарному состоянию оптимального возмущения, взятого с коэффициентом ε , и решения двух задач Коши с такими начальным значением приведены на рис. 3 и 4. Горизонтальные линии соответствуют стационарному состоянию, темные на четырех верхних картинках — возмущенному начальному значению, а темные и светлые на четырех нижних картинках — решениям задач Коши, полученным соответственно с помощью полных и линеаризованных уравнений. В верхней части табл. 3 приведены округленные до трех значащих десятичных цифр максимальные и минимальные значения компонент решений, полученных с помощью полных уравнений. Аналогичные результаты для стационарного состояния \bar{U}_{II} представлены на рис. 5–8 и в нижней части табл. 3.

Для стационарного состояния \bar{U}_I с низкой вирусной нагрузкой целью возмущения являлось обострение инфекционного процесса и выведение вирусов из организма. При выбранных параметрах оптимального возмущения оно оказалось немонотонной функцией. При этом относительное возмущение было больше в компонентах, отвечающих численности Т-лимфоцитов-эффекторов E_p и предшественников E_e (см. рис. 3 и 4). Начальное возмущение, равное такому оптимальному возмущению, взятому с подходящим коэффициентом ε , вызывает отклик системы, характеризующийся элиминацией вирусов. Величина параметра $\varepsilon = 0,45$ оказывается большой с точки зрения влияния нелинейности на динамику решений, что проявляется в существенном отличии поведения решений задач Коши для линеаризованной системы и исходной нелинейной системы уравнений. Изменение знака параметра ε не оказывает существенного влияния на достижение цели возмущения — элиминацию вирусов до практически нулевых значений, однако уменьшает амплитуду отклика системы (см. рис. 4 и табл. 3). С точки зрения течения вирусной инфекции, такое начальное возмущение состоит из чередующихся обострений и ослаблений инфекционного процесса, которые достигаются за счет комбинации выбранных базисных функций.

Для стационарного состояния \bar{U}_{II} с большой вирусной нагрузкой целью возмущения системы являлось выведение вирусов из организма. На рис. 5 представлены результаты расчетов для сценария, когда в течение 5,6 суток до окончания терапии имело место двукратное введение противовирусных препаратов и имелась возможность 14 раз применить иммуномодулирующую терапию. Оптимальное возмущение оказалось немонотонным по вирусной переменной V и монотонным по переменным E_p и E_e . Взятое с $\varepsilon = 20$ в качестве возмущения начального значения, оно привело к динамике вирусной инфекции, характеризующейся снижением на 4 порядка вирусной нагрузки, активацией иммунного ответа до уровня, удерживающего численность вирусной популяции в области малых значений в течение 200 суток, что сопоставимо с временем жизни экспериментальных животных (мышей). Поведения решений линеаризованной и исходной систем качественно согласуются.

Изменение параметров оптимального возмущения привело к качественному изменению его характера — оно стало существенно немонотонным по всем переменным (см. рис. 6). Увеличение в 10 раз веса (вклада) компонент E_p и E_e в максимизируемую норму решения имело следствием уменьшение амплитуды изменения этих компонент решения. При этом, численность вирусной популяции, как и в предыдущем случае (рис. 5), снижалась на 4 порядка, до уровня ниже порога обнаружения стандартными методами, однако существенно быстрее возвращалась к исходному стационарному состоянию.

Выравнивание значимости компонент возмущения при одновременном изменении величины и знака параметра ε позволяют, как показано на рис. 7, добиться снижения вирусной нагрузки на 5 порядков, что соответствует практически полному выведению вирусов из организма. При этом, поведение начальных возмущений является существенно немонотонным по всем компонентам, а амплитуда изменений численности клеток иммунной системы остается такой же, как и в предыдущем случае.

Из рис. 8 видно, что увеличение числа базисных функций приводит к более немонотонному поведению оптимального возмущения. При этом, снижение вирусной нагрузки происходит в пределах четырех порядков. Увеличение относительного веса компонент E_p и E_e не оказывает влияния на их амплитуды изменения.

Таблица 2. Значения параметров модели (3.1), соответствующие исследуемым стационарным состояниям \bar{U}_I и \bar{U}_{II} .

Параметр	Размерность	\bar{U}_I	\bar{U}_{II}
β	1/сутки	1,2	0,08
E_p^0	клетка/мл	10^6	10^3
b_p	мл/(частиц·сутки)	$7,73 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$
b_d	мл/(частиц·сутки)	$7,73 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$
θ_p	частицы/мл	$3 \cdot 10^6$	10
θ_E	частицы/мл	$1 \cdot 10^5$	$1,8 \cdot 10^6$
γ_{VE}	мл/(клетка·сутки)	$1,34 \cdot 10^{-6}$	
V_{mvc}	частицы/мл	$4,82 \cdot 10^7$	
α_{E_p}	1/сутки	0,5	
α_{E_e}	1/сутки	0,1	
τ	сутки	0,4	
τ_A	сутки	5,6	
α_{AP}	(мл/частицы) ² /сутки	$7,5 \cdot 10^{-16}$	
α_{AE}	(мл/частицы) ² /сутки	$4,36 \cdot 10^{-14}$	
b_W	1/сутки	1	
α_W	1/сутки	0,11	

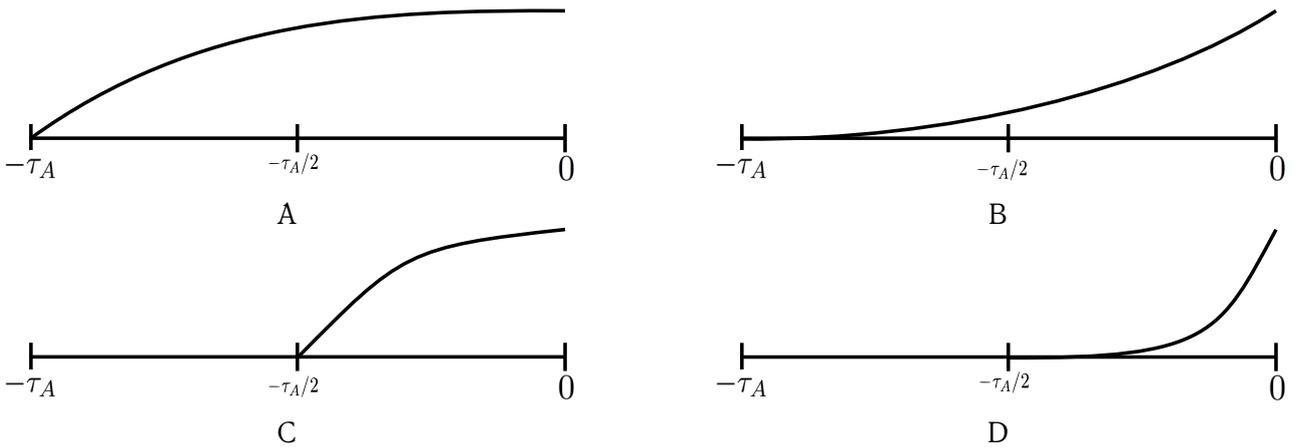


Рис. 1. Пример базисных функций для переменных V и W при $\beta = -1$ и $t_0 = -\tau_A$ (A), $\beta = 1$ и $t_0 = -\tau_A$ (B), $\beta = -1$ и $t_0 = -\tau_A/2$ (C), $\beta = 1$ и $t_0 = -\tau_A/2$ (D)

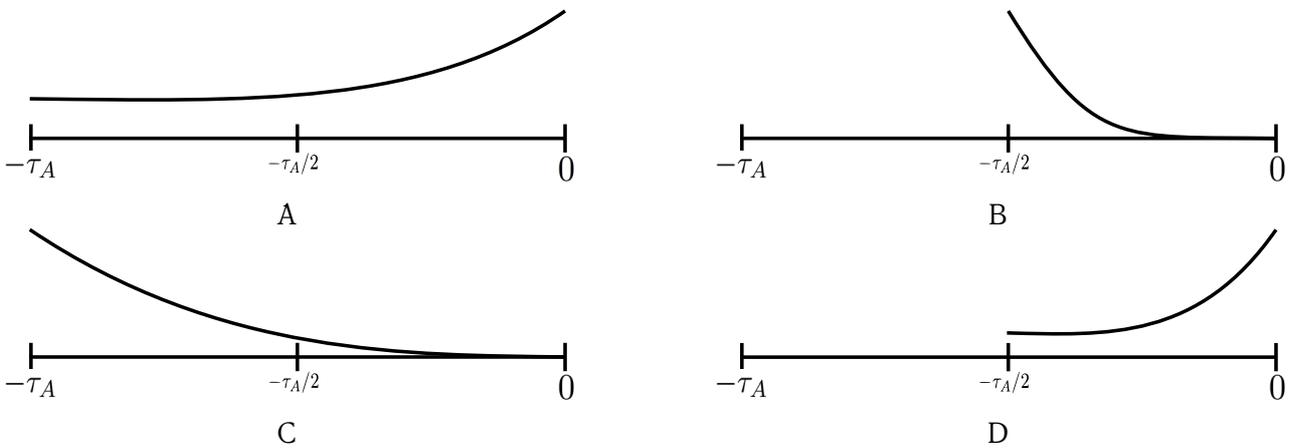


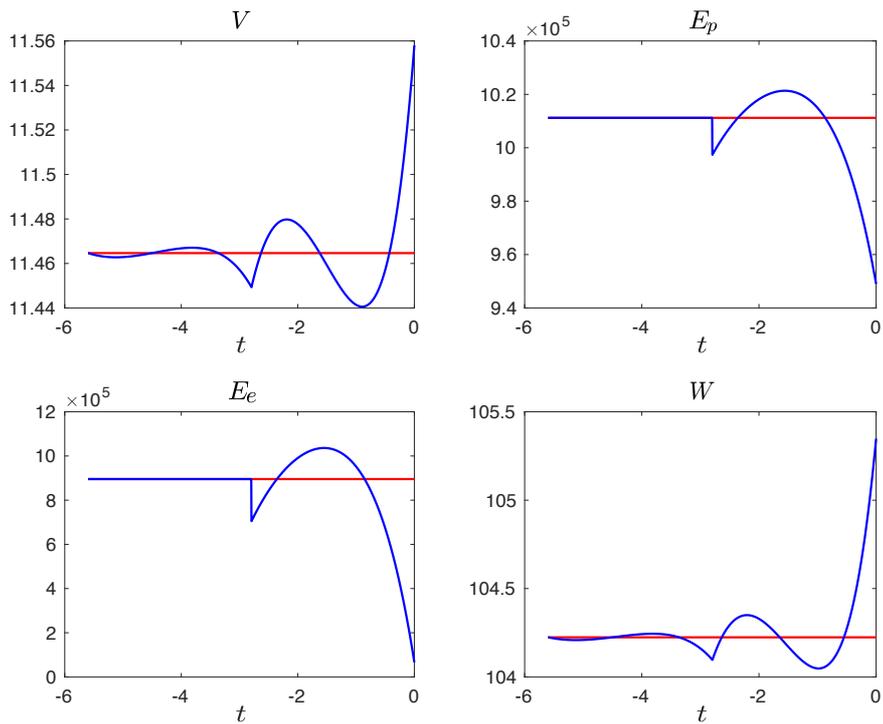
Рис. 2. Пример базисных функций для переменных E_p и E_e при $\beta = -1$ и $t_0 = -\tau_A$ (A), $\beta = 1$ и $t_0 = -\tau_A$ (B), $\beta = -1$ и $t_0 = -\tau_A/2$ (C), $\beta = 1$ и $t_0 = -\tau_A/2$ (D)

Таблица 3. Округленные до трех значащих десятичных цифр значения компонент стационарного состояния и максимальные и минимальные значения компонент возмущенного стационарного состояния, соответствующие рис. 3–8.

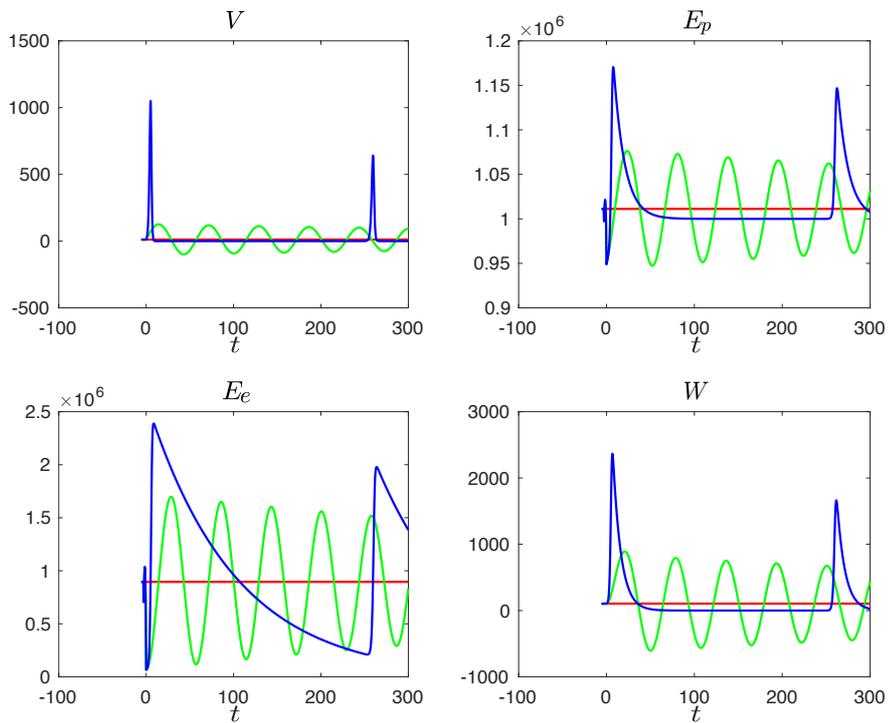
		V	E_p	E_e	W
Состояние \bar{U}_I		11,5	$1,01 \cdot 10^6$	$8,96 \cdot 10^5$	104
рис. 3	min	$4,85 \cdot 10^{-36}$	$9,5 \cdot 10^5$	$6,5 \cdot 10^4$	$6,15 \cdot 10^{-8}$
	t_{\min}	107,2	0,02	0,04	230
	max	1049,4	$1,17 \cdot 10^6$	$2,39 \cdot 10^6$	$2,37 \cdot 10^3$
	t_{\max}	5,06	7,63	8,5	6,71
рис. 4	min	$3,46 \cdot 10^{-14}$	10^6	$3,9 \cdot 10^5$	$9,09 \cdot 10^{-5}$
	t_{\min}	66,42	138,35	151,04	129,36
	max	334,74	$1,1 \cdot 10^6$	$1,73 \cdot 10^6$	$1,1 \cdot 10^3$
	t_{\max}	158,2	161,67	0,04	160,71
Состояние \bar{U}_{II}		$1,35 \cdot 10^5$	10^3	$5,95 \cdot 10^4$	$1,23 \cdot 10^6$
рис. 5	min	23,38	10^3	108,87	$6,93 \cdot 10^3$
	t_{\min}	10,33	-4	30,39	56,53
	max	$5,34 \cdot 10^5$	$3,06 \cdot 10^4$	$2,38 \cdot 10^6$	$1,32 \cdot 10^6$
	t_{\max}	0	0	0,79	0,54
рис. 6	min	21,18	656,85	81,7	$1,27 \cdot 10^4$
	t_{\min}	$1,2 \cdot 10^{-3}$	10^{-4}	19,75	54,7
	max	$1,55 \cdot 10^5$	$1,06 \cdot 10^3$	$6,18 \cdot 10^4$	$2,18 \cdot 10^6$
	t_{\max}	-0,99	-1,56	-1,55	$2 \cdot 10^{-4}$
рис. 7	min	3,43	975,74	21,51	$3,2 \cdot 10^4$
	t_{\min}	0,25	10^{-3}	24,32	60,68
	max	$1,56 \cdot 10^5$	10^3	$6,2 \cdot 10^4$	$1,25 \cdot 10^6$
	t_{\max}	-0,98	-1,5	0	-0,98
рис. 8	min	30,5	693	109	$1,56 \cdot 10^4$
	t_{\min}	$1,2 \cdot 10^{-3}$	10^{-4}	19,1	52,9
	max	$1,56 \cdot 10^5$	$1,05 \cdot 10^3$	$6,15 \cdot 10^4$	$2,18 \cdot 10^6$
	t_{\max}	-0,81	-1,3	-1,3	$2 \cdot 10^{-4}$

Таблица 4. Результаты расчета максимальной амплификации.

Состояние	Номер возмущения	t_{opt}	$\Gamma(t_{opt})$	$\tilde{\Gamma}(t_{opt})$
\bar{U}_I	1	19,0	61,57	2,76
\bar{U}_{II}	2	5,00	2,82	2,04
\bar{U}_{II}	3	6,75	44,06	12,82
\bar{U}_{II}	4	6,75	6,53	4,97
\bar{U}_{II}	5	7,00	47,78	12,6

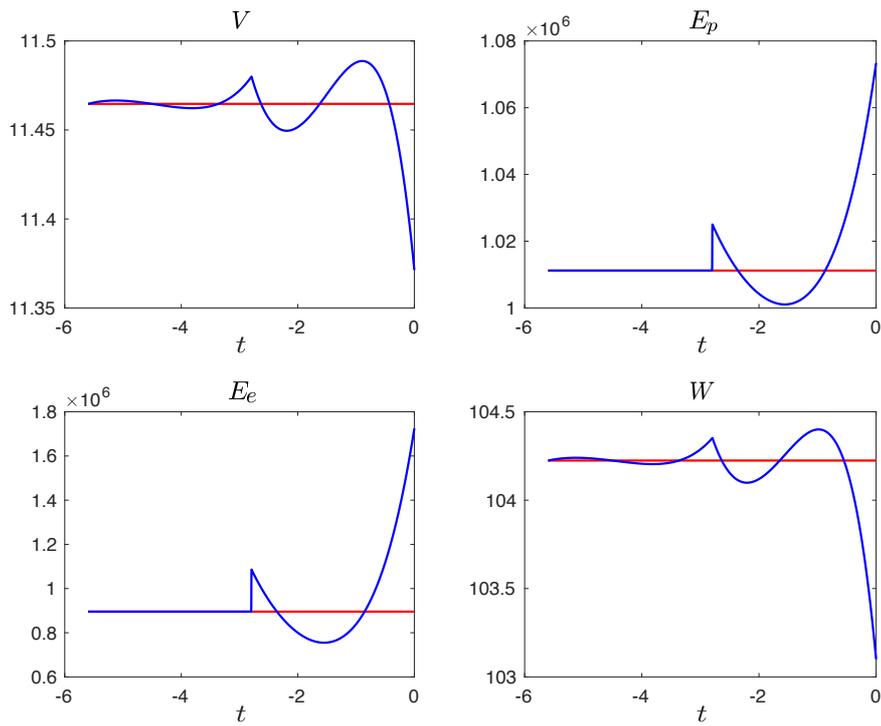


А

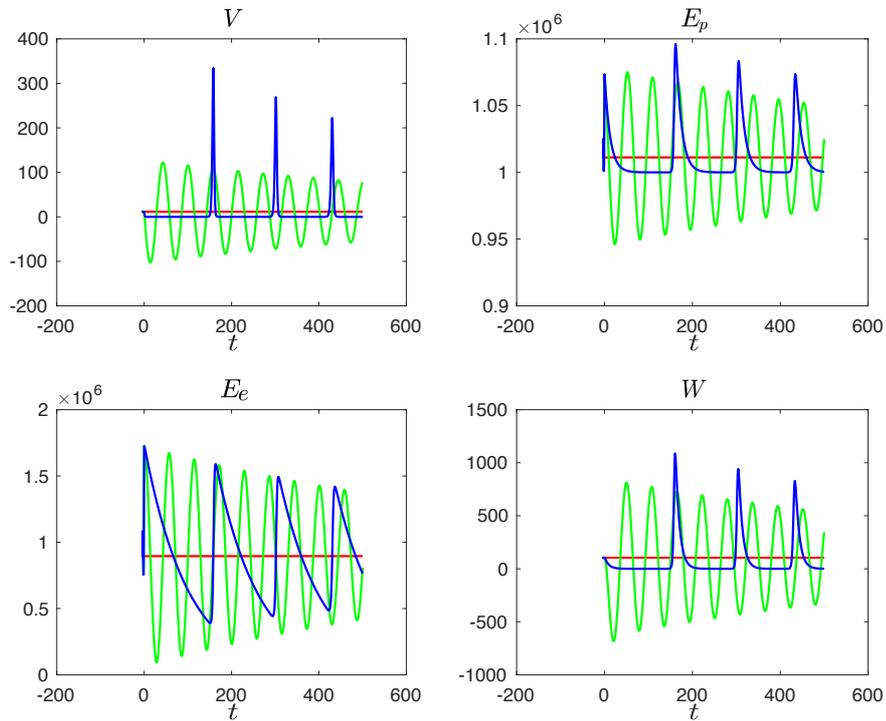


В

Рис. 3. Начальное значение (А) и результаты интегрирования стационарного состояния \bar{U}_I , возмущенного первым оптимальным возмущением с $\varepsilon = 0,45$, темным — интегрирование на основе полных, светлым — на основе линейризованных уравнений (В)

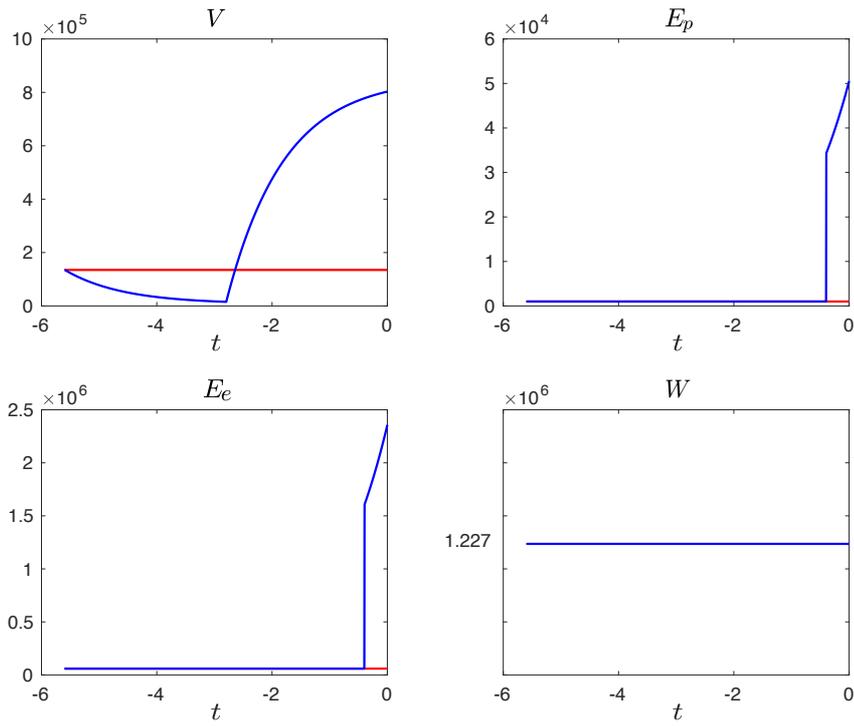


A

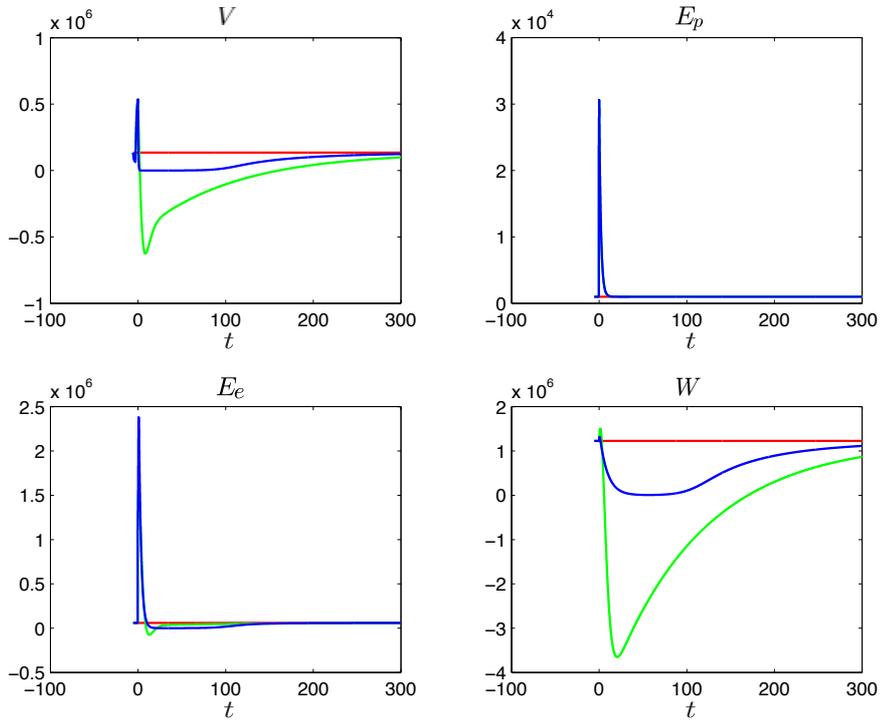


B

Рис. 4. Начальное значение (A) и результаты интегрирования стационарного состояния \bar{U}_I , возмущенного первым оптимальным возмущением с $\varepsilon = -0,45$, темным — интегрирование на основе полных, светлым — на основе линеаризованных уравнений (B)

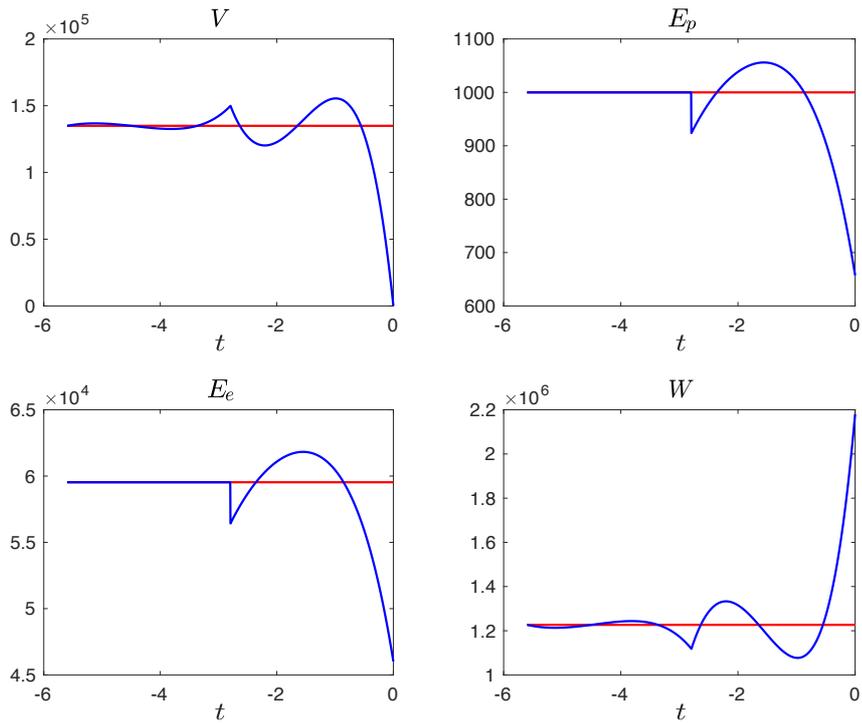


A

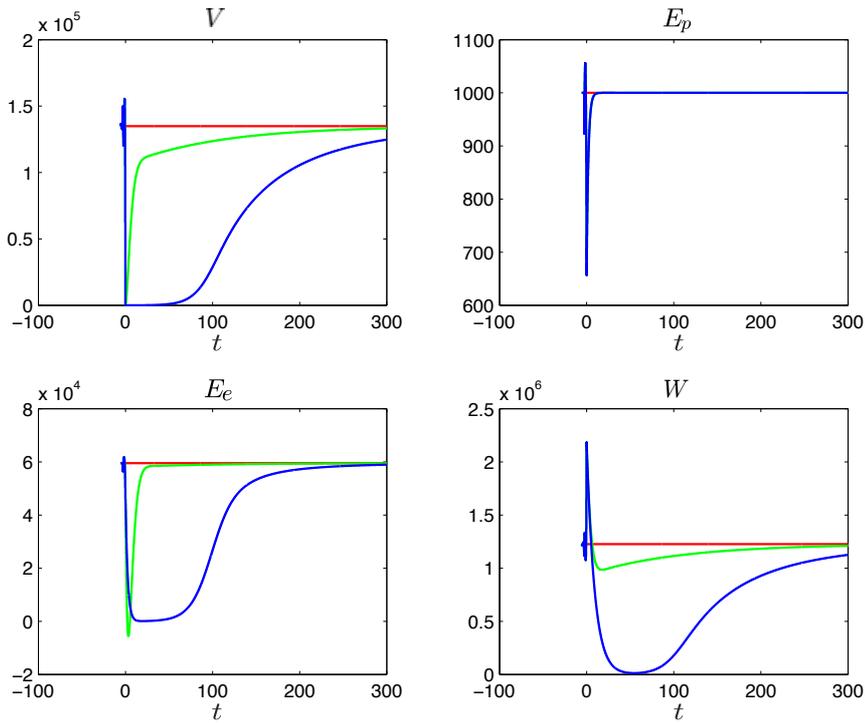


B

Рис. 5. Начальное значение (А) и результаты интегрирования стационарного состояния \bar{U}_{II} , возмущенного вторым оптимальным возмущением с $\varepsilon = -20$, темным — интегрирование на основе полных, светлым — на основе линейризованных уравнений (В)

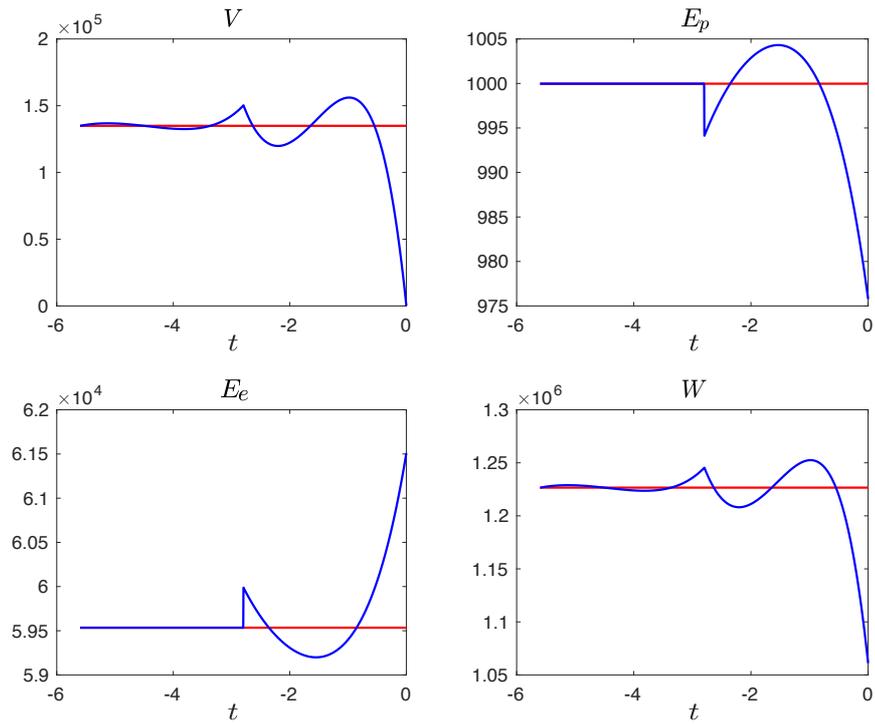


A

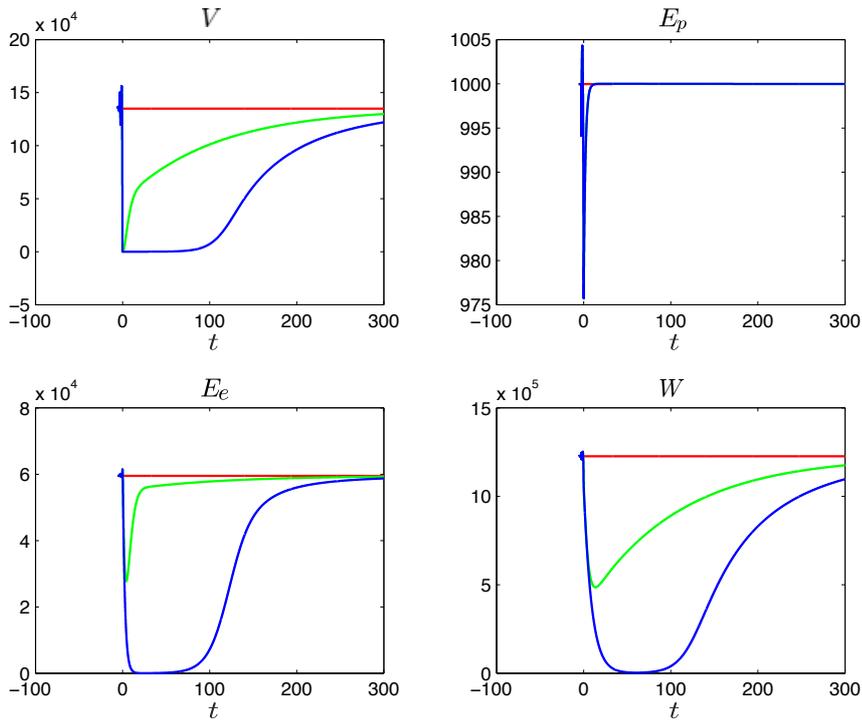


B

Рис. 6. Начальное значение (А) и результаты интегрирования стационарного состояния \bar{U}_{II} , возмущенного третьим оптимальным возмущением с $\varepsilon = 0,5371$, темным — интегрирование на основе полных, светлым — на основе линеаризованных уравнений (В)

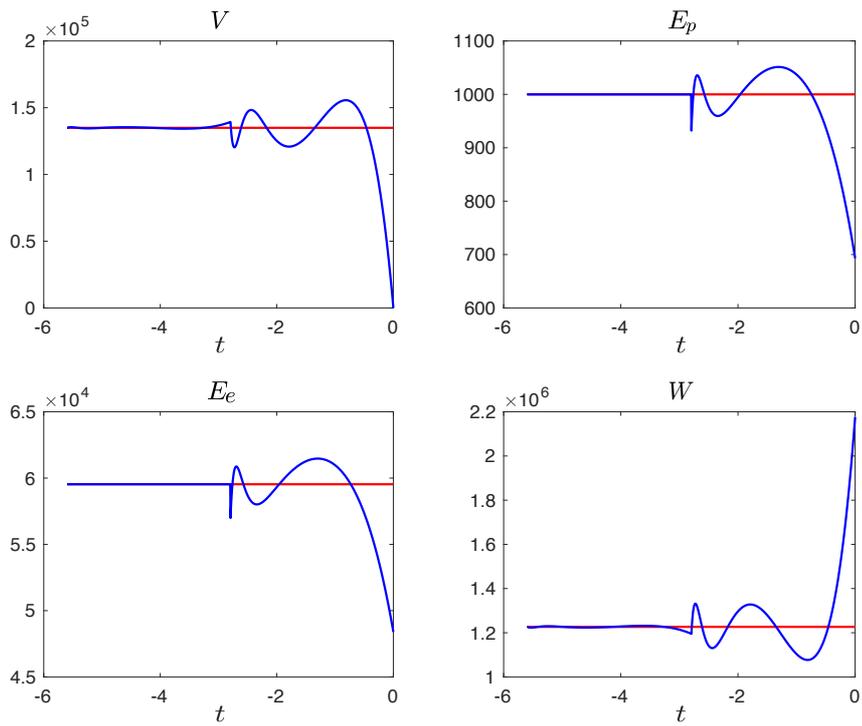


A

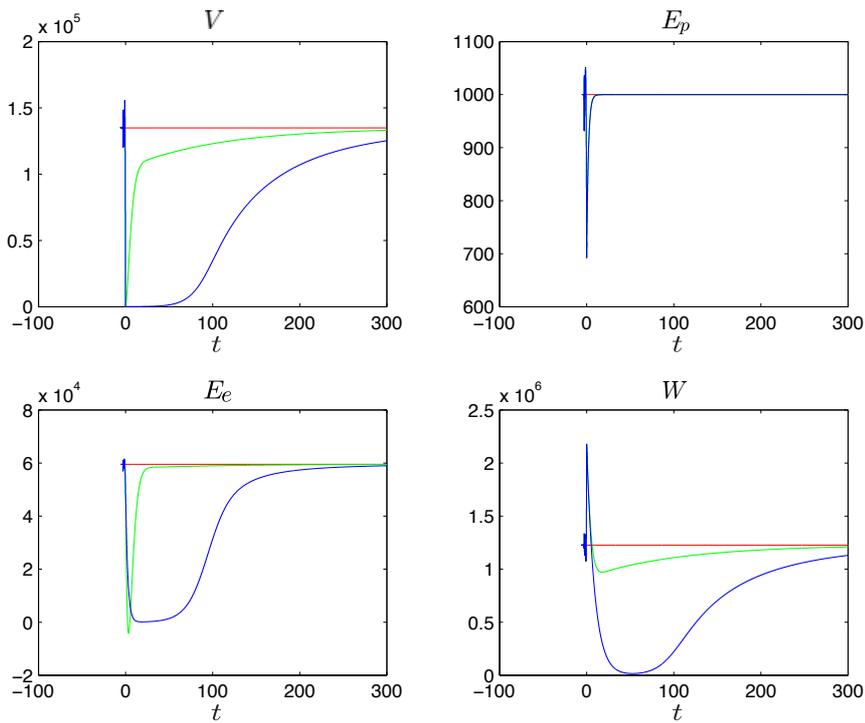


B

Рис. 7. Начальное значение (А) и результаты интегрирования стационарного состояния \bar{U}_{II} , возмущенного четвертым оптимальным возмущением с $\varepsilon = -0,3975$, темным — интегрирование на основе полных, светлым — на основе линеаризованных уравнений (В)



A



B

Рис. 8. Начальное значение (А) и результаты интегрирования стационарного состояния \bar{U}_{II} , возмущенного пятым оптимальным возмущением с $\varepsilon = 0,4853$, темным — интегрирование на основе полных, светлым — на основе линеаризованных уравнений (В)

7. ВЫВОДЫ

Современные достижения фармакологии и медицины поставили в повестку исследований разработку подходов к комбинированной терапии неблагоприятных форм течения инфекционных заболеваний. Спектр лечебных воздействий на индивидуальные звенья инфекционного процесса взаимодействия вирусов с организмом хозяина включают противовирусную терапию, иммуномодулирующие воздействия, антифиброзные и гормональные препараты. Поскольку любое инфекционное заболевание представляет собой сложную биологическую систему, динамика которой определяется нелинейными взаимодействиями между различными компонентами инфекции и организма, требуется развитие математических моделей для решения задачи описания и прогнозирования реакции инфекционного процесса на многокомпонентные лечебные воздействия.

Построение математических моделей по данным наблюдений является задачей теории идентификации систем. В области математической иммунологии накоплен определенный опыт разработки биологически содержательных моделей инфекционных процессов [8, 33]. Однако возможность построения эффективных мультимодальных воздействий на инфекционный процесс является практически не изученной. Между тем, данная проблема является одной из ключевых для лечения хронических заболеваний в рамках системного подхода, который рассматривает любой патологический процесс как робастную систему по отношению к внешним воздействиям [19, 29]. Например, ВИЧ инфекцию можно рассматривать как робастную систему «вирус—организм хозяина» [16, 28]. Робастность саморегулируемой системы предполагает свойство хрупкости по отношению к определенной комбинации возмущений [7, 19]. Поиск соответствующих возмущений параметров или состояния динамической системы, которые позволили бы разработать эффективные режимы комбинированной терапии, возможен путем построения и анализа свойств чувствительности математической модели заболевания.

В данной работе нами предложен алгоритм построения оптимальных возмущений начального состояния математических моделей инфекционных заболеваний, сформулированных в виде систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. В качестве базовой модели рассматривалась система из четырех уравнений с двумя запаздываниями, описывающая динамику экспериментальной вирусной инфекции. Комбинированные воздействия моделировались с помощью функций, феноменологически отражающих реакцию системы на применение препаратов с учетом их фармакокинетики. Продемонстрирована принципиальная возможность расчета оптимальных возмущений, приводящих к максимальной амплификации решений по одной или нескольким компонентам инфекционного процесса, например, вирусной нагрузке. Исследована возможность построения оптимальных возмущений для двух типов стационарных состояний, с низким и высоким уровнем вирусной нагрузки [32]. Первый вариант соответствует лечению субпороговых персистентных вирусных инфекций, которые являются проблемой при пересадке органов. Стационарные решения с большим уровнем вирусной нагрузки характерны для инфекций, вызванных вирусами иммунодефицита человека и вирусами гепатита. Поскольку противовирусные и иммуномодулирующие препараты обладают побочным действием, минимизация необходимых доз при сохранении уровня отклика системы является важной частью разработки стратегии лечения. Нами исследована возможность коррекции динамики инфекции и восстановления функции компонент иммунной системы путем малых по норме возмущений стационарных состояний, приводящих к максимальному отклику.

Разработанные численные алгоритмы расчета максимального отклика моделей инфекционных заболеваний на мультипараметрические воздействия позволяют перейти к исследованию на регулярной основе принципиально новых подходов направленного воздействия, на основе противовирусных и иммунокорректирующих препаратов, на критические звенья процессов взаимодействия вирусов с организмом человека, и в конечном счете, разработать эффективные методы комбинированной терапии неблагоприятных форм течения инфекционных заболеваний.

Финансирование. Численные эксперименты и их интерпретация выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 15-11-00029), разработка и реализация используемых алгоритмов выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект

№ 17-71-20149), обоснование разработанных численных методов выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00572) и при поддержке Программы РУДН «5-100».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.
2. Бочаров Г. А., Марчук Г. И. Прикладные проблемы математического моделирования в иммунологии// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2000. — 40. — С. 1905–1920.
3. Дементьев В. Г., Лебедев В. И., Нечепуренко Ю. М. Спектральный анализ модели ядерного реактора с запаздывающими нейтронами// В сб. «Алгоритмы и программы для нейтронно-физических расчетов ядерных реакторов». — Обнинск: ФЭИ, 1999. — С. 143–150.
4. Марчук Г. И. Математические модели в иммунологии. — М.: Наука, 1980.
5. Марчук Г. И. Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты. — М.: Наука, 1991.
6. Марчук Г. И., Бербенцова Э. П. Острые пневмонии. Иммунология, оценка тяжести, клиника, лечение. — М.: Наука, 1989.
7. Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Шербаков П. С. Управление линейными системами при внешних возмущениях. — Москва: ЛЕНАНД, 2014.
8. Черешнев В. А., Бочаров Г. А., Ким А. В., Бажан С. И., Гайнова И. А., Красовский А. Н., Шмагель Н. Г., Иванов А. В., Сафронов М. А., Третьякова Р. М. Введение в задачи моделирования и управления динамикой ВИЧ инфекции. — М.—Ижевск: АНО Ижевский ин-т комп. иссл., 2016.
9. Anderson E., Bai Z., Bischof C., Blackford S., Demmel J., Dongarra J., Du Croz J., Greenbaum A., Hammarling S., McKenney A., Sorensen D. LAPACK users guide. — Philadelphia: SIAM, 1999.
10. Bocharov G. A. Modelling the dynamics of LCMV infection in mice: conventional and exhaustive CTL responses// J. Theor. Biol. — 1998. — 192, № 3. — С. 283–308.
11. Bocharov G. A., Marchuk G. I., Romanyukha A. A. Numerical solution by LMMs of stiff delay differential systems modelling an immune response// Numer. Math. — 1996. — 73, № 2. — С. 131–148.
12. Bocharov G. A., Nechepurenko Yu. M., Khristichenko M. Yu., Grebennikov D. S. Maximum response perturbation-based control of virus infection model with time-delays// Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2017. — 32. — С. 275–291.
13. Boiko A. V., Dougal A. V., Grek G. R., Kozlov V. V. Physics of Transitional Shear Flows: Instability and Laminar–Turbulent Transition in Incompressible Near-Wall Shear Layers. — Berlin: Springer, 2011.
14. Boiko A. V., Nechepurenko Y. M., Sadkane M. Fast computation of optimal disturbances for duct flows with a given accuracy// Comput. Math. Math. Phys. — 2010. — 50, № 11. — С. 1914–1924.
15. Boiko A. V., Nechepurenko Yu. M., Sadkane M. Computing the maximum amplification of the solution norm of differential-algebraic systems// Comput. Math. Model. — 2012. — 23, № 2. — С. 216–227.
16. Chereshevnev V. A., Bocharov G., Bazhan S., Bachmetyev B., Gainova I., Likhoshvai V., Argilaguet J. M., Martinez J. P., Rump J. A., Mothe B. et al. Pathogenesis and treatment of HIV infection: the cellular, the immune system and the neuroendocrine systems perspective// Int. Rev. Immunol. — 2013. — 32, № 3. — С. 282–306.
17. Ciurea A., Klenerman P., Hunziker L., Horvath E., Odermatt B., Ochsenbein A. F., Hengartner H., Zinkernagel R. M. Persistence of lymphocytic choriomeningitis virus at very low levels in immune mice// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1999. — 96, № 21. — С. 11964–11969.
18. Crawford A., Angelosanto J. M., Kao C., Doering T. A., Odorizzi P. M., Barnett B. E., Wherry E. J. Molecular and transcriptional basis of CD4+ T cell dysfunction during chronic infection// Immunity. — 2014. — 40, № 2. — С. 289–302.
19. Csete M. E., Doyle J. C. Reverse engineering of biological complexity// Science. — 2002. — 295, № 5560. — С. 1664–1669.
20. Germain R. N., Meier-Schellersheim M., Nita-Lazar A., Fraser I. D. Systems biology in immunology: a computational modeling perspective// Annu. Rev. Immunol. — 2011. — 29. — С. 527–585.
21. Golub G. H., Van Loan C. F. Matrix Computations. — Baltimore: The John Hopkins University Press, 1996.
22. Gurdasani D., Iles L., Dillon D. G., Young E. H., Olson A. D., Naranbhai V., Fidler S., Gkrania-Klotsas E., Post F. A., Kellam P. et al. A systematic review of definitions of extreme phenotypes of HIV control and progression// AIDS. — 2014. — 28, № 2. — С. 149–162.
23. Hairer E., Wanner G. Solving ordinary differential equations. — Berlin: Springer-Verlag, 1996.
24. Henningson D. S., Reddy S. C. On the role of linear mechanisms in transition to turbulence// Phys. Fluids A. — 1994. — 6, № 3. — С. 1396–1398.

25. *Higham A. V.* The scaling and squaring method for the matrix exponential revisited// *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* — 2005. — 26, № 4. — С. 1179–1193.
26. *Kent S. J., Reece J. C., Petravic J., Martyushev A., Kramski M., De Rose R., Cooper D. A., Kelleher A. D., Emery S., Cameron P. U. et al.* The search for an HIV cure: tackling latent infection// *Lancet Infect. Dis.* — 2013. — 13, № 7. — С. 614–621.
27. *Kitano H.* Systems biology: a brief overview// *Science.* — 2002. — 295, № 5560. — С. 1662–1664.
28. *Kitano H.* Biological robustness// *Nat. Rev. Genet.* — 2004. — 5, № 11. — С. 826–837.
29. *Kitano H.* Biological robustness in complex host-pathogen systems. — Basel: Birkhäuser, 2007. — С. 239–263.
30. *Kotsarev A., Lebedev V., Shishkov L., Nechepurenko Yu., Dementiev V.* Spectral analysis of VVER-1000 reactor model at high negative reactivities// *Proceedings of the Ninth Symposium of AER, 4-8 October, Slovakia, 1999.* — Budapest: Kiadja a KFKI Atomenergia Kutato Intezet, 1999. — С. 453–468.
31. *Ludewig B., Stein J. V., Sharpe J., Cervantes-Barragan L., Thiel V., Bocharov G.* A global imaging view on systems approaches in immunology// *Eur. J. Immunol.* — 2012. — 42. — С. 3116–3125.
32. *Luzyanina T., Engelborghs K., Ehl S., Klenerman P., Bocharov G.* Low level viral persistence after infection with LCMV: a quantitative insight through numerical bifurcation analysis// *Math. Biosci.* — 2001. — 173, № 1. — С. 1–23.
33. *Marchuk G. I.* *Mathematical Modelling of Immune Response in Infectious Diseases.* — Dordrecht: Kluwer, 1997.
34. *Marchuk G. I., Nisevich N. I.* (ed.) *Mathematical Methods in Clinical Practice.* — Oxford: Pergamon Press Ltd., 1980.
35. *Moskophidis D., Lechner F., Pircher H., Zinkernagel R. M.* Virus persistence in acutely infected immunocompetent mice by exhaustion of antiviral cytotoxic effector T cells// *Nature.* — 1993. — 362. — С. 758–758.
36. *Nechepurenko Yu. M., Sadkane M.* A low-rank approximation for computing the matrix exponential norm// *SIAM J. Matrix. Anal. Appl.* — 2011. — 32, № 2. — С. 349–363.
37. *Nechepurenko Yu. M., Sadkane M.* Computing humps of the matrix exponential// *J. Comput. Appl. Math.* — 2017. — 319. — С. 87–96.
38. *Reshotko E.* Transient growth: A factor in bypass transition// *Phys. Fluids.* — 2001. — 13, № 5. — С. 1067–1075.
39. *Takeuchi Y., Adachi N., Tokumaru H.* The stability of generalized Volterra equations// *J. Math. Anal. Appl.* — 1978. — 62. — С. 453–473.
40. *Weyl H.* *The Classical Groups: Their Invariants and Representations.* — Princeton: Princeton University Press, 2016.

Г. А. Бочаров

Институт вычислительной математики РАН,
119333, Москва, ул. Губкина, д. 8;
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: gbocharov@gmail.com

Ю. М. Нечепуренко

Институт вычислительной математики РАН,
119333, Москва, ул. Губкина, д. 8;
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
125047, Москва, Миусская пл., д. 4
E-mail: yumnech@yandex.ru

М. Ю. Христиненко

Институт вычислительной математики РАН,
119333, Москва, ул. Губкина, д. 8;
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
125047, Москва, Миусская пл., д. 4
E-mail: micha.hrist@rambler.ru

Д. С. Гребенников

Институт вычислительной математики РАН,
119333, Москва, ул. Губкина, д. 8;

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
125047, Москва, Миусская пл., д. 4
E-mail: dmitry.ew@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-3-392-417

UDC 517.929, 517.958:57

Optimal Perturbations of Systems with Delayed Argument for Control of Dynamics of Infectious Diseases Based on Multicomponent Actions

© 2017 **G. A. Bocharov, Yu. M. Nechepurenko, M. Yu. Khristichenko, D. S. Grebennikov**

Abstract. In this paper, we apply optimal perturbations to control mathematical models of infectious diseases expressed as systems of nonlinear differential equations with delayed argument. We develop the method for calculation of perturbations of the initial state of a dynamical system with delayed argument producing maximal amplification in the given local norm taking into account weights of perturbation components. For the model of experimental virus infection, we construct optimal perturbation for two types of stationary states, with low or high virus load, corresponding to different variants of chronic virus infection flow.

REFERENCES

1. R. Bellman and K. L. Cooke, *Differentsial'no-raznostnye uravneniya* [Differential-Difference Equations], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
2. G. A. Bocharov and G. I. Marchuk, "Prikladnye problemy matematicheskogo modelirovaniya v immunologii" [Applied problems of mathematical modelling in immunology], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2000, **40**, 1905–1920 (in Russian).
3. V. G. Dement'ev, V. I. Lebedev, and Yu. M. Nechepurenko, "Spektral'nyy analiz modeli yadernogo reaktora s zapazdyvayushchimi neytronami" [Spectral analysis of a model of nuclear reactor with delayed neutrons], In: *Algoritmy i programmy dlya neytronno-fizicheskikh raschetov yadernykh reaktorov* [Algorithms and Programs for Neutron-Physical Calculations of Nuclear Reactors], FEI, Obninsk, 1999, 143–150 (in Russian).
4. G. I. Marchuk, *Matematicheskie modeli v immunologii* [Mathematical Models in Immunology], Nauka, Moscow, 1980 (in Russian).
5. G. I. Marchuk, *Matematicheskie modeli v immunologii. Vychislitel'nye metody i eksperimenty* [Mathematical Models in Immunology. Numerical Methods and Experiments], Nauka, Moscow, 1991 (in Russian).
6. G. I. Marchuk and E. P. Berbentsova, *Ostrye pnevmonii. Immunologiya, otsenka tyazhesti, klinika, lechenie* [Acute Pneumonias. Immunology, Severity Estimate, Clinics, Treatment], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
7. B. T. Polyak, M. V. Khlebnikov, and P. S. Shcherbakov, *Upravlenie lineynymi sistemami pri vneshnikh vozmushcheniyakh* [Control of Linear Systems under Outer Perturbations], LENAND, Moscow, 2014 (in Russian).
8. V. A. Chereshevnev, G. A. Bocharov, A. V. Kim, S. I. Bazhan, I. A. Gaynova, A. N. Krasovskiy, N. G. Shmagel', A. V. Ivanov, M. A. Safronov, and R. M. Tret'yakova, *Vvedenie v zadachi modelirovaniya i upravleniya dinamikoy VICH infektsii* [Introduction to Problems of Modelling and Control of Dynamics of HIV Infection], ANO Izhevskiy in-t komp. issl., M.–Izhevsk, 2016 (in Russian).
9. E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, Dongarra J., J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, and D. Sorensen, *LAPACK Users Guide*, SIAM, Philadelphia, 1999.
10. G. A. Bocharov, "Modelling the dynamics of LCMV infection in mice: conventional and exhaustive CTL responses," *J. Theor. Biol.*, 1998, **192**, No. 3, 283–308.
11. G. A. Bocharov, G. I. Marchuk, and A. A. Romanyukha, "Numerical solution by LMMs of stiff delay differential systems modelling an immune response," *Numer. Math.*, 1996, **73**, No. 2, 131–148.

12. G. A. Bocharov, Yu. M. Nechepurenko, M. Yu. Khristichenko, and D. S. Grebennikov, “Maximum response perturbation-based control of virus infection model with time-delays,” *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 2017, **32**, 275–291.
13. A. V. Boiko, A. V. Dovgal, G. R. Grek, and V. V. Kozlov, *Physics of Transitional Shear Flows: Instability and Laminar–Turbulent Transition in Incompressible Near-Wall Shear Layers*, Springer, Berlin, 2011.
14. A. V. Boiko, Yu. M. Nechepurenko, and M. Sadkane, “Fast computation of optimal disturbances for duct flows with a given accuracy,” *Comput. Math. Math. Phys.*, 2010, **50**, No. 11, 1914–1924.
15. A. V. Boiko, Yu. M. Nechepurenko, and M. Sadkane, “Computing the maximum amplification of the solution norm of differential-algebraic systems,” *Comput. Math. Model.*, 2012, **23**, No. 2, 216–227.
16. V. A. Chereshevnev, G. Bocharov, S. Bazhan, B. Bachmetyev, I. Gainova, V. Likhoshvai, J. M. Argilaguët, J. P. Martinez, J. A. Rump, B. Mothe et al., “Pathogenesis and treatment of HIV infection: the cellular, the immune system and the neuroendocrine systems perspective,” *Int. Rev. Immunol.*, 2013, **32**, No. 3, 282–306.
17. A. Ciurea, P. Klenerman, L. Hunziker, E. Horvath, B. Odermatt, A. F. Ochsenbein, H. Hengartner, and R. M. Zinkernagel, “Persistence of lymphocytic choriomeningitis virus at very low levels in immune mice,” *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1999, **96**, No. 21, 11964–11969.
18. A. Crawford, J. M. Angelosanto, C. Kao, T. A. Doering, P. M. Odorizzi, B. E. Barnett, and E. J. Wherry, “Molecular and transcriptional basis of CD4+ T cell dysfunction during chronic infection,” *Immunity*, 2014, **40**, No. 2, 289–302.
19. M. E. Csete and J. C. Doyle, “Reverse engineering of biological complexity,” *Science*, 2002, **295**, No. 5560, 1664–1669.
20. R. N. Germain, M. Meier-Schellersheim, A. Nita-Lazar, and I. D. Fraser, “Systems biology in immunology: a computational modeling perspective,” *Annu. Rev. Immunol.*, 2011, **29**, 527–585.
21. G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, The John Hopkins University Press, Baltimore, 1996.
22. D. Gurdasani, L. Iles, D. G. Dillon, E. H. Young, A. D. Olson, V. Naranbhai, S. Fidler, E. Gkrania-Klotsas, F. A. Post, P. Kellam et al., “A systematic review of definitions of extreme phenotypes of HIV control and progression,” *AIDS*, 2014, **28**, No. 2, 149–162.
23. E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations*, Berlin, 1996.
24. D. S. Henningson and S. C. Reddy, “On the role of linear mechanisms in transition to turbulence,” *Phys. Fluids A*, 1994, **6**, No. 3, 1396–1398.
25. A. V. Higham, “The scaling and squaring method for the matrix exponential revisited,” *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2005, **26**, No. 4, 1179–1193.
26. S. J. Kent, J. C. Reece, J. Petracic, A. Martyushev, M. Kramski, R. De Rose, D. A. Cooper, A. D. Kelleher, S. Emery, P. U. Cameron et al., “The search for an HIV cure: tackling latent infection,” *Lancet Infect. Dis.*, 2013, **13**, No. 7, 614–621.
27. H. Kitano, “Systems biology: a brief overview,” *Science*, 2002, **295**, No. 5560, 1662–1664.
28. H. Kitano, “Biological robustness,” *Nat. Rev. Genet.*, 2004, **5**, No. 11, 826–837.
29. H. Kitano, *Biological robustness in complex host-pathogen systems*, Birkhäuser, Basel, 2007, 239–263.
30. A. Kotsarev, V. Lebedev, L. Shishkov, Yu. Nechepurenko, and V. Dementiev, *Spectral analysis of VVER-1000 reactor model at high negative reactivities// Proceedings of the Ninth Symposium of AER, 4-8 October, Slovakia, 1999*, Kiadja a KFKI Atomenergia Kutato Intezet, Budapest, 1999, 453–468.
31. B. Ludewig, J. V. Stein, J. Sharpe, L. Cervantes-Barragan, V. Thiel, and G. Bocharov, “A global imaging view on systems approaches in immunology,” *Eur. J. Immunol.*, 2012, **42**, 3116–3125.
32. T. Luzyanina, K. Engelborghs, S. Ehl, P. Klenerman, and G. Bocharov, “Low level viral persistence after infection with LCMV: a quantitative insight through numerical bifurcation analysis,” *Math. Biosci.*, 2001, **173**, No. 1, 1–23.
33. G. I. Marchuk, *Mathematical Modelling of Immune Response in Infectious Diseases*, Kluwer, Dordrecht, 1997.
34. G. I. Marchuk and N. I. Nisevich, (ed.) *Mathematical Methods in Clinical Practice*, Pergamon Press Ltd., Oxford, 1980.
35. D. Moskophidis, F. Lechner, H. Pircher, and R. M. Zinkernagel, “Virus persistence in acutely infected immunocompetent mice by exhaustion of antiviral cytotoxic effector T cells,” *Nature*, 1993, **362**, 758–758.
36. Yu. M. Nechepurenko and M. Sadkane, “A low-rank approximation for computing the matrix exponential norm,” *SIAM J. Matrix. Anal. Appl.*, 2011, **32**, No. 2, 349–363.

37. Yu. M. Nechepurenko and M. Sadkane, “Computing humps of the matrix exponential,” *J. Comput. Appl. Math.*, 2017, **319**, 87–96.
38. E. Reshotko, “Transient growth: A factor in bypass transition,” *Phys. Fluids*, 2001, **13**, No. 5, 1067–1075.
39. Y. Takeuchi, N. Adachi, and H. Tokumaru, “The stability of generalized Volterra equations,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1978, **62**, 453–473.
40. H. Weyl, *The Classical Groups: Their Invariants and Representations*, Princeton University Press, Princeton, 2016.

G. A. Bocharov

Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences,
8 Gubkina st., 119333 Moscow, Russia;
RUDN University,
6 Miklukho-Maklaya st., 117198 Moscow, Russia
E-mail: gbocharov@gmail.com

Yu. M. Nechepurenko

Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences,
8 Gubkina st., 119333 Moscow, Russia;
Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences,
4 Miusskaya sq., 125047 Moscow, Russia
E-mail: yumnech@yandex.ru

M. Yu. Khristichenko

Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences,
8 Gubkina st., 119333 Moscow, Russia;
Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences,
4 Miusskaya sq., 125047 Moscow, Russia
E-mail: micha.hrist@rambler.ru

D. S. Grebennikov

Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences,
8 Gubkina st., 119333 Moscow, Russia;
Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences,
4 Miusskaya sq., 125047 Moscow, Russia
E-mail: dmitry.ew@gmail.com

ЛАГРАНЖЕВЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО И НЕЛИНЕЙНОГО ПЕРЕНОСА

© 2017 г. С. БЬЯНКНИ, П. БОНИКАТТО, Э. МАРКОНИ

Аннотация. Представлен подход, объединяющий два класса дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка: вводится понятие лагранжева представления для уравнения неразрывности и скалярных законов сохранения. С одной стороны, это дает единственность слабых решений уравнений переноса, определяемых двумерными почти несжимаемыми векторными полями ограниченной вариации. С другой стороны, доказывается, что мера энтропийной диссипации для скалярных законов сохранения в случае одной пространственной переменной сконцентрирована на счетном множестве липшицевых кривых.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение		418
2. Лагранжевы представления		419
3. Линейный перенос		420
4. Законы сохранения		428
Список литературы		434

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье изучаются уравнение неразрывности и уравнение переноса

$$\partial_t u + \operatorname{div}(u\mathbf{b}) = 0, \quad (1.1a)$$

$$\partial_t u + \mathbf{b} \cdot \nabla u = 0, \quad (1.1b)$$

где $u: I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ — неизвестная скалярная функция, а $\mathbf{b}: I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ — заданное векторное поле (здесь $I = (0, T)$, $T > 0$).

С этими уравнениями связан следующий закон сохранения:

$$\partial_t u + \operatorname{div}(\mathbf{f}(u)) = 0, \quad (1.2)$$

где $u: I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ — неизвестная скалярная функция, а поток $\mathbf{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ — заданное векторное поле.

Эти два класса дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка естественным образом возникают в математической физике: и уравнение (1.1a), и уравнение (1.2) моделируют сохранение физического количества. Ключевая разница между моделями заключается в том, что в уравнении (1.1a) (уравнение неразрывности) указанное количество зависит от заданного векторного поля \mathbf{b} , а в уравнении (1.2) (закон сохранения) поле скоростей зависит от количества u нелинейным образом.

Общим для обоих уравнений является то, что они могут быть решены (по крайней мере, формально) методом характеристик. Действительно, рассматривая для простоты уравнение переноса (1.1b) (которое является адвентивной формулировкой уравнения неразрывности и эквивалентно последнему при $\operatorname{div} \mathbf{b} = 0$), можно заметить, что любое решение u постоянно вдоль характеристических кривых, которыми являются кривые, описываемые уравнениями

$$\gamma'(t) = \mathbf{b}(t, \gamma(t)) \quad \text{и} \quad \gamma'(t) = \mathbf{f}'(u(t, \gamma(t))) \quad (1.3)$$

для уравнений (1.1b) и (1.2) соответственно.

Приведенные выше рассуждения имеют смысл в том случае, когда мы имеем дело с гладкими функциями. Ниже мы предложим технику лагранжевых представлений, позволяющую распространить указанный метод на случай более слабых требований к регулярности.

Уравнения (1.1) и (1.2) можно считать эйлеровой формулировкой модели, а уравнения (1.3) — их лагранжевым эквивалентом. Таким образом, метод характеристик может интерпретироваться как мост между этими двумя формулировками.

Взаимосвязь между этими двумя формулировками впервые отмечена в [20] при изучении соболевских векторных полей; более подробно эта взаимосвязь изучена в [3], где рассматривается класс векторных полей ограниченной вариации. Устанавливается, что корректность уравнения переноса дает возможность определить поток способом, подходящим для этих классов векторных полей; с другой стороны, используя лагранжеву формулировку, можно доказать ряд интересных свойств эйлеровой модели. Настоящая статья посвящена именно этому подходу.

В частности, в разделе 3 получен результат о единственности (для двумерного случая) слабых решений уравнения переноса для векторных полей ограниченной вариации, дающий частичный ответ на гипотезу Брессана (этого результата нет в [3]). Более подробно этот результат изложен в [7].

В разделе 4, используя этот же подход, мы исследуем тонкие свойства энтропийных решений уравнения 1.2 для случая одной пространственной переменной. По определению, для любой выпуклой энтропии η энтропийное решение удовлетворяет (в смысле обобщенных функций) неравенству

$$\eta(u)_t + q(u)_x \leq 0, \tag{1.4}$$

где $q'(u) = f'(u)\eta'(u)$ — поток энтропии. В частности, левая часть неравенства (1.4) есть некоторая неположительная локально ограниченная мера μ . Из структуры решения мы делаем вывод, что μ сконцентрирована на \mathcal{H}^1 -спрямляемом множестве, которое можно интерпретировать, как множество уплотнения решения u . Более подробно это изложено в [10].

Отметим, что Дафермосом предложено другое обобщение метода характеристик (см., например, [17, Ch. X]); оно позволяет доказать, что $\mu = 0$, если решение u непрерывно (см. [16]).

В последнее время предложены различные определения лагранжевых представлений законов сохранения для случая одной пространственной переменной; они соответствуют различным постановкам задачи и различным требованиям регулярности (см., например, [9, 10, 12, 13]). В работе [11] лагранжев подход используется, чтобы доказать аналог теоремы Дафермоса для случая нескольких пространственных переменных.

2. ЛАГРАНЖЕВЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Покажем, как конкретизировать понятие лагранжева представления для двух различных постановок задачи.

2.1. Лагранжево представление для уравнения неразрывности. Начнем со следующего известного результата (см. [3]) для неотрицательных решений уравнения неразрывности, значениями которых являются меры.

Теорема 2.1 (принцип суперпозиции). Пусть $\mathbf{b}: [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ — ограниченное борелевское векторное поле, а $[0, T] \ni t \mapsto \mu_t$ — неотрицательное локально конечное решение уравнения неразрывности

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t + \operatorname{div}(\mathbf{b} \mu_t) = 0 \\ \mu_0 = \bar{\mu} \end{cases} \quad \text{в } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^d), \tag{2.1}$$

значениями которого являются меры.

Тогда на пространстве непрерывных кривых $\Gamma := C([0, T]; \mathbb{R}^d)$ существует такая неотрицательная мера η , что

$$\mu_t = e_{t\#} \eta \quad \text{для любого } t \text{ из } [0, T], \tag{2.2}$$

где $e_t: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^d$ — отображение на значения, $\gamma \mapsto \gamma(t)$, и мера η сконцентрирована на абсолютно непрерывных решениях обыкновенного дифференциального уравнения, определяемого полем \mathbf{b} .

Далее такую меру η будем называть лагранжевым представлением.

2.2. Лагранжевы представления для законов сохранения. Пусть u — энтропийное решение начальной задачи

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0, \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot), \end{cases}$$

с u_0 , принадлежащей $L^\infty(\mathbb{R})$. Дадим следующее определение.

Определение 2.1. *Лагранжевым представлением* функции u называется такая пара функций (X, u) , для которой справедливы следующие утверждения:

1. функция $X : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, отображение $t \mapsto X(t, y)$ липшицево для каждого значения y , а отображение $y \mapsto X(t, y)$ является неубывающей функцией при каждом t ;
2. $u \in L^\infty(\mathbb{R})$;
3. для любого положительного t и почти любого (в смысле \mathcal{L}^1) вещественного x справедливо соотношение

$$u(t, x) = u(X(t)^{-1}(x));$$

4. поток X удовлетворяет характеристическому уравнению, т. е. для любого вещественного y и почти любого (в смысле \mathcal{L}^1) положительного t справедливо соотношение

$$D_t X(t, y) = \begin{cases} f'(u(t, X(t, y))), & \text{если } u(t) \text{ непрерывна на } X(t, y), \\ \frac{f(u(t, X(t, y)+)) - f(u(t, X(t, y)-))}{X((t, y)+) - X((t, y)-)}, & \text{если } u \text{ терпит разрыв на } X(t, y). \end{cases} \quad (2.3)$$

Замечание 2.1. Характеристическое уравнение в форме (2.3) имеет смысл для таких решений u , у которых функция $u(t)$ при любом положительном t имеет оба односторонних предела $u(t, x-)$ и $u(t, x+)$ в каждой вещественной точке x . Ниже мы увидим, что это выполняется, если u_0 непрерывна либо если f не является аффинным преобразованием ни на каком открытом интервале. В [10] объясняется, в каком смысле следы $u(t, x-)$ и $u(t, x+)$ понимаются в общем случае. Отметим, что требование $u = u_0$ и, следовательно, $X(0) = \mathbb{I}$ не накладывает: ему, например, не удовлетворяет представление централизованного разрежения.

3. ЛИНЕЙНЫЙ ПЕРЕНОС

В этом разделе мы покажем, как можно использовать лагранжевы представления, введенные в разделе 2, для доказательства результатов о корректности для уравнения переноса, связанного с плоским векторным полем ограниченной вариации. Доказательства приводимых здесь результатов можно найти в [7].

Мы изучаем начальные задачи

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div}(u\mathbf{b}) = 0, \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot), \end{cases} \quad (3.1a)$$

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathbf{b} \cdot \nabla u = 0, \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot), \end{cases} \quad (3.1b)$$

где $u : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — неизвестная функция, $\mathbf{b} : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — заданное векторное поле с носителем в $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, а $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — заданное скалярное поле.

Наша цель — получить результат о единственности решения задачи (3.1b) при слабых условиях, наложенных на регулярность векторного поля \mathbf{b} . Прежде всего введем определение слабого решения.

Если $\mathbf{b} \in L^\infty(I \times \Omega)$, то уравнение неразрывности системы (3.1a) может стандартно пониматься в смысле обобщенных функций. Что касается начального условия, то можно доказать (см., например, [18]), что, если u является слабым решением уравнения неразрывности системы (3.1a), то существует такое отображение \tilde{u} из $L^\infty([0, T] \times \Omega)$, что $u(t, \cdot) = \tilde{u}(t, \cdot)$ для почти всех t из I и $t \mapsto \tilde{u}(t, \cdot)$ *-слабо непрерывно отображает $[0, T]$ в $L^\infty(\Omega)$. Таким образом, начальное условие для слабого решения u уравнения неразрывности может быть задано следующим образом: мы говорим, что $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$ выполняется, если $\tilde{u}(0, \cdot) = u_0(\cdot)$.

Определить слабые решения уравнения переноса системы (3.1b) — несколько более сложная задача. Если $\operatorname{div} \mathbf{b} \ll \mathcal{L}^2$, где \mathcal{L}^2 — мера Лебега на плоскости, то уравнение переноса системы (3.1b) можно записать в виде

$$\partial_t u + \operatorname{div}(u\mathbf{b}) - u \operatorname{div} \mathbf{b} = 0$$

и понимать последнее уравнение в смысле обобщенных функций (более подробно см., например, в [20]). Здесь, однако, нас интересует случай, в котором $\operatorname{div} \mathbf{b}$ не является абсолютно непрерывной по мере Лебега. В этом случае понятие слабого решения системы (3.1b) можно определить для класса почти несжимаемых векторных полей.

Определение 3.1. Ограниченное локально интегрируемое векторное поле $\mathbf{b}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется *почти несжимаемым*, если существуют такая функция $\rho: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (называемая *плотностью* поля \mathbf{b}) и такая положительная постоянная C , что $C^{-1} \leq \rho(t, x) \leq C$ для почти всех (t, x) из $I \times \Omega$ и

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{b}) = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(I \times \Omega). \quad (3.2)$$

Легко видеть, что, если $\operatorname{div} \mathbf{b} \in L^\infty(I \times \Omega)$, то \mathbf{b} почти несжимаемо. Обратное неверно, поэтому почти несжимаемость является более слабым условием, чем требование, чтобы $\operatorname{div} \mathbf{b}$ принадлежала $L^\infty(I \times \Omega)$.

Определение 3.2. Пусть \mathbf{b} — почти несжимаемое векторное поле с плотностью ρ . Назовем функцию u из $L^\infty(I \times \Omega)$ *ρ -слабым решением* системы (3.1b), если

$$\begin{cases} \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \mathbf{b}) = 0 \\ (\rho u)(0, \cdot) = \rho_0 u_0(\cdot) \end{cases} \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(I \times \Omega).$$

Существование слабых решений начальной задачи для уравнения переноса с почти несжимаемым векторным полем может быть доказано при помощи стандартной техники регуляризации (см. [18]).

Исследование единственности слабых решений является гораздо более сложной задачей. В [20] единственность для случая векторных полей с соболевской регулярностью выводится из так называемого свойства ренормализации. В [3] этот результат улучшен: единственность доказана для случая векторных полей с (локально) ограниченной вариацией из пространства полей с абсолютно непрерывной ограниченной дивергенцией. Как указано выше, векторные поля, рассматриваемые в [3], образуют истинное подмножество множества почти несжимаемых векторных полей. Поэтому возникает естественный вопрос, сохраняется ли свойство единственности в этом более широком классе. В связи с этим напомним следующую гипотезу Брессана (см. [14]) для двумерного случая:

Гипотеза 3.1 (Bressan). *Единственность слабого решения системы (3.1b) имеет место для любого почти несжимаемого векторного поля \mathbf{b} из $L^1(I; BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2))$.*

В [1, 2, 8] проблема единственности исследуется для двумерного автономного случая. Устанавливается, что в случае двумерных бездивергентных автономных векторных полей единственность имеет место и при более слабых требованиях к регулярности векторного поля \mathbf{b} ; это обусловлено структурой гамильтониана для данного случая. Работа [2] характеризует бездивергентные автономные векторные поля \mathbf{b} на плоскости, для которых задача Коши для уравнения переноса (3.1b) имеет единственное ограниченное слабое решение для любых ограниченных начальных данных u_0 . Указанная характеристика опирается на так называемое слабое свойство Сарда, являющееся (ослабленной) формулировкой леммы Сарда в терминах теории меры. Поскольку задача допускает гамильтонов потенциал, единственность доказывается следующим образом: уравнение разбивается на множества уровня этой функции, и тем самым задача сводится к одномерной. Такой подход требует предварительного изучения структуры множеств уровня липшицевых отображений определенных на \mathbb{R}^2 ; это исследование проведено в [1].

Основным результатом данного раздела является следующий частичный ответ на гипотезу 3.1:

Теорема 3.1. *Предположим, что $\mathbf{b}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ есть финитное почти несжимаемое векторное поле ограниченной вариации. Тогда имеет место единственность слабых решений задачи (3.1b).*

Точнее, мы покажем, что для любых ограниченных начальных данных u_0 из $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ существует единственное ρ -слабое решение u уравнения переноса (3.1b), принадлежащее пространству $L^\infty(I \times \mathbb{R}^2)$ и удовлетворяющее начальному условию $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$. Основная идея доказательства заключается в том, чтобы применить своего рода метод характеристик в негладкой постановке, используя принцип суперпозиции Амбросио, т. е. теорему 2.1. Мы находим такое «большое» семейство интегральных кривых γ векторного поля \mathbf{b} , что для любого решения u функция $t \mapsto u(t, \gamma(t))$ является константой; отсюда легко получить единственность.

Отметим, что в [6] гипотеза Брессана 3.1 подтверждена для любой размерности $d \geq 2$.

3.1. Предварительные результаты. В этом разделе собраны предварительные результаты, используемые при доказательстве теоремы 3.1.

3.1.1. Множества уровня липшицевых функций и разложение меры Лебега. Предположим, что Ω — плоское открытое множество, а $H: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — финитная липшицева функция. Для любого вещественного h положим $E_h := H^{-1}(h)$. Напомним следующий результат.

Теорема 3.2 ([1, Theorem 2.5]). *Для почти всех (в смысле \mathcal{L}^1) h из $H(\Omega)$ справедливы следующие утверждения:*

1. $\mathcal{H}^1(E_h) < +\infty$, а E_h счетно \mathcal{H}^1 -спрямляемо;
2. для почти любого (в смысле \mathcal{H}^1) x из E_h функция H дифференцируема в x и $\nabla H(x) \neq 0$;
3. если $\text{Comp}^*(E_h)$ обозначает множество компонент связности s множества E_h , для которых $\mathcal{H}^1(s) > 0$, то множество $\text{Comp}^*(E_h)$ счетно и любое s из $\text{Comp}^*(E_h)$ является замкнутой простой кривой, допускающей параметризацию γ_s , обладающую следующими свойствами:
 - $\gamma_s: I_s \rightarrow \mathbb{R}^2$ есть липшицева инъекция (вплоть до концевых точек), где $I_s = \mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}$ или $I_s = [0, \ell]$ с некоторым положительным ℓ ;
 - $\gamma'_s(s)$ ортогонально $\nabla H(\gamma_s(s))$ для почти всех (в смысле \mathcal{L}^1) s из I_s .
4. Если E_h^* обозначает объединение всех s из $\text{Comp}^*(E_h)$, то $\mathcal{H}^1(E_h \setminus E_h^*) = 0$.

Множество уровня, соответствующее значению h , называется *регулярным*, если оно удовлетворяет условию 1 теоремы 3.2.

Используя теорему 3.2 и теорему о разложении (см. [4, Th. 2.28]), можно охарактеризовать разложение меры Лебега, суженной на открытое множество Ω . Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1 ([2, Lemma 2.8]). *Существуют такие борелевские семейства мер $\{\sigma_h\}_{h \in \mathbb{R}}$ и $\{\kappa_h\}_{h \in \mathbb{R}}$, что*

$$\mathcal{L}^2 \llcorner \Omega = \int (c_h \mathcal{H}^1 \llcorner E_h + \sigma_h) dh + \int \kappa_h d\zeta(h), \quad (3.3)$$

где

1. $c_h \in L^1(\mathcal{H}^1 \llcorner E_h^*)$, точнее, $c_h = 1/|\nabla H|$ почти всюду (в смысле $\mathcal{H}^1 \llcorner E_h^*$) в силу формулы Кориа;
2. σ_h, κ_h сосредоточены на $E_h^* \cap \{\nabla H = 0\}$;
3. $\zeta := H_{\#} \mathcal{L}^2 \llcorner (\Omega \setminus \bigcup_h E_h^*)$ сингулярна в смысле \mathcal{L}^1 .

3.1.2. Слабое свойство Сарда. Пусть $H: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — такая же липшицева функция, как и в разделе 3.1.1, а S — критическое множество функции H , т. е. множество всех x из Ω , в которых H не является дифференцируемой либо $\nabla H(x)$ обращается в нуль. Нас интересует следующее свойство:

сдвиг вперед на H сужения \mathcal{L}^2 на S сингулярен в смысле \mathcal{L}^1 , т. е.

$$H_{\#} (\mathcal{L}^2 \llcorner S) \perp \mathcal{L}^1.$$

Это свойство очевидным образом влечет за собой следующее *слабое свойство Сарда*, используемое в [2, Sec. 2.13]:

$$H_{\#} (\mathcal{L}^2 \llcorner (S \cap E^*)) \perp \mathcal{L}^1,$$

где множество E^* есть объединение компонент связности E_h положительной длины по всем h из $H(\Omega)$. Связь слабого свойства Сарда с уравнениями переноса и неразрывности более подробно изложена в [2, Th. 4.7].

Замечание 3.1. Опуская строгую терминологию, можно сказать, что смысл слабого свойства Сарда — в следующем: «хорошие» множества уровня функции H не пересекаются с критическим множеством S за исключением множества, которым можно пренебречь. В терминах разложения меры Лебега (3.3) можно доказать, что H обладает слабым свойством Сарда тогда и только тогда, когда $\sigma_h = 0$ для почти всех h . В частности, это имеет место, если ∇ почти всюду отличен от нуля (см. п. 2 леммы 3.1) или $\nabla H \in BV(\Omega; \mathbb{R}^2)$ (см. [7]).

3.2. Первая часть доказательства: локальные рассуждения. Перейдем к доказательству основной теоремы 3.1. Разобьем доказательство на два шага. Вначале мы проведем локальные рассуждения, чтобы найти подходящее покрытие плоскости шарами и разложить наше уравнение внутри каждого шара. Затем мы «склеим» локальные результаты друг с другом, чтобы иметь возможность применить метод характеристик. Начнем локальные рассуждения.

Пусть $\mathbf{b}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — автономное почти несжимаемое векторное поле, принадлежащее $BV(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$; будем считать, что \mathbf{b} — финитное, всюду определенное и борелевское.

3.3. Разбиение и кривые. Рассмотрим счетное покрытие \mathcal{B} плоскости \mathbb{R}^2 , определенное следующим образом:

$$\mathcal{B} := \{B(x, r) : x \in \mathbb{Q}^2, r \in \mathbb{Q}^+\}.$$

Здесь $B(x, r)$ — евклидов шар с центром в точке x и радиусом r . Для каждого шара B из \mathcal{B} нас интересуют те траектории поля \mathbf{b} , которые пересекают B и остаются внутри B в течение некоторого положительного времени. Поэтому для каждого шара B из \mathcal{B} и любых рациональных чисел s, t из $\mathbb{Q} \cap (0, T)$, удовлетворяющих неравенству $s < t$, мы определим множества

$$\Gamma_{B,s,t} := \{\gamma \in \Gamma : \mathcal{L}^1(\{\tau \in [0, T] : \gamma(\tau) \in B\}) > 0, \gamma(s) \notin B, \gamma(t) \notin B\}.$$

В этом разделе мы имеем дело (для простоты) с множествами $\Gamma_B := \Gamma_{B,0,T}$, где $B \in \mathcal{B}$ (и считаем, не ограничивая общности, что $T \in \mathbb{Q}$).

Замечание 3.2. Легко видеть, что объединение множеств Γ_B по всем B из \mathcal{B} совпадает с множеством всех траекторий, отличных от постоянных. То же самое справедливо и для объединения множеств $\Gamma_{B,s,t}$ по всем B из \mathcal{B} и всем s, t из $\mathbb{Q} \cap [0, T]$.

Согласно определению 3.1, существует функция $\rho : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая уравнению неразрывности (3.2) в $\mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^2)$. Следовательно, в силу теоремы 2.1, существует Лагранжево представление, т. е. мера η на пространстве непрерывных траекторий Γ , сосредоточенная на множестве интегральных кривых поля \mathbf{b} , для которой

$$\rho(t, \cdot) \mathcal{L}^2 = (e_t)_\# \eta, \tag{3.4}$$

где, как и ранее, $e_t: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$ — отображение на значения, $\gamma \mapsto \gamma(t)$. Для каждого фиксированного шара B из \mathcal{B} рассмотрим меру $\eta_B := \eta \llcorner \Gamma_B$ и определим плотность ρ_B следующим образом: $\rho_B(t, \cdot) \mathcal{L}^2 = (e_t)_\# \eta_B$. Положим

$$r_B(x) := \int_0^T \rho_B(t, x) dt, \quad x \in B \tag{3.5}$$

(см. также рис. 1). Отсюда вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.2. $\operatorname{div}(r_B \mathbf{b}) = 0$ в $\mathcal{D}'(B)$.

3.4. Локальное разложение уравнения $\operatorname{div}(u\mathbf{b}) = \mu$. Из леммы 3.2 мы выводим, что для каждого односвязного B из \mathcal{B} существует такая липшицева функция $H_B: B \rightarrow \mathbb{R}$, что $r_B \mathbf{b} = \nabla^\perp H_B$, где $\nabla^\perp = (-\partial_2, \partial_1)$. Функция H_B корректно определена (при условии, что \mathbf{b} финитно) и ее часто называют *гамильтоновой* (относительно шара B).

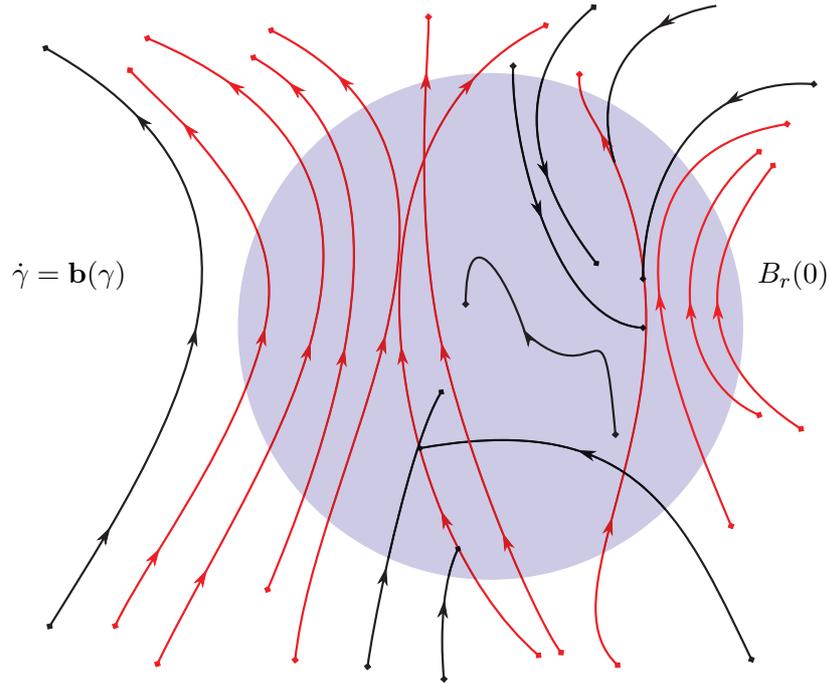


Рис. 1. С помощью принципа суперпозиции Амбросио находим лагранжево представление η для плотности ρ . Далее выбираем подходящее семейство характеристик, пересекающих шар B , что дает «установившуюся» плотность r , определенную соотношением (3.5).

3.4.1. *Редукция уравнения на множества уровня.* Зафиксируем шар B из \mathcal{B} и рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div}(u\mathbf{b}) = \mu \quad \text{в } \mathcal{D}'(B), \tag{3.6}$$

где $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, а μ — мера Радона на \mathbb{R}^2 .

На первом шаге разложим уравнение по множествам уровня функции H .

Лемма 3.3. *Функция u удовлетворяет уравнению (3.6) тогда и только тогда, когда*

1. разложение μ относительно H имеет вид

$$\mu = \int \mu_h dh + \int \nu_h d\zeta(h), \tag{3.7}$$

где ζ определена в п. (3) леммы 3.1;

2. для почти всех (в смысле \mathcal{L}^1) значений h выполнено соотношение

$$\operatorname{div}(u\mathbf{b}_h \mathcal{H}^1 \llcorner E_h) + \operatorname{div}(u\mathbf{b}_h \sigma_h) = \mu_h; \tag{3.8}$$

3. для почти всех (относительно меры ζ) значений h выполнено соотношение

$$\operatorname{div}(u\mathbf{b}_{\kappa_h}) = \nu_h. \tag{3.9}$$

3.4.2. *Редукция на компоненты связности.* Следующий шаг — анализ уравнения (3.8) на нетривиальных компонентах связности (т. е. компонентах положительной длины) множеств уровня.

Лемма 3.4. *Функция u удовлетворяет уравнению (3.8) тогда и только тогда, когда*

- для любой нетривиальной компоненты связности c множества E_h выполняются соотношения

$$\operatorname{div}(u\mathbf{b}_h \mathcal{H}^1 \llcorner c) = \mu_h \llcorner c, \tag{3.10a}$$

$$\operatorname{div}(u\mathbf{b}_h \sigma_h \llcorner c) = 0; \tag{3.10b}$$

- выполняется соотношение

$$\operatorname{div}(u\mathbf{b}_h \sigma_h \llcorner (E_h \setminus E_h^*)) = \mu_h \llcorner (E_h \setminus E_h^*). \tag{3.11}$$

3.4.3. *Редукция уравнения на компоненты связности (параметрический вид).* Рассмотрим уравнение (3.10а) в параметрическом виде. Пусть $\gamma_c: I_c \rightarrow \mathbb{R}^2$ — инъективная липшицева параметризация компоненты c , где $I_c = \mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}$ либо $I_c = (0, \ell)$ — область в γ (для некоторого положительного ℓ).

Лемма 3.5. *Функция u удовлетворяет уравнению (3.10а) тогда и только тогда, когда*

$$\partial_s(\widehat{u}\widehat{c}_h|\widehat{\mathbf{b}}|) = \widehat{\mu}_h, \tag{3.12}$$

где $(\gamma_c)_\# \widehat{\mu}_h = \mu_{h \llcorner c}$, $\widehat{u} = u \circ \gamma_c$, $\widehat{c}_h = c_h \circ \gamma_c$ и $\widehat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} \circ \gamma_c$.

3.4.4. *Локальное разложение закона равновесия.* Рассмотрим общий закон равновесия, связанный с гамильтоновым векторным полем \mathbf{b} , т. е. уравнение

$$\partial_t u + \operatorname{div}(u\mathbf{b}) = \nu \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'((0, T) \times B), \tag{3.13}$$

считая, что $u \in L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^2)$, а ν — мера Радона на $(0, T) \times \mathbb{R}^2$. Как и для уравнения $\operatorname{div}(u\mathbf{b}) = \mu$ (см. раздел 3.4), можно выполнить редукцию на нетривиальные компоненты связности множеств уровня гамильтониана H_B . Грубо говоря, представим версии лемм 3.3–3.5 для неавтономного случая.

Лемма 3.6. *Функция u удовлетворяет уравнению (3.13) тогда и только тогда, когда*

- для почти всех (в смысле \mathcal{L}^1) значений h функция $\widehat{u}_h(t, s) := u(t, \gamma_c(s))$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t(\widehat{u}_h\widehat{c}_h|\widehat{\mathbf{b}}|) + \partial_s(\widehat{u}_h\widehat{c}_h|\widehat{\mathbf{b}}|) = \widehat{\nu}_h \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'((0, T) \times I_c), \tag{3.14}$$

где $\gamma_h: I_c \rightarrow \mathbb{R}^2$ — инъективная липшицева параметризация связная параметризация компоненты связности с множества уровня E_h гамильтониана H , а $\widehat{\nu}_h$ — такая мера, что $\widehat{\nu}_h = (\gamma_c^{-1})_\# \nu$;

- выполняется соотношение

$$\operatorname{div}(u\mathbf{b}\sigma_h) = 0. \tag{3.15}$$

3.4.5. *Лемма о совпадении и слабое свойство Сарда для H_B .* Прежде чем перейти к глобальным рассуждениям, убедимся, что гамильтонианы, построенные в предыдущем пункте, совпадают в смысле следующего определения.

Определение 3.3. Предположим, что B_1, B_2 из \mathcal{B} таковы, что $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Будем говорить, что гамильтонианы $H_1 := H_{B_1}$ и $H_2 := H_{B_2}$ *совпадают* в $B_1 \cap B_2$, если, обозначая через C_x^i компоненты связности множеств уровня функции $H_i^{-1}(H_i(x))$, содержащие x ($i = 1, 2$), мы имеем равенство $C_x^1 = C_x^2$ для почти всех (в смысле \mathcal{L}^2) значений x из $B_1 \cap B_2$, для которых множества уровня функции $H_i^{-1}(H_i(x))$ регулярны.

Можно показать, что в нашей постановке задачи совпадение имеет место — это вытекает из того факта, что $\nabla H_1 \parallel \nabla H_2$ (если оба параллельны \mathbf{b}).

Лемма 3.7 (лемма о совпадении). *Пусть H_1, H_2 — гамильтонианы, определенные выше. Тогда они совпадают в $B_1 \cap B_2$.*

Применяя лемму 3.7, можно получить следующее утверждение.

Лемма 3.8. *Гамильтониан H_B обладает слабым свойством Сарда для любого B из \mathcal{B} .*

Замечание 3.3. Если мы не накладываем на \mathbf{b} требование регулярности ограниченной вариации, но $\mathbf{b} \neq 0$ почти всюду, то утверждение леммы 3.8 остается справедливым.

Как только справедливость слабого свойства Сарда для гамильтониана H_B установлена, можно локально применить наш метод характеристик.

Лемма 3.9. *Пусть B — фиксированный шар из \mathcal{B} , а u из $L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ — ρ -слабое решение задачи*

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathbf{b} \cdot \nabla u = 0 \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot) \end{cases} \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^2). \tag{3.16}$$

Тогда существует такое пренебрежимое множество Z вещественных чисел, что для любого h , не принадлежащего Z , множество уровня $E_h = H_B^{-1}(h)$ регулярно, а для любой нетривиальной компоненты связности \mathfrak{c} множества E_h с параметризацией $\gamma_{\mathfrak{c}}: I_{\mathfrak{c}} \rightarrow \mathbb{R}^2$, удовлетворяющей уравнению $\gamma'_{\mathfrak{c}}(s) = \nabla^{\perp} H(\gamma_{\mathfrak{c}}(s))$, соотношение

$$u(t, \gamma_{\mathfrak{c}}(s+t)) = u_0(\gamma_{\mathfrak{c}}(s)) \quad (3.17)$$

справедливо для любого s из $I_{\mathfrak{c}}$ и почти любого t из $(0, T)$, для которого $s+t \in I_{\mathfrak{c}}$.

3.4.6. Множества уровня и траектории. Исследуем связь между траекториями γ из Γ_B и множествами уровня гамильтониана H_B . Прежде всего можно доказать, что почти все (по мере η) траектории γ содержатся в некотором множестве уровня. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.10. *С точностью до пренебрежимого (в смысле η_B) множества N из Γ образ любой γ из Γ_B содержится в какой-либо компоненте связности какого-либо регулярного множества уровня гамильтониана H_B .*

Замечание о локальности дивергенции на классе векторных полей, дивергенции которых являются существенно ограниченными мерами. Пусть U — открытое подмножество пространства \mathbb{R}^d , а $\mathbf{E}: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ — векторное поле. Рассмотрим множество

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \mathbf{E}(x) = 0, x \in \mathcal{D}_{\mathbf{E}} \text{ и } \nabla^{\text{appr}} \mathbf{E}(x) = 0 \right\}, \quad (3.18)$$

где $\mathcal{D}_{\mathbf{E}}$ — множество точек приближенной дифференцируемости, а $\nabla^{\text{appr}} \mathbf{E}$ — приближенный дифференциал (см. [4, Def. 3.70]). Следующее утверждение доказано в [7].

Предложение 3.1. *Предположим, что \mathbf{E} приближенно дифференцируемо почти всюду, и $\mathbf{E} \in L^{\infty}(U)$, и $\text{div}(u\mathbf{E}) = \lambda$ в смысле обобщенных функций, где λ — мера Радона на U . Тогда $|\lambda| \llcorner M = 0$.*

Свойство, выраженное предложением 3.1, будем называть *локальностью дивергенции*. Отметим, что ни на u , ни на $u\mathbf{E}$ не накладывается никакого условия слабой дифференцируемости, поэтому предложение 3.1 не является непосредственным следствием стандартных свойств локальности приближенной производной (см., например, [4, Proposition 3.73]). Более того, в [1] можно найти пример ограниченного векторного поля, дивергенция которого (в смысле обобщенных функций) принадлежит L^{∞} и нетривиальна, но множество, на котором векторное поле обращается в нуль, не содержит ее носителя.

Свойство локальности дивергенции, выраженное предложением 3.1, имеет место и в нашей постановке задачи, если $\mathbf{b} \in \text{BV}$. Это позволяет улучшить описание взаимосвязи между траекториями γ из Γ_B и множествами уровня гамильтониана H_B , уточняя тем самым лемму 3.10. Действительно, пусть B — фиксированный шар из набора \mathcal{B} , а H_B , как и выше, обозначает гамильтониан. Тогда, согласно лемме 3.10, существует такое пренебрежимое (относительно меры η) множество N , что для любой γ из $\Gamma_B \setminus N$ образ $\gamma(0, T)$ содержится в некоторой компоненте связности \mathfrak{c} некоторого множества уровня гамильтониана H_B .

Зададимся следующим вопросом: какое соотношение между траекторией γ из $\Gamma_B \setminus N$ и параметризацией $\gamma_{\mathfrak{c}}$ соответствующей компоненты связности задается п. 3 теоремы 3.2? Ответ дает следующее утверждение.

Предложение 3.2. *Пусть N — множество, заданное леммой 3.10, а $\gamma \in \Gamma_B \setminus N$. Тогда (подходящее сужение) γ совпадает с $\gamma_{\mathfrak{c}}$ с точностью до сдвига по времени.*

3.5. Вторая часть доказательства: глобальные рассуждения. Проанализируем вторую часть доказательства теоремы 3.1.

3.5.1. Регулярные множества уровня: свойство покрытия. Напомним, что для любого шара B из \mathcal{B} и любой пары рациональных чисел s, t из $\mathbb{Q} \cap (0, T)$, удовлетворяющей неравенству $s < t$, определено множество

$$\Gamma_{B,s,t} := \left\{ \gamma \in \Gamma : \mathcal{L}^1(\{\tau \in [0, T] : \gamma(\tau) \in B\}) > 0, \gamma(s) \notin B, \gamma(t) \notin B \right\}$$

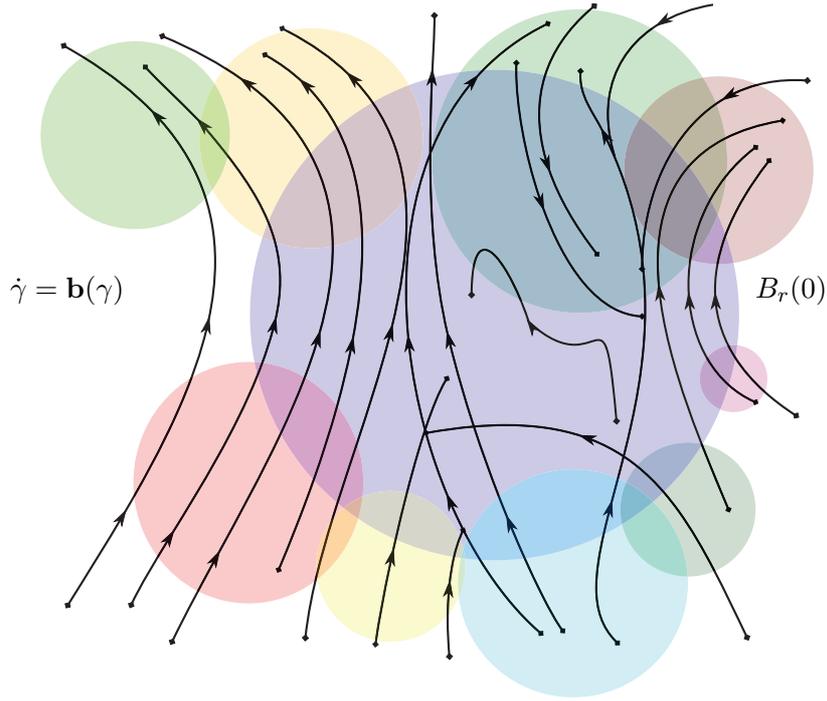


Рис. 2. Переход от локальных рассуждений к глобальным возможен благодаря лемме 3.7 о совпадении и соотношениям между траекториями и множествам уровня.

и из замечания 3.2 известно, что объединение множеств $\Gamma_{B,s,t}$ по всем B из \mathcal{B} и всем s, t из $\mathbb{Q} \cap [0, T]$ совпадает с множеством траекторий, не являющихся константами. Так же, как в разделе 3.3, для каждого B из \mathcal{B} , s из $\mathbb{Q} \cap (0, T)$ и t из $\mathbb{Q} \cap (s, T)$, сужая η на $\Gamma_{B,s,t}$, можно построить локальный гамильтониан $H_{B,s,t}$. Тогда, полагая

$$E^* := \bigcup_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ s, t \in \mathbb{Q} \cap [0, T]}} \bigcup_{h \in H_{B,s,t}(\mathbb{R}^2)} E_h^*, \tag{3.19}$$

можно доказать следующее свойство покрытия, показывающее, что почти все точки, в которых \mathbf{b} отлично от нуля, содержатся в некотором регулярном множестве уровня гамильтониана (см. также рис. 2).

Лемма 3.11. $E^* = \{\mathbf{b} \neq 0\}$ по модулю \mathcal{L}^2 .

3.5.2. *Выбор подходящих траекторий.* Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.12. *С точностью до η -пренебрежимого множества, любая отличная от константы интегральная кривая γ векторного поля \mathbf{b} обладает следующими свойствами:*

1. *если $B \in \mathcal{B}$, а $\gamma \in \Gamma_{B,s,t}$, то каждая компонента связности множества $\gamma([s, t]) \cap B$ содержится в некотором регулярном множестве уровня гамильтониана H_B ;*
2. *для любого τ из $(0, T)$ существуют такой шар B из \mathcal{B} и такие s из $\mathbb{Q} \cap (0, \tau)$ и t из $\mathbb{Q} \cap (\tau, T)$, что $\gamma \in \Gamma_{B,s,t}$.*

В силу леммы 3.12, для почти всех (в смысле η) траекторий γ , отличных от констант, существует шар из набора \mathcal{B} , для которого некоторый кусок траектории γ покрывается каким-либо регулярным множеством уровня гамильтониана H_B . Теперь, чтобы локально решить уравнение в этом шаре при помощи леммы 3.9, нам потребуется следующий технический результат.

Лемма 3.13. *Пусть $Z_{B,s,t}$ обозначает пренебрежимое множество, существование которого установлено леммой 3.9. Тогда почти все (в смысле η) траектории γ , отличные от констант, удовлетворяют соотношению*

$$H_{B,s,t}(\gamma([0, T])) \cap Z_{B,s,t} = \emptyset, \tag{3.20}$$

а концевые точки $\gamma(0)$ и $\gamma(T)$ содержатся в регулярных множествах уровня некоторых гамильтонианов:

$$\gamma(0) \in E^*, \quad \gamma(T) \in E^*. \quad (3.21)$$

Используя леммы 3.12-3.13, удаляем η -пренебрежимые множества траекторий поля **b**. Следующее утверждение содержит некоторые свойства оставшихся траекторий.

Предложение 3.3. *Для почти всех отличных от констант γ из Γ и всех τ из $[0, T]$ существуют такое положительное δ и такая постоянная w , что функция $\xi \mapsto u(\xi, \gamma(\xi))$ равна w для почти всех ξ из $(\tau - \delta, \tau + \delta) \cap [0, T]$. Если $\tau = 0$, то постоянная w равна $u_0(\gamma(0))$.*

3.5.3. Вывод: вдоль почти каждой (в смысле η) траектории решение является постоянным. Теперь мы можем применить метод характеристик к нашей задаче в слабой постановке. Следующее утверждение есть глобальный аналог леммы 3.9; оно непосредственно следует из предложения 3.3 и компактности отрезка $[0, T]$.

Лемма 3.14. *Пусть u из $L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ — ρ -слабое решение задачи 3.16. Тогда для почти каждой (в смысле η) траектории γ из Γ соотношение*

$$u(t, \gamma(t)) = u_0(\gamma(0))$$

справедливо для почти всех t из $[0, T]$.

Доказательство. Обозначим через N множество траекторий, задаваемое предложением 3.3. Пусть γ из $\Gamma \setminus N$ — траектория, отличная от константы. Для любой τ из $[0, T]$ существует такое положительное δ , что функция $t \mapsto u(t, \gamma(t))$ равна некоторой константе w_τ для почти всех t из $(\tau - \delta, \tau + \delta) \cap [0, T]$. Кроме того, если $\tau = 0$, то $w_\tau = u_0(\gamma(0))$. Остается выделить конечное покрытие отрезка $[0, T]$, что и завершает доказательство. \square

4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Нас интересует структура энтропийного решения u скалярного закона сохранения для случая одной пространственной переменной:

$$u_t + f(u)_x = 0. \quad (4.1)$$

Скалярная функция f одной скалярной переменной предполагается гладкой, начальные данные $u_0(x)$ предполагаются существенно ограниченными в \mathbb{R} . Энтропийное решение, по определению, для любой выпуклой энтропии η удовлетворяет в смысле обобщенных функций неравенству

$$\mu := \eta(u)_t + q(u)_x \leq 0, \quad (4.2)$$

где соотношение $q'(w) = f'(w)\eta'(w)$ определяет поток энтропии q с точностью до постоянных при почти всех (в смысле \mathcal{L}^1) вещественных w , а $\mu \ll \mathcal{H}^1$, где мера μ есть дивергенция некоторого существенно ограниченного векторного поля.

Для решений ограниченной вариации, обозначая множество скачков функции u через J , получаем, по формуле Вольперта, соотношение

$$\eta(u)_t + q(u)_x = \eta'(u)(D_t^{\text{cont}}u + f'(u)D_x^{\text{cont}}u) + \mu_\perp J = \mu_\perp J,$$

где $D^{\text{cont}}u = (D_t^{\text{cont}}u, D_x^{\text{cont}}u)$ — непрерывная часть меры Du .

Такие рассуждения непосредственно применяются к случаю, когда вариация начальных данных ограничена, поскольку включение $u_0 \in BV(\mathbb{R})$ влечет за собой включение $u \in BV_{\text{loc}}([0, \infty) \times \mathbb{R})$, и к случаю, когда поток f — равномерно выпуклый, а начальная функция u_0 всего лишь существенно ограничена на \mathbb{R} . Из оценки Олейник (см. [21]) следует, что

$$f'' \geq c > 0, \quad \text{а значит,} \quad u \in BV_{\text{loc}}([0, \infty) \times \mathbb{R}).$$

Если поток f имеет конечное число точек перегиба и в окрестности каждой из этих точек удовлетворяет некоторым дополнительным требованиям регулярности, то $f' \circ u \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ (это доказано в [15]), а μ сконцентрирована на множестве скачков функции $f' \circ u$ (это доказано в [19]).

Основной результат настоящего раздела заключается в следующем.

Теорема 4.1. *Существует такое 1-спрямляемое множество J , что для любой выпуклой энтропии η мера рассеяния μ сконцентрирована на J .*

Единственное требование, накладываемое на поток f — гладкость. Результат вытекает из описания структуры решения u , в частности, из поведения его характеристик.

Оказывается, существует такое разложение плоскости $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} = A \cup B \cup C$, что

1. A счетно 1-спрямляемо;
2. B открыто и $u|_B \in BV_{\text{loc}}$;
3. C — объединение отрезков, начинающихся в начале координат и таких, что решение u постоянно на каждом из таких отрезков, а их угол наклона задается характеристической скоростью $f'(u)$.

Чтобы завершить доказательство теоремы 4.1, достаточно проанализировать $\mu|_C$. В разделе 4.2 будет показано, как эта структура позволяет вычислить μ , используя баланс u и $\eta(u)$ в областях, ограниченных указанными сегментами.

Самые важные инструменты и идеи, используемые для доказательства теоремы 4.1, здесь представлены, но подробности зачастую опущены либо представлены в упрощенном виде. Там, где ссылки на подробности не приведены, считаем, что мы ссылаемся на [10].

4.1. Лагранжево представление и структура решения. В [9, 12, 13] существование лагранжева представления доказывается следующим образом: строится лагранжево представление для плотного множества решений либо для приближенных решений, а затем выполняется переход к пределу. Формулировка, данная в определении 2.1, непригодна для предельного перехода в пространстве существенно ограниченных решений, поэтому ищется более устойчивая интерпретация лагранжевых представлений. В BV-постановке задачи можно показать, что характеристика γ со значением w есть допустимая граница для решения u в следующем смысле:

Определение 4.1. Пусть $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — липшицева кривая, $w \in \mathbb{R}$, а u — энтропийное решение уравнения (4.1). Введем обозначения

$$\Omega^- = \{(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R} : x < \gamma(t)\}, \quad \Omega^+ = \{(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R} : x > \gamma(t)\}.$$

Пусть u^- — решение уравнения (4.1) в Ω^- с начальным условием $u_0|_{\{x < \gamma(0)\}}$ и постоянными граничными данными, равными w на $\{(t, \gamma(t)) : t \in (0, T)\}$. Определим u^+ аналогичным образом. Будем говорить, что (γ, w) — *допустимая граница* в $(0, T)$ для u , если

$$u^- = u|_{\Omega^-} \quad \text{и} \quad u^+ = u|_{\Omega^+}.$$

В [5] понятие решения начальной задачи для скалярных законов сохранения в введено BV-постановке. Более общий подход изложен в [22].

Используя технику приближений (например, слежение за волновым фронтом), получаем следующий результат для решений u с ограниченной вариацией.

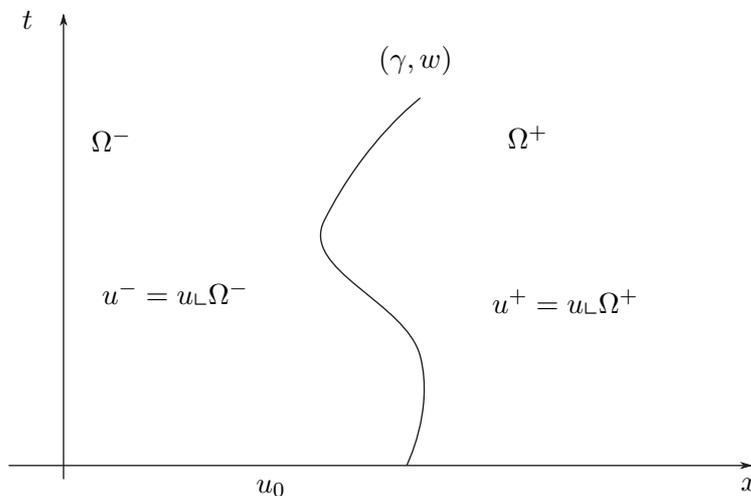


Рис. 3. Интерпретация характеристик как допустимой границы.

Предложение 4.1. Существует такое семейство \mathcal{K} допустимых границ (γ, w) для u и такая функция $T : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, что справедливы следующие утверждения:

1. Для любых (γ, w) и (γ', w') из \mathcal{K}

$$\gamma(t) \leq \gamma'(t) \quad \forall t > 0 \quad \text{или} \quad \gamma'(t) \leq \gamma(t) \quad \forall t > 0.$$

В частности, множество $\mathcal{K}_\gamma = \{\gamma : \exists w((\gamma, w) \in \mathcal{K})\}$ упорядочено.

2. Для любого (t, x) из $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ и любого w из $\text{conv}(u(t, x-), u(t, x+))$ существует такая допустимая граница (γ, w) из \mathcal{K} , что $T(\gamma, w) \geq t$.
3. Если $(\gamma, w) \in \mathcal{K}$ и $t < T(\gamma, w)$, то

$$w \in \text{conv}(u(t, \gamma(t)-), u(t, \gamma(t)+)).$$

4. Выполняется следующее характеристическое уравнение: для любого γ из \mathcal{K}_γ и почти любого (в смысле \mathcal{L}^1) положительного t имеем соотношение

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{cases} f'(u(t, \gamma(t))), & \text{если } u(t) \text{ непрерывна на } \gamma(t), \\ \frac{f(u(t, \gamma(t)+)) - f(u(t, \gamma(t)-))}{u(t, \gamma(t)+) - u(t, \gamma(t)-)}, & \text{если } u(t) \text{ имеет скачок на } \gamma(t). \end{cases}$$

В скалярных законах сохранения возникает эффект *аннулирования*. Чтобы учесть это явление, вводится функция T такая, что $T(\gamma, w)$ обозначает момент, в который значение w аннулируется вдоль γ .

Чтобы в условиях этой формулировки перейти к пределу, требуется свойство устойчивости, устанавливаемое следующей леммой.

Лемма 4.1. Пусть (γ^n, w^n) — допустимые границы для энтропийных решений u^n уравнения (4.1), и пусть выполняются следующие условия:

1. $\gamma^n \rightarrow \gamma$ равномерно;
2. $w^n \rightarrow w$;
3. $u^n \rightarrow u$ сильно в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$.

Тогда (γ, w) — допустимая граница для u .

Любое u_0 из $L^\infty(\mathbb{R})$ можно аппроксимировать последовательностью элементов u_0^n из BV_{loc} в сильной L^1_{loc} -топологии. Отсюда, по известной теореме Кружкова, следует сходимость соответствующих решений u^n к u в L^1_{loc} . Поскольку кривые γ^n из \mathcal{K}_γ^n удовлетворяют характеристическому уравнению, они равнолиптицевы. Значит, имеет место компактность, требуемая для применения леммы 4.1.

Полученное в результате перехода к пределу множество \mathcal{K} всех предельных точек последовательностей допустимых границ обладает следующим свойством:

$$\text{Graph } u \subset U \subset \{(t, \gamma(t), w) : (\gamma, w) \in \mathcal{K} \text{ и } T(\gamma, w) \geq t\},$$

где U — предел последовательности графиков u_n в смысле Куратовского. Первое из этих включений может быть строгим и, вообще говоря, U не определяет существенно ограниченную функцию u единственным образом, однако в следующем разделе мы увидим, что он определяет ее единственным образом с точностью до линейно вырожденных компонентов потока f , т. е. с точностью до интервалов, на которых $f'' = 0$.

4.1.1. Структура решения. В этом разделе мы увидим, что полученное множество \mathcal{K} наделено некоторой дополнительной структурой, поскольку его элементы — допустимые границы энтропийного решения u .

Пусть $(\bar{t}, \bar{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $\bar{\gamma} \in \mathcal{K}_\gamma$ и $\bar{\gamma}(\bar{t}) = \bar{x}$. Выделим следующие три случая (см. рис. 4).

1. Существует такая γ из \mathcal{K}_γ и такие t', \bar{t} , что $t' < \bar{t}$, $\bar{\gamma}(\bar{t}) < \gamma(\bar{t})$ и $\bar{\gamma}(t') = \gamma(t')$.
2. Условие 1 не выполняется и, если $\{x^n\}$ сходится к \bar{x} , $x^n > \bar{x}$ и $\gamma^n \in \mathcal{K}_\gamma$, где $\gamma^n(\bar{t}) = x^n$, то γ^n равномерно сходится к $\bar{\gamma}$ в $[0, \bar{t}]$.
3. Условия 1-2 не выполняются.

Нетрудно доказать, что все точки, для которых условия 1-2 не выполняются, лежат на графиках счетного множества липшицевых кривых из \mathcal{K}_γ . В следующих двух леммах рассматриваются первые два случая.

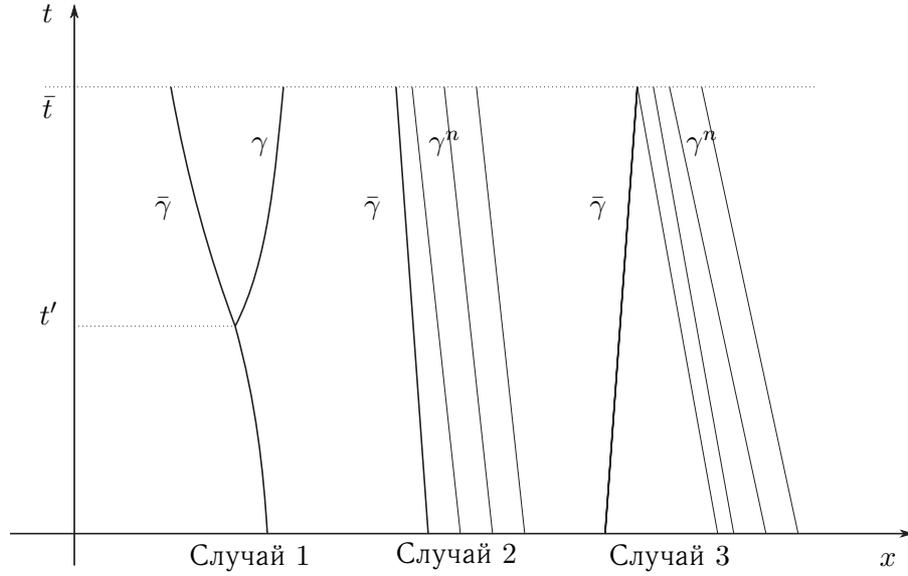


Рис. 4. Точка $(\bar{t}, \bar{\gamma}(\bar{t}))$: три случая.

Лемма 4.2. Если $\bar{\gamma}$ и γ соответствуют первому случаю, то решение u монотонно по x в следующей области, ограниченной двумя кривыми:

$$\Omega = \{(t, x) \in (t', \bar{t}) \times \mathbb{R} : \bar{\gamma}(t) < x < \gamma(t)\}.$$

В следующей лемме линейное вырождение потока имеет значение, поэтому вводится следующее обозначение: через \mathcal{L}_f обозначается множество максимальных замкнутых интервалов (включая одноточечные), на которых f' постоянна.

Лемма 4.3. Если x^n и γ^n соответствуют второму случаю, а им соответствуют значения w^n , то существует такое I из \mathcal{L}_f , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(w^n, I) = 0 \quad \text{и из соотношения} \quad \forall t \in (0, \bar{t}) (\dot{\bar{\gamma}}(t) = f'(I)),$$

где $f'(I)$ обозначает $f'(w)$ для единицы, следует, что любое w принадлежит I . В частности, $\bar{\gamma}_L(0, \bar{t})$ есть отрезок.

Из лемм 4.2-4.3 вытекает существование такого разложения $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} = A \cup B \cup C$ (см. выше), что (см. рис. 5):

1. A содержится в объединении счетного множества графиков кривых из \mathcal{K}_γ ;
2. B открыто и $u|_B \in BV_{\text{loc}}$;
3. C есть объединение отрезков, начинающихся в начале координат с характеристической скоростью.

Из структуры характеристик можно вывести результат о структуре решения u : оно непрерывно в каждой точке за исключением счетного множества липшицевых кривых, на которых оно терпит разрыв первого рода. Все это справедливо с точностью до линейно вырождающихся компонентов потока.

Чтобы получить более точный результат, рассмотрим γ из \mathcal{K}_γ , точку \bar{t} , в которой γ дифференцируема, и положительные r, δ . Введем обозначения

$$B_{\bar{t}, \gamma}^{\delta+}(r) := \{(t, x) \in B_{\bar{t}, \gamma(\bar{t})}(r) : x > \gamma(\bar{t}) + \dot{\gamma}(\bar{t})(t - \bar{t}) + \delta|t - \bar{t}|\}$$

$$B_{\bar{t}, \gamma}^{\delta-}(r) := \{(t, x) \in B_{\bar{t}, \gamma(\bar{t})}(r) : x < \gamma(\bar{t}) + \dot{\gamma}(\bar{t})(t - \bar{t}) - \delta|t - \bar{t}|\},$$

$$U_{\bar{t}, \bar{\gamma}}^{\delta\pm}(r) := \left\{ w \in \mathbb{R} : \exists t \in \mathbb{R}^+, (\gamma, w) \in \mathcal{K} \mid T(\gamma, w) > t, (t, \gamma(t)) \in B_{\bar{t}, \bar{\gamma}}^{\delta\pm}(r) \right\}.$$

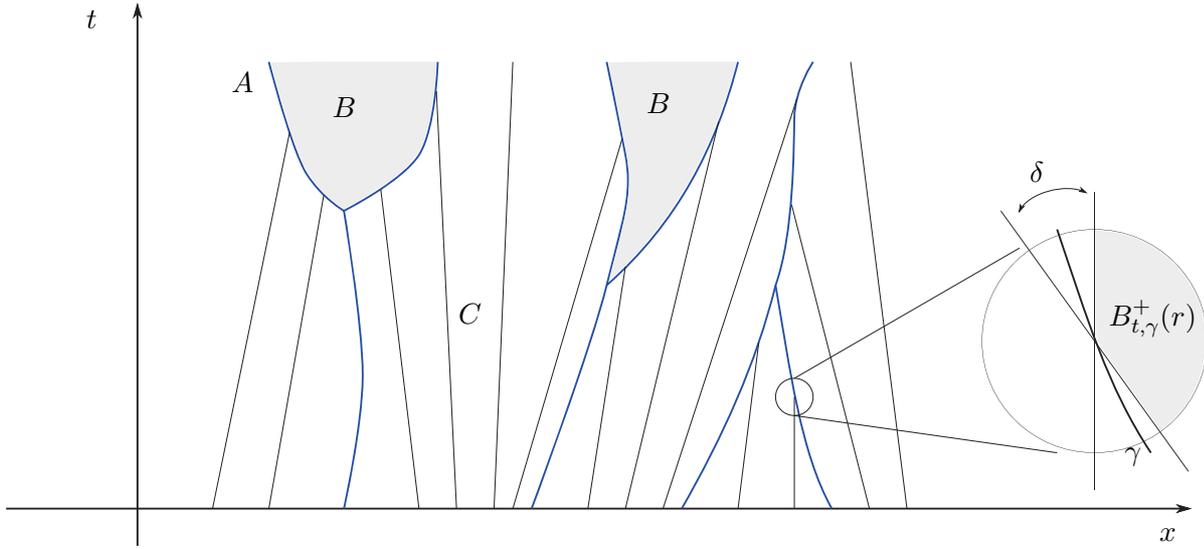


Рис. 5. Разбиение полуплоскости.

Предложение 4.2. Существует такое подмножество J полуплоскости $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, содержащееся в графиках счетного множества кривых из \mathcal{K}_γ , и такой представитель u , что:

1. для любого (\bar{t}, \bar{x}) из $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \setminus J$ существует такое I из \mathcal{L}_f , что для любого положительного ε существует такое положительное r , что

$$\max_{(t,x) \in B_r(\bar{t}, \bar{x})} \text{dist}(u(t, x), I) < \varepsilon;$$

2. для любой γ из \mathcal{K}_γ и почти любого (в смысле \mathcal{L}^1) положительного t существуют такие I^+, I^- из \mathcal{L}_f , что

$$\forall \delta > 0 \forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 (U_{t, \gamma}^{\delta \pm}(r) \subset I^\pm + (-\varepsilon, \varepsilon)).$$

4.2. Концентрация энтропийной диссипации. Для доказательства теоремы 4.1 используем полученную в предложении 4.2 структуру решения. Рассмотрим энтропии η , для которых $\eta(0) = 0$ и, тем самым, существует такая положительная постоянная L , что $|\eta(u)| \leq L|u|$. Это условие не ограничивает общности рассмотрения, поскольку

$$\mu_\eta = \mu_{\eta - \eta(0)}.$$

Как отмечено во введении, достаточно рассмотреть $\mu \ll C$.

Зафиксируем положительный момент времени T . Чтобы избежать некоторых технических трудностей, приведем доказательство теоремы 4.1 для случая, когда для любого вещественного x точка (T, x) принадлежит C . В этом случае можно доказать, что $\mu \ll C_T$ сконцентрировано на счетном множестве характеристических отрезков, где

$$C_T := \{(t, \gamma(t)) \in [0, T] \times \mathbb{R} : \gamma \in \mathcal{K}_\gamma, (T, \gamma(T)) \in C\}.$$

Отсюда, в силу леммы 4.3, вытекает, что каждая γ из \mathcal{K}_γ , суженная на $[0, T]$, есть отрезок. Пусть $\varepsilon > 0$ и $2\varepsilon < T$. Параметризуем характеристические отрезки их положением y в момент ε , т. е. $\gamma_y(\varepsilon) = y$. Из леммы 4.3 следует, что для любого вещественного y существуют такие $I^-(y), I^+(y)$ из \mathcal{L}_f , для которых пределы допустимых границ слева и справа от γ_y содержатся в $I^-(y)$ и $I^+(y)$ соответственно. Кроме того, нетрудно показать, что $I^-(y) = I^+(y) =: I(y)$ всюду, за исключением не более чем счетного множества точек. Наконец, для почти всех (в смысле \mathcal{L}^1) y существует такое $U(y)$ из $I(y)$, что $u(t, \gamma_y(t)) = U(y)$ для почти всех (в смысле \mathcal{L}^1) t из $(0, T)$.

Пусть $P : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — такое, что $P(t, x) = y$, где $\gamma_y(t) = x$. Наша цель — показать, что $m := P_\# \mu$ атомарна, из чего непосредственно следует, что μ сконцентрирована не более чем на счетном множестве отрезков, что доказывает теорему 4.1. Идея заключается в том, чтобы вычислить балансы

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad \eta(u)_t + q(u)_x = \mu_\eta$$

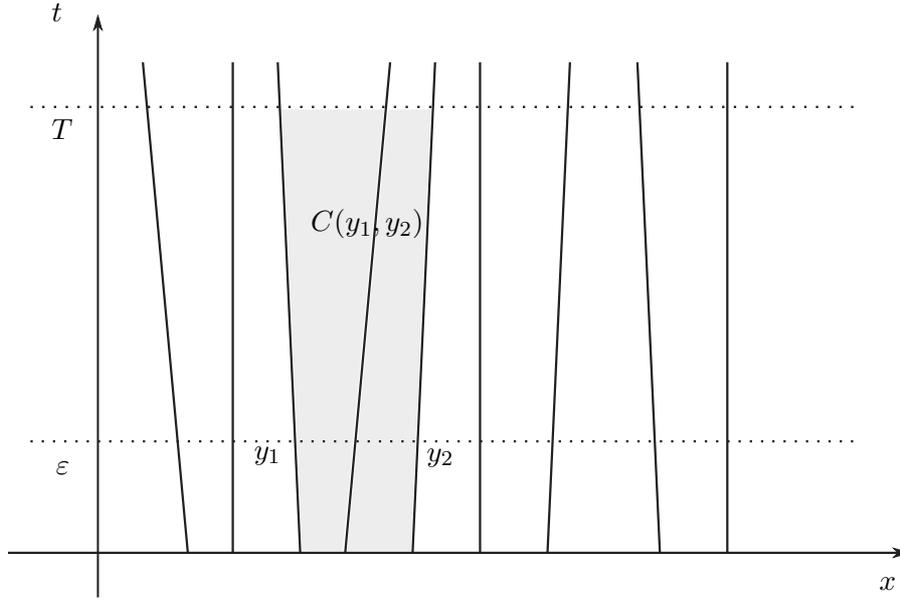


Рис. 6. Модельное множество сегментов, параметризуемое их положением в момент ε и цилиндром.

для сохраненного количества u и энтропии $\eta(u)$ в цилиндрических областях вида

$$C(y_1, y_2) = \{(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R} : \gamma_{y_1}(t) < x < \gamma_{y_2}(t)\}.$$

Пусть $F(Q)$ — поток u ($\eta(u)$) через γ_y за единицу времени. Тогда

$$F(y) = f(U(y)) - \lambda(y)U(y), \quad Q(y) = q(U(y)) - \lambda(y)\eta(U(y)),$$

где $\lambda(y) = f'(U(y))$ — угол наклона отрезка γ_y . Они не зависят от времени. Отметим, что, поскольку эти отрезки не пересекаются с $(0, T)$ в силу монотонности семейства границ, скорость $\lambda(y)$ является $1/\varepsilon$ -липшицевой. Следовательно, баланс для $\eta(u)$ в $C(y_1, y_2)$ дает соотношение

$$\int_{\gamma_{y_1}(T)}^{\gamma_{y_2}(T)} \eta(u(T, x))dx - \int_{\gamma_{y_1}(0)}^{\gamma_{y_2}(0)} \eta(u_0(x))dx + T(Q(y_2) - Q(y_1)) = m((y_1, y_2)).$$

Отсюда следует, что $Q \in BV$ и

$$D_y Q = -\lambda'(y)\eta(U(y))\mathcal{L}^1 + \frac{m}{T}. \tag{4.3}$$

В частности, F является липшицевой, и для почти всех (в смысле \mathcal{L}^1) вещественных y справедливо соотношение

$$F'(y) = -\lambda'(y)U(y).$$

Это равенство получено дифференцированием сложной функции: $(f(u) - f'(u)u)_y = -(f'(u))_y u$.

Следующая общая лемма связывает между собой поток F и поток Q (см. рис. 7).

Лемма 4.4. Пусть $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2) : [-M, M] \rightarrow \mathbb{R}^2$ — такая гладкая кривая, а L — такая положительная постоянная, что для любого w из $[-M, M]$ справедливо неравенство $|\dot{\alpha}^2(w)| \leq L|\dot{\alpha}^1(w)|$. Пусть $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ — такое отображение, что γ^1 липшицево, γ^2 имеет ограниченную вариацию и $\text{Im } \gamma \subset \text{Im } \alpha$. Тогда $D\gamma^2$ не имеет канторовой части и существует такое $w(y)$, что $\gamma(y) = \alpha(w(y))$ и

$$(\gamma^2)'(y)(\alpha^1)'(w(y)) = (\gamma^1)'(y)(\alpha^2)'(w(y))$$

для почти всех (в смысле \mathcal{L}^1) вещественных y .

Лемму 4.4 можно применить к кривым y . В этом случае

$$\alpha(w) = \begin{pmatrix} f(w) - f'(w)w \\ q(w) - f'(w)\eta(w) \end{pmatrix}, \quad \gamma(y) = \begin{pmatrix} F(y) \\ Q(y) \end{pmatrix}.$$

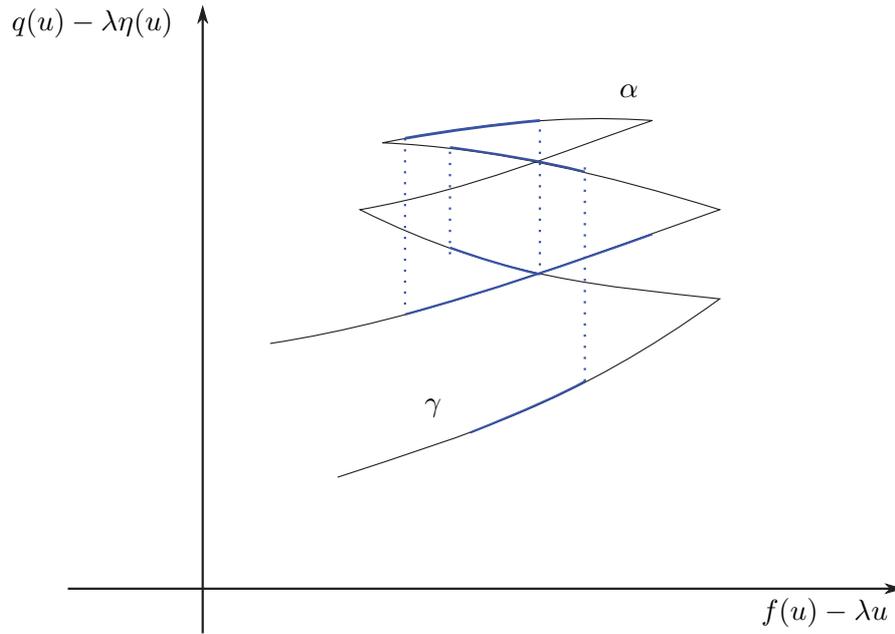


Рис. 7. Иллюстрация к лемме 4.4. Поскольку угол наклона α ограничен и первая проекция γ липшицева, то $\gamma^2 \in \text{SBV}$ и почти всюду в \mathcal{L}^1 угол наклона γ совпадает с углом наклона α .

Тогда

$$\alpha'(w) = \begin{pmatrix} -f''(w)w \\ -f''(w)\eta(w) \end{pmatrix}$$

и, по условию, справедливо неравенство $|\eta(w)| \leq L|w|$. Поэтому $D_y Q$ не имеет канторовой части и для почти всех (в смысле \mathcal{L}^1) вещественных y выполняется соотношение

$$Q'(y) = -\lambda'(y)\eta(U(y)).$$

Сравнивая это с (4.3), получаем, что m атомарна, что и завершает доказательство теоремы 4.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alberti G., Bianchini S., Crippa G.* Structure of level sets and Sard-type properties of Lipschitz maps// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5). — 2013. — 12, № 4. — С. 863–902.
2. *Alberti G., Bianchini S., Crippa G.* A uniqueness result for the continuity equation in two dimensions// J. Eur. Math. Soc. (JEMS). — 2014. — 16, № 2. — С. 201–234.
3. *Ambrosio L.* Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields// Invent. Math. — 2004. — 158, № 2. — С. 227–260.
4. *Ambrosio L., Fusco N., Pallara D.* Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems. — Oxford: Clarendon Press, 2000.
5. *Bardos C., le Roux A.Y., Nédélec J.-C.* First order quasilinear equations with boundary conditions// Commun. Part. Differ. Equ. — 1979. — 4. — С. 1017–1034.
6. *Bianchini S., Bonicatto S.* A uniqueness result for the decomposition of vector fields in \mathbb{R}^d // Preprint SISSA 15/2017/MATE.
7. *Bianchini S., Bonicatto A., Gusev N.A.* Renormalization for autonomous nearly incompressible BV vector fields in two dimensions// SIAM J. Math. Anal. — 2016. — 48, № 1. — С. 1–33.
8. *Bianchini S., Gusev N.A.* Steady nearly incompressible vector fields in two-dimension: chain rule and renormalization// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2016. — 222, № 2. — С. 451–505.
9. *Bianchini S., Marconi E.* On the concentration of entropy for scalar conservation laws// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S. — 2016. — 9. — С. 73–88.
10. *Bianchini S., Marconi E.* On the structure of L^∞ entropy solutions to scalar conservation laws in one-space dimension// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2017. — 226, № 1. — С. 441–493.
11. *Bianchini S., Marconi E., Bonicatto S.* A Lagrangian approach to multidimensional scalar conservation laws// Preprint SISSA 36/2017/MATE.

12. *Bianchini S., Modena S.* Quadratic interaction functional for general systems of conservation laws// *Commun. Math. Phys.* — 2015. — 338, № 3. — C. 1075–1152.
13. *Bianchini S., Yu L.* Structure of entropy solutions to general scalar conservation laws in one space dimension// *J. Math. Anal. Appl.* — 2015. — 428, № 1. — C. 356–386.
14. *Bressan A.* An ill posed Cauchy problem for a hyperbolic system in two space dimensions// *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova.* — 2003. — 110. — C. 103–117.
15. *Cheng K. S.* A regularity theorem for a nonconvex scalar conservation law// *J. Differ. Equ.* — 1986. — 61. — C. 79–127.
16. *Dafermos C. M.* Continuous solutions for balance laws// *Ric. Mat.* — 2006. — 55, № 1. — C. 79–92.
17. *Dafermos C. M.* *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics.* — Berlin—Heidelberg: Springer, 2010.
18. *de Lellis C.* Notes on hyperbolic systems of conservation laws and transport equations// *Handb. Differ. Equ.* — 2007. — 3. — C. 277–382.
19. *de Lellis C., Riviere T.* Concentration estimates for entropy measures// *J. Math. Pures Appl. (9).* — 2003. — 82. — C. 1343–1367.
20. *DiPerna R. J., Lions P.-L.* Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces// *Invent. Math.* — 1989. — 98, № 3. — C. 511–547.
21. *Oleinik O. A.* Discontinuous solutions of non-linear differential equations// *Am. Math. Soc. Transl. Ser. 2.* — 1963. — 26. — C. 95–172.
22. *Otto F.* Initial-boundary value problem for a scalar conservation law// *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* — 1996. — 322, № 8. — C. 729–734.

Stefano Bianchini

S.I.S.S.A., via Bonomea 265, 34136 Trieste, Italy

E-mail: bianchin@sissa.it

Paolo Bonicatto

S.I.S.S.A., via Bonomea 265, 34136 Trieste, Italy

E-mail: paolo.bonicatto@sissa.it

Elio Marconi

S.I.S.S.A., via Bonomea 265, 34136 Trieste, Italy

E-mail: elio.marconi@sissa.it

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-3-418-436

UDC 517.952

Lagrangian Representations for Linear and Nonlinear Transport

© 2017 S. Bianchini, P. Bonicatto, E. Marconi

Abstract. In this note we present a unifying approach for two classes of first order partial differential equations: we introduce the notion of Lagrangian representation in the settings of continuity equation and scalar conservation laws. This yields, on the one hand, the uniqueness of weak solutions to transport equation driven by a two dimensional BV nearly incompressible vector field. On the other hand, it is proved that the entropy dissipation measure for scalar conservation laws in one space dimension is concentrated on countably many Lipschitz curves.

REFERENCES

1. G. Alberti, S. Bianchini, and G. Crippa, “Structure of level sets and Sard-type properties of Lipschitz maps,” *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 2013, **12**, No. 4, 863–902.
2. G. Alberti, S. Bianchini, and G. Crippa, “A uniqueness result for the continuity equation in two dimensions,” *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 2014, **16**, No. 2, 201–234.

3. L. Ambrosio, “Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields,” *Invent. Math.*, 2004, **158**, No. 2, 227–260.
4. L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Clarendon Press, Oxford, 2000.
5. C. Bardos, A. Y. le Roux, and J.-C. Nédélec, “First order quasilinear equations with boundary conditions,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 1979, **4**, 1017–1034.
6. S. Bianchini and S. Bonicatto, “A uniqueness result for the decomposition of vector fields in \mathbb{R}^d ,” *Preprint SISSA*, 15/2017/MATE.
7. S. Bianchini, A. Bonicatto, and N. A. Gusev, “Renormalization for autonomous nearly incompressible BV vector fields in two dimensions,” *SIAM J. Math. Anal.*, 2016, **48**, No. 1, 1–33.
8. S. Bianchini, and N. A. Gusev, “Steady nearly incompressible vector fields in two-dimension: chain rule and renormalization,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2016, **222**, No. 2, 451–505.
9. S. Bianchini and E. Marconi, “On the concentration of entropy for scalar conservation laws,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 2016, **9**, 73–88.
10. S. Bianchini and E. Marconi, “On the structure of L^∞ entropy solutions to scalar conservation laws in one-space dimension,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2017, **226**, No. 1, 441–493.
11. S. Bianchini, E. Marconi, and S. Bonicatto, “A Lagrangian approach to multidimensional scalar conservation laws,” *Preprint SISSA*, 36/2017/MATE.
12. S. Bianchini and S. Modena, “Quadratic interaction functional for general systems of conservation laws,” *Commun. Math. Phys.*, 2015, **338**, No. 3, 1075–1152.
13. S. Bianchini and L. Yu, “Structure of entropy solutions to general scalar conservation laws in one space dimension,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2015, **428**, No. 1, 356–386.
14. A. Bressan, “An ill posed Cauchy problem for a hyperbolic system in two space dimensions,” *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 2003, **110**, 103–117.
15. K. S. Cheng, “A regularity theorem for a nonconvex scalar conservation law,” *J. Differ. Equ.*, 1986, **61**, 79–127.
16. C. M. Dafermos, “Continuous solutions for balance laws,” *Ric. Mat.*, 2006, **55**, No. 1, 79–92.
17. C. M. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2010.
18. C. de Lellis, “Notes on hyperbolic systems of conservation laws and transport equations,” *Handb. Differ. Equ.*, 2007, **3**, 277–382.
19. C. de Lellis and T. Riviere, “Concentration estimates for entropy measures,” *J. Math. Pures Appl. (9)*, 2003, **82**, 1343–1367.
20. R. J. DiPerna and P.-L. Lions, “Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces,” *Invent. Math.*, 1989, **98**, No. 3, 511–547.
21. O. A. Oleĭnik, “Discontinuous solutions of non-linear differential equations,” *Am. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, 1963, **26**, 95–172.
22. F. Otto, “Initial-boundary value problem for a scalar conservation law,” *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 1996, **322**, No. 8, 729–734.

Stefano Bianchini

S.I.S.S.A., via Bonomea 265, 34136 Trieste, Italy

E-mail: bianchin@sisssa.it

Paolo Bonicatto

S.I.S.S.A., via Bonomea 265, 34136 Trieste, Italy

E-mail: paolo.bonicatto@sisssa.it

Elio Marconi

S.I.S.S.A., via Bonomea 265, 34136 Trieste, Italy

E-mail: elio.marconi@sisssa.it

МЕТОД МОНОТОННЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ

© 2017 г. **В. ВОЛЬПЕРТ, В. ВУГАЛЬТЕР**

Аннотация. Методом Лере—Шаудера, основанном на топологической степени эллиптических операторов в неограниченных областях и на априорных оценках решений в весовых пространствах, изучается существование решений систем уравнений реакции-диффузии в неограниченных областях. Мы выделяем некоторые системы реакции-диффузии, для которых существуют два подкласса решений, отделенных друг от друга в функциональном пространстве: монотонные и немонотонные решения. Для монотонных решений получены априорные оценки, позволяющие доказать их существование методом Лере—Шаудера. Приводятся различные приложения этого метода.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение	437
2. Операторы и пространства	440
3. Метод Лере—Шаудера на подклассах решений	441
4. Существование импульсов и волн	444
5. Обсуждение	448
Список литературы	449

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе представлен метод изучения разрешимости уравнений реакции-диффузии в неограниченных областях. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u), \quad (1.1)$$

где $u = (u_1, \dots, u_n)$, $F = (F_1, \dots, F_n)$, D — диагональная матрица с положительными диагональными элементами d_i . Решением типа бегущей волны для этой системы является функция $u(x, t) = w(x - ct)$, удовлетворяющая уравнению второго порядка

$$Dw'' + cw' + F(w) = 0, \quad (1.2)$$

где скорость волны c — неизвестная постоянная, а x принадлежит \mathbb{R} . Будем искать решения, имеющие пределы на бесконечности, т. е., такие решения, для которых

$$w(\pm\infty) = w_{\pm}, \quad (1.3)$$

где $F(w_{\pm}) = 0$. Если $c = 0$, то имеем стационарное решение уравнения (1.1); такое решение называется *стоячей волной*. Если для стационарного решения, отличного от постоянной, справедливо соотношение $w_+ = w_-$, то такое решение называется *стационарным импульсом*.

Для исследования разрешимости задачи (1.2)-(1.3) будем использовать модификацию метода Лере—Шаудера. В своей классической формулировке (см. [39]) метод Лере—Шаудера использует топологическую степень эллиптических задач в ограниченных областях и априорные оценки решений. Для неограниченных областей эта степень строится по-другому; изменяются и априорные оценки решений. Мы используем степени фредгольмовых и собственных операторов нулевого

Работа выполнена при финансовой поддержке первого автора МОН РФ, соглашение № 02.а03.21.0008, и программой PICS CNRS 6583 *Matbio*.

индекса, рассматриваемых в некоторых специальных весовых пространствах. Априорные оценки решений в этих пространствах существенно отличаются от классических; в общей теории они не выполняются. Мы найдем классы эллиптических задач, обладающих решениями двух типов. Априорные оценки получены только для одного из этих типов. Чтобы применить к этим решениям метод Лере—Шаудера, мы покажем, что они отделены от решений другого типа. Таким образом, их построение требует нескольких шагов, изложенных ниже.

Фредгольмовость линейных эллиптических задач. Согласно классическим результатам для линейных эллиптических задач в ограниченных областях с достаточно гладкой границей, фредгольмовость имеет место тогда и только тогда, когда выполняются условие эллиптичности, условие правильной эллиптичности и условие Лопатинского (см. [2, 3, 7, 8]). В случае неограниченной области требуется наложить еще одно условие — условие обратимости предельных операторов (см. [5, 6, 46, 57, 61]). Оно гарантирует, что существенный спектр отделен от начала координат. В некоторых случаях можно вычислить индекс оператора (см. [22, 61]). Степень строится таким образом, что существенный спектр лежит в левой полуплоскости комплексной плоскости (см. [55]). В этом случае индекс оператора равен нулю.

Условия разрешимости в неограниченных областях можно получить и для некоторых линейных эллиптических операторов, не являющихся фредгольмовыми (см. [66, 67]). Однако они могут применены только для исследования некоторых специальных типов нелинейных операторов (см. [68]), и в данном случае теории степеней не существует.

В настоящей работе представлены некоторые приложения метода монотонных решений к нелокальным уравнениям реакции-диффузии и уравнениям реакции-диффузии с запаздыванием. Исследование этих уравнений основано на фредгольмовости соответствующих эллиптических задач (см. [9, 10]). В [43, 44, 47–49, 51] исследуются условия разрешимости различных эллиптических функционально-дифференциальных уравнений.

Правильность эллиптических задач в неограниченных областях. Напомним, что оператор называется *правильным* на замкнутых ограниченных множествах, если пересечение прообраза любого компактного множества с любым замкнутым ограниченным множеством компактно. Важным свойством правильных операторов является то, что множество решений операторного уравнения (т. е. прообраз множества, состоящего из точки 0) компактно. Компактность множества решений играет важную роль при построении степени.

В общем случае эллиптические задачи не обладают свойством компактности множества решений. Проиллюстрируем это на следующем примере. На всей вещественной оси рассмотрим уравнение $w'' + F(w) = 0$, где $F(w) = -w + w^2$. Легко проверить, что у него есть положительное решение $w(x)$, обращающееся в нуль на бесконечности. Поскольку оно инвариантно относительно сдвигов аргумента, сдвинутая функция $w(x + h)$ тоже является решением при любом вещественном h . Следовательно, множество решений не является компактным ни в одном из традиционных гильбертовых или соболевских пространств, а значит, соответствующий оператор не является правильным.

Если исключить инвариантность (на бесконечности) решений, то операторы становятся правильными (см. [45]). Однако инвариантность относительно сдвигов присуща многим эллиптическим задачам (включая те, что рассматриваются в настоящей работе), и исключить это свойство невозможно. В неограниченных областях эллиптические операторы становятся правильными, если выбрать подходящим образом весовые пространства (см. [55, 61]). Так, вернемся к предыдущему примеру и рассмотрим весовое гильбертово пространство $C_\mu^{2+\alpha}(\mathbb{R})$, где весовая функция $\mu(x) = 1 + x^2$ растет на бесконечности, а норма задается равенством $\|w(\cdot + h)\|_{C_\mu^{2+\alpha}(\mathbb{R})} = \|w(\cdot + h)\mu\|_{C^{2+\alpha}(\mathbb{R})}$. Тогда для любого замкнутого ограниченного множества D весового пространства существует лишь конечный интервал значений h , для которых решения $w(x + h)$ принадлежат этому множеству (поскольку норма стремится к бесконечности при возрастании $|h|$). Следовательно, множество решений компактно в D . Этот пример показывает, что операторы можно делать правильными, вводя весовые пространства. Как следствие, в весовых пространствах можно строить топологическую степень.

Построение топологической степени для эллиптических задач в неограниченных областях. К эллиптическим задачам в ограниченных областях применима степень Лере—Шаудера (см. [39]). Поскольку оператор, обратный к оператору Лапласа, компактен, в рассматриваемом случае эллиптический оператор можно представить в виде суммы тождественного и компактного операторов. Для эллиптических операторов в неограниченных областях такое представление невозможно, поскольку оператор, обратный к оператору Лапласа, уже не является компактным.

Для эллиптических задач в неограниченных областях можно построить степень, если оператор является фредгольмовым или правильным и его индекс равен нулю. Впервые степень для фредгольмовых или правильных операторов построена Каччиополи (см. библиографию в [42]), определившего степень по модулю 2. В [50] эта теория была существенно развита: лемма Сарда была обобщена на случай фредгольмовых операторов, а степень была определена как количество решений операторного уравнения $f(x) = y$ по модулю 2. Для почти всех y эти решения регулярны и их число конечно. В [25, 26] результаты Смейла использованы для определения ориентированной степени для фредгольмовых и правильных операторов нулевого индекса с гомотопическим инвариантом по модулю 2.

В [1, 16, 17, 31–35] построение степени для фредгольмовых и правильных операторов основано на понятии ориентации. В [23, 28, 38] предложен другой подход к определению ориентации. Полагая, что оператор $L + \lambda I$ является фредгольмовым для всех неотрицательных λ и имеет лишь конечное число ν положительных собственных значений (считая каждое с учетом его кратности), можно определить ориентацию как $(-1)^\nu$. Эта конструкция хорошо адаптируется к эллиптическим краевым задачам, поскольку она естественным образом связана со спектром линейаризованного оператора. Также как и для других способов построения степени, здесь требуется точно определить операторы и функциональные пространства (см. [55, 65]).

Таким образом, для эллиптических систем общего вида в неограниченных областях топологическая степень строится в весовых пространствах (см. [55, 61]). Для применения метода Лере—Шаудера требуются априорные оценки решений в этих пространствах.

Метод монотонных решений. Априорные оценки решений в весовых пространствах существенно отличаются от классического случая пространств, не содержащих весов. Для последнего (классического) случая априорные оценки обеспечиваются определенной регулярностью решений (для случая гильбертовых пространств) и скоростью их убывания на бесконечности (для случая соболевских пространств). В примере, рассмотренном выше, семейство решений $w(x+h)$ равномерно ограничено в таких пространствах, но в весовых пространствах эта равномерная ограниченность не имеет места. Значит, введение весовых пространств позволяет построить топологическую степень, однако для получения априорных оценок решений нужно накладывать некоторые дополнительные требования.

Проиллюстрируем ситуацию с оценками решений в весовых пространствах на следующем примере. Рассмотрим задачу (1.2)-(1.3) и соответствующую систему уравнений первого порядка

$$w' = p, \quad Dp' = -cp - F_\tau(w), \quad (1.4)$$

зависящую от параметра τ . Мы ищем траекторию γ , соединяющую стационарные точки $(w_-, 0)$ и $(w_+, 0)$. Если это — гиперболические точки, то существуют такие их (малые) окрестности V_\pm , что такая траектория экспоненциально приближается к этим точкам в этих окрестностях. Следовательно, решение $w(x)$ допускает априорные оценки в весовых пространствах с полиномиальным весом $\mu(x)$. Чтобы оценить решение на всей оси равномерно по τ , нужно оценить длину интервала L_τ , на котором траектория расположена вне окрестностей V_+ и V_- . Возможно существование такого τ_0 , что $L_\tau \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \tau_0$ — в этом случае априорной оценки нет. Вообще говоря, L_τ может быть неограниченным, поэтому существование траектории, соединяющей две стационарные точки, не гарантировано.

Существуют некоторые классы задач, для которых можно получить равномерные оценки L_τ . Такие оценки можно получить не для всех решений, а лишь для некоторых их типов. Это означает, что существует два типа решений (назовем их *первый* и *второй* типы): если решение принадлежит одному из этих типов, то после любой непрерывной деформации оно будет принадлежать этому типу. Априорные оценки решений первого типа (но не второго типа) позволяют применить метод Лере—Шаудера и доказать существование решений.

Эти два типа решений — монотонные и немонотонные (по переменной x) решения. Для некоторых классов задач эти типы отделены друг от друга в том смысле, что монотонные решения допускают априорные оценки. В более общей постановке решения первого типа не обязательно монотонны, но они обладают некоторыми свойствами монотонности (например, функция имеет только один максимум).

Такое явление, как сохранение монотонности решения при непрерывных деформациях, впервые обнаружено в [37]. Указанный метод систематически развивался в [4, 58]. Его дальнейшее развитие обусловлено некоторыми приложениями, возникшими в последнее время. В настоящей работе изложен сам метод и полученные с его помощью результаты о разрешимости.

2. ОПЕРАТОРЫ И ПРОСТРАНСТВА

Чтобы поставить задачу в терминах функционального анализа, введем гильбертово пространство $C^{k+\alpha}(\mathbb{R})$, состоящее из таких вектор-функций класса C^k , что они непрерывны и ограничены на оси \mathbb{R} вместе со своими производными порядка k , а их производные порядка k удовлетворяют условию Гельдера порядка α из $(0, 1)$. Норма в этом пространстве — обычная гильбертова норма. Введем обозначения $E^1 = C^{2+\alpha}(\mathbb{R})$ и $E^2 = C^\alpha(\mathbb{R})$. Далее, введем весовые пространства E_μ^1 и E_μ^2 , где $\mu(x) = \sqrt{1+x^2}$. Эти пространства снабжены нормами

$$\|w\|_{E_\mu^i} = \|w\mu\|_{E^i}, \quad i = 1, 2.$$

Следуя [4, 58], введем операторы, позволяющие изучать бегущие волны, т. е. решения задачи (1.2)–(1.3). Рассмотрим такую бесконечно дифференцируемую вектор-функцию $\eta(x)$, что

$$\eta(x) = \begin{cases} w_-, & x \leq -1, \\ w_+, & x \geq 1, \end{cases}$$

где $w_\pm = (v_\pm, c_\pm)$. Положим $w = u + \eta$ и рассмотрим оператор

$$A(u) = D(u + \eta)'' + c(u + \eta)' + F(u + \eta), \quad (2.1)$$

действующий из E_μ^1 в E_μ^2 .

Функционализация параметра. Решение $w(x)$ уравнения (1.2) инвариантно относительно сдвига в пространстве. Для любого решения $w(x)$ и любого вещественного h функция $w(x+h)$ тоже удовлетворяет этому уравнению. Это свойство решений автономных задач на всей оси влечет за собой существование нулевого собственного значения линеаризованного оператора A' . Следовательно, мы не можем найти индекс решения (под индексом здесь понимается значение степени относительно малого шара, содержащего решение). Более того, это семейство решений не является ограниченным по весовой норме. Следовательно, мы не можем применить метод Лере—Шаудера для исследования существования решений.

Чтобы преодолеть эти трудности, применим *функционализацию* параметра c (см. [58, Ch. 2]). Это означает, что вместо неизвестной постоянной c вводится некоторый заданный функционал $c(w)$, для которого $c(w(\cdot+h))$ — монотонная функция переменной h , множество значений которой — вся вещественная ось. Значит, для любой волновой скорости c уравнение $c(w(\cdot+h)) = c$ имеет единственное решение h . Таким образом, мы получаем эквивалентную задачу, которая уже не инвариантна относительно сдвигов в пространстве. Линеаризованный оператор A' не имеет нулевого собственного значения.

Гомотопия. Рассмотрим оператор

$$A_\tau(u) = D(u + \eta)'' + c(u + \eta)' + F_\tau(u + \eta), \quad (2.2)$$

действующий из E_μ^1 в E_μ^2 и зависящий от параметра τ из $[0, 1]$. Предположим, что при $\tau = 0$ у нас есть исходный оператор (2.1), а при $\tau = 1$ — некоторый модельный оператор, степень которого отлична от нуля. Функция $F_\tau(w)$ и ее вторые производные по переменным w and τ ограничены и непрерывны.

Согласно методу Лере—Шаудера, нужно получить независимые от τ априорные оценки решений уравнения $A_\tau(u) = 0$. будем использовать модификацию этого метода для некоторых подклассов решений.

Топологическая степень. Оператор, линеаризованный в окрестности любой функции из E_μ^1 , является фредгольмовым, и его индекс равен нулю. В замкнутых ограниченных областях нелинейный оператор является собственным. Значит, прообраз компактного множества компактен в любом замкнутом ограниченном множестве пространства E_μ^1 . Для этого оператора можно определить топологическую степень. Все эти свойства можно найти в [53, 55, 58, 61, 65].

3. МЕТОД ЛЕРЕ—ШАУДЕРА НА ПОДКЛАССАХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим операторное уравнение

$$A_\tau(u) = 0, \quad (3.1)$$

где оператор $A_\tau(u) : E_\mu^1 \rightarrow E_\mu^2$ определен в разделе 2. Построим гомотопию так, чтобы $A_0(u)$ соответствовал исходной задаче (1.2)-(1.3), а $A_1(u)$ соответствовал модельной задаче. Чтобы применить метод Лере—Шаудера, нужно проверить выполнение двух условий: что априорные оценки решений уравнения (3.1) справедливы в пространстве E_μ^1 и что значение топологической степени для модельного оператора отлично от нуля.

Предположим, что множество \mathcal{K} решений уравнения (3.1) в пространстве E_μ^1 можно представить в виде объединения двух подмножеств \mathcal{K}_1 и \mathcal{K}_2 , удовлетворяющих следующим двум условиям:

(i) для любого u из \mathcal{K}_1 и любого v из \mathcal{K}_2 справедлива оценка

$$\|u - v\|_{E_\mu^1} \geq r \quad (3.2)$$

с положительной постоянной r , независимой от u и v (такое свойство называется *свойством разделения решений*);

(ii) для любого u из \mathcal{K}_1 справедливо неравенство

$$\|u\|_{E_\mu^1} \leq R \quad (3.3)$$

с положительной постоянной R , независимой от u (это — априорная оценка решений из первого подмножества).

Таким образом, имеем априорные оценки для решений принадлежащих классу \mathcal{K}_1 , но не для всех возможных решений. Поэтому метод Лере—Шаудера нужно модифицировать следующим образом. Через B обозначим шар в пространстве E_μ^1 , содержащий все решения из класса \mathcal{K}_1 . Поскольку $A_\tau(u)$ — правильный оператор (см. [61]), т. е. прообраз компактного множества компактен в любом ограниченном замкнутом множестве, множество решений компактно в B . Для любого решения u из \mathcal{K}_1 рассмотрим шар $b_r(u)$ радиуса r с центром в u . Введем следующее обозначение:

$$\Omega_r = \bigcup_{u \in \mathcal{K}} b_r(u).$$

Выберем настолько малое r , что Ω_r содержит все решения из \mathcal{K}_1 , но не содержит других решений. Рассмотрим топологическую степень $\gamma(A_\tau, \Omega_r)$. Она определена корректно, поскольку $A_\tau(u) \neq 0$ для u из $\partial\Omega_r$. Предположим, что для модельной задачи эта степень отлична от нуля, т. е. $\gamma(A_1, \Omega_r) \neq 0$. Тогда $\gamma(A_0, \Omega_r) \neq 0$, а значит, уравнение $A_0(u) = 0$ имеет решение в Ω_r .

Этот подход применим, если условия (i) и (ii) выполняются. Мы предъядим классы задач, обладающих этими свойствами. А именно, проиллюстрируем этот подход на локально монотонных системах [55, 58, 62], а затем приведем другие примеры.

3.1. Разделение решений. Два подкласса решений, отделенные друг от друга в функциональном пространстве — это монотонные и немонотонные решения. Укажем некоторые классы уравнений, обладающих свойствами (i)-(ii).

Определение 3.1. Система (1.2) называется *локально монотонной*, если для любых i и w из равенства $F_i(w) = 0$ следует неравенство

$$\frac{\partial F_i}{\partial w_j} > 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq i. \quad (3.4)$$

Если это неравенство выполняется для всех w , то указанная система называется *монотонной*.

Предположим, что условие (i) не выполняется. Тогда существуют последовательности элементов u^i из \mathcal{K}_1 (монотонных решений) и v^i из \mathcal{K}_2 (немонотонных решений), для которых $\|u^i - v^i\|_{E_\mu^1} \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Покажем, что это предположение приводит к противоречию.

Если условие (ii) выполняется, то последовательность u^i ограничена. Из свойств оператора A_τ на замкнутых ограниченных множествах (см. [55, 61]) следует, что она содержит сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности можно считать, что $\|u^i - w\|_{E_\mu^1} \rightarrow 0$ для некоторой функции w из E_μ^1 . Следовательно, $w'(x)$ неположительна (покомпонентно) для любого вещественного x . Покажем, что она строго отрицательна (покомпонентно).

Лемма 3.1. Пусть $w(x)$ — решение локально монотонной системы (1.2). Если $w'(x) \leq 0$ (покомпонентно) для всех вещественных x , то $w'(x) < 0$ (покомпонентно).

Доказательство. Предположим, что существуют такое i из $\{1, \dots, n\}$ и такое вещественное x_0 , что $w'_i(x_0) = 0$. Тогда $w''_i(x_0) = 0$. Следовательно, $F_i(w(x_0)) = 0$ в силу i -го уравнения системы (1.2). Положим $u_i(x) = -w'_i(x)$ и продифференцируем i -е уравнение (1.2). Получим, что

$$d_i u_i'' + c u_i' + \frac{\partial F_i}{\partial w_i} u_i - \sum_{j \neq i} \frac{\partial F_i}{\partial w_j} w_j' = 0. \quad (3.5)$$

Поскольку $\frac{\partial F_i}{\partial w_j} > 0$ (см. (3.4)) и $w'_j(x) \leq 0$, имеем соотношение

$$S(x_0) \equiv - \sum_{j \neq i} \frac{\partial F_i}{\partial w_j} w_j'(x_0) \geq 0.$$

Предположим, что $w'_i(x) \neq 0$ в любом малом интервале $I(x_0)$ окрестности точки x_0 . Если этот интервал достаточно мал, то $S(x) \geq 0$ в $I(x_0)$ в силу (3.4) и неравенств $w_j(x)' \leq 0$. Следовательно, получаем противоречие с принципом максимума для уравнения (3.5) в $I(x_0)$, поскольку $u_i(x) \geq 0$ в $I(x_0)$, $u_i(x_0) = 0$ и $u_i(x) \neq 0$.

Если есть интервал I_0 , в котором $w'_i(x) \equiv 0$, то повторяем предыдущее построение в несколько увеличенном интервале I и получаем такое же противоречие. \square

Теперь рассмотрим последовательность немонотонных решений v^i . Для каждого из таких решений существует хотя бы одна точка x_i , в которой производная одной из компонент решения обращается в нуль. Предположим, что эта последовательность ограничена. Из сходимости $\|v^i - w\|_{E_\mu^1} \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ следует, что производная предельной функции $w'(x)$ тоже обращается в нуль (для одной из ее компонент). Получаем противоречие с леммой 3.1. Поэтому последовательность $\{x_i\}$ не является ограниченной. Без ограничения общности можно считать, что $x_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Это противоречит следующей лемме.

Лемма 3.2. Пусть $v(x)$ — такое решение системы (1.2), что $v(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, а матрица $F'(0)$ имеет положительные внедиагональные элементы и отрицательное главное собственное значение (т. е. собственное значение с максимальной вещественной частью). Если существует такое достаточно большое x_0 , что $v'(x_0) < 0$ (покомпонентно), то $v'(x) < 0$ (покомпонентно) для всех x , удовлетворяющих неравенству $x \geq x_0$.

Доказательство. Положим $u(x) = -v'(x)$ и продифференцируем уравнение (1.2). Получим, что

$$Du'' + cu' + B(x)u = 0, \quad (3.6)$$

где $B(x) = F'(v(x))$, $u(x_0) > 0$ и $u(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Поскольку матрица $F'(0)$ имеет положительные внедиагональные элементы и отрицательное главное собственное значение, справедливо неравенство $F'(0)p < 0$, где p — главный собственный вектор. Поэтому можно выбрать настолько большое x_0 , что $B(x)p < 0$ для всех x , удовлетворяющих неравенству $x \geq x_0$.

Нам нужно доказать, что $u(x) > 0$ при $x \geq x_0$. Предположим, что это не так. Если $u(x) \geq 0$ для всех x , удовлетворяющих неравенству $x \geq x_0$, и существуют такие j и x_1 , что $u_j(x_1) = 0$, то это противоречит принципу максимума. Поэтому рассматриваем случай, когда из одна компонент функции $u(x)$ отрицательна. Тогда существует такое положительное t , что функция

$\hat{u}(x) = u(x) + tp$ удовлетворяет следующим условиям: $\hat{u} \geq 0$ для всех x , удовлетворяющих неравенству $x \geq x_0$, $\hat{u}(x_0) > 0$, и существуют такие j и x_2 , что $x_2 > x_0$ и $\hat{u}_j(x_2) = 0$. Такая функция удовлетворяет уравнению

$$D\hat{u}'' + c\hat{u}' + B(x)\hat{u} + f(x) = 0, \quad (3.7)$$

где $f(x) = -tB(x)p > 0$. Следовательно, и в этом случае мы приходим к противоречию с принципом максимума. Это противоречие завершает доказательство леммы. \square

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. Пусть система

$$Dw'' + c_\tau w' + F_\tau(w) = 0 \quad (3.8)$$

локально монотонна и существуют такие w_\pm , что $w_+ < w_-$ (покомпонентно), $F_\tau(w_\pm) = 0$ и все собственные значения матрицы $F'_\tau(w_\pm)$ лежат в левой полуплоскости. Предположим, что любое монотонно убывающее решение w_m системы (3.8), удовлетворяющее условию

$$w(\pm\infty) = w_\pm, \quad (3.9)$$

удовлетворяет и оценке

$$\|w_m - \eta\|_{E_\mu^1} \leq R, \quad (3.10)$$

где R — положительная постоянная, не зависящая ни от решения, ни от значения τ из $[0, 1]$. Тогда существует такая положительная постоянная r , что

$$\|w_m - w_n\|_{E_\mu^1} \geq r, \quad (3.11)$$

где w_n — любое немонотонное решение задачи (3.8)-(3.9) для любого значения τ , а r не зависит ни от решений, ни от τ .

Замечание 3.1. Из условия локальной монотонности следует, что матрицы $F'(w_\pm)$ имеют положительные внедиагональные элементы. Следовательно, по теореме Перрона—Фробениуса их главные собственные значения вещественны и просты, а соответствующие собственные вектора положительны. Эти свойства использованы в лемме 3.2.

Отметим, что монотонные системы удовлетворяют принципу максимума, а локально монотонные не удовлетворяют, однако свойство разделения решений имеет место и для них. В определении локальной монотонности неравенство (3.4) может быть нестрогим.

3.2. Оценки решений. В этом разделе мы получим априорные оценки монотонных решений в весовых гильбертовых пространствах. Поскольку главные собственные значения матриц $F'_\tau(w_\pm)$ отрицательны, решения экспоненциально стремятся к их предельным значениям на бесконечности. Иными словами, справедливы оценки

$$|w_m(x) - \eta(x)| \leq K_1 e^{-\mu_0 x}, \quad x \geq N_+, \quad |w_m(x) - \eta(x)| \leq K_1 e^{\mu_0 x}, \quad x \leq N_-, \quad (3.12)$$

где положительные постоянные K_1 и μ_0 не зависят ни от монотонного решения w_m , ни от значения τ , а значения N_+ и N_- могут зависеть от решения — они выбираются таким образом, чтобы оценки

$$|w_m(x) - \eta(x)| \leq \varepsilon, \quad x \geq N_+, \quad \text{и} \quad |w_m(x) - \eta(x)| \leq \varepsilon, \quad x \leq N_-,$$

выполнялись для некоторого малого положительного ε . Это означает, что оценки (3.12) справедливы в некоторых окрестностях точек w_\pm в пространстве \mathbb{R}^n (w -пространстве). Это свойство следует из классических результатов о поведении решений соответствующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вблизи стационарных точек.

Поскольку весовая функция $\mu(x)$ полиномиально растет на бесконечности, мы получаем оценку

$$|(w_m(x) - \eta(x))\mu(x)| \leq K_2 \quad (3.13)$$

при $x \geq N_+$ и $x \leq N_-$. Если N_+ и N_- равномерно ограничены для всех решений, то последняя оценка очевидным образом выполняется для всех вещественных x .

Рассмотрим случай, в котором эти значения не являются равномерно ограниченными. Предположим, что существует такая последовательность решений w^i , что $N_+^i \rightarrow \infty$, а последовательностей значений N_-^i ограничена. Рассмотрим сдвинутые функции $v^i(x) = w^i(x - N_+^i)$. Имеет место

равенство $|v^i(0) - \nu(0)| = \varepsilon$. Из последовательности функций $v^i(x)$ можно выделить локально сходящуюся подпоследовательность. Ее предельная функция $v^0(x)$ есть решение системы (3.8) для некоторого τ , она монотонно убывает и $|v^0(0) - \nu(0)| = \varepsilon$. Значит, $v^0(x) \rightarrow w_+$ при $x \rightarrow \infty$ и существует предел $v^* = v^0(-\infty)$. Понятно, что $F(v^*) = 0$. Поскольку $N_+^i - N_-^i \rightarrow \infty$, справедливо неравенство $|v^* - w_-| \geq \varepsilon$. Таким образом, построено решение со следующими пределами:

$$v^0(-\infty) = v^*, \quad v^0(\infty) = w_+, \quad v^* \neq w_{\pm}. \tag{3.14}$$

Аналогично, для сдвинутых решений $u^i(x) = w^i(x - N_-^i)$ получено предельное решение $u^0(x)$ со следующими пределами:

$$u^0(-\infty) = w_-, \quad u^0(\infty) = v_*, \quad v_* \neq w_{\pm}. \tag{3.15}$$

Теперь можно доказать следующую теорему.

Теорема 3.2. Пусть система (3.8) локально монотонна и существуют такие w_{\pm} , что $w_+ < w_-$, $F_{\tau}(w_{\pm}) = 0$ и все собственные значения матриц $F'_{\tau}(w_{\pm})$ лежат в левой полуплоскости. Предположим, что для любого другого нуля w^0 функции $F(w)$, удовлетворяющего неравенству $w_+ \leq w^0 \leq w_-$, главное собственное значение матрицы $F'(w^0)$ положительно. Тогда для любого монотонно убывающего решения $w_m(x)$ задачи (3.8)-(3.9) выполняется оценка

$$\sup_x |(w_m(x) - \eta(x))\mu(x)| \leq K, \tag{3.16}$$

где постоянная K не зависит от решения.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы не выполнено. Тогда, как показано выше, значения N_{\pm} в (3.12) не являются равномерно ограниченными. Предположим, что существует последовательность решений w^i , для которой $N_+^i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, а последовательность значений N_-^i ограничена. Тогда существуют решения $v^0(x)$ с пределами (3.14) и решения $u^0(x)$ с пределами (3.15). Из существования первых решений следует, что $c < 0$, а из существования вторых — что $c > 0$ (см. [4] и [58, Ch. 3, лемма 2.8, с. 165]). Это противоречие доказывает, что наше предположение относительно N_{\pm} не может выполняться.

Аналогичным образом можно рассмотреть случай, в котором N_-^i стремится к $-\infty$, а последовательность значений N_+^i остается ограниченной, либо случай, в котором обе последовательности неограничены. Поскольку решения инварианты относительно пространственных сдвигов, все эти случаи можно свести к случаю, в котором последовательность значений N_-^i ограничена. Сдвиг остается ограниченным в силу априорных оценок скорости волны (см. [4, 58]). \square

Следствие 3.1. Пусть $u = w_m - \eta$, где w_m — монотонное решение задачи (3.8)-(3.9). Тогда $\|u\|_{E_{\mu}^1} \leq K$, где положительная постоянная K не зависит от решения.

Таким образом, мы получаем априорные оценки монотонных решений.

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ ИМПУЛЬСОВ И ВОЛН

Этот раздел содержит обзор результатов о существовании решений, полученных изложенным выше методом. Начнем со скалярного уравнения, для которого существование решений может быть исследовано элементарными методами и которое позволяет объяснить взаимосвязь между существованием волн и импульсов. Некоторые из этих результатов можно методом монотонных решений обобщить на системы уравнений.

4.1. Импульсы и волны для скалярного уравнения. Рассмотрим задачу

$$w'' + cw' + F(w) = 0, \quad w(\pm\infty) = w_{\pm}, \tag{4.1}$$

где $w(x)$ — скалярная функция, c — постоянная (скорость волны), функция $F(w)$ ограничена и непрерывна вместе со своими вторыми производными, $F(w_{\pm}) = 0$, $F'(w_{\pm}) < 0$. Решения этой задачи называются *бегущими волнами*.

Теорема 4.1. Предположим, что $F(w) < 0$ при $w_+ < w < w_0$ и $F(w) > 0$ при $w_0 < w < w_-$. Тогда существует единственное значение c , для которого задача (4.1) имеет решение $w(x)$.

Это решение монотонно убывает и $c \geq 0$ тогда и только тогда, когда $\int_{w_+}^{w_-} F(w)dw \geq 0$.

Доказательство существования решений следует из простейшего анализа системы уравнений первого порядка

$$w' = p, \quad p' = -cp - F(w),$$

эквивалентной уравнению (4.1), на фазовой плоскости (см, например, [58]). Знак скорости волны можно определить, умножив уравнение (4.1) и проинтегрировав его по всей оси.

Теперь рассмотрим задачу

$$w'' + F(w) = 0, \quad w(\pm\infty) = w_+, \quad (4.2)$$

подобную задаче (4.1), в которой $c = 0$, а пределы на $+\infty$ и $-\infty$ равны друг другу. Нетривиальные решения этой задачи называются *импульсами*.

Теорема 4.2. *Предположим, что $F(w) < 0$ при $w_+ < w < w_0$ и $F(w) > 0$ при $w_0 < w < w_-$. Тогда задача (4.2) имеет импульс $w(x)$, превосходящий w_+ , тогда и только тогда, когда $\int_{w_+}^{w_-} F(w)dw > 0$.*

Для доказательства этой теоремы можно в явном виде построить решение соответствующей системы первого порядка.

Следствие 4.1. *Импульс, удовлетворяющий задаче (4.2) и превосходящий w_+ , существует тогда и только тогда, когда скорость волны, удовлетворяющей задаче (4.1), положительна.*

4.2. Монотонные и локально монотонные системы. Результаты о разрешимости, сформулированные выше для скалярных уравнений, можно обобщить (с некоторыми ограничениями) на локально монотонные системы.

Теорема 4.3. *Пусть система (1.2) локально монотонна и существуют такие w_{\pm} , что $w_+ < w_-$, $F(w_{\pm}) = 0$ и все собственные значения матриц $F'(w_{\pm})$ лежат в левой полуплоскости. Предположим, что для любого другого нуля w^0 функции $F(w)$, удовлетворяющего неравенству $w_+ \leq w^0 \leq w_-$, главное собственное значение матрицы $F'(w^0)$ положительно. Тогда существуют значения c , для которых система (1.2)-(1.3) имеет монотонно убывающие решения. Если система монотонна, то такое значение c единственно.*

Доказательство этой теоремы основано на вышеизложенном методе монотонных решений. Модельную систему и гомотопию можно найти в [4, 58]. Теорема 4.2 о существовании импульсов обобщается на монотонные системы двух уравнений следующим образом (см. [40, 41]).

Теорема 4.4. *Пусть система*

$$Dw'' + F(w) = 0 \quad (4.3)$$

монотонна, где $w = (w_1, w_2)$, $F = (F_1, F_2)$. Пусть $F(w_{\pm}) = 0$. Пусть главные собственные значения матриц $F'(w_{\pm})$ отрицательны. Пусть w^0 — единственный нуль функции F , для которого $w_+ \leq w^0 \leq w_-$ и главное собственное значение матрицы $F'(w^0)$ положительно. Пусть $F_1(w) = 0$ ($F_2(w) = 0$) тогда и только тогда, когда $w_1 = f_1(w_2)$ ($w_2 = f_2(w_1)$), где $f'_i(s) > 0$, $i = 1, 2$. Тогда решение $w(x)$ системы (4.3), для которого $w(\pm\infty) = w_+$ и $w(x) > w_+$ при любом вещественном x , существует тогда и только тогда, когда скорость волны (см. теорему 4.3) положительна.

Таким образом, существование импульсов доказано только для систем из двух уравнений при некоторых дополнительных условиях. Трудность доказательства подобных результатов для общих монотонных систем и для локально монотонных систем заключается в выборе модельной задачи и в построении гомотопии с априорными оценками решений. Кроме того, существование импульсов доказано для неавтономного скалярного уравнения (см. [27]) и для системы уравнений, описывающей свертывание крови (см. [36]).

Система конкуренции видов. Система конкуренции видов состоит из двух следующих уравнений:

$$F_1(w_1, w_2) = w_1(1 - w_1 - aw_2), \quad F_2(w_1, w_2) = w_2(1 - bw_1 - w_2).$$

На ее примере хорошо иллюстрируется существование волн и импульсов. Функция $F(w)$ имеет до четырех неотрицательных нулей — $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (0, 1)$, $P_3 = (w_1^0, w_2^0)$; здесь значения

w_1^0, w_2^0 определяются как решение системы уравнений $w_1 + aw_2 = 1, bw_1 + w_2 = 1$. Точка P_0 неустойчива, точки P_1 и P_2 устойчивы при $a > 1, b > 1$. В этом случае точка P_3 неустойчива. Положим $w_+ = P_1, w_- = P_2$.

Внедиагональные элементы матрицы $F'(w)$ отрицательны. Заменой переменных $u_1 = w_1, u_2 = 1 - w_2$ систему можно свести к монотонной системе. Существование волн и импульсов следует из теорем 4.3-4.4 с некоторыми техническими дополнениями, которые можно найти в [4, 58].

Если рассмотреть нелинейности более общего вида

$$F_1(w_1, w_2) = w_1\phi_1(w_1, w_2)(1 - w_1 - aw_2), \quad F_2(w_1, w_2) = w_2\phi_2(w_1, w_2)(1 - bw_1 - w_2),$$

где функции $\phi_i(w_1, w_2), i = 1, 2$, положительны и достаточно гладки, то после замены переменных система остается локально монотонной, но уже не является монотонной. Существование волн по-прежнему вытекает из теоремы 4.3, однако теорема 4.4 неприменима, поэтому существование импульсов не доказано.

Аналогичная система из трех и более уравнений может быть сведена к монотонной системе при некоторых дополнительных условиях. Например, рассмотрим систему из трех уравнений с нелинейностями

$$F_1(w) = w_1(1 - w_1 - a_2w_2 + a_3w_3), \quad F_2(w) = w_2(1 - b_1w_1 - w_2 - b_3w_3), \quad (4.4)$$

$$F_3(w) = w_3(1 + c_1w_1 - c_2w_2 - w_3),$$

где $w = (w_1, w_2, w_3)$, а a_i, b_i, c_i — некоторые положительные постоянные. После замены переменных $u_1 = w_1, u_2 = 1 - w_2, u_3 = w_3$ получаем систему

$$Du'' + cu' + G(u) = 0, \quad (4.5)$$

где

$$G_1(u) = u_1(1 - u_1 - a_2(1 - u_2) + a_3u_3), \quad G_2(u) = (1 - u_2)(b_1u_1 - u_2 + b_3u_3),$$

$$G_3(u) = u_3(1 + c_1u_1 - c_2(1 - u_2) - u_3).$$

Эта система удовлетворяет условиям монотонности при $u_1, u_3 > 0, u_2 < 1$. Рассмотрим точки $w_+ = (0, 0, 0)$ и $w_- = (w_1^0, w_2^0, w_3^0)$, где w_1^0, w_2^0, w_3^0 — решение линейной алгебраической системы уравнений $Au = q$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & -1 & b_3 \\ c_1 & c_2 & -1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 - a_2 \\ 0 \\ 1 - c_2 \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что точка w_+ устойчива при $a_2 > 1, c_2 > 1$. Если главное собственное значение матрицы A отрицательно, то w_- положительно и эта точка тоже устойчива. В этом случае существование волн следует из теоремы 4.3, однако мы не можем утверждать, что существуют импульсы, поскольку теорема 4.4 применима только к системам из двух уравнений. Из вида нелинейности (4.4) вытекает, что первый и третий вид сотрудничают, а каждый из них конкурирует со вторым видом.

4.3. Многомерные уравнения и системы. Если распространение волн в неограниченных цилиндрах, то вместо уравнения (1.2) имеем уравнение

$$D\Delta w + c\frac{\partial w}{\partial x_1} + F(w, x') = 0, \quad (4.6)$$

где переменная x_1 изменяется на оси цилиндра, а переменная x' — в его поперечном сечении. Это уравнение дополняется краевым условием Дирихле или Неймана на границе цилиндра. Будем считать, что задача в поперечном сечении цилиндра, т. е.

$$D\Delta' w + F(w, x') = 0, \quad (4.7)$$

имеет два решения $w_{\pm}(x')$ и они таковы, что все собственные значения соответствующего линейризованного оператора лежат в левой полуплоскости. Это — бистабильный случай, и мы ищем решение уравнения (4.6) со следующими пределами:

$$\lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} w(x) = w_{\pm}(x'). \quad (4.8)$$

В многомерном случае разделение решений возможно для монотонных систем, но невозможно для локально монотонных систем. Поэтому существование волн доказано для скалярных уравнений и для монотонных систем (см. [54]). Задачи с нелинейными краевыми условиями, возникающие в некоторых биомедицинских приложениях, исследуются в [11, 14, 15].

4.4. Нелокальные уравнения и уравнения с запаздыванием. В этом разделе для нелокальных уравнений реакции-диффузии и уравнений реакции-диффузии с запаздыванием представлены результаты о разрешимости, полученные методом монотонных решений. Применяется тот же подход, что и к локально монотонным системам (как описано выше), однако некоторые технические подробности могут отличаться.

Нелокальные уравнения. Чтобы ввести нелокальные уравнения, рассмотрим скалярное уравнение (1.1) с нелинейностью вида

$$F(u) = u^2(1 - au) - \sigma u. \quad (4.9)$$

В популяционной динамике первое слагаемое в правой части соответствует половому размножению популяции, а второе — ее смертности. У функции $F(u)$ может быть от одного до трех неотрицательных нулей. В последнем случае применимы результаты раздела 4.1. Слагаемое, соответствующее размножению, пропорционально доступным ресурсам $(1 - au)$, где линейное слагаемое описывает потребление ресурсов. В случае нелокального или глобального потребления ресурсов нелинейность вместо вида (4.9) принимает вид

$$F(u, I(u)) = u^2(1 - aI(u)) - \sigma u, \quad (4.10)$$

где

$$I(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - u)u(y, t)dy,$$

а $\phi(x)$ является финитной функцией в случае нелокального потребления и тождественной единицей в случае глобального потребления (см. [20]). В качестве примера рассмотрим функцию $\phi(x) = \psi(x)/(2N)$, где

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq N, \\ 0, & |x| > N. \end{cases}$$

В пределе (при малых N) нелокальное потребление (4.10) формально сводится к локальному потреблению (4.9). Для малых N существование волн и импульсов можно доказать методами возмущений (см. [69]). Если $\phi(x) \equiv \psi(x)$, то в пределе (при больших N , т. е. при $\phi(x) \equiv 1$), волны не существуют, а существование импульсов легко проверить аналитически. Это позволяет нам доказать их разрешимость для достаточно больших N . Переход от волн при малых N к импульсам при больших N происходит через периодические волны и нелокальные бифуркации (см. [63]).

Система с глобальным потреблением. В стационарном случае система с глобальным потреблением, состоящая из двух уравнений, записывается следующим образом:

$$d_1 u'' + uv(1 - aI(u) - bI(v)) = 0, \quad d_2 v'' + uv(1 - cI(u) - dI(v)) = 0. \quad (4.11)$$

Существование импульсов, т. е. положительных решений этой системы, обладающих нулевыми пределами на бесконечности, доказывается методом монотонных решений (см. [64]). Если коэффициенты двух уравнений равны друг другу, то систему (4.11) можно свести к одному уравнению (ср. (4.10)), для которого существование импульсов очевидно. Если же коэффициенты различны, то доказательство становится гораздо более сложным и для него требуются некоторые изощренные априорные оценки.

Скалярное уравнение с нелокальным потреблением. Теперь рассмотрим другое обобщение уравнения (4.9) — уравнение

$$F(u, I(u)) = uI(u)(1 - au) - \sigma u, \quad (4.12)$$

где ядро интеграла $I(u)$ — неотрицательная финитная функция. В этом случае можно применить метод монотонных решений, и существование волн доказывается в [13, 24].

Уравнение с запаздыванием. Уравнение реакции-диффузии с запаздыванием

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u, u_\tau), \quad (4.13)$$

где $u_\tau(x, t) = u(x, t - \tau)$ и

$$F(u, u_\tau) = u(1 - u) - f(u_\tau)u,$$

описывает распространение вирусной инфекции в ткани (см. [21]). Первое нелинейное слагаемое описывает ее размножение, а второе — ее смертность в результате иммунной реакции. Плотность иммунных клеток $f(u_\tau)$ определяется концентрацией вируса в момент $t - \tau$.

Решение в виде бегущей волны $u(x, t) = w(x - ct)$ удовлетворяет уравнению второго порядка с запаздыванием

$$Dw'' + cw' + w(1 - w - f(w(x + c\tau))) = 0. \quad (4.14)$$

Поскольку это — уравнение с запаздыванием, нелинейность содержит и неизвестную постоянную c , являющуюся скоростью волны. Если $f(u)$ — монотонно убывающая функция, к этому уравнению применим принцип максимума и его можно использовать для доказательства существования волны. Однако, если эта функция не является убывающей, а именно это имеет место в модели иммунной реакции, то этот подход использовать нельзя, и в этом случае существование волн доказывается методом монотонных решений (см. [52]).

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Бистабильность и существенный спектр. Топологическая степень строится таким образом, что существенный спектр лежит в левой полуплоскости комплексной плоскости. Поэтому нам нужно исходить из предположения, что вещественные части всех собственных значений матриц $F'(w_\pm)$ отрицательны. Это — так называемый *бистабильный случай* или случай с двумя устойчивыми состояниями. В *моностабильном случае* (случай с одним устойчивым состоянием) у одной из этих матриц есть собственные значения с положительной вещественной частью. Тогда часть существенного спектра лежит в правой полуплоскости, и значит, указанный выше способ построения степени неприменим. Чтобы определить степень в моностабильном случае, можно ввести экспоненциальный вес, перемещающий существенный спектр в левую полуплоскость. Для исследования существования волн этот подход не применялся.

Отметим также, что в бистабильном случае либо существует единственная волна, либо волны образуют дискретное множество решений. В моностабильном же случае есть непрерывные семейства решений. Это связано с индексом соответствующих операторов.

Другие подходы к доказательству существования волн. Изложенный метод использует топологическую степень для эллиптических операторов в неограниченных областях, поэтому необходимо строить эту степень и получать априорные оценки решений в подходящих весовых пространствах. Другой подход к доказательству существования бегущих волн для скалярного уравнения реакции-диффузии развивается в [18, 19]: чтобы доказать существование решений в неограниченном цилиндре, оно вначале доказывается (с использованием степени Лере—Шаудера) для ограниченной части цилиндра, а затем равномерные оценки решений позволяют перейти к пределу при стремлении этой ограниченной части к бесконечности.

Системы волн. Вышеизложенные результаты о существовании волн получены при предположении, что все нули вектор-функции $F(w)$, лежащие в прямоугольнике $w_+ \leq w \leq w_-$, кроме нулей w_+ и w_- , неустойчивы. Теперь предположим, что существует устойчивый нуль w^0 , $w_+ < w^0 < w_-$. Тогда согласно теореме 4.3 существуют $[w_+, w^0]$ -волна и $[w^0, w_-]$ -волна, т. е. волна с пределами $w(\infty) = w_+$, $w(-\infty) = w^0$ и волна с пределами $w(\infty) = w^0$, $w(-\infty) = w_-$ (соответственно). Обозначим их скорости через c_+ и c_- . Тогда $[w_+, w_-]$ -волна существует тогда и только тогда, когда $c_- > c_+$. Этот результат получен для скалярного уравнения (см. [29, 30, 59, 60]) и для монотонных систем (см. [62]). Если $c_- \leq c_+$, то такой общей волны не существует, а есть две волны, распространяющиеся одна за другой с разными скоростями.

Ограничения и дальнейшее развитие. Метод монотонных решений основан на двух свойствах: разделение монотонных и немонотонных решений и априорные оценки монотонных решений. Эти свойства можно доказать для некоторых классов задач, но в общем случае они не имеют места. То же самое справедливо и для других методов доказательства существования волн и импульсов — они разработаны лишь для некоторых конкретных моделей. В частности, метод монотонных решений применим к монотонным и локально монотонным системам, имеющим многочисленные приложения. Некоторые из них представлены в настоящей работе, некоторые другие могут быть найдены в [58,62]. Недавно полученные результаты о приложениях к уравнениям с запаздыванием, для которых принцип максимума не имеет места, были изложены в [52].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисович Ю. Г., Звягин В. Г., Сапронов Ю. И. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере—Шаудера// Усп. мат. наук. — 1977. — 32, № 4. — С. 3–54.
2. Вишик М. И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений// Мат. сб. — 1951. — 29. — С. 615–676.
3. Волевич Л. Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем// Мат. сб. — 1965. — 68. — С. 373–416.
4. Вольперт А. И., Вольперт В. А. Применение теории вращения векторных полей к исследованию волновых решений параболических уравнений// Тр. Моск. Мат. об-ва. — 1989. — 52. — С. 58–109.
5. Рабинович В. С. Псевдодифференциальные операторы в неограниченных областях, с конической структурой на бесконечности// Мат. сб. — 1969. — 80. — С. 77–96.
6. Рабинович В. С. Фредгольмовость общих краевых задач на некомпактных многообразиях и предельные операторы// Докл. РАН. — 1992. — 325, № 2. — С. 237–241.
7. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions// Comm. Pure Appl. Math. — 1959. — 12. — С. 623–727.
8. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II// Commun. Pure Appl. Math. — 1964. — 17. — С. 35–92.
9. Apreutesei N., Ducrot A., Volpert V. Competition of species with intra-specific competition// Math. Model. Nat. Phenom. — 2008. — 3, № 4. — С. 1–27.
10. Apreutesei N., Ducrot A., Volpert V. Travelling waves for integro-differential equations in population dynamics// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. — 2009. — 11, № 3. — С. 541–561.
11. Apreutesei N., Tosenberger A., Volpert V. Existence of reaction–diffusion waves with nonlinear boundary conditions// Math. Model. Nat. Phenom. — 2013. — 8, № 4. — С. 2–17.
12. Apreutesei N., Volpert V. Properness and topological degree for nonlocal reaction–diffusion operators// Abstr. Appl. Anal. — 2011. — ID 629692.
13. Apreutesei N., Volpert V. Existence of travelling waves for a class of integro-differential equations from population dynamics// Int. Electron. J. Pure Appl. Math. — 2012. — 5, № 2. — С. 53–67.
14. Apreutesei N., Volpert V. Reaction–diffusion waves with nonlinear boundary conditions// Nonlinear Heterog. Medium. — 2013. — 8, № 2. — С. 23–35.
15. Apreutesei N., Volpert V. Travelling waves for reaction–diffusion problems with nonlinear boundary conditions. Application to a model of atherosclerosis// Pure Appl. Funct. Anal. — 2017 (в печати).
16. Benevieri P., Furi M. A simple notion of orientability for Fredholm maps of index zero between Banach manifolds and degree theory// Ann. Sci. Math. Québec — 1998. — 22. — С. 131–148.
17. Benevieri P., Furi M. On the concept of orientability for Fredholm maps between real Banach manifolds// Topol. Methods Nonlinear Anal. — 2000. — 16, № 2. — С. 279–306.
18. Berestycki H., Larrouturou B., Lions P. L. Multidimensional traveling wave solutions of a flame propagation model// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1990. — 111. — С. 97–117.
19. Berestycki H., Nirenberg L. Travelling fronts in cylinders// Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire — 1992. — 9, № 5. — С. 497–572.
20. Bessonov N., Reinberg N., Volpert V. Mathematics of Darwin’s diagram// Math. Model. Nat. Phenom. — 2014. — 9, № 3. — С. 5–25.
21. Bocharov G., Meyerhans A., Bessonov N., Trofimchuk S., Volpert V. Spatiotemporal dynamics of virus infection spreading in tissues// Plos ONE. — 2016. — DOI:10.1371/journal.pone.0168576.
22. Collet J. F., Volpert V. Computation of the index of linear elliptic operators in unbounded cylinders// J. Funct. Anal. — 1999. — 164. — С. 34–59.

23. *Dancer E. N.* Boundary value problems for ordinary differential equations on infinite intervals// Proc. Lond. Math. Soc. — 1975. — 30, № 3. — С. 76–94.
24. *Demin I., Volpert V.* Existence of waves for a nonlocal reaction–diffusion equation// Math. Model. Nat. Phenom. — 2010. — 5, № 5. — С. 80–101.
25. *Elworthy K. D., Tromba A. J.* Degree theory on Banach manifolds// В сб. «Nonlinear Functional Analysis». — Providence: Amer. Math. Soc., 1970. — С. 86–94.
26. *Elworthy K. D., Tromba A. J.* Differential structures and Fredholm maps on Banach manifolds// В сб. «Global Analysis». — Providence: Amer. Math. Soc., 1970. — С. 45–94.
27. *Eymard N., Volpert V., Vougalter V.* Existence of pulses for local and nonlocal reaction–diffusion equations// J. Dynam. Differ. Equ. — 2017. — 29, № 3. — С. 1145–1158.
28. *Fenske C.* Analytische Theorie des Abbildungsgrades für Abbildungen in Banachräumen// Math. Nachr. — 1971. — 48. — С. 279–290.
29. *Fife P. C., McLeod J. B.* The approach to solutions of nonlinear diffusion equations to traveling front solutions// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1977. — 65. — С. 335–361.
30. *Fife P. C., McLeod J. B.* A phase plane discussion of convergence to travelling fronts for nonlinear diffusion// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1981. — 75. — С. 281–314.
31. *Fitzpatrick P. M.* The parity as an invariant for detecting bifurcation of the zeroes of one parameter families of nonlinear Fredholm maps// Lecture Notes in Math. — 1993. — 1537. — С. 1–31.
32. *Fitzpatrick P. M., Pejsachowicz J.* Parity and generalized multiplicity// Trans. Am. Math. Soc. — 1991. — 326. — С. 281–305.
33. *Fitzpatrick P. M., Pejsachowicz J.* Orientation and the Leray–Schauder degree for fully nonlinear elliptic boundary value problems// Mem. Am. Math. Soc. — 1993. — 101, № 483. — С. 1–131.
34. *Fitzpatrick P. M., Pejsachowicz J., Rabier P. J.* The degree of proper C^2 Fredholm mappings// J. Reine Angew. Math. — 1992. — 427. — С. 1–33.
35. *Fitzpatrick P. M., Pejsachowicz J., Rabier P. J.* Orientability of Fredholm families and topological degree for orientable nonlinear Fredholm mappings// J. Funct. Anal. — 1994. — 124. — С. 1–39.
36. *Galochkina T., Marion M., Volpert V.* Initiation of reaction–diffusion waves of blood coagulation// в печати.
37. *Gardner R. A.* Existence and stability of traveling wave solution of competition models: a degree theoretic approach// J. Differ. Equ. — 1982. — 44. — С. 343–364.
38. *Isnard C. A.* Orientation and degree in infinite dimensions// Notices Am. Math. Soc. — 1972. — 19. — А-514.
39. *Leray J., Schauder J.* Topologie et équations fonctionnelles// Ann. Sci. Éc. Norm. Supér (3). — 1934. — 51. — С. 45–78.
40. *Marion M., Volpert V.* Existence of pulses for a monotone reaction–diffusion system// Pure Appl. Funct. Anal. — 2016. — 1, № 1. — С. 97–122.
41. *Marion M., Volpert V.* Existence of pulses for the system of competition of species// J. Dyn. Differ. Equ. — 2017. — в печати.
42. *Miranda C.* Equazioni alle Derivate Parziale di Tipo Elliptico. — Berlin: Springer-Verlag, 1955.
43. *Muravnik A.* On the half-plane Dirichlet problem for differential-difference elliptic equations with several nonlocal terms// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — 12, № 6. — в печати.
44. *Onanov G. G., Skubachevskii A. L.* Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — 12, № 6. — в печати.
45. *Rabier P. J., Stuart C. A.* Fredholm and properness properties of quasilinear elliptic operators on R^N // Math. Nachr. — 2001. — 231. — С. 29–168.
46. *Rabinovich V., Roch S., Silbermann B.* Limit operators and their applications in operator theory// Oper. Theory Adv. Appl. — 2004. — 150. — С. 1–392.
47. *Rossovskii L.* Elliptic functional differential equations with incommensurable contractions// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — 12, № 6. — в печати.
48. *Skubachevskii A. L.* Nonlocal elliptic problems and multidimensional diffusion processes// Russ. J. Math. Phys. — 1995. — 3, № 3. — С. 327–360.
49. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel: Birkhäuser, 1997.
50. *Smale S.* An infinite dimensional version of Sard’s theorem// Am. J. Math. — 1965. — 87. — С. 861–866.
51. *Tasevich A.* Analysis of functional-differential equation with orthotropic contractions// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — 12, № 6. — в печати.
52. *Trofimchuk S., Volpert V.* Travelling waves for a bistable reaction–diffusion equation with delay// Arxiv. — 2017. — 1701.08560v1.

53. *Volpert A., Volpert V.* The construction of the Leray–Schauder degree for elliptic operators in unbounded domains// *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* — 1994. — 11, № 3. — С. 245–273.
54. *Volpert A., Volpert V.* Existence of multidimensional travelling waves and systems of waves// *Commun. Part. Differ. Equ.* — 2001. — 26, № 3-4. — С. 76–85.
55. *Volpert A., Volpert V.* Properness and topological degree for general elliptic operators// *Abstr. Appl. Anal.* — 2003. — № 3. — С. 129–181.
56. *Volpert A., Volpert V.* Formally adjoint problems and solvability conditions for elliptic operators// *Russ. J. Math. Phys.* — 2004. — 11, № 4. — С. 474–497.
57. *Volpert A., Volpert V.* Fredholm property of elliptic operators in unbounded domains// *Trans. Moscow Math. Soc.* — 2006. — 67. — С. 127–197.
58. *Volpert A., Volpert Vit., Volpert Vl.* *Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems.* — Providence: Amer. Math. Soc., 1994.
59. *Volpert V.* Asymptotic behavior of solutions of a nonlinear diffusion equation with a source term of general form// *Sib. Math. J.* — 1989. — 30, № 1. — С. 25–36.
60. *Volpert V.* Convergence to a wave of solutions of a nonlinear diffusion equation with source of general type// *Sib. Math. J.* — 1989. — 30, № 2. — С. 203–210.
61. *Volpert V.* *Elliptic Partial Differential Equations. Vol. 1. Fredholm Theory of Elliptic Problems in Unbounded Domains.* — Basel: Birkhäuser, 2011.
62. *Volpert V.* *Elliptic Partial Differential Equations. Vol. 2. Reaction–Diffusion Equations.* — Basel: Birkhäuser, 2014.
63. *Volpert V.* Pulses and waves for a bistable nonlocal reaction–diffusion equation// *Appl. Math. Lett.* — 2015. — 44. — С. 21–25.
64. *Volpert V., Reinberg N., Benmir M., Boujena S.* On pulse solutions of a reaction–diffusion system in population dynamics// *Nonlinear Anal.* — 2015. — 120. — С. 76–85.
65. *Volpert V., Volpert A., Collet J.F.* Topological degree for elliptic operators in unbounded cylinders// *Adv. Differ. Equ.* — 1999. — 4, № 6. — С. 777–812.
66. *Vougalter V., Volpert V.* Solvability relations for some non Fredholm operators// *Int. Electron. J. Pure Appl. Math.* — 2010. — 2, № 1. — С. 75–83.
67. *Vougalter V., Volpert V.* Solvability conditions for some non-Fredholm operators// *Proc. Edinb. Math. Soc. (2).* — 2011. — 54, № 1. — С. 249–271.
68. *Vougalter V., Volpert V.* On the existence of stationary solutions for some non Fredholm integro-differential equations// *Doc. Math.* — 2011. — 16. — С. 561–580.
69. *Vougalter V., Volpert V.* Existence of stationary pulses for nonlocal reaction–diffusion equations// *Doc. Math.* — 2014. — 19. — С. 1141–1153.

V. Volpert

Institut Camille Jordan, UMR 5208 CNRS, University Lyon 1, 69622 Villeurbanne, France

INRIA Team Dracula, INRIA Lyon La Doua, 69603 Villeurbanne, France

Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

E-mail: volpert@math.univ-lyon1.fr

V. Vougalter

Department of Mathematics, University of Toronto, Toronto, M5S 2E4 Ontario, Canada

Method of Monotone Solutions for Reaction-Diffusion Equations

© 2017 V. Volpert, V. Vougalter

Abstract. Existence of solutions of reaction-diffusion systems of equations in unbounded domains is studied by the Leray–Schauder (LS) method based on the topological degree for elliptic operators in unbounded domains and on a priori estimates of solutions in weighted spaces. We identify some reaction-diffusion systems for which there exist two subclasses of solutions separated in the function space, monotone and non-monotone solutions. A priori estimates and existence of solutions are obtained for monotone solutions allowing to prove their existence by the LS method. Various applications of this method are given.

REFERENCES

1. Borisovich Yu. G., Zvyagin V. G., Saprnov Yu. I., “Nelineynye fredgol'movy otobrazheniya i teoriya Lere–Shaudera” [Nonlinear Fredholm mappings and the Leray–Schauder theory], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1977, 32, № 4, 3–54 (in Russian).
2. Vishik M. I., “O sil'no ellipticheskikh sistemakh differentsial'nykh uravneniy” [On strongly elliptic systems of differential equations], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1951, 29, 615–676 (in Russian).
3. Volevich L. R., “Razreshimost' kraevykh zadach dlya obshchikh ellipticheskikh sistem” [Solvability of boundary-value problems for general elliptic systems], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1965, 68, 373–416 (in Russian).
4. Volpert A. I., Volpert V. A., “Primenenie teorii vrashcheniya vektornykh poley k issledovaniyu volnovykh resheniy parabolicheskikh uravneniy” [Application of the theory of rotation of vector fields to investigation of wave solutions of parabolic equations], *Tr. Mosk. Mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1989, 52, 58–109 (in Russian).
5. Rabinovich V. S., “Pseudodifferentsial'nye operatory v neogranichennykh oblastiakh, s konicheskoy strukturoy na beskonechnosti” [Pseudodifferential operators in unbounded domains, with conical structure at infinity], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1969, 80, 77–96 (in Russian).
6. Rabinovich V. S., “Fredgol'movost' obshchikh kraevykh zadach na nekompaktnykh mnogoobraziyakh i predel'nye operatory” [Fredholm property of general boundary-value problems on noncompact manifolds and limiting operators], *Dokl. RAN* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1992, 325, № 2, 237–241 (in Russian).
7. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L., “Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions,” *Comm. Pure Appl. Math.*, 1959, 12, 623–727.
8. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L., “Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1964, 17, 35–92.
9. Apreutesei N., Ducrot A., Volpert V., “Competition of species with intra-specific competition,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2008, 3, № 4, 1–27.
10. Apreutesei N., Ducrot A., Volpert V., “Travelling waves for integro-differential equations in population dynamics,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2009, 11, № 3, 541–561.
11. Apreutesei N., Tosenberger A., Volpert V., “Existence of reaction–diffusion waves with nonlinear boundary conditions,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2013, 8, № 4, 2–17.
12. Apreutesei N., Volpert V., “Properness and topological degree for nonlocal reaction–diffusion operators,” *Abstr. Appl. Anal.*, 2011, ID 629692.
13. Apreutesei N., Volpert V., “Existence of travelling waves for a class of integro-differential equations from population dynamics,” *Int. Electron. J. Pure Appl. Math.*, 2012, 5, № 2, 53–67.
14. Apreutesei N., Volpert V., “Reaction–diffusion waves with nonlinear boundary conditions,” *Nonlinear Heterog. Medium*, 2013, 8, № 2, 23–35.
15. Apreutesei N., Volpert V., “Travelling waves for reaction–diffusion problems with nonlinear boundary conditions. Application to a model of atherosclerosis,” *Pure Appl. Funct. Anal.*, 2017, submitted.
16. Benevieri P., Furi M., “A simple notion of orientability for Fredholm maps of index zero between Banach manifolds and degree theory,” *Ann. Sci. Math. Québec*, 1998, 22, 131–148.

17. Benevieri P., Furi M., “On the concept of orientability for Fredholm maps between real Banach manifolds,” *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 2000, 16, № 2, 279–306.
18. Berestycki H., Larrouturou B., Lions P.L., “Multidimensional traveling wave solutions of a flame propagation model,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1990, 111, 97–117.
19. Berestycki H., Nirenberg L., “Travelling fronts in cylinders,” *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1992, 9, № 5, 497–572.
20. Bessonov N., Reinberg N., Volpert V., “Mathematics of Darwin’s diagram,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2014, 9, № 3, 5–25.
21. Bocharov G., Meyerhans A., Bessonov N., Trofimchuk S., Volpert V., “Spatiotemporal dynamics of virus infection spreading in tissues,” *Plos ONE*, 2016, DOI: 10.1371/journal.pone.0168576.
22. Collet J.F., Volpert V., “Computation of the index of linear elliptic operators in unbounded cylinders,” *J. Funct. Anal.*, 1999, 164, 34–59.
23. Dancer E.N., “Boundary value problems for ordinary differential equations on infinite intervals,” *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1975, 30, № 3, 76–94.
24. Demin I., Volpert V., “Existence of waves for a nonlocal reaction–diffusion equation,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2010, 5, № 5, 80–101.
25. Elworthy K.D., Tromba A.J. Degree theory on Banach manifolds// Б сб. «Nonlinear Functional Analysis». — Providence: Amer. Math. Soc., 1970. — С. 86–94.
26. Elworthy K.D., Tromba A.J., “Differential structures and Fredholm maps on Banach manifolds,” In: *Global Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, 1970, 45–94.
27. Eymard N., Volpert V., Vougalter V., “Existence of pulses for local and nonlocal reaction–diffusion equations,” *J. Dynam. Differ. Equ.*, 2017, 29, № 3, 1145–1158.
28. Fenske C., “Analytische Theorie des Abbildungsgrades für Abbildungen in Banachräumen,” *Math. Nachr.*, 1971, 48, 279–290.
29. Fife P.C., McLeod J.B., “The approach to solutions of nonlinear diffusion equations to traveling front solutions,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1977, 65, 335–361.
30. Fife P.C., McLeod J.B., “A phase plane discussion of convergence to travelling fronts for nonlinear diffusion,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1981, 75, 281–314.
31. Fitzpatrick P.M., “The parity as an invariant for detecting bifurcation of the zeroes of one parameter families of nonlinear Fredholm maps,” *Lecture Notes in Math.*, 1993, 1537, 1–31.
32. Fitzpatrick P.M., Pejsachowicz J., “Parity and generalized multiplicity,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1991, 326, 281–305.
33. Fitzpatrick P.M., Pejsachowicz J., “Orientation and the Leray–Schauder degree for fully nonlinear elliptic boundary value problems,” *Mem. Am. Math. Soc.*, 1993, 101, № 483, 1–131.
34. Fitzpatrick P.M., Pejsachowicz J., Rabier P.J., “The degree of proper C^2 Fredholm mappings,” *J. Reine Angew. Math.*, 1992, 427, 1–33.
35. Fitzpatrick P.M., Pejsachowicz J., Rabier P.J., “Orientability of Fredholm families and topological degree for orientable nonlinear Fredholm mappings,” *J. Funct. Anal.*, 1994, 124, 1–39.
36. Galochkina T., Marion M., Volpert V. “Initiation of reaction–diffusion waves of blood coagulation,” to be published.
37. Gardner R. A., “Existence and stability of traveling wave solution of competition models: a degree theoretic approach,” *J. Differ. Equ.*, 1982, 44, 343–364.
38. Isnard C. A., “Orientation and degree in infinite dimensions,” *Notices Am. Math. Soc.*, 1972, 19, A-514.
39. Leray J., Schauder J., “Topologie et équations fonctionnelles,” *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér (3)*, 1934, 51, 45–78.
40. Marion M., Volpert V., “Existence of pulses for a monotone reaction–diffusion system,” *Pure Appl. Funct. Anal.*, 2016, 1, № 1, 97–122.
41. Marion M., Volpert V., “Existence of pulses for the system of competition of species,” *J. Dyn. Differ. Equ.*, 2017, to be published.
42. Miranda C., *Equazioni alle Derivate Parziali di Tipo Elliptico*, Springer-Verlag, Berlin, 1955.
43. Muravnik A., “On the half-plane Dirichlet problem for differential-difference elliptic equations with several nonlocal terms,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, 12, № 6, to be published.
44. Onanov G.G., Skubachevskii A.L., “Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, 12, № 6, to be published.
45. Rabier P.J., Stuart C.A., “Fredholm and properness properties of quasilinear elliptic operators on R^N ,” *Math. Nachr.*, 2001, 231, 29–168.

46. Rabinovich V., Roch S., Silbermann B., “Limit operators and their applications in operator theory,” *Oper. Theory Adv. Appl.*, 2004, 150, 1–392.
47. Rossovskii L., “Elliptic functional differential equations with incommensurable contractions,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, 12, № 6, to be published.
48. Skubachevskii A. L., “Nonlocal elliptic problems and multidimensional diffusion processes,” *Russ. J. Math. Phys.*, 1995, 3, № 3, 327–360.
49. Skubachevskii A. L., *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel, 1997.
50. Smale S., “An infinite dimensional version of Sard’s theorem,” *Am. J. Math.*, 1965, 87, 861–866.
51. Tasevich A., “Analysis of functional-differential equation with orthotropic contractions,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, 12, № 6, to be published.
52. Trofimchuk S., Volpert V., “Travelling waves for a bistable reaction–diffusion equation with delay,” *Arxiv*, 2017, 1701.08560v1.
53. Volpert A., Volpert V., “The construction of the Leray–Schauder degree for elliptic operators in unbounded domains,” *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1994, 11, № 3, 245–273.
54. Volpert A., Volpert V., “Existence of multidimensional travelling waves and systems of waves,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 2001, 26, № 3-4, 76–85.
55. Volpert A., Volpert V., “Properness and topological degree for general elliptic operators,” *Abstr. Appl. Anal.*, 2003, № 3, 129–181.
56. Volpert A., Volpert V., “Formally adjoint problems and solvability conditions for elliptic operators,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2004, 11, № 4, 474–497.
57. Volpert A., Volpert V., “Fredholm property of elliptic operators in unbounded domains,” *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2006, 67, 127–197.
58. Volpert A., Volpert V., Volpert V., *Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems*, Amer. Math. Soc., Providence, 1994.
59. Volpert V., “Asymptotic behavior of solutions of a nonlinear diffusion equation with a source term of general form,” *Sib. Math. J.*, 1989, 30, № 1, 25–36.
60. Volpert V., “Convergence to a wave of solutions of a nonlinear diffusion equation with source of general type,” *Sib. Math. J.*, 1989, 30, № 2, 203–210.
61. Volpert V., *Elliptic Partial Differential Equations. Vol. 1. Fredholm Theory of Elliptic Problems in Unbounded Domains*, Birkhäuser, Basel, 2011.
62. Volpert V., *Elliptic Partial Differential Equations. Vol. 2. Reaction–Diffusion Equations*, Birkhäuser, Basel, 2014.
63. Volpert V., “Pulses and waves for a bistable nonlocal reaction–diffusion equation,” *Appl. Math. Lett.*, 2015, 44, 21–25.
64. Volpert V., Reinberg N., Benmir M., Boujena S., “On pulse solutions of a reaction–diffusion system in population dynamics,” *Nonlinear Anal.*, 2015, 120, 76–85.
65. Volpert V., Volpert A., Collet J. F., “Topological degree for elliptic operators in unbounded cylinders,” *Adv. Differ. Equ.*, 1999, 4, № 6, 777–812.
66. Vougalter V., Volpert V., “Solvability relations for some non Fredholm operators,” *Int. Electron. J. Pure Appl. Math.*, 2010, 2, № 1, 75–83.
67. Vougalter V., Volpert V., “Solvability conditions for some non-Fredholm operators,” *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, 2011, 54, № 1, 249–271.
68. Vougalter V., Volpert V., “On the existence of stationary solutions for some non Fredholm integro-differential equations,” *Doc. Math.*, 2011, 16, 561–580.
69. Vougalter V., Volpert V., “Existence of stationary pulses for nonlocal reaction–diffusion equations,” *Doc. Math.*, 2014, 19, 1141–1153.

V. Volpert

Institut Camille Jordan, UMR 5208 CNRS, University Lyon 1, 69622 Villeurbanne, France;
 INRIA Team Dracula, INRIA Lyon La Doua, 69603 Villeurbanne, France;
 RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., 117198 Moscow, Russia
 E-mail: volpert@math.univ-lyon1.fr

V. Vougalter

Department of Mathematics, University of Toronto, Toronto, M5S 2E4 Ontario, Canada

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ТОПОЛОГИЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

© 2017 г. **В. З. ГРИНЕС, Е. В. ЖУЖОМА, О. В. ПОЧИНКА**

Аннотация. В обзоре обсуждается применение современных методов теории динамических систем с регулярной и хаотической гиперболической динамикой к исследованию топологической структуры магнитных полей в проводящих средах. Для содержательных классов магнитных полей рассматриваются известные физические модели, позволяющие редуцировать исследование таких полей к изучению векторных полей и диффеоморфизмов Морса—Смейла, а также диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A , введенной С. Смейлом, обладающих нетривиальными базисными множествами. Для точечно-зарядной модели магнитного поля рассматриваются вопросы существования сепараторов, играющих важную роль в процессах пересоединения, а также изучаются соотношения между его особенностями. Приводится класс магнитных полей в короне Солнца, внутри которого решается вопрос о топологической эквивалентности двух полей. Приводится топологическая конструкция модификации веревочной модели Я.Б. Зельдовича недиссипативного кинематического динамо, заключающаяся в построении гиперболического диффеоморфизма с хаотической динамикой и консервативного в окрестности своего транзитивного инвариантного множества.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение		455
2. Основные положения магнитной гидродинамики		458
3. Модель односточечных зарядов		459
4. Топология магнитных полей		462
5. Условия существования сепараторов в движущейся плазме		464
6. Модель кинематического динамо веревочного типа		467
Список литературы		468

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение топологической структуры магнитных полей в проводящих движущихся средах является одной из важнейших задач естествознания. Основным и наиболее актуальным примером сильно проводящей и движущейся среды является плазма. Исследование магнитных полей в проводящих средах образует часть раздела физики, которая называется «магнитная гидродинамика» (основные определения и понятия магнитной гидродинамики см. в книгах [1, 15, 16] и обзоре [24]). Ее теоретический фундамент составляют классические уравнения электромагнитного поля и гидродинамические уравнения движения сплошной среды (мы приводим эти уравнения в разделе 2). Имеется много теоретических методов исследования указанной системы уравнений, которые составляют золотой фонд математической физики. В последнее время появляются работы, где изучение свойств решений проводится с помощью методов геометрической (или, иногда говорят, качественной) теории динамических систем, основы которой восходят к классическим работам А. Пуанкаре и А. Ляпунова. Настоящий обзор посвящен изложению некоторых методов геометрической теории динамических систем в применении к исследованию топологической структуры магнитного поля проводящей среды.

Движение хорошо проводящей среды воздействует на ее электромагнитное поле, и специфика такой среды состоит в том, что возникновение электрического поля в ней довольно быстро нивелируется возникающими токами. Поэтому основную роль в изучении свойств хорошо проводящих сред играет исследование взаимодействия среды и ее магнитного поля. Большое значение

для теоретических исследований и приложений имела теорема Альвена [1, 26] о «вмороженности» магнитных силовых линий в движущуюся идеально проводящую среду. Эта теорема утверждает, что силовые линии магнитного поля движутся так, как если бы они были «вморожены» в проводящую среду (плазму). Как следствие, при несложных и малых по времени движениях идеально проводящей среды топологическая структура магнитного поля не меняется. Вмороженность силовых линий приводит по прошествии достаточно длительного промежутка времени к возможности появления областей с конфликтующими частями магнитного поля, то есть областей, границы которых в некоторых точках пространства близки, а магнитные поля областей вблизи этих границ имеют различные направления. Это приводит к образованию новых нулевых точек, то есть точек, где магнитная индукция $\vec{B} = 0$.

Кроме этого, в такой хорошо проводящей среде, как фотосфера и корона Солнца, регулярно возникают локальные области с интенсивным магнитным полем, которые с глобальной точки зрения выглядят как локальные источники или стоки векторного поля. Для качественного изучения топологии такого магнитного поля иногда применяется идеализированная модель с точечными положительными и отрицательными магнитными зарядами, которые являются ретракциями в точки таких областей.

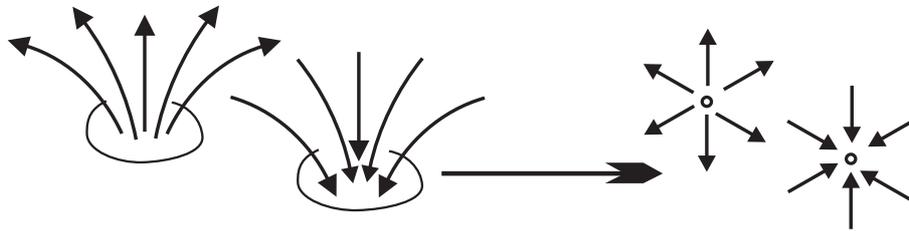


Рис. 1. Идеализация магнитного заряда

Несмотря на то, что магнитных зарядов в природе не обнаружено, эта *точечно-зарядная модель* успешно применялась при изучении структуры магнитного поля и его бифуркаций для солнечных вспышек с небольшим числом ретракционных зарядов, см. например [5, 28–30, 33, 35, 46–49, 51, 55, 58]. С точки зрения теории динамических систем данная идеализированная модель может рассматриваться как векторное поле Морса—Смейла, стоковые и источниковые состояния равновесия которого соответствуют идеализированным (ретракционным) зарядам, а седловые состояния равновесия соответствуют нулевым точкам магнитного поля, при этом одномерные сепаратрисы седлового состояния равновесия соответствуют силовым линиям магнитного поля с противоположным направлением, а двумерная сепаратриса принадлежит границе конфликтующих частей магнитного поля.

Класс таких динамических систем (векторных полей и потоков Морса—Смейла) является одним из наиболее изученных в современной теории динамических систем (см., например, обзоры [2, 62] и книги [9, 39]). Они появились в связи важнейшим понятием теории динамических систем — понятием грубых систем, введенных в 1937 году А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным для двумерных автономных векторных полей на плоскости. Грубые векторные поля обладают свойством сохранения фазового портрета при их достаточно малых C^1 -возмущениях. При этом гомеоморфизм, преобразующий траектории исходного векторного поля в траектории возмущенного поля, является близким к тождественному. В 1959 году М. Пейшото обобщил понятие грубости на потоки, заданные на замкнутых поверхностях, и заменил понятие грубости понятием структурной устойчивости, отказавшись от требования, чтобы гомеоморфизм, переводящий траектории C^1 близкого векторного поля в траектории исходного поля, был близок к тождественному. Как и в случае векторного поля, заданного в ограниченной части плоскости, векторные поля на поверхностях образуют открытое и всюду плотное множество в пространстве всех векторных полей, снабженных C^1 -топологией.

В 1960 году С. Смейл по аналогии с двумерным случаем ввел класс векторных полей на многообразиях размерности большей двух, неблуждающее множество которых состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия и замкнутых траекторий и таких, что пересечение их устойчивых и неустойчивых многообразий является трансверсальным. Как оказалось, такие

векторные поля являются структурно устойчивыми, и они получили название *векторных полей Морса—Смейла* (однако, как выяснилось, эти поля не образуют всюду плотного множества среди всех полей и не совпадают с множеством всех структурно устойчивых полей). Векторные поля Морса—Смейла описывают процессы с регулярной динамикой, в отличие от структурно устойчивых потоков со счетным множеством седловых периодических траекторий, являющихся моделями процессов с хаотическим поведением.

Геометрическая теория динамических систем Морса—Смейла позволила авторам данного обзора получить новые количественные соотношения между числом зарядов разных знаков и числом нулевых точек магнитного поля. Эти соотношения приводятся в разделе 3.

Нулевые точки трехмерного магнитного поля разбиваются на два типа следующим образом. С точки зрения теории динамических систем Морса—Смейла, фиксированная нулевая точка представляет собой седловое гиперболическое состояние равновесия (или просто седло), одна сепаратриса которого одномерна, а вторая — двумерна. Нулевая точка имеет *тип один (два)* если размерность неустойчивой сепаратрисы равна единице (двум). В теории динамических систем эта размерность называется *индексом Морса* седлового состояния равновесия.

Структурно устойчивое трехмерное векторное поле может допускать пересечения двумерных устойчивых и неустойчивых сепаратрис разных седловых состояний равновесия. Траектория, принадлежащая этому пересечению, называется *гетероклинической траекторией*. Такие траектории соответствуют силовым линиям, которые соединяют две нулевые точки магнитного поля. В астрофизике принято называть такие магнитные линии *сепараторами*. Ясно, что сепараторы играют большую роль в определении топологической структуры магнитного поля. В настоящий момент накоплен значительный материал, связанный с вопросами существования или отсутствия гетероклинических траекторий у динамических систем Морса—Смейла, который может быть редуцирован к вопросу существования или отсутствия сепараторов в магнитных полях.

Одним из общепринятых положений современной астрофизики, касающихся объяснения природы солнечных вспышек, является утверждение о том, что выделение энергии при солнечных вспышках происходит в результате *магнитного пересоединения*, то есть бифуркаций, связанных с появлением и исчезновением сепараторов магнитного поля. При этом меняется топологическая структура магнитного поля так, что новая топологическая конфигурация обладает меньшей энергией [21, 56, 60]. Высвобождающийся при этой бифуркации избыток энергии расходуется на интенсивное излучение электромагнитных волн в различных диапазонах спектра, нагрев плазмы, ускорение заряженных частиц до высоких энергий и т.п. В связи с этим информация о количестве и расположении нулевых точек и сепараторов магнитного поля является принципиально важной при анализе процессов магнитного пересоединения. Обсуждению этих вопросов посвящены разделы 3, 4. Кроме того, в разделе 4 приводятся необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности специального класса магнитных полей в короне Солнца.

Отметим, что в разделах 3, 4 рассматривается топологическая структура магнитного поля в фиксированный момент времени. При таком рассмотрении не учитывается влияние движения проводящей среды (плазмы) на изменение топологии магнитного поля. Однако при объяснении природы важных бифуркаций топологии магнитного поля, связанных с рождением и исчезновением сепараторов, пересоединением и т.п., необходимо учитывать движение среды. В разделе 5 дается изложение следующего, предложенного авторами, подхода. В движущейся плазме выделяется исследуемая область V , и движение этой области доопределяется на трехмерное замкнутое многообразие M_V так, чтобы полученное преобразование многообразия M_V было диффеоморфизмом Морса—Смейла. Несмотря на то, что при таком подходе теряется информация о поведении магнитного поля вне области V , удастся получить условия, гарантирующие существование или отсутствие сепараторов исходного магнитного поля в области V . На самом деле полученные условия являются следствием глубоких результатов о диффеоморфизмах Морса—Смейла, заданных на замкнутых трехмерных многообразиях [7–9, 31, 39].

Известно, что Земля и Солнце обладают собственным магнитным полем. Достаточно давно методами радиоастрономии были обнаружены магнитные поля других планет и звезд. Более того, оказалось, что магнитные поля в планетах и звездах, в галактиках и межгалактическом пространстве нередко играют первостепенную роль в динамике различных астрофизических процессов.

Естественный вопрос о происхождении этих магнитных полей лежит в русле теории, которая называется теорией *кинематического динамо* [4]. Одной из проблем этой теории является решение задачи о поведении магнитного поля при заданном течении проводящей среды [16, 19, 50].

Различные аспекты теории кинематического динамо рассматривались Паркером [52] и Эльзассаром [25, 37] (см. обзоры [22, 34]). При этом теоретические исследования наталкивались на серьезные математические трудности вследствие существенной нелинейности задачи. Важной частью теории кинематического динамо является теория быстрого кинематического динамо, которая исследует существование такого движения среды, которое вызывает экспоненциальный рост так называемого затравочного магнитного поля (или магнитной энергии) при малой магнитной диффузии [3, 13, 18]. Общепринятая точка зрения состоит в том, что эффект быстрого кинематического динамо является причиной существования магнитных полей в космических масштабах. Несмотря на многочисленные попытки, до настоящего времени в лабораторных условиях не удалось получить стабильного эксперимента, дающего ожидаемый эффект, который с полной уверенностью можно было бы считать точным аналогом природного [23].

В связи с большими теоретическими трудностями проблемы быстрого кинематического динамо стали разрабатываться различные геометрические и топологические конструкции движений проводящей среды, которые приводят к многократному усилению затравочного магнитного поля. Грубо говоря, основная идея сводилась к построению консервативного отображения, которое, с учетом вмороженности силовых линий, приводит к многократному увеличению плотности силовых линий магнитного поля. Наибольшую известность получили конструкции, предложенные в 70-х годах 20-го века Х. Альвеном (*расщепление магнитной трубки*) и Я. Б. Зельдовичем (так называемая *восьмерка Зельдовича*). Обе конструкции соответствуют известным конструкциям современной теории динамических систем. Например, конструкция Альвена [27] соответствует так называемому *преобразованию пекаря*, в то время как конструкция Зельдовича соответствует *отображению Смейла* построения гиперболического соленоида [2, 14, 43, 62]. В идейном плане конструкция Зельдовича, которую иногда называют *веревочным динамо*, легла в основу достаточно большого числа конструкций трехмерных моделей быстрого динамо [3, 4]. С точки зрения современной теории динамических систем конструкция Зельдовича представляет собой Ω -устойчивое отображение полнотория в себя, введенное Смейлом [62]. Неблуждающее множество этого отображения является топологическим соленоидом и растягивающимся аттрактором [14, 43, 62]. Как отмечалось в [3] (см. обсуждение в гл. V), с точки зрения теории кинематического динамо указанная конструкция имеет существенный недостаток, состоящий в том, что предложенное отображение не является консервативным. В разделе 6 мы приводим модификацию конструкции Зельдовича, лишенную этого недостатка в окрестности неблуждающего множества.

Благодарности. Обзор написан при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01041).

2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Как известно, магнитная гидродинамика (МГД) изучает взаимодействие электромагнитного поля с жидким или газообразным движущимся проводником, рассматриваемым как сплошная среда. Уравнения МГД представляют собой совокупность уравнений Максвелла для электромагнитного поля и обычных гидродинамических уравнений, описывающих движение сплошной среды (плазмы, жидкости или газа). Сперва приведем уравнения Максвелла:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c_0} \cdot \vec{j} + \frac{\varepsilon_0}{c_0} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c_0} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0, \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{c_0} \cdot \rho_e. \quad (2.4)$$

Здесь ρ_e — плотность электрического заряда, \vec{j} — плотность тока, c_0 — электродинамическая постоянная (скорость света в вакууме). Иногда в уравнениях Максвелла участвует магнитная индукция \vec{B} , однако мы для простоты в уравнениях (2.1)–(2.4) не делаем различия между напряженностью магнитного поля \vec{H} и вектором магнитной индукции $\vec{B} = \mu\vec{H}$, полагая $\mu \approx 1$.

Если обозначить через \vec{v} гидродинамическое поле скоростей сплошной среды, то плотность тока \vec{j} складывается из так называемого *конвекционного тока* $\rho_e\vec{v}$, *тока проводимости* $\sigma\vec{E}$, и *индукционного тока*, который возникает при движении электропроводящей среды со скоростью \vec{v} в магнитном поле \vec{H} , где σ — проводимость среды. Таким образом,

$$\vec{j} = \rho_e\vec{v} + \sigma\vec{E} + \frac{\sigma}{c_0} \cdot \vec{v} \times \vec{H}. \quad (2.5)$$

Теперь приведем гидродинамические уравнения. Первое из них есть *гидродинамическое уравнение Эйлера*, а второе — *уравнение неразрывности* (или непрерывности):

$$\rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}P + \vec{F}_e + \eta \cdot \Delta\vec{v} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) = 0 \quad (2.7)$$

Здесь ρ — плотность среды, P — давление, η — вязкость, и \vec{F}_e — электромагнитная сила. Отметим, что левая часть уравнения (2.6) чаще пишется в виде

$$\rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \cdot \left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v} \right] = \rho \cdot \left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right].$$

Классическая МГД разделяется на нерелятивистскую и релятивистскую МГД. В нерелятивистской МГД, в рамках которой мы далее будем находиться, рассматриваются скорости $|\vec{v}| \ll c_0$. Поэтому в уравнении (2.1) можно пренебречь вторым слагаемым $\frac{\varepsilon_0}{c_0} \cdot \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. Исключим из уравнений Максвелла электрическую напряженность \vec{E} и плотность тока \vec{j} . Тогда получим следующее уравнение индукции:

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \text{rot} \left[\vec{v}\vec{H} \right] + \nu\nabla^2\vec{H}, \quad (2.8)$$

которое является одним из основных уравнений МГД, где ν — магнитная вязкость, обратная магнитному числу Рейнольдса [3, 16].

Теория кинематического динамо в основном основывается на уравнении индукции (2.8), в котором скорость среды \vec{v} предполагается заданной функцией координат и времени.

Имеются большой ряд работ, в которых при дополнительных предположениях найдены точные решения уравнений МГД с различными начальными условиями (см. например классическую работу [36]). Кроме того, отсылаем читателя к одной из последних работ [59], где имеется обширная библиография.

3. МОДЕЛЬ ОДНОТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ

В векторных полях Морса—Смейла, моделирующих магнитные поля \vec{H} , порождаемые совокупностью так называемых магнитных (ретракционных) зарядов, состояния равновесия разбиваются на два класса. К первому классу относятся все состояния равновесия векторного поля, соответствующие нулевым точкам магнитного поля. Эти точки отвечают за непрерывность векторного поля, моделирующего магнитное поле с конфликтующими областями. Ко второму классу относятся все стоковые и источниковые состояния равновесия векторного поля. Они соответствуют отрицательным и положительным магнитным ретракционным зарядам.

Пусть p_0 — состояние равновесия векторного поля, соответствующее нулевой точке магнитного поля \vec{H} , и $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — собственные числа матрицы Якоби системы уравнений, задающих поле \vec{H} в окрестности точки p_0 . По предположению вне объединения достаточно малых окрестностей стоков и источников векторного поля \vec{H} имеет место равенство $\nabla \cdot \vec{H} = 0$, см. (2.3). Отсюда следует, что $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Так как состояния равновесия потоков Морса—Смейла являются гиперболическими, то действительные части всех собственных значений отличны от нуля. Отсюда

вытекает, что с точки зрения теории динамических систем нулевая точка магнитного поля является седловым состоянием равновесия с двумя одномерными и одной двумерной сепаратрисами. В физической литературе одномерную сепаратрису называют *шипом* (*spine*), а двумерную — *веерной поверхностью* (*fan*) [21, 54, 56], см. рис. 3 (а). Если силовая магнитная линия одномерной сепаратрисы направлена из нулевой точки, то все магнитные линии на сепаратрисной поверхности направлены к нулевой точке, и наоборот.

Таким образом, первый класс состояний равновесия векторного поля \vec{H} состоит из седловых состояний равновесия. Напомним, что *индексом Морса* состояния равновесия p называется число, равное размерности $\dim W^u(p)$ неустойчивого многообразия $W^u(p)$ состояния равновесия p , а *топологическим индексом* — число, равное $(-1)^{\dim W^u(p)}$. Для седлового состояния равновесия p_0 возможны (с точностью до переобозначений собственных чисел) лишь следующие варианты: 1) $\lambda_1 > 0, \operatorname{Re} \lambda_2, \operatorname{Re} \lambda_3 < 0$; 2) $\lambda_1 < 0, \operatorname{Re} \lambda_2, \operatorname{Re} \lambda_3 > 0$. В первом случае нулевая точка p_0 называется *положительной*, поскольку $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0$. С точки зрения теории динамических систем положительная нулевая точка является седловым состоянием равновесия с индексом Морса, равным 1, и топологическим индексом, равным -1 . Это состояние равновесия имеет две одномерные неустойчивые сепаратрисы и одну двумерную устойчивую сепаратрису, см. рис. 2 (а). Во втором случае точка p_0 называется *отрицательной*, поскольку $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 < 0$. Она является седловым состоянием равновесия с индексом Морса, равным 2, и топологическим индексом, равным 1, и имеет две одномерные устойчивые сепаратрисы и одну двумерную неустойчивую сепаратрису см. рис. 2 (б).

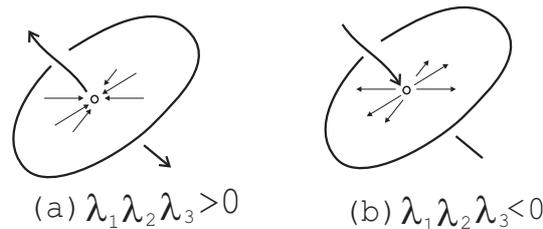


Рис. 2. Положительные и отрицательные нулевые точки.

Для формулировки основных результатов этого раздела уточним понятия отрицательных и положительных зарядов магнитного поля \vec{H} (согласно точечно-зарядной модели). Заряд \vec{H} поля называется *положительным*, если его можно заключить в сколь угодно малый шар, на границе которого магнитное поле направлено наружу. Аналогично определяется отрицательный заряд. С точки зрения теории динамических систем Морса—Смейла положительный заряд является источником, а отрицательный — стоковым состоянием равновесия векторного поля.

Во всех известных авторам работах, в которых применялась точечно-зарядная модель, рассматривалось конечное и достаточно малое число зарядов. Например, в работах [55, 57] рассматривались группы из двух и трех зарядов. В работах [5, 17, 28, 48, 63] рассматривались группы из четырех зарядов. Наконец, в работе [47] рассматривалась группа из шести зарядов. Во всех работах конкретизировались координаты зарядов. Также предполагалась потенциальность поля магнитной индукции \vec{B} , для определения которой применялась конкретная формула. С помощью непосредственных вычислений находились нуль-точки поля \vec{B} и сепараторы, которые играют существенную роль в описании топологической структуры магнитного поля. Формула Эйлера—Пуанкаре применялась для проверки наличия нуль-точек. Отметим, что основной упор в указанных работах был направлен на исследование перестроек магнитного поля при изменении положения зарядов.

Магнитное поле будем называть *квазитипичным*, если все его нуль-точки и заряды (рассматриваемые как состояния равновесия векторного поля) являются гиперболическими, двумерные сепаратрисы нуль-точек пересекаются трансверсально (если пересекаются), любая одномерная сепаратриса не имеет пересечений с двумерными сепаратрисами, и нет одномерных сепаратрис, соединяющих нулевые точки (включая одну и ту же нулевую точку). Отметим, что одномерные сепаратрисы в общем случае либо не пересекаются, либо совпадают. Далее, мы будем рассматривать только квазитипичные магнитные поля.

Поскольку Солнце излучает энергию, то большое практическое значение имеет изучение так называемых положительно несбалансированных групп зарядов. Группа зарядов C называется *положительно несбалансированной*, если ее можно заключить в шар B , на границе которого магнитное поле направлено наружу, а внутри шара магнитное поле квазитипично и нет замкнутых магнитных линий. Указанный шар $B = B(C)$ будем называть *источниковой областью группы C* . Более того, мы будем предполагать, что внутри источниковой области любая силовая линия, не образующая одномерную сепаратрису и не принадлежащая двумерной сепаратрисе нуль-точки, либо стремится к особенности магнитного поля, либо покидает источниковую область. Аналогично определяется отрицательно несбалансированная группа зарядов, и в этом случае говорят о стоковой области группы зарядов. Изучение отрицательно несбалансированных групп также важно, поскольку внутри положительно несбалансированной группы могут быть семейства отрицательно несбалансированных групп, бифуркации которых могут быть причиной вспышки [54].

Введем для области, содержащей несбалансированную группу зарядов, следующие обозначения: S^+ — число положительных нуль-точек, S^- — число отрицательных нуль-точек, N^+ — число положительных зарядов, N^- — число отрицательных зарядов. Из формулы Эйлера—Пуанкаре вытекает равенство

$$1 + N^- - S^+ + S^- - N^+ = 0.$$

Однако, как показывает следующий результат, не все неотрицательные числа S^+ , S^- , N^+ , N^- , удовлетворяющие этой формуле, могут быть реализованы.

Напомним, что следуя [21, 54, 56], мы будем называть магнитную линию, соединяющую две нулевые точки, *сепаратором (separator)*. С точки зрения теории динамических систем сепаратор является гетероклинической траекторией, принадлежащей пересечению сепаратрисных поверхностей разных седловых состояний равновесия, см. рис. 3 (b).

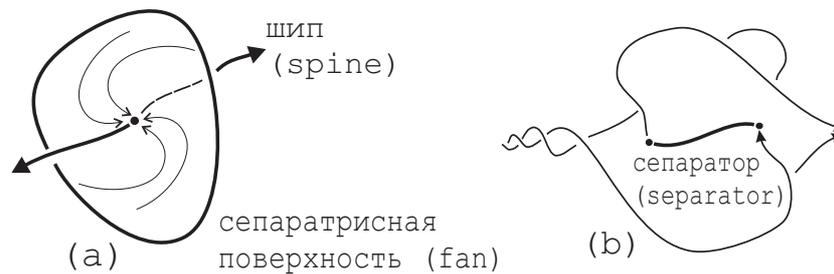


Рис. 3. Структура нулевой точки (a), и гетероклинический сепаратор (b).

Сформулированные ниже результаты данного раздела доказаны в работах [12].

Теорема 3.1. Пусть положительно несбалансированная группа C содержит $N^+ \geq 1$ положительных зарядов и $N^- \geq 0$ отрицательных зарядов. Тогда в источниковой области $B(C)$ этой группы имеется по крайней мере $N^+ - 1$ отрицательных нулевых точек и N^- положительных нулевых точек,

$$S^- \geq N^+ - 1, \quad S^+ \geq N^-.$$

Если группа C состоит из $N^+ \geq 2$ положительных зарядов и в $B(C)$ содержится ровно $N^+ - 1$ нулевых точек, то все нулевые точки являются отрицательными нулевыми точками, и сепараторы в $B(C)$ отсутствуют. Более того, магнитное поле в области $B(C)$ имеет единственную с точностью до топологической эквивалентности структуру.

Следствие 3.1. Пусть имеется отрицательно несбалансированная группа C , содержащая $N^- \geq 2$ отрицательных зарядов. Тогда в стоковой области $B(C)$ этой группы имеется по крайней мере $N^- - 1$ положительных нулевых точек. Если группа C состоит из $N^- \geq 2$ отрицательных зарядов и в $B(C)$ содержится ровно $N^- - 1$ нулевых точек, то все эти точки являются положительными нулевыми точками, и сепараторы в $B(C)$ отсутствуют.

При минимально возможных количествах как положительных, так и отрицательных нулевых точек (эти минимальные числа определяются в силу теоремы 3.1) сепараторов может не быть.

Однако, как показывает следующая теорема, как только появляется хотя бы одна «лишняя» нулевая точка, то необходимо появляется хотя бы один сепаратор. Тип лишней нулевой точки роли не играет (она может быть как положительной, так и отрицательной). Мы для определенности формулируем утверждение, когда лишняя нулевая точка является отрицательной.

Теорема 3.2. Пусть положительно несбалансированная группа C содержит $N^+ \geq 2$ положительных и $N^- \geq 0$ отрицательных зарядов. Если $B(C)$ содержит ровно N^+ отрицательных нулевых точек, то в $B(C)$ существует хотя бы один сепаратор.

Доказательства приведенных теорем 3.1, 3.2 основано на том, что квазитипичное магнитное поле положительно несбалансированных групп зарядов можно продолжить на трехмерную сферу до векторного поля Морса—Смейла, и к таким векторным полям применить технику, развитую в работах, посвященных классификации динамических систем Морса—Смейла на многообразиях (см. обзоры и книги [8–10, 39, 41]).

4. Топология магнитных полей

Одна из современных точек зрения состоит в том, что магнитное поле в короне Солнца порождается большим числом диполей, расположенных внутри Солнца (см., например, [21, 56]). Эти диполи порождают потоковые трубки магнитного поля, пересекающие фотосферу Солнца и выходящие в ее корону. Места, где потоковые трубки прорываются сквозь фотосферу и возвращаются на нее, моделируются (согласно точечно-зарядной модели) как точечные источники и стоки (положительные и отрицательные заряды) на фотосфере (см. рис. 4). Следуя [29] для модели магнитного поля \mathbf{B} с точечными источниками, двумерная сфера $P = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{S}^3 \mid w = 0\}$ в трехмерной сфере $\mathbb{S}^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$ используется как фотосфера и область $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{S}^3 \mid w > 0\}$ как солнечная корона. Более того, мы предполагаем, что \mathbf{B} симметрично распространяется на область $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{S}^3 \mid w < 0\}$, называемую зеркалом короны, и, следовательно, оно определено на $M = \mathbb{S}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^k q_i$, где q_1, \dots, q_k — точки на фотосфере, в которых расположены заряды.

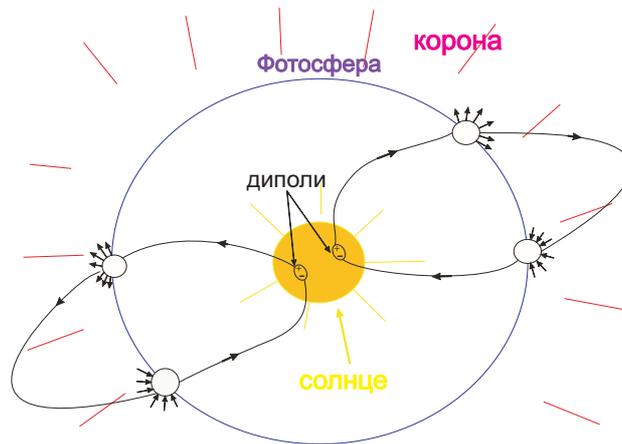


Рис. 4. Диполи внутри солнца.

Корональное магнитное поле часто считается безвихревым. Для простоты (поскольку мы изучаем лишь топологию поля) в этом разделе предполагается, что поле \mathbf{B} потенциально, то есть $\mathbf{B} = -\nabla\Phi$, где Φ — скалярный потенциал. Естественно предположить, что потенциал Φ является функцией Морса. Напомним, что C^2 -функция ϕ , заданная на n -многообразии, называется функцией Морса, если для каждой ее критической точки p существует открытая окрестность V_p с системой координат $X = (x_1, \dots, x_n)$ и целое число $\lambda_p \in [0, n]$ — индекс p такие, что

$$\phi(x)|_{V_p} = \phi(p) - \sum_{i=1}^{\lambda_p} x_i^2 + \sum_{i=\lambda_p+1}^n x_i^2.$$

Из-за того, что $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, три собственных значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ нуля магнитного поля удовлетворяют равенству $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Так как \mathbf{V} является потенциалом, то все собственные значения являются вещественными числами. Так как Φ — функция Морса, то каждое собственное значение отличается от 0. Ноль называется *положительным (отрицательным)*, если $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0$ ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 < 0$). Ноль, принадлежащий фотосфере, называется *фотосферическим*. Фотосферический ноль, чье одномерное инвариантное многообразие лежит в фотосфере, называется *горизонтальным*, тогда как фотосферический ноль с одномерным инвариантным многообразием, направленным вертикально, называется *вертикальным*. *Корональный ноль* — это ноль, лежащий в короне солнца [30].

Когда двумерные инвариантные многообразия нулевых точек имеют пересечение, они образуют *сепаратор*, который соединяет два противоположных по знаку нуля. Двумерные многообразия делят корону на разные области, которые называются *куполами*. Появление и исчезновение сепараторов изменяет топологию разбиения на купола. Такая ситуация называется *сепараторным пересоединением* и является одним из основных механизмов перераспределения энергии в короне солнца [58]. Простейшее пересоединение известно как *пересекающееся состояние* [29] (см. рис. 5).

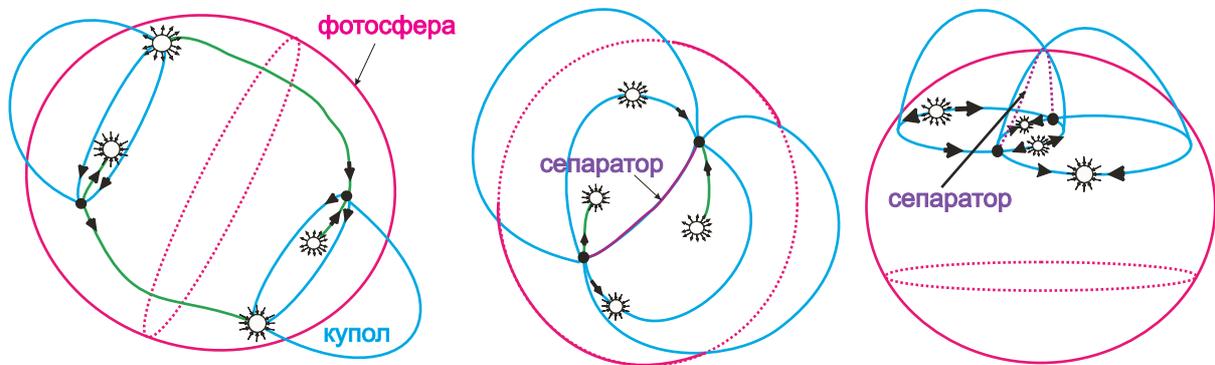


Рис. 5. Пересекающееся состояние.

Большое количество статей [35, 46, 48, 49] было посвящено классификации конфигураций куполов магнитного поля, возникающих из таких точечных источников. Естественно ввести следующее определение, которое восходит к классической работе [53], см. также [62].

Определение 4.1. Говорят, что два корональных магнитных поля \mathbf{V}, \mathbf{V}' являются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $H : M \rightarrow M'$, переводящий магнитные линии \mathbf{V} в магнитные линии \mathbf{V}' с сохранением ориентации на линиях.

Известно (см., например, книгу [38]), что градиентное векторное поле ξ , порожденное функцией Морса ϕ , обладает так называемой *самоиндексирующейся энергетической функцией* φ , то есть функцией Морса со следующими свойствами:

1. множества критических точек ϕ и φ совпадают;
2. для каждой критической точки p имеет место равенство $\varphi(x) = \phi(x) + \text{const}$ для $x \in V_p$ и $\varphi(p) = \lambda_p$;
3. $\xi(\varphi) < 0$ вне критических точек.

Обозначим через \mathcal{B} множество магнитных полей \mathbf{V} , обладающих энергетической функцией φ . В настоящем разделе мы решаем задачу о существовании сепараторов в зависимости от типа нулей магнитного поля $\mathbf{V} \in \mathcal{B}$ и находим взаимосвязь между числом нулей и числом зарядов. Также мы получаем классификацию магнитных полей из \mathcal{B} с точностью до топологической эквивалентности.

Для нуля p магнитного поля \mathbf{V} обозначим через F_p его двумерное инвариантное многообразие и через S_p — одномерное. Положим $T_p = F_p \cap P$, то есть T_p — след пересечения F_p с фотосферой P . Сформулированные ниже результаты данного раздела доказаны в работе [42].

Теорема 4.1. Для любого магнитного поля \mathbf{B} верны следующие утверждения:

1. если p — нуль магнитного поля \mathbf{B} и l_p является компонентой связности множества $S_p \setminus p$, то множество $cl\ l_p \setminus (l_p \cup p)$ состоит в точности из одного заряда q_i для некоторого $i \in \{1, \dots, k\}$;
2. если p — нуль магнитного поля \mathbf{B} , то двумерное многообразие F_p не содержит сепаратора тогда и только тогда, когда $cl\ F_p \setminus F_p$ является ровно одним зарядом q_i для некоторого $i \in \{1, \dots, k\}$;
3. если существуют нули p_1, \dots, p_n магнитного поля \mathbf{B} такие, что $\bigcup_{i=1}^n cl\ S_{p_i}$ — простая замкнутая кривая, тогда F_{p_i} содержит хотя бы один сепаратор для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$.

Теорема 4.2. Для произвольного коронального магнитного поля $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$ выполняются следующие утверждения:

1. двумерное многообразие F_p каждой корональной или вертикальной нулевой точки p содержит хотя бы один сепаратор;
2. двумерное многообразие F_p горизонтальной нулевой точки p не содержит сепараторов тогда и только тогда, когда $cl\ T_p \setminus T_p$ является ровно одним зарядом q_i для некоторого $i \in \{1, \dots, k\}$.

Обозначим через m число нулей поля $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$. Положим

$$g = \frac{m - k + 2}{2}.$$

Теорема 4.3. Для произвольного коронального магнитного поля $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$ справедливы следующие утверждения:

1. g — целое число и $g \geq 0$;
2. векторное поле \mathbf{B} имеет не менее $2g$ нулей, чьи двумерные инвариантные многообразия содержат по крайней мере один сепаратор;
3. множество уровня $\Sigma = \varphi^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$ является ориентируемой поверхностью рода g .

Обозначим через N_+ (N_-) множество положительных (отрицательных) нулей магнитного поля \mathbf{B} . Положим $F_+ = \bigcup_{p \in N_+} F_p$ ($F_- = \bigcup_{p \in N_-} F_p$).

Определение 4.2. Говорят, что самоиндексирующиеся энергетические функции φ, φ' магнитных полей \mathbf{B}, \mathbf{B}' согласованно эквивалентны, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $H : M \rightarrow M'$ такой, что:

1. $\varphi' H = \varphi$;
2. $H(\Sigma \cap F_+) = \Sigma' \cap F'_+$, $H(\Sigma \cap F_-) = \Sigma' \cap F'_-$.

Теорема 4.4. Магнитные поля \mathbf{B}, \mathbf{B}' топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их самоиндексирующиеся энергетические функции φ, φ' согласованно эквивалентны.

5. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СЕПАРАТОРОВ В ДВИЖУЩЕЙСЯ ПЛАЗМЕ

В разделах 3, 4 были приведены некоторые условия существования сепараторов. Однако в них не учитывалось движение плазмы. В этом разделе приводятся ряд условий, учитывающих это движение.

В работе [40] был предложен подход к решению данной проблемы, состоящий в том, что в плазме выделяется трехмерное тело специального вида и рассматривается движение, при котором все граничные компоненты тела сдвигаются внутрь или наружу так, что после окончания движения все граничные компоненты параллельны исходным граничным компонентам (см. ниже точные определения). Поскольку в процессе движения топологическая структура магнитного поля не меняется, то для простоты предполагается, что внутри выделенного тела скелет магнитного поля инвариантен относительно движения плазмы. Отметим, что не требуется, чтобы все точки скелета были неподвижны, но движение внутри тела оставляет точки скелета на скелете. Предполагается (и это единственное содержательное ограничение), что нулевые точки являются

гиперболическими точками не только поля, но и движения плазмы, которое будет моделироваться диффеоморфизмом с гиперболическими неподвижными точками. Важно заметить, что согласно теореме Купки—Смейла из теории динамических систем у любого типичного диффеоморфизма все периодические точки, включая неподвижные, являются гиперболическими [20]. Таким образом, можно считать, предложенная модель описывает класс типичных движений плазмы. Перейдем к точным определениям.

Пусть M_p^2 — гладко вложенная в евклидово пространство \mathbb{R}^3 ориентируемая замкнутая поверхность рода $p \geq 0$. В силу ориентируемости, M_p^2 разбивает \mathbb{R}^3 на ограниченную область (внутренность) и неограниченную область (внешность). Объединение внутренности с границей M_p^2 обозначается через M_p^3 и называется *телом рода $p \geq 0$* . Простейшим примером является замкнутый трехмерный шар $M_0^3 \stackrel{\text{def}}{=} D^3$, ограниченный двумерной сферой S^2 . Тело $M_1^3 \stackrel{\text{def}}{=} P^3$ является *полноторием*, то есть множеством $D^2 \times S^1$, гомеоморфным произведению двумерного замкнутого диска D^2 на окружность S^1 .

Две гладко вложенные поверхности $M_{p_1}^2$ и $M_{p_2}^2$ называются *параллельными*, если $p_1 = p_2 = p$ и эти поверхности ограничивают в пространстве \mathbb{R}^3 область, гомеоморфную $M_p^2 \times (0; 1)$. Как следствие, $M_{p_1}^2 \cap M_{p_2}^2 = \emptyset$.

Пусть тело M_p^3 содержит внутри себя попарно непересекающиеся тела $M_{p_1}^3, \dots, M_{p_k}^3$. Положим

$$M_p^3 \setminus (\text{int } M_{p_1}^3 \cup \dots \cup \text{int } M_{p_k}^3) \stackrel{\text{def}}{=} M_{p(p_1, \dots, p_k)}^3.$$

В частности, $M_{0(0)}^3 = \mathcal{S}$ есть замкнутый шаровой слой, то есть множество $\mathcal{S} = S^2 \times [-1; +1]$, гомеоморфное произведению сферы S^2 на замкнутый промежуток $[-1; +1]$. Ясно, что топологический тип тела $M_{p(p_1, \dots, p_k)}^3$ зависит от вложения $M_{p_1}^3, \dots, M_{p_k}^3$ в M_p^3 . Одним из вариантов $M_{p(p)}^3$ является так называемая *толстая поверхность*, то есть тело, гомеоморфное произведению двумерной поверхности M_p^2 рода $p \geq 1$ на отрезок $[0; 1]$. Обозначим через $M_{p(p,0,0)}^3$ тело типа $M_{p(p,0,0)}^3$, являющееся толстой поверхностью с двумя дырами.

Рассмотрим тело $M_{p(p_1, \dots, p_k)}^3$, гладко вложенное в пространство \mathbb{R}^3 . Тело $M_{p(p_1, \dots, p_k)}^3$ представляет собой часть плазмы некоторого астрофизического объекта с магнитным полем \vec{B} . Обозначим через \vec{B}_0 ограничение поля \vec{B} на $M_{p(p_1, \dots, p_k)}^3$, то есть $\vec{B}_0 = \vec{B}|_{M_{p(p_1, \dots, p_k)}^3}$, и будем считать, что поле \vec{B}_0 является квазитипичным (см. раздел 3). Как следствие получаем, что $M_{p(p_1, \dots, p_k)}^3$ содержит только конечное число нулевых точек. Мы будем предполагать далее, что 1) сепаратрисы нулевых точек пересекаются (если пересекаются) трансверсально; 2) сепаратрисы пересекают (если пересекают) трансверсально компоненты $M_{p_1}^2, \dots, M_{p_k}^2$ тела $M_{p(p_1, \dots, p_k)}^3$. Отображение

$$f_0 : M_{p(p_1, \dots, p_k)}^3 \rightarrow f_0 \left(M_{p(p_1, \dots, p_k)}^3 \right) \subset \mathbb{R}^3$$

называется (a-d)-*движением*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

- a) f_0 является сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом на свой образ, причем неблуждающее множество диффеоморфизма f_0 состоит из неподвижных гиперболических точек, которые совпадают с нулями магнитного поля \vec{B}_0 ;
- b) граничные компоненты тела $f_0 \left(M_{p(p_1, \dots, p_k)}^3 \right)$ попарно не пересекаются с граничными компонентами тела $M_{p(p_1, \dots, p_k)}^3$;
- c) имеется хотя бы одна граничная компонента $M_{p_i}^2$, которая отображается внутрь $M_{p(p_1, \dots, p_k)}^3$, и имеется хотя бы одна граничная компонента $M_{p_j}^2$, которая отображается наружу $M_{p(p_1, \dots, p_k)}^3$, то есть

$$f_0(M_{p_i}^2) \subset M_{p(p_1, \dots, p_k)}^3, \quad f_0(M_{p_j}^2) \cap M_{p(p_1, \dots, p_k)}^3 = \emptyset;$$

- d) веерные поверхности и шипы инвариантны относительно f_0 , а неподвижные точки диффеоморфизма f_0 имеют одинаковый тип с нулями поля \vec{B}_0 .

Отметим, что здесь не требуется трансверсального пересечения силовых линий магнитного поля \vec{B}_0 с граничными компонентами. Поэтому веерные поверхности и шипы могут, вообще говоря,

пересекать граничные компоненты тела $M^3_{p(p_1 \dots p_k)}$ по нескольким компонентам связности. Предложенная математическая модель с физической точки зрения означает, что рассматривается движение плазмы за промежутки времени, в течение которого сохраняются особые точки с веерными поверхностями и шипами. Из приведенных свойств вытекает, что сепараторы (если они существуют) инвариантны относительно f_0 и их число (включая нуль) не меняется в течение наблюдаемого промежутка времени.

Для замкнутого шарового слоя \mathcal{S} условия а)–д) означают следующее. Договоримся, что сфера $S^2 \times \{-1\} = S_{int}$, которая называется *внутренней*, ограничивает в \mathbb{R}^3 шар B^3 , не содержащий шаровой слой. Сферу $S^2 \times \{+1\} = S_{ext}$ назовем *внешней*. Тогда компоненты пересечения шипов и веерных поверхностей со сферами S_{int} , S_{ext} суть точки и кривые (замкнутые или незамкнутые). Не уменьшая общности, можно считать, что условие д) принимает вид: $f_0(S_{int}) \subset \mathcal{S}$ и $f_0(S_{ext}) \subset \mathbb{R}^3 \setminus (\mathcal{S} \cup B^3)$ так, что $f_0(S_{int})$ разбивает \mathcal{S} на два шаровых кольца, см. рис. 6. Сформулируем первые два результата статьи [40] для (а-д)-движений шарового слоя плазмы.

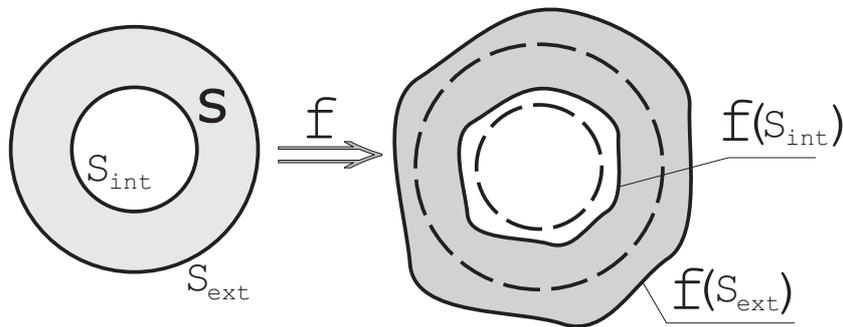


Рис. 6. Движение шарового слоя \mathcal{S} .

Доказательства следующих утверждений основаны на применении результатов о топологической взаимосвязи динамики диффеоморфизмов Морса–Смейла и топологии объемлющих многообразий (см, например, монографию [9]). Это применение основано на том, что введенные выше движения можно продолжить до диффеоморфизмов Морса–Смейла, заданных на замкнутых трехмерных многообразиях с известной топологической структурой.

Теорема 5.1. Пусть $f_0 : \mathcal{S} \rightarrow f_0(\mathcal{S}) \subset \mathbb{R}^3$ есть (а-д)-движение шарового слоя \mathcal{S} плазмы с магнитным полем \vec{B}_0 . Предположим, что \vec{B}_0 в \mathcal{S} имеет нулевые точки. Тогда их число четное (следовательно, нулевых точек не менее двух). Более того, их сепаратрисные поверхности пересекаются и имеется конечное ненулевое число гетероклинических сепараторов.

Теорема 5.2. Пусть выполнены условия теоремы 5.1, и предположим, что шипы и веерные поверхности нулевых точек магнитного поля \vec{B}_0 в \mathcal{S} не пересекаются. Тогда сепаратрисная поверхность каждой нулевой точки в \mathcal{S} содержит хотя бы один гетероклинический сепаратор.

Толстая поверхность с двумя дырами M^3 имеет четыре граничных компоненты: две 2-сферы S_1 , S_2 и две двумерные поверхности T_1 , T_2 рода $p \geq 1$. Для движения тела M^3 конкретизируем условие д) следующим образом:

- д) одна сфера, скажем S_1 , отображается внутрь тела M^3 , а другая S_2 — наружу; одна поверхность, скажем T_1 , отображается внутрь M^3 , а другая T_2 — наружу. Более того, ограничение $f_0|_{T_i} : T_i \rightarrow f_0(T_i)$ гомотопически тривиально для каждого $i = 1, 2$.

Поясним понятие гомотопической тривиальности. В отличие от сферы, для которой с гомотопической точки зрения существует только один класс сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов, для поверхностей ненулевого рода существует счетное семейство таких классов. Поверхности T_i , $f_0(T_i)$ для каждого $i = 1, 2$ параллельны. Поэтому образующие их фундаментальных групп можно считать естественным образом изоморфными. Гомотопическая тривиальность означает, что ограничения $f_0|_{T_i}$ гомотопически тождественны. Для (а-д)-движений тела M^3 имеют место следующие утверждения.

Теорема 5.3. Пусть $f_0 : M^3 \rightarrow f_0(M^3) \subset \mathbb{R}^3$ есть $(a-d)$ -движение тела M^3 , принадлежащего некоторой области плазмы с магнитным полем \vec{B}_0 . Тогда поле \vec{B}_0 в M^3 имеет не менее двух нулевых точек таких, что их сепаратрисные поверхности пересекаются и имеется конечное ненулевое число гетероклинических сепараторов.

Теорема 5.4. Пусть выполнены условия теоремы 5.3, и предположим, что шипы и веерные поверхности нулевых точек магнитного поля \vec{B}_0 в M^3 не пересекаются. Тогда сепаратрисная поверхность каждой нулевой точки в M^3 содержит хотя бы один гетероклинический сепаратор.

Отметим работу [6], в которой приводится близкое по духу теоремы 5.4 условие существования сепаратора.

6. МОДЕЛЬ КИНЕМАТИЧЕСКОГО ДИНАМО ВЕРЕВОЧНОГО ТИПА

В этом разделе дается модификация конструкции Зельдовича, состоящая в построении диффеоморфизма и векторного поля, которое имеет экспоненциальный рост под действием итераций этого диффеоморфизма.

Рассмотрим на декартовой плоскости \mathbb{R}^2 круг $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ и отображение $w : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, образующее подкову Смейла [61, 62]. Именно, отображение w есть композиция сжатия вдоль оси Ox , растяжения вдоль оси Oy , сгибания (непринципиально, в какую сторону) полученного эллипса и сдвига так, чтобы пересечение $D^2 \cap w(D^2)$ представляло собой объединение двух непересекающихся полос, симметричных относительно оси Oy .

Известно [2, 61], что w можно продолжить до отображения всей плоскости \mathbb{R}^2 так, чтобы это продолжение было тождественным вне некоторой окрестности круга D^2 . Ясно, что за счет сжатия и растяжения можно добиться того, чтобы якобиан $J(w)$ отображения w на D^2 равнялся $\frac{1}{2}$. Далее мы будем предполагать эти условия выполненными.

Обозначим через $sh_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ сдвиг $(x; y) \rightarrow \left(x + \frac{1}{2}; y\right)$ вдоль оси Ox , и через $S_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — центральную симметрию относительно начала координат $(0; 0)$, $S_0(x; y) = (-x; -y)$. Снова за счет сжатия-растяжения и сгиба можно добиться выполнения следующих условий:

1. пересечение $D^2 \cap sh_0 \circ w(D^2)$ состоит из двух непересекающихся полос;
2. $w(D^2) \cap (S_0 \circ w(D^2)) = \emptyset$.

Первое условие означает, что отображение $sh_0 \circ w = w_0$ образует подкову Смейла. Второе условие означает, что подкова $w(D^2)$ не пересекается со своим образом относительно центральной симметрии S_0 . Отметим, что $S_0 \circ w(D^2)$ также образует конфигурацию подковы.

Обозначим через $R_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ вращение

$$\begin{cases} \bar{x} &= x \cos \pi t - y \sin \pi t \\ \bar{y} &= x \sin \pi t + y \cos \pi t \end{cases}$$

плоскости \mathbb{R}^2 на угол πt против часовой стрелки. Положим

$$w_t = R_{2t} \circ w_0 \circ R_{-t} : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Это отображение можно интерпретировать как образование подковы в направлении, перпендикулярном прямой $y = \operatorname{tg} \pi t \cdot x$, с последующим поворотом R_t на угол πt против часовой стрелки.

Пусть $S^1 = [0; 1]/(0 \sim 1)$ — окружность, наделенная естественной параметризацией $[0; 1] \rightarrow [0; 1]/(0 \sim 1) = S^1$. Отображение $E_2 : S^1 \rightarrow S^1$ вида $t \rightarrow 2t \bmod 1$ является растягивающимся эндоморфизмом окружности степени два. Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^3 вложенный полноторий $S^1 \times D^2 \subset \mathbb{R}^3$ и отображение $F : S^1 \times D^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ вида

$$(t; (x; y)) \mapsto (E_2(t); w_t(x; y)), \quad t \in S^1, \quad (x; y) \in D^2.$$

Положим $D_t = \{t\} \times D^2 \subset S^1 \times D^2$, $\mathbb{R}_t^2 = \{t\} \times \mathbb{R}^2$. В силу определения отображения F

$$F(D_t) \subset \mathbb{R}_{E_2(t)}^2 = \mathbb{R}_{2t \bmod 1}^2.$$

Отображение $F : S^1 \times D^2 \rightarrow F(S^1 \times D^2)$ является диффеоморфизмом на свой образ.

Отметим, что поскольку якобиан $J(w)$ отображениям w на D^2 равен $\frac{1}{2}$, то якобиан отображения F равен $J(F) = J(w) \cdot DE_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Поэтому F является консервативным диффеоморфизмом на свой образ. Стандартным образом пополним пространство \mathbb{R}^3 бесконечно удаленной точкой $\{\infty\}$ так, что объединение $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ отождествляется с 3-мерной сферой S^3 .

Из техники, развитой в работах [11, 32], вытекает, что f продолжается до диффеоморфизма сферы $f : S^3 \rightarrow S^3$, причем можно продолжение осуществить так, чтобы сохранялось свойство консервативности в некоторой окрестности полнотория $S^1 \times D^2$.

Полноторий $S^1 \times D^2$, вложенный в S^3 , будем называть *базовым*, и обозначим через \mathcal{B} . Положим

$$\Omega = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f(\mathcal{B}).$$

Множество Ω инвариантно относительно f [2] и не пусто, поскольку содержит в $D_0 = \{0\} \times D^2 \subset \mathcal{B}$ инвариантное нетривиальное (нульмерное) множество Ω_0 подковы Смейла [2, 61, 62]. Обозначим через $Diff^1(S^3)$ пространство диффеоморфизмов 3-сферы S^3 , наделенное C^1 топологией.

Множество Ω гиперболическое, и ограничение $f|_{\Omega}$ диффеоморфизма f на Ω имеет положительную (топологическую) энтропию. Более того, в пространстве $Diff^1(S^3)$ имеется окрестность $U(f)$ диффеоморфизма f такая, что любой диффеоморфизм $g \in U(f)$ имеет гиперболическое инвариантное множество $\Omega_g \subset \mathcal{B}$, причем диффеоморфизмы $f|_{\Omega}$, $g|_{\Omega_g}$ сопряжены и ограничение $g|_{\Omega_g}$ имеет положительную энтропию.

Рассмотрим теперь на $S^1 \times D^2$ магнитное поле \vec{B} , образованное единичными векторами, которые являются касательными векторами к кривым $S^1 \times \{z\}$, $z \in D^2$. Кривые $S^1 \times \{z\}$ считаются ориентированными в направлении возрастания параметра. Ясно, что \vec{B} можно продолжить на всю сферу S^3 до единичного (и, следовательно, бездивергентного) векторного поля. Мы предполагаем, что \vec{B} имеет нулевую диффузию (то есть рассеивания магнитной энергии не происходит). Так как эти кривые $S^1 \times \{z\}$ под действием f растягиваются в два раза, то под действием f поле \vec{B} переходит в поле $f_*(\vec{B})$ со следующим свойством: существует постоянная $\lambda > 1$ такая, что векторы поля $f_*(\vec{B})$ имеют длину, не менее чем в λ раз большую, нежели длина векторов поля \vec{B} . Аналогичное свойство имеет место для длин векторов поля $f_*^{n+1}(\vec{B})$ относительно поля $f_*^n(\vec{B})$. Если не учитывать диссипацию энергии, то отсюда следует, что энергия векторного поля $f_*^n(\vec{B})$ растет экспоненциально с показателем $\ln \lambda > 0$. Таким образом, диффеоморфизм $f : S^3 \rightarrow S^3$ является быстрым недиссипативным кинематическим динамо относительно магнитного поля \vec{B} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альвен Г., Фельтхаммар К.-Г. Космическая электродинамика. — М.: Мир, 1967.
2. Аносов Д. В., Солодов В. В. Гиперболические множества// Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направл. — 1991. — 66. — С. 12–99.
3. Арнольд В. И., Хесин Б. А. Топологические методы в гидродинамике. — М.: МЦНМО, 2007.
4. Вайнштейн С. И., Зельдович Я. Б. О происхождении магнитных полей в астрофизике (Турбулентные механизмы «динамо»)// Усп. физ. наук. — 1972. — 106. — С. 431–457.
5. Горбачев В. С., Кельнер С. Р., Сомов Б. В., Шварц А. С. Новый топологический подход к вопросу о триггере солнечных вспышек// Астрон. журн. — 1988. — 65. — С. 601–612.
6. Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Жужома Е. В., Зинина С. Х. Гетероклинические кривые диффеоморфизмов Морса—Смейла и сепараторы в магнитном поле плазмы// Нелин. динамика. — 2014. — 10. — С. 427–438.
7. Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С. Новые соотношения для потоков и диффеоморфизмов Морса—Смейла// Докл. РАН. — 2002. — 382, № 6. — С. 730–733.
8. Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С., Починка О. В. Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса—Смейла// Тр. МИАН. — 2010. — 271. — С. 111–133.
9. Гринес В. З., Починка О. В. Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три. — М.–Ижевск: НИЦ «Регул. и хаот. динамика», 2011.
10. Гринес В. З., Починка О. В. Каскады Морса—Смейла на 3-многообразиях// Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 1. — С. 129–188.

11. *Жужома Е. В., Исаенкова Н. В.* О нульмерных соленоидальных базисных множествах// *Мат. сб.* — 2011. — 202, № 3. — С. 47–68.
12. *Жужома Е. В., Исаенкова Н. В., Медведев В. С.* О топологической структуре магнитного поля областей фотосферы// *Нелин. динамика.* — 2017. — 13, № 3. — С. 399–412.
13. *Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А.* Гидромагнитное динамо как источник планетарного, солнечного и галактического магнетизма// *Усп. физ. наук.* — 1987. — 152. — С. 263–284.
14. *Каток А., Хасселблат Б.* Введение в теорию динамических систем. — М.: Факториал, 1999.
15. *Каулинг Т.* Магнитная гидродинамика. — М.: ИЛ, 1959.
16. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика в 10 томах. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. — М.: Физматлит, 2005.
17. *Молоденский М. М., Сыроватский С. И.* Магнитные поля активных областей и их нулевые точки// *Астрон. журн.* — 1977. — 54. — С. 1293–1304.
18. *Молчанов С. А., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д.* Кинематическое динамо в случайном потоке// *Усп. физ. наук.* — 1985. — 145. — С. 593–628.
19. *Моффат Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. — М.: Мир, 1980.
20. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. — М.: Мир, 1975.
21. *Прист Э. Р., Форбс Т.* Магнитное пересоединение: магнитогидродинамическая теория и приложения. — М.: ФМЛ, 2005.
22. *Соколов Д. Д.* Проблемы магнитного динамо// *Усп. физ. наук.* — 2015. — 185. — С. 643–648.
23. *Соколов Д. Д., Степанов Р. А., Фрик П. Г.* Динамо: на пути от астрофизических моделей к лабораторному эксперименту// *Усп. физ. наук.* — 2014. — 184. — С. 313–335.
24. *Сыроватский С. И.* Магнитная гидродинамика// *Усп. физ. наук.* — 1957. — 62, № 3. — С. 247–303.
25. *Эльзассер В. М.* Магнитная гидродинамика// *Усп. физ. наук.* — 1958. — 64. — С. 529–588.
26. *Alfven H.* On sunspots and the solar cycle// *Arg. F. Mat. Ast. Fys.* — 1943. — 29A. — С. 1–17.
27. *Alfven H.* Electric currents in cosmic plasmas// *Rev. Geophys. Space Phys.* — 1977. — 15. — С. 271.
28. *Vaum P., Bratenahl A.* Flux linkages of bipolar sunspot groups: a computer study// *Solar Phys.* — 1980. — 67. — С. 245–258.
29. *Beveridge C., Priest E. R., Brown D. S.* Magnetic topologies due to two bipolar regions// *Solar Phys.* — 2002. — 209, № 2. — С. 333–347.
30. *Beveridge C., Priest E. R., Brown D. S.* Magnetic topologies in the solar corona due to four discrete photospheric flux regions// *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* — 2004. — 98, № 5. — С. 429–445.
31. *Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pecou E.* Three-dimensional manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves// *Topology Appl.* — 2002. — 117. — С. 335–344.
32. *Bothe H.* The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds// *Math. Nachr.* — 1983. — 112. — С. 69–102.
33. *Brown D. S., Priest E. R.* The topological behaviour of 3D null points in the Sun's corona// *Astron. Astrophys.* — 2001. — 367. — С. 339.
34. *Childress S., Gilbert A. D.* Stretch, Twist, Fold: the Fast Dynamo. — Berlin—Heidelberg—N.Y.: Springer, 1995.
35. *Close R. M., Parnell C. E., Priest E. R.* Domain structures in complex 3D magnetic fields// *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* — 2005. — 99, № 6. — С. 513–534.
36. *Duvaut G., Lions J. L.* Inéquations en thermoélasticité et magnétohydrodynamique// *Arch. Ration. Mech. Anal.* — 1972. — 46. — С. 241–279.
37. *Elsasser W. M.* Magnetohydrodynamics// *Am. J. Phys.* — 1955. — 23. — С. 590.
38. *Fomenko A. T.* Differential Geometry and Topology. — N.Y.—London: Plenum Publ. Corp., 1987.
39. *Grines V., Medvedev T., Pochinka O.* Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. — Cham: Springer, 2016.
40. *Grines V., Medvedev T., Pochinka O., Zhuzhoma E.* On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids// *Phys. D: Nonlinear Phenom.* — 2015. — 294. — С. 1–5.
41. *Grines V. Z., Pochinka O. V.* Morse—Smale cascades on 3-manifolds// *Russ. Math. Surv.* — 2013. — 68, № 1. — С. 117–173.
42. *Grines V., Pochinka O.* Topological classification of global magnetic fields in the solar corona// *Dyn. Syst.* — 2017. — сдано в печать.
43. *Katok A., Hasselblatt B.* Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. — Cambridge—N.Y.: Cambridge University Press, 1995.
44. *Klapper I., Young L.-S.* Rigorous bounds of the fast dynamo growth rate involving topological entropy// *Commun. Math. Phys.* — 1995. — 173. — С. 623–646.
45. *Longcope D. W.* Topological and current ribbons: a model for current, reconnection and flaring in a complex, evolving corona// *Solar Phys.* — 1996. — 169. — С. 91–121.

46. *Maclean R. C., Beveridge C., Hornig G., Priest E. R.* Coronal magnetic topologies in a spherical geometry, I. Two bipolar flux sources// *Solar Phys.* — 2006. — 235, № 1-2. — С. 259–280.
47. *Maclean R., Beveridge C., Longcope D., Brown D., Priest E.* A topological analysis of the magnetic breakout model for an eruptive solar flare// *Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* — 2005. — 461. — С. 2099.
48. *Maclean R., Beveridge C., Priest E.* Coronal magnetic topologies in a spherical geometry, II. Four balanced flux sources// *Solar Phys.* — 2006. — 238. — С. 13–27.
49. *Maclean R. C., Priest E. R.* Topological aspects of global magnetic field behaviour in the solar corona// *Solar Phys.* — 2007. — 243, № 2. — С. 171–191.
50. *Moffatt H.* *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fields.* — Cambridge: Cambridge University Press, 1978.
51. *Oreshina A. V., Oreshina I. V., Somov B. V.* Magnetic-topology evolution in NOAA AR 10501 on 2003 November 18// *Astron. Astrophys.* — 2012. — 538. — С. 138.
52. *Parker E. N.* Hydromagnetic dynamo models// *Astrophys. J.* — 1955. — 122. — С. 293–314.
53. *Poincare H.* Sur les courbes definiées par une equation differentielles, III// *J. Math. Pures Appl.* — 1882. — 4, № 1. — С. 167–244.
54. *Priest E. R.* *Solar Magnetohydrodynamics.* — Dordrecht: Springer, 1982.
55. *Priest E., Bungey T., Titov V.* The 3D topology and interaction of complex magnetic flux systems// *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* — 1997. — 84. — С. 127–163.
56. *Priest E., Forbes T.* *Magnetic Reconnection: MHD Theory and Applications.* — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.
57. *Priest E., Schriever C.* Aspects of three-dimensional magnetic reconnection// *Solar Phys.* — 1999. — 190. — С. 1–24.
58. *Priest E. R., Titov V. S.* Magnetic reconnection at three-dimensional null points// *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* — 1996. — 354. — С. 2951–2992.
59. *Shu-Guang Shao, Shu Wang, Wen-Qing Xu, Yu-Li Ge.* On the local $C^{1,\alpha}$ solution of ideal magneto-hydrodynamical equations// *Discrete Contin. Dyn. Syst.* — 2007. — 37, № 4. — С. 2103–2118.
60. *Somov B. V.* *Plasma Astrophysics, Part II: Reconnection and Flares.* — N.Y.: Springer, 2013.
61. *Smale S.* Diffeomorphisms with many periodic points// *Matematika.* — 1967. — 11, № 4. — С. 88–106.
62. *Smale S.* Differentiable dynamical systems// *Bull. Am. Math. Soc.* — 1967. — 73. — С. 741–817.
63. *Sweet P. A.* The production of high energy particles in solar flares// *Nuovo Cimento Suppl.* — 1958. — 8, Ser. X. — С. 188–196.

В. З. Гринес

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
603155, Н. Новгород, Б. Печерская, 25/12

E-mail: vgrines@yandex.ru

Е. В. Жужома

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
603155, Н. Новгород, Б. Печерская, 25/12

E-mail: ezhuzhoma@hse.ru

О. В. Починка

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
603155, Н. Новгород, Б. Печерская, 25/12

E-mail: olga-pochinka@yandex.ru

Dynamical Systems and Topology of Magnetic Fields in Conducting Medium

© 2017 V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, O. V. Pochinka

Abstract. We discuss application of contemporary methods of the theory of dynamical systems with regular and chaotic hyperbolic dynamics to investigation of topological structure of magnetic fields in conducting media. For substantial classes of magnetic fields, we consider well-known physical models allowing us to reduce investigation of such fields to study of vector fields and Morse–Smale diffeomorphisms as well as diffeomorphisms with nontrivial basic sets satisfying the A axiom introduced by Smale. For the point-charge magnetic field model, we consider the problem of separator playing an important role in the reconnection processes and investigate relations between its singularities. We consider the class of magnetic fields in the solar corona and solve the problem of topological equivalency of fields in this class. We develop a topological modification of the Zeldovich funicular model of the nondissipative cinematic dynamo, constructing a hyperbolic diffeomorphism with chaotic dynamics that is conservative in the neighborhood of its transitive invariant set.

REFERENCES

1. H. Alfvén and C.-G. Fälthammar, *Kosmicheskaya elektrodinamika* [Cosmical Electrodynamics], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
2. D. V. Anosov and V. V. Solodov, “Giperbolicheskie mnozhestva” [Hyperbolic sets], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. probl. mat. Fundam. napravl.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math. Fundam. Direct.], 1991, **66**, 12–99 (in Russian).
3. V. I. Arnol’d and B. A. Khesin, *Topologicheskije metody v gidrodinamike* [Topological Methods in Hydrodynamics], MTsNMO, Moscow, 2007 (in Russian).
4. S. I. Vaynshteyn and Ya. B. Zel’dovich, “O proiskhozhdenii magnitnykh poley v astrofizike (Turbulentnye mekhanizmy «dinamo»)” [On genesis of magnetic fields in astrophysics (Turbulent mechanisms «dynamo»)], *Usp. fiz. nauk* [Progr. Phys. Sci.], 1972, **106**, 431–457 (in Russian).
5. V. S. Gorbachev, S. R. Kel’ner, B. V. Somov, and A. S. Shvarts, “Novyy topologicheskij podkhod k voprosu o trigggere solnechnykh vspyshek” [New topological approach to the problem of trigger of solar flares], *Astron. zhurn.* [Astron. J.], 1988, **65**, 601–612 (in Russian).
6. V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, E. V. Zhuzhoma, and S. Kh. Zinina, “Geteroklinicheskie krivye diffeomorfizmov Morsa–Smeyla i separatory v magnitnom pole plazmy” [Heteroclinic curves of Morse–Smale diffeomorphisms and separators in the plasma magnetic field], *Nelin. dinamika* [Nonlinear Dynamics], 2014, **10**, 427–438 (in Russian).
7. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, and V. S. Medvedev, “Novye sootnosheniya dlya potokov i diffeomorfizmov Morsa–Smeyla” [New relations for flows and Morse–Smale diffeomorphisms], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2002, **382**, No. 6, 730–733 (in Russian).
8. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, and O. V. Pochinka, “Global’nye attraktor i repeller diffeomorfizmov Morsa–Smeyla” [Global attractor and repeller of Morse–Smale diffeomorphisms], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2010, **271**, 111–133 (in Russian).
9. V. Z. Grines and O. V. Pochinka, *Vvedenie v topologicheskuyu klassifikatsiyu kaskadov na mnogoobraznykh razmernosti dva i tri* [Introduction to Topological Classification of Cascades on Manifolds of Dimension Two and Three], NITs “Regul. i khaot. dinamika,” Moscow–Izhevsk, 2011 (in Russian).
10. V. Z. Grines and O. V. Pochinka, “Kaskady Morsa–Smeyla na 3-mnogoobraznykh” [Morse–Smale cascades on 3-manifolds], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2013, **68**, No. 1, 129–188 (in Russian).
11. E. V. Zhuzhoma and N. V. Isaenkova, “O nul’mernykh solenoidal’nykh bazisnykh mnozhestvakh” [On zero-measure solenoidal basic sets], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2011, **202**, No. 3, 47–68 (in Russian).
12. E. V. Zhuzhoma, N. V. Isaenkova, and V. S. Medvedev, “O topologicheskoy strukture magnitnogo polya oblastey fotosfery” [On topological structure of magnetic field of areas], *Nelin. dinamika* [Nonlinear Dynamics], 2017, **13**, No. 3, 399–412 (in Russian).

13. Ya. B. Zel'dovich and A. A. Ruzmaykin, "Gidromagnitnoe dinamo kak istochnik planetarnogo, solnechnogo i galakticheskogo magnetizma" [Hydromagnetic dynamo as a source of planetary, solar, and galactic magnetism], *Usp. fiz. nauk* [Progr. Phys. Sci.], 1987, **152**, 263–284 (in Russian).
14. A. Katok and B. Khasselblat, *Vvedenie v teoriyu dinamicheskikh sistem* [Introduction to the Theory of Dynamical Systems], Faktorial, Moscow, 1999 (in Russian).
15. T. G. Cowling, *Magnitnaya gidrodinamika* [Magnetohydrodynamics], IL, Moscow, 1959 (Russian translation).
16. L. D. Landau and E. M. Lifshits, *Teoreticheskaya fizika v 10 tomakh. T. VIII. Elektrodinamika sploshnykh sred* [Theoretical Physics in 10 Volumes. Vol. VIII. Continuum Electrodynamics], Fizmatlit, Moscow, 2005 (in Russian).
17. M. M. Molodenskiy and S. I. Syrovatskiy, "Magnitnye polya aktivnykh oblastey i ikh nulevye tochki" [Magnetic fields of active areas and their zero points], *Astron. zhurn.* [Astron. J.], 1977, **54**, 1293–1304 (in Russian).
18. S. A. Molchanov, A. A. Ruzmaykin, and D. D. Sokolov, "Kinematicheskoe dinamo v sluchaynom potoke" [Cinematic dynamo in random flow], *Usp. fiz. nauk* [Progr. Phys. Sci.], 1985, **145**, 593–628 (in Russian).
19. G. Moffat, *Vozbuzhdenie magnitnogo polya v provodyashchey srede* [Excitation of Magnetic Field in Conductive Medium], Mir, Moscow, 1980 (in Russian).
20. Z. Nitecki, *Vvedenie v differentsial'nuyu dinamiku* [Differential Dynamics: An Introduction to the Orbit Structure of Diffeomorphisms], Mir, Moscow, 1975 (Russian translation).
21. E. Priest and T. Forbes, *Magnitnoe peresoedinenie: magnitogidrodinamicheskaya teoriya i prilozheniya* [Magnetic Reconnection: MHD Theory and Applications], FML, Moscow, 2005 (Russian translation).
22. D. D. Sokolov, "Problemy magnitnogo dinamo" [Problems of magnetic dynamo], *Usp. fiz. nauk* [Progr. Phys. Sci.], 2015, **185**, 643–648 (in Russian).
23. D. D. Sokolov, R. A. Stepanov, and P. G. Frik, "Dinamo: na puti ot astrofizicheskikh modeley k laboratornomu eksperimentu" [Dynamo: from astrophysic models to laboratory experiment], *Usp. fiz. nauk* [Progr. Phys. Sci.], 2014, **184**, 313–335 (in Russian).
24. S. I. Syrovatskiy, "Magnitnaya gidrodinamika" [Magnetohydrodynamics], *Usp. fiz. nauk* [Progr. Phys. Sci.], 1957, **62**, No. 3, 247–303 (in Russian).
25. W. M. Elsässer, "Magnitnaya gidrodinamika" [Magnetohydrodynamics], *Usp. fiz. nauk* [Progr. Phys. Sci.], 1958, **64**, 529–588 (in Russian).
26. H. Alfvén, "On sunspots and the solar cycle," *Arc. F. Mat. Ast. Fys.*, 1943, **29A**, 1–17.
27. H. Alfvén, "Electric currents in cosmic plasmas," *Rev. Geophys. Space Phys.*, 1977, **15**, 271.
28. P. Baum and A. Bratenahl, "Flux linkages of bipolar sunspot groups: a computer study," *Solar Phys.*, 1980, **67**, 245–258.
29. C. Beveridge, E. R. Priest, and D. S. Brown, "Magnetic topologies due to two bipolar regions," *Solar Phys.*, 2002, **209**, No. 2, 333–347.
30. C. Beveridge, E. R. Priest, and D. S. Brown, "Magnetic topologies in the solar corona due to four discrete photospheric flux regions," *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 2004, **98**, No. 5, 429–445.
31. Ch. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, and E. Pecou, "Three-dimensional manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves," *Topology Appl.*, 2002, **117**, 335–344.
32. H. Bothe, "The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds," *Math. Nachr.*, 1983, **112**, 69–102.
33. D. S. Brown and E. R. Priest, "The topological behaviour of 3D null points in the Sun's corona," *Astron. Astrophys.*, 2001, **367**, 339.
34. S. Childress and A. D. Gilbert, *Stretch, Twist, Fold: the Fast Dynamo*, Springer, Berlin–Heidelberg–N.Y., 1995.
35. R. M. Close, C. E. Parnell, and E. R. Priest, "Domain structures in complex 3D magnetic fields," *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 2005, **99**, No. 6, 513–534.
36. G. Duvaut and J. L. Lions, "Inéquations en thermoélasticité et magnétohydrodynamique," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1972, **46**, 241–279.
37. W. M. Elsässer, "Magnetohydrodynamics," *Am. J. Phys.*, 1955, **23**, 590.
38. A. T. Fomenko, *Differential Geometry and Topology*, Plenum Publ. Corp., N.Y.–London, 1987.
39. V. Grines, T. Medvedev, and O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, Springer, Cham, 2016.
40. V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, and E. Zhuzhoma, "On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids," *Phys. D. Nonlinear Phenom.*, 2015, **294**, 1–5.

41. V. Z. Grines and O. V. Pochinka, “Morse–Smale cascades on 3-manifolds,” *Russ. Math. Surv.*, 2013, **68**, No. 1, 117–173.
42. V. Grines and O. Pochinka, “Topological classification of global magnetic fields in the solar corona,” *Dyn. Syst.*, 2017, submitted.
43. A. Katok and B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge–N.Y., 1995.
44. I. Klapper and L.-S. Young, “Rigorous bounds of the fast dynamo growth rate involving topological entropy,” *Commun. Math. Phys.*, 1995, **173**, 623–646.
45. D. W. Longcope, “Topological and current ribbons: a model for current, reconnection and flaring in a complex, evolving corona,” *Solar Phys.*, 1996, **169**, 91–121.
46. R. C. Maclean, C. Beveridge, G. Hornig, and E. R. Priest, “Coronal magnetic topologies in a spherical geometry, I. Two bipolar flux sources,” *Solar Phys.*, 2006, **235**, No. 1-2, 259–280.
47. R. Maclean, C. Beveridge, D. Longcope, D. Brown, and E. Priest, “A topological analysis of the magnetic breakout model for an eruptive solar flare,” *Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 2005, **461**, 2099.
48. R. Maclean, C. Beveridge, and E. Priest, “Coronal magnetic topologies in a spherical geometry, II. Four balanced flux sources,” *Solar Phys.*, 2006, **238**, 13–27.
49. R. C. Maclean and E. R. Priest, “Topological aspects of global magnetic field behaviour in the solar corona,” *Solar Phys.*, 2007, **243**, No. 2, 171–191.
50. H. Moffatt, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fields*, Cambridge University Press, Cambridge, 1978.
51. A. V. Oreshina, I. V. Oreshina, and B. V. Somov, “Magnetic-topology evolution in NOAA AR 10501 on 2003 November 18,” *Astron. Astrophys.*, 2012, **538**, 138.
52. E. N. Parker, “Hydromagnetic dynamo models,” *Astrophys. J.*, 1955, **122**, 293–314.
53. H. Poincaré, “Sur les courbes définies par une équation différentielles, III,” *J. Math. Pures Appl.*, 1882, **4**, No. 1, 167–244.
54. E. R. Priest, *Solar Magnetohydrodynamics*, Springer, Dordrecht, 1982.
55. E. Priest, T. Bungey, and V. Titov, “The 3D topology and interaction of complex magnetic flux systems,” *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 1997, **84**, 127–163.
56. E. Priest and T. Forbes, *Magnetic Reconnection: MHD Theory and Applications*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
57. E. Priest and C. Schriver, “Aspects of three-dimensional magnetic reconnection,” *Solar Phys.*, 1999, **190**, 1–24.
58. E. R. Priest and V. S. Titov, “Magnetic reconnection at three-dimensional null points,” *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1996, **354**, 2951–2992.
59. Shao Shu-Guang, Wang Shu, Xu Wen-Qing, and Ge. Yu-Li, “On the local $C^{1,\alpha}$ solution of ideal magneto-hydrodynamical equations,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2007, **37**, No. 4, 2103–2118.
60. B. V. Somov, *Plasma Astrophysics, Part II: Reconnection and Flares*, Springer, N.Y., 2013.
61. S. Smale, “Diffeomorphisms with many periodic points,” *Matematika*, 1967, **11**, No. 4, 88–106.
62. S. Smale, “Differentiable dynamical systems,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1967, **73**, 741–817.
63. P. A. Sweet, “The production of high energy particles in solar flares,” *Nuovo Cimento Suppl.*, 1958, **8**, Ser. X, 188–196.

V. Z. Grines

National Research University — Higher School of Economics
25/12 Bolshaya Pecherskaya str., 603155 Nizhniy Novgorod, Russia
E-mail: vgrines@yandex.ru

E. V. Zhuzhoma

National Research University — Higher School of Economics
25/12 Bolshaya Pecherskaya str., 603155 Nizhniy Novgorod, Russia
E-mail: ezhuzhoma@hse.ru

O. V. Pochinka

National Research University — Higher School of Economics

25/12 Bolshaya Pecherskaya str., 603155 Nizhniy Novgorod, Russia
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru

ОБ ЭНТРОПИЙНЫХ РЕШЕНИЯХ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

© 2017 г. **Л. М. КОЖЕВНИКОВА**

Аннотация. Для некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений второго порядка с переменными показателями нелинейностей и L_1 -правой частью в произвольных неограниченных областях рассматривается задача Дирихле. Доказаны существование и единственность энтропийных решений в анизотропных пространствах Соболева с переменными показателями.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	475
1. Анизотропное пространство Соболева с переменными показателями	477
2. Предположения и формулировка результатов	478
3. Подготовительные сведения	479
4. Единственность решения	481
5. Существование решения	483
Список литературы	490

ВВЕДЕНИЕ

Пусть Ω — произвольная область пространства $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. В работе рассматривается задача Дирихле для уравнения вида

$$\sum_{i=1}^n (a_i(x, \nabla u))_{x_i} = |u|^{p_0(x)-2}u + a(x, u), \quad x \in \Omega; \quad (1)$$

с однородным краевым условием

$$u \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

С конца прошлого столетия ведутся активные исследования нелинейных эллиптических уравнений второго порядка

$$\sum_{i=1}^n (a_i(x, u, \nabla u))_{x_i} - a_0(x, u, \nabla u) = f \quad (3)$$

с $f \in L_1$ и мерами в качестве правых частей. Слабые решения уравнений вида (3) со степенными нелинейностями во всем пространстве \mathbb{R}^n с $f \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ исследовались в работах [14, 21, 23] и др. Существование слабых решений задачи Дирихле в ограниченной области Ω для эллиптических уравнений с правой частью $f \in L_1(\Omega)$ или ограниченной мерой Радона f , соответственно, установлено в работах [19, 20].

Ф. Бенилан, Л. Боккардо, Т. Галле, Р. Гариепи, М. Пьер, Дж. Л. Васкес для эллиптических уравнений со степенными нелинейностями с L_1 -правой частью в [16] предложили понятие энтропийного решения задачи Дирихле и доказали его существование и единственность. Вместо энтропийного решения, введенного впервые С. Н. Кружковым [7] для уравнений первого порядка, можно рассматривать также ренормализованное решение. Такие решения являются элементами того же функционального класса, которому принадлежат энтропийные решения, но в отличие от

последних удовлетворяют другому семейству интегральных соотношений. В ряде случаев понятия энтропийного и ренормализованного решения эквивалентны.

Свойства суммируемости и оценки энтропийных решений задачи Дирихле в ограниченных областях для нелинейного эллиптического уравнения (3) с условием вырождающейся коэрцитивности установлены А. А. Ковалевским [2]. Существование энтропийного решения задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с вырождающейся коэрцитивностью и L^1 -правой частью установлено в работе [9] и, в более общем случае, А. А. Ковалевским в [3].

В работе [18] введено понятие локального энтропийного решения для уравнения с p -лапласианом, поглощением и мерой Радона f :

$$\Delta_p u - |u|^{p_0-2}u = f, \quad p \in (1, n), \quad p < p_0. \quad (4)$$

В частности, М. Ф. Биде-Верон для $f \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ доказала существование локального энтропийного решения уравнения (4) в пространстве \mathbb{R}^n .

Вопросы существования и единственности ренормализованных и энтропийных решений задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка с нестепенными нелинейностями и $f \in L_1(\Omega)$ (Ω — ограниченная область) в пространствах Орлича исследовались в работах [8, 17, 27]. Теоремы существования и единственности энтропийных решений задачи Дирихле в произвольных областях для некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями доказаны автором в [4, 5].

В настоящее время широко изучаются дифференциальные уравнения и вариационные задачи, связанные с условиями $p(x)$ -роста. Интерес к исследованию был вызван тем фактом, что такие уравнения могут быть использованы для моделирования явлений, возникающих в математической физике. Электрореологические и термореологические жидкости являются двумя примерами физических полей, для которых востребованы такого рода исследования [28]. Другие важные приложения связаны с обработкой изображений и эластичностью.

В работах [10, 12, 13, 15, 22, 29, 30] для уравнений с переменными показателями нелинейностей доказаны теоремы существования и единственности ренормализованных и энтропийных решений задачи Дирихле в ограниченных областях Ω . Из наиболее близких работ к представленному здесь результату являются [22, 29]. А именно, в работе [22] Б. К. Бонзи, С. Оуаро рассматривали в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, задачу Дирихле с граничным условием (2) для изотропного уравнения

$$\sum_{i=1}^n (a_i(x, \nabla u))_{x_i} = f + a(u),$$

где $\sum_{i=1}^n (a_i(x, \nabla u))_{x_i}$ — оператор типа $p(x)$ -лапласиана, $p : \Omega \rightarrow (1, \infty)$ — измеримая функция, $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная неубывающая функция. Для $f \in L_1(\Omega)$ доказаны существование и единственность энтропийного решения.

С. Оуаро в работе [29] для анизотропного уравнения

$$\sum_{i=1}^n (a_i(x, u_{x_i}))_{x_i} = f$$

с $f \in L_1(\Omega)$ доказал существование и единственность энтропийного решения задачи Дирихле в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, с граничным условием (2). На каратеодориевы функции $a_i(x, s) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ наложены довольно ограничительные условия. В качестве примера можно взять $a_i(x, s) = |s|^{p_i(x)-2}s$, $i = 1, \dots, n$. Здесь $p_i : \bar{\Omega} \rightarrow [2, n)$ — непрерывные функции такие, что

$$\frac{\bar{p}^-(n-1)}{n(\bar{p}^- - 1)} < p_i^- < \frac{\bar{p}^-(n-1)}{n - \bar{p}^-}, \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i^-} > 1, \quad \frac{p_i^+ - p_i^- - 1}{p_i^-} < \frac{\bar{p}^- - n}{\bar{p}^-(n-1)},$$

где $\bar{p}^- = n \left(\sum_{i=1}^n 1/p_i^- \right)^{-1}$, $p_i^- = \inf_{x \in \Omega} p_i(x)$, $p_i^+ = \sup_{x \in \Omega} p_i(x)$, $i = 1, \dots, n$.

Следует отметить, что имеется немало работ по рассматриваемой тематике с краевым условием Неймана, в том числе и нелинейным (см., например, [25]), здесь мы не будем останавливаться на этих результатах.

Таким образом, в известных автору публикациях результаты установлены для энтропийных и ренормализованных решений эллиптических задач в ограниченных областях (за исключением работ [16, 18]). В настоящей статье доказаны существование и единственность энтропийных решений задачи Дирихле (1), (2) в анизотропных пространствах Соболева с переменными показателями без предположения ограниченности области Ω для существенно более широкого класса уравнений, чем в работах [22, 29] (см. ниже условия (2.1)–(2.7)).

1. АНИЗОТРОПНОЕ ПРОСТРАНСТВО СОБОЛЕВА С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

Пусть $Q \subsetneq \mathbb{R}^n$ — произвольная область. Обозначим

$$C^+(\overline{Q}) = \{p \in C(\overline{Q}) : 1 < p^- \leq p^+ < +\infty\},$$

где $p^- = \inf_{x \in Q} p(x)$, $p^+ = \sup_{x \in Q} p(x)$.

Пусть $p \in C^+(\overline{Q})$. Справедливо неравенство Юнга:

$$|zy| \leq |y|^{p(x)} + |z|^{p'(x)}, \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad x \in Q, \quad p'(x) = p(x)/(p(x) - 1), \tag{1.5}$$

кроме того, ввиду выпуклости имеет место неравенство:

$$|y + z|^{p(x)} \leq 2^{p^+-1}(|y|^{p(x)} + |z|^{p(x)}), \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad x \in Q. \tag{1.6}$$

Определим лебегово пространство с переменным показателем $L_{p(\cdot)}(Q)$ как множество измеримых на Q вещественнозначных функций v таких, что:

$$\rho_{p(\cdot),Q}(v) = \int_Q |v(x)|^{p(x)} dx < \infty.$$

Норма Люксембурга в пространстве $L_{p(\cdot)}(Q)$ определяется равенством

$$\|v\|_{L_{p(\cdot)}(Q)} = \|v\|_{p(\cdot),Q} = \inf \left\{ k > 0 \mid \rho_{p(\cdot),Q}(v/k) \leq 1 \right\}.$$

Ниже будут использоваться обозначения $\|v\|_{p(\cdot),\Omega} = \|v\|_{p(\cdot)}$, $\rho_{p(\cdot),\Omega}(v) = \rho_{p(\cdot)}(v)$. Норма пространства $L_p(Q)$ будет обозначаться как $\|v\|_{p,Q}$, причем $\|v\|_{p,\Omega} = \|v\|_p$. Пространство $L_{p(\cdot)}(Q)$ является сепарабельным рефлексивным банаховым пространством [24].

Для любых $u \in L_{p'(\cdot)}(Q)$, $v \in L_{p(\cdot)}(Q)$ справедливо неравенство Гельдера

$$\left| \int_Q u(x)v(x) dx \right| \leq 2\|u\|_{p'(\cdot),Q} \|v\|_{p(\cdot),Q}, \tag{1.7}$$

а также имеют место следующие соотношения [24]:

$$\|v\|_{p(\cdot),Q}^{p^-} - 1 \leq \rho_{p(\cdot),Q}(v) \leq \|v\|_{p(\cdot),Q}^{p^+} + 1, \tag{1.8}$$

$$(\rho_{p(\cdot),Q}(v) - 1)^{1/p^+} \leq \|v\|_{p(\cdot),Q} \leq (\rho_{p(\cdot),Q}(v) + 1)^{1/p^-}. \tag{1.9}$$

Обозначим $\vec{p}(\cdot) = (p_1(\cdot), p_2(\cdot), \dots, p_n(\cdot)) \in (C^+(\overline{Q}))^n$ и определим

$$p_+(\mathbf{x}) = \max_{i=1,n} p_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Q.$$

Анизотропное пространство Соболева с переменными показателями $\dot{H}_{\vec{p}(\cdot)}^1(Q)$ определим как пополнение пространства $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$\|v\|_{\dot{H}_{\vec{p}(\cdot)}^1(Q)} = \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{p_i(\cdot),Q}.$$

Пространство $\dot{H}_{\vec{p}(\cdot)}^1(Q)$ является рефлексивным банаховым [26].

Пусть

$$\bar{p}(x) = n \left(\sum_{i=1}^n 1/p_i(x) \right)^{-1}, \quad p_*(x) = \begin{cases} \frac{n\bar{p}(x)}{n - \bar{p}(x)}, & \bar{p}(x) < n, \\ +\infty, & \bar{p}(x) \geq n, \end{cases}$$

$$p_\infty(x) = \max\{p_*(x), p_+(x)\}.$$

Приведем теорему вложения для пространства $\dot{H}_{\vec{p}(\cdot)}^1(Q)$ [26, Теорема 2.5].

Лемма 1.1. Пусть Q — ограниченная область и $\vec{p}(\cdot) = (p_1(\cdot), p_2(\cdot), \dots, p_n(\cdot)) \in (C^+(\bar{Q}))^n$. Если $q \in C^+(\bar{Q})$ и

$$q(x) < p_\infty(x) \quad \forall x \in Q, \tag{1.10}$$

то имеет место непрерывное и компактное вложение $\dot{H}_{\vec{p}(\cdot)}^1(Q) \hookrightarrow L_{q(\cdot)}(Q)$.

Замечание 1.1. Интересная особенность пространства Соболева с переменным показателем $W_{p(\cdot)}^1(Q)$ заключается в том, что гладкие функции не плотны в нем без дополнительных предположений о степени $p(x)$. Это было отмечено В. В. Жиковым [1] в связи с эффектом Лаврентьева. Однако, если модуль непрерывности показателя $p(x)$ удовлетворяет логарифмическому условию, то гладкие функции плотны в пространстве $W_{p(\cdot)}^1(Q)$ и нет никакой путаницы в определении пространства Соболева с переменным показателем $\dot{H}_{p(\cdot)}^1(Q)$ в виде пополнения пространства $C_0^\infty(Q)$ по норме $\|\nabla \cdot\|_{p(\cdot), Q}$.

2. ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $\vec{p}(\cdot) = (p_0(\cdot), p_1(\cdot), \dots, p_n(\cdot)) \in (C^+(\bar{\Omega}))^{n+1}$. Будем считать, что

$$p_+(x) \leq p_0(x) < p_*(x), \quad x \in \Omega. \tag{2.1}$$

Предполагается, что функции $a_i(x, s)$, $a(x, s_0)$, $i = 1, \dots, n$, входящие в (1), измеримы по $x \in \Omega$ для $s_0 \in \mathbb{R}$, $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$, непрерывны по $s_0 \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^n$ для почти всех $x \in \Omega$. Функция $a(x, s_0)$ не убывает по $s_0 \in \mathbb{R}$. Кроме того, существуют положительные числа \hat{a}, \bar{a} и неотрицательные измеримые функции $\Phi_i \in L_{p'_i(\cdot)}(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$, такие, что для п.в. $x \in \Omega$ и любых $s, t \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$|a_i(x, s)| \leq \hat{a}(P(x, s))^{1/p'_i(x)} + \Phi_i(x), \quad i = 1, \dots, n; \tag{2.2}$$

$$(a(x, s) - a(x, t)) \cdot (s - t) > 0, \quad s \neq t; \tag{2.3}$$

$$a(x, s) \cdot s \geq \bar{a}P(x, s), \tag{2.4}$$

где $P(x, s) = \sum_{i=1}^n |s_i|^{p_i(x)}$, $s \cdot t$ обозначает скалярное произведение $s = (s_1, \dots, s_n)$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ и $a(x, s) = (a_1(x, s), \dots, a_n(x, s))$. Кроме того, будем использовать обозначения $P'(x, s) = \sum_{i=1}^n |s_i|^{p'_i(x)}$, $\mathbf{P}(x, s_0, s) = P(x, s) + |s_0|^{p_0(x)}$.

Применяя (1.6), из неравенств (2.2) выводим оценки:

$$|a_i(x, s)|^{p'_i(x)} \leq \hat{A}P(x, s) + \Psi_i(x), \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.2'}$$

с неотрицательными измеримыми функциями $\Psi_i \in L_1(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$.

Сформулируем дополнительные условия, которые используются в теореме существования. Положим $a(x, s_0) = a(x, 0) + b(x, s_0)$. Будем считать, что

$$a(x, 0) \in L_1(\Omega), \tag{2.5}$$

$$\sup_{|s_0| \leq k} |b(x, s_0)| = G_k(x) \in L_{1,loc}(\Omega). \tag{2.6}$$

Функция $b(x, s_0)$ каратеодориева, неубывающая по $s_0 \in \mathbb{R}$, $b(x, 0) = 0$ для п.в. $x \in \Omega$, поэтому для п.в. $x \in \Omega$, $s_0 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$b(x, s_0)s_0 \geq 0. \tag{2.7}$$

Через $L_{\vec{p}(\cdot)}(\Omega)$ обозначим пространство $L_{p_1(\cdot)}(\Omega) \times \dots \times L_{p_n(\cdot)}(\Omega)$ с нормой

$$\|v\|_{L_{\vec{p}(\cdot)}(\Omega)} = \|v\|_{\vec{p}(\cdot)} = \|v_1\|_{p_1(\cdot)} + \dots + \|v_n\|_{p_n(\cdot)},$$

$$v = (v_1, \dots, v_n) \in L_{\vec{p}(\cdot)}(\Omega).$$

А через $\mathbf{L}_{\vec{p}(\cdot)}(\Omega)$ обозначим пространство $L_{p_0(\cdot)}(\Omega) \times L_{\vec{p}(\cdot)}(\Omega)$ с нормой

$$\|v\|_{\mathbf{L}_{\vec{p}(\cdot)}(\Omega)} = \|v_0\|_{p_0(\cdot)} + \|v\|_{\vec{p}(\cdot)}, \quad v = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{L}_{\vec{p}(\cdot)}(\Omega).$$

Определим пространство Соболева с переменными показателями $\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|v\|_{\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)} = \|v\|_{p_0(\cdot)} + \|v\|_{\dot{H}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)}.$$

Определим функцию

$$T_k(r) = \begin{cases} k & \text{при } r > k, \\ r & \text{при } |r| \leq k, \\ -k & \text{при } r < -k. \end{cases}$$

Введем обозначение $\langle u \rangle = \int_{\Omega} u dx$.

Определение 2.1. Энтропийным решением задачи (1), (2) называется измеримая функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

1. $A(x) = a(x, u) \in L_1(\Omega)$;
2. $T_k(u) \in \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$ при всех $k > 0$;
3. при всех $k > 0$, $\xi(x) \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство:

$$\langle (a(x, u) + |u|^{p_0(x)-2}u)T_k(u - \xi) \rangle + \langle a(x, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - \xi) \rangle \leq 0. \quad (2.8)$$

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия (2.1)–(2.4) и u^1, u^2 — энтропийные решения задачи (1), (2), тогда $u^1 = u^2$ в Ω .

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия (2.1)–(2.7), тогда существует энтропийное решение задачи (1), (2).

3. ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Все постоянные, встречающиеся ниже в работе, положительны.

Пусть $\chi_G(x)$ — характеристическая функция множества G . Из условия 2 определения энтропийного решения следует, что для любого $k > 0$

$$\nabla T_k(u) = \chi_{\{|u| < k\}} \nabla u \in L_{\vec{p}(\cdot)}(\Omega). \quad (3.1)$$

Отсюда, применяя (2.2'), устанавливаем, что для любого $k > 0$

$$\chi_{\{|u| < k\}} a(x, \nabla u) \in L_{\vec{p}'(\cdot)}(\Omega). \quad (3.2)$$

Лемма 3.1. Если u — энтропийное решение задачи (1), (2), тогда для всех $k > 0$ справедливо неравенство

$$\int_{\{\Omega: |u| < k\}} P(x, u, \nabla u) dx + k \int_{\{\Omega: |u| \geq k\}} |u|^{p_0(x)-1} dx \leq C_1 k. \quad (3.3)$$

Доказательство. Согласно неравенству (2.8) и условию 1 для $\xi = 0$ имеем

$$\int_{\Omega} |u|^{p_0(x)-2} u T_k(u) dx + \int_{\{\Omega: |u| < k\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla u dx \leq - \int_{\Omega} a(x, u) T_k(u) dx \leq k \|A\|_1.$$

Применяя неравенство (2.4), устанавливаем

$$k \int_{\{\Omega: |u| \geq k\}} |u|^{p_0(x)-1} dx + \int_{\{\Omega: |u| < k\}} |u|^{p_0(x)} dx + \bar{a} \int_{\{\Omega: |u| < k\}} P(x, \nabla u) dx \leq k \|A\|_1.$$

Отсюда имеем (3.3). □

Лемма 3.2. Пусть измеримая функция $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что при всех $k > 0$ имеем $T_k v \in \overset{\circ}{W}_{\mathbb{P}(\cdot)}^1(\Omega)$ и справедливо неравенство

$$\int_{\{\Omega:|v|\geq k\}} |v|^{p_0(x)-1} dx \leq C_2, \quad (3.4)$$

тогда

$$\text{meas} \{\Omega : |v| \geq k\} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty; \quad (3.5)$$

$$|v|^{p_0(x)-1} \in L_1(\Omega). \quad (3.6)$$

Доказательство. Включение (3.6) является очевидным следствием (3.4). Кроме того, из неравенства (3.4) следует

$$k^{p_0^- - 1} \text{meas} \{\Omega : |v| \geq k\} \leq C_2, \quad k \geq 1,$$

отсюда имеем (3.5). \square

Замечание 3.1. Если u — энтропийное решение задачи (1), (2), то из лемм 3.1, 3.2 следует

$$\text{meas} \{\Omega : |u| \geq k\} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty; \quad (3.7)$$

$$|u|^{p_0(x)-1} \in L_1(\Omega). \quad (3.8)$$

Лемма 3.3. Пусть измеримая функция $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что при всех $k > 0$ имеем $T_k v \in \overset{\circ}{W}_{\mathbb{P}(\cdot)}^1(\Omega)$ и справедливо неравенство

$$\int_{\{\Omega:|v|<k\}} P(x, \nabla v) dx + k \int_{\{\Omega:|v|\geq k\}} |v|^{p_0(x)-1} dx \leq C_3 k, \quad (3.9)$$

тогда

$$\text{meas} \{\Omega : P(x, \nabla v) \geq h\} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow \infty. \quad (3.10)$$

Доказательство. Положим $\Phi(k, h) = \text{meas} \{\Omega : |v| \geq k, P(x, \nabla v) \geq h\}$, $k, h > 0$. Выше установлено (см. (3.5)), что

$$\Phi(k, 0) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Поскольку функция $h \rightarrow \Phi(k, h)$ невозрастающая, то для $k, h > 0$ справедливы неравенства

$$\Phi(0, h) \leq \frac{1}{h} \int_0^h \Phi(0, \varrho) d\varrho \leq \Phi(k, 0) + \frac{1}{h} \int_0^h (\Phi(0, \varrho) - \Phi(k, \varrho)) d\varrho. \quad (3.11)$$

Отметим, что

$$\Phi(0, \varrho) - \Phi(k, \varrho) = \text{meas} \{\Omega : |v| < k, P(x, \nabla v) \geq \varrho\}.$$

Поэтому из (3.9) следует, что

$$\int_0^\infty (\Phi(0, \varrho) - \Phi(k, \varrho)) d\varrho = \int_{\{\Omega:|v|<k\}} P(x, \nabla v) dx \leq C_3 k.$$

Теперь, из (3.11) получаем неравенство

$$\Phi(0, h) \leq \Phi(k, 0) + C_3 k/h.$$

Выбирая k так, чтобы $\Phi(k, 0) < \varepsilon$, затем выбирая h , добиваемся неравенства $\Phi(0, h) < 2\varepsilon$. Тем самым (3.10) установлено. \square

Лемма 3.4. Пусть $p \in C^+(\overline{\Omega})$, $v^m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, v — такие функции из $L_{p(\cdot)}(\Omega)$, что $\{v^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ ограничена в $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ и

$$v^m \rightarrow v, \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{п.в. в } \Omega,$$

тогда $v^m \rightharpoonup v$ слабо в $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ при $m \rightarrow \infty$.

Доказательство леммы 3.4 для ограниченной области проведено в [11], для неограниченной области оно также справедливо.

Лемма 3.5. *Если u является энтропийным решением задачи (1), (2), то неравенство (2.8) справедливо для любой функции $\xi \in \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$.*

Доказательство. По определению пространства $\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ существует последовательность $\xi^m \in C_0^\infty(\Omega)$, ограниченная в $L_\infty(\Omega)$, такая, что $\nabla \xi^m \rightarrow \nabla \xi$ в $L_{\vec{p}(\cdot)}(\Omega)$, $\xi^m \rightarrow \xi$ в $L_{p_0(\cdot)}(\Omega)$ при $m \rightarrow \infty$. Отсюда следует сходимость $\xi^m \rightarrow \xi$, $\nabla \xi^m \rightarrow \nabla \xi$ в $L_{1,\text{loc}}(\Omega)$ при $m \rightarrow \infty$, а значит можно выделить подпоследовательность (обозначим ее так же) такую, что $\xi^m \rightarrow \xi$, $\nabla \xi^m \rightarrow \nabla \xi$ п.в. в Ω . Тогда для любого $k > 0$ имеют место сходимости:

$$T_k(u - \xi^m) \rightarrow T_k(u - \xi), \quad \nabla T_k(u - \xi^m) \rightarrow \nabla T_k(u - \xi), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{п.в. в } \Omega. \quad (3.12)$$

Пусть $\widehat{k} = k + \sup_{m \in \mathbb{N}} (\|\xi^m\|_\infty, \|\xi\|_\infty)$, тогда

$$|\nabla T_k(u - \xi^m)| \leq |\nabla T_{\widehat{k}}(u)| + |\nabla \xi^m|, \quad x \in \Omega, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Поскольку сходящаяся последовательность $\nabla \xi^m$ ограничена в $L_{\vec{p}(\cdot)}(\Omega)$, то отсюда, согласно (3.1), следует ограниченность норм $\|\nabla T_k(u - \xi^m)\|_{\vec{p}(\cdot)}$, $m \in \mathbb{N}$. Применяя (3.12), пользуясь леммой 3.4, при любом $k > 0$ имеем

$$\nabla T_k(u - \xi^m) \rightarrow \nabla T_k(u - \xi), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{в } L_{\vec{p}(\cdot)}(\Omega). \quad (3.13)$$

Теперь перейдем к пределу при $m \rightarrow \infty$ в неравенстве

$$\int_{\Omega} (a(x, u) + |u|^{p_0(x)-2} u) T_k(u - \xi^m) dx + \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - \xi^m) dx \leq 0.$$

Поскольку $a(x, u)$, $|u|^{p_0(x)-2} u \in L_1(\Omega)$ (см. определение 2.1 и (3.8)), то в первом слагаемом, применяя (3.12), согласно теореме Лебега, можно перейти к пределу при $m \rightarrow \infty$. Ввиду того, что $a(x, \nabla u) \chi_{\{|u| < \widehat{k}\}} \in L_{\vec{p}'(\cdot)}(\Omega)$ (см. (3.2)), применяя (3.13), устанавливаем, что второе слагаемое последнего неравенства также имеет предел при $k \rightarrow \infty$. \square

Замечание 3.2. В дальнейшем, чтобы избежать громоздкости в рассуждениях, вместо утверждения типа «из последовательности u^m можно выделить подпоследовательность (обозначим ее так же) сходящуюся п.в. в Ω при $m \rightarrow \infty$ » будем писать просто «последовательность u^m выборочно сходится п.в. в Ω при $m \rightarrow \infty$ ». Соответственно, будем использовать термин «выборочно слабо сходится» и т.п.

Лемма 3.6. *Пусть $(X, \mathcal{T}, \text{meas})$ — измеримое пространство такое, что $\text{meas}(X) < \infty$. Пусть $\gamma : X \rightarrow [0, +\infty]$ — измеримая функция такая, что $\text{meas}\{x \in X : \gamma(x) = 0\} = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что неравенство*

$$\int_Q \gamma(x) dx < \delta$$

влечет $\text{meas } Q < \varepsilon$ [19, лемма 2].

4. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим при $k, h > 0$ функцию $T_{k,h}(r) = T_k(r - T_h(r))$. Очевидно,

$$T_{k,h}(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } |r| < h, \\ r - h \text{ sign } r & \text{при } h \leq |r| < k + h, \\ k \text{ sign } r & \text{при } |r| \geq k + h. \end{cases}$$

Пусть u — энтропийное решение задачи (1), (2). Зафиксировав $k, h > 0$, положим в (2.8) $\xi = T_h(u) \in L_\infty(\Omega) \cap \dot{W}_{\frac{1}{p(\cdot)}}^1(\Omega)$. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |u|^{p_0(x)-2} u T_{k,h}(u) dx + \int_{\Omega} a \cdot \nabla T_{k,h}(u) dx = \\ & = k \int_{\{\Omega: |u| \geq k+h\}} |u|^{p_0(x)-1} dx + \int_{\{\Omega: h \leq |u| < k+h\}} |u|^{p_0(x)-2} u T_{k,h}(u) + \int_{\{\Omega: h \leq |u| < k+h\}} a \cdot \nabla u dx \leq \\ & \leq - \int_{\Omega} a(x, u) T_{k,h}(u) dx \leq k \int_{\{\Omega: h \leq |u|\}} |A| dx. \end{aligned}$$

Применяя (2.4), выводим

$$k \int_{\{\Omega: |u| \geq k+h\}} |u|^{p_0(x)-1} dx + \bar{a} \int_{\{\Omega: h \leq |u| < k+h\}} P(x, \nabla u) dx \leq k \int_{\{\Omega: h \leq |u|\}} |A| dx. \tag{4.1}$$

Поскольку $A \in L_1(\Omega)$, то из (3.7) следует, что правая часть в (4.1) стремится к нулю при $h \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть u^1, u^2 — энтропийные решения задачи (1), (2). В неравенстве (2.8) для u^1 положим $\xi = T_h(u^2)$, а для u^2 положим $\xi = T_h(u^1)$, $h > k$. Сложив интегральные неравенства, получим

$$\begin{aligned} I(h, k) &= \int_{\Omega^1(h, k)} A^1 \cdot \nabla(u^1 - T_h(u^2)) dx + \int_{\Omega^2(h, k)} A^2 \cdot \nabla(u^2 - T_h(u^1)) dx \leq \tag{4.2} \\ &\leq - \int_{\Omega(h, k)} (A^1 + |u^1|^{p_0(x)-2} u^1) T_k(u^1 - T_h(u^2)) dx - \int_{\Omega(h, k)} (A^2 + |u^2|^{p_0(x)-2} u^2) T_k(u^2 - T_h(u^1)) dx = J(h, k). \end{aligned}$$

Здесь $A^i(x) = a(x, \nabla u^i)$, $A^i(x) = a(x, u^i)$, $\Omega^i(k, h) = \{x \in \Omega : |u^i - T_h(u^{3-i})| < k\}$, $i = 1, 2$.

Множества $\Omega^1(h, k), \Omega^2(h, k)$ представляются в виде объединения непересекающихся подмножеств: $\Omega^1(h, k) = \Omega^{12}(h, k) \cup \Omega_1^1(h, k) \cup \Omega_2^1(h, k)$, $\Omega^2(h, k) = \Omega^{12}(h, k) \cup \Omega_1^2(h, k) \cup \Omega_2^2(h, k)$,

$$\Omega^{12}(h, k) = \{x \in \Omega : |u^1 - u^2| < k, |u^1| < h, |u^2| < h\},$$

$$\Omega_{3-i}^i(h, k) = \{x \in \Omega : |u^i - h \operatorname{sign} u^{3-i}| < k, |u^{3-i}| \geq h\}, \quad i = 1, 2,$$

$$\Omega_i^i(h, k) = \{x \in \Omega : |u^i - u^{3-i}| < k, |u^i| \geq h, |u^{3-i}| < h\}, \quad i = 1, 2.$$

Интегралы в левой части (4.2) от функций $A^i \cdot \nabla(u^i - T_h(u^{3-i}))$, $i = 1, 2$, по множеству $\Omega^{12}(h, k)$ принимают вид:

$$\int_{\Omega^{12}(h, k)} (A^1 - A^2) \cdot \nabla(u^1 - u^2) dx = I^{12}(h, k). \tag{4.3}$$

Интегралы от функций $A^i \cdot \nabla(u^i - T_h(u^{3-i}))$ по множествам $\Omega_{3-i}^i(h, k)$, $i = 1, 2$, соответственно, благодаря (2.4), неотрицательны:

$$\int_{\Omega_2^1(h, k)} A^1 \cdot \nabla u^1 dx + \int_{\Omega_1^2(h, k)} A^2 \cdot \nabla u^2 dx \geq 0. \tag{4.4}$$

Наконец, пользуясь (2.4), получаем:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1^1(h, k)} A^1 \cdot \nabla(u^1 - u^2) dx + \int_{\Omega_2^2(h, k)} A^2 \cdot \nabla(u^2 - u^1) dx \geq \\ & \geq - \int_{\Omega_1^1(h, k)} A^1 \cdot \nabla u^2 dx - \int_{\Omega_2^2(h, k)} A^2 \cdot \nabla u^1 dx = -I_1^1(h, k) - I_2^2(h, k). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Соединяя (4.3)–(4.5), устанавливаем оценку

$$I(h, k) \geq I^{12}(h, k) - I^3(h, k), \quad I^3(h, k) = I_1^1(h, k) + I_2^2(h, k).$$

Покажем, что $I^3(h, k) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow \infty$. Используя (1.5), оценим интеграл

$$|I_1^1(h, k)| \leq \|\chi_{\{\Omega: h \leq |u^1| < h+k\}} P'(x, A^1)\|_1 + \|\chi_{\{\Omega: h-k \leq |u^2| < h\}} P(x, \nabla u^2)\|_1.$$

Применяя (4.1), (3.2), (3.7), устанавливаем, что $I_1^1(h, k) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow \infty$. Аналогично оценивается интеграл $I_2^2(h, k)$.

Очевидно представление: $\Omega = \tilde{\Omega}^{12}(h) \cup \tilde{\Omega}^1(h) \cup \tilde{\Omega}^2(h)$,

$$\tilde{\Omega}^{12}(h) = \{x \in \Omega : |u^1| < h, |u^2| < h\}, \quad \tilde{\Omega}^i(h) = \{x \in \Omega : |u^i| \geq h\}, \quad i = 1, 2.$$

Для интегралов в правой части неравенства (4.2) от функций $-(A^i + |u^i|^{p_0(x)-2}u^i)T_k(u^i - T_h(u^{3-i}))$, $i = 1, 2$, по множеству $\tilde{\Omega}^{12}(h)$, ввиду неубывания функций $a(x, s_0)$, $|s_0|^{p_0(x)-2}s_0$ по s_0 , имеем:

$$J^{12}(h) = - \int_{\tilde{\Omega}^{12}(h)} (a(x, u^1) - a(x, u^2) + |u^1|^{p_0(x)-2}u^1 - |u^2|^{p_0(x)-2}u^2)T_k(u^1 - u^2)dx \leq 0.$$

Для интегралов от тех же функций по множеству $\tilde{\Omega}^1(h)$ получаем оценку:

$$|J^1(h)| \leq k \int_{\tilde{\Omega}^1(h)} (|A^1| + |A^2| + |u^1|^{p_0(x)-1} + |u^2|^{p_0(x)-1})dx. \quad (4.6)$$

Аналогичная оценка имеет место для интегралов от тех же функций по множеству $\tilde{\Omega}^2(h)$:

$$|J^2(h)| \leq k \int_{\tilde{\Omega}^2(h)} (|A^1| + |A^2| + |u^1|^{p_0(x)-1} + |u^2|^{p_0(x)-1})dx. \quad (4.7)$$

Поскольку $A^1, A^2 \in L_1(\Omega)$, $|u^1|^{p_0(x)-1}, |u^2|^{p_0(x)-1} \in L_1(\Omega)$ и мера множеств $\tilde{\Omega}^1(h), \tilde{\Omega}^2(h)$ стремится к нулю при $h \rightarrow \infty$ (см. (3.7)), то из оценок (4.6), (4.7) следует, что $\lim_{h \rightarrow \infty} (|J^1(h)| + |J^2(h)|) = 0$.

Таким образом, предельный переход в (4.2) дает соотношение

$$\lim_{h \rightarrow \infty} I^{12}(h, k) = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\Omega^{12}(h, k)} (A^1 - A^2) \cdot \nabla(u^1 - u^2)dx \leq 0.$$

Множество $\Omega^{12}(h, k)$ при $h \rightarrow \infty$ сходится к $\hat{\Omega}^{12}(k) = \{x \in \Omega \mid |u^1 - u^2| \leq k\}$, поэтому при любом $k > 0$ справедливо неравенство

$$\lim_{h \rightarrow \infty} I^{12}(h) = \int_{\hat{\Omega}^{12}(k)} (a(x, \nabla u^1) - a(x, \nabla u^2)) \cdot \nabla(u^1 - u^2)dx \leq 0.$$

Это противоречит условию (2.3), поэтому $\nabla(u^1 - u^2) = 0$ п.в. в $\hat{\Omega}^{12}(k)$ при любом $k > 0$. Отсюда следует, что $u^1 = u^2$ п.в. в Ω . □

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^n (a_i(x, \nabla u))_{x_i} - a_0(x, u) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (5.1)$$

Пусть существуют положительные числа \hat{a}, \bar{a} и измеримые неотрицательные функции $\phi \in L_1(\Omega)$, $\Phi_i \in L_{p'_i(\cdot)}(\Omega)$, $i = 0, 1, \dots, n$, такие, что для п.в. $x \in \Omega$ и любых $s = (s_0, s) \in \mathbb{R}^{n+1}$ справедливы неравенства

$$|a_0(x, s_0)| \leq \hat{a}|s_0|^{p_0(x)-1} + \Phi_0(x), \quad |a_i(x, s)| \leq \hat{a}(P(x, s))^{1/p'_i(x)} + \Phi_i(x), \quad i = 1, \dots, n; \quad (5.2)$$

$$a_0(x, s_0)s_0 + \sum_{i=1}^n a_i(x, s)s_i \geq \bar{a}\mathbf{P}(x, s_0, s) - \phi(x). \quad (5.3)$$

Определение 5.1. Обобщенным решением задачи (5.1), (2) назовем функцию $u \in \dot{W}_{\mathbf{P}(\cdot)}^1(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\langle a_0(x, u)v \rangle + \langle a(x, \nabla u) \cdot \nabla v \rangle = 0 \quad (5.4)$$

для любой функции $v \in \dot{W}_{\mathbf{P}(\cdot)}^1(\Omega)$.

В частности, в [6] доказана

Теорема 5.1. Если выполнены условия (2.3), (5.2), (5.3), (2.1), то существует обобщенное решение задачи (5.1), (2).

На основе теоремы 5.1 строится

Доказательство теоремы 2.2. Шаг 1. Выберем последовательность функций $A^m(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ так, чтобы

$$A^m(x) \rightarrow A^0(x) = a(x, 0), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{в } L_1(\Omega) \quad (5.5)$$

и при этом

$$\|A^m\|_1 \leq \|A^0\|_1, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (5.6)$$

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^n (a_i(x, \nabla u))_{x_i} = a_0^m(x, u), \quad m \in \mathbb{N}, \quad (5.7)$$

с функцией $a_0^m(x, s_0) = A^m(x) + b^m(x, s_0) + |s_0|^{p_0(x)-2}s_0$. Здесь $b^m(x, s_0) = T_m(b(x, s_0))\chi_{\Omega(m)}$, где $\Omega(m) = \{x \in \Omega : |x| < m\}$. Очевидно, что

$$|b^m(x, s_0)| \leq |b(x, s_0)|, \quad x \in \Omega, \quad s_0 \in \mathbb{R}. \quad (5.8)$$

Кроме того, применяя (2.7), устанавливаем неравенство

$$b^m(x, s_0)s_0 \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad s_0 \in \mathbb{R}. \quad (5.9)$$

Обобщенным решением задачи (5.7), (2) является функция $u^m \in \dot{W}_{\mathbf{P}(\cdot)}^1(\Omega)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\langle (A^m(x) + T_m(b(x, u^m)))\chi_{\Omega(m)} + |u^m|^{p_0(x)-2}u^m v \rangle + \langle a(x, \nabla u^m) \cdot \nabla v \rangle = 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (5.10)$$

для любой функции $v \in \dot{W}_{\mathbf{P}(\cdot)}^1(\Omega)$.

Для функций $a(x, s)$, $a_0^m(x, s_0)$ проверим условия (5.2), (5.3). Очевидно, что

$$|b^m(x, s_0)| = |T_m(b(x, s_0))|\chi_{\Omega(m)} \leq m\chi_{\Omega(m)} \in L_{p'_0(\cdot)}(\Omega),$$

поэтому устанавливаем

$$|a_0^m(x, s_0)| \leq |A^m(x)| + |b^m(x, s_0)| + |s_0|^{p_0(x)-1} \leq |s_0|^{p_0(x)-1} + \Phi_0^m(x), \quad \Phi_0^m \in L_{p'_0(\cdot)}(\Omega). \quad (5.11)$$

Из (2.2), (5.11) следуют неравенства (5.2).

Далее, применяя (1.5), (5.9), выводим

$$a_0^m(x, s_0)s_0 = (A^m(x) + b^m(x, s_0) + |s_0|^{p_0(x)-2}s_0)s_0 \geq |s_0|^{p_0(x)} - \varepsilon|s_0|^{p_0(x)} - C(\varepsilon)|A^m|_{p'_0(x)}.$$

Отсюда, выбирая $\varepsilon < 1$, получаем неравенство

$$a_0^m(x, s_0)s_0 \geq (1 - \varepsilon)|s_0|^{p_0(x)} - \phi_0^m(x), \quad \phi_0^m(x) \in L_1(\Omega). \quad (5.12)$$

Соединяя (2.4), (5.12), устанавливаем неравенство (5.3).

Согласно теореме 5.1 при каждом $m \in \mathbb{N}$ существует $u^m \in \dot{W}_{\mathbf{P}(\cdot)}^1(\Omega)$ — обобщенное решение задачи (5.7), (2). Единственность решения задачи (5.7), (2) следует из условия строгой монотонности (2.3) и неубывания функции $a(x, s_0)$ по $s_0 \in \mathbb{R}$.

Шаг 2. В (5.10) положив $v = T_{k,h}(u^m)$, учитывая (5.9), будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{\{\Omega: h \leq |u^m| < k+h\}} a(x, \nabla u^m) \cdot \nabla u^m dx + k \int_{\{\Omega: |u^m| \geq k+h\}} \left(|b^m(x, u^m)| + |u^m|^{p_0(x)-1} \right) dx + \\ & + \int_{\{\Omega: h \leq |u^m| < k+h\}} \left(b^m(x, u^m) + |u^m|^{p_0(x)-2} u^m \right) (u^m - h \operatorname{sign} u^m) dx \leq k \int_{\{\Omega: |u^m| \geq h\}} |A^m| dx. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Ввиду (5.9) для $h \leq |u^m|$ справедливо неравенство $(b^m(x, u^m) + |u^m|^{p_0(x)-2} u^m)(u^m - h \operatorname{sign} u^m) \geq 0$. Учитывая это, из (5.13) выводим

$$\begin{aligned} & \int_{\{\Omega: h \leq |u^m| < k+h\}} a(x, \nabla u^m) \cdot \nabla u^m dx + \\ & + k \int_{\{\Omega: |u^m| \geq k+h\}} \left(|b^m(x, u^m)| + |u^m|^{p_0(x)-1} \right) dx \leq k \int_{\{\Omega: |u^m| \geq h\}} |A^m| dx. \end{aligned}$$

С помощью (2.4), согласно (5.6), последнее неравенство приводится к виду:

$$\begin{aligned} \bar{a} \int_{\{\Omega: h \leq |u^m| < k+h\}} P(x, \nabla u^m) dx + k \int_{\{\Omega: |u^m| \geq k+h\}} \left(|b^m(x, u^m)| + |u^m|^{p_0(x)-1} \right) dx \leq \\ \leq k \int_{\{\Omega: |u^m| \geq h\}} |A^m| dx \leq k \|A^0\|_1, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Теперь в качестве пробной функции в (5.10) возьмем $T_k(u^m)$. Применяя (5.6), устанавливаем

$$\begin{aligned} & \int_{\{\Omega: |u^m| < k\}} a(x, \nabla u^m) \cdot \nabla u^m dx + k \int_{\{\Omega: |u^m| \geq k\}} \left(|b^m(x, u^m)| + |u^m|^{p_0(x)-1} \right) dx + \\ & + \int_{\{\Omega: |u^m| < k\}} |u^m|^{p_0(x)} dx \leq k \|A^m\|_1 \leq k \|A^0\|_1. \end{aligned}$$

Отсюда, используя неравенство (2.4), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\{\Omega: |u^m| < k\}} P(x, \nabla u^m) dx + k \int_{\{\Omega: |u^m| \geq k\}} \left(|b^m(x, u^m)| + |u^m|^{p_0(x)-1} \right) dx + \\ & + \int_{\{\Omega: |u^m| < k\}} |u^m|^{p_0(x)} dx \leq k C_1, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Из оценки (5.15) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |T_k(u^m)|^{p_0(x)} dx = \int_{\{\Omega: |u^m| < k\}} |u^m|^{p_0(x)} dx + \int_{\{\Omega: |u^m| \geq k\}} k^{p_0(x)} dx \leq \\ & \leq \int_{\{\Omega: |u^m| < k\}} |u^m|^{p_0(x)} dx + k \int_{\{\Omega: |u^m| \geq k\}} |u^m|^{p_0(x)-1} dx \leq k C_1, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Кроме того, из (5.15) следует оценка

$$\int_{\{\Omega: |u^m| < k\}} P(x, \nabla u^m) dx = \int_{\Omega} P(x, \nabla T_k(u^m)) dx \leq C_1 k, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (5.17)$$

Ввиду произвольности $k > 0$ из неравенства (5.15) имеем оценку

$$\|b^m(x, u^m)\|_1 + \| |u^m|^{p_0(x)-1} \|_1 \leq C_1, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (5.18)$$

И наконец, благодаря (5.8), (2.6), устанавливаем:

$$\begin{aligned} \sup_{|u^m| \leq k} (|b^m(x, u^m)| + |u^m|^{p_0(x)-1}) &\leq \sup_{|u^m| \leq k} |b(x, u^m)| + k^{p_0^+-1} + 1 = \\ &= G_k(x) + k^{p_0^+-1} + 1 \in L_{1, \text{loc}}(\Omega), \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Шаг 3. Из (5.15), согласно лемме 3.2, имеем:

$$\text{meas}(\Omega : |u^m| \geq h) \rightarrow 0, \quad h \rightarrow \infty, \quad \text{равномерно по } m \in \mathbb{N}. \quad (5.20)$$

Установим сходимость:

$$u^m \rightarrow u, \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{п.в. в } \Omega. \quad (5.21)$$

Пусть $\eta_R(r) = \min(1, \max(0, R + 1 - r))$. Из оценки (5.17), применяя (1.6), выводим:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} P(x, \nabla(\eta_R(|x|)T_k(u^m))) dx &\leq C_2 \int_{\{\Omega: |u^m| < k\}} P(x, \nabla u^m) dx + C_2 \int_{\Omega} P(x, T_k(u^m)) \nabla \eta_R(|x|) dx \leq \\ &\leq C_3(k, R), \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Отсюда, при любых фиксированных $k, R > 0$ следует ограниченность последовательности $\{\eta_R(|x|)T_k(u^m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ в $\dot{H}_{\overline{P}(\cdot)}^1(\Omega(R + 1))$. По лемме 1.1, согласно условию (2.1), пространство $\dot{H}_{\overline{P}(\cdot)}^1(\Omega(R + 1))$ компактно вложено в пространство $L_{p_0(\cdot)}(\Omega(R + 1))$. Таким образом, для любых фиксированных $k, R > 0$ установлена выборочная сходимость $\eta_R(|x|)T_k(u^m) \rightarrow v_k$ в $L_{p_0(\cdot)}(\Omega(R + 1))$ при $m \rightarrow \infty$. Отсюда следует сходимость $T_k(u^m) \rightarrow v_k$ в $L_{p_0(\cdot)}(\Omega(R))$, а также выборочная сходимость $T_k(u^m) \rightarrow v_k$ почти всюду в $\Omega(R)$ при $m \rightarrow \infty$ для $k \in \mathbb{N}$. Диагональным процессом устанавливается, что найдется измеримая функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $v_k = T_k(u)$ и $u^m \rightarrow u$ п.в. в $\Omega(R)$ для любого $R > 0$. Отсюда следует сходимость (5.21).

Из сходимости $u^m \rightarrow u$ п.в. в $\Omega(R)$ для любого $R > 0$ следует сходимость по мере, а значит и фундаментальность u^m по мере:

$$\text{meas} \{\Omega(R) : |u^m - u^l| \geq \nu\} \rightarrow 0 \quad \text{при } m, l \rightarrow \infty \quad \text{для любого } \nu > 0. \quad (5.22)$$

Шаг 4. Из (5.17), (2.2') при любом $k > 0$ имеем оценку:

$$\|P'(x, a(x, \nabla u^m))\chi_{\{\Omega: |u^m| < k\}}\|_1 \leq C_4(k), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (5.23)$$

Из неравенства (5.15), согласно лемме 3.3, имеем:

$$\text{meas} \{\Omega : P(x, \nabla u^m) \geq h\} \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow \infty \quad \text{равномерно по } m \in \mathbb{N}. \quad (5.24)$$

Сначала установим сходимость:

$$\nabla u^m \rightarrow \nabla u, \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{локально по мере.} \quad (5.25)$$

Для $\nu, \theta, h, R > 0$ рассмотрим множество

$$E_{\nu, \theta, h}(R) = \{\Omega(R) : |u^l - u^m| < \nu, P(x, \nabla u^l) \leq h, P(x, \nabla u^m) \leq h, |u^l| < h, |u^m| < h, |\nabla(u^l - u^m)| \geq \theta\}.$$

Поскольку справедливо включение

$$\begin{aligned} \{\Omega(R) : |\nabla(u^l - u^m)| \geq \theta\} &\subset \{\Omega : P(x, \nabla u^l) > h\} \cup \{\Omega : P(x, \nabla u^m) > h\} \cup \\ &\cup \{\Omega(R) : |u^l - u^m| \geq \nu\} \cup \{\Omega : |u^l| \geq h\} \cup \{\Omega : |u^m| \geq h\} \cup E_{\nu, \theta, h}(R), \end{aligned}$$

то, в силу (5.20), (5.24), выбором h добьемся неравенств

$$\begin{aligned} \text{meas} \{\Omega(R) : |\nabla(u^l - u^m)| \geq \theta\} &< \\ &< 4\epsilon + \text{meas} E_{\nu, \theta, h}(R) + \text{meas} \{\Omega(R) : |u^l - u^m| \geq \nu\}, \quad m, l \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

По условию монотонности (2.3) и известному факту, что непрерывная функция на компакте достигает наименьшего значения, найдется $\gamma(x) > 0$ п.в. в Ω такая, что при $P(x, s) \leq h, P(x, t) \leq h, |s - t| \geq \theta$ справедливо неравенство

$$(a(x, s) - a(x, t)) \cdot (s - t) \geq \gamma(x). \quad (5.27)$$

Введем обозначение $A_0^m(x) = a_0^m(x, u^m) = A^m(x) + b^m(x, u^m) + |u^m|^{p_0(x)-2}u^m$. Из (5.6), (5.18) следует ограниченность последовательности $\{A_0^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ в $L_1(\Omega)$. Запишем (5.10) дважды для u^m и u^l и вычтем из первого второе; получим

$$\int_{\Omega} \left(a(x, \nabla u^m) - a(x, \nabla u^l) \right) \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} (A_0^m - A_0^l) v dx = 0.$$

Подставляя пробную функцию $v = \eta_R(|x|)\eta_h(|u^l|)\eta_h(|u^m|)T_{\nu}(u^m - u^l)$, устанавливаем соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(a(x, \nabla u^m) - a(x, \nabla u^l) \right) \cdot \nabla (\eta_R(|x|)\eta_h(|u^l|)\eta_h(|u^m|)T_{\nu}(u^m - u^l)) dx = \\ & = - \int_{\Omega} (A_0^m - A_0^l) \eta_R(|x|)\eta_h(|u^l|)\eta_h(|u^m|)T_{\nu}(u^m - u^l) dx \leq C_5 \nu, \quad m, l \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Далее, применяя (5.27), выводим

$$\begin{aligned} & \int_{E_{\nu, \theta, h}(R)} \gamma(x) dx \leq \int_{E_{\nu, \theta, h}(R)} \left(a(x, \nabla u^m) - a(x, \nabla u^l) \right) \cdot \nabla (u^m - u^l) dx \leq \\ & \leq \int_{\{\Omega: |u^m - u^l| < \nu\}} \eta_R(|x|)\eta_h(|u^l|)\eta_h(|u^m|) (a(x, \nabla u^m) - a(x, \nabla u^l)) \nabla (u^m - u^l) dx. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Соединяя (5.29), (5.28), применяя (1.5), (5.17), (5.23), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{E_{\nu, \theta, h}(R)} \gamma(x) dx \leq \sum_{i=1}^n \int_{\{\Omega: |u^m| < h+1, |x| < R+1\}} |a_i(x, \nabla u^m)| |T_{\nu}(u^m - u^l)| dx + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{\{\Omega: |u^l| < h+1, |x| < R+1\}} |a_i(x, \nabla u^l)| |T_{\nu}(u^m - u^l)| dx + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{\{\Omega: h < |u^l| < h+1, |u^m| < h+1\}} (|a_i(x, \nabla u^m)| + |a_i(x, \nabla u^l)|) |u_{x_i}^l| |T_{\nu}(u^m - u^l)| dx + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{\{\Omega: h < |u^m| < h+1, |u^l| < h+1\}} (|a_i(x, \nabla u^m)| + |a_i(x, \nabla u^l)|) |u_{x_i}^m| |T_{\nu}(u^m - u^l)| dx + C_5 \nu \leq \quad (5.30) \\ & \leq \nu (3 \|P'(x, a(x, \nabla u^m))\| \chi_{\{\Omega: |u^m| < h+1\}} \|1 + 3 \|P'(x, a(x, \nabla u^l))\| \chi_{\{\Omega: |u^l| < h+1\}} \|1 + \\ & + 2 \|P(x, \nabla u^m)\| \chi_{\{\Omega: |u^m| < h+1\}} \|1 + 2 \|P(x, \nabla u^l)\| \chi_{\{\Omega: |u^l| < h+1\}} \|1 + C_6(R)) \leq C_7(R, h) \nu. \end{aligned}$$

Для произвольного $\delta > 0$ при фиксированных R, h выбором ν из (5.30) устанавливаем неравенство

$$\int_{E_{\nu, \theta, h}(R)} \gamma(x) dx < \delta.$$

Применяя лемму 3.6, для любого $\varepsilon > 0$ выводим

$$\text{meas } E_{\nu, \theta, h}(R) < \varepsilon. \quad (5.31)$$

Кроме того, согласно (5.22), можно выбрать $m_0(\nu, R, \varepsilon)$ такое, что

$$\text{meas } \{\Omega(R) : |u^l - u^m| \geq \nu\} < \varepsilon, \quad m, l \geq m_0. \quad (5.32)$$

Соединяя (5.26), (5.31), (5.32), в итоге для любого $\theta > 0$ выводим неравенство

$$\text{meas } \{\Omega(R) : |\nabla(u^l - u^m)| \geq \theta\} < 6\varepsilon, \quad m, l \geq m_0.$$

Отсюда следует фундаментальность по мере последовательности $\{\nabla u^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ на множестве $\Omega(R)$ при любом $R > 0$, это влечет сходимость (5.25), а также выборочную сходимость:

$$\nabla u^m \rightarrow \nabla u, \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{п.в. в } \Omega. \quad (5.33)$$

Шаг 5. Докажем, что

$$|u^m|^{p_0(x)-2} u^m \rightarrow |u|^{p_0(x)-2} u, \quad b^m(x, u^m) \rightarrow b(x, u), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{в } L_{1, \text{loc}}(\Omega), \quad (5.34)$$

$$|u^m|^{p_0(x)-2} u^m \rightarrow |u|^{p_0(x)-2} u, \quad b^m(x, u^m) \rightarrow b(x, u), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{п.в. в } \Omega. \quad (5.35)$$

Из (5.14) при $k = h$ имеем:

$$\int_{\{\Omega: |u^m| \geq 2h\}} (|b^m(x, u^m)| + |u^m|^{p_0(x)-1}) dx \leq \int_{\{\Omega: |u^m| \geq h\}} |A^m - A^0| dx + \int_{\{\Omega: |u^m| \geq h\}} |A^0| dx, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Ввиду включения $A^0 \in L_1(\Omega)$, сходимости (5.5) и абсолютной непрерывности интегралов в правой части последнего неравенства, учитывая (5.20), для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать достаточно большое h такое, что:

$$\int_{\{\Omega: |u^m| \geq 2h\}} (|b^m(x, u^m)| + |u^m|^{p_0(x)-1}) dx < \varepsilon, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (5.36)$$

Из непрерывности $b(x, s_0)$ по s_0 и сходимости (5.21) следует, что при фиксированном h имеют место сходимости

$$\chi_{\{\Omega: |u^m| < 2h\}} |u^m|^{p_0(x)-2} u^m \rightarrow \chi_{\{\Omega: |u| \leq 2h\}} |u|^{p_0(x)-2} u, \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{п.в. в } \Omega,$$

$$\chi_{\{\Omega: |u^m| < 2h\}} b^m(x, u^m) \rightarrow \chi_{\{\Omega: |u| \leq 2h\}} b(x, u), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{п.в. в } \Omega.$$

Пусть K — произвольное компактное подмножество Ω . Ввиду (5.19), применяя теорему Лебега, устанавливаем сходимости

$$\chi_{\{\Omega: |u^m| < 2k\}} |u^m|^{p_0(x)-2} u^m \rightarrow \chi_{\{\Omega: |u| \leq 2k\}} |u|^{p_0(x)-2} u, \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{в } L_1(K),$$

$$\chi_{\{\Omega: |u^m| < 2k\}} b^m(x, u^m) \rightarrow \chi_{\{\Omega: |u| \leq 2k\}} b(x, u), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{в } L_1(K).$$

Отсюда, учитывая (5.36), получаем (5.34).

Из оценки (5.18), ввиду (5.35), согласно теореме Фату заключаем, что $b(x, u)$, $|u|^{p_0(x)-2} u \in L_1(\Omega)$, отсюда из (2.5) вытекает справедливость условия 1 определения 2.1.

Шаг 6. Покажем, что $T_k(u) \in \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$ для любого $k > 0$. Соединяя (5.16), (5.17), (1.9) для любого фиксированного $k > 0$, выводим оценку

$$\|T_k u^m\|_{\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)} = \sum_{i=0}^n \|D_{x_i} T_k(u^m)\|_{p_i(\cdot)} \leq \sum_{i=0}^n \left(1 + \int_{\Omega} |D_{x_i} T_k(u^m)|_{x_i}^{p_i(x)} dx \right)^{1/p_i^-} \leq C_8(k), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Рефлексивность пространства $\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$ позволяет выделить слабо сходящуюся в $\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$ подпоследовательность $T_k u^m \rightharpoonup v$, $m \rightarrow \infty$, причем $v \in \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$. Непрерывность естественного отображения $\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}_{\vec{p}(\cdot)}(\Omega)$ влечет слабую сходимость

$$T_k(u^m) \rightharpoonup v, \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{в } L_{p_0(\cdot)}(\Omega). \quad (5.37)$$

Пользуясь сходимостью (5.21), применяя лемму 3.4, для любого фиксированного $k > 0$ имеем слабую сходимость

$$T_k(u^m) \rightharpoonup T_k(u), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{в } L_{p_0(\cdot)}(\Omega). \quad (5.38)$$

Из (5.37), (5.38) следует равенство $v = T_k u \in \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$.

Шаг 7. Чтобы доказать (2.8), возьмем пробную функцию $v = T_k(u^m - \xi)$, $\xi \in C_0^1(\Omega)$, в тождестве (5.10). Получим

$$\int_{\Omega} a(x, \nabla u^m) \cdot \nabla T_k(u^m - \xi) dx + \int_{\Omega} (b^m(x, u^m) + |u^m|^{p_0(x)-2} u^m + A^m) T_k(u^m - \xi) dx = I^m + J^m = 0.$$

Положим $M = k + \|\xi\|_\infty$. Если $|u^m| \geq M$, то $|u^m - \xi| \geq |u^m| - \|\xi\|_\infty \geq k$, поэтому $\{\Omega : |u^m - \xi| < k\} \subseteq \{\Omega : |u^m| < M\}$, что означает

$$\begin{aligned} I^m &= \int_{\Omega} a(x, \nabla u^m) \cdot \nabla T_k(u^m - \xi) dx = \\ &= \int_{\Omega} a(x, \nabla T_M(u^m)) \cdot (\nabla T_M(u^m) - \nabla \xi) \chi_{\{\Omega: |u^m - \xi| < k\}} dx = I_1^m - I_2^m. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Из сходимостей (5.21), (5.33), ввиду непрерывности функции $a(x, s)$ по s , имеем:

$$a(x, \nabla T_M(u^m)) \cdot \nabla T_M(u^m) \chi_{\{\Omega: |u^m - \xi| < k\}} \rightarrow a(x, \nabla T_M(u)) \cdot \nabla T_M(u) \chi_{\{\Omega: |u - \xi| \leq k\}}, \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{п.в. в } \Omega.$$

Кроме того, применяя (5.17), (5.23), (1.5), устанавливаем оценку

$$I_1^m = \int_{\{\Omega: |u^m - \xi| < k\}} a(x, \nabla T_M(u^m)) \cdot \nabla T_M(u^m) dx \leq C_9(k), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Тогда по лемме Фату имеем:

$$\int_{\Omega} a(x, \nabla T_M(u)) \cdot \nabla T_M(u) \chi_{\{\Omega: |u - \xi| \leq k\}} dx \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} I_1^m. \tag{5.40}$$

Из (5.23) следует ограниченность последовательности норм

$$\|\mathbf{P}'(x, a(x, \nabla T_M(u^m))) \chi_{\{\Omega: |u^m - \xi| < k\}}\|_1 \leq \|\mathbf{P}'(x, a(x, \nabla u^m)) \chi_{\{\Omega: |u^m| < M\}}\|_1 \leq C_{10}(k), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Применяя лемму 3.4, устанавливаем слабую сходимость:

$$a(x, \nabla T_M(u^m)) \chi_{\{\Omega: |u^m - \xi| < k\}} \rightharpoonup a(x, \nabla T_M(u)) \chi_{\{\Omega: |u - \xi| \leq k\}}, \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{в } L_{\mathbf{P}'(\cdot)}(\Omega).$$

Выполняя предельный переход в I_2^m , имеем:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} I_2^m = \int_{\Omega} a(x, \nabla T_M(u)) \cdot \nabla \xi \chi_{\{\Omega: |u - \xi| \leq k\}} dx. \tag{5.41}$$

Соединяя (5.39)–(5.41), устанавливаем

$$\begin{aligned} \liminf_{m \rightarrow \infty} I^m &\geq \int_{\Omega} a(x, \nabla T_M(u)) \cdot (\nabla T_M(u) - \nabla \xi) \chi_{\{\Omega: |u - \xi| \leq k\}} dx = \\ &= \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla(u - \xi) \chi_{\{\Omega: |u - \xi| \leq k\}} dx = \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - \xi) dx. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Ввиду того, что

$$\begin{aligned} T_k(u^m - \xi) &\rightarrow T_k(u - \xi), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{п.в. в } \Omega; \\ |v T_k(u^m - \xi)| &\leq k|v| \in L_1(\Omega), \quad \forall v \in L_1(\Omega), \quad m \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

согласно теореме Лебега, имеем

$$T_k(u^m - \xi) \xrightarrow{*} T_k(u - \xi), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{в } L_\infty(\Omega). \tag{5.43}$$

Интеграл J^m также разобьем на два слагаемых. Первый интеграл

$$J_1^m = \int_{\Omega} \left(b^m(x, u^m) + |u^m|^{p_0(x)-2} u^m \right) T_k(u^m - \xi) dx$$

оценивается следующим образом. Рассмотрим возрастающую последовательность $\{K^l\}$ компактных подмножеств Ω таких, что $\bigcup_{l=1}^{\infty} K^l = \Omega$. Пусть $\text{supp } \xi \subset K^l$, $l \geq l_0$, $v^m = u^m - \xi$, $v = u - \xi$,

$c^m(x, u^m) = b^m(x, u^m) + |u^m|^{p_0(x)-2}u^m$, $c(x, u) = b(x, u) + |u|^{p_0(x)-2}u$. Тогда, учитывая (5.9), при $l \geq l_0$ имеем:

$$J_1^m = \int_{\Omega \setminus K^l} c^m(x, u^m) T_k(u^m) dx + \int_{K^l} c^m(x, u^m) T_k(v^m) dx \geq \int_{K^l} c^m(x, u^m) T_k(v^m) dx = \bar{J}_1^{lm}.$$

Применяя (5.34), (5.43), переходим к пределу при $m \rightarrow \infty$, а затем при $l \rightarrow \infty$, получим

$$\int_{\Omega} (b(x, u) + |u|^{p_0(x)-2}u) T_k(u - \xi) dx = \lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \bar{J}_1^{lm} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \inf J_1^m. \quad (5.44)$$

Используя (5.5), (5.43), выполняя предельный переход при $m \rightarrow \infty$ во втором интеграле, устанавливаем

$$J_2^m = \int_{\Omega} A^m T_k(u^m - \xi) dx \rightarrow \int_{\Omega} A^0 T_k(u - \xi) dx. \quad (5.45)$$

Соединяя (5.42), (5.44), (5.45), выводим (2.8). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жиков В.В. О вариационных задачах и нелинейных эллиптических уравнениях с нестандартными условиями роста// Пробл. мат. анализа. — 2011. — 54. — С. 23–112.
2. Ковалевский А.А. Априорные свойства решений нелинейных уравнений с вырождающейся коэрцитивностью и L^1 -данными// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2006. — 16. — С. 47–67.
3. Ковалевский А.А. О сходимости функций из соболевского пространства, удовлетворяющих специальным интегральным оценкам// Укр. мат. ж. — 2006. — 58, № 2. — С. 168–183.
4. Кожевникова Л.М. Об энтропийном решении эллиптической задачи в анизотропных пространствах Соболева—Орлича// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2017. — 57, № 3. — С. 429–447.
5. Кожевникова Л.М. Существование энтропийных решений эллиптической задачи в анизотропных пространствах Соболева—Орлича// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прилож. Темат. обз. — 2017. — 139. — С. 15–38.
6. Кожевникова Л.М., Камалетдинов А.Ш. Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с переменными показателями нелинейностей в неограниченных областях// Вестн. Волгоград. гос. ун-та. Сер. 1. Мат. Физ. — 2016. — № 5(36). — С. 29–41.
7. Кружков С.Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными// Мат. сб. — 1970. — 81, № 123. — С. 228–255.
8. Aharouch L., Bennouna J., Touzani A. Existence of renormalized solution of some elliptic problems in Orlicz spaces// Rev. Mat. Complut. — 2009. — 22, № 1. — С. 91–110.
9. Alvino A., Boccardo L., Ferone V., Orsina L., Trombetti G. Existence results for nonlinear elliptic equations with degenerate coercivity// Ann. Mat. Pura Appl. (4). — 2003. — 182, № 1. — С. 53–79.
10. Azroul E., Hjjaj H., Touzani A. Existence and regularity of entropy solutions for strongly nonlinear $p(x)$ -elliptic equations// Electron. J. Differ. Equ. — 2013. — 2013, № 68. — С. 1–27.
11. Benboubker M.B., Azroul E., Barbara A. Quasilinear elliptic problems with nonstandard growths// Electron. J. Differ. Equ. — 2011. — 2011, № 62. — С. 1–16.
12. Benboubker M.B., Chrayteh H., El Moumni M., Hjjaj H. Entropy and renormalized solutions for nonlinear elliptic problem involving variable exponent and measure data// Acta Math. Sin. (Engl. Ser.). — 2015. — 31, № 1. — С. 151–169.
13. Benboubker M.B., Hjjaj H., Ouaro S. Entropy solutions to nonlinear elliptic anisotropic problem with variable exponent// J. Appl. Anal. Comput. — 2014. — 4, № 3. — С. 245–270.
14. Bendahmane M., Karlsen K. Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in \mathbb{R}^N with advection and lower order terms and locally integrable data// Potential Anal. — 2005. — 22, № 3. — С. 207–227.
15. Bendahmane M., Wittbold P. Renormalized solutions for nonlinear elliptic equation with variable exponents and L^1 -data// Nonlinear Anal. — 2009. — С. 1–21.
16. Benilan Ph., Boccardo L., Gallouët Th., Gariépy R., Pierre M., Vazquez J.L. An L^1 -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5). — 1995. — 22, № 2. — С. 241–273.
17. Benkirane A., Bennouna J. Existence of entropy solutions for some elliptic problems involving derivatives of nonlinear terms in Orlicz spaces// Abstr. Appl. Anal. — 2002. — 7, № 2. — С. 85–102.

18. *Bidaut-Veron M.F.* Removable singularities and existence for a quasilinear equation with absorption or source term and measure data// *Adv. Nonlinear Stud.* — 2003. — 3. — С. 25–63.
19. *Boccardo L., Gallouët Th.* Nonlinear elliptic equations with right-hand side measures// *Commun. Part. Differ. Equ.* — 1992. — 17, № 3-4. — С. 641–655.
20. *Boccardo L., Gallouët Th., Marcellini P.* Anisotropic equations in L^1 // *Differ. Integral Equ.* — 1996. — 9, № 1. — С. 209–212.
21. *Boccardo L., Gallouët T., Vazquez J.L.* Nonlinear elliptic equations in R^N without growth restrictions on the data// *J. Differ. Equ.* — 1993. — 105, № 2. — С. 334–363.
22. *Bonzi B.K., Ouaro S.* Entropy solutions for a doubly nonlinear elliptic problem with variable exponent// *J. Math. Anal. Appl.* — 2010. — 370. — С. 392–405.
23. *Brezis H.* Semilinear equations in \mathbb{R}^N without condition at infinity// *Appl. Math. Optim.* — 1984. — 12, № 3. — С. 271–282.
24. *Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Ruzicka M.* Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. — Berlin—Heidelberg: Springer, 2011.
25. *El Hachimi A., Jamea A.* Uniqueness result of entropy solution to nonlinear neumann problems with variable exponent and L^1 -data// *J. Nonlinear Evol. Equ. Appl.* — 2017. — 2017, № 2. — С. 13–25.
26. *Fan X.* Anisotropic variable exponent Sobolev spaces and $p(x)$ -Laplacian equations// *Complex Var. Elliptic Equ.* — 2011. — 56, № 7–9. — С. 623–642.
27. *Gwiazda P., Wittbold P., Wróblewska A., Zimmermann A.* Renormalized solutions of nonlinear elliptic problems in generalized Orlicz spaces// *J. Differ. Equ.* — 2012. — 253. — С. 635–666.
28. *Halsey T.C.* Electrorheological fluids// *Science.* — 1992. — 258, № 5083. — С. 761–766.
29. *Ouaro S.* Well-Posedness Results for Anisotropic Nonlinear Elliptic Equations with Variable Exponent and L^1 -Data// *Cubo.* — 2010. — 12, № 1. — С. 133–148.
30. *Sancho'n M., Urbano J.M.* Entropy solutions for the $p(x)$ -laplace equation// *Trans. Am. Math. Soc.* — 2009. — 361, № 12. — С. 6387–6405.

Л. М. Кожевникова

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,

453103, Башкортостан, г. Стерлитамак, пр. Ленина, 37;

Елабужский Институт Казанского Федерального университета,

423604, Татарстан, г. Елабуга, ул. Казанская, 89

E-mail: kosul@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-3-475-493

UDC 517.956.25

On Entropy Solutions of Anisotropic Elliptic Equations with Variable Nonlinearity Indices

© 2017 L. M. Kozhevnikova

Abstract. For a certain class of second-order anisotropic elliptic equations with variable nonlinearity indices and L_1 right-hand side we consider the Dirichlet problem in arbitrary unbounded domains. We prove the existence and uniqueness of entropy solutions in anisotropic Sobolev spaces with variable indices.

REFERENCES

1. V.V. Zhikov, “O variatsionnykh zadachakh i nelineynykh ellipticheskikh uravneniyakh s nestandartnymi usloviyami rosta” [On variational problems and nonlinear elliptic equations with nonstandard growth conditions], *Probl. mat. analiza* [Probl. Math. Anal.], 2011, **54**, 23–112 (in Russian).
2. A.A. Kovalevskiy, “Apriornye svoystva resheniy nelineynykh uravneniy s vyzhdayushchey koertsitivnost'yu i L^1 -dannymi” [A priori properties of solutions of nonlinear equations with degenerate coercitivity and L^1 -data], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2006, **16**, 47–67 (in Russian).

3. A. A. Kovalevskiy, “O skhodimosti funktsiy iz sobolevskogo prostranstva, udovletvoryayushchikh spetsial’nym integral’nym otsenkam” [On convergence of functions from Sobolev space satisfying special integral estimates], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 2006, **58**, No. 2, 168–183 (in Russian).
4. L. M. Kozhevnikova, “Ob entropiynom reshenii ellipticheskoy zadachi v anizotropnykh prostranstvakh Soboleva–Orlicha” [On entropy solution of an elliptic problem in anisotropic Sobolev–Orlich spaces], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2017, **57**, No. 3, 429–447 (in Russian).
5. L. M. Kozhevnikova, “Sushchestvovanie entropiynykh resheniy ellipticheskoy zadachi v anizotropnykh prostranstvakh Soboleva–Orlicha” [Existence of entropy solutions of an elliptic problem in anisotropic Sobolev–Orlich spaces], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee prilozh. Temat. obz.* [Totals Sci. Tech. Ser. Contemp. Math. Appl.], 2017, **139**, 15–38 (in Russian).
6. L. M. Kozhevnikova and A. Sh. Kamaletdinov, “Sushchestvovanie resheniy anizotropnykh ellipticheskikh uravneniy s peremennymi pokazatelyami nelineynostey v neogranichennykh oblastiakh” [Existence of solutions of anisotropic elliptic equations with variable nonlinearity index in unbounded domains], *Vestn. Volgograd. gos. un-ta. Ser. 1. Mat. Fiz.* [Bull. Volgograd. State Univ. Ser. 1. Math. Phys.], 2016, No. 5(36), 29–41 (in Russian).
7. S. N. Kruzhkov, “Kvazilineynye uravneniya pervogo poryadka so mnogimi nezavisimymi peremennymi” [First-order quasilinear equations with multiple independent variables], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1970, **81**, No. 123, 228–255 (in Russian).
8. L. Aharouch, J. Bennouna, and A. Touzani, “Existence of renormalized solution of some elliptic problems in Orlicz spaces,” *Rev. Mat. Complut.*, 2009, **22**, No. 1, 91–110.
9. A. Alvino, L. Boccardo, V. Ferone, L. Orsina, and G. Trombetti, “Existence results for nonlinear elliptic equations with degenerate coercivity,” *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), 2003, **182**, No. 1, 53–79.
10. E. Azroul, H. Hjjaj, and A. Touzani, “Existence and regularity of entropy solutions for strongly nonlinear $p(x)$ -elliptic equations,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2013, **2013**, No. 68, 1–27.
11. M. B. Benboubker, E. Azroul, and A. Barbara, “Quasilinear elliptic problems with nonstandard growths,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2011, **2011**, No. 62, 1–16.
12. M. B. Benboubker, H. Chrayteh, M. El Mounni, and H. Hjjaj, “Entropy and renormalized solutions for nonlinear elliptic problem involving variable exponent and measure data,” *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 2015, **31**, No. 1, 151–169.
13. M. B. Benboubker, H. Hjjaj, and S. Ouaro, “Entropy solutions to nonlinear elliptic anisotropic problem with variable exponent,” *J. Appl. Anal. Comput.*, 2014, **4**, No. 3, 245–270.
14. M. Bendahmane and K. Karlsen, “Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in \mathbb{R}^N with advection and lower order terms and locally integrable data,” *Potential Anal.*, 2005, **22**, No. 3, 207–227.
15. M. Bendahmane and P. Wittboldb, “Renormalized solutions for nonlinear elliptic equation with variable exponents and L^1 -data,” *Nonlinear Anal.*, 2009, 1–21.
16. Ph. Benilan, L. Boccardo, Th. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, and J. L. Vazquez, “An L^1 -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations,” *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* (5), 1995, **22**, No. 2, 241–273.
17. A. Benkirane and J. Bennouna, “Existence of entropy solutions for some elliptic problems involving derivatives of nonlinear terms in Orlicz spaces,” *Abstr. Appl. Anal.*, 2002, **7**, No. 2, 85–102.
18. M. F. Bidaut-Veron, “Removable singularities and existence for a quasilinear equation with absorption or source term and measure data,” *Adv. Nonlinear Stud.*, 2003, **3**, 25–63.
19. L. Boccardo and Th. Gallouët, “Nonlinear elliptic equations with right-hand side measures,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 1992, **17**, No. 3-4, 641–655.
20. L. Boccardo, Th. Gallouët, and P. Marcellini, “Anisotropic equations in L^1 ,” *Differ. Integral Equ.*, 1996, **9**, No. 1, 209–212.
21. L. Boccardo, Th. Gallouët, and J. L. Vazquez, “Nonlinear elliptic equations in R^N without growth restrictions on the data,” *J. Differ. Equ.*, 1993, **105**, No. 2, 334–363.
22. B. K. Bonzi and S. Ouaro, “Entropy solutions for a doubly nonlinear elliptic problem with variable exponent,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2010, **370**, 392–405.
23. H. Brezis, “Semilinear equations in \mathbb{R}^N without condition at infinity,” *Appl. Math. Optim.*, 1984, **12**, No. 3, 271–282.
24. L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, and M. Ruzicka, *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2011.

25. A. El Hachimi and A. Jamea, “Uniqueness result of entropy solution to nonlinear neumann problems with variable exponent and L^1 -data,” *J. Nonlinear Evol. Equ. Appl.*, 2017, **2017**, No. 2, 13–25.
26. X. Fan, “Anisotropic variable exponent Sobolev spaces and $p(x)$ -Laplacian equations,” *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2011, **56**, No. 7–9, 623–642.
27. P. Gwiazda, P. Wittbold, A. Wróblewska, and A. Zimmermann, “Renormalized solutions of nonlinear elliptic problems in generalized Orlicz spaces,” *J. Differ. Equ.*, 2012, **253**, 635–666.
28. T. C. Halsey, “Electrorheological fluids,” *Science*, 1992, **258**, No. 5083, 761–766.
29. S. Ouaro, “Well-Posedness Results for Anisotropic Nonlinear Elliptic Equations with Variable Exponent and L^1 -Data,” *Cubo*, 2010, **12**, No. 1, 133–148.
30. M. Sancho'n and J. M. Urbano, “Entropy solutions for the $p(x)$ -laplace equation,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 2009, **361**, No. 12, 6387–6405.

L. M. Kozhevnikova
Sterlitamak Branch of Bashkir State University,
37 Lenina av., 453103 Sterlitamak, Russia;
Elabuga Branch of Kazan Federal University,
89 Kazanskaya st., 423604 Elabuga, Russia
E-mail: kosul@mail.ru

О ФОРМУЛЕ ОБЪЕМА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО СИМПЛЕКСА

© 2017 г. **В. А. КРАСНОВ**

Аннотация. В настоящей работе получена явная формула объема произвольного гиперболического 4-симплекса через координаты вершин.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	494
1. Некоторые предварительные результаты	494
2. Вычисление алгебраического объема гиперболического четырехмерного симплекса через координаты вершин	496
Список литературы	502

ВВЕДЕНИЕ

Вычисление объемов евклидовых многогранников является очень старой и сложной проблемой, берущей свое начало с трудов Архимеда и Тартальи.

В сферическом и гиперболическом случаях ситуация, по словам К.-Ф. Гаусса, напоминает «джунгли». Объемы тетраэдров специального вида (ортосхемы) в неевклидовых пространствах были найдены в разное время в работах Л. Шлефли [12], Н.И. Лобачевского [2], Я. Бойяи [5], Дж. Милнора [8], Э.Б. Винберга [1] и др.

Что касается формулы объема произвольного неевклидова тетраэдра, то она долгое время была неизвестна. Лишь сравнительно недавно эта проблема была полностью решена в работах Ю. Чо и Х. Кима [6], Дж. Мураками и У. Яно [11], Дж. Мураками и А. Ушиджимы [10], Д. А. Деревнина и А. Д. Медных [7], а также Дж. Мураками [9]. Заметим, что полученные в вышеназванных работах формулы выражают объем произвольного гиперболического тетраэдра в терминах двугранных углов (или длин ребер). Кроме того, вывод данных формул основан на использовании формулы Шлефли [12] для дифференциала объема.

В 2013 году И. Х. Сабитовым [3] был предложен новый метод вычисления объемов гиперболических многогранников произвольной размерности через координаты вершин, который позволяет найти объем многогранника через некоторый интеграл по его граничной поверхности, являющейся объединением многогранников меньшей размерности. Позднее, в работе [4], была получена формула произвольного гиперболического тетраэдра (трехмерного симплекса) через координаты вершин.

В настоящей работе мы проведем подобные вычисления для размерности четыре и представим явную интегральную формулу для вычисления объема четырехмерного симплекса.

1. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим задачу вычисления объема многогранников в n -мерном гиперболическом пространстве \mathbb{H}^n постоянной отрицательной кривизны K .

Работа выполнена при поддержке Программы РУДН «5-100».

Мы будем рассматривать метрики вида:

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{(-K)x_n^2}. \quad (1.1)$$

Данные метрики задаются моделью гиперболического пространства в верхнем полупространстве $x_n > 0$ постоянной отрицательной кривизны K .

Рассмотрим теперь некоторые предварительные результаты, которые понадобятся нам в дальнейшем (подробные доказательства и обоснования данных результатов приведены в работе [3]).

Одним из основных инструментов для вычисления объемов тел в модели гиперболического пространства в верхнем полупространстве с метрикой (1.1) является следующая теорема.

Теорема 1.1 (И. Х. Сабитов, 2013). Пусть D — компактное тело с кусочно-гладкой границей ∂D , расположенное в верхнем полупространстве $x_n > 0$ пространства \mathbb{H}^n . Тогда объем $V = V(D)$ такого тела в метрике (1.1) может быть вычислен по формуле:

$$V = \frac{1}{(-K)^{\frac{n}{2}}} \int_D \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n}{x_n^n} = \frac{(-1)^n}{(n-1)(-K)^{\frac{n}{2}}} \int_{\partial D} \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}}{x_n^{n-1}}. \quad (1.2)$$

Доказательство теоремы 1.1 основано на применении формулы Стокса к правому интегралу и формуле, выражающей объем тела в римановой геометрии с метрикой, заданной стандартным образом с помощью коэффициентов g_{ij}

$$V = \int_D \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \quad (1.3)$$

Для вычисления объема гиперболического симплекса в дальнейшем мы будем использовать правый интеграл в формуле (1.2):

$$V_S = \frac{(-1)^n}{(n-1)(-K)^{\frac{n}{2}}} \int_S \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}}{x_n^{n-1}}. \quad (1.4)$$

В формуле (1.4) S — произвольная компактная гиперповерхность в \mathbb{H}^n , а V_S — алгебраический объем тела, ограниченного этой гиперповерхностью.

Если S представляет собой многогранник (не обязательно выпуклый), то интеграл (1.4) определен на гипергранях S_i , каждая из которых принадлежит $(n-1)$ -мерной полусфере

$$\widehat{S}_i : (x_1 - a_{i1})^2 + \dots + (x_{n-1} - a_{i,n-1})^2 + x_n^2 = R_i^2. \quad (1.5)$$

Замечание 1.1. Заметим, что если некоторая гипергрань лежит в гиперплоскости, ортогональной к гиперплоскости $x_n = 0$, тогда интеграл по этой гипергранни равен нулю.

Обозначим через Ω_i ортогональную проекцию гипергранни S_i на плоскость $x_n = 0$. Если гиперсфера \widehat{S}_i ориентирована своей внешней нормалью, то, в силу формул (1.4) и (1.5), получаем

$$\int_{S_i} \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}}{x_n^{n-1}} = \int_{\Omega_i} \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}}{(R_i^2 - r_i^2)^{(n-1)/2}}, \quad (1.6)$$

где $r_i^2 = (x_1 - a_{i1})^2 + \dots + (x_{n-1} - a_{i,n-1})^2$.

Рассмотрим теперь другой класс метрик пространств постоянной кривизны вида

$$ds^2 = \frac{1}{(1+ar^2)^2} (dx_1^2 + \dots + dx_n^2), \quad (1.7)$$

где $a = \text{const}$, а $r^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

Замечание 1.2. Легко видеть, что, если положить в формуле (1.7) $a = 0$, то мы получим евклидову метрику. Значения $a > 0$ соответствуют случаю сферической метрики с постоянной положительной кривизной $K = 4a$. Наконец, при $a < 0$ имеем метрику n -мерного гиперболического пространства постоянной отрицательной кривизны $K = 4a$.

Если в пространстве постоянной отрицательной кривизны задано некоторое компактное тело D , то формула для вычисления объема задается следующей теоремой.

Теорема 1.2 (И. Х. Сабитов, 2013). Пусть в случае метрики (1.7) задано компактное тело D с кусочно-гладкой границей ∂D . Тогда объем $V = V(D)$ такого тела можно вычислить по формуле:

$$V = \int_{\partial D} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1} x_i F_n(r)}{r^n} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n, \quad (1.8)$$

где

$$F(r) = \int_0^r \frac{x^{n-1}}{(1+ax^2)^n} dx,$$

а запись \widehat{dx}_i означает, что соответствующий дифференциал отсутствует.

Идея доказательства теоремы 1.2 заключается в применении формулы Стокса к правой части формулы (1.8) и элементарных преобразований с учетом формулы (1.7).

Вернемся к правому интегралу в формуле (1.6). Используя формулу (1.3) и схему доказательства теоремы 1.2, нетрудно получить следующее представление:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}}{(R_i^2 - r_i^2)^{(n-1)/2}} &= \frac{1}{R_i^{n-1}} \int_{\Omega_i} \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}}{(1 - (\frac{r_i}{R_i})^2)^{(n-1)/2}} = \\ &= \int_{\partial\Omega_i} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^{j-1} (x_j - a_{ij}) F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^{n-1}} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_j \wedge \dots \wedge dx_{n-1}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где

$$F\left(\frac{r_i}{R_i}\right) = \int_0^{\frac{r_i}{R_i}} \frac{x^{n-2}}{(1-x^2)^{(n-1)/2}} dx.$$

А теперь поставим задачу вычислить объем 4-симплекса через координаты вершин. Для этого мы будем использовать последний интеграл в формуле (1.9).

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ОБЪЕМА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО СИМПЛЕКСА ЧЕРЕЗ КООРДИНАТЫ ВЕРШИН

Рассмотрим проблему вычисления объемов 4-симплексов в терминах координат вершин (длин ребер).

Определение 2.1. Будем говорить, что n -симплекс в модели гиперболического пространства \mathbb{H}^n в верхнем полупространстве расположен в *стандартной позиции*, если его вершины могут быть пронумерованы в таком порядке $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$, чтобы они имели следующие координаты:

$$\begin{aligned} A_0(0, 0, 0, \dots, 0, 1), \quad A_1(0, 0, 0, \dots, 0, q), \quad A_2(x_{21}, 0, 0, \dots, 0, x_{2n}), \quad x_{21} > 0, \\ A_3(x_{31}, x_{32}, 0, \dots, 0, x_{3n}), \quad x_{32} > 0, \\ \dots, \\ A_k(x_{k1}, \dots, x_{k,k-1}, 0, \dots, 0, x_{kn}), \quad x_{k,k-1} > 0, \\ \dots, \\ A_{n-1}(x_{n-1,1}, \dots, x_{n-1,n-2}, 0, x_{n-1,n}), \quad x_{n-1,n-2} > 0, \\ A_n(x_{n1}, \dots, x_{n,n-1}, x_{nn}), \quad x_{n,n-1} > 0. \end{aligned}$$

Известно, что любой симплекс можно некоторым движением перевести в симплекс, находящийся в стандартной позиции [3]. Таким образом, мы, не нарушая общности, будем рассматривать симплексы в стандартной позиции.

Рассмотрим симплекс $A_0A_1A_2A_3A_4$, расположенный в стандартной позиции в пространстве \mathbb{H}^4 с вершинами

$$A_0(0, 0, 0, 1), \quad A_1(0, 0, 0, q), \quad A_2(x_{21}, 0, 0, x_{24}), \quad A_3(x_{31}, x_{32}, 0, x_{34}), \quad A_4(x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44}).$$

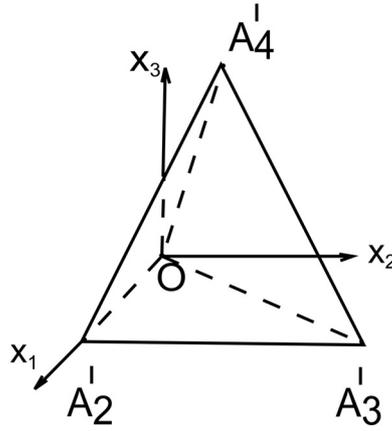


Рис. 2.1

Нетрудно видеть, что все гипергрani нашего симплекса, за исключением $A_1A_2A_3A_4$ и $A_0A_2A_3A_4$, расположены в плоскостях, ортогональных плоскости $x_4 = 0$, то есть имеют уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$. Таким образом, только два интеграла (по гиперграням $A_1A_2A_3A_4$ и $A_0A_2A_3A_4$) в формуле (1.4) могут быть отличными от нуля.

Эти грани являются частью полусфер с уравнениями

$$\begin{aligned} A_0A_2A_3A_4 : (x_1 - a_{10})^2 + (x_2 - a_{20})^2 + (x_3 - a_{30})^2 + x_4^2 &= R_0^2, \\ A_1A_2A_3A_4 : (x_1 - a_{11})^2 + (x_2 - a_{21})^2 + (x_3 - a_{31})^2 + x_4^2 &= R_1^2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Заметим также, что $A_1A_2A_3A_4$ и $A_0A_2A_3A_4$ имеют одну и ту же ортогональную проекцию Ω на плоскость $x_4 = 0$, которая является тетраэдром (рис. 2.1) с вершинами

$$O(0, 0, 0), \quad A'_2(x_{21}, 0, 0), \quad A'_3(x_{31}, x_{32}, 0), \quad A'_4(x_{41}, x_{42}, x_{43}).$$

Грани ортогональной проекции Ω имеют уравнения:

$$\begin{aligned} OA'_2A'_3 : x_3 &= 0, \\ OA'_2A'_4 : x_{43}x_2 - x_{42}x_3 &= 0, \\ OA'_3A'_4 : (x_{33}x_{42} - x_{43}x_{32})x_1 + (x_{31}x_{43} - x_{33}x_{41})x_2 + (x_{32}x_{41} - x_{31}x_{42})x_3 &= 0, \\ A'_2A'_3A'_4 : x_{32}x_{43}(x_1 - x_{41}) + x_{43}(x_{21} - x_{31})(x_2 - x_{41}) + (x_{32}(x_{21} - x_{41}) - x_{42}(x_{21} - x_{31}))(x_3 - x_{31}) &= 0. \end{aligned}$$

Отметим также, что в случае пространства \mathbb{H}^4 функция $F = F\left(\frac{r_i}{R_i}\right)$ имеет вид

$$F\left(\frac{r_i}{R_i}\right) = \int_0^{\frac{r_i}{R_i}} \frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{r_i}{\sqrt{R_i^2 - r_i^2}} - \arcsin \frac{r_i}{R_i}.$$

Таким образом,

$$F\left(\frac{r_i}{R_i}\right) = \frac{r_i}{\sqrt{R_i^2 - r_i^2}} - \arcsin \frac{r_i}{R_i}. \tag{2.2}$$

Вычислим теперь координаты центров и квадраты радиусов гиперсфер (2.1). Решая соответствующие системы, получаем:

$$\begin{aligned} a_{10} &= \frac{x_{21}^2 + x_{24}^2 - 1}{2x_{21}}, \quad a_{20} = \frac{x_{32}^2 + x_{34}^2 - x_{24}^2 + x_{31}^2 - x_{21}^2 - 2a_{10}(x_{21} - x_{31})}{2x_{32}}, \\ a_{30} &= \frac{x_{43}^2 + x_{41}^2 + x_{44}^2 + x_{42}^2 - x_{31}^2 - x_{34}^2 - x_{32}^2 + 2a_{10}(x_{31} - x_{41}) + 2a_{20}(x_{32} - x_{42})}{2x_{43}}, \\ R_0^2 &= 1 + a_{10}^2 + a_{20}^2 + a_{30}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{x_{21}^2 + x_{24}^2 - q^2}{2x_{21}}, & a_{21} &= \frac{x_{32}^2 + x_{34}^2 - x_{24}^2 + x_{31}^2 - x_{21}^2 - 2a_{11}(x_{21} - x_{31})}{2x_{32}}, \\
 a_{31} &= \frac{x_{43}^2 + x_{41}^2 + x_{44}^2 + x_{42}^2 - x_{31}^2 - x_{34}^2 - x_{32}^2 + 2a_{11}(x_{31} - x_{41}) + 2a_{21}(x_{32} - x_{42})}{2x_{43}}, \\
 R_1^2 &= 1 + a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Переходим непосредственно к вычислению объема симплекса $T_4 = A_0A_1A_2A_3A_4$. Согласно формуле (1.6), объем данного многогранника можно свести к вычислению разности следующих интегралов по ортогональной проекции $\Omega = OA'_2A'_3A'_4$ гиперграней $A_1A_2A_3A_4$ и $A_0A_2A_3A_4$ на плоскость $x_4 = 0$:

$$V(T_4) = -\frac{1}{3(-K)^{\frac{3}{2}}} \left(\int_{\Omega} \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{(R_0^2 - r_0^2)^{3/2}} - \int_{\Omega} \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{(R_1^2 - r_1^2)^{3/2}} \right), \tag{2.4}$$

где

$$\begin{aligned}
 r_0^2 &= (x_1 - a_{10})^2 + (x_2 - a_{20})^2 + (x_3 - a_{30})^2, \\
 r_1^2 &= (x_1 - a_{11})^2 + (x_2 - a_{21})^2 + (x_3 - a_{31})^2,
 \end{aligned}$$

а величины $a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{11}, a_{21}, a_{31}, R_0$ и R_1 вычисляются по формулам (2.3).

Замечание 2.1. Уменьшаемое и вычитаемое в формуле (2.4) выбираются в соответствие с ориентацией симплекса.

Каждый из интегралов в формуле (2.4) в силу (1.9) можно свести к алгебраической сумме интегралов по граням тетраэдра $\Omega = OA'_2A'_3A'_4$. Имеем:

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{(R_0^2 - r_0^2)^{3/2}} = \int_{\Omega} \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{(1 - (\frac{r_0}{R_0})^2)^{3/2}} = \\
 &= \int_{\partial\Omega} \frac{(x_1 - a_{01})F(\frac{r_0}{R_0})}{r_0^3} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{(x_2 - a_{02})F(\frac{r_0}{R_0})}{r_0^3} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{(x_3 - a_{03})F(\frac{r_0}{R_0})}{r_0^3} dx_1 \wedge dx_2, \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{(R_1^2 - r_1^2)^{3/2}} = \int_{\Omega} \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{(1 - (\frac{r_1}{R_1})^2)^{3/2}} = \\
 &= \int_{\partial\Omega} \frac{(x_1 - a_{11})F(\frac{r_1}{R_1})}{r_1^3} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{(x_2 - a_{12})F(\frac{r_1}{R_1})}{r_1^3} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{(x_3 - a_{13})F(\frac{r_1}{R_1})}{r_1^3} dx_1 \wedge dx_2. \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

Таким образом, вычисление правых интегралов в формулах (2.5) и (2.6) сводится к вычислению двойных интегралов на гранях $OA'_2A'_3, OA'_2A'_4, OA'_3A'_4$ и $A'_2A'_3A'_4$ тетраэдра $\Omega = OA'_2A'_3A'_4$. Предположим, не нарушая общности, что тетраэдр Ω расположен в первом октанте системы координат $Ox_1x_2x_3$ (рис. 2.1).

Вычислим для начала интеграл по первой грани $OA'_2A'_3$. Заметим, что для данной грани $x_3 = 0$. Следовательно, первые два слагаемых в правых интегралах (2.5) и (2.6) равны нулю. Значит, нам требуется вычислить лишь интегралы

$$\int_{OA'_2A'_3} \frac{(-a_{03})F(\frac{r_0}{R_0})}{r_0^3} dx_1 \wedge dx_2 \quad \text{и} \quad \int_{OA'_2A'_3} \frac{(-a_{13})F(\frac{r_1}{R_1})}{r_1^3} dx_1 \wedge dx_2.$$

Очевидно, что пределы интегрирования в указанных интегралах имеют следующий вид:

$$0 \leq x_2 \leq x_{32}, \frac{x_{31}}{x_{32}}x_2 \leq x_1 \leq \frac{(x_{31} - x_{21})}{x_{32}}x_2 + x_{21}.$$

Таким образом,

$$I_{10} = \int_{OA'_2A'_3} \frac{(-a_{03})F(\frac{r_0}{R_0})}{r_0^3} dx_1 \wedge dx_2 =$$

$$\begin{aligned}
 &= -a_{03} \int_0^{x_{32}} dx_2 \int_{\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2}^{\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2+x_{21}} \left(\frac{1}{\left[(x_1 - a_{01})^2 + (x_2 - a_{02})^2 + a_{03}^2 \right] \sqrt{R_0^2 - a_{03}^2 - (x_1 - a_{01})^2 + (x_2 - a_{02})^2}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\arcsin \left(\frac{(x_1 - a_{01})^2 + (x_2 - a_{02})^2 + a_{03}^2}{R_0} \right)}{(a_{03}^2 + (x_1 - a_{01})^2 + (x_2 - a_{02})^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dx_1 = \\
 &= -a_{03} \int_0^{x_{32}} dx_2 \left(\frac{1}{a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2} \arcsin \frac{x_1 - a_{01}}{\sqrt{R_0^2 - a_{03}^2 - (x_2 - a_{02})^2}} - \right. \\
 &\quad - \frac{x_1 - a_{01}}{(a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2) \sqrt{a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2 + (x_1 - a_{01})^2}} \times \\
 &\quad \left. \times \arcsin \frac{\sqrt{a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2 + (x_1 - a_{01})^2}}{R_0} \right) \Bigg|_{\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2}^{\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2+x_{21}} = \\
 &= -a_{13} \int_0^{x_{32}} \left(\frac{1}{a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2} \arcsin \frac{\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2 + x_{21} - a_{01}}{\sqrt{R_0^2 - a_{03}^2 - (x_2 - a_{02})^2}} - \right. \\
 &\quad - \frac{\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2 + x_{21} - a_{01}}{(a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2) \sqrt{a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2 + \left(\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2 + x_{21} - a_{01} \right)^2}} \times \\
 &\quad \left. \times \arcsin \frac{\sqrt{a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2 + \left(\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2 + x_{21} - a_{01} \right)^2}}{R_0} - \right. \\
 &\quad - \frac{1}{a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2} \arcsin \frac{\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2 - a_{01}}{\sqrt{R_0^2 - a_{03}^2 - (x_2 - a_{02})^2}} + \\
 &\quad \left. + \frac{\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2 - a_{01}}{(a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2) \sqrt{a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2 + \left(\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2 - a_{01} \right)^2}} \right. \\
 &\quad \left. \times \arcsin \frac{\sqrt{a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2 + \left(\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2 - a_{01} \right)^2}}{R_0} \right) dx_2, \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

$$I_{11} = \int_{OA'_2A'_3} \frac{(-a_{13})F\left(\frac{r_1}{R_1}\right)}{r_1^3} dx_1 \wedge dx_2 =$$

$$\begin{aligned}
 &= -a_{13} \int_0^{x_{32}} dx_2 \int_{\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2}^{\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2+x_{21}} \left(\frac{1}{\left[(x_1 - a_{11})^2 + (x_2 - a_{12})^2 + a_{13}^2 \right] \sqrt{R_0^2 - a_{13}^2 - (x_1 - a_{11})^2 + (x_2 - a_{12})^2}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\arcsin \left(\frac{(x_1 - a_{11})^2 + (x_2 - a_{12})^2 + a_{13}^2}{R_1} \right)}{(a_{13}^2 + (x_1 - a_{11})^2 + (x_2 - a_{12})^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dx_1 = \\
 &= -a_{13} \int_0^{x_{32}} dx_2 \left(\frac{1}{a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2} \arcsin \frac{x_1 - a_{11}}{\sqrt{R_1^2 - a_{13}^2 - (x_2 - a_{12})^2}} - \right. \\
 &\quad - \frac{x_1 - a_{11}}{(a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2) \sqrt{a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2 + (x_1 - a_{11})^2}} \times \\
 &\quad \left. \times \arcsin \frac{\sqrt{a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2 + (x_1 - a_{11})^2}}{R_1} \right) \Bigg|_{\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2}^{\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2+x_{21}} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -a_{13} \int_0^{x_{32}} \left(\frac{1}{a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2} \arcsin \frac{\frac{(x_{31}-x_{21})x_2 + x_{21} - a_{11}}{x_{32}}}{\sqrt{R_1^2 - a_{13}^2 - (x_2 - a_{12})^2}} - \right. \\
&- \frac{\frac{(x_{31}-x_{21})x_2 + x_{21} - a_{11}}{x_{32}}}{(a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2) \sqrt{a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2 + \left(\frac{(x_{31}-x_{21})x_2 + x_{21} - a_{11}}{x_{32}}\right)^2}} \times \\
&\times \arcsin \frac{\sqrt{a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2 + \left(\frac{(x_{31}-x_{21})x_2 + x_{21} - a_{11}}{x_{32}}\right)^2}}{R_1} - \\
&- \frac{1}{a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2} \arcsin \frac{\frac{x_{31}x_2 - a_{11}}{x_{32}}}{\sqrt{R_1^2 - a_{13}^2 - (x_2 - a_{12})^2}} + \\
&+ \frac{\frac{x_{31}x_2 - a_{11}}{x_{32}}}{(a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2) \sqrt{a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2 + \left(\frac{x_{31}x_2 - a_{11}}{x_{32}}\right)^2}} \times \\
&\left. \times \arcsin \frac{\sqrt{a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2 + \left(\frac{x_{31}x_2 - a_{11}}{x_{32}}\right)^2}}{R_1} \right) dx_2. \tag{2.8}
\end{aligned}$$

Для вычисления объема 4-симплекса $T_4 = A_0A_1A_2A_3A_4$ нам необходимо теперь проинтегрировать выражения

$$\frac{(x_1 - a_{i1})F\left(\frac{r_i}{R_i}\right)}{r_i^3} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{(x_2 - a_{i2})F\left(\frac{r_i}{R_i}\right)}{r_i^3} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{(x_3 - a_{i3})F\left(\frac{r_i}{R_i}\right)}{r_i^3} dx_1 \wedge dx_2, \quad i = 0, 1 \tag{2.9}$$

по трем остальным граням $OA'_2A'_4$, $OA'_3A'_4$ и $A'_2A'_3A'_4$.

Для начала найдем пределы интегрирования для проекций этих граней тетраэдра $\Omega = OA'_2A'_3A'_4$ на координатные плоскости $dx_k \wedge dx_s$. Имеем

$$\begin{aligned}
(OA'_2A'_4) : & 1) \quad dx_1 \wedge dx_2 : 0 \leq x_2 \leq x_{42}, \quad \frac{x_{41}}{x_{42}}x_2 \leq x_1 \leq \frac{(x_{41} - x_{21})}{x_{42}}x_2 + x_{21}x_{42}; \\
& 2) \quad dx_1 \wedge dx_3 : 0 \leq x_3 \leq x_{43}, \quad \frac{x_{41}}{x_{43}}x_3 \leq x_1 \leq \frac{(x_{41} - x_{21})}{x_{43}}x_3 + x_{21}x_{43}; \\
(OA'_3A'_4) : & 1) \quad dx_1 \wedge dx_2 : 0 \leq x_2 \leq x_{31} (x_{31} > x_{41}), \quad \frac{x_{41}}{x_{42}}x_2 \leq x_1 \leq \frac{x_{41} - x_{31}}{x_{42} - x_{32}}x_2 - \frac{x_{32}(x_{41} - x_{31})}{x_{42} - x_{32}}; \\
& 2) \quad dx_1 \wedge dx_3 : 0 \leq x_3 \leq x_{43}, \quad \frac{x_{41}}{x_{43}}x_3 \leq x_1 \leq \frac{(x_{41} - x_{31})}{x_{43}}x_3 + x_{31}; \\
& 3) \quad dx_2 \wedge dx_3 : 0 \leq x_3 \leq x_{43}, \quad \frac{x_{42}}{x_{43}}x_3 \leq x_2 \leq \frac{(x_{42} - x_{31})}{x_{43}}x_3 + x_{31}; \\
(A'_2A'_3A'_4) : & 1) \quad dx_1 \wedge dx_2 : 0 \leq x_2 \leq x_{32}, \quad \frac{x_{41} - x_{21}}{x_{42}}x_2 + x_{21} \leq x_1 \leq \frac{x_{31} - x_{21}}{x_{32}}x_2 + x_{21} \vee \\
& \vee x_{32} \leq x_2 \leq x_{42}, \quad \frac{x_{41} - x_{21}}{x_{42}}x_2 + x_{21} \leq x_1 \leq \frac{x_{41} - x_{31}}{x_{42} - x_{32}}x_2 + \frac{x_{31}(x_{42} - x_{32}) - x_{32}(x_{41} - x_{31})}{x_{42} - x_{32}}; \\
& 2) \quad dx_1 \wedge dx_3 : 0 \leq x_3 \leq x_{43}, \quad \frac{x_{41} - x_{31}}{x_{43}}x_1 + x_{31} \leq x_1 \leq \frac{x_{41} - x_{21}}{x_{41}}x_1 + x_{21}; \\
& 3) \quad dx_2 \wedge dx_3 : 0 \leq x_3 \leq x_{43}, \quad \frac{x_{42}}{x_{43}}x_3 \leq x_2 \leq \frac{(x_{42} - x_{32})}{x_{43}}x_3 + x_{32}.
\end{aligned}$$

Переходим к вычислению интегралов от выражений (2.9) по граням $OA'_2A'_4$, $OA'_3A'_4$ и $A'_2A'_3A'_4$. Получаем:

$$I_{i2} = \int_{OA'_2A'_4} \frac{(x_1 - a_{i1})F\left(\frac{r_i}{R_i}\right)}{r_i^3} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{(x_2 - a_{i2})F\left(\frac{r_i}{R_i}\right)}{r_i^3} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{(x_3 - a_{i3})F\left(\frac{r_i}{R_i}\right)}{r_i^3} dx_1 \wedge dx_2 =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{x_{42}} dx_2 \int_{\frac{x_{41}}{x_{42}}x_2}^{\frac{(x_{41}-x_{21})}{x_{42}}x_2+x_{21}x_{42}} \frac{(\frac{x_{43}x_2}{x_{42}} - a_{i3})F(\frac{\sqrt{(x_1-a_{01})^2+(x_2-a_{02})^2+(\frac{x_{43}x_2}{x_{42}}-a_{03})^2}}{R_i})}{((x_1-a_{01})^2+(x_2-a_{02})^2+(\frac{x_{43}x_2}{x_{42}}-a_{03})^2)^{\frac{3}{2}}} dx_1 - \\
 &- \int_0^{x_{43}} dx_3 \int_{\frac{x_{41}}{x_{43}}x_3}^{\frac{(x_{41}-x_{21})}{x_{43}}x_3+x_{21}x_{43}} \frac{(\frac{x_{42}x_3}{x_{43}} - a_{i2})F(\frac{\sqrt{(x_1-a_{i1})^2+(\frac{x_{42}x_3}{x_{43}}-a_{i2})^2+(x_3-a_{i3})^2}}{R_i})}{((x_1-a_{i1})^2+(\frac{x_{42}x_3}{x_{43}}-a_{i2})^2+(x_3-a_{i3})^2)^{\frac{3}{2}}} dx_1, \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{i3} &= \int_{OA'_3A'_4} \frac{(x_1 - a_{i1})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{(x_2 - a_{i2})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{(x_3 - a_{i3})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3} dx_1 \wedge dx_2 = \\
 &= \int_0^{x_{31}} dx_2 \int_{\frac{x_{41}}{x_{42}}x_2}^{\frac{(x_{41}-x_{31})}{x_{42}-x_{32}}x_2-\frac{x_{32}(x_{41}-x_{31})}{x_{42}-x_{32}}} \frac{(\tilde{x}_3 - a_{i3})F(\frac{\sqrt{(x_1-a_{01})^2+(x_2-a_{02})^2+(\tilde{x}_3-a_{03})^2}}{R_i})}{((x_1-a_{01})^2+(x_2-a_{02})^2+(\tilde{x}_3-a_{03})^2)^{\frac{3}{2}}} dx_1 - \\
 &- \int_0^{x_{43}} dx_3 \int_{\frac{x_{41}}{x_{43}}x_3}^{\frac{(x_{41}-x_{31})}{x_{43}}x_3+x_{31}} \frac{(\tilde{x}_2 - a_{i2})F(\frac{\sqrt{(x_1-a_{i1})^2+(\tilde{x}_2-a_{i2})^2+(x_3-a_{i3})^2}}{R_i})}{((x_1-a_{i1})^2+(\tilde{x}_2-a_{i2})^2+(x_3-a_{i3})^2)^{\frac{3}{2}}} dx_1 +, \\
 &+ \int_0^{x_{43}} dx_3 \int_{\frac{x_{42}}{x_{43}}x_3}^{\frac{(x_{42}-x_{31})}{x_{43}}x_3+x_{31}} \frac{(\tilde{x}_1 - a_{i1})F(\frac{\sqrt{(\tilde{x}_1-a_{i1})^2+(x_2-a_{i2})^2+(x_3-a_{i3})^2}}{R_i})}{((\tilde{x}_1-a_{i1})^2+(x_2-a_{i2})^2+(x_3-a_{i3})^2)^{\frac{3}{2}}} dx_2, \tag{2.11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{i4} &= \int_{A'_2A'_3A'_4} \frac{(x_1 - a_{i1})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{(x_2 - a_{i2})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{(x_3 - a_{i3})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3} dx_1 \wedge dx_2 = \\
 &= \int_0^{x_{32}} dx_2 \int_{\frac{x_{41}-x_{21}}{x_{42}}x_2+x_{21}}^{\frac{x_{31}-x_{21}}{x_{32}}x_2+x_{21}} \frac{(\hat{x}_3 - a_{i3})F(\frac{\sqrt{(x_1-a_{i1})^2+(x_2-a_{i2})^2+(\hat{x}_3-a_{i3})^2}}{R_i})}{((x_1-a_{i1})^2+(x_2-a_{i2})^2+(\hat{x}_3-a_{i3})^2)^{\frac{3}{2}}} dx_1 + \\
 &= \int_0^{x_{32}} dx_2 \int_{\frac{x_{31}-x_{21}}{x_{32}}x_2+x_{21}}^{\frac{x_{41}-x_{31}}{x_{42}-x_{32}}x_2-\frac{x_{32}(x_{41}-x_{31})}{x_{42}-x_{32}}+x_{31}} \frac{(\hat{x}_3 - a_{i3})F(\frac{\sqrt{(x_1-a_{i1})^2+(x_2-a_{i2})^2+(\hat{x}_3-a_{i3})^2}}{R_i})}{((x_1-a_{i1})^2+(x_2-a_{i2})^2+(\hat{x}_3-a_{i3})^2)^{\frac{3}{2}}} dx_1 - \\
 &- \int_0^{x_{43}} dx_3 \int_{\frac{(x_{41}-x_{31})}{x_{43}}x_3+x_{31}}^{\frac{(x_{41}-x_{21})}{x_{43}}x_3+x_{21}} \frac{(\hat{x}_2 - a_{i2})F(\frac{\sqrt{(x_1-a_{i1})^2+(\hat{x}_2-a_{i2})^2+(x_3-a_{i3})^2}}{R_i})}{((x_1-a_{i1})^2+(\hat{x}_2-a_{i2})^2+(x_3-a_{i3})^2)^{\frac{3}{2}}} dx_1 + \\
 &+ \int_0^{x_{43}} dx_3 \int_{\frac{x_{42}}{x_{43}}x_3}^{\frac{(x_{42}-x_{32})}{x_{43}}x_3+x_{32}} \frac{(\hat{x}_1 - a_{i1})F(\frac{\sqrt{(\hat{x}_1-a_{i1})^2+(x_2-a_{i2})^2+(x_3-a_{i3})^2}}{R_i})}{((\hat{x}_1-a_{i1})^2+(x_2-a_{i2})^2+(x_3-a_{i3})^2)^{\frac{3}{2}}} dx_2, \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

где

$$i \in \{0, 1\}, F(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - \arcsin t,$$

а $\tilde{x}_1(\hat{x}_1), \tilde{x}_2(\hat{x}_2), \tilde{x}_3(\hat{x}_3)$ выражаются соответственно через $x_2, x_3; x_1, x_3; x_1, x_2$ с помощью уравнений

$$\begin{aligned}
 &(x_{33}x_{42} - x_{43}x_{32})\tilde{x}_1 + (x_{31}x_{43} - x_{33}x_{41})x_2 + (x_{32}x_{41} - x_{31}x_{42})x_3 = 0, \\
 &(x_{32}x_{43}(\hat{x}_1 - x_{41}) + x_{43}(x_{21} - x_{31})(x_2 - x_{41}) + (x_{32}(x_{21} - x_{41}) - x_{42}(x_{21} - x_{31}))(x_3 - x_{31})) = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (x_{33}x_{42} - x_{43}x_{32})x_1 + (x_{31}x_{43} - x_{33}x_{41})\tilde{x}_2 + (x_{32}x_{41} - x_{31}x_{42})x_3 = 0, \\
& x_{32}x_{43}(x_1 - x_{41}) + x_{43}(x_{21} - x_{31})(\hat{x}_2 - x_{41}) + (x_{32}(x_{21} - x_{41}) - x_{42}(x_{21} - x_{31}))(x_3 - x_{31}) = 0, \\
& (x_{33}x_{42} - x_{43}x_{32})x_1 + (x_{31}x_{43} - x_{33}x_{41})x_2 + (x_{32}x_{41} - x_{31}x_{42})\tilde{x}_3 = 0, \\
& x_{32}x_{43}(x_1 - x_{41}) + x_{43}(x_{21} - x_{31})(x_2 - x_{41}) + (x_{32}(x_{21} - x_{41}) - x_{42}(x_{21} - x_{31}))(\hat{x}_3 - x_{31}) = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 2.1. Пусть в гиперболическом пространстве \mathbb{H}^4 с метрикой (1.7) задан ограниченный тетраэдр $T_4 = A_0A_1A_2A_3A_4$ в стандартной позиции, вершины которого имеют координаты $A_0(0, 0, 0, 1)$, $A_1(0, 0, 0, q)$, $A_2(x_{21}, 0, 0, x_{24})$, $A_3(x_{31}, x_{32}, 0, x_{34})$, $A_4(x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44})$. Тогда его алгебраический объем $V = V(T_4)$ может быть вычислен по формуле:

$$V(T_4) = -\frac{1}{3(-K)^{\frac{3}{2}}}(I_{11} - I_{10} + I_{21} - I_{20} + I_{31} - I_{30} + I_{41} - I_{40}), \quad (2.13)$$

где величины $I_{10}, I_{11}, I_{20}, I_{21}, I_{30}, I_{31}, I_{40}$ и I_{41} имеют интегральные представления (2.7), (2.8), (2.10), (2.11) и (2.12).

Замечание 2.2. В работах [3] и [4] приводится лемма, утверждающая, что координаты вершин гиперболического симплекса можно выразить элементарными функциями от длин его ребер. В статье [4] приводится схема доказательства этой леммы для трехмерного случая. Заметим, что формулы, выражающие координаты вершин через длины ребер, являются очень громоздкими даже для случая $n = 3$. Таким образом, при желании с помощью теоремы 2.1 и вышеупомянутой леммы можно получить обобщение формулы Мураками—Ушиджимы [10] объема трехмерного гиперболического тетраэдра через длины ребер на четырехмерный случай.

Автор выражает признательность В. П. Лексину за полезные обсуждения и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Винберг Э. Б. Объемы неевклидовых многогранников// Усп. мат. наук. — 1993. — 48, № 2. — С. 17–46.
2. Лобачевский Н. И. Воображаемая геометрия. Полн. собр. соч. Т. 3. — М.—Л.: 1949.
3. Сабитов И. Х. Об одном методе вычисления объемов тел// Сиб. электрон. мат. изв. — 2013. — № 10. — С. 615–626.
4. Сабитов И. Х. Гиперболический тетраэдр: вычисление объема с применением к доказательству формулы Шлефли// Модел. и анализ информ. систем. — 2013. — 20, № 6. — С. 149–161.
5. Bolyai J. Appendix. The theory of space// В сб.: «Janos Bolyai». — Budapest, 1987.
6. Cho Yu., Kim H. On the volume formula for hyperbolic tetrahedra// Discrete Comput. Geom. — 1999. — 22. — С. 347–366.
7. Derevnin D. A., Mednykh A. D. A formula for the volume of hyperbolic tetrahedron// Rus. Math. Surv. — 2005. — 60, № 346.
8. Milnor J. Hyperbolic geometry: the first 150 years// Bull. Am. Math. Soc. (N.S.). — 1982. — 6, № 1. — С. 307–332.
9. Murakami J. The volume formulas for a spherical tetrahedron// Arxiv: 1011.2584v4. — 2011.
10. Murakami J., Ushijima A. A volume formula for hyperbolic tetrahedra in terms of edge lengths// J. Geom. — 2005. — 83, № 1-2. — С. 153–163.
11. Murakami J., Yano M. On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron// Commun. Anal. Geom. — 2005. — 13. — С. 379–400.
12. Schläfli L. Theorie der vielfachen Kontinuität// В сб.: «Gesammelte mathematische Abhandlungen». — Basel: Birkhäuser, 1950.

В. А. Краснов

Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: krasnov_va@rudn.university

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-3-494-503

UDC 514.13+514.132

On the Volume Formula for Hyperbolic 4-Dimensional Simplex

© 2017 V. A. Krasnov

Abstract. In this paper, we derive an explicit formula for the volume of arbitrary hyperbolic 4-simplex depending on vertices coordinates.

REFERENCES

1. E. B. Vinberg, “Ob”emy neevklidovykh mnogogrannikov” [Volumes of non-Euclid polyhedrons], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1993, **48**, No. 2, 17–46 (in Russian).
2. N. I. Lobachevskiy, *Voobrazhaemaya geometriya. Poln. sobr. soch. T. 3* [Imaginary Geometry. Compl. Set of Works. Vol. 3], Moscow–Leningrad, 1949 (in Russian).
3. I. Kh. Sabitov, “Ob odnom metode vychisleniya ob”emov tel” [On one method for computation of volumes of solids], *Sib. elektron. mat. izv.* [Seberian Electron. Math. Bull.], 2013, No. 10, 615–626 (in Russian).
4. I. Kh. Sabitov, “Giperbolicheskiy tetraedr: vychislenie ob”ema s primeneniem k dokazatel’stvu formuly Shlefli” [Hyperbolic tetrahedron: computation of volume with application to the proof of the Schläfli formula], *Model. i analiz inform. sistem* [Model. Anal. Inform. Syst.], 2013, **20**, No. 6, 149–161 (in Russian).
5. J. Bolyai, “Appendix. The theory of space,” In: *Janos Bolyai*, Budapest, 1987.
6. Yu. Cho and H. Kim, “On the volume formula for hyperbolic tetrahedra,” *Discrete Comput. Geom.*, 1999, **22**, 347–366.
7. D. A. Derevnin and A. D. Mednykh, “A formula for the volume of hyperbolic tetrahedron,” *Rus. Math. Surv.*, 2005, **60**, No. 346.
8. J. Milnor, “Hyperbolic geometry: the first 150 years,” *Bull. Am. Math. Soc. (N.S.)*, 1982, **6**, No. 1, 307–332.
9. J. Murakami, “The volume formulas for a spherical tetrahedron,” *Arxiv*, 2011, 1011.2584v4.
10. J. Murakami and A. Ushijima, “A volume formula for hyperbolic tetrahedra in terms of edge lengths,” *J. Geom.*, 2005, **83**, No. 1-2, 153–163.
11. J. Murakami and M. Yano, “On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron,” *Commun. Anal. Geom.*, 2005, **13**, 379–400.
12. L. Schläfli, “Theorie der vielfachen Kontinuität,” In: *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Birkhäuser, Basel, 1950.

V. A. Krasnov
 RUDN University,
 6 Miklukho-Maklaya st., 117198 Moscow, Russia
 E-mail: krasnov_va@rudn.university

ОБ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ ГИПЕРУПРУГИХ МОДЕЛЕЙ, ВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

© 2017 г. **В. Ю. САЛАМАТОВА, Ю. В. ВАСИЛЕВСКИЙ**

Аннотация. Условие эллиптичности уравнений равновесия играет важную роль для корректного описания механического поведения материала и является обязательным условием для проверки новых определяющих соотношений. Ранее были предложены новые меры деформации, использование которых приводит к отсутствию корреляций между членами, что значительно упрощает восстановление вида определяющих соотношений по экспериментальным данным. Одна из таких новых мер деформации основана на использовании QR-разложения градиента деформации. В данной работе исследуется условие сильной эллиптичности для гиперупругого материала при использовании QR-разложения градиента деформации.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	504
1. Кинематика	505
2. Уравнения равновесия упругого тела	506
3. Упругий потенциал	507
4. Условие эллиптичности для упругого потенциала в инвариантах Сриниваса	509
5. Заключение	510
6. Приложение А	511
Список литературы	512

ВВЕДЕНИЕ

При решении задач механики деформируемого твердого тела на основе принципов механики сплошной среды необходимо задать определяющее соотношение (зависимость напряжений от деформации) [4]. Определяющее соотношение полностью характеризует механическое поведение исследуемого материала и является одним из уравнений, замыкающим систему уравнений, описывающих движение деформируемого тела. Построение и исследование различных видов определяющих соотношений для мягких тканей человека становится все актуальнее в связи с постановками новых биомедицинских задач.

Для описания механического поведения мягких тканей используют подходы нелинейной теории упругости [12], и, как правило, востребована модель гиперупругого материала, предполагающая существование упругого потенциала, который полностью задает вид определяющего соотношения [12, 16]. Построению определяющих соотношений для мягких тканей посвящено огромное количество работ, при этом нет единого рецепта, как выбрать правильное определяющее соотношение. Стандартный подход к построению определяющих соотношений состоит в априорном задании вида определяющего соотношения (из некоторого пула уже известных моделей) и нахождении параметров модели методом фитирования на основе имеющихся экспериментальных данных для исследуемого материала.

Вид определяющего соотношения в первую очередь зависит от определения меры деформации. На данный момент предложено несколько мер деформаций [1]. При описании механики мягких тканей общепринятой является мера деформации Коши—Грина. Как было показано в работе [5], использование инвариантов этой меры деформации при задании определяющего соотношения приводит к корреляции членов определяющего соотношения и при стандартном подходе к построению

определяющих соотношений порождает проблемы при обработке результатов экспериментов для определения параметров модели. На данный момент существует ряд работ, в которых использование других мер деформаций при построении определяющих соотношений приводит к отсутствию корреляций между членами [6, 15, 20]. Отсутствие корреляции позволяет непосредственно по экспериментальным данным найти так называемые *функции отклика* (*response functions*), которые являются соответствующими производными упругого потенциала, и уже по ним восстанавливать вид определяющих соотношений, без априорного задания его вида. Подход с использованием функций отклика был первоначально предложен в классической работе [18], а в случае биомембран развит Хамфри [13]. Использование определяющих соотношений с некоррелирующими членами в рамках подхода с функциями отклика является перспективным направлением исследований для описания механики мягких тканей, подход был успешно применен для описания механического поведения кровеносного сосуда [15] и миокарда [7]. Однако, при использовании новых мер деформаций в рамках данного подхода остаются вопросы теоретического характера, связанные с ограничениями на вид упругого потенциала (и соответственно, функций отклика).

При написании определяющих соотношений должен быть выполнен ряд определенных условий, обеспечивающих корректную постановку задачи [1, 2]. В частности, выполнение условия сильной эллиптичности для упругого потенциала совпадает с условием эллиптичности системы дифференциальных уравнений равновесия, эквивалентно действительности скоростей распространения волн малой амплитуды в упругой среде [1] и является необходимым условием устойчивости равновесной упругой деформации [14, 17]. Для заданного потенциала сильная эллиптичность может иметь место при определенных значениях градиента деформации и отсутствовать для других значений. Выполнение условий эллиптичности играет важную роль для корректного описания механического поведения материала [11], [2, с. 282]. Таким образом, при написании новых гиперупругих моделей условие эллиптичности является одним из обязательных для проверки. В случае новых мер деформации, приводящих к определяющим соотношениям с некоррелирующими членами, в работе [19] исследовалось выполнение условия сильной эллиптичности для определяющих соотношений, записанных в инвариантах, предложенных в [6].

Целью настоящей работы является изучение выполнения условия сильной эллиптичности для определяющих соотношений, основанных на QR-разложении градиента деформаций [20]. Как было отмечено выше, в случае определяющих соотношений с некоррелирующими членами вид упругого потенциала может быть восстановлен непосредственно по экспериментальным данным. Полученные в данной работе условия выполнения эллиптичности могут быть использованы для исследования корректности восстановленных гиперупругих моделей.

1. КИНЕМАТИКА

Рассмотрим область $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$, занимаемую упругим телом в момент времени t (актуальная конфигурация). Обозначим область в начальный момент времени как Ω_0 (начальная конфигурация). Также обозначим положение точки в отсчетной конфигурации как $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ (лагранжевы координаты), и положение точки в актуальной конфигурации как $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ (эйлеровы координаты). Относительно декартова базиса $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$, связанного с начальной конфигурацией Ω_0 , и декартова базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, связанного с актуальной конфигурацией Ω_t , можем записать

$$\mathbf{X} = X_I \mathbf{E}_I, \quad \mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i. \quad (1.1)$$

Здесь и далее будем подразумевать суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 3, опуская знак суммы.

Деформация упругого тела определяется как взаимно-однозначное отображение

$$\phi : \Omega_s \mapsto \Omega_t,$$

так что в момент времени t

$$\phi(\mathbf{X}, t) : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t), \quad \text{где} \quad x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t).$$

Соответствующие перемещения имеют вид $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) := \mathbf{x} - \phi(\mathbf{X}, t)$.

Одной из ключевых характеристик кинематики является градиент деформации \mathbf{F} , который определяется как

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_J, \quad (1.2)$$

где \otimes обозначает тензорное произведение. Компоненты градиента деформации \mathbf{F} записываются в виде следующей матрицы:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J}, \quad [F_{ij}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}.$$

На $J = \det \mathbf{F}$ накладывают следующее ограничение:

$$J = \det \mathbf{F} > 0,$$

которое гарантирует существование \mathbf{F}^{-1} и исключает самопроникновение тела при деформации.

Заметим, что градиент деформации связан с перемещениями точек тела \mathbf{u} следующим образом:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}, \quad (1.3)$$

где \mathbf{I} — единичный тензор.

Большое применение при построении мер деформации нашло так называемое полярное разложение градиента деформации \mathbf{F} (см. [2]).

Теорема 1.1 (о полярном разложении обратимых матриц). *Любая обратимая вещественная матрица \mathbf{F} может быть единственным образом представлена в виде*

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad \text{или} \quad \mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad (1.4)$$

где \mathbf{R} — ортогональная матрица, а \mathbf{U} , \mathbf{V} — симметричные положительно-определенные матрицы.

Применение теоремы о полярном разложении к градиенту деформации позволяет выделить тензор вращения \mathbf{R} , правый тензор растяжения \mathbf{U} и левый тензор растяжения \mathbf{V} . Другими словами, полную деформацию элемента материала можно рассматривать как суперпозицию жесткого вращения и растяжения данного элемента.

2. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ УПРУГОГО ТЕЛА

Предполагая, что массовые силы отсутствуют, уравнения равновесия упругого материала имеют вид [2]:

$$\operatorname{div}(J\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T}) = 0 \quad \text{в } \Omega_0, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{T}^T = \mathbf{T}, \quad (2.2)$$

где \mathbf{T} — тензор Коши (тензор истинных напряжений), $J = \det \mathbf{F}$. Для замыкания системы уравнений (2.1) необходимо задать определяющее соотношение $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{F}, \mathbf{X})$ и соответствующие граничные условия.

Определяющее соотношение характеризует механическое поведение материала. В случае гиперупругого материала, когда состояние материала не зависит от пути нагружения, существует такой упругий потенциал W (запасенная энергия деформации), что

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T. \quad (2.3)$$

Упругий потенциал должен удовлетворять требованию материальной независимости от системы отсчета, т. е.

$$W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{Q}\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{SO}(3), \quad (2.4)$$

где $SO(3)$ — собственная группа вращений трехмерного пространства. В случае, когда существует симметрия физических свойств рассматриваемого материала, определяющие соотношения должны быть инвариантны относительно всех преобразований материальных координат, принадлежащих группе симметрии для данного материала. На вид функции энергии деформации (упругого потенциала) накладывается еще ряд ограничений, которые подробно описываются в работах [1, 2, 4]. На исследовании одного из таких условий, а именно условия Лежандра—Адамара, мы остановимся подробнее.

2.1. Условие Лежандра—Адамара. Предположим, что функция $W(\mathbf{F})$ является дважды непрерывно дифференцируемой. После подстановки соотношений (2.3) и (1.3) в (2.1) уравнения равновесия (2.1) можно переписать в виде следующего уравнения относительно перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$:

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial X_i \partial X_l} = 0, \tag{2.5}$$

где C_{ijkl} являются компонентами тензора упругости $\mathbb{C}(\mathbf{F})$

$$\mathbb{C}(\mathbf{F}) = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}}; \quad C_{ijkl} = C_{klij} = \frac{\partial^2 W}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}}. \tag{2.6}$$

Отметим, что свойства тензора упругости $\mathbb{C}(\mathbf{F})$ определяют тип системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (2.5).

Определение 2.1 (условие Лежандра—Адамара). Функция энергии деформации $W(\mathbf{F})$ приводит к эллиптической системе уравнений равновесия, если выполняется следующее условие:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : \mathbb{C}(\mathbf{F}) : (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbf{0}. \tag{2.7}$$

В случае строгого неравенства (2.7) является условием сильной эллиптичности системы уравнений равновесия упругого тела.

Выполнение условия сильной эллиптичности эквивалентно действительности скоростей распространения волн малой амплитуды в упругой среде [1], в то же время отсутствие эллиптичности уравнений равновесия (2.5) подразумевает возможность потери гладкости решений уравнений равновесия упругого тела [1, 14] и связано с потерей устойчивости упругого тела [14, 17]. Поэтому при разработке новых определяющих соотношений для гиперупругого материала выполнение условия (2.7) является обязательным для проверки.

3. УПРУГИЙ ПОТЕНЦИАЛ

3.1. Меры деформации. Выше было указано одно из ограничений на вид упругого потенциала — материальная независимость от системы отсчета (2.4). Как показано в [2], для гиперупругих материалов данное требование выполняется только тогда, когда функция запасенной энергии является некоторой функцией от $\mathbf{F}\mathbf{F}^T$, т. е. $W(\mathbf{F}) = \tilde{W}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T)$. На практике стали широко использоваться для характеристики деформации разные меры деформации. Например, правый тензор деформации Коши—Грина

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2;$$

тензор деформации Лагранжа

$$\mathbf{E} = (\mathbf{C} - \mathbf{I})/2;$$

левый тензор Коши—Грина

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2;$$

логарифмическая мера (мера Генки)

$$\mathbf{E}_H = \ln \mathbf{B} / 2 = \ln(\mathbf{V}); \quad \mathbf{e}_H = \ln \mathbf{C} / 2 = \ln(\mathbf{U}).$$

Здесь \mathbf{U}, \mathbf{V} — тензоры растяжения (деформации) полярного разложения градиента деформации (1.4).

В работе [20] автор предлагает использовать меру деформации, основанную не на полярном разложении, а на QR-разложении градиента деформации. Достоинства данного подхода с точки

зрения численного решения задач механики твердого тела обсуждаются в [10, 20]. Главным достоинством с точки зрения задания определяющих соотношений является возможность построения зависимости с некоррелирующими членами.

3.2. Мера деформации, основанная на QR-разложении градиента деформации. Кратко опишем подход Сриниваса [20] для построения определяющих соотношений.

Теорема 3.1 (QR-разложение, см. [3]). *Для любой невырожденной вещественной матрицы \mathbf{F} имеет место разложение*

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q}\mathbf{R}, \quad (3.1)$$

где \mathbf{Q} — ортогональная матрица, а \mathbf{R} — верхнетреугольная матрица с положительными числами на диагонали.

Согласно теореме о QR-разложении для градиента деформации \mathbf{F} , можем найти такую матрицу $\mathbf{Q} = \mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{E}_i$, что

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}} = \sum_{i \leq j}^{i,j=1,2,3} \tilde{F}_{ij} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j, \quad (3.2)$$

$$[\tilde{F}_{ij}] := \begin{pmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{12} & \tilde{F}_{13} \\ 0 & \tilde{F}_{22} & \tilde{F}_{23} \\ 0 & 0 & \tilde{F}_{33} \end{pmatrix},$$

где \mathbf{e}'_i — новый ортонормированный базис, который можно получить методом ортогонализации Грама—Шмидта системы векторов $\{\mathbf{F}\mathbf{E}_1, \mathbf{F}\mathbf{E}_2, \mathbf{F}\mathbf{E}_3\}$.

Отметим, что градиент деформации \mathbf{F} можно переписать в базисе $\{\mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{E}_j\}$ как

$$\mathbf{F} = \sum_{i \leq j}^{i,j=1,2,3} \tilde{F}_{ij} \mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{E}_j. \quad (3.3)$$

Поскольку $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}}^T \tilde{\mathbf{F}}$, то компоненты тензора $\tilde{\mathbf{F}}$ можно получить с помощью факторизации Холецкого тензора деформаций Коши—Грина \mathbf{C} :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{11} &= \sqrt{C_{11}}; & \tilde{F}_{12} &= \frac{C_{12}}{\tilde{F}_{11}}; & \tilde{F}_{13} &= \frac{C_{13}}{\tilde{F}_{11}}; \\ \tilde{F}_{22} &= \sqrt{C_{22} - \tilde{F}_{12}^2}; & \tilde{F}_{23} &= \frac{C_{23} - \tilde{F}_{12}\tilde{F}_{13}}{\tilde{F}_{22}}; & \tilde{F}_{33} &= \sqrt{C_{33} - \tilde{F}_{13}^2 - \tilde{F}_{23}^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Тензор $\tilde{\mathbf{F}}$, подобно тензорам \mathbf{U} и \mathbf{V} , характеризует деформацию тела как изменение расстояний между точками, и все его компоненты имеют физический смысл [20]. В качестве мер деформации принимаются следующие величины ξ_i , $i = 1, \dots, 6$:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \ln \tilde{F}_{11}, & \xi_2 &= \ln \tilde{F}_{22}, & \xi_3 &= \ln \tilde{F}_{33}, \\ \xi_4 &= \frac{\tilde{F}_{12}}{\tilde{F}_{11}}, & \xi_5 &= \frac{\tilde{F}_{13}}{\tilde{F}_{11}}, & \xi_6 &= \frac{\tilde{F}_{23}}{\tilde{F}_{22}}; \end{aligned} \quad (3.5)$$

упругий потенциал является функцией ξ_i :

$$W = \psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6). \quad (3.6)$$

В силу равенств (3.4), понятно, что условие независимости материала от системы отсчета (2.4) выполняется.

4. Условие эллиптичности для упругого потенциала в инвариантах Сриниваса

Пусть $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}'_i$ и $\mathbf{b} = b_k \mathbf{E}_k$, тогда

$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a_i b_k \mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{E}_k. \quad (4.1)$$

Перепишем условие сильной эллиптичности (2.7), учитывая (3.2), следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} : \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}} : \mathbf{H} &= (\mathbf{Q}^T \mathbf{H}) : \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{\mathbf{F}} \partial \bar{\mathbf{F}}} : (\mathbf{Q}^T \mathbf{H}) = \\ &= \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_n \partial \xi_m} \left(\frac{\partial \xi_n}{\partial \bar{\mathbf{F}}} : (\mathbf{Q}^T \mathbf{H}) \right) \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial \bar{\mathbf{F}}} : (\mathbf{Q}^T \mathbf{H}) \right) + \frac{\partial W}{\partial \xi_n} \left((\mathbf{Q}^T \mathbf{H}) : \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial \bar{\mathbf{F}} \partial \bar{\mathbf{F}}} : (\mathbf{Q}^T \mathbf{H}) \right) > 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Обозначим $\bar{H}_{ij} = (\mathbf{e}'_i, \mathbf{H} \mathbf{E}_j) = a_i b_j$, тогда условие (4.2) эквивалентно условию положительной определенности квадратичной формы

$$\bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{\Pi} \bar{\mathbf{H}} > 0, \quad (4.3)$$

где $\bar{\mathbf{H}} = (H_{11}, H_{22}, H_{33}, H_{12}, H_{23}, H_{13})^T$, и матрица $\mathbf{\Pi}$ определяется в (6.1), (6.2), см. приложение А. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4.1. *Необходимым и достаточным условием сильной эллиптичности (4.2) при заданной деформации является положительная определенность матрицы $\mathbf{\Pi}$ (6.1), (6.2).*

Следствие 4.1. *Необходимыми условиями для сильной эллиптичности являются следующие ограничения на частные производные функции ψ :*

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= \frac{1}{\tilde{F}_{11}^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1^2} + \xi_4^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_4^2} + \xi_5^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_5^2} - 2\xi_4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1 \partial \xi_4} - 2\xi_5 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1 \partial \xi_5} + \right. \\ &\quad \left. + 2\xi_4 \xi_5 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_4 \partial \xi_5} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} + 2\xi_4 \frac{\partial \psi}{\partial \xi_4} + 2\xi_5 \frac{\partial \psi}{\partial \xi_5} \right) > 0; \\ \Pi_{22} &= \frac{1}{\tilde{F}_{22}^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_2^2} - 2\xi_6 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_2 \partial \xi_6} + \xi_6^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_6^2} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} + 2\xi_6 \frac{\partial \psi}{\partial \xi_6} \right) > 0; \\ \Pi_{33} &= \frac{1}{\tilde{F}_{33}^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_3^2} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi_3} \right) > 0; \\ \Pi_{44} &= \frac{1}{\tilde{F}_{11}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_4^2} > 0; \\ \Pi_{55} &= \frac{1}{\tilde{F}_{22}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_5^2} > 0; \\ \Pi_{66} &= \frac{1}{\tilde{F}_{11}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_6^2} > 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Доказательство следует из критерия положительной определенности матрицы $\mathbf{\Pi}$. Согласно неравенствам (4.4), необходимыми условиями эллиптичности гиперупругой модели в инвариантах $\xi_i, i = 1, \dots, 6$ являются экспоненциальный рост функции ψ по ξ_3 и выпуклость по ξ_4, ξ_5, ξ_6 .

Замечание 4.1. Проверка необходимых условий (4.4) для любого упругого потенциала, восстановленного по экспериментальным данным, позволит установить, не нарушается ли условие сильной эллиптичности для исследуемого диапазона деформаций. В силу теоремы 4.1 достаточные условия положительной определенности матрицы $\mathbf{\Pi}$ для заданной деформации также являются достаточными для выполнения условия сильной эллиптичности, однако не приведены здесь в общем виде из-за своей громоздкости.

4.1. Случай $\psi = \psi(\xi_1, \xi_2, \xi_4)$. Рассмотрим выполнение необходимых условий для эллиптичности для частного случая определяющих соотношений в двумерном случае.

Моделирование работы сердца представляет большой интерес для решения многих биомедицинских задач. Механическое поведение различных участков сердца активно исследовалось и

исследуется. Одним из таких участков является перикард (внешняя оболочка сердца, околосердечная сумка). Согласно экспериментальным данным, перикард может считаться анизотропным ортотропным материалом, т. е. существуют три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии свойств. Анизотропия свойств связана с сетью упругих волокон, расположенных в перикарде.

В работах [8,9] на основании экспериментальных данных было предложено определяющее соотношение для перикарда. Предложенная мера деформации в [8] совпадает с ξ_1, ξ_2, ξ_4 , и полученное соотношение для гиперупругого случая имеет вид

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_4) = q_1 \xi_1 + g_1 \left(\frac{e^{\alpha_1 \xi_1} - \alpha_1 \xi_1 - 1}{\alpha_1^2} \right) + q_2 \xi_2 + g_2 \left(\frac{e^{\alpha_2 \xi_2} - \alpha_2 \xi_2 - 1}{\alpha_2^2} \right) + \alpha_3 \xi_1^2 \xi_2^2 + \alpha_4 \xi_1^2 \xi_2^3 + \xi_4^2 G(\xi_1, \xi_2, \xi_4^2), \quad (4.5)$$

где $q_1 = 1,78$ кПа, $q_2 = 0,7$ кПа, $g_1 = 146$ кПа, $g_2 = 85$ кПа, $\alpha_1 = \alpha_2 = 23,5$, $\alpha_3 = 5550$ кПа, $\alpha_4 = 26400$ кПа. Функция $G(\xi_1, \xi_2, \xi_4^2)$ из (4.5) не может быть определена на основании использованного набора экспериментальных данных (эксперимент проводился при $\xi_4 = 0$). Необходимые условия для сильной эллиптичности для случая упругого потенциала (4.5) переписываются как

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1^2} + \xi_4^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_4^2} - 2\xi_4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1 \partial \xi_4} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} + 2\xi_4 \frac{\partial \psi}{\partial \xi_4} &> 0; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_2^2} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} &> 0; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_4^2} &> 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Второе неравенство (4.6) соотносится с известным фактом увеличения жесткости мягких тканей при больших растяжениях [12], что выражается в экспоненциальном законе при описании их механического поведения. Отметим, что упругий потенциал (4.5) при $\xi_4 = 0$ соответствует определяющему соотношению для некоторого изотропного материала, которое выражается в виде некоторой функции $\psi_{iso} = \psi_{iso}(\xi_1, \xi_2)$. При этом необходимые условия в виде экспоненциального роста ψ по ξ_1 и по ξ_2 выполняются, и, более того, ψ_{iso} будет удовлетворять условию сильной эллиптичности для любых значений ξ_1, ξ_2 .

Для описания механического поведения перикарда при различных значениях ξ_1, ξ_2, ξ_4 необходимо найти функцию $G(\xi_1, \xi_2, \xi_4^2)$ из (4.5) на основании экспериментальных данных, при которых $\xi_4 \neq 0$. При этом условия (4.6) накладывают ограничения на вид функции $G(\xi_1, \xi_2, \xi_4^2)$, чтобы выполнялось условие эллиптичности уравнений равновесия. В силу замечания 4.1 и общего вида функции $G(\xi_1, \xi_2, \xi_4^2)$ исследование достаточных условий эллиптичности уравнений не приведено.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнение условий сильной эллиптичности для гиперупругого материала непосредственно связано с корректным описанием механического поведения материала. Данное условие является необходимым условием устойчивости равновесной упругой деформации. Одним из главных следствий выполнения условия сильной эллиптичности является вещественность скорости распространения волн в материале. В данной работе было исследовано условие сильной эллиптичности для определяющих соотношений гиперупругого материала в случае меры деформации, основанной на QR-разложении градиента деформации. Выполнение условия сильной эллиптичности эквивалентно положительной определенности матрицы, вид которой был получен в статье. Были получены необходимые условия, накладывающие ограничения на вид упругого потенциала в новых инвариантах, для выполнения условия сильной эллиптичности. В частности, для предложенной ранее гиперупругой модели перикарда, восстановленной по экспериментальным данным, получены ограничения на вид упругого потенциала.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 17-71-10102.

6. ПРИЛОЖЕНИЕ А

6.1. Производные инвариантов. Поскольку

$$\xi_1 = \ln \tilde{F}_{11}, \quad \xi_2 = \ln \tilde{F}_{22}, \quad \xi_3 = \ln \tilde{F}_{33}, \quad \xi_4 = \frac{\tilde{F}_{12}}{\tilde{F}_{11}}, \quad \xi_5 = \frac{\tilde{F}_{13}}{\tilde{F}_{11}}, \quad \xi_6 = \frac{\tilde{F}_{23}}{\tilde{F}_{22}},$$

то соответствующие производные запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial \tilde{F}_{ij}} &= \frac{1}{\tilde{F}_{11}} \delta_{i1} \delta_{j1}; & \frac{\partial \xi_2}{\partial \tilde{F}_{ij}} &= \frac{1}{\tilde{F}_{22}} \delta_{i2} \delta_{j2}; & \frac{\partial \xi_3}{\partial \tilde{F}_{ij}} &= \frac{1}{\tilde{F}_{33}} \delta_{i3} \delta_{j3}; \\ \frac{\partial \xi_4}{\partial \tilde{F}_{ij}} &= \frac{1}{\tilde{F}_{11}} \delta_{i1} \delta_{j2} - \frac{\tilde{F}_{12}}{\tilde{F}_{11}^2} \delta_{i1} \delta_{j1}; \\ \frac{\partial \xi_5}{\partial \tilde{F}_{ij}} &= \frac{1}{\tilde{F}_{11}} \delta_{i1} \delta_{j3} - \frac{\tilde{F}_{13}}{\tilde{F}_{11}^2} \delta_{i1} \delta_{j1}; \\ \frac{\partial \xi_6}{\partial \tilde{F}_{ij}} &= \frac{1}{\tilde{F}_{22}} \delta_{i2} \delta_{j3} - \frac{\tilde{F}_{23}}{\tilde{F}_{22}^2} \delta_{i2} \delta_{j2}, \end{aligned}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

6.2. Матрица П. Пусть

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \mathbf{e}'_1 \otimes \mathbf{E}_1, & \mathbf{H}_2 &= \mathbf{e}'_2 \otimes \mathbf{E}_2, & \mathbf{H}_3 &= \mathbf{e}'_3 \otimes \mathbf{E}_3, \\ \mathbf{H}_4 &= \mathbf{e}'_1 \otimes \mathbf{E}_2, & \mathbf{H}_5 &= \mathbf{e}'_2 \otimes \mathbf{E}_3, & \mathbf{H}_6 &= \mathbf{e}'_1 \otimes \mathbf{E}_3, \end{aligned}$$

тогда матрица $\mathbf{\Pi}$ определяется как

$$\mathbf{\Pi} = \left[(\mathbf{Q}^T \mathbf{H}_\alpha) : \frac{\partial^2 W}{\partial \tilde{\mathbf{F}} \partial \tilde{\mathbf{F}}} : (\mathbf{Q}^T \mathbf{H}_\beta) \right]_{6 \times 6}. \quad (6.1)$$

Будем считать, что

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial \xi_i}.$$

Учитывая, что $\Pi_{ij} = \Pi_{ji}$, получим следующие выражения для элементов матрицы $\mathbf{\Pi}$:

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= \sum_{n=1,4,5} \sum_{m=1,4,5} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_m} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{11}} \frac{\partial \xi_m}{\partial \tilde{F}_{11}} + \sum_{n=1,4,5} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial \tilde{F}_{11} \partial \tilde{F}_{11}}; \\ \Pi_{12} &= \sum_{n=1,4,5} \sum_{m=2,6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_m} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{11}} \frac{\partial \xi_m}{\partial \tilde{F}_{22}}; \\ \Pi_{13} &= \sum_{n=1,4,5} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_3} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{11}} \frac{\partial \xi_3}{\partial \tilde{F}_{33}} = \frac{1}{\tilde{F}_{33}} \sum_{n=1,4,5} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_3} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{11}}; \\ \Pi_{14} &= \sum_{n=1,4,5} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_4} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{11}} \frac{\partial \xi_4}{\partial \tilde{F}_{12}} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi_4} \frac{\partial^2 \xi_4}{\partial \tilde{F}_{11} \partial \tilde{F}_{12}} = \frac{1}{\tilde{F}_{11}} \sum_{n=1,4,5} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_4} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{11}} - \frac{1}{\tilde{F}_{11}^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_4}; \\ \Pi_{15} &= \sum_{n=1,4,5} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_6} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{11}} \frac{\partial \xi_6}{\partial \tilde{F}_{23}} = \frac{1}{\tilde{F}_{22}} \sum_{n=1,4,5} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_6} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{11}}; \\ \Pi_{16} &= \sum_{n=1,4,5} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_5} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{11}} \frac{\partial \xi_5}{\partial \tilde{F}_{13}} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi_5} \frac{\partial^2 \xi_5}{\partial \tilde{F}_{11} \partial \tilde{F}_{13}} = \frac{1}{\tilde{F}_{11}} \sum_{n=1,4,5} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_5} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{11}} - \frac{1}{\tilde{F}_{11}^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_5}; \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{22} &= \sum_{n=2,6} \sum_{m=2,6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_m} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{22}} \frac{\partial \xi_m}{\partial \tilde{F}_{22}} + \sum_{n=2,6} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial \tilde{F}_{22} \partial \tilde{F}_{22}}; \\
\Pi_{23} &= \sum_{n=2,6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_3} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{22}} \frac{\partial \xi_3}{\partial \tilde{F}_{33}} = \frac{1}{\tilde{F}_{33}} \sum_{n=2,6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_3} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{22}}; \\
\Pi_{24} &= \sum_{n=2,6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_4} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{22}} \frac{\partial \xi_4}{\partial \tilde{F}_{12}} = \frac{1}{\tilde{F}_{11}} \sum_{n=2,6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_4} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{22}}; \\
\Pi_{25} &= \sum_{n=2,6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_6} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{22}} \frac{\partial \xi_6}{\partial \tilde{F}_{23}} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi_6} \frac{\partial^2 \xi_6}{\partial \tilde{F}_{22} \partial \tilde{F}_{23}} = \frac{1}{\tilde{F}_{22}} \sum_{n=2,6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_6} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{22}} - \frac{1}{\tilde{F}_{22}^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_6}; \\
\Pi_{26} &= \sum_{n=2,6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_5} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{22}} \frac{\partial \xi_5}{\partial \tilde{F}_{13}} = \frac{1}{\tilde{F}_{11}} \sum_{n=2,6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_5} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{22}}; \\
\Pi_{33} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_3^2} \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial \tilde{F}_{33}} \right)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial \xi_3} \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial \tilde{F}_{33} \partial \tilde{F}_{33}} = \frac{1}{\tilde{F}_{33}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_3^2} - \frac{1}{\tilde{F}_{33}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_3}; \\
\Pi_{34} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_3 \partial \xi_4} \frac{\partial \xi_3}{\partial \tilde{F}_{33}} \frac{\partial \xi_4}{\partial \tilde{F}_{12}} = \frac{1}{\tilde{F}_{33}} \frac{1}{\tilde{F}_{11}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_3 \partial \xi_4}; \\
\Pi_{35} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_3 \partial \xi_6} \frac{\partial \xi_3}{\partial \tilde{F}_{33}} \frac{\partial \xi_6}{\partial \tilde{F}_{23}} = \frac{1}{\tilde{F}_{33}} \frac{1}{\tilde{F}_{22}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_3 \partial \xi_6}; \\
\Pi_{36} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_3 \partial \xi_5} \frac{\partial \xi_3}{\partial \tilde{F}_{33}} \frac{\partial \xi_5}{\partial \tilde{F}_{13}} = \frac{1}{\tilde{F}_{33}} \frac{1}{\tilde{F}_{11}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_3 \partial \xi_5}; \\
\Pi_{44} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_4^2} \left(\frac{\partial \xi_4}{\partial \tilde{F}_{12}} \right)^2 = \frac{1}{\tilde{F}_{11}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_4^2}; \\
\Pi_{45} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_4 \partial \xi_6} \frac{\partial \xi_4}{\partial \tilde{F}_{12}} \frac{\partial \xi_6}{\partial \tilde{F}_{23}} = \frac{1}{\tilde{F}_{11}} \frac{1}{\tilde{F}_{22}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_4 \partial \xi_6}; \\
\Pi_{46} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_4 \partial \xi_5} \frac{\partial \xi_4}{\partial \tilde{F}_{12}} \frac{\partial \xi_5}{\partial \tilde{F}_{13}} = \frac{1}{\tilde{F}_{11}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_4 \partial \xi_5}; \\
\Pi_{55} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_6^2} \left(\frac{\partial \xi_6}{\partial \tilde{F}_{23}} \right)^2 = \frac{1}{\tilde{F}_{22}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_6^2}; \\
\Pi_{56} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_6 \partial \xi_5} \frac{\partial \xi_6}{\partial \tilde{F}_{23}} \frac{\partial \xi_5}{\partial \tilde{F}_{13}} = \frac{1}{\tilde{F}_{11}} \frac{1}{\tilde{F}_{22}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_6 \partial \xi_5}; \\
\Pi_{66} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_5^2} \left(\frac{\partial \xi_5}{\partial \tilde{F}_{13}} \right)^2 = \frac{1}{\tilde{F}_{11}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_5^2}.
\end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980.
2. Сьярле Ф. Математическая теория упругости. — М.: Мир, 1992.
3. Тьртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра. — М.: Физматлит, 2007.
4. Трудделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М.: Мир, 1975.
5. Criscione J. C. Rivlin's representation formula is ill-conceived for the determination of response functions via biaxial testing// В сб.: «The Rational Spirit in Modern Continuum Mechanics». — Dordrecht: Springer, 2004. — С. 197–215.
6. Criscione J. C., Humphrey J. D., Douglas A. S., Hunter W. C. An invariant basis for natural strain which yields orthogonal stress response terms in isotropic hyperelasticity// J. Mech. Phys. Solids. — 2000. — 48, № 12. — С. 2445–2465.
7. Criscione J. C., McCulloch A. D., Hunter W. C. Constitutive framework optimized for myocardium and other high-strain, laminar materials with one fiber family// J. Mech. Phys. Solids. — 2002. — 50, № 8. — С. 1681–1702.

8. *Criscione J. C., Sacks M. S., Hunter W. C.* Experimentally tractable, pseudo-elastic constitutive law for biomembranes: I. Theory// *J. Biomech. Eng.* — 2003. — 125, № 1. — С. 94–99.
9. *Criscione J. C., Sacks M. S., Hunter W. C.* Experimentally tractable, pseudo-elastic constitutive law for biomembranes: II. Application// *J. Biomech. Eng.* — 2003. — 125, № 1. — С. 100–105.
10. *Freed A. D., Srinivasa A. R.* Logarithmic strain and its material derivative for a QR decomposition of the deformation gradient// *Acta Mech.* — 2015. — 226, № 8. — С. 2645–2670.
11. *Hayes M.* Static implications of the strong-ellipticity condition// *Arch. Ration. Mech. Anal.* — 1969. — 33, № 3. — С. 181–191.
12. *Holzapfel G. A.* Biomechanics of soft tissue// *Handb. Mater. Behav. Models.* — 2001. — 3, № 1. — С. 1049–1063.
13. *Humphrey J. D.* Computer methods in membrane biomechanics// *Comput. Methods Biomech. Biomed. Eng.* — 1998. — 1, № 3. — С. 171–210.
14. *Knowles J. K., Sternberg E.* On the failure of ellipticity and the emergence of discontinuous deformation gradients in plane finite elastostatics// *J. Elasticity.* — 1978. — 8, № 4. — С. 329–379.
15. *Kotiya A. A.* Mechanical characterisation and structural analysis of normal and remodeled cardiovascular soft tissue// *Doctoral diss.* — Texas A&M University, 2008.
16. *Martins P., Natal Jorge R. M., Ferreira A. J. M.* A comparative study of several material models for prediction of hyperelastic properties: application to silicone-rubber and soft tissues// *Strain.* — 2006. — 42, № 3. — С. 135–147.
17. *Merodio J., Ogden R. W.* Instabilities and loss of ellipticity in fiber-reinforced compressible non-linearly elastic solids under plane deformation// *Int. J. Solids Structures.* — 2003. — 40, № 18. — С. 4707–4727.
18. *Rivlin R. S., Saunders D. W.* Large elastic deformations of isotropic materials. VII. Experiments on the deformation of rubber// *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* — 1951. — 243, № 865. — С. 251–288.
19. *Sendova T., Walton J. R.* On strong ellipticity for isotropic hyperelastic materials based upon logarithmic strain// *Int. J. Nonlinear Mech.* — 2005. — 40, № 2. — С. 195–212.
20. *Srinivasa A. R.* On the use of the upper triangular (or QR) decomposition for developing constitutive equations for Green-elastic materials// *Internat. J. Engrg. Sci.* — 2012. — 60. — С. 1–12.

В. Ю. Саламатова

Московский физико-технический институт (государственный университет),
141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9;
Первый Московский государственный медицинский университет им. И. М. Сеченова,
119991, Москва, ул. Большая Пироговская, д. 2, стр. 4
E-mail: salamatova@gmail.com

Ю. В. Василевский

Институт вычислительной математики РАН,
119333, Москва, ул. Губкина, д. 8;
Московский физико-технический институт,
141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9;
Первый Московский государственный медицинский университет им. И. М. Сеченова,
119991, Москва, ул. Большая Пироговская, д. 2, стр. 4.
E-mail: yuri.vassilevski@gmail.com

On Ellipticity of Hyperelastic Models Based on Experimental Data

© 2017 V. Yu. Salamatova, Yu. V. Vasilevskii

Abstract. The condition of ellipticity of the equilibrium equation plays an important role for correct description of mechanical behavior of materials and is a necessary condition for new defining relationships. Earlier, new deformation measures were proposed to vanish correlations between the terms, that dramatically simplifies restoration of defining relationships from experimental data. One of these new deformation measures is based on the QR-expansion of deformation gradient. In this paper, we study the strong ellipticity condition for hyperelastic material using the QR-expansion of deformation gradient.

REFERENCES

1. A. I. Lurie, *Nelineynaya teoriya uprugosti* [Nonlinear Theory of Elasticity], Nauka, Moscow, 1980 (Russian translation).
2. P. Ciarlet, *Matematicheskaya teoriya uprugosti* [Mathematical Elasticity], Mir, Moscow, 1992 (Russian translation).
3. E. E. Tyrtyshnikov, *Matrichnyy analiz i lineynaya algebra* [Matrix Analysis and Linear Algebra], Fizmatlit, Moscow, 2007 (in Russian).
4. C. Truesdell, *Pervonachal'nyy kurs ratsional'noy mekhaniki sploshnykh sred* [A First Course in Rational Continuum Mechanics], Mir, Moscow, 1975 (Russian translation).
5. J. C. Criscione, "Rivlin's representation formula is ill-conceived for the determination of response functions via biaxial testing," In: *The Rational Spirit in Modern Continuum Mechanics*, Springer, Dordrecht, 2004, 197–215.
6. J. C. Criscione, J. D. Humphrey, A. S. Douglas, and W. C. Hunter, "An invariant basis for natural strain which yields orthogonal stress response terms in isotropic hyperelasticity," *J. Mech. Phys. Solids*, 2000, **48**, No. 12, 2445–2465.
7. J. C. Criscione, A. D. McCulloch, and W. C. Hunter, "Constitutive framework optimized for myocardium and other high-strain, laminar materials with one fiber family," *J. Mech. Phys. Solids*, 2002, **50**, No. 8, 1681–1702.
8. J. C. Criscione, M. S. Sacks, and W. C. Hunter, "Experimentally tractable, pseudo-elastic constitutive law for biomembranes: I. Theory," *J. Biomech. Eng.*, 2003, **125**, No. 1, 94–99.
9. J. C. Criscione, M. S. Sacks, and W. C. Hunter, "Experimentally tractable, pseudo-elastic constitutive law for biomembranes: II. Application," *J. Biomech. Eng.*, 2003, **125**, No. 1, 100–105.
10. A. D. Freed and A. R. Srinivasa, "Logarithmic strain and its material derivative for a QR decomposition of the deformation gradient," *Acta Mech.*, 2015, **226**, No. 8, 2645–2670.
11. M. Hayes, "Static implications of the strong-ellipticity condition," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1969, **33**, No. 3, 181–191.
12. G. A. Holzapfel, "Biomechanics of soft tissue," *Handb. Mater. Behav. Models*, 2001, **3**, No. 1, 1049–1063.
13. J. D. Humphrey, "Computer methods in membrane biomechanics," *Comput. Methods Biomech. Biomed. Eng.*, 1998, **1**, No. 3, 171–210.
14. J. K. Knowles and E. Sternberg, "On the failure of ellipticity and the emergence of discontinuous deformation gradients in plane finite elastostatics," *J. Elasticity*, 1978, **8**, No. 4, 329–379.
15. A. A. Kotiya, *Mechanical Characterisation and Structural Analysis of Normal and Remodeled Cardiovascular Soft Tissue*, Doctoral Diss., Texas A&M University, 2008.
16. P. Martins, R. M. Natal Jorge, and A. J. Ferreira, "A comparative study of several material models for prediction of hyperelastic properties: application to silicone-rubber and soft tissues," *Strain*, 2006, **42**, No. 3, 135–147.
17. J. Merodio and R. W. Ogden, "Instabilities and loss of ellipticity in fiber-reinforced compressible nonlinearly elastic solids under plane deformation," *Int. J. Solids Structures*, 2003, **40**, No. 18, 4707–4727.
18. R. S. Rivlin and D. W. Saunders, "Large elastic deformations of isotropic materials. VII. Experiments on the deformation of rubber," *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1951, **243**, No. 865, 251–288.

19. T. Sendova and J.R. Walton, “On strong ellipticity for isotropic hyperelastic materials based upon logarithmic strain,” *Int. J. Nonlinear Mech.*, 2005, **40**, No. 2, 195–212.
20. A.R. Srinivasa, “On the use of the upper triangular (or QR) decomposition for developing constitutive equations for Green-elastic materials,” *Internat. J. Engrg. Sci.*, 2012, **60**, 1–12.

V. Yu. Salamatova

Moscow Institute of Physics and Technology (State University),
9 Institutskiy per., 141701 Moscow Region, Russia;
Sechenov First Moscow State Medical University,
2 build. 4 Bol’shaya Pirogovskaya st., 119991 Moscow, Russia
E-mail: salamatova@gmail.com

Yu. V. Vasilevskii

Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences,
8 Gubkina st., 119333 Moscow, Russia;
Moscow Institute of Physics and Technology (State University),
9 Institutskiy per., 141701 Moscow Region, Russia;
Sechenov First Moscow State Medical University,
2 build. 4 Bol’shaya Pirogovskaya st., 119991 Moscow, Russia
E-mail: yuri.vassilevski@gmail.com

ЧАСТИЧНОЕ СОХРАНЕНИЕ ЧАСТОТ И ПОКАЗАТЕЛЕЙ ФЛОКЕ ИНВАРИАНТНЫХ ТОРОВ В ОБРАТИМОМ КОНТЕКСТЕ 2 ТЕОРИИ КАМ

© 2017 г. **М. Б. СЕВРЮК**

Аннотация. С помощью метода Эрмана изучается сохранение гладких семейств инвариантных торов в обратимом контексте 2 теории КАМ при различных слабых условиях невырожденности. Обратимый контекст 2 — это ситуация, в которой размерность многообразия неподвижных точек обращаемой инволюции меньше половины коразмерности рассматриваемого инвариантного тора. Используемые условия невырожденности гарантируют сохранение любых заранее выбранных подмножеств частот невозмущенных торов и их показателей Флоке (собственных чисел матрицы коэффициентов вариационного уравнения вдоль тора).

*Светлой памяти Гельмута Рюссмана,
чей вклад в теорию КАМ столь значителен и многогранен*

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение	516
2. Диофантова лемма	522
3. Основной результат	524
4. Теорема-источник в обратимом контексте 2	529
5. Доказательство теоремы 3.1	530
6. Инвариантные торы в общих системах	534
Список литературы	536

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Обратимые контексты 1 и 2. Положения равновесия, периодические орбиты, инвариантные торы, заполненные квазипериодическими движениями (условно-периодическими движениями с рационально независимыми частотами), и их асимптотические многообразия (в частности, гомоклинические и гетероклинические траектории) являются ключевыми элементами конечномерной динамики. Важность положений равновесия (инвариантных нульмерных торов) и периодических орбит (инвариантных одномерных торов) автономных потоков была осознана еще А. Пуанкаре; в дальнейшем А. А. Андронов и Э. Хопф подчеркивали их значение для теории бифуркаций (см. [4, 32]). Квазипериодические движения с более чем одной базисной частотой изучает теория Колмогорова—Арнольда—Мозера (теория КАМ), основанная в пятидесятых-шестидесятых годах прошлого века (см. [2, 5, 10, 16, 18, 22–24, 26, 35, 38, 59]). Согласно теории КАМ, наличие канторовых семейств инвариантных торов различных размерностей, заполненных квазипериодическими движениями, типично для неинтегрируемых динамических систем. Возможные размерности торов и количество параметров их канторовых семейств (как правило, сами эти семейства образуют сложные иерархические конгломераты) сильно зависят от структур на фазовом пространстве, сохраняемых данной системой.

Например, типичная автономная гамильтонова система с N степенями свободы имеет изолированные положения равновесия, однопараметрические гладкие семейства периодических орбит (параметром является значение энергии) и n -параметрические канторовы семейства изотропных инвариантных n -мерных торов, по которым происходят квазипериодические движения, для каждого $n = 2, \dots, N$ (см. [10, 16, 18, 38]). Существование других типов семейств квазипериодических

движений, заполняющих изотропные инвариантные торы, свидетельствует о наличии дополнительных симметрий системы. Между прочим, в типичном однопараметрическом семействе периодических орбит период не является константой и может использоваться в качестве альтернативного параметра.

В теории КАМ рассматриваются различные классы динамических систем, и искомые инвариантные торы могут быть связаны с соответствующими структурами на фазовом пространстве различным образом. Поэтому иногда говорят о тех или иных *контекстах* теории КАМ. Из конечномерных контекстов лучше всего исследованы диссипативный контекст (означающий отсутствие каких-либо специальных структур на фазовом пространстве), контекст, сохраняющий объемы (в котором ищутся инвариантные торы систем, сохраняющих объемы), гамильтонов изотропный контекст (в котором исследуются изотропные инвариантные торы в гамильтоновых системах) и так называемый обратимый контекст 1 (см. [8, 9, 13–17, 36, 41, 44, 45, 55]). В качестве примеров менее изученных контекстов можно привести гамильтонов коизотропный контекст (с коизотропными инвариантными торами) и гамильтонов атропный контекст, где исследуемые инвариантные торы атропны, т. е. не являются ни изотропными, ни коизотропными (библиографию по обоим этим контекстам можно найти в [18]), а также так называемый конформно гамильтонов контекст (см. [19] и приведенную там библиографию). Еще один пример — обратимый контекст 2, которому посвящена настоящая работа. Напомним соответствующие определения и основные факты.

Определение 1.1 (см. [29, 37, 40]). Для любого множества M отображение $G : M \rightarrow M$ называется *инволюцией* множества M , если $G^2 = G \circ G$ — тождественное преобразование. Динамическая система называется *обратимой* относительно гладкой инволюции G фазового пространства (или G -обратимой), если эта система инвариантна относительно преобразования $(p, t) \mapsto (Gp, -t)$, где p — точка фазового пространства, а t — время (т. е. если G переводит данную систему в систему с обратным направлением течения времени).

В обратимой теории КАМ рассматриваются только торы, инвариантные как относительно самой системы, так и относительно обращающей инволюции.

Лемма 1.1 (см. [15, 16, 40, 48]). Пусть n -мерный тор $\mathcal{T} \subset M$ инвариантен относительно G -обратимого потока на M и относительно соответствующей обращающей инволюции G . Если движение на \mathcal{T} квазипериодично, то на \mathcal{T} можно ввести такую координату $x \in \mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$, что динамика на \mathcal{T} примет вид $\dot{x} = \omega$, а ограничение G на \mathcal{T} будет иметь вид $G|_{\mathcal{T}} : x \mapsto -x$. Следовательно, множество неподвижных точек инволюции $G|_{\mathcal{T}}$ состоит из 2^n изолированных точек (x_1, \dots, x_n) , где каждая компонента x_i , $1 \leq i \leq n$, равна либо 0, либо π .

Множество $\text{Fix } G$ неподвижных точек инволюции $G : M \rightarrow M$ многообразия M является подмногообразием M того же класса гладкости, что и сама G (см. [1, 11, 33]; отметим также, что книги [1, 3, 11, 21] содержат обширную информацию о множествах неподвижных точек инволюций различных многообразий). Однако в условиях леммы 1.1 разные точки множества $\text{Fix}(G|_{\mathcal{T}}) = (\text{Fix } G) \cap \mathcal{T}$ могут принадлежать компонентам связности множества $\text{Fix } G$ разных размерностей (в [8, 36] приводятся несколько примеров для случая, когда $n = 1$). Ни одна из этих размерностей не превышает коразмерности $\text{codim } \mathcal{T}$ тора \mathcal{T} в фазовом пространстве, потому что $\dim(\mathcal{T} \cap \text{Fix } G) = 0$.

Определение 1.2 (см. [15, 16]). Пусть в условиях леммы 1.1 все компоненты связности множества $\text{Fix } G$, пересекающие тор \mathcal{T} , имеют одну и ту же размерность d_G . Тогда ситуация, в которой справедливы неравенства $\frac{1}{2}c_{\mathcal{T}} \leq d_G \leq c_{\mathcal{T}}$ (здесь $c_{\mathcal{T}} = \text{codim } \mathcal{T}$), называется *обратимым контекстом 1*. Противоположная ситуация, т. е. ситуация, в которой имеет место неравенство $d_G < \frac{1}{2}c_{\mathcal{T}}$, называется *обратимым контекстом 2*.

Отметим, что для большинства инволюций G , встречающихся на практике, многообразие неподвижных точек $\text{Fix } G$ непусто и все его компоненты связности имеют одну и ту же размерность, так что $\dim \text{Fix } G$ определено корректно (см. [29, 37]).

Принципиальные различия между двумя обратимыми контекстами и особенности обратимого контекста 2 подробно обсуждаются в наших предыдущих работах [47–51]. Здесь мы продемонстрируем эти различия лишь для тривиального случая $n = 0$, когда исследуемые инвариантные

торы представляют собой положения равновесия, а их коразмерность равна размерности фазового пространства. Эти положения равновесия должны быть инвариантны относительно обращающей инволюции G , т. е. должны быть неподвижными точками G .

Пример 1.1. Рассмотрим инволюцию $G : (u, v) \mapsto (u, -v)$ пространства \mathbb{R}^{a+b} , где $u \in \mathbb{R}^a$ и $v \in \mathbb{R}^b$, так что $\text{Fix } G = \{v = 0\}$ и $\dim \text{Fix } G = a$. Система

$$\dot{u} = U(u, v), \quad \dot{v} = V(u, v)$$

обратима относительно G тогда и только тогда, когда U нечетно по v , а V четно по v . Мы ищем положения равновесия такой системы на плоскости $\text{Fix } G$, т. е. такие точки $u \in \mathbb{R}^a$, что $U(u, 0) = 0$ и $V(u, 0) = 0$. Поскольку $U(u, 0) \equiv 0$, искомые положения равновесия $(u, 0)$ задаются уравнением $V(u, 0) = 0$.

Здесь обратимый контекст 1 соответствует неравенству $\frac{1}{2}(a+b) \leq a$, т. е. $a \geq b$. В этом контексте уравнение $V(u, 0) = 0$ в общем случае задает гладкую $(a-b)$ -мерную поверхность в $\text{Fix } G$. С другой стороны, в обратимом контексте 2 (т. е. при $a < b$) в общем случае $\text{Fix } G$ не содержит положений равновесия. Чтобы такие положения равновесия существовали, нужно, чтобы система зависела по крайней мере от $b-a$ внешних параметров. Для G -обратимой системы $\dot{u} = U(u, v, \mathbf{w})$, $\dot{v} = V(u, v, \mathbf{w})$, зависящей от c -мерного внешнего параметра \mathbf{w} , где $c \geq b-a$, в общем случае имеем гладкую $(c-b+a)$ -мерную поверхность положений равновесия, лежащую в произведении плоскости $\text{Fix } G$ и пространства \mathbb{R}^c значений параметра \mathbf{w} .

Пусть $R \in \text{GL}(a+b, \mathbb{R})$ — инволютивная матрица с собственным числом 1 кратности a и собственным числом -1 кратности b . Говорят, что матрица $M \in \mathfrak{gl}(a+b, \mathbb{R})$ антикоммутирует с R , или *инфинитезимально обратима* относительно R , если $MR = -RM$. В этом случае для каждого собственного числа λ матрицы M число $-\lambda$ также является собственным, а если еще выполняется и неравенство $b \neq a$, то 0 — собственное число матрицы M кратности $t \geq |b-a|$ (см. [7, 27, 40, 52]). В общем случае $t = |b-a|$.

В рамках примера 1.1 рассмотрим линейризацию G -обратимой системы в каком-либо положении равновесия, лежащем в $\text{Fix } G$. Если $b \neq a$, то у этой линейризации есть нулевое собственное число кратности $t \geq |b-a|$ (в общем случае $t = |b-a|$). Ненулевые собственные числа образуют пары $(\lambda, -\lambda)$.

1.2. Невозмущенные системы в обратимом контексте 2. Введем следующие обозначения. Пусть \mathbb{N} — множество положительных целых чисел, а $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. На протяжении всей статьи будем обозначать ℓ_1 -норму векторов из \mathbb{C}^s через $|\cdot|$, ℓ_2 -норму векторов из \mathbb{R}^s — через $\|\cdot\|$, а скалярное произведение двух векторов из \mathbb{R}^s — через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Замкнутый s -мерный шар с центром в точке $\mu \in \mathbb{R}^s$ — это множество $B = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^s \mid \|\mathbf{p} - \mu\| \leq \varrho\}$, где $\varrho > 0$. Для $s = 0$ это определение дает $\mu = 0$ и $B = \{0\} = \mathbb{R}^0$. Через $\mathcal{O}_s(\mu)$ будем обозначать произвольную окрестность точки $\mu \in \mathbb{R}^s$. Если $d \in \mathbb{N}$, а x, y, z, \dots — некоторые переменные, то будем писать $\mathcal{O}_d(x, y, z, \dots)$ вместо $\mathcal{O}(|x|^d + |y|^d + |z|^d + \dots)$. Вместо $\mathcal{O}_1(\cdot)$ будем писать просто $\mathcal{O}(\cdot)$.

Для любой матрицы $M \in \mathfrak{gl}(N, \mathbb{R})$ через $\mathbf{0}_m \oplus M$ будем обозначать блочно-диагональную матрицу порядка $(m+N) \times (m+N)$, первый блок которой — нулевая матрица порядка $m \times m$, а второй блок — матрица M . Пространство вещественных матриц размера $n \times N$ будет обозначаться через $\mathbb{R}^{n \times N}$, так что $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n}$.

Напомним также, что C^1 -гладкое отображение $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ гладких многообразий называется *субмерсивным* в точке $\mu \in \mathcal{M}$, если $\dim \mathcal{M} \geq \dim \mathcal{N}$ и ранг дифференциала отображения \mathcal{F} равен $\dim \mathcal{N}$ в точке μ . В этом случае \mathcal{F} субмерсивно в каждой точке μ' многообразия \mathcal{M} , достаточно близкой к μ .

Определение 1.3. Пусть \mathcal{T} — инвариантный n -мерный тор некоторого потока на $(n+N)$ -мерном многообразии. Говорят, что этот тор *приводим* (является *тором Флоке*), если в некоторой окрестности \mathcal{T} существует система координат $x \in \mathbb{T}^n$, $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_N(0)$, в которой сам тор \mathcal{T} задается уравнением $\mathcal{X} = 0$, а динамическая система принимает *вид Флоке* $\dot{x} = \omega + \mathcal{O}(\mathcal{X})$, $\dot{\mathcal{X}} = \Lambda \mathcal{X} + \mathcal{O}_2(\mathcal{X})$ с не зависящим от x вектором $\omega \in \mathbb{R}^n$ и не зависящей от x матрицей $\Lambda \in \mathfrak{gl}(N, \mathbb{R})$. Вектор ω (он не определен однозначно) называется *вектором частот* тора \mathcal{T} , а матрица Λ (она также не

определена однозначно) называется *матрицей Флоке* тора \mathcal{T} . Ее собственные числа называются *показателями Флоке* тора \mathcal{T} , а координаты (x, \mathcal{X}) называются *координатами Флоке* для тора \mathcal{T} .

Отметим, что показатели Флоке положения равновесия (когда $n = 0$) — это просто собственные числа линеаризации векторного поля в этом положении равновесия.

В подавляющем большинстве работ по теории КАМ все изучаемые инвариантные торы приводимы. В частности, это так во всех статьях по обратимому контексту 2 (см. [47–51]). В действительности канторовы семейства приводимых инвариантных торов в теории КАМ являются *гладкими по Уитни*. Это означает, что, хотя координаты Флоке для торов данного s -параметрического семейства определены априори в некотором канторовом подмножестве пространства \mathbb{R}^s , эти координаты могут быть продолжены до гладких (скажем, бесконечно дифференцируемых) функций, определенных в открытой области пространства \mathbb{R}^s . Ссылки на основные работы, относящиеся к гладкости по Уитни в теории КАМ, приведены в [16, 18].

Из результатов настоящей работы следует, что ситуация с приводимыми инвариантными торами произвольной размерности n в рамках обратимого контекста 2 более или менее сходна с тривиальным случаем $n = 0$ (см. пример 1.1). А именно, если коразмерность каждого тора в фазовом пространстве равна $a + b$ и $\dim \text{Fix } G = a < b$ (где G — обращающая инволюция), то при $n \geq 2$ требуется по крайней мере $b - a + 1$ внешних параметров. Точнее, $b - a$ параметров нужны по тем же причинам, что и при $n = 0$ (ср. предложение 6.1 из раздела 6 ниже), а еще один параметр нужен, чтобы контролировать резонансы, включающие частоты и мнимые части показателей Флоке. У каждого тора есть нулевой показатель Флоке кратности $t \geq b - a$ (в общем случае $t = b - a$). Ненулевые показатели Флоке образуют пары $(\lambda, -\lambda)$. Если количество внешних параметров равно $c \geq b - a + 1$, то мы получаем $(c - b + a)$ -параметрическое канторово семейство инвариантных торов, лежащих в произведении фазового пространства и пространства внешних параметров. Подчеркнем, что в четырех «общепринятых» контекстах теории КАМ (в обратимом контексте 1, гамильтоновом изотропном контексте, контексте, сохраняющем объемы, и диссипативном контексте) всегда (за исключением очень особых ситуаций) достаточно одномерного внешнего параметра (см. [9, 15, 16, 41, 44, 45]).

Чтобы построить теорию КАМ для обратимого контекста 2, надо прежде всего выбрать невозмущенные системы, в которых инвариантные торы образуют $(c - b + a)$ -параметрическое гладкое (а не канторово) семейство. Следуя [50, 51], рассмотрим невозмущенные системы вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \Omega(\mu) + \Delta(\sigma, \mu) + \xi(y, z, \sigma, \mu), \\ \dot{y} &= \sigma + \eta(y, z, \sigma, \mu), \\ \dot{z} &= M(\mu)z + \zeta(y, z, \sigma, \mu), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $x \in \mathbb{T}^n$, $y \in \mathcal{O}_m(0)$, $z \in \mathcal{O}_{2p}(0)$ — координаты на фазовом пространстве, $\sigma \in \mathcal{O}_m(0)$ и $\mu \in \mathcal{O}_s(0)$ — внешние параметры ($n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{N}$), M — $(2p \times 2p)$ -матричнозначная функция, $\Delta = \mathcal{O}(\sigma)$ и, наконец, $\xi = \mathcal{O}(y, z)$, $\eta = \mathcal{O}_2(y, z)$, $\zeta = \mathcal{O}_2(y, z, \sigma)$. Предполагается, что эти системы обратимы относительно инволюции

$$G : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, Rz), \quad (1.2)$$

где $R \in \text{GL}(2p, \mathbb{R})$ — инволютивная матрица с p -кратными собственными числами 1 и -1 , причем $M(\mu)R \equiv -RM(\mu)$. Размерность пространства $\{(\sigma, \mu)\}$ внешних параметров равна $m + s$. Системы (1.1) «интегрируемы» в том смысле, что они \mathbb{T}^n -эквивариантны, т. е. правая часть систем (1.1) не зависит от угловой переменной x .

Для $\sigma = 0$ и любого значения μ система (1.1) и инволюция (1.2) имеют общий приводимый инвариантный n -мерный тор $\{y = 0, z = 0\}$ с вектором частот $\Omega(\mu) \in \mathbb{R}^n$ и матрицей Флоке $\mathbf{O}_m \oplus M(\mu) \in \mathfrak{gl}(m + 2p, \mathbb{R})$. Коразмерность этого тора в фазовом пространстве равна $m + 2p$, а $\dim \text{Fix } G = p$ (в прежних обозначениях это значит, что $a = p$, $b = m + p > a$ и $c = m + s$, так что $c - b + a = s$). Параметр σ — это «средство борьбы» со систематическим сдвигом вдоль оси y в G -обратимых возмущениях систем (1.1).

Замечание 1.1. Может возникнуть вопрос, почему уравнение для \dot{z} из (1.1) не содержит слагаемого типа $\Pi(\sigma, \mu)z$, где $\Pi = \mathcal{O}(\sigma)$ и $\Pi(\sigma, \mu)R \equiv -R\Pi(\sigma, \mu)$. Ответ простой — такое слагаемое может быть включено в $\zeta(y, z, \sigma, \mu) = \mathcal{O}_2(y, z, \sigma)$ (ср. [50, Eqs. (2.2)]).

Замечание 1.2. В рамках так называемого *апостериорного* формата теорем КАМ рассматриваются инвариантные торы в динамических системах, которые не предполагаются почти интегрируемыми ни в каком смысле (см. [26, Ch. 4] и имеющуюся в этой книге библиографию). Насколько известно автору, к обратимым контекстам апостериорный подход еще не применялся.

1.3. Цель настоящей работы. Собственные числа матрицы $M(\mu)$ в (1.1) образуют пары $(\lambda, -\lambda)$ для каждого μ , и в общем случае $\det M(\mu) \neq 0$.

Определение 1.4. Пусть матрица $M \in GL(2p, \mathbb{R})$ антикоммутирует с инволютивной матрицей порядка $2p \times 2p$, имеющей p -кратные собственные числа 1 и -1 . Будем говорить, что спектр матрицы M имеет вид $\mathfrak{M}(\nu_1, \nu_2, \nu_3; \alpha, \beta)$, где $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \in \mathbb{Z}_+$, $\nu_1 + \nu_2 + 2\nu_3 = p$, а $\alpha \in \mathbb{R}^{\nu_1 + \nu_3}$ и $\beta \in \mathbb{R}^{\nu_2 + \nu_3}$ — векторы с положительными компонентами, если $\det M \neq 0$ и собственные числа матрицы M имеют вид

$$\begin{aligned} & \pm\alpha_1, \dots, \pm\alpha_{\nu_1}, \quad \pm i\beta_1, \dots, \pm i\beta_{\nu_2}, \\ & \pm\alpha_{\nu_1+1} \pm i\beta_{\nu_2+1}, \dots, \pm\alpha_{\nu_1+\nu_3} \pm i\beta_{\nu_2+\nu_3}. \end{aligned}$$

Предположим, что для любого $\mu \in \mathcal{O}_s(0)$ матрица $M(\mu)$ имеет простой спектр вида $\mathfrak{M}(\nu_1, \nu_2, \nu_3; \alpha(\mu), \beta(\mu))$, где $\nu_1 + \nu_2 + 2\nu_3 = p$. Для $\sigma = 0$ и любого μ приводимый инвариантный n -мерный тор $\mathcal{T}_\mu = \{y = 0, z = 0\}$ системы (1.1) имеет m -кратный нулевой показатель Флоке и $2p$ ненулевых показателей Флоке

$$\begin{aligned} & \pm\alpha_j(\mu), \quad 1 \leq j \leq \nu_1; \quad \pm i\beta_j(\mu), \quad 1 \leq j \leq \nu_2; \\ & \pm\alpha_{\nu_1+j}(\mu) \pm i\beta_{\nu_2+j}(\mu), \quad 1 \leq j \leq \nu_3. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Для невозмущенных систем (1.1) могут быть сформулированы различные теоремы КАМ. Укажем следующие четыре направления исследований.

А) Во-первых, можно доказывать так называемую «теорему-источник» (или теорему типа Брура—Хайтэмы—Такенса), в которой предполагается, что частоты $\Omega_i(\mu)$, $1 \leq i \leq n$, и ненулевые показатели Флоке (1.3) невозмущенных торов зависят от μ «наиболее невырожденным» образом, т. е. отображение

$$\mu \mapsto (\Omega(\mu), \alpha(\mu), \beta(\mu)) \in \mathbb{R}^{n+p} \tag{1.4}$$

субмерсивно. Этот случай рассмотрен в нашей статье [50]. Согласно теореме-источнику, *все* невозмущенные торы \mathcal{T}_μ , частоты и ненулевые показатели Флоке которых удовлетворяют подходящему диофантову условию, сохраняются при малых G -обратимых возмущениях систем (1.1). Соответствующие возмущенные n -мерные торы имеют *те же самые* векторы частот и матрицы Флоке и образуют гладкое по Уитни семейство. Субмерсивность отображения (1.4) аналогична классическому условию невырожденности Колмогорова для невозмущенных лагранжевых инвариантных торов в гамильтоновом изотропном контексте без внешних параметров (см. [10, 18, 23]).

В) Во-вторых, можно рассматривать более слабые условия невырожденности, обеспечивающие лишь *частичное сохранение* частот и ненулевых показателей Флоке невозмущенных торов \mathcal{T}_μ при малых G -обратимых возмущениях систем (1.1). Это означает, что можно установить такое соответствие между невозмущенными и возмущенными n -мерными торами, что заранее заданное *подмножество* частот $\Omega_i(\mu)$, положительных вещественных частей $\alpha_j(\mu)$ показателей Флоке (1.3) и положительных мнимых частей $\beta_j(\mu)$ показателей Флоке (1.3) невозмущенных торов \mathcal{T}_μ совпадает с так же заданным подмножеством спектральных характеристик соответствующих возмущенных торов. Теорема о частичном сохранении является предметом настоящей статьи. В предельном случае очень слабых условий невырожденности (условий типа Рюссмана, см. [38, 39]) возмущенные системы по-прежнему имеют гладкое по Уитни семейство приводимых инвариантных n -мерных торов, но нет никакого разумного способа поставить невозмущенные торы в соответствие возмущенным.

С) В-третьих, можно изучать ситуацию, в которой обратимые возмущения систем (1.1) неавтономны и зависят от времени квазипериодически с N базисными частотами. В такой задаче, рассмотренной в нашей статье [51], возмущенные торы в расширенном фазовом пространстве имеют размерность $n + N$.

Д) В-четвертых, если $\nu_2 > 0$, то, возможно, есть смысл искать инвариантные $(n + d)$ -мерные торы \mathfrak{W}^{n+d} «вокруг» n -мерных торов \mathcal{T}_μ , $d = 1, \dots, \nu_2$, как в самих системах (1.1), так и в их

малых G -обратимых возмущениях. Можно говорить о возбуждении эллиптических нормальных мод (т. е. чисто мнимых показателей Флоке $\pm i\beta_j(\mu)$, $1 \leq j \leq \nu_2$) невозмущенных торов \mathcal{T}_μ . Эта задача будет рассмотрена в последующих публикациях.

В обратимом контексте 1, гамильтоновом изотропном контексте, контексте, сохраняющем объемы, и диссипативном контексте четыре аналогичные задачи более или менее полно изучены (см. [9, 14–18, 41–45] и приведенную в этих работах библиографию). Соответствующие теоремы-источники доказаны Х. В. Бруром, Г. Б. Хайтемой и Ф. Такенсом в [14, 17] (некоторые обобщения содержатся в статьях [12, 13, 55] группы Брура). Условия невырожденности типа Рюссмана использованы в [15, 16, 18, 41] (см. также исходную формулировку Рюссмана для гамильтонова изотропного контекста в [38]), общие теоремы о частичном сохранении получены в [9, 44], квазипериодические по времени возмущения исследованы в [45], а возбуждение эллиптических нормальных мод рассмотрено в [16, 41–43].

Более того, во всех наших работах [9, 15, 16, 18, 41, 44, 45], посвященных четырем вышеуказанным «общепринятым» контекстам теории КАМ, результаты в задачах типа В) и С) получены как следствия соответствующих теорем-источников (этим и обусловлено название «теорема-источник»). Основная используемая при этом редукционная техника называется *методом Эрмана*. Этот метод специально приспособлен для того, чтобы строить инвариантные торы возмущений интегрируемых или частично интегрируемых систем со слабыми условиями невырожденности. Он был предложен в 1990 г. в докладе М. Р. Эрмана на международной конференции по динамическим системам в Лионе (ср. [60, § 4.6.2]). Результаты типа D) в [16, 41–43] получены в основном как следствия результатов типа В) с самыми слабыми условиями невырожденности (таким образом, их тоже можно в конечном счете считать следствиями теорем-источников). В принципе, возбуждение эллиптических нормальных мод возможно только в контексте, сохраняющем объемы (для торов, коразмерность которых в фазовом пространстве равна 2, см. [43]), в гамильтоновом изотропном контексте (см. [16, 42]) и в обратимом контексте 1 (см. [16, 41]).

Грубо говоря, идея подхода Эрмана заключается в следующем. Вначале, добавляя *новые* внешние параметры, мы добиваемся полного контроля над частотами и показателями Флоке невозмущенных торов (подходящий аналог отображения (1.4) становится субмерсивным). Теперь к новым системам можно применить соответствующую теорему-источник. Тогда, используя гладкость по Уитни семейства возмущенных инвариантных торов, теорему о неявной функции и подходящую лемму из теории чисел о диофантовых приближениях на подмногообразиях евклидовых пространств (иногда еще называемых диофантовыми приближениями зависимых величин), можно «извлечь» информацию об инвариантных торах исходных систем (т. е. систем без дополнительных внешних параметров). Во всей этой процедуре вся громоздкая и трудоемкая «машинерия КАМ» требуется только для доказательства теоремы-источника; для сведения же теорем с вырождениями к теореме-источнику эта техника уже не нужна.

В обратимом контексте 2 мы также использовали метод Эрмана в задаче С) (см. [51]), а в настоящей статье применяем этот подход снова в ситуации В). Таким образом, настоящая работа продолжает сформулированную в [46, 47] программу по переносу результатов, полученных в [9, 14–18, 41–45], на более трудный обратимый контекст 2 без усложнения доказательств.

Замечание 1.3. Частичное сохранение частот (или их отношений) невозмущенных инвариантных торов в гамильтоновом изотропном контексте впервые рассматривалось в [20, 30, 31]. Эти работы не используют никакой редукционной техники эрмановского типа; соответственно, доказательства в [20, 30, 31], основанные на так называемой квазилинейной бесконечной итерационной схеме, очень сложны.

Замечание 1.4. В задачах типа D) коразмерность торов \mathfrak{W}^{n+d} равна $m + 2p - d$. Следовательно, при $\frac{1}{2}(m + 2p - d) \leq p = \dim \text{Fix } G$, т. е. при $d \geq m$, торы \mathfrak{W}^{n+d} относятся к обратимому контексту 1. Таким образом, исследуя возбуждение эллиптических нормальных мод, можно перейти от обратимого контекста 2 к контексту 1 (ср. [49]). Аналогично, изучая разрушение невозмущенных инвариантных торов с резонансными частотами, можно перейти от обратимого контекста 1 к контексту 2 (см. [47, 49, 50]). Действительно, если резонансный инвариантный тор \mathcal{T} G -обратимой системы распадается на конечный набор возмущенных инвариантных торов $\mathfrak{W}_1, \dots, \mathfrak{W}_l$ меньшей

размерности, то возможна такая ситуация, что $\frac{1}{2} \operatorname{codim} \mathcal{T} \leq \dim \operatorname{Fix} G$, но $\frac{1}{2} \operatorname{codim} \mathfrak{W}_i > \dim \operatorname{Fix} G$. Есть основания предполагать, что в обратимом контексте 2 возбуждение эллиптических нормальных мод — гораздо более сложное явление, чем в обратимом контексте 1 (однако было бы наивно надеяться, что в обратимом контексте 2 разрушение резонансных невозмущенных торов изучать легче, чем в обратимом контексте 1). Еще один метод «перехода» от обратимого контекста 1 к контексту 2 развивается в работе [50], доказывающей теорему-источник для обратимого контекста 2. В [50] эта теорема получена (также рассуждениями эрмановского типа) в качестве следствия из основного результата статьи [12], рассматривающей (в рамках обратимого контекста 1) системы с вырожденным нормальным поведением инвариантных торов.

Замечание 1.5. В наших первых трех работах [47–49] по обратимому контексту 2 основным средством доказательств была теория модифицирующих слагаемых Мозера (см. [5, 35]).

Замечание 1.6. Подчеркнем, что на протяжении настоящей статьи слово «диссипативный» означает «не связанный ни с какой структурой на фазовом пространстве». Например, конформно гамильтоновы векторные поля V и конформно симплектические диффеоморфизмы A , интенсивно изучаемые в теории КАМ в последнее время (см. [19] и содержащуюся там библиографию), определяются тождествами $d(i_V \omega^2) \equiv \eta \omega^2$ и $A^* \omega^2 \equiv \pm e^\eta \omega^2$ с отличной от нуля постоянной η и поэтому *не* являются диссипативными в этом смысле (здесь ω^2 — симплектическая структура на фазовом пространстве). Однако конформно гамильтоновы системы диссипативны в другом смысле этого слова — их динамика не обладает никакими свойствами, характерными для консервативных систем.

Как и в наших предыдущих работах по «общепринятым» контекстам теории КАМ и обратимому контексту 2, мы рассматриваем только аналитические системы, но наши результаты (теоремы 3.1 и 3.2 ниже), несомненно, могут быть распространены на системы, регулярные по Жевре или просто бесконечно дифференцируемые, и даже на C^r -гладкие системы с конечным (но достаточно большим) r . Аналогично, в приведенных ниже теоремах 3.1, 3.2 и 4.1 утверждается, что семейства аналитических возмущенных инвариантных торов являются C^∞ -гладкими в смысле Уитни, но эти семейства заведомо регулярны по Жевре в смысле Уитни (ср. [55]).

План настоящей статьи следующий. В разделе 2 формулируется диофантова лемма (лемма 2.1), которую надо использовать в процедуре Эрмана. Основной результат работы (теорема 3.1) приведен в разделе 3. В разделе 4 дается точная формулировка теоремы-источника для обратимого контекста 2 (теорема 4.1) в нужной нам форме. Доказательство основного результата приведено в разделе 5. Наконец, в разделе 6 дается строгое доказательство того факта, что для наличия инвариантных торов в обратимом контексте 2 требуется много внешних параметров.

2. ДИОФАНТОВА ЛЕММА

Определение 2.1 (см. [9, 44, 45, 51]). Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\nu \in \mathbb{Z}_+$. Для $\tau \geq 0$, $\gamma > 0$ и $L \in \mathbb{N}$ пара векторов

$$\Omega \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}^\nu \tag{2.1}$$

называется *аффинно* (τ, γ, L) -*диофантовой*, если имеет место неравенство

$$|\langle \Omega, k \rangle + \langle \beta, \ell \rangle| \geq \gamma |k|^{-\tau}$$

для любого $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ и любого $\ell \in \mathbb{Z}^\nu$, удовлетворяющего неравенству $|\ell| \leq L$.

Если $n \in \mathbb{N}$, а пара векторов (2.1) аффинно (τ, γ, L) -диофантова, то, очевидно, вектор $\Omega \in \mathbb{R}^n$ (τ, γ) -диофантов в обычном смысле, так что $\tau \geq n - 1$. Если $n = 0$, то пара векторов (2.1) аффинно (τ, γ, L) -диофантова для любых τ, γ, L, ν и $\beta \in \mathbb{R}^\nu$ (см. [9]).

Определение 2.2 (см. [9, 44, 45, 51]). Пусть $s \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\nu \in \mathbb{Z}_+$. Мы будем использовать стандартные обозначения для мультииндексов:

$$q! = q_1! q_2! \cdots q_s!, \quad \mu^q = \mu_1^{q_1} \mu_2^{q_2} \cdots \mu_s^{q_s}, \quad D_\mu^q \Omega = \frac{\partial^{|q|} \Omega}{\partial \mu_1^{q_1} \partial \mu_2^{q_2} \cdots \partial \mu_s^{q_s}},$$

где $q \in \mathbb{Z}_+^s$, $\mu \in \mathbb{R}^s$, а Ω — (векторнозначная) функция, $C^{|q|}$ -гладкая по переменной μ . Пусть \mathfrak{A} — открытая область пространства \mathbb{R}^s и $Q \in \mathbb{N}$, $L \in \mathbb{N}$. Рассмотрим пару C^Q -гладких отображений $\Omega : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\beta : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}^\nu$. Для положительных n введем обозначение

$$\rho^Q(\mu) = \min_{\|e\|=1} \max_{J=1}^Q J! \max_{\|u\|=1} \left| \sum_{|q|=J} \langle D_\mu^q \Omega(\mu), e \rangle \frac{u^q}{q!} \right|$$

($q \in \mathbb{Z}_+^s$, $e \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^s$) при $\mu \in \mathfrak{A}$. Для положительных ν введем обозначение

$$\kappa_\ell^Q(\mu) = \max_{J=1}^Q J! \max_{\|u\|=1} \left| \sum_{|q|=J} \langle D_\mu^q \beta(\mu), \ell \rangle \frac{u^q}{q!} \right|$$

($q \in \mathbb{Z}_+^s$, $u \in \mathbb{R}^s$) при $\mu \in \mathfrak{A}$, $\ell \in \mathbb{Z}^\nu$. Пара отображений Ω , β называется *аффинно* (Q, L) -*невырожденной* в точке $\mu \in \mathfrak{A}$, если выполняется одно из следующих четырех условий.

1) $n > 0$, $\nu > 0$, $\rho^Q(\mu) > 0$ и

$$\max_{1 \leq |q| \leq Q} \left| \langle D_\mu^q \Omega(\mu), k \rangle + \langle D_\mu^q \beta(\mu), \ell \rangle \right| > 0$$

($q \in \mathbb{Z}_+^s$) для всех $k \in \mathbb{Z}^n$ и $\ell \in \mathbb{Z}^\nu$, удовлетворяющих неравенствам $1 \leq |\ell| \leq L$ и $\|k\| \leq \kappa_\ell^Q(\mu)/\rho^Q(\mu)$.

2) $n > 0$, $\nu = 0$ и $\rho^Q(\mu) > 0$.

3) $n = 0$, $\nu > 0$ и $\kappa_\ell^Q(\mu) > 0$ для всех $\ell \in \mathbb{Z}^\nu$, удовлетворяющих неравенству $1 \leq |\ell| \leq L$.

4) $n = \nu = 0$.

Отметим, что для любой (векторнозначной) C^J -гладкой функции H , определенной на $\mathfrak{A} \subset \mathbb{R}^s$ ($J \in \mathbb{Z}_+$), и любых $\mu \in \mathfrak{A}$ и $u \in \mathbb{R}^s$ справедливо равенство

$$J! \sum_{|q|=J} D_\mu^q H(\mu) \frac{u^q}{q!} = \left. \frac{d^J}{dt^J} H(\mu + tu) \right|_{t=0}$$

($q \in \mathbb{Z}_+^s$). Неравенство $\rho^Q(\mu) > 0$ (при $n > 0$) означает, что пространство \mathbb{R}^n натянуто на набор всех $\binom{s+Q}{s} - 1$ частных производных всех порядков от 1 до Q отображения Ω , взятых в точке μ , т. е. линейная оболочка этих производных есть \mathbb{R}^n (свойство типа Рюссмана, см. [38]). Неравенство $\kappa_\ell^Q(\mu) > 0$ (при $\nu > 0$ для некоторого ℓ из $\mathbb{Z}^\nu \setminus \{0\}$) означает, что хотя бы одна из $\binom{s+Q}{s} - 1$ частных производных порядков от 1 до Q отображения β , взятая в точке μ , не ортогональна ℓ . Нетрудно убедиться, что, если пара отображений Ω , β аффинно (Q, L) -невырождена в точке $\mu \in \mathfrak{A}$, то она аффинно (Q, L) -невырождена в любой достаточно близкой к μ точке $\mu' \in \mathfrak{A}$.

Лемма 2.1 (см. [9]). Пусть $s \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, $Q \in \mathbb{N}$ и $L \in \mathbb{N}$. Пусть \mathfrak{A} — открытая область пространства \mathbb{R}^s , A — подмножество области \mathfrak{A} , диффеоморфное замкнутому s -мерному шару, а B — произвольное компактное метрическое пространство. Предположим, что отображения

$$\Omega : \mathfrak{A} \times B \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad \beta : \mathfrak{A} \times B \rightarrow \mathbb{R}^\nu$$

являются C^Q -гладкими по $a \in \mathfrak{A}$ и, кроме того, все частные производные любого порядка от 1 до Q функций Ω и β по переменным a_1, \dots, a_s непрерывны по совокупности аргументов $(a, b) \in \mathfrak{A} \times B$ (а не только по $a \in \mathfrak{A}$). Пусть пара отображений

$$a \mapsto \Omega(a, b) \in \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad a \mapsto \beta(a, b) \in \mathbb{R}^\nu \tag{2.2}$$

аффинно (Q, L) -невырождена в каждой точке $a \in A$ для любого фиксированного значения $b \in B$. Тогда

(1) существует такое положительное число δ и

(2) для любых $n^{\text{add}} \in \mathbb{Z}_+$, $\nu^{\text{add}} \in \mathbb{Z}_+$, любого τ_* , удовлетворяющего неравенству $\tau_* \geq \max(0, n^{\text{add}} - 1)$, любого положительного γ_* , любого ε из интервала $(0, 1)$ и любого τ ,

удовлетворяющего неравенствам $\tau > (n + n^{\text{add}})Q$ и $\tau \geq \tau_*$, существует такое положительное число $\gamma = \gamma_0(\varepsilon, \tau, \gamma_*)$, что справедливо следующее утверждение. Пусть отображения

$$\tilde{\Omega} : \mathfrak{A} \times B \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad \tilde{\beta} : \mathfrak{A} \times B \rightarrow \mathbb{R}^\nu$$

являются C^Q -гладкими по $a \in \mathfrak{A}$ и всюду в $\mathfrak{A} \times B$ все частные производные любого порядка от 1 до Q каждой компоненты разностей $\tilde{\Omega} - \Omega$ и $\tilde{\beta} - \beta$ по переменным a_1, \dots, a_s по абсолютной величине меньше, чем δ . Пусть

$$\Omega^{\text{add}} : B \rightarrow \mathbb{R}^{n^{\text{add}}} \quad \text{и} \quad \beta^{\text{add}} : B \rightarrow \mathbb{R}^{\nu^{\text{add}}} \quad (2.3)$$

— произвольные отображения. Тогда для любого элемента $b \in B$, для которого пара векторов $\Omega^{\text{add}}(b), \beta^{\text{add}}(b)$ аффинно (τ_*, γ_*, L) -диофантова, мера Лебега множества тех точек $a \in A$, для которых пара векторов

$$\left(\tilde{\Omega}(a, b), \Omega^{\text{add}}(b) \right) \in \mathbb{R}^{n+n^{\text{add}}}, \quad \left(\tilde{\beta}(a, b), \beta^{\text{add}}(b) \right) \in \mathbb{R}^{\nu+\nu^{\text{add}}}$$

аффинно (τ, γ, L) -диофантова, превосходит величину $(1 - \varepsilon) \text{meas}_s A$.

Здесь и далее meas_s обозначает меру Лебега в \mathbb{R}^s . Некоторые частные случаи леммы 2.1 сформулированы в [44, 45, 51].

Пример 2.1. В лемме 2.1 компактность B существенна. Например, предположим, что $n \in \mathbb{N}$, а пара C^Q -гладких отображений

$$\Omega_0 : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad \beta_0 : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}^\nu \quad (2.4)$$

аффинно (Q, L) -невырождена в каждой точке $a \in A$. Пусть $B = [1, +\infty)$ и $\Omega(a, b) = \Omega_0(a)/b$, $\beta(a, b) = \beta_0(a)/b$. Пара отображений (2.2) аффинно (Q, L) -невырождена в каждой точке $a \in A$ для любого фиксированного значения $b \in B$. Кроме того, предположим, что всюду в \mathfrak{A} все частные производные любого порядка от 1 до Q каждой компоненты функций (2.4) по абсолютной величине не превосходят некоторого числа $\mathfrak{D} < +\infty$. Для любого $\delta > 0$ положим $c_1 = \max(\mathfrak{D}/\delta, 1)$ и выберем произвольное число $c_2 > c_1$. Рассмотрим произвольную функцию $\vartheta : B \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую равенству $\vartheta(b) = 1$ при $1 \leq b \leq c_1$, неравенству $0 < \vartheta(b) < 1$ при $c_1 < b < c_2$ и равенству $\vartheta(b) = 0$ при $b \geq c_2$ (такую функцию можно выбрать даже C^∞ -гладкой, но здесь в этом нет необходимости). Положим

$$\tilde{\Omega}(a, b) = \vartheta(b)\Omega(a, b) = \vartheta(b)\Omega_0(a)/b \quad \text{и} \quad \tilde{\beta}(a, b) = \vartheta(b)\beta(a, b) = \vartheta(b)\beta_0(a)/b. \quad (2.5)$$

Поскольку

$$\frac{\mathfrak{D}(1 - \vartheta(b))}{b} < \delta$$

для любого $b \in B$, всюду в $\mathfrak{A} \times B$ все частные производные любого порядка от 1 до Q каждой компоненты разностей $\tilde{\Omega} - \Omega$ и $\tilde{\beta} - \beta$ по переменной a по абсолютной величине меньше, чем δ . Теперь положим $n^{\text{add}} = \nu^{\text{add}} = 0$, т. е. рассмотрим случай, когда отображения (2.3) отсутствуют. Какие бы числа $\varepsilon \in (0, 1)$, $\tau > nQ$ и $\gamma > 0$ ни взять, нельзя утверждать, что для любого $b \in B$ мера Лебега множества \mathcal{A}_b , состоящего из тех точек $a \in A$, для которых пара векторов (2.5) аффинно (τ, γ, L) -диофантова, превосходит величину $(1 - \varepsilon) \text{meas}_s A$. Действительно, \mathcal{A}_b пусто при $b \geq c_2$, потому что при таких b оба вектора (2.5) равны нулю для каждого a .

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В разделах 3 и 4 мы будем иногда писать $\{0 \in \mathbb{R}^s\}$ вместо $\{0\}$ для $0 \in \mathbb{R}^s$.

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{N}$. Рассмотрим аналитическое $(m + s)$ -параметрическое семейство аналитических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \Omega(\mu) + \Delta(\sigma, \mu) + \xi(y, z, \sigma, \mu) + f(x, y, z, \sigma, \mu), \\ \dot{y} &= \sigma + \eta(y, z, \sigma, \mu) + g(x, y, z, \sigma, \mu), \\ \dot{z} &= M(\mu)z + \zeta(y, z, \sigma, \mu) + h(x, y, z, \sigma, \mu), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $x \in \mathbb{T}^n$, $y \in \mathcal{O}_m(0)$, $z \in \mathcal{O}_{2p}(0)$ — координаты на фазовом пространстве, $\sigma \in \mathcal{O}_m(0)$ и $\mu \in \mathcal{O}_s(0)$ — внешние параметры, M — $(2p \times 2p)$ -матричнозначная функция, $\Delta = O(\sigma)$ и, наконец, $\xi =$

$O(y, z)$, $\eta = O_2(y, z)$, $\zeta = O_2(y, z, \sigma)$. Предполагается, что функции Ω , M , Δ , ξ , η , ζ фиксированы, а слагаемые f , g , h — малые возмущения (ср. (1.1)). Пусть системы (3.1) обратимы относительно инволюции (1.2) фазового пространства, где $R \in \text{GL}(2p, \mathbb{R})$ — инволютивная матрица с p -кратными собственными числами 1 и -1 , причем $M(\mu)R \equiv -RM(\mu)$, а $M(0)$ имеет простой спектр. Можно считать, что спектр матрицы $M(\mu)$ прост для каждого μ и имеет вид $\mathfrak{M}(\nu_1, \nu_2, \nu_3; \alpha(\mu), \beta(\mu))$, где $\nu_1 + \nu_2 + 2\nu_3 = p$ (см. определение 1.4). Введем обозначение $\nu = \nu_2 + \nu_3 \in \mathbb{Z}_+$.

Выберем произвольные (возможно, пустые) подмножества индексов

$$\mathfrak{S}_1 \subset \{1; 2; \dots; n\}, \quad \mathfrak{S}_2 \subset \{1; 2; \dots; \nu_1 + \nu_3\}, \quad \mathfrak{S}_3 \subset \{1; 2; \dots; \nu\}, \\ \mathfrak{T} \subset \{1; 2; \dots; s\},$$

удовлетворяющие условию

$$0 \leq \#\mathfrak{S}_1 + \#\mathfrak{S}_2 + \#\mathfrak{S}_3 = \#\mathfrak{T} \leq \min(n + p, s - 1).$$

Здесь и далее $\#$ обозначает количество элементов конечного множества. Нас интересует сохранение частот Ω_i (невозмущенных инвариантных торов $\mathcal{T}_\mu = \{y = 0, z = 0\}$ при $\sigma = 0$) с $i \in \mathfrak{S}_1$, вещественных частей α_j показателей Флоке с $j \in \mathfrak{S}_2$ и мнимых частей β_j показателей Флоке с $j \in \mathfrak{S}_3$. Мы будем писать

$$\begin{aligned} \Omega_+ &= (\Omega_i \mid i \in \mathfrak{S}_1), & \Omega_- &= (\Omega_i \mid i \notin \mathfrak{S}_1), \\ \alpha_+ &= (\alpha_j \mid j \in \mathfrak{S}_2), & \alpha_- &= (\alpha_j \mid j \notin \mathfrak{S}_2), \\ \beta_+ &= (\beta_j \mid j \in \mathfrak{S}_3), & \beta_- &= (\beta_j \mid j \notin \mathfrak{S}_3), \\ \mu_+ &= (\mu_l \mid l \in \mathfrak{T}), & \mu_- &= (\mu_l \mid l \notin \mathfrak{T}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подобная запись будет ниже использоваться (без специального упоминания) и для векторных величин, обозначаемых буквами Ω , α , β , μ с верхними индексами или диакритическими знаками. Положим

$$\#\mathfrak{S}_1 = d_1, \quad \#\mathfrak{S}_2 = d_2, \quad \#\mathfrak{S}_3 = d_3, \quad d_1 + d_2 + d_3 = d = \#\mathfrak{T}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 0 \leq d_1 \leq n, \quad 0 \leq d_2 \leq \nu_1 + \nu_3, \quad 0 \leq d_3 \leq \nu, \\ 0 \leq d \leq \min(n + p, s - 1). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для любого вектора $b \in \mathbb{R}^d$ мы будем писать

$$b^{:1} = (b_1, \dots, b_{d_1}) \in \mathbb{R}^{d_1}, \quad b^{:2} = (b_{d_1+1}, \dots, b_{d_1+d_2}) \in \mathbb{R}^{d_2}, \quad b^{:3} = (b_{d_1+d_2+1}, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^{d_3}.$$

Мы будем также использовать обозначение

$$\mathfrak{P}_0 = (\Omega_+(0), \alpha_+(0), \beta_+(0)) \in \mathbb{R}^d.$$

Теорема 3.1. *Предположим, что либо $d = 0$, либо $d > 0$, и якобиан*

$$\frac{\partial(\Omega_+, \alpha_+, \beta_+)}{\partial \mu_+} \quad (3.4)$$

порядка d не обращается в нуль при $\mu = 0$. Отсюда, в частности, следует, что $(\Omega_+, \alpha_+, \beta_+)$ может быть использовано как часть новой системы координат в окрестности начала координат в \mathbb{R}^s . Другими словами, в окрестности точки $\mu = 0$ существует такая аналитическая замена координат $\mu = \mu(a, b)$, что

$$a \in \mathcal{O}_{s-d}(0), \quad b \in \mathcal{O}_d(\mathfrak{P}_0), \quad \mu(0, \mathfrak{P}_0) = 0$$

и

$$(\Omega_+, \alpha_+, \beta_+) \Big|_{\mu=\mu(a,b)} \equiv b,$$

точнее,

$$\Omega_+(\mu(a, b)) \equiv b^{:1}, \quad \alpha_+(\mu(a, b)) \equiv b^{:2}, \quad \beta_+(\mu(a, b)) \equiv b^{:3}. \quad (3.5)$$

Предположим также, что замена координат $\mu = \mu(a, b)$, обладающая этим свойством, может быть выбрана так, что пара отображений

$$a \mapsto \Omega_-(\mu(a, 0)) \in \mathbb{R}^{n-d_1} \quad \text{и} \quad a \mapsto \beta_-(\mu(a, 0)) \in \mathbb{R}^{\nu-d_3} \quad (3.6)$$

аффинно $(Q, 2)$ -невырождена в точке $a = 0$ для некоторого числа $Q \in \mathbb{N}$ (см. определение 2.2).

Тогда существуют такой замкнутый $(s - d)$ -мерный шар $A \subset \mathbb{R}^{s-d}$ с центром в начале координат и такой замкнутый d -мерный шар $B \subset \mathbb{R}^d$ с центром в точке \mathfrak{F}_0 , что выполнено следующее. Положим

$$\Gamma = \{\mu(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \subset \mathbb{R}^s \quad (3.7)$$

$(0 \in \Gamma)$. Тогда для любой комплексной окрестности

$$C \subset (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})^n \times \mathbb{C}^{2m+2p+s} \quad (3.8)$$

множества

$$\mathbb{T}^n \times \{0 \in \mathbb{R}^m\} \times \{0 \in \mathbb{R}^{2p}\} \times \{0 \in \mathbb{R}^m\} \times \Gamma, \quad (3.9)$$

любого $\mathcal{L} \in \mathbb{N}$, любого положительного ε_1 , любых $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ из интервала $(0, 1)$, любого τ_* , удовлетворяющего неравенству $\tau_* \geq \max(0, d_1 - 1)$, любого положительного γ_* и любого τ , удовлетворяющего неравенствам $\tau > nQ$ и $\tau \geq \tau_*$, существуют числа $\delta > 0$ и $\gamma \in (0, \gamma_*]$, обладающие следующими свойствами.

Предположим, что возмущающие слагаемые f, g, h в (3.1) могут быть голоморфно продолжены в окрестность C и $|f| < \delta, |g| < \delta, |h| < \delta$ в C . Рассмотрим такой замкнутый $(s - d)$ -мерный шар $\tilde{A} \subset A$ с центром в начале координат и такой замкнутый d -мерный шар $\tilde{B} \subset B$ с центром в точке \mathfrak{F}_0 , что

$$\text{meas}_{s-d} \tilde{A} = (1 - \varepsilon_3) \text{meas}_{s-d} A, \quad \text{meas}_d \tilde{B} = (1 - \varepsilon_3) \text{meas}_d B, \quad (3.10)$$

и положим

$$\tilde{\Gamma} = \left\{ \mu(a, b) \mid a \in \tilde{A}, b \in \tilde{B} \right\} \subset \Gamma \quad (3.11)$$

$(0 \in \tilde{\Gamma})$. Тогда существуют такие функции

$$\begin{aligned} \Theta : \tilde{\Gamma} &\rightarrow \mathbb{R}^m, & \Xi : \tilde{\Gamma} &\rightarrow \mathbb{R}^s, \\ \tilde{\Omega} : \tilde{\Gamma} &\rightarrow \mathbb{R}^n, & \tilde{M} : \tilde{\Gamma} &\rightarrow \mathfrak{gl}(2p, \mathbb{R}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

и такая замена переменных

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + X(\bar{x}, \mu), \\ y &= \bar{y} + Y^0(\bar{x}, \mu) + Y^1(\bar{x}, \mu)\bar{y} + Y^2(\bar{x}, \mu)\bar{z}, \\ z &= \bar{z} + Z^0(\bar{x}, \mu) + Z^1(\bar{x}, \mu)\bar{y} + Z^2(\bar{x}, \mu)\bar{z} \end{aligned} \quad (3.13)$$

(для каждого $\mu \in \tilde{\Gamma}$), где $\bar{x} \in \mathbb{T}^n$, $\bar{y} \in \mathcal{O}_m(0)$, $\bar{z} \in \mathcal{O}_{2p}(0)$, что справедливы следующие утверждения.

- i) Функции (3.12) являются C^∞ -гладкими, и всюду в $\tilde{\Gamma}$ все частные производные всех порядков от 0 до \mathcal{L} каждой компоненты функций $\Theta, \Xi, \tilde{\Omega} - \Omega, \tilde{M} - M$ по абсолютной величине меньше, чем ε_1 . Если $d = 0$, то $\Xi \equiv 0$. Коэффициенты $X, Y^0, Y^1, Y^2, Z^0, Z^1, Z^2$ в (3.13) являются отображениями со значениями в $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}), \mathbb{R}^{m \times 2p}, \mathbb{R}^{2p}, \mathbb{R}^{2p \times m}, \mathfrak{gl}(2p, \mathbb{R})$ соответственно. Эти отображения аналитические по \bar{x} и C^∞ -гладкие по μ . Всюду в $\mathbb{T}^n \times \tilde{\Gamma}$ все частные производные всех порядков от 0 до \mathcal{L} каждой компоненты этих отображений по абсолютной величине меньше, чем ε_1 .
- ii) Для каждого $\mu \in \tilde{\Gamma}$ замена переменных (3.13) коммутирует с инволюцией (1.2) в том смысле, что в новых переменных $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ инволюция G принимает вид

$$G : (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \mapsto (-\bar{x}, -\bar{y}, R\bar{z}).$$

Имеет место тождество $\tilde{M}(\mu)R \equiv -R\tilde{M}(\mu)$.

- iii) Для каждого $\mu \in \tilde{\Gamma}$ матрица $\tilde{M}(\mu)$ имеет простой спектр вида $\mathfrak{M}(\nu_1, \nu_2, \nu_3; \tilde{\alpha}(\mu), \tilde{\beta}(\mu))$ (см. определение 1.4), и в $\tilde{\Gamma}$ выполняются тождества

$$\tilde{\Omega}_+ \equiv \Omega_+, \quad \tilde{\alpha}_+ \equiv \alpha_+, \quad \tilde{\beta}_+ \equiv \beta_+. \quad (3.14)$$

iv) Для любой точки $b \in \tilde{B}$, для которой пара векторов $b^1 \in \mathbb{R}^{d_1}$, $b^3 \in \mathbb{R}^{d_3}$ аффинно $(\tau_*, \gamma_*, 2)$ -диофантова (см. определение 2.1), существует множество $\mathcal{G}_b \subset \tilde{A}$, удовлетворяющее следующим условиям.

(a) $\text{meas}_{s-d} \mathcal{G}_b > (1 - \varepsilon_2) \text{meas}_{s-d} \tilde{A}$.

(b) Для любой точки $a \in \mathcal{G}_b$ пара векторов $\tilde{\Omega}(\mu^0) \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\beta}(\mu^0) \in \mathbb{R}^p$ аффинно $(\tau, \gamma, 2)$ -диофантова, где $\mu^0 = \mu(a, b)$.

(c) Для любой точки $a \in \mathcal{G}_b$ возмущенная система (3.1) с $\mu = \mu^0 + \Xi(\mu^0)$ и $\sigma = \Theta(\mu^0)$ после замены координат (3.13) с $\mu = \mu^0$ принимает вид

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{\Omega}(\mu^0) + O(\bar{y}, \bar{z}), \quad \dot{\tilde{y}} = O_2(\bar{y}, \bar{z}), \quad \dot{\tilde{z}} = \tilde{M}(\mu^0)\bar{z} + O_2(\bar{y}, \bar{z}). \quad (3.15)$$

Замечание 3.1. Легко показать, что при $d_1 \in \mathbb{N}$ мера Лебега meas_d множества тех точек $b \in \tilde{B}$, для которых пара векторов $b^1 \in \mathbb{R}^{d_1}$, $b^3 \in \mathbb{R}^{d_3}$ не является аффинно $(\tau_*, \gamma_*, 2)$ -диофантовой, для любого фиксированного $\tau_* > d_1 - 1$ стремится к 0 при $\gamma_* \rightarrow 0$. Если $d_1 = 0$, то это множество пусто при любых $\tau_* \geq 0$ и $\gamma_* > 0$.

Итак, рассмотрим произвольную точку $\mu^* = \mu(a^*, b^*)$ из $\tilde{\Gamma}$, для которой пара векторов $b^{*1} = \Omega_+(\mu^*) \in \mathbb{R}^{d_1}$, $b^{*3} = \beta_+(\mu^*) \in \mathbb{R}^{d_3}$ аффинно $(\tau_*, \gamma_*, 2)$ -диофантова (см. (3.5)). Невозмущенные инвариантные n -мерные торы \mathcal{T}_μ , $\mu \in \Gamma$, для которых

$$\Omega_+(\mu) = \Omega_+(\mu^*), \quad \alpha_+(\mu) = \alpha_+(\mu^*), \quad \beta_+(\mu) = \beta_+(\mu^*), \quad (3.16)$$

образуют $(s-d)$ -параметрическое гладкое семейство: равенства (3.16) равносильны существованию такого $a \in A$, что $\mu = \mu(a, b^*)$. Теперь выберем любое $a \in \mathcal{G}_{b^*}$ и обозначим $\mu(a, b^*)$ через μ^0 . Возмущенная система (3.1) со *сдвинутыми* значениями параметров $\mu = \mu^0 + \Xi(\mu^0)$, $\sigma = \Theta(\mu^0)$ и инволюция (1.2) имеют общий приводимый инвариантный n -мерный тор $\{\bar{y} = 0, \bar{z} = 0\}$ с вектором частот $\tilde{\Omega}(\mu^0)$ и матрицей Флоке $\mathbf{0}_m \oplus \tilde{M}(\mu^0)$ (см. (3.15)). Согласно (3.14) и (3.16), частоты $\tilde{\Omega}_i(\mu^0)$ этого тора, положительные вещественные части $\tilde{\alpha}_j(\mu^0)$ и положительные мнимые части $\tilde{\beta}_j(\mu^0)$ его показателей Флоке удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_+(\mu^0) &= \Omega_+(\mu^0) = \Omega_+(\mu^*), \\ \tilde{\alpha}_+(\mu^0) &= \alpha_+(\mu^0) = \alpha_+(\mu^*), \\ \tilde{\beta}_+(\mu^0) &= \beta_+(\mu^0) = \beta_+(\mu^*). \end{aligned}$$

Все эти возмущенные торы образуют $(s-d)$ -параметрическое канторово семейство (параметром является точка $a \in \mathcal{G}_{b^*}$). Тор $\{\bar{y} = 0, \bar{z} = 0\}$ аналитичен и зависит от (a, b^*) бесконечно дифференцируемым образом в смысле Уитни.

Такое частичное сохранение частот, а также вещественных и мнимых частей показателей Флоке невозмущенных торов \mathcal{T}_μ обеспечено по существу двумя условиями невырожденности: условием типа Брура—Хайтемы—Такенса (см. [14, 17]), наложенным на компоненты Ω_+ , α_+ , β_+ , подлежащие сохранению (якобиан (3.4) не обращается в нуль для $\mu \in \mathbb{R}^s$ в окрестности 0), и условием типа Рюссмана (см. [38]), наложенным на компоненты Ω_- , β_- (пара отображений (3.6) аффинно $(Q, 2)$ -невырождена для $a \in \mathbb{R}^{s-d}$ в окрестности 0). Второе условие требует положительности $s-d$, поэтому в теореме 3.1 мы предполагаем, что $d \leq s-1$, хотя ограничение $d \leq \min(n+p, s)$ в (3.3) может показаться более «естественным», чем ограничение $d \leq \min(n+p, s-1)$.

В преобразовании координат (3.13) слагаемые X , Y^0 и Z^0 отвечают за инвариантность тора $\{\bar{y} = 0, \bar{z} = 0\}$, а слагаемые $Y^1\bar{y}$, $Y^2\bar{z}$, $Z^1\bar{y}$ и $Z^2\bar{z}$ — за его приводимость, т. е. за вариационное уравнение вдоль $\{\bar{y} = 0, \bar{z} = 0\}$ (см. подробности в [51]).

Замечание 3.2. Векторы частот невозмущенных инвариантных торов $\mathcal{T}_\mu = \{y = 0, z = 0\}$ систем (1.1) суть $\Omega(\mu)$, и в общем случае некоторые из этих торов резонансны, а некоторые — нет. Теорема 3.1 (даже при $d = 0$) показывает, что малые типичные G -обратимые возмущения этих систем сохраняют семейство торов \mathcal{T}_μ , но делают его канторовым (для $n \geq 2$ — при умеренных условиях невырожденности). Таким образом, обратимый контекст 2 подпадает под эвристический принцип, сформулированный в [15, Сес. 2] и [16, § 1.4.1].

В четырех «общепринятых» контекстах теории КАМ (в обратимом контексте 1, гамильтоновом изотропном контексте, контексте, сохраняющем объемы, и диссипативном контексте) мы имели следующую картину (см. [9, 15, 16, 41, 44]): если дифференциальные уравнения зависят от \mathfrak{c} внешних параметров, а приводимые инвариантные торы образуют \mathfrak{s} -параметрическое канторово семейство в произведении фазового пространства и пространства внешних параметров, то всегда $\mathfrak{s} \geq \mathfrak{c}$ и любой тор имеет $\mathfrak{s} - \mathfrak{c}$ нулевых показателей Флоке (если $\mathfrak{s} = \mathfrak{c}$, то \mathfrak{c} должно быть не меньше, чем 1). В обратимом контексте 2, наоборот, справедливо неравенство $\mathfrak{c} > \mathfrak{s}$ и любой тор имеет $\mathfrak{c} - \mathfrak{s}$ нулевых показателей Флоке. Действительно, в рамках теоремы 3.1 $\mathfrak{c} = m + s$, $\mathfrak{s} = s$ и любой тор имеет нулевой показатель Флоке кратности m . Во всех пяти контекстах каждый возмущенный тор имеет $|\mathfrak{s} - \mathfrak{c}|$ нулевых показателей Флоке.

Замечание 3.3. Для гамильтонова изотропного контекста и обратимого контекста 1 есть результаты о сохранении частот, в которых условие невырожденности формулируется не в терминах ранга некоторой матрицы типа Якоби, а в терминах топологической степени Брауэра. Для обратимых систем такие результаты получены в работах [28, 56–58]. Что же касается гамильтоновых систем, мы ограничимся статьями [59, 61] (см. также имеющуюся там библиографию). В работах [28, 56, 58, 61] применяется подход Эрмана. В [25] представлен обзор некоторых наборов условий невырожденности для гамильтонова изотропного контекста и обратимого контекста 1.

Если $d = 0$, то теорема 3.1 не гарантирует сохранения ни одной из частот и ни одного из показателей Флоке невозмущенных торов (это — ситуация типа Рюссмана, см. [38, 39]). Простейший случай, когда $d = 0$ и $p = 0$, исследован в [50, Сек. 5]. Поскольку случай нулевого d очень важен, мы представим его в виде отдельной теоремы. Снова рассмотрим систему (3.1) дифференциальных уравнений.

Теорема 3.2. Пусть пара отображений

$$\mu \mapsto \Omega(\mu) \in \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad \mu \mapsto \beta(\mu) \in \mathbb{R}^p$$

аффинно $(Q, 2)$ -невырождена в точке $\mu = 0$ для некоторого числа $Q \in \mathbb{N}$ (см. определение 2.2). Тогда существует такой замкнутый s -мерный шар $\Gamma \subset \mathbb{R}^s$ с центром в начале координат, что для любой комплексной окрестности (3.8) множества (3.9), любого $\mathcal{L} \in \mathbb{N}$, любого положительного ε_1 , любых $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ из интервала $(0, 1)$ и любого $\tau > nQ$ существуют положительные числа δ и γ , обладающие следующими свойствами.

Предположим, что возмущающие слагаемые f, g, h в (3.1) могут быть голоморфно продолжены в окрестность \mathcal{C} и $|f| < \delta, |g| < \delta, |h| < \delta$ в \mathcal{C} . Рассмотрим такой замкнутый s -мерный шар $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$ с центром в начале координат, что

$$\text{meas}_s \tilde{\Gamma} = (1 - \varepsilon_3) \text{meas}_s \Gamma.$$

Тогда существуют такие функции

$$\Theta : \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \tilde{\Omega} : \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \tilde{M} : \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathfrak{gl}(2p, \mathbb{R}) \quad (3.17)$$

и такая замена переменных (3.13) (для каждого $\mu \in \tilde{\Gamma}$), где $\bar{x} \in \mathbb{T}^n, \bar{y} \in \mathcal{O}_m(0), \bar{z} \in \mathcal{O}_{2p}(0)$, что справедливы следующие утверждения.

- i) Функции (3.17) являются C^∞ -гладкими, и всюду в $\tilde{\Gamma}$ все частные производные всех порядков от 0 до \mathcal{L} каждой компоненты функций $\Theta, \tilde{\Omega} - \Omega, \tilde{M} - M$ по абсолютной величине меньше, чем ε_1 . Коэффициенты $X, Y^0, Y^1, Y^2, Z^0, Z^1, Z^2$ в (3.13) являются отображениями со значениями в $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}), \mathbb{R}^{m \times 2p}, \mathbb{R}^{2p}, \mathbb{R}^{2p \times m}, \mathfrak{gl}(2p, \mathbb{R})$ соответственно. Эти отображения аналитические по \bar{x} и C^∞ -гладкие по μ . Всюду в $\mathbb{T}^n \times \tilde{\Gamma}$ все частные производные всех порядков от 0 до \mathcal{L} каждой компоненты этих отображений по абсолютной величине меньше, чем ε_1 .
- ii) Для каждого $\mu \in \tilde{\Gamma}$ замена переменных (3.13) коммутирует с инволюцией (1.2). Имеет место тождество $\tilde{M}(\mu)R \equiv -R\tilde{M}(\mu)$.
- iii) Для каждого $\mu \in \tilde{\Gamma}$ матрица $\tilde{M}(\mu)$ имеет простой спектр вида $\mathfrak{M}(\nu_1, \nu_2, \nu_3; \tilde{\alpha}(\mu), \tilde{\beta}(\mu))$ (см. определение 1.4).
- iv) Существует множество $\mathcal{G} \subset \tilde{\Gamma}$, удовлетворяющее следующим условиям.

- (a) $\text{meas}_s \mathcal{G} > (1 - \varepsilon_2) \text{meas}_s \tilde{\Gamma}$.
 (b) Для любой точки $\mu \in \mathcal{G}$ пара векторов $\tilde{\Omega}(\mu) \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\beta}(\mu) \in \mathbb{R}^s$ аффинно $(\tau, \gamma, 2)$ -диофантова (см. определение 2.1).
 (c) Для любой точки $\mu \in \mathcal{G}$ возмущенная система (3.1) с $\sigma = \Theta(\mu)$ после замены координат (3.13) принимает вид

$$\dot{x} = \tilde{\Omega}(\mu) + O(\bar{y}, \bar{z}), \quad \dot{y} = O_2(\bar{y}, \bar{z}), \quad \dot{z} = \tilde{M}(\mu)\bar{z} + O_2(\bar{y}, \bar{z}). \quad (3.18)$$

Таким образом, для любого $\mu \in \mathcal{G}$ возмущенная система (3.1) и инволюция (1.2) имеют общий аналитический приводимый инвариантный n -мерный тор $\{\bar{y} = 0, \bar{z} = 0\}$ с вектором частот $\tilde{\Omega}(\mu)$ и матрицей Флоке $\mathbf{0}_m \oplus \tilde{M}(\mu)$ (см. (3.18)). Все такие торы образуют s -параметрическое бесконечно дифференцируемое в смысле Уитни семейство.

4. ТЕОРЕМА-ИСТОЧНИК В ОБРАТИМОМ КОНТЕКСТЕ 2

Содержание этого раздела почти полностью совпадает с содержанием [51, Sec. 4]; настоящий раздел включен в статью для того, чтобы изложение имело законченный вид. Чтобы «сделать» отображение (1.4) субмерсивным, заменим $\Omega(\mu) + \Delta(\sigma, \mu)$ на независимый внешний параметр $\omega \in \mathbb{R}^n$ и предположим, что отображение

$$\mu \mapsto (\alpha(\omega, \mu), \beta(\omega, \mu)) \in \mathbb{R}^p$$

(где M зависит от ω) субмерсивно для фиксированного ω .

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{Z}_+$ и $\omega_* \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим аналитическое $(m + n + s)$ -параметрическое семейство аналитических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega + \xi(y, z, \sigma, \omega, \mu) + f(x, y, z, \sigma, \omega, \mu), \\ \dot{y} &= \sigma + \eta(y, z, \sigma, \omega, \mu) + g(x, y, z, \sigma, \omega, \mu), \\ \dot{z} &= M(\omega, \mu)z + \zeta(y, z, \sigma, \omega, \mu) + h(x, y, z, \sigma, \omega, \mu), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $x \in \mathbb{T}^n$, $y \in \mathcal{O}_m(0)$, $z \in \mathcal{O}_{2p}(0)$ — координаты на фазовом пространстве, $\sigma \in \mathcal{O}_m(0)$, $\omega \in \mathcal{O}_n(\omega_*)$, $\mu \in \mathcal{O}_s(0)$ — внешние параметры, M — $(2p \times 2p)$ -матричнозначная функция и, наконец, $\xi = O(y, z)$, $\eta = O_2(y, z)$, $\zeta = O_2(y, z, \sigma)$. Предполагается, что функции M , ξ , η , ζ фиксированы, а слагаемые f , g , h — малые возмущения. Пусть системы (4.1) обратимы относительно инволюции (1.2) фазового пространства, где $R \in \text{GL}(2p, \mathbb{R})$ — инволютивная матрица с p -кратными собственными числами 1 и -1 , причем $M(\omega, \mu)R \equiv -RM(\omega, \mu)$, а $M(\omega_*, 0)$ имеет простой спектр. Можно считать, что спектр матрицы $M(\omega, \mu)$ прост для любых ω и μ и имеет вид $\mathfrak{M}(\nu_1, \nu_2, \nu_3; \alpha(\omega, \mu), \beta(\omega, \mu))$, где $\nu_1 + \nu_2 + 2\nu_3 = p$ (см. определение 1.4). Будем по-прежнему использовать обозначение $\nu = \nu_2 + \nu_3 \in \mathbb{Z}_+$.

Теорема 4.1 (см. [50]). *Предположим, что отображение*

$$\mu \mapsto (\alpha(\omega_*, \mu), \beta(\omega_*, \mu)) \in \mathbb{R}^p$$

субмерсивно в начале координат $\mu = 0$ (а значит, $s \geq p$). Тогда существует такая окрестность $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^{n+s}$ точки $(\omega_, 0)$, что для любого замкнутого множества $\Gamma \subset \mathfrak{D}$, диффеоморфного $(n + s)$ -мерному шару и содержащего точку $(\omega_*, 0)$ внутри себя, выполнено следующее. Для любой комплексной окрестности*

$$\mathcal{C} \subset (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})^n \times \mathbb{C}^{2m+2p+n+s}$$

множества

$$\mathbb{T}^n \times \{0 \in \mathbb{R}^m\} \times \{0 \in \mathbb{R}^{2p}\} \times \{0 \in \mathbb{R}^m\} \times \Gamma,$$

любого $\mathcal{L} \in \mathbb{N}$, любого положительного ε , любого τ , удовлетворяющего неравенству $\tau > n - 1$ (а при $n = 0$ — неравенству $\tau \geq 0$), и любого положительного γ существует положительное число δ , обладающее следующими свойствами.

Предположим, что возмущающие слагаемые f , g , h в (4.1) могут быть голоморфно продолжены в окрестность \mathcal{C} и $|f| < \delta$, $|g| < \delta$, $|h| < \delta$ в \mathcal{C} . Тогда для каждого $(\omega_0, \mu_0) \in \Gamma$ существуют такие точки

$$v(\omega_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^m, \quad u(\omega_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n, \quad w(\omega_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^s \quad (4.2)$$

и такая замена переменных

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + X(\bar{x}, \omega_0, \mu_0), \\ y &= \bar{y} + Y^0(\bar{x}, \omega_0, \mu_0) + Y^1(\bar{x}, \omega_0, \mu_0)\bar{y} + Y^2(\bar{x}, \omega_0, \mu_0)\bar{z}, \\ z &= \bar{z} + Z^0(\bar{x}, \omega_0, \mu_0) + Z^1(\bar{x}, \omega_0, \mu_0)\bar{y} + Z^2(\bar{x}, \omega_0, \mu_0)\bar{z}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\bar{x} \in \mathbb{T}^n$, $\bar{y} \in \mathcal{O}_m(0)$, $\bar{z} \in \mathcal{O}_{2p}(0)$, что справедливы следующие утверждения.

- (1) Функции u , v , w в (4.2) являются C^∞ -гладкими по совокупности переменных (ω_0, μ_0) , и всюду в Γ все частные производные всех порядков от 0 до \mathcal{L} каждой компоненты этих функций по абсолютной величине меньше, чем ε . Коэффициенты X , Y^0 , Y^1 , Y^2 , Z^0 , Z^1 , Z^2 в (4.3) являются отображениями со значениями в \mathbb{R}^n , \mathbb{R}^m , $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{m \times 2p}$, \mathbb{R}^{2p} , $\mathbb{R}^{2p \times m}$, $\mathfrak{gl}(2p, \mathbb{R})$ соответственно. Эти отображения аналитические по \bar{x} и C^∞ -гладкие по (ω_0, μ_0) . Всюду в $\mathbb{T}^n \times \Gamma$ все частные производные всех порядков от 0 до \mathcal{L} каждой компоненты этих отображений по абсолютной величине меньше, чем ε .
- (2) Для каждого $(\omega_0, \mu_0) \in \Gamma$ замена переменных (4.3) коммутирует с инволюцией (1.2).
- (3) Для любой точки $(\omega_0, \mu_0) \in \Gamma$, для которой пара векторов $\omega_0 \in \mathbb{R}^n$, $\beta(\omega_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^p$ аффинно $(\tau, \gamma, 2)$ -диофантова (см. определение 2.1), система (4.1) со значениями параметров

$$\sigma = v(\omega_0, \mu_0), \quad \omega = \omega_0 + u(\omega_0, \mu_0), \quad \mu = \mu_0 + w(\omega_0, \mu_0) \quad (4.4)$$

после преобразования координат (4.3) принимает вид

$$\dot{\bar{x}} = \omega_0 + O(\bar{y}, \bar{z}), \quad \dot{\bar{y}} = O_2(\bar{y}, \bar{z}), \quad \dot{\bar{z}} = M(\omega_0, \mu_0)\bar{z} + O_2(\bar{y}, \bar{z}). \quad (4.5)$$

Фактически теорема 4.1 является частным случаем основного результата работы [50] (см. обсуждение в [51]). Рассмотрим произвольную точку $(\omega_0, \mu_0) \in \Gamma$, для которой пара векторов $\omega_0 \in \mathbb{R}^n$, $\beta(\omega_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^p$ аффинно $(\tau, \gamma, 2)$ -диофантова. Возмущенная система (4.1) со сдвинутыми значениями (4.4) параметров имеет приводимый инвариантный n -мерный тор $\{\bar{y} = 0, \bar{z} = 0\}$ с тем же самым вектором частот ω_0 и той же самой матрицей Флоке $\mathbf{0}_m \oplus M(\omega_0, \mu_0)$ (см. (4.5)), что и у приводимого инвариантного n -мерного тора $\{y = 0, z = 0\}$ системы (4.1) без слагаемых f, g, h (невозмущенной системы) при значениях параметров $\sigma = 0$, $\omega = \omega_0$, $\mu = \mu_0$. Тор $\{\bar{y} = 0, \bar{z} = 0\}$ аналитичен, инвариантен относительно инволюции (1.2) и зависит от (ω_0, μ_0) бесконечно дифференцируемым образом в смысле Уитни.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1

Наша цель — вывести теорему 3.1 из теоремы 4.1, следуя общей схеме эрмановского типа (см. аналогичную редукционную технику для «общепринятых» контекстов теории КАМ в [9]). Пусть системы (3.1) удовлетворяют условиям теоремы 3.1. Поскольку $M(\mu)$ аналитически зависит от μ , а $M(0)$ имеет простой спектр, можно ввести такой дополнительный параметр $\chi \in \mathcal{O}_S(0)$ для подходящего $S \in \mathbb{Z}_+$ и построить такое аналитическое семейство $M^{\text{new}}(\mu, \chi)$ вещественных матриц порядка $2p \times 2p$, что будут справедливы следующие утверждения.

- (1) $M^{\text{new}}(\mu, 0) \equiv M(\mu)$ и $M^{\text{new}}(\mu, \chi)R \equiv -RM^{\text{new}}(\mu, \chi)$. Как следствие, можно считать, что для любых μ и χ матрица $M^{\text{new}}(\mu, \chi)$ имеет простой спектр вида

$$\mathfrak{M}(\nu_1, \nu_2, \nu_3; \alpha^{\text{new}}(\mu, \chi), \beta^{\text{new}}(\mu, \chi)),$$

где $\alpha^{\text{new}}(\mu, 0) \equiv \alpha(\mu)$ и $\beta^{\text{new}}(\mu, 0) \equiv \beta(\mu)$.

- (2) Отображение

$$(\mu, \chi) \mapsto (\alpha^{\text{new}}(\mu, \chi), \beta^{\text{new}}(\mu, \chi)) \in \mathbb{R}^p$$

субмерсивно в точке $\mu = 0$, $\chi = 0$ (а значит, $s + S \geq p$).

Существование $(2p \times 2p)$ -матричнозначной функции M^{new} , удовлетворяющей этим условиям, непосредственно следует из теории нормальных форм и версальных деформаций инфинитезимально обратимых матриц (см. [7, 27, 52]). Такую функцию всегда можно построить уже при $S = p$.

Теперь введем еще один дополнительный параметр $\omega \in \mathcal{O}_n(\Omega(0))$ и рассмотрим аналитическое $(m + s + S + n)$ -параметрическое семейство аналитических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \omega + \xi(y, z, \sigma, \mu) + f(x, y, z, \sigma, \mu), \\ \dot{y} &= \sigma + \eta(y, z, \sigma, \mu) + g(x, y, z, \sigma, \mu), \\ \dot{z} &= M^{\text{new}}(\mu, \chi)z + \zeta(y, z, \sigma, \mu) + h(x, y, z, \sigma, \mu).\end{aligned}\tag{5.1}$$

Системы (5.1) обратимы относительно инволюции (1.2) и удовлетворяют всем условиям теоремы 4.1, при этом $\Omega(0)$, $s + S$, (μ, χ) , M^{new} играют роль ω_* , s , μ , M соответственно.

Рассмотрим замкнутый шар $A \subset \mathbb{R}^{s-d}$ с центром в начале координат, замкнутый шар $B \subset \mathbb{R}^d$ с центром в точке \mathfrak{B}_0 , замкнутый шар $\Gamma_1 \subset \mathbb{R}^S$ с центром в начале координат и замкнутый шар $\Gamma_2 \subset \mathbb{R}^n$ с центром в точке $\Omega(0)$. Если шары A и B достаточно малы, то множество Γ (3.7) определено корректно (и диффеоморфно замкнутому s -мерному шару). Согласно теореме 4.1, если все четыре шара A , B , Γ_1 , Γ_2 достаточно малы, то для любой комплексной окрестности (3.8) множества (3.9), любого $\mathcal{L} \in \mathbb{N}$, любого τ , удовлетворяющего неравенству $\tau > n - 1$ (а при $n = 0$ — неравенству $\tau \geq 0$), и любого положительного γ справедливо следующее утверждение.

Предположим, что возмущающие слагаемые f , g , h в (3.1) и (5.1) могут быть голоморфно продолжены в окрестность (3.8) и достаточно малы в (3.8). Тогда для любых $\mu_0 \in \Gamma$, $\chi_0 \in \Gamma_1$ и $\omega_0 \in \Gamma_2$ существуют такие точки

$$\begin{aligned}v(\omega_0, \mu_0, \chi_0) &\in \mathbb{R}^m, & u(\omega_0, \mu_0, \chi_0) &\in \mathbb{R}^n, \\ w(\omega_0, \mu_0, \chi_0) &\in \mathbb{R}^s, & W(\omega_0, \mu_0, \chi_0) &\in \mathbb{R}^S\end{aligned}\tag{5.2}$$

и такая замена переменных

$$\begin{aligned}x &= \bar{x} + \mathfrak{X}(\bar{x}, \omega_0, \mu_0, \chi_0), \\ y &= \bar{y} + \mathfrak{Y}^0(\bar{x}, \omega_0, \mu_0, \chi_0) + \mathfrak{Y}^1(\bar{x}, \omega_0, \mu_0, \chi_0)\bar{y} + \mathfrak{Y}^2(\bar{x}, \omega_0, \mu_0, \chi_0)\bar{z}, \\ z &= \bar{z} + \mathfrak{Z}^0(\bar{x}, \omega_0, \mu_0, \chi_0) + \mathfrak{Z}^1(\bar{x}, \omega_0, \mu_0, \chi_0)\bar{y} + \mathfrak{Z}^2(\bar{x}, \omega_0, \mu_0, \chi_0)\bar{z},\end{aligned}\tag{5.3}$$

где $\bar{x} \in \mathbb{T}^n$, $\bar{y} \in \mathcal{O}_m(0)$, $\bar{z} \in \mathcal{O}_{2p}(0)$, что выполнено следующее.

Во-первых, функции u , v , w , W в (5.2) являются C^∞ -гладкими. Коэффициенты \mathfrak{X} , \mathfrak{Y}^0 , \mathfrak{Y}^1 , \mathfrak{Y}^2 , \mathfrak{Z}^0 , \mathfrak{Z}^1 , \mathfrak{Z}^2 в (5.3) аналитические по переменной \bar{x} и C^∞ -гладкие по совокупности переменных $(\omega_0, \mu_0, \chi_0)$. Все отображения u , v , w , W , \mathfrak{X} , \mathfrak{Y}^0 , \mathfrak{Y}^1 , \mathfrak{Y}^2 , \mathfrak{Z}^0 , \mathfrak{Z}^1 , \mathfrak{Z}^2 малы в $C^\mathcal{L}$ -топологии.

Во-вторых, для любых $\mu_0 \in \Gamma$, $\chi_0 \in \Gamma_1$ и $\omega_0 \in \Gamma_2$ замена переменных (5.3) коммутирует с инволюцией (1.2).

В-третьих, для любых точек $\mu_0 \in \Gamma$, $\chi_0 \in \Gamma_1$ и $\omega_0 \in \Gamma_2$, для которых пара векторов $\omega_0 \in \mathbb{R}^n$, $\beta^{\text{new}}(\mu_0, \chi_0) \in \mathbb{R}^p$ аффинно $(\tau, \gamma, 2)$ -диофантова, система (5.1) со значениями параметров

$$\begin{aligned}\sigma &= v(\omega_0, \mu_0, \chi_0), & \omega &= \omega_0 + u(\omega_0, \mu_0, \chi_0), \\ \mu &= \mu_0 + w(\omega_0, \mu_0, \chi_0), & \chi &= \chi_0 + W(\omega_0, \mu_0, \chi_0)\end{aligned}\tag{5.4}$$

после преобразования координат (5.3) принимает вид

$$\dot{\bar{x}} = \omega_0 + O(\bar{y}, \bar{z}), \quad \dot{\bar{y}} = O_2(\bar{y}, \bar{z}), \quad \dot{\bar{z}} = M^{\text{new}}(\mu_0, \chi_0)\bar{z} + O_2(\bar{y}, \bar{z}).\tag{5.5}$$

Можно считать, что шары A и B настолько малы, что $\Omega(\Gamma)$ лежит во внутренности шара Γ_2 . Если функции u , v , w , W достаточно малы, то систему уравнений

$$\begin{aligned}\omega + u(\omega, \mu, \chi) &= \Omega(\mu + w(\omega, \mu, \chi)) + \Delta(v(\omega, \mu, \chi), \mu + w(\omega, \mu, \chi)), \\ \chi + W(\omega, \mu, \chi) &= 0\end{aligned}\tag{5.6}$$

при $\mu \in \Gamma$ можно решить относительно ω и χ :

$$\omega = \varphi(\mu), \quad \chi = \psi(\mu),$$

где $\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma_2$ и $\psi : \Gamma \rightarrow \Gamma_1$ — бесконечно дифференцируемые функции, близкие в $C^\mathcal{L}$ -топологии к Ω и 0 соответственно. Ключевое наблюдение состоит в том, что для любого $\mu_0 \in \Gamma$ система (5.1) при значениях параметров (5.4), где $\omega_0 = \varphi(\mu_0)$ и $\chi_0 = \psi(\mu_0)$, совпадает с исходной системой (3.1) при значениях параметров

$$\sigma = v(\omega_0, \mu_0, \chi_0), \quad \mu = \mu_0 + w(\omega_0, \mu_0, \chi_0).$$

Действительно, если $\omega_0 = \varphi(\mu_0)$ и $\chi_0 = \psi(\mu_0)$, то из уравнений (5.6) следует, что значения параметров $\sigma, \omega, \mu, \chi$, заданные выражениями (5.4), удовлетворяют соотношениям

$$\omega = \Omega(\mu) + \Delta(\sigma, \mu), \quad \chi = 0.$$

Пусть $\varepsilon_3 \in (0, 1)$. Рассмотрим такой замкнутый $(s-d)$ -мерный шар $A' \subset A$ с центром в начале координат и такой замкнутый d -мерный шар $B' \subset B$ с центром в точке \mathfrak{P}_0 , что

$$\text{meas}_{s-d} A' = (1 - \varepsilon_3)^{1/2} \text{meas}_{s-d} A, \quad \text{meas}_d B' = (1 - \varepsilon_3)^{1/2} \text{meas}_d B,$$

и положим

$$\Gamma' = \{\mu(a, b) \mid a \in A', b \in B'\} \subset \Gamma$$

($0 \in \Gamma'$). Если функции u, v, w, W достаточно малы, то уравнение

$$\mu = \mu_0 + w(\varphi(\mu_0), \mu_0, \psi(\mu_0))$$

при $\mu \in \Gamma'$ можно решить относительно μ_0 :

$$\mu_0 = \Upsilon(\mu),$$

где $\Upsilon : \Gamma' \rightarrow \Gamma$ — бесконечно дифференцируемая функция, близкая в $C^{\mathcal{L}}$ -топологии к тождественному отображению $\mu \mapsto \mu$.

Мы пришли к следующему выводу. Для любой точки $\mu \in \Gamma'$ положим

$$\mu_0 = \Upsilon(\mu), \quad \omega_0 = \varphi(\Upsilon(\mu)), \quad \chi_0 = \psi(\Upsilon(\mu)).$$

Если пара векторов $\omega_0, \beta^{\text{new}}(\mu_0, \chi_0)$ аффинно $(\tau, \gamma, 2)$ -диофантова, то *исходная* система (3.1) со значениями параметров μ и $\sigma = v(\omega_0, \mu_0, \chi_0)$ после преобразования координат (5.3) принимает вид (5.5).

Введем функции

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega}(\mu) &= \varphi(\Upsilon(\mu)), \\ \Psi(\mu) &= \psi(\Upsilon(\mu)), \\ \widehat{M}(\mu) &= M^{\text{new}}(\Upsilon(\mu), \Psi(\mu)), \\ \widehat{\alpha}(\mu) &= \alpha^{\text{new}}(\Upsilon(\mu), \Psi(\mu)), \\ \widehat{\beta}(\mu) &= \beta^{\text{new}}(\Upsilon(\mu), \Psi(\mu)), \\ \widehat{\Theta}(\mu) &= v(\widehat{\Omega}(\mu), \Upsilon(\mu), \Psi(\mu)) \end{aligned}$$

для $\mu \in \Gamma'$ и функции

$$\begin{aligned} \widehat{X}(\bar{x}, \mu) &= \mathfrak{X}(\bar{x}, \widehat{\Omega}(\mu), \Upsilon(\mu), \Psi(\mu)), \\ \widehat{Y}^r(\bar{x}, \mu) &= \mathfrak{Y}^r(\bar{x}, \widehat{\Omega}(\mu), \Upsilon(\mu), \Psi(\mu)), \quad r = 0, 1, 2, \\ \widehat{Z}^r(\bar{x}, \mu) &= \mathfrak{Z}^r(\bar{x}, \widehat{\Omega}(\mu), \Upsilon(\mu), \Psi(\mu)), \quad r = 0, 1, 2 \end{aligned}$$

для $\bar{x} \in \mathbb{T}^n$ и $\mu \in \Gamma'$. Отображения $\widehat{\Omega}, \Psi, \widehat{M}, \widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\Theta}$ являются C^∞ -гладкими, причем функции $\widehat{\Omega} - \Omega, \Psi, \widehat{M} - M, \widehat{\alpha} - \alpha, \widehat{\beta} - \beta, \widehat{\Theta}$ малы в $C^{\mathcal{L}}$ -топологии. Для любого $\mu \in \Gamma'$ справедливо соотношение $\widehat{M}(\mu)R = -R\widehat{M}(\mu)$, а $(2p \times 2p)$ -матрица $\widehat{M}(\mu)$ имеет простой спектр вида $\mathfrak{M}(\nu_1, \nu_2, \nu_3; \widehat{\alpha}(\mu), \widehat{\beta}(\mu))$.

Коэффициенты $\widehat{X}, \widehat{Y}^0, \widehat{Y}^1, \widehat{Y}^2, \widehat{Z}^0, \widehat{Z}^1, \widehat{Z}^2$ являются аналитическими по $\bar{x} \in \mathbb{T}^n$, C^∞ -гладкими по $\mu \in \Gamma'$ и малыми в $C^{\mathcal{L}}$ -топологии, если возмущающие слагаемые f, g, h в (3.1) достаточно малы.

Вывод, к которому мы пришли на данный момент, можно переформулировать следующим образом. Если пара векторов $\widehat{\Omega}(\mu) \in \mathbb{R}^n, \widehat{\beta}(\mu) \in \mathbb{R}^p$ аффинно $(\tau, \gamma, 2)$ -диофантова при некотором $\mu \in \Gamma'$, то система (3.1) с параметрами μ и $\sigma = \widehat{\Theta}(\mu)$ после G -коммутирующей замены координат

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + \widehat{X}(\bar{x}, \mu), \\ y &= \bar{y} + \widehat{Y}^0(\bar{x}, \mu) + \widehat{Y}^1(\bar{x}, \mu)\bar{y} + \widehat{Y}^2(\bar{x}, \mu)\bar{z}, \\ z &= \bar{z} + \widehat{Z}^0(\bar{x}, \mu) + \widehat{Z}^1(\bar{x}, \mu)\bar{y} + \widehat{Z}^2(\bar{x}, \mu)\bar{z}, \end{aligned}$$

где $\bar{x} \in \mathbb{T}^n$, $\bar{y} \in \mathcal{O}_m(0)$, $\bar{z} \in \mathcal{O}_{2p}(0)$, принимает вид

$$\dot{\bar{x}} = \widehat{\Omega}(\mu) + O_2(\bar{y}, \bar{z}), \quad \dot{\bar{y}} = O_2(\bar{y}, \bar{z}), \quad \dot{\bar{z}} = \widehat{M}(\mu)\bar{z} + O_2(\bar{y}, \bar{z}).$$

Рассмотрим такие замкнутые $(s-d)$ -мерные шары $\tilde{A} \subset A'' \subset A'$ с центром в начале координат и такой замкнутый d -мерный шар $\tilde{B} \subset B'$ с центром в точке \mathfrak{P}_0 , что

$$\text{meas}_{s-d} A'' = (1 - \varepsilon_3)^{3/4} \text{meas}_{s-d} A$$

и имеют место соотношения (3.10). Определим множества $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma'' \subset \Gamma'$ при помощи уравнения

$$\Gamma'' = \left\{ \mu(a, b) \mid a \in A'', b \in \tilde{B} \right\}$$

($0 \in \Gamma''$) и уравнения (3.11). Пусть шары A и B настолько малы, что в Γ якобиан (3.4) нигде не обращается в нуль при $d \geq 1$. Тогда систему уравнений

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega}_+(\mu_+^*, \mu_-) &= \Omega_+(\mu_+, \mu_-), \\ \widehat{\alpha}_+(\mu_+^*, \mu_-) &= \alpha_+(\mu_+, \mu_-), \\ \widehat{\beta}_+(\mu_+^*, \mu_-) &= \beta_+(\mu_+, \mu_-) \end{aligned}$$

можно решить относительно μ_+^* при $\mu = (\mu_+, \mu_-) \in \Gamma''$, если функции u, v, w, W достаточно малы:

$$\mu_+^* = \mu_+ + \Xi_+(\mu_+, \mu_-) = \mu_+ + \Xi_+(\mu),$$

где $\Xi_+ : \Gamma'' \rightarrow \mathbb{R}^d$ — бесконечно дифференцируемая функция, малая в $C^{\mathcal{L}}$ -топологии. «Дополним» отображение Ξ_+ нулевой функцией $\Xi_- : \Gamma'' \rightarrow \mathbb{R}^{s-d}$ так, чтобы имели место соотношения

$$\Xi_+ = (\Xi_l \mid l \in \mathfrak{T}), \quad \Xi_- = (\Xi_l \mid l \notin \mathfrak{T})$$

для отображения $\Xi = (\Xi_+, \Xi_-) : \Gamma'' \rightarrow \mathbb{R}^s$ (ср. (3.2)). Если $d = 0$, то $\Xi \equiv 0$. Если $\mu \in \Gamma''$, то $\mu + \Xi(\mu) \in \Gamma'$ и

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega}_+(\mu + \Xi(\mu)) &= \Omega_+(\mu), \\ \widehat{\alpha}_+(\mu + \Xi(\mu)) &= \alpha_+(\mu), \\ \widehat{\beta}_+(\mu + \Xi(\mu)) &= \beta_+(\mu). \end{aligned}$$

Теперь положим

$$\begin{aligned} \widetilde{\Omega}(\mu) &= \widehat{\Omega}(\mu + \Xi(\mu)), \\ \widetilde{M}(\mu) &= \widehat{M}(\mu + \Xi(\mu)), \\ \widetilde{\alpha}(\mu) &= \widehat{\alpha}(\mu + \Xi(\mu)), \\ \widetilde{\beta}(\mu) &= \widehat{\beta}(\mu + \Xi(\mu)), \\ \Theta(\mu) &= \widehat{\Theta}(\mu + \Xi(\mu)) \end{aligned}$$

для $\mu \in \Gamma''$ и

$$\begin{aligned} X(\bar{x}, \mu) &= \widehat{X}(\bar{x}, \mu + \Xi(\mu)), \\ Y^r(\bar{x}, \mu) &= \widehat{Y}^r(\bar{x}, \mu + \Xi(\mu)), \quad r = 0, 1, 2, \\ Z^r(\bar{x}, \mu) &= \widehat{Z}^r(\bar{x}, \mu + \Xi(\mu)), \quad r = 0, 1, 2 \end{aligned}$$

для $\bar{x} \in \mathbb{T}^n$ и $\mu \in \Gamma''$. Отображения $\Xi, \widetilde{\Omega}, \widetilde{M}, \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \Theta$ являются C^∞ -гладкими, причем функции $\Xi, \widetilde{\Omega} - \Omega, \widetilde{M} - M, \widetilde{\alpha} - \alpha, \widetilde{\beta} - \beta, \Theta$ малы в $C^{\mathcal{L}}$ -топологии. Для любого $\mu \in \Gamma''$ справедливо соотношение $\widetilde{M}(\mu)R = -R\widetilde{M}(\mu)$, а $(2p \times 2p)$ -матрица $\widetilde{M}(\mu)$ имеет простой спектр вида $\mathfrak{M}(\nu_1, \nu_2, \nu_3; \widetilde{\alpha}(\mu), \widetilde{\beta}(\mu))$. В Γ'' выполнены тождества (3.14). Коэффициенты $X, Y^0, Y^1, Y^2, Z^0, Z^1, Z^2$ являются аналитическими по $\bar{x} \in \mathbb{T}^n$, C^∞ -гладкими по $\mu \in \Gamma''$ и малыми в $C^{\mathcal{L}}$ -топологии, если возмущающие слагаемые f, g, h в (3.1) достаточно малы. Для любого $\mu \in \Gamma''$ замена переменных (3.13) коммутирует с инволюцией (1.2).

Для любого $\mu^0 \in \Gamma''$, для которого пара векторов $\tilde{\Omega}(\mu^0), \tilde{\beta}(\mu^0)$ аффинно $(\tau, \gamma, 2)$ -диофантова, система (3.1) при значениях параметров $\mu = \mu^0 + \Xi(\mu^0)$ и $\sigma = \Theta(\mu^0)$ после замены координат (3.13), где $\mu = \mu^0$, принимает вид (3.15).

Пара отображений (3.6) аффинно $(Q, 2)$ -невырождена в точке $a = 0$. Можно считать, что шары A и B (а значит, и шары \tilde{A} и \tilde{B}) настолько малы, что для любого фиксированного значения $b \in \tilde{B}$ пара отображений

$$a \mapsto \Omega_-(\mu(a, b)) \in \mathbb{R}^{n-d_1} \quad \text{и} \quad a \mapsto \beta_-(\mu(a, b)) \in \mathbb{R}^{\nu-d_3} \quad (5.7)$$

аффинно $(Q, 2)$ -невырождена в каждой точке $a \in \tilde{A}$. Теперь можно применить диофантову лемму 2.1, при этом

- $s - d \geq 1$, $n - d_1$, $\nu - d_3$, d_1 , d_3 и 2 играют роль s , n , ν , n^{add} , ν^{add} и L соответственно,
- \tilde{B} , \tilde{A} и внутренность A'' играют роль B , A и \mathfrak{A} соответственно,
- отображения (5.7) играют роль отображений (2.2),
- отображения $b \mapsto b^{\cdot 1} \in \mathbb{R}^{d_1}$ и $b \mapsto b^{\cdot 3} \in \mathbb{R}^{d_3}$ играют роль отображений Ω^{add} и β^{add} соответственно,
- ε_2 играет роль ε .

Согласно лемме 2.1, если $\mathcal{L} \geq Q$, а разности $\tilde{\Omega} - \Omega$ и $\tilde{\beta} - \beta$ достаточно малы в Γ'' в $C^{\mathcal{L}}$ -топологии, то справедливо следующее утверждение. Пусть $\varepsilon_2 \in (0, 1)$, $\tau_* \geq \max(0, d_1 - 1)$ и $\gamma_* > 0$. Предположим, что $\tau > nQ$, $\tau \geq \tau_*$, а γ достаточно мало: $0 < \gamma \leq \gamma_0(\varepsilon_2, \tau, \gamma_*)$. Тогда для любой точки $b \in \tilde{B}$, для которой пара векторов $b^{\cdot 1} \in \mathbb{R}^{d_1}$, $b^{\cdot 3} \in \mathbb{R}^{d_3}$ аффинно $(\tau_*, \gamma_*, 2)$ -диофантова, мера Лебега meas_{s-d} множества \mathcal{G}_b тех точек $a \in \tilde{A}$, для которых пара векторов $\tilde{\Omega}(\mu(a, b)) \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\beta}(\mu(a, b)) \in \mathbb{R}^{\nu}$ аффинно $(\tau, \gamma, 2)$ -диофантова, превосходит величину $(1 - \varepsilon_2) \text{meas}_{s-d} \tilde{A}$. Действительно, обозначая $\mu(a, b)$ через μ^0 и учитывая тождества (3.5) и (3.14), получаем соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}(\mu^0) &= (\tilde{\Omega}_+(\mu^0), \tilde{\Omega}_-(\mu^0)) = (\Omega_+(\mu^0), \tilde{\Omega}_-(\mu^0)) = (b^{\cdot 1}, \tilde{\Omega}_-(\mu^0)), \\ \tilde{\beta}(\mu^0) &= (\tilde{\beta}_+(\mu^0), \tilde{\beta}_-(\mu^0)) = (\beta_+(\mu^0), \tilde{\beta}_-(\mu^0)) = (b^{\cdot 3}, \tilde{\beta}_-(\mu^0)). \end{aligned}$$

Этим завершается доказательство теоремы 3.1.

6. ИНВАРИАНТНЫЕ ТОРЫ В ОБЩИХ СИСТЕМАХ

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}_+$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \mathfrak{x}(x, y, z), \quad \dot{y} = \eta(y), \quad \dot{z} = \mathfrak{z}(x, y, z), \quad (6.1)$$

где $x \in \mathbb{T}^n$, $y \in \mathcal{O}_m(0)$, $z \in \mathcal{O}_{2p}(0)$ — координаты на фазовом пространстве (ср. (1.1) и (3.1)). Предположим, что эта система обратима относительно инволюции (1.2) фазового пространства, где $R \in \text{GL}(2p, \mathbb{R})$ — инволютивная матрица. Условие обратимости означает, что

$$\mathfrak{x}(-x, -y, Rz) \equiv \mathfrak{x}(x, y, z), \quad \eta(-y) \equiv \eta(y), \quad \mathfrak{z}(-x, -y, Rz) \equiv -R\mathfrak{z}(x, y, z).$$

Отметим, что на уравнения для \dot{x} и \dot{z} мы не накладываем никаких ограничений (кроме обратимости), но предполагается, что правая часть уравнения для \dot{y} не зависит от x и z . В настоящем разделе дается строгое доказательство следующего утверждения.

Предложение 6.1. Пусть система (6.1) и инволюция (1.2) имеют общий инвариантный тор, движение по которому квазипериодично. Тогда $\eta(0) = 0$.

В предложении 6.1 не предполагается, что тор имеет размерность n (тем более — что он близок к тору $\{y = 0, z = 0\}$).

В частности, предположим, что система (6.1) зависит от \mathfrak{s} -мерного параметра \mathfrak{w} , причем $\mathfrak{s} < m$:

$$\dot{x} = \mathfrak{x}(x, y, z, \mathfrak{w}), \quad \dot{y} = \eta(y, \mathfrak{w}), \quad \dot{z} = \mathfrak{z}(x, y, z, \mathfrak{w}).$$

В общем случае точки $\eta(0, \mathfrak{w})$ образуют в \mathbb{R}^m \mathfrak{s} -мерную поверхность, не содержащую начала координат. Следовательно, если $\mathfrak{s} < m$, то у \mathfrak{s} -параметрического семейства общего вида G -обратимых систем (6.1) нет инвариантного (относительно как самой системы, так и относительно инволюции G) тора, движение по которому было бы квазипериодично, ни для какого значения параметра.

Предложение 6.1 является частным случаем следующего более общего утверждения.

Предложение 6.2. Пусть на прямом произведении $A \times B = \{(u, v)\}$ многообразий A и B система дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = U(u, v), \quad \dot{v} = V(v) \quad (6.2)$$

обратима относительно инволюции $G : (u, v) \mapsto (G_A(u), G_B(v))$, где G_A и G_B — инволюции многообразий A и B соответственно. Предположим, что $\text{Fix } G_B$ состоит из единственной точки $v^0 \in B$. Пусть система (6.2) и инволюция G имеют общий инвариантный тор, движение по которому квазипериодично. Тогда $V(v^0) = 0$.

Доказательство предложения 6.2, в свою очередь, основано на следующей лемме.

Лемма 6.1. Пусть $F : \mathbb{T}^n \rightarrow K$ — сюръективное непрерывное отображение тора \mathbb{T}^n на компактное топологическое пространство. Пусть \mathfrak{g}^t — квазипериодический поток на \mathbb{T}^n , т. е. $\mathfrak{g}^t(\phi) = \phi + \omega t$ ($\phi \in \mathbb{T}^n$), где ω — фиксированный вектор из \mathbb{R}^n с рационально независимыми компонентами. Пусть также \mathfrak{G}^t — непрерывное действие группы \mathbb{R} на K . Предположим, что $F \circ \mathfrak{g}^t = \mathfrak{G}^t \circ F$. Тогда K — тор, размерность которого не превосходит n , а \mathfrak{G}^t квазипериодично.

Лемма 6.1 вряд ли является новой, однако автору найти ее в литературе не удалось.

Сначала выведем предложение 6.2 из леммы 6.1. Предположим, что у системы (6.2) и инволюции G есть общий инвариантный n -мерный тор $F(\mathbb{T}^n)$, где $F = (F_A, F_B)$ — вложение \mathbb{T}^n в $A \times B$ (F_A и F_B отображают \mathbb{T}^n в A и B соответственно). Предположим, что движение на торе $F(\mathbb{T}^n)$ — квазипериодический поток $F \circ \mathfrak{g}^t \circ F^{-1}$, где \mathfrak{g}^t — квазипериодический поток на \mathbb{T}^n . Поскольку $F(\mathbb{T}^n)$ инвариантно относительно G , для любого $\phi \in \mathbb{T}^n$ существует такое $\phi' \in \mathbb{T}^n$, что $F_A(\phi') = G_A(F_A(\phi))$ и $F_B(\phi') = G_B(F_B(\phi))$. Следовательно, множества $F_A(\mathbb{T}^n)$ и $F_B(\mathbb{T}^n)$ инвариантны относительно инволюций G_A и G_B соответственно. Также понятно, что $F_B(\mathbb{T}^n)$ является инвариантным множеством уравнения $\dot{v} = V(v)$ и что $F_B \circ \mathfrak{g}^t = \mathfrak{G}^t \circ F_B$, где \mathfrak{G}^t — ограничение потока векторного поля V на $F_B(\mathbb{T}^n)$. Согласно лемме 6.1, $F_B(\mathbb{T}^n)$ является k -мерным тором для некоторого k ($0 \leq k \leq n$), а \mathfrak{G}^t — квазипериодический поток на $F_B(\mathbb{T}^n)$. Согласно лемме 1.1, тор $F_B(\mathbb{T}^n)$ содержит 2^k неподвижных точек инволюции G_B . Так как $\text{Fix } G_B = \{v^0\}$, мы приходим к выводу, что $k = 0$ и $F_B(\mathbb{T}^n) = \{v^0\}$. Тогда из инвариантности множества $F_B(\mathbb{T}^n)$ относительно потока векторного поля V вытекает, что $V(v^0) = 0$.

Осталось доказать лемму 6.1. Пусть $\Lambda = F^{-1}(F(0)) \subset \mathbb{T}^n$. Тогда Λ — замкнутое подмножество \mathbb{T}^n . Наша ближайшая цель — убедиться, что $F(\phi^1) = F(\phi^2)$ тогда и только тогда, когда $\phi^1 - \phi^2 \in \Lambda$. Действительно, рассмотрим такую последовательность $\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ вещественных чисел, что $\lim_{j \rightarrow \infty} \omega t_j = \phi^2$ на \mathbb{T}^n . Если $F(\phi^1) = F(\phi^2)$, то

$$F(\phi^1 - \phi^2) = \lim_{j \rightarrow \infty} F(\phi^1 - \omega t_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathfrak{G}^{-t_j}(F(\phi^1)) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathfrak{G}^{-t_j}(F(\phi^2)) = \lim_{j \rightarrow \infty} F(\phi^2 - \omega t_j) = F(0),$$

а значит, $\phi^1 - \phi^2 \in \Lambda$. С другой стороны, если $\phi^1 - \phi^2 \in \Lambda$, т. е. $F(\phi^1 - \phi^2) = F(0)$, то

$$F(\phi^1) = \lim_{j \rightarrow \infty} F(\phi^1 - \phi^2 + \omega t_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathfrak{G}^{t_j}(F(\phi^1 - \phi^2)) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathfrak{G}^{t_j}(F(0)) = \lim_{j \rightarrow \infty} F(\omega t_j) = F(\phi^2).$$

В частности, если $\phi^1 \in \Lambda$ и $\phi^2 \in \Lambda$, то $F(\phi^1 + \phi^2) = F(\phi^1) = F(0)$, так что $\phi^1 + \phi^2 \in \Lambda$, и $F(-\phi^1) = F(0)$, так что $-\phi^1 \in \Lambda$. Таким образом, Λ — замкнутая подгруппа тора \mathbb{T}^n , и существует естественная биекция $\mathbb{T}^n / \Lambda \rightarrow F(\mathbb{T}^n)$.

Теперь можно применить теорему двойственности Понтрягина для локально компактных абелевых групп (известную также как теорема двойственности Понтрягина—ван Кампена). Нужные нам следствия из этой фундаментальной теоремы, равно как и их частный случай, касающийся \mathbb{T}^n , можно найти, например, в [34, Prop. 38] (см. также [6]) и [54, Cor. 1.2.2, p. 706]. Согласно теореме двойственности Понтрягина, замкнутые подгруппы в \mathbb{T}^n характеризуются их аннуляторами в группе характеров $X^*(\mathbb{T}^n) \approx \mathbb{Z}^n$, т. е. в группе всех непрерывных гомоморфизмов $\chi : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:

$$\chi(\phi_1, \dots, \phi_n) = m_1 \phi_1 + \dots + m_n \phi_n, \quad m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$$

(группы \mathbb{T}^n и \mathbb{Z}^n двойственны друг другу). Иными словами, в \mathbb{Z}^n существует такая подгруппа L , что

$$\Lambda = \{\phi \in \mathbb{T}^n \mid m_1 \phi_1 + \dots + m_n \phi_n = 0 \ \forall (m_1, \dots, m_n) \in L\}.$$

С другой стороны, существует такая матрица $Q \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$, что

$$LQ = \left\{ \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-k}, q_1 r_1, \dots, q_k r_k \right) \mid r_1, \dots, r_k \in \mathbb{Z} \right\},$$

где $q_1 \geq \dots \geq q_k \geq 1$ — натуральные числа (здесь элементы \mathbb{Z}^n рассматриваются как вектор-строки и $0 \leq k \leq n$). Ранг решетки L равен k . На торе \mathbb{T}^n введем новую систему координат $\psi = Q^{-1}\phi$ (здесь точки тора \mathbb{T}^n рассматриваются как вектор-столбцы). В новых координатах

$$\Lambda = \left\{ (\psi_1, \dots, \psi_{n-k}, 2\pi p_1/q_1, \dots, 2\pi p_k/q_k) \right\},$$

где

$$0 \leq p_1 \leq q_1 - 1, \dots, 0 \leq p_k \leq q_k - 1; \quad \psi_1, \dots, \psi_{n-k} \in \mathbb{S}^1, \quad p_1, \dots, p_k \in \mathbb{Z}_+,$$

и $\dim \Lambda = n - k$. Кроме того, в новых координатах поток \mathfrak{g}^t на \mathbb{T}^n задается уравнением

$$\dot{\psi} = Q^{-1}\dot{\phi} = Q^{-1}\omega = \varpi = (\varpi_1, \dots, \varpi_n).$$

Множество $K = F(\mathbb{T}^n)$ гомеоморфно фактору $\mathbb{T}^n/\Lambda \approx \mathbb{T}^k$. Естественные координаты на факторе \mathbb{T}^n/Λ , а значит, и на множестве $F(\mathbb{T}^n)$, — это координаты

$$(q_1 \psi_{n-k+1}, \dots, q_k \psi_n) \in \mathbb{T}^k.$$

Поток \mathfrak{G}^t на k -мерном торе $F(\mathbb{T}^n)$ квазипериодичен с вектором частот

$$(q_1 \varpi_{n-k+1}, \dots, q_k \varpi_n) \in \mathbb{R}^k,$$

что и завершает доказательство леммы 6.1.

Замечание 6.1. Лемма 6.1, по-видимому, связана с теорией минимальных изометрических систем (ср. [53, Prop. 2.6.7]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. — М.: Наука, 1980.
2. Де ла Яве Р. Введение в КАМ-теорию. — Москва—Ижевск: Ин-т комп. иссл., 2003.
3. Коннер П., Флорд Э. Гладкие периодические отображения. — М.: Мир, 1969.
4. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980.
5. Мозер Ю. О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды// Усп. мат. наук. — 1969. — 24, вып. 2. — С. 165–211.
6. Моррис С. Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп. — М.: Мир, 1980.
7. Севрюк М. Б. Линейные обратимые системы и их версальные деформации// Тр. сем. им. И. Г. Петровского — 1991. — вып. 15. — С. 33–54.
8. Севрюк М. Б. Некоторые проблемы теории КАМ: условно-периодические движения в типичных системах// Усп. мат. наук. — 1995. — 50, вып. 2. — С. 111–124.
9. Севрюк М. Б. Частичное сохранение частот и показателей Флоке в теории КАМ// Тр. МИАН. — 2007. — 259. — С. 174–202.
10. Arnold V. I., Kozlov V. V., Neishtadt A. I. Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics. — Berlin: Springer-Verlag, 2006.¹
11. Bredon G. E. Introduction to Compact Transformation Groups. — New York: Academic Press, 1972.
12. Broer H. W., Ciocci M. C., Hanßmann H., Vanderbauwhede A. Quasi-periodic stability of normally resonant tori// Phys. D. — 2009. — 238, № 3. — С. 309–318.
13. Broer H. W., Hoo J., Naudot V. Normal linear stability of quasi-periodic tori// J. Differ. Equ. — 2007. — 232, № 2. — С. 355–418.
14. Broer H. W., Huitema G. B. Unfoldings of quasi-periodic tori in reversible systems// J. Dynam. Differ. Equ. — 1995. — 7, № 1. — С. 191–212.
15. Broer H. W., Huitema G. B., Sevryuk M. B. Families of quasi-periodic motions in dynamical systems depending on parameters// В сб.: «Nonlinear Dynamical Systems and Chaos». — Basel: Birkhäuser, 1996. — С. 171–211.
16. Broer H. W., Huitema G. B., Sevryuk M. B. Quasi-Periodic Motions in Families of Dynamical Systems. Order amidst Chaos. — Berlin: Springer, 1996.

¹Существующие русские издания этой книги, даже последнее: Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. — М.: Едиториал УРСС, 2017 — гораздо менее полны.

17. Broer H. W., Huitema G. B., Takens F. Unfoldings of quasi-periodic tori// Mem. Am. Math. Soc. — 1990. — 83, № 421. — С. 1–81.
18. Broer H. W., Sevryuk M. B. KAM theory: Quasi-periodicity in dynamical systems// В сб.: «Handbook of Dynamical Systems», Vol. 3. — Amsterdam: Elsevier, 2010. — С. 249–344.
19. Calleja R. C., Celletti A., de la Llave R. Domains of analyticity and Lindstedt expansions of KAM tori in some dissipative perturbations of Hamiltonian systems// Nonlinearity. — 2017. — 30, № 8. — С. 3151–3202.
20. Chow S.-N., Li Y., Yi Y. Persistence of invariant tori on submanifolds in Hamiltonian systems// J. Nonlinear Sci. — 2002. — 12, № 6. — С. 585–617.
21. Conner P. E., Floyd E. E. Differentiable Periodic Maps. — New York: Academic Press, Berlin: Springer, 1964.
22. De la Llave R. A tutorial on KAM theory// Proc. Symp. Pure Math. — 2001. — 69. — С. 175–292.
23. Dumas H. S. The KAM Story. A Friendly Introduction to the Content, History, and Significance of Classical Kolmogorov–Arnold–Moser Theory. — Hackensack: World Scientific, 2014.¹
24. González-Enríquez A., Haro Á., de la Llave R. Singularity theory for non-twist KAM tori// Mem. Am. Math. Soc. — 2014. — 227, № 1067. — С. 1–115.
25. Hanßmann H. Non-degeneracy conditions in KAM theory// Indag. Math. (N. S.). — 2011. — 22, № 3-4. — С. 241–256.
26. Haro Á., Canadell M., Figueras J.-L., Luque A., Mondelo J.-M. The Parameterization Method for Invariant Manifolds. From Rigorous Results to Effective Computations. — Cham: Springer, 2016.
27. Hoveijn I. Versal deformations and normal forms for reversible and Hamiltonian linear systems// J. Differ. Equ. — 1996. — 126, № 2. — С. 408–442.
28. Kong Y., Xu J. Persistence of lower dimensional hyperbolic tori for reversible system// Appl. Math. Comput. — 2014. — 236. — С. 408–421.
29. Lamb J. S. W., Roberts J. A. G. Time-reversal symmetry in dynamical systems: a survey// Phys. D. — 1998. — 112, № 1-2. — С. 1–39.
30. Li Y., Yi Y. Persistence of hyperbolic tori in Hamiltonian systems// J. Differ. Equ. — 2005. — 208, № 2. — С. 344–387.
31. Liu Zh. Persistence of lower dimensional invariant tori on sub-manifolds in Hamiltonian systems// Nonlinear Anal. — 2005. — 61, № 8. — С. 1319–1342.
32. Marsden J. E., McCracken M. The Hopf Bifurcation and Its Applications. — New York: Springer, 1976.
33. Montgomery D., Zippin L. Topological Transformation Groups. — Huntington: R. E. Krieger Publishing, 1974.
34. Morris S. A. Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1977.
35. Moser J. Convergent series expansions for quasi-periodic motions// Math. Ann. — 1967. — 169, № 1. — С. 136–176.
36. Quispel G. R. W., Sevryuk M. B. KAM theorems for the product of two involutions of different types// Chaos. — 1993. — 3, № 4. — С. 757–769.
37. Roberts J. A. G., Quispel G. R. W. Chaos and time-reversal symmetry. Order and chaos in reversible dynamical systems// Phys. Rep. — 1992. — 216, № 2-3. — С. 63–177.
38. Rüssmann H. Invariant tori in non-degenerate nearly integrable Hamiltonian systems// Regul. Chaotic Dyn. — 2001. — 6, № 2. — С. 119–204.
39. Rüssmann H. Addendum to «Invariant tori in non-degenerate nearly integrable Hamiltonian systems»// Regul. Chaotic Dyn. — 2005. — 10, № 1. — С. 21–31.
40. Sevryuk M. B. Reversible Systems. — Berlin: Springer, 1986.
41. Sevryuk M. B. The iteration-approximation decoupling in the reversible KAM theory// Chaos. — 1995. — 5, № 3. — С. 552–565.
42. Sevryuk M. B. Excitation of elliptic normal modes of invariant tori in Hamiltonian systems// В сб.: «Topics in Singularity Theory». — Providence: Am. Math. Soc., 1997. — С. 209–218.
43. Sevryuk M. B. Excitation of elliptic normal modes of invariant tori in volume preserving flows// В сб.: «Global Analysis of Dynamical Systems». — Bristol: Inst. Phys., 2001. — С. 339–352.
44. Sevryuk M. B. Partial preservation of frequencies in KAM theory// Nonlinearity. — 2006. — 19, № 5. — С. 1099–1140.
45. Sevryuk M. B. Invariant tori in quasi-periodic non-autonomous dynamical systems via Herman’s method// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2007. — 18, № 2-3. — С. 569–595.
46. Sevryuk M. B. KAM tori: persistence and smoothness// Nonlinearity. — 2008. — 21, № 10. — С. T177–T185.

¹Готовится русский перевод в издательстве «Ижевский институт компьютерных исследований».

47. *Sevryuk M. B.* The reversible context 2 in KAM theory: the first steps// Regul. Chaotic Dyn. — 2011. — 16, № 1-2. — С. 24–38.
48. *Sevryuk M. B.* KAM theory for lower dimensional tori within the reversible context 2// Mosc. Math. J. — 2012. — 12, № 2. — С. 435–455.
49. *Sevryuk M. B.* Quasi-periodic perturbations within the reversible context 2 in KAM theory// Indag. Math. (N. S.). — 2012. — 23, № 3. — С. 137–150.
50. *Sevryuk M. B.* Whitney smooth families of invariant tori within the reversible context 2 of KAM theory// Regul. Chaotic Dyn. — 2016. — 21, № 6. — С. 599–620.
51. *Sevryuk M. B.* Herman's approach to quasi-periodic perturbations in the reversible KAM context 2// Mosc. Math. J. — 2017. — 17, № 4. — С. 803–823.
52. *Shih C. W.* Normal forms and versal deformations of linear involutive dynamical systems// Chinese J. Math. — 1993. — 21, № 4. — С. 333–347.
53. *Tao T.* Poincaré's Legacies, Pages from Year Two of a Mathematical Blog. Part I. — Providence: Am. Math. Soc., 2009.
54. *Tits J.* Œuvres/Collected Works. Vol. IV. — Zürich: Eur. Math. Soc., 2013.
55. *Wagener F.* A parametrised version of Moser's modifying terms theorem// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S. — 2010. — 3, № 4. — С. 719–768.
56. *Wang X., Xu J., Zhang D.* Persistence of lower dimensional elliptic invariant tori for a class of nearly integrable reversible systems// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. — 2010. — 14, № 3. — С. 1237–1249.
57. *Wang X., Xu J., Zhang D.* A new KAM theorem for the hyperbolic lower dimensional tori in reversible systems// Acta Appl. Math. — 2016. — 143. — С. 45–61.
58. *Wang X., Xu J., Zhang D.* A KAM theorem for the elliptic lower dimensional tori with one normal frequency in reversible systems// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2017. — 37, № 4. — С. 2141–2160.
59. *Xu J., Lu X.* General KAM theorems and their applications to invariant tori with prescribed frequencies// Regul. Chaotic Dyn. — 2016. — 21, № 1. — С. 107–125.
60. *Yoccoz J.-C.* Travaux de Herman sur les tores invariants// Astérisque. — 1992. — 206. — С. 311–344.
61. *Zhang D., Xu J., Wu H.* On invariant tori with prescribed frequency in Hamiltonian systems// Adv. Nonlinear Stud. — 2016. — 16, № 4. — С. 719–735.

Михаил Борисович Севрюк

Институт энергетических проблем химической физики им. В. Л. Тальрозе РАН,

РФ, 119334, г. Москва, Ленинский проспект, д. 38, корп. 2

E-mail: 2421584@mail.ru, sevryuk@mccme.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-3-516-541

UDC 517.925.52

Partial Preservation of Frequencies and Floquet Exponents of Invariant Tori in the Reversible KAM Context 2

© 2017 **M. B. Sevryuk**

Abstract. We consider the persistence of smooth families of invariant tori in the reversible context 2 of KAM theory under various weak nondegeneracy conditions via Herman's method. The reversible KAM context 2 refers to the situation where the dimension of the fixed point manifold of the reversing involution is less than half the codimension of the invariant torus in question. The nondegeneracy conditions we employ ensure the preservation of any prescribed subsets of the frequencies of the unperturbed tori and of their Floquet exponents (the eigenvalues of the coefficient matrix of the variational equation along the torus).

REFERENCES

1. G. E. Bredon, *Vvedenie v teoriyu kompaktnykh grupp preobrazovaniy* [Introduction to Compact Transformation Groups], Nauka, Moscow, 1980 (Russian translation).

2. R. de la Llave, *Vvedenie v KAM-teoriyu* [A tutorial on KAM theory], In-t komp. issl., Moscow–Izhevsk, 2003 (Russian translation).
3. P. E. Conner and E. E. Floyd, *Gladkie periodicheskie otobrazheniya* [Smooth Periodic Mappings], Mir, Moscow, 1969 (Russian translation).
4. J. E. Marsden and M. McCracken, *Bifurkatsiya rozhdeniya tsikla i ee prilozheniya* [The Hopf Bifurcation and Its Applications], Mir, Moscow, 1980 (Russian translation).
5. J. Moser, “O razlozhenii uslovno-periodicheskikh dvizheniy v skhodyashchiesya stepennye ryady” [On the expansion of quasi-periodic motions in convergent power series], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1969, **24**, vyp. 2, 165–211 (in Russian).
6. S. Morris, *Dvoystvennost’ Pontryagina i stroenie lokal’no kompaktnykh abelevykh grupp* [Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups], Mir, Moscow, 1980 (Russian translation).
7. M. B. Sevryuk, “Lineynye obratimye sistemy i ikh versal’nye deformatsii” [Linear reversible systems and their versal deformations], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 1991, vyp. 15, 33–54 (in Russian).
8. M. B. Sevryuk, “Nekotorye problemy teorii KAM: uslovno-periodicheskie dvizheniya v tipichnykh sistemakh” [Some problems of the KAM-theory: conditionally-periodic motions in typical systems], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1995, **50**, vyp. 2, 111–124 (in Russian).
9. M. B. Sevryuk, “Chastichnoe sokhranenie chastot i pokazateley Floke v teorii KAM” [Partial preservation of frequencies and Floquet exponents in KAM theory], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2007, **259**, 174–202 (in Russian).
10. V. I. Arnold, V. V. Kozlov, and A. I. Neishtadt, *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
11. G. E. Bredon, *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, New York, 1972.
12. H. W. Broer, M. C. Ciocci, H. Hanßmann, and A. Vanderbauwhede, “Quasi-periodic stability of normally resonant tori,” *Phys. D*, 2009, **238**, No. 3, 309–318.
13. H. W. Broer, J. Hoo, and V. Naudot, “Normal linear stability of quasi-periodic tori,” *J. Differ. Equ.*, 2007, **232**, No. 2, 355–418.
14. H. W. Broer and G. B. Huitema, “Unfoldings of quasi-periodic tori in reversible systems,” *J. Dynam. Differ. Equ.*, 1995, **7**, No. 1, 191–212.
15. H. W. Broer, G. B. Huitema, and M. B. Sevryuk, “Families of quasi-periodic motions in dynamical systems depending on parameters,” In: *Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Birkhäuser, Basel, 1996, 171–211.
16. H. W. Broer, G. B. Huitema, and M. B. Sevryuk, *Quasi-Periodic Motions in Families of Dynamical Systems. Order amidst Chaos*, Springer, Berlin, 1996.
17. H. W. Broer, G. B. Huitema, and F. Takens, “Unfoldings of quasi-periodic tori,” *Mem. Am. Math. Soc.*, 1990, **83**, No. 421, 1–81.
18. H. W. Broer and M. B. Sevryuk “KAM theory: Quasi-periodicity in dynamical systems,” In: *Handbook of Dynamical Systems, Vol. 3*, Elsevier, Amsterdam, 2010, 249–344.
19. R. C. Calleja, A. Celletti, and R. de la Llave, “Domains of analyticity and Lindstedt expansions of KAM tori in some dissipative perturbations of Hamiltonian systems,” *Nonlinearity*, 2017, **30**, No. 8, 3151–3202.
20. S.-N. Chow, Y. Li, and Y. Yi, “Persistence of invariant tori on submanifolds in Hamiltonian systems,” *J. Nonlinear Sci.*, 2002, **12**, No. 6, 585–617.
21. P. E. Conner and E. E. Floyd, *Differentiable Periodic Maps*, Academic Press, New York; Springer, Berlin, 1964.
22. R. De la Llave, “A tutorial on KAM theory,” *Proc. Symp. Pure Math.*, 2001, **69**, 175–292.
23. H. S. Dumas, *The KAM Story. A Friendly Introduction to the Content, History, and Significance of Classical Kolmogorov–Arnold–Moser Theory*, World Scientific, Hackensack, 2014.
24. A. González-Enríquez, Haro À., and R. de la Llave, “Singularity theory for non-twist KAM tori,” *Mem. Am. Math. Soc.*, 2014, **227**, No. 1067, 1–115.
25. H. Hanßmann, “Non-degeneracy conditions in KAM theory,” *Indag. Math. (N.S.)*, 2011, **22**, No. 3-4, 241–256.
26. Haro À., M. Canadell, J.-L. Figueras, A. Luque, and J.-M. Mondelo, *The Parameterization Method for Invariant Manifolds. From Rigorous Results to Effective Computations*, Springer, Cham, 2016.
27. I. Hoveijn, “Versal deformations and normal forms for reversible and Hamiltonian linear systems,” *J. Differ. Equ.*, 1996, **126**, No. 2, 408–442.

28. Y. Kong and J. Xu, “Persistence of lower dimensional hyperbolic tori for reversible system,” *Appl. Math. Comput.*, 2014, **236**, 408–421.
29. J. S. W. Lamb and J. A. G. Roberts, “Time-reversal symmetry in dynamical systems: a survey,” *Phys. D*, 1998, **112**, No. 1-2, 1–39.
30. Y. Li and Y. Yi, “Persistence of hyperbolic tori in Hamiltonian systems,” *J. Differ. Equ.*, 2005, **208**, No. 2, 344–387.
31. Zh. Liu, “Persistence of lower dimensional invariant tori on sub-manifolds in Hamiltonian systems,” *Nonlinear Anal.*, 2005, **61**, No. 8, 1319–1342.
32. J. E. Marsden and M. McCracken, *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Springer, New York, 1976.
33. D. Montgomery and L. Zippin, *Topological Transformation Groups*, R. E. Krieger Publishing, Huntington, 1974.
34. S. A. Morris, *Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1977.
35. J. Moser, “Convergent series expansions for quasi-periodic motions,” *Math. Ann.*, 1967, **169**, No. 1, 136–176.
36. G. R. W. Quispel and M. B. Sevryuk, “KAM theorems for the product of two involutions of different types,” *Chaos*, 1993, **3**, No. 4, 757–769.
37. J. A. Roberts and G. R. W. Quispel, “Chaos and time-reversal symmetry. Order and chaos in reversible dynamical systems,” *Phys. Rep.*, 1992, **216**, No. 2-3, 63–177.
38. H. Rüssmann, “Invariant tori in non-degenerate nearly integrable Hamiltonian systems,” *Regul. Chaotic Dyn.*, 2001, **6**, No. 2, 119–204.
39. H. Rüssmann, “Addendum to «Invariant tori in non-degenerate nearly integrable Hamiltonian systems»,” *Regul. Chaotic Dyn.*, 2005, **10**, No. 1, 21–31.
40. M. B. Sevryuk, *Reversible Systems*, Springer, Berlin, 1986.
41. M. B. Sevryuk, “The iteration-approximation decoupling in the reversible KAM theory,” *Chaos*, 1995, **5**, No. 3, 552–565.
42. M. B. Sevryuk, “Excitation of elliptic normal modes of invariant tori in Hamiltonian systems,” In: *Topics in Singularity Theory*, Am. Math. Soc., Providence, 1997, 209–218.
43. M. B. Sevryuk, “Excitation of elliptic normal modes of invariant tori in volume preserving flows,” In: *Global Analysis of Dynamical Systems*, Inst. Phys., Bristol, 2001, 339–352.
44. M. B. Sevryuk, “Partial preservation of frequencies in KAM theory,” *Nonlinearity*, 2006, **19**, No. 5, 1099–1140.
45. M. B. Sevryuk, “Invariant tori in quasi-periodic non-autonomous dynamical systems via Herman’s method,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2007, **18**, No. 2-3, 569–595.
46. M. B. Sevryuk, “KAM tori: persistence and smoothness,” *Nonlinearity*, 2008, **21**, No. 10, T177–T185.
47. M. B. Sevryuk, “The reversible context 2 in KAM theory: the first steps,” *Regul. Chaotic Dyn.*, 2011, **16**, No. 1-2, 24–38.
48. M. B. Sevryuk, “KAM theory for lower dimensional tori within the reversible context 2,” *Mosc. Math. J.*, 2012, **12**, No. 2, 435–455.
49. M. B. Sevryuk, “Quasi-periodic perturbations within the reversible context 2 in KAM theory,” *Indag. Math. (N. S.)*, 2012, **23**, No. 3, 137–150.
50. M. B. Sevryuk, “Whitney smooth families of invariant tori within the reversible context 2 of KAM theory,” *Regul. Chaotic Dyn.*, 2016, **21**, No. 6, 599–620.
51. M. B. Sevryuk, “Herman’s approach to quasi-periodic perturbations in the reversible KAM context 2,” *Mosc. Math. J.*, 2017, **17**, No. 4, 803–823.
52. C. W. Shih, “Normal forms and versal deformations of linear involutive dynamical systems,” *Chinese J. Math.*, 1993, **21**, No. 4, 333–347.
53. T. Tao, *Poincaré’s Legacies, Pages from Year Two of a Mathematical Blog. Part I*, Am. Math. Soc., Providence, 2009.
54. J. Tits, *Œuvres/Collected Works. Vol. IV*, Eur. Math. Soc., Zürich, 2013.
55. F. Wagener, “A parametrised version of Moser’s modifying terms theorem,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 2010, **3**, No. 4, 719–768.
56. X. Wang, J. Xu, and D. Zhang, “Persistence of lower dimensional elliptic invariant tori for a class of nearly integrable reversible systems,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2010, **14**, No. 3, 1237–1249.
57. X. Wang, J. Xu, and D. Zhang, “A new KAM theorem for the hyperbolic lower dimensional tori in reversible systems,” *Acta Appl. Math.*, 2016, **143**, 45–61.

58. X. Wang, J. Xu, D. Zhang, “A KAM theorem for the elliptic lower dimensional tori with one normal frequency in reversible systems,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2017, **37**, No. 4, 2141–2160.
59. J. Xu and X. Lu, “General KAM theorems and their applications to invariant tori with prescribed frequencies,” *Regul. Chaotic Dyn.*, 2016, **21**, No. 1, 107–125.
60. J.-C. Yoccoz, “Travaux de Herman sur les tores invariants,” *Astérisque*, 1992, **206**, 311–344.
61. D. Zhang, J. Xu, and H. Wu, “On invariant tori with prescribed frequency in Hamiltonian systems,” *Adv. Nonlinear Stud.*, 2016, **16**, No. 4, 719–735.

Mikhail B. Sevryuk

V. L. Talroze Institute of Energy Problems of Chemical Physics of the Russia Academy of Sciences,
38 build. 2 Leninskii Prospect, 119334 Moscow, Russia

E-mail: 2421584@mail.ru, sevryuk@mccme.ru

