РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 63, № 2, 2017

Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2
http://journals.rudn.ru/cmfd

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print)
4 выпуска в год
http://journals.rudn.ru/cmfd
Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.
Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.
Индексируется в международных базах данных научных публикаций *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.
Языки: русский, английский.
Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты. Объем статьи, занимающий целый том, должен составлять 140–170 страниц в стиле нашего журнала.

Правила оформления статей, архив публикаций и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала на Общероссийском математическом портале: http://www.mathnet.ru/cmfd.

Редактор: *Е. И. Галахов*
Компьютерная верстка: *Е. М. Варфоломеев*

Адрес редакции:
115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: journal.cmfd@gmail.com

Подписано в печать 23.06.2017. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 21,86. Тираж 150 экз. Заказ 1100.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов» (РУДН)
117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН
115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 952-04-41; e-mail: ipk@rudn.university

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 63, No. 2, 2017

Proceedings of the Crimean Autumn Mathematical School-Symposium

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2
http://journals.rudn.ru/cmfd

Founded in 2003
Founder: PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS
Published by the Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print)
4 issues per year
http://journals.rudn.ru/cmfd
Reviewed in *MathSciNet* and *Zentralblatt Math*.
Languages: Russian, English.
English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results. Occupying the whole volume, an article should make up 140–170 pages in the format of the journal.

Guidelines for authors, archive of issues, and other information can be found at the journal's website at *All-Russian Mathematical Portal*: http://www.mathnet.ru/eng/cmfd.

Editor: ***E. I. Galakhov***
Computer design: ***E. M. Varfolomeev***
Address of the Editorial Office:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: journal.cmfd@gmail.com
Printing run 150 copies.
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia
Printed at RUDN Publishing House:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: ipk@rudn.university

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 2 (2017). С. 191–222

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-191-222 УДК 517.938

ПОСТРОЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ Ω-УСТОЙЧИВЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ НА 2- И 3-МНОГООБРАЗИЯХ

© 2017 г. **В. З. ГРИНЕС, О. В. ПОЧИНКА**

Аннотация. Настоящий обзор посвящен изложению результатов, связанных с вопросами существования энергетической функции у дискретных динамических систем, а также с техникой построения таких функций для некоторых классов Ω-устойчивых и структурно устойчивых диффеоморфизмов на многообразиях размерности 2 и 3.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Пусть M — гладкое компактное ориентируемое n-многообразие. *Функцией Ляпунова* динамической системы (потока или каскада), заданной на M, называется непрерывная функция $\varphi : M \to \mathbb{R}$, которая постоянна на каждой цепной компоненте системы и убывает вдоль ее орбит вне цепно рекуррентного множества. В силу результатов Ч. Конли [19] такая функция существует для любой динамической системы, а сам факт существования носит название «Фундаментальная теорема динамических систем». В разделе 1 изложена идея построения функции Ляпунова для дискретной динамической системы. Следует отметить, что сам Ч. Конли дополнительно требовал, чтобы образ цепно рекуррентного множества в силу φ был нигде не плотен на прямой, а значения функции φ на различных компонентах цепно рекуррентного множества были различны, и называл такую функцию *полной функцией Ляпунова*. Числа, принадлежащие образу цепно рекуррентного множества, Ч. Конли назвал критическими значениями функции φ. Однако для гладкой функции ее критическим значением принято называть образ критической точки (точки, где градиент функции обращается в ноль), которая, вообще говоря, не обязана принадлежать цепно рекуррентному множеству. В связи с этим, наряду с функцией Ляпунова, в гладкой категории используется понятие *энергетической функции*, т. е. гладкой функции Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно рекуррентным множеством системы.

Первые результаты по построению энергетической функции принадлежат С. Смейлу [37], который в 1961 году доказал существование энергетической функции Морса у градиентноподобных потоков. К. Мейер [30] в 1968 году обобщил этот результат, построив энергетическую функцию Морса—Ботта для произвольного потока Морса—Смейла (см. раздел 2).

Как заметил в 1985 году Дж. Фрэнкс [21], применение результатов В. Вильсона [39] к конструкции К. Конли дает существование энергетической функции у любого гладкого потока с гиперболическим цепно рекуррентным множеством. Тогда с помощью надстройки можно построить гладкую функцию Ляпунова для любого диффеоморфизма с гиперболическим цепно рекуррентным множеством. Но построенная таким образом функция может иметь критические точки, которые не являются цепно рекуррентными, и, следовательно, функция Ляпунова не является энергетической. Встает вопрос о том, какие дискретные динамические системы допускают энергетические функции. Первые результаты в этом направлении были получены Д. Пикстоном в 1977 году, в своей работе [32] он доказал существование энергетической функции Морса у любого диффеоморфизма Морса—Смейла на поверхности. В разделе 3 мы приводим обобщение результата Пикстона на Ω-устойчивые 2-диффеоморфизмы с конечным неблуждающим множеством, энергетическая функция Морса для таких диффеоморфизмов была построена в работе [11]. В той же работе [32] Д. Пикстон построил диффеоморфизм Морса—Смейла на трехмерной сфере, не обладающий энергетической функцией Морса. Также в разделе 3 дается экспозиция результатов работ [23, 24] и книги [26] о необходимых и достаточных условиях существования энергетической функции Морса у трехмерных диффеоморфизмов Морса—Смейла. Кроме того, мы приводим результаты работы [5], в которой доказано, что в примере Пикстона минимальное число критических точек функции Ляпунова, отличных от периодических точек каскада, равно двум.

Из результатов выше следует, что не все диффеоморфизмы даже с регулярной динамикой имеют энергетическую функцию. Тем более удивительным является факт наличия энергетической функции у некоторых дискретных динамических систем с хаотическим поведением, доказанный в работах [4, 7, 8]. Технически построение такой функции базируется на процедуре сглаживания непрерывного отображения, приведенной в разделе 4. В части 4 энергетическая функция конструируется для некоторых классов Ω-устойчивых 2- и 3-диффеоморфизмов с нетривиальными базисными множествами коразмерности один.

1. Фундаментальная теорема динамических систем

В этом разделе мы даем краткое изложение основной конструкции работы Ч. Конли [19], лежащей в основе построения функции Ляпунова для произвольной динамической системы (потока или каскада), заданной на компактном метрическом пространстве M с метрикой d. Оригинальная конструкция Конли сделана для потоков, при построении функции Ляпунова для каскадов Конли использовал переход к надстройке. Однако идея Конли применима к дискретным динамическим системам непосредственно, без перехода к надстройке, и была изложена Дж. Фрэнксом в [22]. Приведем схему построения функции Ляпунова для каскада, порожденного гомеоморфизмом $f : M \to M$, следуя Фрэнксу.

Для $\varepsilon > 0$ набор точек $x_1, x_2, \dots, x_n$ такой, что

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n-1,$$

называется ε-цепью гомеоморфизма f.

Точка $x \in M$ называется *цепно рекуррентной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число n (зависящее от ε) и ε-цепь $x_1, x_2, \dots, x_n$ такая, что $x_1 = x_n = x$. Множество R_f всех цепно рекуррентных точек называется *цепно рекуррентным множеством* диффеоморфизма f.

Непосредственной проверкой устанавливается, что множество R_f является f-инвариантным и компактным.

Введем на цепно рекуррентном множестве R_f отношение эквивалентности $\sim$ правилом: $x \sim y$ для $x, y \in R_f$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существуют ε-цепи от x к y и от y к x. Класс эквивалентности точек из R_f относительно введенного отношения эквивалентности называется *цепной компонентой*.

Определение 1.1. Функцией Ляпунова для гомеоморфизма f называется непрерывная функция $\varphi : M \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

1. если $x \notin R_f$, то $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$;
2. если $x, y \in R_f$, то $\varphi(x) = \varphi(y)$ тогда и только тогда, когда x и y лежат в одной цепной компоненте;
3. $\varphi(R_f)$ — компактное нигде не плотное подмножество прямой $\mathbb{R}$.

Компактное множество $A \subset M$ называется *аттрактором гомеоморфизма* f, если существует его открытая окрестность U, называемая *захватывающей*, такая, что $f(cl(U)) \subset U$ и $\bigcap\limits_{n \geqslant 0} f^n(cl(U)) = A$. Если $V = M \setminus cl(U)$ и $A^* = \bigcap\limits_{n \geqslant 0} f^{-n}(cl(V))$, тогда A^* — аттрактор для f^{-1} с захватывающей окрестностью V. Множество A^* называется *репеллером, дуальным к аттрактору* A. Из построения ясно, что A^* не зависит от выбора захватывающей окрестности U аттрактора A и $f(A) = A$, $f(A^*) = A^*$. Кроме того, из определения аттрактора (репеллера) следует, что само пространство M является аттрактором (репеллером) гомеоморфизма f, дуальным репеллером (аттрактором) к которому является пустое множество.

Предложение 1.1 (см. [22, Lemma 1.2, 1.3]). *Пусть $f : M \to M$ — гомеоморфизм. Тогда*

1. *Множество аттракторов гомеоморфизма f не более, чем счетно.*
2. *Если $\{A_n\}$ — множество всех аттракторов гомеоморфизма f и $\{A_n^*\}$ — множество соответствующих дуальных к ним репеллеров, то $R_f = \bigcap\limits_n (A_n \cup A_n^*)$.*

Предложение 1.2 (см. [22, Proposition 1.5]). *Пусть $f : M \to M$ — гомеоморфизм. Тогда точки $x, y \in M$ лежат в одной и той же цепной компоненте множества R_f тогда и только тогда, когда не существует дуальной пары аттрактор, репеллер A, A^* такой, что $x \in A$, $y \in A^*$ или $y \in A$, $x \in A^*$.*

Предложение 1.3 (см. [22, Lemma 1.7]). *Существует непрерывная функция $\varphi : M \to [0,1]$ такая, что $\varphi^{-1}(0) = A$, $\varphi^{-1}(1) = A^*$ и φ убывает вдоль орбит множества $M \setminus (A \cup A^*)$ (т. е. $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$, если $x \in M \setminus (A \cup A^*)$).*

Определим функцию $\varphi : M \to \mathbb{R}$ посредством сходящегося ряда:

$$\varphi(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}\varphi_n(x),$$

где $\varphi_n : M \to [0,1]$ — непрерывная функция из предложения 1.3 для пары A_n, A_n^*.

Непосредственно проверяется, что $\varphi : M \to \mathbb{R}$ является функцией Ляпунова для каскада, порожденного гомеоморфизмом f.

Дав определения цепно рекуррентного множества, аттрактора, репеллера и функции Ляпунова для непрерывного потока f^t, заданного на M, и проделав конструкцию, аналогичную построению функции $\varphi : M \to \mathbb{R}$ для гомеоморфизма f, получаем следующий результат.

Теорема 1.1 (Фундаментальная теорема динамических систем, [19]). *Для любого непрерывного потока f^t и любого гомеоморфизма f компактного метрического пространства M существует функция Ляпунова $\varphi : M \to \mathbb{R}$.*

2. Энергетическая функция для потоков Морса—Смейла

2.1. Существование энергетической функции для гладкого потока на многообразии. В дальнейшем мы будем предполагать, что метрическое пространство M является гладким компактным многообразием. Более того, для простоты изложения мы будем считать, что граница M пуста, т. е. M является гладким замкнутым многообразием.

Определение 2.1. Гладкая функция Ляпунова φ называется *энергетической функцией* динамической системы на многообразии M, если множество критических точек φ (точек, в которых $\operatorname{grad}\varphi = 0$) совпадает с цепно рекуррентным множеством системы.

Таким образом, для энергетической функции понятие критической точки по Конли совпадает с классическим понятием критической точки как точки, в которой все частные производные первого порядка равны нулю. Как уже было отмечено выше, применение результатов В. Вильсона, полученных в [39], приводит к доказательству существования энергетической функции для произвольного гладкого потока на многообразии M. Пусть f^t — гладкий поток, индуцированный векторным полем χ, заданным на M, и A — аттрактор этого потока с захватывающей окрестностью U и бассейном притяжения $D = \bigcup\limits_{t\leqslant 0} f^t(cl(U))$. Для гладкой функции $\varphi : D \to \mathbb{R}$ обозначим через $\chi(\varphi)$ производную φ в направлении векторного поля χ.

Предложение 2.1 (см. [39, Theorem 3.2]). *Пусть $f^t : M \to M$ — гладкий поток, индуцированный векторным полем χ на гладком многообразии M и A — аттрактор этого потока с захватывающей окрестностью U и бассейном притяжения D. Тогда существует C^∞-функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ такая, что $\varphi(A) = 0$ и $\chi(\varphi)(x) < 0$, $x \in (D \setminus A)$.*

Непосредственно из этого предложения следует, что для гладкого потока f^t, индуцированного векторным полем χ, заданным на гладком многообразии M, предложение 1.3 может быть усилено до результата существования гладкой функции $\varphi_n : M \to [0,1]$ такой, что $\varphi_n^{-1}(0) = A_n$, $\varphi_n^{-1}(1) = A_n^*$ и $\chi(\varphi_n)(x) < 0$, $x \in (M \setminus (A_n \cup A_n^*))$ для каждой пары аттрактор-репеллер A_n, A_n^*. Тогда функция $\varphi : M \to \mathbb{R}$, определяемая рядом $\varphi(x) = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{-n}\varphi_n(x)$, является энергетической функцией потока f^t. Таким образом, фундаментальная теорема Ч. Конли (Теорема 1.1) в применении к гладким потокам на многообразии может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 2.1. *Для любого гладкого потока f^t, заданного на гладком компактном многообразии M, существует энергетическая функция $\varphi : M \to \mathbb{R}$.*

Используя конструкцию надстройки, можно построить гладкую функцию Ляпунова φ для любого диффеоморфизма гладкого компактного многообразия на себя. Но эта функция может иметь критические точки вне цепно рекуррентного множества и, следовательно, не являться энергетической. В связи со всем вышесказанным возникают естественные вопросы, для каких классов дискретных динамических систем существует энергетическая функция и как ее строить. Частично ответы на эти вопросы будут даны ниже. Но сначала мы приведем исторически первые результаты о построении энергетической функции для потоков Морса—Смейла, полученные ранее работы Ч. Конли.

2.2. Функции Морса и Морса—Ботта. Этот раздел мы начнем с короткого введения в теорию Морса (для детального знакомства см., например, [10]).

Пусть $f : M \to \mathbb{R}$ — C^r-гладкая функция, заданная на многообразии M. Точка $p \in M$ называется *критической точкой* функции $f(x)$, если $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_p = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \cdots = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0$, а $f(p)$ называется *критическим значением* функции $f(x)$. В противном случае точка p называется *регулярной точкой*, а $f(p)$ — *регулярным значением* функции $f(x)$. Следующее утверждение о регулярном значении доставляет распространенный способ задания многообразий. Если $a \in \mathbb{R}$ есть регулярное значение C^r-гладкой функции ($r \geqslant 1$) $f : M \to \mathbb{R}$, то $f^{-1}(a)$ есть C^r-подмногообразие многообразия M.

Для $r \geqslant 2$ критическая точка p C^r-функции f называется *невырожденной*, если матрица вторых производных (*матрица Гессе*) $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)\Big|_p$ невырождена, в противном случае точка p называется *вырожденной*. В силу симметричности матрица Гессе имеет только действительные собственные значения и является вырожденной тогда и только тогда, когда имеет нулевые собственные значения. Число нулевых собственных значений матрицы $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)\Big|_p$ называют *степенью вырождения* *критической точки* p, а число ее отрицательных собственных значений называют *индексом критической точки* p и обозначают $q(p)$. Гладкая функция, значение которой в каждой критической точке p равно индексу этой точки ($f(p) = q(p)$) называется *самоиндексирующейся*.

Определение 2.2. C^r-гладкая ($r \geqslant 2$) функция $f : M \to \mathbb{R}$ на гладком n-многообразии X называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырождены.

Определение 2.3. C^r-гладкая ($r \geqslant 2$) функция $f : M \to \mathbb{R}$ на гладком n-многообразии X называется функцией Морса—Ботта, если гессиан в каждой критической точке невырожден в направлении нормальном к критическому множеству уровня.

Функции Морса имеют важное значение при изучении топологии многообразия в силу следующих фактов. На любом гладком компактном многообразии существуют функции Морса. Функции Морса всюду плотны в пространстве всех гладких функций на многообразии. Каждая функция Морса имеет на компактном многообразии лишь конечное число критических точек, в частности, все они изолированы. На любом компактном многообразии X существуют так называемые *правильные функции Морса* $f : M \to \mathbb{R}$, т. е. такие, что $f(x) \geqslant f(y)$, если x и y — критические точки f и $q(x) \geqslant q(y)$. Отметим, что такие функции уже не образуют плотного подмножества в пространстве всех гладких функций на M.

Предложение 2.2 (Лемма Морса). *Пусть p — критическая точка функции Морса $f : M \to \mathbb{R}$. Тогда существуют локальные координаты $x_1, \ldots, x_n$ в точке p, называемые координатами Морса, в которых локальное представление f имеет вид*

$$f_p(x_1, \ldots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \cdots - x_{q(p)}^2 + x_{q(p)+1}^2 + \cdots + x_n^2,$$

где $q(p)$ — индекс f в точке p.

2.3. Энергетическая функция Морса для градиентноподобных потоков. Первые результаты по построению энергетических функций касались систем Морса—Смейла. В 1960 году С. Смейл в работе [36] ввел класс C^∞ векторных полей χ на C^∞ замкнутом многообразии M со следующими свойствами:

(1) Векторное поле χ имеет конечное число особых точек $\beta_1, \ldots, \beta_k$, и матрица Якоби линеаризации векторного поля в окрестности каждой особой точки не имеет собственных значений с нулевой действительной частью.
(2) Векторное поле χ имеет конечное число замкнутых орбит $\beta_{k+1}, \ldots, \beta_m$, и отображение Пуанкаре в окрестности каждой такой орбиты не имеет собственных значений, по модулю равных 1.
(3) Предельные точки всех орбит χ при $t \to \pm\infty$ принадлежат β_i.
(4) Устойчивые и неустойчивые многообразия β_i имеют трансверсальное пересечение.
(5) Если β_i — периодическая орбита, то не существует точка $y \in M$ такая, что $\alpha(y) = \omega(y) = \beta_i$.

С современной точки зрения условия (1)–(5) означают, что цепно рекуррентное множество потока, индуцированного векторным полем χ, состоит из конечного числа неподвижных гиперболических точек $\beta_1, \ldots, \beta_k$ и конечного числа гиперболических периодических орбит $\beta_{k+1}, \ldots, \beta_m$ таких, что устойчивые и неустойчивые многообразия орбит β_i пересекаются трансверсально. Таким образом, условия (1)–(5) выделяют структурно устойчивые векторные поля с конечным цепно рекуррентным множеством. В своей работе [36] С. Смейл показал, что для векторных полей со свойствами (1)–(5) справедливы неравенства, подобные неравенствам Морса, с тех пор такие векторные поля называют полями *Морса—Смейла*.

Векторные поля Морса—Смейла без периодических орбит называются *градиентноподобными*, поскольку они имеют динамику, подобную динамике градиентного векторного поля, порожденного функцией Морса. Действительно, если мы рассмотрим градиентное векторное поле $\operatorname{grad}\varphi$, порожденное функцией Морса φ, то множество критических точек φ совпадает с множеством состояний равновесия градиентного потока (потока, порожденного градиентным векторным полем). Если x не является критической точкой функции φ, то $\operatorname{grad}\varphi(-\varphi) = -|\operatorname{grad}\varphi(x)|^2 < 0$, т. е. $-\varphi$ строго убывает вдоль траекторий $\mathcal{O}_x$. Таким образом, $-\varphi$ является энергетической функцией градиентного потока. Градиентное векторное поле не является структурно устойчивым в общем случае, поскольку инвариантные многообразия седловых точек могут иметь нетрансверсальное пересечение. Однако, С. Смейл в 1961 году в работе [37] доказал, что любое градиентное векторное поле на M может быть C^1 аппроксимировано градиентноподобным векторным полем.

В связи с вышесказанным естественно искать энергетическую функцию градиентноподобного потока в классе функций Морса.

В работе [37] С. Смейл рассмотрел класс C^∞ векторных полей χ на компактных C^∞ n-многообразиях M (∂M может быть как пустой, так и непустой), которые в случае замкнутого многообразия удовлетворяют следующим условиям:

(i) У каждой особой точки β поля χ существует окрестность N и C^∞ функция φ_β на N такие, что χ есть $\operatorname{grad}\varphi_\beta$ на N в некоторой римановой структуре на N. Более того, β — невырожденная критическая точка φ_β. Обозначим через $\beta_1,\dots,\beta_k$ эти особенности.

(ii) Если $x \in M$ и $\mathcal{O}_x$ — орбита потока, порожденного χ, проходящая через x, то предельное множество орбиты $\mathcal{O}_x$ при $t \to \pm\infty$ содержится в объединении β_i.

(iii) Устойчивые и неустойчивые многообразия β_i пересекаются трансверсально.

Из следующей теоремы вытекает, что векторное поле, удовлетворяющее условиям (i)–(iii), обладает энергетической функцией.

Теорема 2.2 (см. [37, Theorem B]). *Пусть χ — C^∞-векторное поле на замкнутом C^∞-многообразии M, удовлетворяющее условиям* (1)–(3). *Тогда существует C^∞-функция φ на M со следующими свойствами*:

(a) *Критические точки φ совпадают с особыми точками χ и φ отличается на константу от функции из условия* (i) *в некоторой окрестности критической точки.*

(b) *Если χ не обращается в 0 в точке $x \in M$, то поле трансверсально поверхности уровня функции φ в точке x.*

(c) *Если $\beta \in M$ — критическая точка φ, то $\varphi(\beta) = q(\beta)$, где $q(\beta)$ — индекс точки β.*

С. Смейл доказал, что предыдущая теорема может быть усилена следующим образом.

Замечание 2.1 (см. [37, Remark]). Существует риманова метрика на M такая, что $\chi = \operatorname{grad}\varphi$.

2.4. Энергетическая функция Морса—Ботта для потоков Морса—Смейла. Если векторное поле Морса—Смейла имеет периодическую орбиту, то энергетическая функция для такого поля не может быть функцией Морса. Поэтому К. Мейер в 1968 году в работе [30] предложил рассматривать более общий класс Φ, состоящий из C^∞-функций $\varphi : M \to \mathbb{R}$ на гладком замкнутом многообразии M с римановой метрикой d, обладающих следующими свойствами:

1. Множество $Cr(\varphi)$ критических точек функции φ состоит из конечного подмножества $Cr_0(\varphi) = \{\delta_1,\dots,\delta_m\}$ невырожденных точек и подмножества $Cr_1(\varphi)$, которое является объединением конечного числа попарно не пересекающихся окружностей $\delta_{m+1},\dots,\delta_k$ таких, что индекс φ постоянен на каждой окружности;
2. Для $i \in \{m+1,\dots,k\}$ существует окрестность N_i окружности δ_i и диффеоморфизм ξ_i такой, что ξ_i отображает N_i на прямое произведение $\mathbb{D}^{n-1}$ и $\mathbb{S}^1$, если N_i ориентируемо, и на косое произведение $\mathbb{D}^{n-1}$ и $\mathbb{S}^1$, если N_i неориентируемо, при этом $\varphi \circ \xi_i^{-1} = \varphi(\delta_i) + Q_i(x)$, где Q_i — невырожденная квадратичная форма в координатах $x_1,\dots,x_{n-1}$ на $\mathbb{D}^{n-1}$ и периодическая функция периода один по координате x_n в $\mathbb{S}^1$. Более того, в каждой точке окружности $\mathbb{S}^1$ квадратичная форма равна индексу функции φ на δ_i.

В действительности класс Φ есть класс функций Морса—Ботта, чье множество критических точек совпадает с объединением $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \delta_k$. Из определения функции Морса—Ботта следует, что гессиан этой функции невырожден в нормальном к окружности направлении.

Теорема 2.3 (см. [30, Theorem 1]). *Если χ — векторное поле Морса—Смейла, тогда существует энергетическая функция $\varphi \in \Phi$ для χ.*

Предложение 2.3 (см. [30, Proposition]). *Пусть для гладкого векторного поля χ на M существует функция $\varphi \in \Phi$ такая, что*:

1. $\chi(\varphi)(x) < 0$ *для всех* $x \in (M \setminus Cr(\varphi))$;

2. *если p особая точка χ, то $p \notin Cr_1(\varphi)$;*
3. *существует константа $\kappa > 0$ такая, что для любого $x \in N_i$*

$$-\chi(\varphi)(x) \geqslant \kappa d(x, \delta_i)^2.$$

Тогда χ удовлетворяет всем условиям определения векторного поля Морса—Смейла, за исключением, быть может, условия трансверсальности. Более того, поле χ может быть C^1 аппроксимировано системой Морса—Смейла.

3. Энергетическая функция для каскадов с регулярной динамикой

В этом разделе мы будем рассматривать дискретные динамические системы (каскады) с регулярной динамикой. А именно, мы будем строить энергетические функции для диффеоморфизмов $f : M^n \to M^n$ с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством, заданные на замкнутом гладком n-многообразии M^n. Обозначим через $G(M^n)$ класс таких диффеоморфизмов. Подмножество структурно устойчивых диффеоморфизмов в этом классе составляют диффеоморфизмы Морса—Смейла, обозначим через $MS(M^n)$ их класс.

3.1. Функция Морса—Ляпунова. Пусть $f \in G(M^n)$. Поскольку цепно рекуррентное множество диффеоморфизма f конечно, то естественно искать его функцию Ляпунова в классе функций Морса. Факт совпадения неблуждающего множества с цепно рекуррентным приводит к следующему определению.

Определение 3.1. Функция Морса $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ называется функцией Ляпунова для $f \in G(M^n)$, если:

1. $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$ для любого $x \notin \Omega_f$;
2. $\varphi(f(x)) = \varphi(x)$ для любого $x \in \Omega_f$.

Предложение 3.1 (см. [26, Proposition 7.1]). *Пусть $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ — функция Ляпунова для диффеоморфизма $f \in G(M^n)$. Тогда*

1. *$-\varphi$ — гладкая функция Ляпунова для f^{-1};*
2. *если p — периодическая точка диффеоморфизма f, то $\varphi(x) < \varphi(p)$ для любого $x \in W^u_p \setminus p$ и $\varphi(x) > \varphi(p)$ для любого $x \in W^s_p \setminus p$;*
3. *если p — периодическая точка диффеоморфизма f, то p — критическая точка функции φ;*
4. *индекс критической точки p равен $\dim W^u_p$.*

В силу предложения 4 периодические точки диффеоморфизма f являются критическими точками функции Ляпунова φ, а индекс φ в точке $p \in \Omega_f$ равен размерности неустойчивого многообразия W^u_p. При этом любая периодическая точка p является максимумом ограничения φ на W^u_p и минимумом ограничения φ на W^s_p.

Предложение 3.2 (см. [26, Proposition 7.2]). *Если периодическая точка p является невырожденным максимумом (минимумом) ограничения функции Ляпунова φ для диффеоморфизма $f \in G(M^n)$ на неустойчивое (устойчивое) инвариантное многообразие точки p, то это многообразие трансверсально ко всем регулярным множествам уровня φ в некоторой окрестности точки p.*

Определение 3.2. Пусть $\mathcal{O}_i$ — периодическая орбита диффеоморфизма $f \in G(M^n)$, U_i — окрестность орбиты $\mathcal{O}_i$ и $q_i = dim\ W^u_{\mathcal{O}_i}$. Функцию Морса $\psi_i : U_i \to \mathbb{R}$ назовем локальной *функцией Морса—Ляпунова*, если она обладает следующими свойствами:

1. $\psi_i(f(x)) < \psi_i(x)$ для любого $x \in (f^{-1}(U_i) \setminus \mathcal{O}_i)$ и $\psi_i(f(x)) = \psi_i(x) = 0$ для $x \in \mathcal{O}_i$;
2. множество критических точек функции ψ_i совпадает с орбитой $\mathcal{O}_i$ и каждая критическая точка имеет индекс q_i;
3. $(W^u_r \cap U_i) \subset Ox_1 \dots x_{q_i}$ и $(W^s_r \cap U_i) \subset Ox_{q_i+1} \dots x_n$ для координат Морса $x_1, \dots, x_n$ в окрестности точки $r \in \mathcal{O}_i$.

Лемма 3.1 (см. [26, Lemma 2.2]). *Для любой периодической орбиты $\mathcal{O}_i$ диффеоморфизма $f \in G(M^n)$ существует локальная функция Морса—Ляпунова.*

Локальное свойство, сформулированное в предложении 3.2, полезно для построения (глобальной) функции Ляпунова.

Определение 3.3. Функция Ляпунова $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ для диффеоморфизма $f \in G(M^n)$ называется функцией Морса—Ляпунова, если каждая периодическая точка p является невырожденным максимумом (соответственно минимумом) ограничения φ на неустойчивое (соответственно устойчивое) многообразие W^u_p (соответственно W^s_p).

Согласно лемме 3.1 функция Морса—Ляпунова существует в окрестности любой периодической орбиты диффеоморфизма $f \in G(M^n)$. Справедлив и факт существования глобальной функции Морса—Ляпунова для любого диффеоморфизма $f \in G(M^n)$. Такая функция может быть построена, в частности, с помощью перехода к надстройке. Именно, пусть $f \in G(M^n)$ и $\hat{f}^t$ — поток на многообразии $M^n \times \mathbb{R}$, порожденный векторным полем, состоящим из единичных векторов, параллельных $\mathbb{R}$ и направленных в $+\infty$. Определим диффеоморфизм $g : M^n \times \mathbb{R} \to M^n \times \mathbb{R}$ формулой $g(x,\tau) = (f(x), \tau - 1)$. Положим $\mathcal{G} = \{g^k, k \in \mathbb{Z}\}$ и $W = (M^n \times \mathbb{R})/\mathcal{G}$. Обозначим через $p_{_W} : M^n \times \mathbb{R} \to W$ естественную проекцию и через f^t — поток на многообразии W, заданный формулой $f^t(x) = p_{_W}(\hat{f}^t(p_{_W}^{-1}(x)))$. Поток f^t называется *надстройкой над диффеоморфизмом* f. По построению цепно рекуррентное множество потока f^t состоит из k_f периодических орбит $\delta_i = p_{_W}(\mathcal{O}_i \times \mathbb{R}), i \in \{1, \ldots, k_f\}$, то есть надстройка f^t является потоком Морса—Смейла без неподвижных точек. Согласно теореме 2.3 существует энергетическая функция Морса—Ботта для потока f^t. Ее ограничение на M^n является искомой функцией Морса—Ляпунова для f. Однако в общем случае построенная функция может иметь критические точки, которые не являются периодическими точками f.

Теорема 3.1 (см. [26, Theorem 7.1]). *Среди гладких функций Ляпунова для диффеоморфизма $f \in G(M^n)$ функции Морса—Ляпунова образуют открытое всюду плотное множество в C^∞-топологии.*

3.2. Порядок на множестве периодических орбит. Гиперболичность цепно рекуррентного множества равносильна Ω-устойчивости диффеоморфизма $f \in G(M^n)$ (см., например, [33]). Следовательно, периодические орбиты диффеоморфизма f допускают нумерацию $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_{k_f}$, согласующуюся с отношением С. Смейла, т. е. $i \leqslant j$, если $W^s_{\mathcal{O}_i} \cap W^u_{\mathcal{O}_j} \neq \varnothing$. Не уменьшая общности, будем считать, что нумерация орбит выбрана так, что номер любой седловой орбиты больше номера любой стоковой и меньше номера любой источниковой орбиты. Для $i = 1, \ldots, k_f$ положим $W^s_i = W^s_{\mathcal{O}_i}, W^u_i = W^u_{\mathcal{O}_i}$, и для $i = 1, \ldots, k_f - 1$ положим $A_i = \bigcup\limits_{j=1}^{i} W^u_j,\ R_i = \bigcup\limits_{j=i+1}^{k_f} W^s_j$.

Для $i = 1, \ldots, k_f - 1$ положим $V_i = M^2 \setminus (A_i \cup R_i)$. Обозначим через $\hat{V}_i = V_i/f$ пространство орбит действия диффеоморфизма f на множестве V_i и через $p_{_i} : V_i \to \hat{V}_i$ — естественную проекцию.

Теорема 3.2 (см. [26, Theorem 2.6]). *Пусть $f \in G(M^n)$. Тогда*

1. *множество A_i (R_i) является аттрактором (репеллером) диффеоморфизма f и имеет захватывающую окрестность $M_i \subset \bigcup\limits_{j=1}^{i} W^s_j$ ($M_i \subset \bigcup\limits_{j=i+1}^{k_f} W^u_j$) такую, что $M_i \setminus \operatorname{int} f(M_i)$ ($M_i \setminus \operatorname{int} f^{-1}(M_i)$) является фундаментальной областью ограничения диффеоморфизма f на V_i;*
2. *проекция $p_{_i} : V_i \to \hat{V}_i$ является накрытием, индуцирующим структуру гладкого замкнутого n-многообразия на пространстве орбит $\hat{V}_i$;*
3. *если $\dim\ A_i \leqslant (n-2)$ ($\dim\ R_i \leqslant (n-2)$), то репеллер R_i (аттрактор A_i) является связным, и если $\dim\ (A_i \cup R_i) \leqslant (n-2)$, то многообразия V_i, $\hat{V}_i$ связны.*

3.3. Ω-устойчивые 2-диффеоморфизмы с конечным неблуждающим множеством. В этом разделе мы изложим результаты работы [11], а именно, изложим идею доказательства следующей теоремы.

Теорема 3.3 (см. [11, Теорема 1]). *Для любого диффеоморфизма $f \in G(M^2)$ существует энергетическая функция, являющаяся функцией Морса.*

Пусть Ω_q, $q \in \{0,1,2\}$ — подмножество периодических точек r таких, что $\dim\ W^u_r = q$, k_q — число всех периодических орбит с индексом Морса (индекс Морса периодической точки r равен размерности $\dim\ W^u_r$), меньшим или равным q. Основой доказательства являются динамические свойства диффеоморфизмов множества $G(M^2)$, сформулированные в леммах 3.2, 3.3, 3.4. Доказательство лемм существенно опирается на классические факты двумерной топологии, в частности, на факт отсутствия диких дуг на поверхностях.

Лемма 3.2 (см. [26, Lemma 3.4]). *В каждой компоненте связности множества V_i, $i = k_0, \dots, k_1 - 1$ существует окружность такая, что объединение этих окружностей пересекается с каждой сепаратрисой множества $W^u_{i+1} \setminus \mathcal{O}_{i+1}$ в одной точке.*

Согласно теореме 3.2, A_i обладает захватывающей окрестностью M_i, где M_i — компактное множество такое, что $f(M_i) \subset \operatorname{int} M_i$ (M_i — f-сжимаема) и $\bigcap\limits_{k\geqslant 0} f^k(M_i) = A_i$. Для $i = 1, \dots, k_1$ обозначим через c_i число компонент связности аттрактора A_i, через r_i — число седловых точек и через s_i — число стоковых точек в A_i. Положим $g_i = c_i + r_i - s_i$.

Определение 3.4. Захватывающую окрестность M_i, $i = 1, \dots, k_1$ аттрактора A_i назовем *тесной*, если M_i состоит из c_i дисков с дырами, общее число которых равно g_i.

Если при этом для каждой седловой точки $\sigma \in \mathcal{O}_i$ пересечение $W^s_\sigma \cap M_i$ состоит в точности из одного отрезка, то окрестность M_i будем называть *канонической*.

Лемма 3.3 (см. [11, Лемма 2.5]). *Каждый аттрактор A_i, $i = 1, \dots, k_1$ обладает канонической окрестностью.*

Лемма 3.4 (см. [26, Lemma 7.1]). *Пусть $i \in \{1, \dots, k_1\}$ и Q_i — захватывающая окрестность аттрактора A_i такая, что ∂Q_i — линия уровня энергетической функции $\varphi_{Q_i} : Q_i \to \mathbb{R}$. Тогда для любой тесной окрестности P_i аттрактора A_i существует энергетическая функция $\varphi_{P_i} : P_i \to \mathbb{R}$ для f с множеством уровня ∂P_i.*

Опираясь на факты выше, построим энергетическую функцию Морса для диффеоморфизма $f \in G(M^2)$. Разобьем построение энергетической функции для $f : M^2 \to M^2$ на шаги.

Шаг 1. Индукцией по $i = 1, \dots, k_1$ докажем существование энергетической функции φ_{M_i} на канонической окрестности M_i аттрактора A_i с множеством уровня $S_i = \partial M_i$.

Для $i = 1$ аттрактор A_1 совпадает со стоковой орбитой $\mathcal{O}_1$ диффеоморфизма f. В силу леммы 3.1 существует окрестность $U_{\mathcal{O}_1} \subset M^2$ орбиты $\mathcal{O}_1$, оснащенная энергетической функцией $\varphi_{\mathcal{O}_1} : U_{\mathcal{O}_1} \to \mathbb{R}$ для f и такая, что $\varphi_{\mathcal{O}_1}(\mathcal{O}_1) = 1$. В силу леммы 3.4 существует энергетическая функция φ_{M_1} на окрестности M_1 аттрактора A_1 с множеством уровня S_1.

Пусть по предположению индукции существует энергетическая функция $\varphi_{M_{i-1}}$ на окрестности M_{i-1} аттрактора A_{i-1} с множеством уровня S_{i-1}. Построим функцию φ_{M_i}. Рассмотрим две возможности: a) $i \leqslant k_0$; b) $i > k_0$.

В случае a) окрестность M_i состоит из c_i попарно не пересекающихся двумерных дисков. В силу предположения индукции и леммы 3.4 существует энергетическая функция $\varphi_{M_{i-1}}$ на канонической окрестности M_{i-1}, постоянная на ∂M_{i-1}. Аналогично случаю $i = 1$ доказывается существование энергетической функции $\varphi_{\mathcal{O}_i}$ на $U_{\mathcal{O}_i}$ с множеством уровня $\partial U_{\mathcal{O}_i}$. Тогда функция φ_{M_i}, составленная из функций $\varphi_{M_{i-1}}$ и $\varphi_{\mathcal{O}_i}$ является искомой.

В случае b) орбита $\mathcal{O}_i$ имеет окрестность $U_{\mathcal{O}_i} \subset M^2$, оснащенную энергетической функцией $\varphi_{\mathcal{O}_i} : U_{\mathcal{O}_i} \to \mathbb{R}$ для f с $\varphi_{\mathcal{O}_i}(\mathcal{O}_i) = i$. Более того, для каждой компоненты связности U_σ, $\sigma \in \mathcal{O}_i$ множества $U_{\mathcal{O}_i}$ существуют координаты Морса (x_1, x_2) такие, что $\varphi_{\mathcal{O}_i}(x_1, x_2) = i - x_1^2 + x_2^2$, ось Ox_1 содержится в неустойчивом многообразии, а ось Ox_2 содержится в устойчивом многообразии точки σ.

Из свойств канонической окрестности M_i и λ-леммы[1] следует существование трубчатой окрестности $N(D_i) \subset M_i$ дисков $D_i = M_i \cap W^s_{\mathcal{O}_i}$ такой, что $N(D_i) \cap A_{i-1} = \varnothing$, множество $P_{i-1} = M_i \setminus \operatorname{int} N(D_i)$ является f-сжимаемым и ∂P_{i-1} трансверсально пересекает каждую компоненту

[1]Утверждение λ-леммы состоит в том, что $f^{-n}(\partial M_i) \cap U_\sigma$ сходится к $\{x_1 = 0\} \cap U_\sigma$ в C^1-топологии, когда n стремится к $+\infty$ (см., например, [31]).

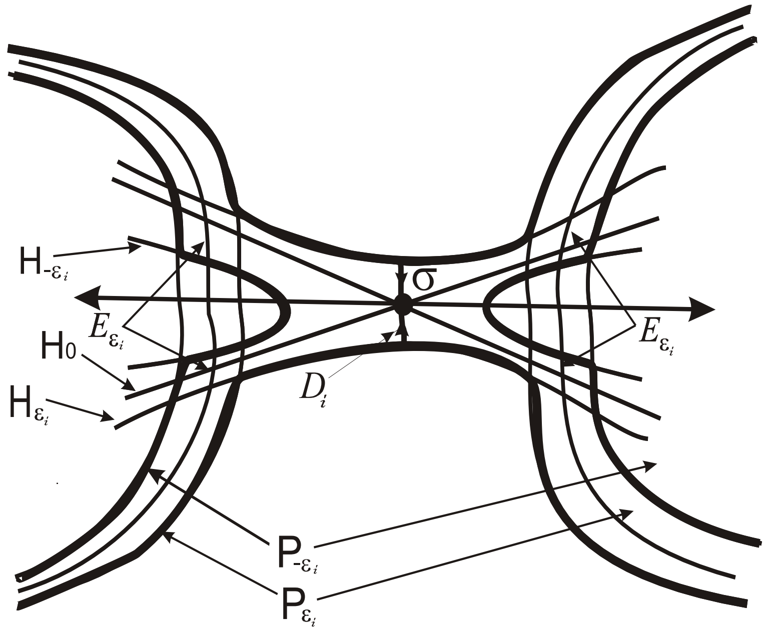

Рис. 1. Перестройка линий уровня

связности множества $\varphi_{\mathcal{O}_i}^{-1}(i) \setminus \mathcal{O}_i$ по двум точкам. Множество P_{i-1} является тесной окрестностью аттрактора A_{i-1}. По предположению индукции и лемме 3.4 на окрестности P_{i-1} существует энергетическая функция $\varphi_{_{P_{i-1}}}$ с множеством уровня ∂P_{i-1}.

Для $\varepsilon_i \in (0,1)$, $t \in [-\varepsilon_i, \varepsilon_i]$ положим $P_t = \varphi_{P_{i-1}}^{-1}([1, \varphi_{_{P_{i-1}}}(\partial P_{i-1}) - \varepsilon_i + t])$, $H_t = \{x \in U_{\mathcal{O}_i} : \varphi_{\mathcal{O}_i}(x) \leqslant i + t\}$ и $E_{\varepsilon_i} = (P_{\varepsilon_i} \setminus \operatorname{int} P_{-\varepsilon_i}) \cap (H_{\varepsilon_i} \setminus \operatorname{int} H_{-\varepsilon_i})$ (см. рис. 1). Заметим, что $P_{\varepsilon_i} = P_{i-1}$ и, следовательно, $f(P_{\varepsilon_i}) \subset \operatorname{int} P_{\varepsilon_i}$. Так как $\varphi_{\mathcal{O}_i}$ — функция Ляпунова для $f|_{U_{\mathcal{O}_i}}$, то $\varphi_{\mathcal{O}_i}(f^{-1}(\varphi_{\mathcal{O}_i}^{-1}(i) \setminus \mathcal{O}_i)) > i$ и, следовательно, $(H_0 \setminus \mathcal{O}_i) \subset \operatorname{int} f^{-1}(H_0 \setminus \mathcal{O}_i)$. Отсюда и из условий выбора окрестности $N(D_i)$ следует существование значения ε_i со следующими свойствами:

(1) $f(P_{\varepsilon_i}) \subset \operatorname{int} P_{-\varepsilon_i}$;
(2) для любого $t \in [-\varepsilon_i, \varepsilon_i]$ ∂P_t трансверсально пересекает каждую компоненту связности множества $\partial H_t \setminus D_i$ по двум точкам;
(3) $f^{-1}(E_{\varepsilon_i}) \cap H_{\varepsilon_i} = \varnothing$.

Для $t \in [-\varepsilon_i, \varepsilon_i]$ положим $Q_t = P_t \cup H_t$. По построению множество Q_t, $t \neq 0$ является f-сжимаемым. Более того, $Q_{-\varepsilon_i}$ после сглаживания является тесной окрестностью аттрактора A_{i-1}, а Q_{ε_i} после сглаживания является тесной окрестностью аттрактора A_i. В силу предположения индукции и леммы 3.4 на множестве $Q_{-\varepsilon_i}$ существует энергетическая функция $\varphi_{_{Q_{-\varepsilon_i}}}$, постоянная на $\partial Q_{-\varepsilon_i}$. Поскольку $\varphi_{_{Q_{-\varepsilon_i}}}(A_{i-1}) \leqslant i-1$, то можно считать, что $\varphi_{_{Q_{-\varepsilon_i}}}(Q_{-\varepsilon_i}) = i - \varepsilon_i$.

Определим на множестве Q_{ε_i} функцию $\varphi_{_{Q_{\varepsilon_i}}} : Q_{\varepsilon_i} \to \mathbb{R}$ формулой:

$$\varphi_{_{Q_{\varepsilon_i}}}(x) = \begin{cases} \varphi_{_{Q_{-\varepsilon_i}}}(x), \text{ если } x \in Q_{-\varepsilon_i}; \\ i + t, \text{ если } x \in Q_t. \end{cases}$$

Проверим, что $\varphi_{_{Q_{\varepsilon_i}}}$ является энергетической функцией для f, тогда существование искомой функции $\varphi_{_{M_i}} : M_i \to \mathbb{R}$ будет следовать из предложения 3.4.

Представим множество Q_{ε_i} в виде объединения подмножеств с попарно непересекающимися внутренностями: $Q_{\varepsilon_i} = A \cup B \cup C$, где $A = Q_{-\varepsilon_i}$, $B = P_{\varepsilon_i} \setminus Q_{-\varepsilon_i}$ и $C = Q_{\varepsilon_i} \setminus (P_{\varepsilon_i} \cup Q_{-\varepsilon_i})$. По построению функция $\varphi_{_{Q_{\varepsilon_i}}}|_A$ является энергетической функцией для f, $\varphi_{_{Q_{\varepsilon_i}}}(\partial A) = i - \varepsilon_i$, функция $\varphi_{_{Q_{\varepsilon_i}}}|_B$ не имеет критических точек и функция $\varphi_{_{Q_{\varepsilon_i}}}|_C$ совпадает с функцией $\varphi_{_{\mathcal{O}_i}}|_C$. Проверим свойство убывания функции $\varphi_{_{Q_{\varepsilon_i}}}$ вдоль траекторий.

Если $x \in A$, то $f(x) \in A$ и $\varphi_{_{Q_{\varepsilon_i}}}(f(x)) < \varphi_{_{Q_{\varepsilon_i}}}(x)$, поскольку $\varphi_{_{Q_{\varepsilon_i}}}|_A$ — функция Ляпунова. Если $x \in B$, то, в силу условия (1) выбора ε_i, $f(x) \in A$ и, следовательно, $\varphi_{_{Q_{\varepsilon_i}}}(x) > i - \varepsilon_i$, а

$\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}(f(x)) < i - \varepsilon_i$, откуда $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}(f(x)) < \varphi_{Q_{\varepsilon_i}}(x)$. Если $x \in C$, то в силу условия (3) выбора ε_i либо $f(x) \in A$ и убывание доказывается аналогично случаю $x \in B$, либо $f(x) \in C$ и убывание следует из того, что $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}|_C$ — функция Ляпунова.

Шаг 2. Заметим, что множество источников Ω_2 является аттрактором для диффеоморфизма f^{-1} и, следовательно, имеет каноническую окрестность $\tilde{M}$. Аналогично шагу 1 построим энергетическую функцию $\tilde{\varphi}_{\tilde{M}}$ для f^{-1} на окрестности $\tilde{M}$ с множеством уровня $\tilde{S} = \partial\tilde{M}$.

Шаг 3. По построению множество $P_{k_1} = M^2 \setminus \operatorname{int}\tilde{M}$ является тесной окрестностью аттрактора A_{k_1}, откуда следует существование искомой функции φ. Действительно, в силу предложения 3.4 из существования энергетической функции $\varphi_{M_{k_1}}$ на окрестности M_{k_1} аттрактора A_{k_1} следует существование энергетической функции $\varphi_{P_{k_1}}$ на P_{k_1} с множеством уровня ∂P_{k_1}. Функцию $\varphi_{P_{k_1}}$ можно построить так, что $\varphi_{P_{k_1}}(\tilde{S}) = k_f + 1 - \tilde{\varphi}_{\tilde{M}}(\tilde{S})$. Поскольку $\partial P_{k_1} = \tilde{S}$, то искомая функция φ определяется формулой $\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_{P_{k_1}}(x), \text{ если } x \in P_{k_1}; \\ k_f + 1 - \tilde{\varphi}_{\tilde{M}}(x), \text{ если } x \in \tilde{M}. \end{cases}$

3.4. Диффеоморфизмы Морса—Смейла на 3-многообразиях. В этом разделе мы изложим результаты работ [5, 23, 24] (см. также монографию [26]).

3.4.1. Условия существования динамически упорядоченной энергетической функции. В пункте 3.2 мы упорядочили периодические орбиты диффеоморфизма $f \in G(M^n)$ согласно отношению частичного порядка $\prec$:

$$\mathcal{O}_p \prec \mathcal{O}_r \iff W^s_{\mathcal{O}_p} \cap W^u_{\mathcal{O}_r} \neq \varnothing.$$

В случае, когда инвариантные многообразия периодических точек диффеоморфизма f имеют трансверсальное пересечение, можно ввести порядок, более тесно связанный с динамикой.

Определение 3.5. Нумерацию периодических орбит $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_{k_f}$ диффеоморфизма $f \in MS(M^n)$ назовем *динамической*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. если $\mathcal{O}_i \prec \mathcal{O}_j$, то $i \leqslant j$;
2. если $q_i < q_j$, то $i < j$.

Предложение 3.3 (см. [26, Proposition 2.6]). *Для любого диффеоморфизма $f \in G(M^n)$ существует динамическая нумерация периодических орбит.*

На рис. 2 представлен фазовый портрет диффеоморфизма Морса—Смейла $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ с динамическим порядком периодических орбит в предположении, что неблуждающее множество Ω_f состоит из неподвижных точек.

Заметим, что существуют нумерации периодических орбит диффеоморфизма $f \in MS(M^n)$, сохраняющие отношение частичного порядка $\prec$, отличные от динамической. Везде далее мы будем предполагать, что орбиты диффеоморфизма $f \in MS(M^n)$ динамически упорядочены. Пусть Ω_q, $q \in \{0, 1, 2, 3\}$ — подмножество периодических точек r таких, что $\dim\, W^u_r = q$, k_q — число всех периодических орбит с индексом Морса, меньшим или равным q.

Согласно предложению 3.3 существует динамическая нумерация орбит диффеоморфизма f: $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_{k_f}$, используя которую, мы дадим следующее определение.

Определение 3.6. Пусть орбиты диффеоморфизма $f \in MS(M^n)$ имеют динамическую нумерацию: $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_{k_f}$. Функцию Морса—Ляпунова φ для диффеоморфизма f назовем *динамически упорядоченной*, если $\varphi(\mathcal{O}_i) = i$ для $i \in \{1, \ldots, k_f\}$.

Далее мы исследуем условия существования динамически упорядоченной энергетической функции для диффеоморфизмов Морса—Смейла на многообразиях размерности $n = 3$.

Пусть $f \in MS(M^3)$. Из теоремы 3.2 следует, что для каждого $i = 1, \ldots, k_1$ множество $A_i = \bigcup\limits_{j=1}^{i} W^u_{\mathcal{O}_j}$ является аттрактором, т. е. обладает захватывающей окрестностью M_i, где M_i компактное множество такое, что $f(M_i) \subset \operatorname{int} M_i$ (M_i — f-сжимаема) и $\bigcap\limits_{k \geqslant 0} f^k(M_i) = A_i$. Обозначим через c_i

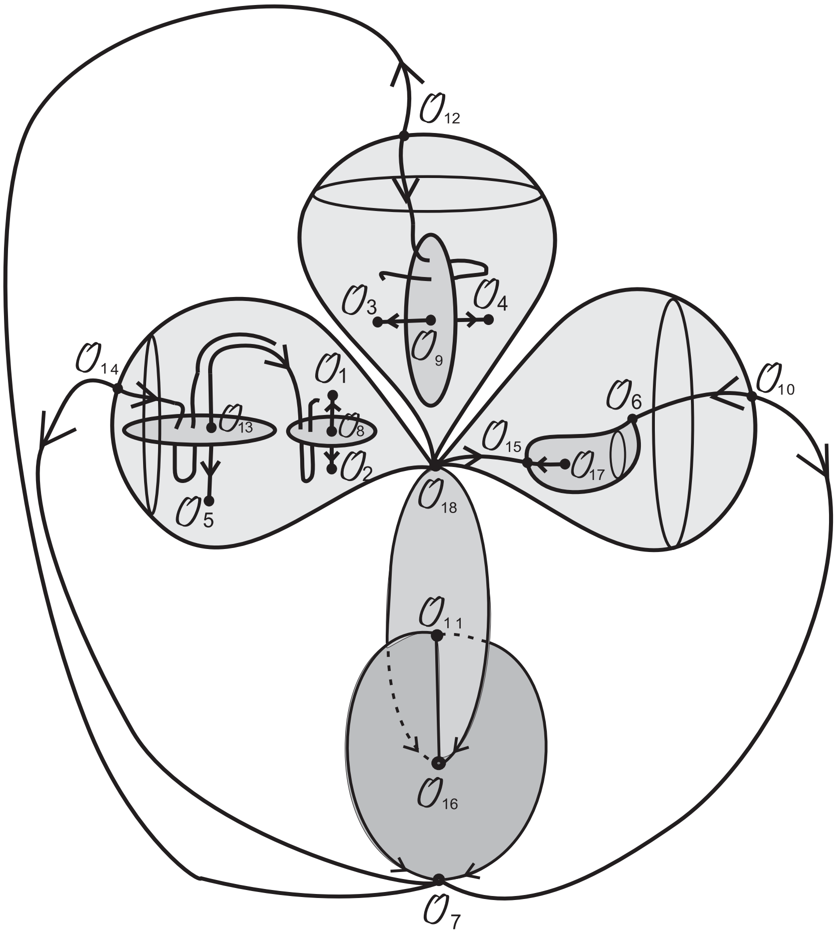

Рис. 2. Фазовый портрет диффеоморфизма Морса—Смейла $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ с динамически упорядоченным множеством периодических орбит

число компонент связности аттрактора A_i, через r_i — число седловых точек и через s_i — число стоковых точек в A_i. Положим $g_i = c_i + r_i - s_i$.

Напомним, что гладкое компактное ориентируемое трехмерное многообразие с краем называется *ручечным телом рода* $g \geqslant 0$, если оно диффеоморфно многообразию, полученному из замкнутого 3-шара отождествлением g пар попарно непересекающихся замкнутых 2-дисков на границе шара посредством меняющего ориентацию диффеоморфизма. Границей ручечного тела является ориентируемая поверхность рода g.

Определение 3.7. Захватывающая окрестность M_i аттрактора A_i называется *ручечной*, если M_i состоит из c_i компонент связности, каждая из которых является ручечным телом. Сумму g_{M_i} родов компонент связности M_i назовем родом ручечной окрестности.

Заметим, что для каждого $i = 1, \ldots, k_0$ число g_i равно нулю, аттрактор A_i является нульмерным (так как состоит из c_i стоковых точек) и обладает ручечной окрестностью M_i рода $g_i = 0$, состоящей из c_i попарно непересекающихся трехмерных шаров (это следует, например, из леммы 3.1). Для каждого $i = k_0 + 1, \ldots, k_1$ аттрактор A_i содержит одномерную компоненту связности, в силу чего (допуская некоторую вольность) мы будем далее называть его одномерным.

Предложение 3.4 (см. [26, Proposition 7.3]). *Каждый одномерный аттрактор A_i диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$ обладает ручечной окрестностью M_i рода $g_{M_i} \geqslant g_i$.*

Определение 3.8. Ручечную окрестность M_i одномерного аттрактора A_i назовем *тесной*, если:

1. $g_{M_i} = g_i$;
2. для каждой точки $\sigma \in \mathcal{O}_i$ пересечение $W^s_\sigma \cap M_i$ состоит в точности из одного двумерного диска.

Одномерный аттрактор A_i, обладающий тесной окрестностью M_i назовем *тесно вложенным*.

По определению репеллер для диффеоморфизма f есть аттрактор для f^{-1}. Кроме того, динамическая нумерация орбит $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_{k_f}$ диффеоморфизма f индуцирует динамическую нумерацию орбит $\tilde{\mathcal{O}}_1, \dots, \tilde{\mathcal{O}}_{k_f}$ диффеоморфизма f^{-1} следующим образом: $\tilde{\mathcal{O}}_i = \mathcal{O}_{k_f - i}$. Тогда одномерный репеллер называется *тесно вложенным*, если он является тесно вложенным одномерным аттрактором для f^{-1} относительно индуцированной динамической нумерации орбит.

Заметим, что свойство одномерного аттрактора (репеллера) быть тесно вложенным несет информацию о вложении неустойчивых многообразий его седловых точек. В примере Пикстона, где $\mathcal{O}_1 = \omega_1,\ \mathcal{O}_2 = \omega_2,\ \mathcal{O}_3 = \sigma,\ \mathcal{O}_4 = \alpha$, имеется единственный одномерный аттрактор $A_3 = cl\ W^u_\sigma$, для которого $g_3 = 0$. При этом любой 3-шар, окружающий $cl\ W^u_\sigma$, пересекает W^s_σ более, чем по одному 2-диску (см. рис. 3, где представлен фазовый портрет диффеоморфизма Пикстона и 3-шар). Следовательно, этот одномерный аттрактор не является тесно вложенным.

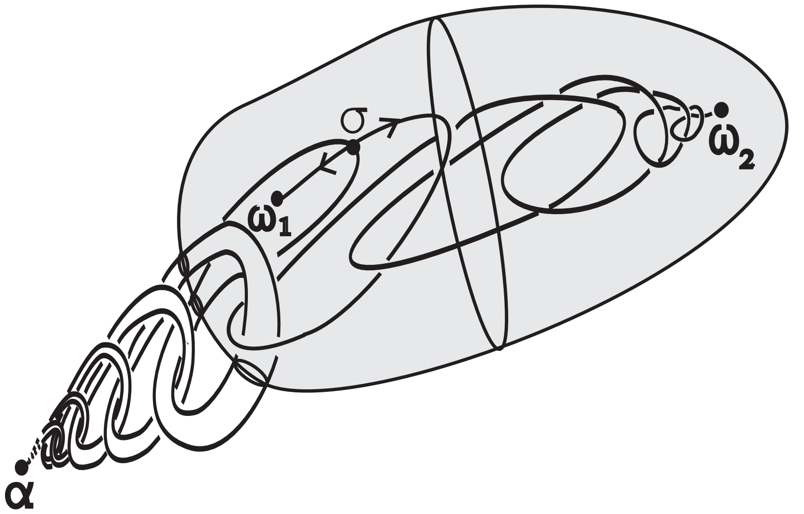

Рис. 3. Одномерный аттрактор в примере Пикстона не является тесно вложенным

Теорема 3.4 (см. [26, Theorem 7.2]). *Если диффеоморфизм $f \in MS(M^3)$ обладает динамически упорядоченной энергетической функцией, то все его одномерные аттракторы и репеллеры являются тесно вложенными.*

Определение 3.9. Тесная захватывающая окрестность M_i одномерного аттрактора A_i называется *строго тесной*, если $M_i \setminus A_i$ диффеоморфно $\partial M_i \times (0, 1]$. Одномерный аттрактор A_i, обладающий строго тесной окрестностью M_i называется *строго тесно вложенным*.

Теорема 3.5 (см. [26, Theorem 7.3]). *Если все одномерные аттракторы и репеллеры диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$ являются строго тесно вложенными, то f обладает динамически упорядоченной энергетической функцией.*

В следующей теореме устанавливается критерий существования динамически упорядоченной энергетической функции для диффеоморфизма Морса—Смейла без гетероклинических кривых, заданного на сфере $\mathbb{S}^3$.

Теорема 3.6 (см. [26, Theorem 7.4]). *Диффеоморфизм Морса—Смейла $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ без гетероклинических кривых обладает динамически упорядоченной энергетической функцией тогда и только тогда, когда каждый его одномерный аттрактор и репеллер является тесно вложенным.*

В частности, из теоремы 3.6 следует, что диффеоморфизм $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$, фазовый портрет которого изображен на рис. 4, обладает динамически упорядоченной энергетической функцией. При этом пучок одномерных сепаратрис диффеоморфизма f, содержащих сток ω в своем замыкании, не является ручным, а представляет из себя умеренно дикий пучок Дебрунера—Фокса [20].

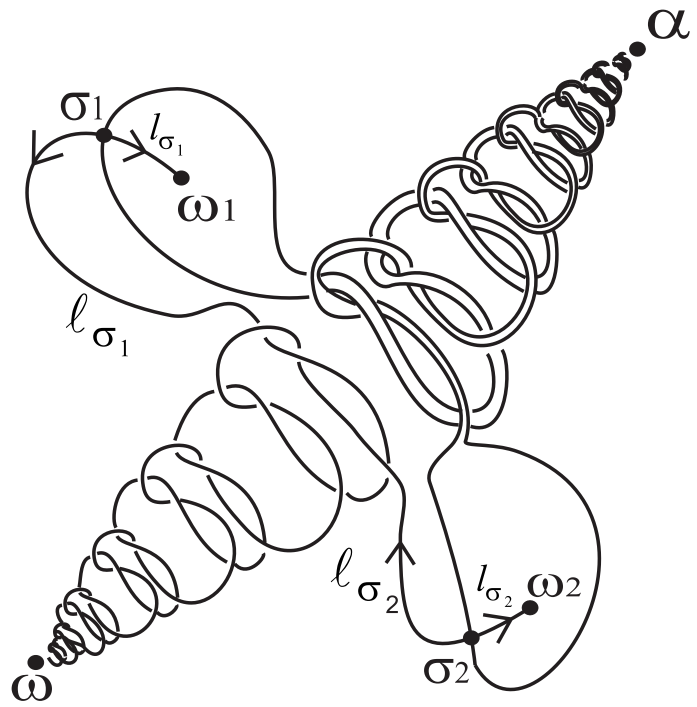

Рис. 4. Диффеоморфизм с умеренно диким пучком сепаратрис

Построение динамически упорядоченной энергетической функции для диффеоморфизма Морса—Смейла $f : M^3 \to M^3$ со строго тесно вложенными одномерными аттракторами и репеллерами идейно повторяет доказательство теоремы 3.3 и опирается на нижеследующие технические леммы.

Напомним, что по предположению теоремы 3.5 каждый одномерный аттрактор $A_i,\ i = k_0 + 1, \dots, k_1$ является строго тесно вложенным и, следовательно, имеет ручечную окрестность M_i рода g_i такую, что $M_i \setminus A_i$ гомеоморфно $S_i \times (0, 1]$, где $S_i = \partial M_i$ и для каждой точки $\sigma \in \mathcal{O}_i$ пересечение $W^s_\sigma \cap M_i$ состоит в точности из одного двумерного диска. Положим $D_i = M_i \cap W^s_{\mathcal{O}_i}$. В силу утверждения 3.1 для каждого нульмерного аттрактора $A_i,\ i = 1, \dots, k_0$,, существует ручечная окрестность рода $g_i = 0$, являющаяся объединением c_i трехмерных шаров, которую мы также будем обозначать через M_i и полагать $S_i = \partial M_i$.

Для $i = 1, \dots, k_1$ положим $K_i = M_i \setminus \operatorname{int} f(M_i)$, $N_i = W^s_{A_i \cap \Omega_f}$ и $V_i = N_i \setminus A_i$. Тогда K_i диффеоморфно $S_i \times [0, 1]$. Поскольку $V_i = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} f^n(K_i)$, то V_i диффеоморфно $S_i \times \mathbb{R}$.

Определение 3.10. Пусть D — подмножество M^3, диффеоморфное многообразию $S \times [0, 1]$ для некоторой (возможно не связной) поверхности S. Тогда D называется (f, S)-сжимаемым произведением, если существует диффеоморфизм $g : D \to S \times [0, 1]$ такой, что $g^{-1}(S \times \{t\})$ ограничивает f-сжимаемую область в M^3 для любого $t \in [0, 1]$.

Предложение 3.5 (см. [26, Proposition 7.4]). *Пусть D — (f, S)-сжимаемое произведение. Тогда для любых значений $d_0 < d_1$ существует энергетическая функция $\varphi_D : D \to \mathbb{R}$ для $f|_D$ такая, что $\varphi_D(g^{-1}(S \times \{0\})) = d_0$ и $\varphi_D(g^{-1}(S \times \{1\})) = d_1$.*

Доказательство. Искомая функция $\varphi_D : D \to \mathbb{R}$ определяется формулой $\varphi_D(x) = d_0 + t(d_1 - d_0)$ для $x \in g^{-1}(S \times \{t\}),\ t \in [0, 1]$. □

Лемма 3.5 (см. [26, Lemma 7.1]). *Пусть $i \in \{1, \dots, k_1\}$ и $P_i,\ Q_i$ — ручечные окрестности рода g_i аттрактора A_i. Если существует динамически упорядоченная энергетическая функция $\varphi_{Q_i} : Q_i \to \mathbb{R}$ для f с множеством уровня $S_{Q_i} = \partial Q_i$, то существует динамически упорядоченная энергетическая функция $\varphi_{P_i} : P_i \to \mathbb{R}$ для f с множеством уровня $S_{P_i} = \partial P_i$.*

Лемма 3.6 (см. [26, Lemma 7.2]). *Пусть $i = k_0 + 1, \dots, k_1$, M_i — строго тесная окрестность аттрактора A_i, $D_i = M_i \cap W^s_{\mathcal{O}_i}$ и $N(D_i) \subset M_i$ — трубчатая окрестность D_i такая, что*

$N(D_i) \cap A_{i-1} = \varnothing$ и множество $P_{i-1} = M_i \setminus N(D_i)$ является f-сжимаемым. Тогда P_{i-1} — ручечная окрестность рода g_{i-1} аттрактора A_{i-1}.

3.4.2. Иллюстрация к теоремам 3.4 *и* 3.5. Заметим, что условие теоремы 3.5 не является необходимым условием существования динамически упорядоченной энергетической функции. В этом разделе мы приведем результат работы [5], а именно, построим диффеоморфизм Морса—Смейла на многообразии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, обладающий динамически упорядоченной энергетической функцией, но одномерные аттрактор и репеллер которого не являются строго тесно вложенными.

Предложение 3.6 (см. [23, Proposition 5.1]). *Существует диффеоморфизм Морса—Смейла $f : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ со следующими свойствами*:

1. *неблуждающее множество Ω_f состоит из четырех неподвижных точек: стока $\mathcal{O}_1 = \omega$, седел $\mathcal{O}_2 = \sigma^+$ и $\mathcal{O}_3 = \sigma^-$ индексов* 1 *и* 2, *источника $\mathcal{O}_4 = \alpha$, следовательно, f имеет единственный одномерный аттрактор $A_2 = W^u_{\sigma^+} \cup \{\omega\}$ и дуальный к нему репеллер $R_2 = W^s_{\sigma^-} \cup \{\alpha\}$ с числом $g_2 = 1$ (см. обозначения перед предложением* 3.4);
2. *$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \setminus (A_2 \cup R_2)$ не является прямым произведением $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, где $\mathbb{T}^2$ — двумерный тор, но f удовлетворяет условиям теоремы* 3.5 *и, следовательно, обладает энергетической функцией Морса.*

Доказательство. Определим диффеоморфизм f^+ на трехмерном шаре B^+ как двукратное сжатие к центру ω. Пусть K^+ — замыкание множества $B^+ \setminus f^+(B^+)$; оно является фундаментальной областью для $f^+|_{B^+}$. Пусть d_1^+, d_2^+ — два непересекающихся 2-диска на ∂B^+ с центрами a_1^+, a_2^+. К этим дискам приклеивается 1-ручка $H^+ \cong [-1,+1] \times D^2$, где D^2 — 2-диск. Мы должны продолжить f^+ на заполненный тор $P^+ = B^+ \cup H^+$ так, что точка $\{0\} \times \{0\}$ в H^+ — неподвижная гиперболическая точка индекса 1, чье локальное неустойчивое многообразие совпадает с $[-1,+1] \times \{0\}$ в H^+ и локальное устойчивое многообразие совпадает с диском $\Delta^+ = \{0\} \times D^2$ в H^+ (например $f^+|_{\Delta^+}$ — двукратное сжатие). Определим вложение $f^+ : ([-1,-1/2] \cup [1/2,1]) \times D^2 \to A^+$ так, что его образ в K^+ есть две непересекающиеся трубочки, соединяющие $\dfrac{1}{2}d_1^+,\ \dfrac{1}{2}d_2^+$ с $f^+(d_1^+),\ f^+(d_2^+)$, соответственно. Опишем середины этих трубочек.

Для этого выберем кривую C^+, составленную из дуг (c_1^+, c_2^+) в K^+, каждая из которых соединяет точку $a_i^+,\ i = 1,2$ с ее образом $f^+(a_i^+)$, и обладающую свойствами:

i) пара (K^+, C^+) не гомеоморфна прямому произведению $(\mathbb{S}^2 \setminus \{x,y\}) \times [0,1]$;

ii) существует инволюция $I^+ : (K^+, C^+) \to (K^+, C^+)$, которая переставляет границы K^+ так, что $I^+|_{\partial B^+} = f^+$.

Пример такой дуги показан на рис. 5, для нее инволюция I^+ является отражением относительно серединной сферы K^+. По построению f^+ — сжатие P^+ с двумя неподвижными гиперболическими точками, стоком ω и седлом σ^+ с индексом 1. Неустойчивое многообразие седла σ^+ состоит из середины H^+ и объединения $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (f^+)^n(C^+)$. Пусть W^+ — замыкание множества $P^+ \setminus f^+(P^+)$; оно ограничено двумя торами.

Лемма 3.7 (см. [23, Lemma 5.2]).

1. *Множество W^+ не гомеоморфно $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$.*
2. *Существует инволюция $J^+ : W^+ \to W^+$, которая переставляет граничные компоненты так, что $J^+|_{\partial P^+} = f^+$.*

Доказательство.

1) Заметим, что $f^+(P^+)$ — трубчатая окрестность замкнутой кривой κ^+ в P^+, которая пересекает Δ^+ (меридианный диск заполненного тора P^+) в единственной точке σ^+. Разрезая P^+ вдоль Δ^+, мы получим 3-шар $Q^+ \cong B^+$ и узел $\kappa'^+ = \kappa^+ \cap Q^+$, который состоит из объединения c_1^+, c_2^+ и незаузленных дуг в $f^+(\partial B^+)$, соединяющих $f^+(a_1^+)$ с $f^+(a_2^+)$. Если мы разрежем $f^+(P^+)$ вдоль Δ^+, мы получим трубчатую окрестность дуги κ'^+. Нетрудно проверить, что условие i) для построенной кривой C^+ эквивалентно следующему условию:

i') в Q^+ не существует вложенного диска с границей, состоящей из кривой κ'^+ и дуги в ∂Q^+.

Предположим, что W^+ является прямым произведением. Тогда существует двумерное кольцо R^+ с одной граничной компонентой в ∂P^+ и другой — состоящей из κ^+. Стандартной техникой

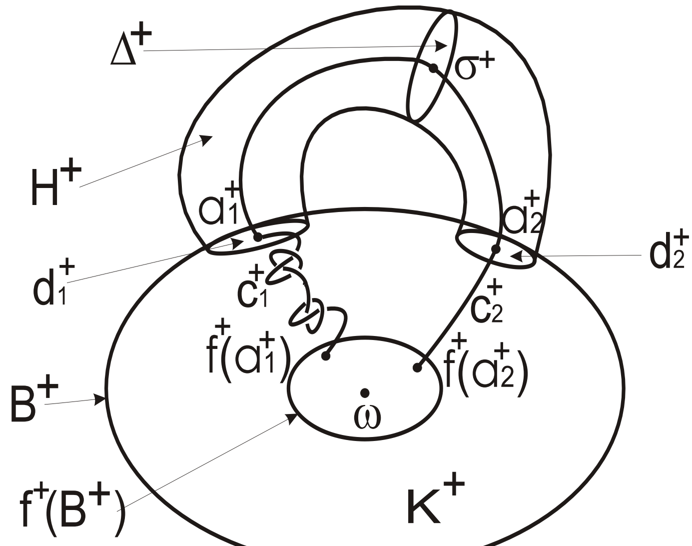

Рис. 5. Построение диффеоморфизма на заполненном торе

пересечение $R^+ \cap \Delta^+$ может быть сведено к дуге, соединяющей граничные компоненты R^+. Тогда, разрезая R^+ вдоль Δ^+, получим диск в Q^+, противоречащий условию i').

2) Пусть N^+ — трубчатая окрестность C^+ в K^+, которая инвариантна относительно I^+. Граничные слои N^+ состоят из дисков d_1^+, d_2^+ и их образов относительно f^+. Другое описание W^+ есть следующее. Мы удаляем внутренность N^+ (т. е. открытую трубчатую окрестность) и вдоль $\partial N^+ \cong \mathbb{S}^1 \times [0,1] \times \{-1,1\}$ приклеиваем $H'^+ := \mathbb{S}^1 \times [0,1] \times [-1,1]$. В таком представлении W^+ ограничение f^+ на $\partial P^+ \cap H^+$ является «тождественным» на $\mathbb{S}^1 \times \{0\} \times [-1,1] \to \mathbb{S}^1 \times \{1\} \times [-1,1]$. С другой стороны, ограничение инволюции I^+ на ∂N^+ сопряжено с $Id|_{\mathbb{S}^1} \times \tau$, где τ — стандартная инволюция отрезка $[0,1]$. Поэтому I^+ продолжается на H'^+ как инволюция J^+, которая является «тождественной» из $\partial P^+ \cap H'^+ \cong \mathbb{S}^1 \times \{0\} \times [-1,1]$ в $f^+(\partial P^+) \cap H'^+ \cong \mathbb{S}^1 \times \{1\} \times [-1,1]$. Наконец, $J^+ = f^+$ на ∂P^+. □

Рассмотрим факторпространство W^+/f^+ и естественную проекцию $p^+ : W^+ \to W^+/f^+$. Из конструкции выше следует, что $T^+ = p^+(\Delta^+ \cap W^+)$ — двумерный тор. Пусть $V^+ \cong T^+ \times [-1,1]$ — трубчатая окрестность T^+ в W^+/f^+ и $\hat{h} : W^+/f^+ \to W^+/f^+$ — диффеоморфизм такой, что $\hat{h}$ сохраняет p^+, $\hat{h} = id$ вне $\operatorname{int} V^+$ и $\hat{h}(T^+) \cap T^+ = \varnothing$. Тогда поднятие $h : W^+ \to W^+$ отображения $\hat{h}$ сохраняет ∂P^+, коммутирует с f^+ и $h(\Delta^+ \cap W^+) \cap \Delta^+ = \varnothing$.

Чтобы закончить построение примера, рассмотрим новую копию P^- заполненного тора P^+. Склеим их в силу отображения $h \circ J^+$, используя диффеоморфизм $W^- \to W^+$, где W^- — копия W^+ в P^-. Пусть $f^- : P^- \to P^-$ — копия f^+. Тогда объемлющее многообразие есть $M^3 = P^- \underset{h \circ J^+}{\cup} P^+$ и диффеоморфизм $f : M^3 \to M^3$ определяется формулами: $f|_{P^+} = f^+$ и $f|_{P^-} = (f^-)^{-1}$; нетрудно проверить, что такое определение корректно. Построенное отображение f является диффеоморфизмом Морса—Смейла, у которого неустойчивое многообразие седла σ^- не пересекается с устойчивым многообразием седла σ^+.

Репеллер R_2 есть аттрактор для f^-, т. е. является копией A_2 в P^-. Заменим P^- на $f^{-1}(P^-)$, тогда P^+ и $f^{-1}(P^-)$ имеют только общую границу и предположения теоремы 3.5 выполнены. В построенном примере $M^3 \setminus (A_2 \cup R_2)$ не гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$. Действительно, если бы это было произведение, то W^+ должно было бы быть также произведением, что противоречит лемме 3.7. □

3.4.3. Квази энергетическая функция. Из результатов раздела 3.4.1 следует, что не любой диффеоморфизм Морса—Смейла обладает энергетической функцией Морса—Ляпунова, в связи с чем естественно дать следующее определение.

Определение 3.11. Назовем функцию Морса—Ляпунова $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ *квази-энергетической* для диффеоморфизма Морса—Смейла $f : M^n \to M^n$, если она имеет наименьшее возможное число критических точек среди всех функций Морса—Ляпунова для f.

В этом разделе мы рассматриваем класс G_4 диффеоморфизмов Морса—Смейла $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$, чье неблуждающее множество состоит в точности из четырех неподвижных точек: одного источника α, одного седла σ и двух стоков ω_1 и ω_2. Замыкание каждой компоненты связности (сепаратрисы) одномерного многообразия $W^u(\sigma) \setminus \sigma$ гомеоморфно отрезку, который состоит из этой сепаратрисы и двух точек: σ и некоторого стока (см., например, [26, Proposition 2.3]). Обозначим через ℓ_1, ℓ_2 одномерные сепаратрисы, содержащие стоки ω_1, ω_2, соответственно, в своих замыканиях. Пусть $cl(\ell_i)$ — замыкание сепаратрисы ℓ_i, $i = 1, 2$. Тогда $cl(\ell_i) \setminus \omega_i$ является гладким многообразием многообразия $\mathbb{S}^3$ (см., например, [26, Theorem 2.1]). Поэтому топологическое вложение $cl(\ell_i)$ может быть сложным лишь в окрестности стока ω_i.

Согласно [17], сепаратриса ℓ_i называется *ручной* (или *ручно вложенной*), если существует гомеоморфизм $\psi_i : W^s(\omega_i) \to \mathbb{R}^n$ такой, что $\psi(\omega_i) = O$, где O — начало координат в $\mathbb{R}^n$ и $\psi_i(cl(\ell_i) \setminus \sigma)$ — луч с началом в точке O. В противном случае ℓ_i называется *дикой*. Из критерия в [28] следует, что ручность ℓ_i эквивалентна существованию в любой окрестности ω_i гладкого 3-шара B_i, содержащего ω_i и такого, что $\ell_i \cap \partial B_i$ состоит в точности из одной точки. Используя [26, Lemma 4.2], можно уточнить этот критерий следующим образом: сепаратриса ℓ_i является ручной, если и только если существует 3-шар B_{ω_i} такой, что $\omega_i \in f(B_{\omega_i}) \subset \operatorname{int} B_{\omega_i} \subset W^s(\omega_i)$ и $\ell_i \cap \partial B_{\omega_i}$ состоит в точности из одной точки.

В работе [18] (см. также [26, Proposition 4.3]) было доказано, что для каждого диффеоморфизма $f \in \mathcal{G}_4$ по крайней мере одна сепаратриса (скажем, ℓ_1) является ручной. Там же было показано, что топологическая классификация диффеоморфизмов из класса $\mathcal{G}_4$ сводится к классификации вложений сепаратрисы ℓ_2, следовательно, существует бесконечно много диффеоморфизмов в $\mathcal{G}_4$, которые не являются топологически сопряженными.

Чтобы охарактеризовать тип вложения ℓ_2, мы введем некоторое специальное разбиение Хегора для $\mathbb{S}^3$. Напомним, что трехмерное ориентируемое многообразие называется *ручечным телом рода* $g \geqslant 0$, если оно получено из 3-шара отождествлением g пар попарно непересекающихся 2-дисков, принадлежащих его границе, посредством меняющего ориентацию гомеоморфизма. Граница ручечного тела является ориентируемой поверхностью рода g.

Пусть $P^+ \subset \mathbb{S}^3$ — ручечное тело рода g такое, что $P^- = \mathbb{S}^3 \setminus \operatorname{int} P^+$ — ручечное тело (по необходимости того же рода, что и P^+). Тогда пара (P^+, P^-) называется *разбиением Хегора рода* g сферы $\mathbb{S}^3$ с поверхностью Хегора $S = \partial P^+ = \partial P^-$.

Определение 3.12. Разбиение Хегора (P^+, P^-) сферы $\mathbb{S}^3$ назовем *f-адаптированным* для $f \in G_4$, если:

a) $cl(W^u(\sigma)) \subset f(P^+) \subset \operatorname{int} P^+$;
b) $W^s(\sigma)$ трансверсально пересекает ∂P^+ и пересечение $W^s(\sigma) \cap P^+$ состоит из единственного 2-диска.

Мы называем f-адаптированное разбиение Хегора $\mathbb{S}^3 = P^+ \cup P^-$ *минимальным*, если оно имеет минимальный род среди всех f-адаптированных разбиений.

Для каждого целого числа $k \geqslant 0$ обозначим через $G_{4,k}$ множество диффеоморфизмов $f \in G_4$, для которых минимальное f-адаптированное разбиение Хегора имеет род k. Легко заметить, что для каждого $f \in G_{4,0}$ сепаратриса ℓ_2 является ручной, и согласно теореме 3.6, f обладает энергетической функцией, тогда как любой диффеоморфизм из класса $G_{4,k}$, $k > 0$, не имеет энергетической функции. На рис. 6 изображен фазовый портрет диффеоморфизма из класса $G_{4,1}$. Основным результатом этой работы является следующая теорема.

Теорема 3.7 (см. [5, Теорема 1]). *Каждая квази-энергетическая функция диффеоморфизма $f \in G_{4,1}$ имеет в точности шесть критических точек.*

Доказательство. Построение квази-энергетической функции мы будем проводить аналогично построению энергетической функции, проведенному в разделе 3.3. При этом мы опустим некоторые детали, ссылаясь на соответствующие места конструкции.

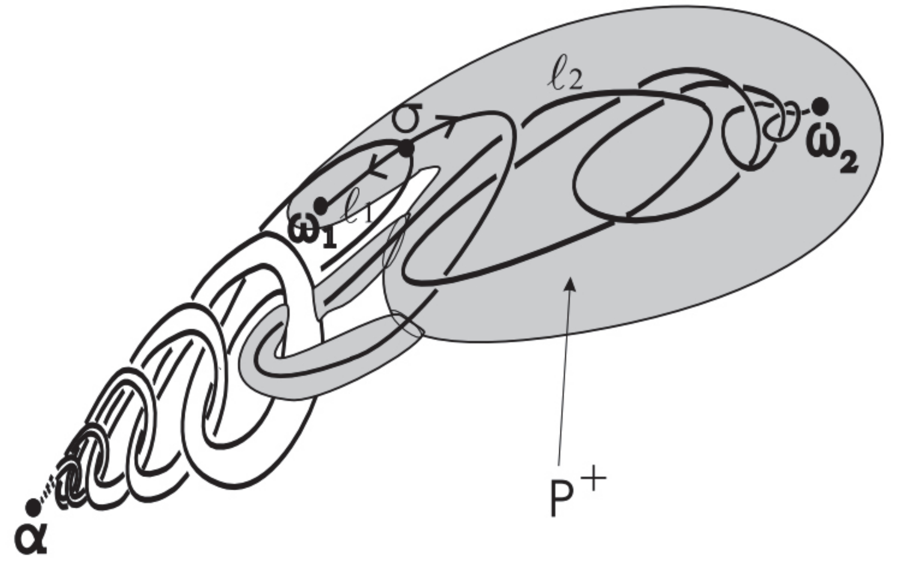

Рис. 6. Диффеоморфизм из класса $G_{4,1}$

1. Следуя лемме 3.1, выберем энергетическую функцию $\varphi_p : U_p \to \mathbb{R}$ в окрестности каждой неподвижной точки p диффеоморфизма f.

2. Из определения класса $G_{4,1}$ следует, что для каждого $f \in G_{4,1}$ существует заполненный тор P^+, принадлежащий разбиению Хегора (P^+, P^-) сферы $\mathbb{S}^3$ и такой, что:

a) $cl(W^u(\sigma)) \subset f(P^+) \subset \operatorname{int} P^+$;

b) $W^s(\sigma)$ пересекается трансверсально ∂P^+ и пересечение $W^s(\sigma) \cap P^+$ состоит из единственного 2-диска.

Поскольку $\mathbb{S}^3 \setminus cl(W^s(\sigma))$ является несвязным объединением $W^s(\omega_1) \cup W^s(\omega_2)$, то по свойству b), множество $P^+ \setminus W^s(\sigma)$ состоит из двух компонент связности. Кроме того, существует окрестность двумерного диска $P^+ \cap W^s(\sigma)$ такая, что после ее удаления из P^+ мы получим 3-шар P_{ω_1} и заполненный тор P_{ω_2} со следующими свойствами для каждого $i = 1, 2$:

a) $\omega_i \in f(P_{\omega_i}) \subset \operatorname{int} P_{\omega_i} \subset W^s(\omega_i)$;

b) ∂P_{ω_i} — поверхность Хегора и $\ell_i \cap \partial P_{\omega_i}$ состоит в точности из одной точки.

Не уменьшая общности, мы можем предполагать, что ∂P_{ω_i} трансверсальна к регулярной части критического уровня $C := \varphi_\sigma^{-1}(1)$ функции φ_σ и пересечение $C \cap \partial P_{\omega_i}$ состоит в точности из одной окружности (в противном случае мы можем, пользуясь λ-леммой, заменить P_{ω_i} на $f^{-n}(P_{\omega_i})$ для некоторого $n > 0$). Для $\varepsilon \in (0, 1/2)$ определим H^+_ϵ как замыкание множества $\{x \in U_\sigma \mid x \notin (P_{\omega_1} \cup P_{\omega_2}),\ \varphi_\sigma(x) \leqslant 1+\varepsilon\}$ и положим $P^+_\epsilon = P_{\omega_1} \cup P_{\omega_2} \cup H^+_\epsilon$. Аналогично доказательству теоремы 3.3 возможно выбрать $\varepsilon > 0$ таким образом, что ∂P_{ω_i} трансверсально пересекает по одной окружности каждое множество уровня функции φ_σ со значением, принадлежащим интервалу $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$. Выберем сглаживание Q^+ заполненного тора P^+_ε так, что $f(Q^+) \subset \operatorname{int} Q^+$ и $\Sigma := \partial Q^+$ является поверхностью Хегора рода 1 (см. рис. 7). Пусть Q^- — замыкание множества $\mathbb{S}^3 \setminus \operatorname{int} Q^+$. Легко проверить, что Q^+, как и P^+_ε, являются изотопными P^+ в $\mathbb{S}^3$. Поэтому пара (Q^+, Q^-) является f-адаптированным разбиением Хегора.

3. Для каждого $i = 1, 2$ обозначим через $\tilde{P}_{\omega_i}$ ручечное тело рода $i-1$ такое, что:

а) $f(P_{\omega_i}) \subset \tilde{P}_{\omega_i} \subset \operatorname{int} P_{\omega_i}$;

б) $\partial \tilde{P}_{\omega_i}$ трансверсально пересекает по одной окружности каждое множество уровня функции φ_σ со значением, принадлежащим интервалу $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$;

в) $P_{\omega_i} \setminus \operatorname{int} \tilde{P}_{\omega_i}$ диффеоморфно $\partial P_{\omega_i} \times [0, 1]$.

Определим d_i как замыкание множества $\{x \in U_\sigma \mid x \in (W^s(\omega_i) \setminus \tilde{P}_{\omega_i}),\ \varphi_\sigma(x) = 1-\varepsilon\}$. По построению d_i является диском, граница которого одновременно ограничивает диск D_i в $\partial \tilde{P}_{\omega_i}$. Положим $S_i = (\partial \tilde{P}_{\omega_i} \setminus \operatorname{int} D_i) \cup d_i$ и обозначим через $P(S_i)$ ручечное тело рода $i-1$, ограниченное

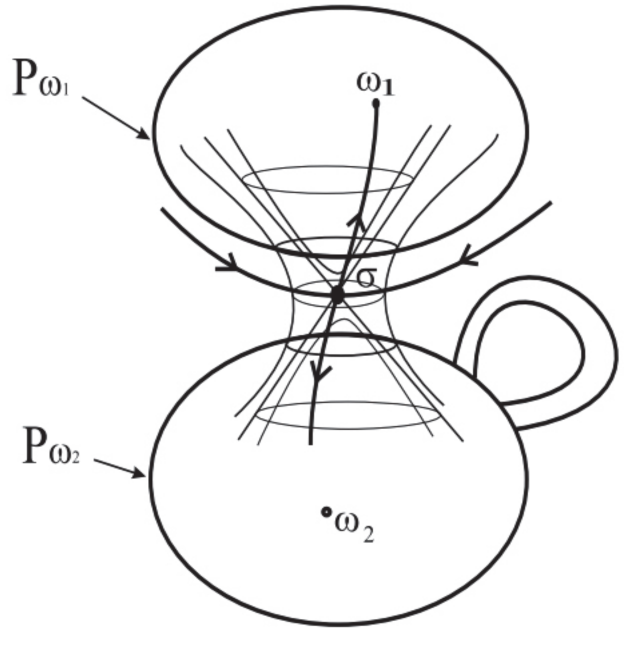

Рис. 7. Разбиение Хегора (Q^+, Q^-)

S_i и содержащее ω_i. Как и в теореме 3.3, устанавливается, что ε можно выбрать таким образом, что $f(P(S_i)) \subset \operatorname{int} P(S_i)$.

Пусть K — область между ∂Q^+ и $S_1 \cup S_2$. Обозначим через T^+ замыкание множества $\{x \in \mathbb{S}^3 \mid x \notin (P_{\omega_1} \cup P_{\omega_2}),\ 1-\varepsilon \leqslant \varphi_\sigma(x) \leqslant 1+\varepsilon\}$. Заметим, что $T^+ \subset U_\sigma$. Определим функцию $\varphi_{_K} : K \to \mathbb{R}$ со значениями $1+\varepsilon$ на ∂Q^+, $1-\varepsilon$ на $S_1 \cup S_2$, совпадающую с φ_σ на $K \cap T^+$ и без критических точек вне T^+. Это последнее условие легко выполнимо, так как рассматриваемая область является тривиальным кобордизмом. Аналогично теореме 3.3 проверяется, что φ^+ является функцией Морса—Ляпунова.

4. Поскольку $P(S_1)$ — 3-шар такой, что $\omega_1 \in f(P(S_1)) \subset \operatorname{int} P(S_1) \subset W^s(\omega_1)$, то согласно лемме 3.5 существует энергетическая функция $\varphi_{_{P(S_1)}} : P(S_1) \to \mathbb{R}$ диффеоморфизма f, которая принимает значение $1-\varepsilon$ на множестве S_1.

5. Поскольку $P(S_2)$ — заполненный тор такой, что $\omega_2 \in f(P(S_2)) \subset \operatorname{int} P(S_2) \subset W^s(\omega_2)$, то согласно лемме 3.6 существует 3-шар B_{ω_2} такой, что $f(P(S_2)) \subset B_{\omega_2} \subset \operatorname{int} P(S_2)$. Как в предыдущем пункте, существует энергетическая функция $\varphi_{_{B_{\omega_2}}} : B_{\omega_2} \to \mathbb{R}$ диффеоморфизма f, которая принимает значение $\dfrac{1}{2}$ на множестве ∂B_{ω_2}.

6. Известно, что заполненный тор может быть получен из 3-шара отождествлением пары непересекающихся 2-дисков на его границе. Поэтому $P(S_2)$ получается приклеиванием к границе некоторого 3-шара элементарного кобордизма индекса 1. Так как с точностью до изотопии существует единственный 3-шар во внутренности заполненного тора, то $(W_{\omega_2}, \partial B_{\omega_2}, S_2)$ есть элементарный кобордизм индекса 1, где $W_{\omega_2} = P(S_2) \setminus \operatorname{int} B_{\omega_2}$. Тогда W_{ω_2} обладает функцией Морса $\varphi_{_{W_{\omega_2}}}$ только с одной критической точкой индекса 1 и такой, что $\varphi_{_{W_{\omega_2}}}(\partial B_{\omega_2}) = \dfrac{1}{2}$, $\varphi_{_{W_{\omega_2}}}(S_2) = 1-\varepsilon$.

7. Определим гладкую функцию $\varphi^+ : Q^+ \to \mathbb{R}$ формулой

$$\varphi^+(x) = \begin{cases} \varphi_{_K}(x), x \in K; \\ \varphi_{_{P(S_1)}}(x), x \in P(S_1); \\ \varphi_{_{B_{\omega_2}}}(x), x \in B_{\omega_2}; \\ \varphi_{_{W_{\omega_2}}}(x), x \in W_{\omega_2}. \end{cases}$$

Тогда φ^+ — функция Морса—Ляпунова для $f|_{Q^+}$ с одной дополнительной критической точкой.

8. По построению Q^- — заполненный тор такой, что $\alpha \in f^{-1}(Q^-) \subset \operatorname{int} Q^- \subset W^u(\alpha)$. Поскольку α — сток для f^{-1}, тогда, как в пункте 4, существуют 3-шар B_α такой, что $f^{-1}(Q^-) \subset B_\alpha \subset \operatorname{int} Q^-$, и энергетическая функция $\varphi_{B_\alpha} : B_\alpha \to \mathbb{R}$ для f^{-1}, которая принимает значение $\dfrac{1}{2}$ на множестве ∂B_α.

9. Подобно пункту 5, ∂Q^- получается из ∂B_α перестройкой индекса 1. Поэтому $(W_\alpha = Q^- \setminus \operatorname{int} B_\alpha, \partial Q^-, \partial B_\alpha)$ есть элементарный кобордизм индекса 1, где $W_\alpha = Q^- \setminus \operatorname{int} B_\alpha, \partial Q^-$. Следовательно, W_α обладает функцией Морса φ_{W_α} только с одной критической точкой индекса 1 и такой, что $\varphi_{W_\alpha}(\partial B_\alpha) = \dfrac{1}{2}$ и $\varphi_{W_\alpha}(\partial Q^-) = 2 - \varepsilon$.

10. Определим гладкую функцию $\varphi^- : Q^- \to \mathbb{R}$ формулой

$$\varphi^-(x) = \begin{cases} 3 - \varphi_{B_\alpha}(x), x \in \varphi_{B_\alpha}; \\ 3 - \varphi_{W_\alpha}(x), x \in \varphi_{W_\alpha}. \end{cases}$$

Тогда φ^- — функция Морса—Ляпунова для $f|_{Q^-}$ с одной дополнительной критической точкой.

11. Функция $\varphi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}$ такая, что $\varphi|_{Q^+} = \varphi^+$ и $\varphi|_{Q^-} = \varphi^-$ — функция Морса—Ляпунова для диффеоморфизма f в точности с шестью неподвижными точками. $\square$

4. Построение энергетической функции для диффеоморфизмов с хаотическим поведением

В этом разделе мы будем рассматривать Ω-устойчивые диффеоморфизмы f с бесконечным цепно рекуррентным множеством на n-многообразии M^n. Цепно рекуррентное множество таких диффеоморфизмов является гиперболическим, и в нем всюду плотны периодические точки. Динамически гиперболичность выражается в том, что любая точка $p \in R_f$ обладает *неустойчивым* и *устойчивым* многообразием

$$W^u_p = \{x \in M : d(f^k(p), f^k(x)) \to 0 \text{ при } k \to +\infty\} \text{ и}$$

$$W^s_p = \{x \in M : d(f^k(p), f^k(x)) \to 0 \text{ при } k \to -\infty\},$$

которые являются образами $\mathbb{R}^q, q \in \{0, \dots, n\}$ и $\mathbb{R}^{n-q}$ при инъективной иммерсии, d — метрика на многообразии. Условие гиперболичности неблуждающего множества и всюду плотности в нем периодических точек приводит к разложению множества R_f в объединение конечного числа так называемых *базисных множеств*, каждое из которых является замыканием траектории системы (см., например, [16, 38]). Базисное множество называется *нетривиальным*, если оно не является периодической орбитой (в частности, не является неподвижной точкой).

В силу результатов Р. В. Плыкина [13] базисное множество Λ диффеоморфизма f является аттрактором (репеллером) тогда и только тогда, когда $\Lambda = \bigcup\limits_{x \in \Lambda} W^u_x$ $(\Lambda = \bigcup\limits_{x \in \Lambda} W^s_x)$. Кроме того, любое базисное множество топологической размерности n или $n-1$ является либо аттрактором, либо репеллером.

Аттрактор Λ диффеоморфизма f называется *растягивающимся аттрактором*, если топологическая размерность $\dim \Lambda$ равна размерности неустойчивого многообразия $W^u_x, x \in \Lambda$. Репеллер диффеоморфизма f называется *сжимающимся*, если он является растягивающимся аттрактором для f^{-1}.

Согласно [6] базисное множество Λ A-диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ называется *поверхностным*, если оно принадлежит f-инвариантной замкнутой поверхности M^2_Λ (не обязательно связной), топологически вложенной в многообразие M^3 и называемой *носителем* множества Λ.

В следующих разделах 4.1, 4.2, 4.3 мы конструируем энергетические функции для некоторых классов Ω-устойчивых каскадов на 2- и 3-многообразиях. Все построения основаны на техническом факте, касающемся сглаживания непрерывной функции, который доказан в последнем разделе 4.4.

4.1. Ω-устойчивые 2-диффеоморфизмы с нетривиальными базисными множествами размерности один. В настоящем разделе рассматривается множество $S(M^2)$, состоящее из Ω-устойчивых 2-диффеоморфизмов $f : M^2 \to M^2$, каждое нетривиальное базисное множество которого является одномерным.

Детальную информацию о динамике таких диффеоморфизмов можно найти, например, в статье [1] или в главе 9 книги [26].

Пусть $f \in S(M^2)$ и Λ — нетривиальное базисное множество диффеоморфизма f. Для любой точки $p \in \Lambda$ хотя бы одна из компонент связности множества $W^s_p \setminus p$ ($W^u_p \setminus p$) имеет непустое пересечение с Λ. Точка $p \in \Lambda$ называется *s-граничной* (*u-граничной*) точкой аттрактора (репеллера) Λ, если одна из компонент связности множества $W^s_p \setminus p$ ($W^u_p \setminus p$) не пересекается с Λ, обозначим через $\ell^{s\varnothing}_p$ ($\ell^{u\varnothing}_p$) такую компоненту. Любой аттрактор (репеллер) Λ имеет конечное множество P_Λ s-граничных (u-граничных) точек.

Для каждого аттрактора Λ существует захватывающая окрестность U_Λ, которая строится следующим образом: для каждой компоненты связности $S_b, b \in \{1, \dots, m_\Lambda\}$ множества Λ выбирается простая гладкая замкнутая кривая L_b так, что каждая сепаратриса $\ell^{s\varnothing}_p$, $p \in P_\Lambda$ трансверсально пересекает $L_\Lambda = \bigcup\limits_{b=1}^{m_\Lambda} L_b$ в точности в одной точке; $f(L_\Lambda) \cap L_\Lambda = \varnothing$ и кривые множеств L_Λ и $f(L_\Lambda)$ являются границами двумерных попарно не пересекающихся колец $K_1, \dots, K_{m_\Lambda}$, состоящих из блуждающих точек. Тогда поверхность $U_\Lambda = \Lambda \cup \bigcup\limits_{n \geqslant 1} f^n(K_\Lambda)$, где $K_\Lambda = \bigcup\limits_{b=1}^{m_\Lambda} K_b$ является захватывающей окрестностью аттрактора Λ (см. рис. 8).

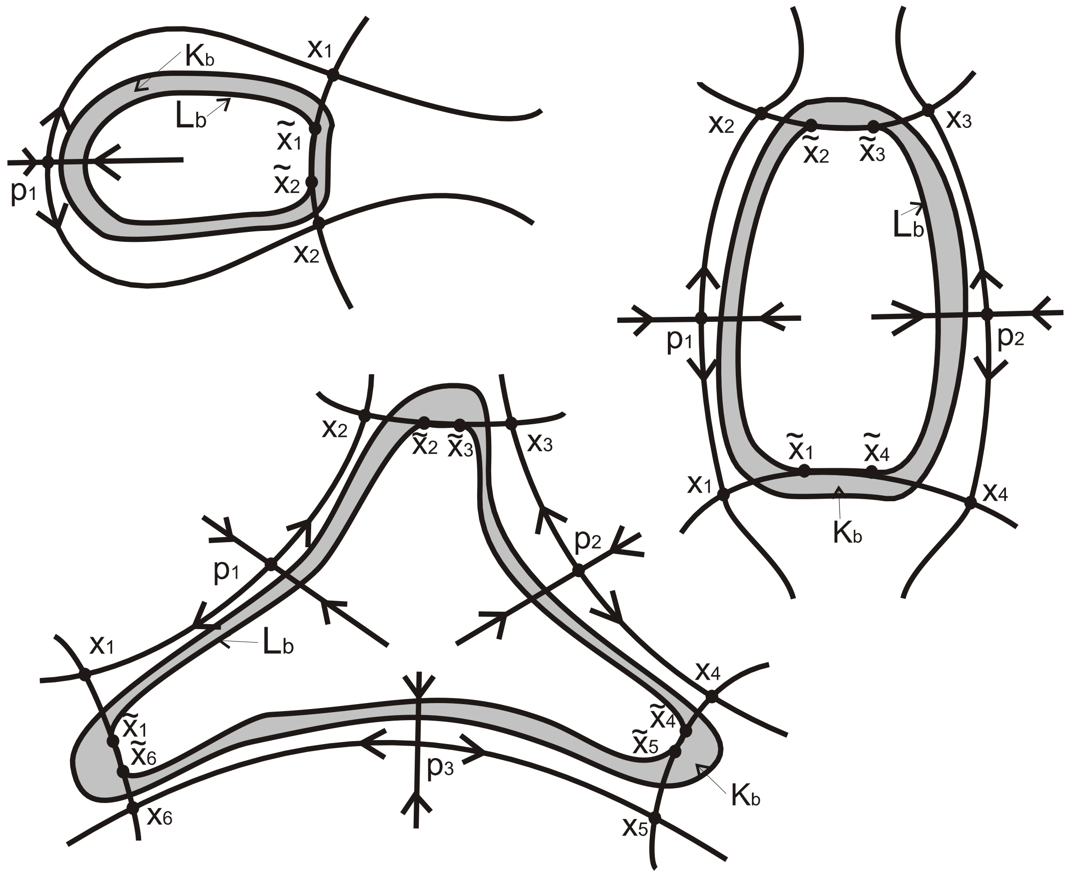

Рис. 8. Построение поверхности U_Λ

Основным результатом настоящего раздела является доказательство следующей теоремы.

Теорема 4.1. *Для любого диффеоморфизма $f \in S(M^2)$ существует энергетическая функция, являющаяся функцией Морса вне нетривиальных базисных множеств.*

Доказательство. Обозначим через $A_1, \dots, A_{k_A}$ ($R_1, \dots, R_{k_R}$) нетривиальные одномерные аттракторы (репеллеры) диффеоморфизма f. Пусть $U_{A_1}, \dots, U_{A_{k_A}}$ ($U_{R_1}, \dots, U_{R_{k_R}}$) — захватывающие окрестности аттракторов (репеллеров), построенные выше с помощью колец $K_{A_1}, \dots, K_{A_{k_A}}$

$(K_{R_1}, \dots, K_{R_{k_R}})$. Положим $A = A_1 \cup \dots \cup A_{k_A}$, $R = R_1 \cup \dots \cup R_{k_R}$, $U_A = U_{A_1} \cup \dots \cup U_{A_{k_A}}$, $U_R = U_{R_1} \cup \dots \cup U_{R_{k_R}}$, $K_A = K_{A_1} \cup \dots \cup K_{A_{k_A}}$, $K_R = K_{R_1} \cup \dots \cup K_{R_{k_R}}$ и $U = U_A \cup U_R$. Обозначим через D дизъюнктное объединение 2-дисков в числе, равном числу компонент связности множества ∂U. Положим $\check{M} = M^2 \setminus U$ и $N = \check{M} \cup_q D$, где $q : \partial U \to \partial D$ — диффеоморфизм. Обозначим через $\pi : \check{M} \cup D \to N$ естественную проекцию.

По построению N — гладкая поверхность без края, допускающая диффеоморфизм Морса—Смейла $f_N : N \to N$, совпадающий с диффеоморфизмом $\pi f \pi^{-1}$ на множестве $\pi(\check{M})$ и имеющий по одной периодической точке (стоковой или источниковой) на каждой компоненте связности множества $\pi(D)$, обозначим через P множество этих точек. В силу результатов раздела 3.3 для диффеоморфизма f_N существует энергетическая функция Морса $\varphi_N : N \to [0,2]$ такая, что $\varphi(\Omega^0_{f_N}) = 0$, $\varphi(\Omega^2_{f_N}) = 2$ и $\pi(\partial U_A)$, $\pi(\partial U_R)$ — множества уровня функции φ_N со значениями $1/2$, $3/2$ соответственно. По построению диффеоморфизмы $f|_{M^2 \setminus (A \cup R)}$ и $f_N|_{N \setminus P}$ гладко сопряжены посредством диффеоморфизма $h : M^2 \setminus (A \cup R) \to N \setminus P$, совпадающего с π на $\check{M}$. Тогда $\varphi = \varphi_N h$ является гладкой функцией на $M^2 \setminus (A \cup R)$, которая непрерывно продолжается на $A \cup R$ так, что $\varphi(A) = 0$, $\varphi(R) = 1$.

По построению функция $\varphi : M^2 \to [0,2]$ является непрерывной функцией Ляпунова для диффеоморфизма f, которая является энергетической функцией Морса для f на $M^2 \setminus (A \cup R)$. Положим $\varphi_A = \varphi|_{U_A}$. По построению $\varphi_A(U_A) = [0, 1/2]$ и $\varphi_A^{-1}(0) = A$. Из леммы 4.1 следует, что существует функция $g_A : [0,1/2] \to [0,1/2]$ такая, что функция $\psi_A = g_A \circ \varphi_A$ является энергетической функцией на U_A для f. Положим $\varphi_R = 2 - \varphi|_{U_R}$. По построению $\varphi_R(U_R) = [0,1/2]$ и $\varphi_R^{-1}(0) = R$. Из леммы 4.1 следует, что существует функция $g_R : [0,1/2] \to [0,1/2]$ такая, что функция $\psi_R = g_R \circ \varphi_R$ является энергетической функцией на U_R для f^{-1}. Так как функции g_A и g_R являются тождественными на отрезке $[1/4, 1/2]$, то функция

$$\psi(z) = \begin{cases} \varphi(z), \text{ если } z \in (M^2 \setminus (U_A \cup U_R)); \\ \psi_A(z), \text{ если } z \in U_A; \\ 2 - \psi_R(z), \text{ если } z \in U_R \end{cases}$$

является искомой энергетической функцией на M^2 для диффеоморфизма f. □

4.2. Структурно устойчивые 3-диффеоморфизмы с двумерным растягивающимся аттрактором (сжимающимся репеллером). В настоящей работе рассматривается класс $T(M^3)$ структурно устойчивых диффеоморфизмов на 3-многообразии $f : M^3 \to M^3$, неблуждающее множество которых содержит двумерный растягивающийся аттрактор A (случай растягивающегося репеллера полностью аналогичен). В этом случае (см. Предложение 4.1) многообразие M^3 диффеоморфно трехмерному тору и A — единственное нетривиальное базисное множество диффеоморфизма f.

Изложим необходимую для построения энергетической функции информацию о динамике диффеоморфизма $f \in T(M^3)$, следуя работе [2]. Заметим, что все результаты работы [2] сформулированы для многообразия размерности $n \geqslant 3$ и случая, когда A является ориентируемым базисным множеством[1]. Однако, в работе [9] доказано, что в случае нечетного n базисное множество A является ориентируемым. Поэтому везде ниже, формулируя выжимку результатов работы [2] для случая $n = 3$, мы не требуем от A дополнительно быть ориентируемым.

Пусть $f \in T(M^3)$ и A — двумерный растягивающийся аттрактор диффеоморфизма f. Тогда $\dim\, W^s_x = 1$ для любой точки $x \in A$, что позволяет ввести обозначение $(z,y)^s$ $([z,y]^s)$ для открытой (замкнутой) дуги устойчивого многообразия W^s_x, ограниченной точками $y, z \in W^s_x$.

Множество $W^s_x \setminus x$ состоит из двух компонент связности. Хотя бы одна из этих компонент имеет непустое пересечение с множеством A. Точка $x \in A$ называется *s-граничной*, если одна из компонент связности множества $W^s_x \setminus x$ не пересекается с A, будем обозначать такую компоненту через $W^{s\varnothing}_x$. Множество Γ_A граничных точек множества A непусто и состоит из конечного числа периодических точек, которые разбиваются на *ассоциированные* пары (p,q) точек одинакового

[1]Базисное множество Λ называется *ориентируемым*, если для любой точки $x \in \Lambda$ и любых фиксированных чисел $\alpha > 0$, $\beta > 0$ индекс пересечения $W^s_\alpha(x) \cap W^u_\beta(x)$ во всех точках пересечения один и тот же (+1, либо -1). В противном случае базисное множество Λ называется *неориентируемым* (см., например, [27, с. 622]).

периода так, что 2-*связка* $B_{pq} = W^u_p \cup W^u_q$ является достижимой изнутри границей[1] компоненты связности множества $M^3 \setminus A$.

Для каждой пары (p, q) ассоциированных граничных точек множества A построим так называемую *характеристическую сферу*.

Пусть B_{pq} — 2-связка аттрактора A, состоящая из двух неустойчивых многообразий W^u_p и W^u_q ассоциированных граничных точек p и q соответственно, и m_{pq} — период точек p, q. Тогда для любой точки $x \in W^u_p \setminus p$ существует единственная точка $y \in (W^u_q \cap W^s_x)$ такая, что дуга $(x, y)^s$ не пересекается с множеством Ω. Определим отображение

$$\xi_{pq} : B_{pq} \setminus \{p, q\} \to B_{pq} \setminus \{p, q\},$$

положив $\xi_{pq}(x) = y$ и $\xi_{pq}(y) = x$. Тогда $\xi_{pq}(W^u_p \setminus p) = W^u_q \setminus q$ и $\xi_{pq}(W^u_q \setminus q) = W^u_p \setminus p$, т. е. отображение ξ_{pq} переводит проколотые неустойчивые многообразия 2-связки друг в друга и является инволюцией ($\xi^2_{pq} = id$). В силу теоремы о непрерывной зависимости инвариантных многообразий на компактных множествах отображение ξ_{pq} является гомеоморфизмом.

Ограничение $f^{m_{pq}}|_{W^u_p}$ имеет ровно одну гиперболическую отталкивающую неподвижную точку p, поэтому существует гладкий замкнутый 2-диск $D_p \subset W^u_p$ такой, что $p \in D_p \subset \text{int}(f^{m_{pq}}(D_p))$. Тогда множество $C_{pq} = \bigcup\limits_{x \in \partial D_p} (x, \xi_{pq}(x))^s$ гомеоморфно замкнутому двумерному цилиндру $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$. Множество C_{pq} называют *связывающим цилиндром*. Окружность $\xi_{pq}(\partial D_p)$ ограничивает в W^u_q двумерный 2-диск D_q такой, что $q \in D_q \subset \text{int}(f^{m_{pq}}(D_q))$. Множество $S_{pq} = D_p \cup C_{pq} \cup D_q$ гомеоморфно двумерной сфере, которую называют *характеристической сферой*, соответствующей связке B_{pq} (см. рис. 9).

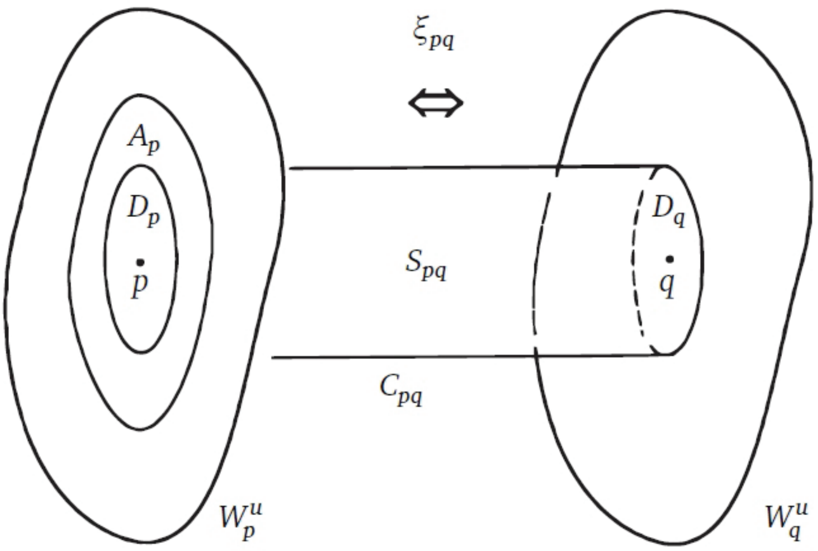

Рис. 9. Характеристическая сфера

Положим $T(f) = R_f \setminus A$ и основные динамические свойства диффеоморфизма $f \in T(M^3)$ сформулируем в виде предложения (см. рис. 10 для лучшего понимания).

Предложение 4.1. *Пусть* $f : M^3 \to M^3$ — *диффеоморфизм из класса* $T(M^3)$. *Тогда имеют место следующие факты*:

1. *объемлющее многообразие* M^3 *гомеоморфно трехмерному тору* $\mathbb{T}^3$ (*см.* [2, *теорема* 5.1]);
2. *каждая характеристическая сфера* S_{pq} *ограничивает 3-шар* Q_{pq} *такой, что* $(R_f \setminus A) \subset \bigcup\limits_{(p,q) \subset \Gamma_A} Q_{pq}$ (*см.* [2, *теорема* 5.1]);

[1] Пусть $G \subset M$ — открытое множество с границей ∂G ($\partial G = cl(G) \setminus \text{int}(G)$). Подмножество $\delta G \subset \partial G$ называется *достижимой изнутри границей* области G, если для любой точки $x \in \delta G$ найдется открытая дуга, полностью лежащая в G и такая, что x является одной из ее концевых точек.

3. *для каждой ассоциированной пары (p,q) граничных точек существует натуральное число k_{pq} такое, что $(R_f\setminus A)\cap Q_{pq}$ состоит из k_{pq} периодических источников $\alpha_1,\dots,\alpha_{k_{pq}}$ и $k_{pq}-1$ седловых периодических точек $\sigma_1,\dots,\sigma_{k_{pq}-1}$, чередующихся на простой дуге $l_{pq}=W_p^{s\varnothing}\cup\bigcup\limits_{i=1}^{k_{pq}-1}W^s_{\sigma_i}\cup\bigcup\limits_{i=1}^{k}W^s_{\alpha_i}\cup W_q^{s\varnothing}$ (см.* [2, *следствие* 5.2]);
4. *пересечение $W^u_{\sigma_i}\cap Q_{pq}, i=1,\dots,k_{pq}-1$ состоит в точности из одного двумерного диска (см.* [2, *теорема* 4.1]).

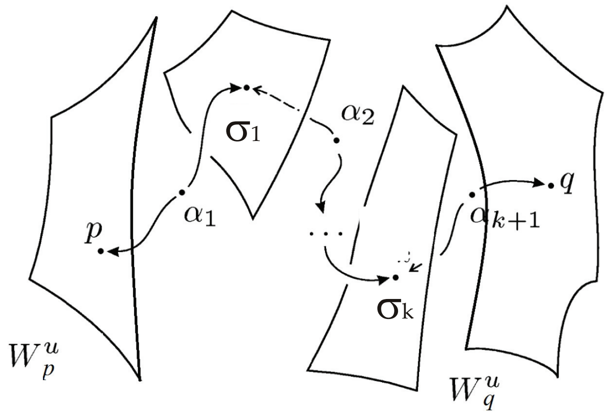

Рис. 10. Дуга l_{pq}

Теорема 4.2. *Для любого диффеоморфизма $f\in T(M^3)$ существует энергетическая функция, являющаяся функцией Морса вне базисного множества Ω.*

Доказательство. Доказательство теоремы базируется на предложении 4.1, теореме 3.6 и лемме 4.1.

Пусть (p,q) — пара ассоциированных граничных точек периода m_{pq} базисного множества A. Положим $A^-_{pq}=\bigcup\limits_{j=0}^{m_{pq}-1}f^j(\bigcup\limits_{i=1}^{k_{pq}-1}W^s_{\sigma_i}\cup\bigcup\limits_{i=1}^{k_{pq}-1}W^s_{\alpha_i})$. По построению множество A^-_{pq} является репеллером диффеоморфизма f. Покажем, что он является тесно вложенным. Для этого достаточно показать, что существует 3-шар P^-_{pq} такой, что $f^{-m_{pq}}(P^-_{pq})\subset \operatorname{int}P^-_{pq}$ и пересечение $P^-_{pq}\cap W^u_{\sigma_j}$ состоит в точности из одного двумерного диска для каждого седла $\sigma_j, j\in\{1,\dots,k_{pq}-1\}$.

В силу предложения 4.1, 3-шар Q_{pq} пересекает двумерное неустойчивое многообразие седла $\sigma_j, j\in\{1,\dots,k_{pq}-1\}$ в точности по одному двумерному диску. Искомый 3-шар P^-_{pq} получатся из Q_{pq} вдавливанием внутрь дисков D_p, D_q и сглаживанием углов (см. рис. 11).

Обозначим через D дизъюнктное объединение 3-шаров в числе, равном числу пар ассоциированных точек аттрактора Ω. Положим $\check M=\bigcup\limits_{(p,q)\subset\Gamma_A}P^-_{pq}$ и $N=\check M\cup_q D$, где $q:\partial\check M\to\partial D$ — диффеоморфизм. Обозначим через $\pi:\check M\cup D\to N$ естественную проекцию.

По построению N — гладкое 3-многообразие, каждая компонента связности которого диффеоморфна $\mathbb S^3$, допускающее диффеоморфизм Морса—Смейла $f_N:N\to N$, совпадающий с диффеоморфизмом $\pi f\pi^{-1}$ на множестве $\pi(\check M)$ и имеющий по одной стоковой точке на каждой компоненте связности множества $\pi(D)$, обозначим через P множество этих точек. Кроме того, все одномерные репеллеры диффеоморфизма f тесно вложены. В силу теоремы 3.6 для диффеоморфизма f_N существует энергетическая функция Морса $\varphi_N:N\to[0,3]$ такая, что $\varphi(\Omega^0_{f_N})=0,\ \varphi(\Omega^3_{f_N})=3$ и $\pi(\partial\check M)$ — множество уровня функции φ_N со значением 1. По построению диффеоморфизмы $f|_{M^3\setminus A}$ и $f_N|_{N\setminus P}$ гладко сопряжены посредством диффеоморфизма $h:M^3\setminus A\to N\setminus P$, совпадающего с π на $\check M$. Тогда $\varphi=\varphi_N h$ является гладкой функцией на $M^3\setminus A$, которая непрерывно продолжается на A так, что $\varphi(A)=0$.

По построению функция $\varphi:M^3\to[0,3]$ является непрерывной функцией Ляпунова для диффеоморфизма f, которая является энергетической функцией Морса для f на $M^3\setminus A$. Положим

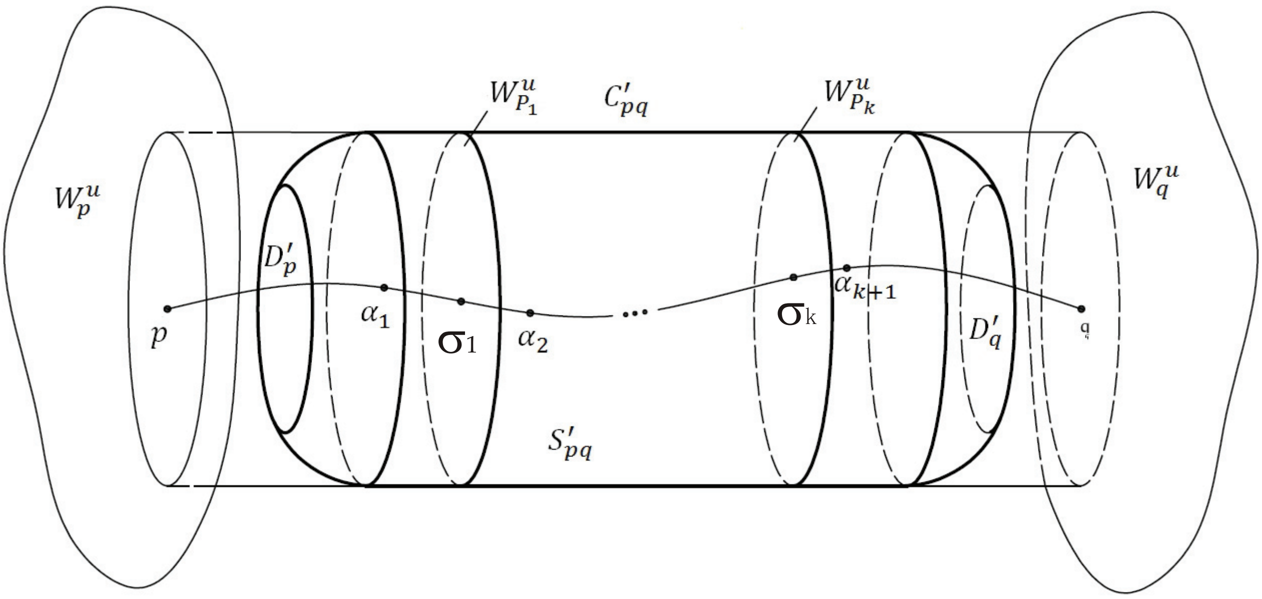

Рис. 11. Окрестность P^-_{pq}

$U_A = M^3 \setminus \check{M}$ и $\varphi_{_A} = \varphi|_{U_A}$. По построению $\varphi_{_A}(U_A) = [0,1]$ и $\varphi_{_A}^{-1}(0) = A$. Из леммы 4.1 следует, что существует функция $g_{_A} : [0,1] \to [0,1]$, такая что функция $\psi_{_A} = g_{_A} \circ \varphi_{_A}$ является энергетической функцией на U_A для f. Тогда функция

$$\psi(z) = \begin{cases} \varphi(z), \text{ если } z \in (M^3 \setminus U_A); \\ \psi_{_A}(z), \text{ если } z \in U_A \end{cases}$$

является искомой энергетической функцией на M^3 для диффеоморфизма f. □

4.3. Ω-устойчивые 3-диффеоморфизмы с двумерным неблуждающим множеством. В этом разделе рассматривается множество $Q(M^3)$, состоящее из Ω-устойчивых диффеоморфизмов на замкнутом ориентируемом 3-многообразии, все базисные множества которых имеют топологическую размерность два. Опишем динамику таких диффеоморфизмов, следуя работам [4, 6, 25].

В силу [6], каждая компонента связности каждого базисного множества диффеоморфизма $f \in Q(M^3)$ является двумерным тором, ручно вложенным[1] в M^3, и все компоненты связности имеют один и тот же период $k_f \geqslant 1$, а отображение $f^{k_f}|_B$ топологически сопряжено с *гиперболическим автоморфизмом тора*. Напомним, что *алгебраическим автоморфизмом* тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ называется диффеоморфизм $\widehat{C}$, задаваемый матрицей $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из множества $GL(2, \mathbb{Z})$ целочисленных матриц с определителем ± 1, то есть $\widehat{C}(x, y) = (ax + by, cx + dy)\ (mod\ 1)$. Алгебраический автоморфизм $\widehat{C}$ называется *гиперболическим*, если собственные значения λ_1, λ_2 матрицы C удовлетворяют условиям $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$. При этом матрица C также называется *гиперболической*.

Обозначим через $\mathcal{A}$ ($\mathcal{R}$) объединение всех гиперболических аттракторов (репеллеров) диффеоморфизма f. Множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$ непусты, и граница каждой компоненты связности V множества $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ состоит в точности из одной периодической компоненты $A \subset \mathcal{A}$ и одной периодической компоненты $R \subset \mathcal{R}$. При этом замыкание $cl\ V$ гомеоморфно многообразию $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$. Таким образом, объемлющее многообразие M^3, допускающее диффеоморфизмы рассматриваемого класса, является объединением конечного числа копий $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ таким, что каждое базисное множество является тором, по которому пересекаются в точности две копии. Однако, базисное множество диффеоморфизма f, будучи ручным тором, тем не менее может не быть гладким ни в одной точке (см., например, [29]). Однако, в следующей теореме утверждается факт существования энергетической функции у любого такого диффеоморфизма.

[1] Двумерный тор B называется *ручно вложенным* в многообразие M, если существует гомеоморфизм на образ $g : \mathbb{T}^2 \times [-1,1] \to M^3$ такой, что $g(\mathbb{T}^2 \times \{0\}) = B$.

Теорема 4.3. *Любой диффеоморфизм $f \in Q(M^3)$ обладает энергетической функцией.*

Доказательство. Пусть V — компонента связности множества $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ такая, что $\partial V = A \cup R$, где $A \in \mathcal{A}$, $R \in \mathcal{R}$. Для доказательства теоремы достаточно построить энергетическую функцию $\varphi : cl\ V \to [0,1]$ для f^{k_f}.

Согласно работе [25] существует диффеоморфизм $\chi : \mathbb{T}^2 \times (0,2) \to V$ такой, что расслоение на двумерные торы $\{T_t = \chi(\mathbb{T}^2 \times \{t\}), t \in (0,2)\}$ является f^{k_f}-инвариантным. Определим функцию $\varphi : cl\ V \to [0,2]$ следующим образом:

$$\varphi(z) = \begin{cases} t, \text{ если } z \in T_t; \\ 0, \text{ если } z \in A; \\ 2, \text{ если } z \in R. \end{cases}$$

По построению функция φ является гладкой на V, непрерывной на $cl\ V$, убывающей вдоль траекторий системы, а также не имеет критических точек на множестве M. Положим $U_A = \chi(\mathbb{T}^2 \times (0,1]) \cup A$ и $\varphi_A = \varphi|_{U_A}$. Из леммы 4.1 следует, что существует функция $g_A : [0,1] \to [0,1]$ такая, что функция $\psi_A = g_A \circ \varphi_A$ является энергетической функцией на U_A для f^{k_f}. Положим $U_R = \chi(\mathbb{T}^2 \times (1,2]) \cup R$ и $\varphi_R = 2 - \varphi|_{U_R}$. Из леммы 4.1 следует, что существует функция $g_R : [0,1] \to [0,1]$ такая, что функция $\psi_R = g_R \circ \varphi_R$ является энергетической функцией на U_A для f^{-k_f}. Так как функции g_A и g_R являются тождественными на отрезке $[1/2, 1]$, то функция

$$\psi(z) = \begin{cases} \varphi_A(z), \text{ если } z \in U_A; \\ 2 - \varphi_R(z), \text{ если } z \in U_R; \end{cases}$$

является искомой энергетической функцией на $cl\ V$ для диффеоморфизма f^{k_f}. □

4.4. Процедура сглаживания непрерывной функции. Докажем основной технический момент построения энергетических функций для диффеоморфизмов с хаотическим поведением.

Лемма 4.1 (см. [7, Лемма 2.1]). *Пусть M — гладкое компактное n-многообразие, $K \subset M$ — замкнутое подмножество M и U — некоторая замкнутая окрестность множества K такая, что $K \subset \operatorname{int} U$. Пусть задана непрерывная функция $\varphi : U \to [0;1]$, гладкая на $U \setminus K$ и $\varphi^{-1}(0) = K$. Тогда существует C^2-гладкая функция $g : [0;1] \to [0;1]$ такая, что суперпозиция $\psi = g \circ \varphi$ гладкая на всем множестве U, причем функция g удовлетворяет следующим свойствам:*

- *g — монотонно возрастающая на $[0;1]$;*
- *$g'(0) = 0$ и $g'(c) \neq 0$ $\forall c \in (0;1]$;*
- *$g(c) = c$, $\forall c \in [1/2;1]$.*

Доказательство. Пусть d — метрика на многообразии M. Для любого компактного подмножества $C \subset (U \setminus K)$ под максимумом модуля градиента функции φ в точке $x \in C$ будем понимать наибольший из модулей градиентов этой функции, посчитанных в картах конечного покрытия множества C. Для $c \in (0,1]$ положим $\alpha(c) = \min\{1, d^2(\varphi^{-1}(c), K)\}$ и $\beta(c) = \max\{1, \max\limits_{x \in \varphi^{-1}([c,1])} |\operatorname{grad} \varphi(x)|\}$. По построению функции $\alpha(c)$ и $\beta(c)$ являются непрерывными, причем $\alpha(c)$ — неубывающая на $(0;1]$ и существует значение $c^* \in (0;1]$ такое, что $\alpha(c)$ — монотонно возрастает на $(0;c^*]$, а $\beta(c)$ — невозрастающая. Тогда функция $\gamma(c) = \dfrac{\alpha(c)}{\beta(c)}$ является непрерывной неубывающей на полуинтервале $(0;1]$ функцией и $\lim\limits_{c \to 0} \dfrac{\alpha(c)}{\beta(c)} = 0$.

Построим C^2-гладкую функцию $g : [0;1] \to [0;1]$ такую, что

a) $g'(c) > 0$ для любого $c \in (0;1)$;
b) $g(c) \leqslant \gamma(c)$ для любого $c \in (0;1/8)$;
c) $g'(c) \leqslant \gamma(c)$ для любого $c \in (0;1/8)$;
d) $g(c) = c$ для любого $c \in [1/2;1]$.

Для построения такой функции будем использовать разбиение единицы. Напомним, что для данного открытого покрытия топологического пространства M открытыми множествами U_α с индексами α из множества $\mathcal{A}$ *разбиением единицы, подчиненным покрытию* $\{U_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$, называется набор гладких функций $\sigma_j : M \to \mathbb{R}$, где j принадлежит некоторому множеству индексов J, обладающих следующими свойствами:

- для каждого $j \in J$ существует $\alpha \in \mathcal{A}$ такое, что $\mathrm{Supp}(\sigma_j) \subset U_\alpha$, где $\mathrm{Supp}(\sigma_j)$ — замыкание множества, на котором функция σ_j отлична от нуля;
- $0 \leqslant \sigma_j(x) \leqslant 1$ для любого $x \in M, j \in J$;
- $\sum\limits_{j\in J} \sigma_j(x) = 1$ для любого $x \in M$.

Если для любой точки $x \in M$ существует окрестность W_x такая, что пересечение $W_x \cap \mathrm{Supp}(\sigma_j)$ непусто не более чем для конечного числа индексов j, то такое разбиение единицы называется *локально конечным*.

Возьмем открытое покрытие полуинтервала $(0;1]$ множествами

$$U_1 = \{x \in \mathbb{R} :\ \frac{1}{2} < x \leqslant 1\},$$
$$U_2 = \{x \in \mathbb{R} :\ \frac{1}{4} < x \leqslant 1\},$$
$$U_i = \{x \in \mathbb{R} :\ \frac{1}{2^i} < x < \frac{1}{2^{i-2}}\}, \quad i = 3, 4, \ldots,$$

и следующее локально конечное разбиение единицы, подчиненное этому покрытию:

$$\forall i = 2, 4, \ldots, \quad \sigma_i(x) = \begin{cases} e^{\frac{\left(x-\frac{1}{2^{i-1}}\right)^4}{\left(x-\frac{1}{2^i}\right)\left(x-\frac{1}{2^{i-2}}\right)}}, \text{ если } x \in \left(\dfrac{1}{2^i}, \dfrac{1}{2^{i-2}}\right); \\ 0, \text{ если } x \notin \left(\dfrac{1}{2^i}, \dfrac{1}{2^{i-2}}\right); \end{cases}$$

$$\sigma_1(x) = \begin{cases} 1 - \sigma_2(x), \text{ если } x \in \left(\dfrac{1}{2}; 1\right]; \\ 0, \text{ если } x \notin \left(\dfrac{1}{2}; 1\right]; \end{cases}$$

$$\forall i = 3, 5, \ldots, \quad \sigma_i(x) = \begin{cases} 1 - \sigma_{i-1}(x), \text{ если } x \in \left[\dfrac{1}{2^{i-1}}, \dfrac{1}{2^{i-2}}\right); \\ 1 - \sigma_{i+1}(x), \text{ если } x \in \left(\dfrac{1}{2^i}, \dfrac{1}{2^{i-1}}\right); \\ 0, \text{ если } x \notin \left(\dfrac{1}{2^i}, \dfrac{1}{2^{i-2}}\right). \end{cases}$$

Положим $\varepsilon_i = \gamma\left(\dfrac{1}{2^i}\right)$ для всех $i = 4, 5, \ldots$. Поскольку каждая точка $x \in (0,1]$ принадлежит носителям не более чем трех отображений из построенного выше разбиения единицы, то сумма $\sigma_0(x) = \sum\limits_{i=4}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x)$ является гладкой на интервале $(0, 1/2]$ функцией, которая по непрерывности доопределяется в нуле нулем, как и все функции $\sigma_i, i \in \mathbb{N}$. Также по непрерывности доопределяется в нуле нулем гладкая функция $S(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x)$. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ и

$$\varepsilon_3 = \frac{\frac{1}{2} - \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma_0(x)dx - \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma_2(x)dx}{\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma_3(x)dx}.$$

Определим функцию g формулой

$$g(c)=\begin{cases}\int\limits_0^c S(x)dx, \text{ если } c\in(0;1];\\ 0, \text{ если } c=0.\end{cases}$$

Заметим, что она является C^2-гладкой, так как ее производная — сумма гладких функций. Покажем, что она является искомой, проверив условия a)-d).

a) Поскольку $g'(c)=S(c)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(c)$, то $g'(c)>0$ для любого $c\in(0;1)$.

b) Для $i=4,5,\ldots$ последовательность $\{\varepsilon_i\}$ — убывающая. Заметим, что для любого $c\in(0;1]$ существует единственный номер i^* такой, что $c\in\left(\frac{1}{2^{i^*-1}};\frac{1}{2^{i^*-2}}\right]$. Тогда $\sigma_{i^*}(c)\neq 0$ и $\sigma_i(c)=0$ для всех $i\notin\{i^*,i^*+1\}$. Из выбора параметров ε_i для $c\in(0,1/8)$ получаем цепочку неравенств $g(c)=S(c)=\int\limits_0^c\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(x)\right)dx=\int\limits_0^c\left(\sum\limits_{i=i^*}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(x)\right)dx<\int\limits_0^c\left(\sum\limits_{i=i^*}^{\infty}\varepsilon_{i^*}\sigma_i(x)\right)dx=\varepsilon_{i^*}\int\limits_0^c\left(\sum\limits_{i=i^*}^{\infty}\sigma_i(x)\right)dx<\varepsilon_{i^*}\int\limits_0^c\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sigma_i(x)\right)dx=\varepsilon_{i^*}\int\limits_0^c 1dx=\varepsilon_{i^*}c<\varepsilon_{i^*}=\gamma\left(\frac{1}{2^{i^*}}\right)<\gamma(c)$.

c) Для $g'(c)$, $c\in(0,1/4)$ справедлива следующая оценка: $g'(c)=\sum\limits_{i=i^*}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(c)<\varepsilon_{i^*}\sum\limits_{i=i^*}^{\infty}\sigma_i(c)=\varepsilon_{i^*}<\gamma(c)$.

d) При $c\in[1/2;1]$ верна цепочка равенств $g(c)=\int\limits_0^c\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(x)\right)dx=\int\limits_0^{\frac12}\left(\sum\limits_{i=4}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(x)\right)dx+\int\limits_0^{\frac12}\varepsilon_3\sigma_3(x)dx+\int\limits_0^{\frac12}\varepsilon_2\sigma_2(x)dx+\int\limits_{\frac12}^{c}(\varepsilon_1\sigma_1(x)+\varepsilon_2\sigma_2(x))dx=\int\limits_0^{\frac12}\left(\sum\limits_{i=4}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(x)\right)dx+\varepsilon_3\int\limits_0^{\frac12}\sigma_3(x)dx+\varepsilon_2\int\limits_0^{\frac12}\sigma_2(x)dx+\varepsilon_2\int\limits_{\frac12}^{c}(\sigma_1(x)+\sigma_2(x))dx=\int\limits_0^{\frac12}\left(\sum\limits_{i=4}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(x)\right)dx+\frac{\frac12-\int\limits_0^{\frac12}\left(\sum\limits_{i=4}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(x)\right)dx-\int\limits_0^{\frac12}\sigma_2(x)dx}{\int\limits_0^{\frac12}\sigma_3dx}\int\limits_0^{\frac12}\sigma_3(x)dx+\int\limits_0^{\frac12}\sigma_2(x)dx+\left(c-\frac12\right)=c$. Таким образом, $g(c)=c$ для $c\in[1/2;1]$.

Покажем, что суперпозиция $\psi=g\circ\varphi$ является гладкой функцией на U.

Для начала заметим, что $\operatorname{grad}\psi=g'\cdot\operatorname{grad}\varphi$, это нам пригодится для дальнейших рассуждений. Так как на множестве $U\setminus K$ функция ψ является гладкой как суперпозиция гладких функций, то нам осталось показать, что функция ψ — гладкая на множестве K.

Рассмотрим любую точку $a\in K$ и локальную карту (U_a,h_a), где окрестность выбрана таким образом, что $\varphi(w)<1/8$ для всех $w\in U_a$ и $h_a:U_a\to\mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм, отображающий некоторую окрестность $U_a\in U$ точки a в $\mathbb{R}^n$, причем точка a переходит в начало координат O. Сначала покажем дифференцируемость. Если функция $\psi_a=\psi(h_a^{-1}(x))$ дифференцируема в точке O, то функция ψ дифференцируема в точке a. При этом функция ψ_a дифференцируема в точке O и имеет частные производные, равные нулю в этой точке, тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{s\to O}\frac{\psi_a(s)}{\rho(s,O)}=0$, где $s(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ и ρ — евклидова метрика в $\mathbb{R}^n$, определенная формулой $\rho(s^1,s^2)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i^1-x_i^2)^2}$ для $s^1(x_1^1,\ldots,x_n^1),s_2(x_1^2,\ldots,x_n^2)\in\mathbb{R}^n$. Проверка равенства $\lim\limits_{s\to O}\frac{\psi_a(s)}{\rho(s,O)}=0$ и завершит доказательство дифференцируемости.

Введем на $\mathbb{R}^n$ метрику d_a формулой $d_a(s^1,s^2)=d(h_a^{-1}(s^1),h_a^{-1}(s^2))$ для $s^1,s^2\in\mathbb{R}^n$. В силу [15, лекция 15] метрики ρ и d_a эквивалентны в некоторой компактной окрестности $U(O)$ точки O, т. е. существуют константы $0<c_1\leqslant c_2$ такие, что

$$\forall s^1,s^2\in U(O)\quad c_1d_a(s^1s^2)\leqslant\rho(s^1,s^2)\leqslant c_2d_a(s^1,s^2).$$

Для $s \in U(O)$ положим $w = h_a^{-1}(s)$ и $c = \varphi(h_a^{-1}(s)) = \varphi(w)$. Тогда

$$\lim_{s\to O} \frac{\psi_a(s)}{\rho(s,O)} = \lim_{s\to O} \frac{\psi(h_a^{-1}(s))}{c_1 d(h_a^{-1}(s),a)} = \lim_{w\to a} \frac{\psi(w)}{c_1 d(w,a)} = \lim_{w\to a} \frac{g(\varphi(w))}{c_1 d(w,a)} = \lim_{w\to a} \frac{g(c)}{c_1 d(w,a)} <$$

$$< \lim_{w\to a} \frac{\alpha(c)}{\beta(c) c_1 d(w,a)} \leqslant \lim_{w\to a} \frac{d^2(w,a)}{c_1 d(w,a)} = \lim_{w\to a} \frac{d(w,a)}{c_1} = 0.$$

Теперь покажем, что частные производные $(\psi_a)'_{x_i}, i \in \{1,\ldots,n\}$ непрерывны в точке O, т. е. $\lim\limits_{s\to O} (\psi_a)'_{x_i}(s) = 0$, что эквивалентно $\lim\limits_{s\to O} |\operatorname{grad} \psi_a(s)| = 0$. Обозначим через $J_{h_a^{-1}}$ якобиан отображения h_a^{-1}, через $||J_{h_a^{-1}}||$ — его норму, подчиненную евклидовой норме вектора в $\mathbb{R}^n$, и через B константу такую, что $||J_{h_a^{-1}}(s)|| \leqslant B$ для всех точек s в некоторой окрестности точки O. Тогда $\lim\limits_{s\to O} |\operatorname{grad} \psi_a(s)| = \lim\limits_{s\to O} |J_{h_a^{-1}}(s) \cdot g'(c) \cdot \operatorname{grad} \varphi(w)| \leqslant \lim\limits_{s\to O} ||J_{h_a^{-1}}(s)|| \cdot |g'(c)| \cdot |\operatorname{grad} \varphi(w)| \leqslant$
$\lim\limits_{s\to O} B \cdot \dfrac{\alpha(c)}{\beta(c)} \cdot |\operatorname{grad} \varphi(w)| \leqslant \lim\limits_{w\to a} B \cdot \dfrac{d^2(w,a)}{|\operatorname{grad} \varphi(w)|} \cdot |\operatorname{grad} \varphi(w)| \leqslant \lim\limits_{w\to a} B \cdot d^2(w,a) = 0.$

Таким образом, функция ψ — гладкая на U. □

Благодарности. Результаты работы, посвященные построению энергетических функций для каскадов с регулярной динамикой (раздел 3 данной работы), выполнены при финансовой поддержке программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ (проект 90) в 2017 году, результаты работы, посвященные построению энергетических функций для каскадов с хаотической динамикой (раздел 4 данной работы), выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01041).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гринес В. З.* О топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей с одномерными аттракторами и репеллерами// Мат. сб. — 1997. — *188*. — С. 57–94.
2. *Гринес В. З., Жужома Е. В.* Структурно устойчивые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2002. — *66*, № 2. — С. 3–66.
3. *Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С., Починка О. В.* Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса— Смейла// Тр. МИАН. — 2010. — *271*. — С. 111–133.
4. *Гринес В. З., Жужома Е. В., Починка О. В.* Грубые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *57*. — С. 5–30.
5. *Гринес В. З., Лауденбах Ф., Починка О.* Квази-энергетическая функция для диффеоморфизмов с дикими сепаратрисами// Мат. заметки. — 2009. — *86*, № 2. — С. 175–183.
6. *Гринес В. З., Медведев В. С., Жужома Е. В.* О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях// Мат. заметки. — 2005. — *78*, № 6. — С. 813–826.
7. *Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О. В.* Построение энергетической функции для A-диффеоморфизмов с двумерным неблуждающим множеством на 3-многообразиях// Тр. Средневолжск. Мат. об-ва. — 2015. — *17*, № 3. — С. 12–17.
8. *Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О. В.* Построение энергетической функции для трехмерных каскадов с двумерным растягивающимся аттрактором// Тр. Моск. Мат. об-ва. — 2015. — *76*, № 2. — С. 271–286.
9. *Медведев В. С., Жужома Е. В.* О неориентируемых двумерных базисных множествах на 3-многообразиях// Мат. сб. — 2002. — *193*, № 6. — С. 83–104.
10. *Милнор Дж.* Теория Морса. — Волгоград: Платон, 1969.
11. *Митрякова Т. М., Починка О. В., Шишенкова А. Е.* Энергетическая функция для диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством// Журн. Средневолжск. Мат. об-ва. — 2012. — *14*, № 1. — С. 98–107.
12. *Ошемков А. А., Шарко В. В.* О классификации потоков Морса—Смейла на двумерных многообразиях// Мат. сб. — 1998. — *189*, № 8. — С. 93–140.
13. *Плыкин Р. В.* Источники и стоки A-диффеоморфизмов поверхностей// Мат. сб. — 1974. — *94*. — С. 243–264.
14. *Плыкин Р. В.* О структуре централизаторов аносовских диффеоморфизмов тора// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 6. — С. 259–260.
15. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия. — М.: Факториал, 1998.
16. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы// Усп. мат. наук. — 1970. — *25*, № 1. — С. 113–185.

17. *Artin E., Fox R. H.* Some wild cells and spheres in three-dimensional space// Ann. Math. — 1948. — *49*. — С. 979–990.
18. *Bonatti Ch., Grines V.* Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3// J. Dyn. Control Syst. — 2000. — *6*. — С. 579–602.
19. *Conley C.* Isolated invariant sets and Morse index. — Providence: Am. Math. Soc., 1978.
20. *Debrunner H., Fox R.* A mildly wild imbedding of an n-frame// Duke Math. J. — 1960. — *27*. — С. 425–429.
21. *Franks J.* Nonsingular Smale flow on S^3// Topology. — 1985. — *24*, № 3. — С. 265–282.
22. *Franks J.* A variation on the Poincare—Birkhoff theorem// Hamiltonian dynamical systems, Proc. AMS-INS-SIAM Jt. Summer Res. Conf., Contemporary Math. — 1988. — *81*. — С. 111–117.
23. *Grines V., Laudenbach F., Pochinka O.* Self-indexing energy function for Morse—Smale diffeomorphisms on 3-manifolds// Mosc. Math. J. — 2009. — *9*, № 4. — С. 801–821.
24. *Grines V. Z., Laudenbach F., Pochinka O. V.* Dynamically ordered energy function for Morse—Smale diffeomorphisms on 3-manifolds// Proc. Steklov Inst. Math. — 2012. — *278*, № 1. — С. 27–40.
25. *Grines V., Levchenko Y., Medvedev V., Pochinka O.* The topological classification of structural stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets// Nonlinearity. — 2015. — *28*, № 11. — С. 4081–4102.
26. *Grines V., Medvedev T., Pochinka O.* Dynamical systems on 2- and 3-manifolds. — Cham: Springer, 2016.
27. *Grines V., Zhuzhoma E.* On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors// Trans. Am. Math. Soc. — 2005. — *357*, № 2. — С. 617–667.
28. *Harrold O. G., Griffith H. C., Posey E. E.* A characterization of tame curves in three-space// Trans. Am. Math. Soc. — 1955. — *79*. — С. 12–34.
29. *Kaplan J., Mallet-Paret J., Yorke J.* The Lyapunov dimension of nowhere differentiable attracting torus// Ergodic Theory Dynam. Systems. — 1984. — *2*. — С. 261–281.
30. *Meyer K. R.* Energy functions for Morse—Smale systems// Amer. J. Math. — 1968. — *90*. — С. 1031–1040.
31. *Palis J.* On Morse—Smale dynamical systems// Topology. — 1969. — *8*. — С. 385–404.
32. *Pixton D.* Wild unstable manifolds// Topology. — 1977. — *16*. — С. 167–172.
33. *Robinson C.* Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. — Boca Raton: CRC Press, 1999.
34. *Shub M.* Morse—Smale diffeomorphisms are unipotent on homology// Dynamical Syst., Proc. Sympos. Univ. Bahia, Salvador 1971. — 1973. — С. 489–491.
35. *Shub M., Sullivan D.* Homology theory and dynamical systems// Topology. — 1975. — *4*. — С. 109–132.
36. *Smale S.* Morse inequalities for a dynamical system// Bull. Am. Math. Soc. — 1960. — *66*. — С. 43–49.
37. *Smale S.* On gradient dynamical systems// Annals Math. — 1961. — *74*. — С. 199–206.
38. *Smale S.* Differentiable dynamical systems// Bull. Am. Math. Soc. — 1967. — *73*. — С. 747–817.
39. *Wilson W.* Smoothing derivatives of functions and applications// Trans. Am. Math. Soc. — 1969. — *139*. — С. 413–428.

В. З. Гринес
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
603155, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12
E-mail: `vgrines@yandex.ru`

О. В. Починка
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
603155, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12
E-mail: `olga-pochinka@yandex.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-191-222 UDC 517.938

Construction of Energetic Functions for Ω-Stable Diffeomorphisms on 2- and 3-Manifolds

© 2017 **V. Z. Grines, O. V. Pochinka**

Abstract. In this paper, we review the results connected to existence of the energetic function for discrete dynamical systems. Also we consider technique of construction of such functions for some classes of Ω-stable and structurally stable diffeomorphisms on manifolds of dimension 2 and 3.

REFERENCES

1. V. Z. Grines, "O topologicheskoi klassifikatsii strukturno ustoichivykh diffeomorfizmov poverkhnostei s odnomernymi attraktorami i repellerami" [On topological classification of structurally stable diffeomorphisms of surfaces with one-dimensional attractors and repellers], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1997, **188**, 57–94 (in Russian).
2. V. Z. Grines and E. V. Zhuzhoma, "Strukturno ustoichivye diffeomorfizmy s bazisnymi mnozhestvami korazmernosti odin" [Structurally stable diffeomorphisms with basic sets of codimension one], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2002, **66**, No. 2, 3–66 (in Russian).
3. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, and O. V. Pochinka, "Global'nye attraktor i repeller diffeomorfizmov Morsa—Smeyla" [Global attractor and repeller of Morse–Smale diffeomorphisms], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2010, **271**, 111–133 (in Russian).
4. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, and O. V. Pochinka, "Grubye diffeomorfizmy s bazisnymi mnozhestvami korazmernosti odin" [Rough diffeomorphisms with basic sets of codimension one], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **57**, 5–30 (in Russian).
5. V. Z. Grines, F. Laudenbakh, and O. Pochinka, "Kvazi-energeticheskaia funktsiia dlia diffeomorfizmov s dikimi separatrisami" [Quasi-energy function for diffeomorphisms with wild separatrices], *Mat. zametki.* [Math. Notes], 2009, **86**, No. 2, 175–183 (in Russian).
6. V. Z. Grines, V. S. Medvedev, and E. V. Zhuzhoma, "O poverkhnostnykh attraktorakh i repellerakh na 3-mnogoobraziiakh" [On surface attractors and repellers on 3-manifolds], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2005, **78**, No. 6, 813–826 (in Russian).
7. V. Z. Grines, M. K. Noskova, and O. V. Pochinka, "Postroenie energeticheskoi funktsii dlia A-diffeomorfizmov s dvumernym nebluzhdaiushchim mnozhestvom na 3-mnogoobraziiakh" [Construction of the energy function for A-diffeomorphisms with two-dimensional nonwandering set on 3-manifolds], *Tr. Srednevolzhsk. Mat. ob-va* [Proc. Srednevolzhsk. Math. Soc.], 2015, **17**, No. 3, 12–17 (in Russian).
8. V. Z. Grines, M. K. Noskova, and O. V. Pochinka, "Postroenie energeticheskoi funktsii dlia trekhmernykh kaskadov s dvumernym rastiagivaiushchimsia attraktorom" [Construction of the energy function for three-dimensional cascades with two-dimensional expanding attractor], *Tr. Mosk. Mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 2015, **76**, No. 2, 271–286 (in Russian).
9. V. S. Medvedev, and E. V. Zhuzhoma, "O neorientiruemykh dvumernykh bazisnykh mnozhestvakh na 3-mnogoobraziiakh" [On nonorientable two-dimensional basic sets on 3-manifolds], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2002, **193**, No. 6, 83–104 (in Russian).
10. Dzh. Milnor, *Teoriia Morsa* [The Morse Theory], Platon, Volgograd, 1969 (in Russian).
11. T. M. Mitriakova, O. V. Pochinka, and A. E. Shishenkova, "Energeticheskaia funktsiia dlia diffeomorfizmov poverkhnostei s konechnym giperbolicheskim tsepno rekurrentnym mnozhestvom" [Energy function for diffeomorphisms of surfaces with finite hyperbolic chain recurrent set], *Zhurn. Srednevolzhsk. Mat. ob-va* [J. Srednevolzhsk. Math. Soc.], 2012, **14**, No. 1, 98–107 (in Russian).
12. A. A. Oshemkov and V. V. Sharko, "O klassifikatsii potokov Morsa—Smeyla na dvumernykh mnogoobraziyakh" [On classification of Morse–Smale flows on two-dimensional manifolds], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1998, **189**, No. 8, 93–140 (in Russian).
13. R. V. Plykin, "Istochniki i stoki A-diffeomorfizmov poverkhnostei" [Sources and sinks of A-diffeomorphisms of surfaces], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1974, **94**, 243–264 (in Russian).

14. R. V. Plykin, “O strukture tsentralizatorov anosovskikh diffeomorfizmov tora” [On the structure of centralizers of Anosov diffeomorphisms of the torus], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1998, **53**, No. 6, 259–260 (in Russian).
15. M. M. Postnikov, *Lektsii po geometrii. Semestr V. Rimanova geometriia* [Lectures in Geometry. Semester V. Riemannian Geometry], Faktorial, Moscow, 1998 (in Russian).
16. S. Smale, “Differentsiruemye dinamicheskie sistemy” [Differentiable dynamical systems], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1970, **25**, No. 1, 113–185 (in Russian).
17. E. Artin and R. H. Fox, “Some wild cells and spheres in three-dimensional space,” *Ann. Math.*, 1948, **49**, 979–990.
18. Ch. Bonatti and V. Grines, “Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3,” *J. Dyn. Control Syst.*, 2000, **6**, 579–602.
19. C. Conley, *Isolated Invariant Sets and Morse Index*, Am. Math. Soc., Providence, 1978.
20. H. Debrunner and R. Fox, “A mildly wild imbedding of an n-frame,” *Duke Math. J.*, 1960, **27**, 425–429.
21. J. Franks, “Nonsingular Smale flow on S^3,” *Topology*, 1985, **24**, No. 3, 265–282.
22. J. Franks, “A variation on the Poincare—Birkhoff theorem,” *Hamiltonian dynamical systems, Proc. AMS-INS-SIAM Jt. Summer Res. Conf., Contemporary Math.*, 1988, **81**, 111–117.
23. V. Grines, F. Laudenbach, and O. Pochinka, “Self-indexing energy function for Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds,” *Mosc. Math. J.*, 2009, **9**, No. 4, 801–821.
24. V. Z. Grines, F. Laudenbach, and O. V. Pochinka, “Dynamically ordered energy function for Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds,” *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, **278**, No. 1, 27–40.
25. V. Grines, Y. Levchenko, V. Medvedev, and O. Pochinka, “The topological classification of structural stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets,” *Nonlinearity*, 2015, **28**, No. 11, 4081–4102.
26. V. Grines, T. Medvedev, and O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, Springer, Cham, 2016.
27. V. Grines and E. Zhuzhoma, “On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 2005, **357**, No. 2, 617–667.
28. O. G. Harrold, H. C. Griffith, and E. E. Posey, “A characterization of tame curves in three-space,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1955, **79**, 12–34.
29. J. Kaplan, J. Mallet-Paret, and J. Yorke, “The Lyapunov dimension of nowhere differentiable attracting torus,” *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 1984, **2**, 261–281.
30. K. R. Meyer, “Energy functions for Morse–Smale systems,” *Amer. J. Math.*, 1968, **90**, 1031–1040.
31. J. Palis, “On Morse–Smale dynamical systems,” *Topology*, 1969, **8**, 385–404.
32. D. Pixton, “Wild unstable manifolds,” *Topology*, 1977, **16**, 167–172.
33. C. Robinson, *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, CRC Press, Boca Raton, 1999.
34. M. Shub, “Morse–Smale diffeomorphisms are unipotent on homology,” *Dynamical Syst., Proc. Sympos. Univ. Bahia, Salvador 1971*, 1973, 489–491.
35. M. Shub and D. Sullivan, “Homology theory and dynamical systems,” *Topology*, 1975, **4**, 109–132.
36. S. Smale, “Morse inequalities for a dynamical system,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1960, **66**, 43–49.
37. S. Smale, “On gradient dynamical systems,” *Annals Math.*, 1961, **74**, 199–206.
38. S. Smale, “Differentiable dynamical systems,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1967, **73**, 747–817.
39. W. Wilson, “Smoothing derivatives of functions and applications,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1969, **139**, 413–428.

V. Z. Grines
National Research University — Higher School of Economics
25/12 Bolshaya Pecherskaya str., 603155 Nizhnii Novgorod, Russia
E-mail: `vgrines@yandex.ru`

O. V. Pochinka
National Research University — Higher School of Economics
25/12 Bolshaya Pecherskaya str., 603155 Nizhnii Novgorod, Russia
E-mail: `olga-pochinka@yandex.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 2 (2017). С. 223–246

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-223-246 УДК 517.956.8

АСИМПТОТИКА ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СРЕДЕ НА БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ОЦЕНКАМ ТЕОРИИ УСРЕДНЕНИЯ

© 2017 г. **В. В. ЖИКОВ**, **С. Е. ПАСТУХОВА**

Аннотация. Рассматривается уравнение диффузии в бесконечной 1-периодической среде. Для фундаментального решения находятся аппроксимации при больших значениях времени t. Погрешность аппроксимаций имеет поточечную и интегральную оценки порядка $O(t^{-\frac{d+j+1}{2}})$ и $O(t^{-\frac{j+1}{2}})$, $j = 0, 1, \dots$, соответственно. Аппроксимации строятся из известного фундаментального решения усредненного уравнения, имеющего постоянные коэффициенты, и его производных, а также решений серии вспомогательных задач на ячейке периодичности. Серия задач на ячейке выписывается рекуррентным образом. Эти результаты используются для построения аппроксимаций операторной экспоненты исходного уравнения диффузии с оценками погрешности по операторным нормам в L^p-пространствах, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Для аналогичного уравнения в ε-периодической среде (ε — малый параметр) получаются аппроксимации операторной экспоненты в L^p-операторных нормах при фиксированном времени с погрешностью порядка $O(\varepsilon^n)$, $n = 1, 2, \dots$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

1.1. Рассмотрим задачу Коши для функции $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $t \geqslant 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(a(x)\nabla u) = 0, \ t > 0, \\ u|_{t=0} = f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \end{cases} \tag{1.1}$$

с измеримой вещественной симметрической матрицей $a(x)$. Предполагается, что матрица $a(x)$ равномерно эллиптична, т. е.

$$\nu\xi^2 \leqslant a(x)\xi\cdot\xi \leqslant \nu^{-1}\xi^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \ \nu > 0. \tag{1.2}$$

Имеем уравнение диффузии в неоднородной среде, $a(x)$ — матрица диффузии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-00192 А), а также Министерства образования РФ (задание № 1.3270.2017/ПЧ).

Задачу (1.1) перепишем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + Au = 0, \ t > 0, \\ u|_{t=0} = f, \end{cases}$$

где A — оператор в $L^2(\mathbb{R}^d)$, заданный квадратичной формой

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} a\nabla u \cdot \nabla u dx \text{ на } H^1(\mathbb{R}^d).$$

Квадратичная форма является замкнутой, а сам оператор A — неотрицательным и самосопряженным. Решение задачи Коши (1.1) запишется как

$$u(\cdot, t) = e^{-tA} f.$$

Предположим также, что матрица $a(x)$ периодична по каждому переменному $x_1, \dots x_d$ с периодом 1, единичный куб $\square = [-1/2, 1/2)^d$ есть ячейка периодичности. Тогда известно асимптотическое поведение или асимптотическое представление решения $u = u(x,t)$ при $t \to \infty$, иными словами, поведение или представление полугруппы e^{-tA} при большом значении времени.

Оказывается, что на больших временах за поведение полугруппы отвечает постоянная усредненная матрица диффузии a^0 (процедура ее отыскания по исходной матрице $a(x)$ указана ниже в (1.10), (1.11)) и надо рассматривать усредненную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^0}{\partial t} + A_0 u^0 = 0, \ t > 0, \\ u^0|_{t=0} = f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \end{cases} \tag{1.3}$$

с оператором диффузии

$$A_0 = -\operatorname{div}(a^0 \nabla),$$

существенно более простым, чем исходный, хотя той же структуры. Например, в [7] было доказано предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1} \|u(x,t) - u^0(x,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = 0,$$

означающее сходимость полугруппы по операторной норме в $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, т. е.

$$\lim_{t\to\infty} \|e^{-tA} - e^{-tA_0}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)\to L^\infty(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Позже в [8] установлена оценка скорости этой сходимости по времени

$$\|e^{-tA} - e^{-tA_0}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)\to L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{c}{\sqrt{t}} \tag{1.4}$$

с константой, зависящей лишь от размерности d и постоянной эллиптичности ν.

Была доказана также оценка

$$\|e^{-tA} - e^{-tA_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{c}{\sqrt{t}} \tag{1.5}$$

с константой того же типа, что в (1.4), см. [17, 23].

Наконец, недавно в работе [10] установлена оценка

$$\|e^{-tA} f - e^{-tA_0} f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{c}{\sqrt{t}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad \forall\, p \in [1, \infty] \tag{1.6}$$

с единой константой для всех p. Предыдущие оценки (1.4) и (1.5) вытекают отсюда при $p = \infty$ и $p = 2$, для вероятностной интерпретации уравнения диффузии особенно важен случай $p = 1$.

Часто операторные оценки можно вывести из оценок поточечного характера. Примером операторной оценки служит (1.5). Примером поточечной оценки является

$$|K(x,y,t) - K_0(x,y,t)| \leqslant \frac{c}{t^{\frac{d+1}{2}}}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \quad c = \operatorname{const}(d, \nu). \tag{1.7}$$

Здесь K — фундаментальное решение для параболического уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t} + Au = 0$, иными словами, K — ядро интегрального оператора e^{-tA}; K_0 — аналогичный объект для усредненного уравнения, который ввиду постоянства коэффициентов уравнения можно точно найти с помощью преобразования Фурье, а именно,

$$K_0(x,y,t) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} (\det a^0)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(a^0)^{-1}(x-y)\cdot(x-y)}{4t}}. \tag{1.8}$$

Из поточечной оценки (1.7) с помощью общих соображений (экспоненциальная оценка Нэша—Аронсона) получается интегральная оценка

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |K(x,y,t) - K_0(x,y,t)| dy \leqslant \frac{c}{\sqrt{t}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \tag{1.9}$$

которая и играет основную роль. Дело в том, что из нее (на основе стандартных фактов об оценке нормы интегрального оператора, см. ниже лемму 1.1) немедленно получается L^p-оценка (1.6). Интегральная оценка (1.9) доказана в работе В. В. Жикова [8] 1989 года (см. также более подробное доказательство ее в недавней работе [10]). В настоящей работе доказываются более точные интегральные оценки, которые отвечают не нулевому, а следующим приближениям для фундаментального решения K. Основные результаты сформулированы в разделах 4, 7 и 8.

Для доказательства наших результатов используем предложенную в [8] версию *спектрального метода*, в основе которой лежит блоховское разложение функций и блоховское представление операторной экспоненты, точнее, ее ядра как интегрального оператора.

В целом спектральный подход к асимптотическим задачам на периодических структурах имеет давнюю историю и появился прежде всего в физической литературе, оставаясь долгое время без строгого математического обоснования. В теории усреднения интерес к спектральному методу возник с самого начала (см. [19]), причем он периодически затухал и возобновлялся. Вышло большое количество работ в этом направлении. Отметим здесь только одни из наиболее ранних применений спектрального метода в теории усреднения — работы [2, 16], а также интересные публикации [1, 3, 20], имеющие отношение к параболическим уравнениям. В последние полтора десятилетия с появлением работы [4] наблюдается повышенный интерес к спектральному подходу в связи с применением его к операторным оценкам усреднения.

1.2. Приведем формулы для определения усредненной матрицы диффузии:

$$a^0 = \langle a(\cdot)(I + \nabla N(\cdot)\rangle, \tag{1.10}$$

где I — единичная матрица, вектор $N(x) = (N_1(x), \ldots, N_d(x))$ составлен из решений задач на ячейке

$$N_j \in H^1_{\mathrm{per}}(\square), \quad \operatorname{div}(a(x)(\nabla N_j + e_j)) = 0, \quad \langle N_j \rangle = 0, \\ j = 1, \ldots, d. \tag{1.11}$$

Здесь и всюду далее $e_1, \ldots, e_d$ — канонический базис в $\mathbb{R}^d$, $H^1_{\mathrm{per}}(\square)$ — пространство Соболева 1-периодических функций,

$$\langle \cdot \rangle = \int\limits_{\square} \cdot \, dx \ \text{— среднее по ячейке.}$$

Решение задачи (1.11) понимается в смысле интегрального тождества

$$\int\limits_{\square} a(e_j + \nabla N_j) \cdot \nabla \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty_{per}(\square).$$

Задача (1.11) представляет собой частный случай общей задачи на ячейке

$$v \in H^1_{\mathrm{per}}(\square), \quad \operatorname{div}(a(x)\nabla v) = F_0 + \operatorname{div} F, \tag{1.12}$$

где $F_0 \in L^2(\square)$ и $F \in L^2(\square)^d$. Ядро этой задачи составляют константы, следовательно, условие ее разрешимости есть условие ортогональности $F_0 \perp 1$ в $L^2(\square)$, т. е. $\langle F_0 \rangle = 0$. В случае (1.11) это условие разрешимости, очевидно, выполнено.

Важной особенностью задачи на ячейке (1.11) является ограниченность решения: $N_j \in L^\infty(\square)$ в силу обобщенного принципа максимума (см. [12, приложение В к гл. II]).

В теории усреднения хорошо известно, что матрица (1.10) симметрична и удовлетворяет оценке

$$a^0 k \cdot k \geqslant \nu k^2 \quad \forall k \in \mathbb{R}^d \tag{1.13}$$

с той же константой, что в (1.2) (см., например, [9]).

1.3. До сих пор мы оперировали нулевым приближением для K. Спектральный метод позволяет дать полное асимптотическое разложение K. Пока ограничимся лишь первым приближением. Используя решения задачи на ячейке (1.11), определим первое приближение равенством

$$K_1(x,y,t) = K_0(x,y,t) + (N_j(x) - N_j(y))\frac{\partial}{\partial x_j}K_0(x,y,t). \tag{1.14}$$

(Ядро K_1 симметрично в виду кососимметричности $\dfrac{\partial}{\partial x_j}K_0$.) Справедливы оценки

$$|K(x,y,t) - K_1(x,y,t)| \leqslant \frac{c}{t^{\frac{d+2}{2}}}, \tag{1.15}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |K(x,y,t) - K_1(x,y,t)|dy \leqslant \frac{c}{t} \tag{1.16}$$

с константами того же типа, что в (1.7) и (1.9).

1.4. Поточечные оценки (1.7) и (1.15) позволяют сделать некоторые выводы вероятностного характера, относящиеся к центральной предельной теореме. Пусть ξ^t обозначает случайную величину с плотностью распределения $K(x,y,t)$ (y — параметр, указывающий локализацию случайной величины в начальный момент). Тогда случайная величина $\dfrac{\xi^t - y}{\sqrt{t}}$ имеет плотность распределения

$$p_y(x,t) = t^{\frac{d}{2}} K(\sqrt{t}x + y, y, t). \tag{1.17}$$

Тогда из (1.7) следует, что

$$|p_y(x,t) - K_0(x,0,1)| \leqslant \frac{c}{\sqrt{t}} \tag{1.18}$$

равномерно по $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Очевидно, что $K_0(x,0,1)$ — это плотность нормального распределения с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $2a^0$. Само неравенство (1.18) есть аналог известной оценки Берри—Эссена, см. [18, с. 608].

Согласно (1.15), получаем более точное приближение для плотности распределения случайной величины $\dfrac{\xi^t - y}{\sqrt{t}}$, а именно,

$$|p_y(x,t) - K_0(x,0,1) - \frac{1}{\sqrt{t}}(N_j(\sqrt{t}x + y) - N_j(y))\frac{\partial}{\partial x_j}K_0(x,0,1)| \leqslant \frac{c}{t} \tag{1.19}$$

равномерно по $x, y \in \mathbb{R}^d$.

1.5. Приведем точную формулировку ключевого для нас результата о норме интегрального оператора, который часто называют леммой Шура.

Лемма 1.1. *Пусть $S(x,y)$ — симметрическое непрерывное на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ядро*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |S(x,y)|dy \leqslant c \;\forall\; x \in \mathbb{R}^d.$$

Тогда для

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} S(x,y)f(y)dy \tag{1.20}$$

выполнено неравенство

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant c\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad \forall p \in [1,\infty]. \tag{1.21}$$

Доказательство. Считаем для простоты записи, что $S(x, y) \geqslant 0$. Тогда

$$|u(x)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^d} |S(x, y) f(y)| dy,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |u(x)| dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(y)| dy \int\limits_{\mathbb{R}^d} S(x, y) dx \leqslant c \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(y)| dy.$$

Оценка для $p = 1$ доказана.

При $p > 1$, $q = \dfrac{p}{p-1}$, имеем по неравенству Гельдера

$$|u(x)|^p \leqslant \left| \int\limits_{\mathbb{R}^d} S^{\frac{1}{q}}(x, y) S^{\frac{1}{p}}(x, y) f(y) dy \right|^p \leqslant$$

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} S(x, y) dy \right)^{\frac{p}{q}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} S(x, y) |f(y)|^p dy \leqslant c^{\frac{p}{q}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} S(x, y) |f(y)|^p dy,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^p dx \leqslant c^{\frac{p}{q}+1} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p dy.$$

Отсюда следует оценка (1.21). Лемма доказана. □

Общее изложение леммы Шура см. [13, гл. I, теорема 4.8].

2. Блоховское представление экспоненты e^{-tA}

Основную роль в наших построениях будет играть представление решения задачи Коши (1.1) через решения некоторых периодических задач — так называемое блоховское разложение (в определенном смысле это аналог разложения в ряд Фурье для периодической функции). Отсюда получается представление экспоненты e^{-tA}, действующей в $L^2(\mathbb{R}^d)$, через операторные экспоненты, действующие в $L^2(\square)$.

2.1. Напомним известное преобразование Блоха—Гельфанда. Для $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ положим

$$Uf = \hat{f}(x, k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \sum_{h \in Z^d} e^{-ik\cdot(x+h)} f(x + h), \tag{2.1}$$

где сумма конечна при каждом фиксированном x. Заметим, что

1. функция $\hat{f}(x, k)$ является 1-периодической по $x_1, \dots x_d$;
2. функция $e^{ik\cdot x} \hat{f}(x, k)$ является 2π-периодической по $k_1, \dots k_d$; ячейками периодичности будут $\square = [-1/2, 1/2)^d$ и $\square^* = [-\pi, \pi)^d$ соответственно.

Для преобразования (2.1) справедлива формула обращения

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\square^*} e^{ik\cdot x} \hat{f}(x, k) dk. \tag{2.2}$$

Кроме того,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx = \int\limits_{\square\times\square^*} |\hat{f}(x, k)|^2 dx dk \tag{2.3}$$

и преобразование U может быть расширено (по непрерывности) до унитарного оператора

$$U : \ L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\square \times \square^*).$$

Строгое построение оператора U дано в [24].

Обратный оператор $U^{-1} : L^2(\square \times \square^*) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ задается равенством (2.2) для любых $\hat{f} \in L^2(\square \times \square^*)$. В то же время определение (2.1) непосредственно применимо, если f достаточно быстро убывает при $|x| \to \infty$, например, если $e^{s|x|} f(x) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ для некоторого $s > 0$. Решение задачи Коши (1.1) удовлетворяет такому условию, поскольку начальное значение $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ (доказательство этого факта дано в [9, гл. II]).

2.2. С периодической матрицей $a(x)$ свяжем семейство операторов

$$\begin{gathered} A(k) = e^{-ik\cdot x} A e^{ik\cdot x} = -e^{-ik\cdot x}\operatorname{div}(a(x)\nabla e^{ik\cdot x}) = \\ -(\nabla + ik)^* a(\nabla + ik) = -\operatorname{div} a\nabla - i \operatorname{div} ak - ik\cdot a\nabla + ak\cdot k, \end{gathered} \tag{2.4}$$

в которое вкладывается исходный оператор $A(0) = A$, где $i = \sqrt{-1}$, а вещественный параметр $k \in \mathbb{R}^d$ называется квазиимпульсом.

Строго говоря, оператор $A(k)$ задается в пространстве $L^2(\square)$ (комплекснозначных функций) квадратичной формой

$$\int\limits_{\square} a(x)(\nabla u + iku)\cdot(\nabla \bar u - ik\bar u)dx \text{ на } H^1_{per}(\square) \subset L^2(\square),$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение. Квадратичная форма, очевидно, замкнута, а сам оператор — неотрицательный и самосопряженный.

Для функции

$$v(x,t) = u(x,t)e^{-ik\cdot x},$$

где $u(x,t)$ — решение задачи Коши (1.1), очевидно, выполнены соотношения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - A(k)v = 0,\ t > 0, \\ v|_{t=0} = e^{-ik\cdot x} f(x). \end{cases}$$

Отсюда сдвигом на целочисленные векторы и суммированием с учетом периодичности матрицы $a(x)$ выводим, что полученная из $u(x,t)$ по формуле (2.1) функция $\hat u(x,k,t)$ периодична по x и $\hat u(\cdot,k,\cdot)$ есть решение задачи Коши на ячейке $\square$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat u}{\partial t} - A(k)\hat u = 0,\ \ t > 0, \\ \hat u|_{t=0} = \hat f(x,k), \end{cases} \tag{2.5}$$

где k выступает параметром. Согласно (2.2) можно вернуться к исходному решению

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\square^*} e^{ik\cdot x}\hat u(x,k,t)dk.$$

Таким образом, получено искомое представление решения $u(x,t)$ исходной задачи (1.1) через решения $\hat u(x,k,t)$ периодических задач (2.5). Запишем это как

$$e^{-tA} f = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int\limits_{\square^*} e^{ik\cdot x} e^{-tA(k)} \hat f(x,k)dk, \tag{2.6}$$

откуда

$$e^{-tA} = U^{-1} e^{-t\hat A} U, \tag{2.7}$$

где полугруппа $e^{-t\hat A}$ действует в $L^2(\square\times\square^*){=}L^2(\square^*, L^2(\square))$ «послойно» по k,

$$e^{-t\hat A}\hat f{=}e^{-tA(k)}\hat f(\cdot,k). \tag{2.8}$$

Отметим один общий факт. Если $B = B(k)$ — ограниченный в $L^2(\square)$ оператор, непрерывно (по операторной норме) зависящий от $k \in \square^*$, то послойное его действие в $L^2(\square\times\square^*){=}L^2(\square^*, L^2(\square))$ определяется равенством

$$\hat B f = B(k) f(\cdot,k) \text{ для } f \in L^2(\square\times\square^*) = L^2(\square^*, L^2(\square)).$$

При этом очевидна оценка

$$\|\hat B\| \leqslant \sup_{k\in\square^*} \|B(k)\|$$

для соответствующих операторных норм, стоящих в левой и правой частях.

Представление (2.7) для полугруппы e^{-tA}, называемое блоховским, есть основной итог этого раздела. Дальнейшая цель — изучить полугруппу $e^{-tA(k)}$, связанную с исходной полугруппой e^{-tA} формулами (2.7), (2.8). Естественно начать с изучения спектра оператора $A(k)$.

3. О спектре оператора $A(k)$

3.1. Свойство разделения спектра. При каждом $k \in \mathbb{R}^d$ имеем неотрицательный самосопряженный в $L^2(\square)$ оператор $A(k)$ (см. (2.4)), резольвента его компактна. Спектр оператора $A(k)$ представляет собой стремящуюся к $+\infty$ последовательность собственных значений, которые располагаем по возрастанию с учетом кратности:

$$0 \leqslant \lambda_0(k) \leqslant \lambda_1(k) \leqslant \dots, \tag{3.1}$$

соответствующие собственные функции

$$\varphi_0(x,k),\ \varphi_1(x,k), \dots \tag{3.2}$$

можно выбрать так, что они образуют ортонормированный базис в $L^2(\square)$.

Принято называть $\lambda_n(k)$, $n{=}0,1,\dots$, зонными функциями. Это — непрерывные 2π-периодические функции, их можно считать определенными на двойственной ячейке $\square^* = [-\pi,\pi)^d$. Соответствующие собственные функции $\varphi_n(x,k)$ измеримы по $x \in \square$ и, по крайней мере, непрерывны по $k \in \square^*$. Анализ, проведенный далее в пункте 4.2, показывает, что $\varphi_n(x,k)$ — ограниченные функции.

Начнем с описания спектра невозмущенного оператора $A = A(0)$, которое легко получить благодаря неравенству Пуанкаре

$$\int\limits_{\square} |v|^2 dx \leqslant c_P \int\limits_{\square} |\nabla v|^2 dx \quad \forall v \in H^1(\square), \quad \langle v \rangle = 0.$$

Здесь функция v не обязательно периодична.

Лемма 3.1. *Оператор A имеет простое собственное значение $\lambda_0 = \lambda_0(0) = 0$ с собственной функцией $\varphi_0(x) \equiv 1$, а другие собственные значения $\lambda_j = \lambda_j(0), j \geqslant 1$, лежат правее точки $c_1 = c_P^{-1}\nu$, где c_P — константа из неравенства Пуанкаре, ν — константа эллиптичности из* (1.2).

Рассмотрим возмущенный оператор $A(k)$, $k \in \square^*$. Для изучения спектра $Sp\,A(k)$ введем оператор сравнения $J(k)$. Он получается из $A(k)$, если взять $a(x) = I$, другими словами,

$$J(k) = -e^{-ik\cdot x}\Delta e^{ik\cdot x} = -\Delta - 2ik\nabla + k^2.$$

Собственными функциями и собственными значениями оператора $J(k)$ будут

$$e^{i2\pi nx},\ (2\pi n + k)^2,\ n \in \mathbb{Z}^d,\ k \in \square^*. \tag{3.3}$$

Легко видеть, что

$$\min_{k \in \square^*} (2\pi n + k)^2 \geqslant \pi^2$$

для $\forall n \in \mathbb{Z}^d,\ n \neq 0$. Поэтому наименьшее собственное значение k^2 (при $n = 0$) простое при $|k| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Из неравенства $\nu I \leqslant a(x) \leqslant \nu^{-1} I$ имеем

$$\nu J(k) \leqslant A(k) \leqslant \nu^{-1} J(k).$$

Отсюда по принципу минимакса выводим интересующие нас свойства собственных значений оператора $A(k)$:

1. выполнена оценка
$$\nu k^2 \leqslant \lambda_0(k) \leqslant \nu^{-1} k^2, \quad k \in \square^*; \tag{3.4}$$
2. $\lambda_0(k)$ — простое при $|k| \leqslant r_0 = \dfrac{\nu\pi}{2}$;
3. $\lambda_1(k) \geqslant \delta_0 = \nu\pi^2\ \forall k \in \square^*$.

В частности, доказана

Лемма 3.2.

(i) *На интервале* $\left[0, \dfrac{\delta_0}{2}\right]$ *лежит единственное собственное значение* $\lambda_0(k)$, *если* $|k| \leqslant r_0$, *где* δ_0 *и* r_0 *указаны выше.*

(ii) *Если* $|k| \geqslant \tau > 0$, *то весь спектр оператора* $A(k)$ *лежит правее некоторой точки* $r(\tau) > 0$.

Теперь отметим *свойство четности*, заключающееся в том, что верны следующие равенства при достаточно малых $|k|$ (например, при $|k| \leqslant r_0$):

$$\lambda_0(-k) = \lambda_0(k), \quad \varphi_0(x, -k) = \overline{\varphi_0(x, k)}. \tag{3.5}$$

Эти равенства легко установить, исходя из того, что собственное значение $\lambda_0(k)$ простое и вещественное, а кроме того, $\overline{A(k)} = A(-k)$. В самом деле, для нормированной собственной функции $\varphi_0(x, k)$ справедливы соотношения

$$A(k)\varphi_0(x, k) = \lambda_0(k)\varphi_0(x, k) \Rightarrow \overline{A(k)\varphi_0(x, k)} = \overline{\lambda_0(k)\varphi_0(x, k)} \Rightarrow$$
$$A(-k)\overline{\varphi_0(x, k)} = \lambda_0(k)\overline{\varphi_0(x, k)},$$

т. е. $\overline{\varphi_0(x, k)}$ — нормированная собственная функция оператора $A(-k)$ с собственным значением $\lambda_0(k)$. Но в силу свойства разделения спектра (см. лемму 3.2, (i)) $\lambda_0(-k)$ — единственное собственное значение (притом простое) оператора $A(-k)$ на интервале $\left[0, \dfrac{\delta_0}{2}\right]$, а $\varphi_0(x, -k)$ — соответствующая нормированная собственная функция. Отсюда вытекают оба равенства (3.5).

По теории возмущений собственное значение $\lambda_0(k)$ аналитично по k в достаточно малой окрестности точки $k = 0$, т. е. при $|k| \leqslant r_1$. Ввиду четности $\lambda_0(k)$ тейлоровское разложение $\lambda_0(k)$ в точке $k = 0$ до четвертого порядка имеет вид

$$\lambda_0(k) = a^0 k \cdot k + O(k^4), \tag{3.6}$$

где a^0 — некоторая симметрическая положительно определенная матрица.

Проектор $P_0(k)$ на одномерное собственное пространство также аналитичен, и можно выбрать аналитическую собственную функцию $\varphi_0(x, k) = P_0(k)1$. Более подробные рассуждения, показывающие аналитичность $\lambda_0(k)$ и $\varphi_0(x, k)$, даны в следующем пункте.

3.2. Свойство аналитичности. Исследуем сначала аналитические свойства резольвенты $(A(k) - \xi)^{-1}$ как функции параметра $k \in \mathbb{R}^d$, ξ — комплексный параметр. Запишем

$$A(k) = A(0) + B(k), \quad A(0) = A,$$
$$B(k) = -i \operatorname{div} ak - ik \cdot a\nabla + ak \cdot k$$

и положим

$$R_0 = (A(0) - \xi)^{-1}.$$

Тогда имеем равенство

$$(A(k) - \xi)^{-1} = R_0(I + B(k)R_0)^{-1}. \tag{3.7}$$

Поскольку резольвента R_0 — ограниченный оператор из $L^2(\square)$ в $H^1_{per}(\square)$, то оператор $B(k)R_0$ ограниченно действует из $L^2(\square)$ в $L^2(\square)$, причем

$$\|B(k)R_0\| \leqslant \frac{1}{2} \text{ при } |k| \leqslant r_1. \tag{3.8}$$

Выбор числа $r_1 > 0$, очевидно, зависит от нормы оператора $R_0 = R_0(\xi)$. Заметим, что $B(k)R_0$ есть многочлен по k, коэффициенты которого суть ограниченные операторы. Из (3.7), (3.8) имеем сходящийся по операторной норме ряд

$$(A(k) - \xi)^{-1} = R_0 + \sum_{l=1}^{+\infty} (-1)^l R_0 (B(k)R_0)^l. \tag{3.9}$$

Отсюда следует аналитичность резольвенты $(A(k) - \xi)^{-1}$ как функции аргумента k в окрестности точки $k = 0$. При этом в качестве ξ может выступать любая точка из резольвентного множества оператора $A(0)$.

Пусть Γ — окружность в комплексной ξ-плоскости с центром в нуле, не содержащая внутри себя других собственных значений оператора $A(0)$, кроме нулевого (см. лемму 3.1). Можно проинтегрировать (3.9) по контуру Γ и получить проектор

$$P(k) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(A(k)-\xi)^{-1}d\xi = P(0) - \frac{1}{2\pi i}\sum_{l=1}^{+\infty}\int\limits_{\Gamma}(-1)^l R_0(B(k)R_0)^l d\xi. \tag{3.10}$$

При достаточно малых $|k|$ верно неравенство $\|P(k)-P(0)\| \leqslant \frac{1}{2}$, из которого следует, что образ оператора $P(k)$ изоморфен образу оператора $P(0)$, в частности, оба образа одномерны. Это означает, что внутри Γ находится в точности одно собственное значение $\lambda_0(k)$ и оно простое. Таким образом, еще раз другим способом доказано свойство разделения спектра оператора $A(k)$ при малых $|k|$.

Главный вывод для нас из разложения (3.10) заключается в том, что $P(k)$ — аналитическая функция. Отсюда стандартными рассуждениями (см., например, [11, гл. IV]) выводим аналитичность собственного значения $\lambda_0(k)$, а также собственной функции $\varphi_0(x,k)\in\{cP(k)1,\ c\neq 0\}$. Нормируем $\varphi_0(x,k)$ не совсем обычным условием

$$\langle\varphi_0(\cdot,k)\rangle = 1 \tag{3.11}$$

(среднее по ячейке периодичности равно единице).

3.3. Идентификация первых коэффициентов тейлоровского разложения. Наряду с (3.6) запишем разложение для собственной функции

$$\varphi_0(k,x) = 1 + c_j(x)k_j + g_{je}(x)k_jk_e + O(|k|^3),$$

$c_j(x)$, $g_{jl}(x)$ — функции из $L^2(\square)$, более точно из $H^1_{\mathrm{per}}(\square)$, с нулевым средним по ячейке. Последнее согласуется с условием нормировки (3.11). Тогда

$$-A(k)\varphi_0 = \operatorname{div}(a\nabla\varphi_0) + ik_ra_{rs}\frac{\partial}{\partial x_s}\varphi_0 + ik_s\frac{\partial}{\partial x_r}(a_{sr}\varphi_0) - k_rk_sa_{rs}\varphi_0 =$$

$$= k_j\operatorname{div}(a\nabla c_j) + ik_s\frac{\partial}{\partial x_r}a_{rs} - k_rk_sa_{rs} + ik_rk_ja_{rs}\frac{\partial}{\partial x_s}c_j +$$

$$ik_sk_j\frac{\partial}{\partial x_r}(a_{rs}c_j) + k_jk_l\operatorname{div}(a\nabla g_{jl}) + O(k^3)$$

и с учетом (3.6)

$$\lambda_0(k)\varphi_0(k,x) = a^0k\cdot k + O(k^3).$$

Теперь в равенстве

$$A(k)\varphi_0 = \lambda(k)\varphi_0$$

сравним слагаемые с одинаковой степенью k. Сравнение линейных по k слагаемых дает

$$\operatorname{div}(a\nabla c_j) = -i\frac{\partial}{\partial x_r}a_{rj}.$$

Видим, что $c_j(x)$ выражается через решение $N_j(x)$ задачи на ячейке (см. (1.11)),

$$c_j = iN_j,$$

поскольку согласно (1.11)

$$\operatorname{div}(a\nabla N_j) = -\frac{\partial}{\partial x_r}a_{rj}.$$

Сравнивая слагаемые порядка k^2, с учетом равенства $c_j = iN_j$ выводим

$$\operatorname{div}(a\nabla g_{jl}) = a_{jl} + a_{js}\frac{\partial}{\partial x_s}N_l + \frac{\partial}{\partial x_s}(a_{js}N_l) - a^0_{jl}.$$

Относительно g_{jl} получена периодическая задача вида (1.12), необходимое условие разрешимости которой приводит к соотношениям

$$a^0_{jl} = \langle a_{jl}\rangle + \left\langle a_{js}\frac{\partial}{\partial x_s}N_l\right\rangle, 1\leqslant j,l\leqslant d.$$

Видно, что матрица $a^0 = \{a^0_{jl}\}_{j,l}$ совпадает с усредненной матрицей, определенной в (1.10).

Таким образом, доказаны разложения

$$\begin{gathered}\lambda_0(k) = a^0 k \cdot k + O(k^4),\\ \varphi_0(x,k) = 1 + iN_j(x)k_j + O(k^2),\end{gathered} \tag{3.12}$$

где матрица a^0 и функции $N_j(x)$ — те же, что в (1.10), (1.11).

Собственная функция $\varphi_0(\cdot,k)$ оказывается не нормированной в $L^2(\square)$. Но после нормировки второе соотношение в (3.12) не меняется. В самом деле, поскольку $\langle N_j\rangle = 0$ (см. (1.11)), то

$$\begin{gathered}\nu(k) \equiv \langle \varphi_0(\cdot,k)\overline{\varphi_0(\cdot,k)}\rangle = \langle 1 + iN_j(\cdot)k_j\rangle\langle 1 - iN_l(\cdot)k_l\rangle + O(k^2) =\\ 1 + \langle N_j N_l\rangle k_j k_l + O(k^2) = 1 + O(k^2)\end{gathered} \tag{3.13}$$

и нормировка скажется в разложении $\varphi_0(\cdot,k)$ лишь на членах порядка два и выше, которые на этом этапе не конкретизируются и отнесены в остаточный член.

4. Выделение главного члена асимптотики

4.1. Пусть $G(k,x,y,t)$ — функция Грина периодической задачи (2.5), т. е. ядро интегрального оператора $e^{-tA(k)}$. Через функцию Грина G выражается фундаментальное решение $K(x,y,t)$, а именно,

$$K(x,y,t) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\square^*} e^{ik\cdot(x-y)}G(k,x,y,t)dk. \tag{4.1}$$

Приведем вывод этой формулы, опираясь на блоховское представление операторной экспоненты e^{-tA}. В равенстве

$$e^{-tA}f(x) \overset{(2.6)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int\limits_{\square^*} e^{ik\cdot x}e^{-tA(k)}\hat f(x,k)dk,$$

используя определение функции Грина и преобразования $\hat f$, сделаем подстановки

$$e^{-tA(k)}\hat f(x,k) = \int\limits_{\square} G(k,x,y,t)\hat f(y,k)dy,$$

$$\hat f(y,k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\sum_h f(y+h)e^{-i(y+h)\cdot k}$$

и учтем периодичность $G(k,x,y,t)$ по y. Тогда

$$e^{-tA}f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\square^*} e^{ik\cdot x}\left(\sum_h \int\limits_{\square} G(k,x,y+h,t)f(y+h)e^{-i(y+h)\cdot k}dy\right)dk =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\square^*} e^{ik\cdot x}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} G(k,x,y,t)f(y)e^{-iy\cdot k}dy\right)dk =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\square^*} e^{ik\cdot(x-y)}G(k,x,y,t)dk\right)f(y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^d} K(x,y,t)f(y)dy,$$

откуда следует представление (4.1) для ядра $K(x,y,t)$ интегрального оператора e^{-tA}.

4.2. Отметим некоторые свойства собственных значений $\lambda_j(k)$ и собственных функций $\varphi_j(x,k)$ оператора $A(k)$.

Для собственных значений оператора сравнения $J(k)$ (см. (3.3)) выполнено неравенство

$$\pi^2(2|n|-1)^2 \leqslant (2\pi n+k)^2 \leqslant \pi^2(2|n|+1)^2, \quad k\in\square^*, \quad n\in\mathbb{Z}^d.$$

Отсюда выводим оценку сверху для считающей функции этого оператора

$$\sum_{(2\pi n+k)^2\leqslant\lambda} 1 \leqslant c\lambda^{\frac{d}{2}}, \tag{4.2}$$

и аналогичная оценка верна для считающей функции оператора $A(k)$.

Важна также поточечная оценка для нормированных в $L^2(\square)$ собственных функций оператора $A(k)$

$$\sup_{x\in\square}|\varphi_j(x,k)| \leqslant c(1+\lambda_j^d). \tag{4.3}$$

которая есть следствие предыдущей оценки. В самом деле, исходим из операторного неравенства

$$A(k)\geqslant \nu J(k),$$

которое влечет соответствующее неравенство для спектральных проекторов

$$E_A(\lambda)\leqslant \nu^{-1}E_J(\lambda),\ \lambda>0.$$

Спектральный проектор $E_A(\lambda)$ — это интегральный оператор с ядром

$$\sum_{\lambda_j(k)\leqslant\lambda}\varphi_j(k,x)\bar{\varphi}_j(k,y).$$

На диагонали (при $x=y$) выполняется поточечное неравенство

$$\sum_{\lambda_j(k)\leqslant\lambda}|\varphi_j(k,x)|^2\leqslant \nu^{-1}\sum_{(2\pi n+k)^2\leqslant\lambda} 1 \overset{(4.2)}{\leqslant} c\lambda^{\frac{d}{2}},$$

из которого следует (4.3).

4.3. Оценка (4.3) позволяет представить функцию Грина в виде равномерно сходящегося ряда

$$G(k,x,y,t)=\sum_{j=0}^{\infty}e^{-t\lambda_j(k)}\varphi_j(k,x)\bar{\varphi}_j(k,y).$$

Учитывая отмеченные в разделе 3 свойства собственных значений $\lambda_j(k)$, выделяем в этом разложении главное слагаемое, а остальные относим к остаточному члену. В результате получаем асимптотическое представление

$$G(k,x,y,t)=e^{-t\lambda_0(k)}\varphi_0(k,x)\bar{\varphi}_0(k,y)+O(e^{-c_0t}),\ c_0>0,$$

равномерное по $x,y\in\square$, $k\in\square^*$. Отсюда и из (4.1) следует асимптотическое представление

$$K(x,y,t)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\square^*}e^{ik\cdot(x-y)}e^{-t\lambda_0(k)}\varphi_0(x,k)\bar{\varphi}_0(y,k)dk+O(e^{-c_0t}), \tag{4.4}$$

также равномерное по $x,y\in\mathbb{R}^d$. Здесь интеграл по всей ячейке $\square^*$ можно заменить на интеграл по достаточно малой окрестности нуля, где имеют место разложения (3.12). Интеграл по остальной части в силу леммы 3.2, (ii) можно отнести в остаточный член экспоненциального характера.

Итак, рассматривая в (4.4) интегрирование только по малой окрестности нуля, заменим φ_0 и $\lambda_0(k)$ приближенными выражениями $1+iN_jk_j$, $a^0k\cdot k$ и оценим соответствующую ошибку. Поскольку

$$\int\limits_{|k|\leqslant r_0}e^{-t\lambda_0(k)}|k|^2dk\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^d}e^{-t\nu k^2}|k|^2dk=ct^{-\frac{d+2}{2}},$$

то замена φ_0 на $1+ik_jN_j$ дает ошибку порядка $t^{-\frac{d+2}{2}}$. Остается оценить величину

$$\int\limits_{|k|\leqslant r_0} |e^{-t\lambda_0(k)} - e^{ta^0k\cdot k}|dk. \tag{4.5}$$

Учитывая неравенства $\lambda_0(k)\geqslant \nu k^2$ (см. (3.4)), $a^0k\cdot k\geqslant \nu k^2$ (см. (1.13)), выводим оценку

$$|e^{-t\lambda(k)} - e^{-ta^0k\cdot k}| \leqslant t|\lambda_0(k) - a^0k\cdot k|e^{-t\nu k^2} \leqslant c_1tk^4e^{-t\nu k^2}.$$

Поэтому величина (4.5) имеет порядок $t^{-\frac{(d+2)}{2}}$.

В результате из (4.4) получили представление

$$\begin{aligned}(2\pi)^dK(x,y,t) = \int\limits_{|k|\leqslant r_0} e^{ik\cdot(x-y)}e^{-ta^0k\cdot k}(1+ik_j(N_j(x)-N_j(y)))dk + O(t^{-\frac{d+2}{2}}) = \\ \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ik\cdot(x-y)}e^{-ta^0k\cdot k}(1+ik_j(N_j(x)-N_j(y)))dk + O(t^{-\frac{d+2}{2}}),\end{aligned} \tag{4.6}$$

где расширение области интегрирования приводит к изменению лишь остаточного члена. Последний интеграл легко вычисляется с помощью преобразования Фурье, что дает

$$K(x,y,t) = K_0(x,y,t) + (N_j(x)-N_j(y))\frac{\partial}{\partial x_j}K_0(x,y,t) + O(t^{-\frac{d+2}{2}}).$$

Отсюда огрублением следует поточечная оценка (1.7), так как

$$(N_j(x)-N_j(y))\frac{\partial}{\partial x_j}K_0(x,y,t) = \frac{N_j(x)-N_j(y)}{\sqrt{t}}\frac{b_{ij}(x_i-y_i)}{\sqrt{t}}K_0(x,y,t), \quad b=\frac{1}{4}(a^0)^{-1}$$

(см. (1.8)), и в силу ограниченности N_j имеем

$$\left|(N_j(x)-N_j(y))\frac{\partial}{\partial x_j}K_0\right| \leqslant ct^{-\frac{d+1}{2}}. \tag{4.7}$$

Вместе с тем для приближения

$$K_1(x,y,t) = K_0(x,y,t) + (N_j(x)-N_j(y))\frac{\partial}{\partial x_j}K_0(x,y,t)$$

доказана оценка погрешности с большей точностью, а именно,

$$|K(x,y,t) - K_1(x,y,t)| \leqslant ct^{-\frac{d+2}{2}}, \quad x,y\in\mathbb{R}^d, \quad c=\mathrm{const}(d,\nu),$$

объявленная раннее в (1.15).

4.4. Займемся выводом интегральных оценок. Будем использовать две оценки

$$|K-K_1| \leqslant ct^{-\frac{d+2}{2}},$$

$$|K-K_1| \leqslant ct^{-\frac{d}{2}}e^{-c_0\frac{(x-y)^2}{t}}.$$

Первая только что доказана, вторая следует непосредственно из конструкции приближения K_1 (см. (1.14)) и известной оценки Нэша—Аронсона

$$0\leqslant K(x,y,t) \leqslant c_1t^{-\frac{d}{2}}e^{-\frac{c_0(x-y)^2}{t}}, \tag{4.8}$$

где константы c_1, $c_0>0$ зависят только от размерности d и константы эллиптичности ν. Оценка (4.8) доказана, например, в [9, приложение к гл. II].

Для $\alpha=\frac{1}{2}+\delta$, $\delta>0$, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}|K-K_1|dy = \int\limits_{|x-y|\leqslant t^\alpha}|K-K_1|dy + \int\limits_{|x-y|\geqslant t^\alpha}|K-K_1|dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{ct^{\alpha d}}{t^{\frac{d+2}{2}}} + \int\limits_{|z|\geqslant t^\delta} e^{-\lambda_0 z^2} dz \leqslant \frac{1}{t^{1-\delta d}} + ce^{-\frac{\lambda_0}{2}t^\delta} \leqslant \frac{C}{t^{1-d\delta}}. \tag{4.9}$$

Взяв здесь $\delta = \dfrac{1}{2d}$, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |K - K_1| dy \leqslant \frac{c}{\sqrt{t}}. \tag{4.10}$$

Теперь вспомним, что функции N_j ограничены и поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |K_0 - K_1| dy \leqslant c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x K_0| dy \leqslant \frac{c}{\sqrt{t}},$$

что вместе с (4.10) приводит к оценке (1.9).

Выбирая достаточно малым δ, из (4.9) можно получить и более точную, чем (4.10), оценку, а именно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |K(x,y,t) - K_1(x,y,t)|\, dy \leqslant \frac{c}{t^{1-\sigma}}, \tag{4.11}$$

где $\sigma > 0$ сколь угодно мало, $c = \mathrm{const}(d, \nu, \sigma)$.

4.5. Подводя итоги, сформулируем точно, что доказано для приближений $K_0(x,y,t)$, $K_1(x,y,t)$ фундаментального решения уравнения диффузии (1.1). Сами приближения определены в (1.8) и (1.14).

Теорема 4.1. *В предположениях пункта* 1.1 *на матрицу* $a(y)$ *справедливы поточечные оценки* (1.7) *и* (1.15)*, а также интегральные оценки* (1.9) *и* (4.11).

Как следствие из теоремы 4.1 по лемме 1.1 вытекает

Теорема 4.2. *В предположениях и обозначениях раздела* 1 *имеют место следующие оценки приближений для операторной экспоненты* e^{-tA}:

$$\|e^{-tA} - e^{-tA_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)\to L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{c}{\sqrt{t}} \quad \forall p \in [1, \infty]$$

с единой константой $c = \mathrm{const}(d, \nu)$,

$$\|e^{-tA} - (e^{-tA_0} + N(\cdot)\cdot \nabla e^{-tA_0} - e^{-tA_0}\nabla^* \cdot N(\cdot))\|_{L^p(\mathbb{R}^d)\to L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{c}{t^{1-\sigma}} \quad \forall p \in [1, \infty] \tag{4.12}$$

с единой константой $c = \mathrm{const}(d, \nu, \sigma)$, *где* $\sigma > 0$ *сколь угодно мало,* ∇ *— градиент по пространственным переменным,* $\nabla^* = \operatorname{div}$.

При $p = 2$, используя разные версии спектрального подхода, в [5, 15, 21] доказано, что оценка (4.12) верна и без потери в показателе степени t, т. е. с $\sigma = 0$.

Вернемся к оценке (1.16). Для ее получения нужно определить приближение K_2 следующего порядка и для разности $|K - K_2|$ доказать оценку типа (4.9), в которой справа стоит $\frac{c}{t^{2-d\delta}}$, а затем, огрубляя, вернуться к $|K - K_1|$. Чтобы определить K_2, необходимо брать более точное, чем в (3.12), тейлоровское разложение для собственного значения $\lambda_0(k)$ и собственной функции $\varphi_0(x,k)$. Кроме того, потребуется дополнительное условие на регулярность матрицы $a(y)$.

5. Вспомогательные задачи на ячейке

Чтобы найти приближения высокого порядка для фундаментального решения, необходимо рассмотреть наряду с (1.11) другие задачи на ячейке.

Введем индуктивно следующие вспомогательные объекты:

- последовательность 1-периодических функций $\{N_\alpha\}_\alpha$,
- последовательность констант $\{a^0_\alpha\}_\alpha$.

Здесь α — мультииндекс длины $|\alpha| = m$ ($m \in \mathbb{N}$) следующего вида:

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m),\ \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_m,\ \alpha_j \in \{1, \ldots, d\} \quad \forall j = \overline{1, m}. \tag{5.1}$$

Договоримся о некоторых обозначениях, связанных с мультииндексами.

Индекс $\alpha_{\overline{s}}$ получается из α вычеркиванием компоненты α_s, индекс $\alpha_{\overline{sp}}$ — вычеркиванием из $\alpha_{\overline{s}}$ компоненты α_p и т. д. Ясно, что $|\alpha_{\overline{s}}| = m - 1$, $|\alpha_{\overline{sp}}| = m - 2$ и т. д. Если индекс β составлен из некоторых компонент индекса α, то пишем $\beta \subset \alpha$, а индекс $\alpha_{\overline{\beta}}$ получается из α вычеркиванием компонент, входящих в β.

5.1. Ранее были определены функции N_α для индекса единичной длины. Это — решения N_j задачи (1.11) с базисными векторами e_j, $j = 1, \ldots, d$. Используя N_j и e_j, можно задать усредненную матрицу a^0 из (1.10) следующими соотношениями:

$$a^0 e_j = \langle a(e_j + \nabla N_j) \rangle, \quad j = 1, \ldots, d. \tag{5.2}$$

Теперь определим функцию N_α для произвольного индекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ длины 2 как решение задачи

$$\begin{gathered} N_\alpha \in H^1_{\mathrm{per}}(\square), \quad \langle N_\alpha \rangle = 0, \\ -\operatorname{div}(a\nabla N_\alpha) + \operatorname{div} \sum_{\alpha_j \subset \alpha} a e_{\alpha_j} N_{\alpha_{\overline{j}}} + \sum_{\alpha_j \subset \alpha} a e_{\alpha_j} (\nabla N_{\alpha_{\overline{j}}} + e_{\alpha_{\overline{j}}}) = \sum_{\alpha_j \subset \alpha} a^0 e_{\alpha_j} e_{\alpha_{\overline{j}}}. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Здесь e_{α_j} — базисный вектор и N_{α_j} — решение соответствующей задачи (1.11); a^0 — усредненная матрица; в сумме $\sum\limits_{\alpha_j \subset \alpha}$ перебираются все попарно различные компоненты α_j мультииндекса α.

В отличие от (1.11), для задачи (5.3) в общих предположениях на матрицу $a(y)$ нет L^∞-ограниченности решения N_α. Однако, это свойство можно обеспечить, если матрица $a(y)$ достаточна регулярна.

Задача (5.3) того же типа, что (1.12), и условие ее разрешимости имеет вид

$$\left\langle \sum_{\alpha_j \subset \alpha} a e_{\alpha_j} (\nabla N_{\alpha_{\overline{j}}} + e_{\alpha_{\overline{j}}}) \right\rangle = \sum_{\alpha_j \subset \alpha} a^0 e_{\alpha_j} e_{\alpha_{\overline{j}}}.$$

Это условие выполнено в силу симметричности матриц a, a^0 и вытекающих из (5.2) соотношений

$$\left\langle a(\nabla N_{\alpha_{\overline{j}}} + e_{\alpha_{\overline{j}}}) \right\rangle = a^0 e_{\alpha_{\overline{j}}}, \quad \alpha_j \subset \alpha,$$

для любого индекса α, $|\alpha| = 2$.

Для дальнейшего удобно ввести константы a^0_α, $|\alpha| = 2$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, которые выражаются через коэффициенты матрицы a^0 следующим образом:

$$a^0_\alpha = \begin{cases} 2a^0 e_{\alpha_1} e_{\alpha_2}, & \text{если} \quad \alpha_1 \neq \alpha_2, \\ a^0 e_{\alpha_1} e_{\alpha_1}, & \text{если} \quad \alpha_1 = \alpha_2. \end{cases}$$

Тогда правую часть (5.3) заменяет константа a^0_α.

5.2. Функции N_α и константы a^0_α с индексом α, $|\alpha| > 2$, вводятся индуктивно по длине индекса $|\alpha|$.

Предположим, что определены все функции N_β, $|\beta| < m$, а также все константы α^0_β с мультииндексом β четной длины $|\beta| < m$. Тогда функция N_α, где α — любой индекс вида (5.1) длины m, есть решение одной из двух следующих задач в зависимости от того, четно или нечетно m.

Если $|\alpha| = m = 2l + 1$, $l = 1, 2, \ldots$, то

$$\begin{gathered} N_\alpha \in H^1_{\mathrm{per}}(\square),\ \langle N_\alpha \rangle = 0, \\ -\operatorname{div} a\nabla N_\alpha - \operatorname{div} \sum_{\alpha_j \subset \alpha} a e_{\alpha_j} N_{\alpha_{\overline{j}}} - \sum_{\alpha_j \subset \alpha} a e_{\alpha_j} (\nabla N_{\alpha_{\overline{j}}} - \sum_{\alpha_s \subset \alpha_{\overline{j}}} e_{\alpha_s} N_{\alpha_{\overline{j}\overline{s}}}) = \sum_{|\beta| = 2p < m} a^0_\beta N_{\alpha_{\overline{\beta}}}. \end{gathered} \tag{5.4}$$

Если $|\alpha| = m = 2l$, $l = 2, 3, \ldots$, то

$$\begin{gathered} N_\alpha \in H^1_{\mathrm{per}}(\square),\ \langle N_\alpha \rangle = 0, \\ -\operatorname{div} a\nabla N_\alpha + \operatorname{div} \sum_{\alpha_j \subset \alpha} a e_{\alpha_j} N_{\alpha_{\overline{j}}} + \sum_{\alpha_j \subset \alpha} a e_{\alpha_j} (\nabla N_{\alpha_{\overline{j}}} + \sum_{\alpha_s \subset \alpha_{\overline{j}}} e_{\alpha_s} N_{\alpha_{\overline{j}\overline{s}}}) = \sum_{|\beta| = 2p \leqslant m} a^0_\beta N_{\alpha_{\overline{\beta}}}. \end{gathered} \tag{5.5}$$

В уравнении (5.5) появилась новая константа a^0_α с индексом α длины $|\alpha|{=}m{=}2l$.

Дадим по поводу этих задач некоторые комментарии.

1. Суммирование в правых частях (5.4) и (5.5) идет по всем допустимым индексам $\beta\subset\alpha$ четной длины. По соглашению $N_\gamma\equiv 1$, если $|\gamma|=0$, т. е. γ — пустой индекс. В суммах вида $\sum\limits_{\gamma_j\subset\gamma}$ перебираются все попарно различные компоненты γ_j мультииндекса γ.
2. Константа a^0_α, $|\alpha|=m$, выбрана в правой части (5.5) так, чтобы выполнялось условие разрешимости этой задачи, а именно
$$\Big\langle\sum_{\alpha_j\subset\alpha} ae_{\alpha_j}(\nabla N_{\alpha_{\overline{j}}}+\sum_{\alpha_s\subset\alpha_{\overline{j}}} e_{\alpha_s}N_{\alpha_{\overline{j}\overline{s}}})\Big\rangle=a^0_\alpha,\quad |\alpha|=m=2l.\tag{5.6}$$
Для формирования условия разрешимости (5.6) важно, что функции $N_{\alpha_{\overline{\beta}}}$, найденные на предыдущих этапах, имеют среднее $\langle N_{\alpha_{\overline{\beta}}}\rangle=0$.

Итак, задачи (5.5) для индексов α четной длины $|\alpha|=m$ разрешимы за счет согласованного выбора констант a^0_α, $|\alpha|=m$. Что касается разрешимости задач (5.4) для индексов α нечетной длины $|\alpha|=m$, то она обеспечена автоматически самим процессом введения на предшествующих этапах функций $\{N_\alpha\}$ и констант $\{a^0_\alpha\}$ с мультииндексами меньшей длины. Этот отнюдь не очевидный факт доказан в [21].

3. При условии, что матрица $a(y)$ гладкая, все решения задач (5.4)-(5.5) тоже гладкие и, в частности, ограничены.

6. Полное аналитическое разложение

Конкретизируем аналитические разложения по k для собственного значения $\lambda_0(k)$ и собственной функции $\varphi_0(x,k)$, о которых шла речь раньше в разделе 3.

Лемма 6.1. *Найдется такое $\delta_0>0$, что для $|k|<\delta_0$ имеют место утверждения*:

(i) *собственное значение $\lambda_0(k)$ простое и является аналитической функцией, допускающей разложение*
$$\lambda_0(k)=a^0k\cdot k+\sum_{|\alpha|=2p\geqslant 4} a^0_\alpha k^\alpha,\tag{6.1}$$
где матрица a^0 определена в (1.10)*, а константы a^0_α — в* (5.6);

(ii) *собственную функцию $\varphi_0(x,k)$ можно выбрать аналитической по k, так что верно разложение*
$$\varphi_0(x,k)=1+ik\cdot N(x)+\sum_{|\alpha|=2p\geqslant 2}k^\alpha N_\alpha(x)+i\sum_{|\alpha|=2p+1\geqslant 3}k^\alpha N_\alpha(x),\tag{6.2}$$
где $N=(N_1,\dots,N_d)$ — решение задачи (1.11)*, $N_\alpha(x)$, $|\alpha|=2$, — решение задачи* (5.3)*, $N_\alpha(x)$, $|\alpha|=m\geqslant 3$, — решение задачи* (5.4) *или* (5.5) *в зависимости от того, нечетно или четно число m.*

В разложениях (6.1) или (6.2) степень k^α для вектора $k=(k_1,\dots,k_d)$ с мультииндексом $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ определяется как
$$k^\alpha=k_{\alpha_1}k_{\alpha_2}\cdots k_{\alpha_m},$$
а свойства мультииндекса α даны в (5.1).

Располагая разложениями (6.1) или (6.2), можно через их коэффициенты выразить величину $\nu(k)$ из (3.13). Поскольку
$$\overline{\varphi_0(x,k)}=1+\sum_{|\alpha|=2p\geqslant 2}k^\alpha N_\alpha(x)-i(k\cdot N(x)+\sum_{|\alpha|=2p+1\geqslant 3}k^\alpha N_\alpha(x))$$
и
$$\nu(k)=\langle\varphi_0(\cdot,k)\overline{\varphi_0(\cdot,k)}\rangle=\int\limits_\square[(1+\sum_{|\alpha|=2p\geqslant 2}^\infty k^\alpha N_\alpha(x))^2+(\sum_{|\alpha|=2p+1\geqslant 1}^\infty k^\alpha N_\alpha(x))^2]dx,$$

имеем в первом приближении $\nu(k)=1+O(k^2)$ или точно

$$\begin{aligned}\nu(k)=1+\sum_{|\alpha|=2p\geqslant 2}^{\infty} k^{\alpha}\sum_{\beta\subset\alpha}\langle N_\beta N_{\alpha_{\overline{\beta}}}\rangle=\\ =1+\sum_{|\alpha|=2p\geqslant 2}^{\infty} c_\alpha k^{\alpha},\end{aligned}\tag{6.3}$$

где

$$c_\alpha=\sum_{\beta\subset\alpha,1\leqslant|\beta|\leqslant 2p-1}\langle N_\beta N_{\alpha_{\overline{\beta}}}\rangle,\quad |\alpha|=2p\tag{6.4}$$

(при суммировании перебираются все допустимые попарно различные индексы $\beta\subset\alpha$).

Доказательство леммы 6.1. Остановимся коротко лишь на идентификации коэффициентов в указанных разложениях.

Благодаря свойству четности (3.5) аналитическая функция $\lambda_0(k)$ раскладывается в ряд только по четным степеням, что отражено в (6.1), а относительно разложения собственной функции можно утверждать

$$\varphi_0(x,k)=1+i\sum_{|\alpha|=2p+1\geqslant 1}N_\alpha(x)k^\alpha+\sum_{|\alpha|=2p\geqslant 2}N_\alpha(x)k^\alpha,\tag{6.5}$$

где все $N_\alpha(x)$ вещественнозначны. Ранее в разделе 3 мы уже отождествили матрицу a^0 из (6.1) с усредненной матрицей, а коэффициенты $N_\alpha(x)$, $|\alpha|=1$, из (6.5) – с решениями задачи (1.11). Действуем по той же схеме и далее.

Используя представление (2.4) для оператора $A(k)$, а также полученные на этот момент предварительные разложения (6.1) и (6.5), запишем равенство

$$0=A(k)\varphi_0(x,k)-\lambda_0(k)\varphi_0(x,k),$$

группируя в нем слагаемые с одной и той же степенью k^α. Имеем

$$\begin{aligned}0=A(k)\varphi_0(x,k)-\lambda_0(k)\varphi_0(x,k)=\\ \sum_{j=1}^{n} ik_j[-\operatorname{div}a(\nabla N_j+e_j)]+\\ +\sum_{|\alpha|=2}k^\alpha[-\operatorname{div}a\nabla N_\alpha+\operatorname{div}\sum_{\alpha_j\subset\alpha}ae_{\alpha_j}N_{\alpha_{\overline{j}}}+\sum_{\alpha_j\subset\alpha}ae_{\alpha_j}\cdot(\nabla N_{\alpha_{\overline{j}}}+e_{\alpha_{\overline{j}}})\\ -\sum_{\alpha_j\subset\alpha}a^0e_{\alpha_j}e_{\alpha_{\overline{j}}}]+\\ +\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=m=2l+1}ik^\alpha[-\operatorname{div}a\nabla N_\alpha-\operatorname{div}\sum_{\alpha_j\subset\alpha}ae_{\alpha_j}N_{\alpha_{\overline{j}}}-\\ -\sum_{\alpha_j\subset\alpha}ae_{\alpha_j}\cdot(\nabla N_{\alpha_{\overline{j}}}-\sum_{\alpha_s\subset\alpha_{\overline{j}}}e_{\alpha_s}N_{\alpha_{\overline{js}}})-\sum_{|\beta|=2p<m}a^0_\beta N_{\alpha_{\overline{\beta}}}]+\\ +\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{|\alpha|=m=2l}k^\alpha[-\operatorname{div}a\nabla N_\alpha+\operatorname{div}\sum_{\alpha_j\subset\alpha}ae_{\alpha_j}N_{\alpha_{\overline{j}}}+\sum_{\alpha_j\subset\alpha}ae_{\alpha_j}(\nabla N_{\alpha_{\overline{j}}}+\\ +\sum_{\alpha_s\subset\alpha_{\overline{j}}}e_{\alpha_s}N_{\alpha_{\overline{js}}})-\sum_{|\beta|=2p\leqslant m}a^0_\beta N_{\alpha_{\overline{\beta}}}].\end{aligned}\tag{6.6}$$

Здесь действует соглашение о работе с мультииндексами (см. начало пункта 5.1) и, как прежде (см. комментарии в конце пункта 5.1), в сумме $\sum\limits_{\gamma_j\subset\gamma}$ перебираются все попарно различные компоненты γ_j мультииндекса γ.

Приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях k^α в (6.6), $|\alpha|\geqslant 1$, выводим искомые формулы для коэффициентов разложения $N_\alpha(x)$ и a^0_α.

7. Приближения высокого порядка

Ранее были построены $K_0(x,y,t)$, $K_1(x,y,t)$ — нулевое и первое приближения к фундаментальному решению $K(x,y,t)$ уравнения (1.1), так что выполнены оценки (1.7) и (1.15) порядка

$O(t^{-\frac{d+1}{2}})$ и $O(t^{-\frac{d+2}{2}})$ соответственно. Согласно (1.14) $K_1(x,y,t)$ получается из $K_0(x,y,t)$ добавлением первого корректора

$$K_1(x,y,t) = K_0(x,y,t) + S_1(x,y,t),$$
$$S_1(x,y,t) = (N_j(x) - N_j(y))\frac{\partial}{\partial x_j}K_0(x,y,t).$$

Аналогичным образом строятся приближения следующих порядков $O(t^{-\frac{d+3}{2}})$ и т. д. Например, $K_2(x,y,t)$ получается из $K_1(x,y,t)$ добавлением второго корректора $S_2(x,y,t)$. Объясним, как находятся корректоры на каждом очередном шаге.

Если собственным значениям (3.1) соответствуют собственные функции (3.2), не образующие ортонормированный базис, то формула (4.4) требует поправки, если мы интересуемся приближениями, более точными, чем $K_0(x,y,t)$ и $K_1(x,y,t)$.

Введем базис $\{\varphi_j^*(x,k)\}_{j=0}^{\infty}$, сопряженный к базису (3.2), так что

$$\langle \varphi_j^*(\cdot,k)\overline{\varphi_m(\cdot,k)}\rangle = \delta_{jm}.$$

В частности,

$$\varphi_0^*(x,k) = \nu(k)^{-1}\varphi_0(x,k), \quad \nu(k) = \langle \varphi_0(\cdot,k)\overline{\varphi_0(\cdot,k)}\rangle.$$

Тогда

$$e^{-tA(k)} = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-t\lambda_j(k)}\varphi_j(x,k)\times\varphi_j^*(x,k),$$

где для заданных функций $\psi_1,\psi_2\in L^2(\square)$ проектор $\psi_1\times\psi_2$ в $L^2(\square)$ действует по правилу

$$(\psi_1\times\psi_2)v = \psi_1\int_{\square} v\bar{\psi}_2 dx.$$

Для ядра экспоненты $e^{-tA(k)}$ так же, как в пункте 4.3, устанавливаем равенство

$$G(k,x,y,t) = e^{-t\lambda_0(k)}\varphi_0(k,x)\bar{\varphi}_0(k,y)\nu(k)^{-1} + O(e^{-c_0t}),\ c_0>0,$$

равномерное по $x,y\in\square$, $k\in\square^*$. Отсюда и из (4.1) следует представление

$$K(x,y,t) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\square^*} e^{ik\cdot(x-y)}e^{-t\lambda_0(k)}\varphi_0(x,k)\bar{\varphi}_0(y,k)\nu(k)^{-1}dk + O(e^{-c_0t}),$$

где функция $\varphi_0(x,k)$ описана в лемме 6.1. Последний интеграл по ячейке $\square^*$ можно заменить на интеграл по достаточно малой окрестности нуля, в которой имеют место разложения (6.1), (6.2), (6.3). Возьмем эти разложения с остаточным членом шестого, третьего и четвертого порядков соответственно, а именно,

$$\lambda_0(k) = a^0k\cdot k + \sum_{|\alpha|=4} a^0_\alpha k^\alpha + O(k^6), \quad \varphi_0(x,k) = 1 + iN(x)\cdot k + \sum_{|\alpha|=2} k^\alpha N_\alpha(x) + O(k^3),$$
$$\nu(k) = 1 + \sum_{|\alpha|=2} c_\alpha k^\alpha + O(k^4), \tag{7.1}$$

а также выделим в первом разложении главный член

$$\lambda_0(k) = a^0k\cdot k + \mu(k), \quad \mu(k) = \sum_{|\alpha|=4} a^0_\alpha k^\alpha + O(k^6),$$

и запишем следующие разложения:

$$\begin{gathered}\varphi_0(x,k)\bar{\varphi}_0(y,k)\nu(k)^{-1} = 1 + ik\cdot(N(x)-N(y)) + k_jk_lN_j(x)N_l(y) + \\ \sum_{|\alpha|=2} k^\alpha\left(N_\alpha(x) + N_\alpha(y) - c_\alpha\right) + O(k^3) \equiv s_2(x,y,k) + O(k^3),\end{gathered} \tag{7.2}$$

$$e^{-t\mu(k)} = 1 - t\sum_{|\alpha|=4} a^0_\alpha k^\alpha + tO(k^6).$$

Тогда аналогом (4.6) будет равенство

$$(2\pi)^d K(x,y,t) = \int\limits_{|k|\leqslant r_0} e^{ik\cdot(x-y)} e^{-ta^0 k\cdot k} e^{-t\mu(k)} s_2(x,y,k)dk + O(t^{-\frac{d+3}{2}}) =$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ik\cdot(x-y)} e^{-ta^0 k\cdot k}(s_2(x,y,k) - t\sum_{|\alpha|=4} a^0_\alpha k^\alpha)dk + O(t^{-\frac{d+3}{2}}), \tag{7.3}$$

так как

$$\int\limits_{|k|\leqslant r_0} e^{-t\lambda_0(k)}|k|^3 dk \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-t\nu k^2}|k|^3 dk = ct^{-\frac{d+3}{2}},$$
$$\int\limits_{|k|\leqslant r_0} e^{-t\lambda_0(k)} t|k|^6 dk \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^d} t|k|^2 e^{-t\nu k^2}|k|^4 dk = \tilde{c}t^{-\frac{d+4}{2}}.$$

Последний интеграл в (7.3) вычисляется (по известным формулам преобразования Фурье) с учетом выражения для $s_2(x,y,k)$ из (7.2) и дает приближение $K_2(x,y,t)$. В итоге из (7.3) следуют равенства

$$K(x,y,t) = K_2(x,y,t) + O(t^{-\frac{d+3}{2}}),$$
$$K_2(x,y,t) = K_1(x,y,t) + S_2(x,y,t), \tag{7.4}$$

$$S_2(x,y,t) = -N_j(x)N_j(y)\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} K_0(x,y,t) -$$
$$\sum_{|\alpha|=2} (N_\alpha(x) + N_\alpha(y) - c_\alpha) D^\alpha_x K_0(x,y,t) - t\sum_{|\alpha|=4} a^0_\alpha D^\alpha_x K_0(x,y,t). \tag{7.5}$$

Здесь и всюду далее для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ (см. (5.1))

$$D^\alpha_x = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_m}}$$

есть соответствующая мультипроизводная.

Если в (7.1) взять одно разложение более точным, а именно,

$$\varphi_0(x,k) = 1 + iN(x)\cdot k + \sum_{|\alpha|=2} k^\alpha N_\alpha(x) + i\sum_{|\alpha|=3} k^\alpha N_\alpha(x) + O(k^4),$$

то аналогичные вычисления приведут к формулам

$$K(x,y,t) = K_3(x,y,t) + O(t^{-\frac{d+4}{2}}),$$
$$K_3(x,y,t) = K_2(x,y,t) + S_3(x,y,t), \tag{7.6}$$

$$S_3(x,y,t) = \sum_{|\alpha|=2} (-N_j(x)N_\alpha(y) + N_j(y)N_\alpha(x) + c_\alpha N_j(x) - c_\alpha N_j(y))\frac{\partial}{\partial x_j} D^\alpha_x K_0(x,y,t) -$$
$$\sum_{|\alpha|=3} (N_\alpha(x) - N_\alpha(y)) D^\alpha_x K_0(x,y,t). \tag{7.7}$$

Таким образом, записывая разложения типа (7.1) с остаточными членами подходящего порядка, получаем корректоры $S_j(x,y,t)$, $j \geqslant 2$, которые формируют последовательно приближения $K_j(x,y,t)$. При этом справедливы оценки

$$|K(x,y,t) - K_j(x,y,t)| \leqslant c_j t^{-\frac{d+j+1}{2}}, \quad j = 2,3,\ldots. \tag{7.8}$$

Эти поточечные оценки будут равномерными по x и y, если в проведенных выше формально выкладках все участвующие функции

$$N_\alpha(x),\ |\alpha| \geqslant 2, \quad \text{ограничены}. \tag{7.9}$$

Чтобы обеспечить свойство (7.9), достаточно предположить, что $a(x)=\{a_{jl}(x)\}$ — липшицева матрица, т. е.

$$|a_{jl}(x) - a_{jl}(x')| \leqslant c_L|x - x'|, \quad x, x' \in \square, \quad 1 \leqslant j,l \leqslant d. \tag{7.10}$$

Справедливо следующее вспомогательное утверждение, доказательство которого вынесено в раздел 9.

Лемма 7.1. *Из липшицевости матрицы $a(x)$ следует, что $N_\alpha \in L^\infty(\square)$, $|\alpha| \geqslant 2$.*

Фактически доказана

Теорема 7.1. *При выполнении условия липшицевости* (7.10) *описанная выше процедура построения приближений $K_j(x,y,t)$, $j = 2,3,\ldots$, для фундаментального решения $K(x,y,t)$ уравнения* (1.1) *приводит к равномерным поточечным оценкам* (7.8) *с константами $c_j = \mathrm{const}(d,\nu,c_L)$. Приближения $K_2(x,y,t)$ и $K_3(x,y,t)$ заданы явно в* (7.4), (7.5) *и* (7.6), (7.7) *соответственно через компоненты разложений* (6.1)–(6.3) *и фундаментальное решение* (1.8).

Из поточечных оценок (7.8) выводятся соответствующие интегральные оценки, как показано в разделе 4. В соответствии с аппроксимациями фундаментального решения строятся аппроксимации операторной экспоненты e^{-tA} с оценкой погрешности по операторной L^p-норме, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Как пример можно рассмотреть теорему 4.2.

Аппроксимации высокого порядка к операторной экспоненте по операторной L^2-норме с нескольких разных сторон изучались ранее: порядка $O(t^{-\frac{3}{2}})$ в [6] и порядка $O(t^{-\frac{n}{2}})$, $n = 1,2,\ldots$, в [21].

Из оценок (7.8) следуют аналоги вероятностной оценки Берри—Эссена с высоким порядком приближения плотности распределения случайной величины $\dfrac{\xi^t - y}{\sqrt{t}}$, связанной с уравнением (1.1), см. пункт 1.4. и оценки (1.18), (1.19).

8. Уравнения с ε-периодическими коэффициентами

Рассмотрим задачу Коши для функции $u^\varepsilon = u^\varepsilon(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $t \geqslant 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + A_\varepsilon u^\varepsilon = 0, \ t > 0, \\ u^\varepsilon|_{t=0} = f, \end{cases}$$

где $A_\varepsilon = -\operatorname{div}(a_\varepsilon \nabla)$, $a_\varepsilon(x) = a\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$, $a(y)$ — 1-периодическая измеримая симметрическая матрица, удовлетворяющая условию (1.2).

Автомодельная замена

$$y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon^2}$$

сводит задачу с ε-периодической матрицей $a\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$ к задаче с 1-периодической матрицей $a(y)$. Именно, функция

$$z^\varepsilon(y,\tau) = u^\varepsilon(\varepsilon y, \varepsilon^2 \tau)$$

есть решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z^\varepsilon}{\partial \tau} + A z^\varepsilon = 0, \ \tau > 0, \\ z^\varepsilon|_{\tau=0} = f_\varepsilon, \quad f_\varepsilon(y) = f(\varepsilon y). \end{cases}$$

Тогда $z^\varepsilon(y,\tau) = e^{-\tau A} f_\varepsilon$, или в обозначениях раздела 1

$$z^\varepsilon(y,\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} K(y,y',\tau) f(\varepsilon y')\,dy'. \tag{8.1}$$

Обозначим через $K_\varepsilon(x,x',t)$ фундаментальное решение для оператора $\dfrac{\partial}{\partial t} + A_\varepsilon$, т. е. ядро интегрального оператора e^{-tA_ε}. Тогда

$$u^\varepsilon(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} K_\varepsilon(x,x',t) f(x')\,dx'.$$

С другой стороны,

$$u^\varepsilon(x,t) = z^\varepsilon(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}) \overset{(8.1)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^d} K(\frac{x}{\varepsilon}, y', \frac{t}{\varepsilon^2}) f(\varepsilon y')\, dy' =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} K(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x'}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}) f(x')\varepsilon^{-d}\, dx'.$$

Отсюда следует равенство

$$K_\varepsilon(x, x', t) = \varepsilon^{-d} K(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x'}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}). \tag{8.2}$$

Непосредственно из формулы (1.8) видно, что

$$\varepsilon^{-d} K_0(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x'}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}) = K_0(x, x', t). \tag{8.3}$$

Поэтому из оценки (1.7) последовательно выводим

$$|K(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x'}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}) - K_0(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x'}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2})| \leqslant c\frac{\varepsilon^{d+1}}{t^{\frac{d+1}{2}}},$$

$$|\varepsilon^{-d} K(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x'}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}) - \varepsilon^{-d} K_0(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x'}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2})| \leqslant \varepsilon\frac{c}{t^{\frac{d+1}{2}}},$$

откуда, в силу (8.2) и (8.3),

$$|K_\varepsilon(x, x', t) - K_0(x, x', t)| \leqslant \varepsilon\frac{c}{t^{\frac{d+1}{2}}},$$

Аналогично из (1.9) вытекает интегральная оценка

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |K_\varepsilon(x, x', t) - K_0(x, x', t)|\, dx' \leqslant \varepsilon\frac{c}{\sqrt{t}},$$

из которой по лемме 1.1 уже можно вывести операторную оценку погрешности усреднения

$$\|e^{-tA_\varepsilon} - e^{-tA_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)\to L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon\frac{c}{\sqrt{t}} \quad \forall\ p \in [1, \infty] \tag{8.4}$$

с единой константой для всех p.

В качестве следствия укажем оценку

$$\|(A_\varepsilon + 1)^{-1} - (A_0 + 1)^{-1}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)\to L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant c\varepsilon \quad \forall\ p \in [1, \infty] \tag{8.5}$$

для разности резольвент исходного эллиптического оператора A_ε и усредненного оператора A_0.

Чтобы получить (8.5) из (8.4), надо воспользоваться известным представлением резольвенты через полугруппу

$$(A + 1)^{-1} = \int\limits_0^\infty e^{-t} e^{-tA} dt.$$

Действительно,

$$\|(A_\varepsilon + 1)^{-1} - (A_0 + 1)^{-1}\| \leqslant \int\limits_0^\infty e^{-t} \|e^{-tA_\varepsilon} - e^{-tA_0}\| dt \leqslant 2\varepsilon + C\varepsilon \int\limits_\varepsilon^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \leqslant c\varepsilon.$$

При $p = 2$ оценка (8.5) впервые была доказана в [4].

9. Доказательство леммы 7.1

Свойство (7.9) доказывается индуктивно по длине мультииндекса α, $|\alpha| \geqslant 2$. Достаточно подробно рассмотреть случай $|\alpha| = 2$.

Сначала докажем свойство, касающееся решений задачи (1.11), а именно,

$$\frac{\partial N_j}{\partial x_l} \in L^\infty(\Box), \quad 1 \leqslant j, l \leqslant d, \tag{9.1}$$

при условии, что матрица $a(x)$ липшицева. Для этого продифференцируем уравнение (1.11) для фиксированного j, что возможно благодаря липшицевости матрицы $a(x)$ (напомним, что по теореме Радемахера для п.в. $x \in \Box$ существует градиент $\nabla a_{jl} \in L^\infty(\Box)^d$). Получим уравнения

$$\operatorname{div}\left[a(x)\nabla \frac{\partial N_j(x)}{\partial x_m} + \frac{\partial a(x)}{\partial x_m}(e_j + \nabla N_j(x))\right] = 0, \quad m = 1, \ldots d.$$

Введем обозначение $v_m = \dfrac{\partial N_j}{\partial x_m}$ и перепишем эти уравнения как систему относительно вектора $v = \{v_m\}$,

$$\operatorname{div}[a(x)\nabla v_m + \frac{\partial a(x)}{\partial x_m}(e_j + v)] = 0, \quad m = 1, \ldots d.$$

Система относится к классу, для которого имеет место векторный аналог принципа максимума (см. [14, гл. VII]). Таким образом, свойство (9.1) установлено.

Теперь рассмотрим уравнение (5.3) для произвольного фиксированного α. В соответствии со структурой его «правой части» и в силу того, что a_{jl}, N_j, $\dfrac{\partial N_j(x)}{\partial x_m} \in L^\infty(\Box)$, к уравнению применим принцип максимума, что дает ограниченность решения N_α этого уравнения. Кроме того, благодаря липшицевости матрицы $a(x)$, те же рассуждения, что выше, приводят к заключению: $\nabla N_\alpha \in L^\infty(\Box)^d$.

Далее по индукции можно переходить к рассмотрению уравнения (5.4) для произвольного фиксированного α длины $|\alpha| = 3$ и применять прежние аргументы. Лемма доказана.

Замечание. Ограниченность градиента решения задачи на ячейке (1.11) при условии, что матрица $a(x)$ липшицева, отмечалась и доказывалась ранее в [22].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александрова И. А.* Спектральный метод в асимптотических задачах диффузии со сносом// Мат. заметки. — 1996. — *59*, № 5. — С. 768–770.
2. *Беляев А. Ю.* Волны сжатия в жидкости с пузырьками воздуха// Прикл. мат. мех. — 1988. — *52*, № 3. — С. 444–449.
3. *Беляев А. Ю.* Усреднение в задачах теории фильтрации. — М.: Наука, 2004.
4. *Бирман М. С., Суслина Т. А.* Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения// Алгебра и анализ. — 2003. — *15*, № 5. — С. 1–108.
5. *Василевская Е. С.* Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учете корректора// Алгебра и анализ. — 2008. — *21*, № 1. — С. 3–60.
6. *Василевская Е. С., Суслина Т. А.* Пороговые аппроксимации факторизованного самосопряженного операторного семейства с учетом первого и второго корректоров// Алгебра и анализ. — 2011. — *23*, № 2. — С. 102–146.
7. *Жиков В. В.* Асимптотическое поведение и стабилизация решений параболического уравнения второго порядка с младшими членами// Тр. Моск. Мат. об-ва. — 1983. — *46*. — С. 69–98.
8. *Жиков В. В.* Спектральный подход к асимптотическим задачам диффузии// Дифф. уравн. — 1989. — *25*, № 1. — С. 44–50.
9. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1993.
10. *Жиков В. В., Пастухова С. Е.* Об операторных оценках в теории усреднения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 3. — С. 27–122.
11. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
12. *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. — М.: Мир, 1983.
13. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. — Новосибирск: Наука, 1983.

14. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973.
15. *Пастухова С.Е.* Аппроксимации операторной экспоненты в периодической задаче диффузии со сносом// Мат. сб. — 2013. — *204*, № 2. — С. 133–160.
16. *Севостьянова Е.В.* Асимптотическое разложение решения эллиптического уравнения второго порядка с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами// Мат. сб. — 1981. — *115*, № 2. — С. 204–222.
17. *Суслина Т.А.* Об усреднении периодических параболических систем// Функц. анализ и его прилож. — 2004. — *38*, № 4. — С. 86–90.
18. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. — М.: Мир, 1967.
19. *Bensousan A., Lions J.L., Papanicolaou G.* Asymptotic Analysis for Periodic Structure. — Amsterdam: North Holland, 1978.
20. *Ortega J.H., Zuazua E.* Large time behavior in $\mathbb{R}^d$ for linear parabolic equations with periodic coefficients// Asymptot. Anal. — 2000. — *22*, № 1. — С. 51–85.
21. *Pastukhova S.E.* Approximations of the exponential of an operator with periodic coefficients// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2012. — *181*, № 5. — С. 668–700.
22. *Pastukhova S.E., Tikhomirov R.N.* Error estimates of homogenization in the Neumann boundary problem for an elliptic equation with multiscale coefficients// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2016. — *216*, № 2. — С. 325–344.
23. *Zhikov V.V., Pastukhova S.E.* Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients// Russ. J. Math. Phys. — 2006. — *13*, № 2. — С. 224–237.
24. *Zhikov V.V., Pastukhova S.E.* Bloch principle for elliptic differential operators with periodic coefficients// Russ. J. Math. Phys. — 2016. — *23*, № 2. — С. 257–277.

$\boxed{\text{Василий Васильевич Жиков}}$
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
600000, г. Владимир, ул. Горького, 87

Светлана Евгеньевна Пастухова
Московский технологический университет (МИРЭА)
119454, Москва, просп. Вернадского, 78
E-mail: pas-se@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-223-246 UDC 517.956.8

Large Time Asymptotics of Fundamental Solution for the Diffusion Equation in Periodic Medium and Its Application to Estimates in the Theory of Averaging

© 2017 $\boxed{\textbf{V. V. Zhikov}}$, **S.E. Pastukhova**

Abstract. The diffusion equation is considered in an infinite 1-periodic medium. For its fundamental solution we find approximations at large values of time t. Precision of approximations has pointwise and integral estimates of orders $O(t^{-\frac{d+j+1}{2}})$ and $O(t^{-\frac{j+1}{2}})$, $j=0,1,\dots$, respectively. Approximations are constructed based on the known fundamental solution of the averaged equation with constant coefficients, its derivatives, and solutions of a family of auxiliary problems on the periodicity cell. The family of problems on the cell is generated recurrently. These results are used for construction of approximations of the operator exponential of the diffusion equation with precision estimates in operator norms in L^p-spaces, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. For the analogous equation in an ε-periodic medium (here ε is a small parameter) we obtain approximations of the operator exponential in L^p-operator norms for a fixed time with precision of order $O(\varepsilon^n)$, $n=1,2,\dots$.

REFERENCES

1. I. A. Aleksandrova, "Spektralnyi metod v asimptoticheskikh zadachakh diffuzii so snosom" [Spectral method in asymptotic problems of diffusion with drift], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1996, **59**, No. 5, 768–770 (in Russian).
2. A. Iu. Beliaev, "Volny szhatiia v zhidkosti s puzyrkami vozdukha" [Waves of compression in a fluid with air bubbles], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1988, **52**, No. 3, 444–449 (in Russian).
3. A. Iu. Beliaev, *Usrednenie v zadachakh teorii filtratsii* [Averaging in Problems of the Filtration Theory], Nauka, Moscow, 2004 (in Russian).
4. M. S. Birman and T. A. Suslina, "Periodicheskie differentsialnye operatory vtorogo poriadka. Porogovye svoistva i usredneniia" [Periodic differential operators of second order. Threshold properties and averaging], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2003, **15**, No. 5, 1–108 (in Russian).
5. E. S. Vasilevskaia, "Usrednenie parabolicheskoi zadachi Koshi s periodicheskimi koeffitsientami pri uchete korrektora" [Averaging of parabolic Cauchy problem with periodic coefficients using a corrector], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2008, **21**, No. 1, 3–60 (in Russian).
6. E. S. Vasilevskaia and T. A. Suslina, "Porogovye approksimatsii faktorizovannogo samosopriazhennogo operatornogo semeistva s uchetom pervogo i vtorogo korrektorov" [Threshold approximations of a factorized self-adjoint operator family using the first and the second correctors], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2011, **23**, No. 2, 102–146 (in Russian).
7. V. V. Zhikov, "Asimptoticheskoe povedenie i stabilizatsiia reshenii parabolicheskogo uravneniia vtorogo poriadka s mladshimi chlenami" [Asymptotic behavior and stabilization of solutions of a second-order parabolic equation with lower-order terms], *Tr. Mosk. Mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1983, **46**, 69–98 (in Russian).
8. V. V. Zhikov, "Spektralnyi podkhod k asimptoticheskim zadacham diffuzii" [Spectral approach to asymptotic diffusion problems], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1989, **25**, No. 1, 44–50 (in Russian).
9. V. V. Zhikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleinik, *Usrednenie differentsialnykh operatorov* [Averaging of Differential Operators], Nauka, Moscow, 1993 (in Russian).
10. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, "Ob operatornykh otsenkakh v teorii usredneniia" [On operator estimates in the theory of averaging], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 3, 27–122 (in Russian).
11. T. Kato, *Teoriia vozmushchenii lineinykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
12. D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, *Vvedenie v variatsionnye neravenstva i ikh prilozheniia* [An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications], Mir, Moscow, 1983 (Russian translation).
13. V. B. Korotkov, *Integralnye operatory* [Integral Operators], Nauka, Novosibirsk, 1983 (in Russian).
14. O. A. Ladyzhenskaia and N. N. Uraltseva, *Lineinye i kvazilineinye uravneniia ellipticheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
15. S. E. Pastukhova, "Approksimatsii operatornoi eksponenty v periodicheskoi zadache diffuzii so snosom" [Approximations of operator exponential in a periodic diffusion problem with a drift], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2013, **204**, No. 2, 133–160 (in Russian).
16. E. V. Sevostianova, "Asimptoticheskoe razlozhenie resheniia ellipticheskogo uravneniia vtorogo poriadka s periodicheskimi bystro ostsilliruiushchimi koeffitsientami" [Asymptotic expansion of solution of a second-order elliptic equation with periodic fast oscillating coefficients], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1981, **115**, No. 2, 204–222 (in Russian).
17. T. A. Suslina, "Ob usrednenii periodicheskikh parabolicheskikh sistem" [On averaging of periodic parabolic systems], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2004, **38**, No. 4, 86–90 (in Russian).
18. W. Feller, *Vvedenie v teoriiu veroiatnostei i ee prilozheniia. T. 2* [An Introduction to Probability Theory and Its Applications. V. 2], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
19. A. Bensousan, J. L. Lions, and G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structure*, North Holland, Amsterdam, 1978.
20. J. H. Ortega and E. Zuazua, "Large time behavior in $\mathbb{R}^d$ for linear parabolic equations with periodic coefficients," *Asymptot. Anal.*, 2000, **22**, No. 1, 51–85.
21. S. E. Pastukhova, "Approximations of the exponential of an operator with periodic coefficients," *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2012, **181**, No. 5, 668–700.

22. S. E. Pastukhova and R. N. Tikhomirov, “Error estimates of homogenization in the Neumann boundary problem for an elliptic equation with multiscale coefficients,” *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2016, **216**, No. 2, 325–344.
23. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, “Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2006, **13**, No. 2, 224–237.
24. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, “Bloch principle for elliptic differential operators with periodic coefficients,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2016, **23**, No. 2, 257–277.

V. V. Zhikov
Vladimir State University
87 Gor’kogo st., 600000 Vladimir, Russia

S. E. Pastukhova
Moscow Technological University (MIREA)
78 Vernadskogo avenue, 119454 Moscow, Russia
E-mail: pas-se@yandex.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 2 (2017). С. 247–265

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-247-265 УДК 517.984.48:532.135

МОДЕЛЬ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ МАКСВЕЛЛА

© 2017 г. **Д. А. ЗАКОРА**

Аннотация. В работе изучена модель вращающейся вязкоупругой баротропной жидкости Максвелла. Доказана теорема об однозначной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи. Исследована спектральная задача, ассоциированная с изучаемой системой. Доказаны утверждения о локализации спектра, о существенном и дискретном спектре, об асимптотике спектра.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В работе изучается модель вязкоупругой баротропной жидкости Максвелла. Первые модели несжимаемых жидкостей, учитывающие предысторию течения и названные впоследствии линейными вязкоупругими жидкостями, были предложены в XIX в. Дж. Максвеллом [22, 23], В. Кельвином [21] и В. Фойгтом [27, 28]. Эти модели были развиты в середине XX в. в значительной степени благодаря работам Дж. Г. Олдройта [24, 25]. Впоследствии эти и более общие модели изучались многими авторами (см., например, [7, 16], а также указанную там литературу). В работах [3, 5, 13, 26] проводится спектральный анализ некоторых моделей вязкоупругих несжимаемых жидкостей (см. также указанную там литературу).

В настоящей работе исследуется задача о малых движениях вязкоупругой сжимаемой жидкости Максвелла, заполняющей ограниченную равномерно вращающуюся область. В третьем разделе исследуется вопрос разрешимости соответствующей системы интегродифференциальных уравнений, граничных и начальных условий. При этом соответствующая задача Коши для системы интегродифференциальных уравнений сводится к задаче Коши

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Оператор $\mathcal{A}$ представляет из себя некоторую операторную блок-матрицу и является максимальным аккретивным оператором. Отсюда выводится утверждение о разрешимости исходной начально-краевой задачи.

В четвертом разделе исследуется задача о спектре оператора $\mathcal{A}$, которая ассоциируется со спектральной задачей для исходной системы интегродифференциальных уравнений. Установлено, что спектр оператора $\mathcal{A}$ расположен в правой открытой полуплоскости, а при отсутствии вращения — отделен от мнимой оси. Существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ в общем случае состоит из конечного количества точек и отрезков на действительной положительной полуоси. Дискретный спектр расположен в некоторой вертикальной полосе, сгущается к бесконечности и имеет степенное асимптотическое распределение. Если система не вращается, то при некоторых условиях на физические параметры системы, дискретный спектр оператора $\mathcal{A}$, лежащий в окрестности действительной оси, — вещественный.

2. Постановка задачи

2.1. Модель вязкоупругой сжимаемой жидкости Максвелла. Движение вязкой сжимаемой жидкости Максвелла в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ описывается следующей системой уравнений (см. [6]):

$$\widehat{\rho}\Big[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\Big] = -\nabla \widehat{P} + J_1(t)\big(\Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3}\nabla \mathrm{div}\mathbf{v}\big) + J_2(t)\nabla\mathrm{div}\mathbf{v} + \widehat{\rho}\mathbf{F} \quad (\text{в } \Omega), \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial t} + \mathrm{div}(\widehat{\rho}\mathbf{v}) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \qquad \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (\text{на } \partial\Omega). \tag{2.2}$$

Здесь $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t,x)$ $(x := (x_1,x_2,x_3) \in \Omega)$ — поле скоростей жидкости, $\widehat{\rho} = \widehat{\rho}(t,x)$ — плотность жидкости, $\widehat{P} = \widehat{P}(t,x)$ — давление в жидкости, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t,x)$ — поле внешних сил,

$$\begin{gathered} J_1(t)\mathbf{u}(t,x) := \sum_{l=1}^{m}\int_0^t \mu_l e^{-b_l(t-s)}\mathbf{u}(s,x)\,ds, \quad J_2(t)\mathbf{u}(t,x) := \sum_{l=1}^{m}\int_0^t \eta_l e^{-b_l(t-s)}\mathbf{u}(s,x)\,ds, \\ \mu_l > 0, \quad \eta_l > 0 \quad (l = \overline{1,m}), \quad 0 =: b_0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_m. \end{gathered} \tag{2.3}$$

2.2. Уравнения малых движений баротропной жидкости Максвелла, заполняющей равномерно вращающуюся область. Пусть сжимаемая жидкость Максвелла занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, равномерно вращающуюся вокруг оси, сонаправленной с действием силы тяжести. Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор, нормальный к границе $\partial\Omega$ и направленный вне области Ω. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с областью, таким образом, что ось Ox_3 совпадает с осью вращения и направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится в области Ω. В этом случае равномерная скорость вращения области запишется в виде $\omega_0\mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_3$ — орт оси вращения Ox_3, а $\omega_0 > 0$ для определенности. Будем считать, что внешнее стационарное поле сил $\mathbf{F}_0$ является гравитационным и действует вдоль оси вращения, т. е. $\mathbf{F}_0 = -g\mathbf{e}_3$, $g > 0$.

Далее будем считать, что сжимаемая жидкость удовлетворяет уравнению состояния баротропной жидкости: $\widehat{P} = a_\infty^2\widehat{\rho}$, где $a_\infty = \mathrm{const}$ — скорость звука в сжимаемой жидкости.

Рассмотрим состояние относительного равновесия жидкости. Из уравнения (2.1) движения сжимаемой жидкости Максвелла, записанного в подвижной системе координат, найдем формулу для градиента стационарного давления:

$$\nabla P_0 = \rho_0\big(-\omega_0^2\mathbf{e}_3 \times (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}) - g\mathbf{e}_3\big) = \rho_0\nabla\big(2^{-1}\omega_0^2|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}|^2 - gx_3\big), \tag{2.4}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор текущей точки области Ω, а ρ_0 — стационарная плотность жидкости. Из (2.4) и соотношения $P_0 = a_\infty^2\rho_0$ заключаем, что стационарная плотность ρ_0 является функцией параметра $z := 2^{-1}\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) - gx_3$. При этом ρ_0 будет постоянной, только если в системе отсутствуют вращение и гравитационное поле. Для функции $\rho_0(z)$ выполнено также следующее свойство: $0 < \alpha_1 \leqslant \rho_0(z) \leqslant \alpha_2 < +\infty$.

Представим теперь полное давление и плотность жидкости в виде: $\widehat{P}(t,x) = P_0(z) + p(t,x)$, $\widehat{\rho}(t,x) = \rho_0(z) + \widetilde{\rho}(t,x)$, где $p(t,x)$ и $\widetilde{\rho}(t,x)$ — это динамическое давление и плотность соответственно, возникающие при малых движениях жидкости относительно стационарного состояния.

Осуществим линеаризацию уравнений (2.1), (2.2), записанных в подвижной системе координат, относительно состояния относительного равновесия. Получим задачу о малых движениях баротропной жидкости Максвелла, заполняющей равномерно вращающееся твердое тело:

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t,x)}{\partial t} - 2\omega_0\big(\mathbf{u}(t,x)\times \mathbf{e}_3\big) = -\nabla\Big(\frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)}\,\widetilde{\rho}(t,x)\Big)+$$
$$+\sum_{l=1}^{m}\int_0^t e^{-b_l(t-s)}\frac{1}{\rho_0(z)}\Big(\mu_l\Delta\mathbf{u}(s,x)+(\eta_l+\frac{\mu_l}{3})\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}(s,x)\Big)\,ds+\mathbf{f}(t,x)\ \ (\text{в }\Omega),$$
$$\frac{\partial\widetilde{\rho}(t,x)}{\partial t}+\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\mathbf{u}(t,x)\big)=0\ \ (\text{в }\Omega),\quad \mathbf{u}(t,x)=\mathbf{0}\ \ (\text{на }\partial\Omega),$$

где $\mathbf{u}(t,x)$ — поле скоростей жидкости в подвижной системе координат, $\mathbf{f}(t,x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное поле.

Осуществим в полученной системе с целью ее симметризации замену $a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\widetilde{\rho}(t,x)=\rho(t,x)$. В результате получим основную задачу:

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t,x)}{\partial t} - 2\omega_0\big(\mathbf{u}(t,x)\times \mathbf{e}_3\big) = -\nabla\big(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho(t,x)\big)+$$
$$+\sum_{l=1}^{m}\int_0^t e^{-b_l(t-s)}\frac{1}{\rho_0(z)}\Big(\mu_l\Delta\mathbf{u}(s,x)+(\eta_l+\frac{\mu_l}{3})\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}(s,x)\Big)\,ds+\mathbf{f}(t,x)\ \ (\text{в }\Omega),\tag{2.5}$$
$$\frac{\partial\rho(t,x)}{\partial t}+a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\mathbf{u}(t,x)\big)=0\ \ (\text{в }\Omega),\quad \mathbf{u}(t,x)=\mathbf{0}\ \ (\text{на }\partial\Omega).\tag{2.6}$$

Для полноты формулировки задачи зададим еще начальные условия:

$$\mathbf{u}(0,x)=\mathbf{u}^0(x),\quad \rho(0,x)=\rho^0(x).\tag{2.7}$$

3. Теорема о существовании и единственности решения задачи

В этом разделе начально-краевая задача (2.5)–(2.7), описывающая малые движения вращающейся сжимаемой вязкоупругой жидкости Максвелла, с помощью специальных операторов сводится к задаче Коши (3.6) для системы дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве. Затем исследуется вопрос разрешимости задачи Коши (3.6). Основное утверждение раздела — теорема 3.1.

3.1. Операторная формулировка задачи. Введем векторное гильбертово пространство $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ с весом $\rho_0(z)$ со скалярным произведением и нормой следующего вида:

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}:=\int_\Omega \rho_0(z)\mathbf{u}(x)\cdot\overline{\mathbf{v}(x)}\,d\Omega,\quad \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}=\int_\Omega\rho_0(z)|\mathbf{u}(x)|^2\,d\Omega.$$

Введем скалярное гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ функций, суммируемых со своими квадратами по области Ω, а также его подпространство $L_{2,\rho_0}(\Omega):=\{f\in L_2(\Omega)\mid (f,\rho_0^{1/2})_{L_2(\Omega)}=0\}$.

Определим оператор $S\mathbf{u}(t,x):=i\big(\mathbf{u}(t,x)\times\mathbf{e}_3\big)$, $\mathcal{D}(S)=\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$. Верна лемма, доказательство которой подобно доказательству аналогичной леммы о свойствах кориолисова оператора из [9].

Лемма 3.1. *Оператор $\mathcal{S}$ является самосопряженным и ограниченным в $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$: $\mathcal{S}=\mathcal{S}^*$, $\mathcal{S}\in\mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))$; более того, $\|\mathcal{S}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))}=1$.*

Будем считать далее, что граница $\partial\Omega$ области Ω — класса C^2.

Пусть $\alpha>0$, $\beta\geqslant0$, $\gamma\geqslant0$. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу:

$$\begin{aligned}-\rho_0^{-1}(z)\big(\alpha\Delta\mathbf{u}(x)+\beta\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}(x)\big)-\gamma\nabla\big[a_\infty^2\rho_0^{-1}(z)\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\mathbf{u}(x)\big)\big]=\mathbf{v}(x)\quad(\text{в }\Omega),\\ \mathbf{u}(x)=\mathbf{0}\quad(\text{на }\partial\Omega).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Эта задача, как известно (см. [18]), имеет единственное обобщенное решение $\mathbf{u}=A^{-1}(\alpha,\beta,\gamma)\mathbf{v}$ для любого $\mathbf{v}\in\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$, где оператор $A(\alpha,\beta,\gamma)$ является самосопряженным и положительно определенным в $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$. Энергетическое пространство $\mathbf{H}_{A(\alpha,\beta,\gamma)}=\mathcal{D}(A^{1/2}(\alpha,\beta,\gamma))=\{\mathbf{u}\in$

$\mathbf{W}_2^1(\Omega)|\ \mathbf{u}=\mathbf{0}$ (на $\partial\Omega$)$\}$ оператора $A(\alpha,\beta,\gamma)$ компактно вложено в пространство $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$, а значит, оператор $A^{-1}(\alpha,\beta,\gamma)$ компактен и положителен в $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$. Для любых $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{H}_{A(\alpha,\beta,\gamma)}$

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{A(\alpha,\beta,\gamma)}=(A^{1/2}(\alpha,\beta,\gamma)\mathbf{u},A^{1/2}(\alpha,\beta,\gamma)\mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}=\alpha\mathcal{J}(\mathbf{u},\mathbf{v})+\beta\mathcal{D}(\mathbf{u},\mathbf{v})+\gamma\mathcal{F}(\mathbf{u},\mathbf{v}),$$

$$\mathcal{J}(\mathbf{u},\mathbf{v}):=\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^3\nabla u_i(x)\cdot\overline{\nabla v_i(x)}\,d\Omega,\quad \mathcal{D}(\mathbf{u},\mathbf{v}):=\int\limits_\Omega \mathrm{div}\mathbf{u}(x)\,\overline{\mathrm{div}\mathbf{v}(x)}\,d\Omega,$$
$$\mathcal{F}(\mathbf{u},\mathbf{v}):=\int\limits_\Omega\frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)}\,\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\mathbf{u}(x)\big)\,\overline{\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\mathbf{v}(x)\big)}\,d\Omega. \tag{3.2}$$

Кроме того, можно проверить, что нормы в любых двух энергетических пространствах $\mathbf{H}_{A(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)}$ и $\mathbf{H}_{A(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)}$ эквивалентны между собой.

Определим операторы $A_l:=A(\mu_l,\eta_l+3^{-1}\mu_l,0)$ $(l=\overline{1,m})$ (напомним, что $\mu_l,\eta_l>0$, $l=\overline{1,m}$), а также $A_0:=A(\sum\limits_{l=1}^m\mu_l,\sum\limits_{l=1}^m(\eta_l+3^{-1}\mu_l),1)$, $A_b:=A(\sum\limits_{l=1}^m b_l^{-1}\mu_l,\sum\limits_{l=1}^m b_l^{-1}(\eta_l+3^{-1}\mu_l),0)$.

Определим оператор $B\mathbf{u}(t,x):=a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\mathbf{u}(t,x)\big)$, $\mathcal{D}(B):=\{\mathbf{u}\in\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)|\ \mathrm{div}(\rho_0\mathbf{u})\in L_2(\Omega),\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=0$ (на $\partial\Omega$)$\}\supset\mathcal{D}(A_0^{1/2})=\mathcal{D}(A_l^{1/2})$ $(l=\overline{1,m})$.

Лемма 3.2 (см., например, [6]). *Имеют место следующие формулы*:

$$B^*\rho(x)=-\nabla\big(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho(x)\big),\quad \mathcal{D}(B^*)=W_{2,\rho_0}^1(\Omega):=W_2^1(\Omega)\cap L_{2,\rho_0}(\Omega)$$
$$\exists\, c_l>0:\quad \|B\mathbf{u}\|_{W_{2,\rho_0}^1(\Omega)}\leqslant c_l\|A_l\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}\quad\forall\,\mathbf{u}\in\mathcal{D}(A_l)\ \ (l=\overline{0,m}).$$

Для $l=\overline{1,m}$ определим следующие операторы:

$$Q_l:=A_l^{1/2}A_0^{-1/2},\quad Q_l^+:=A_0^{-1/2}A_l^{1/2},$$
$$Q_B:=BA_0^{-1/2},\quad Q_B^+:=A_0^{-1/2}B^*,\quad Q_{B,b}:=BA_b^{-1/2},\quad Q_{B,b}^+:=A_b^{-1/2}B^*. \tag{3.3}$$

Лемма 3.3. $Q_l\in\mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))$, $Q_B,Q_{B,b}\in\mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0),L_{2,\rho_0}(\Omega))$. *Операторы* Q_l^+, Q_B^+, $Q_{B,b}^+$ *расширяются по непрерывности до ограниченных операторов* Q_l^*, Q_B^*, $Q_{B,b}^*$ *соответственно, при этом* $Q_B^+=Q_B^*|_{\mathcal{D}(B^*)}$, $Q_{B,b}^+=Q_{B,b}^*|_{\mathcal{D}(B^*)}$, $Q_l^+=Q_l^*|_{\mathcal{D}(A_l^{1/2})}$ $(l=\overline{1,m})$. *Кроме того,*

$$Q_l^*Q_l\geqslant q_l^0I\quad(q_l^0>0,\ \ l=\overline{1,m}),\quad Q_B^*Q_B+\sum_{l=1}^m Q_l^*Q_l=I,\quad Q_B\Big[\sum_{l=1}^m\frac{1}{b_l}\,Q_l^*Q_l\Big]^{-1}Q_B^*=Q_{B,b}Q_{B,b}^*.$$

Доказательство. Доказательство проведем для оператора Q_l. Ограниченность Q_l следует из равенства $\mathcal{D}(A_l)=\mathcal{D}(A_0)$ $(l=\overline{1,m})$. Следовательно, $Q_l^*\in\mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))$. Далее, для любого $\mathbf{u}\in\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ и $\mathbf{v}\in\mathcal{D}(A_l^{1/2})$ имеем $(Q_l\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}=(\mathbf{u},Q_l^+\mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}=(\mathbf{u},Q_l^*\mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}$. Отсюда следует, что $Q_l^+=Q_l^*|_{\mathcal{D}(A_l^{1/2})}$, $\overline{Q_l^+}=Q_l^*$ $(l=\overline{1,m})$.

Из неравенства Фридрихса $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2\leqslant c\mathcal{J}(\mathbf{u},\mathbf{u})$, верного для всех $\mathbf{u}\in\mathbf{H}_{A_0}$ (см. [18, с. 186]), и (3.2) найдем, что (напомним, что $z=2^{-1}\omega_0^2(x_1^2+x_2^2)-gx_3$)

$$\mathcal{F}(\mathbf{u},\mathbf{u})\leqslant a_\infty^2\big(\min_{x\in\overline{\Omega}}\rho_0(z)\big)^{-1}\int\limits_\Omega|\nabla\rho_0(z)\cdot\mathbf{u}(x)+\rho_0(z)\mathrm{div}\mathbf{u}(x)|^2\,d\Omega\leqslant$$
$$\leqslant 2a_\infty^2\big(\min_{x\in\overline{\Omega}}\rho_0(z)\big)^{-1}\Big[c\max_{x\in\overline{\Omega}}|\nabla\rho_0(z)|^2\mathcal{J}(\mathbf{u},\mathbf{u})+\max_{x\in\overline{\Omega}}\rho_0^2(z)\mathcal{D}(\mathbf{u},\mathbf{u})\Big]=:d_1\mathcal{J}(\mathbf{u},\mathbf{u})+d_2\mathcal{D}(\mathbf{u},\mathbf{u}).$$

Отсюда и из (3.2) для любого $\mathbf{u}\in\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ имеем

$$\big(Q_l^*Q_l\mathbf{u},\mathbf{u}\big)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}=\big(Q_l\mathbf{u},Q_l\mathbf{u}\big)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}=\big(A_0^{-1/2}\mathbf{u},A_0^{-1/2}\mathbf{u}\big)_{A_l}=$$
$$=\mu_l\mathcal{J}(A_0^{-1/2}\mathbf{u},A_0^{-1/2}\mathbf{u})+\Big(\eta_l+\frac{\mu_l}{3}\Big)\mathcal{D}(A_0^{-1/2}\mathbf{u},A_0^{-1/2}\mathbf{u})\geqslant$$
$$\geqslant\frac{\mu_l}{2}\mathcal{J}(A_0^{-1/2}\mathbf{u},A_0^{-1/2}\mathbf{u})+\Big(\frac{\eta_l}{2}+\frac{\mu_l}{6}\Big)\mathcal{D}(A_0^{-1/2}\mathbf{u},A_0^{-1/2}\mathbf{u})+$$

$$+\min\Big\{\frac{\mu_l}{2d_1}, \frac{\eta_l}{2d_2}+\frac{\mu_l}{6d_2}\Big\}\mathcal{F}(A_0^{-1/2}\mathbf{u}, A_0^{-1/2}\mathbf{u}) \geqslant q_l^0\big(A_0^{-1/2}\mathbf{u}, A_0^{-1/2}\mathbf{u}\big)_{A_0} = q_l^0\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)},$$

где $q_l^0>0$. Таким образом, оператор $Q_l^*Q_l$ положительно определен.

Далее, для любых $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ имеем

$$\Big(\Big[Q_B^*Q_B+\sum_{l=1}^m Q_l^*Q_l - I\Big]\mathbf{u},\mathbf{v}\Big)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} =$$

$$= \big(BA_0^{-1/2}\mathbf{u}, BA_0^{-1/2}\mathbf{v}\big)_{L_{2,\rho_0}(\Omega)} + \sum_{l=1}^m \big(A_0^{-1/2}\mathbf{u}, A_0^{-1/2}\mathbf{v}\big)_{A_l} - \big(\mathbf{u},\mathbf{v}\big)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} =$$

$$= \mathcal{F}(A_0^{-1/2}\mathbf{u}, A_0^{-1/2}\mathbf{v}) + \sum_{l=1}^m\Big[\mu_l\mathcal{J}(A_0^{-1/2}\mathbf{u}, A_0^{-1/2}\mathbf{v}) + \Big(\eta_l+\frac{\mu_l}{3}\Big)\mathcal{D}(A_0^{-1/2}\mathbf{u}, A_0^{-1/2}\mathbf{v})\Big] - \big(\mathbf{u},\mathbf{v}\big)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} =$$

$$= \big(A_0^{-1/2}\mathbf{u}, A_0^{-1/2}\mathbf{v}\big)_{A_0} - \big(\mathbf{u},\mathbf{v}\big)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} = 0,$$

а значит, $Q_B^*Q_B+\sum\limits_{l=1}^m Q_l^*Q_l = I$.

Из плотности множества $\mathcal{D}(A_0^{1/2})$ в $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho)$ и соотношений

$$\sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l}\,Q_l^*Q_l\Big|_{\mathcal{D}(A_0^{1/2})} = A_0^{-1/2}A_bA_0^{-1/2}\Big|_{\mathcal{D}(A_0^{1/2})} = (A_b^{1/2}A_0^{-1/2})^*(A_b^{1/2}A_0^{-1/2})\Big|_{\mathcal{D}(A_0^{1/2})}$$

следует, что $(A_b^{1/2}A_0^{-1/2})^*(A_b^{1/2}A_0^{-1/2}) = \sum\limits_{l=1}^m b_l^{-1}Q_l^*Q_l \gg 0$. Отсюда, из плотности множества $\mathcal{D}(B^*)$ в $L_{2,\rho_0}(\Omega)$, [8, теорема 5.30, с. 214] и соотношений

$$Q_B\Big[\sum_{l=1}^m\frac{1}{b_l}\,Q_l^*Q_l\Big]^{-1}Q_B^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)} = BA_0^{-1/2}(A_b^{1/2}A_0^{-1/2})^{-1}\big[(A_b^{1/2}A_0^{-1/2})^*\big]^{-1}A_0^{-1/2}B^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)} =$$

$$= BA_b^{-1/2}\big[(A_b^{1/2}A_0^{-1/2})^{-1}\big]^*A_0^{-1/2}B^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)} = Q_{B,b}Q_{B,b}^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)}$$

следует, что $Q_B\big[\sum\limits_{l=1}^m b_l^{-1}Q_l^*Q_l\big]^{-1}Q_B^* = Q_{B,b}Q_{B,b}^*$. □

С использованием введенных операторов задачу (2.5)–(2.7) запишем в виде задачи Коши для системы интегродифференциальных уравнений первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}_0 := \mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)\oplus L_{2,\rho_0}(\Omega)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\omega_0 iS\mathbf{u} - B^*\rho + \displaystyle\sum_{l=1}^m\int_0^t e^{-b_l(t-s)}A_l\mathbf{u}(s)\,ds = \mathbf{f}(t), \\ \dfrac{d\rho}{dt} + B\mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{u}(0);\rho(0))^\tau := (\mathbf{u}^0;\rho^0)^\tau, \end{cases} \tag{3.4}$$

где символ τ обозначает операцию транспонирования.

С использованием (3.3) и леммы 3.3 перепишем систему (3.4) в обобщенной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\omega_0 iS\mathbf{u} + A_0^{1/2}\Big\{-Q_B^*\rho + \displaystyle\sum_{l=1}^m Q_l^*\int_0^t e^{-b_l(t-s)}A_l^{1/2}\mathbf{u}(s)\,ds\Big\} = \mathbf{f}(t), \\ \dfrac{d\rho}{dt} + B\mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{u}(0);\rho(0))^\tau := (\mathbf{u}^0;\rho^0)^\tau. \end{cases} \tag{3.5}$$

Определение 3.1. Решение задачи (3.5) назовем *решением* начально-краевой задачи (2.5)–(2.7). Элемент $\zeta(t) := (\mathbf{u}(t);\rho(t))^\tau$ назовем *решением* задачи (3.5), если $\zeta(t)\in\mathcal{D}(A_0^{1/2})\oplus L_{2,\rho_0}(\Omega)$ при каждом $t\in\mathbb{R}_+ := [0,+\infty)$, $(\mathbf{u}(t);\rho(t))^\tau\in C^1(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}_0)$, выражение в фигурных скобках принимает значения в $\mathcal{D}(A_0^{1/2})$ и $A_0^{1/2}\{\ldots\}\in C(\mathbb{R}_+;\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))$, $(\mathbf{u}(0);\rho(0))^\tau := (\mathbf{u}^0;\rho^0)^\tau$ и выполнены уравнения из (3.5) для любого $t\in\mathbb{R}_+$.

3.2. Переход к дифференциально-операторному уравнению первого порядка. Теорема о разрешимости. Пусть $\mathbf{u}(t)$, $\rho(t)$ — решение задачи (3.5). Тогда с использованием (3.3) получим, что $\mathbf{u}(t)$, $\rho(t)$ удовлетворяют также следующей системе

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\omega_0 iS\mathbf{u} + A_0^{1/2}\Big\{ - Q_B^*\rho + \sum\limits_{l=1}^m Q_l^* \int\limits_0^t e^{-b_l(t-s)} Q_l A_0^{1/2}\mathbf{u}(s)\, ds \Big\} = \mathbf{f}(t), \\ \dfrac{d\rho}{dt} + Q_B A_0^{1/2}\mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{u}(0);\rho(0))^\tau := (\mathbf{u}^0;\rho^0)^\tau, \end{cases} \tag{3.6}$$

Осуществим в системе (3.6) следующие замены:

$$\mathbf{v}_l(t) := \int\limits_0^t e^{-b_l(t-s)} Q_l A_0^{1/2}\mathbf{u}(s)\, ds \quad (l = \overline{1,m}). \tag{3.7}$$

Поля $\mathbf{v}_l(t)$ $(l = \overline{1,m})$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}_+$. Продифференцированные соотношения (3.7) и преобразованные уравнения системы (3.6) составляют следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\omega_0 iS\mathbf{u} + A_0^{1/2}\Big\{ - Q_B^*\rho + \sum\limits_{l=1}^m Q_l^*\mathbf{v}_l \Big\} = \mathbf{f}(t), \\ \dfrac{d\rho}{dt} + Q_B A_0^{1/2}\mathbf{u} = 0, \quad \dfrac{d\mathbf{v}_l}{dt} - Q_l A_0^{1/2}\mathbf{u} + b_l\mathbf{v}_l = 0 \quad (l = \overline{1,m}), \\ \qquad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \rho(0) = \rho^0, \quad \mathbf{v}_l(0) = 0 \ \ (l = \overline{1,m}). \end{cases} \tag{3.8}$$

Эту систему будем трактовать как задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := \mathbf{H} \oplus \mathcal{H}_0$, где $\mathcal{H}_0 := L_{2,\rho_0}(\Omega) \oplus \big(\oplus_{l=1}^m \mathbf{H}\big)$, $\mathbf{H} := \mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0. \tag{3.9}$$

Здесь $\xi := (\mathbf{u}; w)^\tau$, $w := (\rho; \mathbf{v}_1; \ldots; \mathbf{v}_m)^\tau$, $\xi^0 := (\mathbf{u}^0; w^0)^\tau$, $w^0 := (\rho^0; \mathbf{0}; \ldots; \mathbf{0})^\tau$, $\mathcal{F}(t) := (\mathbf{f}(t); 0)^\tau$. Для операторного блока $\mathcal{A}$ справедливо следующее представление:

$$\mathcal{A} = \mathrm{diag}\big(A_0^{1/2}, \mathcal{I}\big) \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \mathrm{diag}\big(A_0^{1/2}, \mathcal{I}\big) + \mathrm{diag}\big(2\omega_0 iS, 0\big), \tag{3.10}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\xi = (\mathbf{u}; w)^\tau \in \mathcal{H} \mid \mathbf{u} \in \mathcal{D}(A_0^{1/2}), \quad \mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(A_0^{1/2})\}, \tag{3.11}$$

где I, $\mathcal{I}$ — единичные операторы в $\mathbf{H} = \mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ и $\mathcal{H}_0$ соответственно,

$$\mathcal{Q} := \big(- Q_B, Q_1, \ldots, Q_m\big)^\tau, \quad \mathcal{G} := \mathrm{diag}\big(0, b_1 I, \ldots, b_m I\big).$$

Дадим следующее

Определение 3.2 (см. [10, с. 38]). *Сильным решением* задачи Коши (3.9) назовем функцию $\xi(t)$ такую, что $\xi(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ для любого t из $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{A}\xi(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\xi(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\xi(0) = \xi^0$ и выполнено уравнение из (3.9) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

При доказательстве следующих утверждений используем такой известный факт. Пусть $A_{kl} \in \mathcal{L}(H)$ $(k,l = 1,2)$, $A_{22}^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, $D_1 := A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$. Если $D_1^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, то существует

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} &= \left[\begin{pmatrix} I & A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{pmatrix}\right]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} D_1^{-1} & -D_1^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}D_1^{-1} & A_{22}^{-1}\big[A_{22} + A_{21}D_1^{-1}A_{12}\big]A_{22}^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Пусть $A_{11}^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, $D_2 := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$. Если $D_2^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, то существует

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} &= \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}\right]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1}\big[A_{11} + A_{12}D_2^{-1}A_{21}\big]A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1} \\ -D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & D_2^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Лемма 3.4. *Оператор $\mathcal{A}$ максимальный аккретивный.*

Доказательство. **1.** Прежде всего заметим, что $\mathcal{D}(A_0^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(B^*) \oplus_{l=1}^m \mathcal{D}(A_l^{1/2}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$, а значит оператор $\mathcal{A}$ плотно определен. Действительно, пусть $\xi = (\mathbf{u}; w)^\tau \in \mathcal{D}(A_0^{1/2}) \oplus \big[\mathcal{D}(B^*) \oplus_{l=1}^m \mathcal{D}(A_l^{1/2})\big]$, т. е. $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(A_0^{1/2})$, $\rho \in \mathcal{D}(B^*)$, $\mathbf{v}_l \in \mathcal{D}(A_l^{1/2})$ $(l = \overline{1,m})$. Тогда с использованием леммы 3.3 найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \in \mathcal{D}(A_0^{1/2}), \quad \mathcal{Q}^* w &= -Q_B^*\rho + \sum_{l=1}^m Q_l^* \mathbf{v}_l = -Q_B^*\big|_{\mathcal{D}(B^*)}\rho + \sum_{l=1}^m Q_l^*\big|_{\mathcal{D}(A_l^{1/2})}\mathbf{v}_l = \\ &= -A_0^{-1/2}B^*\rho + \sum_{l=1}^m A_0^{-1/2}A_l^{1/2}\mathbf{v}_l = A_0^{-1/2}\Big[-B^*\rho + \sum_{l=1}^m A_l^{1/2}\mathbf{v}_l\Big] \in \mathcal{D}(A_0^{1/2}), \end{aligned} \tag{3.14}$$

т. е. $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (3.11)).

Покажем, что оператор $\mathcal{A}$ аккретивен. Пусть $\xi = (\mathbf{u}; w)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, тогда $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(A_0^{1/2})$ и из факторизации (3.10) оператора $\mathcal{A}$ симметричной формы и леммы 3.1 получим

$$\operatorname{Re}\big(\mathcal{A}\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}} = \operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_0^{1/2}\mathbf{u} \\ w\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_0^{1/2}\mathbf{u} \\ w\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{G}^{1/2}w\|^2_{\mathcal{H}_0} \geqslant 0.$$

2. Докажем, что оператор $\mathcal{A}$ максимален и замкнут. Для этого достаточно показать (см. [10, теорема 4.3, с. 109]), что оператор $\mathcal{A} - \lambda$ непрерывно обратим при $\lambda < 0$. Положим $\xi_1 := (\mathbf{u}_1; w_1)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\xi_2 := (\mathbf{u}_2; w_2)^\tau \in \mathcal{H}$. Определим оператор $S_A := A_0^{-1/2}SA_0^{-1/2}$. Из (3.10) найдем, что уравнение $(\mathcal{A} - \lambda)\xi_1 = \xi_2$ можно переписать в векторно-матричной форме:

$$\operatorname{diag}(A_0^{1/2}, \mathcal{I})\begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_A - \lambda A_0^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - \lambda\end{pmatrix}\operatorname{diag}(A_0^{1/2}, \mathcal{I})\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1 \\ w_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{u}_2 \\ w_2\end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

Отсюда видно, что оператор $\mathcal{A} - \lambda$ будет иметь ограниченный обратный оператор, определенный на всем пространстве $\mathcal{H}$, т. е. будет иметь резольвенту $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) := (\mathcal{A} - \lambda)^{-1}$, если средний блок в (3.15) будет непрерывно обратим в $\mathcal{H}$.

Введем оператор-функцию $L(\lambda) := -\lambda A_0^{-1} + 2\omega_0 i S_A + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}$. Фиксируем $\lambda < 0$. Для любого $0 \neq \mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ с использованием леммы 3.3 найдем, что

$$\begin{aligned} \|L(\lambda)\mathbf{u}\| &\geqslant \|\mathbf{u}\|^{-1} \cdot |(L(\lambda)\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}| \geqslant \|\mathbf{u}\|^{-1} \cdot \operatorname{Re}(L(\lambda)\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} = \\ &= -\lambda\|\mathbf{u}\|^{-1} \cdot \|A_0^{-1/2}\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^{-1} \cdot ((\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}\mathbf{u}, \mathcal{Q}\mathbf{u})_{\mathcal{H}_0} \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\Big[-\frac{\|Q_B\mathbf{u}\|^2}{\lambda} + \sum_{l=1}^m \frac{\|Q_l\mathbf{u}\|^2}{b_l - \lambda}\Big] \geqslant \sum_{l=1}^m \frac{q_l^0}{b_l - \lambda} \cdot \|\mathbf{u}\|, \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\|[L(\lambda)]^*\mathbf{u}\| \geqslant \ldots \geqslant \sum_{l=1}^m \frac{q_l^0}{b_l - \lambda} \cdot \|\mathbf{u}\|.$$

Следовательно, $L^{-1}(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$ и из (3.12) получим, что

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -\lambda A_0^{-1} + 2\omega_0 i S_A & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - \lambda\end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \left[\begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{G} - \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I}\end{pmatrix}\right]^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} L^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} L^{-1}(\lambda) & -L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda) & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) - \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \end{aligned} \tag{3.17}$$

где $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) := (\mathcal{G} - \lambda)^{-1}$. Отсюда следует, что оператор $\mathcal{A}$ замкнут и максимален. □

Из (3.15), (3.17) получим представление для резольвенты оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} A_0^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A_0^{-1/2} & -A_0^{-1/2}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)A_0^{-1/2} & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) - \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

при всех $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G}) \cup \sigma(L(\lambda))$, где $\sigma(\mathcal{G})$, $\sigma(L(\lambda))$ — спектры оператора $\mathcal{G}$ и операторного пучка $L(\lambda)$ соответственно.

Следствием леммы 3.4 является следующая теорема о разрешимости задачи (2.5)–(2.7).

Теорема 3.1. *Пусть* $\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(A_0^{1/2})$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, $\mathbf{f}(t,x) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$. *Тогда решение задачи* (2.5)–(2.7) (*в смысле определения* 3.1) *существует и единственно.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(A_0^{1/2})$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, $\xi^0 := (\mathbf{u}^0; w^0)^\tau$, $w^0 := (\rho^0; 0; \ldots; 0)^\tau$. Из (3.14) найдем, что $\xi^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Из условий теоремы и (3.9) следует, что $\mathcal{F}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$.

Из [10, теорема 4.5, с. 110] следует, что оператор $-\mathcal{A}$ порождает сильно непрерывную полугруппу сжимающих операторов. Из [10, теорема 6.5, с. 166] следует, что задача Коши (3.9) имеет единственное сильное (в смысле определения 3.2) решение.

Пусть функция $\xi(t)$ — единственное решение задачи Коши (3.9), то есть $\xi(t) = (\mathbf{u}(t); w(t))^\tau$, где $w(t) = (\rho(t); \mathbf{v}_1(t); \ldots; \mathbf{v}_m(t))^\tau$, причем $\mathcal{A}\xi(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\xi(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$. Тогда $\mathbf{u}(t)$, $\rho(t)$ — решение системы (3.6) (или (3.5)) в смысле определения 3.1. □

4. Задача о спектре вязкоупругой сжимаемой жидкости

В этом разделе исследуется спектр операторного блока $\mathcal{A}$ (см. (3.10)-(3.11)). Основным утверждением здесь является следующая теорема, доказываемая в леммах 4.1, 4.3–4.8.

Теорема 4.1.

1. $\{0, b_1, \ldots, b_m\} \subset \rho(\mathcal{A})$ (*леммы* 4.1, 4.3).
2. $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \Lambda_{E,1} \cup \Lambda_{E,2} \cup \Lambda_L \subset (0, b_m)$ (*см.* (4.9), (4.10)). *Множество* $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ *состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора* $\mathcal{A}$. *Спектр оператора* $\mathcal{A}$ *расположен симметрично относительно действительной оси* (*лемма* 4.4).
3. $\sigma(\mathcal{A}) \subset \big\{\lambda \in \mathbb{C} |\, 0 < \mathrm{Re}\lambda < b_m\big\}$ (*лемма* 4.6). *Спектр оператора* $\mathcal{A}$ *имеет две ветви собственных значений* $\{\lambda_k^{(\pm i\infty)}\}_{k=1}^\infty$ *со следующей асимптотикой* (*лемма* 4.5):

$$\lambda_k^{(\pm i\infty)} = \pm i \lambda_k^{1/2}(A_0)(1 + o(1)) \quad (k \to +\infty),$$

$$\lambda_k(A_0) = \Big(\frac{1}{6\pi^2}\int\limits_\Omega \rho_0^{3/2}(z)\Big\{2\Big[\sum_{l=1}^m \frac{\mu_l}{b_l}\Big]^{-3/2} + \Big[a_\infty^2\rho_0(z) + \sum_{l=1}^m \frac{3\eta_l + 4\mu_l}{3b_l}\Big]^{-3/2}\Big\}\, d\Omega\Big)^{-2/3} k^{2/3}(1 + o(1)).$$

4. *Пусть* $\omega_0 = 0$, *тогда существует* $\beta_0 > 0$ *такое, что* (*лемма* 4.7)

$$\sigma(\mathcal{A}) \cap \big\{\lambda \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im}\lambda \neq 0\big\} \subset \big\{\lambda \in \mathbb{C} |\ \beta_0 \leqslant \mathrm{Re}\lambda < b_m/2\big\}.$$

5. *Пусть* $\omega_0 = 0$ *и существует* $0 < \varepsilon < b_m^{-2}$ *такое, что* (*см.* (3.2))

$$\mathcal{J}(\mathbf{u},\mathbf{u})\sum_{l=1}^m \Big(\frac{1}{(b_l - \lambda)^2} - \varepsilon\Big)\mu_l + \mathcal{D}(\mathbf{u},\mathbf{u})\sum_{l=1}^m \Big(\frac{1}{(b_l - \lambda)^2} - \varepsilon\Big)\Big(\eta_l + \frac{\mu_l}{3}\Big) + \\ + \mathcal{F}(\mathbf{u},\mathbf{u})\Big(\frac{1}{\lambda^2} - \varepsilon\Big) \geqslant \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}$$

при всех $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{A_0}$ *и* $\lambda \in \cup_{l=1}^m (b_{l-1}, b_l)$ $(b_0 = 0)$. *Тогда спектр оператора* $\mathcal{A}$, *лежащий в области* $\{\lambda \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im}\lambda \neq 0\}$, *сгущается только к бесконечности* (*лемма* 4.8).

4.1. Вывод основных спектральных задач. Будем разыскивать решения однородного (при $\mathcal{F}(t) \equiv 0$) уравнения (3.9) в виде $\xi(t) = \exp(-\lambda t)\xi$, где λ — спектральный параметр, а ξ — амплитудный элемент. В результате придем к следующей основной спектральной задаче:

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}, \tag{4.1}$$

которую будем ассоциировать с задачей о спектре вязкоупругой сжимаемой жидкости Максвелла.

Пусть $\xi = (\mathbf{u}; w)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Осуществив с учетом факторизации (3.10) в спектральной задаче (4.1) замену искомого элемента $\operatorname{diag}(A_0^{1/2}, \mathcal{I})\xi = \eta =: (\mathbf{z}; w)^\tau$, получим спектральную задачу

$$\mathcal{A}(\lambda)\eta := \begin{pmatrix} -\lambda A_0^{-1} + 2\omega_0 i S_A & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ w \end{pmatrix} = 0, \quad \eta \in \mathcal{H} = \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0) \oplus \mathcal{H}_0, \tag{4.2}$$

где $S_A = A_0^{-1/2} S A_0^{-1/2}$. Пусть $\lambda \notin \{0, b_1, \ldots, b_m\} = \sigma(\mathcal{G})$, тогда из (4.2), (3.10) найдем, что

$$\begin{aligned} L(\lambda)\mathbf{z} :&= \big[-\lambda A_0^{-1} + 2\omega_0 i S_A + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}\big]\mathbf{z} = \\ &= \Big[-\lambda A_0^{-1} + 2\omega_0 i S_A - \frac{1}{\lambda} Q_B^* Q_B + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \lambda} Q_l^* Q_l\Big]\mathbf{z} = 0, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{H} = \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Из (3.16) следует, что спектр оператора $\mathcal{A}$ и спектр пучка $L(\lambda)$ (спектры задач (4.1) и (4.3)) совпадают между собой при $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G})$.

4.2. О существенном и дискретном спектре задачи. Прежде всего установим следующую лемму о точках множества $\{0, b_1, \ldots, b_m\}$.

Лемма 4.1. $\{b_1, \ldots, b_m\} \subset \rho(\mathcal{A})$. *Точка* $\lambda = 0$ *не является собственным значением оператора* $\mathcal{A}$ (*спектральной задачи* (4.1)).

Доказательство. Запишем уравнение $(\mathcal{A} - \lambda)\xi = \xi_0$ в виде системы (см. (3.8), (3.10)):

$$\begin{cases} 2\omega_0 i S\mathbf{u} + A_0^{1/2}\Big\{ -Q_B^*\rho + \sum\limits_{l=1}^m Q_l^*\mathbf{v}_l\Big\} - \lambda\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \\ Q_B A_0^{1/2}\mathbf{u} - \lambda\rho = \rho_0, \\ -Q_l A_0^{1/2}\mathbf{u} + b_l\mathbf{v}_l - \lambda\mathbf{v}_l = \mathbf{v}_{l0}, \quad l = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{4.4}$$

1. Положим в системе (4.4) $\lambda = 0$, $\xi_0 = (\mathbf{u}_0; \rho_0; \mathbf{v}_{10}; \ldots; \mathbf{v}_{m0})^\tau = 0$ и выразим из третьего уравнения поле $\mathbf{v}_l$. С учетом (3.3) найдем, что $\mathbf{v}_l = b_l^{-1} Q_l A_0^{1/2}\mathbf{u} = b_l^{-1} A_l^{1/2}\mathbf{u}$ $(l = \overline{1,m})$. Используем найденные элементы в первом уравнении системы (4.4); умножим первое уравнение системы скалярно на поле $\mathbf{u}$, а второе — на функцию ρ. После простых преобразований получим систему

$$\begin{cases} 2\omega_0 i (S\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} - (Q_B^*\rho, A_0^{1/2}\mathbf{u})_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} + \sum\limits_{l=1}^m \dfrac{1}{b_l}\, \|A_l^{1/2}\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} = 0, \\ (Q_B A_0^{1/2}\mathbf{u}, \rho)_{L_{2,\rho_0(\Omega)}} = \overline{(Q_B^*\rho, A_0^{1/2}\mathbf{u})}_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} = 0. \end{cases}$$

Из этой системы следует, что $\sum\limits_{l=1}^m b_l^{-1}\|A_l^{1/2}\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} = 0$, а значит, $\mathbf{u} = 0$ в $\mathbf{H}_{A_0} = \mathbf{H}_{A_l}$. Следовательно, $\mathbf{v}_l = 0$ $(l = \overline{1,m})$. Из системы (4.4) (при $\lambda = 0$, $\xi_0 = 0$) найдем теперь, что $Q_B^*\rho = 0$. Отсюда следует, что $\rho = 0$, так как $\operatorname{Ker} Q_B^* = \{0\}$. Таким образом, $\xi = 0$ и точка $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}$.

2. Положим теперь в системе (4.4) $\lambda = b_q$, $\xi_0 = 0$:

$$\begin{cases} 2\omega_0 i S\mathbf{u} + A_0^{1/2}\Big\{ -Q_B^*\rho + \sum\limits_{l=1}^m Q_l^*\mathbf{v}_l\Big\} - b_q\mathbf{u} = 0, \\ Q_B A_0^{1/2}\mathbf{u} - b_q\rho = 0, \qquad -Q_q A_0^{1/2}\mathbf{u} = -A_q^{1/2}\mathbf{u} = 0, \\ -Q_l A_0^{1/2}\mathbf{u} + (b_l - b_q)\mathbf{v}_l = 0, \quad l = \overline{1,m}, \ \ l \neq q. \end{cases} \tag{4.5}$$

Последовательно из третьего, второго и четвертого уравнений системы (4.5) найдем, что $\mathbf{u}=0$, $\rho=0$, $\mathbf{v}_l=0$ $(l\neq q)$. Теперь из первого уравнения (4.5) следует, что $A_0^{1/2}Q_q^*\mathbf{v}_q=0$, а значит, $\mathbf{v}_q=0$. Таким образом, $\xi=0$ и точка $\lambda=b_q$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}$.

3. Покажем теперь, что $b_q\in\rho(\mathcal{A})$. Для этого в силу формулы (3.16) достаточно установить, что в некоторой проколотой окрестности точки $\lambda=b_q$ существует $L^{-1}(\lambda)\in\mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))$. С использованием леммы 3.3 преобразуем пучок $L(\lambda)$ в окрестности точки $\lambda=b_q$ следующим образом:

$$L(\lambda)=\Big[-\lambda A_0^{-1}+2\omega_0 iS_A-\frac{1}{\lambda}Q_B^*Q_B+\sum_{l=1,l\neq q}^{m}\frac{1}{b_l-\lambda}Q_l^*Q_l\Big]+\frac{1}{b_q-\lambda}Q_q^*Q_q=$$

$$=\frac{1}{b_q-\lambda}Q_q^*Q_q\Big(I+(b_q-\lambda)\big[Q_q^*Q_q\big]^{-1}\Big[-\lambda A_0^{-1}+2\omega_0 iS_A-\frac{1}{\lambda}Q_B^*Q_B+\sum_{l=1,l\neq q}^{m}\frac{1}{b_l-\lambda}Q_l^*Q_l\Big]\Big)=$$

$$=:\frac{1}{b_q-\lambda}Q_q^*Q_q\big(I+G_q(\lambda)\big),$$

где $G_q(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to b_q$. Отсюда и из теоремы об обращении оператора, близкого к единичному, следует требуемое утверждение. $\square$

Всюду далее будем считать, что граница $\partial\Omega$ — класса C^∞. Приведем известное утверждение об эллиптичности двух специальных краевых задач.

Лемма 4.2.

1. *Пусть* $a(x)$, $b(x)$, $c(x)\in C(\overline{\Omega})$, $c(x)\neq 0$ $(x\in\overline{\Omega})$. *Тогда следующая краевая задача является эллиптической при* $a(x)\neq 0$ $(x\in\overline{\Omega})$:

$$\begin{cases}-a(x)\Delta\mathbf{u}(x)-b(x)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}(x)+c(x)\nabla p(x)=\mathbf{v}(x) \quad (\textit{в } \Omega),\\ \;\; c(x)\operatorname{div}\mathbf{u}(x)=q(x) \quad (\textit{в } \Omega), \qquad \mathbf{u}(x)=\mathbf{g}(x) \quad (\textit{на } \partial\Omega).\end{cases}$$

2. *Пусть* $a(x)$, $b(x)\in C(\overline{\Omega})$. *Тогда следующая краевая задача является эллиптической, если* $a(x)\neq 0$, $a(x)+b(x)\neq 0$ $(x\in\overline{\Omega})$ *и* $2a(x)+b(x)\neq 0$ $(x\in\partial\Omega)$:

$$-a(x)\Delta\mathbf{u}(x)-b(x)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}(x)=\mathbf{v}(x) \quad (\textit{в } \Omega), \qquad \mathbf{u}(x)=\mathbf{g}(x) \quad (\textit{на } \partial\Omega).$$

Основываясь на лемме 4.2, докажем следующие два утверждения.

Лемма 4.3. $0\in\rho(\mathcal{A})$.

Доказательство. Доказательство $\mathcal{A}^{-1}\in\mathcal{H}$ проведем в несколько шагов.

1. Перепишем оператор $\mathcal{A}$ (см. (3.10)) относительно разложения $\mathcal{H}:=\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)\oplus L_{2,\rho_0}(\Omega)\oplus\widehat{\mathcal{H}}$, где $\widehat{\mathcal{H}}:=\oplus_{l=1}^m\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$, в следующем виде:

$$\mathcal{A}=\operatorname{diag}\big(A_0^{1/2},I,\widehat{I}\big)\begin{pmatrix}2\omega_0 iS_A & -Q_B^* & \widehat{Q}^*\\ Q_B & 0 & 0\\ -\widehat{Q} & 0 & \widehat{G}\end{pmatrix}\operatorname{diag}\big(A_0^{1/2},I,\widehat{I}\big), \tag{4.6}$$

где I, $\widehat{I}$ — единичные операторы в $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ и $\widehat{\mathcal{H}}$ соответственно,

$$\widehat{Q}:=\big(Q_1,\ldots,Q_m\big)^\tau, \quad \widehat{G}:=\operatorname{diag}\big(b_1I,\ldots,b_mI\big).$$

Из (3.12) и (4.6) найдем, что

$$\begin{aligned}\mathcal{A}=\operatorname{diag}\big(A_0^{1/2},I,\widehat{I}\big)\begin{pmatrix}I & 0 & \widehat{Q}^*\widehat{G}^{-1}\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & \widehat{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{Q}^*\widehat{G}^{-1}\widehat{Q}+2\omega_0 iS_A & -Q_B^* & 0\\ Q_B & 0 & 0\\ 0 & 0 & \widehat{G}\end{pmatrix}\times\\ \times\begin{pmatrix}I & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ -\widehat{G}^{-1}\widehat{Q} & 0 & \widehat{I}\end{pmatrix}\operatorname{diag}\big(A_0^{1/2},I,\widehat{I}\big).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Из леммы 3.3 следует, что $(\widehat{Q}^*\widehat{G}^{-1}\widehat{Q}+2\omega_0 iS_A)^{-1}=(\sum\limits_{l=1}^m b^{-1}Q_l^*Q_l+2\omega_0 iS_A)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))$. Если существует $\big[Q_B(\widehat{Q}^*\widehat{G}^{-1}\widehat{Q}+2\omega_0 iS_A)^{-1}Q_B^*\big]^{-1}\in\mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega))$, то из (4.7) и (3.13) будет следовать, что $\mathcal{A}^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

2. Положим $C:=\widehat{Q}^*\widehat{G}^{-1}\widehat{Q}=\sum\limits_{l=1}^m b_l^{-1}Q_l^*Q_l$. Из лемм 3.1, 3.3 для любого $\mathbf{u}\in\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ имеем

$$\|(I+2\omega_0 iC^{-1/2}S_AC^{-1/2})\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}=\|(I+2\omega_0 iC^{-1/2}A_0^{-1/2}SA_0^{-1/2}C^{-1/2})\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}\leqslant$$
$$\leqslant(1+2\omega_0\|C^{-1/2}A_0^{-1/2}\|^2_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))})\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}.$$

Отсюда, если положить $T:=(I+2\omega_0 iC^{-1/2}S_AC^{-1/2})^{-1}$, следует, что для любого $\mathbf{v}\in\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$

$$\|T\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}\geqslant(1+2\omega_0\|C^{-1/2}A_0^{-1/2}\|^2_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))})^{-2}\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}=:\gamma\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}.$$

Теперь из соотношения $T+T^*=2T^*T=2TT^*$ для любого $\rho\in L_{2,\rho_0}(\Omega)$ имеем

$$\|Q_B(\widehat{Q}^*\widehat{G}^{-1}\widehat{Q}+2\omega_0 iS_A)^{-1}Q_B^*\rho\|_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}\cdot\|\rho\|_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}=$$
$$=\|Q_BC^{-1/2}TC^{-1/2}Q_B^*\rho\|_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}\cdot\|\rho\|_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}\geqslant\mathrm{Re}(Q_BC^{-1/2}TC^{-1/2}Q_B^*\rho,\rho)_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}=$$
$$=\frac{1}{2}((T+T^*)C^{-1/2}Q_B^*\rho,C^{-1/2}Q_B^*\rho)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}=\|TC^{-1/2}Q_B^*\rho\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}\geqslant$$
$$\geqslant\gamma\|C^{-1/2}Q_B^*\rho\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}=\gamma(Q_BC^{-1}Q_B^*\rho,\rho)_{L_{2,\rho_0}(\Omega)},$$
$$\|\big[Q_B(\widehat{Q}^*\widehat{G}^{-1}\widehat{Q}+2\omega_0 iS_A)^{-1}Q_B^*\big]^*\rho\|_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}\cdot\|\rho\|_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}\geqslant\dots\geqslant\gamma(Q_BC^{-1}Q_B^*\rho,\rho)_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}.$$

Отсюда следует, что для доказательства $\big[Q_B(\widehat{Q}^*\widehat{G}^{-1}\widehat{Q}+2\omega_0 iS_A)^{-1}Q_B^*\big]^{-1}\in\mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega))$ достаточно установить, что оператор $Q_BC^{-1}Q_B^*=Q_B(\sum\limits_{l=1}^m b_lQ_l^*Q_l)^{-1}Q_B^*=Q_{B,b}Q_{B,b}^*$ (см. лемму 3.3) положительно определен в $L_{2,\rho_0}(\Omega)$ или $(Q_{B,b}Q_{B,b}^*)^{-1}\in\mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega))$.

3. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases}-\rho_0^{-1}(z)\displaystyle\sum_{l=1}^m\Big(\frac{\mu_l}{b_l}\Delta\mathbf{u}(x)+\big(\frac{\eta_l}{b_l}+\frac{\mu_l}{3b_l}\big)\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}(x)\Big)+\\ \qquad\qquad+2\omega_0 i(\mathbf{u}(x)\times\mathbf{e}_3)+\nabla\big(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho(x)\big)=\mathbf{v}(x)\quad(\text{в }\Omega),\\ a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\mathbf{u}(x)\big)=q(x)\quad(\text{в }\Omega),\qquad\qquad\mathbf{u}(x)=0\quad(\text{на }\partial\Omega).\end{cases}\tag{4.8}$$

Система (4.8) — это система Дуглиса—Ниренберга. Краевая задача, отвечающая главной части системы (4.8), имеет вид (первое уравнение умножено на $\rho_0(z)$)

$$\begin{cases}-\displaystyle\sum_{l=1}^m\Big(\frac{\mu_l}{b_l}\Delta\mathbf{u}(x)+\big(\frac{\eta_l}{b_l}+\frac{\mu_l}{3b_l}\big)\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}(x)\Big)+a_\infty\rho_0^{1/2}(z)\nabla\rho(x)=\rho_0(z)\mathbf{v}(x)\quad(\text{в }\Omega),\\ a_\infty\rho_0^{1/2}(z)\mathrm{div}\mathbf{u}(x)=q(x)\quad(\text{в }\Omega),\qquad\qquad\mathbf{u}(x)=0\quad(\text{на }\partial\Omega)\end{cases}$$

и является эллиптической в силу леммы 4.2. Из [20] следует, что максимальный оператор, являющийся L_2-реализацией краевой задачи (4.8), фредгольмов. С использованием операторов A_b, $Q_{B,b}$, $Q_{B,b}^*$, $S_{A_b}=A_b^{-1/2}SA_b^{-1/2}$ краевую задачу (4.8) можно переписать в следующей операторной форме в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}_0:=\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)\oplus L_{2,\rho_0}(\Omega)$:

$$\mathbf{B}\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \rho\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_b^{1/2}&0\\0&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I+2\omega_0 iS_{A_b}&-Q_{B,b}^*\\ Q_{B,b}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_b^{1/2}&0\\0&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \rho\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}A_b^{1/2}\big((I+2\omega_0 iS_{A_b})A_b^{1/2}\mathbf{u}-Q_{B,b}^*\rho\big)\\ Q_{B,b}A_b^{1/2}\mathbf{u}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{v}\\ q\end{pmatrix},$$
$$\mathcal{D}(\mathbf{B})=\{\zeta=(\mathbf{u};\rho)^\tau\in\mathbf{H_0}\mid\mathbf{u}-A_b^{-1/2}(I+2\omega_0 iS_{A_b})^{-1}Q_{B,b}^*\rho\in\mathcal{D}(A_b)\}.$$

Оператор $\mathbf{B}$ является максимальным аккретивным оператором, $\mathrm{Ker}\mathbf{B}=\{0\}$. Эти факты доказываются по аналогии с соответствующими утверждениями в леммах 3.4 и 4.1. Оператор $\mathbf{B}^*$ также является максимальным аккретивным оператором, $\mathrm{Ker}\mathbf{B}^* = \{0\}$. Отсюда и из фредгольмовости оператора $\mathbf{B}$ следует, что существует $\mathbf{B}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_0)$.

4. Докажем теперь, что существует $(Q_{B,b}Q_{B,b}^*)^{-1} \in \mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega))$. Допустим, что это не верно. Тогда существует некомпактная последовательность $\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset L_{2,\rho_0}(\Omega)$ такая, что $\|\rho_n\|_{L_{2,\rho_0}(\Omega)} = 1$, $Q_{B,b}Q_{B,b}^*\rho_n \to 0$ $(n \to +\infty)$ в $L_{2,\rho_0}(\Omega)$. Определим $\zeta_n := (A_b^{-1/2}(I + 2\omega_0 iS_{A_b})^{-1}Q_{B,b}^*\rho_n; \rho_n)^\tau$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\{\zeta_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{D}(\mathbf{B})$, так как $[A_b^{-1/2}(I+2\omega_0 iS_{A_b})^{-1}Q_{B,b}^*\rho_n] - A_b^{-1/2}(I+2\omega_0 iS_{A_b})^{-1}Q_{B,b}^*[\rho_n] = 0 \in \mathcal{D}(A_b)$. Кроме того, имеем

$$\zeta_n \nrightarrow 0, \quad \mathbf{B}\zeta_n = \mathbf{B}\begin{pmatrix} A_b^{-1/2}(I + 2\omega_0 iS_{A_b})^{-1}Q_{B,b}^*\rho_n \\ \rho_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Q_{B,b}Q_{B,b}^*\rho_n \end{pmatrix} \to 0 \quad (n \to +\infty),$$

что противоречит $\mathbf{B}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_0)$. Таким образом, $(Q_{B,b}Q_{B,b}^*)^{-1} \in \mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega))$, и лемма доказана. □

Определение 4.1. *Существенным спектром* оператора $\mathcal{A}$ (спектральной задачи (4.1)) назовем множество $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\mathcal{A} - \lambda) - \text{нефредгольмов}\}$.

Для описания существенного спектра задачи определим функции

$$\varphi(\lambda) := \sum_{l=1}^m \frac{\mu_l}{b_l - \lambda}, \quad \psi(\lambda, x) := \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \lambda}\Big(\eta_l + \frac{\mu_l}{3}\Big) - \frac{1}{\lambda}\, a_\infty^2 \rho_0(z). \tag{4.9}$$

С помощью функций (4.9) определим множества в комплексной плоскости (точнее, на $\mathbb{R}_+$)

$$\begin{gathered} \Lambda_{E,1} := \big\{\lambda \in \mathbb{C} | \ \varphi(\lambda) = 0\big\}, \\ \Lambda_{E,2} := \big\{\lambda \in \mathbb{C} | \ \varphi(\lambda) + \psi(\lambda, x) = 0, \ x \in \overline{\Omega}\big\}, \\ \Lambda_L := \big\{\lambda \in \mathbb{C} | \ 2\varphi(\lambda) + \psi(\lambda, x) = 0, \ x \in \partial\Omega\big\}. \end{gathered} \tag{4.10}$$

Простые геометрические рассуждения показывают, что множество $\Lambda_{E,1}$ состоит ровно из $m-1$ различных точек, находящихся на интервале (b_1, b_m) и разделенных точками b_l $(l = \overline{2, m-1})$. Каждое из множеств $\Lambda_{E,2}$, Λ_L состоит ровно из m отрезков на интервале $(0, b_m)$. Для каждого множества отрезки разделены точками b_l $(l = \overline{1, m-1})$. Если рассматриваемая система не вращается и находится в невесомости ($\omega_0 = 0$, $g = 0$), то $\rho_0 = \mathrm{const}$ и каждое из множеств $\Lambda_{E,2}$, Λ_L превращается в набор из m точек.

Лемма 4.4. $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \Lambda_{E,1} \cup \Lambda_{E,2} \cup \Lambda_L \subset (0, b_m)$. *Множество* $\mathbb{C} \backslash \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ *состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора* $\mathcal{A}$. *Спектр оператора* $\mathcal{A}$ *расположен симметрично относительно действительной оси.*

Доказательство. Пусть $\lambda \notin \Lambda_{E,1} \cup \Lambda_{E,2} \cup \Lambda_L$, $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G})$. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\rho_0(z)} \sum_{l=1}^m \Big[\frac{\mu_l}{b_l - \lambda}\Delta\mathbf{u}(x) + \frac{1}{b_l - \lambda}\Big(\eta_l + \frac{\mu_l}{3}\Big)\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}(x)\Big] + \\ &\qquad + \frac{1}{\lambda}\nabla\Big[\frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)}\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\mathbf{u}(x)\big)\Big] - 2\omega_0\big(\mathbf{u}(x) \times \mathbf{e}_3\big) - \lambda\mathbf{u}(x) = \mathbf{v}(x) \quad (\text{в } \Omega), \\ &\qquad\qquad \mathbf{u}(x) = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Из (4.9), (4.10) и леммы 4.2 найдем, что краевая задача (4.11) является эллиптической. Из [20] следует, что оператор, являющийся L_2-реализацией краевой задачи (4.11), фредгольмов. С использованием введенных ранее операторов и пучка (4.3) можно проверить, что краевую задачу (4.11) можно переписать в виде $A_0^{1/2}L(\lambda)A_0^{1/2}\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Таким образом, оператор $A_0^{1/2}L(\lambda)A_0^{1/2}$ фредгольмов в $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$.

Из [14, лемма 1, с. 52] следует, что оператор $A_0^{1/2}L(\lambda)A_0^{1/2}$ фредгольмов как оператор, действующий из $\mathbf{H}_{A_0}$ в $\mathbf{H}_{A_0}^*$ ($\mathbf{H}_{A_0}^*$ — пространство, сопряженное к $\mathbf{H}_{A_0}$ относительно скалярного произведения в $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$). Следовательно, оператор $L(\lambda)$ также фредгольмов в $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$.

Из [19, теорема 3.1, с. 374] (теорема о произведении фредгольмовых операторов), (3.10) и факторизации (3.12) теперь найдем, что оператор

$$\mathcal{A}-\lambda=\begin{pmatrix}A_0^{1/2} & 0\\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\lambda A_0^{-1}+2\omega_0 iS_A & \mathcal{Q}^*\\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_0^{1/2} & 0\\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}A_0^{1/2} & 0\\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L(\lambda) & 0\\ 0 & \mathcal{G}-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ -\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_0^{1/2} & 0\\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix},$$

где $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})=(\mathcal{G}-\lambda)^{-1}$, $S_A=A_0^{-1/2}SA_0^{-1/2}$, фредгольмов. Следовательно, для существенного спектра оператора $\mathcal{A}$ получаем включение $\sigma_{ess}(\mathcal{A})\subset\Lambda_{E,1}\cup\Lambda_{E,2}\cup\Lambda_L$.

Множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$, очевидно, является связным, а оператор $\mathcal{A}$ имеет регулярные точки. Отсюда и из [8, теорема 5.17, с. 296] (теорема об устойчивости индекса и дефекта замкнутого оператора) следует, что множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$.

Предположим теперь, что $\lambda\notin\sigma_{ess}(\mathcal{A})$, $\lambda\in\Lambda_{E,1}\cup\Lambda_{E,2}\cup\Lambda_L$. В этом случае получим противоречие, так как регулярные точки (отличные от $0,b_1,\cdots,b_m$) и изолированные собственные значения конечной кратности оператора $\mathcal{A}$ являются регулярными и изолированными собственными значениями конечной кратности для пучка $L(\lambda)$.

Симметричность расположения спектра оператора $\mathcal{A}$ относительно действительной оси следует из самосопряженности пучка $L(\lambda)$ (см. [11, с. 174]) или из J-самосопряженности оператора $\mathcal{A}$ (см. [2, с. 131]). □

4.3. Локализация спектра и асимптотика спектра на бесконечности.

Лемма 4.5. *Для любого как угодно малого $\varepsilon>0$ существует $R=R(\varepsilon)>0$ такое, что весь спектр оператора $\mathcal{A}$ принадлежит множеству $\Lambda_\varepsilon^\pm\cup C_R$, где $\Lambda_\varepsilon^\pm:=\{\,|\arg\lambda\mp\pi/2|<\varepsilon\}$, $C_R:=\{\,|\lambda|<R\}$. Более того, спектр оператора $\mathcal{A}$ имеет две ветви собственных значений $\{\lambda_k^{(\pm i\infty)}\}_{k=1}^\infty$, расположенных в $\Lambda_\varepsilon^\pm\backslash C_R$, со следующей асимптотикой*:

$$\lambda_k^{(\pm i\infty)}=\pm i\lambda_k^{1/2}(A_0)(1+o(1))\quad(k\to+\infty),$$
$$\lambda_k(A_0)=\Big(\frac{1}{6\pi^2}\int\limits_\Omega\rho_0^{3/2}(z)\Big\{2\Big[\sum_{l=1}^m\frac{\mu_l}{b_l}\Big]^{-3/2}+\Big[a_\infty^2\rho_0(z)+\sum_{l=1}^m\frac{3\eta_l+4\mu_l}{3b_l}\Big]^{-3/2}\Big\}\,d\Omega\Big)^{-2/3}k^{2/3}(1+o(1)).$$

Доказательство. **1**. Из леммы 4.3 следует, что $\lambda=0$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}$. Преобразуем пучок $-\lambda L(\lambda)$ (см. (4.3)) при $\lambda\neq0$ с помощью леммы 3.3 к виду:

$$-\lambda L(\lambda)\mathbf{z}=\Big[\lambda^2A_0^{-1}-2\omega_0i\lambda S_A+Q_B^*Q_B-\sum_{l=1}^m\frac{\lambda}{b_l-\lambda}Q_l^*Q_l\Big]\mathbf{z}=$$
$$=\Big[I+\lambda^2A_0^{-1}-2\omega_0i\lambda S_A-\sum_{l=1}^m\frac{b_l}{b_l-\lambda}Q_l^*Q_l\Big]\mathbf{z}=0,\quad\mathbf{z}\in\mathbf{H}=\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0).\tag{4.12}$$

Из оценок работы [17] и $A_0^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty(\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))$ найдем, что для $\pi/2>\varepsilon>0$ и $R>0$

$$\|(I-i\lambda A_0^{-1/2})^{-1}S_A(I+i\lambda A_0^{-1/2})^{-1}\|\leqslant$$
$$\leqslant\|(I-i\lambda A_0^{-1/2})^{-1}A_0^{-1/4}(A_0^{-1/4}S)\|\cdot\|(I+i\lambda A_0^{-1/2})^{-1}A_0^{-1/4}\|=o(\lambda^{-1}),\tag{4.13}$$
$$\lambda\to\infty,\quad\lambda\notin\Lambda_\varepsilon^\pm\cup C_R.$$

Отсюда и из представления

$$-\lambda L(\lambda)=(I-i\lambda A_0^{-1/2})\Big[I-(I-i\lambda A_0^{-1/2})^{-1}\Big\{2\omega_0i\lambda S_A+$$
$$+\sum_{l=1}^m\frac{b_l}{b_l-\lambda}Q_l^*Q_l\Big\}(I+i\lambda A_0^{-1/2})^{-1}\Big](I+i\lambda A_0^{-1/2})$$

следует, что $L(\lambda)$ непрерывно обратим в $\mathbb{C}\backslash(\Lambda_\varepsilon^\pm\cup C_R)$ при достаточно большом $R=R(\varepsilon)>0$, а значит, $\sigma(\mathcal{A})\subset\Lambda_\varepsilon^\pm\cup C_R$.

2. С помощью оценки, аналогичной (4.13), можно найти, что

$$\|(I-\lambda A_0^{-1/2})^{-1}\Big\{2\omega_0 i\lambda S_A+\sum_{l=1}^{m}\frac{b_l}{b_l-\lambda}Q_l^*Q_l\Big\}(I+\lambda A_0^{-1/2})^{-1}\|\to 0,\quad \lambda\to\infty,\quad \lambda\in\Lambda_\varepsilon^{\pm}\backslash C_R.$$

Отсюда, из степенной асимптотики собственных значений $\lambda_k(A_0)$ оператора A_0 и теоремы об асимптотике спектра пучка вида (4.12) (см. [1, 15]) следует, что пучок $L(\lambda)$ (оператор $\mathcal{A}$) имеет в $\Lambda_\varepsilon^{\pm}\backslash C_R$ две ветви собственных значений $\lambda_k^{(\pm i\infty)}=\pm i\lambda_k^{1/2}(A_0)(1+o(1))$ $(k\to+\infty)$.

3. Асимптотика собственных значений оператора A_0 следует из [4, с. 10]. Точнее, собственные значения оператора A_0 имеют асимптотику $\lambda_k(A_0)=C_{A_0}^{-2/3}k^{2/3}(1+o(1))$ $(k\to+\infty)$, где

$$\begin{gathered}C_{A_0}:=\frac{1}{24\pi^3}\int\limits_{\Omega}d\Omega\int\limits_{|\xi|=1}\rho_0^{3/2}(z)\,\mathrm{Tr}\Big\{g_1|\xi|^2I_3+g_2(z)\xi\xi^\tau\Big\}^{-3/2}dS(\xi),\\ \xi:=(\xi_1;\xi_2;\xi_3)^\tau\in\mathbb{R}^3\backslash\{0\},\quad g_1:=\sum_{l=1}^{m}\frac{\mu_l}{b_l},\quad g_2(z):=a_\infty^2\rho_0(z)+\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l}\Big(\eta_l+\frac{\mu_l}{3}\Big),\end{gathered}\tag{4.14}$$

а I_3 — единичная матрица в $\mathbb{R}^3$. Для вычисления C_{A_0} введем матрицу $\Gamma_\xi:=(|\xi|^{-1}\xi,a^\perp,b^\perp)$, состоящую из вектор-столбцов $|\xi|^{-1}\xi$, $a^\perp$, $b^\perp$. Здесь вектор-столбцы $a^\perp$, $b^\perp$ ($|a^\perp|=|b^\perp|=1$) ортогональны ξ и между собой. Используя формулы $\Gamma_\xi^\tau\Gamma_\xi=I_3$, $\Gamma_\xi^\tau\xi\xi^\tau\Gamma_\xi=\mathrm{diag}(|\xi|^2,0,0)=:|\xi|^2P_1$, найдем собственные значения матрицы в фигурных скобках из (4.14):

$$\begin{gathered}\det\Big\{g_1|\xi|^2I_3-\lambda I_3+g_2(z)\xi\xi^\tau\Big\}=\det\Gamma_\xi^\tau\Big\{g_1|\xi|^2I_3-\lambda I_3+g_2(z)\xi\xi^\tau\Big\}\Gamma_\xi=\\ =\det\Big\{g_1|\xi|^2I_3-\lambda I_3+g_2(z)|\xi|^2P_1\Big\}=\big(\big[g_1+g_2(z)\big]|\xi|^2-\lambda\big)\big(g_1|\xi|^2-\lambda\big)^2=0.\end{gathered}$$

Следовательно, $\lambda_{1,2}=g_1|\xi|^2$, $\lambda_3=\big[g_1+g_2(z)\big]|\xi|^2$. Тогда имеем

$$\begin{gathered}\int\limits_{|\xi|=1}\mathrm{Tr}\Big\{g_1|\xi|^2I_3+g_2(z)\xi\xi^\tau\Big\}^{-3/2}dS(\xi)=\\ =\int\limits_{|\xi|=1}\Big\{2g_1^{-3/2}+\big[g_1+g_2(z)\big]^{-3/2}\Big\}|\xi|^{-3}\,dS(\xi)=4\pi\Big\{2g_1^{-3/2}+\big[g_1+g_2(z)\big]^{-3/2}\Big\}.\end{gathered}$$

Отсюда и из (4.14) следует формула асимптотики собственных значений оператора A_0. □

Из леммы 3.4 следует, что $\sigma(\mathcal{A})\subset\{\lambda\in\mathbb{C}|\,\mathrm{Re}\lambda\geqslant 0\}$. В следующей лемме уточняется расположение найденных в лемме 4.5 ветвей собственных значений и всего спектра оператора $\mathcal{A}$.

Лемма 4.6. $\sigma(\mathcal{A})\subset\big\{\lambda\in\mathbb{C}|\,0<\mathrm{Re}\lambda<b_m\big\}$.

Доказательство. Пусть $\lambda\in\sigma(\mathcal{A})$, $\lambda\notin\sigma_{ess}(\mathcal{A})\subset(0,b_m)$, $\lambda\notin\sigma(\mathcal{G})=\{0,b_1,\dots,b_m\}$. Тогда λ, являющееся собственным значением оператора $\mathcal{A}$ (см. лемму 4.4), является также собственным значением пучка $L(\lambda)$ (см. (4.3)), то есть существует $0\neq\mathbf{z}\in\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ такой, что $L(\lambda)\mathbf{z}=0$. Умножая последнее равенство скалярно на $\mathbf{z}$, получим уравнение, которому удовлетворяет λ:

$$-\lambda p+2\omega_0 is-\frac{1}{\lambda}q_0+\sum_{l=1}^{m}\frac{q_l}{b_l-\lambda}=0,\tag{4.15}$$

$$p:=\frac{\|A_0^{-1/2}\mathbf{z}\|^2}{\|\mathbf{z}\|^2},\quad s:=\frac{(S_A\mathbf{z},\mathbf{z})}{\|\mathbf{z}\|^2},\quad q_0:=\frac{\|Q_B\mathbf{z}\|^2}{\|\mathbf{z}\|^2},\quad q_l:=\frac{\|Q_l\mathbf{z}\|^2}{\|\mathbf{z}\|^2}\ \ (l=\overline{1,m}).$$

Выделим действительную и мнимую части из (4.15):

$$-p\mathrm{Re}\lambda-q_0\frac{\mathrm{Re}\lambda}{|\lambda|^2}+\sum_{l=1}^{m}\frac{q_l(b_l-\mathrm{Re}\lambda)}{|b_l-\lambda|^2}=0,\quad -p\mathrm{Im}\lambda+2\omega_0 s+q_0\frac{\mathrm{Im}\lambda}{|\lambda|^2}+\sum_{l=1}^{m}\frac{q_l\mathrm{Im}\lambda}{|b_l-\lambda|^2}=0.\tag{4.16}$$

Учитывая, что $p > 0$, $q_l \geqslant q_l^0 > 0$ $(l = \overline{1,m})$ (см. лемму 3.3), из (4.16) и леммы 4.3 следует

$$0 < \mathrm{Re}\lambda \sum_{l=1}^{m} \frac{q_l}{|b_l-\lambda|^2} < \mathrm{Re}\lambda\Big[p + \frac{q_0}{|\lambda|^2} + \sum_{l=1}^{m} \frac{q_l}{|b_l-\lambda|^2}\Big] = \sum_{l=1}^{m} \frac{b_l q_l}{|b_l-\lambda|^2} \leqslant b_m \sum_{l=1}^{m} \frac{q_l}{,} |b_l-\lambda|^2$$

и лемма доказана. □

4.4. Локализация спектра в случае $\omega_0 = 0$**.** В следующих двух утверждениях установим локализацию спектра оператора $\mathcal{A}$ в случае, когда в системе отсутствует вращение.

Лемма 4.7. *Пусть* $\omega_0 = 0$, *тогда существует* $\beta_0 > 0$ *такое, что*

$$\sigma(\mathcal{A}) \cap \big\{\lambda \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im}\lambda \neq 0\big\} \subset \big\{\lambda \in \mathbb{C} |\ \beta_0 \leqslant \mathrm{Re}\lambda < b_m/2\big\}.$$

Доказательство. Определим в $\mathbb{R}^{m+2}$ множество параметров уравнения (4.15) (при $\omega_0 = 0$):

$$\mathbb{T} := \big\{(p; q_0; q_1; \ldots; q_m)^\tau \in \mathbb{R}^{m+2} |\ 0 < p \leqslant \|A_0^{-1/2}\|^2,\ \ 0 \leqslant q_0 \leqslant \|Q_B\|^2,\ \ q_l^0 \leqslant q_l \leqslant \|Q_l\|^2\ (l = \overline{1,m})\big\},$$

где числа $q_l^0 > 0$ определены в лемме 3.3. Уравнение (4.15) (при $\omega_0 = 0$) имеет m действительных положительных корней и еще два корня — пару комплексно сопряженных чисел либо пару действительных положительных чисел. Рассмотрим ситуацию, когда имеется пара комплексно сопряженных корней. В этом случае обозначим действительные корни уравнения (4.15) через $\lambda^{(l)} = \lambda^{(l)}(p, q_0, \ldots, q_m)$ $(l = \overline{1,m})$. Определим теперь число β_0 по следующей формуле:

$$\beta_0 := \inf_{(p;q_0;q_1;\ldots;q_m)\in\mathbb{T}} \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m} \big(b_l - \lambda^{(l)}(p, q_0, q_1, \ldots, q_m)\big) > 0. \tag{4.17}$$

Пусть $\lambda^{(+i)}$ — комплексное собственное значение оператора $\mathcal{A}$ (см. лемму 4.4). Тогда $\lambda^{(+i)}$ — корень уравнения (4.15) (при $\omega_0 = 0$) при некотором $\mathbf{z} = \mathbf{z}^{(+i)}$. При этом число $\lambda^{(-i)} := \overline{\lambda^{(+i)}}$ также будет корнем уравнения (4.15). Обозначим через $\lambda^{(l)}$ $(l = \overline{1,m})$ оставшиеся действительные (положительные) корни уравнения (4.15) (при $\omega_0 = 0$) и запишем уравнение (4.15) в виде

$$(-1)^m p\,(\lambda - \lambda^{(+i)})(\lambda - \lambda^{(-i)}) \prod_{l=1}^{m} (\lambda - \lambda^{(l)}) = 0. \tag{4.18}$$

С другой стороны, уравнение (4.15) (при $\omega_0 = 0$) можно переписать в следующем виде:

$$\lambda^2 p \prod_{l=1}^{m} (b_l - \lambda) + q_0 \prod_{l=1}^{m} (b_l - \lambda) - \lambda \sum_{l=1}^{m} q_l \prod_{k=1,\, k\neq l}^{m} (b_k - \lambda) = 0. \tag{4.19}$$

Приравнивая коэффициенты при λ^{m+1} в уравнениях (4.18) и (4.19) и учитывая (4.17), теперь найдем, что $(b_0 := 0)$

$$\beta_0 \leqslant \mathrm{Re}\lambda^{(\pm i)} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m} (b_l - \lambda^{(l)}) < \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m} (b_l - b_{l-1}) = \frac{b_m}{2}.$$

□

Лемма 4.8. *Пусть* $\omega_0 = 0$ *и существует* $0 < \varepsilon < b_m^{-2}$ *такое, что* (*см.* (3.2))

$$\begin{gathered}\mathcal{J}(\mathbf{u},\mathbf{u}) \sum_{l=1}^{m} \Big(\frac{1}{(b_l-\lambda)^2} - \varepsilon\Big)\mu_l + \mathcal{D}(\mathbf{u},\mathbf{u}) \sum_{l=1}^{m} \Big(\frac{1}{(b_l-\lambda)^2} - \varepsilon\Big)\Big(\eta_l + \frac{\mu_l}{3}\Big) + \\ + \mathcal{F}(\mathbf{u},\mathbf{u})\Big(\frac{1}{\lambda^2} - \varepsilon\Big) \geqslant \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}\end{gathered} \tag{4.20}$$

при всех $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{A_0}$ *и* $\lambda \in \cup_{l=1}^{m} (b_{l-1}, b_l)$ $(b_0 = 0)$. *Тогда спектр оператора* $\mathcal{A}$, *лежащий в области* $\{\lambda \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im}\lambda \neq 0\}$, *сгущается только к бесконечности* (*см. лемму* 4.5).

Доказательство. Предположим, что оператор $\mathcal{A}$ имеет ветвь собственных значений $\{\lambda_k^{(+i)}\}_{k=1}^{\infty}$, стремящихся к положительному числу $\gamma \in \sigma_{ess}(\mathcal{A})$. Тогда числа $\lambda_k^{(+i)}$ суть корни уравнений (4.15) (при $\omega_0 = 0$) при некоторых $\mathbf{z} = \mathbf{z}_k^{(+i)}$. При этом числа $\lambda_k^{(-i)} := \overline{\lambda_k^{(+i)}}$ также будут собственными значениями оператора $\mathcal{A}$ (см. лемму 4.4). Таким образом, $\lambda_k^{(\pm i)}$ будут корнями следующих функций (см. (4.15)):

$$f_k(\lambda) := -\lambda p_k + -\frac{1}{\lambda} q_{0,k} + \sum_{l=1}^{m} \frac{q_{l,k}}{b_l - \lambda} = 0, \tag{4.21}$$

$$p_k := \frac{\|A_0^{-1/2}\mathbf{z}_k^{(+i)}\|^2}{\|\mathbf{z}_k^{(+i)}\|^2}, \quad q_{0,k} := \frac{\|Q_B\mathbf{z}_k^{(+i)}\|^2}{\|\mathbf{z}_k^{(+i)}\|^2}, \quad q_{l,k} := \frac{\|Q_l\mathbf{z}_k^{(+i)}\|^2}{\|\mathbf{z}_k^{(+i)}\|^2} \ \ (l = \overline{1,m}).$$

Можно считать, что $\lim\limits_{k\to\infty} p_k =: \widehat{p}$, $\lim\limits_{k\to\infty} q_{0,k} =: \widehat{q}_0$, $\lim\limits_{k\to\infty} q_{l,k} =: \widehat{q}_l > 0$ $(l = \overline{1,m})$. В противном случае мы ограничимся соответствующими подпоследовательностями. Определим функцию

$$f(\lambda) := -\lambda\widehat{p} - \frac{1}{\lambda}\widehat{q}_0 + \sum_{l=1}^{m} \frac{\widehat{q}_l}{b_l - \lambda}.$$

Таким образом, последовательность функций $\{f_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится (равномерно) к функции $f(\lambda)$ в каждой замкнутой ограниченной области, не содержащей точек $\{0, b_1, \ldots, b_m\}$. По теореме Гурвица (см. [12, с. 426]) функция $f(\lambda)$ имеет в точке $\lambda = \gamma$ кратный нуль, т. е. $f'(\gamma) = 0$. Из (3.3), (3.2) и (4.20) теперь найдем, что

$$\begin{aligned}
0 = f'(\gamma) &= \lim_{k\to\infty} f_k'(\gamma) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\|\mathbf{z}_k^{(+i)}\|^2}\Big[-\|A_0^{-1/2}\mathbf{z}_k^{(+i)}\|^2 + \frac{\|Q_B\mathbf{z}_k^{(+i)}\|^2}{\gamma^2} + \sum_{l=1}^{m} \frac{\|Q_l\mathbf{z}_k^{(+i)}\|^2}{(b_l-\gamma)^2}\Big] = \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\|\mathbf{z}_k^{(+i)}\|^2}\Big[-\|A_0^{-1/2}\mathbf{z}_k^{(+i)}\|^2 + \mathcal{J}(A_0^{-1/2}\mathbf{z}_k^{(+i)}, A_0^{-1/2}\mathbf{z}_k^{(+i)}) \sum_{l=1}^{m} \frac{\mu_l}{(b_l-\gamma)^2} + \\
&\qquad + \mathcal{D}(A_0^{-1/2}\mathbf{z}_k^{(+i)}, A_0^{-1/2}\mathbf{z}_k^{(+i)}) \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{(b_l-\gamma)^2}\Big(\eta_l + \frac{\mu_l}{3}\Big) + \\
&\qquad + \mathcal{F}(A_0^{-1/2}\mathbf{z}_k^{(+i)}, A_0^{-1/2}\mathbf{z}_k^{(+i)})\frac{1}{\gamma^2} \pm \varepsilon\big(A_0^{-1/2}\mathbf{z}_k^{(+i)}, A_0^{-1/2}\mathbf{z}_k^{(+i)}\big)_{A_0}\Big] \geqslant \varepsilon > 0.
\end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Автор приносит благодарность проф. Н. Д. Копачевскому за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Авакян В. А.* Асимптотическое распределение спектра линейного пучка, возмущенного аналитической оператор-функцией// Функц. анализ и его прилож. — 1978. — *12*, № 2. — С. 66-67.
2. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.
3. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д., Орлова Л. Д.* Эволюционные и спектральные задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости// Тр. СПб. Мат. об-ва. — 1998. — *6*.— С. 5–33.
4. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений// Итоги науки и техн. Сер. мат. анализ. — 1977. — *14*. — С. 5–58.
5. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ гиперболических вольтерровых интегродифференциальных уравнений// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 656–660.
6. *Закора Д. А.* Модель сжимаемой жидкости Олдройта// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *61*. — С. 41–66.
7. *Звягин В. Г., Турбин М. В.* Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина—Фойгта// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *31*. — С. 3–144.
8. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
9. *Копачевский Н. Д, Крейн С. Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
10. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.

11. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.
12. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Т. 1. — М.: Наука, 1967.
13. *Милославский А. И.* Спектр малых колебаний вязкоупругой наследственной среды// Докл. АН СССР. — 1989. — *309*, № 3. — С. 532–536.
14. *Михлин С. Г.* Спектр пучка операторов теории упругости// Усп. мат. наук. — 1973. — *28*, № 3. — С. 43–82.
15. *Оразов М. Б.* Некоторые вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов и связанные с ними задачи из механики. — Дисс. д-ра. физ.-мат. наук, 01.01.02. — Ашхабад, 1982.
16. *Осколков А. П.* Начально-краевые задачи для уравнений движений жидкостей Кельвина—Фойгта и жидкостей Олдройта// Тр. МИАН. — 1987. — *179*. — С. 126–164.
17. *Радзиевский Г. В.* Квадратичный пучок операторов. Препринт. — Киев, 1976.
18. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. — М.: Мир, 1985.
19. *Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M. A.* Classes of linear operators. Vol. 1. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1990.
20. *Grubb G., Geymonat G.* The essential spectrum of elliptic systems of mixed order// Math. Ann. — 1977. — *227*. — С. 247–276.
21. *Kelvin (Thomson) W.* On the theory of viscoelastic fluids// Math. A. Phys. Pap. — 1875. — *3*. — С. 27–84.
22. *Maxwell J. C.* On the dynamical theory of gases// Philos. Trans. R. Soc. London. — 1867. — *157*. — С. 49–88.
23. *Maxwell J. C.* On the dynamical theory of gases// Philos. Mag. London. — 1868. — *35*. — С. 129–145.
24. *Oldroyd J. G.* On the formulation of rheological equations of state// Proc. Roy. Soc. London. — 1950. — *A200*. — С. 523–541.
25. *Oldroyd J. G.* The elastic and viscous properties of emulsions and suspensions// Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 1953. — *A218*. — С. 122–137.
26. *Rautian N. A., Vlasov V. V.* Well-posedness and spectral analysis of hyperbolic Volterra equations of convolution type// Differential and difference equations with applications. ICDDEA, Amadora, Portugal, May 18–22, 2015. Selected contributions. — Cham: Springer, 2016. — С. 411–419.
27. *Voight W.* Uber die innere Reibung der festen Körper, inslesondere der Krystalle// Gottinden Abh. — 1889. — *36*, № 1. — С. 3–47.
28. *Voight W.* Uber innex Reibung fester Körper, insbesondere der Metalle// Ann. Phys. U. Chem. — 1892. — *47*, № 9. — С. 671–693.

Д. А. Закора
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, Симферополь, проспект Вернадского, 4;
Воронежский государственный университет,
394006, Воронеж, Университетская площадь, 1
E-mail: dmitry.zkr@gmail.com, dmitry_@crimea.edu

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-247-265 UDC 517.984.48:532.135

Model of the Maxwell Compressible Fluid

© 2017 **D. A. Zakora**

Abstract. A model of viscoelastic barotropic Maxwell fluid is investigated. The unique solvability theorem is proved for the corresponding initial-boundary value problem. The associated spectral problem is studied. We prove statements on localization of the spectrum, on the essential and discrete spectra, and on asymptotics of the spectrum.

REFERENCES

1. V. A. Avakian, "Asimptoticheskoe raspredelenie spektra lineinogo puchka, vozmushchennogo analiticheskoi operator-funktsiei" [Asymptotic distribution of the spectrum of a linear pencil perturbed with analytic operator-function], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1978, **12**, No. 2, 66-67 (in Russian).
2. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Osnovy teorii lineinykh operatorov v prostranstvakh s indefinitnoi metrikoi* [Essentials of Theory of Linear Operators in Spaces with Indefinite Metrics], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
3. T. Ya. Azizov, N. D. Kopachevskii, and L. D. Orlova, "Evoliutsionnye i spektralnye zadachi, porozhdennye problemoi malykh dvizhenii viazkouprugoi zhidkosti" [Evolution and spectral problems generated by the problem of small motions of viscoelastic fluid], *Tr. SPb. Mat. ob-va* [Proc. Saint Petersburg Math. Soc.], 1998, **6**, 5–33 (in Russian).
4. M. Sh. Birman and M. Z. Solomiak, "Asimptotika spektra differentsialnykh uravnenii" [Asymptotics of the spectrum of differential equations], *Itogi nauki i tekhn. Ser. mat. analiz* [Totals Sci. Tech. Math. Anal.], 1977, **14**, 5–58 (in Russian).
5. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Spektralnyi analiz giperbolicheskikh volterrovykh integrodifferentsialnykh uravnenii" [Spectral analysis of hyperbolic Volterra integrodifferential equations], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2015, **464**, No. 6, 656–660 (in Russian).
6. D. A. Zakora, "Model szhimaemoi zhidkosti Oldroita" [Model of the Oldroyd compressible fluid], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **61**, 41–66 (in Russian).
7. V. G. Zvyagin and M. V. Turbin, "Issledovanie nachalno-kraevykh zadach dlia matematicheskikh modelei dvizheniia zhidkostei Kelvina—Foigta" [The study of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin–Voigt fluids], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **31**, 3–144 (in Russian).
8. T. Kato, *Teoriia vozmushchenii lineinykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
9. N. D. Kopachevskii, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: evolyutsionnye i spektral'nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolution and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
10. S. G. Kreyn, *Lineinye differentsialnye uravneniia v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
11. A. S. Markus, *Vvedenie v spektralnuiu teoriiu polinomialnykh operatornykh puchkov* [Introduction to Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils], Shtiintsa, Kishinev, 1986 (in Russian).
12. A. I. Markushevich, *Teoriia analiticheskikh funktsii. T. 1* [Theory of Analytic Functions. V. 1], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
13. A. I. Miloslavskii, "Spektr malykh kolebanii viazkouprugoi nasledstvennoi sredy" [Spectrum of small oscillations of viscoelastic medium with memory], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1989, **309**, No. 3, 532–536 (in Russian).
14. S. G. Mikhlin, "Spektr puchka operatorov teorii uprugosti" [Spectrum of an operator pencil of the elasticity theory], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1973, **28**, No. 3, 43–82 (in Russian).
15. M. B. Orazov, *Nekotorye voprosy spektralnoi teorii nesamosopriazhennykh operatorov i sviazannye s nimi zadachi iz mekhaniki* [Some questions of the spectral theory of nonself-adjoint operators and related problems of mechanics], Doctoral thesis, 01.01.02, Ashkhabad, 1982.

16. A. P. Oskolkov, “Nachalno-kraevye zadachi dlia uravnenii dvizhenii zhidkostei Kelvina—Foigta i zhidkostei Oldroita” [Inital-boundary value problems for the equations of motion of the Kelvin–Voight and Oldroid fluids], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1987, **179**, 126–164 (in Russian).
17. G. V. Radzievskii, *Kvadratichnyi puchok operatorov. Preprint* [Quadratic Pencil of Operators. Preprint], Kiev, 1976 (in Russian).
18. K. Rektoris, *Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike i tekhnike* [Variational Methods in Mathematical Physics and Technics], Mir, Moscow, 1985 (in Russian).
19. I. Gohberg, S. Goldberg, and M. A. Kaashoek, *Classes of Linear Operators. Vol. 1*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1990.
20. G. Grubb and G. Geymonat, “The essential spectrum of elliptic systems of mixed order,” *Math. Ann.*, 1977, **227**, 247–276.
21. W. Kelvin (Thomson), “On the theory of viscoelastic fluids,” *Math. A. Phys. Pap.*, 1875, **3**, 27–84.
22. J. C. Maxwell, “On the dynamical theory of gases,” *Philos. Trans. R. Soc. London.*, 1867, **157**, 49–88.
23. J. C. Maxwell, “On the dynamical theory of gases,” *Philos. Mag. London.*, 1868, **35**, 129–145.
24. J. G. Oldroyd, “On the formulation of rheological equations of state,” *Proc. Roy. Soc. London.*, 1950, **A200**, 523–541.
25. J. G. Oldroyd, “The elastic and viscous properties of emulsions and suspensions,” *Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1953, **A218**, 122–137.
26. N. A. Rautian and V. V. Vlasov, “Well-posedness and spectral analysis of hyperbolic Volterra equations of convolution type,” *Differential and difference equations with applications*. ICDDEA, Amadora, Portugal, May 18–22, 2015. Selected contributions. — Springer, Cham, 2016, 411–419.
27. W. Voight, “Uber die innere Reibung der festen Körper, inslesondere der Krystalle,” *Gottinden Abh.*, 1889, **36**, No. 1, 3–47.
28. W. Voight, “Uber innex Reibung fester Körper, insbesondere der Metalle,” *Ann. Phys. U. Chem.*, 1892, **47**, No. 9, 671–693.

D. A. Zakora
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
4 Vernadsky Avenue, 295007 Simferopol, Russia;
Voronezh State University
1 Universitetskaya Square, 1394006 Voronezh, Russia
E-mail: dmitry.zkr@gmail.com, dmitry_@crimea.edu

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 2 (2017). С. 266–277

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-266-277 УДК 517.5

УСТРАНЕНИЕ ИЗОЛИРОВАННЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ОБОБЩЕННЫХ КВАЗИИЗОМЕТРИЙ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

© 2017 г. **Д. П. ИЛЬЮТКО, Е. А. СЕВОСТЬЯНОВ**

Аннотация. Для отображений с неограниченной характеристикой получены теоремы об устранении изолированных особенностей на римановых многообразиях. Установлено, что отображение, удовлетворяющее определенному модульному неравенству, характеристика квазиконформности которого имеет мажоранту конечного среднего колебания в заданной изолированной особой точке, имеет предел в этой точке.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Хорошо известная из общего курса комплексного анализа теорема об устранении изолированной особенности утверждает, что ограниченная аналитическая функция $\varphi\colon D\setminus\{z_0\}\to\mathbb{C}$ области $D\setminus\{z_0\}\subset\mathbb{C}$ имеет предел в точке z_0 (см. [12, теорема 1$'$, § 6, п. 24, гл. II]).

Этот результат обобщен в n-мерном пространстве для отображений с ограниченным искажением (см. [18, следствие 4.5] и [20, теорема 2.9, гл. III], см. также [4, 5]). Несколько позднее были получены и другие обобщения, в частности, установленные вторым автором данной статьи [9, 10]. В последних работах речь идет об аналогах теоремы Сохоцкого—Вейерштрасса для так называемых кольцевых Q-отображений, т. е. отображений, в основе определения которых лежит свойство контролируемого искажения модуля семейств кривых. Здесь функция Q отвечает за «испорченность» искажения модуля и предполагается, вообще говоря, неограниченной. В то же время содержательность результатов для указанных отображений имеет место, как правило, в случае слабого роста функции Q в окрестности фиксированной изолированной точки, например, особенностей логарифмического типа, функций конечного среднего колебания и т.п. (см. там же). Стоит отметить, что аналитические функции отвечают $Q\equiv 1$, а отображения с ограниченным искажением — $Q\equiv\mathrm{const}$. Большая часть известных ныне классов отображений также являются кольцевыми Q-отображениями при не очень сильных ограничениях на характеристику квазиконформности, гладкость отображений и меру их множества точек ветвления [8].

Чтобы подытожить упомянутые результаты, мы покажем в настоящей заметке, что аналог теоремы об устранении изолированной особенности для кольцевых Q-отображений справедлив также на римановых многообразиях при практически тех же ограничениях на функцию Q, а не только в евклидовом n-мерном пространстве. Здесь также участвуют некоторые ограничения на сами многообразия, которые будут оговорены ниже.

Перейдем к определениям и формулировкам основных результатов. Следующие понятия могут быть найдены, например, в [12, 17]. Напомним, что *n-мерным топологическим многообразием* $\mathbb{M}^n$ называется хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную некоторому открытому множеству в $\mathbb{R}^n$. *Картой* на многообразии $\mathbb{M}^n$ будем называть пару (U,φ), где U — открытое подмножество пространства $\mathbb{M}^n$

и φ — соответствующий гомеоморфизм множества U на открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Если $P \in U$ и $\varphi(P) = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, то соответствующие числа $x^1, \ldots, x^n$ называются *локальными координатами точки P*. *Гладким многообразием* называется само множество $\mathbb{M}^n$ вместе с соответствующим набором карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, так что объединение всех U_α по параметру α дает все $\mathbb{M}^n$ и, кроме того, отображение, осуществляющее переход от одной системы локальных координат к другой, принадлежит классу C^∞.

Напомним, что *римановой метрикой* на гладком многообразии $\mathbb{M}^n$ называется положительно определенное гладкое симметричное тензорное поле g_{ij} типа $(0, 2)$. В частности, компоненты римановой метрики в различных локальных координатах (U, x) и (V, y), $U \cap V \neq \varnothing$, взаимосвязаны посредством тензорного закона

$$g'_{kl}(y) = g_{ij}(x(y)) \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^l},$$

где $g'_{kl}(y)$ — компоненты римановой метрики в системе координат (V, y), а $g_{ij}(x)$ — в системе координат (U, x).

Римановым многообразием будем называть гладкое многообразие вместе с римановой метрикой на нем. Длину гладкой кривой $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, соединяющей точки $\gamma(t_1) = P_1 \in \mathbb{M}^n$ и $\gamma(t_2) = P_2 \in \mathbb{M}^n$, и n-мерный объем (*меру объема*) v области A на римановом многообразии определим согласно соотношениям

$$l(\gamma) := \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(\gamma(t)) \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{d\gamma^j}{dt}}\, dt, \quad v(A) = \int\limits_A \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \ldots dx^n. \tag{1.1}$$

Ввиду положительной определенности тензора $G = (g_{ij}(x))$ имеем $\det g_{ij} > 0$. *Геодезическим расстоянием* между точками P_1 и $P_2 \in \mathbb{M}^n$ будем называть наименьшую длину всех кусочно-гладких кривых в $\mathbb{M}^n$, соединяющих точки P_1 и P_2. Геодезическое расстояние между точками P_1 и P_2 будем обозначать символом $d(P_1, P_2)$ (всюду далее d обозначает геодезическое расстояние, если не оговорено противное). В частности, (*открытым*) *шаром* $B(P_0, r)$ *с центром в точке* $P_0 \in \mathbb{M}^n$ *и радиусом* $r > 0$ на римановом многообразии $\mathbb{M}^n$ мы будем называть следующее множество:

$$B(P_0, r) = \{P \in \mathbb{M}^n \mid d(P, P_0) < r\}.$$

Так как риманово многообразие, вообще говоря, не предполагается связным, расстояние между любыми точками многообразия, вообще говоря, может быть не определено. Хорошо известно, что любая точка P риманова многообразия $\mathbb{M}^n$ имеет окрестность $U \ni P$ (называемую далее *нормальной окрестностью точки P*) и соответствующее координатное отображение $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$, так что геодезические сферы с центром в точке P и радиусом r, лежащие в окрестности U, переходят при отображении φ в евклидовы сферы того же радиуса, а пучок геодезических кривых, исходящих из точки P, переходит в пучок радиальных отрезков в $\mathbb{R}^n$ (см. [17, леммы 5.9 и 6.11], см. также комментарии на с. 77 там же). Локальные координаты $\varphi(P) = (x^1, \ldots, x^n)$ в этом случае называются *нормальными координатами* точки P. Стоит отметить, что в случае связного многообразия $\mathbb{M}^n$ открытые множества метрического пространства $(\mathbb{M}^n, d)$ порождают топологию исходного топологического пространства $\mathbb{M}^n$ (см. [17, лемма 6.2]). Заметим, что в нормальных координатах тензорная матрица $G = (g_{ij})$ в точке P — всегда единичная (а в силу непрерывности функций g_{ij} в точках, близких к P, эта матрица сколь угодно близка к единичной; см. [17, пункт (c) предложения 5.11]).

Пусть X и Y — два топологических пространства. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *открытым*, если $f(U)$ открыто в Y для любого открытого множества $U \subset X$, и *дискретным*, если для каждой точки $P \in Y$ все точки множества $f^{-1}(P)$ имеют попарно непересекающиеся окрестности.

Пусть (X, d, μ) — произвольное метрическое пространство, наделенное мерой μ и $B(P_0, r) = \{P \in X \mid d(P, P_0) < r\}$. Следующее определение может быть найдено, например, в [6, раздел 4]. Будем говорить, что интегрируемая в $B(P_0, r)$ функция $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$, где D — область в X, имеет *конечное среднее колебание* в точке $P_0 \in D$, пишем $\varphi \in FMO(P_0)$, если

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\mu(B(P_0, \varepsilon))} \int\limits_{B(P_0, \varepsilon)} |\varphi(P) - \overline{\varphi}_\varepsilon|\, d\mu(P) < \infty,$$

где $\overline{\varphi}_{\varepsilon}=\dfrac{1}{\mu(B(P_0,\,\varepsilon))}\displaystyle\int\limits_{B(P_0,\,\varepsilon)}\varphi(P)\,d\mu(P)$.

Всюду далее (если не оговорено противное) $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}^n_*$ — римановы многообразия с геодезическими расстояниями d и d_*, соответственно. *Кривой* γ мы называем непрерывное отображение отрезка $[a,b]$ (открытого интервала (a,b), либо полуоткрытого интервала вида $[a,b)$ или $(a,b]$) в $\mathbb{M}^n$, $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{M}^n$. Под семейством кривых Γ подразумевается некоторый фиксированный набор кривых γ, а если $f\colon\mathbb{M}^n\to\mathbb{M}^n_*$ — произвольное отображение, то $f(\Gamma)=\{f\circ\gamma|\gamma\in\Gamma\}$. Длину произвольной кривой $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{M}^n$, лежащей на многообразии $\mathbb{M}^n$, можно определить как точную верхнюю грань сумм $\sum\limits_{i=1}^{n-1} d(\gamma(t_i),\gamma(t_{i+1}))$ по всевозможным разбиениям $a\leqslant t_1\leqslant\ldots\leqslant t_n\leqslant b$. Следующие определения в случае пространства $\mathbb{R}^n$ могут быть найдены, например, в [21, разделы 1–6, гл. I], см. также [15, гл. I]. Борелева функция $\rho\colon\mathbb{M}^n\to[0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{M}^n$, если линейный интеграл по натуральному параметру s каждой (локально спрямляемой) кривой $\gamma\in\Gamma$ от функции ρ удовлетворяет условию $\int\limits_0^{l(\gamma)}\rho(\gamma(s))ds\geqslant 1$. В этом случае мы пишем $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma$. Пусть $p\geqslant 1$ — фиксированное действительное число, тогда *p-модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M_p(\Gamma)=\inf_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma}\int\limits_{\mathbb{M}^n}\rho^p(x)\,dv(x).$$

(Здесь и далее v означает меру объема, определенную в (1.1). При этом, если $\operatorname{adm}\Gamma=\varnothing$, то полагаем $M_p(\Gamma)=\infty$, см. [21, раздел 6, с. 16] или [15, с. 176].) Свойства модуля в некоторой мере аналогичны свойствам меры Лебега m в $\mathbb{R}^n$:

1. p-модуль пустого семейства кривых равен нулю, $M_p(\varnothing)=0$;
2. p-модуль обладает свойством монотонности относительно семейств кривых:
$$\Gamma_1\subset\Gamma_2\Rightarrow M_p(\Gamma_1)\leqslant M_p(\Gamma_2);$$
3. p-модуль обладает свойством полуаддитивности:
$$M_p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\Gamma_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}M_p(\Gamma_i)\tag{1.2}$$
(см. [21, теорема 6.2, гл. I] в $\mathbb{R}^n$ или [15, теорема 1] в случае более общих пространств с мерами).

Говорят, что семейство кривых Γ_1 *минорируется* семейством Γ_2, пишем $\Gamma_1>\Gamma_2$, если для каждой кривой $\gamma\in\Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2. В этом случае

$$\Gamma_1>\Gamma_2\quad\Rightarrow\quad M_p(\Gamma_1)\leqslant M_p(\Gamma_2)\tag{1.3}$$

(см. [21, теорема 6.4, гл. I] или [15, свойство (c)] в случае более общих пространств с мерами).

Следующее определение для случая $\mathbb{R}^n$ может быть найдено, например, в монографии [19, раздел 7.1, гл. 7]. Пусть $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}^n_*$ — римановы многообразия, $n\geqslant 2$, D — область в $\mathbb{M}^n$, $x_0\in D$, $Q\colon D\to[0,\infty]$ — измеримая относительно меры объема v функция и число $r_0>0$ таково, что замкнутый шар $\overline{B(x_0,r_0)}$ лежит в некоторой нормальной окрестности U точки x_0. Пусть также $0<r_1<r_2<r_0$, $A=A(r_1,r_2,x_0)=\{x\in\mathbb{M}^n: r_1<d(x,x_0)<r_2\}$, $S_i=S(x_0,r_i)$, $i=1,2,$ — геодезические сферы с центром в точке x_0 и радиусов r_1 и r_2 соответственно, а $\Gamma(S_1,\,S_2,\,A)$ обозначает семейство всех кривых, соединяющих S_1 и S_2 внутри области A. Зафиксируем $p\geqslant 1$ и условимся называть отображение $f\colon D\to\mathbb{M}^n_*$ (или $f\colon D\setminus\{x_0\}\to\mathbb{M}^n_*$) *кольцевым* (p,Q)-*отображением в точке* $x_0\in D$, если соотношение

$$M_p\left(f\left(\Gamma\left(S_1,\,S_2,\,A\right)\right)\right)\ \leqslant\int\limits_{A}Q(x)\cdot\eta^p(d(x,x_0))\;dv(x)\tag{1.4}$$

выполнено в кольце A для произвольных r_1, r_2, указанных выше, и для каждой измеримой функции $\eta\colon (r_1,r_2)\to[0,\infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)dr\geqslant 1. \tag{1.5}$$

Отображения типа кольцевых (p,Q)-отображений были предложены к изучению О. Мартио и изучались им совместно с В. Рязановым, У. Сребро и Э. Якубовым, см. [19], а также [1, 14].

Пусть (X,d,μ) — метрическое пространство с метрикой d, наделенное локально конечной борелевской мерой μ. Следуя [16, раздел 7.22], будем говорить, что борелева функция $\rho\colon X\to[0,\infty]$ является *верхним градиентом* функции $u\colon X\to\mathbb{R}$, если для всех спрямляемых кривых γ, соединяющих точки P и Q из X, выполняется неравенство $|u(P)-u(Q)|\leqslant\int\limits_{\gamma}\rho\,ds$, где, как обычно, $\int\limits_{\gamma}\rho\,ds$ обозначает линейный интеграл от функции ρ по кривой γ. Будем также говорить, что в указанном пространстве X выполняется $(1;p)$-неравенство Пуанкаре, если найдутся постоянные $C\geqslant 1$ и $\tau>0$ такие, что для каждого шара $B\subset X$, произвольной ограниченной непрерывной функции $u\colon X\to\mathbb{R}$ и любого ее верхнего градиента ρ выполняется следующее неравенство:

$$\frac{1}{\mu(B)}\int\limits_{B}|u-u_B|d\mu(P)\leqslant C\cdot(\operatorname{diam}B)\left(\frac{1}{\mu(\tau B)}\int\limits_{\tau B}\rho^p d\mu(P)\right)^{1/p},$$

где $u_B:=\dfrac{1}{\mu(B)}\displaystyle\int\limits_{B}u d\mu(P)$ и τB — шар полученный из B изменением радиуса в τ раз. Стоит заметить, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ указанное неравенство выполнено для произвольного $1\leqslant p<\infty$ (см. комментарии на с. 610 в [13]). Метрическое пространство (X,d,μ) назовем *$\widetilde{Q}$-регулярным по Альфорсу* при некотором $\widetilde{Q}\geqslant 1$, если при каждом $P_0\in X$, некоторой постоянной $C\geqslant 1$ и произвольного $R<\operatorname{diam}X$ выполняется

$$\frac{1}{C}R^{\widetilde{Q}}\leqslant\mu(B(P_0,R))\leqslant CR^{\widetilde{Q}}.$$

Заметим, что локально римановы многообразия являются n-регулярными по Альфорсу (см. [1, лемма 5.1]). Следует также заметить, что если риманово многообразие $\widetilde{Q}$-регулярно по Альфорсу, то $\widetilde{Q}=n$ (см. рассуждения на с. 61 в [16] о совпадении $\widetilde{Q}$ с хаусдорфовой размерностью пространства X, а также [1, лемма 5.1] о совпадении топологической и хаусдорфовых размерностей областей риманова многообразия). Справедлива следующая

Теорема 1.1. *Пусть $n\geqslant 2$, $p\in(n-1,n]$, $\mathbb{M}^n_*$ — связно, является n-регулярным по Альфорсу, кроме того, в $\mathbb{M}^n_*$ выполнено $(1;p)$-неравенство Пуанкаре. Пусть также D — область в $\mathbb{M}^n$, $B_R\subset\mathbb{M}^n_*$ — некоторый фиксированный шар радиуса R такой, что $\overline{B_R}$ — компакт в $\mathbb{M}^n_*$, $K\subset\mathbb{M}^n_*$ — некоторый континуум, $f\colon D\setminus\{x_0\}\to B_R\setminus K$ — открытое дискретное кольцевое (p,Q)-отображение в точке $x_0\in D$. Предположим, что $Q\in FMO(x_0)$. Тогда f имеет непрерывное продолжение $f\colon D\to\overline{B_R}$ (непрерывность понимается в смысле геодезического расстояния d_* в $\mathbb{M}^n_*$).*

Благодарности. Авторы выражают благодарность В. И. Рязанову и Р. Р. Салимову за полезные советы и постоянное внимание к работе.

Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-01-00378) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-7962.2016.1).

2. Вспомогательные леммы

Всюду далее

$$S(x_0,r)=\{x\in\mathbb{M}^n\,|\,d(x,x_0)=r\},$$
$$A(x_0,r_1,r_2)=\{x\in\mathbb{M}^n\,|\,r_1<d(x,x_0)<r_2\},$$

$d(A)$ — геодезический диаметр множества $A \subset \mathbb{M}^n$. Далее, если не оговорено противное, граница ∂D области $D \subset \mathbb{M}^n$ и замыкание $\overline{D}$ области D понимаются в смысле геодезического расстояния d. Перед тем, как мы приступим к изложению вспомогательных результатов и основной части данного раздела, дадим еще одно важное определение (см. [20, раздел 3, гл. II]). Пусть D — область риманова многообразия $\mathbb{M}^n$, $n \geqslant 2$, $f\colon D \to \mathbb{M}_*^n$ — отображение, $\beta\colon [a, b) \to \mathbb{M}_*^n$ — некоторая кривая и $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Кривая $\alpha\colon [a, c) \to D$, $c \leqslant b$, называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x_0, если (1) $\alpha(a) = x_0$; (2) $f \circ \alpha = \beta|_{[a,\, c)}$; (3) если $c < c' \leqslant b$, то не существует кривой $\alpha'\colon [a, c') \to D$, такой что $\alpha = \alpha'|_{[a,\, c)}$ и $f \circ \alpha = \beta|_{[a,\, c')}$. Имеет место следующее

Предложение 2.1. *Пусть $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}_*^n$ — римановы многообразия, $n \geqslant 2$, D — область в $\mathbb{M}^n$, $f\colon D \to \mathbb{M}_*^n$ — открытое дискретное отображение, $\beta\colon [a, b) \to \mathbb{M}_*^n$ — кривая и точка $x_0 \in f^{-1}(\beta(a))$. Тогда кривая β имеет максимальное поднятие при отображении f с началом в точке x_0.*

Доказательство. Зафиксируем точку $x_0 \in \mathbb{M}^n$ и рассмотрим $f(x_0) \in \mathbb{M}_*^n$. Поскольку точка $f(x_0)$ принадлежит многообразию $\mathbb{M}_*^n$, найдется окрестность V этой точки, гомеоморфная множеству $\psi(V) \subset \mathbb{R}^n$. В силу непрерывности отображения f найдется окрестность U точки x_0 такая, что $f(U) \subset V$. С другой стороны, не ограничивая общности, можно считать, что U гомеоморфна открытому множеству $\varphi(U)$ в $\mathbb{R}^n$. Можно также считать, что $\varphi(U)$ и $\psi(V)$ являются областями в $\mathbb{R}^n$, тогда $f^* = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ — открытое дискретное отображение между областями $\varphi(U)$ и $\psi(V)$ в $\mathbb{R}^n$. Для таких отображений существование максимальных поднятий локально вытекает из соответствующего результата Рикмана в n-мерном евклидовом пространстве (см. [20, шаг 2 доказательства теоремы 3.2 гл. II]). Отсюда вытекает локальное существование максимальных поднятий и на многообразиях. Глобальное существование максимальных поднятий может быть установлено аналогично доказательству шага 1 указанной выше теоремы. $\square$

Пусть $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}_*^n$ — римановы многообразия. Пусть A — открытое подмножество многообразия $\mathbb{M}^n$, $n \geqslant 2$, а C — компактное подмножество A. *Конденсатором* будем называть пару множеств $E = (A, C)$.

Пусть Γ_E — семейство всех кривых вида $\gamma\colon [a, b) \to A$ таких, что $\gamma(a) \in C$ и $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \varnothing$ для произвольного компакта $F \subset A$. При $p \geqslant 1$ *p-емкостью* конденсатора E называется следующая величина:

$$\operatorname{cap}_p E = M_p(\Gamma_E).$$

Справедливо следующее утверждение (см. [13, предложение 4.7]).

Предложение 2.2. *Пусть X — $\widetilde{Q}$-регулярное по Альфорсу метрическое пространство с мерой, в котором выполняется $(1;p)$-неравенство Пуанкаре так, что $\widetilde{Q} - 1 < p \leqslant \widetilde{Q}$. Тогда для произвольных континуумов E и F, содержащихся в шаре $B(x_0, R)$, и некоторой постоянной $C > 0$ выполняется неравенство*

$$M_p(\Gamma(E, F, X)) \geqslant \frac{1}{C} \cdot \frac{\min\{\operatorname{diam} E, \operatorname{diam} F\}}{R^{1+p-\widetilde{Q}}}.$$

Доказательство следующего утверждения для пространства $\mathbb{R}^n$ и $p = n$, сформулированного ранее даже в несколько более общей форме в терминах весового модуля, может быть найдено, например, в работе [9, лемма 5.1].

Лемма 2.1. *Пусть $n \geqslant 2$, $p \geqslant 1$, D — область в $\mathbb{M}^n$, $f\colon D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{M}_*^n$ — кольцевое (p, Q)-отображение в точке $x_0 \in D$. Предположим, что найдутся $\varepsilon_0 > 0$ и измеримая по Лебегу функция $\psi\colon (0, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$ со следующим свойством. Для любого $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_0]$ найдется $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_2]$ такое, что*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_2) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_2} \psi(t)\,dt < \infty \tag{2.1}$$

при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$ *и, кроме того, при* $\varepsilon\to 0$

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^p(d(x,x_0))\ dv(x)\ =\ o\left(I^p(\varepsilon,\varepsilon_0)\right). \tag{2.2}$$

Если Γ — *семейство всех кривых* $\gamma\colon(0,1)\to D\setminus\{x_0\}$ *таких, что* $\gamma(t_k)\to x_0$ *для некоторой последовательности* $t_k\to 0$, $\gamma(t)\not\equiv x_0$, *то* $M_p\left(f(\Gamma)\right)=0$.

В частности, условие (2.1) автоматически выполнено, как только функция $\psi\in L^1_{loc}(0,\varepsilon_0)$ удовлетворяет условию: $\psi(t)>0$ при почти всех $t\in(0,\varepsilon_0)$.

Доказательство. Можно считать, что шар $B(x_0,\varepsilon_0)$ лежит в нормальной окрестности точки x_0. Заметим, что

$$\Gamma>\bigcup_{i=1}^{\infty}\Gamma_i, \tag{2.3}$$

где Γ_i — семейство таких кривых $\alpha_i\colon(0,1)\to\mathbb{M}^n$, что $\alpha_i(1)\in\{0<d(x,x_0)=r_i<\varepsilon_0\}$, где r_i — некоторая последовательность такая, что $r_i\to 0$ при $i\to\infty$ и $\alpha_i(t_k)\to x_0$ при $k\to\infty$ для той же самой последовательности $t_k\to 0$ при $k\to\infty$. Зафиксируем $i\geqslant 1$. По соотношению (2.1) леммы найдется такое $\varepsilon_1\in(0,r_i]$, что $I(\varepsilon,r_i)>0$ при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$. Заметим, что при указанных $\varepsilon>0$ функция

$$\eta(t)=\begin{cases}\psi(t)/I(\varepsilon,r_i), & t\in(\varepsilon,r_i),\\ 0, & t\in\mathbb{R}\setminus(\varepsilon,r_i)\end{cases}$$

удовлетворяет условию нормировки вида (1.5) в кольце $A(x_0,\varepsilon,r_i)=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\varepsilon<d(x,x_0)<r_i\}$ и, следовательно, ввиду соотношения (1.4) (поскольку f является кольцевым (p,Q)-отображением в точке x_0)

$$M_p\left(f\left(\Gamma\left(S(x_0,\varepsilon),\,S(x_0,r_i),\,A(x_0,\varepsilon,r_i)\right)\right)\right)\leqslant\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,r_i)}Q(x)\cdot\eta^p(d(x,x_0))\ dv(x)\ \leqslant\mathfrak{F}_i(\varepsilon), \tag{2.4}$$

где $\mathfrak{F}_i(\varepsilon)=\dfrac{1}{(I(\varepsilon,r_i))^p}\displaystyle\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0}Q(x)\,\psi^p(d(x,x_0))\,dv(x).$

Принимая во внимание (2.2), получим, что $\mathfrak{F}_i(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Заметим, что при каждом $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$

$$\Gamma_i>\Gamma\left(S(x_0,\varepsilon),\,S(x_0,r_i),\,A(x_0,\varepsilon,r_i)\right). \tag{2.5}$$

Таким образом, при каждом фиксированном $i=1,2,\ldots$ из (2.4) и (2.5) получаем, что

$$M_p(f(\Gamma_i))\leqslant\mathfrak{F}_i(\varepsilon)\to 0 \tag{2.6}$$

при $\varepsilon\to 0$ и каждом фиксированном $i\in\mathbb{N}$. Однако, левая часть неравенства (2.6) не зависит от ε и, следовательно, $M_p(f(\Gamma_i))=0$. Наконец, из (2.3) и свойства полуаддитивности p-модуля (1.2) вытекает, что $M_p(f(\Gamma))=0$. □

Основным техническим утверждением, позволяющим получать результаты об устранимых особенностях открытых дискретных кольцевых (p,Q)-отображений в наиболее общей ситуации, является следующая лемма.

Лемма 2.2. *Пусть* $n\geqslant 2$, $n-1<p\leqslant n$, $\mathbb{M}^n_*$ — *связно, является* n*-регулярным по Альфорсу, кроме того, в* $\mathbb{M}^n_*$ *выполнено* $(1;p)$*-неравенство Пуанкаре. Пусть также* D — *область в* $\mathbb{M}^n$, $B_R\subset\mathbb{M}^n_*$ — *некоторый фиксированный шар радиуса* R *такой, что* $\overline{B_R}$ — *компакт в* $\mathbb{M}^n_*$, $f\colon D\setminus\{x_0\}\to B_R\setminus K$ — *открытое дискретное кольцевое* (p,Q)*-отображение в точке* $x_0\in D$ *(*$K\subset B_R$ — *некоторый фиксированный континуум). Предположим, что существует* $\varepsilon_0>0$ *и измеримая по Лебегу функция* $\psi\colon(0,\varepsilon_0)\to[0,\infty]$ *со следующим свойством: для любого* $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_0]$ *найдется* $\varepsilon_1\in(0,\varepsilon_2]$ *такое, что при всех* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$ *выполнено соотношение* (2.1) *и, кроме того, при* $\varepsilon\to 0$ *выполнено соотношение* (2.2). *Тогда* f *имеет непрерывное продолжение* $f\colon D\to\overline{B_R}$ *(непрерывность понимается в смысле геодезического расстояния* d_* *в* $\mathbb{M}^n_*$*).*

Доказательство. Можно считать, что $\overline{B(x_0,\varepsilon_0)}$ лежит в нормальной окрестности U точки x_0. В частности, $\overline{B(x_0,\varepsilon_0)}$ — компакт в U. Предположим противное, а именно, что отображение f не может быть продолжено по непрерывности в точку x_0. Поскольку $\overline{B_R}$ — компакт, то предельное множество $C(f,x_0)$ непусто. Тогда найдутся две последовательности x_j и x_j', принадлежащие $B(x_0,\varepsilon_0)\setminus\{x_0\}$, $x_j\to x_0$, $x_j'\to x_0$, такие, что $d_*\left(f(x_j),\, f(x_j')\right)\geqslant a>0$ для всех $j\in\mathbb{N}$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что x_j и x_j' лежат внутри шара $B(x_0,\varepsilon_0)$. Полагаем $r_j=\max\left\{d(x_j,x_0),\, d(x_j',x_0)\right\}$. Заметим, что при достаточно малых r_j множество $\overline{B(x_0,r_j)}\setminus\{x_0\}$ является связным ввиду определения риманова многообразия $\mathbb{M}^n$. В таком случае соединим точки x_j и x_j' замкнутой кривой, лежащей в $\overline{B(x_0,r_j)}\setminus\{x_0\}$. Обозначим эту кривую символом C_j и рассмотрим конденсатор $E_j=(B(x_0,\varepsilon_0)\setminus\{x_0\},C_j)$. В силу открытости и непрерывности отображения f пара $f(E_j)$ также является конденсатором. Рассмотрим семейства кривых Γ_{E_j} и $\Gamma_{f(E_j)}$. Пусть Γ_j^* — семейство всех максимальных поднятий семейства кривых $\Gamma_{f(E_j)}$ при отображении f с началом в C_j, лежащих в $B(x_0,\varepsilon_0)\setminus\{x_0\}$. Заметим, что $\Gamma_j^*\subset\Gamma_{E_j}$. Поскольку $\Gamma_{f(E_j)}>f(\Gamma_j^*)$, мы получим:

$$M_p\left(\Gamma_{f(E_j)}\right)\leqslant M_p\left(f(\Gamma_j^*)\right)\leqslant M_p\left(f(\Gamma_{E_j})\right). \tag{2.7}$$

Заметим, что семейство Γ_{E_j} может быть разбито на два подсемейства:

$$\Gamma_{E_j}=\Gamma_{E_{j_1}}\cup\Gamma_{E_{j_2}}, \tag{2.8}$$

где $\Gamma_{E_{j_1}}$ — семейство всех кривых $\alpha\colon[a,\,c)\to B(x_0,\varepsilon_0)\setminus\{x_0\}$ с началом в C_j таких, что найдется $t_k\in[a,\,c):\alpha(t_k)\to x_0$ при $t_k\to c-0$; $\Gamma_{E_{j_2}}$ — семейство всех кривых $\alpha\colon[a,\,c)\to B(x_0,\varepsilon_0)\setminus\{x_0\}$ с началом в C_j таких, что найдется $t_k\in[a,\,c):\operatorname{dist}(\alpha(t_k),\partial B(x_0,\varepsilon_0))\to 0$ при $t_k\to c-0$.

В силу соотношений (2.7) и (2.8),

$$M_p\left(\Gamma_{f(E_j)}\right)\leqslant M_p(f(\Gamma_{E_{j_1}}))+M_p(f(\Gamma_{E_{j_2}})). \tag{2.9}$$

Заметим, что $M_p(f(\Gamma_{E_{j_1}}))=0$ ввиду леммы 2.1. Кроме того, заметим, что при достаточно больших $m\in\mathbb{N}$, $\Gamma_{E_{j_2}}>\Gamma\Big(S(x_0,r_j),S\Big(x_0,\varepsilon_0-\dfrac{1}{m}\Big),A\Big(x_0,r_j,\varepsilon_0-\dfrac{1}{m}\Big)\Big)$. Рассмотрим теперь кольцо $A_j=\Big\{x\in\mathbb{M}^n\,|\,r_j<d(x,x_0)<\varepsilon_0-\dfrac{1}{m}\Big\}$ и семейство функций

$$\eta_j(t)=\begin{cases}\psi(t)/I\Big(r_j,\varepsilon_0-\dfrac{1}{m}\Big), & t\in(r_j,\,\varepsilon_0-\frac{1}{m}),\\ 0, & t\in\mathbb{R}\setminus(r_j,\,\varepsilon_0-\frac{1}{m}).\end{cases}$$

Имеем:

$$\int\limits_{r_j}^{\varepsilon_0-\frac{1}{m}}\eta_j(t)dt=\frac{1}{I\left(r_j,\varepsilon_0-\frac{1}{m}\right)}\int\limits_{r_j}^{\varepsilon_0-\frac{1}{m}}\psi(t)dt=1.$$

Таким образом, по определению кольцевого (p,Q)-отображения в точке x_0 и условию (2.9) мы получаем, что

$$M_p(f(\Gamma_{E_j}))\leqslant\frac{1}{I(r_j,\varepsilon_0-\frac{1}{m})^p}\int\limits_{r_j<d(x,x_0)<\varepsilon_0}Q(x)\,\psi^p(d(x,x_0))\,dv(x),$$

откуда, переходя к пределу при $m\to\infty$, получим соотношение

$$M_p(f(\Gamma_{E_j}))\leqslant\mathcal{S}(r_j):=\frac{1}{I(r_j,\varepsilon_0)^p}\int\limits_{r_j<d(x,x_0)<\varepsilon_0}Q(x)\,\psi^p(d(x,x_0))\,dv(x).$$

В силу условия (2.2), $\mathcal{S}(r_j)\to 0$ при $j\to\infty$. Тогда ввиду (2.7) получаем, что

$$M_p\left(\Gamma_{f(E_j)}\right)\to 0,\qquad j\to\infty. \tag{2.10}$$

С другой стороны, рассмотрим семейство кривых $\Gamma_{f(E_j)}$ для конденсатора $f(E_j)$. Заметим, что подсемейство неспрямляемых кривых семейства $\Gamma_{f(E_j)}$ имеет нулевой модуль и что оставшееся подсемейство, состоящее из всех спрямляемых кривых семейства $\Gamma_{f(E_j)}$, состоит из кривых $\beta\colon [a,b) \to f(D\setminus\{x_0\})$, имеющих предел при $t\to b$ (здесь учтено, что $\overline{B_R}$ — компакт в $\mathbb{M}^n_*$). Заметим, что указанный предел принадлежит множеству $\partial f(A)$, где $A := B(x_0,\varepsilon_0)\setminus\{x_0\}$. Из сказанного следует, что

$$M_p(\Gamma_{f(E_j)}) = M_p(\Gamma(f(C_j), \partial f(A), f(A))). \tag{2.11}$$

Поскольку многообразие $\mathbb{M}^n_*$ связно, семейство кривых $\Gamma(K, f(C_j), \mathbb{M}^n_*)$ непусто. Кроме того, ввиду [2, теорема 1, § 46, п. I] произвольная кривая γ, соединяющая K и $f(C_j)$ в $\mathbb{M}^n_*$, имеет подкривую, соединяющую $\partial f(A)$ и $f(C_j)$ в $f(A)$. Иными словами, $\Gamma(K, f(C_j), \mathbb{M}^n_*) > \Gamma(\partial f(A), f(C_j), f(A))$.

Ввиду предложения 2.2 и того, что $d_*\Big(f(x_j),\, f(x_j')\Big) \geqslant a > 0$ для всех $j\in\mathbb{N}$ ввиду предположения, мы получим:

$$M_p(\Gamma(f(C_j), \partial f(A), f(A))) \geqslant M_p(\Gamma(f(C_j), \partial f(A), \mathbb{M}^n_*)) \geqslant$$
$$\geqslant M_p(\Gamma(f(C_j), K, \mathbb{M}^n_*)) \geqslant \frac{1}{C}\cdot\frac{\min\{\operatorname{diam} f(C_j), \operatorname{diam} K\}}{R^{1+p-n}} \geqslant \delta > 0. \tag{2.12}$$

Однако, неравенства (2.11) и (2.12) противоречат (2.10). Полученное противоречие опровергает предположение, что f не имеет предела при $x\to x_0$ в $\mathbb{M}^n_*$. □

3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1.1 сводится к утверждению леммы 2.2. Выберем в этой лемме $0 < \psi(t) = \dfrac{1}{\left(t\,\ln\frac{1}{t}\right)^{n/p}}$. На основании [11, предложение 3] для указанной функции будем иметь, что

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^p(d(x,x_0))\; dv(x) \;=\; \int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} \frac{Q(x)\,dv(x)}{\left(d(x,x_0)\ln\frac{1}{d(x,x_0)}\right)^n} = O\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

при $\varepsilon\to 0$. Заметим также, что при указанных выше ε выполнено $\psi(t)\geqslant \dfrac{1}{t\,\ln\frac{1}{t}}$, поэтому $I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt \;\geqslant \ln\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{\varepsilon_0}}$. Тогда выполнено соотношение (2.2). Таким образом, все условия леммы 2.2 выполнены и, значит, необходимое заключение вытекает из этой леммы. □

Элементом площади гладкой поверхности H на римановом многообразии $\mathbb{M}^n$ будем называть выражение вида

$$d\mathcal{A} = \sqrt{\det g^*_{\alpha\beta}}\, du^1\ldots du^{n-1},$$

где $g^*_{\alpha\beta}$ — риманова метрика на H, порожденная исходной римановой метрикой g_{ij} согласно соотношению

$$g^*_{\alpha\beta}(u) = g_{ij}(x(u))\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}. \tag{3.1}$$

Здесь индексы α и β меняются от 1 до $n-1$, а $x(u)$ обозначает параметризацию поверхности H такую, что $\nabla_u x\neq 0$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть $n\geqslant 2$, $p\in(n-1,n]$, $\mathbb{M}^n_*$ — связно, является n-регулярным по Альфорсу, кроме того, в $\mathbb{M}^n_*$ выполнено $(1;p)$-неравенство Пуанкаре. Пусть также D — область в $\mathbb{M}^n$, $B_R\subset\mathbb{M}^n_*$ — некоторый фиксированный шар радиуса R такой, что $\overline{B_R}$ — компакт в $\mathbb{M}^n_*$, $K\subset\mathbb{M}^n_*$ — некоторый континуум, $f\colon D\setminus\{x_0\}\to B_R\setminus K$ — открытое дискретное кольцевое (p,Q)-отображение в точке $x_0\in D$. Если при некотором $\delta(x_0)>0$ выполняется равенство*

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\delta(x_0)} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)} = \infty, \tag{3.2}$$

где $q_{x_0}(r) := \dfrac{1}{r^{n-1}} \int\limits_{S(x_0,r)} Q(x)\,d\mathcal{A}$, *то* f *имеет непрерывное продолжение* $f\colon D \to \overline{B_R}$ *(непрерывность понимается в смысле геодезического расстояния* d_* *в* $\mathbb{M}^n_*$*).*

Доказательство. Достаточно показать, что условие (3.2) влечет выполнение условия (2.2) леммы 2.1. Можно считать, что $B(x_0, \delta(x_0))$ лежит в нормальной окрестности точки x_0. Рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}, & t \in (r_1, r_2),\\ 0, & t \notin (r_1, r_2). \end{cases}$$

Заметим теперь, что требование вида (2.1) выполняется при $\varepsilon_0 = \delta(x_0)$ и всех достаточно малых ε. Далее установим неравенство

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\delta(x_0)} Q(x)\psi^p(d(x,x_0))\,dv(x) \leqslant C \cdot \int\limits_{\varepsilon}^{\delta(x_0)} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \tag{3.3}$$

при некоторой постоянной $C > 0$. Для этого покажем, что к левой части соотношения (3.3) применим аналог теоремы Фубини. Рассмотрим в окрестности точки $x_0 \in S(z_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ локальную систему координат $z^1, \dots, z^n$, $n-1$ базисных векторов которой взаимно ортогональны и лежат в плоскости, касательной к сфере в точке x_0, а последний базисный вектор перпендикулярен этой плоскости. Пусть $r, \theta^1, \dots, \theta^{n-1}$ — указанные координаты точки $x = x(\theta)$ в $\mathbb{R}^n$. Заметим, что $n-1$ приращений переменных $z^1, \dots, z^{n-1}$ вдоль сферы при фиксированном r равны $dz^1 = rd\theta^1, \dots, dz^{n-1} = rd\theta^{n-1}$, а приращение переменной z^n по r равно $dz^n = dr$. В таком случае

$$dv(x) = \sqrt{\det g_{ij}(x)}\, r^{n-1}\, dr d\theta^1 \dots d\theta^{n-1}.$$

Рассмотрим параметризацию сферы $S(0,r)$ $x = x(\theta)$, $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^{n-1})$, $\theta_i \in (-\pi, \pi]$. Заметим, что $\partial x^\alpha/\partial\theta^\beta = r$ при $\alpha = \beta$ и $\partial x^\alpha/\partial\theta^\beta = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, \dots, n-1$. Тогда в обозначениях соотношения (3.1) имеем: $g^*_{\alpha\beta}(\theta) = g_{\alpha\beta}(x(\theta))r^2$,

$$d\mathcal{A} = \sqrt{\det\, g_{\alpha\beta}(x(\theta))}\, r^{n-1} d\theta^1 \dots d\theta^{n-1}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)} = \int\limits_{S(x_0,r)} Q(x)\psi^p(d(x,x_0))\,d\mathcal{A} =$$

$$= \psi^p(r) r^{n-1} \cdot \int\limits_{\Pi} \sqrt{\det g_{\alpha\beta}(x(\theta))}\, Q(x(\theta))\, d\theta^1 \dots d\theta^{n-1}, \tag{3.4}$$

где $\Pi = (-\pi, \pi]^{n-1}$ — прямоугольная область изменения параметров $\theta^1, \dots, \theta^{n-1}$. Напомним, что в нормальной системе координат геодезические сферы переходят в обычные сферы того же радиуса с центром в нуле, а пучок геодезических, исходящих из точки многообразия, переходит в пучок радиальных отрезков в $\mathbb{R}^n$ (см. [17, леммы 5.9 и 6.11]), так что кольцу $\{x \in \mathbb{M}^n \mid \varepsilon < d(x, x_0) < \delta(x_0)\}$ соответствует та часть $\mathbb{R}^n$, в которой $r \in (\varepsilon, \delta(x_0))$. Согласно сказанному выше, применяя классическую теорему Фубини (см., например, [7, раздел 8.1, гл. III]),

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\delta(x_0)} Q(x)\psi^p(d(x,x_0))\,dv(x) = \int\limits_{\varepsilon}^{\delta(x_0)} \int\limits_{\Pi} \sqrt{\det g_{ij}(x)}\, Q(x)\psi^p(r) r^{n-1}\, d\theta^1 \dots d\theta^{n-1} dr. \tag{3.5}$$

Поскольку в нормальных координатах тензорная матрица g_{ij} сколь угодно близка к единичной в окрестности данной точки, то

$$C_2 \det\, g_{\alpha\beta}(x) \leqslant \det\, g_{ij}(x) \leqslant C_1 \det\, g_{\alpha\beta}(x).$$

Учитывая сказанное и сравнивая (3.4) и (3.5), приходим к соотношению (3.3). Но тогда также

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\delta(x_0)} Q(x)\psi^p(d(x,x_0))dv(x) = o(I^p(\varepsilon,\delta(x_0)))$$

ввиду соотношения (3.2). Утверждение теоремы следует теперь из леммы 2.2. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасьева Е. С., Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Об отображениях в классах Орлича—Соболева на римановых многообразиях// Укр. мат. вестн. — 2011. — *8*, № 3. — С. 319–342.
2. *Куратовский К.* Топология. Т. 2. — М.: Мир, 1969.
3. *Мазья В. Г.* Пространства Соболева. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
4. *Миклюков В. М.* Об устранимых особенностях квазиконформных отображений в пространстве// Докл. АН СССР. — 1969. — *188*, № 3. — С. 525–527.
5. *Миклюков В. М.* Граничные свойства n-мерных квазиконформных отображений// Докл. АН СССР. — 1970. — *193*, № 3. — С. 525–527.
6. *Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Слабо плоские пространства и границы в теории отображений// Укр. мат. вестн. — 2007. — *4*, № 2. — С. 199–234.
7. *Сакс С.* Теория интеграла. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1949.
8. *Севостьянов Е. А.* Обобщение одной леммы Е. А. Полецкого на классы пространственных отображений// Укр. мат. ж. — 2009. — *61*, № 7. — С. 969–975.
9. *Севостьянов Е. А.* К теории устранения особенностей отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2010. — *4*, №1. — С. 159–174.
10. *Севостьянов Е. А.* О некоторых свойствах обобщенных квазиизометрий с неограниченной характеристикой// Укр. мат. ж. — 2011. — *63*, №3. — С. 385–398.
11. *Смоловая Е. С.* Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах// Укр. мат. ж. — 2012. — *62*, № 5. — С. 682–689.
12. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Т. 1. — М.: Наука, 1976.
13. *Adamowicz T., Shanmugalingam N.* Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families// Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. — 2010. — *35*. — С. 609–626.
14. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space// Int. J. Math. Math. Sci. — 2003. — *22*. — С. 1397–1420.
15. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion// Acta Math. — 1957. — *98*. — С. 171–219.
16. *Heinonen J.* Lectures on analysis on metric spaces. — New-York: Springer, 2001.
17. *Lee J. M.* Riemannian manifolds: an introduction to curvature. — New-York: Springer, 1997.
18. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Distortion and singularities of quasiregular mappings// Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. — 1970. — *465*. — С. 1–13.
19. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. — New-York: Springer, 2009.
20. *Rickman S.* Quasiregular mappings. — Berlin etc.: Springer, 1993.
21. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. — Berlin, etc.: Springer, 1971.

Денис Петрович Ильютко
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, д. 1
E-mail: ilyutko@yandex.ru

Евгений Александрович Севостьянов
Житомирский государственный университет им. И. Франко
Украина, 10008, г. Житомир, ул. Велика Бердичівська, 40
E-mail: esevostyanov2009@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-266-277 UDC 517.5

Removal of Isolated Singularities of Generalized Quasiisometries on Riemannian Manifolds

© 2017 **D. P. Ilyutko, E. A. Sevostyanov**

Abstract. For mappings with unbounded characteristics we prove theorems on removal of isolated singularities on Riemannian manifolds. We prove that if a mapping satisfies certain inequality of absolute values and its quasiconformity characteristic has a majorant of finite average oscillation at a fixed singular point, then it has a limit at this point.

REFERENCES

1. E. S. Afanas'eva, V. I. Ryazanov, and R. R. Salimov, "Ob otobrazheniyakh v klassakh Orlicha—Soboleva na rimanovykh mnogoobraziyakh" [On mappings in the Orlicz–Sobolev classes on Riemannian manifolds], *Ukr. mat. vestn.* [Ukr. Math. Bull.], 2011, **8**, No. 3, 319–342 (in Russian).
2. K. Kuratovskiy, *Topologiya. T. 2* [Topology. V. 2], Mir, Moscow, 1969 (in Russian).
3. V. G. Maz'ya, *Prostranstva Soboleva* [Sobolev Spaces], LGU, Leningrad, 1985 (in Russian).
4. V. M. Miklyukov, "Ob ustranimykh osobennostyakh kvazikonformnykh otobrazheniy v prostranstve" [On removable singularities of quasiconformal mappings in the space], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **188**, No. 3, 525–527 (in Russian).
5. V. M. Miklyukov, "Granichnye svoystva n-mernykh kvazikonformnykh otobrazheniy" [Boundary properties of n-dimensional quasiconformal mappings], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1970, **193**, No. 3, 525–527 (in Russian).
6. V. I. Ryazanov and R. R. Salimov, "Slabo ploskie prostranstva i granitsy v teorii otobrazheniy" [Weakly flat spaces and boundaries in the theory of mappings], *Ukr. mat. vestn.* [Ukr. Math. Bull.], 2007, **4**, No. 2, 199–234 (in Russian).
7. S. Saks, *Teoriya integrala* [Theory of Integral], Izd-vo inostrannoy literatury, Moscow, 1949 (in Russian).
8. E. A. Sevost'yanov, "Obobshchenie odnoy lemmy E. A. Poletskogo na klassy prostranstvennykh otobrazheniy" [Generalization of one Poletskii lemma to classes of space mappings], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 2009, **61**, No. 7, 969–975 (in Russian).
9. E. A. Sevost'yanov, "K teorii ustraneniya osobennostey otobrazheniy s neogranichennoy kharakteristikoy kvazikonformnosti" [To the theory of removable mappings with unbounded quasiconformity characteristics], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2010, **4**, No. 1, 159–174 (in Russian).
10. E. A. Sevost'yanov, "O nekotorykh svoystvakh obobshchennykh kvaziizometriy s neogranichennoy kharakteristikoy" [On some properties of generalized quasiisometries with unbounded characteristics], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 2011, **63**, No. 3, 385–398 (in Russian).
11. E. S. Smolovaya, "Granichnoe povedenie kol'tsevykh Q-gomeomorfizmov v metricheskikh prostranstvakh" [Boundary behavior of ring Q-homeomorphisms in metric spaces], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 2012, **62**, No. 5, 682–689 (in Russian).
12. B. V. Shabat, *Vvedenie v kompleksnyy analiz. T. 1* [Introduction to Complex Analysis. V. 1], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
13. T. Adamowicz and N. Shanmugalingam, "Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families," *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 2010, **35**, 609–626.
14. C. J. Bishop, V. Ya. Gutlyanskii, O. Martio, and M. Vuorinen, "On conformal dilatation in space," *Int. J. Math. Math. Sci.*, 2003, **22**, 1397–1420.
15. B. Fuglede, "Extremal length and functional completion," *Acta Math.*, 1957, **98**, 171–219.
16. J. Heinonen, *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, Springer, New-York, 2001.
17. J. M. Lee, *Riemannian Manifolds: an Introduction to Curvature*, Springer, New-York, 1997.
18. O. Martio, S. Rickman, and J. Väisälä, "Distortion and singularities of quasiregular mappings," *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1.*, 1970, **465**, 1–13.

19. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, and E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory*, Springer, New-York, 2009.
20. S. Rickman, *Quasiregular Mappings*, Springer, Berlin etc., 1993.
21. J. Väisälä, *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings*, Springer, Berlin, etc., 1971.

D. P. Ilyutko
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics
Vorob'evy Gory, 119899 Moscow, Russia
E-mail: ilyutko@yandex.ru

E. A. Sevostyanov
Zhytomyr Franko State University
40 Velika Berdichivska, 10008 Zhytomyr, Ukraine
E-mail: esevostyanov2009@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 2 (2017). С. 278–315

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-278-315 УДК 517.984.5

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ПОЛУТОРАЛИНЕЙНОЙ ФОРМОЙ

© 2017 г. **Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ, А. Р. ЯКУБОВА**

Аннотация. На базе обобщенной формулы Грина для полуторалинейной несимметрической формы для оператора Лапласа рассмотрены спектральные несамосопряженные задачи, как близкие к классическим, так и другие, которые встречаются при исследовании задач гидродинамики, дифракции, задач с поверхностной диссипацией энергии. Устанавливаются свойства решений этих задач. Изучаются также начально-краевые задачи, порождающие исследованные спектральные задачи, доказываются теоремы о корректной разрешимости этих задач на произвольном промежутке времени.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Данная работа является подробным изложением докладов авторов на международных конференциях в Абрау-Дюрсо и Ласпи—Батилимане (см. [22, 23], а также [17, гл. 6]). Исходным толчком, побудившим авторов заняться исследованиями спектральных и начально-краевых задач в липшицевых областях, стали работы М. С. Аграновича (см. [1, 2, 37, 38]) и его лекции в ежегодной Крымской осенней математической школе в Батилимане.

Общие подходы, которые применялись при исследовании этих задач, побуждали рассматривать их на базе абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств или полуторалинейных форм, а также на базе соответствующих обобщенных формул Грина для конкретных пространств, возникающих в задачах математической физики (см. [10, 11, 14, 16, 17]).

В данной работе рассматриваются несамосопряженные спектральные и начально-краевые задачи, порожденные обобщенной формулой Грина для оператора Лапласа. Общие построения, проведенные здесь, могут быть применены и к другим задачам, в частности, к задачам гидродинамики, теории упругости, дифракции и т. д., а также для аналогичных абстрактных задач, порожденных абстрактной формулой Грина для полуторалинейных форм.

В первом разделе напоминаются общие положения, связанные с выводом абстрактной формулы Грина для ограниченных и равномерно аккретивных полуторалинейных форм.

Во втором разделе формулируется постановка задачи на базе обобщенной формулы Грина для оператора Лапласа. Рассматриваются слабые решения полной краевой задачи Неймана—Ньютона, приводится общая формула для ее решения (см. (2.32)) с помощью операторов двух вспомогательных краевых задач.

В третьем разделе рассматриваются несамосопряженные спектральные задачи, близкие к классическим задачам Дирихле, Неймана—Ньютона, Стеклова, Стефана. Для этих задач доказываются теоремы о структуре спектра, свойствах корневых (собственных и присоединенных) функций, о локализации спектра в комплексной области. Наконец, аналогичные вопросы исследуются для других классов возмущенных спектральных задач. Это задачи С. Крейна, Аграновича, Чуешова.

В четвертом разделе изучаются начально-краевые задачи, порожденные полуторалинейной формой для оператора Лапласа и порождающие спектральные задачи третьего раздела. Для этих задач доказываются теоремы существования сильных по времени решений, указываются классы функций, в которых выполняются уравнения и граничные условия задачи.

Данная работа написана при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-21-00066, выполняемый в Воронежском университете).

1. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и полуторалинейных форм

1.1. Формула Грина для тройки гильбертовых пространств. Пусть F и E — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_F$ и $(\cdot,\cdot)_E$ соответственно, причем F плотно вложено в E, т. е. F — плотное линейное подмножество в E и существует константа $a>0$ такая, что

$$\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F \qquad \forall\, u\in F. \tag{1.1}$$

Говорят, что пространства F и E с указанными свойствами образуют *гильбертову пару* $(F;E)$, и обозначают это символом $F\hookrightarrow E$.

По любой паре $(F;E)$ единственным образом определяется порождающий оператор A гильбертовой пары, который обладает следующими свойствами:

$$(u,v)_F = (A^{1/2}u, A^{1/2}v)_E = \langle u, Av\rangle_E \quad \forall\, u,v\in F. \tag{1.2}$$

Здесь $\langle u, Av\rangle_E$ — значение функционала $Av\in F^*$ на элементе $u\in F$, $\mathcal{D}(A)=F$, $\mathcal{R}(A)=F^*$.

Пусть теперь $\{E,(\cdot,\cdot)_E\},\{F,(\cdot,\cdot)_F\},\ \{G,(\cdot,\cdot)_G\}$ — сепарабельные гильбертовы пространства с введенными в них скалярными произведениями. Будем считать, что для этой тройки пространств выполнены следующие условия:

1°. Плотность вложения:

$$F\hookrightarrow E, \quad ||u||_E \leqslant a||u||_F \qquad \forall\, u\in F.$$

2°. На F задан оператор γ, называемый оператором следа и действующий из F в G, причем

$$\gamma : F\to \mathcal{R}(\gamma) =: G_+ \hookrightarrow G, \quad ||\gamma u||_G \leqslant b||u||_F \quad \forall\, u\in F.$$

3°. Ядро оператора γ

$$\ker\gamma =: N\hookrightarrow E, \quad \|u\|_E \leqslant c\|u\|_F \quad \forall\, u\in F.$$

Типичным примером, когда выполнены условия 1°–3°, является тройка пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$, $\Gamma := \partial\Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — область с липшицевой границей. При этом

$$\gamma u := u|_\Gamma \quad \forall\, u \in H^1(\Omega), \quad \ker\gamma = H_0^1(\Omega). \tag{1.3}$$

Теорема 1.1 (см. [16]). *Пусть для тройки пространств E, F и G (с введенными на них скалярными произведениями) и для оператора следа γ выполнены условия 1°–3°. Тогда существуют абстрактное дифференциальное выражение $Lu \in F^*$ и абстрактная производная по внешней нормали $\partial u \in (G_+)^*$ такие, что имеет место абстрактная формула Грина (аналог первой формулы Грина для оператора Лапласа)*

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G \quad \forall\, \eta, u\ \in F. \tag{1.4}$$

При этом ∂u по элементам $u \in F$ и $Lu \in F^*$ определяются однозначно.

Замечание 1.1. В приложениях дифференциальное выражение $Lu \in F^*$, как правило, определено из физического смысла задачи, а тогда и производная по внешней нормали $\partial u \in (G_+)^*$ также определена однозначно. Обсуждение этой задачи см. в [42], а также в [16].

Замечание 1.2. Классическим примером, когда в качестве дифференциального выражения выбрано $Lu := u - \Delta u$, $u \in H^1(\Omega)$, является обобщенная формула Грина для оператора Лапласа ($\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — область с липшицевой границей):

$$\begin{gathered}(\eta, u)_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega (\eta\bar{u} + \nabla\eta\cdot\nabla\bar{u})\, d\Omega = \langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma)} \\ \forall\, \eta, u \in H^1(\Omega),\end{gathered} \tag{1.5}$$

$$u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \quad \gamma\eta \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \partial u \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

1.2. Полуторалинейные ограниченные формы. Функцию $\Phi(\eta, u) : F \times F \to \mathbb{C}$, определенную на комплексном гильбертовом пространстве F, называют *полуторалинейной формой,* если она линейна по η и антилинейна по u:

$$\Phi(c_1\eta_1 + c_2\eta_2, u) = c_1\Phi(\eta_1, u) + c_2\Phi(\eta_2, u),$$

$$\Phi(\eta, c_1u_1 + c_2u_2) = \bar{c_1}\Phi(\eta, u_1) + \bar{c_2}\Phi(\eta, u_2).$$

Простейшим примером полуторалинейной формы на F является скалярное произведение $(\eta, u)_F$.

Полуторалинейная форма называется *ограниченной* на F, если

$$|\Phi(\eta, u)| \leqslant c_1\, \|\,\eta\|_F \cdot \|u\|_F \quad \forall\, \eta, u \in F, \quad c_1 > 0. \tag{1.6}$$

Будем далее считать, что имеется гильбертова пара пространств $(F; E)$, а потому имеет место и оснащение

$$F \hookrightarrow E \hookrightarrow F^*.$$

Каждой ограниченной форме $\Phi(\eta, u)$ однозначно отвечает линейный ограниченный оператор $A : F \to F^*$, с помощью которого форма допускает представление

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Au\rangle_E \quad \forall\, \eta, u \in F, \quad \|A\|_{F\to F^*} \leqslant c_1. \tag{1.7}$$

Форма

$$\Phi^*(\eta, u) := \overline{\Phi(u, \eta)} \tag{1.8}$$

называется сопряженной к форме $\Phi(\eta, u)$. Если выполнено условие

$$\Phi^*(\eta, u) = \Phi(\eta, u) \quad \forall\, \eta, u \in F, \tag{1.9}$$

то форма $\Phi(\eta, u)$ называется эрмитовой или симметрической.

Сопряженной форме $\Phi^*(\eta, u)$ однозначно отвечает сопряженный ограниченный оператор $A^* : F \to F^*$:

$$\Phi^*(\eta, u) = \langle \eta, A^*u\rangle_E. \tag{1.10}$$

Эрмитовой (симметрической) форме отвечает самосопряженный оператор, действующий из F на F^*:

$$\Phi(\eta,u)=\langle\eta,Au\rangle_E=\Phi^*(\eta,u)=\overline{\Phi(u,\eta)}=\overline{\langle u,A\eta\rangle}_E \quad \forall\,\eta,u\in F. \tag{1.11}$$

Для простейшего примера ограниченной полуторалинейной формы $\Phi_0(\eta,u)=(\eta,u)_F$ получаем, что оператором этой формы является оператор A гильбертовой пары $(F;E)$, который самосопряжен в смысле определения (1.11), причем норма этого оператора равна единице.

Форма $\Phi(\eta,u)$ и отвечающий ей оператор A называются *равномерно аккретивными* (сильно коэрцитивными) в пространстве F, если

$$\mathrm{Re}\,\Phi(u,u)=\mathrm{Re}\,\langle u,Au\rangle_E\geqslant c_2\|u\|_F^2,\quad c_2>0\quad\forall\,u\in F. \tag{1.12}$$

(Это соотношение иногда называют также усиленным неравенством Гординга.) Равномерно аккретивная форма является *ограниченной снизу*:

$$|\Phi(u,u)|\geqslant c_2\|u\|_F^2\quad c_2>0\;\forall\,u\in F. \tag{1.13}$$

Лемма 1.1 (Лакс, Мильграм, см., например, [42]). *Ограниченный на F равномерно аккретивный оператор $A:F\to F^*$, отвечающий форме $\Phi(\eta,u)$, имеет ограниченный обратный оператор $A^{-1}:F^*\to F$,*

$$\|A^{-1}\|_{F^*\to F}\leqslant c_2^{-1}. \tag{1.14}$$

Пусть ограниченная и равномерно аккретивная форма $\Phi(\eta,u)$ является несимметрической:

$$\Phi(\eta,u)\neq\Phi^*(\eta,u). \tag{1.15}$$

Введем в рассмотрение симметрические формы:

$$\begin{aligned}\Phi_R(\eta,u)&:=\frac12\Big[\Phi(\eta,u)+\Phi^*(\eta,u)\Big]=\Phi_R^*(\eta,u),\\ \Phi_I(\eta,u)&:=\frac1{2i}\Big[\Phi(\eta,u)-\Phi^*(\eta,u)\Big]=\Phi_I^*(\eta,u),\end{aligned} \tag{1.16}$$

называемые *вещественной* и *мнимой частями* формы $\Phi(\eta,u)$, так как

$$\Phi(\eta,u)=\Phi_R(\eta,u)+i\Phi_I(\eta,u). \tag{1.17}$$

Для $\Phi_R(\eta,u)$ имеем неравенства

$$c_2\|u\|_F^2\leqslant\Phi_R(u,u)=\mathrm{Re}\,\Phi(u,u)=:\|u\|_{F_0}^2\leqslant c_1\|u\|_F^2\quad\forall\,u\in F. \tag{1.18}$$

Отсюда следует, что в пространстве F можно ввести норму $\|u\|_{F_0}$, эквивалентную норме $\|u\|_F$, а также соответствующее скалярное произведение.

Тогда возникает гильбертова пара пространств $(F_0;E)$. Обозначим через A_0 оператор гильбертовой пары. Для него имеем тождество

$$(\eta,u)_{F_0}=(A_0^{1/2}\eta,A_0^{1/2}u)_E=\langle\eta,A_0u\rangle_E\quad\forall\,\eta,u\in F_0=F. \tag{1.19}$$

Для $\Phi_I(\eta,u)$ в силу предыдущего имеем оценку

$$\begin{aligned}|\Phi_I(\eta,u)|&\leqslant|\Phi(\eta,u)|\leqslant c_1\|\eta\|_F\cdot\|u\|_F\leqslant c_1c_2^{-1}\|\eta\|_{F_0}\|u\|_{F_0}=\\ &=c_1c_2^{-1}\|A_0^{1/2}\eta\|_E\cdot\|A_0^{1/2}u\|_E\quad\forall\,\eta,u\in F_0=F.\end{aligned} \tag{1.20}$$

Отсюда в силу симметричности $\Phi_I(\eta,u)$ выводится (см. [16, 25]), что

$$\begin{gathered}\Phi_I(\eta,u)=(QA_0^{1/2}\eta,A_0^{1/2}u)_E=(A_0^{1/2}\eta,QA_0^{1/2}u)_E,\\ \forall\,\eta,u\in F,\ Q=Q^*\in\mathcal{L}(E),\end{gathered} \tag{1.21}$$

откуда следует представление

$$A=A_0^{1/2}(I-iQ)A_0^{1/2},\quad A\in\mathcal{L}(F_0,F_0^*), \tag{1.22}$$

а также

$$A^{-1}=A_0^{-1/2}(I-iQ)^{-1}A_0^{-1/2},\quad A^{-1}\in\mathcal{L}(F_0^*,F_0). \tag{1.23}$$

1.3. Абстрактная формула Грина для полуторалинейных форм. Представление (1.22) для оператора A формы $\Phi(\eta, u)$ позволяет получить обобщение обсуждавшегося в пункте 1.1 варианта, когда имелась тройка пространств E, F и G, а также оператор следа γ. Именно, теперь можно рассмотреть случай, когда вместо пространства F с введенным на нем скалярным произведением $(\eta, u)_E = \Phi_0(\eta, u)$ имеется форма $\Phi(\eta, u)$, удовлетворяющая в пространстве F общим условиям (1.6) и (1.12). Соответствующую формулу Грина назовем *абстрактной формулой Грина для полуторалинейной формы* $\Phi(\eta, u)$.

Итак, пусть выполнены условия 1°–3°, а также условия (1.6) и (1.12). Тогда для пространства $F_0 = F$ с нормой (1.18) и соответствующим скалярным произведением

$$\Phi_0(\eta, u) := (\eta, u)_{F_0} = \Phi_R(\eta, u) \tag{1.24}$$

имеет место абстрактная формула Грина

$$\Phi_0(\eta, u) = \langle \eta, L_0 u\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial_0 u\rangle_G \quad \forall\, \eta, u \in F_0. \tag{1.25}$$

При этом

$$F_0 = N_0 \oplus M_0, \quad N_0 = \ker \gamma, \qquad M_0 := \ker L_0, \tag{1.26}$$

а $L_0 u$ и $\partial_0 u$ — абстрактное дифференциальное выражение и производная по внешней нормали, причем $\partial_0 u$ однозначно определяется по $u \in F_0$ и выбранному $L_0 u \in F_0^*$.

Наша цель — получить такую формулу Грина для формы $\Phi(\eta, u)$, которая бы имела вид, близкий к (1.25), и при $Q \to 0$ (см. (1.21), (1.22)), когда $\Phi(\eta, u) \to \Phi_0(\eta, u) = \Phi_R(\eta, u)$, переходила бы в формулу (1.25). Иными словами, желательно получить формулу Грина с непрерывной зависимостью от $Q = Q^* \in \mathcal{L}(E)$.

При таком построении теперь вместо ортогонального разложения (1.26) для несимметрической формы $\Phi(\eta, u)$ следует воспользоваться прямым разложением

$$F_0 = N_0 \oplus M_0 = N(\dot{+})M, \quad N = N_0 = \ker \gamma, \quad M := \ker L, \tag{1.27}$$

где Lu — дифференциальное выражение, отвечающее форме $\Phi(\eta, u)$.

Теорема 1.2 (см. [16]). *Пусть выполнены условия* 1°–3° *пункта* 1.1*, а также условия* (1.6) *и* (1.12). *Пусть, кроме того, подпространства N и M из* (1.27) *выбраны таким образом, чтобы*

$$\Phi(\eta, u) = 0 \quad \forall\, \eta \in N = N_0 = \ker \gamma \quad \forall\, u \in M = \ker L. \tag{1.28}$$

Тогда имеет место следующая формула Грина:

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Lu\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G \quad \forall\, \eta, u \in F_0 = F, \tag{1.29}$$

$$Lu \in F_0^*, \qquad \partial u \in (G_+)^*,$$

причем ∂u определяется по элементам $u \in F_0$ и $Lu \in F_0^*$ однозначно.

Замечание 1.3. При доказательстве теоремы 1.2 в [16] установлено также, что при $Q \to 0$ (см. (1.22)) дифференциальное выражение Lu переходит в $L_0 u$ из (1.25), а потому и ∂u переходит в $\partial_0 u$. Кроме того, подпространство M из (1.27) переходит в $M_0 = \ker L_0$, а прямая сумма из (1.27) переходит в ортогональную сумму подпространств N_0 и M_0. Заметим еще, что при условии (1.28) косые проекторы на подпространства (1.27) однозначно выражаются через ортопроекторы из (1.26) и при $Q \to 0$ переходят в них.

2. Краевые задачи, порожденные полуторалинейной несимметрической формой на основе оператора Лапласа

2.1. Формула Грина для невозмущенной задачи. Рассмотрим тройку гильбертовых пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$, $\Gamma := \partial\Omega$, и обычный оператор следа $\gamma u := u\,|_\Gamma$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — область с липшицевой границей.

Тогда, как было установлено выше, в этом случае имеет место следующая обобщенная формула Грина, порожденная оператором Лапласа:

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega (\eta\bar{u} + \nabla\eta \cdot \nabla\bar{u})\, d\Omega = \langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma)} \quad \forall\, \eta, u \in H^1(\Omega), \tag{2.1}$$

$$u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \quad \gamma\eta \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{2.2}$$

Здесь слева в (2.1) стоит скалярное произведение в $H^1(\Omega)$, и оно является симметрической полуторалинейной формой в $H^1(\Omega):\ \Phi_0(\eta, u) := (\eta, u)_{H^1(\Omega)}$.

На основе этой формулы Грина можно исследовать слабые решения классических краевых задач для оператора Лапласа, т. е. задачи Дирихле, Неймана и другие, а также соответствующие спектральные и начально-краевые задачи.

Целью дальнейших рассмотрений является исследование подобных задач в несимметрическом случае, когда вместо скалярного произведения $(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \Phi_0(\eta, u)$ имеется полуторалинейная несимметрическая форма $\Phi_\varepsilon(\eta, u)$, определенная на пространстве $H^1(\Omega)$, ограниченная на нем и являющаяся равномерно аккретивной. Параметр $\varepsilon \in \mathbb{R}$ будет введен для удобства дальнейших рассмотрений, причем все изучаемые задачи при $\varepsilon \to 0$ будут переходить в задачи, отвечающие соответствующим невозмущенным задачам.

Отметим еще, что в (2.1) дифференциальное выражение имеет вид $L_0 u = u - \Delta u$, а производная по внешней нормали $\partial_0 u := (\partial u/\partial n)_\Gamma$.

2.2. О формуле Грина для возмущенной задачи. Рассмотрим дифференциальное выражение

$$L_\varepsilon u := u - \Delta u + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{\partial u}{\partial x_k}, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1, m}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

а также соответствующую обобщенную формулу Грина для полуторалинейной формы. Как было видно из предыдущих рассмотрений, и дифференциальное выражение, и вид полуторалинейной формы можно выбирать неоднозначно, а краевые, спектральные и начально-краевые задачи затем формулировать на основе этой выбранной формулы Грина.

При дальнейшем рассмотрении задач, основываясь на тождествах

$$\int_\Omega \eta \frac{\partial \bar u}{\partial x_k} d\Omega = -\int_\Omega \frac{\partial \eta}{\partial x_k} \bar u d\Omega + \int_\Gamma \cos(\widehat{\vec n, \vec e_k}) \eta \bar u \, d\Gamma \quad \forall\, \eta, u \in H^1(\Omega) \tag{2.4}$$

и учитывая вид $L_\varepsilon u$ из (2.3), на основе формулы (2.1) приходим к выводу, что имеет место следующая обобщенная формула Грина для полуторалинейной формы:

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(\eta, u) &:= (\eta, u)_{H^1(\Omega)} + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_k \left[\left(\eta, \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)_{L_2(\Omega)} - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}, u \right)_{L_2(\Omega)} \right] = \\ &= \langle \eta, L_\varepsilon u \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \partial_\varepsilon u \rangle_{L_2(\Gamma)} \quad \forall\, \eta, u \in H^1(\Omega), \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\partial_\varepsilon u := \partial_0 u - \varepsilon \sigma \gamma u, \quad \sigma := \sum_{k=1}^{m} c_k \cos(\widehat{\vec n, \vec e_k}), \quad \partial_\varepsilon u \in H^{-1/2}(\Gamma), \tag{2.6}$$

где $L_\varepsilon u \in (H^1(\Omega))^*$ — дифференциальное выражение (2.3), а $\partial_0 u := (\partial u/\partial n)_\Gamma$.
Все дальнейшие задачи будем формулировать на базе этой формулы Грина.

Отметим еще, что $L_\varepsilon u = L_0 u + L_1 u$, где $L_1 u$ — дифференциальное выражение первого порядка, в то время как $L_0 u = u - \Delta u$ — дифференциальное выражение второго порядка.

Проверим, что полуторалинейная форма $\Phi_\varepsilon(\eta, u)$ из (2.5) ограничена в $H^1(\Omega)$ и равномерно аккретивна. Имеем

$$\begin{aligned} \Big| \left(\eta, \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)_{L_2(\Omega)} - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}, u \right)_{L_2(\Omega)} \Big| &\leqslant \|\eta\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|\frac{\partial u}{\partial x_k}\|_{L_2(\Omega)} + \\ + \|\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|u\|_{L_2(\Omega)} &\leqslant 2\|\eta\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|u\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Поэтому

$$\Big| \Phi_\varepsilon(\eta, u) \Big| \leqslant \tilde c_1 \|\eta\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \tilde c_1 = \left(1 + 4|\varepsilon| \sum_{k=1}^{m} |c_k| \right), \tag{2.8}$$

т. е. $\Phi_\varepsilon(\eta,u)$ ограничена в $H^1(\Omega)$. Далее, сопряженная форма имеет вид

$$\Phi^*(\eta,u)=\overline{\Phi(u,\eta)}=(\eta,u)_{H^1(\Omega)}-2\varepsilon\sum_{k=1}^m c_k\left[\left(\eta,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)_{L_2(\Omega)}-\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_k},u\right)_{L_2(\Omega)}\right]. \tag{2.9}$$

Отсюда и из (2.5) получаем, что

$$\mathrm{Re}\,\Phi_\varepsilon(u,u)=\frac12\left[\Phi_\varepsilon(u,u)+\Phi^*_\varepsilon(u,u)\right]=(u,u)_{H^1(\Omega)}=\|u\|^2_{H^1(\Omega)}, \tag{2.10}$$

т. е. $\Phi_\varepsilon(u,u)$ равномерно аккретивна в $H^1(\Omega)$ с константой $c_2=1$.

Тогда из общей теории таких полуторалинейных форм следует, во-первых, что форме $\Phi_\varepsilon(\eta,u)$ однозначно отвечает оператор $A_\varepsilon : H^1(\Omega)\to(H^1(\Omega))^*$, связанный с формой соотношениями

$$\Phi_\varepsilon(\eta,u)=\langle\eta,A_\varepsilon u\rangle_{L_2(\Omega)}\qquad\forall\,\eta,u\in H^1(\Omega),\quad A_\varepsilon u\in(H^1(\Omega))^*, \tag{2.11}$$

а во-вторых, этот оператор имеет ограниченный обратный

$$A_\varepsilon^{-1}:(H^1(\Omega))^*\to H^1(\Omega) \tag{2.12}$$

(теорема Лакса—Мильграма). Заметим еще, что пространство $L_2(\Omega)$ имеет оснащение

$$H^1(\Omega)\hookrightarrow\!\!\hookrightarrow L_2(\Omega)\hookrightarrow\!\!\hookrightarrow(H^1(\Omega))^* \tag{2.13}$$

(с компактными вложениями левых пространств в правые).

Отметим, наконец, что связь оператора A_ε, отвечающего форме $\Phi_\varepsilon(\eta,u)$, и оператора A_0, отвечающего невозмущенной форме $\Phi_0(\eta,u)=(\eta,u)_{H^1(\Omega)}$, будет выяснена ниже.

2.3. Краевые задачи, порожденные несимметрической формой. Рассмотрим теперь краевые задачи, отвечающие формуле Грина (2.5), (2.6) и связанные с дифференциальным выражением $L_\varepsilon u$ из (2.3).

1°. *Первая краевая задача Неймана—Ньютона.* Эта задача соответствует уравнению Пуассона для дифференциального выражения $L_\varepsilon u$ и однородному условию Неймана—Ньютона (аналог первой вспомогательной задачи С. Крейна):

$$L_\varepsilon v=f\quad(\text{в }\Omega),\qquad\partial_\varepsilon v=0\quad(\text{на }\Gamma), \tag{2.14}$$

$$L_\varepsilon v:=v-\Delta v+\varepsilon\sum_{k=1}^m c_k\frac{\partial v}{\partial x_k},\qquad\partial_\varepsilon v:=\partial_0 v-\varepsilon\sigma\gamma v. \tag{2.15}$$

Будем изучать слабые решения этой задачи, считая, что искомая функция $v\in H^1(\Omega)$, и используя формулу Грина (2.5).

Определение 2.1. *Слабым решением* задачи (2.14), (2.15) назовем такую функцию $v=v_\varepsilon(x)\in H^1(\Omega)$, для которой выполнено тождество

$$\Phi_\varepsilon(\eta,v)=\langle\eta,f\rangle_{L_2(\Omega)}\qquad\forall\,\eta\in H^1(\Omega). \tag{2.16}$$

Теорема 2.1. *Задача* (2.14), (2.15) *имеет слабое решение* $v=v_\varepsilon\in H^1(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$f\in(H^1(\Omega))^*. \tag{2.17}$$

Это решение выражается формулой

$$v_\varepsilon=A_\varepsilon^{-1}f,\quad A_\varepsilon\in\mathcal{L}\,(H^1(\Omega);(H^1(\Omega))^*), \tag{2.18}$$

где A_ε *— оператор полуторалинейной формы* $\Phi_\varepsilon(\eta,u)$ (*см.* (2.11)).

Доказательство. Заметим сначала, что правая часть в (2.16) является линейным ограниченным функционалом в $H^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.17). Далее, любой линейный ограниченный функционал относительно $\eta\in H^1(\Omega)$ выражается не только в виде скалярного произведения $(\eta,v_*)_{H^1(\Omega)}$ (теорема Ф. Рисса), но также и в виде $\Phi_\varepsilon(\eta,v_\varepsilon)$, т. е. существует единственный элемент $v_\varepsilon\in H^1(\Omega)$, для которого выполнено тождество (2.16), если $f\in(H^1(\Omega))^*$. Однако в силу свойства (2.11) тогда будем иметь

$$\Phi_\varepsilon(\eta,v_\varepsilon)=\langle\eta,A_\varepsilon v_\varepsilon\rangle_{L_2(\Omega)}=\langle\eta,f\rangle_{L_2(\Omega)}\qquad\forall\,\eta\in H^1(\Omega). \tag{2.19}$$

Отсюда получаем, что $A_\varepsilon v_\varepsilon = f$, и так как A_ε имеет ограниченный обратный (см. (2.12)), приходим к выводу, что имеет место формула (2.18), где A_ε — оператор полуторалинейной формы $\Phi_\varepsilon(\eta, u)$. $\square$

2°. *Вторая краевая задача Неймана—Ньютона.* В этой задаче имеем однородное уравнение в Ω и неоднородное условие Неймана—Ньютона на $\Gamma = \partial\Omega$:

$$L_\varepsilon w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon w = \psi \quad (\text{на } \Gamma). \tag{2.20}$$

Определение 2.2. *Слабым решением* задачи (2.20) назовем такую функцию $w = w_\varepsilon \in H^1(\Omega)$, для которой выполнено тождество

$$\Phi_\varepsilon(\eta, w) = \langle \gamma\eta, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} \qquad \forall\, \eta \in H^1(\Omega). \tag{2.21}$$

Теорема 2.2. *Задача* (2.20) *имеет слабое решение* $w \in H^1(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\psi \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{2.22}$$

Это решение дается формулой

$$w = w_\varepsilon = V_\varepsilon \psi, \quad V_\varepsilon \in \mathcal{L}\,(H^{-1/2}(\Gamma); H^1_{h,\varepsilon}(\Omega)), \tag{2.23}$$

$$H^1_{h,\varepsilon}(\Omega) := \{w \in H^1(\Omega) : L_\varepsilon w = 0\} = \ker \mathrm{L}_\varepsilon. \tag{2.24}$$

Доказательство. Проверим, что правая часть в (2.21) является линейным ограниченным функционалом в $H^1(\Omega)$ (относительно η) тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.22). Действительно, из теоремы Гальярдо (см. [41]) имеем оценку

$$\|\gamma\eta\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant c_1 \|\eta\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, \eta \in H^1(\Omega). \tag{2.25}$$

Поэтому

$$\Big| \langle \gamma\eta, \psi \rangle \Big|_{L_2(\Gamma)} \leqslant \|\gamma\eta\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \cdot \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant (c_1 \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}) \cdot \|\eta\|_{H^1(\Omega)}. \tag{2.26}$$

Здесь при выводе был использован также факт наличия оснащения

$$H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma), \tag{2.27}$$

который имеет место для областей $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$.

Итак, поскольку правая часть в (2.21) — линейный ограниченный функционал в $H^1(\Omega)$, то найдется единственный элемент $w = w_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ такой, что этот функционал имеет вид $\Phi_\varepsilon(\eta, w_\varepsilon)$, т. е. выполнено тождество (2.21). Решение w_ε находится однозначно по элементу ψ, поэтому $w_\varepsilon = V_\varepsilon \psi$, где V_ε — линейный ограниченный оператор, действующий из $H^{-1/2}(\Gamma)$ в $H^1(\Omega)$.

Покажем, что область значений оператора V_ε дает все пространство $H^1_{h,\varepsilon}(\Omega)$ из (2.24). В самом деле, из общей теории абстрактной формулы Грина для полуторалинейных форм, а также из (2.5) при $\eta \in H^1_0(\Omega) = \ker \gamma$ следует, что $\Phi_\varepsilon(\eta, w_\varepsilon) = 0$ тогда и только тогда, когда $L_\varepsilon w_\varepsilon = 0$, т. е. $w_\varepsilon \in H^1_{h,\varepsilon}(\Omega) = \ker L_\varepsilon$. Иными словами, имеет место прямое разложение

$$H^1(\Omega) = H^1_0(\Omega)(\dot{+})H^1_{h,\varepsilon}(\Omega). \tag{2.28}$$

Однако при $\eta \in H^1_0(\Omega)$ из (2.21) имеем $\Phi_\varepsilon(\eta, w_\varepsilon) = 0$, и тогда $L_\varepsilon w_\varepsilon = 0$, т. е. $w_\varepsilon \in H^1_{h,\varepsilon}(\Omega)$. Значит, оператор V_ε, $w_\varepsilon = V_\varepsilon \psi$, действует из $H^{-1/2}(\Gamma)$ на $H^1_{h,\varepsilon}(\Omega)$ ограниченным образом, т. е. имеет место свойство $V_\varepsilon \in \mathcal{L}\,(H^{-1/2}(\Gamma); H^1_{h,\varepsilon}(\Omega))$. $\square$

3°. *Полная краевая задача Неймана—Ньютона.* Эта задача отвечает неоднородному уравнению Пуассона в Ω и неоднородному условию Неймана—Ньютона на $\Gamma = \partial\Omega$:

$$L_\varepsilon u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon u = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \tag{2.29}$$

Определение 2.3. *Слабым решением* задачи (2.29) назовем такую функцию $u \in H^1(\Omega)$, для которой выполнено тождество

$$\Phi_\varepsilon(\eta, u) = \langle \eta, f \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} \qquad \forall\, \eta \in H^1(\Omega), \tag{2.30}$$

следующее из формулы Грина (2.5) и уравнений (2.29).

Опираясь на решения задачи (2.14), (2.15), а также задачи (2.20), приходим к следующему выводу.

Теорема 2.3. *Задача* (2.29) *имеет слабое решение* $u = u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (2.17) *и* (2.22):

$$f \in (H^1(\Omega))^*, \quad \psi \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{2.31}$$

При этом оно представляется в виде

$$u_\varepsilon = v_\varepsilon + w_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} f + V_\varepsilon \psi, \tag{2.32}$$

где A_ε^{-1} *и* V_ε — *операторы, описанные в теоремах* 2.1 *и* 2.2 *соответственно.*

Доказательство. Введем функции v_ε и w_ε как слабые решения задач (2.14), (2.15) и (2.20). Опираясь на формулировки их слабых решений (см. (2.16), (2.21)), получим с учетом (2.30) для $\tilde{u}_\varepsilon := v_\varepsilon + w_\varepsilon$ тождество

$$\Phi_\varepsilon(\eta, \tilde{u}_\varepsilon) = \langle \eta, f \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} =: \Phi_\varepsilon(\eta, u_\varepsilon) \qquad \forall\, \eta \in H^1(\Omega). \tag{2.33}$$

Отсюда следует, что

$$\Phi_\varepsilon(\eta, u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon) = 0 \qquad \forall\, \eta \in H^1(\Omega),$$

и потому $u_\varepsilon = \tilde{u}_\varepsilon := v_\varepsilon + w_\varepsilon$, т. е. имеет место формула (2.32). □

Таким образом, слабое решение полной краевой задачи Неймана—Ньютона есть сумма слабых решений задач пунктов 1° и 2°, разобранных выше.

4°. *Однородная задача Дирихле для уравнения Пуассона.* Рассмотрим теперь задачу

$$L_\varepsilon u := u - \Delta u + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \gamma u := u|_\Gamma = 0 \quad (\text{на } \Gamma) \tag{2.34}$$

Будем разыскивать ее слабое решение, считая, что искомая функция $u = u_\varepsilon(x) \in H_0^1(\Omega)$,

$$H_0^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \gamma u = 0 \quad (\text{на } \Gamma)\}. \tag{2.35}$$

Для функций из $H_0^1(\Omega)$ формула Грина (2.5) принимает вид

$$\Phi_{0,\varepsilon}(\eta, u) = \langle \eta, L_\varepsilon u \rangle_{L_2(\Omega)} \qquad \forall\, \eta, u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.36}$$

При этом сужение $\Phi_{0,\varepsilon}(\eta, u)$ полуторалинейной формы $\Phi_\varepsilon(\eta, u)$ с $H^1(\Omega)$ на $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ обладает теми же общими свойствами, которыми она обладала на всем $H^1(\Omega)$: после такого сужения $\Phi_{0,\varepsilon}(\eta, u)$ снова является ограниченной и равномерно аккретивной формой в $H_0^1(\Omega)$. Отметим еще, что пространство $L_2(\Omega)$ имеет оснащение

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow (H_0^1(\Omega))^*. \tag{2.37}$$

Из этих свойств следует, что форме $\Phi_{0,\varepsilon}(\eta, u)$ отвечает оператор $A_{0,\varepsilon} \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega); (H_0^1(\Omega))^*)$, который дает связь, аналогичную (2.11):

$$\Phi_{0,\varepsilon}(\eta, u) = \langle \eta, A_{0,\varepsilon} u \rangle_{L_2(\Omega)} \qquad \forall\, \eta, u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.38}$$

Определение 2.4. *Слабым решением* задачи (2.34) назовем такую функцию $u = u_{0,\varepsilon} \in H_0^1(\Omega)$, для которой выполнено тождество

$$\Phi_{0,\varepsilon}(\eta, u) = \langle \eta, f \rangle_{L_2(\Omega)} \qquad \forall\, \eta \in H_0^1(\Omega), \tag{2.39}$$

следующее из (2.36) и (2.34).

Теорема 2.4. *Задача* (2.34) *имеет слабое решение* $u = u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*:

$$f \in (H_0^1(\Omega))^*. \tag{2.40}$$

В этом случае

$$u_\varepsilon = A_{0,\varepsilon}^{-1} f, \qquad A_{0,\varepsilon}^{-1} \in \mathcal{L}\left((H_0^1(\Omega))^*; H_0^1(\Omega)\right). \tag{2.41}$$

Доказательство. Оно в точности повторяет доказательство теоремы 2.1 с заменами $H^1(\Omega) \mapsto H^1_0(\Omega)$, $A_\varepsilon \mapsto A_{0,\varepsilon}$ и с учетом того факта, что правая часть в (2.39) является линейным ограниченным функционалом относительно η в $H^1_0(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.40). При этом вместо (2.11) используется формула (2.38). □

3. Спектральные задачи, порожденные полуторалинейной формой

В этом разделе изучаются несамосопряженные спектральные задачи, порожденные полуторалинейной формой $\Phi_\varepsilon(\eta, u)$ из (2.5), а также разобранными в пункте 2.3 краевыми задачами и некоторыми новыми задачами.

3.1. Спектральная задача Дирихле. Если в краевой задаче Дирихле (2.34) положить $f = \lambda u$, то придем к задаче

$$L_\varepsilon u := u - \Delta u + \varepsilon \sum_{k=1}^m c_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma = \partial\Omega). \tag{3.1}$$

Здесь снова $c_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, m}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, а $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр.

Исследование этой задачи будем проводить методами теории самосопряженных и несамосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, в данном случае — в комплексном пространстве $L_2(\Omega)$. При этом для простоты изложения будем считать границу области $\Gamma = \partial\Omega$ принадлежащей классу C^2, т. е. дважды непрерывно дифференцируемой.

Введем в рассмотрение оператор A_0, действующий в $L_2(\Omega)$ по закону

$$A_0 u := u - \Delta u, \quad u \in \mathcal{D}(A_0) := H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega). \tag{3.2}$$

Опираясь на известные методы (см. [12,32,33]), можно доказать, что оператор A_0, заданный на области определения $\mathcal{D}(A_0)$ из (3.2), является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором, действующим в $L_2(\Omega)$. При этом его квадратичная форма

$$(A_0 u, u)_{L_2(\Omega)} = \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2) d\Omega \geqslant \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(A_0). \tag{3.3}$$

После замыкания по норме $H^1_0(\Omega)$ из (3.3) получаем, что энергетическое пространство $\mathcal{H}_{A_0}$ оператора A_0 совпадает с $H^1_0(\Omega) = \mathcal{D}(A_0^{1/2})$, т.е

$$\|A_0^{1/2} u\|^2_{L_2(\Omega)} = \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \geqslant \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \quad \forall\, u \in H^1_0(\Omega) = \mathcal{H}_{A_0}. \tag{3.4}$$

Так как $H^1_0(\Omega)$ компактно вложено в $L_2(\Omega)$ (см. (2.37)), то по основной теореме о спектре (см. [33]) получаем, что оператор A_0 имеет дискретный положительный спектр $\{\lambda_k(A_0)\}_{k=1}^\infty$, состоящий из положительных конечнократных собственных значений $\lambda_k(A_0) \geqslant 1$, имеющих предельную точку $\lambda = +\infty$. При этом система его собственных элементов $\{u_k(A_0)\}_{k=1}^\infty$ образует ортогональный базис как в $L_2(\Omega)$, так и в $H^1_0(\Omega)$:

$$(u_k, u_l)_{L_2(\Omega)} = \delta_{k,l}, \quad (u_k, u_l)_{H^1_0(\Omega)} = \lambda_k(A_0)\delta_{k,l}, \quad k, l = 1, 2, \ldots. \tag{3.5}$$

Отметим еще, что собственные значения $\lambda_k(A_0)$ имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_k(A_0) = d_m k^{2/m}[1 + o(1)], \quad d_m > 0, \quad k \to \infty, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m. \tag{3.6}$$

В частности, при $m = 3$ (трехмерное пространство) имеем известную классическую асимптотику Вейля (см. [1]):

$$\lambda_k(A_0) = \left(\frac{|\Omega|}{6\pi^2}\right)^{-2/3} k^{2/3}[1 + o(1)] \quad (k \to \infty). \tag{3.7}$$

Опишем теперь в операторной форме свойства второго слагаемого слева в уравнении (3.1). Введем в рассмотрение оператор

$$B_0 u := i \sum_{k=1}^m c_k \frac{\partial u}{\partial x_k}, \quad c_k \in \mathbb{R}, \tag{3.8}$$

$$u \in \mathcal{D}(B_0) := \Big\{ u \in H^1(\Omega) : \ u = 0 \ (\text{на } \Gamma) \Big\} = H^1_0(\Omega) = \mathcal{D}(A_0^{1/2}) \supset \mathcal{D}(A_0). \tag{3.9}$$

Можно убедиться, используя прием интегрирования по частям, что

$$
\begin{aligned}
(B_0 u, v)_{L_2(\Omega)} &= i \sum_{k=1}^{m} c_k \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} \bar{v}\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} u \overline{\left(i \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{\partial v}{\partial x_k} \right)} d\Omega = \\
&= (u, B_0 v)_{L_2(\Omega)} \quad \forall\, u, v \in H_0^1(\Omega) = \mathcal{D}(B_0).
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Отсюда следует, что B_0 — неограниченный самосопряженный оператор, действующий в $L_2(\Omega)$ и заданный на области определения $\mathcal{D}(B_0) = \mathcal{D}(A_0^{1/2})$.

После введения операторов A_0 и B_0 задачу (3.1) можно в операторной форме переписать в виде

$$
(A_0 - i\varepsilon B_0)u = \lambda u, \qquad u \in \mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(A_0^{1/2}) = H_0^1(\Omega) = \mathcal{D}(B_0) \subset L_2(\Omega), \tag{3.11}
$$

где свойства операторов A_0 и B_0 уже описаны выше. Таким образом, возникла несамосопряженная спектральная задача на собственные значения для оператора $A_0 - i\varepsilon B_0$.

Преобразуем задачу (3.11) к виду, для которого можно использовать известные теоремы М. В. Келдыша (см. [9, п. 5.8]).

Прежде всего отметим, что оператор $A_0 - i\varepsilon B_0$ имеет нулевое ядро. В самом деле, если

$$
(A_0 - i\varepsilon B_0)u_0 = 0, \quad u_0 \in \mathcal{D}(A_0),
$$

то отсюда выводим, в силу свойств A_0 и B_0, что

$$
(A_0 u_0, u_0)_{L_2(\Omega)} = \|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} = 0 \quad \Rightarrow u_0 = 0.
$$

Значит, оператор $A_0 - iB_0$ имеет обратный. Действительно, из определения (3.8), (3.9) оператора B_0 и определения нормы в $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ легко выводится неравенство

$$
\|B_0 u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_0 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = c_0 \|A_0^{1/2} u\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{3.12}
$$

После замены $u = A_0^{-1/2} v$, $v \in L_2(\Omega)$, отсюда получаем, что $B_0 A_0^{-1/2} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ — ограниченный оператор.

Опираясь на эти факты, осуществим в (3.11) замену искомого элемента:

$$
A_0^{1/2} u = v, \quad v \in L_2(\Omega). \tag{3.13}
$$

Тогда вместо (3.11) возникает спектральная задача

$$
(I - i\varepsilon C_0)v = \lambda A_0^{-1} v, \qquad C_0 := A_0^{-1/2}(B_0 A_0^{-1/2}) = C_0^* \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)). \tag{3.14}
$$

Здесь оператор $I - i\varepsilon C_0$ в силу самосопряженности C_0 имеет ограниченный обратный оператор, и потому задача (3.14) равносильна задаче на собственные значения

$$
\begin{aligned}
&(I + T(\varepsilon))A_0^{-1} v = \mu v, \quad \mu = \lambda^{-1}, \\
&I + T(\varepsilon) := (I - i\varepsilon C_0)^{-1}, \quad T(\varepsilon) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)).
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Отметим, наконец, что в силу асимптотической формулы (3.6) имеем свойство

$$
A_0^{-1} \in \mathfrak{S}_p, \quad p > m/2, \tag{3.16}
$$

и потому к задаче (3.15) применимы теоремы М. В. Келдыша (см. [9, с. 314–320]). Отсюда получаем такой вывод.

Теорема 3.1. *Задача* (3.11)*, а потому и исходная задача* (3.1) *имеют дискретный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений* λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, *расположенных в правой полуплоскости и имеющих предельную точку* $\lambda = \infty$. *Для любого* $\delta > 0$ *все собственные значения этой задачи, кроме, быть может, конечного их числа, лежат в секторе* $|\arg \lambda| < \delta$. *Система корневых* (*собственных и присоединенных*) *элементов задачи* (3.11) *полна в энергетическом пространстве* $\mathcal{H}_{A_0} = H_0^1(\Omega)$ *оператора* A_0. *Собственные значения* λ_k *задачи* (3.11) *имеют асимптотическое поведение*

$$
\lambda_k = \lambda_k(A_0)[1 + o(1)], \quad k \to \infty, \tag{3.17}
$$

где $\lambda_k(A_0)$, *в свою очередь, имеют асимптотическое поведение* (3.6).

Доказательство. В задаче (3.15) оператор $Z := (I + T(\varepsilon))A_0^{-1} = (I - i\varepsilon C_0)^{-1}A_0^{-1}$ полный, т. е. $\ker \mathrm{Z} = \{0\}$, поскольку Z обратим и $Z^{-1} = A_0(I - i\varepsilon C_0)$. Далее, для A_0^{-1} выполнено свойство (3.16), причем A_0^{-1} — положительный оператор. Поэтому к уравнению (3.15) применима первая теорема М. В. Келдыша. Согласно утверждениям этой теоремы приходим к следующим выводам.

1°. Система корневых (собственных и присоединенных) элементов $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ этой задачи полна в $L_2(\Omega)$.

2°. Все собственные значения μ_k этой задачи конечнократны и для любого $\delta > 0$ расположены, кроме, быть может, конечного их числа, в угле $|\arg \mu| < \delta$. Кроме того, все они находятся в правой комплексной полуплоскости и имеют предельную точку $\mu = 0$.

Отсюда для задачи (3.14), а потому и для задач (3.11), (3.1) получаем, что они имеют дискретный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, расположенный в правой комплексной полуплоскости и имеющий предельную точку $\lambda = \infty$. При этом из условия $|\arg\,\mu| < \delta$ следует условие $|\arg\,\lambda| < \delta$, так что при любом $\delta > 0$ собственные значения λ_k, кроме, быть может, конечного числа, лежат в угле $|\arg\,\lambda| < \delta$. Наконец, из полноты системы корневых элементов $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ задачи (3.15) в силу замены (3.13) следует свойство полноты системы корневых элементов $u_k = A_0^{-1/2}v_k,\ k = 1, 2, \ldots,\ u_k \in \mathcal{D}(A_0^{1/2}) = H_0^1(\Omega) = \mathcal{H}_{A_0}$, т. е. в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_{A_0}$ оператора A_0.

Вернемся теперь к задаче (3.14), переписанной в виде

$$L(\lambda)v := (I - i\varepsilon C_0 - \lambda A_0^{-1})v = 0, \quad v \in L_2(\Omega), \tag{3.18}$$

т. е. к задаче на собственные значения для линейного относительно λ операторного пучка $L(\lambda)$. Так как здесь $C_0 = C_0^* \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$, A_0^{-1} — полный положительный компактный оператор, собственные значения которого в силу (3.6) имеют степенную асимптотику собственных значений

$$\lambda_k(A_0^{-1}) = d_m^{-1}k^{-2/m}[1 + o(1)], \quad k \to \infty, \tag{3.19}$$

то к пучку (3.18) применима теорема Маркуса—Мацаева (см., например, [29], а также [30]), из которой следует, что асимптотика собственных значений λ_k в задаче (3.18) такая же, как в задаче для укороченного пучка:

$$L_0(\lambda)v := (I - \lambda A_0^{-1})v = 0. \tag{3.20}$$

Отсюда и следует асимптотическая формула (3.17).

Отметим, наконец, что расположение собственных значений λ_k в правой комплексной полуплоскости следует также из (3.18) при $\lambda = \lambda_k,\ v = v_k$:

$$(v, v)_{L_2(\Omega)} - \mathrm{Re}\,\lambda(A_0^{-1}v, v)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad A_0^{-1} > 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.21}$$

□

Наличие степенной асимптотики собственных значений оператора A_0 (см. (3.6)), а также свойство ограниченности оператора $B_0A_0^{-1/2} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ позволяет установить более сильные утверждения о свойствах решений спектральной задачи (3.14).

Теорема 3.2. *Спектр задачи* (3.18) *расположен в параболической области*

$$\Lambda_\varepsilon := \Big\{ \mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \lambda_1(A_0) : \ |\mathrm{Im}\,\lambda|^2 \leqslant \varepsilon^2\|B_0A_0^{-1/2}\|^2 \cdot \mathrm{Re}\,\lambda \Big\}, \tag{3.22}$$

а корневые элементы этой задачи образуют базис Абеля—Лидского порядка $\alpha > m/2$ в пространстве $H_0^1(\Omega)$.

Доказательство. Для любого собственного значения λ и отвечающего ему элемента v задачи (3.14) имеем соотношение (3.21), откуда следует, что

$$\mathrm{Re}\,\lambda = \frac{\|v\|^2_{L_2(\Omega)}}{\|A_0^{-1/2}v\|_{L_2(\Omega)}} = \frac{\|A_0^{1/2}u\|^2_{L_2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L_2(\Omega)}} \geqslant \lambda_1(A_0), \quad v = A_0^{1/2}u. \tag{3.23}$$

Далее, из (3.14) следует также соотношение

$$-\varepsilon(Cv, v)_{L_2(\Omega)} = -\varepsilon(A_0^{-1/2}(B_0A_0^{-1/2})v, v)_{L_2(\Omega)} = (\mathrm{Im}\lambda)\|A_0^{-1/2}v\|^2_{L_2(\Omega)},$$

и потому

$$|\,\mathrm{Im}\lambda| \cdot \|A_0^{-1/2}v\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant |\varepsilon|\|B_0A_0^{-1/2}\| \cdot \|v\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|A_0^{-1/2}v\|_{L_2(\Omega)}. \tag{3.24}$$

Отсюда и из (3.23) получаем связь:

$$|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \varepsilon\|B_0A_0^{-1/2}\|\cdot\|v\|_{L_2(\Omega)} \,/\, \|A_0^{-1/2}v\|_{L_2(\Omega)} = |\varepsilon|\|B_0A_0^{-1/2}\|(\operatorname{Re}\lambda)^{1/2}.$$

Поэтому спектр задачи (3.18) расположен в параболической области (3.22).

Осуществим теперь в задаче (3.14) замену искомого элемента по формуле

$$(I - i\varepsilon C_0)v =: w. \tag{3.25}$$

Тогда это уравнение преобразуется к виду

$$A_0^{-1}(I + T(\varepsilon))w = \mu w, \quad \mu = \lambda^{-1}. \tag{3.26}$$

Здесь $I + T(\varepsilon)$ — оператор из (3.15), $T(\varepsilon) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$, а асимптотика собственных значений компактного положительного оператора A_0^{-1}, как следует из (3.19), такова:

$$\lambda_k(A_0^{-1}) \sim d_m^{-1}k^{-p}, \quad p = 2/m, \quad k \to \infty. \tag{3.27}$$

Поэтому согласно утверждению из [38, с. 292] корневые элементы $\{w_k\}_{k=1}^\infty$, $w_k = (I - i\varepsilon C_0)v_k$, задачи (3.26), отвечающие корневым элементам v_k задачи (3.14), образуют базис Абеля—Лидского порядка $\alpha > p^{-1} = m/2$. Однако при замене (3.25) базис $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ переходит в базис $\{v_k\}_{k=1}^\infty$, и потому корневые элементы $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ задачи (3.14) также образуют базис Абеля—Лидского порядка $\alpha > m/2$ в пространстве $L_2(\Omega)$. Отсюда с учетом замены (3.13) приходим к выводу, что в задаче (3.11) корневые элементы $\{u_k\}_{k=1}^\infty$, $u_k = A_0^{-1/2}v_k$, образуют базис Абеля—Лидского порядка $\alpha > m/2$ в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_{A_0} = H_0^1(\Omega) = \mathcal{D}(A_0^{1/2})$ оператора A_0. □

3.2. Спектральная задача Неймана—Ньютона. Так называют спектральную задачу вида

$$L_\varepsilon v = \lambda v \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon v = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \tag{3.28}$$

где $L_\varepsilon v$ и $\partial_\varepsilon v$ — дифференциальное выражение и производная по нормали, определенные по формулам (2.3), (2.6):

$$L_\varepsilon v := v - \Delta v + \varepsilon\sum_{k=1}^m c_k\frac{\partial v}{\partial x_k}, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1,m}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \tag{3.29}$$

$$\partial_\varepsilon v := \partial_0 v - \varepsilon\sigma\gamma v, \quad \sigma = \sum_{k=1}^m c_k\cos(\widehat{\vec{n},\vec{e}_k}), \quad \partial_0 v := (\partial v/\partial n)_\Gamma. \tag{3.30}$$

В задаче (3.28) спектральный параметр $\lambda \in \mathbb{C}$ входит в уравнение.

Наряду с (3.28)–(3.30) рассмотрим также невозмущенную спектральную задачу Неймана:

$$L_0 v := v - \Delta v = \lambda v \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_0 v := (\frac{\partial v}{\partial n})_\Gamma = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.31}$$

Как известно, эта задача равносильна уравнению

$$Av = \lambda v, \tag{3.32}$$

$$v \in \mathcal{D}(A) = \left\{v \in H^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma)\right\} \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) = H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega). \tag{3.33}$$

При этом оператор A имеет дискретный положительный спектр $\{\lambda_k(A)\}_{k=1}^\infty$ с предельной точкой $\lambda = +\infty$ и систему собственных элементов $\{v_k(A)\}_{k=1}^\infty$, образующих ортогональный базис как в $L_2(\Omega)$, так и в $H^1(\Omega)$:

$$(v_k, v_j)_{L_2(\Omega)} = \delta_{kj}, \quad (v_k, v_j)_{H^1(\Omega)} = \lambda_k(A)\delta_{kj}, \quad k, j = 1, 2, \ldots. \tag{3.34}$$

Кроме того, известно, что собственные значения $\lambda_k(A)$ невозмущенной задачи Неймана (3.31) имеют такое же асимптотическое поведение, как собственные значения невозмущенной задачи Дирихле (см. (3.6), (3.7)):

$$\lambda_k(A) = d_m k^{2/m}[1 + o(1)], \quad d_m > 0, \quad k \to \infty, \quad d_3 = \left(\frac{|\Omega|}{6\pi^2}\right)^{-2/3}. \tag{3.35}$$

Прежде чем исследовать задачу (3.28)–(3.30), найдем операторную связь между решениями $v = v_\varepsilon$ возмущенной задачи

$$L_\varepsilon v = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon v = 0 \quad (\text{на } \Gamma) \tag{3.36}$$

и решениями $v = v_0$ невозмущенной задачи

$$L_0 v = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_0 v = 0 \quad (\text{на } \Gamma) \tag{3.37}$$

с одной и той же заданной функцией f.

Перепишем задачу (3.36) в виде

$$L_0 v = -\varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{\partial v}{\partial x_k} + f =: -\varepsilon B v + f \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_0 v = \varepsilon \sigma \gamma v \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.38}$$

Воспользуемся теперь формулой для решения полной краевой задачи Неймана—Ньютона из пункта 2.3, т. е. формулой (2.32), рассмотренной, однако, при $\varepsilon = 0$:

$$v = v_1 + v_2 = A^{-1} f + V\psi, \tag{3.39}$$

где $v_1 = A^{-1} f$ — решение задачи

$$L_0 v_1 = f, \quad \partial_0 v_1 = 0 \Leftrightarrow A v_1 = f, \tag{3.40}$$

а $v_2 = V\psi$ — решение задачи

$$L_0 v_2 = 0, \quad \partial_0 v_2 = \psi. \tag{3.41}$$

Получение таких формул для слабых решений описаны в пункте 2.3 (см. задачи 1°–3°).

Для задачи (3.38) тогда будем иметь связь

$$v = A^{-1}(-\varepsilon B v + f) + V(\varepsilon \sigma \gamma v). \tag{3.42}$$

Здесь A — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$, свойства которого описаны выше, $V : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^1_h(\Omega)$ — оператор задачи (3.41), а $v = v_\varepsilon$ — решение задачи (3.36).

Из (3.42) получаем соотношение

$$[I + \varepsilon(A^{-1}B - V\sigma\gamma)]v_\varepsilon = A^{-1} f = v_0, \tag{3.43}$$

где v_0 — решение невозмущенной задачи (3.37), $v_\varepsilon \in H^1(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2})$. Поэтому в (3.43) можно сделать замену

$$v_\varepsilon = A^{-1/2}\eta_\varepsilon, \quad \eta_\varepsilon \in L_2(\Omega). \tag{3.44}$$

Более того, из (3.43) видно, что в этом уравнении все слагаемые принадлежат $\mathcal{D}(A^{1/2})$. Поэтому после замены (3.44) и действия слева оператором $A^{1/2}$ получаем соотношение для η_ε:

$$[I + \varepsilon(A^{-1/2}BA^{-1/2} - (A^{1/2}V)\sigma(\gamma A^{-1/2}))]\eta_\varepsilon = \eta_0 := A^{1/2} v_0 = A^{-1/2} f. \tag{3.45}$$

Изучим теперь общие свойства операторных коэффициентов из (3.45).

Лемма 3.1. *Оператор B, определенный соотношением*

$$B v := \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{\partial v}{\partial x_k}, \quad \mathcal{D}(B) = H^1(\Omega), \tag{3.46}$$

является линейным ограниченным оператором, действующим из $H^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Оно основано на элементарном неравенстве

$$\Big\| \frac{\partial v}{\partial x_k} \Big\|^2_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \Big| \frac{\partial v}{\partial x_k} \Big|^2 d\Omega \leqslant \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega). \tag{3.47}$$

□

В качестве следствия из этой леммы получаем такой вывод: оператор

$$BA^{-1/2} \in \mathcal{L}(L_2(\Omega)), \tag{3.48}$$

так как $A^{-1/2} \in \mathcal{L}(L_2(\Omega); H^1(\Omega))$. Отсюда, в свою очередь, приходим к выводу, что $A^{-1/2}(BA^{-1/2})$ является компактным оператором, действующим в $L_2(\Omega)$.

Рассмотрим теперь свойства второго оператора из (3.45), т. е. оператора $(A^{1/2}V)\sigma(\gamma A^{-1/2})$. Прежде всего заметим, что

$$\sigma = \sigma(x) := \sum_{k=1}^{m} c_k \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_k}), \quad x \in \Gamma \tag{3.49}$$

— это непрерывная вещественнозначная функция, заданная на гладкой (даже дважды непрерывно дифференцируемой) поверхности Г. Далее, легко убедиться, что операторы

$$\gamma A^{-1/2} : L_2(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Gamma), \quad A^{1/2}V : L_2(\Gamma) \to L_2(\Omega) \tag{3.50}$$

взаимно сопряжены и компактны. В самом деле, для слабого решения задачи (3.41) имеем тождество

$$(w, v_2)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma w, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} \quad \forall\, w \in H^1(\Omega) \quad \forall\, \psi \in H^{-1/2}(\Gamma) \supset L_2(\Gamma), \tag{3.51}$$

откуда имеем при $w = A^{-1/2}\eta$ соотношение

$$\begin{aligned}(A^{-1/2}\eta, V\psi)_{H^1(\Omega)} &= (A^{1/2}(A^{-1/2}\eta), A^{1/2}(V\psi))_{L_2(\Omega)} = (\eta, (A^{1/2}V)\psi)_{L_2(\Omega)} = \\ &= ((\gamma A^{-1/2})\eta, \psi)_{L_2(\Gamma)} \quad \forall\, \eta \in L_2(\Omega)\ \forall\, \psi \in L_2(\Gamma).\end{aligned} \tag{3.52}$$

Из полученных фактов приходим к следующему выводу.

Лемма 3.2. *Оператор*

$$Q_\sigma := (A^{1/2}V)\sigma(\gamma A^{-1/2}) : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega) \tag{3.53}$$

является компактным самосопряженным оператором.

Следствием из лемм 3.1 и 3.2 является такое утверждение: оператор

$$S := A^{-1/2}(BA^{-1/2}) - Q_\sigma \tag{3.54}$$

является компактным оператором, действующим в $L_2(\Omega)$.

Таким образом, связь (3.43)–(3.45) между решениями возмущенной и невозмущенной задач (3.36) и (3.37) дается соотношением

$$A^{-1/2}(I + \varepsilon S)A^{1/2}v_\varepsilon = v_0, \tag{3.55}$$

где S — компактный оператор из (3.54).

В дальнейшем будем считать, что оператор $I + \varepsilon S$ обратим; так будет, по крайней мере, если выполнено условие

$$|\varepsilon| \cdot \|S\| < 1. \tag{3.56}$$

Тогда будем иметь

$$(I + \varepsilon S)^{-1} = I + T(\varepsilon), \quad T(\varepsilon) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)), \tag{3.57}$$

и потому решение задачи (3.36) дается формулой

$$v_\varepsilon = A^{-1/2}(I + \varepsilon S)^{-1}A^{1/2}v_0 = A_0^{-1/2}(I + \varepsilon S)^{-1}A^{-1/2}f. \tag{3.58}$$

При $\varepsilon = 0$ из (3.58) получаем, очевидно, $v_\varepsilon = v_0 = A^{-1}f$.

Вернемся теперь на основе связи (3.58) к рассмотрению исходной спектральной задачи (3.28). Сравнивая ее с (3.36), видим, что ее решение $v = v_\varepsilon$ можно получить по формуле (3.58) при $f = \lambda v_\varepsilon$. Отсюда приходим к уравнению

$$v_\varepsilon = \lambda A^{-1/2}(I + \varepsilon S)^{-1}A^{-1/2}v_\varepsilon. \tag{3.59}$$

Снова осуществляя замену (3.44), получаем спектральную задачу

$$(I + \varepsilon S)^{-1}A^{-1}\eta_\varepsilon = \mu\eta_\varepsilon, \quad \mu = \lambda^{-1}, \quad \eta_\varepsilon = A^{1/2}v_\varepsilon, \tag{3.60}$$

$$(I + \varepsilon S)^{-1} = I + T(\varepsilon), \quad T(\varepsilon) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)), \tag{3.61}$$

которая имеет в точности такой же вид, как задача (3.15), возникшая в задаче Дирихле (3.1). Более того, оператор A в (3.60) и оператор A_0 в (3.15) имеют идентичные свойства в пространствах $H^1(\Omega)$ и $H^1_0(\Omega)$ соответственно и одинаковую асимптотику собственных значений (см. (3.6), (3.7) и (3.35)). Поэтому для задачи (3.60), (3.61) имеют место те же общие выводы, которые были установлены в пункте 3.1 для решений спектральной задачи (3.1). Отличием в задаче (3.59) является лишь то обстоятельство, что оператор S не является кососамосопряженным, а лишь компактным оператором, действующим в $L_2(\Omega)$ (см. (3.54) и леммы 3.1 и 3.2).

Теорема 3.3. *Задача* (3.28) *имеет дискретный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *с предельной точкой* $\lambda = \infty$. *При любом* $\delta > 0$ *все собственные значения этой задачи, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе* $|\arg \lambda| < \delta$. *Система корневых элементов задачи* (3.28) *полна в энергетическом пространстве* $\mathcal{H}_A = H^1(\Omega)$ *оператора* A. *Собственные значения* λ_k *имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_k = \lambda_k(A)[1 + o(1)] = d_m k^{2/m}[1 + o(1)] \quad (k \to \infty).$$

Корневые элементы задачи (3.28) *образуют в пространстве* $H^1(\Omega)$ *также базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha > m/2$.

Уточним теперь расположение спектра задачи (3.28).

Теорема 3.4. *Пусть в задаче* (3.28) *выполнено условие*

$$c_\varepsilon := 1 - |\varepsilon| \Big(\|BA^{-1/2}\| \cdot \|A^{-1/2}\| + \|Q_\sigma\| \Big) > 0, \tag{3.62}$$

где оператор $BA^{-1/2}$*введен в* (3.46), (3.48), *а* Q_σ *— в* (3.53). *Тогда спектр этой задачи расположен в правой полуплоскости в параболической области*

$$\Lambda_\varepsilon := \Big\{ \operatorname{Re}\lambda \geqslant c_\varepsilon \lambda_1(A) : \ |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \Big(\varepsilon \|BA^{-1/2}\| \cdot c_\varepsilon^{-1/2} \Big) (\operatorname{Re}\lambda)^{1/2} \Big\}. \tag{3.63}$$

Доказательство. Перепишем уравнение (3.60) при $\eta_\varepsilon = \eta$ в виде

$$\lambda A^{-1}\eta = (I + \varepsilon S)\eta = \Big[I + \varepsilon(A^{-1/2}(BA^{-1/2}) - Q_\sigma) \Big] \eta. \tag{3.64}$$

Отсюда получаем соотношение

$$\begin{gathered}(\operatorname{Re}\lambda + i\operatorname{Im}\lambda)\|A^{-1/2}\eta\|^2_{L_2(\Omega)} = \|\eta\|^2_{L_2(\Omega)} + \\ + \varepsilon \Big[((BA^{-1/2})\eta, A^{-1/2}\eta)_{L_2(\Omega)} - (Q_\sigma \eta, \eta)_{L_2(\Omega)} \Big].\end{gathered} \tag{3.65}$$

Вычисляя вещественную и мнимую части, будем иметь (с учетом свойства $Q_\sigma^* = Q_\sigma$)

$$\operatorname{Re}\lambda\, \|A^{-1/2}\eta\|^2_{L_2(\Omega)} = \|\eta\|^2_{L_2(\Omega)} + \varepsilon \ \Big[\operatorname{Re}((BA^{-1/2})\eta, A^{-1/2}\eta)_{L_2(\Omega)} - (Q_\sigma\eta, \eta)_{L_2(\Omega)} \Big],$$

$$\operatorname{Im}\lambda\, \|A^{-1/2}\eta\|^2_{L_2(\Omega)} = \varepsilon \operatorname{Im} \Big((BA^{-1/2})\eta, A^{-1/2}\eta \Big)_{L_2(\Omega)}.$$

Из первого равенства получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\lambda\, \|A^{-1/2}\eta\|^2_{L_2(\Omega)} \geqslant \Big[1 - |\varepsilon| \Big(\|BA^{-1/2}\| \cdot \|A^{-1/2}\| + \\ + \|Q_\sigma\| \Big)\Big] \|\eta\|^2_{L_2(\Omega)} =: c_\varepsilon \|\eta\|^2_{L_2(\Omega)},\end{aligned} \tag{3.66}$$

откуда следует, что $\operatorname{Re}\lambda \geqslant c_\varepsilon \lambda_1(A) > 0$ и

$$\frac{\|\eta\|_{L_2(\Omega)}}{\|A^{-1/2}\eta\|_{L_2(\Omega)}} \leqslant \Big(\operatorname{Re}\lambda / c_\varepsilon \Big)^{1/2}. \tag{3.67}$$

Из второго равенства с учетом (3.67) имеем

$$|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant |\varepsilon| \cdot \|BA^{-1/2}\| \cdot \|\eta\|_{L_2(\Omega)} \,/\, \|A^{-1/2}\eta\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\varepsilon| \cdot \|BA^{-1/2}\| \cdot (\operatorname{Re}\lambda / c_\varepsilon)^{1/2},$$

т. е. все собственные значения λ задачи (3.28) расположены в параболической области (3.63). □

3.3. Спектральная задача Стеклова. Так называют спектральную задачу (возмущенная задача)

$$L_\varepsilon w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon w = \lambda\, \gamma w \quad (\text{на } \Gamma), \tag{3.68}$$

в которой спектральный параметр λ не входит в уравнение, но входит в краевое условие.

Как и в пункте 3.2, рассмотрим наряду с (3.68) невозмущенную спектральную задачу

$$L_0 w := w - \Delta w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_0 w := \frac{\partial w}{\partial n} = \lambda\, \gamma w \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.69}$$

Эту задачу можно трактовать как невозмущенную вторую краевую задачу Неймана—Ньютона, т. е. в рассуждениях пункта 2.3, случай 2°, считать, что $\varepsilon = 0$, $\psi = \lambda\gamma w$ (см. (2.20)) Тогда согласно теореме 2.2 получаем, что ее решение дается формулой (2.23):

$$w = w_0 = V\psi = \lambda\, V\gamma w_0, \quad V \in \mathcal{L}\,(H^{-1/2}(\Gamma); H^1_h(\Omega)), \tag{3.70}$$

$$H^1_h(\Omega) = \Big\{\, w \in H^1(\Omega) :\ L_0 w = 0 \,\Big\}.$$

Осуществим в (3.70) замену вида (3.44):

$$w_0 = A^{-1/2}\eta_0, \quad \eta_0 \in L_2(\Omega) \tag{3.71}$$

и подействуем слева оператором $A^{1/2}$. Тогда приходим к спектральной задаче вида

$$\eta = \lambda C\eta, \quad C := (A^{1/2}V)(\gamma A^{-1/2}) = C^* \geqslant 0, \tag{3.72}$$

$$C \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)).$$

В самом деле, согласно формулам (3.50)–(3.52) получаем, что $A^{1/2}V$ и $\gamma A^{-1/2}$ взаимно сопряжены и компактны.

Отсюда приходим к следующим выводам

1°. Задача (3.72), а вместе с ней и исходная невозмущенная задача (3.69) имеют дискретный положительный спектр $\{\lambda_k^{-1}(C)\}_{k=1}^\infty$, состоящий из конечнократных собственных значений с предельной точкой $\lambda = +\infty$.

2°. Собственные элементы $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty$ образуют ортогональный базис в подпространстве

$$L_{2,h}(\Omega) := \Big\{\, \eta \in L_2(\Omega) :\ \eta = A^{1/2}w,\ w \in H^1_h(\Omega) \,\Big\}, \tag{3.73}$$

ортогональном подпространству

$$L_{2,0}(\Omega) := \Big\{\, \xi \in L_2(\Omega) :\ \xi = A^{1/2}v,\ v \in H^1_0(\Omega) \,\Big\} = \ker \mathrm{C}. \tag{3.74}$$

3°. Собственные значения $\lambda_k^{-1}(C)$ суть последовательные минимумы вариационного отношения

$$\frac{\|\eta\|^2_{L_2(\Omega)}}{(C\eta,\eta)_{L_2(\Omega)}} = \frac{\|w\|^2_{H^1(\Omega)}}{\|\gamma w\|^2_{L_2(\Gamma)}}, \quad w \in H^1_h(\Omega). \tag{3.75}$$

4°. Асимптотическое поведение собственных значений $\lambda_k(C)$ таково:

$$\begin{gathered} \lambda_k(C) = \tilde{d}_m k^{-1/(m-1)}[1 + o(1)] \quad k \to \infty, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m, \\ \lambda_k(C) = \Big(\ \frac{|\Gamma|}{12\pi}\ \Big)^{1/2} k^{-1/2}[1 + o(1)], \quad k \to \infty, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3. \end{gathered} \tag{3.76}$$

Заметим, что асимптотические формулы (3.76) следуют из результатов работы [7].

Опираясь на установленные факты, рассмотрим теперь свойства решений возмущенной спектральной задачи Стеклова (3.68). Предварительно установим, как и в пункте 3.2, связь решений соответствующих возмущенной и невозмущенной краевых задач:

$$L_\varepsilon w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon w = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \tag{3.77}$$

$$L_0 w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_0 w = \psi \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.78}$$

Решение задачи (3.78), как упомянуто выше, имеет вид (3.70). Переходя теперь к задаче (3.77), перепишем ее в виде

$$L_0 w = -\varepsilon B w \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_0 w = \varepsilon\sigma\gamma w + \psi. \tag{3.79}$$

Тогда, используя снова формулу (2.32) при $\varepsilon = 0$, будем иметь

$$w = A_0^{-1}(-\varepsilon Bw) + V(\varepsilon\sigma\gamma w + \psi), \tag{3.80}$$

откуда получаем уравнение для $w = w_\varepsilon$:

$$\Big[\, I + \varepsilon(A^{-1}B - V\sigma\gamma) \,\Big]\, w_\varepsilon = V\psi = w_0. \tag{3.81}$$

Осуществляя здесь замену

$$w_\varepsilon = A^{-1/2}\eta_\varepsilon, \quad \eta_\varepsilon \in L_2(\Omega), \tag{3.82}$$

и действуя слева оператором $A^{1/2}$ (это можно сделать), приходим, как и в пункте 3.2, к связи вида

$$(I + \varepsilon S)\eta_\varepsilon = (A^{1/2}V)\psi = A^{1/2}w_0 =: \eta_0, \tag{3.83}$$

где S — компактный оператор, введенный в (3.54). Будем далее предполагать, что выполнено условие (3.56). Тогда получаем связь (с учетом (3.81)) между решениями возмущенной и невозмущенной задач (3.68), (3.69):

$$w_\varepsilon = A^{-1/2}(I + \varepsilon S)^{-1}A^{1/2}w_0 = A^{-1/2}(I + \varepsilon S)^{-1}(A^{1/2}V)\psi. \tag{3.84}$$

Она имеет такой же вид, как и в пункте 3.2 (см. (3.58)). (При $\varepsilon = 0$ получаем из (3.84) $w_\varepsilon = w_0$, как и должно быть.)

Опираясь на представление (3.84), вернемся к спектральной возмущенной задаче (3.68). Из (3.77) и (3.68) видно, что в (3.84) следует взять $\psi = \lambda\gamma w_\varepsilon$. Тогда будем иметь спектральную задачу

$$w_\varepsilon = \lambda A^{-1/2}(I + \varepsilon S)^{-1}(A^{1/2}V)\gamma w_\varepsilon, \tag{3.85}$$

которая при замене (3.82) переходит в задачу на собственные значения

$$(I + \varepsilon S)\eta_\varepsilon = \lambda C\eta_\varepsilon, \tag{3.86}$$

являющуюся возмущением самосопряженной спектральной задачи (3.72). Свойства оператора C и свойства решений задачи (3.72) описаны выше (см. 1°–4°).

Очевидно, задача (3.86) равносильна задаче

$$(I + \varepsilon S)^{-1}C\eta = \mu\eta, \quad \mu = \lambda^{-1}, \quad \eta = \eta_\varepsilon \in L_2(\Omega), \tag{3.87}$$

т. е. задаче на собственные значения слабо возмущенного компактного неотрицательного оператора. Поэтому к задаче (3.87), как и выше, можно применить теоремы М. В. Келдыша. Некоторым затруднением, однако, здесь является то обстоятельство, что оператор C в (3.87) и (3.86) не является полным: он имеет нетривиальное и притом бесконечномерное ядро (см. (3.73), (3.74)).

Опираясь на ортогональное разложение

$$L_2(\Omega) = L_{2,0}(\Omega) \oplus L_{2,h}(\Omega) \tag{3.88}$$

(см. (3.73), (3.74)) и вводя ортопроекторы P_0 и P_h на эти подпространства, представим искомый элемент $\eta_\varepsilon = \eta$ в виде

$$\eta = P_0\eta + P_h\eta =: \eta_0 + \eta_h. \tag{3.89}$$

Подставим это разложение в (3.86) и подействуем на обе части этого уравнения операторами P_0 и P_h. Учитывая еще, что $L_{2,0}(\Omega) = \ker \mathrm{C}$, будем иметь

$$\eta_0 + \varepsilon P_0SP_0\eta_0 + \varepsilon P_0SP_h\eta_h = 0, \tag{3.90}$$

$$\eta_h + \varepsilon P_hSP_0\eta_0 + \varepsilon P_hSP_h\eta_h = \lambda(P_hCP_h)\eta_h. \tag{3.91}$$

Здесь для простоты записи символом P_hSP_0 обозначено сужение оператора P_hS на подпространство $L_{2,0}(\Omega)$ (с областью значений $L_{2,h}(\Omega)$); другие такие же символы понимаются аналогично.

В уравнении (3.90) оператор $I_0 + \varepsilon P_0SP_0$ ограниченно обратим в силу условия (3.56). Тогда, находя η_0 из (3.90) и подставляя его в (3.91), получим уравнение для $\eta_h = P_h\eta$:

$$(I_h + T_h(\varepsilon))\eta_h = \lambda C_h\eta_h, \quad C_h := P_hCP_h = C_h^* > 0 \quad (\text{в } L_{2,h}(\Omega)), \tag{3.92}$$

$$T_h(\varepsilon) := \varepsilon P_hSP_h - \varepsilon^2(P_hSP_0)(I_0 + \varepsilon P_0SP_0)^{-1}(P_0SP_h) \in \mathfrak{S}_\infty(L_{2,h}(\Omega)). \tag{3.93}$$

Убедимся, что в уравнении (3.92) оператор $I_h + T_h(\varepsilon)$ ограниченно обратим. В самом деле, для доказательства этого факта достаточно проверить, что $\ker\,(I_h + T_h(\varepsilon)) = \{0\}$, т.е уравнение $(I_h + T_h(\varepsilon))\eta_h = 0$ имеет лишь тривиальное решение. Однако из этого уравнения путем обратных замен приходим к системе уравнений (3.90), (3.91) с правыми частями, равными нулю, т. е. к соотношению $(I+\varepsilon S)\eta = 0$. Поскольку $I+\varepsilon S$ обратим, то $\eta = 0$, а потому и $\eta_h = P_h\eta = 0$.

Отсюда следует, что задача (3.92), (3.93) равносильна спектральной задаче

$$(I_h + T_h(\varepsilon))^{-1}C_h\eta_h = \mu\eta_h, \quad \eta_h \in L_{2,h}(\Omega), \quad \mu = \lambda^{-1}, \tag{3.94}$$

т. е. задаче на собственные значения слабо возмущенного самосопряженного полного положительного компактного оператора. Заметим еще, что в силу (3.76) имеем асимптотическую формулу

$$\lambda_k(C_h) = \lambda_k(C) = \tilde{d_m}k^{-1/(m-1)}[1+o(1)] \quad (k\to\infty),\ \Omega \in \mathbb{R}^m, \tag{3.95}$$

для ненулевых собственных значений оператора C, т. е. для собственных значений $\lambda_k(C_h)$ оператора $C_h : L_{2,h}(\Omega) \to L_{2,h}(\Omega)$. Поэтому

$$C_h \in \mathfrak{S}_p(L_{2,h}(\Omega)), \quad p > m-1. \tag{3.96}$$

Следствием установленных фактов является такой результат.

Теорема 3.5. *Спектральная задача Стеклова* (3.68) *имеет дискретный спектр* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, *расположенный в правой полуплоскости и состоящий из конечнократных собственных значений* λ_k *с предельной точкой* $\lambda=\infty$. *При любом* $\delta>0$ *все собственные значения* λ_k, *кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе* $|\arg\lambda|<\delta$. *Система корневых* (*собственных и присоединенных*) *элементов* $\{\eta_{\varepsilon,k}\}_{k=1}^{\infty}$ *задачи* (3.86) *после проектирования на подпространство* $L_{2,h}(\Omega)$, *т. е. система* $\{\eta_{\varepsilon,h,k}\}_{k=1}^{\infty}$ *корневых элементов задачи* (3.92), *является полной в* $L_{2,h}(\Omega)$. *Поэтому система корневых элементов* $\{w_{\varepsilon,h,k}\}_{k=1}^{\infty}$, $w_{\varepsilon,h,k} = A^{-1/2}\eta_{\varepsilon,h,k}$, *полна в* $H_h^1(\Omega)$. *Собственные значения* λ_k *задачи* (3.68) *имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_k = \lambda_k^{-1}(C_h)[1+o(1)] = \tilde{d_m}^{-1}k^{1/(m-1)}[1+o(1)] \quad (k\to\infty),\ \Omega\in\mathbb{R}^m. \tag{3.97}$$

Кроме полноты, система корневых элементов $\{w_{\varepsilon,h,k}\}_{k=1}^{\infty}$, *отвечающая собственным значениям* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, *образует базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha > m-1$ *в пространстве* $H_h^1(\Omega)$.

Доказательство. Оно проводится точно так же, как и в теоремах 3.2 и 3.3. Проверим лишь, что все собственные значения λ задачи (3.68) расположены в открытой правой полуплоскости.

В самом деле, для решений задачи (3.86) при $\eta_\varepsilon = \eta$ имеем соотношение

$$(\mathrm{Re}\,\lambda)(C\eta,\eta)_{L_2(\Omega)} = \mathrm{Re}\,((I+\varepsilon S)\eta,\eta)_{L_2(\Omega)} \geqslant (1-|\varepsilon|\|S\|)\|\eta\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Поэтому

$$\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant (1-|\varepsilon|\|S\|)\cdot\frac{\|\eta\|^2_{L_2(\Omega)}}{(C\eta,\eta)_{L_2(\Omega)}} \geqslant (1-|\varepsilon|\|S\|)\cdot\lambda_1^{-1}(C) > 0, \tag{3.98}$$

так как $1-|\varepsilon|\|S\|>0$ (см. (3.56)). □

3.4. Спектральная задача Стефана. Рассмотрим теперь возмущенную спектральную задачу в случае, когда спектральный параметр входит линейным образом и в уравнение, и в краевое условие:

$$L_\varepsilon u = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon u = \lambda\,\gamma u \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.99}$$

Эту задачу называют возмущенной спектральной задачей Стефана.

Как и ранее, наряду с (3.99) рассмотрим сначала невозмущенную спектральную задачу Стефана:

$$L_0 u := u - \Delta u = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_0 u := \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda\,\gamma u \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.100}$$

Эта задача равносильна уравнению, которое получается из общей формулы (2.32) при $\varepsilon=0$ и $f=\lambda u$, $\psi = \lambda\,\gamma u$:

$$u = A^{-1}(\lambda u) + V(\lambda\,\gamma u), \quad u\in H^1(\Omega). \tag{3.101}$$

После замены вида (3.82), т. е. $u = A^{-1/2}\eta$, $\eta\in L_2(\Omega)$, приходим к невозмущенной спектральной задаче

$$\eta = \lambda(A^{-1}+C)\eta, \quad \eta\in L_2(\Omega), \tag{3.102}$$

где $C = (A^{1/2}V)(\gamma A^{-1/2}) = C^* \geqslant 0$ — оператор, свойства которого были описаны в пункте 3.3.

Так как $A^{-1}>0$ и компактен в $L_2(\Omega)$, то оператор $A^{-1}+C$ положителен и компактен в этом пространстве. Отсюда приходим к следующим выводам.

1°. Задача (3.102), а вместе с ней и исходная невозмущенная задача Стефана (3.100) имеют дискретный положительный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\lambda_k = \lambda_k^{-1}(A^{-1}+C)$, с предельной точкой $\lambda = +\infty$.

2°. Собственные элементы $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ задачи (3.102) образуют ортогональный базис в пространстве $L_2(\Omega)$ и базис по форме $((A^{-1}+C)\eta,\eta)_{L_2(\Omega)}$. Поэтому собственные элементы $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ задачи (3.100) образуют ортогональный базис в $H^1(\Omega)$ и по квадратичной форме $\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\gamma u\|^2_{L_2(\Gamma)}$:

$$(u_k,u_l)_{L_2(\Omega)} + (\gamma u_k,\gamma u_l)_{L_2(\Gamma)} = \delta_{k,l}, \quad (u_k,u_l)_{H^1(\Omega)} = \lambda_k\delta_{k,l}. \tag{3.103}$$

3°. Собственные значения λ_k задачи (3.102) и (3.100) суть последовательные минимумы вариационного отношения

$$\frac{\| \eta \|^2_{L_2(\Omega)}}{\| A^{-1/2}\eta \|^2_{L_2(\Omega)} + \| \gamma A^{-1/2}\eta \|^2_{L_2(\Gamma)}} = \frac{\| u \|^2_{H^1(\Omega)}}{\| u \|^2_{L_2(\Omega)} + \| \gamma u \|^2_{L_2(\Gamma)}}, \quad A^{-1/2}\eta = u \in H^1(\Omega). \tag{3.104}$$

4°. Собственные значения λ_k имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_k = \lambda_k^{-1}(C)[1+o(1)] = \tilde{d_m}^{-1} k^{1/(m-1)}[1+o(1)] \quad (k\to\infty),\ \Omega\in\mathbb{R}^m,\ m\geqslant 3, \tag{3.105}$$

где d_m — константы из (3.76).

Нетрудно установить свойства 1°–3°, здесь поясним лишь вывод асимптотической формулы (3.105). Из асимптотических формул (3.35) для $\lambda_k(A)$ и (3.76) для $\lambda_k(C)$ получаем, что

$$\lambda_k(A^{-1}) \sim d_m^{-1}k^{-2/m}, \quad \lambda_k(C) \sim \tilde{d_m} k^{-1/(m-1)}, k\to\infty. \tag{3.106}$$

Так как $m-1 \geqslant m/2$ при $m\geqslant 3$, то согласно лемме Фань Цюй (см. [9, с. 52]) отсюда следует, что

$$\lambda_k(A^{-1}+C) \sim \tilde{d_m} k^{-1/(m-1)}, k\to\infty, \quad m\geqslant 3,$$

т. е. асимптотическое поведение собственных значений $\lambda_k(A^{-1}+C)$ такое же, как и собственных значений $\lambda_k(C)$, и потому имеет место формула (3.105).

На основе установленных фактов перейдем к рассмотрению возмущенной задачи Стефана. Снова пользуясь общей формулой (2.32) уже при $\varepsilon\neq 0$, $f=\lambda u$, $\psi = \lambda\gamma u$, будем иметь

$$u = A_\varepsilon^{-1}(\lambda u) + V_\varepsilon(\lambda\,\gamma u), \quad u\in H^1(\Omega). \tag{3.107}$$

Используя еще связь (3.58) между A_ε и A, а также (3.84) для V_ε и V, получим соотношение

$$u = A^{-1/2}(I+\varepsilon S)^{-1}A^{1/2}(\lambda u) + A^{-1/2}(I+\varepsilon S)^{-1}(A^{1/2}V)(\lambda\,\gamma u), \tag{3.108}$$

которое после замены $u = A^{-1/2}\eta$, $\eta\in L_2(\Omega)$, приводит к спектральной задаче

$$(I+\varepsilon S)\eta = \lambda(A^{-1}+C)\eta, \quad \eta\in L_2(\Omega), \tag{3.109}$$

равносильной исходной возмущенной спектральной задаче (3.99).

Эта задача, в свою очередь, равносильна задаче

$$(I+\varepsilon S)^{-1}(A^{-1}+C)\eta = \mu\eta, \quad \mu = \lambda^{-1}. \tag{3.110}$$

Таким образом, задача Стефана (3.99) так же, как и задача Стеклова (3.68) (см., в частности, (3.87)), приведена к задаче на собственные значения слабо возмущенного компактного положительного оператора. Так как $A^{-1}+C>0$, то эта задача проще задачи (3.87), поскольку в (3.110) оператор $A^{-1}+C$ полный, т. е. имеет тривиальное ядро, и потому здесь не требуется, как это было для задачи Стеклова, проводить дополнительное проектирование на ядро основного оператора задачи.

Теорема 3.6. *Спектральная задача Стефана* (3.99) *имеет дискретный спектр* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, *состоящий из конечнократных собственных значений с предельной точкой* $\lambda=\infty$. *При любом* $\delta>0$ *все собственные значения этой задачи, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе* $|\arg\lambda|<\delta$. *Система корневых элементов задачи* (3.99) *полна в* $H^1(\Omega)$, *а также по форме* $\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\gamma u\|^2_{L_2(\Gamma)}$. *Собственные значения* λ_k *имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_k = \lambda_k^{-1}(A^{-1}+C)[1+o(1)] = d_m^{-1}k^{1/(m-1)}[1+o(1)] \quad (k\to\infty),\ \Omega\in\mathbb{R}^m. \tag{3.111}$$

Теорема 3.7. *Корневые элементы задачи* (3.99) *образуют базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha > m-1$ *в пространстве* $H^1(\Omega)$. *Если выполнено условие* (3.62), *т. е.*

$$c_\varepsilon := 1 - |\varepsilon| \Big(\|BA^{-1/2}\| \cdot \|A^{-1/2}\| + \|Q_\sigma\| \Big) > 0, \tag{3.112}$$

то спектр задачи (3.99) *расположен в правой полуплоскости, в параболической области*

$$\Lambda_\varepsilon := \Big\{ \operatorname{Re}\lambda \geqslant c_\varepsilon \lambda_1^{-1}(A^{-1}+C) : \ |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant (|\varepsilon| \|BA^{-1/2}\|)(\operatorname{Re}\lambda/c_\varepsilon)^{1/2} \Big\}. \tag{3.113}$$

Доказательство. Свойство базисности по Абелю—Лидскому следует из асимптотической формулы (3.105) и соответствующего утверждения из [38, с. 292]. Локализация спектра в комплексной плоскости доказывается так же, как аналогичное утверждение в теореме 3.4.

Именно, из уравнения (3.109) имеем соотношения

$$\operatorname{Re}\lambda((A^{-1}+C)\eta,\eta)_{L_2(\Omega)} \geqslant \Big[1 - |\varepsilon| \|BA^{-1/2}\| \cdot \|A^{-1/2}\| -$$
$$- |\varepsilon| \cdot \|Q_\sigma\| \Big] \cdot \|\eta\|^2_{L_2(\Omega)} =: c_\varepsilon \|\eta\|^2_{L_2(\Omega)},$$

$$|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant |\varepsilon| \|BA^{-1/2}\| \cdot \|A^{-1/2}\eta\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|\eta\|_{L_2(\Omega)} / \Big(\|A^{-1/2}\eta\|^2_{L_2(\Omega)} + \|C^{1/2}\eta\|^2_{L_2(\Omega)} \Big) \leqslant$$
$$\leqslant |\varepsilon| \|BA^{-1/2}\| \cdot \|\eta\|_{L_2(\Omega)} / \Big(\|A^{-1/2}\|^2_{L_2(\Omega)} + \|C^{1/2}\eta\|^2_{L_2(\Omega)} \Big)^{1/2}.$$

Из первого соотношения имеем неравенства

$$\operatorname{Re}\lambda \geqslant c_\varepsilon \|\eta\|^2_{L_2(\Omega)} / \Big(\|A^{-1/2}\eta\|^2_{L_2(\Omega)} + \|C^{1/2}\eta\|^2_{L_2(\Omega)} \Big) \geqslant c_\varepsilon \lambda_1^{-1}(A^{-1}+C),$$

а отсюда и из второго неравенства получаем, что

$$|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant |\varepsilon| \|BA^{-1/2}\| \cdot (\operatorname{Re}\lambda / c_\varepsilon)^{1/2},$$

т. е. спектр задачи (3.99) расположен в области Λ_ε из (3.113). □

3.5. Другие классы возмущенных спектральных задач. Опираясь на построения, проведенные в пункте 3.4, рассмотрим еще три класса возмущенных спектральных задач, встречающихся в приложениях.

1°. *Спектральная задача С. Крейна.* Она возникла при исследовании нормальных (собственных) колебаний тяжелой вязкой жидкости в открытом сосуде и состоит в нахождении нетривиальных решений следующей задачи:

$$L_\varepsilon u = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \quad \lambda\, \partial_\varepsilon u = \gamma u \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.114}$$

Здесь спектральный параметр λ линейно входит в уравнение и краевое условие, причем в краевом условии он стоит при $\partial_\varepsilon u$.

Заметим сначала, что при $\lambda = 0$ задача (3.114) имеет лишь тривиальное решение. В самом деле, из формулы Грина (2.5) при $\eta = u$ получаем, что при $L_\varepsilon u = 0$ и $\gamma u = 0$ будет

$$0 = \Phi_\varepsilon(u,u) \geqslant c_2 \|u\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad c_2 > 0, \quad u \in H^1(\Omega), \tag{3.115}$$

и потому $u = 0$. Отметим теперь, что от спектральной задачи Стефана (3.99) задача С. Крейна (3.114) отличается лишь тем, что в граничном условии на Γ вместо λ (в задаче Стефана) следует писать λ^{-1} (в задаче С. Крейна).

Учитывая этот факт и повторяя все выкладки, которые были проведены в пункте 3.4 для задачи Стефана, приходим к выводу, что задача С. Крейна равносильна уравнению (3.109) с заменой λ на λ^{-1} во втором слагаемом справа. Это дает спектральную задачу

$$(I + \varepsilon S)\eta = \lambda A^{-1}\eta + \lambda^{-1} C\eta, \quad \eta \in L_2(\Omega), \tag{3.116}$$

равносильную возмущенной задаче С. Крейна (3.114).

Задачи вида (3.116) достаточно подробно исследованы (см. [19, 24, 26]). Поэтому сейчас приведем лишь основной результат, относящийся к случаю, когда операторный пучок

$$L(\lambda) := I - \lambda(I+\varepsilon S)^{-1}A^{-1} - \lambda^{-1}(I+\varepsilon S)^{-1}C, \tag{3.117}$$

отвечающий задаче (3.116), допускает спектральную факторизацию. Достаточным условием для этого является условие

$$4\|(I+\varepsilon S)^{-1}\|^2 \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|C\| < 1. \tag{3.118}$$

Подробная процедура исследования описана, например, в [13, с. 82–86]. Именно, при выполнении условия (3.118) имеет место факторизация

$$\begin{aligned} M(\lambda) := \lambda L(\lambda) = \lambda I - (I+\varepsilon S)^{-1}C - \lambda^2 (I+\varepsilon S)^{-1}A^{-1} = \\ = Y^{-1}(I - \lambda Y(I+\varepsilon S)^{-1}A^{-1})(\lambda I - Y(I+\varepsilon S)^{-1}C), \end{aligned} \tag{3.119}$$

где оператор Y обратим и является решением уравнения

$$Y = I + (I+\varepsilon S)^{-1}A^{-1}Y(I+\varepsilon S)^{-1}CY. \tag{3.120}$$

При этом оператор-функция $I - \lambda Y(I+\varepsilon S)^{-1}A^{-1}$ обратима при

$$|\lambda| < r_+, \quad r_\pm := \frac{(1 \pm \sqrt{1 - 4\|(I+\varepsilon S)^{-1}\|^2 \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|C\|})}{2\|(I+\varepsilon S)^{-1}\| \cdot \|A^{-1}\|}, \quad 0 < r_- < r_+ < \infty, \tag{3.121}$$

а спектр оператора $Z := Y(I+\varepsilon S)^{-1}C$ лежит в круге

$$\sigma(Z) \subset \{\lambda : |\lambda| \leqslant r_-\}. \tag{3.122}$$

Таким образом, при $|\lambda| \leqslant r_-$ задача (3.116) сводится к задаче

$$(I+\Phi)C\eta = \lambda\eta, \quad \eta \in L_2(\Omega), \tag{3.123}$$

$$I + \Phi := (I + (I+\varepsilon S)^{-1}A^{-1}Y(I+\varepsilon S)^{-1}CY)(I+\varepsilon S)^{-1}, \quad \Phi \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)). \tag{3.124}$$

Здесь оператор $I+\Phi$, очевидно, обратим, а оператор $C \geqslant 0$, как и в задаче (3.87), имеет ядро $\ker C = L_{2,0}(\Omega)$, т. е. подпространство из ортогонального разложения (3.88):

$$L_2(\Omega) = L_{2,0} \oplus L_{2,h}(\Omega). \tag{3.125}$$

Вводя, как и в пункте 3.3, ортопроекторы P_0 и P_h на эти подпространства, представляя η в виде (3.89), т. е.

$$\eta = P_0\eta + P_h\eta = \eta_0 + \eta_h,$$

и исключая η_0, приходим к уравнению

$$(I_h + P_h\Phi P_h)C_h\eta_h = \lambda\eta_h, \quad C_h = P_hCP_h. \tag{3.126}$$

Здесь C_h — полный оператор в $L_{2,h}(\Omega)$, он положителен, компактен и имеет степенную асимптотику (3.95). Отсюда, как и в пункте 3.3, получаем результат, аналогичный теореме 3.5.

Теорема 3.8. *В области* $|\lambda| \leqslant r_-$ *задача* (3.126) *имеет дискретный спектр* $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^\infty$, *расположенный в правой полуплоскости и состоящий из конечнократных собственных значений* λ_k^0 *с предельной точкой* $\lambda = 0$. *При любом* $\delta > 0$ *все собственные значения* λ_k^0, *кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе* $|\arg\lambda| < \delta$. *Система корневых элементов* $\{\eta_k^0\}_{k=1}^\infty$ *задачи* (3.123) *после проектирования на подпространство* $L_{2,h}(\Omega)$, *т. е. система* $\{\eta_{k,h}^0\}_{k=1}^\infty$, $\eta_{k,h}^0 = P_h\eta_k^0$, *является полной в* $L_{2,h}(\Omega)$. *Поэтому система корневых элементов* $\{u_{k,h}^0\}_{k=1}^\infty$, $u_{k,h}^0 = A^{-1/2}\eta_{k,h}^0$, *полна в* $H_h^1(\Omega)$. *Собственные значения* λ_k^0 *задачи* (3.126), *т. е. собственные значения задачи* (3.116) *при* $|\lambda| \leqslant r_-$, *имеют асимптотическое поведение* (*см.* (3.97))

$$\lambda_k^0 = \lambda_k(C)[1+o(1)] = \tilde{d_m}k^{-1/(m-1)}[1+o(1)] \quad (k \to \infty). \tag{3.127}$$

Кроме полноты, система корневых элементов $\{u_{k,h}^0\}_{k=1}^\infty$, *отвечающая собственным значениям* $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^\infty$, *образует базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha > m-1$ *в пространстве* $H_h^1(\Omega)$.

Аналогичный подход можно применить при исследовании спектральной задачи в окрестности бесконечно удаленной точки. Именно, в пучке $L(\lambda)$ (см. (3.117)) осуществим замену $\lambda = \mu^{-1}$. Возникает пучок

$$\widetilde{L}(\mu) := I - \mu(I+\varepsilon S)^{-1}C - \mu^{-1}(I+\varepsilon S)^{-1}A^{-1},$$

который при условии (3.118) также допускает факторизацию в виде

$$\mu\widetilde{L}(\mu) = X^{-1}(I - \mu X(I+\varepsilon S)^{-1}C)(\mu I - X(I+\varepsilon S)^{-1}A^{-1}), \tag{3.128}$$

$$X = I + (I + \varepsilon S)^{-1} C X (I + \varepsilon S)^{-1} A^{-1} X, \tag{3.129}$$

причем первая оператор-функция в (3.128) обратима при $|\mu| < \tilde{r}_+ = 1/r_-$, оператор X также обратим, а спектр второй оператор-функции лежит в области $|\mu| \leqslant \tilde{r}_- = 1/r_+$.

Таким образом, возникает спектральная задача

$$\widetilde{Z}\eta := X(I + \varepsilon S)^{-1}) A^{-1} \eta = \mu \eta, \quad |\mu| \leqslant \tilde{r}_-. \tag{3.130}$$

Здесь упрощающим обстоятельством является тот факт, что A^{-1} — положительный и притом компактный оператор, и потому $\ker A^{-1} = \{0\}$. Поэтому для задачи (3.130), в отличие от (3.123) не нужно проводить процедуру проектирования на подпространство $L_{2,h}(\Omega)$.

Теорема 3.9. *В области* $|\lambda| \geqslant r_+$ *задача* (3.116) *имеет дискретный спектр* $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, *расположенный в правой комплексной полуплоскости и состоящий из конечнократных собственных значений* λ_k^∞ *с предельной точкой* $\lambda = \infty$. *При любом* $\delta > 0$ *все собственные значения* λ_k^∞, *кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе* $|\arg \lambda| < \delta$. *Система корневых элементов* $\{\eta_k^\infty\}_{k=1}^\infty$ *задачи* (3.130) *является полной в пространстве* $L_2(\Omega)$. *Поэтому система корневых элементов* $\{u_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, $u_k^\infty := A^{-1/2}\eta_k^\infty$, *полна в* $H^1(\Omega)$. *Собственные значения* λ_k^∞ *задачи* (3.114) *при* $|\lambda| \geqslant r_+$ *имеют асимптотическое поведение* (3.35):

$$\lambda_k^\infty = \lambda_k(A)[1 + o(1)] = d_m k^{2/m}[1 + o(1)], \quad d_m > 0 \quad (k \to \infty). \tag{3.131}$$

Кроме полноты, система корневых элементов $\{u_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, *отвечающая собственным значениям* $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, *образует базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha > m/2$ *в пространстве* $H^1(\Omega)$.

Таким образом, спектр задачи (3.114) при условии (3.118) имеет две ветви, он расположен в секторах комплексной плоскости $\mathbb{C}$, описанных в теоремах 3.8 и 3.9, а корневые функции обладают приведенными выше свойствами. Отметим еще, что асимптотические формулы (3.127) и (3.131) сохраняются и в случае, когда условие (3.118) может быть не выполнено (см. [29]).

2°. *Спектральная задача Аграновича.* Эта задача возникла в теории дифракции (см. [38]) и состоит в нахождении нетривиальных решений задачи

$$L_\varepsilon u + \lambda u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon u = \mu\, \gamma u \quad (\text{на } \Gamma), \tag{3.132}$$

где λ и μ — комплексные параметры. Здесь по отношению к задаче Стефана (3.99) следует сделать замены $\lambda \mapsto -\lambda$ в уравнении и $\lambda \mapsto \mu$ в граничном условии. Поэтому, исходя из уравнения (3.109) и осуществляя указанные замены, приходим к выводу, что задача (3.132) равносильна спектральной задаче

$$(I + \varepsilon S)\eta = -\lambda A^{-1}\eta + \mu C \eta, \quad \eta \in L_2(\Omega). \tag{3.133}$$

Отсюда получаем две разновидности спектральных задач: одна — при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ и спектральном параметре μ, а другая — при фиксированном $\mu \in \mathbb{C}$ и спектральном параметре λ.

Рассмотрим сначала второй вариант, т. е. будем считать, что λ — спектральный параметр, и перепишем уравнение (3.133) в виде

$$(I + \varepsilon S - \mu C)\eta = -\lambda A^{-1}\eta. \tag{3.134}$$

Будем далее полагать, что фиксированный параметр μ не совпадает с теми исключительными значениями μ_j, для которых оператор $I + \varepsilon S - \mu C$ необратим, т. е. задача

$$(I + \varepsilon S)\eta = \mu C \eta \tag{3.135}$$

имеет нетривиальное решение. Отсюда следует (см. пункт 3.3, уравнение (3.86)), что исключительные значения $\{\mu_j\}_{j=1}^\infty$ образуют спектр задачи Стеклова (3.68) и имеют асимптотическое поведение (3.97) (см. теорему 3.5).

Тогда (3.134) можно переписать в виде

$$(I + \varepsilon S - \mu C)^{-1} A^{-1} \eta = (-\lambda^{-1})\eta, \quad \eta \in L_2(\Omega), \tag{3.136}$$

которое с точностью до обозначений совпадает с финальным уравнением (3.60) задачи Неймана—Ньютона (3.28), см. пункт 3.2. Поэтому аналогично утверждениям теоремы 3.3 приходим к следующему выводу.

Теорема 3.10. *Пусть фиксированный параметр* μ *в задаче* (3.134) *не совпадает с какой-либо точкой спектра задачи Стеклова* (3.135). *Тогда задача* (3.134) *имеет дискретный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *с предельной точкой* $\lambda = \infty$. *При любом* $\delta > 0$ *все собственные значения этой задачи, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе* $|\pi - \arg\lambda| < \delta$. *Система корневых элементов задачи* (3.132) *полна в пространстве* $H^1(\Omega)$, *а собственные значения имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_k = -\lambda_k(A)[1 + o(1)] = -d_m k^{2/m}[1 + o(1)] \quad (k \to \infty). \tag{3.137}$$

Корневые элементы задачи (3.132) *образуют в пространстве* $H^1(\Omega)$ *также базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha > m/2$.

Рассмотрим теперь другой вариант, когда в уравнении (3.133) μ является спектральным, а λ — фиксированным параметром, и перепишем это уравнение в виде

$$(I + \varepsilon S + \lambda A^{-1})\eta = \mu C\eta, \quad \eta \in L_2(\Omega). \tag{3.138}$$

Напомним (см. пункт 3.5), что здесь C — компактный неотрицательный оператор, причем $\ker C = L_{2,0}(\Omega)$.

Уравнение (3.138) является обобщением задачи (3.86), возникшей в задаче Стеклова (пункт 3.3), и рассуждениями, проведенными для задачи Стеклова (теорема 3.5), а также при доказательстве теоремы 3.10, получаем такой вывод.

Теорема 3.11. *Пусть в задаче* (3.138) *фиксированный параметр* λ *не совпадает с какой-либо точкой* $-\lambda_j$, *где* $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ — *спектр задачи Неймана—Ньютона* (*пункт* 3.2, *уравнение* (3.64)). *Тогда задача* (3.138) *имеет дискретный спектр* $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, *состоящий из конечнократных собственных значений с предельной точкой* $\mu = \infty$. *При любом* $\delta > 0$ *все собственные значения этой задачи, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе* $|\arg\mu| < \delta$. *Система корневых элементов задачи* (3.132) *после проектирования на подпространство* $H_h^1(\Omega)$ *полна в* $H_h^1(\Omega)$, *а собственные значения* μ_k *имеют асимптотическое поведение* (*см.* (3.95))

$$\mu_k = \lambda_k^{-1}(C)[1 + o(1)] = \tilde{d}_m^{-1} k^{1/(m-1)}[1 + o(1)], \quad k \to \infty.$$

Кроме того, указанные проекции корневых элементов (3.132) *образуют в подпространстве* $H_h^1(\Omega)$ *базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha > m - 1$.

3°. *Спектральная задача Чуешова.* Данная задача возникла при исследовании динамических систем с поверхностной диссипации энергии и восходит к И. Д. Чуешову, который изучал начально-краевые нелинейные задачи (см. [39, 40]).

Соответствующая спектральная задача приводит к задаче

$$L_\varepsilon u + \lambda^2 u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon u = \lambda\alpha\,\gamma u \quad (\text{на } \Gamma), \tag{3.139}$$

где $\alpha > 0$ — параметр, характеризующий интенсивность поверхностной диссипации энергии. Снова сравнивая уравнения задач (3.139) и (3.99), видим, что в данной задаче следует сделать замены $\lambda \mapsto -\lambda^2$ в уравнении и $\lambda \mapsto \alpha\lambda$ в краевом условии. Отсюда получаем, что задача (3.139) равносильна спектральной задаче

$$(I + \varepsilon S)\eta = -\lambda^2 A^{-1}\eta + \alpha\lambda C\eta, \quad \eta \in L_2(\Omega). \tag{3.140}$$

Эта задача, даже в невозмущенном случае, когда $\varepsilon = 0$, до сих пор недостаточно исследована. В частности, при $\varepsilon = 0$, $\alpha = 0$ задача (3.140) имеет дискретный спектр, расположенный на мнимой оси, при этом собственные значения $\lambda_k^{\pm} = \pm i\lambda_k^{1/2}(A)$ определяются через спектр задачи Неймана. При возрастании параметра α, как показывают конкретные примеры (плоская задача), спектр $\{\lambda_k^{\pm}(\alpha)\}_{k=1}^{\infty}$ сдвигается с мнимой оси в правую полуплоскость и при некотором (или некоторых) критическом значении $\alpha_* > 0$ уходит в бесконечно удаленную точку. При дальнейшем возрастании α спектр $\{\lambda_k^{\pm}(\alpha)\}_{k=1}^{\infty}$ начинает двигаться влево и при $\alpha = +\infty$ снова попадает на мнимую ось, однако теперь в точки $\lambda_k^{\pm}(+\infty) = \pm i\lambda_k^{1/2}(A_0)$, где A_0 — оператор невозмущенной спектральной задачи Дирихле (пункт 3.1).

Вопрос о свойствах спектра и системы корневых элементов задачи (3.140) как в невозмущенном случае, так и в возмущенном ($\varepsilon \neq 0$) до сих пор остается открытым.

4. О начально-краевых задачах, порожденных полуторалинейной формой и порождающих спектральные задачи

Каждая из разобранных выше в разделе 3 спектральных задач порождается начально-краевой задачей, которая получается формальной заменой в спектральных задачах $\lambda \mapsto -d/dt$ и учитывает наличие заданных функций в уравнениях и краевых условиях.

4.1. Возмущенные классические начально-краевые задачи.

1°. *Начально-краевая задача Дирихле.* Она состоит в решении уравнения (см. (3.1))

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L_\varepsilon u = f(t) \quad (\text{в } \Omega), \quad \gamma u = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \quad u(0) = u^0. \tag{4.1}$$

Повторяя преобразования, проделанные в пункте 3.1, приходим к выводу, что задача (4.1) равносильна задаче Коши (см. (3.11))

$$\frac{du}{dt} + (A_0 - i\varepsilon B_0)u = f(t), \quad u(0) = u^0, \tag{4.2}$$

где $u = u(t)$ — искомая функция переменной t со значениями в $L_2(\Omega)$. Свойства оператора $A_0 - i\varepsilon B_0$ описаны в пункте 3.1.

Из этих свойств следует, что оператор B_0 вполне подчинен оператору A_0, уравнение (4.2) как в невозмущенном варианте ($\varepsilon = 0$), так и в возмущенном ($\varepsilon \neq 0$) является абстрактным параболическим уравнением, а полугруппа $\mathcal{U}(t)$, отвечающая ее генератору $-(A_0 - i\varepsilon B_0)$, является аналитической в секторе, содержащем положительную полуось. Отсюда получаем следующий результат (см. [25, теоремы 7.2, 6.7]).

Теорема 4.1. *Пусть в задаче* (4.1) *выполнены условия*

$$\left.\begin{aligned} &f(t,x) \in C^\gamma([0,T]; L_2(\Omega)), \quad 0 < \gamma \leqslant 1, \\ &u^0(t,x) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) = \mathcal{D}(A_0), \quad x \in \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Тогда задача (4.2)*, а вместе с ней и задача* (4.1) *имеют сильное решение*

$$u(t,x) \in C^1([0,T]; L_2(\Omega)) \cap C([0,T]; \mathcal{D}(A_0)), \tag{4.4}$$

и для этого решения все слагаемые в (4.2) *являются непрерывными функциями* $t \in [0,T]$ *со значениями в* $L_2(\Omega)$.

2°. *Начально-краевая задача Неймана—Ньютона.* Эта задача порождена задачей (3.28) и имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + L_\varepsilon v = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon v = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \quad v(0) = v^0. \tag{4.5}$$

Повторяя преобразования из пункта 3.2 и отправляясь от уравнения

$$(I + \varepsilon S)\eta = \lambda A^{-1}\eta, \quad \eta = A^{1/2}v,$$

следующего из (3.60), приходим к выводу, что задача (4.5) равносильна задаче Коши

$$A^{-1}\frac{d\eta}{dt} + (I + \varepsilon S)\eta = A^{-1/2}f + A^{1/2}V\psi, \quad \eta(0) = \eta^0 := A^{1/2}v^0, \tag{4.6}$$

в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$. Определения и свойства операторных коэффициентов из (4.5) описаны в пункте 3.2.

Осуществим в (4.6) замену

$$A^{-1}\eta(t) =: w(t). \tag{4.7}$$

Тогда вместо (4.6) возникает задача Коши

$$\frac{dw}{dt} + (I + \varepsilon S)Aw = A^{-1/2}f(t) + A^{1/2}V\psi(t), \quad w(0) = w^0 = A^{-1/2}v^0. \tag{4.8}$$

Здесь снова в силу компактности S оператор $-(I + \varepsilon S)A$ является генератором аналитической полугруппы и так же, как в предыдущем варианте 1°, приходим к следующему выводу.

Теорема 4.2. *Пусть в задаче Неймана—Ньютона* (4.5) *выполнены условия*

$$\left.\begin{aligned} &v^0(x) \in H^1(\Omega),\ f(t,x) \in C^\gamma([0,T];(H^1(\Omega))^*),\\ &\psi(t,x) \in C^\gamma([0,T];H^{-1/2}(\Gamma)), \quad 0<\gamma\leqslant 1. \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

Тогда задача (4.8) *имеет сильное по переменной* t *решение* $w(t) \in C^1([0,T];L_2(\Omega)) \cap C([0,T];\mathcal{D}(A))$. *Соответственно исходная задача* (4.5) *имеет сильное по переменной* t *решение, у которого*

$$v(t,x) \in C([0,T];H^1(\Omega)), \quad \frac{\partial v}{\partial t} \in C([0,T];(H^1(\Omega))^*). \tag{4.10}$$

При этом в уравнении в Ω *все слагаемые являются непрерывными функциями переменной* $t \in [0,T]$ *со значениями в* $(H^1(\Omega))^*$, *а в граничном условии — со значениями в* $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Доказательство. Если выполнены условия (4.9), то, как следует из рассмотрений пункта 2.3, правая часть в (4.8) принадлежит $C^\gamma([0,T];L_2(\Omega))$, а $w^0 \in \mathcal{D}(A)$. Поэтому (снова см. [25]) задача Коши (4.8) имеет сильное решение, у которого все слагаемые в уравнении (4.8) принадлежат $C([0,T];L_2(\Omega))$. Отсюда с учетом связей $Aw(t) = \eta(t) = A^{1/2}v(t)$ получаем, что $v(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A^{1/2})) = C([0,T];H^1(\Omega))$. Далее, из свойства $dw/dt \in C([0,T];L_2(\Omega))$ следует, что $dv/dt = A^{1/2}dw/dt \in C([0,T];(H^1(\Omega))^*)$.

Возвращаясь от (4.6) к уравнению для $v(t) = A^{-1/2}\eta(t)$, перепишем его в виде

$$v = A^{-1}(-\varepsilon Bv + f - \frac{dv}{dt}) + V(\psi + \varepsilon\sigma\gamma v) =: v_1 + v_2,$$

откуда согласно общей формуле (2.32) приходим к выводу, что

$$L_0 v_1 = -\varepsilon Bv + f - \frac{dv}{dt} \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_0 v_1 = 0 \quad (\text{на } \Gamma),$$
$$L_0 v_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_0 v_2 = \varepsilon\sigma\gamma v + \psi \quad (\text{на } \Gamma).$$

Отсюда следует, что

$$L_0 v = L_0 v_1 + L_0 v_2 = -\varepsilon Bv + f - \frac{dv}{dt} \quad (\text{в } \Omega),$$
$$\partial_0 v = \partial_0 v_1 + \partial_0 v_2 = \varepsilon\sigma\gamma v + \psi \quad (\text{на } \Gamma),$$

и потому для $v = v(t)$ выполнены уравнения (4.5). Так как по доказанному $dv/dt \in C([0,T];(H^1(\Omega))^*)$, то в уравнении в Ω из (4.5) все слагаемые из $C([0,T];(H^1(\Omega))^*)$. Далее, из свойства $v(t) \in C([0,T];H^1(\Omega))$ следует, что $\partial_0 v \in C([0,T];H^{-1/2}(\Gamma))$, и потому в граничном условии на Γ все слагаемые из $C([0,T];H^{-1/2}(\Gamma))$. □

3°. *Начально-краевая задача Стеклова.* Спектральная задача Стеклова (3.68) порождается начально-краевой задачей вида

$$L_\varepsilon w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial}{\partial t}\gamma w + \partial_\varepsilon w = \psi(t) \quad (\text{на } \Gamma), \quad w(0) = w^0. \tag{4.11}$$

Повторяя теперь преобразования из пункта 3.3, приходим к выводу, что задача (4.11) равносильна задаче Коши

$$C\frac{d\eta}{dt} + (I + \varepsilon S)\eta = A^{1/2}V\psi, \quad \eta(0) = \eta^0 := A^{1/2}w^0 \tag{4.12}$$

в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$.

Воспользуемся далее тем фактом, что C — компактный неотрицательный оператор, причем

$$L_2(\Omega) = L_{2,0}(\Omega) \oplus L_{2,h}(\Omega), \quad \ker C = L_{2,0}(\Omega), \tag{4.13}$$

и снова, как и в пункте 3.3, проведем преобразования, связанные с проектированием в (4.12) на подпространства (4.13), считая, что $\eta = \eta_0 + \eta_h$. Вводя еще новую искомую функцию

$$v_h(t) := C_h\eta_h(t), \quad C_h = P_h C P_h, \tag{4.14}$$

приходим к задаче Коши в подпространстве $L_{2,h}(\Omega)$ (см. (3.92)):

$$\frac{dv_h}{dt} + (I_h + T_h(\varepsilon)C_h^{-1}v_h = A^{1/2}V\psi(t), \quad v_h(0) = v_h^0 = C_h P_h A^{1/2} w^0. \tag{4.15}$$

Здесь $T_h(\varepsilon)$ — компактный оператор, действующий в $L_{2,h}(\Omega)$ (см. (3.93)), причем $I_h + T_h(\varepsilon)$ обратим.

Теорема 4.3. *Пусть в задаче* (4.11) *выполнены условия*

$$\psi(t) \in C^\gamma([0,T]; H^{-1/2}(\Gamma)), \quad 0 < \gamma \leqslant 1, \quad w(0) = w^0 \in H^1(\Omega). \tag{4.16}$$

Тогда задача (4.15) *имеет единственное сильное решение* $v_h(t)$, *для которого все слагаемые в* (4.15) *являются непрерывными функциями* $t \in [0,T]$ *со значениями в* $L_{2,h}(\Omega)$ *и выполнено начальное условие. Далее, при условиях* (4.16) *задача* (4.11) *имеет единственное сильное решение* $w(t) \in C([0,T]; H^1_{h,\varepsilon}(\Omega))$, *для которого выполнено граничное условие на* Γ, *причем в этом условии все слагаемые являются элементами из* $C([0,T]; H^{-1/2}(\Gamma))$.

Доказательство. Уравнение (4.15) является абстрактным параболическим, а оператор $-(I_h + T_h(\varepsilon))C_h^{-1}$ является генератором аналитической полугруппы операторов, действующей в $L_{2,h}(\Omega)$. Кроме того, при условии (4.16) функция $A^{1/2}V\psi(t) \in C^\gamma([0,T]; L_{2,h}(\Omega))$, так как $V \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma); H^1_h(\Omega))$, $A^{1/2} \in \mathcal{L}(H^1_h(\Omega); L_{2,h}(\Omega))$. Наконец, если $w^0 \in H^1(\Omega)$, то $A^{1/2}w^0 \in L_2(\Omega)$, $P_h A^{1/2} w^0 \in L_{2,h}(\Omega)$, $v_h^0 = C_h P_h A^{1/2} w^0 \in \mathcal{D}(C_h^{-1})$, $\mathcal{R}(C_h^{-1}) = L_{2,h}(\Omega)$.

Из этих свойств следует, что задача (4.15) имеет единственное сильное решение $v_h(t)$ на отрезке $[0,T]$, причем для этого решения все слагаемые в уравнении (4.15) являются элементами из $C([0,T]; L_{2,h}(\Omega))$ и выполнено начальное условие $v_h(0) = v_h^0$.

Вернемся теперь от задачи (4.15) к задаче (4.12) в пространстве $L_2(\Omega)$, проведя преобразования, обратные тем, которые были выше проделаны при переходе от (4.12) к (4.15). Тогда приходим к выводу, что существует единственное решение $\eta(t)$ задачи Коши (4.12), у которого все слагаемые в уравнении (4.12) являются элементами из $C([0,T]; L_2(\Omega))$. Так как оператор $(I + \varepsilon S)$ обратим, то отсюда получаем (см. второе слагаемое), что $\eta(t) \in C([0,T]; L_2(\Omega))$.

Осуществляя еще переход от задачи (4.12) к исходной задаче (4.11), приходим к выводу, что функция $w(t) \in C([0,T]; H^1(\Omega))$, $L_\varepsilon w = 0$, т. е. $w(t) \in C([0,T]; H^1_{h,\varepsilon}(\Omega))$. Отсюда следует, что $\partial_\varepsilon w \in C([0,T]; H^{-1/2}(\Gamma))$ и выполнено граничное условие на Γ в (4.11), причем в этом соотношении все слагаемые являются непрерывными функциями переменной t со значениями в $H^{-1/2}(\Gamma)$. $\square$

4°. *Начально-краевая задача Стефана.* Задача (3.99) порождается следующей задачей:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L_\varepsilon u = f(t) \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial}{\partial t}\gamma u + \partial_\varepsilon u = \psi(t) \quad (\text{на } \Gamma), \quad u(0) = u^0. \tag{4.17}$$

Она интересна тем, что здесь производная $\partial/\partial t$ входит не только в уравнение, но и в краевое условие.

Осуществляя в задаче (4.17) те же преобразования, которые в пункте 3.4 были проделаны для задачи (3.99), получаем, что задача (4.17) равносильна задаче Коши

$$(A^{-1} + C)\frac{d\eta}{dt} + (I + \varepsilon S)\eta = A^{-1/2}f + A^{1/2}V\psi, \quad \eta(0) = \eta^0 := A^{1/2}u^0 \tag{4.18}$$

в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$.

Эта задача обобщает задачу Стеклова (4.12). Здесь, в отличие от (4.12), оператор $A^{-1} + C$ компактный и положительный, и потому в (4.18) не требуется проводить дополнительное проектирование. Вводя новую искомую функцию по формуле

$$(A^{-1} + C)\eta(t) =: v(t), \tag{4.19}$$

получаем из (4.18) задачу Коши

$$\begin{gathered} \frac{dv}{dt} + (I + \varepsilon S)(A^{-1} + C)^{-1}v = A^{-1/2}f + A^{1/2}V\psi(t), \\ v(0) = (A^{-1} + C)\eta^0 = (A^{-1} + C)A^{1/2}u^0. \end{gathered} \tag{4.20}$$

Теорема 4.4. *Пусть в задаче* (4.17) *выполнены условия*

$$\left.\begin{aligned} &u^0 \in H^1(\Omega),\ f(t) \in C^\gamma([0,T]; (H^1(\Omega))^*), \\ &\psi(t) \in C^\gamma([0,T]; H^{-1/2}(\Gamma)), \quad 0 < \gamma \leqslant 1. \end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

Тогда задача (4.20)*, а вместе с ней и задача* (4.18) *имеют единственное сильное решение* $v(t) \in C([0,T];\mathcal{D}((A^{-1}+C)^{-1}))$ *и соответственно* $\eta(t) \in C([0,T];L_2(\Omega))$*. При этом в* (4.20) *и* (4.18) *все слагаемые являются элементами из* $C([0,T];L_2(\Omega))$*. Далее, при сформулированных условиях исходная задача Стефана* (4.17) *имеет единственное сильное решение* $u(t) \in C([0,T];H^1(\Omega))$*, для которого все слагаемые в уравнении* (4.17) *являются элементами из* $C([0,T];(H^1(\Omega))^*)$*, а в граничном условии — элементами из* $C([0,T];H^{-1/2}(\Gamma))$*.*

Доказательство. Если выполнены условия (4.21), то в уравнении (4.20) правая часть принадлежит $C^\gamma([0,T];L_2(\Omega))$, а $v_0 \in \mathcal{D}((A^{-1}+C)^{-1})$. При этом оператор $-(I+\varepsilon S)(A^{-1}+C)^{-1}$ является генератором аналитической полугруппы операторов, действующей в $L_2(\Omega)$. Отсюда следует, что задача (4.20) имеет единственное сильное решение из $C([0,T];\mathcal{D}((A^{-1}+C)^{-1}))$, а потому задача (4.18) — единственное сильное решение $\eta(t) \in C([0,T];L_2(\Omega))$ (см. замену (4.19)), причем в (4.20) и (4.18) все слагаемые являются элементами из $C([0,T];L_2(\Omega))$.

Вернемся теперь в (4.18) к искомой функции

$$u(t) = A^{-1/2}\eta(t) \in C([0,T];H^1(\Omega)) \tag{4.22}$$

и подействуем слева оператором $A^{-1/2}$. Учитывая еще формулы (3.54) и (3.53) для S, придем к соотношению

$$u = A^{-1}\Big(-\varepsilon Bu - \frac{du}{dt} - f(t)\Big) + V\Big(\varepsilon\sigma\gamma u - \frac{d}{dt}\gamma u + \psi(t)\Big) =: u_1 + u_2. \tag{4.23}$$

Равенство

$$u_1 = A^{-1}\Big(-\varepsilon Bu - \frac{du}{dt} - f(t)\Big) \tag{4.24}$$

равносильно условиям (см. (3.31), (3.32))

$$L_0 u_1 = -\varepsilon Bu - \frac{du}{dt} - f(t) \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_0 u_1 = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \tag{4.25}$$

Соответственно равенство

$$u_2 = V\Big(\varepsilon\sigma\gamma u - \frac{d}{dt}(\gamma u) + \psi(t)\Big) \tag{4.26}$$

равносильно условиям

$$L_0 u_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_0 u_2 = \varepsilon\sigma\gamma u - \frac{d}{dt}(\gamma u) + \psi(t) \quad (\text{на } \Gamma). \tag{4.27}$$

Отсюда приходим к связям

$$\begin{gathered} L_0(u_1+u_2) = L_0 u = -\varepsilon Bu - \frac{du}{dt} - f(t) \quad (\text{в } \Omega), \\ \partial_0(u_1+u_2) = \partial_0 u = -\varepsilon\sigma\gamma u - \frac{d}{dt}(\gamma u) + \psi(t) \quad (\text{на } \Gamma), \end{gathered} \tag{4.28}$$

откуда получаем соотношения

$$\frac{du}{dt} + L_\varepsilon u = f(t) \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{d}{dt}(\gamma u) + \partial_\varepsilon u = \psi(t) \quad (\text{на } \Gamma), \tag{4.29}$$

т. е. уравнения (4.17) исходной задачи Стефана.

Из (4.22) следует, что $L_0 u \in C([0,T];(H^1(\Omega))^*)$; кроме того, из свойства $B \in \mathcal{L}(H^1(\Omega);L_2(\Omega))$ (лемма 3.1) получаем, что $-\varepsilon Bu \in C([0,T];L_2(\Omega)) \subset C([0,T];(H^1(\Omega))^*)$. Поэтому в (4.29) все слагаемые в первом уравнении являются элементами из $C([0,T];(H^1(\Omega))^*)$. Аналогичным образом, опираясь на свойство $\partial_\varepsilon u \in C([0,T];(H^{-1/2}(\Gamma))$, следующее из (4.22), устанавливаем, что все слагаемые во втором уравнении (4.29) являются элементами из $C([0,T];(H^{-1/2}(\Gamma)))$. □

4.2. Некоторые неклассические начально-краевые задачи математической физики. Здесь будут рассмотрены начально-краевые задачи, порождающие спектральные задачи Крейна, Аграновича и Чуешова (см. пункт 3.5).

1°. *Начально-краевая задача С. Крейна.* Эта задача порождает спектральную задачу (3.114), если считать, что $u(t)$ отвечает полю скорости в вязкой жидкости, а $w(t)$ — полю смещений частиц жидкости от состояния равновесия, причем $u(t) = dw/dt$. Тогда приходим к задаче

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2w}{dt^2} + L_\varepsilon \frac{dw}{dt} = f(t) \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{d}{dt}\partial_\varepsilon w + \gamma w = \psi(t) \quad (\text{на } \Gamma), \\ &\qquad w(0) = w^0, \quad \frac{dw}{dt}(0) = u(0) = u^0. \end{aligned}\right\} \tag{4.30}$$

Снова повторяя преобразования из пункта 3.4, получаем, что задача (4.30) равносильна задаче Коши

$$\left.\begin{aligned} &A^{-1}\frac{d^2\eta}{dt^2} + (I + \varepsilon S)\frac{d\eta}{dt} + C\eta = A^{-1/2}f(t) + A^{1/2}V\psi(t), \\ &\eta := A^{1/2}w, \quad \eta(0) = A^{1/2}w^0, \quad \frac{d\eta}{dt}(0) = A^{1/2}u^0 \end{aligned}\right\} \tag{4.31}$$

в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$.

Эту задачу, в свою очередь, можно преобразовать в задачу Коши для системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка в пространстве $L_2(\Omega) \oplus L_2(\Gamma)$.

С этой целью перепишем задачу (4.30) в виде (см. 3° из пункта 2.3)

$$\left.\begin{aligned} L_0\frac{dw}{dt} &= -\varepsilon B\frac{dw}{dt} + f - \frac{d^2w}{dt^2} \quad (\text{в } \Omega), \\ \partial_0\frac{dw}{dt} &= \varepsilon\sigma\gamma\frac{dw}{dt} - \gamma w + \psi \quad (\text{на } \Gamma) \end{aligned}\right\} \tag{4.32}$$

и воспользуемся формулой (2.32) при $\varepsilon = 0$:

$$\frac{dw}{dt} = A^{-1}(-\varepsilon B\frac{dw}{dt} + f - \frac{d^2w}{dt^2}) + V(\varepsilon\sigma\gamma\frac{dw}{dt} - \gamma w + \psi). \tag{4.33}$$

Возникает дифференциально-операторное уравнение второго порядка

$$A^{-1}\frac{d^2w}{dt^2} + [I + \varepsilon(A^{-1}B - V\sigma\gamma)]\frac{dw}{dt} + V\gamma w = A^{-1}f + V\psi, \tag{4.34}$$

которое после замены

$$w(t) = A^{-1/2}\eta(t) \tag{4.35}$$

и действия слева оператором $A^{1/2}$ (это можно сделать) переходит в уравнение

$$\begin{gathered} A^{-1}\frac{d^2\eta}{dt^2} + (I + \varepsilon S)\frac{d\eta}{dt} + C\eta = A^{-1/2}f + A^{1/2}V\psi, \\ C = (A^{1/2}V)(\gamma A^{-1/2}) = (\gamma A^{-1/2})^*(\gamma A^{-1/2}). \end{gathered} \tag{4.36}$$

Перейдем теперь от (4.36) к системе двух дифференциальных уравнений следующим образом. Осуществим в (4.36) замены

$$\eta(t) = Av(t), \quad \frac{d\xi}{dt} = -i(\gamma A^{-1/2})\eta(t), \quad \xi(0) = 0. \tag{4.37}$$

Тогда, используя связь

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -i(\gamma A^{-1/2})\frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{d\xi}{dt}(0) = -i(\gamma A^{-1/2})\eta(0), \tag{4.38}$$

приходим вместо (4.36) к следующей системе уравнений и начальных условий:

$$\begin{gathered} \frac{d^2v}{dt^2} + (I + \varepsilon S)A\frac{dv}{dt} + i(\gamma A^{-1/2})^*\frac{d\xi}{dt} = A^{-1/2}f + A^{1/2}V\psi, \\ \frac{d^2\xi}{dt^2} + i(\gamma A^{-1/2})A\frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt}(0) = A^{-1/2}u^0, \ \frac{d\xi}{dt}(0) = -i\gamma w^0, \end{gathered} \tag{4.39}$$

в которых присутствуют лишь производные от искомых функций.

Осуществляя еще здесь замену

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v \\ \xi \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} v_1(t) \\ \xi_1(t) \end{pmatrix}, \tag{4.40}$$

получим задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка в пространстве $L_2(\Omega)\oplus L_2(\Gamma)$:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_1 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I+\varepsilon S + A^{-1} & i(\gamma A^{-1/2})^* \\ i(\gamma A^{-1/2}) & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = \\ &= e^{-t}\begin{pmatrix} A^{-1/2}f(t) + A^{1/2}V\psi(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_1(0) = A^{-1/2}u^0,\ \xi_1(0) = -i\gamma w^0. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Теорема 4.5. *Пусть в задаче* (4.30) *выполнены условия*

$$\begin{gathered} w^0 \in H^1(\Omega),\ u^0 \in H^1(\Omega),\ f(t) \in C^\gamma([0,T];(H^1(\Omega))^*), \\ \psi(t) \in C^\gamma([0,T];H^{-1/2}(\Gamma)),\ 0<\gamma\leqslant 1. \end{gathered} \tag{4.42}$$

Тогда существует единственное решение этой задачи $w(t)\in C^1([0,T];H^1(\Omega))$, для которого все слагаемые в уравнении (4.30) *являются непрерывными функциями $t\in[0,T]$ со значениями в $(H^1(\Omega))^*$, а в граничном условии на Γ — непрерывными функциями t со значениями в $H^{-1/2}(\Gamma)$.*

Доказательство. Оно проводится по схеме, уже использованной при доказательстве теоремы 4.4.

Заметим сначала, что уравнение (4.41) снова абстрактное параболическое, так как оператор $\mathrm{diag}(A;I)$ самосопряжен и положительно определен на области определения $\mathcal{D}(A)\oplus L_2(\Gamma)$, и этот оператор умножается на операторную матрицу, имеющую структуру единичного плюс компактного оператора, действующего в $L_2(\Omega)\oplus L_2(\Gamma)$. Действительно, S и A^{-1} — компактные операторы в $L_2(\Omega)$, а $\gamma A^{-1/2}\in\mathcal{L}(L_2(\Omega);H^{1/2}(\Gamma))$, $H^{1/2}(\Gamma)\hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Gamma)$.

Если выполнены условия (4.42), то в правой части

$$A^{-1/2}f(t) + A^{1/2}V\psi(t) \in C^\gamma([0,T];L_2(\Omega)),\ 0<\gamma\leqslant 1,$$

$$v_1(0) = A^{-1/2}u^0 \in \mathcal{D}(A),\ \xi_1(0) = -i\gamma w^0 \in H^{1/2}(\Gamma)\subset L_2(\Gamma).$$

Поэтому при условиях (4.42) задача Коши (4.41) имеет единственное решение $(v_1(t);\xi_1(t))^\tau$ на отрезке $[0,T]$, причем все слагаемые (4.41) являются непрерывными функциями t со значениями в $L_2(\Omega)\oplus L_2(\Gamma)$.

Отсюда, согласно замене (4.40), получаем, что для функции $(v(t);\xi(t))^\tau$ справедливы уравнения задачи (4.39), где все слагаемые — элементы из $C([0,T];L_2(\Omega))$ либо $C([0,T];L_2(\Gamma))$ соответственно. Далее, из (4.37)–(4.39) тогда следует, что для функции $\eta(t)$ справедливо уравнение (4.36), где все слагаемые — элементы из $C([0,T];L_2(\Omega))$. Отсюда в силу замены (4.35) получаем, что справедливо уравнение (4.34), где все слагаемые — элементы из $C([0,T];H^1(\Omega))$. Переписывая это уравнение в виде (4.33), приходим к выводу, что функция dw/dt дает решение задачи (4.32), т. е. исходной задачи (4.30).

При этом $dw/dt = A^{-1/2}d\eta/dt \in C([0,T];H^1(\Omega))$, следовательно, $-\varepsilon B dw/dt \in C([0,T];L_2(\Omega))$, $L_0 dw/dt \in C([0,T];(H^1(\Omega))^*)$. Значит, все слагаемые в уравнении (4.30) в Ω — элементы из $C([0,T];(H^1(\Omega))^*)$. Аналогично, опираясь на свойства $\sigma\gamma dw/dt \in C([0,T];H^{-1/2}(\Gamma))$, $\gamma w\in C^1([0,T];H^{1/2}(\Gamma))$, убеждаемся, что все слагаемые в граничном условии из (4.30) — элементы из $C([0,T];H^{-1/2}(\Gamma))$. □

2°. *Начально-краевые задачи Аграновича.* Эти две задачи порождают спектральную задачу (3.116) в следующих вариантах.

1. Если параметр $\mu\in\mathbb{C}$ фиксирован и задан, то начально-краевая задача, отвечающая задаче Аграновича (3.116), формулируется следующим образом:

$$\frac{dv}{dt} + L_\varepsilon v = f(t) \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon v = \mu\,\gamma v + \psi(t) \quad (\text{на } \Gamma), \quad v(0) = v^0. \tag{4.43}$$

По постановке она близка к начально-краевой задаче Неймана—Ньютона (4.5). Снова отправляясь от преобразований пункта 3.2, приходим к выводу, что задача (4.43) равносильна задаче Коши

$$A^{-1}\frac{d\eta}{dt} + (I+\varepsilon S - \mu C)\eta = A^{-1/2}f + A^{1/2}V\psi, \quad \eta(0) = \eta^0 := A^{1/2}v^0, \tag{4.44}$$

которая рассматривается в пространстве $L_2(\Omega)$, обобщает задачу (4.5) и при $\mu = 0$ совпадает с ней.

Так как в (4.44) C — компактный оператор, то уравнение (4.44) — абстрактное параболическое. Поэтому для первой начально-краевой задачи (4.43) справедливы утверждения теоремы 4.2 при выполнении условий (4.9).

2. Второй вариант соответствует ситуации, когда в спектральной задаче (3.116) параметр λ фиксирован и задан. Тогда возникает начально-краевая задача

$$L_\varepsilon w + \lambda w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{d}{dt}\gamma w + \partial_\varepsilon w = \psi(t) \quad (\text{на } \Gamma), \quad w(0) = w^0, \tag{4.45}$$

близкая к начально-краевой задаче Стеклова (3.125).

Повторяя преобразования пункта 3.3, получаем, что задача (4.45) равносильна задаче Коши

$$C\frac{d\eta}{dt} + (I + \varepsilon S + \lambda A^{-1})\eta = A^{1/2}V\psi(t), \quad \eta(0) = \eta^0 := A^{1/2}w^0, \tag{4.46}$$

обобщающей задачу (4.12) и при $\lambda = 0$ совпадающей с ней.

От задачи (4.46), как и в пункте 3.3, можно перейти путем проектирования на подпространство $L_{2,h}(\Omega)$ к задаче Коши вида (4.15) с компактным оператором $T_h(\varepsilon;\lambda)$, учитывающим дополнительное слагаемое $\lambda A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$. Отсюда следует, что для исходной второй начально-краевой задачи Аграновича справедливы утверждения теоремы 4.3 при выполнении условий (4.16).

3°. *Начально-краевая задача Чуешова.* Спектральная задача Чуешова (3.139) порождается начально-краевой задачей

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dt^2} + L_\varepsilon u = f(t) \quad (\text{в } \Omega), \quad \alpha\frac{d}{dt}\gamma u + \partial_\varepsilon u = \psi(t) \quad (\text{на } \Gamma),\\ &u(0) = u^0, \quad \frac{du}{dt}(0) = u^1. \end{aligned}\right\} \tag{4.47}$$

Повторяя, как и в задаче (4.31), переход от (4.31) к задаче (4.43), приходим к выводу, что задача (4.47) равносильна задаче Коши

$$\left.\begin{aligned} &A^{-1}\frac{d^2\eta}{dt^2} + \alpha C\frac{d\eta}{dt} + (I + \varepsilon S)\eta = A^{-1/2}f(t) + A^{1/2}V\psi(t),\\ &\eta(0) = \eta^0 := A^{1/2}u^0, \quad \frac{d\eta}{dt}(0) = \eta^1 := A^{1/2}u^1. \end{aligned}\right\} \tag{4.48}$$

Задачу (4.48) можно преобразовать в задачу Коши для системы двух интегродифференциальных уравнений первого порядка путем следующих преобразований. Перепишем (4.48) в виде

$$A^{-1/2}\frac{d^2}{dt^2}(A^{-1/2}\eta) + \alpha C\frac{d\eta}{dt} + (I + \varepsilon(S_2 - S_1))\eta = A^{-1/2}f(t), \tag{4.49}$$

учитывающем выражение для оператора S, см. пункт 3.2. Будем здесь считать, что выполнено условие

$$|\varepsilon|(\|S_1\| + \|S_2\|) < 1, \quad S_1 = S_1^* = (A^{1/2}V)\sigma(\gamma A^{-1/2}),\ S_2 := A^{-1/2}(BA^{-1/2}). \tag{4.50}$$

Тогда оператор $I - \varepsilon S_1 \gg 0$ и потому также $I_\varepsilon := (I - \varepsilon S_1)^{1/2} \gg 0$.

Введем далее новую искомую функцию $w(t)$ соотношениями

$$-iI_\varepsilon\eta(t) =: \frac{dw}{dt}, \quad w(0) = 0, \tag{4.51}$$

и будем считать, что $\eta(t)$ и dw/dt дифференцируемы по t. Тогда вместо задачи Коши для уравнения (4.49) приходим к задаче

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\frac{d^2}{dt^2}\left[\begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta\\ w\end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix}\alpha C & iI_\varepsilon\\ iI_\varepsilon & 0\end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\eta\\ w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A^{-1/2}f(t) - \varepsilon S_2\eta(t)\\ 0\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}\eta\\ w\end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix}A^{1/2}u^0\\ 0\end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\eta\\ w\end{pmatrix}\bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix}A^{1/2}u^1\\ -iI_\varepsilon A^{1/2}u^0\end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{4.52}$$

в которой слева стоят лишь производные от искомых функций.

Осуществляя еще здесь замену

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\eta(t)\\ w(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A^{1/2} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1(t)\\ w_1(t)\end{pmatrix} \tag{4.53}$$

и действуя слева оператором diag $(A^{1/2}; I)$, приходим к задаче Коши для интегродифференциального уравнения первого порядка в $L_2(\Omega) \oplus L_2(\Omega)$:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\eta_1\\ w_1\end{pmatrix} + \left\{\begin{pmatrix}A^{1/2} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha C & iI_\varepsilon\\ iI_\varepsilon & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{1/2} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\eta_1\\ w_1\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}f(t) + Bu^0\\ 0\end{pmatrix} - \varepsilon\int\limits_0^t \begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1(s)\\ w_1(s)\end{pmatrix} dS, \quad \begin{pmatrix}\eta_1(0)\\ w_1(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u^1\\ -iI_\varepsilon A^{1/2}u^0.\end{pmatrix} \tag{4.54}$$

Изучим теперь свойства операторных матриц в этом уравнении.

Лемма 4.1. *Операторная матрица $\mathcal{A}$ в фигурных скобках в (4.54) является максимальным аккретивным оператором, действующим в $L_2(\Omega) \oplus L_2(\Omega)$ и заданным на области определения*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{(\eta_1; w_1)^\tau : \eta_1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \alpha CA^{1/2}\eta_1 + iI_\varepsilon w_1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})\}. \tag{4.55}$$

Доказательство. Свойство аккретивности этой операторной матрицы следует из неравенства

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}(\eta_1; w_1)^\tau, (\eta_1; w_1)^\tau)_{L_2(\Omega)\oplus L_2(\Omega)} = \alpha(CA^{1/2}\eta_1, A^{1/2}\eta_1)_{L_2\Omega} = \alpha\|\gamma\eta_1\|^2_{L_2(\Gamma)} \geqslant 0, \tag{4.56}$$

так как $C = (A^{1/2}V)(\gamma A^{-1/2}) = (\gamma A^{-1/2})^*(\gamma A^{-1/2})$.

Далее, эта операторная матрица обратима и

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix}A^{-1/2} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -iI_\varepsilon^{-1}\\ -Ii_\varepsilon^{-1} & \alpha I_\varepsilon^{-1}CI_\varepsilon^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{-1/2} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}. \tag{4.57}$$

Так как здесь все операторные матрицы ограничены и потому $\mathcal{A}^{-1}$ задана на всем пространстве $L_2(\Omega) \oplus L_2(\Omega)$, то область значений $\mathcal{A}$ совпадает со всем пространством $L_2(\Omega) \oplus L_2(\Omega)$. Значит, аккретивный оператор $\mathcal{A}$ является максимальным аккретивным. То, что его область определения имеет вид (4.55), проверяется непосредственно. □

Следствием леммы 4.1 является такое утверждение: оператор $(-\mathcal{A})$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы операторов, действующей в $L_2(\Omega) \oplus L_2(\Omega)$.

Отметим еще одно обстоятельство в задаче (4.54): оператор $\mathcal{B} :=$ diag $(B; 0)$ задан на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{D}(B) \oplus L_2(\Omega) = H^1(\Omega) \oplus L_2(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2}) \oplus L_2(\Omega) \tag{4.58}$$

и потому (см. (4.55))

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}) \supset \mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{4.59}$$

Наконец, далее понадобится еще одно утверждение, которое является простейшим вариантом теоремы 1.3.2 из [15, с. 23].

Лемма 4.2. *Пусть в задаче Коши для интегродифференциального уравнения*

$$\frac{du}{dt} = A_0 u + \int\limits_0^t G(t,s)A_1 u(s)ds + f(t), \quad u(0) = u^0, \tag{4.60}$$

выполнены следующие условия:

1°. *Оператор A_0 является генератором C_0-полугруппы, действующей в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.*
2°. *Выполнено включение $\mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(A_1)$.*
3°. *Оператор-функции $G(t,s)$, $\partial G(t,s)/\partial t$ непрерывны по своим переменным при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ и принимают значения из $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*
4°. *Выполнены условия*

$$f(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{H}), \quad u^0 \in \mathcal{D}(A_0).$$

Тогда задача Коши (4.60) *имеет единственное сильное решение $u(t)$ на отрезке $[0,T]$, т. е.*

$$u(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{H}) \cap C([0,T]; \mathcal{D}(A_0)); \tag{4.61}$$

при этом все слагаемые в уравнении (4.60) *являются непрерывными функциями $t \in [0,T]$ и $u(0) = u^0$.*

Итогом рассмотрения задачи Чуешова (4.47) является следующее утверждение.

Теорема 4.6. *Пусть в задаче* (4.47) *выполнены следующие условия*:

$$f(t) \in C^1([0,T]; L_2(\Omega)), \quad u^0, u^1 \in H^1(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2}), \tag{4.62}$$

и условие согласования начальных данных

$$\alpha C A^{1/2} u^1 + (I - \varepsilon S_1) A^{1/2} u^0 \in \mathcal{D}(A^{1/2}). \tag{4.63}$$

Тогда существует единственное сильное решение задачи (4.47)*, т. е. такая функция*

$$u(t) \in C^2([0,T]; L_2(\Omega)), \tag{4.64}$$

для которой выполнено уравнение в Ω *из* (4.47)*, где все слагаемые являются элементами из* $C([0,T]; L_2(\Omega))$*, и граничное условие на* Γ*, где все слагаемые — элементы из* $C([0,T]; H^{1/2}(\Gamma))$.

Доказательство. Если выполнены условие (4.50) и условия (4.62), (4.63) для u^0 и u^1, то в задаче (4.54) $(\eta_1(0); w_1(0))^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (4.55)). Кроме того, в этой задаче $(f(t) + Bu^0; 0)^\tau \in C^1([0,T]; L_2(\Omega) \oplus L_2(\Omega))$. Наконец, оператор $(-\mathcal{A})$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы (лемма 4.1) и выполнено условие (4.59). Поэтому задача (4.47) является частным случаем задачи (4.60) при $\mathcal{H} = L_2(\Omega) \oplus L_2(\Omega)$, $A_0 = -\mathcal{A}$, $A_1 = \mathcal{B}$, $G(t,s) \equiv \mathrm{diag}(I; I)$.

Отсюда по лемме 4.2 приходим к выводу, что при выполнении условий (4.62), (4.63) задача (4.54) имеет единственное сильное решение

$$(\eta_1(t); w_1(t))^\tau \in C^1([0,T]; L_2(\Omega) \oplus L_2(\Omega)) \cap C([0,T]; H^1(\Omega) \oplus L_2(\Omega)), \tag{4.65}$$

для которого все слагаемые в (4.54) — элементы из $C([0,T]; L_2(\Omega) \oplus L_2(\Omega))$.

Осуществляя теперь обратную замену (4.53) и действуя оператором $\mathrm{diag}(A^{-1/2}; I)$, получаем из (4.54), что справедливо уравнение (4.52), где

$$\left.\begin{aligned} &\eta(t) \in C^2([0,T]; (H^1(\Omega))^*) \cap C^1([0,T]; L_2(\Omega)), \\ &w(t) \in C^2([0,T]; L_2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L_2(\Omega)) = C^2([0,T]; L_2(\Omega)). \end{aligned}\right\} \tag{4.66}$$

Исключая переменную $w(t)$ (см. (4.51)), приходим к уравнению (4.49) для функции $\eta(t)$. Наконец, осуществляя еще исходную замену $u(t) = A^{-1/2}\eta(t)$, приходим к дифференциальному уравнению для функции $u(t)$, которое удобно переписать в виде

$$u = A^{-1}\Big(f - \frac{d^2u}{dt^2} - \varepsilon Bu\Big) + V\Big(\varepsilon\sigma\gamma u - \alpha\frac{d}{dt}(\gamma u)\Big). \tag{4.67}$$

Отсюда с помощью приема, который уже встречался при доказательстве теоремы 4.2, получаем, что для функции $u(t)$ выполнены соотношения

$$L_0 u = f - \frac{d^2u}{dt^2} - \varepsilon Bu \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_0 u = \varepsilon\sigma\gamma u - \alpha\frac{d}{dt}(\gamma u) \quad (\text{на } \Gamma), \tag{4.68}$$

откуда следует, что выполнены уравнение и краевое условие задачи (4.47).

Из свойств (4.66) для $\eta(t)$ после проведенной замены получаем, что

$$u(t) \in C^2([0,T]; L_2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^1(\Omega)). \tag{4.69}$$

Отсюда следует, что правая часть в уравнении (4.68) является элементом из $C([0,T]; L_2(\Omega))$, и тогда в уравнении (4.47) все слагаемые — элементы из $C([0,T]; L_2(\Omega))$.

В граничном условии на Γ из (4.47) соответственно имеем

$$\alpha\frac{d}{dt}(\gamma u) \in C([0,T]; H^{1/2}(\Gamma)),$$

а также свойство

$$\varepsilon\sigma\gamma u \in C^1([0,T]; H^{-1/2}(\Gamma)).$$

Поэтому в граничном условии на Γ в (4.47) оба слагаемых — элементы из $C([0,T]; H^{1/2}(\Gamma))$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С.* Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 5. — С. 3–78.
2. *Агранович М. С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. — М.: МЦМНО, 2013.
3. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и ее приложения: специальный курс. — Симферополь: ФЛП «Бондаренко О. А.», 2011.
4. *Андронова О. А., Копачевский Н. Д.* О линейных задачах с поверхностной диссипацией энергии// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — *29*. — С. 11–28.
5. *Аскеров Н. К., Крейн С. Г., Лаптев Г. И.* Задача о колебаниях вязкой жидкости и связанные с ней операторные уравнения// Функц. анализ и его прилож. — 1968. — *2*, № 2. — С. 21–32.
6. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д., Старков П. А.* Многокомпонентные задачи сопряжения и вспомогательные абстрактные краевые задачи// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *34*. — С. 5–44.
7. *Вулис И. Л., Соломяк М. З.* Спектральная асимптотика вырождающейся задачи Стеклова// Вестн. ЛГУ. — 1973. — *19*. — С. 148–150.
8. *Горбачук В. И.* Диссипативные граничные задачи для эллиптических дифференциальных уравнений// В сб. «Функциональные и численные методы математической физики», Ин-т матем. и механики: сб. научн. трудов. — Киев: Наукова думка, 1998. — С. 60–63.
9. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
10. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложениях к задаче Стокса// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2004. — *2*. — С. 52–80.
11. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и задача Стокса// Изв. вузов. Северо-Кавказск. рег. Естеств. науки. Мат. и мех. сплошн. среды. — Ростов-на-Дону, 2004. — С. 137–141.
12. *Копачевский Н. Д.* Операторные методы математической физики: специальный курс лекций. — Симферополь: ООО «ФОРМА», 2008.
13. *Копачевский Н. Д.* Спектральная теория операторных пучков: специальный курс лекций. — Симферополь: ООО «ФОРМА», 2009.
14. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и ее приложениях// Спектр. и эволюц. задачи. — 2011. — *21*, № 1. — С. 2–39.
15. *Копачевский Н. Д.* Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве. Спец. курс лекций. — Симферополь: ФЛП «Бондаренко О. А.», 2012.
16. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и полуторалинейных форм// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *57*. — С. 71–107.
17. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения. — Симферополь: ООО «ФОРМА», 2016.
18. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г.* Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи// Укр. мат. вестн. — 2004. — *1*, № 1. — С. 69–97.
19. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
20. *Копачевский Н. Д., Радомирская К. А.* Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. физ.-мат. науки. — 2014. — *27*, № 1. — С. 58–64.
21. *Копачевский Н. Д., Радомирская К. А.* Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения и их приложения// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *61*. — С. 67–102.
22. *Копачевский Н. Д., Якубова А. Р.* О краевых, спектральных и начально-краевых задачах, порожденных полуторалинейными формами// Тр. XXIV Междунар. конф. «Математика. Экономика. Образование»; IX Междунар. симпоз. «Ряды Фурье и их прилож.»; Междунар. конф. по стохастич. мет. — Ростов-на-Дону: Изд-во «Фонд науки и образования», 2016. — С. 57–63.
23. *Копачевский Н. Д., Якубова А. Р.* О некоторых спектральных и начально-краевых задачах, порожденных полуторалинейными формами// Тезисы Межд. конф. «XXVII Крымская осенняя мат. школа-симпоз. по спектральным и эволюционным задачам», Батилиман (Ласпи), Крым, КФУ им. В. И. Вернадского, 17–29 сентября 2016 г. — Симферополь: ООО «ФОРМА», 2016. — С. 84–85.
24. *Крейн С. Г.* О колебаниях вязкой жидкости в сосуде// Докл. АН СССР. — 1964. — *159*, № 2. — С. 262–265.
25. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
26. *Крейн С. Г., Лаптев Г. И.* К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде// Функц. анализ и его прилож. — 1968. — *1*, № 2. — С. 40–50.

27. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.
28. *Лионс Ж.-Л., Манженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
29. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.
30. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Теоремы о сравнении спектров линейных операторов и спектральные асимптотики// Тр. Моск. Мат. об-ва. — 1982. — *45*. — С. 133–1381.
31. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Теоремы о сравнении спектров линейных операторов и спектральные асимптотики для пучков Келдыша// Мат. сб. — 1984. — *123*, № 3. — С. 391–406.
32. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. — М.—Л.: Гостехиздат, 1952.
33. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970.
34. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1977.
35. *Старков П. А.* Операторный подход к задачам сопряжения// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Мат. Мех. Информ. Киберн. — 2002. — *15*, № 1. — С. 58–62.
36. *Старков П. А.* Случай общего положения для операторного пучка, возникающего при исследовании задач сопряжения// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Мат. Мех. Информ. Киберн. — 2002. — *15*, № 2. — С. 82–88.
37. *Agranovich M. S.* Remarks on potential and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary// Russ. J. Math. Phys. — 2008. — *15*, № 2. — С. 146–155.
38. *Agranovich M. S., Katsenelenbaum B. Z., Sivov A. N., Voitovich N. N.* Generalized method of eigenoscillations in diffraction theory. — Berlin etc.: Wiley-VCH, 1999.
39. *Chueshov I., Eller M., Lasieska I.* Finite dimensionally of the attractor for a semilinear wave equation with nonlinear boundary dissipation// Commun. Part. Differ. Equ. — 2004. — *29*, № 11-12. — С. 1847–1876.
40. *Chueshov I., Lasieska I.* Global attractors for von Karman evolutions with a nonlinear boundary dissipations// J. Differ. Equ. — 2004. — *198*. — С. 196–231.
41. *Gagliardo E.* Caratterizazioni delle trace sullo frontiera relative ad alcune classi de funzioni «n» variabili// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1957. — *27*. — С. 284–305.
42. *McLean W.* Strongly elliptic systems and boundary integral equations. — Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
43. *Showalter R. E.* Hilbert space methods for partial differential equations// Electron. J. Differ. Equ. — 1994. — *1*. — `http://www.emis.ams.org/journals/ELDE/Monographs/01/toc.html`.

Николай Дмитриевич Копачевский
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, Симферополь, проспект Вернадского, 4
E-mail: `kopachevsky@list.ru`

А. Р. Якубова
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, Симферополь, проспект Вернадского, 4
E-mail: `alika.yakubova.1993@mail.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-278-315 UDC 517.984.5

On Some Problems Generated by a Sesquilinear Form

© 2017 **N. D. Kopachevskii, A. R. Yakubova**

Abstract. Based on the generalized Green formula for a sesquilinear nonsymmetric form for the Laplace operator, we consider spectral nonself-adjoint problems. Some of them are similar to classical problems while the other arise in problems of hydrodynamics, diffraction, and problems with surface dissipation of energy. Properties of solutions of such problems are considered. Also we study initial-boundary value problems generating considered spectral problems and prove theorems on correct solvability of such problems on any interval of time.

REFERENCES

1. M. S. Agranovich, "Spektral'nye zadachi dlya sil'no ellipticheskikh sistem vtorogo poryadka v oblastyakh s gladkoy i negladkoy granitsey" [Spectral problems for strongly elliptic second-order systems in domains with smooth and nonsmooth boundaries], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2002, **57**, No. 5, 3–78 (in Russian).
2. M. S. Agranovich, *Sobolevskie prostranstva, ikh obobshcheniya i ellipticheskie zadachi v oblastyakh s gladkoy i lipshitsevoy granitsey* [Sobolev Spaces, Their Generalizations, and Elliptic Problems in Domains with Smooth and Lipschitz Boundaries], MTsMNO, Moscow, 2013 (in Russian).
3. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevskii, *Abstraktnaya formula Grina i ee prilozheniya: spetsial'nyy kurs* [Abstract Green Formula and Its Applications: Special Course], FLP "O. A. Bondarenko," Simferopol', 2011 (in Russian).
4. O. A. Andronova and N. D. Kopachevskii, "O lineynykh zadachakh s poverkhnostnoy dissipatsiey energii" [On linear problems with surface dissipation of energy], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2008, **29**, 11–28 (in Russian).
5. N. K. Askerov, S. G. Kreyn, and G. I. Laptev, "Zadacha o kolebaniyakh vyazkoy zhidkosti i svyazannye s ney operatornye uravneniya" [A problem of oscillations of viscous fluid and related operator equations], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1968, **2**, No. 2, 21–32 (in Russian).
6. V. I. Voytitskiy, N. D. Kopachevskii, and P. A. Starkov, "Mnogokomponentnye zadachi sopryazheniya i vspomogatel'nye abstraktnye kraevye zadachi" [Multicomponent conjugation problems and auxiliary abstract boundary-value problems], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **34**, 5–44 (in Russian).
7. I. L. Vulis and M. Z. Solomyak, "Spektral'naya asimptotika vyrozhdayushcheysya zadachi Steklova" [Spectral asymptotics of the degenerating Steklov problem], *Vestn. LGU* [Bull. LGU], 1973, **19**, 148–150 (in Russian).
8. V. I. Gorbachuk, "Dissipativnye granichnye zadachi dlya ellipticheskikh differentsial'nykh uravneniy," In: *Funktsional'nye i chislennye metody matematicheskoy fiziki. In-t matem. i mekhaniki: sb. nauchn. trudov* [Functional and numeric methods of mathematical physics. Inst. Math. Mech.: Digest Sci. Proc.], Naukova dumka, Kiev, 1998, 60–63 (in Russian).
9. I. Ts. Gokhberg and M. G. Kreyn, *Vvedenie v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov v gil'bertovom prostranstve* [Introduction to the Theory of Linear Nonself-adjoint Operators in a Hilbert Space], Nauka, Moscow, 1965 (in Russian).
10. N. D. Kopachevskii, "Ob abstraktnoy formule Grina dlya troyki gil'bertovykh prostranstv i ee prilozheniyakh k zadache Stoksa" [On the abstract Green formula for a triplet of Hilbert spaces and its applications to the Stokes problem], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2004, **2**, 52–80 (in Russian).
11. N. D. Kopachevskii, "Abstraktnaya formula Grina i zadacha Stoksa" [Abstract Green formula and the Stokes problem], *Izv. vuzov. Severo-Kavkazsk. reg. Estestv. nauki. Mat. i mekh. sploshn. sredy* [Bull. Higher Edu. Nothern-Caucasian Reg. Nat. Sci. Math. Mech. Contin. Medium], 2004, 137–141 (in Russian).
12. N. D. Kopachevskii, *Operatornye metody matematicheskoy fiziki: spetsial'nyy kurs lektsiy* [Operator Methods of Mathematical Physics: Special Course], OOO "FORMA," Simferopol', 2008 (in Russian).

13. N. D. Kopachevskii, *Spektral'naya teoriya operatornykh puchkov: spetsial'nyy kurs lektsiy* [Spectral Theory of Operator Pencils: Special Course], OOO "FORMA," Simferopol', 2009 (in Russian).
14. N. D. Kopachevskii, "Ob abstraktnoy formule Grina dlya smeshannykh kraevykh zadach i ee prilozheniyakh" [On abstract Green formula for mixed boundary-value problems and its applications], *Spektr. i evolyuts. zadachi* [Spectral Evolution Probl.], 2011, **21**, No. 1, 2–39 (in Russian).
15. N. D. Kopachevskii, *Integrodifferentsial'nye uravneniya Vol'terra v gil'bertovom prostranstve. Spets. kurs lektsiy* [Integrodifferential Volterra Equations in a Hilbert Space. Special Course], FLP "O. A. Bondarenko," Simferopol', 2012 (in Russian).
16. N. D. Kopachevskii, "Ob abstraktnoy formule Grina dlya troyki gil'bertovykh prostranstv i polutoralineynykh form" [Abstract Green formulas for triples of Hilbert spaces and sesquilinear forms], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **57**, 71–107 (in Russian).
17. N. D. Kopachevskii, *Abstraktnaya formula Grina i nekotorye ee prilozheniya* [Abstract Green Formula and Some Its Applications], OOO "FORMA," Simferopol', 2016 (in Russian).
18. N. D. Kopachevskii and S. G. Kreyn, "Abstraktnaya formula Grina dlya troyki gil'bertovykh prostranstv, abstraktnye kraevye i spektral'nye zadachi" [Abstract Green formulas for triples of Hilbert spaces, abstract boundary-value and spectral problems], *Ukr. mat. vestn.* [Ukr. Math. Bull.], 2004, **1**, No. 1, 69–97 (in Russian).
19. N. D. Kopachevskii, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: evolyutsionnye i spektral'nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolution and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
20. N. D. Kopachevskii and K. A. Radomirskaya, "Abstraktnye smeshannye kraevye i spektral'nye zadachi sopryazheniya" [Abstract mixed boundary-value and spectral conjugation problems], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. fiz.-mat. nauki* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ. Ser. Phys. Math. Sci.], 2014, **27**, No. 1, 58–64 (in Russian).
21. N. D. Kopachevskii and K. A. Radomirskaya, "Abstraktnye smeshannye kraevye i spektral'nye zadachi sopryazheniya i ikh prilozheniya" [Abstract mixed boundary-value and spectral conjugation problems and their applications], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **61**, 67–102 (in Russian).
22. N. D. Kopachevskii and A. R. Yakubova, "O kraevykh, spektral'nykh i nachal'no-kraevykh zadachakh, porozhdennykh polutoralineynymi formami" [On boundary-value, spectral, and initial-boundary value problems generated by sesquilinear forms], *Tr. XXIV Mezhdunar. konf. «Matematika. Ekonomika. Obrazovanie»; IX Mezhdunar. simpoz. «Ryady Fur'e i ikh prilozh.»; Mezhdunar. konf. po stokhastich. met.* [Proc. XXIV Int. Conf. Mathematics. Economics. Education"; IX Int. Symp. "Fourier Series Appl."; Int. Conf. Stoch. Methods], "Fond nauki i obrazovaniya," Rostov-na-Donu, 2016, 57–63 (in Russian).
23. N. D. Kopachevskii and A. R. Yakubova, "O nekotorykh spektral'nykh i nachal'no-kraevykh zadachakh, porozhdennykh polutoralineynymi formami" [On some spectral and initial-boundary value problems generated by sesquilinear forms], *Tezisy Mezhd. konf. «XXVII Krymskaya osennyaya mat. shkola-simpoz. po spektral'nym i evolyutsionnym zadacham»* [Abstr. Int. Conf. "XXVII Crimean Autumn Math. School-Symp. Spectr. Evolution Problems"], Batiliman (Laspi), Crimea, V. I. Vernadsky Crimean Federal Univ., 17–29 Sep. 2016, OOO "FORMA," Simferopol', 2016, 84–85 (in Russian).
24. S. G. Kreyn, "O kolebaniyakh vyazkoy zhidkosti v sosude" [On oscillations of viscous fluid in a vessel], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1964, **159**, No. 2, 262–265 (in Russian).
25. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
26. S. G. Kreyn and G. I. Laptev, "K zadache o dvizhenii vyazkoy zhidkosti v otkrytom sosude" [To the problem of motion of a viscous fluid in an open vessel], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1968, **1**, No. 2, 40–50 (in Russian).
27. O. A. Ladyzhenskaya, *Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti* [Mathematical Questions of Dynamics of a Viscous Incompressible Fluid], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
28. Zh.-L. Lions and E. Manzhenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Nonhomogeneous Boundary-Value Problems and Their Applications], Mir, Moscow, 1971 (in Russian).
29. A. S. Markus, *Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu polinomial'nykh operatornykh puchkov* [Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils], Shtiintsa, Kishinev, 1986 (in Russian).
30. A. S. Markus and V. I. Matsaev, "Teoremy o sravnenii spektrov lineynykh operatorov i spektral'nye asimptotiki" [Theorems on comparison of spectra of linear operators and spectral asymptotics], *Tr. Mosk. Mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1982, **45**, 133–1381 (in Russian).

31. A. S. Markus and V. I. Matsaev, “Teoremy o sravnenii spektrov lineynykh operatorov i spektral’nye asimptotiki dlya puchkov Keldysha” [Theorems on comparison of spectra of linear operators and spectral asymptotics for the Keldysh pencils], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1984, **123**, No. 3, 391–406 (in Russian).
32. S. G. Mikhlin, *Problema minimuma kvadratichnogo funktsionala* [Problem of Minimum of Quadratic Functional], Gostekhizdat, Moscow–Leningrad, 1952 (in Russian).
33. S. G. Mikhlin, *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike* [Variational Methods in Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
34. Zh.-P. Oben, *Priblizhennoe reshenie ellipticheskikh kraevykh zadach* [Approximate Solution of Elliptic Boundary-Value Problems], Mir, Moscow, 1977 (in Russian).
35. P. A. Starkov, “Operatornyy podkhod k zadacham sopryazheniya” [Operator approach to conjugation problems], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. Mat. Mekh. Inform. Kibern.* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ. Ser. Math. Mech. Inform. Cybern.], 2002, **15**, No. 1, 58–62 (in Russian).
36. P. A. Starkov, “Sluchay obshchego polozheniya dlya operatornogo puchka, voznikayushchego pri issledovanii zadach sopryazheniya” [Case of general position for the operator pencil arising in investigation of conjugation problems], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. Mat. Mekh. Inform. Kibern.* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ. Ser. Math. Mech. Inform. Cybern.], 2002, **15**, No. 2, 82–88 (in Russian).
37. M. S. Agranovich, “Remarks on potential and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2008, **15**, No. 2, 146–155.
38. M. S. Agranovich, B. Z. Katsenelenbaum, A. N. Sivov, and N. N. Voitovich, *Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory*, Wiley-VCH, Berlin etc., 1999.
39. I. Chueshov, M. Eller, and I. Lasieska, “Finite dimensionally of the attractor for a semilinear wave equation with nonlinear boundary dissipation,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 2004, **29**, No. 11-12, 1847–1876.
40. I. Chueshov and I. Lasieska, “Global attractors for von Karman evolutions with a nonlinear boundary dissipations,” *J. Differ. Equ.*, 2004, **198**, 196–231.
41. E. Gagliardo, “Caratterizazioni delle trace sullo frontiera relative ad alcune classi de funzioni «n» variabili,” *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova.*, 1957, **27**, 284–305.
42. W. McLean, *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
43. R. E. Showalter, “Hilbert space methods for partial differential equations,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 1994, **1**, http://www.emis.ams.org/journals/ELDE/Monographs/01/toc.html.

N. D. Kopachevskii
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
4 Vernadsky Avenue, 295007 Simferopol, Russia
E-mail: kopachevsky@list.ru

A. R. Yakubova
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
4 Vernadsky Avenue, 295007 Simferopol, Russia
E-mail: alika.yakubova.1993@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 2 (2017). С. 316–339

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-316-339 УДК 517.95+517.98

СПЕКТРАЛЬНЫЕ И НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ

© 2017 г. **К. А. РАДОМИРСКАЯ**

Аннотация. На базе уже рассмотренного ранее подхода (см. [18]) к абстрактным краевым задачам сопряжения разобраны спектральные задачи сопряжения для одной и двух областей. Подробно изучен возникший операторный пучок с самосопряженными операторными коэффициентами, действующий в гильбертовом пространстве и зависящий от двух параметров. Рассматривается оба возможных случая, когда один из параметров спектральный, а другой является фиксированным, в зависимости от этого выведены свойства решений. Также изучены начально-краевые задачи математической физики, порождающие задачи сопряжения. Получены теоремы о существовании и единственности сильного решения со значениями в соответствующем гильбертовом пространстве.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Данная работа является продолжением изучения смешанных краевых задач сопряжения на базе обобщенной формулы Грина для оператора Лапласа. В предыдущей статье [18] был разработан общий подход к изучению смешанных краевых задач сопряжения. С помощью этого подхода разобраны также спектральные задачи сопряжения и получена спектральная проблема для соответствующего операторного пучка. В данной статье рассмотрены свойства решений этого пучка в зависимости от параметров задачи.

В первом разделе изучаются спектральные проблемы для смешанных краевых задач в одной и двух примыкающих областях. Установлено, что в обоих случаях исходные спектральные проблемы математической физики приводятся к исследованию одного и того же операторного пучка с самосопряженными операторными коэффициентами. Пучок зависит от двух комплексных параметров λ и μ, один из которых считают фиксированным, а другой — спектральным.

Во втором разделе рассматриваются свойства решений операторного пучка в двух случаях, когда параметр μ — спектральный, а λ — фиксированный, и наоборот. Доказаны теоремы о структуре спектра и базисности системы собственных и присоединенных элементов.

В третьем разделе исследованы начально-краевые задачи математической физики, порождающие изученные спектральные проблемы. Получены теоремы о существовании и единственности сильного решения со значениями в соответствующем гильбертовом пространстве.

1. Спектральные проблемы, порожденные смешанными краевыми задачами и задачами сопряжения

1.1. Смешанная спектральная задача в одной области. В области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega =: \Gamma$, разбитой на четыре липшицевых куска Γ_k с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$, $k = \overline{1,4}$, рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$u - \Delta u = \lambda u =: f \text{ (в } \Omega), \quad \gamma_1 u := u|_{\Gamma_1} = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \tag{1.1}$$

$$\partial_2 u = \mu\gamma_2 u =: \psi_2 \text{ (на } \Gamma_2), \quad \partial_3 u = \lambda\gamma_3 u =: \psi_3 \text{ (на } \Gamma_3), \tag{1.2}$$

$$\partial_4 u = \lambda^{-1}\gamma_4 u =: \psi_4 \text{ (на } \Gamma_4), \quad \partial_k u := (\partial u/\partial n)_{\Gamma_k}. \tag{1.3}$$

Здесь на Γ_1 задано однородное условие Дирихле, на Γ_2 — условие М. С. Аграновича (см. [29]) или условие, возникающее в задачах дифракции, на Γ_3 — условие типа Стефана (или Стеклова), на Γ_4 — условие типа С. Крейна, появившееся в задачах о нормальных движениях тяжелой вязкой жидкости в частично заполненном сосуде. В этой проблеме имеется два параметра λ и μ, один из которых можно считать спектральным, а другой — фиксированным. В частности, в задачах дифракции спектральным является параметр $\mu \in \mathbb{C}$ (см. [29]). Другой вариант, когда спектральным является $\lambda \in \mathbb{C}$, рассматривается в работах В. И. Горбачук (см. [11]).

Задачу (1.1)–(1.3) будем исследовать с помощью общего подхода, который рассматривался в предыдущей работе (см. [18]). По этой схеме будем использовать одну так называемую первую вспомогательную задачу С. Крейна и три вторых вспомогательных задач С. Крейна (см. ниже (1.5)–(1.8)).

В силу однородного условия Дирихле на Γ_1, слабое решение задачи (1.1)–(1.3) естественно искать в пространстве

$$H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \gamma_1 u = 0 \text{ (на } \Gamma_1)\}.$$

Решение $u \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ будем искать в виде суммы решений четырех задач, т. е.

$$u = \sum_{k=1}^{4} u_k, \; u_k \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega), \tag{1.4}$$

где u_k — слабые решения таких задач соответственно:

$$\begin{gathered} u_1 - \triangle u_1 = f := \lambda u \text{ (в } \Omega), \;\; \gamma_1 u_1 = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \; \partial_2 u_1 = 0 \text{ (на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u_1 = 0 \text{ (на } \Gamma_3), \; \partial_4 u_1 = 0 \text{ (на } \Gamma_4); \end{gathered} \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered} u_2 - \triangle u_2 = 0 \text{ (в } \Omega), \;\; \gamma_1 u_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \;\; \partial_2 u_2 = \psi_2 := \mu\gamma_2 u \text{ (на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_3), \; \partial_4 u_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_4); \end{gathered} \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered} u_3 - \triangle u_3 = 0 \text{ (в } \Omega), \;\; \gamma_1 u_3 = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \;\; \partial_2 u_3 = 0 \text{ (на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u_3 = \psi_3 := \lambda\gamma_3 u \text{ (на } \Gamma_3), \; \partial_4 u_3 = 0 \text{ (на } \Gamma_4); \end{gathered} \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered} u_4 - \triangle u_4 = 0 \text{ (в } \Omega), \;\; \gamma_1 u_4 = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \;\; \partial_2 u_4 = 0 \text{ (на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u_4 = 0 \text{ (на } \Gamma_3), \; \partial_4 u_4 = \psi_4 := \lambda^{-1}\gamma_4 u \text{ (на } \Gamma_4). \end{gathered} \tag{1.8}$$

Сама постановка задач (1.5)–(1.8) учитывает, что функции $\partial_k u$, заданные на Γ_k, продолжимы нулем на остальные куски границы. Для элементов из $H^1(\Omega)$ эти производные по нормали, как известно, принадлежат классам $H^{-1/2}(\Gamma_k)$. Если же они продолжимы нулем на оставшуюся часть границы $\partial\Omega$ в классе $H^{-1/2}(\Gamma)$, то они являются элементами $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k) \subset H^{-1/2}(\Gamma_k)$, а те функции из $H^1(\Omega)$, у которых $\partial_k u \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)$, обозначаются как $\check{H}^1(\Omega)$ (см. [18]). В нашем случае

$$\check{H}^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \partial_k u = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \; k = \overline{1,4}\}.$$

Более того, с учетом граничного условия на Γ_1 следует в задачах использовать подпространство

$$\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) := \check{H}^1(\Omega) \cap H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega). \tag{1.9}$$

Для элементов из $\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ имеем формулу Грина (см. [18])

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \triangle u \rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=2}^{4} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{L_2(\Gamma_k)} \;\; \forall\, \eta, \; u \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega), \tag{1.10}$$

$$u - \triangle u \in (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*, \ \ \gamma_k\eta \in H^{1/2}(\Gamma_k), \ \partial_k u = (\partial u/\partial n)_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \ k = \overline{2,4}.$$

Из этой формулы следует, что слабое решение задачи (1.5) определяется тождеством

$$(\eta, u_1)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, f \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle \eta, \lambda u \rangle_{L_2(\Omega)} \ \ \forall\, \eta \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega),$$

и это слабое решение имеет вид (см. [18])

$$u_1 = A^{-1}f = \lambda A^{-1}u, \tag{1.11}$$

где A — оператор гильбертовой пары $(\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega);\ L_2(\Omega))$.

Далее, слабое решение задачи (1.6) определяется тождеством

$$(\eta, u_2)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_2\eta, \psi_2 \rangle_{L_2(\Gamma_2)} = \langle \gamma_2\eta, \mu\gamma_2 u \rangle_{L_2(\Gamma_2)} \ \ \forall\, \eta \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega).$$

Это решение задается формулой

$$\begin{gathered} u_2 = V_2\psi_2 = \mu V_2\gamma_2 u, \ V_2 \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_2);\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega)), \ V_2 = \gamma_2^*, \\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega) := \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) \cap H^1_h(\Omega), \ \ H^1_h(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u - \Delta u = 0\}. \end{gathered} \tag{1.12}$$

Аналогично рассматриваются задачи (1.7) и (1.8), и их решения выражаются формулами

$$\begin{gathered} u_3 = V_3\psi_3 = \lambda V_3\gamma_3 u, \ V_3 \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_3);\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega)), \ V_3 = \gamma_3^*, \\ u_4 = V_4\psi_4 = \lambda^{-1}V_4\gamma_4 u, \ V_4 \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_4);\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega)), \ V_4 = \gamma_4^*. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Складывая левые и правые части соотношений (1.11), (1.12), (1.13), получаем, что слабое решение u задачи (1.1)–(1.3) должно быть решением следующей спектральной проблемы:

$$u = \lambda(A^{-1} + V_3\gamma_3)u + \mu V_2\gamma_2 u + \lambda^{-1}V_4\gamma_4 u, \ u \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega). \tag{1.14}$$

Это уравнение можно привести к более симметричной форме, воспользовавшись тем, что имеют место свойства (см. [18])

$$A^{1/2}V_k = (\gamma_k A^{-1/2})^* \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k);\ L_2(\Omega)), \ k = \overline{2,4}. \tag{1.15}$$

Действительно, представим элемент $u \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2}), \ \mathcal{R}(A^{1/2}) = L_2(\Omega)$, в виде

$$u = A^{-1/2}v, \ v \in L_2(\Omega), \tag{1.16}$$

подставим это выражение в (1.14) и подействуем на обе части полученного соотношения оператором $A^{1/2}$ (это можно сделать в силу (1.15)). Тогда взамен (1.14) возникает спектральная задача

$$L(\lambda, \mu)v := (I - \mu B_2 - \lambda(A_1^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4)v = 0, \quad v \in L_2(\Omega), \tag{1.17}$$

$$B_k := (A^{1/2}V_k)(\gamma_k A^{-1/2}) = B_k^* \geqslant 0, \ B_k \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)), \ \ k = \overline{2,4}, \tag{1.18}$$

для операторного пучка $L(\lambda, \mu)$ с параметрами λ и μ, один из которых можем считать спектральным, другой — фиксированным.

Задача (1.17), (1.18) содержит в себе известные спектральные проблемы, встречающиеся в приложениях. Они будут более подробно разобраны в разделе 2.

1.2. Спектральная задача сопряжения для двух примыкающих областей. Теперь рассмотрим конфигурацию из двух примыкающих областей. На отдельных участках границы этих областей заданы однородные условия, содержащие спектральный либо фиксированный параметр.

Будем считать, что две области Ω_1 и Ω_2 из $\mathbb{R}^m$ с липшицевыми границами примыкают друг к другу, как это показано на рис. 1.

Их внешние границы Γ_{11} и Γ_{22} являются липшицевыми кусками и сами разбиты на липшицевы куски:

$$\Gamma_{kk} = (\bigcup_{j=1}^{4} \Gamma_{kk,j}) \cup \partial\Gamma^0_{kk}, \ k = 1, 2,$$

а граница стыка $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$ разбита на семь липшицевых кусков:

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = (\bigcup_{j=1}^{7} \Gamma_{21,j}) \cup \partial\Gamma^0_{21}, \ \Gamma_{21,j} = \Gamma_{12,j}.$$

Здесь символом $\partial\Gamma^0_{kl}$ обозначено объединение внутренних границ при разбиении Γ_{kl} на части $\Gamma_{kl,j}$.

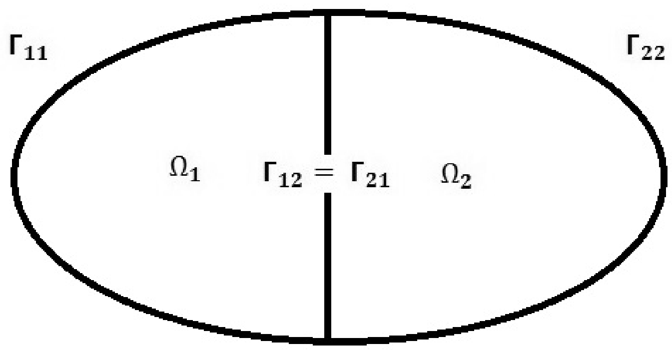

Рис. 1

Сформулируем постановку спектральной задачи сопряжения для искомых функций $u_k(x)$, заданных в областях $\Omega_k,\ k=1,2$, с соответствующими граничными условиями. Имеем: в областях Ω_1 и Ω_2 —

$$u_1-\triangle u_1=f_1:=\lambda u_1\ \ (\text{в }\Omega_1),\quad u_2-\triangle u_2=f_2:=\lambda u_2\ \ (\text{в }\Omega_2); \tag{1.19}$$

на внешних границах:

$$\gamma_{11,1}u_1=0\ (\text{на }\Gamma_{11,1}),\ \gamma_{22,1}u_2=0\ (\text{на }\Gamma_{22,1}); \tag{1.20}$$

$$\begin{gathered}\partial_{11,2}u_1=\psi_{11,2}:=\mu\gamma_{11,2}u_1\ \ (\text{на }\Gamma_{11,2}),\qquad \partial_{22,2}u_2=\psi_{22,2}:=\mu\gamma_{22,2}u_2\ \ (\text{на }\Gamma_{22,2});\\ \partial_{11,3}u_1=\psi_{11,3}:=\lambda\gamma_{11,3}u_1\ \ (\text{на }\Gamma_{11,3}),\qquad \partial_{22,3}u_2=\psi_{22,3}:=\lambda\gamma_{22,3}u_2\ \ (\text{на }\Gamma_{22,3});\\ \partial_{11,4}u_1=\psi_{11,4}:=\lambda^{-1}\gamma_{11,4}u_1\ \ (\text{на }\Gamma_{11,4}),\quad \partial_{22,4}u_2=\psi_{22,4}:=\lambda^{-1}\gamma_{22,4}u_2\ \ (\text{на }\Gamma_{22,4});\end{gathered} \tag{1.21}$$

на границах стыка:

$$\gamma_{21,1}u_1-\gamma_{12,1}u_2=0,\quad \partial_{21,1}u_1+\partial_{12,1}u_2=0\ \ (\text{на }\Gamma_{21,1}); \tag{1.22}$$

$$\gamma_{21,2}u_1-\gamma_{12,2}u_2=0,\ \ \partial_{21,2}u_1+\partial_{12,2}u_2=\psi_{21,2}:=\mu\gamma_{21,2}u_1\ \ (\text{на }\Gamma_{21,2}), \tag{1.23}$$

$$\gamma_{21,3}u_1-\gamma_{12,3}u_2=0,\ \partial_{21,3}u_1+\partial_{12,3}u_2=\psi_{21,3}:=\lambda\gamma_{21,3}u_1\ \ (\text{на }\Gamma_{21,3}), \tag{1.24}$$

$$\gamma_{21,4}u_1-\gamma_{12,4}u_2=0,\ \ \partial_{21,4}u_1+\partial_{12,4}u_2=\psi_{21,4}:=\lambda^{-1}\gamma_{21,4}u_1\ \ (\text{на }\Gamma_{21,4}); \tag{1.25}$$

$$\partial_{21,5}u_1=-\partial_{12,5}u_2=\psi_{21,5}:=\lambda(\gamma_{21,5}u_1-\gamma_{12,5}u_2)\ \ (\text{на }\Gamma_{21,5}); \tag{1.26}$$

$$\partial_{21,6}u_1=-\partial_{12,6}u_2=\psi_{21,6}:=\lambda(\gamma_{21,6}u_1-\gamma_{12,6}u_2)\ (\text{на }\Gamma_{21,6}); \tag{1.27}$$

$$\partial_{21,7}u_1=-\partial_{12,7}u_2=\psi_{21,7}:=\lambda^{-1}(\gamma_{21,7}u_1-\gamma_{12,7}u_2)\ \ (\text{на }\Gamma_{21,7}). \tag{1.28}$$

Здесь λ и μ, как и в задаче (1.1)–(1.3), — параметры, один из которых является спектральным, а другой — фиксированным. Отметим еще, что условия (1.23), (1.25), (1.27) называют условиями первой задачи сопряжения, а (1.24), (1.26), (1.28) — условиями второй задачи сопряжения (см. [29]).

Из постановки задачи (1.19)–(1.28) видно (см. (1.20)), что ее слабое решение $u=(u_1;u_2)$ естественно искать в пространстве $H^1_{0,\Gamma_{11,1}}(\Omega_1)\oplus H^1_{0,\Gamma_{22,1}}(\Omega_2)$. Более того, это решение должно принадлежать подпространству $\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega)$ тех элементов, для которых выполнены главные (с вариационной точки зрения) однородные краевые условия на стыках — это группа первых условий в (1.22)–(1.25). Значит,

$$\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega):=\{(u_1;u_2)\in H^1_{0,\Gamma_{11,1}}(\Omega_1)\oplus H^1_{0,\Gamma_{22,1}}(\Omega_2):\gamma_{21,k}u_1-\gamma_{12,k}u_2=0\ (\text{на }\Gamma_{21,k}),\ k=\overline{1,4}\}.$$

Представим решение задачи в виде суммы решений вспомогательных задач, в которых неоднородности, т. е. формально считаемые заданными функции в (1.19)–(1.28), содержатся либо в уравнениях, либо в одном из краевых условий. Для элементов из $\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega)$ воспользуемся обобщенной формулой Грина в следующем виде:

$$(\eta,u)_{H^1(\Omega)}:=\sum_{k=1}^{2}(\eta_k,u_k)_{H^1(\Omega_k)}=\sum_{k=1}^{2}\langle\eta_k,u_k-\triangle u_k\rangle_{L_2(\Omega_k)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=2}^{4}\langle\gamma_{kk,j}\eta_k,\partial_{kk,j}u_k\rangle_{L_2(\Gamma_{kk,j})}+\sum_{j=1}^{4}\langle\gamma_{21,j}\eta_1,\partial_{21,j}u_1+\partial_{12,j}u_2\rangle_{L_2(\Gamma_{21,j})}+$$
$$+\sum_{j=5}^{7}\langle\gamma_{21,j}\eta_1-\gamma_{12,j}\eta_2,\partial_{21,j}u_1\rangle_{L_2(\Gamma_{21,j})}, \tag{1.29}$$

где следы $\gamma_{kl,j}\eta_l\in H^{1/2}(\Gamma_{kl,j})$, а производные по нормали $\partial_{kl,j}u_l\in\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{kl,j})$, т. е. из сопряженного пространства (см. (1.9), (1.10)).

Отметим еще, что пространство $\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega):=L_2(\Omega_1)\oplus L_2(\Omega_2)$, так как оно содержит подпространство $H^1_0(\Omega_1)\oplus H^1_0(\Omega_2)$, плотное в $L_2(\Omega)$.

Идя по схеме, уже изложенной для задачи (1.1)–(1.3), приходим к выводу, что первая вспомогательная задача Крейна, отвечающая неоднородным членам лишь в уравнениях (1.19) с заданными f_1 и f_2, определяется как слабое решение $u_{(1)}=(u_{11};u_{12})$ на основе тождества

$$(\eta,u_{(1)})_{H^1(\Omega)}=\sum_{k=1}^{2}\langle\eta_k,f_k\rangle_{L_2(\Omega_k)},\ \eta=(\eta_1;\eta_2)\in\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega),$$

следующего из формулы Грина (1.29). Поэтому

$$u_{(1)}=A^{-1}f=\lambda A^{-1}u,\ f=(f_1,f_2)\in(\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega))^*,$$

где A — оператор гильбертовой пары $(H^1_\Gamma(\Omega);L_2(\Omega))$.

Далее, заданным функциям $\psi_{11,2}$ и $\psi_{22,2}$ из (1.27) отвечают слабые решения $u^I_{(2)}$ и $u^{II}_{(2)}$ соответственно, определяемые тождествами

$$(\eta,u^I_{(2)})_{H^1(\Omega)}=\langle\gamma_{11,2}\eta_1,\psi_{11,2}\rangle_{L_2(\Gamma_{11,2})}\ \forall\eta\in\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega),$$
$$(\eta,u^{II}_{(2)})_{H^1(\Omega)}=\langle\gamma_{22,2}\eta_2,\psi_{22,2}\rangle_{L_2(\Gamma_{22,2})}\ \forall\eta\in\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega).$$

Обозначая эти решения через $V_{11,2}\psi_{11,2}$ и $V_{22,2}\psi_{22,2}$, приходим к выводу, что

$$u_{(2)}=u^I_{(2)}+u^{II}_{(2)}=\mu(V_{11,2}\gamma_{11,2}p_1+V_{22,2}\gamma_{22,2}p_2)u,$$

где $p_ku=p_k(u_1;u_2):=u_k,\ k=1,2$. Отметим еще, что имеют место свойства (см. [18])

$$V_{kk,2}=(\gamma_{kk,2}p_k)^*,\ k=1,2.$$

Аналогично определяются слабые решения задач, отвечающие элементам $\psi_{11,3}$ и $\psi_{11,4}$ соответственно. Тогда

$$u_{(3)}=\lambda(V_{11,3}\gamma_{11,3}p_1+V_{22,3}\gamma_{22,3}p_2)u,\ \ V_{kk,3}=(\gamma_{kk,3}p_k)^*,\ k=1,2.$$

Таким же образом имеем

$$u_{(4)}=\lambda^{-1}(V_{11,4}\gamma_{11,4}p_1+V_{22,4}\gamma_{22,4}p_2)u,\ \ V_{kk,4}=(\gamma_{kk,4}p_k)^*,\ k=1,2.$$

Рассмотрим теперь вспомогательные задачи, отвечающие заданным элементам $\psi_{21,j}$ из (1.23)–(1.25), $j=\overline{2,4}$. Решение, соответствующее $\psi_{21,2}$, определяется из тождества

$$(\eta,u_{(5)})_{H^1(\Omega)}=\langle\gamma_{21,2}\eta_1,\psi_{21,2}\rangle_{L_2(\Gamma_{21,2})},\ \eta\in\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega),$$

и при $\psi_{21,2}\in\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{21,2})$ имеем единственное решение

$$u_{(5)}=V_{21,2}\psi_{21,2}=\mu V_{21,2}\gamma_{21,2}p_1u,\ \ V_{21,2}=(\gamma_{21,2}p_1)^*.$$

Аналогично получаем формулы, отвечающие $\psi_{21,3}$ и $\psi_{21,4}$:

$$u_{(6)}=\lambda V_{21,3}\gamma_{21,3}p_1u,\quad V_{21,3}=(\gamma_{21,3}p_1)^*,$$
$$u_{(7)}=\lambda^{-1}V_{21,4}\gamma_{21,4}p_1u,\quad V_{21,4}=(\gamma_{21,4}p_1)^*.$$

Перейдем теперь к рассмотрению решений, отвечающих элементам $\psi_{21,j},\ j=\overline{5,7}$, из (1.26)–(1.28). Решение $u_{(8)}$, отвечающее $\psi_{21,5}$, как следует из формулы Грина (1.29), определено тождеством

$$(\eta,u_{(8)})_{H^1(\Omega)}=\langle\gamma_{21,5}\eta_1-\gamma_{12,5}\eta_2,\psi_{21,5}\rangle_{L_2(\Gamma_{21,5})}\ \forall\eta\in\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega).$$

При любом $\psi_{21,5} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{21,5})$ существует единственное решение

$$u_{(8)} = V_{21,5}\psi_{21,5} = \mu V_{21,5}(\gamma_{21,5}p_1 - \gamma_{12,5}p_2)u, \;\; V_{21,5} = (\gamma_{21,5}p_1 - \gamma_{12,5}p_2)^*.$$

Аналогичным образом получаем формулы для оставшихся двух решений $u_{(9)}$ и $u_{(10)}$ вспомогательных задач, отвечающих заданным $\psi_{21,6}$ и $\psi_{21,7}$ соответственно из (1.27), (1.28). Имеем

$$u_{(9)} = \lambda V_{21,6}(\gamma_{21,6}p_1 - \gamma_{12,6}p_2)u, \quad V_{21,6} = (\gamma_{21,6}p_1 - \gamma_{12,6}p_2)^*,$$

$$u_{(10)} = \lambda^{-1} V_{21,7}(\gamma_{21,7}p_1 - \gamma_{12,7}p_2)u, \quad V_{21,7} = (\gamma_{21,7}p_1 - \gamma_{12,7}p_2)^*.$$

Итогом проведенных построений является такой вывод. Слабое решение $u = (u_1; u_2)$ задачи (1.19)–(1.28) удовлетворяет уравнению

$$u = \sum_{j=1}^{10} u_{(j)} = \lambda(A^{-1} + C_3)u + \mu C_2 u + \lambda^{-1} C_4 u, \quad u \in \mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega), \tag{1.30}$$

$$C_2 := V_{11,2}V_{11,2}^* + V_{22,2}V_{22,2}^* + V_{21,2}V_{21,2}^* + V_{21,5}V_{21,5}^*,$$

$$C_3 := V_{11,3}V_{11,3}^* + V_{21,3}V_{21,3}^* + V_{21,6}V_{21,6}^*,$$

$$C_4 := V_{11,4}V_{11,4}^* + V_{22,4}V_{22,4}^* + V_{21,4}V_{21,4}^* + V_{21,7}V_{21,7}^*.$$

Таким образом, для спектральной проблемы сопряжения (1.19)–(1.28) получилось уравнение (1.30) такого же общего вида, как уравнение (1.14) для более простой спектральной проблемы (1.1)–(1.3).

Осуществляя еще в (1.30) такую же замену, как в (1.16), т. е.

$$u = A^{-1/2}v, \; v \in L_2(\Omega) = L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2),$$

и действуя оператором $A^{1/2}$, приходим окончательно к спектральной задаче

$$L(\lambda,\mu)v := (I - \lambda(A^{-1} + B_3) - \mu B_2 - \lambda^{-1}B_4)v = 0, \quad v \in L_2(\Omega), \tag{1.31}$$

$$0 \leqslant B_k = A^{1/2}C_kA^{-1/2} = B_k^* \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)), \; k = \overline{2,4}, \tag{1.32}$$

равносильной исходной проблеме (1.19)–(1.28).

Очевидно, что решение задачи (1.31), (1.32) обладает теми же общими свойствами, что и (1.17).

2. О свойствах решений спектральных проблем

2.1. Свойства решений при спектральном параметре μ. Рассмотрим подробнее полученную спектральную задачу (см. (1.17)

$$L(\lambda,\mu)\varphi := (I - \mu B_2 - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4)\varphi = 0, \quad \varphi \in H, \;\; \lambda, \; \mu \in \mathbb{C}, \tag{2.1}$$

$$H = L_2(\Omega), \;\; 0 \leqslant B_k = B_k^* \in \mathfrak{S}_\infty(H), \; k = \overline{2,4}, \; 0 < A = A^* \in \mathfrak{S}_\infty(H). \tag{2.2}$$

Операторный пучок $L(\lambda,\mu)$ содержит два параметра: λ и μ. Это позволяет исследовать два класса задач: при фиксированном $\mu \in \mathbb{C}$ возникают задачи со спектральным параметром λ в уравнении, а при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ — задачи со спектральным параметром μ в краевом условии на границе сопряжения.

Рассмотрим случай, когда в пучке $L(\lambda,\mu)$ параметр λ фиксирован, а μ — спектральный.

2.1.1. Отрицательные значения параметра. Рассмотрим задачу (2.1)-(2.2) при $\lambda < 0$. Обозначим
$$T(\lambda) := \lambda(A^{-1} + B_3) + \lambda^{-1}B_4. \tag{2.3}$$
Так как $T(\lambda) < 0$, то оператор $I - T(\lambda) \geqslant I$ равномерно по λ. Значит, существует обратный оператор $(I - T(\lambda))^{-1}$, $\|(I - T(\lambda))^{-1}\| \leqslant 1$.

Заметим теперь, что оператор $B_2 = (A^{1/2}V_2)(\gamma_2 A^{-1/2})$ ограниченно действует из $L_2(\Omega)$ в подпространство
$$L_{2,h}(\Omega) := \{\varphi \in L_2(\Omega) : \varphi = A^{1/2}u_2,\ u_2 \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega) \subset H^1(\Omega)\}$$
(см. (1.12)) и потому $\ker B_2 = L_{2,0}(\Omega) = L_2(\Omega) \ominus L_{2,h}(\Omega)$.

Кроме того, этот оператор неотрицателен и компактен в $L_2(\Omega)$. Далее, $T(\lambda)$ также компактен и отрицателен. Это позволяет преобразовать проблему (2.1), (2.2) к спектральной задаче на собственные значения компактного положительного оператора и воспользоваться теоремой Гильберта—Шмидта.

Пусть P_0 и P_1 — взаимно дополнительные ортопроекторы, отвечающие разложению:
$$H = H_0 \oplus H_1,\ H_0 := \ker B_2 = L_{2,0}(\Omega),\ H_1 = H \ominus H_0 = \overline{\mathcal{R}(B_2)} = L_{2,h}(\Omega),$$
а I_0 и I_1 — единичные операторы в H_0 и H_1 соответственно. Тогда $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$:
$$(I - T(\lambda))(\varphi_0 + \varphi_1) = \mu B_2(\varphi_0 + \varphi_1) = \mu B_2\varphi_0 + \mu\widetilde{B_2}\varphi_1 = \mu\widetilde{B_2}\varphi_1, \tag{2.4}$$
где $\widetilde{B_2} = P_1B_2P_1,\ B_2\varphi_0 = 0,\ \varphi_0 = P_0\varphi_0,\ \varphi_1 = P_1\varphi_1,\ B_2 = P_1B_2$.

Применив к обеим частям уравнения (2.4) ортопроекторы P_0 и P_1, имеем
$$P_0(I - T(\lambda))P_0\varphi_0 + P_0(I - T(\lambda))P_1\varphi_1 = \mu P_0\widetilde{B_2}\varphi_1 = 0, \tag{2.5}$$
$$P_1(I - T(\lambda))P_0\varphi_0 + P_1(I - T(\lambda))P_1\varphi_1 = \mu P_1\widetilde{B_2}\varphi_1 = \mu\widetilde{B_2}\varphi_1. \tag{2.6}$$
Оператор $P_0(I - T(\lambda))P_0 = I_0 - P_0T(\lambda)P_0 \geqslant I_0$ в H_0, и потому существует его обратный, причем $\|(P_0(I - T(\lambda))P_0)^{-1}\| \leqslant 1$ равномерно по $\lambda < 0$. Тогда из (2.5) имеем
$$\varphi_0 = -(P_0(I - T(\lambda))P_0)^{-1}(P_0(I - T(\lambda))P_1\varphi_1). \tag{2.7}$$
Подставим полученное выражение в (2.6) и будем иметь уравнение для φ_1:
$$(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1 = \mu\widetilde{B}_2\varphi_1,\ \varphi_1 \in H_1, \tag{2.8}$$
$$T_1(\lambda) = P_1T(\lambda)P_1 + P_1T(\lambda)P_0(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)^{-1}P_1T(\lambda)P_1. \tag{2.9}$$

Лемма 2.1. *Имеет место свойство*
$$\ker(I_1 - T_1(\lambda)) = \{0\}.$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение
$$(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1 = 0, \tag{2.10}$$
где $T_1(\lambda)$ определен в (2.9). Введем φ_0 по формуле (2.7) и подставим в (2.10). Тогда будем иметь формулу (2.6) с $\mu = 0$:
$$P_1(I - T(\lambda))P_0\varphi_0 + P_1(I - T(\lambda))P_1\varphi_1 = 0, \tag{2.11}$$
а из (2.10) получаем (2.5).

Полученное уравнение (2.11) или система уравнений (2.5), (2.6) с $\mu = 0$ равносильны уравнению
$$(I - T(\lambda))\varphi = 0,\ \ \varphi = \varphi_0 + \varphi_1,$$
которое имеет тривиальное решение $\varphi = 0$, так как $I - T(\lambda) \geqslant I \gg 0$. Поэтому и $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. $\square$

Заметим теперь, что при $\lambda < 0$ оператор $I_1 - T_1(\lambda)$ из (2.9) самосопряжен и положительно определен. В самом деле, если имеется связь (2.7), то
$$((I - T(\lambda))(\varphi_0 + \varphi_1),\ \varphi_0 + \varphi_1)_{L_2(\Omega)} = ((I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1,\ \varphi_1)_{L_2(\Omega)} \geqslant$$
$$\geqslant \alpha\Big(\|\varphi_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{L_2(\Omega)}\Big) \geqslant \alpha\|\varphi_1\|^2_{L_2(\Omega)},\ \ \alpha > 0, \tag{2.12}$$
так как $I - T(\lambda) \gg 0$. Отсюда и следует свойство
$$I_1 - T_1(\lambda) \gg 0.$$

Опираясь на этот факт, осуществим в (2.8) замену

$$(I_1 - T_1(\lambda))^{1/2}\varphi_1 = \psi_1 \tag{2.13}$$

и подействуем слева (ограниченным) оператором $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}$. Тогда возникает задача

$$\psi_1 = \mu\widehat{B}_2\psi_1, \ \ \psi_1 \in H_1 = L_{2,h}(\Omega), \tag{2.14}$$

$$\widehat{B}_2 := (I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}P_1B_2P_1(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} = \widehat{B}_2^* > 0, \ \ \widehat{B}_2 \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)).$$

Теорема 2.1. *При* $\lambda < 0$ *задача* (2.1) *имеет дискретный спектр, состоящий из положительных конечнократных собственных значений* $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ *с предельной точкой* $+\infty$. *Собственные элементы* $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$, *отвечающие собственным значениям* $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$, *после проектирования на подпространство* $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$, *т. е. элементы* $\{\varphi_{1k}\}_{k=1}^\infty$, $\varphi_{1k} = P_1\varphi_k$, *образуют базис Рисса в* H_1, *причем* $\varphi_{1k} = (I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}\psi_{1k}$, *где* $\{\psi_{1k}\}_{k=1}^\infty$ *— ортонормированный базис, отвечающий оператору* $\widehat{B}_2$ *из* (2.14). *Более того, элементы* φ_{1k} *для* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *образуют* p *— базис в* H_1 *при*

$$p > p_0 = m - 1. \tag{2.15}$$

Доказательство. Первое утверждение о дискретном и положительном спектре и базисе Рисса следует из теоремы Гильберта—Шмидта, примененной к проблеме (2.14), и свойства $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} \in \mathcal{L}(H_1)$.

Докажем теперь свойство (2.15). Из формулы (2.3) следует, что $T(\lambda)$ принадлежит классу компактных операторов $\mathfrak{S}_p(L_2(\Omega))$, где

$$p > p_0 = \max(p_{A^{-1}};\ p_{B_3};\ p_{B_4}). \tag{2.16}$$

Однако, можно убедиться, что собственные значения $\lambda_k(A^{-1})$ положительного самосопряженного компактного оператора A^{-1} суть последовательные максимумы вариационного отношения

$$\|A^{-1/2}\varphi\|^2_{L_2(\Omega)}\Big/\|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)} = \|u\|^2_{L_2(\Omega)}/\|u\|^2_{H^1_{0,\Gamma_1}}(\Omega), \ u = A^{-1/2}\varphi \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega).$$

Поэтому их асимптотика при $k \to \infty$ дается классической формулой Вейля

$$\lambda_k(A^{-1}) = (a_m(\Omega))^{2/m}k^{-2/m}[1 + o(1)] \ \ (k \to \infty), \ \ a_m(\Omega) > 0, \ \ a_3(\Omega) = \frac{|\Omega|}{6\pi^2}, \tag{2.17}$$

и потому $p_{A^{-1}} > m/2$.

Для оператора B_3 аналогично устанавливаем, что его положительные собственные значения суть последовательные максимумы вариационного отношения

$$\|\gamma_3 A^{-1/2}\varphi\|_{L_2(\Gamma)}/\|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Gamma_3}|u|^2d\Gamma_3\Big/\int\limits_{\Omega}(|u|^2 + |\nabla u|^2)d\Omega, \ \ u \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega).$$

Отсюда и из [9] получаем, что асимптотическое поведение собственных значений $\lambda_k(B_3)$ таково:

$$\lambda_k(B_3) = (d_{m,3}(\Gamma_3))^{1/(m-1)}k^{-1/(m-1)}[1 + o(1)] \ \ (k \to \infty), \ \ d_{m,3}(\Gamma_3) > 0, \ d_{3,3}(\Gamma_3) = \frac{|\Gamma_3|}{4\pi}. \tag{2.18}$$

Значит, $p_{B_3} > m - 1$.

Для оператора B_4 те же рассуждения приводят к формуле

$$\lambda_k(B_4) = (d_{m,4}(\Gamma_4))^{1/(m-1)}k^{-1/(m-1)}[1 + o(1)] \ \ (k \to \infty), \ \ d_{m,4}(\Gamma_4) > 0, \ d_{3,4}(\Gamma_4) = \frac{|\Gamma_4|}{4\pi}, \tag{2.19}$$

и потому $p_{B_4} > m - 1$. Из (2.17), (2.18), (2.19) и из (2.16) теперь следует, что $T(\lambda)$ из (2.3) принадлежит классу $\mathfrak{S}_p$ при $p > p_0 = m - 1$.

Заметим, наконец, что

$$(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} = I_1 + \widetilde{T}_1(\lambda), \ \widetilde{T}_1(\lambda) \in \mathfrak{S}_p, \ p > p_0 = m - 1.$$

Отсюда и из (2.13) следует свойство p-базисности элементов $\{\varphi_{1k}\}_{k=1}^\infty$ при $p > m - 1$. □

2.1.2. Положительные значения параметра λ.. Будем теперь считать, что в задаче (2.1), (2.2) параметр λ положителен, однако

$$\lambda \notin \sigma(I - T(\lambda)) \cap \sigma(I_0 - P_0 T(\lambda) P_0). \tag{2.20}$$

Тогда так же, как и в пункте 2.1.1, можно перейти от проблемы (2.1) путем проектирования на подпространства $H_0 = L_{2,0}(\Omega)$ и $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$ и исключения φ_0 (см. (2.5)–(2.7)) к уравнению (2.8) с $T_1(\lambda)$ из (2.9).

Здесь снова справедливо утверждение леммы 2.1, причем $T_1(\lambda)$ — компактный самосопряженный оператор, действующий в H_1. Отсюда следует, что оператор $I_1 - T_1(\lambda)$ может иметь не более конечного числа (с учетом их кратностей) отрицательных собственных значений, а остальные положительны и имеют предельную точку 1. Обозначая количество отрицательных собственных значений через $\varkappa_1$, приходим к выводу, что квадратичная форма оператора $I_1 - T_1(\lambda)$ индефинитна, а все пространство H_1 разбивается на ортогональную сумму $\varkappa_1$-мерного отрицательного подпространства H_- и бесконечномерного положительного подпространства H_+. Таким образом, возникает индефинитная метрика — пространство Понтрягина

$$H_1 = \Pi_{\varkappa_1} = \Pi_- \oplus \Pi_+, \ \ \Pi_- = H_-, \ \ \Pi_+ = H_+, \ \ \dim \Pi_- = \varkappa_1, \ \ \dim \Pi_+ = \infty. \tag{2.21}$$

Теорема 2.2. *Пусть* $\lambda > 0$ *и выполнено условие* (2.20)*, причем имеет место разложение* (2.21)*. Тогда спектр исходной задачи* (2.1)*,* (2.2) *вещественный, дискретный и состоит из* $\varkappa_1$ *штук отрицательных собственных значений, а остальные положительны и имеют предельную точку* $\mu = +\infty$:

$$\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_{\varkappa_1} < 0 < \mu_{\varkappa_1+1} \leqslant \ldots \leqslant \mu_k \leqslant \ldots, \ \ \lim_{k\to\infty} \mu_k = +\infty. \tag{2.22}$$

При этом собственные элементы (*присоединенных нет*) *задачи* (2.8) *образуют ортонормированный по форме* $I_1 - T_1(\lambda)$ *базис и базис Рисса в* $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$*. Элементы базиса можно выбрать удовлетворяющими соотношениям*

$$((I_1 - T_1(\lambda))\varphi_{1k}, \ \varphi_{1j})_{H_1} = \begin{cases} -\delta_{kj}, & 1 \leqslant k, \ j \leqslant \varkappa_1, \\ \delta_{kj}, & k, \ j \geqslant \varkappa_1 + 1, \\ 0, & k \geqslant \varkappa_1, \ \ j \geqslant \varkappa_1 + 1, \end{cases} \tag{2.23}$$

$$(\widetilde{B}_2 \varphi_{1k}, \ \varphi_{1j})_{H_1} = |\mu_k^{-1}| \delta_{kj}.$$

Доказательство. Учитывая (2.20) и (2.21), представим оператор $I_1 - T_1(\lambda)$ в виде

$$I_1 - T_1(\lambda) = |I_1 - T_1(\lambda)|^{1/2} J_{\varkappa_1} |I_1 - T_1(\lambda)|^{1/2}, \tag{2.24}$$

где $J_{\varkappa_1}$ — каноническая симметрия:

$$J_{\varkappa_1} = J_{\varkappa_1}^* = J_{\varkappa_1}^{-1}. \tag{2.25}$$

Тогда с учетом (2.24) задача (2.8) преобразуется к виду

$$v_1 = \mu J_{\varkappa_1} \widetilde{B_2}(\lambda) v_1, \tag{2.26}$$

$$v_1 = |I_1 - T_1(\lambda)|^{1/2} \varphi_1, \ \ \widetilde{B_2}(\lambda) := |I_1 - T_1(\lambda)|^{-1/2} \widetilde{B_2} |I_1 - T_1(\lambda)|^{-1/2}. \tag{2.27}$$

Так как оператор $\widetilde{B_2}(\lambda)$ компактен и положителен, то оператор $J_{\varkappa_1}\widetilde{B_2}(\lambda)$ — компактный и $J_{\varkappa_1}$ — положительный, т. е.

$$[J_\varkappa \widetilde{B_2}(\lambda) v_1, \ v_1] := (J_\varkappa (J_\varkappa \widetilde{B_2}(\lambda)) v_1, \ v_1) = (\widetilde{B_2}(\lambda) v_1, \ v_1) > 0, \ \ v_1 \neq 0.$$

Поэтому по теореме Л. С. Понтрягина (см. [24]) получаем, что задача (2.26), (2.27) имеет дискретный вещественный спектр $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ со свойствами (2.22), а собственные элементы $\{v_{1k}\}_{k=1}^\infty$, отвечающие собственным значениям $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$, образуют базис Рисса в H_1. Отсюда, а также из замены (2.27) приходим к выводу, что собственные элементы $\{\varphi_{1k}\}_{k=1}^\infty$ $\varphi_{1k} = |I_1 - T_1(\lambda)|^{-1/2} v_{1k}$ образуют базис Рисса в H_1. Наконец, из условий ортонормировки

$$[v_{1k}, v_{1j}] = (J_{\varkappa_1} \varphi_{1k}, \varphi_{1j})_{H_1} = \pm \delta_{kj}, \ \ (\widetilde{B_2} \varphi_{1k}, \varphi_{1j})_{H_1} = |\mu_k^{-1}| \delta_{kj},$$

получаем, что справедливы формулы (2.23). □

2.1.3. Случай общего положения. Рассмотрим теперь более общий случай, когда

$$\mathrm{Im}\lambda \neq 0, \quad \lambda \notin \sigma(I - T(\lambda)) \cap \sigma(I_0 - P_0 T(\lambda) P_0). \tag{2.28}$$

Как хорошо известно, операторный пучок типа С. Г. Крейна

$$I - T(\lambda) := I - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1} B_4, \quad A^{-1},\ B_3,\ B_4\ \in \mathfrak{S}_\infty, \tag{2.29}$$

может иметь вне вещественной оси не более конечного числа невещественных собственных значений, симметрично расположенных относительно вещественной оси в правой комплексной полуплоскости.

В частности, если $\mathrm{Re}\lambda \leqslant 0$, то из неравенства

$$\|(I - T(\lambda))\varphi\|_H \cdot \|\varphi\|_H \geqslant |((I - T(\lambda))\varphi, \varphi)_H| \geqslant \mathrm{Re}((I - T(\lambda))\varphi, \varphi)_H \geqslant \|\varphi\|_H^2 \tag{2.30}$$

получаем, что при $\mathrm{Re}\lambda \leqslant 0, \ \ \mathrm{Im}\lambda \neq 0$,

$$\|(I - T(\lambda))^{-1}\| \leqslant 1 \tag{2.31}$$

равномерно по λ. При этом также

$$\|(I_0 - P_0 T(\lambda) P_0)^{-1}\| \leqslant 1,$$

так как в силу (2.30)

$$((I_0 - P_0 T(\lambda) P_0)\varphi_0,\ \varphi_0)_H = ((I - T(\lambda))\varphi_0, \varphi_0)_H \geqslant \|\varphi_0\|_H^2,\ \varphi_0 \in H_0.$$

Отсюда снова следует, что от исходной задачи (2.1), (2.2) можно в рассматриваемом случае перейти к уравнению (2.8) с $T_1(\lambda)$ из (2.9), причем для связи (2.7) снова оператор $I_1 - T_1(\lambda)$ ограниченно обратим. Тогда задачу (2.8) можно переписать в виде

$$\varphi_1 = \mu(I_1 - T_1(\lambda))^{-1} \widetilde{B}_2 \varphi_1, \ \ \varphi_1 \in H_1 = L_{2,h},\ \widetilde{B}_2 = P_1 B_2 P_1. \tag{2.32}$$

Теорема 2.3. *Пусть в задаче* (2.1), (2.2) *выполнены условия* (2.28). *Тогда спектр этой задачи дискретен, состоит из конечнократных собственных значений* $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ *с предельной точкой* $\mu = \infty$. *Сколь бы ни было мало* $\varepsilon > 0$, *все собственные значения, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в угле*

$$\Lambda_\varepsilon(\mu) := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg \mu| < \varepsilon,\ \mathrm{sign}\ \mathrm{Im}\ \mu = -\mathrm{sign}\ \mathrm{Im}\ \lambda\}. \tag{2.33}$$

Система собственных и присоединенных элементов $\{\varphi_{1k}\}_{k=1}^\infty$, $\varphi_{1k} = P_1\varphi_k$, *т. е. система собственных и присоединенных элементов задачи* (2.1), (2.2), *после их проектирования на* $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$, *является полной в* H_1, *более того, она образует базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha > m-1$ *в* H_1. *Наконец, собственные значения* $\mu_k = \mu_k(\lambda)$ *имеют асимптотическое поведение*

$$\mu_k(\lambda) = \lambda_k^{-1}(B_2)[1 + o(1)], \ \ k \to \infty, \tag{2.34}$$

$$\lambda_k(B_2) = (d_{m,2}(\Gamma_2))^{1/(m-1)} k^{-1/(m-1)} [1 + o(1)], \ \ k \to \infty,\ d_{m,2}(\Gamma_2) > 0,\ d_{3,2}(\Gamma_2) = \frac{|\Gamma_2|}{4\pi}. \tag{2.35}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что асимптотическая формула (2.35), так же, как и асимптотические формулы (2.17), (2.18), следует из работы [9]. Далее, из условий (2.28) получаем, что от задачи (2.1) можно перейти к задаче (2.8) и затем к (2.32).

Поэтому к проблеме (2.32) можно применить теоремы М. В. Келдыша (см. [12]), так как в силу (2.35) оператор $\widetilde{B}_2 = P_1 B_2 P_1$ имеет те же ненулевые собственные значения, что и оператор B_2, а потому $\widetilde{B}_2$ — полный положительный компактный оператор класса $\mathfrak{S}_p$ при $p > m - 1$. Кроме того, оператор $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1} = I_1 + T_2(\lambda),\ T_2(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty(H_1)$ и, очевидно, обратим. Отсюда и следуют первые утверждения теоремы.

В частности, свойство из (2.33), определяющее связь знаков $\mathrm{Im}\mu$ и $\mathrm{Im}\lambda$, следует непосредственно из соотношения

$$((I - T(\lambda))\varphi,\ \varphi)_H = \mu(B_2\varphi, \varphi)_H$$

с учетом формулы (2.29) для $T(\lambda)$ и свойств операторов $A^{-1},\ B_2,\ B_3,\ B_4$.

Свойство базисности по Абелю—Лидскому порядка $\alpha > m-1$ следует также из (2.35) и утверждения из [29]. Наконец, асимптотическая формула (2.34) следует из результатов А. С. Маркуса и В. И. Мацаева (см. [21]), примененных к уравнению

$$(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1 = \mu\widetilde{B}_2\varphi_1,$$

так как $T_1(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$, а числа $\lambda_k(\widetilde{B}_2) = \lambda_k(B_2)$ и имеют асимптотику (2.35). □

2.2. Свойства решений при спектральном параметре λ. Рассмотрим теперь случай, когда в задаче

$$L(\lambda,\mu)\varphi := (I - \mu B_2 - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4)\varphi = 0, \quad \varphi \in H = L_2(\Omega), \tag{2.36}$$

параметр $\mu \in \mathbb{C}$ фиксирован, а λ — спектральный.

2.2.1. Неположительные значения фиксированного параметра. Если $\mu \leqslant 0$, то $I - \mu B_2 \geqslant I \gg 0$ и $\|(I - \mu B_2)^{-1}\| \leqslant 1$. Осуществим в этом случае в (2.36) замену

$$(I - \mu B_2)^{1/2}\varphi = \psi. \tag{2.37}$$

Тогда возникает задача

$$\psi = \lambda(I - \mu B_2)^{-1/2}(A^{-1} + B_3)(I - \mu B_2)^{-1/2}\psi + \lambda^{-1}(I - \mu B_2)^{-1/2}B_4(I - \mu B_2)^{-1/2}\psi, \tag{2.38}$$

т. е. задача на собственные значения для операторного пучка С. Крейна. В самом деле, здесь оператор $(I - \mu B_2)^{-1/2}(A^{-1} + B_3)(I - \mu B_2)^{-1/2}$ — компактный и положительный, а $(I - \mu B_2)^{-1/2}B_4(I - \mu B_2)^{-1/2}$ — компактный и неотрицательный.

Будем далее предполагать, что выполнено условие

$$4\|A^{-1} + B_3\| \cdot \|B_4\| < 1. \tag{2.39}$$

Тогда имеет место неравенство

$$\begin{aligned} 4\|(I - \mu B_2)^{-1/2}(A^{-1} + B_3)(I - \mu B_2)^{-1/2}\| \cdot \|(I - \mu B_2)^{-1/2}B_4(I - \mu B_2)^{-1/2}\| \leqslant \\ \leqslant 4\|(I - \mu B_2)^{-1}\|^2 \cdot \|A^{-1} + B_3\| \cdot \|B_4\| \leqslant 4\|A^{-1} + B_3\| \cdot \|B_4\| < 1, \end{aligned} \tag{2.40}$$

достаточное для факторизации операторного пучка

$$I - \lambda(I - \mu B_2)^{-1/2}(A^{-1} + B_3)(I - \mu B_2)^{-1/2} - \lambda^{-1}(I - \mu B_2)^{-1/2}B_4(I - \mu B_2)^{-1/2}, \tag{2.41}$$

отвечающего задаче (2.38) (см., например, [13, с. 82–86]).

Теорема 2.4. *Пусть в задаче* (2.36) *выполнено условие* (2.39). *Тогда имеют место следующие утверждения.*

1°. *Задача* (2.36) *при* $\mu \leqslant 0$ *имеет дискретный вещественный спектр с предельными точками* 0 *и* $+\infty$.

2°. *Предельной точке* $\lambda = 0$ *отвечает ветвь* $\{\lambda_k^\circ\}_{k=1}^\infty$ *изолированных конечнократных собственных значений, расположенных на отрезке*

$$(0, r_-), \;\; r_\pm := (1 \pm \sqrt{1 - 4\|A^{-1} + B_3\| \cdot \|B_4\|})/(2\|A^{-1} + B_3\|). \tag{2.42}$$

Соответствующая система собственных элементов (*присоединенных нет*) *после проектирования на подпространство* $H_1 = L_2(\Omega) \ominus H_0$, $H_0 := \ker(I - \mu B_2)^{-1/2}B_2(I - \mu B_2)^{-1/2}$, *образует базис Рисса в* H_1. *Более того, эта система элементов образует в* H_1 *p-базис при* $p > p_0 = (m-1)/2$.

3°. *Предельной точке* $\lambda = +\infty$ *отвечает ветвь изолированных конечнократных собственных значений* $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, *расположенных на промежутке* $(r_+, +\infty)$, *а отвечающая этой ветви система собственных элементов задачи* (2.36) *образует базис Рисса в* $H = L_2(\Omega)$ *и даже p-базис при тех же* $p > p_0 = (m-1)/2$.

4°. *Собственные значения* λ_k° *имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_k^\circ = \lambda_k(B_4)[1 + o(1)] = (d_{m,3}(\Gamma_4))^{-1/(m-1)}k^{1/(m-1)}[1 + o(1)], \;\; k \to \infty, \tag{2.43}$$

а собственные значения λ_k^∞ — *асимптотическое поведение*

$$\lambda_k^\infty = \lambda_k^{-1}(A^{-1} + B_3)[1 + o(1)] = \lambda_k^{-1}(B_3)[1 + o(1)] = (d_{m,3}(\Gamma_3))^{-1/(m-1)}k^{1/(m-1)}[1 + o(1)], \;\; k \to \infty. \tag{2.44}$$

Доказательство. Оно почти дословно повторяет доказательство теорем 3.1.2 и 3.2.1 из [13, с. 83–92] с учетом того, что при условии (2.39) пучок (2.41) допускает каноническую факторизацию, является самосопряженным, а для собственных значений $\lambda_k(A^{-1}+B_3)$ и $\lambda_k(B_4)$ имеют место асимптотические формулы (2.17), (2.18), а также формула

$$\lambda_k(A^{-1}+B_3)=\lambda_k(B_3)[1+o(1)],\ \ k\to\infty$$

При этом асимптотические формулы (2.43), (2.44) следуют из теорем А. С. Маркуса и В. И. Мацаева (см. [20–22]). □

2.2.2. Вещественная часть μ не положительна. Будем теперь считать, что

$$\mathrm{Re}\mu\leqslant 0,\ \mathrm{Im}\mu\neq 0. \tag{2.45}$$

Тогда в силу неравенств

$$\|(I-\mu B_2)\varphi\|\cdot\|\varphi\|\geqslant|((I-\mu B_2)\varphi,\ \varphi)|\geqslant\mathrm{Re}((I-\mu B_2)\varphi,\ \varphi)\geqslant\|\varphi\|^2$$

получаем, что при условиях (2.45) имеет место оценка

$$\|(I-\mu B_2)^{-1}\|\leqslant 1. \tag{2.46}$$

Применяя слева в (2.36) оператор $(I-\mu B_2)^{-1}$, приходим к задаче

$$\varphi=\lambda(I-\mu B_2)^{-1}(A^{-1}+B_3)\varphi+\lambda^{-1}(I-\mu B_2)^{-1}B_4\varphi. \tag{2.47}$$

Здесь снова возникает спектральная задача для пучка С. Крейна, однако теперь этот пучок не является самосопряженным.

Теорема 2.5. *Пусть в задаче* (2.47) *выполнены условия* (2.45)*, а также условие* (2.39)*. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1°. *Задача* (2.47) *имеет дискретный спектр, состоящий из двух ветвей конечнократных собственных значений с предельными точками $\lambda=0$ и $\lambda=\infty$ соответственно.*

2°. *Предельной точке $\lambda=0$ отвечает ветвь $\{\lambda_k^\circ\}_{k=1}^\infty$ конечнократных собственных значений, расположенных в области*

$$|\lambda|\leqslant r_-,\ \ r_\pm=(1-\sqrt{1-4\|A^{-1}+B_3\|\cdot\|B_4\|})/(2\|A^{-1}+B_3\|),$$

причем для $\forall\varepsilon>0$ все собственные значения λ_k°, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе

$$|\mathrm{arg}\lambda|<\varepsilon. \tag{2.48}$$

При этом система собственных и присоединенных (*корневых*) *элементов $\{\varphi_k^\circ\}_{k=1}^\infty$, отвечающая собственным значениям $\{\lambda_k^\circ\}_{k=1}^\infty$, после ее проектирования на подпространство $H_1=H\ominus H_0$, $H=L_2(\Omega)$, $H_0=\ker B_4$, является полной в H_1 и образует в H_1 базис Абеля—Лидского порядка $\alpha>m-1$.*

3°. *Предельной точке $\lambda=\infty$ отвечает ветвь $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$ конечнократных собственных значений, расположенных в области $|\lambda|\geqslant r_+$, причем для $\forall\varepsilon>0$ все собственные значения λ_k^∞, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе* (2.48).

При этом система корневых элементов $\{\varphi_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, отвечающая собственным значениям $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, является полной в $H=L_2(\Omega)$ и образует в H базис Абеля—Лидского порядка $\alpha>m-1$.

Доказательство. Оно проводится по схеме, изложенной в [13, с. 82–86]. Поэтому здесь приведем лишь некоторые построения, относящиеся к утверждению 2°. Если выполнено условие (2.39), то пучок $L(\lambda)$, отвечающий уравнению (2.47), допускает факторизацию

$$\lambda L(\lambda):=\lambda I-(I-\mu B_2)^{-1}B_4-\lambda^2(I-\mu B_2)^{-1}(A^{-1}+B_3)=$$
$$=Y^{-1}(I-\lambda Y(I-\mu B_2)^{-1}(A^{-1}+B_3))(\lambda I-Y(I-\mu B_2)^{-1}B_4), \tag{2.49}$$

причем при $|\lambda|\leqslant t\in(r_-,r_+)$ оператор-функция $I-\lambda Y(I-\mu B_2)^{-1}(A^{-1}+B_3)$ обратима, а оператор Y также обратим и является решением операторного уравнения

$$Y=I+(I-\mu B_2)^{-1}(A^{-1}+B_3)Y(I-\mu B_2)^{-1}B_4Y. \tag{2.50}$$

Кроме того, спектр

$$\sigma(Z) := \sigma(Y(I-\mu B_2)^{-1}B_4) \subset \{\lambda : |\lambda| \leqslant r_-\}. \tag{2.51}$$

Опираясь на эти факты, рассмотрим задачу на собственные значения

$$Z\varphi = Y(I-\mu B_2)^{-1}B_4\varphi = (I + (I-\mu B_2)^{-1}(A^{-1}+B_3)Y(I-\mu B_2)^{-1}Y)(I-\mu B_2)^{-1}B_4\varphi =$$
$$=: (I+\Phi)B_4\varphi = \lambda\varphi,\ \varphi \in L_2(\Omega) = H,\ |\lambda| \leqslant r_-. \tag{2.52}$$

Здесь $\Phi \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ и $(I+\Phi)$ обратим, а $B_4 = B_4^* \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ имеет бесконечномерное ядро $H_0 = \ker B_4$.

Представим теперь φ в виде $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1,\ \varphi_0 \in H_0,\ \varphi_1 \in H_1 = H \ominus H_0$, и спроектируем обе части (2.52) на H_0 и H_1 соответственно с помощью ортопроекторов P_0 и P_1. С учетом соотношений $P_0B_4 = 0,\ P_1B_4P_1 =: \widetilde{B}_4 > 0$ (в H_1) будем иметь

$$P_0(I+\Phi)P_1 \cdot \widetilde{B}_4\varphi_1 = \lambda\varphi_0,\ \ (I_1 + P_1\Phi P_1)\cdot\widetilde{B}_4\varphi_1 = \lambda\varphi_1. \tag{2.53}$$

Так как по постановке задачи $\lambda \neq 0$, то из первого соотношения (2.53) можно выразить φ_0 через φ_1, а второе уравнение не содержит φ_0. Кроме того, можно доказать (см., например, [13, с. 85]), что оператор $I_1 + P_1\Phi P_1$ обратим в H_1. Наконец, из асимптотической формулы (2.19) следует, что $\widetilde{B}_4 \in \mathfrak{S}_p(H_1)$ при $p > m-1$.

Эти свойства показывают, что ко второму уравнению (2.53) применима теорема М. В. Келдыша о свойствах спектра слабо возмущенного самосопряженного оператора класса $\mathfrak{S}_p(H)$ (см. [12, с. 313–320]). Отсюда следуют утверждения из 2° о локализации спектра в исходной задаче (2.47) при $|\lambda| \leqslant r_-$, а также о полноте проекций корневых элементов в пространстве H_1. Утверждение о базисности по Абелю—Лидскому этих корневых элементов следует из [29, с. 292], а также из асимптотической формулы (2.19).

Утверждения 3° доказываются аналогично, однако без проектирования на H_1, так как оператор $A^{-1}+B_3$ полный, т. е. $\ker(A^{-1}+B_3) = \{0\}$. При этом также используется тот факт, что $\lambda_k(A^{-1}+B_3) = \lambda_k(B_3)[1+o(1)]$ $(k \to \infty)$, и асимптотическая формула (2.18). Кроме того, в пучке $L(\lambda)$ следует сделать замену $\lambda \to \tilde{\lambda}^{-1}$ и использовать вместо (2.49) аналогичную факторизацию для пучка $\tilde{\lambda}L(\tilde{\lambda}^{-1})$ (см. [13, с. 86]). □

Замечание 2.1. В задаче (2.36) при любом фиксированном $\mu \in \mathbb{C}$ имеются две ветви конечнократных собственных значений $\{\lambda_k^\circ\}_{k=1}^\infty$ и $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$ с предельными точками $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$. Эти ветви имеют асимптотическое поведение (2.43) и (2.44) соответственно. Этот результат следует из теоремы А. С. Маркуса и В. И. Мацаева (см. [21]).

3. Некоторые начально-краевые задачи, порождающие спектральные задачи сопряжения

Спектральные задачи, разобранные в предыдущем разделе, порождаются начально-краевыми задачами, в которых производные по времени входят не только в уравнение, но и в краевые условия. Здесь будет рассмотрено несколько таких примеров.

3.1. Первая задача. В области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega$, разбитой на 3 липшицевых куска $\Gamma_1,\ \Gamma_2$ и Γ_3 с липшицевыми контурами $\partial\Gamma_1,\ \partial\Gamma_2$ и $\partial\Gamma_3$, сформулируем сначала спектральную проблему

$$L_0u = \lambda u\ (\text{в } \Omega),\ \gamma_1 u = 0\ (\text{на } \Gamma_1),\ \partial_2 u = \mu\gamma_2 u\ (\text{на } \Gamma_2),\ \ \partial_3 u = \lambda\gamma_3 u\ (\text{на } \Gamma_3),$$
$$L_0 u = u - \triangle u,\ \partial_k u = (\partial u/\partial n)_{\Gamma_k},\ \gamma_k u = u|_{\Gamma_k},\ k = \overline{1,3}, \tag{3.1}$$

где λ и μ — параметры, один из которых можно считать спектральным, а второй — фиксированным.

Нетрудно видеть, что если рассматривать начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L_0 u = f\ (\text{в } \Omega),\ \gamma_1 u = 0\ (\text{на } \Gamma_1),\ \partial_2 u = \mu\gamma_2 u + \psi_2\ (\text{на } \Gamma_2),$$
$$\partial_3 u + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_3 u) = \psi_3\ (\text{на } \Gamma_3),\ \ u(0,x) = u^0(x),\ x \in \Omega, \tag{3.2}$$

и разыскивать ее решения при $f \equiv 0,\ \psi_2 \equiv 0,\ \psi_3 \equiv 0$ в виде

$$u(t,x) = \exp(-\lambda t)u(x),\ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{3.3}$$

то для амплитудной функции $u(x)$, $x \in \Omega$, возникает спектральная проблема (3.1), где λ — искомый спектральный параметр.

Опираясь на построения и методы разделов 1 и 2, а также на использованные выше операторы вспомогательных краевых задач, можно исследовать задачу (3.2) и доказать теорему о ее сильной разрешимости на произвольном конечном промежутке времени.

Представим, как и выше, решение $u(t,x)$ задачи (3.1) в виде суммы решений четырех вспомогательных задач, в каждой из которых неоднородности входят в уравнение либо в краевое условие лишь в одном месте. Не выписывая формулировки этих задач, сразу представим решение в виде

$$u = A^{-1}(f - \frac{\partial u}{\partial t}) + V_2(\mu\gamma_2 u + \psi_2) + V_3(\psi_3 - \frac{\partial}{\partial t}\gamma_3 u), \tag{3.4}$$

где A — оператор гильбертовой пары $(H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega);\ L_2(\Omega))$, а V_2 и V_3 — операторы вспомогательных задач Неймана (см. (1.5)–(1.7) при $\Gamma_4 = \varnothing$). Тогда возникает дифференциальное уравнение для функции $u = u(t)$ со значениями в пространстве $H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$:

$$(A^{-1} + V_3\gamma_3)\frac{du}{dt} + (I - \mu V_2\gamma_2)u = A^{-1}f + V_2\psi_2 + V_3\psi_3. \tag{3.5}$$

Если здесь еще сделать замену искомой функции

$$u(t) = A^{-1/2}\eta(t), \ \ \eta \in L_2(\Omega), \tag{3.6}$$

то получаем задачу Коши

$$(A^{-1} + B_3)\frac{d\eta}{dt} + (I - \mu B_2)\eta = A^{-1/2}f + A^{1/2}V_2\psi_2 + A^{1/2}V_3\psi_3 =: f_1(t), \ \ \eta(0) = A^{1/2}u^0, \tag{3.7}$$

$$B_k = (A^{1/2}V_k)(\gamma_k A^{-1/2}) = (\gamma_k A^{-1/2})^*(\gamma_k A^{-1/2}) : L_2(\Omega) \to L_{2,h}(\Omega) \subset L_2(\Omega),\ k = \overline{1,3}.$$

Свойства коэффициентов A^{-1} и B_k уже описаны выше.

Осуществим в (3.7) еще одну замену

$$(A^{-1} + B_3)\eta =: w. \tag{3.8}$$

Тогда возникает задача Коши

$$\frac{dw}{dt} + (I - \mu B_2)(A^{-1} + B_3)^{-1}w = f_1(t), \ \ w(0) = (A^{-1} + B_3)A^{1/2}u^0. \tag{3.9}$$

Определение 3.1. Назовем функцию $w(t)$ со значениями в $L_2(\Omega)$ сильным решением задачи (3.9) на отрезке $[0,T]$, если

$$w(t) \in C^1([0,T];\ L_2(\Omega)) \cap C([0,T];\ \mathcal{D}((A^{-1} + B_3)^{-1}) \tag{3.10}$$

и для нее выполнено уравнение (3.10), где все слагаемые принадлежат $C([0,T];\ L_2(\Omega))$, а также выполнено условие $u(0) = u^0$.

Далее будем полагать, что

$$\mu \notin \sigma(I - \mu B_2). \tag{3.11}$$

Теорема 3.1. *Пусть в исходной задаче* (3.2) *выполнены условия*

$$f(t,x) \in C^\beta([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*),\ \psi_2(t,x) \in C^\beta([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_2)),$$

$$\psi_3(t,x) \in C^\beta([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_3)),\ 0 < \beta \leqslant 1, \ \ u^0(x) \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega), \tag{3.12}$$

а также условие (3.11).

Тогда задача (3.9) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$ *в смысле определения* 3.1. *При этом исходная начально-краевая задача имеет единственное решение на отрезке* $[0,T]$

$$u(t,x) \in C([0,T];\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)), \tag{3.13}$$

причем для этого решения выполнено уравнение в Ω, *где все слагаемые являются элементами из* $C([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*)$, *граничные условия на* Γ_k, $k = 2,3$, *где все слагаемые являются элементами из* $C([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$, *а также начальное условие.*

Доказательство. Если выполнены условия (3.12), то в силу свойств операторов A^{-1} и B_k, $k = 2,3$, функция $f_1(t)$ в (3.9) является элементом из $C^{\beta}([0,T];\ L_2(\Omega))$, а $w^0 \in \mathcal{D}((A^{-1}+B_3)^{-1})$. Далее, так как $(A^{-1}+B_3)^{-1}$ — самосопряженный положительно определенный оператор, действующий в $L_2(\Omega)$, а $B_2 \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$, то оператор $-(I-\mu B_2)(A^{-1}+B_3)^{-1}$ является генератором аналитической полугруппы, а уравнение (3.9) — абстрактное параболическое. Поэтому при сформулированных свойствах для $f_1(t)$ и w^0 задача Коши (3.9) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. Отсюда следует, что существует единственное сильное решение задачи Коши (3.7), где все слагаемые являются элементами из $C([0,T];L_2(\Omega))$. Тогда в силу (3.11) получаем, что

$$\eta(t) \in C([0,T];L_2(\Omega)),$$

а потому ввиду замены (3.6) имеем в задаче (3.5) (либо (3.4))

$$u(t) \in C([0,T];\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)). \tag{3.14}$$

Далее, соотношение (3.4), в свою очередь, показывает, что $u = u_1 + u_2 + u_3$, причем

$$L_0u_1 = f - \frac{du}{dt}\ (\text{в } \Omega),\ \gamma_1u_1 = 0\ (\text{на } \Gamma_1),\ \ \partial_2u_1 = 0\ (\text{на } \Gamma_2),\ \ \partial_3u_1 = 0\ (\text{на } \Gamma_3),$$

$$L_0u_2 = 0\ (\text{в } \Omega),\ \gamma_1u_2 = 0\ (\text{на } \Gamma_1),\ \ \partial_2u_2 = \mu\gamma_2u + \psi_2\ (\text{на } \Gamma_2),\ \ \partial_3u_2 = 0\ (\text{на } \Gamma_3),$$

$$L_0u_3 = 0\ (\text{в } \Omega),\ \gamma_1u_3 = 0\ (\text{на } \Gamma_1),\ \ \partial_2u_3 = 0\ (\text{на } \Gamma_2),\ \ \partial_3u_3 = \psi_3 - \frac{d}{dt}(\gamma_3u)\ (\text{на } \Gamma_3).$$

Отсюда приходим к выводу, что для функции u выполнены все уравнения и краевые условия задачи (3.2).

При этом из (3.14) и свойств дифференциального выражения L_0u (для обобщенной формулы Грина, см. (1.10)) получаем, что $L_0u \in (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*$, а потому в уравнении в Ω из (3.2) все слагаемые являются элементами из $C([0,T];\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))$. Аналогично из (3.14) получаем, что $\partial_k u \in C([0,T];\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$, $k = 2,3$, а потому все слагаемые в граничных условиях на Γ_2 и Γ_3 являются элементами из $C([0,T];\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$, $k = 2,3$, соответственно. □

3.2. Вторая задача. Будем теперь считать, что μ — спектральный, а λ — фиксированный параметр в проблеме (3.1), и приведем постановку начально-краевой задачи, отвечающей этому случаю. Тогда будем иметь следующее уравнение и краевые условия:

$$L_0u = \lambda u + f\ (\ \Omega),\ \gamma_1u = 0\ (\text{на } \Gamma_1),$$

$$\partial_2u + \frac{\partial}{\partial t}\gamma_2u = \psi_2\ (\text{на } \Gamma_2),\ \ \partial_3u = \lambda\gamma_3u + \psi_3\ (\text{на } \Gamma_3). \tag{3.15}$$

Снова считая, что $u \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ есть сумма решений трех вспомогательных задач, приходим для искомой функции $u = u(t,x)$ к уравнению (см. (3.4))

$$u = A^{-1}(\lambda u + f) + V_2(\psi_2 - \frac{d}{dt}\gamma_2u) + V_3(\lambda\gamma_3u + \psi_3), \tag{3.16}$$

и соответствующей задаче Коши

$$V_2\gamma_2\frac{du}{dt} + (I - \lambda(A^1 + V_3\gamma_3))u = A^{-1}f + V_2\psi_2 + V_3\psi_3,\ \ u(0) = u^0. \tag{3.17}$$

Отсюда после замены

$$u = A^{-1/2}\eta,\ \eta \in L_2(\Omega), \tag{3.18}$$

получаем задачу

$$B_2\frac{d\eta}{dt} + (I - \lambda(A^{-1}+B_3))\eta = A^{-1/2}f + A^{1/2}V_2\psi_2 + A^{1/2}V_3\psi_3 =: f(t),\ \ \eta(0) = \eta^0 = A^{1/2}u^0. \tag{3.19}$$

Особенностью этой задачи, в отличие от аналогичной проблемы (3.7), является тот факт, что оператор $B_2 = (A^{1/2}V_2)(\gamma_2A^{-1/2}) = (\gamma_2A^{-1/2})^*(\gamma_2A^{-1/2})$ лишь неотрицателен и имеет бесконечномерное ядро $\ker B_2$.

Учитывая это обстоятельство, рассмотрим проблему вида (3.19) в абстрактной форме. Именно, будем считать, что исследуется в произвольном гильбертовом пространстве H задача Коши

$$B\frac{d\eta}{dt} + (I - \Phi)\eta = f(t),\ \eta(0) = \eta^0, \tag{3.20}$$

где B — неотрицательный компактный оператор, имеющий ненулевое ядро:

$$H_0 := \ker B \neq \{0\}, \tag{3.21}$$

а $\Phi \in \mathfrak{S}_\infty(H)$.

Воспользуемся разложением $H = H_0 \oplus H_1$, $H_1 = \overline{\mathcal{R}(B)}$, и преобразуем задачу (3.20) к задаче Коши для дифференциального уравнения в подпространстве H_1. С этой целью представим $\eta = \eta_0 + \eta_1$, $\eta_0 = P_0\eta = P_0\eta_0 \in H_0$, $\eta_1 = P_1\eta = P_1\eta_1 \in H_1$, где P_0 и P_1 — ортопроекторы на H_0 и H_1 соответственно.

Будем далее предполагать, что выполнены условия

$$\ker(I - \Phi) = \{0\},\ \ker(I_0 - P_0\Phi P_0) = \{0\}. \tag{3.22}$$

Тогда в силу второго условия оператор $(I_0 - P_0\Phi P_0)$ обратим и возникает задача Коши

$$B_1\frac{d\eta_1}{dt} + (I_1 - \Phi_1)\eta_1 = f_1(t),\ \eta_1(0) = \eta_1^0 = P_1\eta^0, \tag{3.23}$$

$$\begin{gathered} B_1 := P_1BP_1,\ \Phi_1 = P_1\Phi P_1 + (P_1\Phi P_0)(I_0 - P_0\Phi P_0)^{-1}(P_0\Phi P_1), \\ f_1 := P_1 f + (P_1\Phi P_0)(I_0 - P_0\Phi P_0)^{-1}P_0 f, \\ \eta_0 = (I_0 - P_0\Phi P_0)^{-1}[(P_0\Phi P_1)\eta_1 + P_0 f]. \end{gathered}$$

Здесь оператор $B_1 : H_1 \to H_1$ — положительный и компактный, а $\Phi_1 \in \mathfrak{S}_\infty(H_1)$.

Осуществляя еще в (3.23) замену искомой функции

$$B_1\eta_1 = \xi_1, \tag{3.24}$$

придем к задаче Коши

$$\frac{d\xi_1}{dt} + (I_1 - \Phi_1)B_1^{-1}\xi_1 = f_1(t),\ \ \xi_1(0) = B_1\eta_1(0) = B_1P_1\eta^0. \tag{3.25}$$

Лемма 3.1. *Пусть в задаче* (3.20), (3.21) *выполнены условия* (3.22), *а также условия*

$$f(t) \in C^\beta([0,T]; H_1),\ \ \eta^0 \in H. \tag{3.26}$$

Тогда эта задача имеет единственное решение $\eta(t) \in C([0,T]; H)$, для которого все слагаемые в уравнении (3.20) *являются непрерывными функциями t со значениями в H и выполнено начальное условие* (3.20).

Доказательство. Если выполнены условия (3.26), то в задаче (3.25)

$$f_1(t) \in C^\beta([0,T]; H_1),\ \ \xi_1(0) \in \mathcal{D}((B_1)^{-1}), \tag{3.27}$$

Далее, уравнение (3.25) является абстрактным параболическим, так как B_1^{-1} — положительно определенный самосопряженный неограниченный оператор, а $\Phi_1 \in \mathfrak{S}_\infty(H_1)$. Отсюда следует, что задача (3.25) имеет единственное сильное решение на промежутке $[0,T]$, т. е. $\xi_1(t) \in C^1([0,T],\ H_1) \cap C([0,T],\ \mathcal{D}(B_1^{-1}))$. Отсюда получаем, что существует единственное решение $\eta(t)$ задачи (3.23), для которого все слагаемые в уравнении — элементы из $C([0,T]; H_1)$. Так как $I_1 - \Phi_1$ обратим в силу условий (3.22), то получаем свойство $\eta_1(t) \in C([0,T]; H_1)$.

Возвращаясь теперь от (3.23) к исходной задаче (3.20) (см. соотношения для f_1 и η_0 в (3.23)), получаем утверждение леммы. □

Следствием леммы 3.1 является такое утверждение относительно разрешимости задачи (3.15).

Теорема 3.2. *Пусть в задаче* (3.15) *выполнены условия*

$$\begin{gathered} f \in C^\beta([0,T]; (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*),\ \ \psi_k \in C^\beta([0,T]; \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)),\ \ 0 < \beta \leqslant 1,\ k = 1,2, \\ u(0) = u^0 \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega), \end{gathered} \tag{3.28}$$

а также условия

$$\lambda \notin \sigma(I - \lambda(A^{-1} + B_3)) \cap \sigma(I_0 - \lambda P_0(A^{-1} + B_3)P_0),\ \ P_0H := \ker B_2. \tag{3.29}$$

Тогда эта задача имеет единственное решение $u \in C([0,T]; \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))$, для которого каждое слагаемое в уравнении в Ω является элементом из $C([0,T]; (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*)$, а в граничных условиях — элементом из $C([0,T]; \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$, $k = 2,3$.

Доказательство. Оно проводится по тому же плану, что и в теореме 3.1, с учетом утверждения леммы 3.1.

Именно, при выполнении условий (3.28), (3.29) из леммы 3.1 получаем, что задача (3.23) имеет единственное решение $\eta_1(t) \in C([0,T];H_1)$, $H_1 := L_2(\Omega) \ominus \ker B_1$. Возвращаясь теперь от (3.23) к (3.17), (3.16) и рассуждая, как при доказательстве теоремы 3.1, приходим к утверждению данной теоремы. □

Замечание 3.1. Выясним теперь, как выглядят в явной форме условия (3.29). Что касается первого из них, то, очевидно, здесь исключительные значения таковы:

$$\lambda = \lambda_k^{-1}(A^{-1}+B_3), \quad k=1,2,\ldots$$

Это характеристические числа компактного положительного оператора $A^{-1}+B_3$, они образуют счетное множество на положительной оси и имеют предельную точку $\lambda = +\infty$. В терминах исходной задачи (3.1) можно проверить, что эти исключительные значения λ суть собственные значения задачи Стефана

$$L_0u = \lambda u \ (\text{в } \Omega), \ \gamma_1 u = 0 \ (\text{на } \Gamma_1), \ \partial_2 u = 0 \ (\text{на } \Gamma_2), \ \partial_3 u = \lambda\gamma_3 u \ (\text{на } \Gamma_3). \tag{3.30}$$

Что касается второго условия (3.29), то оказывается, что здесь исключительными являются собственные значения следующей видоизмененной задачи Стефана:

$$L_0u = \lambda u \ (\text{в } \Omega), \ \gamma_1 u = 0 \ (\text{на } \Gamma_1), \ \gamma_2 u = 0 \ (\text{на } \Gamma_2), \ \partial_3 u = \lambda\gamma_3 u \ (\text{на } \Gamma_3). \tag{3.31}$$

В самом деле, легко устанавливаем, что для $B_2 = (\gamma_2 A^{-1/2})^*(\gamma_2 A^{-1/2})$

$$\ker B_2 = \{\eta_0 \in L_2(\Omega) : \eta_0 = A^{1/2}u_0, \ u_0 \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega), \ \gamma_2 u_0 = 0\}. \tag{3.32}$$

Поэтому здесь вместо (3.30) возникает задача на собственные значения

$$P_0\eta = \lambda P_0(A^{-1}+B_3)P_0\eta, \quad \eta \in L_2(\Omega), \tag{3.33}$$

которая имеет дискретный положительный спектр $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^\infty$ с предельной точкой $\lambda = +\infty$. Они являются последовательными минимумами вариационного отношения

$$\|u_0\|^2_{H^1(\Omega)}/(\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\gamma_3 u_0\|^2_{L_2(\Gamma_3)}), \quad u_0 \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1\cup\Gamma_2}(\Omega). \tag{3.34}$$

Таким образом, в начально-краевой задаче (3.15) множество исключительных значений λ представляют собой объединение спектров вспомогательных задач Стефана (3.30) и (3.31).

3.3. Третья задача. Рассмотрим, наконец, вариант, когда граница $\Gamma = \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ разбита не на три липшицевых куска, как в задаче (3.1), а на четыре с дополнительным краевым условием на Γ_4:

$$\begin{gathered} L_0u = \lambda u \ (\text{в } \Omega), \ \gamma_1 u = 0 \ (\text{на } \Gamma_1), \ \partial_2 u = \mu\gamma_2 u \ (\text{на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u = \lambda\gamma_3 u \ (\text{на } \Gamma_3), \ \lambda\partial_4 u = \gamma_4 u \ (\text{на } \Gamma_4). \end{gathered} \tag{3.35}$$

Здесь (при спектральном параметре μ) порождающая ее начально-краевая задача выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} L_0u = \lambda u + f \ (\text{в } \Omega), \ \gamma_1 u = 0 \ (\text{на } \Gamma_1), \ \partial_2 u + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_2 u) = \psi_2 \ (\text{на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u = \lambda\gamma_3 u + \psi_3 \ (\text{на } \Gamma_3), \ \partial_4 u = \lambda^{-1}\gamma_4 u + \psi_4 \ (\text{на } \Gamma_4), \quad u(0) = u^0. \end{gathered} \tag{3.36}$$

Проводя те же рассуждения, что и в первой задаче (см. (3.4)–(3.9)), приходим по аналогии с (3.9) к задаче Коши

$$B_2\frac{d\eta}{dt} + (I - \lambda(A^{-1}+B_3) - \lambda^{-1}B_4)\eta = f(t), \quad \eta(0) = \eta^0 = A^{1/2}u^0, \tag{3.37}$$

$$f(t) = A^{-1/2}f + \sum_{k=2}^4 A^{1/2}V_k\psi_k.$$

Не приводя подробных обсуждений, сформулируем сразу итоговый результат; он получается так же, как в проблеме (3.19), но с некоторыми усложнениями.

Теорема 3.3. *Пусть в задаче* (3.36) *выполнены условия*

$$\lambda \notin \sigma(I - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4) \cap \sigma(I_0 - \lambda P_0(A^{-1} + B_3)P_0 - \lambda^{-1}P_0B_4P_0), \tag{3.38}$$

где $P_0 : L_2(\Omega) \to \ker B_2 =: H_0$ — *ортопроектор на* H_0, *а также условия*

$$f \in C^{\beta}([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*),\ \ \psi_k \in C^{\beta}([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)),\ \ 0 < \beta \leqslant 1,\ k = 2,3,4, \tag{3.39}$$

$$u(0) = u^0 \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega).$$

Тогда эта задача имеет единственное решение $u \in C([0,T];\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))$, *для которого каждое слагаемое в уравнении в* Ω (*см.* (3.36)) *является элементом из* $C([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*)$, *а в граничных условиях — элементом из* $C([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$, $k = 2,3,4$, *соответственно.*

Замечание 3.2. Можно убедиться, что первое условие (3.38) требует, чтобы λ не являлось собственным значением задачи Крейна—Стефана

$$L_0u = \lambda u \text{ (в } \Omega),\ \gamma_1 u = 0 \text{ (на } \Gamma_1),\ \partial_2 u = 0 \text{ (на } \Gamma_2),$$
$$\partial_3 u = \lambda\gamma_3 u \text{ (на } \Gamma_3),\ \lambda\partial_4 u = \gamma_4 u \text{ (на } \Gamma_4), \tag{3.40}$$

которая, как известно, имеет две ветви конечнократных положительных собственных значений с предельными точками $\lambda = 0$ и $\lambda = +\infty$, а также не более конечного числа невещественных комплексно сопряженных пар конечнократных собственных значений.

Что касается второго требования в (3.38), то, по аналогии с рассуждениями из замечания 3.1, можно убедиться, что здесь исключительными числами являются собственные значения модифицированной задачи Крейна—Стефана (см. (3.31))

$$L_0u = \lambda u \text{ (в } \Omega),\ \gamma_1 u = 0 \text{ (на } \Gamma_1),\ \gamma_2 u = 0 \text{ (на } \Gamma_2),$$
$$\partial_3 u = \lambda\gamma_3 u \text{ (на } \Gamma_3),\ \lambda\partial_4 u = \gamma_4 u \text{ (на } \Gamma_4). \tag{3.41}$$

Общие свойства спектра этой задачи — такие же, как задачи (3.40).

3.4. Четвертая задача. Эта задача порождает спектральную проблему (3.35), если μ — фиксированный, а λ — спектральный параметр. Здесь предварительно удобно, как и в задаче гидродинамики (проблема С. Крейна), ввести вместо поля скоростей $u(t,x)$ поле перемещений сплошной среды $w(t,x)$, $u(t,x) = \partial w/\partial t$. Тогда начально-краевая задача, отвечающая проблеме (3.35), формируется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + L_0\frac{\partial w}{\partial t} = f; \text{(в } \Omega),\ w = 0 \text{ (на } \Gamma_1),$$
$$\partial_2\frac{\partial w}{\partial t} = \mu\gamma_2\frac{\partial w}{\partial t} + \psi_2 \text{ (на } \Gamma_2),\ \partial_3\frac{\partial w}{\partial t} + \gamma_3\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \psi_3 \text{ (на } \Gamma_3), \tag{3.42}$$
$$\partial_4\frac{\partial w}{\partial t} + \gamma_4 w = \psi_4 \text{ (на } \Gamma_4),\ \ w(0) = w^0,\ \ \frac{\partial w}{\partial t}(0) = w^1 = u^0.$$

Пользуясь теми же общими приемами, которые были использованы выше, приходим к выводу, что искомое решение $w = w(t)$ со значениями в $\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dw}{dt} = A^{-1}(f - \frac{d^2w}{dt^2}) + V_2(\psi_2 + \mu\gamma_2\frac{dw}{dt}) + V_3(\psi_3 - \gamma_3\frac{d^2w}{dt^2}) + V_4(\psi_4 - \gamma_4 w). \tag{3.43}$$

Тогда возникает задача Коши

$$(A^{-1} + V_3\gamma_3)\frac{d^2w}{dt^2} + (I - \mu V_2\gamma_2)\frac{dw}{dt} + V_4\gamma_4 w = A^{-1}f + \sum_{k=2}^{4} V_k\psi_k, \tag{3.44}$$

$$w(0) = w^0,\ \ \frac{dw}{dt}(0) = w^1 = u^0.$$

Эта задача после замены $w = A^{-1/2}\eta$ переходит в проблему

$$(A^{-1} + B_3)\frac{d^2\eta}{dt^2} + (I - \mu B_2)\frac{d\eta}{dt} + B_4\eta = A^{-1/2}f + \sum_{k=2}^{4} A^{1/2}V_k\psi_k =: f(t), \tag{3.45}$$

$$\eta(0) = A^{1/2}w^0, \ \ \frac{d\eta}{dt}(0) = A^{1/2}w^1 = A^{1/2}u^0.$$

Осуществляя здесь еще одну замену

$$\frac{d\eta}{dt} = (A^{-1} + B_3)^{-1}\varphi, \tag{3.46}$$

приходим к задаче Коши для интегродифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{d\varphi}{dt} + (I - \mu B_2)(A^{-1} + B_3)^{-1}\varphi + \int\limits_0^t B_4(A^{-1} + B_3)^{-1}\varphi(s)ds = -B_4A^{1/2}w^0 + A^{-1/2}f + \sum_{k=2}^{4} A^{1/2}V_k\psi_k, \tag{3.47}$$

$$\varphi(0) = (A^{-1} + B_3)A^{1/2}w^1.$$

Чтобы исследовать проблему разрешимости задачи (3.47), сейчас понадобится одно утверждение, доказательство которого можно найти в [14, теоремы 1.3.2, 1.3.4, с. 21–25]. В несколько ослабленной форме оно выглядит следующим образом.

Лемма 3.2. *Пусть в задаче Коши для интегродифференциального уравнения первого порядка, рассматриваемого в гильбертовом пространстве H, т. е. в задаче*

$$\frac{du}{dt} = A_0u + \int\limits_0^t G(t,s)A_1u(s)ds + f(t), \ \ u(0) = u^0, \tag{3.48}$$

выполнены следующие условия:

1°. A_0 *является генератором аналитической полугруппы*;
2°. $\mathcal{D}(A_1) \supset \mathcal{D}(A_0)$;
3°. $G(t,s),\ \partial G(t,s)/dt \in C(\triangle_T; H),\ \triangle_T := \{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t \in T\}$;
4°. $f(t) \in C^\beta([0,T]; H),\ 0 < \beta \leqslant 1$;
5°. $u^0 \in \mathcal{D}(A_0)$.

Тогда задача (3.48) *имеет единственное сильное решение*

$$u(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A_0)) \cap C^1([0,T]; H), \tag{3.49}$$

для которого все слагаемые в (3.48) *являются элементами из* $C([0,T]; H)$ *и выполнено начальное условие.*

Воспользуемся леммой 3.2 применительно к задаче (3.47). В этой задаче оператор $-(I - \mu B_2)(A^{-1} + B_3)^{-1}$ является генератором аналитической полугруппы, причем области определения этого генератора и оператора, стоящего под знаком интеграла, совпадают. Далее, можно считать, что в (3.47) $G(t,s) \equiv I$ и потому выполнено условие 3° леммы 3.2.

Отсюда приходим к следующему выводу.

Лемма 3.3. *Если в задаче* (3.48) *выполнены условия*

$$w^0 \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega), \ \ w^1 \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega), \tag{3.50}$$

$$f(t) \in C^\beta([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*), \ \ \psi_k \in C^\beta([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)), \ \ k = 2,3,4, \ \ 0 < \beta \leqslant 1, \tag{3.51}$$

то эта задача имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$, *и для этого решения все слагаемые в уравнении* (3.47) *являются непрерывными функциями* $t \in [0,T]$ *со значениями в* $L_2(\Omega)$.

Это утверждение позволяет установить такой факт.

Теорема 3.4. *Пусть в задаче* (3.42) *выполнены условия* (3.50), (3.51), *а также условие*

$$\mu \notin \sigma(I - \mu B_2). \tag{3.52}$$

Тогда эта задача имеет сильное решение

$$w \in C^2([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*) \cap C^1([0,T];\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)), \tag{3.53}$$

для которого выполнены уравнение (3.42)*, где все слагаемые являются элементами из* $C([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*)$*, граничные условия* (3.42)*, где все слагаемые на* Γ_k *являются элементами из* $C([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$*,* $k=2,3,4$*, а также начальные условия* (3.42)*.*

Доказательство. При выполнении условий (3.50), (3.51) по лемме 3.3 задача (3.47), а потому и задача (3.45) имеют решения, для которых все слагаемые в этих уравнениях являются элементами из $C([0,T];\ L_2(\Omega))$. Тогда в силу условия (3.52) имеем $d\eta/dt \in C([0,T];\ L_2(\Omega))$. Отсюда получаем, что в задаче (3.44), а потому и в (3.43) $dw/dt \in C([0,T];\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))$. Следовательно, $L_0(dw/dt) \in C([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*)$, $\partial_k(dw/dt) \in C([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$.

Далее устанавливаем, опираясь на представление (3.43), как и выше, что для $w(t,x)$ выполнены уравнение и краевые условия (3.42), а потому в силу доказанных свойств в уравнении (3.42) все слагаемые — элементы из $C([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*)$, а в граничных условиях — элементы из $C([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$, $k=2,3,4$.

Отсюда также приходим к выводу, что имеет место свойство (3.53) и, кроме того, свойство $\gamma_3 w \in C^2([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_3))$. Наконец, выполнены также начальные условия (3.50). □

Отметим в заключение, что подход, продемонстрированный в данном разделе для спектральной задачи (2.1)-(2.2), можно применить и для спектральной задачи сопряжения (1.19)–(1.28): исследовать свойства ее решений на основе операторного пучка (1.31), (1.32), а также рассмотреть начально-краевые задачи, порождающие спектральную проблему (1.19)–(1.28).

Автор благодарит проф. Копачевского Н. Д. за постановку задач, обсуждение возникающих здесь проблем и полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С.* Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 5. — С. 3–78.
2. *Агранович М. С., Амосов Г. А., Левитин М.* Спектральные задачи для системы Ламе в гладких и негладких областях со спектральным параметром в краевом условии// Росс. ж. мат. физ. — 1999. — *6*, № 3. — С. 247–281.
3. *Агранович М. С., Менникен Р.* Спектральные задачи для уравнения Гельмгольца со спектральным параметром в граничных условиях на негладкой поверхности// Мат. сб. — 1999. — *30*, № 1. — С. 29–68.
4. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.
5. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1974. — *38*, № 6. — С. 1362–1392.
6. *Войтицкий В. И.* Абстрактная спектральная задача Стефана// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Мат. Мех. Информ. Киберн. — 2006. — *19 (58)*, № 2. — С. 20–28.
7. *Войтицкий В. И.* О спектральных задачах, порожденных задачей Стефана с условиями Гиббса—Томсона// Нелин. гранич. задачи — 2007. — *17*. — С. 31–49.
8. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д., Старков П. А.* Многокомпонентные задачи сопряжения и вспомогательные абстрактные краевые задачи// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *34*. — С. 5–44.
9. *Вулис И. Л., Соломяк М. З.* Спектральная асимптотика вырождающихся эллиптических операторов второго порядка// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1974. — *38*, № 6. — С. 1343–1371.
10. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Высш. шк., 1989.
11. *Горбачук В. И.* Диссипативные граничные задачи для эллиптических дифференциальных уравнений// В сб. «Функциональные и численные методы математической физики». Ин-т мат. и мех.: сб. научн. трудов. — Киев: Наукова думка, 1998. — С. 60–63.
12. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука, 1965.
13. *Копачевский Н. Д.* Спектральная теория операторных пучков. Специальный курс лекций. — 2009.
14. *Копачевский Н. Д.* Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве: специальный курс лекций. — Симферополь: ФЛП «Бондаренко О. А.», 2012.
15. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.

16. *Копачевский Н. Д., Радомирская К. А.* Абстрактные смешанные краевые задачи сопряжения// Межд. науч. конф. «Соврем. методы и пробл. теор. опер. и гарм. анализа и их прилож. — V». — Ростов-на-Дону, 2015. — С. 211.
17. *Копачевский Н. Д., Радомирская К. А.* Абстрактные краевые и спектральные задачи сопряжения// XXVI Крым. осен. мат. шк.-симп. по спектр. и эволюц. задачам. — Батилиман (Ласпи), 2015.
18. *Копачевский Н. Д., Радомирская К. А.* Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения и их приложения// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *61*. — С. 67–102.
19. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
20. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.
21. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* О базисности некоторой части собственных и присоединенных векторов самосопряженного операторного пучка// Мат. сб. — 1987. — *133 (175)*, № 3(7). — С. 293–313.
22. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Базисность подсистемы собственных и присоединенных векторов самосопряженного операторного пучка// Функц. анализ и его прилож. — 1987. — *21*, № 1. — С. 82–82.
23. *Михлин С. Г.* Прямые методы в математической физике. — М.: Гос. изд-во тех.-теор. лит., 1950.
24. *Понтрягин Л. С.* Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1944. — *8*, № 6. — С. 243–280.
25. *Розенблюм Г. В., Соломяк М. З., Шубин М. А.* Спектральная теория дифференциальных операторов// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. — 1985. — *8*.
26. *Старков П. А.* Операторный подход к задачам сопряжения// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Мат. Мех. Информ. Киберн. — 2002. — *15(64)*, № 2. — С. 82–88.
27. *Старков П. А.* О базисности системы собственных элементов в задачах сопряжения// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2003. — *1*. — С. 118–131.
28. *Старков П. А.* Примеры многокомпонентных задач сопряжения// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Мат. Мех. Информ. Киберн. — 2005. — *18(57)*, № 1. — С. 89–94.
29. *Agranovich M. S., Katsenelenbanm B. Z., Sivov A. N., Voitovich N. N.* Generalized method of eigenoscillations in diffraction theory. — Berlin: Wiley-VCN, 1999.
30. *Gohberg I., Goldberg S.* Basic operator theory. — Boston: Birkhauser, 1980.
31. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint problems for an ideal fluid. — Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 2001.
32. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Nonselfadjoint problems for viscous fluid. — Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 2003.
33. *McLean W.* Strongly elliptic systems and boundary integral equations. — Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
34. *Voytitsky V. I., Kopachevsky N. D.* On the modified spectral Stefan problem and its abstract generalizations// В сб. «Modern analysis and applications. The Mark Krein centenary conference. Vol. 2: Differential operators and mechanics». — Basel: Birkhauser, 2009. — С. 373–386.

К. А. Радомирская
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, Симферополь, проспект Вернадского, 4
E-mail: radomirskaya@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-316-339 UDC 517.95+517.98

Matching Spectral and Initial-Boundary Value Problems

© 2017 **K. A. Radomirskaya**

Abstract. Based on the approach to abstract matching boundary-value problems introduced in [18], we consider matching spectral problems for one and two domains. We study in detail the arising operator pencil with self-adjoint operator coefficients. This pencil acts in a Hilbert space and depends on two parameters. Both possible cases are considered, where one parameter is spectral and the other is fixed, and properties of solutions are obtained depending on this. Also we study initial-boundary value problems of mathematical physics generating matching problems. We prove theorems on unique solvability of a strong solution ranging in the corresponding Hilbert space.

REFERENCES

1. M. S. Agranovich, “Spektral'nye zadachi dlya sil'no ellipticheskikh sistem vtorogo poryadka v oblastyakh s gladkoy i negladkoy granitsey” [Spectral problems for strongly elliptic second-order systems in domains with smooth and nonsmooth boundaries], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2002, **57**, No. 5, 3–78 (in Russian).
2. M. S. Agranovich, G. A. Amosov, and M. Levitin, “Spektral'nye zadachi dlya sistemy Lame v gladkikh i negladkikh oblastyakh so spektral'nym parametrom v kraevom uslovii” [Spectral problems for the Lamé system in smooth and nonsmooth domains with a spectral parameter in the boundary-value condition], *Ross. zh. mat. fiz.* [Russ. J. Math. Phys.], 1999, **6**, No. 3, 247–281 (in Russian).
3. M. S. Agranovich and R. Menniken, “Spektral'nye zadachi dlya uravneniya Gel'mgol'tsa so spektral'nym parametrom v granichnykh usloviyakh na negladkoy poverkhnosti” [Spectral problems for the Helmholtz equation with a spectral parameter in the boundary-value conditions on a nonsmooth surface], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1999, **30**, No. 1, 29–68 (in Russian).
4. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Osnovy teorii lineinykh operatorov v prostranstvakh s indefinitnoi metrikoi* [Essentials of Theory of Linear Operators in Spaces with Indefinite Metrics], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
5. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, “Asimptotika spektra differentsial'nykh uravneniy” [Asymptotics of the spectrum of differential equations], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1974, **38**, No. 6, 1362–1392 (in Russian).
6. V. I. Voytitskiy, “Abstraktnaya spektral'naya zadacha Stefana” [The abstract Stefan spectral problem], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. Mat. Mekh. Inform. Kibern.* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ. Ser. Math. Mech. Inform. Cybern.], 2006, **19 (58)**, No. 2, 20–28 (in Russian).
7. V. I. Voytitskiy, “O spektral'nykh zadachakh, porozhdennykh zadachey Stefana s usloviyami Gibbsa—Tomsona” [On spectral problems generated by the Stefan problem with the Gibbs–Thomson conditions], *Nelin. granich. zadachi* [Nonlinear Bound. Value Probl.], 2007, **17**, 31–49 (in Russian).
8. V. I. Voytitskiy, N. D. Kopachevskii, and P. A. Starkov, “Mnogokomponentnye zadachi sopryazheniya i vspomogatel'nye abstraktnye kraevye zadachi” [Multicomponent conjugation problems and auxiliary abstract boundary-value problems], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **34**, 5–44 (in Russian).
9. I. L. Vulis and M. Z. Solomyak, “Spektral'naya asimptotika vyrozhdayushchikhsya ellipticheskikh operatorov vtorogo poryadka” [Spectral asymptotics of degenerating elliptic operators of second order], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1974, **38**, No. 6, 1343–1371 (in Russian).
10. Dzh. Goldsteyn, *Polugruppy lineynykh operatorov i ikh prilozheniya* [Semigroups of Linear Operators and Their Applications], Vyssh. shk., Kiev, 1989 (in Russian).
11. V. I. Gorbachuk, “Dissipativnye granichnye zadachi dlya ellipticheskikh differentsial'nykh uravneniy,” In: *Funktsional'nye i chislennye metody matematicheskoy fiziki. In-t matem. i mekhaniki: sb. nauchn. trudov* [Functional and numeric methods of mathematical physics. Inst. Math. Mech.: Digest Sci. Proc.], Naukova dumka, Kiev, 1998, 60–63 (in Russian).

12. I. Ts. Gokhberg and M. G. Kreyn, *Vvedenie v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov v gil'bertovom prostranstve* [Introduction to the Theory of Linear Nonself-adjoint Operators in a Hilbert Space], Nauka, Moscow, 1965 (in Russian).
13. N. D. Kopachevskii, *Spektral'naya teoriya operatornykh puchkov: spetsial'nyy kurs lektsiy* [Spectral Theory of Operator Pencils: Special Course], OOO "FORMA," Simferopol', 2009 (in Russian).
14. N. D. Kopachevskii, *Integrodifferentsial'nye uravneniya Vol'terra v gil'bertovom prostranstve. Spets. kurs lektsiy* [Integrodifferential Volterra Equations in a Hilbert Space. Special Course], FLP "O. A. Bondarenko," Simferopol', 2012 (in Russian).
15. N. D. Kopachevskii, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: evolyutsionnye i spektral'nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolution and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
16. N. D. Kopachevskiy and K. A. Radomirskaya, "Abstraktnye smeshannye kraevye zadachi sopryazheniya" [Abstract mixed boundary-value conjugation problems], *Mezhd. nauch. konf. "Sovrem. metody i probl. teor. oper. i garm. analiza i ikh prilozh. – V"* [Int. Sci. Conf. "Contemp. Methods Probl. Theor. Oper. Harm. Anal. Appl. – V"], Rostov-na-Donu, 2015, 211 (in Russian).
17. N. D. Kopachevskiy and K. A. Radomirskaya, "Abstraktnye kraevye i spektral'nye zadachi sopryazheniya" [Abstract boundary-value and spectral conjugation problems], *XXVI Krym. osen. mat. shk.-simp. po spektr. i evolyuts. zadacham* [XXVI Crimean Autumn Math. School-Symp. Spectr. Evolution Probl.], Batiliman (Laspi), 2015 (in Russian).
18. N. D. Kopachevskii and K. A. Radomirskaya, "Abstraktnye smeshannye kraevye i spektral'nye zadachi sopryazheniya i ikh prilozheniya" [Abstract mixed boundary-value and spectral conjugation problems and their applications], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **61**, 67–102 (in Russian).
19. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
20. A. S. Markus, *Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu polinomial'nykh operatornykh puchkov* [Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils], Shtiintsa, Kishinev, 1986 (in Russian).
21. A. S. Markus and V. I. Matsaev, "O bazisnosti nekotoroy chasti sobstvennykh i prisoedinennykh vektorov samosopryazhennogo operatornogo puchka" [On the basis consisting of a subset of eigenvectors and adjoined vectors of a self-adjoint operator pencil], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1987, **133 (175)**, No. 3(7), 293–313 (in Russian).
22. A. S. Markus and V. I. Matsaev, "Bazisnost' podsistemy sobstvennykh i prisoedinennykh vektorov samosopryazhennogo operatornogo puchka" [Basis consisting of a subsystem of eigenvectors and adjoined vectors of a self-adjoint operator pencil], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1987, **21**, No. 1, 82–82 (in Russian).
23. S. G. Mikhlin, *Pryamye metody v matematicheskoy fizike* [Direct Methods in Mathematical Physics], Gos. izd-vo tekh.-teor. lit., Moscow, 1950 (in Russian).
24. L. S. Pontryagin, "Ermitovy operatory v prostranstve s indefinitnoy metrikoy" [Hermit operators in a space with indefinite metrics], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1944, **8**, No. 6, 243–280 (in Russian).
25. G. V. Rozenblyum, M. Z. Solomyak, and M. A. Shubin, "Spektral'naya teoriya differentsial'nykh operatorov" [Spectral theory of differential operators], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math.], 1985, **8** (in Russian).
26. P. A. Starkov, "Operatornyy podkhod k zadacham sopryazheniya" [Operator approach to conjugation problems], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. Mat. Mekh. Inform. Kibern.* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ. Ser. Math. Mech. Inform. Cybern.], 2002, **15**, No. 1, 58–62 (in Russian).
27. P. A. Starkov, "O bazisnosti sistemy sobstvennykh elementov v zadachakh sopryazheniya" [On basic system of eigenelements in conjugation problems], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2003, **1**, 118–131 (in Russian).
28. P. A. Starkov, "Primery mnogokomponentnykh zadach sopryazheniya" [Examples of multicomponent conjugation problems], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. Mat. Mekh. Inform. Kibern.* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ. Ser. Math. Mech. Inform. Cybern.], 2005, **18(57)**, No. 1, 89–94 (in Russian).
29. M. S. Agranovich, B. Z. Katsenelenbanm, A. N. Sivov, and N. N. Voitovich, *Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory*, Wiley-VCN, Berlin, 1999.

30. I. Gohberg and S. Goldberg, *Basic Operator Theory*, Birkhauser, Boston, 1980.
31. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Self-Adjoint Problems for an Ideal Fluid*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 2001.
32. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonselfadjoint Problems for Viscous Fluid*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 2003.
33. W. McLean, *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
34. V. I. Voytitsky and N. D. Kopachevsky, "On the modified spectral Stefan problem and its abstract generalizations," *В сб. «Modern analysis and applications. The Mark Krein centenary conference. Vol. 2: Differential operators and mechanics»*., Basel: Birkhauser, 2009, 373–386.

K. A. Radomirskaya
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
4 Vernadsky Avenue, 295007 Simferopol, Russia
E-mail: radomirskaya@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 2 (2017). С. 340–361

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-340-361 УДК 517.927.25

О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ПУЧКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2017 г. **В. С. РЫХЛОВ**

Аннотация. В пространстве суммируемых с квадратом функций на конечном отрезке рассматривается класс полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов n-го порядка с постоянными коэффициентами и двухточечными (на концах основного промежутка) краевыми условиями. Предполагается, что корни характеристического уравнения пучков этого класса простые и отличны от нуля. Формулируются достаточные условия m-кратной полноты $(1 \leqslant m \leqslant n)$ системы корневых функций пучков этого класса в пространстве суммируемых с квадратом функций на рассматриваемом отрезке.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

1.1. Постановка задачи. В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный на конечном отрезке $[0,1]$ дифференциальным выражением (д.в.):

$$\ell(y,\lambda) := p_n(x,\lambda)y^{(n)} + p_{n-1}(x,\lambda)y^{(n-1)} + \dots + p_0(x,\lambda)y, \tag{1.1}$$

и линейно независимыми краевыми условиями:

$$U_i(y,\lambda) := \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij}(\lambda)y^{(j)}(0) + \beta_{ij}(\lambda)y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.2}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, $p_j(x,\lambda) = \sum\limits_{s=0}^{n-j} p_{js}(x)\lambda^s$, $p_{js}(x) \in L_1[0,1]$, а $\alpha_{ij}(\lambda)$, $\beta_{ij}(\lambda)$ — произвольные полиномы по λ.

Далее будем использовать, не повторяя их в данной статье, известные определения собственных значений (с.з.), собственных и присоединенных функций или, кратко, корневых функций (к.ф.), производных (по Келдышу) цепочек из [5,6]. Пусть $\Lambda := \{\lambda_k\}$ есть множество всех с.з. пучка $L(\lambda)$, а $Y := \{y_k\}$ — множество всех к.ф. пучка $L(\lambda)$, соответствующих множеству Λ. Предполагается, что множество Λ счетное.

Определение 1.1. Система Y к.ф. пучка $L(\lambda)$ называется m-кратно полной в пространстве $L_2[0,1]$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$, если из условия ортогональности вектор-функции $h \in L_2^m[0,1]$ всем производным m-цепочкам, соответствующим системе Y, следует равенство $h = 0$. Здесь обозначено

$$L_2^m[0,1] := \underbrace{L_2[0,1] \oplus \cdots \oplus L_2[0,1]}_{m \text{ раз}}.$$

Решается задача нахождения условий на коэффициенты пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует n-кратная полнота к.ф. в $L_2[0,1]$. В последнем случае естественно возникает вопрос об m-кратной полноте при $1 \leqslant m \leqslant n-1$.

1.2. Краткая историческая справка. Основополагающей по этой проблеме является работа [4], в которой была сформулирована (без доказательства) теорема об n-кратной полноте к.ф. пучка $L(\lambda)$, порожденного д.в. (1.1) со специальной главной частью

$$y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\}$$

и не зависящими от λ распадающимися краевыми условиями (1.2) (когда часть краевых условий берется только в конце 0 отрезка $[0,1]$, а остальные в 1). Эта теорема была доказана в [20] и, независимо, в [24] в случае аналитических коэффициентов д.в. и в [22] — в случае суммируемых коэффициентов. Обобщение этой теоремы на случай конечномерного возмущения вольтеррова оператора было сделано в [21]. Случай произвольной главной части д.в. (1.1) был рассмотрен в [19, 25]. В работах [3, 23], относящихся к общему виду (1.1)–(1.2) пучка $L(\lambda)$, получены достаточные условия n-кратной полноты в $L_2[0,1]$ системы к.ф. в терминах степенной ограниченности по параметру λ функции Грина пучка $L(\lambda)$ на некоторых лучах. Наиболее полное исследование вопроса об n- и m-кратной полноте и неполноте к.ф. пучка $L(\lambda)$ вида (1.1)–(1.2), д.в. которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия — полураспадающиеся (не менее половины краевых условий берутся только в одном конце) и не зависящие от λ, проведено в [1, 2].

Но для некоторых классов пучков $L(\lambda)$ даже с постоянными коэффициентами вопрос о кратной полноте системы к.ф. полностью еще не исследован. В данной статье рассматривается именно такой пучок $L_0(\lambda)$, действующий в пространстве $L_2[0,1]$ и порожденный д.в. n-го порядка

$$\ell_0(y,\lambda) := \sum_{j+s \leqslant n} p_{js}\lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js} \in \mathbb{C}, \quad p_{n0} \neq 0,\ p_{0n} \neq 0, \tag{1.3}$$

и линейно независимыми двухточечными нормированными краевыми условиями

$$\begin{aligned} U_i^0(y,\lambda) &:= \sum_{j+s \leqslant \varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{ijs} y^{(j)}(0) = 0,\ i = \overline{1,l}, \\ U_i^0(y,\lambda) &:= \sum_{j+s \leqslant \varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{ijs} y^{(j)}(0) + \sum_{j+s \leqslant \varkappa_{i1}} \lambda^s \beta_{ijs} y^{(j)}(1) = 0,\ i = \overline{l+1,n}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $\lambda, \alpha_{ijs}, \beta_{ijs} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1} \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$.

Будем называть д.в. $\ell_0(y,\lambda)$ *однородным*, если в сумме (1.3) $p_{js} = 0$ при $j+s < n$. Аналогично, будем называть i-е краевое условие (1.4) при $i = \overline{1,l}$ *однородным*, если $\alpha_{ijs} = 0$ при $j + s < \varkappa_{i0}$.

Пусть всюду далее выполняется основное предположение относительно д.в. $\ell_0(y,\lambda)$, а именно:

1°. *Корни* $\omega_j = r_j \exp(i\psi_j)$, $j = \overline{1,n}$, *характеристического уравнения* $\sum\limits_{\mu+s=n} p_{\mu s}\omega^\mu = 0$ (*кратко, характеристики*) *д.в.* $\ell_0(y,\lambda)$ *различны и отличны от нуля.*

Не нарушая общности, можно считать, что $\{\omega_j\}$ лежат на η лучах $(1 \leqslant \eta \leqslant n)$, исходящих из начала координат. Пусть при $\nu_0 = 0$ и $\nu_\eta = n$ справедливы соотношения

$$0 \leqslant \psi_{\nu_0+1} = \cdots = \psi_{\nu_1} < \cdots < \psi_{\nu_{\eta-1}+1} = \cdots = \psi_{\nu_\eta} < 2\pi. \tag{1.5}$$

В [1, 2] был детально рассмотрен пучок типа (1.3)–(1.4) в случае, когда

а) краевые условия не зависят от λ и $2l > n$, т. е. краевые условия полураспадающиеся;

б) существует прямая d, проходящая через начало координат, не содержащая ω-корней и делящая комплексную плоскость на две полуплоскости, внутри каждой из которых число этих корней не меньше, чем $n-l$.

Были получены условия n- и m-кратной полноты при $1 \leqslant m \leqslant n-1$ в пространстве $L_2[0,1]$ и показана точность этих результатов.

Когда $\eta = 2$ и $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = \pi$ (случай $\eta = 1$ рассматривается здесь как частный случай $\eta = 2$), кратная полнота к.ф. пучка $L_0(\lambda)$, для которого условия а) или б) не выполняются (см. выше), исследовалась в [12, 14, 17, 18]. Нарушение условий а) и б) возможно, когда краевые условия могут зависеть от спектрального параметра λ или когда $0 \leqslant l \leqslant n-1$ при некоторых значениях ν_1. Случай $l = n-1$ и $\nu_1 = n$ рассматривался в [12], случай $1 \leqslant l \leqslant n-1$ и $\nu_1 = n$ рассматривался в [14], случай $1 \leqslant l \leqslant n-1$ и $\nu_1 = n-1$ рассматривался в [18], и, наконец, случай $l = 0$ и $0 \leqslant \nu_1 \leqslant n$ рассматривался в [17]. Когда по-прежнему $\eta = 2$, но $\psi_1 \neq \psi_2$ — произвольны, кратная полнота исследовалась в [27] при $l = 0$ и $0 \leqslant \nu_1 \leqslant n$ и в [28] при $1 \leqslant l \leqslant n-1$ и $0 \leqslant \nu_1 \leqslant n$. Д.в. $\ell_0(y,\lambda)$ во всех этих работах, кроме [27], предполагалось однородным.

В указанных статьях получены достаточные условия m-кратной полноты к.ф. в $L_2[0,1]$, где $m = \min\{\nu_1, n-l\} + \min\{n-\nu_1, n-l\}$.

В настоящей статье рассматривается пучок $L_0(\lambda)$ общего вида (неоднородный) с постоянными коэффициентами в случае простых и произвольных характеристик в предположении произвольности l, а именно: $0 \leqslant l \leqslant n-1$ (при $l = n$ получаем условия Коши, т. е. вырожденный пучок). Только при исследовании k-кратной полноты при $1 \leqslant k \leqslant n-1$ будем предполагать однородность д.в. (1.3) и краевых условий (1.4) при $1 \leqslant i \leqslant l$. Это обусловлено методом доказательства кратной полноты к.ф. в этом случае.

В статьях [7, 26] исследовалась кратная полнота системы к.ф. пучка, очень близкого к рассматриваемому. Но краевые условия предполагались полураспадающимися, д.в. $\ell_0(y,\lambda)$ предполагалось однородным и требовалась определенная асимптотика характеристического определителя, условия существования которой не указывались. Некоторые из этих ограничений удалось снять.

1.3. Формулировка основных результатов. Чтобы сформулировать полученные в статье результаты, введем необходимые обозначения и предположения.

Помимо предположения 1°, далее будет использоваться еще следующее предположение:

2°. *Пусть* $\upsilon \in [0, 2\pi)$ *есть любое число, для которого существует перестановка* $\sigma (= \sigma(\upsilon)) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ *множества* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *и число* $h (= h(\upsilon)) \in \{0, 1, \ldots, n\}$ *такие, что*

$$\operatorname{Re}(e^{i\upsilon}\omega_{\sigma_1}) < \cdots < \operatorname{Re}(e^{i\upsilon}\omega_{\sigma_h}) < 0 < \operatorname{Re}(e^{i\upsilon}\omega_{\sigma_{h+1}}) < \cdots < \operatorname{Re}(e^{i\upsilon}\omega_{\sigma_n}). \tag{1.6}$$

Обозначим множество таких υ через Υ. Это все числа из $[0, 2\pi)$, кроме решений уравнений $\operatorname{Re}(e^{i\upsilon}\omega_i) = \operatorname{Re}(e^{i\upsilon}\omega_j)$, $i \neq j$ и $\operatorname{Re}(e^{i\upsilon}\omega_j) = 0$, $j = \overline{1,n}$. Имеется конечное число таких решений, и между ними перестановка σ и число h не меняются.

Далее считаем (без потери общности), что краевые условия (1.4) упорядочены таким образом, что при $s_0 = l$, $s_{r+1} = n$ справедливы соотношения

$$\chi_{s_0+1} = \cdots = \chi_{s_1} < \chi_{s_1+1} = \cdots = \chi_{s_2} < \cdots < \chi_{s_r+1} = \cdots = \chi_{s_{r+1}}, \tag{1.7}$$

где $\chi_i = \varkappa_{i1} - \varkappa_{i0}$.

Для $\upsilon \in \Upsilon$ пусть $\gamma\,(= \gamma(\upsilon))$, $\delta\,(= \delta(\upsilon))$ — такие индексы, что

$$s_\gamma + 1 \leqslant h + 1 \leqslant s_{\gamma+1}, \qquad s_\delta + 1 \leqslant n - h + 1 \leqslant s_{\delta+1}. \tag{1.8}$$

Считаем, что $\gamma = 0$ и $\delta = r+1$ в случае $h = 0$, а в случае $h = n$ полагаем $\gamma = r+1$ и $\delta = 0$.

Обозначим $[q]_+ = \max\{q, 0\}$, $[p,q]_- = \min\{p,q\}$, $[a] = 1 + O(1/\lambda)$, $\varkappa_i = [\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1}]_-$ при $i = \overline{l+1,n}$ и для того же рассматриваемого υ при $j = \overline{1,n}$ положим

$$a_{ij} = \sum_{\nu+s=\varkappa_{i0}} \alpha_{i\nu s}\omega_{\sigma_j}^{\nu}, \quad i = \overline{1,n}, \quad b_{ij} = \sum_{\nu+s=\varkappa_{i1}} \beta_{i\nu s}\omega_{\sigma_j}^{\nu}, \quad i = \overline{l+1,n}.$$

Пусть A и B суть определители, соответственно, вида

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1h} & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{s_\gamma,1} & \ldots & a_{s_\gamma,h} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{s_\gamma+1,1} & \ldots & a_{s_\gamma+1,h} & b_{s_\gamma+1,h+1} & \ldots & b_{s_\gamma+1,n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \ldots & a_{nh} & b_{n,h+1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1,h+1} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{s_\delta,h+1} & \ldots & a_{s_\delta,n} \\ b_{s_\delta+1,1} & \ldots & b_{s_\delta+1,h} & a_{s_\delta+1,h+1} & \ldots & a_{s_\delta+1,n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ b_{n1} & \ldots & b_{nh} & a_{n,h+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

а a_1, a_2, b_1, b_2 — определители вида

$$a_1 = \det\big(a_{ij}\big)_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,l}}, \quad a_2 = \det\big(a_{ij}\big)_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{n-l+1,n}}, \quad b_1 = \det\big(b_{ij}\big)_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{l+1,n}}, \quad b_2 = \det\big(b_{ij}\big)_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,n-l}}.$$

Наряду с предположениями 1°-2°, будем использовать далее еще следующее предположение:

3°. *а) при* $h \leqslant l$ *пусть* $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$; *б) при* $h > l$ *пусть* $A \neq 0$;
в) при $h \geqslant n-l$ *пусть* $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$; *г) при* $h < n-l$ *пусть* $B \neq 0$.

В случае, когда д.в. $\ell_0(y,\lambda)$ однородно, обозначим

$$c_{i\mu}(\lambda) := \lambda^{-\varkappa_{i0}} \sum_{s+j\leqslant\varkappa_{i0}} \lambda^{s+j}\alpha_{ijs}\omega_\mu^j, \quad i=\overline{1,l}, \quad \mu=\overline{1,n}. \tag{1.9}$$

Если к тому же и краевые условия (1.4) при $1 \leqslant i \leqslant l$ однородны, то справедливы равенства

$$c_{i\mu}(\lambda) = \lambda^{-\varkappa_{i0}} \sum_{s+j=\varkappa_{i0}} \lambda^{s+j}\alpha_{ijs}\omega_\mu^j = \sum_{s+j=\varkappa_{i0}} \alpha_{ijs}\omega_\mu^j =: c_{i\mu}^\circ, \quad i=\overline{1,l}, \quad \mu=\overline{1,n}, \tag{1.10}$$

т. е. $c_{i\mu}(\lambda)$ не зависят от λ.

При условии однородности д.в. $\ell_0(y,\lambda)$ рассмотрим линейную алгебраическую систему

$$\sum_{\mu=1}^n c_{i\mu}(\lambda) d_\mu = 0, \quad i=\overline{1,l}, \tag{1.11}$$

относительно вектора неизвестных $(d_1, d_2, \ldots, d_n)^T$. Пусть базис пространства решений системы (1.11) есть $\big(d_{s1}(\lambda), d_{s2}(\lambda), \ldots, d_{sn}(\lambda)\big)^T$, $s = \overline{1, n-l}$. Не нарушая общности, можно считать $d_{ij}(\lambda)$ многочленами. Составим матрицы

$$D_j(\lambda) := \begin{pmatrix} d_{1,\nu_{j-1}+1}(\lambda) & \ldots & d_{1,\nu_j}(\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n-l,\nu_{j-1}+1}(\lambda) & \ldots & d_{n-l,\nu_j}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad j=\overline{1,\eta},$$

и обозначим

$$m = \sum_{j=1}^{\eta} \operatorname{rank} D_j(\lambda). \tag{1.12}$$

Очевидно неравенство

$$m \leqslant \sum_{j=1}^{\eta} [\nu_j - \nu_{j-1}, n-l]_-.$$

В случае, когда д.в. $\ell_0(y,\lambda)$ общего вида (т. е. не является однородным), будем рассматривать линейную алгебраическую систему

$$\sum_{\mu=1}^n c_{i\mu}^\circ d_\mu^\circ = 0, \quad i=\overline{1,l}, \tag{1.13}$$

относительно вектора неизвестных $(d_1^\circ, d_2^\circ, \ldots, d_n^\circ)^T$. Пусть базис пространства решений системы (1.13) есть $\big(d_{s1}^\circ, d_{s2}^\circ, \ldots, d_{sn}^\circ\big)^T$, $s=\overline{1,n-l}$. Составим матрицы

$$D_j^\circ := \begin{pmatrix} d_{1,\nu_{j-1}+1}^\circ & \ldots & d_{1,\nu_j}^\circ \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n-l,\nu_{j-1}+1}^\circ & \ldots & d_{n-l,\nu_j}^\circ \end{pmatrix}, \quad j=\overline{1,\eta},$$

и обозначим

$$m^\circ = \sum_{j=1}^{\eta} \operatorname{rank} D_j^\circ. \tag{1.14}$$

Очевидно неравенство

$$m^\circ \leqslant \sum_{j=1}^{\eta} [\nu_j - \nu_{j-1}, n-l]_-.$$

В частности, если $\ell_0(y,\lambda)$ является однородным д.в., то

$$m^\circ \leqslant m. \tag{1.15}$$

Если д.в. $\ell_0(y,\lambda)$ и краевые условия (1.4) при $1 \leqslant i \leqslant l$ однородны, то

$$D_j(\lambda) \equiv D_j^\circ, \quad m = m^\circ. \tag{1.16}$$

Замечание 1.1. Остается открытым вопрос, зависит ли число m (или m°) от выбора базиса пространства решений системы (1.11) (или системы (1.13)). Если зависит, то из всех таких базисов нужно брать, естественно, такой, для которого m (или m°) будет наибольшим.

Наряду с предположениями 1°–3° будут использоваться еще такие предположения:

4°. *Д.в.* $\ell_0(y,\lambda)$ *является однородным.*

5°. *Краевые условия* (1.4) *при* $i=\overline{1,l}$ *являются однородными.*

Теорема 1.1. *Пусть* $l=0$ *и при некотором* $v\in\Upsilon$ *выполняются предположения* 1°–3°. *Тогда система к.ф. пучка* $L(\lambda)$ n-*кратно полна в пространстве* $L_2[0,1]$ *с возможным конечным дефектом, не превышающим числа* $\sum\limits_{i=1}^{n}[n-1-\varkappa_i]_+$, *если порядок хотя бы одного краевого условия* (1.4) *больше* $n-1$, *и с нулевым дефектом в противном случае.*

Теорема 1.2. *Пусть* $1\leqslant l\leqslant n-1$, *при некотором* $v\in\Upsilon$ *выполняются предположения* 1°–3°, *система* (1.4) *является системой полного ранга и* $m^\circ=n$, *где* m° *определена формулой* (1.14). *Тогда система к.ф. пучка* $L(\lambda)$ n-*кратно полна в пространстве* $L_2[0,1]$ *с возможным конечным дефектом, не превышающим числа* $\sum\limits_{i=l+1}^{n}[n-1-\varkappa_i]_+$, *если порядок хотя бы одного краевого условия* (1.4) *больше* $n-1$, *и с нулевым дефектом в противном случае.*

Очевидно, что $m^\circ=n$ только тогда, когда $\operatorname{rank} D_j^\circ=\nu_j-\nu_{j-1}$, $j=\overline{1,\eta}$.

Теорема 1.3. *Пусть* $1\leqslant l\leqslant n-1$, *при некотором* $v\in\Upsilon$ *выполняются предположения* 1°–4° *и* $m=n$, *где* m *определена формулой* (1.12). *Тогда система к.ф. пучка* $L(\lambda)$ n-*кратно полна в пространстве* $L_2[0,1]$ *с возможным конечным дефектом, не превышающим числа* $\sum\limits_{i=l+1}^{n}[n-1-\varkappa_i]_+$, *если порядок хотя бы одного краевого условия* (1.4) *больше* $n-1$, *и с нулевым дефектом в противном случае.*

Очевидно, что $m=n$ только тогда, когда $\operatorname{rank} D_j(\lambda)=\nu_j-\nu_{j-1}$, $j=\overline{1,\eta}$.

Замечание 1.2. Так как выполняется неравенство (1.15), то, вообще говоря, возможны случаи, когда $m^\circ<m=n$, т. е. предположения теоремы 1.2 не выполняются, а предположения теоремы 1.3 выполняются. Интересно было бы найти такие примеры.

Теорема 1.4. *Пусть* $1\leqslant l\leqslant n-1$, *при некотором* $v\in\Upsilon$ *выполняются предположения* 1°–5° *и* $m^\circ<n$. *Тогда система к.ф. пучка* $L(\lambda)$ k-*кратно полна в пространстве* $L_2[0,1]$ *при* $k\leqslant m^\circ$ *с возможным конечным дефектом, не превышающим числа* $\sum\limits_{i=l+1}^{n}[k-1-\varkappa_i]_+$.

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству этих теорем. Схема доказательства соответствует схеме доказательства теорем 2.1–2.3 из [1, 2] и теорем 1–3 из [7] с модификациями, сделанными при доказательстве соответствующих теорем в [14, 17, 18, 27, 28]. Центральную роль в доказательстве играет лемма 2.4 об оценке, которая формулируется и доказывается в следующем разделе.

2. Вспомогательные результаты и лемма об оценке

В [1, с. 28–31] доказано, что уравнение $\ell_0(y,\lambda)=0$ имеет фундаментальную систему решений (ф.с.р.) $\{y_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$ с асимптотикой

$$y_j^{(k-1)}(x,\lambda)=(\lambda\omega_j)^{k-1}w_j(x)e^{\lambda\omega_j x}[1], \quad j,k=\overline{1,n}, \tag{2.1}$$

и аналитическую при $|\lambda| \gg 1$, где $w_j(x)$ — отличная от нуля всюду на $[0,1]$ непрерывно дифференцируемая функция.

Оказывается, формулы (2.1) имеют место и при $k = n, n+1, \ldots$.

Лемма 2.1. *Справедливы формулы*

$$y_j^{(k-1)}(x,\lambda) = (\lambda\omega_j)^{k-1} w_j(x) e^{\lambda\omega_j x}[1], \quad j = \overline{1,n},\ k = 1,2,\ldots,n,n+1,\ldots. \tag{2.2}$$

Доказательство. При $k = \overline{1,n}$ формулы (2.2) уже имеют место в силу (2.1). Получим эти формулы при $k = n$. Далее проводим рассуждения, аналогичные рассуждениям в [23, с. 195].

Имеют место тождества $\ell_0(y_j,\lambda) \equiv 0$, $j = \overline{1,n}$. Выражая из них $y_j^{(n)}(x,\lambda)$, найдем

$$\begin{aligned} y_j^{(n)}(x,\lambda) \equiv -\frac{1}{p_{n0}}(p_{n-1,1}\lambda + p_{n-1,0})y_j^{(n-1)}(x,\lambda) - {} \\ - \frac{1}{p_{n0}}(p_{n-2,2}\lambda^2 + p_{n-2,1}\lambda + p_{n-2,0})y_j^{(n-2)}(x,\lambda) - \cdots - {} \\ - \frac{1}{p_{n0}}(p_{0n}\lambda^n + p_{0,n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_{01}\lambda + p_{00})y_j(x,\lambda). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Используя справа уже установленные асимптотические формулы (2.2) при $k = \overline{1,n}$, получим

$$y_j^{(n)}(x,\lambda) = (\lambda\omega_j)^n w_j(x) e^{\lambda\omega_j x}\left(-\frac{p_{n-1,1}}{p_{n0}\omega_j} - \frac{p_{n-2,2}}{p_{n0}\omega_j^2} - \cdots - \frac{p_{0n}}{p_{n0}\omega_j^n} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right). \tag{2.4}$$

Учитывая здесь то, что ω_j суть корни характеристического уравнения $\sum\limits_{\mu+s=n} p_{\mu s}\omega_j^{\mu} = 0$ и, следовательно,

$$-\frac{p_{n-1,1}}{p_{n0}\omega_j} - \frac{p_{n-2,2}}{p_{n0}\omega_j^2} - \cdots - \frac{p_{0n}}{p_{n0}\omega_j^n} = 1, \tag{2.5}$$

получим из (2.4)

$$y_j^{(n)}(x,\lambda) = (\lambda\omega_j)^n w_j(x) e^{\lambda\omega_j x}[1],$$

т. е. (2.2) при $k = n+1$.

Дифференцируя тождество (2.3) по x, подставляя в правую часть уже установленные формулы (2.2) при $k = 1,\ldots,n+1$ и пользуясь опять соотношениями (2.5), получим формулы (2.2) при $k = n+2$. Этот процесс можно неограниченно продолжить (можно воспользоваться методом математической индукции). Лемма доказана. □

В случае, если д.в. $\ell_0(y,\lambda)$ является однородным, уравнение $\ell_0(y,\lambda) = 0$ имеет в качестве ф.с.р. чистые экспоненты

$$e^{\lambda\omega_j x}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Для единообразия многих выкладок далее удобно считать, что и в этом случае ф.с.р. и ее производные имеют вид (2.2), где $w_j(x) \equiv 1$, $[1] \equiv 1$.

Наряду с ф.с.р. (2.1) будет использоваться ф.с.р. $\{\tilde{y}_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$, удовлетворяющая начальным условиям

$$\tilde{y}_j^{(k-1)}(0,\lambda) = \delta_{jk}, \quad j,k = \overline{1,n},$$

где δ_{js} есть символ Кронекера. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что функции $\tilde{y}_j(x,\lambda)$ являются целыми аналитическими функциями по λ.

Будем обозначать далее объекты, построенные по ф.с.р. $\{\tilde{y}_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$, теми же буквами, что и аналогичные объекты, построенные по ф.с.р. $\{y_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$, но с волной наверху.

Хорошо известно [6, с. 26], что с.з. λ_ν, $\nu = 1,2,\ldots$, пучка (1.3)–(1.4) являются нулями целой функции $\tilde{\Delta}(\lambda) := \det\bigl(U_i^0(\tilde{y}_j(x,\lambda),\lambda)\bigr)_{i,j=1}^n$. Обозначим через $\tilde{\Phi}_i(x,\lambda)$, $i = \overline{l+1,n}$, функции, получаемые из $\tilde{\Delta}(\lambda)$ в результате замены i-й строки на строку $(\tilde{y}_1(x,\lambda),\ldots,\tilde{y}_n(x,\lambda))$. Непосредственно можно убедиться в том, что столбцы

$$\left.\left(\frac{\partial^j \tilde{\Phi}_i(x,\lambda)}{\partial\lambda^j}, \ldots, \frac{\partial^j\bigl(\lambda^{k-1}\tilde{\Phi}_i(x,\lambda)\bigr)}{\partial\lambda^j}\right)^T\right|_{\lambda=\lambda_\nu}, \tag{2.6}$$

где $i = \overline{l+1,n}$, $j = \overline{0,s}$, являются производными по Келдышу k-цепочками для к.ф., соответствующих с.з. λ_ν, которое является нулем функции $\tilde{\Delta}(\lambda)$ кратности $s+1$.

Пусть m (или m°) определяется формулой (1.12) (или (1.14)) и $1 \leqslant k \leqslant m$ (или $1 \leqslant k \leqslant m^\circ$). Введем в рассмотрение функции

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) = \int\limits_0^1 \sum_{j=1}^k \frac{\lambda^{j-1}\tilde{\Phi}_i(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} h_j(x)\,dx, \quad i = \overline{l+1,n}, \tag{2.7}$$

где $h_j(x) \in L_2[0,1]$, и обозначим $h(x) := \big(h_1(x), \ldots, h_k(x)\big)^T$.

Перепишем (2.7) в виде

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) = \frac{\tilde{\Delta}_i(\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}, \quad i = \overline{l+1,n}, \tag{2.8}$$

где $\tilde{\Delta}_i(\lambda)$ получается из $\tilde{\Delta}(\lambda)$ заменой i-й строки строкой $(\tilde{u}_{n+1,1}(\lambda), \ldots, \tilde{u}_{n+1,n}(\lambda))$, в которой

$$\tilde{u}_{n+1,j}(\lambda) = \int\limits_0^1 \sum_{\nu=1}^k h_\nu(x)\lambda^{\nu-1}\tilde{y}_j(x,\lambda)\,dx = \lambda^{k-1}\int\limits_0^1 h_k(x,\lambda)\tilde{y}_j(x,\lambda)\,dx$$

и $h_k(x,\lambda) = \sum\limits_{\nu=1}^k h_\nu(x)\lambda^{\nu-k}$.

В [2, с. 48-49] доказаны следующие два простых утверждения.

Лемма 2.2. *В случае $l = 0$ функции $\tilde{\Phi}_1, \ldots, \tilde{\Phi}_n$ являются линейно независимыми решениями уравнения $\ell_0(y,\lambda) = 0$, а в случае $1 \leqslant l \leqslant n-1$ функции $\tilde{\Phi}_{l+1}(x,\lambda)$, $\ldots$, $\tilde{\Phi}_n(x,\lambda)$ являются линейно независимыми решениями уравнения $\ell_0(y,\lambda) = 0$, удовлетворяющими первым l краевым условиям* (1.4) *в точке* 0.

Лемма 2.3. *Функции $\tilde{\Theta}_{l+1}(\lambda)$, $\ldots$, $\tilde{\Theta}_n(\lambda)$ $(0 \leqslant l \leqslant n-1)$ не зависят от выбора ф.с.р. уравнения $\ell_0(y,\lambda) = 0$.*

Из (2.8) и леммы 2.3 получим

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) \equiv \Theta_i(\lambda) \equiv \frac{\Delta_i(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad i = \overline{l+1,n}. \tag{2.9}$$

Введем в рассмотрение следующие множества:

$$\Pi^+_{\varepsilon,\upsilon} = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \arg\lambda \in [\upsilon-\varepsilon, \upsilon+\varepsilon]\Big\}, \quad \Pi^-_{\varepsilon,\upsilon} = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \arg\lambda \in [\pi+\upsilon-\varepsilon, \pi+\upsilon+\varepsilon]\Big\},$$

где $\varepsilon > 0$ и достаточно мало.

Справедлива следующая лемма об оценке, которая является основной при доказательстве теорем 1.1–1.4.

Лемма 2.4. *Пусть выполняются предположения* 1°-2° *и условия* (1.7)-(1.8) *для некоторого $\upsilon \in \Upsilon$. Тогда при $|\lambda| \gg 1$ справедливы оценки*

$$|\Theta_i(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon,\upsilon)|\lambda|^{k-\frac{3}{2}-\varkappa_i}, \quad i = \overline{l+1,n}, \tag{2.10}$$

где $C(\varepsilon,\upsilon)$ суть константы, зависящие только от ε и υ, при следующих условиях:

1. *в случае $\lambda \in \Pi^+_{\varepsilon,\upsilon}$ выполняется предположение 3°(а,б),*
2. *в случае $\lambda \in \Pi^-_{\varepsilon,\upsilon}$ выполняется предположение 3°(в,г).*

Доказательство. Ради краткости будем использовать следующие обозначения при $j = \overline{1,n}$:

$$\hat{a}_{ij} := w_{\sigma_j}(0)a_{ij},\ i = \overline{1,n}, \quad \hat{b}_{ij} := w_{\sigma_j}(1)b_{ij},\ i = \overline{l+1,n}.$$

Так как все числа $w_{\sigma_j}(0)$, $w_{\sigma_j}(1)$ отличны от нуля, то определители $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$, аналогичные соответствующим определителям A, B, a_1, a_2, b_1, b_2, но построенные по числам $\hat{a}_{ij}$ и $\hat{b}_{ij}$, будут отличны от нуля тогда и только тогда, когда отличны от нуля соответствующие определители без крышки.

Так как справедливы соотношения (2.9), то, чтобы оценить сверху $\Theta_i(\lambda)$, предварительно оценим снизу $|\Delta(\lambda)|$. Рассмотрим два случая:

1) Пусть $\lambda \in \Pi^+_{\varepsilon,\upsilon}$. Исходя из вида (2.2) ф.с.р. и ее производных, в этом случае будем иметь следующие асимптотические формулы:

(i) $i = \overline{1,l}$, $j = \overline{1,n}$ (при $l = 0$ этот пункт отсутствует):

$$U_i(y_{\sigma_j},\lambda) = \sum_{\nu+s\leqslant\varkappa_{\sigma 0}} \alpha_{i\nu s}\omega^{\nu}_{\sigma_j}\lambda^{\nu+s} w_{\sigma_j}(0)[1] = \lambda^{\varkappa_{i0}}\left(w_{\sigma_j}(0)\sum_{\nu+s=\varkappa_{i0}}\alpha_{i\nu s}\omega^{\nu}_{\sigma_j} + O\big(1/\lambda\big)\right) = \\ = \lambda^{\varkappa_{i0}}[\hat a_{ij}]; \quad (2.11)$$

(ii) $i = \overline{l+1,n}$, $j = \overline{1,h}$ (когда $h = 0$, этот случай отсутствует):

$$U_i(y_{\sigma_j},\lambda) = \sum_{\nu+s\leqslant\varkappa_{i0}} \alpha_{i\nu s}\omega^{\nu}_{\sigma_j}\lambda^{\nu+s} w_{\sigma_j}(0)[1] + \sum_{\nu+s\leqslant\varkappa_{i1}} \beta_{i\nu s}\omega^{\nu}_{\sigma_j}\lambda^{\nu+s} w_{\sigma_j}(1)[1]e^{\lambda\omega_{\sigma_j}} = \\ = \lambda^{\varkappa_{i0}}\left(w_{\sigma_j}(0)\sum_{\nu+s=\varkappa_{i0}}\alpha_{i\nu s}\omega^{\nu}_{\sigma_j} + O\left(1/\lambda\right) + O\big(\lambda^{\chi_i}e^{\lambda\omega_{\sigma_j}}\big)\right) = \lambda^{\varkappa_{i0}}[\hat a_{ij}]; \quad (2.12)$$

(iii) $i = \overline{l+1,n}$, $j = \overline{h+1,n}$ (когда $h = n$, этот случай отсутствует):

$$U_i(y_{\sigma_j},\lambda) = \sum_{\nu+s\leqslant\varkappa_{i0}} \alpha_{i\nu s}\omega^{\nu}_{\sigma_j}\lambda^{\nu+s} w_{\sigma_j}(0)[1] + \sum_{\nu+s\leqslant\varkappa_{i1}} \beta_{i\nu s}\omega^{\nu}_{\sigma_j}\lambda^{\nu+s} w_{\sigma_j}(1)[1]e^{\lambda\omega_{\sigma_j}} = \\ = \lambda^{\varkappa_{i1}}e^{\lambda\omega_{\sigma_j}}\left(w_{\sigma_j}(1)\sum_{\nu+s=\varkappa_{i1}}\beta_{i\nu s}\omega^{\nu}_{\sigma_j} + O\big(1/\lambda\big) + O\big(\lambda^{-\chi_i}e^{-\lambda\omega_{\sigma_j}}\big)\right) = \lambda^{\varkappa_{i1}}e^{\lambda\omega_{\sigma_j}}[\hat b_{ij}]. \quad (2.13)$$

Следовательно, подставляя (2.11)–(2.13) в $\Delta(\lambda)$ и вынося множители $\lambda^{\varkappa_{i0}}$ из всех строк, получим

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}\varkappa_{i0}} \times \begin{vmatrix} [\hat a_{11}] & \dots & [\hat a_{1h}] & [\hat a_{1,h+1}] & \dots & [\hat a_{1n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\hat a_{l1}] & \dots & [\hat a_{lh}] & [\hat a_{l,h+1}] & \dots & [\hat a_{ln}] \\ [\hat a_{l+1,1}] & \dots & [\hat a_{l+1,h}] & \lambda^{\chi_{l+1}}e^{\lambda\omega_{\sigma_{h+1}}}[\hat b_{l+1,h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_{l+1}}e^{\lambda\omega_{\sigma_n}}[\hat b_{l+1,n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\hat a_{n1}] & \dots & [\hat a_{nh}] & \lambda^{\chi_n}e^{\lambda\omega_{\sigma_{h+1}}}[\hat b_{n,h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_n}e^{\lambda\omega_{\sigma_n}}[\hat b_{nn}] \end{vmatrix}. \quad (2.14)$$

Далее необходимо рассмотреть два случая: $h \leqslant l$ и $h > l$.

а) $h \leqslant l$ и пусть выполняется предположение 3°(а). В этом случае разложим этот определитель по минорам последних $n-l$ строк и выделим главную часть. Так как имеют место неравенства (1.6), $n-h \geqslant n-l$ и выполняется предположение 3°(а), главным членом является слагаемое, которое есть произведение минора $(n-l)$-го порядка, образованного элементами, стоящими в $n-l$ столбцах с номерами от $l+1$ до n, на его алгебраическое дополнение l-го порядка.

Поэтому из (2.14) при $|\lambda| \gg 1$ получим

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{i=1}^{l}\varkappa_{i0} + \sum\limits_{i=l+1}^{n}\varkappa_{i1}} e^{\lambda\sum\limits_{\nu=l+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}} \times \\ \times \det(\hat a_{\mu j})^{j=\overline{1,l}}_{\mu=\overline{1,l}} \times \det(\hat b_{\mu j})^{j=\overline{l+1,n}}_{\mu=\overline{l+1,n}}[1]. \quad (2.15)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае при $\lambda \in \Pi^+_{\varepsilon,\upsilon}$ и $|\lambda| \gg 1$ получим следующую оценку снизу (при выполнении предположения 3°(а)):

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant C(\varepsilon,\upsilon)|\lambda|^{\sum\limits_{i=1}^{l}\varkappa_{i0} + \sum\limits_{i=l+1}^{n}\varkappa_{i1}} \left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=l+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}}\right|, \quad (2.16)$$

где $C(\varepsilon,\upsilon) > 0$ есть константа, зависящая только от ε, υ и параметров пучка $L_0(\lambda)$.

б) $h > l$ и пусть выполняется предположение 3°(б). Вынося экспоненты $e^{\lambda\omega_{\sigma_\nu}}$ из последних $n-h$ столбцов определителя (2.14), получим

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}\varkappa_{i0}} e^{\lambda\sum\limits_{\nu=h+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}} \begin{vmatrix} [\hat a_{11}] & \dots & [\hat a_{1h}] & [0] & \dots & [0] \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ [\hat a_{l1}] & \dots & [\hat a_{lh}] & [0] & \dots & [0] \\ [\hat a_{l+1,1}] & \dots & [\hat a_{l+1,h}] & \lambda^{\chi_{l+1}}[\hat b_{l+1,h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_{l+1}}[\hat b_{l+1,n}] \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ [\hat a_{s_\gamma+1,1}] & \dots & [\hat a_{s_\gamma+1,h}] & \lambda^{\chi_{s_\gamma+1}}[\hat b_{s_\gamma+1,h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_{s_\gamma+1}}[\hat b_{s_\gamma+1,n}] \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ [\hat a_{h+1,1}] & \dots & [\hat a_{h+1,h}] & \lambda^{\chi_{h+1}}[\hat b_{h+1,h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_{h+1}}[\hat b_{h+1,n}] \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ [\hat a_{s_{\gamma+1},1}] & \dots & [\hat a_{s_{\gamma+1},h}] & \lambda^{\chi_{s_{\gamma+1}}}[\hat b_{s_{\gamma+1},h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_{s_{\gamma+1}}}[\hat b_{s_{\gamma+1},n}] \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ [\hat a_{n1}] & \dots & [\hat a_{nh}] & \lambda^{\chi_n}[\hat b_{n,h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_n}[\hat b_{nn}] \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по минорам первых h столбцов и выделим главную часть. Ввиду соотношений (1.7), (1.8) и предположения 3°(б) главная часть состоит из слагаемых, которые являются произведениями миноров первых h столбцов, образованных элементами, стоящими в строках с номерами от 1 до s_γ подряд и с добавленными к ним любыми $h - s_\gamma$ строками с номерами из диапазона $\overline{s_\gamma+1, s_{\gamma+1}}$, на их алгебраические дополнения $(n-h)$-го порядка. Все эти слагаемые имеют один и тот же наибольший порядок по λ, равный

$$(s_{\gamma+1}-h)\chi_{s_{\gamma+1}} + (s_{\gamma+2}-s_{\gamma+1})\chi_{s_{\gamma+2}} + \dots + (s_{r+1}-s_r)\chi_{r+1} = \sum_{i=h+1}^{n}\chi_i.$$

Затем только главные члены опять свернем в определитель. Получим с учетом предположения 3°(б)

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}\varkappa_{i0}+\sum\limits_{i=h+1}^{n}(\varkappa_{i1}-\varkappa_{i0})} e^{\lambda\sum\limits_{\nu=h+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}}\Big(\hat A + O(1/\lambda)\Big) = \lambda^{\sum\limits_{i=1}^{h}\varkappa_{i0}+\sum\limits_{i=h+1}^{n}\varkappa_{i1}} e^{\lambda\sum\limits_{\nu=h+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}}\hat A[1].$$

Следовательно, в рассматриваемом случае при $\lambda\in\Pi^+_{\varepsilon,\upsilon}$ и $|\lambda|\gg 1$ получим следующую оценку снизу (при выполнения предположения 3°(б)):

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant C(\varepsilon,\upsilon)|\lambda|^{\sum\limits_{i=1}^{h}\varkappa_{i0}+\sum\limits_{i=h+1}^{n}\varkappa_{i1}}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=h+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}}\right|, \tag{2.17}$$

где $C(\varepsilon,\upsilon) > 0$ есть некоторая константа.

В соответствии с формулами (2.9) оценим теперь $\Delta_i(\lambda)$ при $i = \overline{l+1,n}$ сверху. Учитывая определение $\Delta_i(\lambda)$, вынося множитель λ^{k-1} из i-й строки и раскладывая этот определитель по элементам этой строки, получим

$$\Delta_i(\lambda) = \lambda^{k-1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}(\lambda)\int\limits_0^1 h_k(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_{\sigma_j}\xi}\,d\xi, \quad i=\overline{l+1,n}, \tag{2.18}$$

где $\Delta_{ij}(\lambda)$ есть минор элемента (i,j) в определителе $\Delta(\lambda)$, т. е. с учетом формул (2.11)–(2.13) будем иметь

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\mu=1}^{n}\varkappa_{\mu0}-\varkappa_{i0}} \begin{vmatrix} [\hat a_{11}] & \dots & [\hat a_{1h}] & [\hat a_{1,h+1}] & \dots & [\hat a_{1n}] \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ [\hat a_{l1}] & \dots & [\hat a_{lh}] & [\hat a_{l,h+1}] & \dots & [\hat a_{ln}] \\ [\hat a_{l+1,1}] & \dots & [\hat a_{l+1,h}] & \lambda^{\chi_{l+1}}e^{\lambda\omega_{\sigma_{h+1}}}[\hat b_{l+1,h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_{l+1}}e^{\lambda\omega_{\sigma_n}}[\hat b_{l+1,n}] \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ [\hat a_{n1}] & \dots & [\hat a_{nh}] & \lambda^{\chi_n}e^{\lambda\omega_{\sigma_{h+1}}}[\hat b_{n,h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_n}e^{\lambda\omega_{\sigma_n}}[\hat b_{nn}] \end{vmatrix}_{ij}. \tag{2.19}$$

Обозначим последний определитель как Δ°_{ij}.

Оценим сверху определитель Δ_{ij}° при $|\lambda| \gg 1$. Здесь опять необходимо рассмотреть два существенно различных случая: $h \leqslant l$ и $h > l$.

а) $h \leqslant l$. Рассмотрим два подслучая: $h+1 \leqslant j \leqslant n$ и $1 \leqslant j \leqslant h$.

а.1) $h+1 \leqslant j \leqslant n$. В этом подслучае разложим определитель Δ_{ij}° по минорам первых l строк и выделим главную часть. Так как здесь $n-l-1 \leqslant n-h-1$, то главная часть есть слагаемое, которое является произведением минора l-го порядка на его алгебраическое дополнение $(n-l-1)$-го порядка с элементами, стоящими в $n-l-1$ столбцах с номерами от $l+2$ до n в случае $h+1 \leqslant j \leqslant l+1$, и с номерами от $l+1$ до $j-1$ и от $j+1$ до n в случае $l+2 \leqslant j \leqslant n$.

Следовательно, аналогично формуле (2.15) получим следующие формулы:

а.1.1) $h+1 \leqslant j \leqslant l+1$. В этом подслучае при $|\lambda| \gg 1$

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\mu=1}^{n} \varkappa_{\mu 0} - \varkappa_{i0} + \sum\limits_{\mu=l+1}^{n} \chi_\mu - \chi_i} e^{\lambda \sum\limits_{\nu=l+2}^{n} \omega_{\sigma_\nu}} \times \\ \times \Big(\det\left(\hat{a}_{\beta\tau}\right)_{\beta=\overline{1,l}}^{\tau=\overline{1,j-1};\overline{j+1,l+1}} \times \det\left(\hat{b}_{\beta\tau}\right)_{\beta=\overline{l+1,i-1};\overline{i+1,n}}^{\tau=\overline{l+2,n}} + O\big(1/\lambda\big)\Big).$$

Следовательно, в рассматриваемом подслучае при $|\lambda| \gg 1$ получим следующую оценку сверху:

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leqslant C(\upsilon)|\lambda|^{\sum\limits_{\mu=1}^{l} \varkappa_{\mu 0} + \sum\limits_{\mu=l+1}^{n} \varkappa_{\mu 1} - \varkappa_{i1}} \left| e^{\lambda \sum\limits_{\nu=l+2}^{n} \omega_{\sigma_\nu}} \right|. \tag{2.20}$$

а.1.2) $l+2 \leqslant j \leqslant n$. В этом подслучае при $|\lambda| \gg 1$

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\mu=1}^{n} \varkappa_{\mu 0} - \varkappa_{i0} + \sum\limits_{\mu=l+1}^{n} \chi_\mu - \chi_i} e^{\lambda \left(\sum\limits_{\nu=l+1}^{n} \omega_{\sigma_\nu} - \omega_{\sigma_j}\right)} \times \\ \times \Big(\det\left(\hat{a}_{\beta\tau}\right)_{\beta=\overline{1,l}}^{\tau=\overline{1,l}} \times \det\left(\hat{b}_{\beta\tau}\right)_{\beta=\overline{l+1,i-1};\overline{i+1,n}}^{\tau=\overline{l+1,j-1};\overline{j+1,n}} + O\big(1/\lambda\big)\Big).$$

Следовательно, в рассматриваемом подслучае при $|\lambda| \gg 1$ получим следующую оценку сверху:

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leqslant C(\upsilon)|\lambda|^{\sum\limits_{\mu=1}^{l} \varkappa_{\mu 0} + \sum\limits_{\mu=l+1}^{n} \varkappa_{\mu 1} - \varkappa_{i1}} \left| e^{\lambda \left(\sum\limits_{\nu=l+1}^{n} \omega_{\sigma_\nu} - \omega_{\sigma_j}\right)} \right|. \tag{2.21}$$

а.2) $1 \leqslant j \leqslant h$. В этом подслучае аналогично формуле (2.15) получим следующую формулу при $|\lambda| \gg 1$:

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\mu=1}^{n} \varkappa_{\mu 0} - \varkappa_{i0} + \sum\limits_{\mu=l+1}^{n} \chi_\mu - \chi_i} e^{\lambda \sum\limits_{\nu=l+2}^{n} \omega_{\sigma_\nu}} \times \\ \times \Big(\det\left(\hat{a}_{\beta\tau}\right)_{\beta=\overline{1,l}}^{\tau=\overline{1,j-1};\overline{j+1,l+1}} \times \det\left(\hat{b}_{\beta\tau}\right)_{\beta=\overline{l+1,i-1};\overline{i+1,n}}^{\tau=\overline{l+2,n}} + O\big(1/\lambda\big)\Big).$$

Следовательно, в рассматриваемом подслучае при $|\lambda| \gg 1$ получим следующую оценку сверху:

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leqslant C(\upsilon)|\lambda|^{\sum\limits_{\mu=1}^{l} \varkappa_{\mu 0} + \sum\limits_{\mu=l+1}^{n} \varkappa_{\mu 1} - \varkappa_{i1}} \left| e^{\lambda \sum\limits_{\nu=l+2}^{n} \omega_{\sigma_\nu}} \right|. \tag{2.22}$$

б) $h > l$. Рассмотрим два подслучая: $1 \leqslant j \leqslant h$ и $h+1 \leqslant j \leqslant n$.

б.1) $1 \leqslant j \leqslant h$. Используя формулу (2.19) и вынося экспоненты $e^{\lambda\omega_{\sigma_\nu}}$ из последних $n-h$ столбцов, получим следующее представление

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\mu=1}^{n} \varkappa_{\mu 0} - \varkappa_{i0}} e^{\lambda \sum\limits_{\nu=h+1}^{n} \omega_{\sigma_\nu}} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} [\hat a_{11}] & \dots & [\hat a_{1h}] & [0] & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\hat a_{l1}] & \dots & [\hat a_{lh}] & [0] & \dots & [0] \\ [\hat a_{l+1,1}] & \dots & [\hat a_{l+1,h}] & \lambda^{\chi_{l+1}}[\hat b_{l+1,h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_{l+1}}[\hat b_{l+1,n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\hat a_{s_\gamma+1,1}] & \dots & [\hat a_{s_\gamma+1,h}] & \lambda^{\chi_{s_\gamma+1}}[\hat b_{s_\gamma+1,h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_{s_\gamma+1}}[\hat b_{s_\gamma+1,n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\hat a_{h+1,1}] & \dots & [\hat a_{h+1,h}] & \lambda^{\chi_{h+1}}[\hat b_{h+1,h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_{h+1}}[\hat b_{h+1,n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\hat a_{s_{\gamma+1},1}] & \dots & [\hat a_{s_{\gamma+1},h}] & \lambda^{\chi_{s_{\gamma+1}}}[\hat b_{s_{\gamma+1},h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_{s_{\gamma+1}}}[\hat b_{s_{\gamma+1},n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\hat a_{n1}] & \dots & [\hat a_{nh}] & \lambda^{\chi_n}[\hat b_{n,h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_n}[\hat b_{nn}] \end{vmatrix}_{ij}.$$

Обозначим последний определитель как $\mathcal{D}_{ij}$, разложим его по минорам первых $h-1$ столбцов и выделим главную часть. Вид главной части зависит от соотношений между числами i, $h+1$, s_γ и $s_{\gamma+1}$. С учетом (1.8) имеем неравенства $s_\gamma + 1 \leqslant h+1 \leqslant s_{\gamma+1}$. Возможны следующие подслучаи:

б.1.а) $l+1 \leqslant i < h+1$;

б.1.б) $h+1 \leqslant i \leqslant n$.

Рассмотрим подробно, например, подслучай б.1.а). В этом подслучае главная часть $\mathcal{D}_{ij}$ состоит из слагаемых, которые суть произведения миноров первых $h-1$ столбцов на их алгебраические дополнения $(n-h)$-го порядка и таковы, что образованы элементами, стоящими в последних $n-h$ столбцах и любых $n-h$ строках с номерами из диапазона $\overline{s_{\gamma+1}+1, n}$ в обязательном порядке и любыми $s_{\gamma+1}-h$ строками из диапазона $\overline{s_\gamma+1, s_{\gamma+1}}$. Все эти слагаемые имеют один и тот же наибольший порядок по λ, равный

$$(s_{\gamma+1}-h)\chi_{s_{\gamma+1}} + (s_{\gamma+2}-s_{\gamma+1})\chi_{s_{\gamma+2}} + \dots + (s_{r+1}-s_r)\chi_{r+1} = \sum_{\mu=h+1}^{n} \chi_\mu.$$

Сворачивая только слагаемые главной части обратно в определитель $(n-1)$-го порядка, получим

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\mu=1}^{n} \varkappa_{\mu 0} - \varkappa_{i0} + \sum\limits_{\mu=h+1}^{n} \chi_\mu} e^{\lambda \sum\limits_{\nu=h+1}^{n} \omega_{\sigma_\nu}} [(\hat A)_{ij}].$$

Следовательно, в подслучае б.1.а) при $|\lambda| \gg 1$ имеем следующую оценку сверху:

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leqslant C(\upsilon)|\lambda|^{\sum\limits_{\mu=1}^{h} \varkappa_{\mu 0} - \varkappa_{i0} + \sum\limits_{\mu=h+1}^{n} \varkappa_{\mu 1}} \left| e^{\lambda \sum\limits_{\nu=h+1}^{n} \omega_{\sigma_\nu}} \right|. \tag{2.23}$$

В подслучае б.1.б) аналогично получим оценку

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leqslant C(\upsilon)|\lambda|^{\sum\limits_{\mu=1}^{h-1} \varkappa_{\mu 0} + \sum\limits_{\mu=h}^{n} \varkappa_{\mu 1} - \varkappa_{i1}} \left| e^{\lambda \sum\limits_{\nu=h+1}^{n} \omega_{\sigma_\nu}} \right|. \tag{2.24}$$

б.2) $h+1 \leqslant j \leqslant n$. Вынося экспоненты $e^{\lambda\omega_{\sigma_\nu}}$ из последних $n-h-1$ столбцов в (2.19) с номерами от $h+1$ до $j-1$ и от $j+1$ до n, получим следующее представление:

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\mu=1}^{n} \varkappa_{\mu 0} - \varkappa_{i0}} e^{\lambda\left(\sum\limits_{\nu=h+1}^{n} \omega_{\sigma_\nu} - \omega_{\sigma_j}\right)} \mathcal{D}_{ij}.$$

Разложим теперь определитель $\mathcal{D}_{ij}$ по минорам первых h столбцов и выделим главную часть. Ее вид зависит от соотношения величин i, $h+2$, $s_{\gamma+1}$. Ввиду (1.8) имеем неравенства $s_\gamma + 2 \leqslant h+2 \leqslant s_{\gamma+1}+1$. Возможны только следующие подслучаи:

б.2.а) $l+1 \leqslant i < h+2$;
б.2.б) $h+2 \leqslant i \leqslant n$.

Рассмотрим подробно, например, подслучай б.2.а). В этом подслучае главная часть $\mathcal{D}_{ij}$ состоит из слагаемых, которые являются произведениями миноров первых h столбцов на их алгебраические дополнения $(n-h-1)$-го порядка, состоящие из элементов, стоящих в любых $n-h-1$ строках с обязательными номерами из всего диапазона $\overline{s_{\gamma+1}+1, n}$ и любыми $s_{\gamma+1}-h-1$ строками из диапазона $\overline{s_\gamma+1, s_{\gamma+1}}$. Все эти слагаемые имеют наибольший порядок по λ, равный

$$(s_{\gamma+1}-(h-1))\chi_{s_{\gamma+1}} + (s_{\gamma+2}-s_{\gamma+1})\chi_{s_{\gamma+2}} + \dots + (s_{r+1}-s_r)\chi_{r+1} = \sum_{\sigma=h+2}^{n} \chi_\sigma.$$

Сворачивая только члены главной части обратно в определитель $(n-1)$-го порядка, получим

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\mu=1}^{n} \varkappa_{\mu 0} - \varkappa_{i0} + \sum\limits_{\mu=h+2}^{n} \chi_\mu} e^{\lambda\left(\sum\limits_{\nu=h+1}^{n} \omega_{\sigma_\nu} - \omega_{\sigma_j}\right)} [\hat{A}_{ij}].$$

Таким образом, в подслучае б.2.а) при $|\lambda| \gg 1$ будем иметь следующую оценку сверху:

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leqslant C(\upsilon)|\lambda|^{\sum\limits_{\mu=1}^{h+1} \varkappa_{\mu 0} - \varkappa_{i0} + \sum\limits_{\mu=h+2}^{n} \varkappa_{\mu 1}} \left| e^{\lambda\left(\sum\limits_{\nu=h+1}^{n} \omega_{\sigma_\nu} - \omega_{\sigma_j}\right)} \right|. \tag{2.25}$$

В подслучае б.2.б) аналогичным образом получим при $|\lambda| \gg 1$ оценку

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leqslant C(\upsilon)|\lambda|^{\sum\limits_{\mu=1}^{h} \varkappa_{\mu 0} + \sum\limits_{\mu=h+1}^{n} \varkappa_{\mu 1} - \varkappa_{i1}} \left| e^{\lambda\left(\sum\limits_{\nu=h+1}^{n} \omega_{\sigma_\nu} - \omega_{\sigma_j}\right)} \right|. \tag{2.26}$$

Воспользуемся полученными оценками для $|\Delta_{ij}(\lambda)|$ в (2.18). Как и перед этим, опять рассмотрим два существенно различных случая: $h \leqslant l$ и $h > l$.

а) $h \leqslant l$. Используя оценки (2.20)–(2.22) в (2.18), получим

$$\Delta_i(\lambda) = O\Bigg(|\lambda|^{k-1+\sum\limits_{\mu=1}^{l} \varkappa_{\mu 0} + \sum\limits_{\mu=l+1}^{n} \varkappa_{\mu 1} - \varkappa_{i1}} \left| e^{\lambda \sum\limits_{\nu=l+1}^{n} \omega_{\sigma_\nu}} \right| \Bigg(\sum_{j=1}^{h} \left| e^{-\lambda\omega_{\sigma_{l+1}}} \right| \left| \int_0^1 h_k(\xi,\lambda) e^{\lambda\omega_{\sigma_j}\xi}\, d\xi \right| +$$

$$+ \sum_{j=h+1}^{l+1} \left| e^{\lambda(\omega_{\sigma_j} - \omega_{\sigma_{l+1}})} \right| \left| \int_0^1 h_k(\xi,\lambda) e^{\lambda\omega_{\sigma_j}(\xi-1)}\, d\xi \right| + \sum_{j=l+2}^{n} \left| \int_0^1 h_k(\xi,\lambda) e^{\lambda\omega_{\sigma_j}(\xi-1)}\, d\xi \right| \Bigg)\Bigg). \tag{2.27}$$

Оценим интеграл $\int\limits_0^1 h_k(\xi,\lambda) e^{\lambda\omega_{\sigma_j}\xi}[1]\, d\xi$ при $j=\overline{1,h}$. Предположим $\lambda = re^{i(\psi+\upsilon)}$, где $\psi \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Из (1.6) следует, что $\pi/2+\delta \leqslant \upsilon+\psi_{\sigma_j} \leqslant 3\pi/2-\delta$ для достаточно малых $\delta (=\delta(\upsilon)) \in (0,\pi/2)$ и

$$r_{\sigma_1}\cos(\upsilon+\psi_{\sigma_1}) < \dots < r_{\sigma_h}\cos(\upsilon+\psi_{\sigma_h}) < 0.$$

Следовательно, для достаточно малых $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \delta)$ будем иметь при $j=\overline{1,h}$

$$r_{\sigma_j}\cos(\upsilon+\psi_{\sigma_j}+\psi) < r_{\sigma_h}\cos(\upsilon+\psi_{\sigma_h}+\psi) \leqslant$$
$$\leqslant r_{\sigma_h}\cos(\pi/2+\delta-\varepsilon) = -r_{\sigma_h}\sin(\delta-\varepsilon) \leqslant (-2/\pi) r_{\sigma_h}(\delta-\varepsilon).$$

Используя эти оценки и неравенство Коши—Буняковского, получим при $j=\overline{1,h}$ и $|\lambda|\gg 1$

$$\left|\int\limits_0^1 h_k(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_{\sigma_j}\xi}[1]\,d\xi\right| \leqslant 2\int\limits_0^1 |h_k(\xi,\lambda)|e^{rr_{\sigma_j}\cos(\upsilon+\psi_{\sigma_j}+\psi)\xi}\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_0^1 |h_k(\xi,\lambda)|e^{-\frac{2}{\pi}rr_{\sigma_h}(\delta-\varepsilon)\xi}\,d\xi \leqslant 2\|h_k(\cdot,\lambda)\|_2\left(\int\limits_0^1 e^{-\frac{4}{\pi}rr_{\sigma_h}(\delta-\varepsilon)\xi}\,d\xi\right)^{\frac12} \leqslant$$

$$\leqslant C(h(\cdot))\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{\pi}rr_{\sigma_h}(\delta-\varepsilon)}}\left(1-e^{-\frac{4}{\pi}rr_{\sigma_h}(\delta-\varepsilon)}\right)^{\frac12} \leqslant C(\varepsilon,\upsilon,h(\cdot))\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}, \quad (2.28)$$

где $\|\cdot\|_2 := \|\cdot\|_{L_2[0,1]}$.

Подобным образом получим при $j=\overline{h+1,n}$ и $|\lambda|\gg 1$

$$\left|\int\limits_0^1 h_k(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_{\sigma_j}(\xi-1)}[1]\,d\xi\right| \leqslant C(\varepsilon,\upsilon,h(\cdot))\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}. \quad (2.29)$$

Используя оценки (2.28)-(2.29) в (2.27), в итоге будем иметь при $1\leqslant i\leqslant h$ и $|\lambda|\gg 1$

$$|\Delta_i(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon,\upsilon,h(\cdot))|\lambda|^{k-\frac32+\sum\limits_{\sigma=1}^{l}\varkappa_{\mu0}+\sum\limits_{\mu=l+1}^{n}\varkappa_{\mu1}-\varkappa_{i0}}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=l+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}}\right|. \quad (2.30)$$

б) $h>l$. Здесь нужно рассмотреть два подслучая: $l+1\leqslant i\leqslant h$, and $h+1\leqslant i\leqslant n$.

б$_1$) $l+1\leqslant i\leqslant h$. Используя оценки (2.23), (2.25), из (2.18) получим при $|\lambda|\gg 1$

$$\Delta_i(\lambda) = O\Bigg(|\lambda|^{k-1+\sum\limits_{\mu=1}^{h}\varkappa_{\mu0}-\varkappa_{i0}+\sum\limits_{\mu=h+1}^{n}\varkappa_{\mu1}}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=h+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}}\right|\times$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{h}\left|\int\limits_0^1 h_k(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_{\sigma_j}\xi}\,d\xi\right| + |\lambda|^{-\chi_{h+1}}\sum_{j=h+1}^{n}\left|\int\limits_0^1 h_k(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_{\sigma_j}(\xi-1)}\,d\xi\right|\right)\Bigg).$$

Опять учитывая для интегралов оценки (2.28)-(2.29), получим следующие оценки для этого подслучая при $|\lambda|\gg 1$:

$$|\Delta_i(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon,\upsilon,h(\cdot))|\lambda|^{k-\frac32+\sum\limits_{\mu=1}^{h}\varkappa_{\mu0}-\varkappa_{i0}+\sum\limits_{\mu=h+1}^{n}\varkappa_{\mu1}-\varkappa_{i0}+[-\chi_{h+1}]_+}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=h+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}}\right|. \quad (2.31)$$

б$_2$) $h+1\leqslant i\leqslant n$. Рассуждая так же, как и перед этим, из (2.24)–(2.26) получим в этом подслучае при $|\lambda|\gg 1$

$$|\Delta_i(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon,\upsilon,h(\cdot))|\lambda|^{k-\frac32+\sum\limits_{\mu=1}^{h}\varkappa_{\mu0}+\sum\limits_{\mu=h+1}^{n}\varkappa_{\mu1}-\varkappa_{i1}+[\chi_h]_+}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=h+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}}\right|. \quad (2.32)$$

Так как в подслучае $l+1\leqslant i\leqslant h$ при условии $\chi_{h+1}\geqslant 0$ справедливы неравенства $-\varkappa_{i0}+[-\chi_{h+1}]_+\leqslant -\varkappa_{i0}$, а при условии $\chi_{h+1}<0$ имеем неравенства $-\varkappa_{i0}+[-\chi_{h+1}]_+\leqslant -\varkappa_{i1}$ (так как $-\chi_{h+1}\leqslant -\chi_i$), то при $l+1\leqslant i\leqslant h$ в целом получим

$$-\varkappa_{i0}+[-\chi_{h+1}]_+\leqslant -\varkappa_i. \quad (2.33)$$

Аналогично, если $h+1\leqslant i\leqslant n$, получим неравенства

$$-\varkappa_{i1}+[\chi_h]_+\leqslant -\varkappa_i. \quad (2.34)$$

Учитывая (2.33) в (2.31), а (2.34) в (2.32), в результате получим следующие оценки для всего случая б) при $|\lambda| \gg 1$:

$$|\Delta_i(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon, \upsilon, h(\cdot))|\lambda|^{k-\frac{3}{2}+\sum\limits_{\mu=1}^{h}\varkappa_{\mu0}+\sum\limits_{\mu=h+1}^{n}\varkappa_{\mu1}-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=h+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}}\right|. \tag{2.35}$$

Следовательно, если $\lambda \in \Pi^+_{\varepsilon,\upsilon}$ и $|\lambda| \gg 1$, в итоге получим оценки (2.10):

1.а) при выполнении предположения 3°(а) из оценок (2.16), (2.30) и формул (2.9);

1.б) при выполнении предположения 3°(б) из оценок (2.17), (2.35) и формул (2.9).

2) Пусть теперь $\lambda \in \Pi^-_{\varepsilon,\upsilon}$. Если мы сделаем замену $\hat{\lambda} = -\lambda$, обозначим $\hat{h} = n - h$, $\hat{\gamma} = \delta$, $\hat{\omega}_{\sigma_\nu} = \omega_{\sigma_{n+1-\nu}}$ при $\nu = \overline{1, n}$, $\hat{a}_{ij} = a_{i,n+1-j}$, $\hat{b}_{ij} = b_{i,n+1-j}$ при $i, j = \overline{1, n}$, воспользуемся уже полученными неравенствами (2.10) (при $\lambda \in \Pi^+_{\varepsilon,\upsilon}$) для параметров с крышками и затем вернемся от параметров с крышками к исходным параметрам, получим оценки (2.10) также и в случае $\lambda \in \Pi^-_{\varepsilon,\upsilon}$ при $|\lambda| \gg 1$ при выполнении условий 3°(в) и 3°(г).

Следовательно, лемма 2.4 доказана. □

3. Доказательство теорем полноты

В доказательстве теорем полноты используются следующие леммы.

Лемма 3.1. *Пусть выполняются предположения* 1°–3° *и вектор-функция* $\bar{h} := (\bar{h}_1, \dots \bar{h}_k)^T \in L_2^k[0, 1]$ *ортогональна всем производным* k*-цепочкам* (2.6). *Тогда при дополнительном условии ортогональности* $\bar{h}$ *некоторому конечному набору из* $\sum\limits_{i=l+1}^{n}[k - 1 - \varkappa_i]_+$ *вектор-функций справедливо тождество*

$$\int\limits_0^1 y(x, \lambda)\mathfrak{h}_k(x, \lambda)\, dx \equiv 0 \tag{3.1}$$

для любого решения $y(x, \lambda)$ *уравнения* $\ell_0(y, \lambda) = 0$ *в случае* $l = 0$ *или для любого решения уравнения* $\ell_0(y, \lambda) = 0$, *удовлетворяющего первым* l *краевым условия* (1.4) *в конце* 0, *в случае* $1 \leqslant l \leqslant n - 1$, *где* $\mathfrak{h}_k(x, \lambda) = \sum\limits_{j=1}^{k}\lambda^{j-1}h_j(x)$.

Доказательство. Пусть $\bar{h} \in L_2^k[0, 1]$ и ортогональна всем производным k-цепочкам (2.6). Тогда в силу (2.7)–(2.9) все особенности мероморфных функций $\tilde{\Theta}_i(\lambda)$, $i = \overline{l + 1, n}$, устранимы и они являются целыми функциями. Согласно оценкам (2.10) и принципу Фрагмена—Линделефа функции $\tilde{\Theta}_i(\lambda)$ суть полиномы степени $k - 2 - \varkappa_i$ при $k - 2 - \varkappa_i \geqslant 0$, которые можно записать в виде

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) \equiv \lambda^{k-2-\varkappa_i}\big(\bar{h}, \zeta_{i0}\big) + \lambda^{k-3-\varkappa_i}\big(\bar{h}, \zeta_{i1}\big) + \dots + \big(\bar{h}, \zeta_{i,k-2-\varkappa_i}\big),$$

где $\zeta_{i\nu} \in L_2^k[0, 1]$ суть вполне определенные вектор-функции, а при $k - 2 - \varkappa_i < 0$ справедливы тождества

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) \equiv 0.$$

В случае $k - 2 - \varkappa_i \geqslant 0$ в дефектном подпространстве производных k-цепочек выберем подпространство H_k, ортогональное вектор-функциям $\zeta_{i\nu}(x)$, $\nu = \overline{0, k - 2 - \varkappa_i}$, $i = \overline{l + 1, n}$. Очевидно, число таких функций равно $\sum\limits_{i=l+1}^{n}[k - 1 - \varkappa_i]_+$.

Пусть теперь $\bar{h} \in H_k$. Тогда $\tilde{\Theta}_i(\lambda) \equiv 0$, $i = \overline{l + 1, n}$, и, следовательно, в силу (2.8)

$$\tilde{\Delta}_i(\lambda) = \int\limits_0^1 \tilde{\Phi}_i(x, \lambda)\mathfrak{h}_k(x, \lambda)\, dx \equiv 0, \quad i = \overline{l + 1, n}.$$

Далее, в случае $l = 0$ по лемме 2.2 система функций $\tilde{\Phi}_1, \dots, \tilde{\Phi}_n$ является системой линейно независимых решений уравнения $\ell_0(y, \lambda) = 0$ и, следовательно, тождество (3.1) выполняется для любого решения уравнения $l_0(y, \lambda) = 0$.

В случае же $1 \leqslant l \leqslant n-1$ в силу той же леммы 2.2 система функций $\tilde{\Phi}_{l+1}, \ldots, \tilde{\Phi}_n$ является системой линейно независимых решений уравнения $\ell_0(y,\lambda) = 0$, удовлетворяющих краевым условиям (1.4) при $i = \overline{1,l}$. Отсюда следует утверждение (3.1) доказываемой леммы и в случае $1 \leqslant l \leqslant n-1$. Лемма доказана. □

Пусть $1 \leqslant l \leqslant n-1$. По доказанной лемме 3.1 тождества (3.1) справедливы для любого решения $y(x,\lambda)$ уравнения $\ell_0(y,\lambda) = 0$, удовлетворяющего краевым условиям (1.4) при $i = \overline{1,l}$. Ищем такое решение в виде

$$y(x,\lambda) = d_1 y_1(x,\lambda) + d_2 y_2(x,\lambda) + \cdots + d_n y_n(x,\lambda), \tag{3.2}$$

где $d_1, d_2, \ldots, d_n$ — пока неизвестные параметры.

Удовлетворяя (3.2) краевым условиям (1.4) при $i = \overline{1,l}$, получим для нахождения неизвестных следующую линейную алгебраическую систему:

$$\sum_{\mu=1}^{n} \mathfrak{c}_{i\mu}(\lambda) d_\mu = 0, \quad i = \overline{1,l}, \tag{3.3}$$

где

$$\mathfrak{c}_{i\mu}(\lambda) = \lambda^{-\varkappa_{i0}} \sum_{j+s \leqslant \varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{ijs} y_\mu^{(j)}(0,\lambda), \quad i = \overline{1,l},\ \mu = \overline{1,n}.$$

С учетом соотношений (2.2) будем иметь следующие асимптотические формулы при $|\lambda| \gg 1$

$$\mathfrak{c}_{i\mu}(\lambda) \equiv w_\mu(0)[c_{i\mu}^\circ], \quad i = \overline{1,l},\ \mu = \overline{1,n},$$

где $c_{i\mu}^\circ$ определяются формулами (1.10).

В случае выполнения предположений 4°-5° будут иметь место точные формулы

$$\mathfrak{c}_{i\mu}(\lambda) \equiv c_{i\mu}^\circ, \quad i = \overline{1,l},\ \mu = \overline{1,n}.$$

Если же выполняется только предположение 4°, то будем иметь формулы

$$\mathfrak{c}_{i\mu}(\lambda) \equiv c_{i\mu}(\lambda), \quad i = \overline{1,l},\ \mu = \overline{1,n},$$

где $c_{i\mu}(\lambda)$ определяются формулами (1.9).

Если система (1.13) полного ранга (т. е. максимально возможного), то нетрудно установить, что система (3.3) при $|\lambda| \gg 1$ имеет базис пространства решений $\big(\mathfrak{d}_{s1}(\lambda), \mathfrak{d}_{s2}(\lambda), \ldots, \mathfrak{d}_{sn}(\lambda)\big)^T$, $s = \overline{1, n-l}$, такой, что

$$\mathfrak{d}_{i\mu}(\lambda) \equiv \frac{1}{w_\mu(0)}[d_{s\mu}^\circ], \quad s = \overline{1,n-l},\ \mu = \overline{1,n}, \tag{3.4}$$

где $d_{s\mu}^\circ$ были ранее определены в подразделе 1.3.

В случае выполнения предположений 4°-5° будут иметь место точные формулы

$$\mathfrak{d}_{i\mu}(\lambda) \equiv d_{s\mu}^\circ, \quad s = \overline{1,n-l},\ \mu = \overline{1,n}. \tag{3.5}$$

Если же выполняется только предположение 4°, то будут справедливы тождества

$$\mathfrak{d}_{i\mu}(\lambda) \equiv d_{s\mu}(\lambda), \quad s = \overline{1,n-l},\ \mu = \overline{1,n}, \tag{3.6}$$

где $d_{s\mu}(\lambda)$ также уже были определены в подразделе 1.3.

Составим матрицы

$$\mathfrak{D}_j(\lambda) := \begin{pmatrix} \mathfrak{d}_{1,\nu_{j-1}+1}(\lambda) & \ldots & \mathfrak{d}_{1,\nu_j}(\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{d}_{n-l,\nu_{j-1}+1}(\lambda) & \ldots & \mathfrak{d}_{n-l,\nu_j}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1,\eta}.$$

Лемма 3.2. *Пусть выполняются условия леммы* 3.1 *и* $1 \leqslant l \leqslant n-1$. *Тогда имеют место тождества*

$$\sum_{\mu=\nu_{j-1}+1}^{\nu_j} \mathfrak{d}_{s\mu}(\lambda) Y_\mu(\lambda) \equiv 0, \quad s = \overline{1,n-l},\ j = \overline{1,\eta}, \tag{3.7}$$

где $Y_\mu(\lambda) := \int\limits_0^1 y_\mu(x,\lambda)\mathfrak{h}_k(x,\lambda)\,dx$, $\mu = \overline{1,n}$.

Доказательство. На основании леммы 3.1 в случае $1 \leqslant l \leqslant n-1$ справедливо тождество (3.1) для любого решения уравнения $\ell_0(y,\lambda)=0$, удовлетворяющего краевым условия (1.4) при $i=\overline{1,l}$. В частности, в качестве таких решений можно брать функции (3.2), где вектор $(d_1,d_2,\ldots,d_n)^T$ есть вектор базиса пространства решений системы (3.3). В результате из (3.1) и (3.2) получим тождества

$$\sum_{\mu=1}^{n} \mathfrak{d}_{s\mu}(\lambda) Y_\mu(\lambda) \equiv 0, \quad s=\overline{1,n-l}. \tag{3.8}$$

Используя теперь предположение 2° и соотношения (1.5), на основе теории роста целых функций из (3.8) получим утверждение (3.7) доказываемой леммы. Лемма доказана. □

3.1. Доказательство теорем 1.1, 1.2 и 1.3.

Лемма 3.3. *При выполнении условий леммы* 3.1 *и теорем* 1.1, 1.2, 1.3 *при* $|\lambda|\gg 1$ *справедливы тождества*

$$Y_\mu(\lambda)\equiv 0, \quad \mu=\overline{1,n}. \tag{3.9}$$

Доказательство. Если $l=0$, в случае выполнения условий теоремы 1.1 и леммы 3.1 доказываемое утверждение следует непосредственно из леммы 3.1.

Пусть теперь $1\leqslant l\leqslant n-1$, выполняются предположения теоремы 1.2 и условия леммы 3.1. В этом случае при фиксированном $j=\overline{1,\eta}$ имеем в силу (3.4) при $|\lambda|\gg 1$

$$\operatorname{rank}\mathfrak{D}_j(\lambda)=\operatorname{rank}D_j^\circ=\nu_j-\nu_{j-1}.$$

Но тогда утверждение (3.9) доказываемой леммы в этом случае с очевидностью вытекает из утверждения леммы 3.2.

Если же $1\leqslant l\leqslant n-1$, выполняются предположения теоремы 1.3 и условия леммы 3.1, то при фиксированном $j=\overline{1,\eta}$ будем иметь в силу (3.6)

$$\operatorname{rank}\mathfrak{D}_j(\lambda)=\operatorname{rank}D_j(\lambda)=\nu_j-\nu_{j-1}.$$

Отсюда, как и перед этим, получаем утверждение (3.9) доказываемой леммы и в этом случае. Лемма доказана. □

Лемма 3.4. *При выполнении условий леммы* 3.1 *и теорем* 1.1, 1.2, 1.3 *справедливо равенство* $\bar h(x)=0$ *для п.в.* $x\in[0,1]$.

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\ell_0^*(z,\lambda)=\bar{\mathfrak{h}}_n(x,\lambda), \quad z(0)=\cdots=z^{(n-1)}(0)=0, \tag{3.10}$$

где $\ell_0^*(z,\lambda)$ есть сопряженное д.в. к $\ell_0(y,\lambda)$. Хорошо известно, что решение задачи (3.10) есть целая функция по $\bar\lambda$, для которой справедливо следующее представление при $|\lambda|\gg 1$:

$$z(x,\lambda)=\int_0^x \sum_{j=1}^n z_j(x,\lambda)\bar y_j(\xi,\lambda)\bar{\mathfrak{h}}_n(\xi,\lambda)\,d\xi,$$

где $z_j(x,\lambda)$ суть решения уравнения $\ell_0^*(z,\lambda)=0$ вида

$$z_j(x,\lambda)=\frac{\bar\Omega_{nj}}{\bar\lambda^{n-1}\bar\Omega}e^{-\bar\lambda\bar\omega_i x}, \quad j=\overline{1,n}, \tag{3.11}$$

Ω есть определитель Вандермонда чисел $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n$, а Ω_{nj} есть алгебраическое дополнение элемента ω_j^{n-1} в определителе Ω.

При $\lambda\in\Pi^+_{\varepsilon,\upsilon}$ имеем

$$z(x,\lambda)=\int_0^1\sum_{j=1}^n z_j(x,\lambda)\bar y_j(\xi,\lambda)\bar{\mathfrak{h}}_n(\xi,\lambda)\,d\xi+$$
$$+\int_0^x\sum_{j=h+1}^n z_{\sigma_j}(x,\lambda)\bar y_{\sigma_j}(\xi,\lambda)\bar{\mathfrak{h}}_n(\xi,\lambda)\,d\xi-\int_x^1\sum_{j=1}^h z_{\sigma_j}(x,\lambda)\bar y_{\sigma_j}(\xi,\lambda)\bar{\mathfrak{h}}_n(\xi,\lambda)\,d\xi.$$

Из леммы 3.3, соотношений (1.6) и формул (3.11) получим оценку $|z(x,\lambda)| \leqslant C$ при $\lambda \in \Pi^+_{\varepsilon,\upsilon}$.

Подобным образом можно получить аналогичную оценку и для $\lambda \in \Pi^-_{\varepsilon,\upsilon}$.

Тогда по теореме Лиувилля будем иметь $z(x,\lambda) \equiv C$. Но ввиду нулевых начальных условий (3.10) отсюда получим $z(x,\lambda) \equiv 0$. Учитывая это в дифференциальном уравнении (3.10), найдем

$$\bar{\mathfrak{h}}_n(\xi,\lambda) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \bar{\lambda}^{\nu-1}\bar{h}_\nu(x) = 0 \text{ для п.в. } x \in [0,1].$$

Отсюда следует, что $\bar{h}_\nu = 0$, $\nu = \overline{1,n}$, или $\bar{h}(x) = 0$ для п.в. $x \in [0,1]$. Лемма доказана. □

Из доказанной леммы следуют утверждения теорем 1.1, 1.2 и 1.3. При этом в случае, если хотя бы для одного краевого условия его порядок будет больше $n-1$, будем иметь возможный конечный дефект системы к.ф., не превышающий числа $\sum\limits_{i=l+1}^{n}[n-1-\varkappa_i]_+$. Если же $\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1} \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ для всех краевых условий в (1.4), то в этом случае дефект системы к.ф. рассматриваемого пучка будет равен нулю, так как в этом случае этот пучок можно линеаризовать в пространстве $L_2^n[0,1]$ и воспользоваться утверждением леммы 2.1 из [2, с. 49].

Теоремы 1.1, 1.2 и 1.3 тем самым доказаны.

3.2. Доказательство теоремы 1.4. Доказательство теоремы проведем для случая $k = m^\circ$ (случай $k < m^\circ$ рассматривается аналогично; изменится только возможный конечный дефект — вместо числа $\sum\limits_{i=l+1}^{n}[m^\circ-1-\varkappa_i]_+$ будет число $\sum\limits_{i=l+1}^{n}[k-1-\varkappa_i]_+$). Схема доказательства повторяет схему доказательства теорем 1.1, 1.2 и 1.3 до леммы 3.2 включительно. Далее следуем схеме доказательства [1,7].

Так как в рассматриваемом случае краевые условия (1.4) при $i = \overline{1,l}$ однородны, то, как уже отмечалось ранее, матрицы $\mathfrak{D}_j(\lambda)$ не зависят от λ и $\mathfrak{D}_j(\lambda) \equiv D_j^\circ$ (см. (3.5)). Обозначим

$$\operatorname{rank} D_j^\circ = \theta_j - \theta_{j-1}, \quad j = \overline{1,\eta},\ \theta_0 = 0,\ \theta_\eta = m^\circ.$$

Не нарушая общности, можно считать, что при фиксированном $j = \overline{1,\eta}$ в каждой группе из $n-l$ соотношений (3.7) линейно независимыми являются первые $\theta_j - \theta_{j-1}$ соотношений.

Обозначим

$$\hat{d}_{\theta_{j-1}+i,\mu} = d^\circ_{i\mu}, \quad \mu = \overline{\nu_{j-1}+1,\nu_j},\ i = \overline{1,\theta_j-\theta_{j-1}},\ j = \overline{1,\eta}.$$

Тогда соотношения (3.7) будут эквивалентны соотношениям

$$\sum_{\mu=\nu_{j-1}+1}^{\nu_j} \hat{d}_{i\mu} Y_\mu(\lambda) \equiv 0, \quad i = \overline{\theta_{j-1}+1,\theta_j},\ j = \overline{1,\eta}. \tag{3.12}$$

Покажем, что из (3.12) следует $\bar{h}_j(x) = 0$ для п.в. $x \in [0,1]$, $j = \overline{1,m^\circ}$. Для этого разложим $\exp(\lambda\omega_j x)$ в ряд по степеням λ, подставим эти разложения в (3.12), выпишем и приравняем нулю коэффициенты при λ^N, где N — любое натуральное число, большее m°. Получим систему

$$\left\{ \sum_{\mu=\nu_{j-1}+1}^{\nu_j} \left(\hat{d}_{i\mu}\omega_\mu^N\right) H_1^{(N)} + \cdots + \left(\hat{d}_{i\mu}\omega_\mu^{N-m+1}\right) H_{m^\circ}^{(N)}, \quad i = \overline{\theta_{j-1}+1,\theta_j},\ j = \overline{1,\eta}, \right. \tag{3.13}$$

где

$$H_s^{(N)} = \frac{1}{(N-s+1)!}\int\limits_0^1 h_s(x)x^{N-s+1}\,dx.$$

Очевидно, (3.13) есть линейная однородная система m° уравнений с m° неизвестными $H_1^{(N)}, H_2^{(N)}, \ldots, H_{m^\circ}^{(N)}$. Покажем, что определитель этой системы отличен от нуля. Матрицу системы можно представить следующим образом:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{\mu=1}^{\nu_1} \hat{d}_{1\mu}\omega_\mu^N & \sum\limits_{\mu=1}^{\nu_1} \hat{d}_{1\mu}\omega_\mu^{N-1} & \ldots & \sum\limits_{\mu=1}^{\nu_1} \hat{d}_{1\mu}\omega_\mu^{N-m^\circ+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{\mu=1}^{\nu_1} \hat{d}_{\theta_1,\mu}\omega_\mu^N & \sum\limits_{\mu=1}^{\nu_1} \hat{d}_{\theta_1,\mu}\omega_\mu^{N-1} & \ldots & \sum\limits_{\mu=1}^{\nu_1} \hat{d}_{\theta_1,\mu}\omega_\mu^{N-m^\circ+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{\mu=\nu_{\eta-1}+1}^{n} \hat{d}_{\theta_{\eta-1}+1,\mu}\omega_\mu^N & \sum\limits_{\mu=\nu_{\eta-1}+1}^{n} \hat{d}_{\theta_{\eta-1}+1,\mu}\omega_\mu^{N-1} & \ldots & \sum\limits_{\mu=\nu_{\eta-1}+1}^{n} \hat{d}_{\theta_{\eta-1}+1,\mu}\omega_\mu^{N-m^\circ+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{\mu=\nu_{\eta-1}+1}^{n} \hat{d}_{m^\circ\mu}\omega_\mu^N & \sum\limits_{\mu=\nu_{\eta-1}+1}^{n} \hat{d}_{m^\circ\mu}\omega_\mu^{N-1} & \ldots & \sum\limits_{\mu=\nu_{\eta-1}+1}^{n} \hat{d}_{m^\circ\mu}\omega_\mu^{N-m^\circ+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{d}_{11} & \ldots & \hat{d}_{1,\nu_1} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{d}_{\theta_1,1} & \ldots & \hat{d}_{\theta_1,\nu_1} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \hat{d}_{\theta_1+1,\nu_1+1} & \ldots & \hat{d}_{\theta_1+1,\nu_2} & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots & 0 & \hat{d}_{\theta_2,\nu_1+1} & \ldots & \hat{d}_{\theta_2,\nu_2} & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \hat{d}_{\theta_{\eta-1}+1,\nu_{\eta-1}+1} & \ldots & \hat{d}_{\theta_{\eta-1}+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \hat{d}_{m^\circ,\nu_{\eta-1}+1} & \ldots & \hat{d}_{m^\circ n} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \omega_1^N & \ldots & \omega_1^{N-m^\circ+1} \\ \omega_2^N & \ldots & \omega_2^{N-m^\circ+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_n^N & \ldots & \omega_n^{N-m^\circ+1} \end{pmatrix} = \mathcal{BC}.$$

Для нахождения определителя матрицы $\mathcal{A}$ воспользуемся формулой Бине—Коши

$$\det \mathcal{A} = \mathcal{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m^\circ \\ 1 & 2 & \ldots & m^\circ \end{pmatrix} = \sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_{m^\circ}\leqslant n} \mathcal{B}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m^\circ \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_{m^\circ} \end{pmatrix} \times \mathcal{C}\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_{m^\circ} \\ 1 & 2 & \ldots & m^\circ \end{pmatrix}.$$

Исследуем выражение, стоящее справа. Если в $\mathcal{B}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m^\circ \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_{m^\circ} \end{pmatrix}$ попадают два линейно зависимых столбца из одного диагонального блока матрицы $\mathcal{B}$, то этот определитель равен нулю. Обозначим через $k_1^\circ, k_2^\circ, \ldots, k_{\theta_1}^\circ$ номера линейно независимых столбцов, содержащихся в 1-м диагональном блоке матрицы $\mathcal{B}$, через $k_{\theta_1+1}^0, k_{\theta_1+2}^0, \ldots, k_{\theta_2}^0$ номера линейно независимых столбцов, содержащихся во 2-м диагональном блоке матрицы $\mathcal{B}$ и т. д., через $k_{\theta_{\eta-1}+1}^0, k_{\theta_{\eta-1}+2}^0, \ldots, k_{m^\circ}^0$ номера линейно независимых столбцов, содержащихся в η-м диагональном блоке матрицы $\mathcal{B}$. Тогда

$$\det \mathcal{A} = \mathcal{B}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m^\circ \\ k_1^\circ & k_2^\circ & \ldots & k_{m^\circ}^\circ \end{pmatrix} \times \mathcal{C}\begin{pmatrix} k_1^0 & k_2^0 & \ldots & k_{m^\circ}^0 \\ 1 & 2 & \ldots & m^\circ \end{pmatrix}.$$

Но, очевидно,

$$\mathcal{B}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m^\circ \\ k_1^\circ & k_2^\circ & \ldots & k_{m^\circ}^\circ \end{pmatrix} \neq 0,$$

так как столбцы этого определителя линейно независимы. Кроме того,

$$\mathcal{C}\begin{pmatrix} k_1^\circ & k_2^\circ & \ldots & k_{m^\circ}^\circ \\ 1 & 2 & \ldots & m^\circ \end{pmatrix} \neq 0$$

в силу предположения о простоте корней $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

Таким образом, $\det \mathcal{A} \neq 0$. Следовательно,

$$(\forall N > m^\circ) \quad \int\limits_0^1 h_s(x) x^{N-s+1}\,dx = 0, \quad s = \overline{1, m^\circ},$$

откуда в силу полноты системы степеней в $L_2[0,1]$ получим $h_s(x) = 0$ для п.в. $x \in [0,1]$, $s = \overline{1, m^\circ}$. Поэтому $\bar{h}(x) = 0$ для п.в. $x \in [0,1]$, что доказывает утверждение теоремы 1.4. Тем самым теорема 1.4 доказана.

4. Заключение

В статье получены достаточные условия n-кратной и m-кратной ($1 \leqslant m \leqslant n-1$) полноты к.ф. пучка $L_0(\lambda)$ вида (1.3)-(1.4) в пространстве $L_2[0,1]$, а именно, доказаны теоремы 1.1–1.4. Что будет, если предположения этих теорем не будут выполняться? В этом направлении автором также проводились исследования и получены некоторые результаты. Более подробно об этом можно узнать, например, в [8–11, 13, 15, 16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вагабов А. И.* Разложения в ряды Фурье по главным функциям дифференциальных операторов и их применения. — Дисс. д.ф.-м.н., Москва, 1988.
2. *Вагабов А. И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. — Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1994.
3. *Гасымов М. Г., Магеррамов А. М.* О кратной полноте системы собственных и присоединенных функций одного класса дифференциальных операторов// Докл. АН Азерб. ССР. — 1974. — *30*, № 12. — С. 9–12.
4. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений// Докл. АН СССР. — 1951. — *77*, № 1. — С. 11–14.
5. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов// Усп. мат. наук. — 1971. — *26*, № 4. — С. 15–41.
6. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
7. *Рыхлов В. С.* Кратная полнота собственных функций обыкновенного дифференциального полиномиального пучка// В сб.: «Исследования по теории операторов». — Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1988. — С. 128–140.
8. *Рыхлов В. С.* О полноте собственных функций квадратичных пучков обыкновенных дифференциальных операторов// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1992. — № 2. — С. 35–44.
9. *Рыхлов В. С.* О свойствах собственных функций обыкновенного дифференциального квадратичного пучка второго порядка// Интегр. преобраз. и специальные функции. Информ. бюллетень. — М.: Научно-исследоват. группа междун. журнала «Integral Transforms and Special Functions» и ВЦ РАН, 2001. — *2*, № 1. — С. 85–103.
10. *Рыхлов В. С.* О двукратной полноте собственных функций одного квадратичного пучка дифференциальных операторов второго порядка// В сб.: «Теорія операторів, диференціальні рівняння і теорія функцій: Збірник праць Ін-ту математики НАН України». — 2009. — *6*, № 1. — С. 237–249.
11. *Рыхлов В. С.* О полноте корневых функций простейших сильно нерегулярных дифференциальных операторов с двучленными двухточечными краевыми условиями// Докл. РАН. — 2009. — *428*, № 6. — С. 740–743.
12. *Рыхлов В. С.* О полноте собственных функций одного класса пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами// Изв. вузов. Сер. Мат. — 2009. — № 6. — С. 42–53.
13. *Рыхлов В. С.* О свойствах собственных функций одного квадратичного пучка дифференциальных операторов// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2009. — *9*, № 1. — С. 31–44.
14. *Рыхлов В. С.* О кратной полноте корневых функций одного класса пучков дифференциальных операторов// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2010. — *10*, № 2. — С. 24–34.
15. *Рыхлов В. С.* О полноте корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2015. — № 1 (26). — С. 69–86.
16. *Рыхлов В. С.* Кратная полнота корневых функций некоторых нерегулярных пучков дифференциальных операторов// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2016. — № 1 (31). — С. 87–103.

17. *Рыхлов В. С., Блинкова О. В.* О кратной полноте корневых функций одного класса пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2014. — *14*, № 4, ч. 2. — С. 574–584.
18. *Рыхлов В. С., Парфилова О. В.* О кратной полноте корневых функций пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2011. — *11*, № 4. — С. 45–58.
19. *Тихомиров С. А.* Конечномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов в пространстве вектор-функций. — Дисс. к.ф.-м.н., Саратов, 1987.
20. *Хромов А. П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов. — Дисс. д.ф.-м.н., Новосибирск, 1973.
21. *Хромов А. П.* О порождающих функциях вольтерровых операторов// Мат. сб. — 1977. — *102*, № 3. — С. 457–472.
22. *Шкаликов А. А.* О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями// Функц. анализ и его прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 69–80.
23. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1983. — № 9. — С. 190–229.
24. *Eberhard W.* Zur Vollständigkeit des Biorthogonalsystems von Eigenfunktionen irregulärer Eigenwertprobleme// Math. Z. — 1976. — *146*, № 3. — С. 213–221.
25. *Freiling G.* Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator büschel// Math. Z. — 1984. — *188*, № 1. — С. 55–68.
26. *Freiling G.* Über die mehrfache Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und assoziierten Funktionen irregulärer Operatorenbüschel in $L_2[0,1]$// ZAMM Z. Angew. Math. Mech. — 1985. — *65*, № 5. — С. 336–338.
27. *Rykhlov V. S.* Multiple completeness of the root functions for a certain class of pencils of ordinary differential operators with constant coefficients// Results Math. — 2015. — *68*, № 3-4. — С. 427–440. — doi: 10.1007/s00025-015-0450-6.
28. *Rykhlov V. S.* Multiple completeness of the root functions for a certain class of pencils of ordinary differential operators// Results Math. — 2016. — С. 1–21. — doi: 10.1007/s00025-016-0599-7.

Виктор Сергеевич Рыхлов
Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского,
410026, г. Саратов, ул. Астраханская, 83
E-mail: RykhlovVS@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-340-361 UDC 517.927.25

On Multiple Completeness of the Root Functions of Ordinary Differential Polynomial Pencil with Constant Coefficients

© 2017 **V. S. Rykhlov**

Abstract. In the space of square integrable functions on a finite segment we consider a class of polynomial pencils of nth-order ordinary differential operators with constant coefficients and two-point boundary-value conditions (at the edges of the segment). We suppose that roots of the characteristic equation of pencils of this class are simple and nonzero. We establish sufficient conditions for m-multiple completeness ($1 \leqslant m \leqslant n$) of the system of root functions of pencils from this class in the space of square integrable functions on this segment.

REFERENCES

1. A. I. Vagabov, *Razlozheniya v ryady Fur'e po glavnym funktsiyam differentsial'nykh operatorov i ikh primeneniya* [Expansions into Fourier Series with Respect to Main Functions of Differential Operators and Their Applications], PhD Thesis, Moscow, 1988 (in Russian).
2. A. I. Vagabov, *Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu differentsial'nykh operatorov* [Introduction to the Spectral Theory of Differential Operators], Izd-vo Rost. un-ta, Rostov-na-Donu, 1994 (in Russian).
3. M. G. Gasymov and A. M. Magerramov, "O kratnoy polnote sistemy sobstvennykh i prisoedinennykh funktsiy odnogo klassa differentsial'nykh operatorov" [On multiple completeness of a system of eigenfunctions and adjoined functions of one class of differential operators], *Dokl. AN Azerb. SSR* [Rep. Acad. Sci. Azerbaijan SSR], 1974, **30**, No. 12, 9–12 (in Russian).
4. M. V. Keldysh, "O sobstvennykh znacheniyakh i sobstvennykh funktsiyakh nekotorykh klassov nesamosopryazhennykh uravneniy" [On eigenvalues and eigenfunctions of some classes of nonself-adjoint equations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1951, **77**, No. 1, 11–14 (in Russian).
5. M. V. Keldysh, "O polnote sobstvennykh funktsiy nekotorykh klassov nesamosopryazhennykh lineynykh operatorov" [On completeness of eigenfunctions of some classes of nonself-adjoint linear operators], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1971, **26**, No. 4, 15–41 (in Russian).
6. M. A. Naimark, *Lineynye differentsial'nye operatory* [Linear Differential Operators], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
7. V. S. Rykhlov, "Kratnaya polnota sobstvennykh funktsiy obyknovennogo differentsial'nogo polinomial'nogo puchka" [Multiple completeness of eigenfunctions of ordinary differential polynomial pencil], In: *"Issledovaniya po teorii operatorov"* [Investigations in the Theory of Operators], BNTs UrO AN SSSR, Ufa, 1988, 128–140 (in Russian).
8. V. S. Rykhlov, "O polnote sobstvennykh funktsiy kvadratichnykh puchkov obyknovennykh differentsial'nykh operatorov" [On completeness of eigenfunctions of quadratic pencils of ordinary differential operators], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1992, No. 2, 35–44 (in Russian).
9. V. S. Rykhlov, "O svoystvakh sobstvennykh funktsiy obyknovennogo differentsial'nogo kvadratichnogo puchka vtorogo poryadka" [On properties of eigenfunctions of ordinary differential quadratic pencil of second order], *Integr. preobraz. i spetsial'nye funktsii. Inform. byulleten'* [Integr. Transforms and Special Functions: Inform. Bull.], Nauchno-issledovat. gruppa mezhdun. zhurnala *Integral Transforms and Special Functions* i VTs RAN [Research group of Int. J. *Integral Transforms and Special Functions* and Comput. Center Russ. Acad. Sci.], Moscow, 2001, **2**, No. 1, 85–103 (in Russian).
10. V. S. Rykhlov, "O dvukratnoy polnote sobstvennykh funktsiy odnogo kvadratichnogo puchka differentsial'nykh operatorov vtorogo poryadka" [On double completeness of eigenfunctions of one quadratic pencil of second-order differential operators], In: *Teoriya operatoriv, diferentsial'ni rivnyannya i teoriya funktsiy: Zbirnik prats' In-tu matematiki NAN Ukraini* [Oper. Theory, Diff. Equ., and Function Theory: Proc. Math. Inst. Acad. Sci. Ukraine], 2009, **6**, No. 1, 237–249 (in Russian).
11. V. S. Rykhlov, "O polnote kornevykh funktsiy prosteyshikh sil'no neregulyarnykh differentsial'nykh operatorov s dvuchlennymi dvukhtochechnymi kraevymi usloviyami" [On completeness of root functions of simplest strongly irregular differential operators with two-term, two-point boundary-value conditions], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2009, **428**, No. 6, 740–743 (in Russian).
12. V. S. Rykhlov, "O polnote sobstvennykh funktsiy odnogo klassa puchkov differentsial'nykh operatorov s postoyannymi koeffitsientami" [On completeness of eigenfunctions of one class of pencils of differential operators with constant coefficients], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2009, No. 6, 42–53 (in Russian).
13. V. S. Rykhlov, "O svoystvakh sobstvennykh funktsiy odnogo kvadratichnogo puchka differentsial'nykh operatorov" [On properties of eigenfunctions of one quadratic pencil of differential operators], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inform.* [Bull. Saratov Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.], 2009, **9**, No. 1, 31–44 (in Russian).
14. V. S. Rykhlov, "O kratnoy polnote kornevykh funktsiy odnogo klassa puchkov differentsial'nykh operatorov" [On multiple completeness of root functions of one class of pencils of differential operators], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inform.* [Bull. Saratov Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.], 2010, **10**, No. 2, 24–34 (in Russian).
15. V. S. Rykhlov, "O polnote kornevykh funktsiy polinomial'nykh puchkov obyknovennykh differentsial'nykh operatorov s postoyannymi koeffitsientami" [On completeness of root functions of polynomial pencils of

ordinary differential operators with constant coefficients], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2015, No. 1 (26), 69–86 (in Russian).
16. V. S. Rykhlov, “Kratnaya polnota kornevykh funktsiy nekotorykh neregulyarnykh puchkov differentsial’nykh operatorov” [Multiple completeness of root functions of some irregular pencils of differential operators], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2016, No. 1 (31), 87–103 (in Russian).
17. V. S. Rykhlov and O. V. Blinkova, “O kratnoy polnote kornevykh funktsiy odnogo klassa puchkov differentsial’nykh operatorov s postoyannymi koeffitsientami” [On multiple completeness of root functions of one class of pencils of differential operators with constant coefficients], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inform.* [Bull. Saratov Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.], 2014, **14**, No. 4, ch. 2, 574–584 (in Russian).
18. V. S. Rykhlov and O. V. Parfilova, “O kratnoy polnote kornevykh funktsiy puchkov differentsial’nykh operatorov s postoyannymi koeffitsientami” [On multiple completeness of root functions of pencils of differential operators with constant coefficients], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inform.* [Bull. Saratov Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.], 2011, **11**, No. 4, 45–58 (in Russian).
19. S. A. Tikhomirov, *Konechnomernye vozmushcheniya integral’nykh vol’terrovykh operatorov v prostranstve vektor-funktsiy* [Finite-Dimensional Perturbations of Integral Volterra Operators in the Space of Vector Functions], PhD Thesis, Saratov, 1987 (in Russian).
20. A. P. Khromov, *Konechnomernye vozmushcheniya vol’terrovykh operatorov* [Finite-Dimensional Perturbations of Volterra Operators], Doctoral Thesis, Novosibirsk, 1973 (in Russian).
21. A. P. Khromov, “O porozhdayushchikh funktsiyakh vol’terrovykh operatorov” [On generating functions of Volterra operators], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1977, **102**, No. 3, 457–472 (in Russian).
22. A. A. Shkalikov, “O polnote sobstvennykh i prisoedinennykh funktsiy obyknovennogo differentsial’nogo operatora s neregulyarnymi kraevymi usloviyami” [On completeness of eigenfunctions and adjoined functions of ordinary differential operators with irregular boundary-value conditions], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1976, **10**, No. 4, 69–80 (in Russian).
23. A. A. Shkalikov, “Kraevye zadachi dlya obyknovennykh differentsial’nykh uravneniy s parametrom v granichnykh usloviyakh” [Boundary-value problems for ordinary differential equations with a parameter in boundary-value conditions], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 1983, No. 9, 190–229 (in Russian).
24. W. Eberhard, “Zur Vollständigkeit des Biorthogonalsystems von Eigenfunktionen irregulärer Eigenwertprobleme,” *Math. Z.* , 1976, **146**, No. 3, 213–221.
25. G. Freiling, “Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator büschel,” *Math. Z.*, 1984, **188**, No. 1, 55–68.
26. G. Freiling, “Über die mehrfache Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und assoziierten Funktionen irregulärer Operatorenbüschel in $L_2[0,1]$,” *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, 1985, **65**, No. 5, 336–338.
27. V. S. Rykhlov, “Multiple completeness of the root functions for a certain class of pencils of ordinary differential operators with constant coefficients,” *Results Math.*, 2015, **68**, No. 3-4, 427–440, `doi: 10.1007/s00025-015-0450-6`.
28. V. S. Rykhlov, “Multiple completeness of the root functions for a certain class of pencils of ordinary differential operators,” *Results Math.*, 2016, 1–21, `doi: 10.1007/s00025-016-0599-7`.

V. S. Rykhlov
Chernyshevskii Saratov National Research State University
83 Astrahanskaya st., 410026 Saratov, Russia
E-mail: `RykhlovVS@yandex.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 2 (2017). С. 362–372

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-362-372 УДК 517.984

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С УСЛОВИЯМИ РАЗРЫВА ВО ВНУТРЕННЕЙ ТОЧКЕ

© 2017 г. **В. А. ЮРКО**

Аннотация. Исследуются дифференциальные операторы высших порядков на конечном интервале с условиями разрыва внутри интервала. Установлены свойства спектральных характеристик и доказаны теоремы о разложении и о полноте корневых функций для этого класса операторов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Рассмотрим краевую задачу L для дифференциального уравнения

$$\ell y(x) := y^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-2} p_j(x) y^{(j)}(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < T, \tag{1.1}$$

с краевыми условиями

$$y^{(\nu-1)}(0) = y^{(\nu-1)}(T) = 0, \quad \nu = \overline{1, m}, \tag{1.2}$$

и условиями разрыва во внутренней точке $a \in (0, T)$:

$$y^{(\nu-1)}(a+0) = \sum_{j=1}^{\nu} a_{\nu j} y^{(j-1)}(a-0), \quad \nu = \overline{1, n}. \tag{1.3}$$

Здесь $n = 2m$, $p_j(x)$ — комплекснозначные функции, $p_j^{(\nu)}(x)$ абсолютно непрерывны при $\nu = \overline{0, j-1}$, $x \in [0, T]$, и $a_{\nu j}$ — комплексные числа, $a_{\nu\nu} \neq 0$. Таким образом, условия разрыва порождаются матрицей перехода $A = [a_{\nu j}]_{\nu, j = \overline{1,n}}$, где $a_{\nu j} = 0$ при $\nu < j$ и $\det A \neq 0$.

Пусть функции $\varphi_j(x, \lambda)$, $j = \overline{1, n}$, являются решениями уравнения (1.1), удовлетворяющими условиям разрыва (1.3) и начальным условиям

$$\varphi_j^{(\nu-1)}(0, \lambda) = \delta_{\nu j}, \ \nu = \overline{1, n}, \tag{1.4}$$

где $\delta_{\nu j}$ — символ Кронекера. Ясно, что

$$\det[\varphi_j^{(\nu-1)}(x, \lambda)]_{\nu, j = \overline{1,n}} = \eta(x), \tag{1.5}$$

где $\eta(x) := 1$ при $x < a$ и $\eta(x) := \det A$ при $x > a$. Обозначим

$$\Delta(\lambda) := \det[\varphi_j^{(\nu-1)}(T, \lambda)]_{j = \overline{m+1, n};\, \nu = \overline{1,m}}. \tag{1.6}$$

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект 1.1660.2017/PCh) и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-01-00015, 17-51-53180).

Функция $\Delta(\lambda)$ является целой по λ порядка $1/n$; ее нули $\{\lambda_l\}_{l\geqslant 0}$ (с учетом кратностей) совпадают с собственными значениями краевой задачи L вида (1.1)–(1.3). Функция $\Delta(\lambda)$ называется характеристической функцией краевой задачи L. Пусть $\{\varphi_l(x)\}_{l\geqslant 0}$ — система собственных и присоединенных функций (корневых функций) задачи L.

Краевые задачи с условиями разрыва внутри интервала часто встречаются в математике, механике, физике, геофизике и других областях естествознания. Как правило, такие задачи связаны с разрывными или негладкими свойствами среды. Например, разрывные задачи возникают в электронике при конструировании параметров неоднородных линий передач с желаемыми техническими характеристиками [2,3]. Разрывные задачи возникают также при изучении проводимости одномерных разрывных сред [11,13]. Краевые задачи с условиями разрыва внутри интервала возникают также в геофизических моделях структуры Земли [7,12]. Прямые и обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов без разрывов изучены достаточно подробно (см. [1,4,8,9,15] и библиографию в них). Наличие разрывов вносит существенные качественные изменения в исследование операторов. Разрывные краевые задачи для операторов Штурма—Лиувилля рассматривались в [5,6,10,13,14] и других работах. Краевые задачи для дифференциальных операторов высших порядков с условиями разрыва внутри интервала еще не изучались.

В данной статье в разделе 2 изучаются свойства спектральных характеристик краевой задачи L. В разделе 3 доказываются теоремы о разложении и о полноте корневых функций задачи L.

2. Свойства спектральных характеристик

Пусть $\lambda=\rho^n$. Обозначим

$$S_{k_0}=\{\rho:\ \arg\rho\in\Big(\frac{k_0\pi}{n},\frac{(k_0+1)\pi}{n}\Big)\},\quad k_0=\overline{-n,n-1}.$$

В каждом секторе S_{k_0} корни $R_k,\ k=\overline{1,n}$, уравнения $R^n-1=0$ могут быть занумерованы так, чтобы

$$\operatorname{Re}(\rho R_1)<\operatorname{Re}(\rho R_2)<\ldots<\operatorname{Re}(\rho R_n),\quad \rho\in S_{k_0}.$$

Ясно, что $R_k=\exp(i\pi\omega_k/m)$, где ω_k — перестановка чисел $0,1,\ldots,n-1$. Известно [4, Ch. 1], что в каждом секторе S_{k_0} существует фундаментальная система решений (ФСР) $B=\{y_k(x,\rho)\}_{k=\overline{1,n}}$ уравнения (1.1) такая, что

$$y_k^{(\nu-1)}(x,\rho)=(\rho R_k)^{\nu-1}\exp(\rho R_k x)[1],\quad \rho\in\overline{S_{k_0}},\ |\rho|\to\infty,\ k,\nu=\overline{1,n},\ x\in[0,T],\tag{2.1}$$

где $[1]=1+O(\rho^{-1})$. Функции $y_k^{(\nu-1)}(x,\rho)$ являются аналитическими по $\rho\in S_{k_0}$, $|\rho|>\rho_*$, при каждом $x\in[0,T]$ и непрерывными при $x\in[0,T]$, $\rho\in\overline{S_{k_0}}$, $|\rho|\geqslant\rho_*$. При $|\rho|\to\infty,\ \rho\in\overline{S_{k_0}}$,

$$\det[y_k^{(\nu-1)}(x,\rho)]_{k,\nu=\overline{1,n}}=\rho^{n(n-1)/2}\det[R_k^{\nu-1}]_{k,\nu=\overline{1,n}}[1].$$

Изучим асимптотическое поведение функций $\varphi_j(x,\lambda)$ при достаточно больших $|\rho|$. Обозначим $J_-:=\{x:\ x\in[0,a-0]\}$, $J_+:=\{x:\ x\in[a+0,T]\}$. Используя ФСР B, получаем

$$\varphi_j(x,\lambda)=\sum_{k=1}^n A_{jk}^{\pm}(\rho)y_k(x,\rho),\quad x\in J_\pm.\tag{2.2}$$

Согласно (1.4) имеем

$$\sum_{k=1}^n A_{jk}^{-}(\rho)y_k^{(\nu-1)}(0,\rho)=\delta_{\nu j},\quad \nu=\overline{1,n}.$$

Решая эту линейную алгебраическую систему по правилу Крамера и используя (2.1), вычисляем

$$A_{jk}^{-}(\rho)=\alpha_{jk}\rho^{1-j}[1],\quad \alpha_{jk}:=R_k^{1-j}/n,\ \rho\in\overline{S_{k_0}},\ |\rho|\to\infty.\tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в (2.2) и используя (2.1), выводим

$$\varphi_j^{(\nu-1)}(x,\lambda)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n(\rho R_k)^{\nu-j}\exp(\rho R_k x)[1],\quad x\in[0,a-0],\ \rho\in\overline{S_{k_0}},\ |\rho|\to\infty.\tag{2.4}$$

Обозначим
$$\gamma^0_{ks} := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_{jj}\Big(\frac{R_s}{R_k}\Big)^{j-1}.$$
Учитывая (1.3), получаем
$$A^+_{jk}(\rho) = \sum_{s=1}^n \gamma^+_{ks}(\rho)A^-_{js}(\rho), \tag{2.5}$$
где
$$\gamma^+_{ks}(\rho) = (\gamma^0_{ks} + O(\rho^{-1}))\exp(\rho(R_s - R_k)a),\ \rho\in\overline{S_{k_0}},\ |\rho|\to\infty,\quad \det[\gamma^+_{ks}(\rho)]_{k,s=\overline{1,n}} \equiv \det A. \tag{2.6}$$
Из (2.3), (2.5) и (2.6) вытекает, что
$$A^+_{jk}(\rho) = \frac{1}{n\rho^{j-1}}\sum_{s=1}^n R_s^{1-j}(\gamma^0_{ks} + O(\rho^{-1}))\exp(\rho(R_s - R_k)a),\quad \rho\in\overline{S_{k_0}},\ |\rho|\to\infty. \tag{2.7}$$
Подставляя (2.7) в (2.2) и используя (2.1), получаем при $x\in[a+0,T]$, $\rho\in\overline{S_{k_0}}$, $|\rho|\to\infty$:
$$\varphi_j^{(\nu-1)}(x,\lambda) = \frac{1}{n\rho^{j-1}}\sum_{k=1}^n(\rho R_k)^{\nu-1}\exp(\rho R_k(x-a))\sum_{s=1}^n R_s^{1-j}(\gamma^0_{ks} + O(\rho^{-1}))\exp(\rho R_s a). \tag{2.8}$$
Отметим, что (2.8) следует также из (1.3) и (2.4).

Обозначим
$$\Delta_{k\nu}(\lambda) := (-1)^{k+\nu}\det[\varphi_j^{(\mu-1)}(T,\lambda)]_{\nu=\overline{1,n-k},\,j=\overline{k,n}\setminus\nu},\quad k=\overline{1,n-1},\quad \nu=\overline{k,n}. \tag{2.9}$$
Функции $\Delta_{k\nu}(\lambda)$ являются целыми по λ порядка $1/n$, и их нули $\{\lambda_{lk\nu}\}_{l\geqslant 0}$ (с учетом кратностей) совпадают с собственными значениями краевых задач $L_{k\nu}$ для уравнения (1.1) с условиями разрыва (1.3) и с краевыми условиями
$$y^{(\mu-1)}(0) = y^{(\xi-1)}(T) = 0,\quad \mu=\overline{1,k-1},\nu;\quad \xi=\overline{1,n-k}.$$
Функции $\Delta_{k\nu}(\lambda)$ называются характеристическими функциями для краевых задач $L_{k\nu}$. В частности, $L_{mm}=L$. Из (1.6) и (2.9) вытекает, что $\Delta_{mm}(\lambda)=\Delta(\lambda)$, $\lambda_{lmm}=\lambda_l$.

Ввиду (2.9) и (2.2) имеем
$$\Delta_{kk}(\lambda) = \sum_{1\leqslant s_1<\ldots<s_{n-k}\leqslant n}\det[A^+_{\mu,s_j}(\rho)]_{\mu=\overline{k+1,n},\,j=\overline{1,n-k}}\cdot\det[y_{s_j}^{(\nu-1)}(T,\rho)]_{j,\nu=\overline{1,n-k}}.$$
Из (2.7) следует, что
$$A^+_{jk}(\rho) = \sum_{s=1}^n \alpha^+_{js}(\rho)b_{sk}(\rho),\quad \alpha^+_{js}(\rho) = \alpha_{js}\rho^{1-j},\ b_{sk}(\rho) = (\gamma^0_{ks} + O(\rho^{-1}))\exp(\rho(R_s - R_k)a).$$
Учитывая (2.1), вычисляем при $k=\overline{1,n-1}$, $\rho\in\overline{S_{k_0}}$, $|\rho|\to\infty$:
$$\Delta_{kk}(\lambda) = \frac{1}{\rho^{\sigma_k}}\exp\Big(\rho T\sum_{j=k+1}^n R_j\Big)\Big((\Delta^0_k + O(\rho^{-1})) + (\Delta^{01}_k + O(\rho^{-1}))\exp(\rho(R_k - R_{k+1})a)$$
$$+(\Delta^{10}_k + O(\rho^{-1}))\exp(\rho(R_k - R_{k+1})(T-a)) + (\Delta^1_k + O(\rho^{-1}))\exp(\rho(R_k - R_{k+1})T)\Big), \tag{2.10}$$
где $\sigma_k = n(n-1)/2 - k(k-1)/2 - (n-k)(n-k-1)/2$,
$$\Delta^0_k = \theta^0_k\alpha^0_k\Gamma^0_k,\quad \Delta^{01}_k = \theta^0_k\alpha^1_k\Gamma^{01}_k,\quad \Delta^{10}_k = \theta^1_k\alpha^0_k\Gamma^{10}_k,\quad \Delta^1_k = \theta^1_k\alpha^1_k\Gamma^1_k,$$
$$\theta^0_k = \det[R_j^\nu]_{j=\overline{k+1,n},\,\nu=\overline{0,n-k-1}},\quad \theta^1_k = \det[R_j^\nu]_{j=\overline{k,n}\setminus k+1,\,\nu=\overline{o,n-k-1}},$$
$$\alpha^0_k = \det[\alpha_{j\nu}]_{j,\nu=\overline{k+1,n}}\quad \alpha^1_k = \det[\alpha_{j\nu}]_{j=\overline{k+1,n},\,\nu=\overline{k,n}\setminus k+1},$$
$$\Gamma^0_k = \det[\gamma^0_{j\nu}]_{j,\nu=\overline{k+1,n}},\quad \Gamma^{01}_k = \det[\gamma^0_{j\nu}]_{j=\overline{k+1,n},\,\nu=\overline{k,n}\setminus k+1},$$
$$\Gamma^{10}_k = \det[\gamma^0_{j\nu}]_{j=\overline{k,n}\setminus k+1,\,\nu=\overline{k+1,n}},\quad \Gamma^1_k = \det[\gamma^0_{j\nu}]_{j,\nu=\overline{k,n}\setminus k+1}.$$
Ясно, что $\theta^0_k\theta^1_k\neq 0$, $\alpha^0_k\alpha^1_k\neq 0$. Будем предполагать, что $\Gamma^0_k\neq 0$ при $k=\overline{1,n-1}$. Это условие называется *условием регулярности* склейки. Контрпример в конце статьи показывает важность

условия регулярности для спектрального анализа дифференциальных операторов с условиями разрыва внутри интервала. Если $A = E$ (E — единичная матрица), то условие регулярности всегда выполняется. Отметим, что (2.10) следует также из (2.8) и (2.9).

Используя (2.10), известным методом (см., например, [4]) получены следующие свойства характеристических функций $\Delta_{kk}(\lambda)$:

1. При $\rho \in \overline{S_{k_0}}$, $|\rho| \to \infty$:
$$\Delta_{kk}(\lambda) = O\Big(\frac{1}{\rho^{\sigma_k}} \exp\Big(\rho T \sum_{j=k+1}^{n} R_j\Big)\Big).$$
2. Пусть $\lambda_{lkk} = \rho_{lkk}^n$. Обозначим $G_{\delta,k} := \{\rho : \ |\rho - \rho_{lkk}| \geqslant \delta, \ \forall l\}$. Тогда
$$|\Delta_{kk}(\lambda)| \geqslant \frac{C}{|\rho|^{\sigma_k}} |\exp\Big(\rho T \sum_{j=k+1}^{n} R_j\Big)|, \quad \rho \in \overline{S_{k_0}} \cap G_{\delta,k}. \tag{2.11}$$
3. Существуют положительные числа $r_N \to \infty$ такие, что при достаточно малом $\delta > 0$ окружности $|\rho| = r_N$ лежат в $G_\delta := \bigcap_k G_{\delta,k}$ при всех N.

Аналогично, используя (2.9), получаем
$$\Delta_{k\nu}(\lambda) = O\Big(\frac{1}{\rho^{\sigma_{k\nu}}} \exp\Big(\rho T \sum_{j=k+1}^{n} R_j\Big)\Big), \quad \rho \in \overline{S_{k_0}}, \ |\rho| \to \infty, \tag{2.12}$$
где $\sigma_{k\nu} := \sigma_k + k - \nu$.

Пусть $\Phi_k(x,\lambda)$, $k = \overline{1,n}$ — решения уравнения (1.1), удовлетворяющие условиям разрыва (1.3) и краевым условиям
$$\Phi_k^{(\nu-1)}(0,\lambda) = \delta_{\nu k}, \ \nu = \overline{1,k}, \quad \Phi_k^{(\xi-1)}(T,\lambda) = 0, \ \xi = \overline{1,n-k}. \tag{2.13}$$
Функции $\Phi_k(x,\lambda)$ называются решениями типа Вейля. Обозначим
$$M_{k\nu}(\lambda) := \Phi_k^{(\nu-1)}(0,\lambda).$$
Функции $M_{k\nu}(\lambda)$ называются функциями типа Вейля, а матрица $M(\lambda) = [M_{k\nu}(\lambda)]_{k,\nu=\overline{1,n}}$ называется матрицей типа Вейля. Очевидно, что $M_{k\nu}(\lambda) \equiv \delta_{k\nu}$ при $k \geqslant \nu$ и $\det M(\lambda) \equiv 1$. Из (1.4), (1.5) и (2.13) вытекает, что
$$\Phi_k(x,\lambda) = \varphi_k(x,\lambda) + \sum_{\nu=k+1}^{n} M_{k\nu}(\lambda)\varphi_\nu(x,\lambda), \quad M_{k\nu}(\lambda) = \frac{\Delta_{k\nu}(\lambda)}{\Delta_{kk}(\lambda)}, \tag{2.14}$$
$$\det[\Phi_k^{(\nu-1)}(x,\lambda)]_{\nu,k=\overline{1,n}} = \eta(x), \tag{2.15}$$
В силу (2.11)-(2.12) вычисляем
$$|M_{k\nu}(\lambda)| \leqslant C|\rho|^{\nu-k}, \ \rho \in \overline{S_{k_0}} \cap G_\delta.$$
Используя ФСР B, имеем
$$\Phi_j(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{n} B_{jk}^{\pm}(\rho) y_k(x,\rho), \quad x \in J_\pm. \tag{2.16}$$
Учитывая (1.3) и (2.13), получаем
$$\sum_{k=1}^{n} B_{jk}^{-}(\rho) y_k^{(\nu-1)}(0,\rho) = \delta_{\nu j}, \quad \nu = \overline{1,j},$$
$$\sum_{k=1}^{n} B_{jk}^{+}(\rho) y_k^{(\nu-1)}(T,\rho) = 0, \quad \nu = \overline{1,n-j},$$
$$B_{jk}^{+}(\rho) = \sum_{s=1}^{n} \gamma_{ks}^{+}(\rho) B_{js}^{-}(\rho).$$

Эти соотношения образуют линейную алгебраическую систему с определителем

$$D_j(\rho) = D_j^0 \rho^{m(n-1)} \Delta_{jj}(\lambda), \quad D_j^0 \neq 0.$$

Решая эту систему по правилу Крамера и используя (2.1), (2.6) и (2.11), получаем при $\rho \in \overline{S_{k_0}} \cap G_\delta$:

$$|B_{jk}^-(\rho)| \leqslant C|\rho|^{1-j},\ k = \overline{1,j}, \quad |B_{jk}^-(\rho)| \leqslant C|\rho|^{1-j} \exp(\rho(R_j - R_k)a),\ k = \overline{j,n},$$

$$|B_{jk}^+(\rho)| \leqslant C|\rho|^{1-j} \exp(\rho(R_j - R_k)a),\ k = \overline{1,j}, \quad |B_{jk}^+(\rho)| \leqslant C|\rho|^{1-j} \exp(\rho(R_j - R_k)T),\ k = \overline{j,n}.$$

Подставляя эти соотношения в (2.16) и используя (2.1), находим

$$|\Phi_j^{(\nu-1)}(x,\lambda)| \leqslant C|\rho|^{\nu-j} |\exp(\rho R_j x)|, \quad \rho \in \overline{S_{k_0}} \cap G_\delta,\ x \in [0,T],\ j,\nu = \overline{1,n}. \tag{2.17}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ell^* z(x) := z^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^j (p_j(x) z(x))^{(j)} = \lambda z(x). \tag{2.18}$$

Тогда

$$\ell^* z(x) = z^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-2} p_j^*(x) z^{(j)}(x),$$

где функции $p_j^{*(\nu)}(x),\ \nu = \overline{0,j-1}$ являются абсолютно непрерывными при $x \in [0,T]$. Используя интегрирование по частям, мы находим

$$\int_0^T \ell y(x) \cdot z(x)\, dx = \Big|_0^T < y(x), z(x) > + \int_0^T y(x) \cdot \ell^* z(x)\, dx,$$

где

$$< y(x), z(x) > := \sum_{\nu,j=0}^{n-1} \mathcal{L}_{\nu j}(x) y^{(\nu)}(x) z^{(j)}(x),$$

$$\mathcal{L}_{\nu j}(x) := \sum_{s=j}^{n-\nu-1} C_s^j p_{s+\nu+1}^{(s-j)}(x),\ \nu + j \leqslant n-1, \quad C_s^j := \frac{s!}{j!(s-j!)},$$

и $\mathcal{L}_{\nu j}(x) := 0$ при $\nu + j > n-1$. Обозначим $U_{\nu s}(y) := y^{(\nu-1)}(sT),\ s = 0,T,\ \nu = \overline{1,n}$. Определим линейные формы $U_{\nu s}^*(z)$ из соотношения

$$< y(x), z(x) >_{|x=sT} = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{n-\nu} U_{n-\nu+1,s}^*(z) U_{\nu s}(y).$$

Введем матрицу $A^* = [a_{kj}^*]_{k,j=\overline{1,n}}$ из соотношения

$$< y(x), z(x) >_{|x=a+0} = < y(x), z(x) >_{|x=a-0},$$

где $y(x)$ удовлетворяет (1.3). Тогда $a_{kj}^* = 0$ при $k < j$ и $a_{kk}^* = (a_{n-k+1,n-k+1})^{-1}$.

Определим условия разрыва для ℓ^* следующим образом:

$$z^{(\nu-1)}(a+0) = \sum_{j=1}^{\nu} a_{\nu j}^* z^{(j-1)}(a-0), \quad \nu = \overline{1,n}. \tag{2.19}$$

Пусть $\{\lambda_l^*\}_{l \geqslant 0}$ — собственные значения краевой задачи L^* для уравнения (2.18) с условиями разрыва (2.19) и краевыми условиями $U_{\nu s}^*(z) = 0,\ s = 0,T,\ \nu = \overline{1,m}$. Тогда $\lambda_l^* = \lambda_l,\ l \geqslant 0$. Обозначим

$$\varphi_k^*(x,\lambda) := \frac{1}{\eta(x)} \det[\varphi_j^{(\nu)}(x,\lambda)]_{\nu=\overline{0,n-2};\, j=\overline{1,n} \setminus n-k+1}, \tag{2.20}$$

$$\Phi_k^*(x,\lambda) = \frac{1}{\eta(x)} \det[\Phi_j^{(\nu)}(x,\lambda)]_{\nu=\overline{0,n-2};\, j=\overline{1,n} \setminus n-k+1}. \tag{2.21}$$

Учитывая (1.4), (1.5), (2.13) и (2.15), нетрудно проверить, что функции $\varphi_k^*(x,\lambda)$ и $\Phi_k^*(x,\lambda)$ являются решениями уравнения (2.18) и удовлетворяют условиям разрыва (2.19) и краевым условиям

$$U_{\nu 0}^*(\varphi_k^*)=\delta_{\nu k},\ \nu=\overline{1,n},\quad U_{\nu 0}^*(\Phi_k^*)=\delta_{\nu k},\ \nu=\overline{1,k},\quad U_{\xi T}^*(\Phi_k^*)=0,\ \xi=\overline{1,n-k}.$$

Из (2.21) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Phi_{n-k+1}^{(n-1)}(x,\lambda)\Phi_k^*(x,\lambda)\equiv 1,\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Phi_{n-k+1}(x,\lambda)\Phi_k^{*(n-1)}(x,\lambda)\equiv 1. \tag{2.22}$$

Аналогично (2.17) имеем

$$|\Phi_j^{*(\nu-1)}(x,\lambda)|\leqslant C|\rho|^{\nu-j}|\exp(\rho R_j^* x)|,\quad \rho\in\overline{S_{k_0}}\cap G_\delta,\ x\in[0,T],\ R_j^*=-R_{n-j+1}. \tag{2.23}$$

3. Теоремы о разложении и о полноте

3.1. Теорема о разложении. Обозначим

$$g(x,t,\lambda)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\varphi_{n-k+1}(x,\lambda)\varphi_k^*(t,\lambda), & x\geqslant t,\\ 0 & x<t,\end{cases} \tag{3.1}$$

и построим функцию $G(x,t,\lambda)$ по формуле

$$G(x,t,\lambda)=\frac{(-1)^m}{\Delta(\lambda)}\begin{vmatrix}\varphi_{m+1}(x,\lambda) & \dots & \varphi_n(x,\lambda) & g(x,t,\lambda)\\ \varphi_{m+1}(T,\lambda) & \dots & \varphi_n(T,\lambda) & g(T,t,\lambda)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi_{m+1}^{(m-1)}(T,\lambda) & \dots & \varphi_n^{(m-1)}(T,\lambda) & \dfrac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}g(x,t,\lambda)_{|x=T}\end{vmatrix}. \tag{3.2}$$

Функция $G(x,t,\lambda)$ называется функцией Грина для краевой задачи L. В силу (3.2) функция $G(x,t,\lambda)$ является мероморфной по λ с полюсами в точках $\lambda=\lambda_l$, где $\{\lambda_l\}_{l\geqslant 0}$ — нули функции $\Delta(\lambda)$. Для оценки функции Грина нам потребуется другое ее представление с помощью решений типа Вейля.

Лемма 3.1. *Справедливо соотношение*

$$G(x,t,\lambda)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k-1}\Phi_{n-k+1}(x,\lambda)\Phi_k^*(t,\lambda), & x\geqslant t,\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k}\Phi_{n-k+1}(x,\lambda)\Phi_k^*(t,\lambda), & x<t.\end{cases} \tag{3.3}$$

Доказательство. Согласно (3.1) и (2.20) имеем

$$g(x,t,\lambda)=\frac{1}{\eta(t)}\det[\varphi_j(t,\lambda),\dots,\varphi_j^{(n-2)}(t,\lambda),\varphi_j(x,\lambda)]_{j=\overline{1,n}},\quad x\geqslant t.$$

Учитывая (2.14) и (1.6), получаем

$$g(x,t,\lambda)=\frac{1}{\eta(t)}\det[\Phi_j(t,\lambda),\dots,\Phi_j^{(n-2)}(t,\lambda),\Phi_j(x,\lambda)]_{j=\overline{1,n}},\quad x\geqslant t, \tag{3.4}$$

$$\Delta(\lambda)=\det[\Phi_j^{(\nu-1)}(T,\lambda)]_{j=\overline{m+1,n},\ \nu=\overline{1,m}}, \tag{3.5}$$

$$G(x,t,\lambda)=\frac{(-1)^m}{\Delta(\lambda)}\begin{vmatrix}\Phi_{m+1}(x,\lambda) & \dots & \Phi_n(x,\lambda) & g(x,t,\lambda)\\ \Phi_{m+1}(T,\lambda) & \dots & \Phi_n(T,\lambda) & g(T,t,\lambda)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \Phi_{m+1}^{(m-1)}(T,\lambda) & \dots & \Phi_n^{(m-1)}(T,\lambda) & \dfrac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}g(x,t,\lambda)_{|x=T}\end{vmatrix}. \tag{3.6}$$

Из (2.21) и (3.4) вытекает, что

$$g(x,t,\lambda)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Phi_{n-k+1}(x,\lambda)\Phi_k^*(t,\lambda),\quad x\geqslant t. \tag{3.7}$$

В (3.6) мы подставляем (3.7) и (3.5), если $x \geqslant t$, и (3.5) и соотношение $g(x,t,\lambda)=0$, если $x<t$. Разлагая числитель в (3.6) по первой строке и учитывая (2.13), приходим к (3.3). Лемма 3.1 доказана. □

Теорема 3.1. *Пусть функция $f(x)$ является абсолютно непрерывной на $[0,a]$ и $[a,T]$, $f(0)=f(T)=0$ и $f(a+0)=a_{11}f(a-0)$. Тогда*

$$\lim_{N\to\infty}\max_{0\leqslant x\leqslant T}\Big|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r_N^n} Y(x,\lambda)\,d\lambda - f(x)\Big| = 0, \tag{3.8}$$

где

$$Y(x,\lambda)=\int\limits_0^T G(x,t,\lambda)f(t)\,dt. \tag{3.9}$$

Отметим, что по теореме о вычетах интеграл в (3.8) равен частичной сумме ряда Фурье для $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям краевой задачи L, и следовательно, теорема 3.1 дает достаточные условия для разложения $f(x)$ в равномерно сходящийся ряд по собственным и присоединенным функциям краевой задачи L (см. следствие 3.1).

Доказательство. Подставляя (3.3) в (3.9), получаем

$$Y(x,\lambda)=\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k-1}\Phi_{n-k+1}(x,\lambda)\int\limits_0^x f(t)\Phi_k^*(t,\lambda)\,dt$$

$$+\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k}\Phi_{n-k+1}(x,\lambda)\int\limits_x^T f(t)\Phi_k^*(t,\lambda)\,dt.$$

Пусть для определенности $x \geqslant a$; для случая $x<a$ рассуждения аналогичны. Так как функции $\Phi_k^*(x,\lambda)$ являются решениями уравнения (2.18), то

$$Y(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k-1}\Phi_{n-k+1}(x,\lambda)\Big(\int\limits_0^a+\int\limits_a^x\Big)f(t)\Big(\Phi_k^{*(n)}(t,\lambda)+\sum_{j=0}^{n-2}p_j^*(t)\Phi_k^{*(j)}(t,\lambda)\Big)\,dt$$

$$+\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k}\Phi_{n-k+1}(x,\lambda)\int\limits_x^T f(t)\Big(\Phi_k^{*(n)}(t,\lambda)+\sum_{j=0}^{n-2}p_j^*(t)\Phi_k^{*(j)}(t,\lambda)\Big)\,dt.$$

Выполним здесь интегрирование по частям в главных слагаемых с n-ми производными. Используя (2.22) и условия $f(0)=f(T)=0$, получаем

$$Y(x,\lambda)=\frac{f(x)}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{4}F_k(x,\lambda), \tag{3.10}$$

где

$$F_1(x,\lambda):=f(a-0)\Phi_k^{*(n-1)}(a-0,\lambda)-f(a+0)\Phi_k^{*(n-1)}(a+0,\lambda),$$

$$F_2(x,\lambda):=\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k}\Phi_{n-k+1}(x,\lambda)\Big(\int\limits_0^a+\int\limits_a^x\Big)f'(t)\Phi_k^{*(n-1)}(t,\lambda)\,dt,$$

$$F_3(x,\lambda):=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\Phi_{n-k+1}(x,\lambda)\int\limits_x^T f'(t)\Phi_k^{*(n-1)}(t,\lambda)\,dt,$$

$$F_4(x,\lambda):=\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k-1}\Phi_{n-k+1}(x,\lambda)\Big(\int\limits_0^a+\int\limits_a^x\Big)f(t)\Big(\sum_{j=0}^{n-2}p_j^*(t)\Phi_k^{*(j)}(t,\lambda)\Big)\,dt$$

$$+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\Phi_{n-k+1}(x,\lambda)\int\limits_x^T f(t)\Big(\sum_{j=0}^{n-2}p_j^*(t)\Phi_k^{*(j)}(t,\lambda)\Big)\,dt.$$

Так как $\Phi_k^{*(n-1)}(a+0,\lambda)=a_{nn}^*\Phi_k^{*(n-1)}(a-0,\lambda),\ f(a+0)=a_{11}f(a-0)$, и $a_{nn}^*=(a_{11})^{-1}$, то

$$F_1(x,\lambda)\equiv 0. \tag{3.11}$$

Учитывая (2.17) и (2.23), вычисляем

$$|F_4(x,\lambda)|\leqslant C|\rho|^{-1},\quad \rho\in G_\delta,\ x\in[0,T]. \tag{3.12}$$

Для $F_2(x,\lambda)$ и $F_3(x,\lambda)$ имеем в виду (2.17) и (2.23):

$$|F_k(x,\lambda)|\leqslant C_0\int\limits_0^T|g(t)|\,dt,\quad k=2,3,\quad \rho\in G_\delta,\ x\in[0,T],$$

где $g(t):=f'(t)\in L(0,T),\ C_0>0$. Если функция $g(t)$ абсолютно непрерывна на $[0,T]$, то интегрирование по частям дает

$$|F_k(x,\lambda)|\leqslant C|\rho|^{-1}\quad k=2,3,\quad \rho\in G_\delta,\ x\in[0,T].$$

В общем случае, когда $g(t)\in L(0,T)$, зафиксируем $\varepsilon>0$ и выберем абсолютно непрерывную функцию $g_\varepsilon(x)$ такую, что

$$\int\limits_0^T|g_\varepsilon(x)-g(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2C_0}.$$

Представим $F_k(x,\lambda)$ как сумму двух слагаемых

$$F_k(x,\lambda)=F_k(x,\lambda;g_\varepsilon)+F_k(x,\lambda;g-g_\varepsilon),$$

относящихся к функциям g_ε и $g-g_\varepsilon$ соответственно. Тогда

$$|F_k(x,\lambda)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{C}{|\rho|},$$

и следовательно, $|F_k(x,\lambda)|<\varepsilon$ для достаточно больших $|\rho|$. Это дает

$$\max_{x\in[0,T]}|F_k(x,\lambda)|=o(1),\quad |\rho|\to\infty,\ \rho\in G_\delta,\ k=2,3. \tag{3.13}$$

Из (3.10)–(3.13) вытекает, что

$$\max_{x\in[0,T]}\Big|Y(x,\lambda)-\frac{f(x)}{\lambda}\Big|=o\Big(\frac{1}{\lambda}\Big),\quad |\rho|\to\infty,\ \rho\in G_\delta,$$

и следовательно, верно (3.8). Теорема 3.1 доказана. □

Пусть $\{\varphi_l^*(x)\}_{l\geqslant 0}$ — корневые функции краевой задачи L^* такие, что

$$\int\limits_0^T\varphi_k(x)\varphi_l^*(x)\,dx=\delta_{kl}.$$

Следствие 3.1. *Пусть функция $f(x)$ является абсолютно непрерывной на $[0,a]$ и $[a,T]$, $f(0)=f(T)=0$ и $f(a+0)=a_{11}f(a-0)$. Тогда*

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}a_l\varphi_l(x),\quad a_l=\int\limits_0^T f(t)\varphi_l^*(t)\,dt,$$

где ряд сходится «со скобками»:

$$\sum_{l=0}^{\infty}:=\lim_{N\to\infty}\sum_{|\lambda_l|<r_N^n}.$$

3.2. Теорема о полноте.

Теорема 3.2. *Система* $\{\varphi_l(x)\}_{l\geqslant 0}$ *корневых функций краевой задачи* L *полна в* $L_2(0,T)$.

Доказательство. Пусть $f(x) \in L_2(0,T)$ и

$$\int_0^T f(x)\varphi_l(x)\,dx = 0, \quad l \geqslant 0. \tag{3.14}$$

Рассмотрим функцию

$$Z(x,\lambda) := \int_0^T G^*(x,t,\lambda) f(t)\,dt,$$

где $G^*(x,t,\lambda) = G(t,x,\lambda)$. В силу (3.3) имеем

$$\ell^* Z - \lambda Z = f(x). \tag{3.15}$$

Используя (3.14), известным методом (см. [4, Ch. 1]) нетрудно проверить, что при каждом фиксированном x функция $Z(x,\lambda)$ является целой по λ. С другой стороны, из (3.3), (2.17) и (2.23) вытекает, что

$$|Z(x,\lambda)| \leqslant C|\rho|^{1-n}, \quad \rho \in G_\delta, \quad x \in [0,T],$$

и следовательно, $Z(x,\lambda) \equiv 0$. Учитывая (3.15), получаем $f(x) = 0$ п.в. на $(0,T)$. Теорема 3.2 доказана. □

Рассмотрим контрпример, показывающий важность условия регулярности. Для этого рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\left.\begin{array}{c} -y'' = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \quad \lambda = \rho^2, \\ y(0) = y(\pi) = 0, \quad y^{(k)}(a+0) = (-1)^k y^{(k)}(a-0),\ k = 0,1,\ a = 3\pi/4. \end{array}\right\} \tag{3.16}$$

Для этой задачи условие регулярности не выполняется, а характеристическая функция имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \rho^{-1}\sin\rho(2a - \pi).$$

Собственные значения $\lambda_l = \rho_l^2$ краевой задачи (3.16) суть $\rho_l = 2l,\ l \geqslant 1$, а собственные функции имеют вид

$$y_l(x) = \begin{cases} \sin 2lx, & x \leqslant 3\pi/4, \\ (-1)^{l-1}\sin 2lx, & x > 3\pi/4. \end{cases}$$

Система функций $\{y_l(x)\}_{l\geqslant 1}$ не является полной в $L_2(0,\pi)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. — М.: Наука, 1970.
2. *Литвиненко О. Н., Сошников В. И.* Теория неоднородных линий и их применение в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1964.
3. *Мещанов В. П., Фельдштейн А. Л.* Автоматизированное проектирование направленных ответвителей СВЧ. — М.: Связь, 1980.
4. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
5. *Юрко В. А.* О краевых задачах с условиями разрыва внутри интервала// Дифф. уравн. — 2000. — *36*, № 8. — С. 1139-1140.
6. *Amirov R., Ozkan A.* Discontinuous Sturm—Liouville problems with eigenvalue dependent boundary conditions// Math. Phys. Anal. Geom. — 2014. — *17*, № 3-4. — С. 483–491.
7. *Anderssen R. S.* The effect of discontinuities in density and shear velocity on the asymptotic overtone structure of torsional eigenfrequencies of the Earth// Geophys. J. R. Astr. Soc. — 1997. — *50*. — С. 303–309.
8. *Beals R., Deift P., Tomei C.* Direct and inverse scattering on the line. — Providence: Am. Math. Soc., 1988.
9. *Freiling G., Yurko V. A.* Inverse Sturm—Liouville problems and their applications. — New York: NOVA Science Publishers, 2001.
10. *Hald O. H.* Discontinuous inverse eigenvalue problems// Commun. Pure Appl. Math. — 1984. — *37*. — С. 539–577.

11. *Krueger R. J.* Inverse problems for nonabsorbing media with discontinuous material properties// J. Math. Phys. — 1982. — *23*, № 3. — С. 396–404.
12. *Lapwood F. R., Usami T.* Free oscillations of the Earth. — Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
13. *Shepelsky D. G.* The inverse problem of reconstruction of the medium's conductivity in a class of discontinuous and increasing functions// Adv. Sov. Math. — 1994. — *19*. — С. 209–231.
14. *Yurko V. A.* Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems// Integral Transforms Spec. Funct. — 2000. — *10*, № 2. — С. 141–164.
15. *Yurko V. A.* Method of spectral mappings in the inverse problem theory. — Utrecht: VSP, 2002.

Вячеслав Анатольевич Юрко
Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского,
410026, г. Саратов, ул. Астраханская, 83
E-mail: `yurkova@info.sgu.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-362-372 UDC 517.984

Spectral Analysis of Higher-Order Differential Operators with Discontinuity Conditions at an Interior Point

© 2017 **V. A. Yurko**

Abstract. Higher-order differential operators on a finite interval with jump conditions inside the interval are studied. Properties of spectral characteristics are obtained, and completeness and expansion theorems are proved for this class of operators.

REFERENCES

1. B. M. Levitan and I. S. Sargsyan, *Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu* [Introduction to Spectral Theory], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
2. O. N. Litvinenko, V. I. Soshnikov, *Teoriya neodnorodnykh liniy i ikh primenenie v radiotekhnike* [Theory of Nonhomogeneous Lines and Their Applications in Radio Engineering], Sov. radio, Moscow, 1964 (in Russian).
3. V. P. Meshchanov and A. L. Feldstein, *Avtomatizirovannoe proektirovanie napravlennykh otvetviteley SVCh* [Automatic Design of Directional Couplers], Svyaz', Moscow, 1980 (in Russian).
4. M. A. Naimark, *Lineynye differentsial'nye operatory* [Linear Differential Operators], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
5. V. A. Yurko, "O kraevykh zadachakh s usloviyami razryva vnutri intervala" [On boundary-value problems with discontinuity conditions inside the interval], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2000, **36**, No. 8, 1139-1140 (in Russian).
6. R. Amirov and A. Ozkan, "Discontinuous Sturm—Liouville problems with eigenvalue dependent boundary conditions," *Math. Phys. Anal. Geom.*, 2014, **17**, No. 3-4, 483–491.
7. R. S. Anderssen, "The effect of discontinuities in density and shear velocity on the asymptotic overtone structure of torsional eigenfrequencies of the Earth," *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 1997, **50**, 303–309.
8. R. Beals, P. Deift, and C. Tomei, *Direct and Inverse Scattering on the Line*, Am. Math. Soc., Providence, 1988.
9. G. Freiling and V. A. Yurko, *Inverse Sturm–Liouville Problems and Their Applications*, NOVA Science Publishers, New York, 2001.
10. O. H. Hald, "Discontinuous inverse eigenvalue problems," *Commun. Pure Appl. Math.*, 1984, **37**, 539–577.
11. R. J. Krueger, "Inverse problems for nonabsorbing media with discontinuous material properties," *J. Math. Phys.*, 1982, **23**, No. 3, 396–404.
12. F. R. Lapwood and T. Usami, *Free Oscillations of the Earth*, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.

13. D. G. Shepelsky, "The inverse problem of reconstruction of the medium's conductivity in a class of discontinuous and increasing functions," *Adv. Sov. Math.*, 1994, **19**, 209–231.
14. V. A. Yurko, "Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems," *Integral Transforms Spec. Funct.*, 2000, **10**, No. 2, 141–164.
15. V. A. Yurko, *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory*, VSP, Utrecht, 2002.

V. A. Yurko
Chernyshevskii Saratov National Research State University
83 Astrahanskaya st., 410026 Saratov, Russia
E-mail: yurkova@info.sgu.ru