РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 64, № 4, 2018

Современные проблемы математики и физики

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4
http://journals.rudn.ru/cmfd

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print)
4 выпуска в год
http://journals.rudn.ru/cmfd
Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.
Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.
Индексируется в международных базах данных научных публикаций *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.
Полный текст журнала размещен в базах данных компании *EBSCO Publishing* на платформе *EBSCOhost*.
Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты. Объем статьи, занимающий целый том, должен составлять 140–190 страниц в стиле нашего журнала.

Правила оформления статей, архив публикаций и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала на Общероссийском математическом портале: http://www.mathnet.ru/cmfd.

Редактор: ***Е. М. Варфоломеев***
Компьютерная верстка: ***Е. М. Варфоломеев, В. С. Кваченко***
Адрес редакции:
115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: journal.cmfd@gmail.com

Подписано в печать 14.12.2018. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.
Усл. печ. л. 19,07. Тираж 150 экз. Заказ 2094.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов» (РУДН)
117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН
115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 952-04-41; e-mail: ipk@rudn.university

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 64, No. 4, 2018
Contemporary Problems in Mathematics and Physics

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4
http://journals.rudn.ru/cmfd

Founded in 2003
Founder: PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS
Published by the Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print)
4 issues per year
http://journals.rudn.ru/cmfd
Reviewed in *MathSciNet* and *Zentralblatt Math*.
The full texts can be found in the *EBSCOhost* databases by *EBSCO Publishing*.
Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results. Occupying the whole volume, an article should make up 140–190 pages in the format of the journal.

Guidelines for authors, archive of issues, and other information can be found at the journal's website at *All-Russian Mathematical Portal*: http://www.mathnet.ru/eng/cmfd.

Editor: ***E. M. Varfolomeev***
Computer design: ***E. M. Varfolomeev, V. S. Kvachenko***

Address of the Editorial Office:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: journal.cmfd@gmail.com

Printing run 150 copies.

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

Printed at RUDN Publishing House:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: ipk@rudn.university

СОДЕРЖАНИЕ

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions, 2018, Vol. 64, No. 4

CONTENTS

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 4 (2018). С. 591–602

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-591-602 УДК 519.633

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2018 г. **Р. Д. АЛАЕВ, М. У. ХУДАЙБЕРГАНОВ**

Аннотация. Мы изучаем разностную схему расщепления для численного нахождения устойчивых решений двумерной линейной системы гиперболических уравнений с диссипативными краевыми условиями в случае постоянных коэффициентов и с младшими членами. Нами был построен дискретный аналог функции Ляпунова, а также получена соответствующая априорная оценка. Полученная априорная оценка позволяет утверждать об экспоненциальной устойчивости численного решения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Рассмотрим задачу Коши для двумерной линейной системы гиперболических уравнений с диссипативными граничными условиями с постоянными коэффициентами и младшими членами [2]. Устойчивость решений одномерных гиперболических систем была изучена в [6]. Основная идея этой работы заключается в изучении устойчивости решения систем гиперболических уравнений посредством построения функции Ляпунова и получения априорных оценок решения в различных функциональных пространствах.

В этой работе ставятся задачи построения и исследования разностной схемы расщепления для численного нахождения устойчивых решений двумерной линейной системы гиперболических уравнений с диссипативными граничными условиями с постоянными коэффициентами и младшими членами. Следует отметить, что решению этой задачи было посвящено много работ, см., например, [1, 3–5]. Однако во всех этих работах построение разностных схем и исследование их устойчивости было основано на технике построения диссипативных интегралов энергии. Априорные оценки численных решений начально-краевых задач для гиперболических систем, полученные в этих работах, не позволяют утверждать что-либо об экспоненциальной устойчивости численных решений.

В этой же работе исследуется разностная схема расщепления для численного нахождения устойчивых решений двумерной линейной системы гиперболических уравнений с диссипативными граничными условиями с постоянными коэффициентами и младшими членами. Был построен дискретный аналог функции Ляпунова, а также получены соответствующие априорные оценки. Эти оценки уже позволяют говорить об экспоненциальной устойчивости численных решений, что в свою очередь позволяет доказать сходимость этих численных решений.

2. Дифференциальная постановка задачи

Рассмотрим в области $G = \{(t,x,y) : 0 < t \leqslant T, 0 < x < l, -\infty < y < +\infty\}$ симметричную гиперболическую систему в специальном каноническом виде [2]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{K}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \mathbf{M}\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{2.1}$$

с краевыми условиями при $x = 0$:

$$\mathbf{v}^{\mathbf{I}} = \mathbf{s}\mathbf{v}^{\mathbf{II}} \tag{2.2}$$

и при $x = l$:

$$\mathbf{v}^{\mathbf{II}} = \mathbf{r}\mathbf{v}^{\mathbf{I}}, \tag{2.3}$$

а также с начальными условиями при $t = 0$:

$$v_i(0, x, y) = \varphi_i(x, y), \;\; i = 1, \ldots, n, \;\; 0 \leqslant x \leqslant l, \;\; -\infty \leqslant y \leqslant +\infty \tag{2.4}$$

где $\mathbf{v}^{\mathbf{I}} = (v_1, v_2, \ldots, v_m)^T$, $\mathbf{v}^{\mathbf{II}} = (v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_n)^T$, $\mathbf{K}$ — диагональная матрица, $\mathbf{C}$ — положительно определенная матрица, $\mathbf{M}$ — квадратная матрица с вещественными элементами порядка n,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{\mathbf{I}} \\ \mathbf{v}^{\mathbf{II}} \end{bmatrix}, \;\; \mathbf{K} = \begin{pmatrix} K^+ & 0 \\ 0 & -K^- \end{pmatrix}, \;\; \mathbf{K}^+ = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & k_m \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}^- = \begin{pmatrix} k_{m+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_{m+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & k_n \end{pmatrix}, \;\; k_i > 0, \;\; i = 1, \ldots, n,$$

$\mathbf{s}$ — это матрица порядка $n - m \times m$, $\mathbf{r}$ — матрица порядка $m \times n - m$. При $|y| > \dfrac{1}{2}Y$ исходные функции положены равными нулю.

Пусть начальное условие $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)^T \in W_2^1\left((0, l), (-\infty, +\infty), \mathbb{R}^n\right)$ удовлетворяют следующему условию совместности:

$$\begin{cases} \varphi^{\mathbf{I}} = \mathbf{s}\varphi^{\mathbf{II}}, & x = 0, \;\; t = 0, \\ \varphi^{\mathbf{II}} = \mathbf{r}\varphi^{\mathbf{I}}, & x = l, \;\; t = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Здесь $W_2^1\left((0, l), (-\infty, +\infty), \mathbb{R}^n\right)$ — пространство Соболева.

Определение 2.1. Система (2.1) с граничными условиями (2.2)-(2.3) является *экспоненциально устойчивой по норме* $\mathbb{L}^2$, если существуют такие $\nu > 0$ и $c > 0$, что для любых начальных условий $\varphi \in \mathbb{L}^2\left((0, l), (-\infty, +\infty), \mathbb{R}^n\right)$ $\mathbb{L}^2$-решение исходной задачи (2.1)–(2.4) удовлетворяет неравенствам

$$\|\mathbf{v}(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2((0,l),(-\infty,+\infty),\mathbb{R}^n)} \leqslant ce^{-\nu t}\|\varphi\|_{\mathbb{L}^2((0,l),(-\infty,+\infty),\mathbb{R}^n)}, \;\; t \geqslant 0. \tag{2.6}$$

В качестве функции Ляпунова рассмотрим следующую функцию:

$$L(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^l (\mu(x)\mathbf{v}, \mathbf{v})\, dxdy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^l \left\{\sum_{i=1}^m \mu_i e^{-\nu x}\left[v_i(t, x, y)\right]^2 + \sum_{i=m+1}^n \mu_i e^{\nu x}\left[v_i(t, x, y)\right]^2\right\} dxdy, \tag{2.7}$$

где $\mu_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, $\mu^+ = (\mu_1, \ldots, \mu_m)^T$, $\mu^- = (\mu_{m+1}, \ldots, \mu_n)^T$,

$$\mu(x) = \begin{pmatrix} e^{-\nu x}\mu^+ & 0 \\ 0 & e^{\nu x}\mu^- \end{pmatrix}.$$

Теорема 2.1 (экспоненциальная устойчивость, см. [6]). *Система* (2.1) *с краевыми условиями* (2.2)-(2.3) *является экспоненциально устойчивой по норме* $\mathbb{L}^2$, *если существуют такие* $\nu > 0$ *и* $\mu_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, *что матрицы*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\nu l}\mu^+ & 0 \\ 0 & \mu^- \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{r} \\ \mathbf{s} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu^+ & 0 \\ 0 & e^{\nu l}\mu^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

и

$$\nu\,|\mathbf{K}|\,\mu(x) + \mathbf{M}^T\mu(x) + \mu(x)\mathbf{M}, \;\; x \in (0, l), \tag{2.9}$$

являются положительно определенными.

Доказательство. Продифференцируем функцию Ляпунова:

$$L'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l \partial_t\left(\mu(x)\mathbf{v},\mathbf{v}\right)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l \left(\mu(x)\partial_t\mathbf{v},\mathbf{v}\right)dxdy +$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l \left(\mu(x)\mathbf{v},\partial_t\mathbf{v}\right)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l \left(\mu(x)\left[-\mathbf{K}\partial_x\mathbf{v}-\mathbf{C}\partial_y\mathbf{v}-\mathbf{M}\mathbf{v}\right],\mathbf{v}\right)dxdy +$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l \left(\mu(x)\mathbf{v},\left[-\mathbf{K}\partial_x\mathbf{v}-\mathbf{C}\partial_y\mathbf{v}-\mathbf{M}\mathbf{v}\right]\right)dxdy =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l \left[\left(\mu(x)\mathbf{K}\partial_x\mathbf{v},\mathbf{v}\right)+\left(\mu(x)\mathbf{v},\mathbf{K}\partial_x\mathbf{v}\right)+\left(\mu(x)\mathbf{C}\partial_y\mathbf{v},\mathbf{v}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\mu(x)\mathbf{v},\mathbf{C}\partial_y\mathbf{v}\right)\right]dxdy - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l \left[\left(\mu(x)\mathbf{M}\mathbf{v},\mathbf{v}\right)+\left(\mu(x)\mathbf{v},\mathbf{M}\mathbf{v}\right)\right]dxdy.$$

Из

$$\left(\mu(x)\mathbf{K}\partial_x\mathbf{v},\mathbf{v}\right) = \left(\partial_x\left[\mu(x)\mathbf{K}\mathbf{v}\right],\mathbf{v}\right) - \big(\mu'(x)\mathbf{K}\mathbf{v},\mathbf{v}\big)$$

и

$$\mu'(x)\mathbf{K} = -\nu\left|\mathbf{K}\right|\mu(x),$$

получаем следующее тождество:

$$L'(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l \left[\partial_x\left(\mathbf{K}\mu(x)\mathbf{v},\mathbf{v}\right)+\partial_y\left(\mathbf{C}\mu(x)\mathbf{v},\mathbf{v}\right)\right]dxdy -$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l \big(\left[\nu\left|\mathbf{K}\right|\mu(x)+\mathbf{M}^T\mu(x)+\mu(x)\mathbf{M}\right]\mathbf{v},\mathbf{v}\big)dxdy = -\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathbf{K}\mu(x)\mathbf{v},\mathbf{v}\right)\Big|_0^l dy -$$

$$-\int_0^l \left(\mathbf{C}\mu(x)\mathbf{v},\mathbf{v}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} dx - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l \big(\left[\nu\left|\mathbf{K}\right|\mu(x)+\mathbf{M}^T\mu(x)+\mu(x)\mathbf{M}\right]\mathbf{v},\mathbf{v}\big)dxdy =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathbf{K}\mu(x)\mathbf{v},\mathbf{v}\right)\Big|_0^l dy - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l \big(\left[\nu\left|\mathbf{K}\right|\mu(x)+\mathbf{M}^T\mu(x)+\mu(x)\mathbf{M}\right]\mathbf{v},\mathbf{v}\big)dxdy.$$

Преобразуем отдельно каждый член полученного тождества:

$$-\left(\mathbf{K}\mu(x)\mathbf{v},\mathbf{v}\right)\Big|_0^l = -\left[\left(\mathbf{K}\mu(l)\mathbf{v}(t,l,y),\mathbf{v}(t,l,y)\right)-\left(\mathbf{K}\mu(0)\mathbf{v}(t,0,y),\mathbf{v}(t,0,y)\right)\right] =$$

$$= -\left(\begin{pmatrix}\mathbf{K}^+ & 0\\ 0 & -\mathbf{K}^-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\nu l}\mu^+ & 0\\ 0 & e^{\nu l}\mu^-\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,l,y)\\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,l,y)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,l,y)\\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,l,y)\end{bmatrix}\right) +$$

$$+\left(\begin{pmatrix}\mathbf{K}^+ & 0\\ 0 & -\mathbf{K}^-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu^+ & 0\\ 0 & \mu^-\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,0,y)\\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0,y)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,0,y)\\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0,y)\end{bmatrix}\right) =$$

$$= -\left(\begin{pmatrix}\mathbf{K}^+ & 0\\ 0 & \mathbf{K}^-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\nu l}\mu^+ & 0\\ 0 & \mu^-\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,l,y)\\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0,y)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,l,y)\\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0,y)\end{bmatrix}\right) +$$

$$+\left(\begin{pmatrix}\mathbf{K}^+ & 0\\ 0 & \mathbf{K}^-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu^+ & 0\\ 0 & e^{\nu l}\mu^-\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,0,y)\\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,l,y)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,0,y)\\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,l,y)\end{bmatrix}\right) =$$

$$= -\left(\begin{pmatrix}\mathbf{K}^+ & 0\\ 0 & \mathbf{K}^-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\nu l}\mu^+ & 0\\ 0 & \mu^-\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,l,y)\\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0,y)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,l,y)\\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0,y)\end{bmatrix}\right) +$$

$$+\left(\begin{pmatrix} \mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu^+ & 0 \\ 0 & e^{\nu l}\mu^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,l,y) \\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0,y) \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,l,y) \\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0,y) \end{bmatrix}\right) =$$

$$= -\left(\begin{pmatrix} \mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\nu l}\mu^+ & 0 \\ 0 & \mu^- \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,l,y) \\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0,y) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,l,y) \\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0,y) \end{bmatrix}\right) +$$

$$+\left(\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{r} \\ \mathbf{s} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu^+ & 0 \\ 0 & e^{\nu l}\mu^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,l,y) \\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0,y) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{\mathrm{I}}(t,l,y) \\ \mathbf{v}^{\mathrm{II}}(t,0,y) \end{bmatrix}\right) < 0.$$

Согласно (2.9), имеем

$$-\int\limits_0^l \left(\left[\nu\,|\mathbf{K}|\,\mu(x) + \mathbf{M}^T\mu(x) + \mu(x)\mathbf{M}\right]\mathbf{v},\mathbf{v}\right)dx < 0.$$

Учитывая эти преобразования, получаем

$$L'(t) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{K}\mu(x)\mathbf{v},\mathbf{v})\Big|_0^l dy - \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^l \left(\left[\nu\,|\mathbf{K}|\,\mu(x) + \mathbf{M}^T\mu(x) + \mu(x)\mathbf{M}\right]\mathbf{v},\mathbf{v}\right)dxdy < 0.$$

Поскольку матрицы (2.9) и $\nu\,|\mathbf{K}|\,\mu(x)$ являются положительно определенными, отсюда следует неравенство:

$$\left(\left[\nu\,|\mathbf{K}|\,\mu(x) + \mathbf{M}^T\mu(x) + \mu(x)\mathbf{M}\right]\mathbf{v},\mathbf{v}\right) > \nu(|\mathbf{K}|\,\mu(x)\mathbf{v},\mathbf{v}) > \nu(|\mathbf{K}|\,\mu(x)\mathbf{v},\mathbf{v})$$
$$\alpha = \nu\min_{i=1,\dots,n} k_i$$

Таким образом, получаем

$$L'(t) < -\nu\alpha\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^l (\mu(x)\mathbf{v},\mathbf{v})\,dxdy = -\eta L'(t), \quad \eta = \nu\alpha.$$

Следовательно,

$$L(t) \leqslant e^{-\eta t}L(0), \quad t > 0.$$

Однако из существования такой константы $\gamma > 0$, что

$$\frac{1}{\gamma}\,\|\mathbf{v}(t,\cdot)\|^2_{L^2((0,l),(-\infty,+\infty),\mathbb{R}^n)} \leqslant L(t) \leqslant \gamma\,\|\mathbf{v}(t,\cdot)\|^2_{L^2((0,l),(-\infty,+\infty),\mathbb{R}^n)},$$

$$\|\mathbf{v}(t,\cdot)\|^2_{L^2((0,l),(-\infty,+\infty),\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^l (\mathbf{v},\mathbf{v})\,dxdy,$$

имеем

$$\|\mathbf{v}(t,\cdot)\|_{L^2((0,l),(-\infty,+\infty),\mathbb{R}^n)} \leqslant \gamma e^{-\nu t/2}\,\|\mathbf{\Phi}\|_{L^2((0,l),(-\infty,+\infty),\mathbb{R}^n)}, \quad t \in [0,+\infty).$$

Теорема 2.1 доказана. □

3. Разностная схема

Построим в области G разностную сетку

$$G_h = \{(t^\kappa, x_j, y_q) : 0 \leqslant t^\kappa \leqslant T,\ 0 \leqslant x_j \leqslant l,\ -\infty < y_q < +\infty\},$$

в которой

$$t^\kappa = \kappa\Delta t,\ \kappa = 0,\dots,N,\ N\Delta t = T,$$

$$x_j = \left(j + \frac{1}{2}\right)\Delta x;\ J\Delta x = l;\ j = 0,\dots,J-1,$$

$$y_q = \left(q + \frac{1}{2}\right)\Delta y;\ q = -\infty,\dots,+\infty.$$

Определим значения численного решения в узлах следующим образом:

$$\mathbf{v}_{jq}^{n} = \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{y_{q-\frac{1}{2}}}^{y_{q+\frac{1}{2}}} \int\limits_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{v}(t^n, x, y)dxdy, \qquad j = 0, \ldots, J-1.$$

Для получения численного решения исходной задачи (2.1)–(2.4) рассмотрим разностную схему расщепления

$$\left[\begin{array}{c} (\mathbf{w}^{\mathrm{I}})_{jq}^{\kappa} \\ (\mathbf{w}^{\mathrm{II}})_{jq}^{\kappa} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} (\mathbf{v}^{\mathrm{I}})_{jq}^{\kappa} \\ (\mathbf{v}^{\mathrm{II}})_{jq}^{\kappa} \end{array}\right] - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\begin{array}{cc} \mathbf{K}^{+} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^{-} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} (\mathbf{v}^{\mathrm{I}})_{jq}^{\kappa} - (\mathbf{v}^{\mathrm{I}})_{j-1,q}^{\kappa} \\ (\mathbf{v}^{\mathrm{II}})_{jq}^{\kappa} - (\mathbf{v}^{\mathrm{II}})_{j+1,q}^{\kappa} \end{array}\right], \tag{3.1}$$

$$j = 0, \ldots, J-1; \;\; \kappa = 0, \ldots, N-1; \;\; q = -\infty, \ldots, +\infty;$$

$$\mathbf{u}_{jq}^{\kappa} = \mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \frac{\Delta t}{\Delta y}\mathbf{C}\left[\mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right], \tag{3.2}$$

$$j = 0, \ldots, J-1; \;\; \kappa = 0, \ldots, N-1; \;\; q = -\infty, \ldots, +\infty;$$

$$\mathbf{v}_{jq}^{\kappa+1} = \mathbf{u}_{jq}^{\kappa} - \Delta t \mathbf{M}\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}, \;\; j = 0, \ldots, J-1; \;\; \kappa = 0, \ldots, N-1. \tag{3.3}$$

Начальные условия (2.4) могут быть приближены следующим образом:

$$\mathbf{v}_{j}^{0} = \frac{1}{\Delta x}\frac{1}{\Delta y} \int\limits_{y_{q-\frac{1}{2}}}^{y_{q+\frac{1}{2}}} \int\limits_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{\Phi}(x, y)dxdy, \;\; j = 0, \ldots, J-1; \, q = -\infty, \ldots + \infty \tag{3.4}$$

Так, в свою очередь, могут быть приближены краевые условия:

$$\left(\begin{array}{c} (\mathbf{v}^{\mathrm{I}})_{-1q}^{\kappa+1} \\ (\mathbf{v}^{\mathrm{II}})_{Jq}^{\kappa+1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} (\mathbf{v}^{\mathrm{I}})_{J-1,q}^{\kappa+1} \\ (\mathbf{v}^{\mathrm{II}})_{0q}^{\kappa+1} \end{array}\right), \;\; \kappa = 0, \ldots, N-1; \, q = -\infty, \ldots + \infty. \tag{3.5}$$

Положим, что критерий Куранта—Фридрихса—Леви

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}\max|k_i| \leqslant 1, \qquad \frac{\Delta t}{\Delta y}\max|\lambda_i(\mathbf{C})| \leqslant 1$$

выполняется. Здесь $\lambda_i(\mathbf{C})$ — собственные значения матрицы $\mathbf{C}$.

Теперь изучим вопрос экспоненциальной устойчивости решения разностной задачи (3.1)–(3.5).

Определение 3.1. Разностная схема (3.1)–(3.3) с разностным краевым условием (3.5) является *экспоненциально устойчивой*, если существуют такие константы $\eta > 0$ и $c > 0$, что для любого начального условия $\mathbf{v}_{jq}^{0} \in L^2((x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}),\, (y_{q-\frac{1}{2}}, y_{q+\frac{1}{2}}), \mathbb{R}^n)$ решение разностной краевой задачи (3.1)–(3.5) удовлетворяет неравенству

$$\Delta x \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left(\mathbf{v}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{v}_{jq}^{\kappa}\right) \leqslant e^{-\eta t_\kappa}\Delta x \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left(\mathbf{v}_{jq}^{0}, \mathbf{v}_{jq}^{0}\right), \;\; \kappa = 1, \ldots, N.$$

Здесь мы лишь формально выписываем суммы бесконечного числа членов, так как только конечное их число равняется нулю (разностное решение не является нулевым только на конечном количестве точек).

Рассмотрим разностную начально-краевую задачу (3.1)–(3.5) со стационарным решением

$$\mathbf{v}_{jq}^{\kappa} = 0, \;\; \kappa = 0, \ldots, N-1; \;\; j = 0, \ldots, J-1; \; q = -\infty, \ldots, +\infty.$$

Чтобы доказать устойчивость разностной начально-краевой задачи (3.1)–(3.5), рассмотрим в качестве дискретной функции Ляпунова следующую функцию:

$$L(\mathbf{v}^{\kappa}) = L^{\kappa} = \Delta x \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left(\mathbf{v}_{jq}^{\kappa}, \mu_j \mathbf{v}_{jq}^{\kappa}\right), \quad \mu_j = \mu(x_j), \quad j = 1, \ldots, J-1. \tag{3.6}$$

Здесь

$$\mu_j = \left(\begin{array}{cc} e^{-\nu x_j}\mu^{+} & 0 \\ 0 & e^{\nu x_j}\mu^{-} \end{array}\right).$$

Теорема 3.1. *Пусть* $T > 0$, *а дискретная функция Ляпунова определяется неравенствами* (3.6). *Если выполнен критерий Куранта—Фридрихса—Леви,*

$$(\Delta t/\Delta x)\max|k_i| \leqslant 1,$$
$$(\Delta t/\Delta y)\max|\lambda_i(\mathbf{C})| \leqslant 1$$

и существуют вещественные числа $\nu > 0$ *и* $\mu_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, *такие, что*

$$0 < \alpha(1 - e^{-\nu\Delta x}) < 1,$$

где

$$\alpha = \min_i |k_i|,$$
$$\mathbf{M}^T\mu_j + \mu_j\mathbf{M} - \Delta t\mathbf{M}^T\mu_j\mathbf{M},\ j = 0, \ldots, J-1$$

— неотрицательно определенные матрицы, а

$$\begin{bmatrix} \mu^+ e^{-\nu x_J}\mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \mu^- e^{\nu x_{-1}}\mathbf{K}^- \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{r} \\ \mathbf{s} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mu^+ e^{-\nu x_0}\mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \mu^- e^{\nu x_{J-1}}\mathbf{K}^- \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix}$$

является положительно определенной, тогда численное решение $\mathbf{v}_{jq}^{\kappa}$ *разностной начально-краевой задачи* (3.1)–(3.5) *сходится к стационарному решению* $\mathbf{v}_{jq}^* = 0$ *по норме* $\mathbb{L}^2$.

Доказательство. Используя дискретную функцию Ляпунова, вычислим производную функции Ляпунова (2.7) следующим образом:

$$\frac{L(\mathbf{v}^{\kappa+1}) - L(\mathbf{v}^{\kappa})}{\Delta t} = \frac{L(\mathbf{v}^{\kappa+1}) - L(\mathbf{u}^{\kappa})}{\Delta t} + \frac{L(\mathbf{u}^{\kappa}) - L(\mathbf{w}^{\kappa})}{\Delta t} + \frac{L(\mathbf{w}^{\kappa}) - L(\mathbf{v}^{\kappa})}{\Delta t},$$

где

$$L(\mathbf{v}^{\kappa}) = \Delta x\Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}(\mathbf{v}_{jq}^{\kappa}, \mu_j\mathbf{v}_{jq}^{\kappa}), \quad L(\mathbf{w}^{\kappa}) = \Delta x\Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}(\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mu_j\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}),$$

$$L(\mathbf{u}^{\kappa}) = \Delta x\Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}(\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}, \mu_j\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}),\ \kappa = 0, \ldots, N.$$

Мы хотим доказать, что эта квадратичная форма отрицательно определена. Для этого достаточно показать, что все три квадратичные формы в правой части

$$\frac{L(\mathbf{v}^{\kappa+1}) - L(\mathbf{u}^{\kappa})}{\Delta t} = \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\Big[(\mathbf{v}_{jq}^{\kappa+1}, \mu_j\mathbf{v}_{jq}^{\kappa+1}) - (\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}, \mu_j\mathbf{u}_{jq}^{\kappa})\Big],$$

$$\frac{L(\mathbf{u}^{\kappa}) - L(\mathbf{w}^{\kappa})}{\Delta t} = \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\big[(\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}, \mu_j\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}) - (\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mu_j\mathbf{w}_{jq}^{\kappa})\big],$$

$$\frac{L(\mathbf{w}^{\kappa}) - L(\mathbf{v}^{\kappa})}{\Delta t} = \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\big[(\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mu_j\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}) - (\mathbf{v}_{jq}^{\kappa}, \mu_j\mathbf{v}_{jq}^{\kappa})\big]$$

отрицательно определены.

$$\frac{L(\mathbf{v}^{\kappa+1}) - L(\mathbf{u}^{\kappa})}{\Delta t} = \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(\left[\mathbf{u}_{jq}^{\kappa} - \Delta t\mathbf{M}\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}\right], \mu_j\left[\mathbf{u}_{jq}^{\kappa} - \Delta t\mathbf{M}\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}\right]\right) - (\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}, \mu_j\mathbf{u}_{jq}^{\kappa})\right] =$$

$$= \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[(\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}, \mu_j\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}) - (\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}, \mu_j\mathbf{u}_{jq}^{\kappa})\right] -$$

$$- \Delta x\Delta y\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(\mathbf{M}\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}, \mu_j\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}\right) + \left(\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}, \mu_j\mathbf{M}\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}\right) - \Delta t(\mathbf{M}\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}, \mu_j\mathbf{M}\mathbf{u}_{jq}^{\kappa})\right] =$$

$$= -\Delta x\Delta y\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(\mathbf{M}\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}, \mu_j\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}\right) + \left(\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}, \mu_j\mathbf{M}\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}\right) - \Delta t(\mathbf{M}\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}, \mu_j\mathbf{M}\mathbf{u}_{jq}^{\kappa})\right] =$$

$$= -\Delta x \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}, \left[\mathbf{M}^T \mu_j + \mu_j \mathbf{M} - \Delta t \mathbf{M}^T \mu_j \mathbf{M}\right] \mathbf{u}_{jq}^{\kappa}\right).$$

Обозначим $\mathbf{O} = \dfrac{\Delta t}{\Delta y}\mathbf{C}$. Тогда

$$\frac{L(\mathbf{u}^{\kappa}) - L(\mathbf{w}^{\kappa})}{\Delta t} = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left[\left(\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}, \mu_j \mathbf{u}_{jq}^{\kappa}\right) - \left(\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right)\right] =$$

$$= \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left[\left(\left\{\mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \mathbf{O}\left[\mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right]\right\}, \mu_j \left\{\mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \mathbf{O}\left[\mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right]\right\}\right) - \left(\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right)\right] =$$

$$= \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left\{\left(\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right) - \left(\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right) - 2\left(\mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\left[\mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right]\right)\right\} +$$

$$+ \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mu_j \mathbf{O}\left[\mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right], \mathbf{O}\left[\mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right]\right) =$$

$$= \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left\{\left(\mu_j \mathbf{O}\left[\mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right], \mathbf{O}\left[\mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right]\right) - 2\left(\mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\left[\mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right]\right)\right\} =$$

$$= \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left\{\left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right) - 2\left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right) + \left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left\{-2\left(\mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right) + 2\left(\mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right)\right\} =$$

$$= \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left\{\left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right) + 2\left(\mu_j \left[\mathbf{E} - \mathbf{O}\right] \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right) - 2\left(\mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right)\right\}.$$

В силу критерия Куранта—Фридрихса—Леви, матрица $(\mathbf{E} - \mathbf{O}) \geqslant 0$. Положим матрицу $(\mathbf{E} - \mathbf{O})\mu_j \mathbf{O}$ положительно определенной. Следовательно, получаем

$$2\Big(\mu_j \left[\mathbf{E} - \mathbf{O}\right] \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\Big) \leqslant \Big(\mu_j (\mathbf{E} - \mathbf{O}) \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\Big) + \Big(\mu_j (\mathbf{E} - \mathbf{O}) \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\Big) =$$
$$= \Big(\mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\Big) - \left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right) + \Big(\mu_j \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\Big) - \left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right).$$

Принимая во внимание это неравенство, имеем

$$\frac{L(\mathbf{u}^{\kappa}) - L(\mathbf{w}^{\kappa})}{\Delta t} =$$
$$= \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left\{ \begin{array}{l} \left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right) + 2\Big(\mu_j \left[\mathbf{E} - \mathbf{O}\right] \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\Big) + \\ + \left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right) - 2\Big(\mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\Big) \end{array} \right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left[\left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right) + \left(\mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right) - \left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right)\right] =$$
$$= \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left\{ \begin{array}{l} \left(\mu_j \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right) - \left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right) + \\ + \left(\mu_j \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right) - 2\Big(\mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\Big) \end{array} \right\} =$$
$$= \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left[\left(\mu_j \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right) - \left(\mu_j \mathbf{w}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{O}\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}\right)\right],$$

или

$$\frac{L(\mathbf{u}^\kappa)-L(\mathbf{w}^\kappa)}{\Delta t}\leqslant\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(\mu_j\mathbf{w}^\kappa_{jq-1},\mathbf{Ow}^\kappa_{jq-1}\right)-\left(\mu_j\mathbf{w}^\kappa_{jq},\mathbf{Ow}^\kappa_{jq}\right)\right]=0.$$

Введем обозначения

$$\mathbf{W}^\kappa_j=\begin{bmatrix}\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)^\kappa_{j-1}\\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)^\kappa_{j+1}\end{bmatrix},\quad |\mathbf{K}|=\begin{bmatrix}\mathbf{K}^+ & 0\\ 0 & \mathbf{K}^-\end{bmatrix},\quad \mathbf{D}=\frac{\Delta t}{\Delta x}\,|\mathbf{K}|\,.$$

Учитывая эти обозначения, имеем:

$$\frac{L(\mathbf{w}^\kappa)-L(\mathbf{v}^\kappa)}{\Delta t}=\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[(\mathbf{w}^\kappa_{jq},\mu_j\mathbf{w}^\kappa_{jq})-(\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq})\right]=$$

$$=\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(\left\{\mathbf{v}^\kappa_{jq}-\mathbf{D}\left[\mathbf{v}^\kappa_{jq}-\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right]\right\},\mu_j\left\{\mathbf{v}^\kappa_{jq}-\mathbf{D}\left[\mathbf{v}^\kappa_{jq}-\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right]\right\}\right)-(\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq})\right]=$$

$$=\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[(\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq})-(\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq})-2\left(\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\left[\mathbf{v}^\kappa_{jq}-\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right]\right)\right]+$$

$$+\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(\mu_j\mathbf{D}\left[\mathbf{v}^\kappa_{jq}-\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right],\mathbf{D}\left[\mathbf{v}^\kappa_{jq}-\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right]\right)\right]=$$

$$=\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(\mu_j\mathbf{D}\left[\mathbf{v}^\kappa_{jq}-\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right],\mathbf{D}\left[\mathbf{v}^\kappa_{jq}-\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right]\right)-2\left(\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{D}\left[\mathbf{v}^\kappa_{jq}-\mathbf{W}^\kappa_{jq}\right]\right)\right]=$$

$$=\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(\mu_j\mathbf{Dv}^\kappa_{jq},\mathbf{Dv}^\kappa_{jq}\right)-2\left(\mu_j\mathbf{Dv}^\kappa_{jq},\mathbf{DW}^\kappa_{jq}\right)+\left(\mu_j\mathbf{DW}^\kappa_{jq},\mathbf{DW}^\kappa_{jq}\right)\right]+$$

$$+\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[-2\left(\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{Dv}^\kappa_{jq}\right)+2\left(\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{DW}^\kappa_{jq}\right)\right]=$$

$$=\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(\mu_j\mathbf{Dv}^\kappa_{jq},\mathbf{Dv}^\kappa_{jq}\right)+2\left(\mu_j(\mathbf{E}-\mathbf{D})\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{DW}^\kappa_{jq}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\mu_j\mathbf{DW}^\kappa_{jq},\mathbf{DW}^\kappa_{jq}\right)-2\left(\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{Dv}^\kappa_{jq}\right)\right].$$

В силу критерия Куранта—Фридрихса—Леви, матрицы $(\mathbf{E}-\mathbf{D})\geqslant 0$ и $(\mathbf{E}-\mathbf{D})\mu_j\mathbf{D}$ являются положительно определенными диагональными матрицами. Поэтому

$$2\Big(\mu_j(\mathbf{E}-\mathbf{D})\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{DW}^\kappa_{jq}\Big)\leqslant\Big(\mu_j(\mathbf{E}-\mathbf{D})\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{Dv}^\kappa_{jq}\Big)+\Big(\mu_j(\mathbf{E}-\mathbf{D})\mathbf{W}^\kappa_{j},\mathbf{DW}^\kappa_{j}\Big)=$$
$$=\Big(\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{Dv}^\kappa_{j}\Big)-\left(\mu_j\mathbf{Dv}^\kappa_{jq},\mathbf{Dv}^\kappa_{jq}\right)+\Big(\mu_j\mathbf{W}^\kappa_{jq},\mathbf{DW}^\kappa_{jq}\Big)-\left(\mu_j\mathbf{DW}^\kappa_{jq},\mathbf{DW}^\kappa_{jq}\right).$$

Учитывая это неравенство, получаем

$$\frac{L(\mathbf{w}^\kappa)-L(\mathbf{v}^\kappa)}{\Delta t}=\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(\mu_j\mathbf{Dv}^\kappa_{jq},\mathbf{Dv}^\kappa_{jq}\right)+2\left(\mu_j(\mathbf{E}-\mathbf{D})\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{DW}^\kappa_{jq}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\mu_j\mathbf{DW}^\kappa_{jq},\mathbf{DW}^\kappa_{jq}\right)-2\left(\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{Dv}^\kappa_{jq}\right)\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(\mu_j\mathbf{Dv}^\kappa_{jq},\mathbf{Dv}^\kappa_{jq}\right)+\left(\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{Dv}^\kappa_{jq}\right)-\left(\mu_j\mathbf{Dv}^\kappa_{jq},\mathbf{Dv}^\kappa_{jq}\right)\right]+$$

$$+\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(\mu_j\mathbf{W}^\kappa_{jq},\mathbf{DW}^\kappa_{jq}\right)-\left(\mu_j\mathbf{DW}^\kappa_{jq},\mathbf{DW}^\kappa_{jq}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\mu_j\mathbf{DW}^\kappa_{jq},\mathbf{DW}^\kappa_{jq}\right)-2\left(\mu_j\mathbf{v}^\kappa_{jq},\mathbf{Dv}^\kappa_{jq}\right)\right]=$$

$$= \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left[\left(\mu_j \mathbf{W}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{D}\mathbf{W}_{jq}^{\kappa} \right) - \left(\mu_j \mathbf{v}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{D}\mathbf{v}_{jq}^{\kappa} \right) \right],$$

или

$$\frac{L(\mathbf{w}^{\kappa}) - L(\mathbf{v}^{\kappa})}{\Delta t} \leqslant \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left[\left(\mu_j \mathbf{W}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{D}\mathbf{W}_{jq}^{\kappa} \right) - \left(\mu_j \mathbf{v}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{D}\mathbf{v}_{jq}^{\kappa} \right) \right].$$

Отдельно преобразуем первую квадратичную форму в правой части этого неравенства:

$$\frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mu_j \mathbf{W}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{D}\mathbf{W}_{jq}^{\kappa} \right) = \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{W}_{jq}^{\kappa}, \begin{bmatrix} \mu^+ e^{-\nu x_j} \mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \mu^- e^{\nu x_j} \mathbf{K}^- \end{bmatrix} \mathbf{W}_{jq}^{\kappa} \right) =$$

$$= e^{-\nu \Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{W}_{jq}^{\kappa}, \begin{bmatrix} \mu^+ e^{-\nu x_{j-1}} \mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \mu^- e^{\nu x_{j+1}} \mathbf{K}^- \end{bmatrix} \mathbf{W}_{jq}^{\kappa} \right) =$$

$$= e^{-\nu \Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)_{j-1,q}^{\kappa}, \mu^+ e^{-\nu x_{j-1}} \mathbf{K}^+ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)_{j-1,q}^{\kappa} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)_{j+1,q}^{\kappa}, \mu^- e^{\nu x_{j+1}} \mathbf{K}^- \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)_{j+1,q}^{\kappa} \right) \right) =$$

$$= e^{-\nu \Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)_{jq}^{\kappa}, \mu^+ e^{-\nu x_j} \mathbf{K}^+ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)_{jq}^{\kappa} \right) +$$

$$+ e^{-\nu \Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} e^{-\nu \Delta x} \left(\left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)_{-1,q}^{\kappa}, \mu^+ e^{-\nu x_{-1}} \mathbf{K}^+ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)_{-1,q}^{\kappa} \right) - \right.$$

$$\left. - e^{-\nu \Delta x} \left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)_{J-1,q}^{\kappa}, \mu^+ e^{-\nu x_{J-1}} \mathbf{K}^+ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)_{J-1,q}^{\kappa} \right) \right) +$$

$$+ e^{-\nu \Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)_{jq}^{\kappa}, \mu^- e^{\nu x_j} \mathbf{K}^- \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)_{jq}^{\kappa} \right) +$$

$$+ e^{-\nu \Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} -e^{-\nu \Delta x} \left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)_{0q}^{\kappa}, \mu^- e^{\nu x_0} \mathbf{K}^- \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)_{0q}^{\kappa} \right) + e^{-\nu \Delta x} \left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)_{Jq}^{\kappa}, \mu^- e^{\nu x_J} \mathbf{K}^- \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)_{Jq}^{\kappa} \right) =$$

$$= e^{-\nu \Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{v}_{jq}^{\kappa}, \mu_j \left| \mathbf{K} \right| \mathbf{v}_{jq}^{\kappa} \right) +$$

$$+ e^{-\nu \Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)_{-1,q}^{\kappa}, \mu^+ e^{-\nu x_0} \mathbf{K}^+ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)_{-1,q}^{\kappa} \right) - \left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)_{J-1,q}^{\kappa}, \mu^+ e^{-\nu x_J} \mathbf{K}^+ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)_{J-1,q}^{\kappa} \right) -$$

$$- e^{-\nu \Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)_{0q}^{\kappa}, \mu^- e^{\nu x_{-1}} \mathbf{K}^- \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)_{0q}^{\kappa} \right) + \left(\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)_{Jq}^{\kappa}, \mu^- e^{\nu x_{J-1}} \mathbf{K}^- \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)_{Jq}^{\kappa} \right) =$$

$$= e^{-\nu \Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{v}_{jq}^{\kappa}, \mu_j \left| \mathbf{K} \right| \mathbf{v}_{jq}^{\kappa} \right) +$$

$$+ e^{-\nu \Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left(\begin{bmatrix} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)_{-1,q}^{\kappa} \\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)_{Jq}^{\kappa} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu^+ e^{-\nu x_0} \mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \mu^- e^{\nu x_{J-1}} \mathbf{K}^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)_{-1,q}^{\kappa} \\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)_{Jq}^{\kappa} \end{bmatrix} \right) -$$

$$- e^{-\nu \Delta x} \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left(\begin{bmatrix} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)_{J-1,q}^{\kappa} \\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)_{0q}^{\kappa} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu^+ e^{-\nu x_J} \mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \mu^- e^{\nu x_{-1}} \mathbf{K}^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \right)_{J-1,q}^{\kappa} \\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}} \right)_{0q}^{\kappa} \end{bmatrix} \right).$$

С учетом краевых условий

$$\left(\begin{array}{c}(\mathbf{v}^{\mathrm{I}})^{\kappa+1}_{-1,q}\\ (\mathbf{v}^{\mathrm{II}})^{\kappa+1}_{Jq}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}0&\mathbf{s}\\ \mathbf{r}&0\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}(\mathbf{v}^{\mathrm{I}})^{\kappa+1}_{J-1,q}\\ (\mathbf{v}^{\mathrm{II}})^{\kappa+1}_{0q}\end{array}\right)$$

имеем

$$\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left(\mu_j\mathbf{W}^{\kappa}_{jq},\mathbf{D}\mathbf{W}^{\kappa}_{jq}\right)=e^{-\nu\Delta x}\Delta y\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left(\mathbf{v}^{\kappa}_{jq},\mu_j\left|\mathbf{K}\right|\mathbf{v}^{\kappa}_{jq}\right)+$$

$$+\Delta y\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\left(\left(\begin{array}{cc}0&\mathbf{s}\\ \mathbf{r}&0\end{array}\right)\begin{pmatrix}(\mathbf{v}^{\mathrm{I}})^{\kappa+1}_{J-1,q}\\ (\mathbf{v}^{\mathrm{II}})^{\kappa+1}_{0q}\end{pmatrix},\left[\begin{array}{cc}\mu^{+}e^{-\nu x_0}\mathbf{K}^{+}&0\\ 0&\mu^{-}e^{\nu x_{J-1}}\mathbf{K}^{-}\end{array}\right]\left(\begin{array}{cc}0&\mathbf{s}\\ \mathbf{r}&0\end{array}\right)\begin{pmatrix}(\mathbf{v}^{\mathrm{I}})^{\kappa+1}_{J-1,q}\\ (\mathbf{v}^{\mathrm{II}})^{\kappa+1}_{0q}\end{pmatrix}\right)-$$

$$-\Delta y\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\left(\left[\begin{array}{c}(\mathbf{v}^{\mathrm{I}})^{\kappa}_{J-1,q}\\ (\mathbf{v}^{\mathrm{II}})^{\kappa}_{0q}\end{array}\right],\left[\begin{array}{cc}\mu^{+}e^{-\nu x_J}\mathbf{K}^{+}&0\\ 0&\mu^{-}e^{\nu x_{-1}}\mathbf{K}^{-}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}(\mathbf{v}^{\mathrm{I}})^{\kappa}_{J-1,q}\\ (\mathbf{v}^{\mathrm{II}})^{\kappa}_{0q}\end{array}\right]\right).$$

Предположим, что условие диссипативности

$$\left[\begin{array}{cc}\mu^{+}e^{-\nu x_J}\mathbf{K}^{+}&0\\ 0&\mu^{-}e^{\nu x_{-1}}\mathbf{K}^{-}\end{array}\right]-\left(\begin{array}{cc}0&\mathbf{r}\\ \mathbf{s}&0\end{array}\right)\left[\begin{array}{cc}\mu^{+}e^{-\nu x_0}\mathbf{K}^{+}&0\\ 0&\mu^{-}e^{\nu x_{J-1}}\mathbf{K}^{-}\end{array}\right]\left(\begin{array}{cc}0&\mathbf{s}\\ \mathbf{r}&0\end{array}\right)>0$$

выполняется. Тогда имеем

$$\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left(\mu_j\mathbf{W}^{\kappa}_{jq},\mathbf{D}\mathbf{W}^{\kappa}_{jq}\right)\leqslant e^{-\nu\Delta x}\Delta y\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left(\mathbf{v}^{\kappa}_{jq},\mu_j\left|\mathbf{K}\right|\mathbf{v}^{\kappa}_{jq}\right)$$

и, следовательно,

$$\frac{L(\mathbf{w}^{\kappa})-L(\mathbf{v}^{\kappa})}{\Delta t}\leqslant e^{-\nu\Delta x}\Delta y\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left(\mathbf{v}^{\kappa}_{jq},\mu_j\left|\mathbf{K}\right|\mathbf{v}^{\kappa}_{jq}\right)-\Delta y\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left(\mathbf{v}^{\kappa}_{jq},\mu_j\left|\mathbf{K}\right|\mathbf{v}^{\kappa}_{jq}\right)=$$

$$=(e^{-\nu\Delta x}-1)\Delta y\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left(\mathbf{v}^{\kappa}_{jq},\mu_j\left|\mathbf{K}\right|\mathbf{v}^{\kappa}_{jq}\right)\leqslant-\alpha(1-e^{-\nu\Delta x})\Delta y\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left(\mathbf{v}^{\kappa}_{jq},\mu_j\mathbf{v}^{\kappa}_{jq}\right).$$

Здесь

$$\alpha=\min_i\left|k_i\right|.$$

Так как

$$\mathbf{M}^T\mu_j+\mu_j\mathbf{M}-\Delta t\mathbf{M}^T\mu_j\mathbf{M},\quad j=0,\ldots,J-1$$

являются неотрицательно определенными матрицами, и существуют константы

$$\nu,\quad\alpha=\min_i\left|k_i\right|,$$

такие, что

$$0<\alpha(1-e^{-\nu\Delta x})<1,$$

получаем

$$\frac{L(\mathbf{v}^{\kappa+1})-L(\mathbf{u}^{\kappa})}{\Delta t}\leqslant 0,\qquad\frac{L(\mathbf{u}^{\kappa})-L(\mathbf{w}^{\kappa})}{\Delta t}\leqslant 0,\qquad\frac{L(\mathbf{w}^{\kappa})-L(\mathbf{v}^{\kappa})}{\Delta t}<-\eta L(\mathbf{v}^{\kappa}).$$

Здесь

$$\eta=\alpha(1-e^{-\nu\Delta x}).$$

Таким образом,

$$\frac{L(\mathbf{v}^{\kappa+1})-L(\mathbf{v}^{\kappa})}{\Delta t}<-\eta L(\mathbf{v}^{\kappa})$$

либо

$$\frac{L^{\kappa+1}-L^{\kappa}}{\Delta t}<-\eta L^{\kappa}.$$

Применяя данное неравенство рекуррентным образом, получаем

$$L^{\kappa+1}<(1-\Delta t\eta)^{\kappa+1}L^0\leqslant e^{-\eta\Delta t(\kappa+1)}L^0=e^{-\eta t_{\kappa+1}}L^0,\ \kappa=0,\ldots,N-1.$$

Обозначим

$$C_1 = \min_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant j\leqslant J-1}} \left\{\varpi_{ij} : |\mu_j - \varpi_{ij}\mathbf{E}| = 0\right\}, \quad C_2 = \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant j\leqslant J-1}} \left\{\varpi_{ij} : |\mu_j - \varpi_{ij}\mathbf{E}| = 0\right\}.$$

Тогда

$$C_1\mathbf{E} \leqslant \mu_j \leqslant C_2\mathbf{E}, \quad j = 0, \ldots, J-1.$$

Отсюда следует, что

$$C_1 \Delta x \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{v}_j^\kappa, \mathbf{v}_j^\kappa\right) \leqslant L^\kappa \leqslant C_2 e^{-\eta t_\kappa} \Delta x \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{v}_j^0, \mathbf{v}_j^0\right), \quad \kappa = 0, \ldots, N,$$

$$\Delta x \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{v}_j^\kappa, \mathbf{v}_j^\kappa\right) \leqslant C e^{-\eta t_\kappa} \Delta x \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{v}_j^0, \mathbf{v}_j^0\right), \quad \kappa = 0, \ldots, N; \ C = C_2/C_1.$$

Следовательно, численное решение $\mathbf{v}_j^n$ исходной задачи является экспоненциально устойчивым по норме $\mathbb{L}_2$.

Теорема 3.1 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блохин А. М., Алаев Р. Д.* Интегралы энергии и их приложения к исследованию устойчивости разностных схем. — Новосибирск: Изд-во Новосибирского гос. ун-та, 1993.
2. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979.
3. *Aloev R. D., Blokhin A. M., Hudayberganov M. U.* One class of stable difference schemes for hyperbolic system// Am. J. Numer. Anal. — 2014. — *2*, № 3. — С. 85–89.
4. *Aloev R. D., Davlatov Sh. O., Eshkuvatov Z. K., Nik Long N. M. A.* Uniqueness solution of the finite elements scheme for symmetric hyperbolic systems with variable coefficients// Malays. J. Math. Sci. — 2016. — *10* (S). — С. 49–60.
5. *Aloev R. D., Eshkuvatov Z. K., Davlatov Sh. O., Nik Long N. M. A.* Sufficient condition of stability of finite element method for symmetric t-hyperbolic systems with constant coefficients// Comput. Math. Appl. — 2014. — *68*, № 10. — С. 1194–1204.
6. *Bastin G., Coron J.-M.* Stability and boundary stabilization of 1-D hyperbolic systems. — Basel: Birkhäuser, 2016.

Р. Д. Алаев
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 700174, г. Ташкент, ВУЗ городок
E-mail: `aloevr@mail.ru`

М. У. Худайберганов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 700174, г. Ташкент, ВУЗ городок
E-mail: `mirzoali@mail.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-591-602 UDC 519.633

A Discrete Analog of the Lyapunov Function for Hyperbolic Systems

© 2018 **R. D. Aloev, M. U. Khudayberganov**

Abstract. We study the difference splitting scheme for the numerical calculation of stable solutions of a two-dimensional linear hyperbolic system with dissipative boundary conditions in the case of constant coefficients with lower terms. A discrete analog of the Lyapunov function is constructed and an a priori estimate is obtained for it. The obtained a priori estimate allows us to assert the exponential stability of the numerical solution.

REFERENCES

1. A. M. Blokhin and R. D. Aloev, *Integraly energii i ikh prilozheniya k issledovaniyu ustoychivosti raznostnykh skhem* [Energy integrals and their applications to the study of the stability of the difference schemes], Novosibirsk State Univ., Novosibirsk, 1993 (in Russian).
2. S. K. Godunov, *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1979 (in Russian).
3. R. D. Aloev, A. M. Blokhin, and M. U. Hudayberganov, "One class of stable difference schemes for hyperbolic system," *Am. J. Numer. Anal.*, 2014, **2**, No. 3, 85–89.
4. R. D. Aloev, Sh. O. Davlatov, Z. K. Eshkuvatov, and N. M. A. Nik Long, "Uniqueness solution of the finite elements scheme for symmetric hyperbolic systems with variable coefficients," *Malays. J. Math. Sci.*, 2016, **10** (S), 49–60.
5. R. D. Aloev, Z. K. Eshkuvatov, Sh. O. Davlatov, and N. M. A. Nik Long, "Sufficient condition of stability of finite element method for symmetric t-hyperbolic systems with constant coefficients," *Comput. Math. Appl.*, 2014, **68**, No. 10, 1194–1204.
6. G. Bastin and J.-M. Coron, *Stability and boundary stabilization of 1-D hyperbolic systems*, Birkhäuser, Basel, 2016.

R. D. Aloev
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: aloevr@mail.ru

M. U. Khudayberganov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: mirzoali@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 4 (2018). С. 603–615

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-603-615 УДК 539.12+530.1

ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПАРАМЕТРЫ МИНИМАЛЬНОЙ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ

© 2018 г. **А. Э. АЛЛАХВЕРДИЕВА, М. В. ДОЛГОПОЛОВ, Э. Н. РЫКОВА**

Аннотация. Бозон Хиггса с массой $m_h = 126$ ГэВ был открыт на Большом адронном коллайдере в 2012 году. Это значение соответствует как стандартной модели физики элементарных частиц, так и массе легчайшего бозона Хиггса в минимальной суперсимметричной стандартной модели. В данной статье рассматривается модель МССМ с нарушением CP-инвариантности, которая содержит большое число варьируемых параметров. Используя экспериментальное значение массы бозона Хиггса, получены ограничения на параметры модели, определены феноменологические сценарии, и проведен анализ возможных областей пространства параметров.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Основная задача Большого адронного коллайдера после подтверждения бозона Хиггса — это изучение его свойств. Открытие бозона Хиггса 4 июля 2012 года завершило полувековой поиск последней частицы СМ и привело к новому этапу исследований в физике элементарных частиц, что позволило окончательно исключить ряд теорий и наложить ограничения на модели, предсказывающих данную частицу [3]. В экспериментах двух коллабораций ATLAS и CMS в каналах распада на два фотона и два Z бозона получено хорошее соответствие значения массы бозона Хиггса в районе $125 \div 126$ ГэВ. В настоящее время масса бозона Хиггса принимается равной $m_h = 125{,}5 \pm 1$ ГэВ.

Наиболее популярными тестируемыми моделями для изучения нарушения электрослабой симметрии являются стандартная модель физики элементарных частиц (СМ) и минимальная суперсимметричная стандартная модель (МССМ). В отличие от СМ, в МССМ вводятся два скалярных дублета хиггсовских полей, что приводит к пяти физическим полям бозонов Хиггса. В низшем приближении в отсутствие CP-нарушения вводятся два CP-четных бозона Хиггса h и H, один CP-нечетный A и два заряженных $H^{\pm}$. Хиггсовский сектор МССМ определяется следующими параметрами: массой Z бозона m_Z, массой CP-нечетного бозона Хиггса m_A или массой заряженного бозона Хиггса $m_{H^{\pm}}$ и отношением вакуумных ожиданий $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{v_2}{v_1}$. Массы CP-четных бозонов Хиггса определяются в терминах параметров МССМ, включая поправки высших порядков. Сектор Хиггса МССМ отличается от СМ, что приводит к изменению констант связи, ширин и бренчингов распадов бозонов Хиггса. Например, открытый бозон Хиггса интерпретируется в МССМ как легкий CP-четный бозон, однако возможно и другое представление [12]: его можно сопоставить с тяжелым CP-четным бозоном с массой около 125 ГэВ, при этом каплинги взаимодействия CP-четного бозона Хиггса с калибровочными бозонами сильно подавлены, а масса CP-четного бозона Хиггса меньше нижней границы, установленной на коллайдере LEP.

Так как МССМ содержит очень много свободных параметров, хотя всего один отличающий ее сектор Хиггса от СМ, то при их анализе выделяют так называемые сценарии, соответствующие тем или иным экспериментальным данным. В статье рассмотрены ограничения на параметры модели МССМ с CP-нарушением, при которых наблюдаемый на эксперименте бозон Хиггса соответствует легкому CP-четному бозону. В разделе 2 рассмотрена модель с двумя дублетами скалярных полей и представлены параметры эффективного потенциала, а также получены массы бозонов Хиггса в МССМ с нарушением CP-инвариантности. В разделе 3 представлены ограничения на параметры модели и проведен анализ полученных результатов для бозонов Хиггса на LHC.

1.1. Проблемы стандартной модели. Хорошо известно, что эффекты электромагнитного, сильного и слабого взаимодействия частиц, наблюдающиеся как в экспериментах на ускорителях-коллайдерах, так и в других экспериментах (например, в экспериментальных исследованиях осцилляций нейтрино, редких распадов и космических лучей), в целом впечатляюще описываются стандартной моделью кварков и лептонов (СМ), в которой роль локальной группы симметрии выполняет группа $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y \times \mathrm{SU}(3)_C$. Однако есть не решаемые СМ проблемы, которые не позволяют рассматривать ее как завершенную теорию. Прежде всего к ним относятся:

(1) проблема калибровочных иерархий — стабильности квантовых поправок,
(2) проблема унификации связей для трех типов взаимодействий,
(3) проблема смешиваний и CP-нарушения.

Кроме того, СМ не включает гравитацию, в связи с чем за пределами модели находится заслуживающая самого пристального внимания проблема космологического члена[1] [16, 19] и связанные с ней вопросы, например, проблема ускоренного расширения Вселенной на современном этапе ее эволюции. Наиболее простым расширением СМ является минимальная суперсимметричная стандартная модель (МССМ), в рамках которой удается решить проблемы (1) и (2) и представить определенные аргументы, проливающие свет на проблему (3). В связи с экспериментальными данными последних лет об осцилляциях нейтрино (в экспериментах с выведенными пучками) было надежно установлено существование масс нейтрино и смешиваний в лептонном секторе [10, 15]. По этой причине проблема смешиваний (3) существенно усложнилась, поскольку мало ответить на традиционный вопрос, почему природе нужен механизм смешивания ароматов фундаментальных фермионов. Непонятно, почему различаются механизмы смешивания кварков и лептонов, а также каково происхождение механизма смешивания в слабых взаимодействиях, очевидно отсутствующее в других типах взаимодействий.

Нарушение симметрии взаимодействий частиц относительно преобразования P пространственного отражения и одновременного преобразования C изменения знака заряда (нарушение CP-инвариантности) играет фундаментальную роль в космологической эволюции (см. ниже). Единственным источником нарушения CP-инвариантности в стандартной модели является матрица смешивания Кабиббо—Кобаяши—Маскава (матрица СКМ). Она естественным образом появляется в лагранжевых членах с участием заряженного тока вследствие определения массовых состояний кварков. Поворот «верхних» или же «нижних» кварков в калибровочно-инвариантных лагранжевых членах взаимодействия изодублетов и синглетов кварков со скалярным изодублетом (членом взаимодействия Юкавы), ответственных за генерацию масс кварков, необходим после спонтанного нарушения симметрии основного состояния для диагонализации матрицы, возникающей в членах второй степени по полям кварков (массовой матрицы). Другими словами, компоненты изодублетов, отвечающие преобразованиям группы локальной симметрии теории, не совпадают с полями, отвечающими определенным массовым состояниям. Для приведения $SU(2) \otimes U(1)$ состояний к массовым состояниям необходимо дополнительное линейное преобразование[2].

[1] Наблюдаемая плотность энергии во Вселенной порядка 10^{-5} ГэВ/см^3=10^{-46} ГэВ^4 (в системе единиц c=$\hbar$=1), что примерно соответствует нахождению одного протона в 1 куб. м. пространства (вместе с темной материей и темной энергией), в то время как плотность энергии основного состояния для электрослабых взаимодействий (соответствующей масштабу масс калибровочных бозонов W,Z) порядка 10^8 ГэВ^4. Хотя это различие в 54 порядка не приводит к наблюдаемым противоречиям при расчетах в СМ, поскольку потенциальная энергия определена с точностью до константы, не ясна природа возникновения начинающегося с 53-го знака после запятой фактора, на который нужно умножить плотность энергии стандартной модели, чтобы перейти к реально наблюдаемой плотности энергии во Вселенной.

[2] Эта ситуация типична для любой модели и возникает не только в членах Юкавы, но также в кинетических членах скалярных полей, где для перехода к массовому базису нейтральных калибровочных полей γ и Z необходимо повернуть

Наиболее важные вопросы, на которые должны отвечать модели суперсимметрии в связи с астрофизическими наблюдениями и космологией, можно сформулировать следующим образом:

(1) какова природа механизмов образования барионной асимметрии Вселенной?
(2) какова природа темной материи?

Из результатов измерения реликтового фона WMAP [14, 17] и сканирования небесной сферы SDSS [4, 18] следует, что плотность[1] материи во Вселенной $\Omega_M h^2 = 0{,}14$, а плотность барионов $\Omega_B h^2 = 0{,}02$, т. е. плотность холодной темной материи равна 0,12 на уровне достоверности примерно 1σ. Эти данные достаточно точны и предъявляют специфические требования к возможным сценариям МССМ, где основными возможными кандидатами на роль темной материи являются нейтралино, гравитино и суперпартнер нейтрино.

Экспериментально наблюдаемое расширение Вселенной приводит к представлению о ее образовании в результате Большого взрыва. После раздувания (инфляционная стадия) и первичного разогрева должна происходить генерация барионной асимметрии первоначально симметричной по составу частиц и античастиц Вселенной, поскольку в наблюдаемой нами Вселенной практически нет антипротонов и антинейтронов. Принято считать, что барионная асимметрия возникает в результате электрослабого фазового перехода. Отметим, что фазовый переход в ранней Вселенной может происходить как в два этапа (фазовый переход объединения взаимодействий при температуре 10^{16} ГэВ, что, конечно, является сильным предположением, и далее электрослабый фазовый переход при температуре 10^2 ГэВ), так и одноэтапно, если максимальная температура после большого взрыва не достигала очень большого значения порядка 10^{16} ГэВ. Генерация барионной асимметрии не может произойти в рамках СМ (см. далее). После фазового перехода в ранней Вселенной происходит фазовый переход кварк-глюонной плазмы в адроны, отщепление (*freeze-out*, «закалка») нейтрино и первичный нуклеосинтез[2].

2. Минимальная суперсимметричная стандартная модель с явным нарушением пространственной и зарядовой симметрии (CP-инвариантности)

В отличие от СМ, сектор Хиггса МССМ и сектор Юкавы МССМ включают два изодублета скалярных полей. Восемь степеней свободы этих изодублетов соответствуют, после спонтанного нарушения симметрии и перехода трех степеней свободы в калибровочный сектор, пяти бозонам Хиггса. В отличие от тривиального хиггсовского потенциала СМ (один бозон Хиггса, смешивания скаляров отсутствуют, потенциал CP-инвариантен) в МССМ картина гораздо сложнее и богаче по возможным следствиям. Потенциал Хиггса МССМ в общем случае построен из трех сверток изодублетов размерности 2 и семи сверток размерности 4. Таким образом, по сравнению с двумя параметрами μ и λ потенциала СМ мы имеем в случае общей двухдублетной модели десятипараметрическое (в случае действительных независимых параметров) выражение для плотности свободной энергии. Факторы при членах размерности 2 обозначаются μ_1, μ_2, μ_{12}; факторы при членах размерности 4 обозначаются $\lambda_1, \ldots \lambda_7$. В двухдублетном потенциале возникают смешивания скалярных полей, его CP-инвариантность явно нарушена (вследствие того, что параметры μ_{12}, λ_5, λ_6, λ_7 комплексные), основное состояние характеризуется двумя вакуумными средними, одно из которых в общем случае комплексное, что приводит к спонтанному нарушению CP-инвариантности. Двухдублетный сектор Хиггса МССМ с явным нарушением и спонтанным нарушением CP-инвариантности, массовые состояния бозонов Хиггса и смешивания изучались и были рассчитаны в работах [5–8, 11], поскольку можно было рассчитывать на прямую реконструкцию матрицы СКМ в двухдублетном секторе Юкавы за счет спонтанного нарушения симметрии, смешиваний и явного нарушения CP-инвариантности в двухдублетном эффективном хиггсовском потенциале. Получены аналитические выражения для массовых состояний и углов смешивания, соответствующие диагонализации эффективного однопетлевого хиггсовского потенциала МССМ в локальном минимуме.

калибровочное поле группы $U(1)$ и третью компоненту поля в присоединенном представлении группы $SU(2)$ на угол Вайнберга.

[1]Здесь h обозначает постоянную Хаббла в единицах 100 км/(Мпк·сек)

[2]«Закалкой» (*freeze-out*) частиц называется прекращение их взаимной аннигиляции в горячей космической плазме при температуре порядка массы частиц или несколько меньшей.

Для анализа, отражающего основные черты феноменологии моделей суперсимметрии, необходимо использовать параметрически ограниченные разновидности МССМ [2]. В работах [5–8, 11] использовалась параметрически ограниченная разновидность МССМ, напоминающая mSUGRA (*minimal supergravity*, или *gravity mediated supersymmetry breaking*) [9, 13]. Отметим, что обычно используемые сценарии МССМ с точным сохранением СР-симметрии эффективного потенциала не выглядят естественно при передаче спонтанного нарушения в сектор СМ как гравитационным, так и калибровочным взаимодействием. «Точная настройка» нулевых фаз не связана с какой-либо известной симметрией.

Чрезвычайное многообразие параметрических сценариев МССМ при нулевой температуре $T = 0$ и отсутствие каких-либо жестких возможностей дискриминации этих сценариев приводит к мысли о включении в анализ высокотемпературной эволюции Вселенной от постинфляционного разогрева при температуре в широком интервале 10^3–10^{16} ГэВ до охлаждения до нуля с промежуточным электрослабым фазовым переходом; известные константы СМ определяют для температурной эволюции эффективного потенциала граничными условиями при $T = 0$. Картина такого рода представляется более объемной, лучше определенной и естественно возникает в рамках сценария космологической эволюции, неотъемлемой частью которого является термодинамическая эволюция системы образовавшихся после первичного разогрева частиц.

2.1. Параметры эффективного потенциала МССМ.

Рассмотрим общую двухдублетную модель с нарушением СР-инвариантности и введем эффективный потенциал с действительными параметрами $\lambda_{1,\ldots,4}$ и комплексными параметрами $\lambda_{5,6,7}$:

$$U(\Phi_1,\Phi_2) = -\mu_1^2(\Phi_1^\dagger\Phi_1) - \mu_2^2(\Phi_2^\dagger\Phi_2) - \mu_{12}^2(\Phi_1^\dagger\Phi_2) - \overset{*}{\mu}{}_{12}^2\,(\Phi_2^\dagger\Phi_1) +$$

$$+\frac{\lambda_1}{2}(\Phi_1^\dagger\Phi_1)^2 + \frac{\lambda_2}{2}(\Phi_2^\dagger\Phi_2)^2 + \lambda_3(\Phi_1^\dagger\Phi_1)(\Phi_2^\dagger\Phi_2) + \lambda_4(\Phi_1^\dagger\Phi_2)(\Phi_2^\dagger\Phi_1) +$$

$$+\frac{\lambda_5}{2}(\Phi_1^\dagger\Phi_2)(\Phi_1^\dagger\Phi_2) + \frac{\overset{*}{\lambda}_5}{2}(\Phi_2^\dagger\Phi_1)(\Phi_2^\dagger\Phi_1) +$$

$$+\lambda_6(\Phi_1^\dagger\Phi_1)(\Phi_1^\dagger\Phi_2) + \overset{*}{\lambda}_6\,(\Phi_1^\dagger\Phi_1)(\Phi_2^\dagger\Phi_1) + \lambda_7(\Phi_2^\dagger\Phi_2)(\Phi_1^\dagger\Phi_2) + \overset{*}{\lambda}_7\,(\Phi_2^\dagger\Phi_2)(\Phi_2^\dagger\Phi_1). \tag{2.1}$$

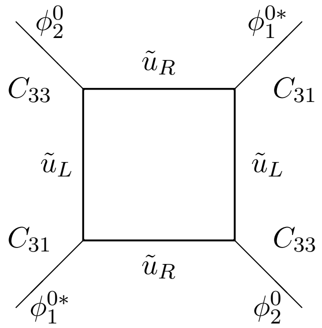
В древесном приближении на масштабе энергий M_{SUSY} все параметры $\lambda_{1,\ldots,7}$ действительные и выражаются через константы связи g_1 и g_2 электрослабой группы калибровочной симметрии $SU(2)\otimes U(1)$:

$$\begin{gathered}
\lambda_1^{M_{\mathrm{SUSY}}} = \lambda_2^{M_{\mathrm{SUSY}}} = \frac{1}{4}\left(g_2^2 + g_1^2\right) = \frac{m_Z^2}{2v^2},\\
\lambda_3^{M_{\mathrm{SUSY}}} = \frac{1}{4}\left(g_2^2 - g_1^2\right) = \frac{8m_W^2 - 4m_Z^2}{4v^2}, \quad \lambda_4^{M_{\mathrm{SUSY}}} = -\frac{1}{2}g_2^2 = -\frac{2m_W^2}{v^2},\\
\lambda_5^{M_{\mathrm{SUSY}}} = \lambda_6^{M_{\mathrm{SUSY}}} = \lambda_7^{M_{\mathrm{SUSY}}} = 0.
\end{gathered} \tag{2.2}$$

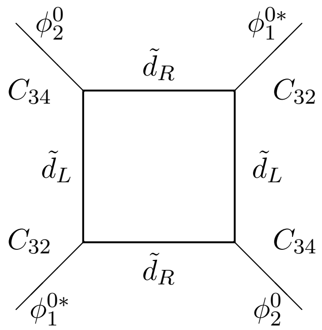
Нарушения СР-инвариантности потенциала на масштабе M_{SUSY} нет. Радиационные поправки к параметрам эффективного потенциала приводят к проявлению нарушения СР-инвариантности и могут быть получены явным расчетом однопетлевых диаграмм с двумя и четырьмя внешними линиями, обусловленных взаимодействием бозонов Хиггса с третьем поколением скалярных кварков. Для получения однопетлевых поправок к параметрам эффективного потенциала необходимо рассмотреть суперсимметричный скалярный потенциал взаимодействия бозонов Хиггса с третьим поколением суперпартнеров кварков, вершины взаимодействия которых для удобства представлены в табл. 1. В качестве примера ниже приведены однопетлевые диаграммы Фейнмана для расчета поправок к параметру λ_5 эффективного потенциала.

$\varphi_1^0 \tilde{u}_L \tilde{u}_R$	$-h_u \mu$	C_{31}
$\varphi_1^{0*} \tilde{d}_L \tilde{d}_R$	$h_d A_d$	C_{32}
$\varphi_2^{0*} \tilde{u}_L \tilde{u}_R$	$h_u A_u$	C_{33}
$\varphi_2^{0*} \tilde{d}_L \tilde{d}_R$	$-h_d \mu$	C_{34}
$\varphi_1^{0*} \varphi_1^0 \tilde{u}_L^* \tilde{u}_L$	$\frac{{g_2}^2}{4} - \frac{{g_1}^2}{12}$	C_{41}
$\varphi_1^{0*} \varphi_1^0 \tilde{d}_L^* \tilde{d}_L$	$-\frac{{g_1}^2}{12} - \frac{{g_2}^2}{4} + {h_d}^2$	C_{42}
$\varphi_1^{0*} \varphi_1^0 \tilde{u}_R^* \tilde{u}_R$	$\frac{{g_1}^2}{3}$	C_{43}
$\varphi_1^{0*} \varphi_1^0 \tilde{d}_R^* \tilde{d}_R$	${h_d}^2 - \frac{{g_1}^2}{6}$	C_{44}
$\varphi_2^{0*} \varphi_2^0 \tilde{u}_L^* \tilde{u}_L$	$\frac{{g_1}^2}{12} - \frac{{g_2}^2}{4} + {h_u}^2$	C_{45}
$\varphi_2^{0*} \varphi_2^0 \tilde{d}_L^* \tilde{d}_L$	$\frac{{g_1}^2}{12} + \frac{{g_2}^2}{4}$	C_{46}
$\varphi_2^{0*} \varphi_2^0 \tilde{u}_R^* \tilde{u}_R$	${h_u}^2 - \frac{{g_1}^2}{3}$	C_{47}
$\varphi_2^{0*} \varphi_2^0 \tilde{d}_R^* \tilde{d}_R$	$\frac{{g_1}^2}{6}$	C_{48}

Таблица 1. Вершины взаимодействия бозонов Хиггса с третьим поколением суперпартнеров кварков



$C_{31}^2 C_{33}^2 I_2[m_Q, m_U]$



$C_{32}^2 C_{34}^2 I_2[m_Q, m_D]$

После вычисления однопетлевых диаграмм получаем следующие поправки к параметрам эффективного потенциала λ_i:

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda_1 &= C_{31}^4 I_2[m_Q, m_U] + C_{32}^4 I_2[m_Q, m_D] + \\
&+ C_{31}^2 (C_{41} I_1[m_Q, m_U] + C_{43} I_1[m_U, m_Q]) + \\
&+ C_{32}^2 (C_{42} I_1[m_Q, m_D] + C_{44} I_1[m_D, m_Q]); \\
\Delta\lambda_2 &= C_{33}^4 I_2[m_Q, m_U] + C_{34}^4 I_2[m_Q, m_D] +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + C_{33}^2(C_{45}I_1[m_Q, m_U] + C_{47}I_1[m_U, m_Q]) + \\
& + C_{34}^2(C_{46}I_1[m_Q, m_D] + C_{48}I_1[m_D, m_Q]); \\
\Delta(\lambda_3 + \lambda_4) \;\; = \;\; & C_{31}^2 C_{33}^2 I_2[m_Q, m_U] + C_{32}^2 C_{34}^2 I_2[m_Q, m_D] + \\
& + (C_{31}^2 C_{45} + C_{33}^2 C_{41}) I_1[m_Q, m_U] + (C_{31}^2 C_{47} + C_{33}^2 C_{43}) I_1[m_U, m_Q] + \\
& + (C_{32}^2 C_{46} + C_{34}^2 C_{42}) I_1[m_Q, m_D] + (C_{32}^2 C_{48} + C_{34}^2 C_{44}) I_1[m_D, m_Q]; \\
\Delta\lambda_5 \;\; = \;\; & C_{31}^2 C_{33}^2 I_2[m_Q, m_U] + C_{32}^2 C_{34}^2 I_2[m_Q, m_D]; \\
\Delta\lambda_6 \;\; = \;\; & C_{31}^3 C_{33} I_2[m_Q, m_U] + C_{32}^3 C_{34} I_2[m_Q, m_D] + \\
& + C_{31}C_{33}(C_{41}I_1[m_Q, m_U] + C_{43}I_1[m_U, m_Q]) + \\
& + C_{32}C_{34}(C_{42}I_1[m_Q, m_D] + C_{44}I_1[m_D, m_Q]); \\
\Delta\lambda_7 \;\; = \;\; & C_{31} C_{33}^3 I_2[m_Q, m_U] + C_{32} C_{34}^3 I_2[m_Q, m_D] + \\
& + C_{31}C_{33}(C_{45}I_1[m_Q, m_U] + C_{47}I_1[m_U, m_Q]) + \\
& + C_{32}C_{34}(C_{46}I_1[m_Q, m_D] + C_{48}I_1[m_D, m_Q]).
\end{aligned}
$$

При расчетах константы связи Юкавы для третьего поколения скалярных кварков определены стандартным образом:

$$h_t = \frac{\sqrt{2}\, m_t}{v \sin\beta}, \quad h_b = \frac{\sqrt{2}\, m_b}{v \cos\beta}.$$

Трилинейные константы взаимодействия в скалярном секторе A_t, A_b и массовый параметр хиггсино μ в секторе взаимодействия скалярных кварков с хиггсовскими полями могут быть комплексными, приводя к нарушению CP-инвариантности в эффективном скалярном потенциале. Интегралы $I_1[m_i, m_j]$ и $I_2[m_i, m_j]$ $(i, j = (m_Q, m_U, m_D))$ в данной работе вычисляются для случая $m_Q = m_U = m_D = M_{SUSY}$:

$$I_1[m_i, m_i] = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m_i^2)^3} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{2m_i^2},$$

$$I_2[m_i, m_i] = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m_i^2)^4} = \frac{1}{16\pi^2} \left(-\frac{1}{6m_i^2} \right).$$

2.2. Массовые состояния бозонов Хиггса. Компоненты комплексных полей в $SU(2)$-дублетах Φ_1 и Φ_2 не являются физическими полями, поэтому необходимо провести диагонализацию массового члена эффективного хиггсовского потенциала МССМ в локальном минимуме. В случае CP-сохранения сектор Хиггса двухдублетной модели содержит два заряженных бозона $H^\pm$, псевдоскалярный A и два скалярных h и H с $m_H > m_h$. В случае комплексных параметров μ и $A_{t,b}$ появляются также мнимые части параметров $\Delta\lambda_{5,6,7}$ и в массовом члене эффективного потенциала возникают зависящие от них смешанные слагаемые hA и HA, и массовая матрица бозонов Хиггса становится недиагональной. Для устранения недиагональных членов hA и HA проводится ортогональное преобразование в секторе h, H, A

$$(h, H, A)\, M^2 \begin{pmatrix} h \\ H \\ A \end{pmatrix} \;=\; (h_1, h_2, h_3)\, a_{ik}^T\, M_{kl}^2\, a_{lj} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

где массовая матрица имеет вид

$$M^2 \;=\; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} m_h^2 & 0 & c_1 \\ 0 & m_H^2 & c_2 \\ c_1 & c_2 & m_A^2 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

в результате чего появляются физические бозоны Хиггса h_1, h_2, h_3, не обладающие определенной CP-четностью.

Квадраты масс физических бозонов Хиггса являются корнями кубического уравнения

$$(m_{h_i}^2)^3 + a_2(m_{h_i}^2)^2 + a_1(m_{h_i})^2 + a_0 = 0 \tag{2.5}$$

и определяются формулами Кардано ($m^2_{h_1} \leqslant m^2_{h_2} \leqslant m^2_{h_3}$)

$$m^2_{h_1} = 2\sqrt{(-q)}\cos\left(\frac{\Theta + 2\pi}{3}\right) - \frac{a_2}{3}, \quad (2.6)$$

$$m^2_{h_2} = 2\sqrt{(-q)}\cos\left(\frac{\Theta - 2\pi}{3}\right) - \frac{a_2}{3}, \quad (2.7)$$

$$m^2_{h_3} = 2\sqrt{(-q)}\cos\left(\frac{\Theta}{3}\right) - \frac{a_2}{3}, \quad (2.8)$$

где

$$\Theta = \arccos\frac{r}{\sqrt{(-q^3)}}, \;\; r = \frac{1}{54}(9a_1a_2 - 27a_0 - 2a_2^3), \;\; q = \frac{1}{9}(3a_1 - a_2^2),$$

$$a_1 = m_h^2 m_H^2 + m_h^2 m_A^2 + m_H^2 m_A^2 - c_1^2 - c_2^2, \quad a_2 = -m_h^2 - m_H^2 - m_A^2,$$
$$a_0 = c_1^2 m_H^2 + c_2^2 m_h^2 - m_h^2 m_H^2 m_A^2.$$

3. Ограничения на параметры модели

Используя экспериментальное значение для массы бозона Хиггса $m_h = 125{,}5$ ГэВ, можно получить ограничения на параметры рассматриваемой модели. В работе построены контурные графики массы легчайшего бозона Хиггса для значений, лежащих в интервале 125 ГэВ $< m_h <$ 126 ГэВ в зависимости от выбранных параметров.

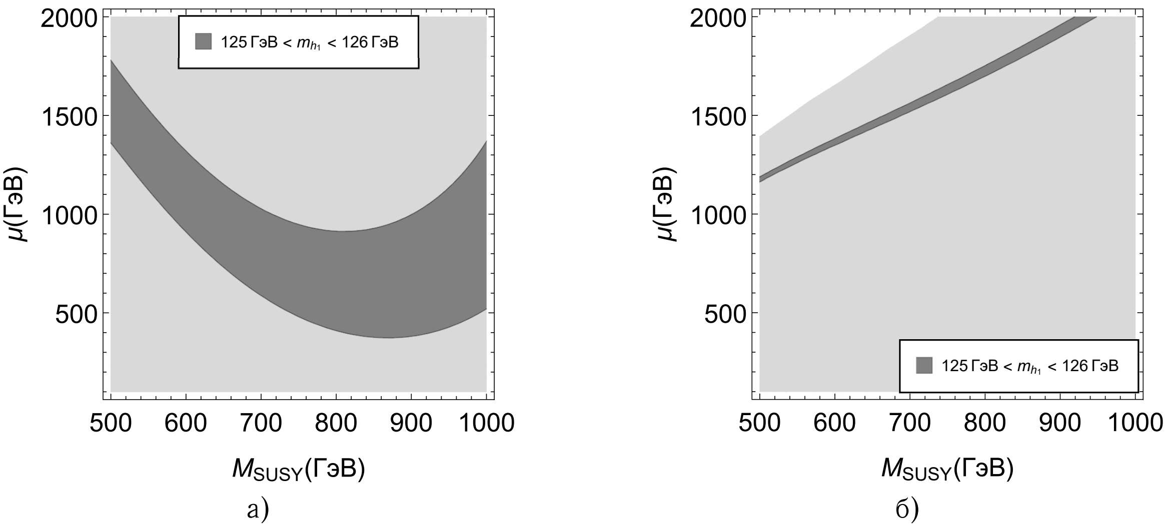


Рис. 1. Контурный график в плоскости μ—M_{SUSY} с выделенной областью 125 ГэВ $< m_{h_1} <$ 126 ГэВ (темная область) при значениях параметров: $A_{t,b} =$ 1000 ГэВ, $m_{H^\pm} = 300$ ГэВ, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

На рис. 1 представлены контурные графики в плоскости μ—M_{SUSY}. Остальные параметры зафиксированы при следующих значениях:

$$A_{t,b} = 1000 \text{ ГэВ}, \quad m_{H^\pm} = 300 \text{ ГэВ}, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

При $\operatorname{tg}\beta = 5$ (рис. 1(а)) видно, что физическое состояние бозона Хиггса с 125 ГэВ $< m_{h_1} <$ 126 ГэВ возможно при любом значении 500 ГэВ $< M_{SUSY} <$ 1000 ГэВ. При увеличении $\operatorname{tg}\beta$ до 50 необходимая область сужается и уменьшается допустимый диапазон 1100 ГэВ $< \mu <$ 2000 ГэВ (рис.1(б)).

На рис. 2 представлены контурные графики в плоскости μ—A. Остальные параметры зафиксированы при следующих значениях: $M_{SUSY} = 500$ ГэВ, $m_{H^\pm} = 300$ ГэВ, $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = 5$. Параметр μ может принимать любые значения. Однако на параметр $A_{t,b}$ накладываются сильные

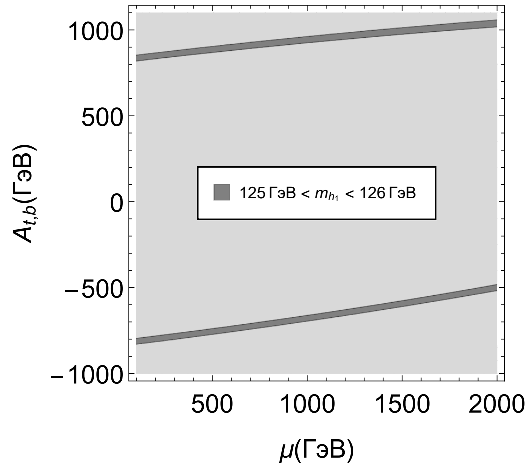


Рис. 2. Контурный график в плоскости μ—$A_{t,b}$ с выделенной областью 125 ГэВ < m_{h_1} < 126 ГэВ (темная область) при значениях параметров: $M_{SUSY} = 500$ ГэВ, $m_{H^\pm} = 300$ ГэВ, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = 5$.

ограничения: область, где 125 ГэВ $< m_{h_1} <$ 126 ГэВ существует лишь при $|A_{t,b}| > 500$ ГэВ при заданных фиксированных параметрах.

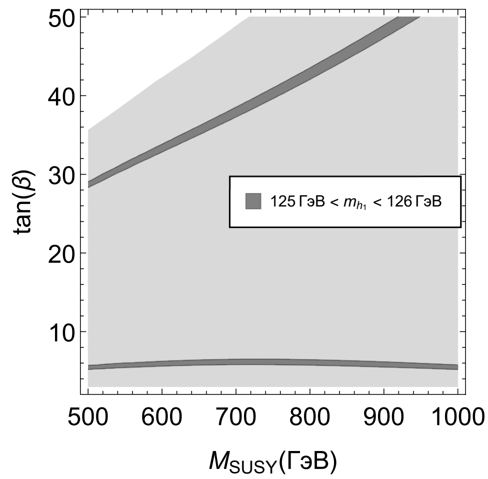


Рис. 3. Контурный график в плоскости M_{SUSY}—$\operatorname{tg}\beta$ с выделенной областью 125 ГэВ < m_{h_1} < 126 ГэВ (темная область) при значениях параметров: $\mu = 2000$ ГэВ, $A_{t,b} = 1000$ ГэВ, $m_{H^\pm} = 300$ ГэВ, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

На рис. 3 представлены контурные графики в плоскости M_{SUSY}—$\operatorname{tg}\beta$. Остальные параметры зафиксированы при следующих значениях: $\mu = 2000$ ГэВ, $A_{t,b} = 1000$ ГэВ, $m_{H^\pm} = 300$ ГэВ, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Анализ показывает, что при выбранных фиксированных параметрах области, соответствующие экспериментальному значению массы легчайшего бозона Хиггса, возможны только при малых $\operatorname{tg}\beta < 5$ и больших $\operatorname{tg}\beta > 28$ значениях. При заданных параметрах исключена область $5 < \operatorname{tg}\beta < 28$.

На рис. 4 представлены контурные графики в плоскости φ—$\operatorname{tg}\beta$. Остальные параметры зафиксированы при следующих значениях: $\mu = 2000$ ГэВ, $A_{t,b} = 1000$ ГэВ, $M_{SUSY} = 500$ ГэВ, $m_{H^\pm} = 300$ ГэВ. При любом φ возможны физические состояния бозона Хиггса с массой легчайшего бозона Хиггса, соответствующей экспериментальному значению. Однако на $\operatorname{tg}\beta$ накладываются ограничения. Искомая область существует только при малых $\operatorname{tg}\beta < 10$ и при больших $26 < \operatorname{tg}\beta < 30$ значениях при заданных параметрах.

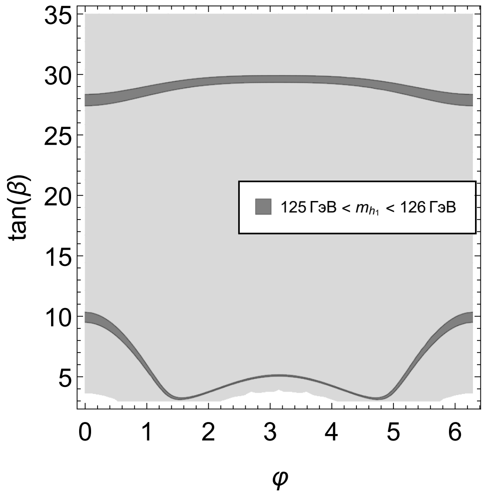


Рис. 4. Контурный график в плоскости φ—$\mathrm{tg}\,\beta$ с выделенной областью 125 ГэВ $<$ m_{h_1} $<$ 126 ГэВ (темная область) при значениях параметров: $\mu = 2000$ ГэВ, $A_{t,b} =$ 1000 ГэВ, $M_{SUSY} = 500$ ГэВ, $m_{H^\pm} = 300$ ГэВ.

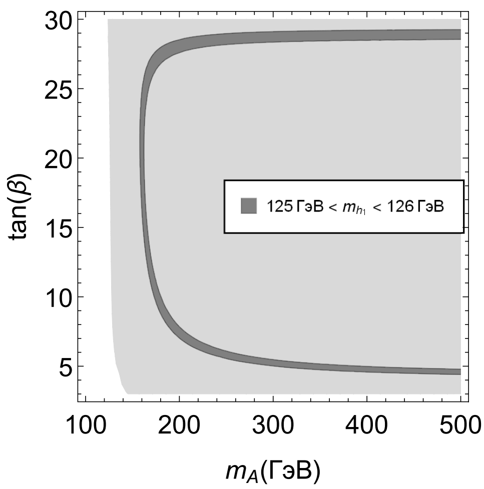


Рис. 5. Контурный график в плоскости m_A—$tg\beta$ с выделенной областью 125 ГэВ $<$ m_{h_1} $<$ 126 ГэВ (темная область) при значениях параметров: $\mu = 2000$ ГэВ, $A_{t,b} =$ 1000 ГэВ, $M_{SUSY} = 500$ ГэВ, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

На рис. 5 представлены контурные графики в плоскости m_A—$\mathrm{tg}\,\beta$. Остальные параметры зафиксированы при следующих значениях: $\mu = 2000$ ГэВ, $A_{t,b} = 1000$ ГэВ, $M_{SUSY} = 500$ ГэВ, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. При $m_A < 150$ ГэВ параметр $\mathrm{tg}\,\beta$ может принимать любые значения из диапазона 2–30, но при $m_A > 150$ ГэВ имеем только малые $\mathrm{tg}\,\beta < 6$ или большие $\mathrm{tg}\,\beta > 27$ значения.

На рис. 6 представлены контурные графики в плоскости m_A—$\mathrm{tg}\,\beta$. Остальные параметры зафиксированы при следующих значениях: $\mu = 2000$ ГэВ, $A_{t,b} = 1000$ ГэВ, $M_{SUSY} = 500$ ГэВ, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. При любом m_A возможны физические состояния легкого бозона Хиггса в пределах 40 ГэВ $< m_{h_1} <$ 50 ГэВ. Однако необходимая область существует только в очень ограниченном диапазоне $43 < \mathrm{tg}\,\beta < 46$.

На рис. 7 представлены двумерные графики в плоскости φ—$\mathrm{tg}\,\beta$. Остальные параметры зафиксированы при следующих значениях: $\mu = 2000$ ГэВ, $A_{t,b} = 1000$ ГэВ, $M_{SUSY} = 500$ ГэВ, $m_{H^\pm} = 300$ ГэВ. Физические состояния легкого бозона Хиггса в пределах 40 ГэВ $< m_{h_1} <$ 50 ГэВ возможны при любых значениях m_A. Однако необходимая область существует только в очень ограниченном диапазоне $43 < \mathrm{tg}\,\beta < 46$.

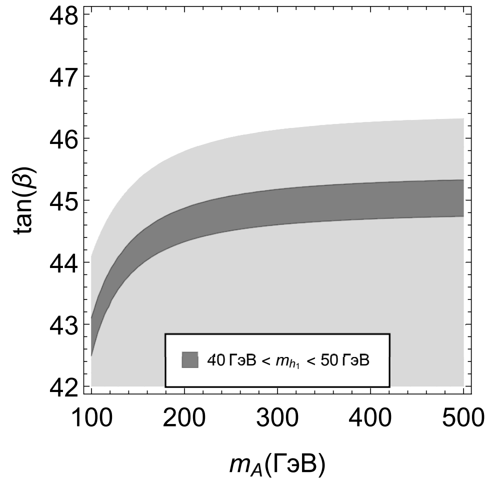


Рис. 6. Контурный график в плоскости m_A—$\mathrm{tg}\,\beta$ с выделенной областью $40\,\text{ГэВ} < m_{h_1} < 50\,\text{ГэВ}$ (темная область) при значениях параметров: $\mu = 2000\,\text{ГэВ}$, $A_{t,b} = 1000\,\text{ГэВ}$, $M_{SUSY} = 500\,\text{ГэВ}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

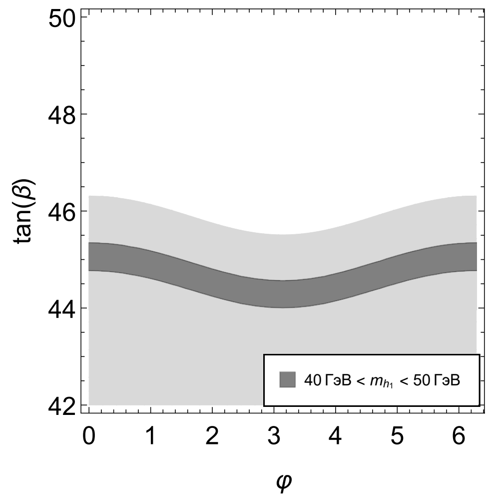


Рис. 7. Контурный график в плоскости φ—$\mathrm{tg}\,\beta$ с выделенной областью 40 ГэВ $< m_{h_1} <$ 50 ГэВ (темная область) при значениях параметров: $\mu = 2000$ ГэВ, $A_{t,b} = 1000$ ГэВ, $M_{SUSY} = 500$ ГэВ, $m_{H^\pm} = 300$ ГэВ.

4. Заключение

В статье рассмотрен общий скалярный сектор Хиггса с нарушением CP-инвариантности в МССМ. Представлен эффективный потенциал МССМ, включающий возможные однопетлевые поправки. Определены массовые состояния и однопетлевые поправки в безразмерные параметры эффективного потенциала в рамках минимальной суперсимметричной модели. Получены ограничения на параметры МССМ, представлены области параметров, допускающие соответствие экспериментальным результатам для массы бозона Хиггса. Отмечены ограничения на параметры модели МССМ с CP-нарушением, при которых наблюдаемый на эксперименте бозон Хиггса соответствует легкому CP-четному бозону.

Благодарности. Авторы выражают искреннюю признательность организаторам международной конференции Uzbek-Israel Scientific Conference «Contemporary Problems in Mathematics and Physics» (6–10 октября 2017 г.) за возможность представить и обсудить результаты исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голенев Е.А., Гурская А.В., Долгополов М.В., Рыкова Э.Н.* Потенциал Хиггса в неминимальной суперсимметричной модели при температуре фазового перехода// В сб.: «Contemporary Problems in Mathematics and Physics: Abstracts of the Uzbek-Israel International Conference». — Ташкент: Национальный ун-т Узбекистана, 2017. — С. 152–155.
2. *Дубинин М.Н., Петрова Е.Ю.* Упрощенные параметрические сценарии МССМ после открытия бозона Хиггса// Ядер. физ. — 2017. — *79*, № 4. — С. 302–314.
3. *Казаков Д.И.* Хиггсовский бозон открыт. Что дальше?// Усп. физ. наук. — 2014. — *184*, № 9. — С. 1004–1016.
4. *Aihara H. и др.* The eighth data release of the Sloan Digital Sky Survey: first data from SDSS-III// Astrophys. J. Suppl. Ser. — 2011. — *193*, № 2. — DOI: 10.1088/0067-0049/193/2/29.
5. *Akhmetzyanova E.N., Dolgopolov M.V., Dubinin M.N.* Higgs bosons in the two-doublet model with CP violation// Phys. Rev. D. — 2005. — *71*, № 7. — 075008.
6. *Akhmetzyanova E.N., Dolgopolov M.V., Dubinin M.N.* Higgs bosons in the two-doublet model involving CP violation// Phys. Atom. Nucl. — 2005. — *68*, № 11. — С. 1851–1865.
7. *Akhmetzyanova E.N., Dolgopolov M.V., Dubinin M.N.* Self-couplings of Higgs bosons in the scenarios with CP-even/CP-odd mixing// В сб.: «CP studies and non-standard Higgs physics. Proc. of CERN Workshop». — Geneva: CERN, 2006. — С. 133–139.
8. *Akhmetzyanova E.N., Dolgopolov M.V., Dubinin M.N.* Violation of CP invariance in the two-doublet Higgs sector of the MSSM// Phys. Part. Nucl. — 2006. — *37*. — С. 677–734.
9. *de Boer W.* Grand unified theories and supersymmetry in particle physics and cosmology// Prog. Part. Nucl. Phys. — 1994. — *33*. — С. 201–301.
10. *Dolgov A.D., Hansen S.H., Pastor S., Semikoz D.V.* Unstable massive tau-neutrinos and primordial nucleosynthesis// Nucl. Phys. B. — 1999. — *548*, № 1–3. — С. 385–407.
11. *Dubinin M.N., Semenov A.V.* Triple and quartic interactions of Higgs bosons in the two-Higgs-doublet model with CP violation// Eur. Phys. J. — 2003. — *28*, № 2. — С. 223–236.
12. *Gurskaya A.V., Dolgopolov M.V., Rykova E.N.* Higgs bosons in Standard Model extensions// Phys. Part. Nucl. — 2017. — *48*, № 5. — С. 822–826.
13. *Hall L., Lykken J., Weinberg S.* Supergravity as the messenger of supersymmetry breaking// Phys. Rev. D. — 1983. — *27*, № 10. — С. 2359–2378.
14. *Komatsu E. и др.* Seven-year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: cosmological interpretation// Astrophys. J. Suppl. Ser. — 2011. — *192*, № 2. — DOI: 10.1088/0067-0049/192/2/18.
15. *Lesgourgues J., Pastor S.* Massive neutrinos and cosmology// Phys. Rep. — 2006. — *429*, № 6. — С. 307–379.
16. *Sahni V., Starobinsky A.A.* The case for a positive cosmological Λ-term// Int. J. Mod. Phys. D. — 2000. — *9*, № 4. — С. 373–444.
17. *Spergel D.N. и др.* First year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: determination of cosmological parameters// Astrophys. J. Suppl. Ser. — 2003. — *148*, № 1. — С. 175–194.
18. *Tegmark M. и др.* Cosmological parameters from SDSS and WMAP// Phys. Rev. D. — 2004. — *69*, № 10. — 103501.
19. *Weinberg S.* The cosmological constant problem// Rev. Mod. Phys. — 1989. — *61*, № 1. — С. 1–23.

А.Э. Аллахвердиева
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,
кафедра общей и теоретической физики, 443011, г. Самара, ул. Академика Павлова, д. 1
E-mail: elzarykova@gmail.com

М.В. Долгополов
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,
лаборатория математической физики, 443011, г. Самара, ул. Академика Павлова, д. 1
E-mail: mikhaildolgopolov68@gmail.com

Э.Н. Рыкова
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,
лаборатория математической физики, 443011, г. Самара, ул. Академика Павлова, д. 1
E-mail: elzarykova@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-603-615 UDC 539.12+530.1

Restrictions on Parameters of Minimal Supersymmetric Standard Model

© 2018 **A. E. Allakhverdieva, M. V. Dolgopolov, E. N. Rykova**

Abstract. Higgs boson with mass $m_h = 126$ GeV was discovered at Large Hadron Collider in 2012. Its mass corresponds both to Standard Model of elementary-particles physics and to the mass of the most lightweight Higgs boson in the minimal supersymmetric Standard Model. In this paper, we consider the MSSM model not preserving CP-invariance that contain a large number of parameters to be variated. Using the experimental value of the Higgs boson mass, we obtain the restrictions on the parameters of the model, describe phenomenological scenarios, and analyze possible areas of the space of parameters.

REFERENCES

1. E. A. Golenev, A. V. Gurskaya, M. V. Dolgopolov, and E. N. Rykova, "Potentsial Khiggsa v neminimal'noy supersimmetrichnoy modeli pri temperature fazovogo perekhoda" [Higgs potential in nonminimal supersymmetric model at the temperature of the phase change], In: *Contemporary Problems in Mathematics and Physics: Abstracts of the Uzbek-Israel International Conference*, Uzbekistan Nat. Univ., Tashkent, 2017, pp. 152–155 (in Russian).
2. M. N. Dubinin and E. Yu. Petrova, "Uproshchennye parametricheskie stsenarii MSSM posle otkrytiya bozona Khiggsa" [Simplified parametric scenarios of MSSM after the Higgs boson discovery], *Yader. fiz.* [Nucl. Phys.], 2017, **79**, No. 4, 302–314 (in Russian).
3. D. I. Kazakov, "Khiggsovskiy bozon otkryt. Chto dal'she?" [Higgs boson has been discovered. What next?], *Usp. fiz. nauk* [Progr. Phys. Sci.], 2014, **184**, No. 9, 1004–1016 (in Russian).
4. H. Aihara et al., "The eighth data release of the Sloan Digital Sky Survey: first data from SDSS-III," *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 2011, **193**, No. 2, DOI: 10.1088/0067-0049/193/2/29.
5. E. N. Akhmetzyanova, M. V. Dolgopolov, and M. N. Dubinin, "Higgs bosons in the two-doublet model with CP violation," *Phys. Rev. D*, 2005, **71**, No. 7, 075008.
6. E. N. Akhmetzyanova, M. V. Dolgopolov, and M. N. Dubinin, "Higgs bosons in the two-doublet model involving CP violation," *Phys. Atom. Nucl.*, 2005, **68**, No. 11, 1851–1865.
7. E. N. Akhmetzyanova, M. V. Dolgopolov, and M. N. Dubinin, "Self-couplings of Higgs bosons in the scenarios with CP-even/CP-odd mixing," In: *CP studies and non-standard Higgs physics. Proc. of CERN Workshop*, CERN, Geneva, 2006, pp. 133–139.
8. E. N. Akhmetzyanova, M. V. Dolgopolov, and M. N. Dubinin, "Violation of CP invariance in the two-doublet Higgs sector of the MSSM," *Phys. Part. Nucl.*, 2006, **37**, 677–734.
9. W. de Boer, "Grand unified theories and supersymmetry in particle physics and cosmology," *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 1994, **33**, 201–301.
10. A. D. Dolgov, S. H. Hansen, S. Pastor, and D. V. Semikoz, "Unstable massive tau-neutrinos and primordial nucleosynthesis," *Nucl. Phys. B*, 1999, **548**, No. 1–3, 385–407.
11. M. N. Dubinin and A. V. Semenov, "Triple and quartic interactions of Higgs bosons in the two-Higgs-doublet model with CP violation," *Eur. Phys. J.*, 2003, **28**, No. 2, 223–236.
12. A. V. Gurskaya, M. V. Dolgopolov, and E. N. Rykova, "Higgs bosons in Standard Model extensions," *Phys. Part. Nucl.*, 2017, **48**, No. 5, 822–826.
13. L. Hall, J. Lykken, and S. Weinberg, "Supergravity as the messenger of supersymmetry breaking," *Phys. Rev. D*, 1983, **27**, No. 10, 2359–2378.
14. E. Komatsu et al., "Seven-year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: cosmological interpretation," *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 2011, **192**, No. 2, DOI: 10.1088/0067-0049/192/2/18.
15. J. Lesgourgues and S. Pastor, "Massive neutrinos and cosmology," *Phys. Rep.*, 2006, **429**, No. 6, 307–379.
16. V. Sahni and A. A. Starobinsky, "The case for a positive cosmological Λ-term," *Int. J. Mod. Phys. D*, 2000, **9**, No. 4, 373–444.
17. D. N. Spergel et al., "First year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: determination of cosmological parameters," *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 2003, **148**, No. 1, 175–194.
18. M. Tegmark et al., "Cosmological parameters from SDSS and WMAP," *Phys. Rev. D*, 2004, **69**, No. 10, 103501.
19. S. Weinberg, "The cosmological constant problem," *Rev. Mod. Phys.*, 1989, **61**, No. 1, 1–23.

A. E. Allakhverdieva
Samara National Research University, Samara, Russia
E-mail: elzarykova@gmail.com

M. V. Dolgopolov
Samara National Research University, Samara, Russia
E-mail: mikhaildolgopolov68@gmail.com

E. N. Rykova
Samara National Research University, Samara, Russia
E-mail: elzarykova@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 4 (2018). С. 616–636

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-616-636 УДК 517.98+519.65

ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЕКЦИОННАЯ СХЕМА В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ОБЩЕЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

© 2018 г. **А. ГИБАЛИ, Д. ТЕЛЛЕР**

Аннотация. В этой работе мы рассматриваем задачу об общей неподвижной точке (CFPP) с деми-сжимающими операторами и ее частный случай, выпуклую задачу о допустимости (CFP) в вещественных гильбертовых пространствах. Руководствуясь недавними результатами, полученными Ордонесом и др. в работе [35] и в области алгоритмов в реальном времени в общем, например, в [20, 21, 30], где с самого начала нам недоступны целые наборы операторов/множеств, которые затем получаются постепенно, мы предлагаем итерационную схему в реальном времени для решения задач об общей неподвижной точке (CFPP) и выпуклых задач о допустимости (CFP), в которой участвующие операторы/множества появляются со временем. Такая схема способна работать с любыми блоками данных и для любого конечного числа итераций с последовательным переходом к следующему блоку.

Схема основана на недавнем результате, описанном в работе Райха и Заласа [37] и известном как процедура модулярного строкового усреднения (MSA). Сходимость схемы следует из [37] и других классических результатов в теории неподвижных точек и области вариационных неравенств, например, [34].

Также в работе представлены вычислительные эксперименты для линейных и нелинейных задач о допустимости в приложении к восстановлению изображений. Они демонстрируют справедливость и потенциальную применимость нашей схемы, например, в условиях реального времени.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В этой работе мы имеем дело с *задачей об общей неподвижной точке* (CFPP) и ее частным случаем, *выпуклой задачей о допустимости* (CFP) в вещественных гильбертовых пространствах $\mathcal{H}$. Даны операторы $U_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ при $i \in I := \{1, 2, \dots, m\}$ с непустыми множествами неподвижных точек. Задача об общей неподвижной точке состоит в нахождении точки $x^* \in \mathcal{H}$, такой, что

$$x^* \in \bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{Fix}(U_i). \tag{1.1}$$

Выпуклая задача о допустимости является частным случаем задачи об общей неподвижной точке. В этом случае имеем m непустых, замкнутых и выпуклых множеств $C_i \subseteq \mathcal{H}$ при $i \in I$. Теперь задача заключается в нахождении такой точки $x^* \in \mathcal{H}$, что

$$x^* \in \bigcap_{i=1}^{m} C_i \neq \varnothing. \tag{1.2}$$

Очевидно, что если мы выберем

$$U_i = P_{C_i}$$

для всех $i \in I$, где P_{C_i} обозначает ортогональную проекцию на i-е множество C_i (что будет пояснено далее) в CFPP (1.1), то мы получим CFP (1.2).

CFPP и CFP служат основными средствами моделирования при построении многих важных реальных задач, например, при формировании изображений, в сенсорных сетях, при составлении плана лечения лучевой терапией, повышении разрешающей способности и многих других; см., например, [5, 15]. Одна из самых ранних итерационных процедур для решения задач CFPP, см., например, [34], имеет следующий общий вид: выбираем произвольную начальную точку $x^0 \in \mathcal{H}$; получив текущую итерацию x^k, рассчитываем следующую итерацию x^{k+1} таким образом:

$$x^{k+1} = T(x^k), \tag{1.3}$$

где оператор $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ фиксирован и зависит от семейства операторов

$$\{U_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \mid i \in I\}.$$

Более общая схема для неподвижной точки позволяет включить семейство операторов

$$\{T_k : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\}_{k=0}^{\infty};$$

см., например, обобщенный метод Опиала [11, п. 3.6]. Итерационная процедура формулируется следующим образом: выбираем произвольную начальную точку $x^0 \in \mathcal{H}$; получив текущую итерацию x^k, рассчитываем следующую итерацию x^{k+1} так:

$$x^{k+1} = T_k(x^k), \tag{1.4}$$

где семейство операторов $\{T_k\}_{k=0}^{\infty}$ зависит от $\{U_i\}_{i\in I}$ и может иметь различные алгоритмические структуры, например:

1. *циклическую* (с релаксацией): $\alpha_k \in [\varepsilon, 2-\varepsilon]$ при $\varepsilon > 0$:
$$T_k = U_{i(k)}, \quad \text{где } i(k) = (k \bmod m) + 1;$$
2. *совместную*:
$$T_k := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} U_i;$$
3. *композиционную*:
$$T_k := \prod_{i=1}^{m} U_i;$$
4. «*жадную*» (наиболее удаленную):
$$T_k := U_{i_k}, \quad \text{где } i_k = \operatorname*{argmax}_{i\in I} \operatorname{dist}(\cdot, \operatorname{Fix}(U_i)),$$
здесь $\operatorname{dist}(\cdot,\cdot)$ — это *функция расстояния* между точкой и множеством.

Возвращаясь к выпуклой задаче о допустимости (CFP), хотелось бы обратить внимание на класс проекционных методов. В 1930-х годах Стефан Качмаж [29] и Джанфранко Чиммино [18] представили итерационные проекционные методы для решения систем линейных неравенств

$$Ax \leqslant b,$$

где $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $b \in \mathbb{R}^m$. Как оказалось, данная задача может быть легко сведена к эквивалентной ей CFP следующим образом: обозначим через A^i и b_i i-е строку и элемент A и b, соответственно. Определим понятие *полупространства*:

$$H_i^- := \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle A^i, z\rangle \leqslant b_i\} \tag{1.5}$$

и затем получим:

$$Ax \leqslant b \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{m} H_i^-. \tag{1.6}$$

Методы Качмажа [29] и Чиммино [18] используют ортогональные проекции (отражения) на полупространства H_i^- последовательно и совместно, соответственно. Этим, собственно, и характеризуется класс проекционных методов, которые, будучи итерационными процедурами, используют проекции различных типов на множества с учетом того факта, что проекция на пересечение множеств являет собой довольно сложную вычислительную задачу, в то время как проекции на отдельные множества намного проще осуществимы. Именно поэтому эти методы успешно применяются во многих реальных приложениях, и даже были названы «Swiss Army knives», см. [6]. В последние десятилетия класс проекционных методов активно развивался, эти методы оказались способными решать общие выпуклые задачи о допустимости (1.2). Также они включают в себя различные алгоритмические структуры, такие как последовательную, совместную, блочно-итерационную, усреднение по строкам и т. д., см. [15], а также [10, 11, 17, 22, 23]).

Ордонес и др. в работе [35] изучают разреженную и переопределенную систему линейных уравнений

$$Ax = b \quad (A \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ с } m \sim 10^3 \text{ и } n \sim 10^9)$$

большой размерности, возникающую в области протонной вычислительной томографии (pCT). Исследуя эту задачу, авторы вводят два проекционных метода в режиме реального времени, метод диагонально ослабленных ортогональных проекций (DROP) [2] и метод координатно-усредненных строковых проекций (CARP) [25]. Они экспериментально демонстрируют, что DROP и CARP в режиме реального времени работают гораздо «лучше и быстрее», чем другие проекционные методы, см., например, [36].

Итак, исходя из [35] и результатов, полученных в области алгоритмов в реальном времени, например [20, 21, 30], нашей задачей в этой работе является введение новой итерационной схемы для неподвижной точки типа (1.3) или (1.4) для решения задач об общей неподвижной точке и выпуклых задач о допустимости. Сосредоточим наше внимание на том случае, когда с самого начала нам недоступны целые наборы операторов/множеств, и мы получаем их постепенно. Следовательно, нам необходимо придумать такую итерационную схему в реальном времени, которая будет способна работать с сегментами набора и включать в себя новый набор, когда таковой появится. В CFPP главная идея состоит в том, что операторы U_i при $i \in I$ представлены в виде блоков

$$I = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_M, \quad 1 \leqslant M \leqslant m,$$

и последовательны по времени. Возьмем процедуру Райха и Заласа [37], *модулярное строковое усреднение* (MSA), и покажем, как она может быть применена в вышеописанном случае. Некоторые численные эксперименты демонстрируют потенциальную применимость и преимущества предлагаемого метода для линейных и нелинейных задач о допустимости в режиме реального времени.

Краткое содержание данной работы таково: в разделе 2 представлены определения и понятия, необходимые в дальнейшем; в разделе 3 вводятся и анализируются новые итерационные схемы в реальном времени для задач о неподвижных точках и задач о допустимости; далее в разделе 4 будет представлено несколько численных примеров для линейных и нелинейных задач о допустимости и будут обоснованы справедливость и потенциальная применимость новой схемы, которая может быть использована, например, для задач в реальном времени; и, наконец, в разделе 5 представлены выводы и направления для дальнейших исследований.

2. Предварительные сведения

Всюду далее в этой работе $\mathcal{H}$ — это вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и индуцированной нормой $\|\cdot\|$. Будем использовать записи $x^k \rightharpoonup x$ и $x^k \to x$ для обозначения слабой и сильной сходимостей последовательности $\left\{x^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ к x, соответственно.

Вспомним теперь несколько определений и свойств некоторых классов операторов. Их, наряду со многими другими, можно найти, например, в блестящей работе Цегельского [11].

Определение 2.1. Пусть $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — некоторый оператор.

- *Множество неподвижных точек* оператора U, обозначаемое через $\mathrm{Fix}(U)$, определяется так:

$$\mathrm{Fix}(U) := \{x \in \mathcal{H} \mid U(x) = x\}. \tag{2.1}$$

- Оператор U называется *срезающим*, если для любого $x \in \mathcal{H}$ и любого $z \in \operatorname{Fix}(U)$
$$\langle z - U(x), x - U(x) \rangle \leqslant 0. \tag{2.2}$$
- Оператор U называется *нерастягивающим* (NE), если для любых $x, y \in \mathcal{H}$
$$\|U(x) - U(y)\| \leqslant \|x - y\|. \tag{2.3}$$
- Оператор U называется *квази-нерастягивающим* (QNE), если для всех $(x, q) \in \mathcal{H} \times \operatorname{Fix}(U)$
$$\|U(x) - q\| \leqslant \|x - q\|. \tag{2.4}$$
- Оператор U с $\operatorname{Fix}(U) \neq \varnothing$ называется *ρ-деми-сжимающим* (см., например, [32]) при $\rho \in [-1, 0)$, если для всех $(x, z) \in \mathcal{H} \times \operatorname{Fix}(U)$
$$\|U(x) - z\|^2 \leqslant \|x - z\|^2 - \rho \|U(x) - x\|^2. \tag{2.5}$$
- Оператор U называется *ρ-сильно квази-нерастягивающим* при $\rho \geqslant 0$, если для всех $(x, z) \in \mathcal{H} \times \operatorname{Fix}(U)$
$$\|U(x) - z\|^2 \leqslant \|x - z\|^2 - \rho \|U(x) - x\|^2. \tag{2.6}$$
Если $\rho > 0$, то оператор U называется *сильно квази-нерастягивающим*.
- При $\alpha \in [0, \infty]$ оператор
$$U_\alpha := Id + \alpha(U - Id)$$
называется *α-релаксацией оператора* U, а α называется *параметром релаксации*. Легко видеть, что для каждого $\alpha \neq 0$
$$\operatorname{Fix}(U) = \operatorname{Fix}(U_\alpha). \tag{2.7}$$
- Оператор U называется *усредняющим* [3] (см. также [9]), если существуют нерастягивающий оператор $N : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ и число $c \in (0, 1)$, такие, что
$$U = (1 - c)Id + cN, \tag{2.8}$$
где Id — единичный оператор в $\mathcal{H}$.
- Квази-нерастягивающий оператор U называется *деми-замкнутым* в точке $y \in \mathcal{H}$, если для любой последовательности $\left\{x^k\right\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ имеем
$$\left.\begin{array}{l} x^k \rightharpoonup \overline{x} \\ U(x^k) \to y \end{array}\right\} \Longrightarrow U(\overline{x}) = y. \tag{2.9}$$
- Квази-нерастягивающий оператор U называется *приближенно стягивающим*, если для любой ограниченной последовательности $\{x^k\}_{k=0}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}$ имеем
$$\lim_{k\to\infty} \|U(x^k) - x^k\| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \operatorname{dist}(x^k, \operatorname{Fix}(U)) = 0. \tag{2.10}$$
Подробнее об этом классе операторов можно прочесть, например, в [13].

Следующая теорема является частью нашего анализа и показывает связь между двумя классами операторов, описанных выше.

Теорема 2.1. *Пусть $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — оператор с неподвижной точкой, и пусть $\alpha \in (0, 2]$. Тогда U — это срезающий оператор, если и только если его U_α является $(2-\alpha)/\alpha$-сильно квази-нерастягивающим.*

Доказательство. См., например, либо [19, Proposition 2.3(ii)], либо [11, Theorem 2.1.39]. □

Следующий принцип известен как принцип деми-замкнутости [8].

Принцип деми-замкнутости. *Пусть $\mathcal{H}$ — это вещественное гильбертово пространство, $C \subseteq \mathcal{H}$ — замкнутое и выпуклое множество, и пусть $S : C \to \mathcal{H}$ — нерастягивающее отображение. Тогда $Id - S$ деми-замкнут в $y \in \mathcal{H}$.*

Другим важным результатом, необходимым для нашего анализа, является следующее утверждение (см. [14, утверждение 4.1]).

Предложение 2.1. *Пусть $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — это квази-нерастягивающий оператор. Тогда верны следующие утверждения*:

1. *Если U является приближенно стягивающим, то $U - Id$ деми-замкнут в* 0;
2. *Если* $\dim(\mathcal{H}) < \infty$ ($\mathcal{H}$ *конечномерно*) *и $U - Id$ деми-замкнут в* 0, *то U является приближенно стягивающим.*

Определение 2.2. Пусть $C_i \subseteq \mathcal{H}$ при $i \in I$ — это замкнутые и выпуклые множества с непустым пересечением

$$\mathcal{C} := \bigcap_{i \in I} C_i \neq \varnothing.$$

Семейство множеств $\mathfrak{C} := \{C_i \mid i \in I\}$ называется *ограниченно регулярным*, если для любой ограниченной последовательности $\{x^k\}_{k=0}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} \max_{i \in I} \operatorname{dist}(x^k, C_i) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \operatorname{dist}(x^k, \mathcal{C}) = 0. \tag{2.11}$$

Следующее утверждение (см. [4, утверждение 5.4 (iii), следствие 5.14, следствие 5.22]) дает условия, гарантирующие ограниченную регулярность семейства множеств.

Предложение 2.2. *Пусть $C_i \subseteq \mathcal{H}$ при $i \in I$ — замкнутые и выпуклые множества с непустым пересечением*:

$$\mathcal{C} := \bigcap_{i=1}^{m} C_i.$$

Если выполнено одно из следующих условий:
1. $\dim(\mathcal{H}) < \infty$,
2. $\operatorname{int}(\mathfrak{C}) \neq \varnothing$,
3. *всякое C_i является полупространством,*

то семейство множеств $\mathfrak{C} := \{C_i \mid i \in I\}$ ограниченно регулярно.

Теперь вспомним метрические проекции на замкнутые и выпуклые множества. Пусть $C \subset \mathcal{H}$. Для каждой точки $x \in \mathcal{H}$ существует единственная ближайшая точка из C, обозначенная $P_C(x)$, и такая, что

$$\|x - P_C(x)\| \leqslant \|x - y\| \text{ для всех } y \in C. \tag{2.12}$$

Отображение $P_C : \mathcal{H} \to C$ называется *метрической проекцией* пространства $\mathcal{H}$ на C и является нерастягивающим отображением пространства $\mathcal{H}$ на C (на самом деле, FNE (следовательно, срезающим), см. [11, теорема 2.2.21]). Отображение P_C характеризуется следующими двумя свойствами (см. [24, п. 3]):

$$P_C(x) \in C \tag{2.13}$$

(следовательно, $\operatorname{Fix}(P_C) = C$) и

$$\langle x - P_C(x), P_C(x) - y \rangle \geqslant 0 \text{ для всех } x \in \mathcal{H},\ y \in C, \tag{2.14}$$

и если C — гиперплоскость, то (2.14) превращается в равенство.

Другим важным типом проекций является субградиентная проекция (также срезающий оператор, см., например, [11, лемма 4.2.5] и [5]). Такие проекции крайне важны в случаях, когда выпуклое множество C представляется в виде подуровневых множеств выпуклой функции $g : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, т. е.

$$C := \{x \in \mathcal{H} \mid g(x) \leqslant 0\}.$$

Теперь, когда мы дали определения различным типам проекций, а также различным классам операторов, необходимо вспомнить два частных типа проекционных методов: последовательный (предложенный Качмажем, также известный как *метод последовательных ортогональных проекций* (SOP) [1], *метод проекции на выпуклые пространства* (POCS) [4] и *алгебраический способ перестраивания* (ART) [26] в линейных случаях) и блочно-итерационные методы (полностью совместные, если есть только один блок, в линейном случае сводятся к методу Чиммино [18]). С этой целью рассмотрим выпуклую задачу о допустимости с непустыми, замкнутыми и выпуклыми множествами $C_i \subseteq \mathcal{H}$ при $i \in I$. Следующие определения управляющих последовательностей, $\{i(\nu)\}_{\nu=0}^{\infty}$, обуславливают порядок, в котором участвуют ортогональные проекции на множества C_i, $i \in I$ и, следовательно, указывают структуру алгоритма.

Определение 2.3.

1. Последовательность $\{i(\nu)\}_{\nu=0}^{\infty}$ называется *циклично управляющей*, если
$$i(\nu) = (\nu \bmod m) + 1,$$
где m — это количество множеств в (1.2).
2. Последовательность $\{i(\nu)\}_{\nu=0}^{\infty}$ называется *почти циклично управляющей* на множестве $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ если
$$i(\nu) \in I \text{ для всех } \nu \geqslant 0,$$
и существует целое $Q \geqslant m$ (называется *почти циклической константой*), такое, что
$$I \subseteq \{i(\nu+1), i(\nu+2), \ldots, i(\nu+Q)\} \text{ для всех } \nu \geqslant 0. \tag{2.15}$$
3. Последовательность $\{i(\nu)\}_{\nu=0}^{\infty}$ называется *удаленно управляющей*, если она получается указанием $i(\nu)$, такого что
$$\operatorname{dist}(x^\nu, C_{i(\nu)}) = \max\{\operatorname{dist}(x^\nu, C_i) \mid i \in I\}. \tag{2.16}$$
4. Последовательность $\{i(\nu)\}_{\nu=0}^{\infty}$ называется *произвольно управляющей*, если $i(\nu) \in I$ выбирается произвольно и определяется независимо в соответствии с заданным распределением вероятности $\{p_i\}$.

Теперь представим последовательный и совместный проекционные методы для решения выпуклых задач о допустимости.

Алгоритм 2.1 (Метод SOP).
Дано. *Пусть $x^0 \in \mathcal{H}$ — произвольная начальная точка.*
Итерационный шаг. *Имея текущую итерацию x^k, рассчитаем следующую итерацию таким образом*:
$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k \left(P_{C_{i(\nu)}}(x^k) - x^k\right), \tag{2.17}$$
где $P_{C_{i(\nu)}}$ обозначает ортогональную проекцию на множество $C_{i(\nu)}$, $\lambda_k \in [\varepsilon_1, 2-\varepsilon_2]$ для всех $k \geqslant 0$ и $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Управляющая последовательность $\{i(\nu)\}_{\nu=0}^{\infty}$ циклична на I.

Для следующего алгоритма необходимо определить некоторые термины. Вектор
$$\omega = (\omega(i))_{i \in I}$$
называется *весовым вектором*, если
$$\omega(i) \geqslant 0 \text{ для всех } i \in I$$
и
$$\sum_{i \in I} \omega(i) = 1.$$
Имея весовой вектор ω, можем дать определение *выпуклой комбинации*:
$$P_\omega(x) := \sum_{i \in I} \omega(i) P_{C_i}.$$
Последовательность весовых векторов $\{\omega^k\}_{k=0}^{\infty}$ называется *правильной*, если для любого $i \in I$ существует бесконечно много значений k, для которых $\omega^k(i) > 0$.

Алгоритм 2.2 (Метод блочного типа).
Дано. *Пусть $x^0 \in \mathcal{H}$ — произвольная начальная точка.*
Итерационный шаг. *Имея текущую итерацию x^k, рассчитаем следующую итерацию таким образом*:
$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k \left(P_{\omega^k}(x^k) - x^k\right), \tag{2.18}$$
где $\{\omega^k\}_{k=0}^{\infty}$ — это правильная последовательность весовых векторов, а $\lambda_k \in [\varepsilon_1, 2-\varepsilon_2]$ для всех $k \geqslant 0$ и $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$.

Чтобы проиллюстрировать несколько типов проекционных методов для решения выпуклой задачи о допустимости, ограничимся лишь линейной задачей о допустимости, которая является системой линейных уравнений

$$Ax = b,$$

в которой $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $b \in \mathbb{R}^m$. Обозначим через A^i и b_i i-е строку и элемент A и b, соответственно, и зададим i-ю гиперплоскость

$$H_i = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle A^i, z\rangle = b_i\}.$$

Иллюстрации этих и других методов представлены на рис. 1, взятом из [16].

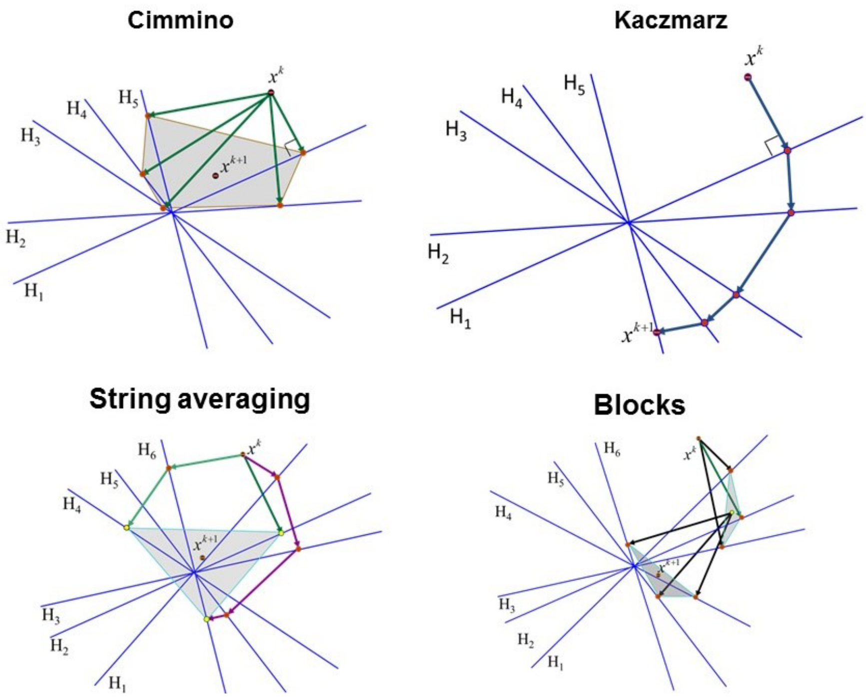


Рис. 1. Различные проекционные методы для линейного случая (рисунок из [16]).

Замечание 2.1. Заметим, что итерации для неподвижной точки (1.3) и (1.4) включают в себя вышеописанные методы. Например, если мы рассмотрим задачу об общей неподвижной точке с $U_i = P_{C_i}$, то мы получим выпуклую задачу о допустимости. Более того, если $T_k = U_{i(k)}$, где $i(k) = (k \bmod m)+1$, то мы получим метод последовательных ортогональных проекций (SOP) (2.1), а если возьмем только один блок I размера m, то, приняв $T = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} U_i$, мы получим метод Чиммино в линейном случае и блочный метод в общем случае.

Далее вспомним две теоремы о неподвижной точке, классическую теорему Опиала [34] и ее обобщение [11, п. 3.6].

Теорема 2.2. *Пусть $\mathcal{H}$ — вещественное гильбертово пространство, и пусть $C \subset \mathcal{H}$ — замкнутое и выпуклое множество. Если $T : C \to C$ — усредненный оператор с $\mathrm{Fix}(T) \neq \varnothing$, то для любого $x^0 \in C$ последовательность $\left\{x^k\right\}_{k=0}^{\infty}$, порожденная $x^{k+1} = T(x^k)$, сходится слабо к точке $x^* \in \mathrm{Fix}(T)$.*

Приведем обобщенную теорему Опиала, см., например, [11, п. 3.6], позволяющую работать с семейством операторов $\{T_k : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема 2.3. *Пусть $C \subseteq \mathcal{H}$ — непустое, замкнутое и выпуклое множество, $S : C \to \mathcal{H}$ — оператор со множеством неподвижных точек, такой что $S - Id$ — деми-замкнут в 0. Пусть*

$\{T_k : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\}_{k=1}^{\infty}$ — асимптотически регулярная последовательность квази-нерастягивающих операторов, таких что

$$\mathrm{Fix}(S) \subseteq \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_k) \right).$$

Пусть $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность, порожденная

$$x^{k+1} = T_k(x^k),$$

с произвольным $x^0 \in \mathcal{H}$.

1. *Если последовательность операторов $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет свойство*

$$\lim_{k\to\infty} \|T_k(x^k) - x^k\| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \|S(x^k) - x^k\| = 0, \tag{2.19}$$

то $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ сходится слабо к точке $\mathrm{Fix}(S)$.

2. *Если $\mathcal{H}$ конечномерно и последовательность операторов $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет свойство*

$$\lim_{k\to\infty} \|T_k(x^k) - x^k\| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \inf \|S(x^k) - x^k\| = 0, \tag{2.20}$$

то $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ сходится к точке $\mathrm{Fix}(S)$.

3. Алгоритм

В этом разделе мы сосредоточимся на задаче об общей неподвижной точке (CFPP) (1.1) с семейством деми-сжимающих операторов $\{U_i\}_{i\in I}$, таких что

$$\bigcap_{i\in I} \mathrm{Fix}\,(U_i) \neq \varnothing.$$

Ситуация заключается в том, что множество индексов I разбивается на M блоков

$$I = I_1 \cup \ldots \cup I_M$$

выбором $\{m_t\}_{t=0}^{M} \subset \mathbb{Z}$ (где $\mathbb{Z}$ — это множество целых чисел), таких что

$$0 = m_0 < m_1 < \ldots < m_M = m,$$

и каждому $1 \leqslant t \leqslant M$ соответствует подмножество

$$I_t := \{m_{t-1} + 1, m_{t-1} + 2, \ldots, m_t\}.$$

Это, очевидно, делит семейство операторов $\{U_i\}_{i\in I}$ на соответствующие группы операторов.

Так как наша задача состоит в построении итерационной схемы в реальном времени, сосредоточимся на том случае, когда блоки и соответствующие операторы находятся в нашем распоряжении не с самого начала, а становятся известны постепенно. В недавней работе Ордонеса и др. [35] два метода в реальном времени ((DROP) [2] и (CARP) [25]) для решения систем линейных уравнений

$$Ax = b, \quad \text{где } A \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ с } m \sim 10^3 \text{ и } n \sim 10^9,$$

возникают в области протонной вычислительной томографии (pCT). Недавно Райх и Залас [37] представили процедуру *модулярного строкового усреднения* (MSA) для решения задачи об общей неподвижной точке в вещественных гильбертовых пространствах. Данная схема является довольно гибкой и позволяет строить вспомогательные операторы T_k, названные *модулями*, которые могут быть использованы во внутреннем цикле расширенного алгоритма с конечным количеством итераций N_k.

Для представления алгоритма введем несколько структур операторов T_k, построенных с помощью семейства операторов $\{U_i\}_{i\in I}$ с учетом M блоков $I = I_1 \cup \ldots \cup I_M$ и использующихся во вспомогательном цикле нашего алгоритма. Эти структуры представлены как частные случаи для модулярного строкового усреднения [37]; более подробную информацию (в том числе и исторической справки) см. в работе [37] и имеющейся там библиографии.

Определение 3.1.

1. *Циклическая* (с релаксацией): $\alpha_k \in [\varepsilon, 2-\varepsilon]$ при $\varepsilon > 0$:
$$T_k = U_{i(k)}, \text{ где } i(k) = (k \bmod m) + 1.$$
2. *Выпуклая комбинация*: Для весового вектора $\omega^k(i) \geqslant 0$ для любых $i \in I_k$, таких что
$$\sum_{i \in I_k} \omega^k(i) = 1,$$
положим
$$T_k = \sum_{i \in I_k} \omega^k(i) U_i.$$
3. *Композиционная*:
$$T_k = \prod_{i \in I_k} U_i.$$
4. *Блочная*: $\alpha_k \in [\varepsilon, 2-\varepsilon]$ при $\varepsilon > 0$:
$$T_k = Id + \alpha_k \left(\sum_{i \in I_k} \omega^k(i) U_i - Id \right).$$
5. «*Жадная*» (наиболее удаленная):
$$T_k := U_{i_k}, \text{ где } i_k = \operatorname*{argmax}_{i \in I_k} \operatorname{dist}(\cdot, \operatorname{Fix}(U_i)).$$

Другими, более частными, структурами, которые могут быть здесь использованы, являются *усреднение по строкам* и различные типы *операторов Дугласа—Рашфорда* (см., например, [7]), в случае, если вместо U_i, используется $2U_i - Id$.

Алгоритм 3.1 (Блочно-итерационная схема в режиме реального времени).

Дано. *Пусть $x^0 \in \mathcal{H}$ — произвольная начальная точка, определено $N_0 \in \mathbb{N}$ (количество итераций), и даны первый блок I_1 и соответствующее подмножество операторов $\{U_i\}_{i \in I_1}$. Вычислим x^1 таким образом*:
$$x^1 = T_0(x^0), \tag{3.1}$$
где оператор T_0 строится согласно определению 3.1 *и может быть циклическим, совместным или композицией $\{U_i\}_{i \in I_1}$.*

Итерационный шаг. *Имея текущую итерацию x^k и зная $N_k \in \mathbb{N}$ (количество итераций), вычислим следующую итерацию*:
$$x^{k+1} = T_k(x^k), \tag{3.2}$$
где оператор T_k может быть построен следующим образом.

1. *Если $k < m$: заданы блоки $I_1, I_2, \ldots, I_k$ и, следовательно, операторы $\{U_i\}_{i \in I_1 \cup \ldots \cup I_k}$. Тогда T_k могут быть построены с учетом каждого, некоторых или всех операторов $\{U_i\}_{i \in I_1 \cup \ldots \cup I_k}$ в циклической, совместной или композиционной формах, основанных на определении* 3.1.
2. *Если $k \geqslant m$: заданы сразу все блоки и, следовательно, операторы $\{U_i\}_{i \in I}$, и тогда T_k могут быть построены на основании определения* 3.1 *с учетом всего семейства операторов $\{U_i\}_{i \in I}$.*

3.1. Сходимость. Для сходимости нашего алгоритма 3.1 будем считать, что выполнены следующие условия.

Условие 3.1. *Для всех $i \in I$ операторы U_i — деми-сжимающие с $\operatorname{Fix}(U_i) \neq \varnothing$, и такие, что $U_{i,\alpha}$ (α-релаксация U_i) являются $(2-\alpha)/\alpha$-сильно квази-нерастягивающими.*

Условие 3.2. *$I \subseteq I_k \cup I_{k+1} \cup \ldots \cup I_{k+s-1}$ для всех $k = 0, 1 \ldots$ и некоторого $s \geqslant m-1$.*

Условие 3.3. *Последовательность $\{N_k\}_{k=0}^{\infty}$, представляющая количество итераций на каждый блок, является ограниченной.*

В журнале *Numerical Algorithms* Райх и Залас [37] предложили процедуру *модулярного строкового усреднения* (MSA) для решения задачи об общей неподвижной точке в вещественных гильбертовых пространствах. Они представили гибкий метод [37, процедура 1.1]) построения вспомогательных операторов T_k, названных *модулями*, которые могут быть использованы во внутреннем цикле расширенного алгоритма с конечным числом итераций N_k для семейства операторов $\{U_i\}_{i\in I}$. Вследствие модульности их схемы, и с учетом условий 3.1–3.3, сходимость нашей итерационной схемы в реальном времени, алгоритма 3.1, вытекает непосредственно из доказательства теоремы 4.1 в работе Райха и Заласа [37], хотя термин «в реальном времени» в этой работе и не упоминается. Следующая теорема является модификацией теоремы [37, теорема 4.1], скорректированной для алгоритма 3.1.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathcal{H}$ — вещественное гильбертово пространство, и даны операторы U_i : $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ при $i \in I$, такие что $\operatorname{Fix}(U_i) \neq \varnothing$. Предположим, что условия* 3.1–3.3 *выполнены, и пусть последовательность $\left\{x^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ сгенерирована алгоритмом* 3.1.

1. *Если для каждого $i \in I$ оператор U_i удовлетворяет принципу деми-замкнутости Опиала, то последовательность $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ сходится слабо к некоторой точке из $\mathcal{C} = \bigcap\limits_{i=1}^{m} \operatorname{Fix}(U_i)$.*
2. *Если для каждого $i \in I$ оператор U_i является приближенно стягивающим, а семейство $\mathfrak{C} := \{\operatorname{Fix}(U_i) \mid i \in I\}$ ограниченно регулярно, то последовательность $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ сходится сильно к некоторой точке из $\mathcal{C}$.*

Необходимо упомянуть, что в этой работе мы считаем, что для всех $i \in I$ операторы U_i являются деми-сжимающим, и, следовательно, по теореме 2.1 для всех $i \in I$ и $\alpha \in (0, 2]$ мы полагаем $U_{i,\alpha}$ (α-релаксация U_i) $(2-\alpha)/\alpha$-сильно квази-нерастягивающими и, таким образом, срезающими; это, собственно, и используется в алгоритме 3.1.

Замечание 3.1.

1. Используя условие 3.1 и теорему 2.1, получаем, что операторы U_i являются срезающими, а структура алгоритма 3.1 может быть произвольного типа согласно определению 3.1.

2. Условие 3.2 означает, что управляющая последовательность почти циклична (определение 2.3 (2)).

3. Условие 3.3 говорит о том, что количество итераций N_k ограничено, что в свою очередь означает, что допустимо любое конечное число промежуточных шагов в каждом блоке.

3. В случае, если $U_i = P_{C_i}$ и $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$, все предположения относительно операторов, касающиеся непрерывности, будь то срезающие, деми-замкнутые или приближенно стягивающие операторы, справедливы.

4. Для задач о допустимости и, в частности, для линейных задач о допустимости произвольная управляющая последовательность оказывается эффективной управляющей последовательностью (это также известно как рандомизированный метод Качмажа, см., например, [31, 33]). Хотя доказательство сходимости не охватывает нашу ситуацию, представляется довольно интересным изучение поведения в теории; это, вероятно, будет исследовано в дальнейших работах. Несмотря на это, мы изучили этот случай в наших численных экспериментах. Другим относящимся к теме результатом, в котором произвольные управляющие последовательности также рассматриваются как класс стохастических алгоритмов (в частности, для задач о допустимости и для вариационных неравенств), является работа Иусема и соавторов [28].

5. В [12, теорема 4.3 и следствие 4.4] представлено новое обобщение теоремы Опиала с меньшим количеством ограничивающих предположений, чем в теореме 2.3. Поэтому будет интересно наблюдать, как данный результат будет изучен и приложен к результатам этой работы.

6. Ордонес и соавторы в работе [35] представили два проекционных метода в реальном времени, (DROP) [2] и (CARP) [25], для решения разреженных и переопределенных систем линейных уравнений $Ax = b$ большой размерности, в которых $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ с $m \sim 10^3$ и $n \sim 10^9$, возникающих в области протонной вычислительной томографии (pCT). Эта работа предлагает многообещающие результаты в экспериментальном поведении, но ей, к сожалению, не хватает достаточного математического обоснования. И хотя наш подход не применяется к их схемам, мы способны провести анализ данной гибкой схемы, которая может быть приложена не только к линейным задачам о допустимости.

4. Вычислительные эксперименты

В этом разделе мы будем сравнивать 4 схемы в реальном времени: Чиммино [18] (алгоритм 2.1), Качмажа [29] (алгоритм 2.2), рандомизированный метод Качмажа [31, 33] и «жадный» метод Качмажа для линейных и нелинейных (квадратичных) выпуклых задач о допустимости (CFP) в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^d$. Все вычислительные эксперименты были проведены на обычном ноутбуке Lenovo с процессором Intel(R) Core(TM) i5-4200MQ CPU 1,6 ГГц с 8 Гб оперативной памяти. Программа реализована с помощью пакета MATLAB 2017b.

Пример 4.1 (Линейные CFP)**.** В этом примере мы рассматриваем разрешение системы линейных уравнений

$$Ax = b,$$

в частности, восстановление тестового изображения $x \in [0,1]^n$ «Ленна» (https://en.wikipedia.org/wiki/Lenna), состоящего из ограниченного количества томографических проекций. Каждый пиксель обозначим через $x_i \in [0,1]$, а каждый элемент из $b \in \mathbb{R}^m$, названный *томографическим измерением*, или *единичной проекцией*, соответствует интегрированному уровню яркости x вдоль единичного луча. Всякий элемент матрицы $a_{ij} \geqslant 0$ задает длину пересечения i-го луча с j-м пикселем. Если луч i и пиксель j не пересекаются, то $a_{ij} = 0$, см. рис. 2. Сложение всех уравнений для всех лучей вместе приводит к системе линейных уравнений $Ax = b$, а размеры таковы, что

$$A = (A_{\theta_1}^T \;\; A_{\theta_2}^T \;\; \ldots \;\; A_{\theta_{\mathtt{nA}}}^T)^T,$$

и каждая блочная матрица A_{θ_i} соответствует своему проекционному углу.

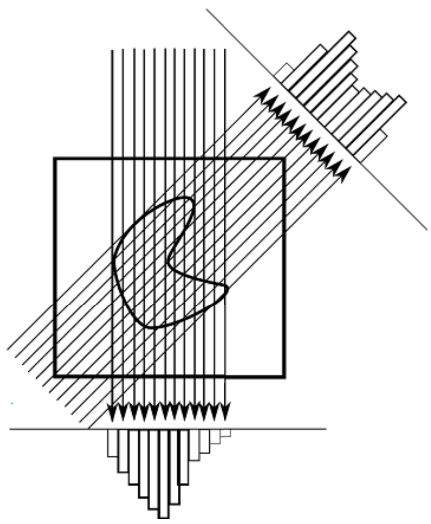


Рис. 2. Геометрическая структура параллельного пучка: множество параллельных лучей пропускается через объект по различным направлениям. Это обычно считается одной проекцией. Случай с двумя проекциями проиллюстрирован на рисунке: каждая проекция отвечает измерению вдоль одного луча и соответствует криволинейному интегралу от кусочно-постоянной функции.

В наших экспериментах мы используем в MATLAB шаблон `paralleltomo.m` из пакета AIR Tools [27], который обеспечивает построение томографической матрицы для заданного вектора углов. Размер шкалы яркости изображения Ленны составляет $N = 128$ (это означает 128×128 пикселей), и выберем для каждого угла число параллельных пучков $nA = 100$. Еще зададим параметр $p = \mathrm{round}(128\sqrt{2}) = 169$. Выбрав параметры таким образом, получаем переопределенную матрицу A размера $(nA * p) \times (N^2) = 18100 \times 16384$. В этом случае нашими данными являются строки A и соответствующие элементы из b. Далее разобьем систему $Ax = b$ на 10 подсистем $A_j x = b^j$ размера 1810×16384 для $j = 1, \ldots, 10$. Время прибытия для каждого блока фиксировано и должно составлять 1 минуту. Критерием остановки для всех алгоритмов является $\|x^{k+1} - x^k\| \leqslant 10^{-3}$, а начальная стартовая точка $x^0 = 0$.

Во всех алгоритмах, кроме метода Чиммино, мы полагаем параметры релаксации $\lambda_k \equiv 1$, а в методе Чиммино $\lambda_k \equiv 1{,}9$. Мы тестируем и сравниваем наши схемы на основе изображения «Ленна» (https://en.wikipedia.org/wiki/Lenna).

Напомним, что ортогональная проекция точки $x \in \mathbb{R}^d$ на гиперплоскость

$$H = \{z \in \mathbb{R}^d \mid \langle a, z \rangle \leqslant \beta\},$$

где $a \in \mathbb{R}^d$ (ненулевой) и $\beta \in \mathbb{R}$, рассчитывается следующим образом:

$$P_H(x) = \begin{cases} x & \text{при } \langle a, x \rangle = \beta, \\ x - \dfrac{\langle x, a \rangle - \beta}{\|a\|^2} a & \text{при } \langle a, x \rangle \neq \beta. \end{cases} \tag{4.1}$$

На рис. 3 представлено сравнение времени работы программы (в секундах) для метода Чиммино в реальном времени и регулярного метода Чиммино по всем данным. Далее на рис. 4–6 изображены графики (слева), позволяющие сравнить время выполнения программы, а также различия восстановленных изображений, полученных с помощью работы алгоритмов в реальном времени и их регулярных аналогов по всем данным, начиная с момента получения этих данных. На графиках ось y, означающая *погрешность*, определяется как $\|Ax^k - b\|$. И хотя разница в восстановленных разными методами изображениях едва заметна невооруженному глазу (изображение слева получено с помощью регулярных алгоритмов, в то время как изображение справа — с помощью аналогов в реальном времени), графики демонстрируют, что для получения необходимой аппроксимации лучше применять алгоритмы в реальном времени (порой даже до получения всех данных).

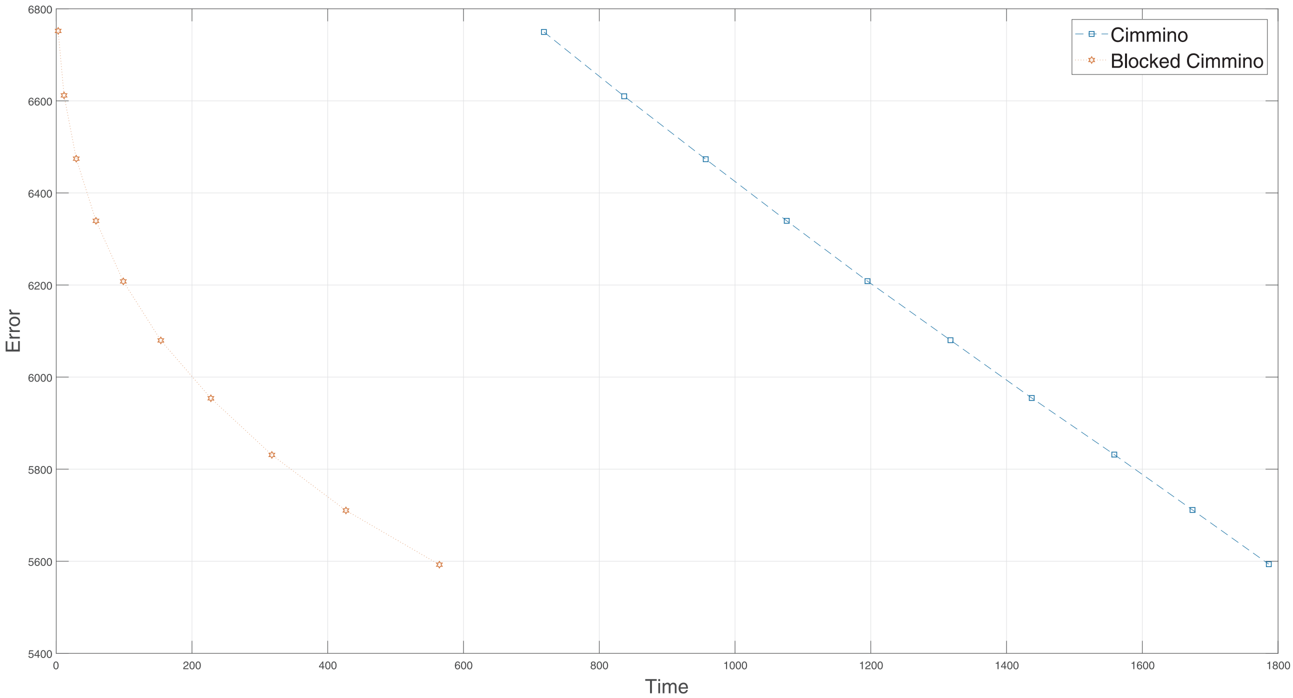


Рис. 3. Метод Чиммино с 10-ю свипами и 10-ю блоками.

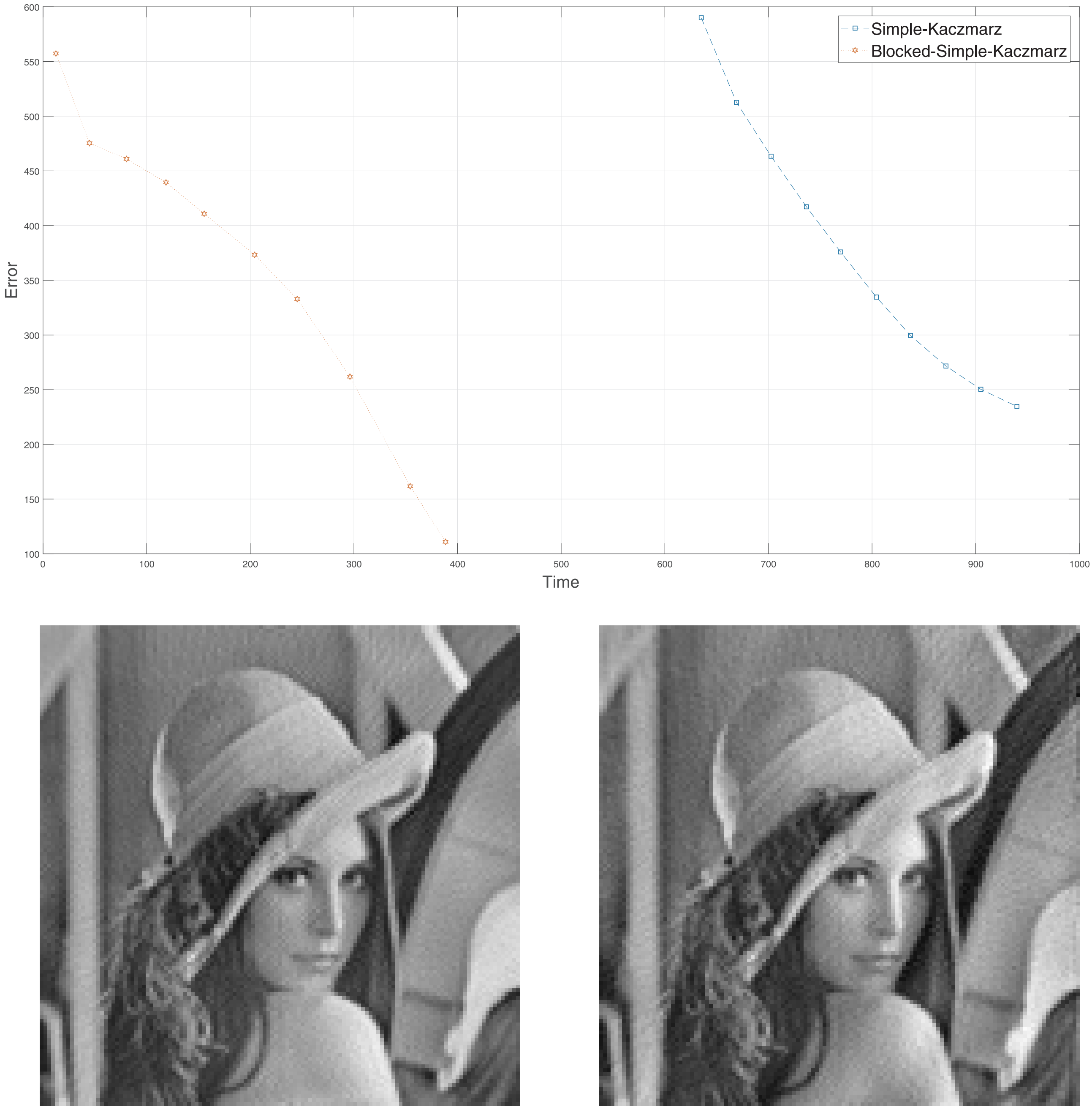


Рис. 4. Сравнение регулярного метода Качмажа и метода Качмажа в реальном времени. Сверху — график сравнения выполнения регулярного метода и метода Качмажа в реальном времени. Изображение слева получено регулярным методом, а изображение справа — его аналогом в режиме реального времени.

Пример 4.2 (Квадратичные CFP)**.** Здесь мы генерируем 10 квадратичных задач о допустимости в $\mathbb{R}^{1000}$, т. е. каждое множество представляет собой шар. В каждом из экспериментов мы увеличиваем количество множеств и сравниваем выполнение всех алгоритмов в режиме реального времени и их регулярных аналогов, ожидающих поступления данных. Каждый шар получается выбором центральной точки $c^i \in \mathbb{R}^{1000}$ с произвольными, равномерно сгенерированными координатами на отрезке $[-5, 5]$. Выбор радиуса $r_i := \left\|c^i\right\| + \alpha_i$ определяется добавлением к расстоянию от центра до начала координат $\left\|c^i\right\|$ произвольного числа, равномерно выбранного из отрезка $[0, 0{,}1]$. Что гарантирует, что шар содержит начало координат и, следовательно, приводит к состоятельной CFP. Векторы x^0 задаются произвольным выбором координат из отрезка $[-10, 10]$. Число ограничений (шаров) варьируется от 200 до 20000. Как и в примере 4.1, для каждой CFP мы разбиваем

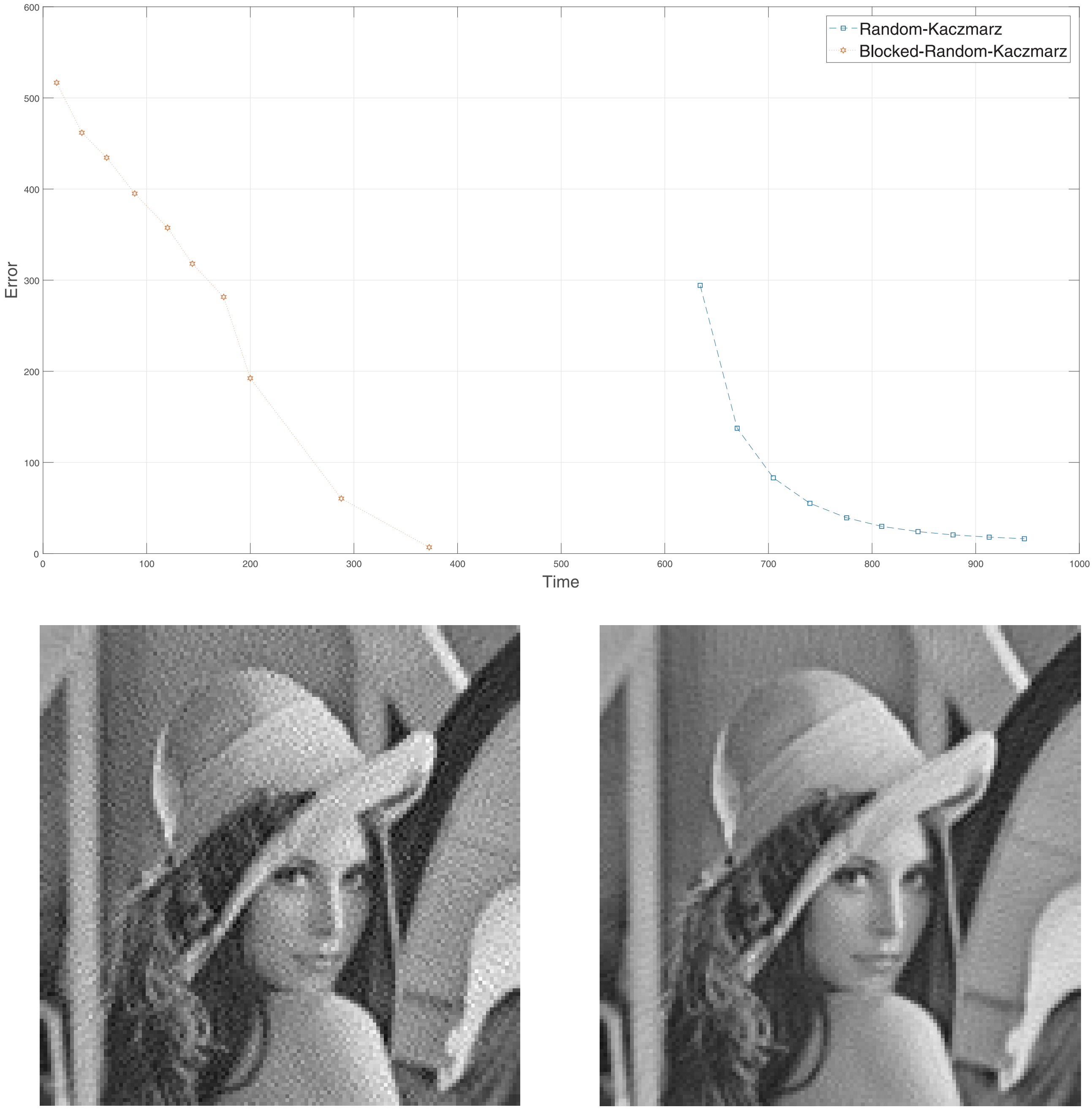


Рис. 5. Сравнение регулярного метода Качмажа и рандомизированного метода Качмажа в реальном времени. Сверху — график сравнения выполнения этих двух методов. Изображение слева получено регулярным методом, а изображение справа — его аналогом в режиме реального времени.

число ограничений (шаров) на 10 блоков и устанавливаем правило остановки:

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leqslant \varepsilon = 10^{-7}.$$

Параметры релаксации λ_k полагаем равными 1, а в методе Чиммино они были равны 1,9. В этих экспериментах мы можем наблюдать, что с увеличением количества ограничений возрастает и разница в выполнении схем в реальном времени и их регулярных аналогов. Это вновь подчеркивает потенциальную применимость данных методов к задачам в реальном времени. Результаты, представленные на рис. 7, демонстрируют, что с увеличением количества ограничений (шаров) алгоритмы в реальном времени сходятся быстрее, чем их регулярные аналоги.

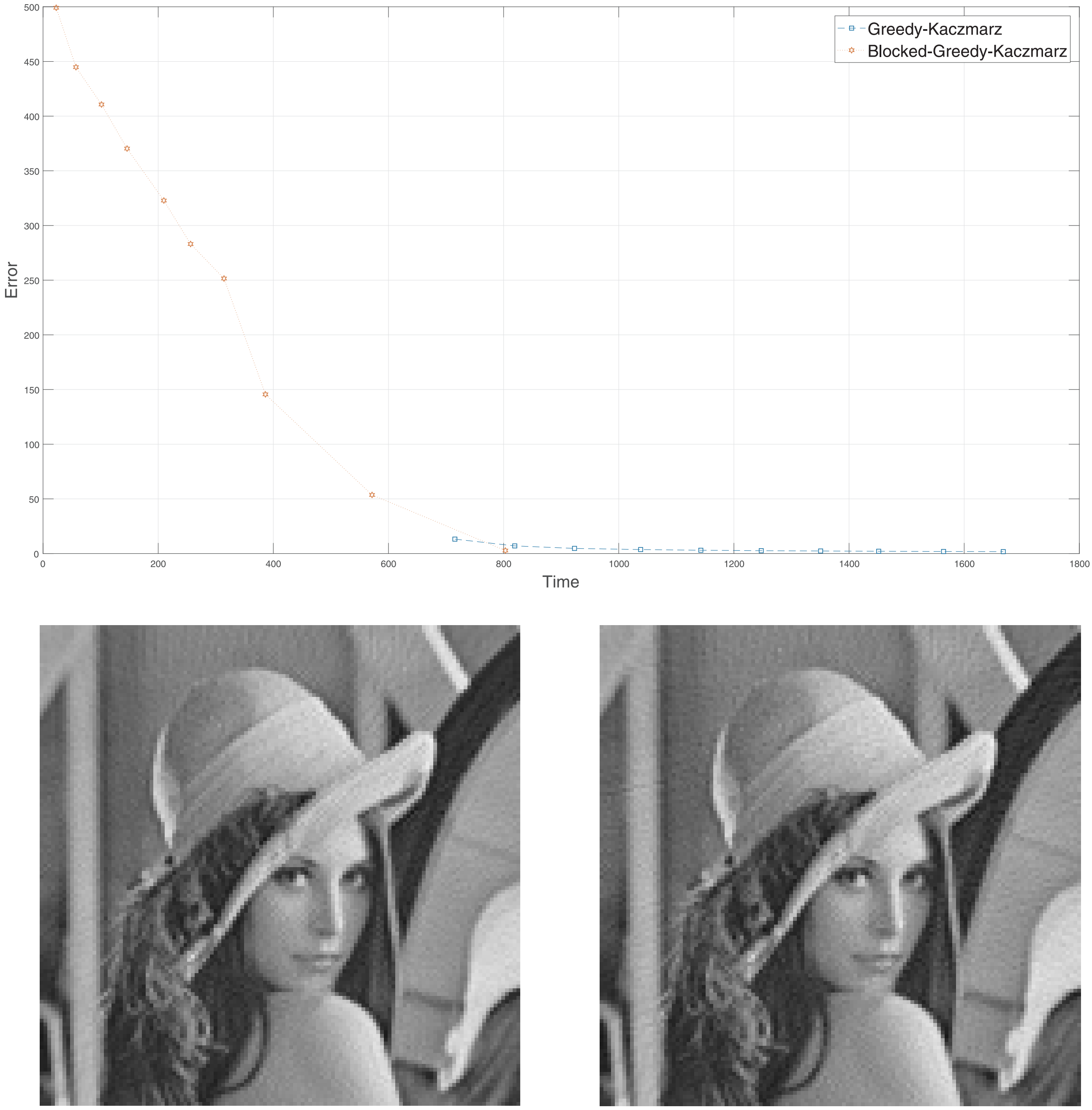


Рис. 6. Сравнение регулярного метода и «жадного» метода в реальном времени. Сверху — график сравнения выполнения регулярного метода и «жадного» рандомизированного метода в реальном времени. Изображение слева получено регулярным методом, а изображение справа — его аналогом в режиме реального времени.

Вспомним, как вычисляется ортогональная проекция точки $x \in \mathbb{R}^n$ на замкнутый шар $B(z,r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-z\| \leqslant r\}$, где $z \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$:

$$P_{B(z,r)}(x) = \begin{cases} x & \text{при } \|x-z\| \leqslant r, \\ z + \dfrac{r}{\|x-z\|}(x-z) & \text{при } \|x-z\| > r. \end{cases} \tag{4.2}$$

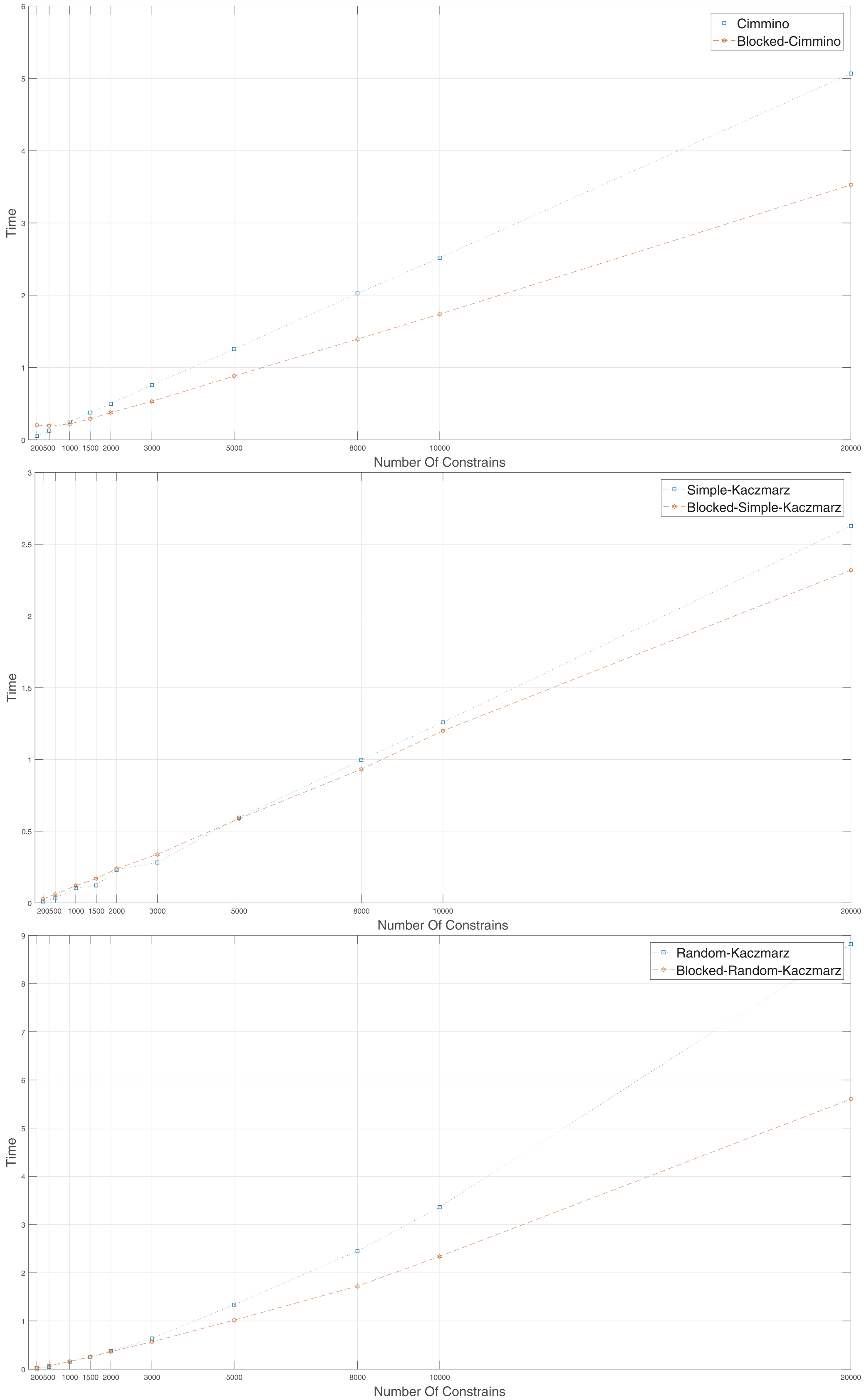


Рис. 7. Время выполнения программы (в секундах) для 10 свипов и 10 блоков, соответственно, для метода Чиммино, циклического (Качмаж) и произвольного методов для решения квадратичных задач о допустимости при увеличении количества шаров.

5. Заключение

В данной работе были рассмотрены *задача об общей неподвижной точке* (CFPP) и *выпуклая задача о допустимости* (CFP) в вещественных гильбертовых пространствах. Мы изучили ситуацию, в которой нам с самого начала недоступны целые наборы (операторов/множеств), и мы получаем их постепенно.

Руководствуясь недавней работой Ордонеса и соавторов [35], мы представили итерационную схему в режиме реального времени, способную работать с любыми блоками данных (операторов/множеств) для любого конечного числа итераций перед переходом к следующему блоку. Доказательство сходимости нашей схемы основано на недавнем результате Райха и Заласа [37], процедуре *модулярного строкового усреднения* (MSA). Мы также провели вычислительные эксперименты, демонстрирующие, что схема в реальном времени вычисляет решение быстрее в сравнении с тем случаем, когда все данные известны с самого начала. В то время как Ордонес и соавторы в работе [35] сосредоточены на исследовании только линейных систем уравнений без достаточного математического обоснования, мы проводим более общий анализ задач об общей неподвижной точке с полным теоретическим обоснованием.

И хотя структуры методов CARP и DROP не включают в себя алгоритмических структур T_k в алгоритме 3.1, мы планируем продолжить изучение в этом направлении и, более того, получить оценки ошибок и скорости сходимости этой новой схемы.

Благодарности

Мы высоко ценим конструктивные комментарии анонимных рецензентов, которые помогли нам улучшить нашу работу. Авторы выражают искреннюю признательность проф. Яиру Цензору и д-ру Рафалу Заласу за их ценные советы. Работа Авива Гибали поддержана программой EU FP7 IRSES STREVCOMS, грант номер PIRSES-GA-2013-612669.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Губин Л. Г., Поляк Б. Т., Райк Е. В.* Метод проекции для нахождения общей точки выпуклых множеств// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1967. — *7*. — С. 1–24.
2. *Aharoni R., Censor Y.* Block-iterative projection methods for parallel computation of solutions to convex feasibility problems// Linear Algebra Appl. — 1989. — *120*. — С. 165–175.
3. *Baillon J.-B., Bruck R. E., Reich S.* On the asymptotic behavior of nonexpansive mappings and semigroups in banach spaces// Houston J. Math. — 1978. — *4*. — С. 1–9.
4. *Bauschke H. H., Borwein J.* On projection algorithms for solving convex feasibility problems// SIAM Rev. — 1996. — *38*. — С. 367–426.
5. *Bauschke H. H., Combettes P. L.* Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces. — Berlin: Springer, 2011.
6. *Bauschke H. H., Koch V. R.* Projection methods: Swiss army knives for solving feasibility and best approximation problems with halfspaces// В сб.: «Infinite Products of Operators and Their Applications. A Research Workshop of the Israel Science Foundation, Haifa, Israel, May 21–24, 2012». — Providence: Am. Math. Soc., 2015. — С. 1–40.
7. *Borwein J. M., Tam M. K.* A cyclic Douglas—Rachford iteration scheme// J. Optim. Theory Appl. — 2014. — *160*. — С. 1–29.
8. *Browder F. E.* Fixed point theorems for noncompact mappings in Hilbert space// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1965. — *53*. — С. 1272–1276.
9. *Byrne C. L.* A unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image reconstruction// Inverse Problems. — 1999. — *20*. — С. 1295–1313.
10. *Byrne C. L.* Applied iterative methods. — Wellsely: AK Peters, 2008.
11. *Cegielski A.* Iterative methods for fixed point problems in Hilbert spaces. — Berlin—Heidelberg: Springer, 2012.
12. *Cegielski A., Reich S., Zalas R.* Regular sequences of quasi-nonexpansive operators and their applications// SIAM J. Optim. — 2018. — *28*. — С. 1508–1532.
13. *Cegielski A., Zalas R.* Methods for variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of quasi-nonexpansive operators// Numer. Funct. Anal. Optim. — 2013. — *34*. — С. 255–283.
14. *Cegielski A., Zalas R.* Properties of a class of approximately shrinking operators and their applications// Fixed Point Theory. — 2014. — *15*. — С. 399–426.

15. *Censor Y., Chen W., Combettes P. L., Davidi R., Herman G. T.* On the effectiveness of projection methods for convex feasibility problems with linear inequality constraints// Comput. Optim. Appl. — 2012. — *51.* — С. 1065–1088.
16. *Censor Y., Elfving T., Herman G. T.* Averaging strings of sequential iterations for convex feasibility problems// В сб.: «Infinite Products of Operators and Their Applications. A Research Workshop of the Israel Science Foundation, Haifa, Israel, March 13–16, 2000». — Amsterdam: North-Holland, 2001. — С. 101–113.
17. *Censor Y., Zenios S. A.* Parallel optimization: theory, algorithms, and applications. — New York: Oxford Univ. Press, 1997.
18. *Cimmino G.* Calcolo approssiomatto per le soluzioni dei sistemi di equazioni lineari// La Ricerca Sci. XVI. Ser. II. — 1938. — *1.* — С. 326–333.
19. *Combettes P. L.* Quasi-Fejérian analysis of some optimization algorithms// В сб.: «Infinite Products of Operators and Their Applications. A Research Workshop of the Israel Science Foundation, Haifa, Israel, March 13–16, 2000». — Amsterdam: North-Holland, 2001. — С. 115–152.
20. *Das I., Potra F. A.* Subsequent convergence of iterative methods with applications to real-time model-predictive control// J. Optim. Theory Appl. — 2003. — *119.* — С. 37–47.
21. *Diehl M.* Real-Time optimization for large scale nonlinear processes. — Heidelberg: Univ. Heidelberg, 2001.
22. *Escalante R., Raydan M.* Alternating projection methods. — Philadelphia: SIAM, 2011.
23. *Galántai A.* Projectors and projection methods. — Boston—Dordrecht—London: Kluwer Academic Publ., 2004.
24. *Goebel K., Reich S.* Uniform convexity, hyperbolic geometry, and nonexpansive mappings. — New York—Basel: Marcel Dekker, 1984.
25. *Gordon D., Gordon R.* Component-averaged row projections: A robust block-parallel scheme for sparse linear systems// SIAM J. Sci. Comput. — 2005. — *27.* — С. 1092–1117.
26. *Gordon R., Bender R., Herman G. T.* Algebraic reconstruction techniques (art) for three-dimensional electron microscopy and X-ray photography// Bull. Am. Math. Soc. — 1970. — *29.* — С. 471–481.
27. *Hansen P. C., Saxild-Hansen M.* AIR Tools — a MATLAB package of algebraic iterative reconstruction methods// J. Comput. Appl. Math. — 2012. — *236*, № 8. — С. 2167–2178.
28. *Iusem A., Jofré A., Thompson P.* Incremental constraint projection methods for monotone stochastic variational inequalities// arXiv:1703.00272v2. — 2017.
29. *Kaczmarz S.* Angenäherte auflösung von systemen linearer gleichungen// Bull. Int. l'Acad. Polon. Sci. Lett. A. — 1937. — *35.* — С. 355–357.
30. *Karp R. M.* On-line algorithms versus off-line algorithms: How much is it worth to know the future?// В сб.: «Proceedings of the IFIP 12th World Computer Congress on Algorithms, Software, Architecture, Information Processing '92». — 1992. — *1.* — С. 416–429.
31. *Leventhal L., Lewis A. S.* Randomized methods for linear constraints: convergence rates and conditioning// Math. Oper. Res. — 2010. — *35.* — С. 641–654.
32. *Măruşter Şt., Popirlan C.* On the Mann-type iteration and the convex feasibility problem// J. Comput. Appl. Math. — 2008. — *212.* — С. 390–396.
33. *Needell D.* Randomized Kaczmarz solver for noisy linear systems// BIT Numer. Math. — 2010. — *50.* — С. 395–403.
34. *Opial Z.* Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings// Bull. Am. Math. Soc. — 1967. — *73.* — С. 591–597.
35. *Ordoñez C. E., Karonis N., Duffin K., Coutrakon G., Schulte R., Johnson R., Pankuch M.* A real-time image reconstruction system for particle treatment planning using proton computed tomography (PCT)// Phys. Proc. — 2017. — *90.* — С. 193–199.
36. *Penfold S., Censor Y., Schulte R. W., Bashkirov V., McAllister S., Schubert K. E., Rosenfeld A. B.* Block-iterative and string-averaging projection algorithms in proton computed tomography image reconstruction// В сб.: «Biomedical Mathematics: Promising Directions in Imaging, Therapy Planning and Inverse Problems». — Madison: Medical Phys. Publ., 2010. — С. 347–368.
37. *Reich S., Zalas R.* A modular string averaging procedure for solving the common fixed point problem for quasi-nonexpansive mappings in hilbert space// Numer. Algorithms. — 2016. — *72.* — С. 297–323.

Aviv Gibali
Department of Mathematics, Ort Braude College, Karmiel 2161002, Israel;
The Center for Mathematics and Scientific Computation, University of Haifa,
Mt. Carmel, Haifa 3498838, Israel
E-mail: avivg@braude.ac.il

Dimitri Teller
Department of Mathematics, Ort Braude College, Karmiel 2161002, Israel
E-mail: ktui619@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-616-636 UDC 517.98+519.65

A Real-Time Iterative Projection Scheme for Solving the Common Fixed Point Problem and Its Applications

© 2018 **A. Gibali, D. Teller**

Abstract. In this paper, we are concerned with the Common Fixed Point Problem (CFPP) with demi-contractive operators and its special instance, the Convex Feasibility Problem (CFP) in real Hilbert spaces. Motivated by the recent result of Ordoñez et al. [35] and in general, the field of online/real-time algorithms, e.g., [20, 21, 30], in which the entire input is not available from the beginning and given piece-by-piece, we propose an online/real-time iterative scheme for solving CFPPs and CFPs in which the involved operators/sets emerge along time. This scheme is capable of operating on any block, for any finite number of iterations, before moving, in a serial way, to the next block.

The scheme is based on the recent novel result of Reich and Zalas [37] known as the Modular String Averaging (MSA) procedure. The convergence of the scheme follows [37] and other classical results in the fields of fixed point theory and variational inequalities, such as [34].

Numerical experiments for linear and non-linear feasibility problems with applications to image recovery are presented and demonstrate the validity and potential applicability of our scheme, e.g., to online/real-time scenarios.

REFERENCES

1. L. G. Gubin, B. T. Polyak, and E. V. Raik, "Metod proektsii dlya nakhozhdeniya obshchey tochki vypuklykh mnozhestv" [The method of projections for finding the common point of convex sets], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 1967, **7**, 1–24 (in Russian).
2. R. Aharoni and Y. Censor, "Block-iterative projection methods for parallel computation of solutions to convex feasibility problems," *Linear Algebra Appl.*, 1989, **120**, 165–175.
3. J.-B. Baillon, R.E. Bruck, and S. Reich, "On the asymptotic behavior of nonexpansive mappings and semigroups in banach spaces," *Houston J. Math*, 1978, **4**, 1–9.
4. H. H. Bauschke and J. Borwein, "On projection algorithms for solving convex feasibility problems," *SIAM Rev.*, 1996, **38**, 367–426.
5. H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, Springer, Berlin, 2011.
6. H. H. Bauschke and V. R. Koch, "Projection methods: Swiss army knives for solving feasibility and best approximation problems with halfspaces," In: *Infinite Products of Operators and Their Applications. A Research Workshop of the Israel Science Foundation, Haifa, Israel, May* 21–24, 2012, Am. Math. Soc., Providence, 2015, 1–40.
7. J. M. Borwein and M. K. Tam, "A cyclic Douglas—Rachford iteration scheme," *J. Optim. Theory Appl.*, 2014, **160**, 1–29.
8. F. E. Browder, "Fixed point theorems for noncompact mappings in Hilbert space," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1965, **53**, 1272–1276.
9. C. L. Byrne, "A unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image reconstruction," *Inverse Problems*, 1999, **20**, 1295–1313.
10. C. L. Byrne, *Applied Iterative Methods*, AK Peters, Wellsely, 2008.
11. A. Cegielski, *Iterative Methods for Fixed Point Problems in Hilbert Spaces*, Springer, Berlin—Heidelberg, 2012.
12. A. Cegielski, S. Reich, and R. Zalas, "Regular sequences of quasi-nonexpansive operators and their applications," *SIAM J. Optim.*, 2018, **28**, 1508–1532.

13. A. Cegielski and R. Zalas, “Methods for variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of quasi-nonexpansive operators,” *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 2013, **34**, 255–283.
14. A. Cegielski and R. Zalas, “Properties of a class of approximately shrinking operators and their applications,” *Fixed Point Theory*, 2014, **15**, 399–426.
15. Y. Censor, W. Chen, P. L. Combettes, R. Davidi, and G. T. Herman, “On the effectiveness of projection methods for convex feasibility problems with linear inequality constraints,” *Comput. Optim. Appl.*, 2012, **51**, 1065–1088.
16. Y. Censor, T. Elfving, and G. T. Herman, “Averaging strings of sequential iterations for convex feasibility problems,” In: *Infinite Products of Operators and Their Applications. A Research Workshop of the Israel Science Foundation, Haifa, Israel, March* 13–16*,* 2000, North-Holland, Amsterdam, 2001, 101–113.
17. Y. Censor and S. A. Zenios, *Parallel Optimization*: *Theory, Algorithms, and Applications*, Oxford Univ. Press, New York, 1997.
18. G. Cimmino, “Calcolo approssiomatto per le soluzioni dei sistemi di equazioni lineari,” *La Ricerca Scientifica XVI. Ser. II*, 1938, **1**, 326–333.
19. P. L. Combettes, “Quasi-Fejérian analysis of some optimization algorithms,” In: *Infinite Products of Operators and Their Applications. A Research Workshop of the Israel Science Foundation, Haifa, Israel, March* 13–16*,* 2000, North-Holland, Amsterdam, 2001, 115–152.
20. I. Das and F. A. Potra, “Subsequent convergence of iterative methods with applications to real-time model-predictive control,” *J. Optim. Theory Appl.*, 2003, **119**, 37–47.
21. M. Diehl, *Real-Time Optimization for Large Scale Nonlinear Processes*, Univ. Heidelberg, Heidelberg, 2001.
22. R. Escalante and M. Raydan, *Alternating Projection Methods*, SIAM, Philadelphia, 2011.
23. A. Galántai, *Projectors and Projection Methods*, Kluwer Academic Publ., Boston—Dordrecht—London, 2004.
24. K. Goebel and S. Reich, *Uniform Convexity, Hyperbolic Geometry, and Nonexpansive Mappings*, Marcel Dekker, New York—Basel, 1984.
25. D. Gordon and R. Gordon, “Component-averaged row projections: A robust block-parallel scheme for sparse linear systems,” *SIAM J. Sci. Comput.*, 2005, **27**, 1092–1117.
26. R. Gordon, R. Bender, and G. T. Herman, “Algebraic reconstruction techniques (art) for three-dimensional electron microscopy and X-ray photography,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1970, **29**, 471–481.
27. P. C. Hansen and M. Saxild-Hansen, “AIR Tools — a MATLAB package of algebraic iterative reconstruction methods,” *J. Comput. Appl. Math.*, 2012, **236**, No. 8, 2167–2178.
28. A. Iusem, A. Jofré, and P. Thompson, “Incremental constraint projection methods for monotone stochastic variational inequalities,” *arXiv:1703.00272v2*, 2017.
29. S. Kaczmarz, “Angenäherte auflösung von systemen linearer gleichungen,” *Bulletin International de l’Académie Polonaise des Sciences et des Lettres A*, 1937, **35**, 355–357.
30. R. M. Karp, “On-line algorithms versus off-line algorithms: How much is it worth to know the future?,” In: *Proceedings of the IFIP 12th World Computer Congress on Algorithms, Software, Architecture, Information Processing* ’92, 1992, **1**, 416–429.
31. L. Leventhal and A. S. Lewis, “Randomized methods for linear constraints: convergence rates and conditioning,” *Math. Oper. Res.*, 2010, **35**, 641–654.
32. Şt. Măruşter and C. Popirlan, “On the Mann-type iteration and the convex feasibility problem,” *J. Comput. Appl. Math.*, 2008, **212**, 390–396.
33. D. Needell, “Randomized Kaczmarz solver for noisy linear systems,” *BIT Numer. Math.*, 2010, **50**, 395–403.
34. Z. Opial, “Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1967, **73**, 591–597.
35. C. E. Ordoñez, N. Karonis, K. Duffin, G. Coutrakon, R. Schulte, R. Johnson, and M. Pankuch, “A real-time image reconstruction system for particle treatment planning using proton computed tomography (PCT),” *Physics Procedia*, 2017, **90**, 193–199.
36. S. Penfold, Y. Censor, R. W. Schulte, V. Bashkirov, S. McAllister, K. E. Schubert, and A. B. Rosenfeld, “Block-iterative and string-averaging projection algorithms in proton computed tomography image reconstruction,” In: *Biomedical Mathematics*: *Promising Directions in Imaging, Therapy Planning and Inverse Problems*, Medical Phys. Publ., Madison, 2010, 347–368.
37. S. Reich and R. Zalas, “A modular string averaging procedure for solving the common fixed point problem for quasi-nonexpansive mappings in hilbert space,” *Numer. Algorithms*, 2016, **72**, 297–323.

Aviv Gibali
Department of Mathematics, Ort Braude College, Karmiel, Israel;
The Center for Mathematics and Scientific Computation, University of Haifa, Haifa, Israel
E-mail: avivg@braude.ac.il

Dimitri Teller
Department of Mathematics, Ort Braude College, Karmiel, Israel
E-mail: ktui619@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 4 (2018). С. 637–649

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-637-649 УДК 517.5

НЕРАВЕНСТВО ШВАРЦА И ФОРМУЛА ШВАРЦА ДЛЯ A-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2018 г. **Н. М. ЖАББОРОВ, Т. У. ОТАБОЕВ, Ш. Я. ХУРСАНОВ**

Аннотация. В статье исследуются A-аналитические функции. Приводятся основные фундаментальные теоремы теории A-аналитических функций, доказываются аналог неравенства Шварца, формулы Шварца и Пуассона для A-аналитических функций.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Настоящая работа посвящена аналитической теории решения уравнения Бельтрами

$$f_{\bar z}(z) = \mu(z) f_z(z), \tag{1.1}$$

имеющего непосредственное отношение к квазиконформным отображениям. Относительно функции $\mu(z)$ в общем случае предполагается, что она измерима и

$$|\mu(z)| \leqslant C < 1$$

почти всюду в рассматриваемой области $D \subset \mathbb{C}$. В литературе решение уравнения (1.1) принято называть *A-аналитическими функциями*.

В случае $|\mu(z)| < 1$ п. в. в D гомеоморфные решения не меняют ориентацию, а в случае $|\mu(z)| > 1$ п. в. в D меняют. Эти случаи уравнения Бельтрами различаются лишь формально. Интерес представляет ситуация, когда одновременно существуют подобласти D, в которых п. в. выполнено $|\mu(z)| < 1$ и подобласти D, в которых п. в. $|\mu(z)| > 1$. В этом случае говорится, что уравнений Бельтрами имеет *переменный тип*. Его решения описывают со складками, сборками и т. п. Задача исследования уравнений Бельтрами переменного типа ставилась Л. И. Волковыским [6].

Изучение уравнения (1.1) в общем случае было связано с изучением классического уравнения Бельтрами

$$f_{\bar z}(z) = \mu^*(z) f_z(z)$$

с комплексной дилатацией

$$\mu^*(z) = \begin{cases} \mu(z) & \text{при } |\mu(z)| \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{\overline{\mu}(z)} & \text{при } |\mu(z)| > 1. \end{cases}$$

Это уравнение называем в дальнейшем уравнением, *ассоциированным* с уравнением (1.1). Очевидно, $|\mu(z)| < 1$ п. в. в D, причем в классическом случае уравнение Бельтрами и ассоциированное уравнение совпадает с самим уравнением, так как $\mu(z) = \mu^*(z)$. Связь между уравнениями Бельтрами переменного типа и ассоциированными уравнениями Бельтрами впервые отмечена Э. Х. Якубовым [13].

В работе Ю. Сребро и Э. Х. Якубова [17] была установлена локальная теорема существования и единственности гомеоморфных решений вырождающихся уравнений Бельтрами, записанная в геометрических терминах.

В работе Д. А. Ковтонюка, И. В. Петкова, В. И. Рязанова, Р. Р. Салимова [10] доказано существование регулярных решений задачи Дирихле для вырожденных уравнений Бельтрами в произвольных жордановых областях и псевдорегулярных, а также многозначных решений в произвольных конечносвязных областях, ограниченных попарно непересекающимися жордановыми кривыми. Дальнейшее развитие в этом направлении получено А. Н. Кондрашовым в работе [11], где доказана теорема о локальном существовании решений ассоциированного уравнения в окрестности дуги вырождения, записанная в геометрических терминах.

Одной из фундаментальных работ в теории уравнений Бельтрами является монография В. Гутлянского, В. Рязанова, Ю. Сребро и Э. Якубова [15], в которой рассматривается геометрический подход к исследованию уравнения Бельтрами.

Теорема 1.1 (см. [14]). *Для любой измеримой на плоскости* $\mathbb{C}$ *функции*

$$A(z): \ \|A\|_\infty < 1$$

существует единственное гомеоморфное решение $\chi(z)$ *уравнения* (1.1) *такое, что* χ *оставляет неподвижными точки* $0,\ 1,\ \infty$.

Отметим, что если функция $A(z)$ ($|A(z)| \leqslant C < 1$) определена только в области $D \subset \mathbb{C}$, то ее можно продолжать на всю плоскость $\mathbb{C}$, полагая $A \equiv 0$ вне D, так что теорема 1.1 верна для любой области $D \subset \mathbb{C}$.

Теорема 1.2 (см. [1,2]). *Множество всех обобщенных решений уравнения* (1.1) *исчерпывается формулой*

$$f(z) = \Phi[\chi(z)],$$

где $\chi(z)$ — *гомеоморфное решение из теоремы* 1.1, *а* $\Phi(\xi)$ — *голоморфная функция от* ξ *в* $\chi(D)$. *Более того, голоморфная функция*

$$\Phi = f \circ \chi^{-1}$$

наследует особенности f *с сохранением типов.*

Из теоремы 1.2 вытекает, что A-аналитическая функция f осуществляет внутреннее отображение, т. е. она переводит открытое множество в открытое. Отсюда вытекает справедливость принципа максимума: для любой ограниченной области $D \subset \mathbb{C}$ максимум модуля достигается только на границе,

$$|f(z)| < \max_{z\in\partial D} |f(z)|, \ \ z \in D.$$

Если функция не обращается в нуль, то верен и принцип минимума:

$$|f(z)| > \min_{z\in\partial D} |f(z)|, \ \ z \in D.$$

Теорема 1.3 (см. [5]). *Если функция* $A(z)$ *принадлежит классу* m *раз непрерывно дифференцируемых функций*: $A(z) \in C^m(D)$, *то всякое решение* f *уравнения* (1.1) *тоже принадлежит, как минимум, этому же классу, т. е.* $f \in C^m(D)$.

Целью данной статьи является исследование A-аналитических функций в одном частном случае, когда функция $A(z)$ является антианалитической функцией в рассматриваемой области. В разделе 3 доказывается аналог неравенства Шварца для A-аналитических функций, в разделе 4 доказываются аналоги формулы Шварца и интегральная формула Пуассона для A-аналитических функций.

2. Основные свойства A-аналитических функций

Изучение A-аналитических функций инициировано их применениями в задачах томографии. Так, в цикле работ А. Л. Бухгейма и С. Г. Казанцева (см. [4]) задача Радона интерпретируется при помощи краевых задач для бесконечномерного аналога уравнения

$$f_{\bar z} - A f_z = 0,$$

где f — функция комплексного аргумента z со значениями в некотором банаховом пространстве X и A — линейно непрерывный оператор:

$$A:\ X\to X,\ \|A\|<1.$$

A-аналитические функции, когда A — линейно непрерывный оператор в конечномерном или бесконечномерном пространствах, применяются в теории эллиптических уравнений (см. работы [3,7]). В упомянутых работах A является линейно-непрерывным оператором. В тех случаях, когда пространство $X=\mathbb{C}$, оператор A является константой, $A=\mathrm{const}$.

Пусть $A(z)$ — антианалитическая, $\partial A=0$, в области $D\subset\mathbb{C}$ и такая, что

$$|A\,(z)|\leqslant C<1,\ \forall z\in D.$$

Положим

$$D_A=\frac{\partial}{\partial z}-\bar{A}\,(z)\,\frac{\partial}{\partial\,\bar{z}},\quad \bar{D}_A=\frac{\partial}{\partial\,\bar{z}}-A\,(z)\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

Тогда согласно (1.1) класс A-аналитических функций $f\,(z)\in\mathcal{O}_A\,(D)$ характеризуется тем, что

$$\bar{D}_A f\,(z)=0.$$

Так как антианалитическая функция является бесконечно гладкой, то из теоремы 1.3 вытекает, что

$$\mathcal{O}_A\,(D)\subset C^\infty\,(D)\,.$$

Теорема 2.1 (аналог теоремы Коши, см. [8]). *Если $f\,(z)\in\mathcal{O}_A\,(D)\cap C\left(\bar{D}\right)$, где $D\subset\mathbb{C}$ — область со спрямляемой границей ∂D, то*

$$\int\limits_{\partial D} f\,(z)\,(dz+A\,(z)\,d\,\bar{z})=0.$$

В изучении A-аналитических функций, когда функция $A(z)$ — антианалитическая, большую роль играет ядро

$$K\,(z,\xi)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z-\xi+\overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)}\bar{A}\,(\tau)\,d\tau}},\tag{2.1}$$

где $\gamma\,(\xi,z)$ — гладкая кривая, соединяющая точки ξ, $z\in D$. Так как область D — односвязная и $\bar{A}\,(z)$ — голоморфная функция, то интеграл

$$I\,(z)=\int\limits_{\gamma(\xi,z)}\bar{A}\,(\tau)\,d\tau$$

не зависит от пути интегрирования; он совпадает с первообразной, $I'\,(z)=\bar{A}\,(z)$. Если, кроме того, область $D\subset\mathbb{C}$ выпуклая, то имеет место

Теорема 2.2 (см. [16]). *$K\,(z,\xi)$ является A-аналитической функцией вне точки $z=\xi$, т. е.*

$$K\in\mathcal{O}_A\,(D\setminus\{\xi\})\,.$$

Более того, в точке $z=\xi$ функция $K\,(z,\xi)$ имеет полюс первого порядка.

Замечание 2.1. Если область $D\subset\mathbb{C}$ не является выпуклой, а лишь односвязной, то хотя функция

$$\psi\,(z,\,\xi)=z-\xi+\overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)}\bar{A}\,(\tau)\,d\tau}$$

однозначно определена в области D, но априори она может иметь другие изолированные нули $\xi\,:\ \psi\,(z,\,\xi)=0,\ z\in P=\{\xi,\,\xi_1,\,\xi_2,\ldots\}$. Однако $\psi\in\mathcal{O}_A\,(D)\,,\ \psi\,(z,\,\xi)\neq 0$ при $z\notin P$, и $K\,(z,\xi)$ является A-аналитической функцией в $D\backslash P$ с простыми полюсами в точках ξ, ξ_1, $\xi_2,\ldots$ (см. [16]). В связи с этим ниже мы рассматриваем класс A-аналитических функций только в выпуклых областях $D\subset\mathbb{C}$.

Теорема 2.3 (формула Коши, см. [9]). *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область и $G \subset D$ — произвольная подобласть с кусочно гладкой границей ∂G. Тогда для любой функции $f(z) \in \mathcal{O}_A(G) \cap C(\bar{G})$ имеет место формула*

$$f(z) = \int\limits_{\partial G} K(\xi, z) f(\xi) \left(d\xi + A(\xi)\, d\bar{\xi}\right), \;\; z \in G. \tag{2.2}$$

При помощи формулы Коши доказывается

Теорема 2.4 (аналог теоремы Вейерштрасса, см. [18]). *Если ряд из A-аналитических в области D функций*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \;\; f_n(z) \in \mathcal{O}_A(D), \tag{2.3}$$

сходится равномерно на любом компактном подмножестве этой области, то

1. $f(z) \in \mathcal{O}_A(D)$;
2. *ряд* (2.3) *можно почленно дифференцировать по* z:

$$\partial f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \partial f_n(z), \;\; \bar{\partial} f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\partial} f_n(z), \;\; D_A f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} D_A f_n(z); \tag{2.4}$$

3. *ряды* (2.4) *сходятся равномерно на любом компактном подмножестве* D.

Здесь уместно отметить, что от того, что функциональный ряд из произвольных (не обязательно из A-аналитических) функций сходится равномерно, вообще говоря, его нельзя продифференцировать. Для этого требуется еще равномерная сходимость ряда из дифференциалов.

Теперь мы вкратце остановимся на степенных рядах в классе A-аналитических функций, когда $A(z)$ — антианалитическая в некоторой выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$. В этом случае функция $\psi(z, \xi)$ имеет вид

$$\psi(z, \xi) = z - \xi + \overline{\int\limits_{\gamma(\xi, z)} \bar{A}(\tau)\, d\tau} \in \mathcal{O}_A(D),$$

и согласно теореме 1.2 она осуществляет внутреннее отображение. В частности, множество

$$L(\xi, r) = \left\{ z \in D : |\psi(z, \xi)| = \left| z - \xi + \overline{\int\limits_{\gamma(\xi, z)} \bar{A}(\tau)\, d\tau} \right| < r \right\}, \;\; r > 0,$$

для достаточно маленьких r компактно принадлежит D и содержит точку ξ. Это множество называется *A-лемнискатой* с центром в точке ξ и обозначается как $L(\xi, r)$. Она является односвязной областью (см. [16]).

Сначала заметим, что аналогом степенных рядов для A-аналитических функций будут ряды

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j \psi^j(z, a), \;\; a \in D, \;\; c_j \text{ — константы.} \tag{2.5}$$

Областью сходимости ряда (2.5) будет лемниската $L(a, r) = \{|\psi(z, a)| < R\}$, где радиус сходимости R находится по формуле Коши—Адамара:

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{j \to \infty} \sqrt[j]{|c_j|}.$$

Покажем, что ряд (2.5) сходится абсолютно и равномерно внутри

$$|\psi(z, a)| = \left| z - a + \int\limits_{\gamma(a, z)} \bar{A}(\tau)\, d\tau \right| < R.$$

Пусть $r < R$. Для

$$|\psi(z, a)| = \frac{R + r}{2}$$

ряд (2.5) сходится и поэтому существует n_0, такое что для $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{|c_n|} \leqslant \frac{2}{r+R}.$$

Тогда для таких $n \geqslant n_0$ и для $|\psi(z,a)| \leqslant r$ имеем

$$|c_n \psi(z,a)^n| \leqslant |c_n| \, |\psi(z,a)|^n \leqslant \left(\frac{2r}{r+R}\right)^n.$$

Поэтому ряд (2.5) мажорируется сходящимся числовым рядом и он абсолютно и равномерно сходится в $\{|\psi(z,a)| \leqslant r\}$. Имеет место обратное утверждение.

Теорема 2.5 (см. [16]). *Если $f(z) \in \mathcal{O}_A(L(a,r))$, где $L(a,r) = \{\xi \in D : |\psi(\xi,a)| < r\} \Subset D$ — лемниската, то в $L(a,r)$ функция $f(z)$ разлагается в ряд Тейлора*:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi^k(z,a). \tag{2.6}$$

Коэффициенты ряда определяются по формулам

$$c_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f(z)}{\partial z^k}\bigg|_{z=a} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial L(a,\rho)} \frac{f(\xi)}{[\psi(\xi,a)]^{k+1}} \left(d\xi + A(\xi)\, d\bar{\xi}\right), \; 0 < \rho < r, \; k = 0,1,\ldots$$

Для полноты изложения приведем разложение A-аналитических функций в ряд Лорана.

Теорема 2.6. (см. [16]). *Пусть функция $f(z)$ A-аналитична в кольце из лемнискат*:

$$f(z) \in \; \in \mathcal{O}_A(L(a,R) \setminus L(a,r)), \; r < R.$$

Тогда в этом кольце $f(z)$ разлагается в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \psi^k(z,a), \tag{2.7}$$

где коэффициенты ряда определяются по формулам

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial L(a,\rho)} \frac{f(\xi)}{[\psi(\xi,a)]^{k+1}} \left(d\xi + A(\xi)\, d\bar{\xi}\right), \; r < \rho < R, \; k = 0, \pm 1, \ldots$$

Ряд (2.7) *сходится равномерно и абсолютно внутри кольца*

$$L(a,R) \setminus L(a,r) = \{z \in D : \; r < |\psi(z,a)| < R\}.$$

Теорема (неравенства Коши, см. [16]). *Для коэффициентов Тейлора—Лорана справедливы неравенства*

$$|c_k| \leqslant \frac{\max\{|f(z)| : z \in \partial L(a,\rho)\}}{\rho^k}, \; r < \rho < R, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{2.8}$$

3. Аналог неравенства Шварца для A-аналитических функций

Известно, что неравенство Шварца имеет многочисленные приложения в геометрической теории аналитических функций: в теории конформных изоморфизмов, оценках модулей непрерывности, вариационных задачах, теории аппроксимаций и др.

Лемма 3.1. (Аналог леммы Шварца). *Пусть $f \in \mathcal{O}_A(L(a,R))$, $|f(z)| \leqslant M$ и $f(a) = 0$. Тогда для всех $z \in L(a,R)$*

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{R} |\psi(z,a)|. \tag{3.1}$$

Доказательство. Так как $f(a)=0$, то

$$g(z):=\frac{f(z)}{\psi(z,a)}\in\mathcal{O}_A\left(L(a,R)\right).$$

Фиксируем $r<R$. По принципу максимума функция $g(z)$ достигает своего максимума на $\partial L(a,r)$. Тогда

$$|g(z)|\leqslant\frac{\max\{|f(z)|:z\in L(a,r)\}}{|\psi(z,a)|}\leqslant\frac{M}{r}.$$

Устремим $r\to R$ и в пределе получим, что $|g(z)|\leqslant\dfrac{M}{R}$, т. е. $|f(z)|\leqslant\dfrac{M}{R}|\psi(z,a)|$ для всех $z\in L(a,r)$ и для всех $r<R$. □

Следствие 3.1. *Пусть* $f\in\mathcal{O}_A\left(L(a,R)\right)$, $|f(z)|\leqslant M$ *и*

$$f(a)=\frac{\partial f}{\partial z}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a)=\ldots=\frac{\partial^{n-1}f}{\partial z^{n-1}}(a)=0.$$

Тогда для всех $z\in L(a,R)$

$$|f(z)|\leqslant\frac{M}{R}|\psi(z,a)|^n.$$

Доказательство. Следствие доказывается аналогично лемме 3.1. Так как

$$f(a)=\frac{\partial f}{\partial z}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a)=\ldots=\frac{\partial^{n-1}f}{\partial z^{n-1}}(a)=0,$$

то

$$g(z):=\frac{f(z)}{\psi^n(z,a)}\in\mathcal{O}_A\left(L(a,R)\right),$$

ибо $\psi(z,a)$ имеет единственный простой нуль в точке $z=a$. Фиксируем $r<R$. По принципу максимума функция $g(z)$ достигает своего максимума на $\partial L(a,r)=\{|\psi(z,a)|=r\}$. Тогда

$$|g(z)|\leqslant\frac{\max\{|f(z)|:z\in L(a,r)\}}{r^n}\leqslant\frac{M}{r^n}.$$

Устремим $r\to R$ и в пределе получим, что $|g(z)|\leqslant\dfrac{M}{R^n}$, т. е. $|f(z)|\leqslant\dfrac{M}{R^n}|\psi(z,a)|$ для всех $z\in L(a,R)$. □

Следствие 3.2. *Пусть* $f\in\mathcal{O}_A\left(L(a,R)\right)$, $|f(z)|\leqslant M$ *и* $f(b)=0$ *для* $b\in L(a,R)$. *Тогда для всех* $z\in L(a,R)$

$$|f(z)|\leqslant MR\left|\frac{\psi(z,a)-\psi(b,a)}{R^2-\bar\psi(b,a)\psi(z,a)}\right|.$$

Доказательство. Отображение

$$w=R^2\frac{\psi(z,a)-\psi(b,a)}{R^2-\bar\psi(b,a)\psi(z,a)}$$

является изоморфизмом между лемнискатой $L(a,R)$ и кругом $U(0,R)$. Действительно, если $z\in L(a,R)$, то

$$|w|^2=R^4\frac{|\psi(z,a)|^2+|\psi(b,a)|^2-\psi(z,a)\bar\psi(b,a)-\bar\psi(z,a)\psi(b,a)}{R^4+|\bar a|^2|\psi(z,a)|^2-R^2(\psi(z,a)\bar\psi(b,a)+\bar\psi(z,a)\psi(b,a))}\leqslant$$

$$\leqslant R^2\frac{R^2\Big(|\psi(z,a)|^2+|\psi(b,a)|^2-\psi(z,a)\bar\psi(b,a)-\bar\psi(z,a)\psi(b,a)\Big)+\Big(|a|^2-R^2\Big)\Big(|\psi(z,a)|^2-R^2\Big)}{R^4+|\bar a|^2|\psi(z,a)|^2-R^2(\psi(z,a)\bar\psi(b,a)+\bar\psi(z,a)\psi(b,a))}=R^2.$$

Отсюда следует, что $|w|<R$. Рассмотрим

$$g(z):=\frac{1}{M}f\left(w^{-1}(\psi(z,a))\right)\in\mathcal{O}_A\left(L(a,R)\right),$$

где легко видеть, что $w^{-1}\left(\psi(z,a)\right) : L(a,R) \to L(a,R)$ является автоморфизмом. Функция $g(z)$ удовлетворяет условиями леммы Шварца и, следовательно, $|g(z)| \leqslant \dfrac{M}{R}\left|\psi(z,a)\right|$. Тогда получаем, что

$$|g\left(\psi\left(w(z),a\right)\right)| = |f(z)| \leqslant \frac{M}{R}\left|R^2\frac{\psi(z,a)-\psi(b,a)}{R^2-\bar{\psi}(b,a)\psi(z,a)}\right| = MR\left|\frac{\psi(z,a)-\psi(b,a)}{R^2-\bar{\psi}(b,a)\psi(z,a)}\right|.$$

□

4. Формулы Шварца и Пуассона

Начнем со следующей теоремы.

Теорема 4.1. *Действительная часть A-аналитической функции $f(z) \in \mathcal{O}_A(D)$ удовлетворяет в области D уравнению*

$$\Delta_A u \equiv \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{1-|A|^2}\left[(1+|A|^2)\frac{\partial u}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right]\right] + \frac{\partial}{\partial \bar z}\left[\frac{1}{1-|A|^2}\left[(1+|A|^2)\frac{\partial u}{\partial z} - 2\bar{A}\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right]\right] = 0. \quad (4.1)$$

Доказательство. Пусть $f = u + iv$. Из бесконечной дифференцируемости A-аналитической функции следует, что функции u и v имеют в каждой точке области D частные производные любых порядков.

Запишем условия Коши—Римана для A-аналитических функций

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \bar z} = A\dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = \bar{A}\dfrac{\partial f}{\partial \bar z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \bar z} + i\dfrac{\partial v}{\partial \bar z} = A\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + i\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} - i\dfrac{\partial v}{\partial z} = \bar{A}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \bar z} - i\dfrac{\partial v}{\partial \bar z}\right). \end{cases}$$

Найдем частные производные v'_z и $v'_{\bar z}$:

$$\frac{\partial v}{\partial \bar z} = \frac{i}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right], \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{i}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial z} - 2\bar{A}\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right]. \quad (4.2)$$

Продифференцируем первое равенство в (4.2) по z, второе — по $\bar z$ и сложим полученное, приняв во внимание, что

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \bar z} = \frac{\partial^2 v}{\partial \bar z \partial z}.$$

Имеем:

$$0 = \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \bar z} - \frac{\partial^2 v}{\partial \bar z \partial z} = i\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{1-|A|^2}\left[(1+|A|^2)\frac{\partial u}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right]\right] +$$

$$+ i\frac{\partial}{\partial \bar z}\left[\frac{1}{1-|A|^2}\left[(1+|A|^2)\frac{\partial u}{\partial z} - 2\bar{A}\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right]\right] = -i\Delta_A u.$$

Отсюда следует, что $\Delta_A u = 0$. Аналогично, получаем равенство $\Delta_A v = 0$. □

В связи с теоремой 4.1 естественно дать определение A-гармонической функции следующим образом.

Определение 4.1. Дважды дифференцируемая функция $u \in C^2(D)$, $u : D \to \mathbb{R}$ называется *A-гармонической* в области D, если она удовлетворяет в D дифференциальному уравнению (4.1).

Класс A-гармонических в области D функций обозначаем как $h_A(D)$. Таким образом, действительная часть, а значит и мнимая часть A-аналитической функции $f \in \mathcal{O}_A(D)$ является A-гармонической функцией в области D. Для односвязных областей верна и обратная теорема.

Теорема 4.2. *Если функция $u(z) \in h_A(D)$, где D — односвязная область, то существует $f \in \mathcal{O}_A(D) :\ u = \operatorname{Re} f$.*

Доказательство. Рассмотрим следующий дифференциальный оператор:

$$d_A^c := \frac{i}{1-|A|^2}\left(\left[(1+|A|^2)\frac{\partial}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial}{\partial z}\right]d\bar z - \left[(1+|A|^2)\frac{\partial}{\partial z} - 2\bar A\frac{\partial}{\partial \bar z}\right]dz\right).$$

Он удовлетворяет следующему равенству:

$$dd_A^c u = -\left(i\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{1-|A|^2}\left[(1+|A|^2)\frac{\partial u}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right]\right] + \right.$$
$$\left. + i\frac{\partial}{\partial \bar z}\left[\frac{1}{1-|A|^2}\left[(1+|A|^2)\frac{\partial u}{\partial z} - 2\bar A\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right]\right]\right)dz\wedge d\bar z = -i\Delta_A u dz\wedge d\bar z = 2\Delta_A u dV.$$

Значит,

$$dd_A^c u = 2\Delta_A u dV. \tag{4.3}$$

Значение интеграла

$$\int_a^z d_A^c u$$

не зависит от выбора пути интегрирования, потому что для любых гомотопных кривых $\gamma_1(a,z)$ и $\gamma_2(a,z)$ имеет место следующее равенство:

$$\int_{\gamma_1(a,z)} d_A^c u - \int_{\gamma_2(z,a)} d_A^c u = \oint_\gamma d_A^c u = \iint_{D'} dd_A^c u = -2\iint_{D'} \Delta_A u dV = 0,$$

где $D' \subset D$ — область, ограниченная кривыми $\gamma_1(a,z)$ и $\gamma_2(a,z)$, $\partial D' = \gamma = \gamma_1(a,z)\cup\gamma_2(a,z)$.

$$v(z) = \int_a^z \left(\frac{1}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right] + \frac{1}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial z} - 2\bar A\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right]\right)dx +$$
$$+ i\int_a^z \left(\frac{1}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right] - \frac{1}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial z} - 2\bar A\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right]\right)dy =$$
$$= \int_a^z \left(\frac{1}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right] + \overline{\frac{1}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right]}\right)dx +$$
$$+ i\int_a^z \left(\frac{1}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right] - \overline{\frac{1}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right]}\right)dy =$$
$$= 2\int_a^z \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right]\right)dx + 2\int_a^z \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right]\right)dy.$$

Это означает, что v является действительнозначной функцией и она удовлетворяет следующим равенствам:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{i}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial z} - 2\bar A\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right],$$

и

$$\frac{\partial v}{\partial \bar z} = \frac{i}{1-|A|^2}\left[\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right].$$

Теперь покажем, что $f(z) = u(z) + iv(z)$ является A-аналитической функцией в области D, $f \in \mathcal{O}_A(D)$:

$$D_A f = \frac{\partial f}{\partial \bar z} - A\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \bar z} + i\frac{\partial v}{\partial \bar z} - A\left(\frac{\partial u}{\partial z} + i\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0.$$

Это означает, что $f \in \mathcal{O}_A(D)$. □

Замечание 4.1. Как и в теории аналитических функций, для многосвязных областей теорема 4.2 может не иметь место в связи возникновением многозначности функции f.

В теории A-аналитических и A-гармонических функций естественно рассматривается следующая задача.

Задача Дирихле. Задана ограниченная область $G \subset D$, и на границе ∂G задана непрерывная функция $\varphi(\xi)$. Требуется найти A-гармоническую в области G, непрерывную на замыкании $\bar{G}$ функцию $u(z) \in h_A(G) \cap C(\bar{G}):\ u|_{\partial D} = \varphi$.

В случае, когда область G является лемнискатой, $G = L(a,R)$, имеет место следующая теорема.

Теорема 4.3 (аналог формулы Пуассона для A-гармонических функций)**.** *Если функция $\varphi(\xi)$ непрерывна на границе лемнискаты $L(a,R) \subset D$, то функция*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi r} \oint\limits_{|\psi(\xi,a)|=R} \varphi(\xi) \frac{r^2 - |\psi(z,a)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2} \left|d\xi + A(\xi) d\bar{\xi}\right| \tag{4.4}$$

является решением задачи Дирихле в $L(a,r)$.

Доказательство. Функция

$$f(\xi,z) = \frac{\psi(a,\xi) + \psi(a,z)}{\psi(z,\xi)}$$

является A-аналитической функцией по $z \in L(a,R)$, где $\xi \in \partial L(a,R)$. Тогда

$$\Pi(\xi,z) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} f(\xi,z) \in h_A(L(a,R)),$$

$$\Pi(\xi,z) = \frac{1}{2\pi}\left(f(\xi,z) + \bar{f}(z,\xi)\right) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\psi(a,\xi)+\psi(a,z)}{\psi(a,\xi)-\psi(a,z)} + \frac{\bar{\psi}(a,\xi)+\bar{\psi}(a,z)}{\bar{\psi}(a,\xi)-\bar{\psi}(a,z)}\right] =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{|\psi(a,\xi)|^2 - |\psi(a,z)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{R^2 - |\psi(a,z)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2}\right].$$

Следовательно, функция $u \in h_A(L(a,R))$. Покажем, что она непрерывна в $\bar{L}(a,R)$, причем $u|_{\partial L(a,R)} = \varphi$. Воспользуемся следующими двумя очевидными фактами:

1. $\displaystyle \frac{1}{2\pi R} \oint\limits_{|\psi(\xi,a)|=R} \frac{R^2 - |\psi(z,a)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2} \left|d\xi + A(\xi)d\bar{\xi}\right| = 1;$
2. При $z \to \xi_0 \in \partial L(a,r)$ и $\xi \neq \xi_0$ функция $\Pi(\xi,z) \to 0$ равномерно на любой дуге $\gamma_\delta = \partial L(a,R) \setminus U(\xi,\delta)$.

Положим $\psi(\xi,a) = Re^{it}$. Тогда

$$|dz + Ad\bar{z}| = \left|\frac{\partial\psi}{\partial z}dz + \frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}d\bar{z}\right| = |d\psi(\xi,a)| = \left|dRe^{it}\right| = \left|Rie^{it}dt\right| = Rdt,$$

и

$$\frac{1}{2\pi r} \oint\limits_{|\psi(\xi,a)|=r} \varphi(\xi) \frac{R^2 - |\psi(z,a)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2} \left|d\xi + A(\xi)d\bar{\xi}\right| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(\xi) \frac{R^2 - |\psi(z,a)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2} dt.$$

Оценим разность:

$$\sigma = u(z) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(\xi)\frac{R^2 - |\psi(z,a)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2}dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left(u(z) - \varphi(\xi)\right) \frac{R^2 - |\psi(z,a)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2}dt.$$

Из непрерывности $\varphi(\xi)$ в точке $\xi_0 : \psi(a,\xi_0) = Re^{it_0}$ следует, что $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, $\forall\xi \in \partial L(a,R) \setminus U(a,\delta) \Rightarrow |\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)| < \varepsilon$.

Пусть $I_1 = \{t \in [0;2\pi] : Re^{it} \in \partial L(a,R) \setminus U(a,\delta)\}$ и $I_2 = \{t \in [0;2\pi] : Re^{it} \in \partial L(a,R) \cap U(a,\delta)\}$. Тогда $I_1 \cup I_2 = [0;2\pi]$ и

$$\sigma = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{I_1} \left(u(z) - \varphi(\xi)\right) \frac{R^2 - |\psi(z,a)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2}dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{I_2} \left(u(z) - \varphi(\xi)\right) \frac{R^2 - |\psi(z,a)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2}dt = J_1 + J_2.$$

Оценим J_2:

$$|J_2| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{I_2} |u(z) - \varphi(\xi)| \frac{R^2 - |\psi(z,a)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2} dt \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varepsilon \frac{R^2 - |\psi(z,a)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2} dt < \varepsilon.$$

Пусть $\psi(z,a) = re^{i\theta}$. Теперь предложим, что $|\theta - t_0| < \dfrac{\delta}{2}$. Тогда для всех $t \in I_1$ в силу условия 2 из леммы 3.1 найдется $\rho \in (R-r;R)$ и выполняется неравенство $\Pi(\xi,z) < \varepsilon$. Тогда для всех $z : |\psi(a,z)| = r > R - \rho, |\theta - t_0| < \dfrac{\delta}{2}$ получаем

$$|J_1| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{I_1} |u(z) - \varphi(\xi)| \frac{R^2 - |\psi(z,a)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2} dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi} 2\max\{\varphi(\xi)\} \int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2 - |\psi(z,a)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2} dt < 2\varepsilon \max\{\varphi(\xi)\}.$$

Отсюда следует, что $|\sigma| < \varepsilon(1 + 2\max\{\varphi(\xi)\})$ и $\lim\limits_{z \to \xi_0} u(z) = \varphi(\xi_0)$. □

Формула (4.4) называется аналогом формулы Пуассона для A-гармонических функций.

Следствие 4.1. (аналог формула Шварца для A-аналитических функций). *Пусть* $L(a,R) \Subset D$ *и* $f(z) = u(z) + iv(z) \in O_A(L(a,R)) \cap C\left(\bar{L}(a,R)\right)$. *Тогда имеет место следующий аналог формулы Шварца*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi R} \oint\limits_{|\psi(\xi,a)|=R} u(\xi) \frac{\psi(a,\xi) + \psi(a,z)}{\psi(z,\xi)} \left|d\xi + A(\xi) d\bar{\xi}\right| + i \operatorname{Im} f(a). \tag{4.5}$$

Теорема 4.4. *Если функция* u *является* A*-гармонической в лемнискате* $L(z,R) \Subset D$, *то для любого* $r < R$ *значение* u *в центре лемнискаты равно среднему ее значению на лемнискате* $L(z,r)$:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i r^2} \iint\limits_{|\psi(z,\xi)| \leqslant r} u(\xi) d\mu(\xi) = \frac{1}{2\pi i r^2} \iint\limits_{|\psi(z,\xi)| \leqslant r} u(\xi) \left(1 - |A(\xi)|^2\right) d\xi \wedge d\bar{\xi},$$

где $d\mu = \left(1 - |A(\xi)|^2\right) d\xi \wedge d\bar{\xi}$ — *мера на лемнискате.*

Доказательство. Рассмотрим меру $d\mu$:

$$d\mu = \left(1 - |A(\xi)|^2\right) d\xi \wedge d\bar{\xi} = \left(d\xi + A(\xi) d\bar{\xi}\right) \wedge \left(d\bar{\xi} + \bar{A}(\xi) d\xi\right) =$$

$$= d\psi(\xi,z) \wedge d\bar{\psi}(\xi,z) = 2idt \otimes |d\psi(\xi,z)|.$$

Из равенства $d\mu = 2idt \otimes \left|d\xi + A(\xi) d\bar{\xi}\right|$, из теорем о среднем и Фубини, мы получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i r^2} \iint\limits_{|\psi(z,\xi)| \leqslant r} u(\xi) d\mu(\xi) = \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_0^r dt \int\limits_{|\psi(z,\xi)|=t} u(\xi) \left|d\xi + A(\xi) d\bar{\xi}\right| = \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_0^r 2\pi t u(z) dt = u(z).$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боярский Б. В.* Гомеоморфные решения систем Бельтрами// Докл. АН СССР. — 1955. — *102*, № 4. — С. 661–664.
2. *Боярский Б. В.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами// Мат. сб. — 1957. — *43*, № 85. — С. 451–503.
3. *Бухгейм А. Л.* Формулы обращения в обратных задачах. Дополнение к книге: *Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я.* Линейные операторы и некорректные задачи. — М.: Наука, 1991.
4. *Бухгейм А. Л., Казанцев С. Г.* Эллиптические системы типа Бельтрами и задачи томографии// Докл. АН СССР. — 1990. — *315*, № 1. — С. 15–19.
5. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. — М.: Наука, 1988.

6. *Волковыский Л. И.* Некоторые вопросы теории квазиконформных отображений// В сб.: «Некоторые проблемы математики и механики. К семидесятилетию М. А. Лаврентьева». — Л.: Наука, 1970. — С. 128–134.
7. *Жабборов Н. М., Имомназаров Х. Х.* Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред. — Ташкент: Изд-во НУУз, 2012.
8. *Жабборов Н. М., Отабоев Т. У.* Теорема Коши для $A(z)$-аналитических функций// Узб. мат. ж. — 2014. — № 1. — С. 15–18.
9. *Жабборов Н. М., Отабоев Т. У.* Аналог интегральной формулы Коши для A-аналитических функций// Узб. мат. ж. — 2016. — № 4. — С. 50–59.
10. *Ковтонюк Д. А., Петков И. В., Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами// Алгебра и анализ. — 2013. — *25*, № 4. — С. 101–124.
11. *Кондрашов А. Н.* Уравнения Бельтрами, вырождающиеся на дуге// Вестн. Волгоград. гос. ун-та. Сер. 1. Мат. Физ. — 2014. — *24*, № 5. — С. 24–39.
12. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Физматгиз, 1958.
13. *Якубов Э. Х.* О решениях уравнения Бельтрами с вырождением// Докл. АН СССР. — 1978. — *243*, № 5. — С. 1148–1149.
14. *Ahlfors L.* Lectures on quasiconformal mappings. — Toronto—New York—London: Springer, 1966.
15. *Gutlyanski V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation. A geometric approach. — Berlin: Springer, 2011.
16. *Sadullaev A., Jabborov N. M.* On a class of A-analytic functions// J. Sib. Fed. Univ. Maths. Phys. — 2016. — *9*, № 3. — С. 374–383.
17. *Srebro U., Yakubov E.* μ-Homeomorphisms// Contemp. Math. — 1997. — *211*. — С. 473–479.
18. *Zhabborov N. M.* Morer's theorem and functional series in the class of A-analytic functions// J. Sib. Fed. Univ. Maths. Phys. — 2018. — *9*, № 3. — С. 374–383.

Н. М. Жабборов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 700174, г. Ташкент, ВУЗ городок
E-mail: jabborov61@mail.ru

Т. У. Отабоев
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 700174, г. Ташкент, ВУЗ городок
E-mail: tolib.fgi@gmail.com

Ш. Я. Хурсанов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 700174, г. Ташкент, ВУЗ городок
E-mail: shohruhmath@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-637-649 UDC 517.5

The Schwarz Inequality and the Schwarz Formula for A-Analytic Functions

© 2018 **N. M. Zhabborov, T. U. Otaboev, Sh. Ya. Khursanov**

Abstract. In this paper, we study A-analytic functions. We consider main fundamental theorems of the theory of A-analytic functions and prove analogs of the Schwarz inequality, the Schwars formula, and the Poisson formula for A-analytic functions.

REFERENCES

1. B. V. Boyarskiy, "Gomeomorfnye resheniya sistem Bel'trami" [Homeomorphic solutions of Beltrami systems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1955, **102**, No. 4, 661–664 (in Russian).
2. B. V. Boyarskiy, "Obobshchennye resheniya sistemy differentsial'nykh uravneniy pervogo poryadka ellipticheskogo tipa s razryvnymi koeffitsientami" [Generalized solutions of a first-order system of differential equations of elliptic type with discontinuous coefficients], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1957, **43**, No. 85, 451–503 (in Russian).
3. A. L. Bukhgeym, *Formuly obrashcheniya v obratnykh zadachakh. Dopolnenie k knige: M. M. Lavrent'ev, L. Ya. Savel'ev, Lineynye operatory i nekorrektnye zadachi* [Inversion Formulas in Inverse Problems. Addition to the Book: M. M. Lavrentyev, L. Ya. Savelyev, Linear Operators and Ill-Posed Problems], Nauka, Moscow, 1991 (in Russian).
4. A. L. Bukhgeym and S. G. Kazantsev, "Ellipticheskie sistemy tipa Bel'trami i zadachi tomografii" [Elliptic systems of Beltrami type and problems of tomograpy], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1990, **315**, No. 1, 15–19 (in Russian).
5. I. N. Vekua, *Obobshchennye analiticheskie funktsii* [Generalized Analytic Functions], Nauka, Moscow, 1988 (in Russian).
6. L. I. Volkovyskiy, "Nekotorye voprosy teorii kvazikonformnykh otobrazheniy" [Some questions of the theory of quasiconformal mappings], In: *Nekotorye problemy matematiki i mekhaniki. K semidesyatiletiyu M. A. Lavrent'eva* [Some Problems of Mathematics and Mechanics. Dedicated to 70th anniversary of M. A. Lavrent'ev], Nauka, Leningrad, 1970, pp. 128–134 (in Russian).
7. N. M. Zhabborov and Kh. Kh. Imomnazarov, *Nekotorye nachal'no-kraevye zadachi mekhaniki dvukhskorostnykh sred* [Some Initial Boundary-Value Problems of Mechanics of Two-Velocity Media], Izd-vo NUUz, Tashkent, 2012 (in Russian).
8. N. M. Zhabborov and T. U. Otaboev, "Teorema Koshi dlya $A(z)$-analiticheskikh funktsiy" [The Cauchy theorem for $A(z)$-analytic functions], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 2014, No. 1, 15–18 (in Russian).
9. N. M. Zhabborov and T. U. Otaboev, "Analog integral'noy formuly Koshi dlya A-analiticheskikh funktsiy" [An analog of the Cauchy integral formula for A-analytic functions], *Uzb. mat. zh.* [Uzb. Math. J.], 2016, No. 4, 50–59 (in Russian).
10. D. A. Kovtonyuk, I. V. Petkov, V. I. Ryazanov, and R. R. Salimov, "Granichnoe povedenie i zadacha Dirikhle dlya uravneniy Bel'trami" [Boundary behavior and the Dirichlet problem for the Beltrami equations], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2013, **25**, No. 4, 101–124 (in Russian).
11. A. N. Kondrashov, "Uravneniya Bel'trami, vyrozhdayushchiesya na duge" [Beltrami equations degenerating on an arc], *Vestn. Volgograd. gos. un-ta. Ser. 1. Mat. Fiz.* [Bull. Volgograd State Univ. Ser. 1. Math. Phys.], 2014, **24**, No. 5, 24–39 (in Russian).
12. M. A. Lavrent'ev and B. V. Shabat, *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Method of the Theory of Functions of Complex Variable], Fizmatgiz, Moscow, 1958 (in Russian).
13. E. Kh. Yakubov, "O resheniyakh uravneniya Bel'trami s vyrozhdeniem" [On solutions of the Beltrami equations with degeneration], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1978, **243**, No. 5, 1148–1149 (in Russian).
14. L. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings*, Springer, Toronto—New York—London, 1966.
15. V. Gutlyanski, V. Ryazanov, U. Srebro, and E. Yakubov, *The Beltrami equation. A geometric approach*, Springer, Berlin, 2011.

16. A. Sadullaev and N. M. Jabborov, “On a class of A-analytic functions,” *J. Sib. Fed. Univ. Maths. Phys.*, 2016, **9**, No. 3, 374–383.
17. U. Srebro and E. Yakubov, “μ-Homeomorphisms,” *Contemp. Math.*, 1997, **211**, 473–479.
18. N. M. Zhabborov, “Morer’s theorem and functional series in the class of A-analytic functions,” *J. Sib. Fed. Univ. Maths. Phys.*, 2018, **9**, No. 3, 374–383.

N. M. Zhabborov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: jabborov61@mail.ru

T. U. Otaboev
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: tolib.fgi@gmail.com

Sh. Ya. Khursanov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: shohruhmath@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 4 (2018). С. 650–681

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-650-681 УДК 517.982.42

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ МАКСИМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, СВЯЗАННЫХ С ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯМИ

© 2018 г. **И. А. ИКРОМОВ, С. Э. УСМАНОВ**

Аннотация. В этой работе получены критерий ограниченности максимальных операторов, связанных с гладкими гиперповерхностями, а также точное значение показателя ограниченности этих операторов, связанных с произвольными выпуклыми аналитическими гиперповерхностями в случае, когда высота гиперповерхности в смысле А. Н. Варченко больше двух. Кроме того, получено точное значение показателя ограниченности для вырожденных гладких гиперповерхностей, т. е. для гиперповерхностей, удовлетворяющих условиям классической теоремы Хартмана—Ниренберга. Полученные результаты подтверждают справедливость гипотезы Стейна—Иосевича—Соера для произвольных выпуклых аналитических гиперповерхностей, а также для гладких вырожденных гиперповерхностей. В статье также обсуждаются некоторые смежные проблемы теории осцилляторных интегралов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В задачах, связанных с предельным переходом в интегралах и суммах, зависящих от параметров, в частности, с дифференцированием интеграла, часто применяются различного рода «максимальные операторы». Одним из таких операторов является классический максимальный оператор Харди—Литтлвуда, который появляется при решении различных задач гармонического анализа и математической физики. В современном гармоническом анализе встречаются максимальные операторы Шредингера, максимальные операторы, связанные с частичными суммами рядов Фурье, максимальные операторы, связанные с растяжениями гиперповерхностей и т. п.

В настоящей работе будем иметь дело с максимальными операторами, связанными (ассоциированными) с однородными растяжениями гиперповерхностей, называемыми максимальными операторами, связанными с гиперповерхностями. Впервые максимальный оператор, связанный с единичной сферой с центром в начале координат, исследовался в классической работе И. М. Стейна [40]. Он нашел точный показатель ограниченности (см. раздел 2 для определения показателя ограниченности) этого оператора в случае, когда размерность пространства не ниже трех. В более

Работа выполнена при поддержке Исполнительного Комитета по координации Науки и технологий при КМ Республики Узбекистан, грант ОТ-Ф-4-69.

поздней работе Дж. Бургена [20] получен точный показатель ограниченности соответствующего максимального оператора, связанного с окружностью.

Следует отметить, что свойства ограниченности максимальных операторов тесно связаны с геометрическими характеристиками соответствующей гиперповерхности. В работе Согги и Стейна [39] доказано, что если гауссова кривизна гиперповерхности не имеет нулей бесконечного порядка, то соответствующий максимальный оператор ограничен в L^p для некоторого конечного значения p. В этой работе одним из основных средств доказательства ограниченности максимальных операторов были так называемые осцилляторные интегралы с множителем гашения, в которых гауссова кривизна играет роль гасителя. В работе [9] введены множители гашения через главные кривизны гиперповерхности и получены условия ограниченности максимальных операторов, связанных с более общим классом гиперповерхностей.

Однако вопрос о необходимых и достаточных условиях L^p-ограниченности максимальных операторов при некотором конечном значении p оставался открытым. Более того, задача о минимальном значении p, для которого максимальные операторы ограничены в L^p, является одной из нерешенных проблем анализа.

В данной работе получен критерий ограниченности максимальных операторов, связанных с гладкими гиперповерхностями. Кроме того, явно указано множество всех тех значений p, для которых соответствующий максимальный оператор ограничен в L^p для широкого класса гиперповерхностей. Также получено подтверждение гипотезы Стейна—Иосевича—Соера для произвольных выпуклых аналитических гиперповерхностей и для сильно вырожденных гладких гиперповерхностей, доказано равенство трех совершенно по-разному определенных чисел, называемых показателем осцилляции, показателем ограниченности и контактным индексом таких гиперповерхностей.

Отметим, что для вырожденных гиперповерхностей (т. е. для гиперповерхностей, удовлетворяющих условию: ранг нормального отображения всюду не превосходит единицы) метод осцилляторных интегралов с множителем гашения непригоден, так как соответствующий осцилляторный интеграл с произвольным множителем гашения убывает медленнее, чем порядок $-\dfrac{1}{2}$. Поэтому теорема типа вложения Соболева, использованная в работе [39], а также более точная теорема, доказанная в работе [33], не позволяют получить свойства ограниченности соответствующего максимального оператора. Мы используем оценку максимальных операторов, связанных с гиперповерхностями с малой главной кривизной, доказанную в работе [27]. Эти результаты основываются на теореме К. Д. Согге [38], утверждающей ограниченность максимальных операторов, ассоциированных с гиперповерхностями с одной ненулевой главной кривизной. Аналогичные идеи использованы в работе [31].

2. Постановка задачи

Пусть $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — гладкая гиперповерхность, ψ — фиксированная неотрицательная бесконечно гладкая функция с компактным носителем, т. е. $0 \leqslant \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ и $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$.

Максимальным оператором, связанным (ассоциированным) с гиперповерхностью S, называется оператор, определяемый следующим соотношением:

$$\mathcal{M}f(y) := \sup_{t>0} |A_t f(y)|, \tag{2.1}$$

где

$$A_t f(y) := \int\limits_S f(y - tx)\psi(x)dS(x) \tag{2.2}$$

— так называемый *оператор усреднения*.

В работе всюду предполагается выполнение следующего *условия трансверсальности*: для любой точки $x \in S$ аффинная касательная плоскость $x + T_x S$ к S в точке x не проходит через начало координат $\mathbb{R}^{n+1}$ (см. [27]). Следует отметить, что в случае, когда условие трансверсальности не выполняется, поведение максимальных операторов вида (2.1) отличается от нынешнего случая и может быть довольно экзотичным (см. [43]).

Через $L^p := L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ обозначается множество классов измеримых функций g, определенных в $\mathbb{R}^{n+1}$, для которых $|g(x)|^p$ интегрируема по $\mathbb{R}^{n+1}$.

Говорят, что максимальный оператор $\mathcal{M}$ *ограничен в* L^p (или L^p-*ограничен*), если существует положительное число C_p такое, что для любой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, выполняется неравенство:

$$\|\mathcal{M}f\|_{L^p} \leqslant C_p \|f\|_{L^p},$$

где $\|\cdot\|_{L^p}$ — естественная норма пространства L^p. А также для данной гиперповерхности S и фиксированной плотности $0 \leqslant \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ естественно вводится *показатель ограниченности* соответствующего максимального оператора следующим соотношением:

$$p(S) := p_\psi(S) := \inf\{p : \text{оператор (2.1) ограничен в } L^p\}.$$

Пусть $\mathbb{P}_{x^0}(S)$ (где $x^0 \in S$) — множество всех тех значений p, для которых существует окрестность $U_p(x^0)$ точки x^0 такая, что при любой фиксированной плотности $0 \leqslant \psi \in C_0^\infty(U_p(x^0))$ соответствующий максимальный оператор (2.1) ограничен в L^p. Затем, индивидуальный показатель ограниченности максимального оператора в точке x^0 определяется по соотношению

$$p_{x^0}(S) := \inf \mathbb{P}_{x^0}(S).$$

Разумеется, возможен случай $p(S) = \infty$, а также $p_{x^0}(S) = \infty$. Например, если S — гиперплоскость, не содержащая начало координат, то имеем $p(S) = \infty$ для любой ненулевой плотности ψ.

В настоящей работе рассматриваются следующие основные задачи: *для каких гиперповерхностей значение показателя ограниченности соответствующего максимального оператора является конечным числом? Если это число, т. е. $p(S)$, конечно, то как оно определяется для данной гиперповерхности?*

Отметим, что эти вопросы тесно связаны с геометрическими свойствами гиперповерхности S. В работах [20, 25, 27, 33, 34, 40] для некоторых классов гиперповерхностей получено точное значение показателя ограниченности соответствующего максимального оператора.

Оказывается, вопрос о точном значении $p(S)$ также связан с задачей о показателе осцилляции осцилляторного интеграла, определенного преобразованием Фурье поверхностной меры ψdS в случае, когда $p(S) \geqslant 2$. А также это число связано со значением так называемого контактного индекса гиперповерхности (см. [27, 33], а также см. раздел 8 настоящей работы). Имеется гипотеза Стейна—Иосевича—Соера [33], о том, что все эти числа — т. е. показатель ограниченности максимального оператора, показатель осцилляции преобразования Фурье поверхностной меры и контактный индекс гиперповерхности — совпадают.

Однако в случае, когда $p(S) < 2$, задача об определении показателя ограниченности максимального оператора является еще более тонкой проблемой и до сих остается открытой. Хотя имеются точные результаты для некоторых классов гиперповерхностей (см. [34, 35], а также см. [21]).

В настоящей работе получен критерий ограниченности максимальных операторов, а также, обобщая результаты Иосевича—Соера [33], получено точное значение $p(S)$ для произвольных выпуклых аналитических гиперповерхностей в случае, когда показатель осцилляции больше двух. Более того, получено точное значение показателя ограниченности для вырожденных гладких гиперповерхностей, т. е. для гиперповерхностей, удовлетворяющих условиям теоремы Хартмана—Ниренберга [26].

3. Краткая история и мотивы проблемы

Классические результаты о сферических средних в $\mathbb{R}^{n+1}$, доказанные в работе [40] И. М. Стейна и в статье [20] Дж. Бургена, стали отправной точкой для изучения различных классов максимальных операторов, связанных с подмногообразиями евклидова пространства.

А. Гринлиф (см. [25]) доказал, что если S — строго выпуклая и звездная относительно начала координат гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$ при $n \geqslant 2$ (это означает, что любой луч, исходящий из начала координат, пересекается с гиперповерхностью в единственной точке) и $K(x) > 0$ (где $K(x)$ — гауссова кривизна гиперповерхности), то справедливы утверждения теоремы И. М. Стейна. Более того, как он показал, если в каждой точке гиперповерхности S имеются хотя бы $k\,(k \geqslant 2)$ ненулевых главных кривизн, то при $p > (k+1)/k$ максимальный оператор ограничен в L^p. В более сложном случае при $k = 1$ аналогичный результат получен К. Д. Согги [38].

В работе [33] А. Иосевича и Э. Соера получены окончательные результаты относительно L^p-ограниченности $(p > 2)$ максимальных операторов в случае выпуклых гиперповерхностей, имеющих конечный линейный тип, т. е. получено точное значение $p(S)$ в зависимости от высоты

А. Н. Варченко $h(S)$ гиперповерхности (см. [6], а также [27]). Точнее, доказано, что при любом $p > \max\{h(S), 2\}$ максимальный оператор ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$, причем, если $h(S) \geqslant 2$, то для $p \leqslant h(S)$ максимальный оператор неограничен. Аналогичные результаты для произвольных гладких гиперповерхностей в $\mathbb{R}^3$ получены в работе [27]. Однако, для произвольных гиперповерхностей, в частности, для выпуклых гиперповерхностей с высотой $h(S) < 2$, задача о точном значении $p(S)$ до сих пор остается открытой.

Как отметили выше, L^p-оценки максимальных операторов, ассоциированных с гиперповерхностями $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ связаны с поведением преобразования Фурье соответствующих мер [14]:

$$\widehat{\mu}(\xi) := \int\limits_S e^{i(\xi,x)}\psi(x)dS(x). \tag{3.1}$$

В работе [25] А. Гринлифа доказано, что, если $\widehat{\mu}(\xi) = O(|\xi|^{-\gamma})$ (при $|\xi| \longrightarrow +\infty$) и $\gamma > \dfrac{1}{2}$, то максимальный оператор (2.1) ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ при $p > 1 + \dfrac{1}{2\gamma}$. Однако в случае, когда порядок убывания $\widehat{\mu}(\xi)$ на бесконечности $\gamma \leqslant \dfrac{1}{2}$, задача об L^p-ограниченности соответствующего максимального оператора до сих пор остается открытой. Имеется гипотеза И. М. Стейна о том, что соответствующий максимальный оператор ограничен в L^p при $p > \dfrac{1}{\gamma} \geqslant 2$. Частичное подтверждение этой гипотезы доказано в работах [27, 33, 38]. Необходимость условия $\gamma > \dfrac{1}{2}$ связана с применением метода, основанного на теореме вложения Соболева [25]. Фактически, в связи с этим в работе [39] Согги и Стейна введены следующие осцилляторные интегралы с множителем гашения:

$$\widehat{\mu_q}(\xi) := \int\limits_S e^{i(\xi,x)}|K(x)|^q\psi(x)dS(x), \tag{3.2}$$

где $K(x)$ — гауссова кривизна гиперповерхности в точке $x \in S$. Здесь $|K(x)|^q$ играет роль множителя гашения, который обеспечивает необходимое убывание преобразования Фурье меры μ_q. Они доказали, что если $q \geqslant 2n$, то интеграл (3.2) убывает в порядке $O(|\xi|^{-\frac{n}{2}})$ (при $|\xi| \to +\infty$). Отсюда при выполнении условия $|K(x)|^{-\varepsilon} \in L^1(S)$ (для некоторого $\varepsilon > 0$) доказана ограниченность максимального оператора в L^p при $p > p(q, \varepsilon)$. Более того, было установлено что чем меньше q и чем больше ε, тем меньше $p(q, \varepsilon)$. Таким образом, чтобы получить лучшую оценку сверху для показателя ограниченности $p(S)$, необходимо найти минимальное значение q, для которого $\widehat{\mu_q}(\xi)$ оптимально убывает, а также максимальное значение $\varepsilon > 0$ такое, что $|K(x)|^{-\varepsilon} \in L^1(S)$.

Однако, как показывают примеры, минимальное значение q и максимальное значение ε дают лишь оценку $p(q, \varepsilon)$ сверху для показателя ограниченности $p(S)$, но не совпадает с этим числом (см. [11]).

В работе [9] первого автора введены множители гашения Λ_1, Λ_2 следующим образом. Пусть $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — произвольная гладкая гиперповерхность. Для точки $x \in S$ через

$$G(x) = \{g_{ij}(x)\}, \quad B(x) = \{b_{ij}(x)\}$$

обозначаются матрицы первой и второй фундаментальной формы гиперповерхности S, соответственно. Естественно определяется тензор $\{g^{ij}(x)\}$ (см. [8]).

Пусть D — тензор, получаемый внешним умножением $B(x)$ на само себя: $B(x) \wedge B(x)$. Тензор $D = \{d_{i_1i_2i_3i_4}\}$ является тензором ранга $(0, 4)$. Введем функции, определенные следующими равенствами:

$$\Lambda_1(x) := \sum g^{i_1j_1}(x)g^{i_2j_2}(x)b_{i_1i_2}(x)b_{j_1j_2}(x),$$

$$\Lambda_2(x) := \sum g^{i_1j_1}(x)g^{i_2j_2}(x)g^{i_3j_3}(x)g^{i_4j_4}(x)d_{i_1i_2i_3i_4}(x)d_{j_1j_2j_3j_4}(x).$$

В этих формулах производится суммирование по всем индексам. В работе [9] получено, что если S — аналитическая гиперповерхность и $\Lambda_2 \not\equiv 0$, то существует некоторое число $p(S)$ такое, что при всех $p > p(S)$ максимальный оператор ограничен в L^p. Кроме того, если гауссова кривизна гиперповерхности не имеет нулей бесконечного порядка, то получена более точная оценка для $p(S)$.

Однако вопрос об ограниченности максимальных операторов в случае $\Lambda_2 \equiv 0$ оставался открытым. Следует отметить, что в этом случае методы осцилляторных интегралов неприменимы, так как соответствующий осцилляторный интеграл с любым множителем не может убывать быстрее порядка $O(|\xi|^{-\frac{1}{2}})$, поэтому теорема вложения Соболева [39] (а также см. [15]), более того, точный результат типа теоремы вложения, доказанный в работе [33], также неприменимы.

Поэтому, развивая методы работы [27] на максимальные операторы, связанные с гиперповерхностями в $\mathbb{R}^{n+1}$, получим ограниченность максимальных операторов, связанных с произвольными гиперповерхностями, имеющими конечный тип. Более того, найдем значение $p(S)$ для произвольных выпуклых аналитических гиперповерхностей, когда высота в смысле А. Н. Варченко больше двух. Эти результаты основываются на разложении Щульца, показывающего существование приспособленных систем координат для произвольных гладких выпуклых функций. Как показал А. Н. Варченко, для произвольных аналитических функций, зависящих от трех переменных, вообще говоря, аналогов приспособленных систем координат не существует. Далее, мы получим значение $p(S)$ для вырожденных гиперповерхностей. Оказывается, для таких гиперповерхностей также существуют аналоги приспособленных систем координат.

4. Многогранники Ньютона и приспособленные системы координат

В этом параграфе приведем соответствующие необходимые определения и обозначения.

Осцилляторным интегралом с гладкой, вещественнозначной фазой ϕ и амплитудой a называется интеграл вида

$$J(\lambda, \phi, a) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(x) e^{i\lambda\phi(x)} dx,$$

где $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

В частности, преобразование Фурье меры, т. е. интеграл (3.1), записывается в виде осцилляторного интеграла с фазой, зависящей от дополнительных параметров.

Если ϕ — аналитическая функция в начале координат и нуль является критической точкой этой функции, при этом носитель амплитуды a сосредоточен в достаточно малой окрестности начала координат, то справедливо следующее асимптотическое разложение осцилляторного интеграла $J(\lambda, \phi, a)$ (см. [5, 19] а также [6]):

$$J(\lambda, \phi, a) \approx e^{i\lambda\phi(0)} \sum_r \sum_{k=0}^{n-1} C_{r,k}(a) \lambda^r \ln^k \lambda \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty, \tag{4.1}$$

причем r принадлежит конечному числу арифметических прогрессий, состоящих из отрицательных рациональных чисел, и для каждой пары (r, k) коэффициент $C_{r,k}$ является распределением с носителем, принадлежащим критическому множеству фазы, т. е. множеству

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \nabla\phi(x) = 0\}.$$

Отметим, что задача об определении арифметических прогрессий, к которым принадлежат показатели r по данной фазе ϕ, является нетривиальной задачей. Классическая лемма Ван дер Корпута (см. [4]) показывает, что порядок убывания одномерного осцилляторного интеграла определяется кратностью критических точек фазовой функции. Более того, согласно классической лемме Эрдейи асимптотический ряд одномерного осцилляторного интеграла явно определяется фазой и амплитудой [17]. Исходя из этих соображений В. И. Арнольд [1] выдвинул гипотезу о том, что поведение кратных осцилляторных интегралов определяется многогранником Ньютона фазовой функции, построенным в подходящей системе координат.

Далее, в работе [6] исследована связь между многогранником Ньютона фазовой функции, построенным в подходящей системе координат, и главным членом асимптотического разложения осцилляторного интеграла. Также об оценках преобразования Фурье мер имеются многочисленные работы. О современном состоянии известных результатов см. [32].

Следуя [3, 6] (также см. [30]), введем некоторые обозначения. Пусть $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$, соответственно множество всех неотрицательных целых, всех неотрицательных вещественных, и всех вещественных чисел. Допустим, что $K \subset \mathbb{N}_0^n$ — некоторое множество. *Многогранник Ньютона* множества K определяется как выпуклая оболочка в $\mathbb{R}_+^n$ совокупностей $\bigcup\limits_{k\in K} (k+\mathbb{R}_+^n)$.

Пусть ϕ — гладкая функция, определенная в начале координат. Рассмотрим ряд Маклорена этой функции:

$$\phi_x \approx \sum_{k\in\mathbb{N}_0^n} c_k x^k, \quad c_n \in \mathbb{R}.$$

Носитель этого ряда определяется как $\operatorname{supp}(\phi_x) = \{k \in \mathbb{N}_0^n \setminus \{0\} : c_k \neq 0\}$.

Многогранник Ньютона ряда Маклорена ϕ определен как многогранник Ньютона множества $\operatorname{supp}(\phi_x)$. Совершенно аналогично определяется многогранник Ньютона функции в любой критической точке фазы.

Фиксируем систему координат в $\mathbb{R}^n$ и обозначим через ϕ_x ряд Маклорена функции ϕ в этой системе координат. Пусть d — координата пересечения прямой $x_1 = \ldots = x_n = d$, $d \in \mathbb{R}$, с границей многогранника Ньютона. Это число будет называться *расстоянием* между многогранником Ньютона и началом координат. Расстояние обозначается через $d(x)$.

Главной гранью многогранника Ньютона называется грань минимальной размерности, содержащая точку $(d(x), \ldots, d(x))$. Следует отметить, что многогранник Ньютона функции и расстояние от начала координат до многогранника Ньютона зависят от выбора локальной системы координат. Под *локальной системой координат* мы подразумеваем бесконечно гладкое диффеоморфное отображение окрестности начала координат в себя, при этом начало координат является неподвижной точкой этого отображения.

Пусть ϕ — как выше, и пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — фиксированная система координат в нуле в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через ϕ_x ряд Маклорена ϕ, и через $d(x)$ расстояние между началом координат и многогранником Ньютона $N(\phi_x)$. Рассмотрим величину

$$h(\phi) = \sup\{d(x)\},$$

где супремум берется относительно набора всех локальных гладких систем координат x в начале координат. Число $h(\phi)$ называется *высотой* функции ϕ (см. [6]).

Локальная гладкая система координат называется *приспособленной* к функции ϕ, если выполняется равенство $h(\phi) = d(x)$. Из результатов А. Н. Варченко [6] следует, что в случае $n = 2$ существуют приспособленные системы координат для аналитической функции, не имеющей кратных компонент. Более того, главный член асимптотического разложения осцилляторного интеграла имеет вид

$$c|\lambda|^{-1/h(\phi)} \ln(1+|\lambda|)^m,$$

где $m = 1$ или $m = 0$ в зависимости от главной грани многогранника Ньютона в приспособленной системе координат. Иными словами, в двумерном случае главный член асимптотического разложения осцилляторного интеграла определяется через дискретные характеристики многогранника Ньютона в приспособленной системе координат. В работе [28] доказаны аналогичные утверждения для произвольных гладких фазовых функций, зависящих от двух переменных. Однако, как показывает пример А. Н. Варченко, если $n \geqslant 3$, то вообще говоря, аналога таких систем координат не существует.

Следует отметить, что если отказаться от гладкости замены переменных, то можно построить аналог приспособленных систем координат для произвольных аналитических функций (см. [42]).

Если в определении высоты функции ограничиться лишь линейными преобразованиями, то мы приходим к линейной высоте функции $h_{lin}(\phi)$ и линейно-приспособленным системам координат, соответственно. По определению мы имеем $h_{lin}(\phi) \leqslant h(\phi)$ (см. [30]).

С другой стороны, как показал Г. Щульц [37], приспособленные системы координат существуют в случае, когда ϕ — гладкая выпуклая функция конечного линейного типа. Более того, такие системы координат получаются из исходной ортогональной с помощью замены координат. В частности, для выпуклых функций конечного линейного типа имеет место равенство: $h_{lin}(\phi) = h(\phi)$.

Для формулировки результатов Г. Щульца приведем необходимые определения.

Пусть ϕ — гладкая функция в некоторой окрестности начала координат, и она удовлетворяет условиям: $\phi(0) = 0$, $\nabla\phi(0) = 0$. Функция ϕ называется *выпуклой*, если для любых векторов

$x, y \in U \subset \mathbb{R}^n$ (где U — некоторая выпуклая окрестность начала координат) и для любых неотрицательных чисел α, β, удовлетворяющих условию $\alpha + \beta = 1$, имеет место неравенство:

$$\phi(\alpha x + \beta y) \leqslant \alpha\phi(x) + \beta\phi(y).$$

Функция ϕ называется функцией *конечного линейного типа* в начале координат, если для любого единичного вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ существует $N \geqslant 2$ такое, что

$$D_\xi^N \phi(0) \neq 0,$$

где $D_\xi \phi(0)$ — производная функции ϕ по направлению вектора ξ в начале координат. Геометрически это условие означает, что любая касательная прямая, лежащая на гиперплоскости $x_{n+1} = 0$ (т. е. на касательной гиперплоскости), имеет конечный порядок касания с гиперповерхностью $x_{n+1} = \phi(x)$ в начале координат.

Пусть $\kappa := (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n) \in \mathbb{R}^n$ — упорядоченный набор n-положительных вещественных чисел. Обозначим через $\delta_\tau^\kappa(x)$ отображение $\delta_\tau^\kappa : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, определенное формулой

$$\delta_\tau^\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\tau^{\kappa_1} x_1, \tau^{\kappa_2} x_2, \ldots, \tau^{\kappa_n} x_n).$$

Функция $\phi(x)$ называется *квазиоднородной* степени m с весом κ, если для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ и для любого положительного числа τ выполняется равенство

$$\phi(\delta_\tau^\kappa(x)) = \tau^m \phi(x).$$

Произвольный моном x^α является квазиоднородной функцией со степенью (α, κ). В случае $\kappa_1 = \ldots = \kappa_n$ она называется *однородной*.

Пусть $\kappa \in \mathbb{R}_+^n$ — фиксированный вектор. Введем обозначение $\rho(\alpha) := (\alpha, \kappa)$, где $\alpha \in \mathbb{R}_+^n$ — мультииндекс и (α, κ) — скалярное произведение векторов α и κ.

Приведем определение порядка гладкой функции (см. [2]).

Определение 4.1. Многочлен от переменных $x_1, \ldots, x_n$ имеет *порядок* d с весом κ (при данном κ), если все его мономы имеют степень d и выше относительно данного веса κ. Говорят, что бесконечно гладкая функция имеет *порядок* d, если ее любой нетривиальный отрезок ряда Тейлора имеет порядок d при условии, что существует такой нетривиальный отрезок. В противном случае, то есть если гладкая функция плоская, то считается, что ее порядок равняется $+\infty$.

Пусть $\mathbf{A}$ алгебра ростков гладких функций в начале координат $\mathbb{R}^n$. Обозначим через I_κ идеал, порожденный мономами $\{x^\alpha\}_{\rho(\alpha)=1}$. А также $\mathfrak{m}$ означает идеал алгебры $\mathbf{A}$, порожденный функциями $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Многочлены (гладкие функции) порядка d образуют линейное пространство $\mathbf{A}_d$. А также имеет место включение $\mathbf{A}_{d'} \subset \mathbf{A}_d$ при $d < d'$. Так как порядок произведения равен сумме порядков сомножителей, то $\mathbf{A}_d$ является идеалом в алгебре ростков гладких функций (см. [1]).

Обозначим через $\mathbf{A}_{>d}$ пространство гладких функций порядка строго больше чем d. Иными словами, справедливо следующее соотношение:

$$\mathbf{A}_{>d} = \{\phi \in \mathbf{A} : N(\phi) \subset \{t \in \mathbb{R}_+^n : \rho(t) > d\}\}.$$

Лемма 4.1. *Пусть $\kappa := (\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$ — множество весов таких, что $\left\{\dfrac{1}{\kappa_j}\right\}_{j=1}^n$ — натуральные числа. Тогда имеет место включение*

$$\mathfrak{m}^{\frac{n}{\min\{\kappa_j\}}} \subset I_\kappa.$$

В частности, фактор-алгебра $\mathbf{A}/I_\kappa$ обладает структурой, конечной $\mathbb{R}$-модулю с образующими мономами x^α ($(\alpha, \kappa) < 1$), а также мономами $b_1, \ldots, b_s$, причем $\deg_\kappa(b_\nu) > 1$, где $\nu = 1, \ldots, s$.

Доказательство. Лемма 4.1 доказывается стандартными методами. □

Предложение 4.1. *Пусть вес $\kappa \in \mathbb{R}_+^n$ удовлетворяет условиям леммы* 4.1. *Тогда имеет место следующее равенство*:

$$\mathbf{A}_{>1} = I_\kappa \mathfrak{m} + < b_1, \ldots, b_s >,$$

где $< b_1, \ldots, b_s >$ линейная оболочка базисных мономов $b_1, \ldots, b_s$ фактор-алгебры $\mathbf{A}_{>1}/I_\kappa \mathfrak{m} = \mathbf{A}_{>1}/I_\kappa$.

Доказательство. Предложение 4.1 вытекает из леммы 4.1. □

Предложение 4.2. *Пусть F — семейство ростков гладких функций, зависящих от $(x,\sigma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$. Тогда справедливо следующее соотношение*:

$$F(x,\sigma) = \sum_{\rho(\alpha)=1} x^\alpha R_\alpha(x,\sigma) + \sum_{\rho(\alpha)<1} c_\alpha(\sigma)x^\alpha + \sum_{\nu=1}^{s} C_\nu(\sigma) b_\nu(x).$$

В частности, если для любого достаточно малого $|\sigma|$ имеет место включение $F(\cdot,\sigma) \in \mathbf{A}_1$, то выполняется равенство

$$F(x,\sigma) = \sum_{\rho(\alpha)=1} x^\alpha R_\alpha(x,\sigma) + \sum_{\nu=1}^{s} C_\nu(\sigma) b_\nu(x),$$

с гладкими функциями R_α, c_α, C_ν. Здесь $\{b_\nu\}_{\nu=1}^s$ — образующие мономы фактор-алгебры $\mathbf{A}_{>1}/I_\kappa \mathfrak{m}$.

Доказательство. Предложение 4.2 вытекает из леммы 4.1. □

С учетом этих наблюдений результаты Г. Щульца [37] могут быть сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема 4.1. *Пусть ϕ — гладкая выпуклая функция конечного линейного типа в начале координат, и она удовлетворяет условиям $\phi(0) = 0$ и $\nabla\phi(0) = 0$. Тогда после возможных вращений системы координат имеют место следующие утверждения.*

(a) *Существуют четные натуральные числа $(k_1, \ldots, k_n)$ и $\kappa := (\frac{1}{k_1}, \ldots, \frac{1}{k_n})$ такие, что функция ϕ имеет вид*:

$$\phi(x) = \sum_{\rho(\alpha)=1} c_\alpha x^\alpha + R(x),$$

где $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ — мультииндекс и $\rho(\alpha) = (\alpha, \kappa)$. Более того, остаточный член $R(x)$ может быть записан в виде

$$R(x) = \sum_{\rho(\alpha)=1} x^\alpha R_\alpha(x) + \sum_{j=1}^{s} C_j b_j(x),$$

где R_α — гладкая функция, удовлетворяющая условию $R_\alpha(0) = 0$ для любого мультииндекса α. Иными словами, для остаточного члена справедливо включение

$$R \in I_\kappa \mathfrak{m} + < b_1, \ldots, b_s >,$$

где $\{b_1, \ldots, b_s\}$ образующие мономы фактор-алгебры $\mathbf{A}_{>1}/(I_\kappa \mathfrak{m})$.

(b) *Полином*

$$p(x) := \sum_{\rho(\alpha)=1} a_\alpha x^\alpha$$

выпуклый и $p(x) > 0$ для любого вектора $x \neq 0$.

Замечание 4.1. Отметим, что полученная система координат является приспособленной к функции ϕ и выполняется равенство

$$h(\phi) = \frac{1}{|\kappa|},$$

где $|\kappa| = \kappa_1 + \ldots + \kappa_n$. Результаты теоремы 4.1 отличаются от классической теоремы Г. Щульца тем, что в ней явно описан вид остаточного члена. Другим преимуществом этой формулировки является то, что она может быть обобщена на случай произвольных гладких выпуклых функций.

5. Приспособленные системы координат для произвольных выпуклых функций

Теперь покажем, что аналог приспособленных систем координат существует в случае, когда ϕ — произвольная гладкая выпуклая функция. Более того, представим конечный алгоритм нахождения таких систем координат, основанный на решении полиномиальных уравнений.

Таким образом, мы получим аналог теоремы Г. Щульца [37] для произвольных гладких выпуклых функций. Более того, получим приспособленные системы координат для произвольных выпуклых аналитических функций.

Теорема 5.1. *Пусть ϕ — бесконечно гладкая выпуклая функция, определенная в некоторой выпуклой окрестности начала координат и удовлетворяющая условиям $\phi(0) = 0$ и $\nabla\phi(0) = 0$. Тогда существует ортонормальная система координат, для которой выполняются следующие условия.*

(a) *Имеются целое число $0 \leqslant m \leqslant n$ и четные натуральные числа $(k_1, \ldots, k_m)$ и $\kappa := \left(\frac{1}{k_1}, \ldots, \frac{1}{k_m}, 0, \ldots, 0\right)$ такие, что функция ϕ записывается в виде*

$$\phi(x', x'') = \sum_{\rho(\alpha)=1} c_\alpha x'^\alpha + R(x', x''),$$

где $x' = (x_1, \ldots, x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, \ldots x_n)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ — мультииндекс и $\rho(\alpha) = (\alpha, \kappa)$. Более того, остаток $R(x', x'')$ может быть записан в виде

$$R(x', x'') = \sum_{\rho(\alpha)=1} x'^\alpha R_\alpha(x', x'') + \sum_{j=1}^{s} C_j(x'')b_j(x') + \sum_{\rho(\alpha)<1} x'^\alpha R_\alpha(x''),$$

где $R_\alpha(0, 0) = 0$ для $\rho(\alpha) = 1$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ и для любого α с условием $\rho(\alpha) < 1$ функция $R_\alpha(x'')$ — плоская в нуле, где $\{b_1, \ldots, b_s\}$ образующие мономы фактор-алгебры $\mathbf{A}_{>1}/(I_\kappa\mathfrak{m})$, где $\mathbf{A}$ алгебра ростков гладких функций, зависящих от $x' = (x_1, \ldots, x_m)$.

(b) *Полином*

$$p(x') = \sum_{\rho(\alpha)=1} a_\alpha x'^\alpha$$

выпуклый, и $p(x') > 0$ для любого $x' \neq 0$.

Доказательство. Прежде приведем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 5.1. *Пусть ϕ — выпуклая гладкая функция, определенная в некоторой выпуклой окрестности начала координат и удовлетворяющая условиям $\phi(0) = 0$, $\nabla\phi(0) = 0$, а также*

$$\phi(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ — квазиоднородная полиномиальная функция с весом κ, и $R(x)$ — остаточный член в следующим смысле: справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\tau\to+0} \frac{R(\delta_\tau^\kappa(x))}{\tau^{1+\varepsilon}} = 0$$

с некоторым положительным числом ε. Тогда $P(x)$ также выпуклый полином.

Доказательство. Лемма 5.1 доказана в работе [37]. Фактически доказательство этой леммы вытекает из стандартных рассуждений. □

Лемма 5.2. *Пусть P — однородный полином от двух переменных степени $m \geqslant 2$ вида*

$$P(x_1, x_2) = x_1^m + a_1 x_1^{m-1} x_2 + \ldots + a_k x_1^{m-k} x_2^k.$$

Если $P(x_1, x_2)$ выпукла и $1 \leqslant k \leqslant m-1$, то m — четное натуральное число, а также $a_1 = \ldots = a_k = 0$.

Доказательство. Если $P(x_1, x_2)$ — выпуклый полином, то он имеет минимум в начале координат. Поэтому m — четное натуральное число. С другой стороны, если $a_{k_0} \neq 0$ для некоторого $1 \leqslant k_0 \leqslant m-1$, то существуют рациональные числа κ_1, κ_2 такие, что полином $P(x_1, x_2)$ может быть записан в виде $P(x_1, x_2) = a_{k_0} x_1^{m-k_0} x_2^{k_0} + R(x)$ с квазиоднородным полиномом $a_{k_0} x_1^{m-k_0} x_2^{k_0}$ и остаточным членом $R(x)$, удовлетворяющим условиям леммы 5.1. Так как $P(x_1, x_2)$ — выпуклая функция, то согласно лемме 5.1 $a_{k_0} x_1^{m-k_0} x_2^{k_0}$ также должна быть выпуклой, что неверно при $1 \leqslant k_0 \leqslant m-1$. Это противоречие доказывает лемму 5.2. □

Следствие 5.1. *Если P — однородный выпуклый полином от двух переменных степени $m \geqslant 2$, удовлетворяющий условию $P(0, x_2) \equiv 0$, то он имеет вид $P(x_1, x_2) = a_0 x_1^m$.*

Лемма 5.3. *Пусть P — выпуклый однородный полином степени $m \geqslant 2$, зависящий от переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Если $P(x) = 0$ при $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$, то он зависит лишь от переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Точнее, существует выпуклый полином $Q(x_1, \ldots, x_k)$ такой, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство*

$$P(x_1, \ldots, x_n) = Q(x_1, \ldots, x_k).$$

Доказательство. Если $k = n$, то доказывать нечего. С другой стороны, при $n = 2$ и $k = 1$ утверждение леммы 5.3 вытекает из следствия 5.1. Теперь, предполагая $n > 2$ и $k \leqslant n-1$, а также с учетом условия $P(0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n) \equiv 0$, запишем полином P в виде:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Q(x_1, x_2, \ldots, x_k) + \sum_{0<|\alpha|<m} x'^{\alpha} a_\alpha(x''),$$

где $Q(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — однородный полином степени m от переменных $x' := (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ и $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ — мультииндекс, а также $a_\alpha(x'')$ — однородный полином степени $m-|\alpha|$ от переменных $x'' := (x_{k+1}, \ldots, x_n)$.

Фиксируем $x^0 := (x'^0, x''^0)$ и рассмотрим полином от двух переменных (t, τ), определенный по соотношению:

$$P_1(t, \tau) := P(tx'^0, \tau x''^0) = t^m Q(x'^0) + \sum_{0<|\alpha|<m} t^{|\alpha|} \tau^{m-|\alpha|} (x'^0)^\alpha a_\alpha(x''^0).$$

Заметим, что $P_1(t, \tau)$ — выпуклый однородный полином степени m от двух переменных (t, τ). Поэтому он имеет минимум в начале координат. Следовательно, $Q(x'^0) \geqslant 0$ и m — четное натуральное число. Если для любого x'^0 справедливо равенство $Q(x'^0) = 0$, то согласно следствию 5.1 имеем:

$$P_1(t, \tau) = \sum_{0<|\alpha|<m} t^{|\alpha|} \tau^{m-|\alpha|} (x'^0)^\alpha a_\alpha(x''^0) \equiv 0 \tag{5.1}$$

для любых точек $x^0 := (x'^0, x''^0)$. Следовательно, $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0$ и утверждение леммы 5.3 тривиально выполняется. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда существует точка x'^0 такая, что $Q(x'^0) > 0$. Тогда согласно следствию 5.1 выполняется равенство (5.1) для любого x''^0, когда x' принадлежит некоторой окрестности точки x'^0. Поэтому согласно теореме единственности имеет место равенство:

$$\sum_{0<|\alpha|<m} x'^{\alpha} a_\alpha(x'') \equiv 0,$$

которое завершает доказательство леммы 5.3. □

Предложение 5.1. *Пусть $f(x) = x_1^l g(x')$ — выпуклый однородный полином с $l \geqslant 1$, $x' := (x_2, \ldots, x_n)$. Тогда $g(x') \equiv \mathrm{const}$.*

Доказательство. Доказательство предложения 5.1 легко следует из леммы 5.2. □

Лемма 5.4. *Пусть $P(x)$ — однородный ненулевой выпуклый полином. Тогда существует ортогональная матрица A такая, что справедливо соотношение*

$$P(Ax) = Q(x_1, \ldots, x_k),$$

где $1 \leqslant k \leqslant n$ и $Q(x_1, \ldots, x_k)$ — также выпуклый полином, удовлетворяющий условию $Q(x_1, \ldots, x_k) \neq 0$ для любого $(x_1, \ldots, x_k) \neq 0$.

Доказательство. Если степень полинома $P(x)$ равняется единице, то доказательство леммы 5.4 тривиально. Далее предположим, что $\deg(P) \geqslant 2$. Рассмотрим множество

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n : P(x) = 0\}.$$

Как доказал Г. Щульц, S — линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$. Если $S = \{0\}$, то в качестве Q мы можем взять P, и этот полином удовлетворяет условиям леммы 5.4. Далее, рассмотрим случай $1 \leqslant \dim S < n$. Так как $P \not\equiv 0$, то $\dim S < n$. Обозначим через S_1 ортогональное дополнение этого подпространства. Предположим, что $e_1, \ldots, e_k$ — некоторый ортонормальный базис в S_1. Мы можем дополнить эту систему векторов до ортонормального базиса $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть A' (где A' — матрица, полученная транспонированием матрицы A) — ортогональная матрица перехода от стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^n$ к этому базису. Тогда $P_1(x) := P(Ax)$ — выпуклый полином. Заметим, что подпространство S в новых координатах определяется уравнениями вида $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$. Следовательно, согласно лемме 5.3 в новых координатах существует выпуклый однородный полином $Q(x_1, \ldots, x_k)$ такой, что выполняется равенство:

$$P_1(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = Q(x_1, \ldots, x_k).$$

Так как множество нулей полинома P_1 совпадает с подпространством $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$, то при $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \neq 0$ имеем: $P_1(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = Q(x_1, \ldots, x_k) \neq 0$. Что и требовалось доказать. □

Теперь приступим к доказательству теоремы 5.1. Доказательство этой теоремы конструктивно. Оно основывается на построении нового базиса Щульца.

Построим многогранник Ньютона $N(\phi)$ функции ϕ по ряду Маклорена. Рассмотрим опорную к $N(\phi)$ гиперплоскость, заданную уравнением:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = N_1 \geqslant 2.$$

Пусть γ_1 — грань многогранника Ньютона, определенной следующим соотношением:

$$\gamma_1 := N(\phi) \cap \{x : x_1 + x_2 + \ldots + x_n = N_1\} \neq \varnothing.$$

Рассмотрим однородный полином ϕ_{γ_1} степени 1 относительно веса $(\frac{1}{N_1}, \ldots, \frac{1}{N_1})$, соответствующий этой грани, т. е.:

$$\phi_{\gamma_1} := \sum_{\alpha \in \gamma_1} a_\alpha x^\alpha.$$

Функция ϕ может быть записана в виде

$$\phi(x) = \phi_{\gamma_1}(x) + R(x),$$

где $R(x)$ остаточный член, удовлетворяющий условию:

$$R(\delta_\tau(x)) = O(\tau^{1+\varepsilon}) \quad (\text{при } \tau \to +0)$$

для некоторого положительного числа $\varepsilon > 0$. Согласно лемме 5.4 заключаем, что ϕ_{γ_1} — выпуклый однородный полином. Мы рассмотрим множество нулей этого полинома:

$$S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \phi_{\gamma_1}(x) = 0\}.$$

Согласно результатам работы [37] S_0 — линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$. Если $S_0 = \{0\}$, то исходная система координат является базисом Щульца для функции ϕ. В противном случае обозначим через S_1 ортогональное дополнение S_0, и $k_1 = \dim S_1 \geqslant 1$. Пусть $\{e_1, \ldots, e_{k_1}\}$ — некоторый ортонормальный базис S_1. Мы можем дополнить этот базис до базиса пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим через A_1' соответствующую ортогональную матрицу перехода от стандартного исходного базиса пространства $\mathbb{R}^n$ к этому новому базису. Тогда получим:

$$\phi(A_1 x) = Q_1(x_1, \ldots, x_{k_1}) + R_1(x),$$

где Q_1 — выпуклый однородный полином степени $N_1 \geqslant 2$, зависящий от переменных $x_1, \ldots, x_{k_1}$ и удовлетворяющий условию $Q_1(x_1, \ldots, x_{k_1}) \neq 0$ при $(x_1, \ldots, x_{k_1}) \neq 0$.

Запишем остаточный член в виде:

$$R_1(x', x'') := \sum_{|\alpha|=N_1} x'^{\alpha} a_\alpha(x) + \sum_{0<|\alpha|<N_1} x'^{\alpha} b_\alpha(x'') + r(x''),$$

где a_α, b_α, r — гладкие функции, а также $a_\alpha(0) = 0$ для любого мультииндекса α, удовлетворяющего условию $|\alpha| = N_1$. Если b_α при $0 < |\alpha| < N_1$, а также r — плоские функции, то мы приходим к доказательству теоремы 5.1. В противном случае среди этих функций существуют функции, имеющие конечный порядок в нуле.

Точно так же, как исходная функция ϕ, гладкие функции $b_\alpha(x'')$ и $r(x'')$ записываются в виде:

$$r(x'') = P(x'') + \tilde{R}(x''), \quad b_\alpha(x'') := P_\alpha(x'') + R_\alpha(x''),$$

где $P(x'')$ и $P_\alpha(x'')$ — однородные полиномиальные функции степени $N_2 > N_1$ и m_α, соответственно, т. е. порядок функции $b_\alpha(x'')$ и $r(x'')$ относительно веса $(1, \ldots, 1)$ равен m_α и $N_2 > N_1$, соответственно. Отметим, что возможны случаи $N_2 = \infty$ или $m_\alpha = \infty$ для некоторого α. Но по нашему предположению среди этих чисел существуют конечные.

Лемма 5.5. *Если порядок N_2 функции r относительно веса $(1, \ldots, 1)$ — конечное натуральное число, то для любого мультииндекса α из множества $\{0 < |\alpha| < N_1\}$ выполняется неравенство*

$$\frac{|\alpha|}{N_1} + \frac{m_\alpha}{N_2} \geqslant 1.$$

Более того, если $r(x'')$ — плоская функция, то функция

$$\sum_{0<|\alpha|<N_1} x'^{\alpha} b_\alpha(x'')$$

также является плоской функцией.

Доказательство. Предположим, что N_2 — конечное натуральное число, и существуют мультииндексы α и m_α такие, что

$$\frac{|\alpha|}{N_1} + \frac{m_\alpha}{N_2} < 1.$$

Пусть

$$\min\{\frac{|\alpha|}{N_1} + \frac{m_\alpha}{N_2}\} = \beta.$$

Так как $0 < |\alpha| < N_1$ и $0 < \beta < 1$, то функция ϕ в записывается в виде:

$$\phi(x', x'') = \sum_{\frac{|\alpha|}{N_1\beta} + \frac{m_\alpha}{N_2\beta} = 1} x'^{\alpha} P_\alpha(x'') + R_1(x', x'') := \tilde{P}_1(x', x'') + R_1(x', x''),$$

где

$$\tilde{P}_1(x', x'') := \sum_{\frac{|\alpha|}{N_1\beta} + \frac{m_\alpha}{N_2\beta} = 1} x'^{\alpha} P_\alpha(x'')$$

— ненулевой квазиоднородный полином степени единица относительно веса $(\frac{\mathbf{1}_k}{N_1\beta}, \frac{\mathbf{1}_{n-k}}{N_2\beta})$ (где $\mathbf{1}_k$ означает вектор $\mathbf{1}_k = (1, \ldots, 1)$ в пространстве $\mathbb{R}^k$, аналогично определяется $\mathbf{1}_{n-k}$), и $R_1(x', x'')$ — остаточный член степени строго больше единицы относительно этого веса, иными словами, справедливо включение: $R_1 \in \mathbf{A}_{>1}$. Так как $r \in \mathbf{A}_{>1}$ и $Q_1 \in \mathbf{A}_{>1}$ относительно веса $(\frac{\mathbf{1}_k}{N_1\beta}, \frac{\mathbf{1}_{n-k}}{N_2\beta})$, то в сумме, определяющей $\tilde{P}_1(x', x'')$ для любого мультииндекса α, имеем: $N_1 > |\alpha| > 0$. Согласно лемме 5.1 $\tilde{P}_1(x', x'')$ — выпуклый квазиоднородный полином. Фиксируем (x'^0, x''^0) и рассмотрим выпуклый полином $\tilde{P}_1(tx'^0, \tau x''^0)$. Этот полином может быть записан в виде

$$\tilde{P}_1(tx'^0, \tau x''^0) = t^l R_{11}(t, \tau, x'^0, x''^0),$$

где R_{11} — однородный полином и $l \geqslant 1$. Согласно лемме 5.2 выполнено $\tilde{P}_1(x'^0, x''^0) = 0$ для любого фиксированного (x'^0, x''^0), т. е. $\tilde{P}_1(x) \equiv 0$. Это противоречит нашему предположению.

Наконец, если $r(x'')$ — плоская функция, то в качестве N_2 берем любое натуральное число, большее, чем N_1. И снова, повторяя вышеприведенные рассуждения, придем к противоречию существования конечного натурального числа m_α. Лемма 5.5 доказана. □

Таким образом, если $r(x'')$ — плоская функция, то придем к базису Щульца и доказательство теоремы 5.1 завершается.

В противном случае рассмотрим функцию:

$$\phi_1(x'') := R_1(0, \dots, 0, x''),$$

где $x'' = (x_{k_1+1}, \dots, x_n)$.

Заметим, что новая функция $\phi_1(x'')$ удовлетворяет всем условиям, поставленным на функцию ϕ. Теперь повторим весь процесс, проделанный с функцией ϕ, с новой функцией $\phi_1(x'')$, которая зависит от меньшего числа переменных.

После конечного числа шагов получим подпространства $S_1, S_2, \dots, S_\nu$ (где $\nu \leqslant n$), удовлетворяющие условиям: S_i и S_j взаимно ортогональны при $i \neq j$ и

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{j=1}^{\nu} S_j.$$

При этом ограничение функции ϕ на $S_\nu \cap U$ является плоской функцией в начале координат при $m < n$.

Вес $\kappa := (\kappa_1, \dots, \kappa_m)$ определяется из соотношения $\kappa_l := \dfrac{1}{N_1}$ (где $l = \overline{1, \dim S_1}$, причем N_1 — четное натуральное число). Аналогично определяются $\kappa_{l+1}, \dots, \kappa_m$. Следовательно, для любого $1 \leqslant j \leqslant m$ имеем: $\dfrac{1}{\kappa_j}$ четное натуральное число, а также $\min\{\kappa_j\} = \kappa_m$.

Таким образом, определение базиса Щульца приводится к классической проблеме решения полиномиальных уравнений.

Теперь напишем вид остаточного члена. Функция ϕ в новой системе координат записывается в виде:

$$\phi(x', x'') = \phi_1(x', x'') + \phi_2(x''),$$

где $\phi_2(x'')$ — плоская функция, а $\phi_1(x', x'')$ имеет вид:

$$\phi_1(x', x'') = P(x') + R(x', x''),$$

где $R(x', x'')$ — остаточный член. По построению базиса Щульца для любой фиксированной точки x'' из окрестности нуля справедливо включение $R(\cdot, x'') \in \mathbf{A}_1$. Поэтому согласно предложению 4.2 он записывается в виде:

$$R(x', x'') = \sum_{\rho(\alpha)=1} x^\alpha R_\alpha(x', x'') + \sum_{\nu=1}^{s} C_s(x'') b_\nu(x') + \sum_{\rho(\alpha)<1} x'^\alpha R_\alpha(x'').$$

При этом согласно лемме 5.5 для любого мультииндекса α, удовлетворяющего условию $\rho(\alpha) < 1$, соответствующая функция $R_\alpha(x'')$ — плоская в начале координат. Этим завершается доказательство теоремы 5.1. □

Следствие 5.2. *Пусть ϕ — выпуклая аналитическая функция в начале координат, удовлетворяющая условиям $\phi(0) = 0$ и $\nabla\phi(0) = 0$. Тогда существует ортонормальная система координат, для которой выполняются следующие условия.*

(a) *Имеются целое число $0 \leqslant m \leqslant n$ и четные натуральные числа $(k_1, \dots, k_m)$ и $\kappa := (\dfrac{1}{k_1}, \dots, \dfrac{1}{k_m}, 0, \dots, 0)$ такие, что функция ϕ записывается в виде*

$$\phi(x', x'') = \sum_{\rho(\alpha)=1} c_\alpha x'^\alpha + R(x', x''),$$

где $x' = (x_1, \dots, x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, \dots, x_n)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ — *мультииндекс и* $\rho(\alpha) = (\alpha, \kappa)$. *Более того, остаток* $R(x', x'')$ *может быть записан в виде*

$$R(x', x'') = \sum_{\rho(\alpha)=1} x^\alpha R_\alpha(x', x'') + \sum_{\nu=1}^{s} C_s(x'') b_\nu(x'),$$

где $R_\alpha(0,0) = 0$ *для* $\rho(\alpha) = 1$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ *и* $\{b_1, \dots, b_s\}$ — *базисные мономы фактор-алгебры* $\mathbf{A}_{>1}/(I_\kappa \mathfrak{m})$.

(b) *Полином* $p(x') = \sum\limits_{\rho(\alpha)=1} a_\alpha x'^\alpha$ — *выпуклый, и* $p(x') > 0$ *для любого* $x' \neq 0$.

Доказательство. Доказательство следствия 5.2 вытекает из теоремы 5.1. □

В случае, когда ранг нормального отображения не превосходит единицы, справедливо следующее аналогичное утверждение.

Теорема 5.2. *Пусть* ϕ — *ненулевая бесконечно гладкая функция, определенная в окрестности нуля* U *и удовлетворяющая условиям* $\phi(0) = 0$ *и* $\nabla\phi(0) = 0$, *а также существует мультииндекс* α *такой, что* $D^\alpha\phi(0) \neq 0$. *Если для этой функции выполняется соотношение*

$$D^2\phi \wedge D^2\phi \equiv 0,$$

то существуют ортогональная матрица A *и гладкие функции* $g(y)$, $\{g_j\}_{j=0}^{h-1}$, *определенные в некоторой окрестности начала координат, такие, что справедливо следующее равенство*:

$$\phi(Ay) = y_1^h g(y) + \sum_{j=0}^{h-1} y_1^j g_j(y_2, \dots, y_n),$$

причем $g(0) \neq 0$ *и* $\{g_j\}_{j=0}^{h-1}$ — *плоские функции в начале координат, где* $2 \leqslant h$ — *натуральное число.*

При этом если ϕ — *ненулевая вещественно-аналитическая функция в начале координат, и она удовлетворяет условиям* $\phi(0) = 0$ *и* $\nabla\phi(0) = 0$, *а также* $D^2\phi \wedge D^2\phi \equiv 0$, *то существуют ортогональная матрица* A *и вещественно-аналитическая функция* $g(y)$ *в начале координат такие, что справедливо следующее равенство*:

$$\phi(Ay) = y_1^h g(y),$$

причем $g(0) \neq 0$, *где* $2 \leqslant h$ — *натуральное число.*

Доказательство. Отметим, что теорема 5.2 формально не следует из теоремы 5.1, потому что из выполнения условия теоремы 5.2 вообще говоря, не следует выпуклость функции ϕ. Однако методы доказательства теоремы 5.1 позволяют получить доказательство теоремы 5.2 (ср. с [26]). □

6. О показателе осцилляции осцилляторных интегралов с выпуклой фазой

В этом параграфе покажем, что показатель осцилляции осцилляторного интеграла с выпуклой аналитической фазой определяется расстоянием до многогранника Ньютона в приспособленной системе координат.

Теорема 6.1. *Пусть* ϕ — *выпуклая гладкая функция, определенная в некоторой выпуклой окрестности начала координат, и* $\phi(0) = 0$, *а также* $\nabla\phi(0) = 0$. *Тогда после возможных вращений координатных осей справедливы следующие утверждения*:

1. *если* ϕ *имеет конечный линейный тип в начале координат, то показатель осцилляции* $\beta(\phi) = -\dfrac{1}{h(\phi)}$, *где* $h(\phi) = \dfrac{1}{|\kappa|}$, $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ — *веса однородности, определенной из теоремы* 5.1;
2. *если* ϕ — *бесконечно гладкая функция, и* $h(\phi) > 1$ — *достаточно большое число, то показатель осцилляции* $\beta(\phi)$ *функции* ϕ *совпадает с отрицательным числом* $-\dfrac{1}{h(\phi)}$;
3. *при этом если* ϕ — *аналитическая функция в начале координат, то для показателя осцилляции функции* ϕ *имеем:* $\beta(\phi) = -\dfrac{1}{h(\phi)}$.

Доказательство.

1. Если в теореме 5.1 $m = n$ (этот случай соответствует классическому разложению Г. Щульца), то утверждение следует из результатов работы [37].

3. Сначала докажем теорему 6.1 в случае, когда ϕ — выпуклая аналитическая функция. Пусть $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_m)$ — вес квазиоднородности, определенный в теореме 5.1, и

$$\rho(x') := x_1^{k_1} + \ldots + x_m^{k_m}.$$

Так как $\{k_j\}_{j=1}^m$ четные натуральные числа, то множество

$$\Sigma := \{x' \in \mathbb{R}^m : \rho(x') := 1\}$$

является гладкой поверхностью. Мы назовем множество Σ *квазисферой*.

Введем квазиполярную систему координат:

$$x_j = \rho^{\kappa_j}\psi_j(\sigma), \quad j = 1, \dots, m, \quad x_l = y_l, \quad l = m+1, \dots, n,$$

где σ — точка на квазисфере и $\{\psi_j\}_{j=1}^m$ — гладкие функции, определенные на квазисфере Σ, и ранг дифференциала отображения ψ, заданного функциями $\{\psi_j\}_{j=1}^m$ всюду на квазисфере, равняется m (более подробно см. [13]). Тогда согласно следствию 5.2 функция ϕ записывается в виде:

$$\phi(\delta_\rho(\psi(s)), x'') = \rho\phi_1(\psi(\sigma), x'', \rho),$$

причем функция ϕ_1 оценивается снизу на квазисфере, точнее, для некоторого фиксированного числа $\delta > 0$ на квазисфере Σ выполняется неравенство

$$\phi_1(\psi(\sigma), 0, 0) \geqslant \delta > 0.$$

Таким образом, после замены переменных осцилляторный интеграл записывается в виде:

$$J(\lambda) = \int a(\delta_\rho(\psi(s)), x'')e^{i\lambda\rho\phi_1(\psi(s), x'', \rho)}\rho^{|\kappa|-1}d\rho dx''\Omega,$$

где Ω — форма объема на квазисфере $\{\rho(\sigma) = 1\}$ (см. [12], а также [13]). Она называется *формой Гельфанда—Лере* (см. [7]). Согласно лемме Эрдейи, для одномерного интеграла (см. [17])

$$J_1(\lambda, \sigma, x'') = \int a(\delta_\rho(\psi(s)), x'')e^{i\lambda\rho\phi_1(\psi(s), x'', \rho)}\rho^{|\kappa|-1}d\rho$$

получим:

$$J_1(\lambda, \sigma, x'') = Ca(0, x'')\lambda^{-|\kappa|} + O(\lambda^{-|\kappa|-\varepsilon}) \quad (\text{при}\, \lambda \to +\infty)$$

с некоторым положительным числом $\varepsilon > 0$. Отсюда для интеграла $J(\lambda)$ получим асимптотическое соотношение:

$$J(\lambda) = C(a, \phi)\lambda^{-|\kappa|} + O(\lambda^{-|\kappa|-\varepsilon}) \quad (\text{при}\, \lambda \to +\infty),$$

причем $C(a, \phi) \neq 0$, если a — неотрицательная финитная функция, сосредоточенная в достаточно малой окрестности начала координат, и $a(0) > 0$. Заметим, что фактически в аналитическом случае получим главный член асимптотического разложения. Существование таких разложений вытекает из классической теоремы Атьи—Бернштейна [19]. В частности, имеем:

$$\beta(\phi) = -|\kappa| = -\frac{1}{h(\phi)}.$$

2. В бесконечно гладком случае имеем дело с плоскими членами. Поэтому не удается получить оценку в общем случае с использованием метода многогранников Ньютона.

Рассмотрим функцию вида

$$\phi(x', x'') = p(x') + R(x', x'') + \sum_{0<\rho(\alpha)<1}(x')^\alpha R_\alpha(x''),$$

где R_α — плоская функция при $0 < \rho(\alpha) < 1$.

Обозначим через β_κ количество различных чисел $0 < \rho(\alpha) < 1$ для векторов α с неотрицательными целыми компонентами, т. е.

$$\beta_\kappa := \sharp\{\rho(\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}_0^m, \, 0 < \rho(\alpha) < 1\},$$

где $\sharp X$ означает мощность конечного множества X.

Пусть $\{\rho(\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}_0^m, \, 0 < \rho(\alpha) < 1\} = \{\nu_1, \dots, \nu_{\beta_\kappa}\}$.

Рассмотрим осцилляторный интеграл:

$$J_1(\lambda) := \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{i\lambda(b_0 r + \sum\limits_{l=1}^{\beta_\kappa} c_l r^{\nu_l})} r^{|\kappa|-1} a(r) dr,$$

где $a \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Лемма 6.1. *Для интеграла $J_1(\lambda)$ при $|\lambda| > 2$ справедлива следующая оценка*:

$$|J_1(\lambda)| \leqslant \frac{C \ln^l |\lambda|}{|\lambda|^\gamma}, \tag{6.1}$$

где $\gamma := \min\{\frac{1}{|\kappa|}, \frac{1}{\beta_\nu + 1}\}$, причем $l = 1$, если $|\kappa| = \dfrac{1}{\beta_\nu + 1}$, в противном случае $l = 0$.

Доказательство. Аналогичное утверждение для преобразования Фурье мер, сосредоточенных на выпуклых гиперповерхностях конечного линейного типа, доказано в работе [33].

Ради полноты изложения приведем доказательство леммы 6.1. Пусть $\omega \in C_0^\infty$ $(\frac{1}{2} \leqslant r \leqslant 2)$ — неотрицательная функция, удовлетворяющая условию

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \omega(2^j r) = 1 \quad \text{для любого} \quad r > 0.$$

С помощью этого разбиения единицы мы можем разложить интеграл $J_1(\lambda)$ в ряд:

$$J_1(\lambda) = \sum_{j=j_0}^{\infty} J^j(\lambda),$$

где j_0 — достаточно большое натуральное число (легко видеть, что чем меньше носитель амплитуды, тем больше j_0) и

$$J^j(\lambda) := \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{i\lambda(b_0 r + \sum\limits_{l=1}^{\beta_\kappa} c_l r^{\nu_l})} r^{|\kappa|-1} a(r) \omega(2^j r) dr.$$

Рассмотрим оценку интеграла $J^j(\lambda)$. Используя замену переменных, определенную растяжением $2^j r \to r$, получим:

$$J^j(\lambda) := 2^{-j|\kappa|} \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{i\lambda 2^{-j}(b_0 r + \sum\limits_{l=1}^{\beta_\kappa} c_l 2^{j(1-\nu_l)} r^{\nu_l})} r^{|\kappa|-1} a(2^{-j} r) \omega(r) dr.$$

Для оценки последнего интеграла отдельно рассмотрим случай, когда $j \in \{j_0 \leqslant j : \lambda 2^{-j} \leqslant M\}$, где M достаточно большое фиксированное число. В этом случае подынтегральная функция быстро не осциллирует, и мы используем тривиальную оценку:

$$|J^j(\lambda)| \leqslant c 2^{-j|\kappa|}. \tag{6.2}$$

Теперь предположим, что $\lambda 2^{-j} > M$. В этом случае осцилляторный интеграл $J^j(\lambda)$ может быть рассмотрен как преобразование Фурье меры, сосредоточенной на кривой $(b_0 r, \ldots, r^{\nu_{\beta_\kappa}})$. Эта кривая имеет ненулевое кручение. Следовательно интеграл $J^j(\lambda)$ оценивается следующим образом (см. [10]):

$$|J^j(\lambda)| \leqslant c 2^{-j|\kappa|} \frac{C}{|2^{-j}\lambda|^{\frac{1}{\beta_\nu + 1}}}. \tag{6.3}$$

В частности, если $|\kappa| = \dfrac{1}{\beta_\nu + 1}$, то имеем оценку

$$|J^j(\lambda)| \leqslant \frac{C}{|\lambda|^{\frac{1}{\beta_\nu + 1}}}. \tag{6.4}$$

Таким образом, если $|\kappa| \neq \dfrac{1}{\beta_\nu+1}$, то для осцилляторного интеграла $J_1(\lambda)$ получим оценку:

$$|J_1(\lambda)| \leqslant \sum_{\lambda 2^{-j}\leqslant M} |J^j(\lambda)| + \sum_{\lambda 2^{-j}>M} |J^j(\lambda)| \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\sum_{\lambda 2^{-j}\leqslant M} 2^{-|\kappa|j} + \sum_{\lambda 2^{-j}>M} \frac{2^{-|\kappa|j}}{|2^{-j}\lambda|^{\frac{1}{\beta_\nu+1}}}\right) \leqslant \frac{C}{|\lambda|^{\kappa}} + \frac{C}{|\lambda|^{\frac{1}{\beta_\nu+1}}} \leqslant \frac{C}{|\lambda|^{\gamma}}.$$

Если $|\kappa| = \dfrac{1}{\beta_\nu+1}$, то используя оценку (6.4), получим аналогичную оценку с логарифмическим множителем. Что и завершает доказательство леммы 5.5. □

Из леммы 5.5 вытекает доказательство части 2 теоремы 6.1 в случае выпуклых гладких фазовых функций. □

7. Оценки максимальных операторов, зависящих от параметров (оценки типа Ван дер Корпута)

Пусть $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — гладкая гиперповерхность. Если она в точке $x^0 \in S$ имеет конечный порядок касания с аффинной касательной гиперплоскостью, то говорят, что она имеет *конечный тип* в этой точке (см. [41, стр. 350]). Можно дать аналитическое определение этого понятия. Действительно, в достаточно малой окрестности этой точки представим гиперповерхность в виде графика некоторой гладкой функции (см. [8]). Без ограничения общности можем считать, что $x^0 = 0$. Тогда вращением системы координат S представляется в виде графика функции $x_{n+1} = \phi(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющей условиям: $\phi(0) = 0, \nabla\phi(0) = 0$. Конечность типа означает существование мультииндекса α такого, что $D^\alpha\phi(0) \neq 0$ (ср. с [41, с. 350]). Минимальное число τ такое, что существует мультииндекс $\alpha \in \{\alpha : |\alpha| \leqslant \tau\}$, для которого выполняется условие $D^\alpha\phi(0) \neq 0$, называется *типом гиперповерхности* S в точке x^0. Обозначим этот тип через $\tau_{x^0}(S)$.

Далее мы рассмотрим семейство гладких гиперповерхностей, зависящих от дополнительных параметров $S(\sigma) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, где $\sigma \in \mathbb{R}^m$ — параметр. Пусть $S(\sigma) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — семейство гладких гиперповерхностей, гладко зависящих от параметра $\sigma \in \mathbb{R}^m$, и $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^m)$ — неотрицательная гладкая функция с компактным носителем.

В этом параграфе рассмотрим оценки типа Ван дер Корпута для максимальных операторов при условии, что функция плотности ψ сосредоточена в достаточно малой окрестности фиксированной точки x^0 гиперповерхности $S(0)$. Ради определенности можем считать, что $x^0 = (0, \ldots, 0, C)$, где $C \neq 0$ — фиксированное вещественное число, и семейство гиперповерхностей задано в виде:

$$x_{n+1} = C(\sigma, \varepsilon) + \varepsilon\phi(x, \sigma),$$

где $\phi(x,\sigma)$ — семейство гладких функций, удовлетворяющих условиям: $\phi(0,0) = 0$ и $\nabla_x\phi(0,0) = 0$, а также $C(\sigma,\varepsilon)$ — гладкая функция, такая, что $C(0,0) \neq 0$, и ε — положительное вещественное число. Рассмотрим оператор усреднения, заданный в виде:

$$A_t^{\sigma,\varepsilon} f(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y_1 - tx_1, \ldots, y_n - tx_n, x_{n+1} - t(C(\sigma,\varepsilon) + \varepsilon\phi(x,\sigma)))\psi(x,\sigma)dx. \tag{7.1}$$

Соответствующий максимальный оператор определяется соотношением:

$$\mathcal{M}^{\sigma,\varepsilon} f(x) := \sup_{t>0} |A_t^{\sigma,\varepsilon} f(x)|. \tag{7.2}$$

Следующий результат является аналогом многомерной леммы Ван дер Корпута для максимальных операторов.

Теорема 7.1. *Пусть $\phi(x,\sigma)$ — семейство бесконечно гладких функций, удовлетворяющее условиям: $\phi(0,0) = 0$ и $\nabla_x\phi(0,0) = 0$, а также функция $\phi(x,0)$ имеет конечный тип τ в начале координат. Тогда существуют окрестность нуля $U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и положительное число ε_0 такие, что для любой неотрицательной функции $\psi \in C_0^\infty(U \times V)$ максимальный оператор* (7.2) *ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $p > \tau$.*

Более того, для любого $p > \tau$ существует постоянное число C_p такое, что при любом элементе $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ для оператора (7.2) *справедлива следующая равномерная по $\sigma \in V$ оценка*:

$$\|\mathcal{M}^{\sigma,\varepsilon} f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} := \frac{C_p}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})}. \tag{7.3}$$

Замечание 7.1 (ср. с [41, с. 342])**.** Теорема 7.1 является аналогом теоремы К. Д. Согги. В работе [38] доказано аналогичное утверждение в случае, когда $\varepsilon = 1$ и ϕ — фиксированная функция, независящая от параметров, а также $\tau = 2$.

Доказательство. Сначала приведем доказательство следующей вспомогательной леммы.

Лемма 7.1. *Оператор усреднения $A_t^{\sigma,\varepsilon} f$ может быть записан в виде*

$$A_t^{\sigma,\varepsilon} f(y) = \int\limits_{-b_n}^{b_n} \int\limits_{-b_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \int\limits_{-b_2}^{b_2} R^\theta \mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon,\theta} R^{-\theta} f(y) d\theta, \tag{7.4}$$

где $b_i > 0, i = \overline{2,n}$, $R^\theta := R^{\theta_2} R^{\theta_3} \dots R^{\theta_n}$, $R^{-\theta} := R^{-\theta_n} R^{-\theta_{n-1}} \dots R^{-\theta_2}$ и

$$\mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon,\theta} f(y) := \int\limits_{\mathbb{R}} f\big(y_1 - tx_1, y_2 - t(\tilde{C}(\sigma,\varepsilon,\theta) + \varepsilon\phi_2(x_1,\theta,\sigma,\varepsilon)), y_3, \dots, y_{n+1}\big)\psi_2(x_1,\theta,\sigma,\varepsilon) dx_1, \tag{7.5}$$

где $\tilde{C}(\sigma,\, \varepsilon,\, \theta)$, $(\theta := (\theta_2, \dots, \theta_n))$ — гладкая функция, удовлетворяющая условию $C(0) \neq 0$, а также R^{θ_j} $(j = 2, \dots, n)$ — оператор вращения, определяемый формулой:

$$R^{\theta_j} f(x) := f(x_1, \dots, x_j, x_j \sin\theta_j + x_{j+1}\cos\theta_j, x_j\cos\theta_j - \sin\theta_j x_{j+2}, \dots, x_n).$$

Доказательство. Так как аналогичное утверждение доказано в работе [9] при $n = 2$, мы ограничимся лишь схемой доказательства. Точки пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ запишем в виде (y, y_{n+1}), где $y \in \mathbb{R}^n$, $y_{n+1} \in \mathbb{R}$, а также используем обозначение $x' := (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, так что $x = (x', x_n)$, аналогично $y = (y', y_n)$.

Рассмотрим уравнение относительно x_n:

$$\sin\theta_n\big(C(\sigma,\, \varepsilon) + \varepsilon\phi(x,\sigma)\big) - \cos\theta_n x_n = 0. \tag{7.6}$$

Согласно теореме о неявной функции уравнение (7.6) имеет единственное гладкое решение $x_n(x', \theta_n, \sigma, \varepsilon)$ при малых $|x'|$, $|\sigma|$, $|\theta_n|$ и ε, причем

$$\begin{gathered} x_n(0,0,\dots,0) = 0, \\ x_n(x',\, \theta_n,\, \sigma,\, 0) = C(\sigma,\, \varepsilon)\operatorname{tg}\theta_n, \\ \frac{\partial}{\partial\theta_n} x_n(0,0,\dots,0) = C(0,\, 0) \neq 0. \end{gathered}$$

Поэтому в интеграле (7.1) можем использовать замену переменных $x \mapsto (x',\, x_n(x',\, \theta_n,\, \sigma,\, \varepsilon))$ и получим:

$$\begin{aligned} A_t^{\sigma,\varepsilon} f(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\big(&y' - tx',\, y_n - x_n(x',\, \theta_n, \sigma,\, \varepsilon), \\ &y_{n+1} - t(C(\sigma,\, \varepsilon) + \varepsilon\phi(x',\, x_n(x',\, \theta_n, \sigma,\, \varepsilon), \sigma))\big)\psi_1(x',\, \theta_n, \sigma, \varepsilon) dx' d\theta_n, \end{aligned} \tag{7.7}$$

где

$$\psi_1(x',\, \sigma,\, \theta_n, \varepsilon) := \psi(x',\, x_n(x',\, \sigma,\, \theta_n, \varepsilon))|J(x',\, \sigma,\, \theta_n, \varepsilon)|,$$

а $J(x',\, \sigma,\, \theta_n, \varepsilon)$ — Якобиан замены переменных.

Теперь запишем интеграл (7.7) как повторный интеграл, т. е.

$$A_t^{\sigma,\varepsilon} f(y) = \int\limits_{-b_n}^{b_n} A_t^{\sigma,\varepsilon,\theta_n} f(y) d\theta_n,$$

где b_n некоторое положительное число и $A_t^{\sigma,\varepsilon,\theta_n}f$ — оператор усреднения, определяемый равенством:

$$A_t^{\sigma,\varepsilon,\theta_n}f(y)=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f\big(y'-tx',\, y_n-x_n(x',\,\theta_n,\sigma,\,\varepsilon),$$
$$y_{n+1}-t(C(\varepsilon,\sigma)+\varepsilon\phi(x',\,x_n(x',\,\theta_n,\sigma,\,\varepsilon),\sigma))\big)\psi_1(x',\,\theta_n,\sigma,\varepsilon)dx'.$$

Теперь определим операторы, заданные вращением:

$$R^{\theta_n}f(x',\,x_n,x_{n+1}):=f(x',x_n\sin\theta_n+x_{n+1}\cos\theta_n,x_n\cos\theta_n-x_{n+1}\sin\theta_n),$$

и $R^{-\theta_n}f$ — обратный оператор. Очевидно, что это изометрические операторы в пространстве $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$.

Теперь, умножая оператор усреднения $A_t^{\sigma,\varepsilon,\theta_n}$ справа и слева на операторы вращения R^{θ_n} и $R^{-\theta_n}$, соответственно, получим новый оператор усреднения $\mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon,\theta_n}:=R^{-\theta_n}A_t^{\sigma,\varepsilon,\theta_n}R^{\theta_n}$. Непосредственными вычислениями имеем:

$$\mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon,\theta_n}f(y',\,y_n,y_{n+1})=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(y'-tx',\,y_n-$$
$$-\,t(x_n(x',\theta_n,\sigma,\varepsilon)\sin\theta_n+(C(\sigma,\varepsilon)+\varepsilon\phi(x',\,x_n(x',\,\theta_n,\sigma,\varepsilon),\sigma)\cos\theta_n,y_{n+1})\psi_1(x',\theta_n,\varepsilon)dx'.$$

Так как $x_n(x',\theta_n,\sigma,\varepsilon)$ — решение уравнения (7.6), то оно удовлетворяет условиям:

$$x_n(x',\theta_n,\sigma,0)=C(\sigma,0)\operatorname{tg}\theta_n.$$

Следовательно, согласно теореме деления (см. [18]), функция $x_n(x',\,\theta_n,\sigma,\varepsilon)-C(\sigma,\varepsilon)\operatorname{tg}\theta_n$ записывается в виде:

$$x_n(x',\,\theta_n,\sigma,\varepsilon)-C(\sigma,0)\operatorname{tg}\theta_n=\varepsilon\theta_n g(x',\theta_n,\sigma,\varepsilon),$$

где g — некоторая гладкая функция.

Таким образом, оператор усреднения $\mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon,\theta_n}$ приводится к виду:

$$\mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon,\theta_n}f(y',\,y_n,y_{n+1})=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(y'-tx',y_n-t(C(\sigma,\,\varepsilon,\theta_n)+\varepsilon\phi_1(x',\,\theta_n,\sigma,\varepsilon),y_{n+1})\psi_1(x',\,\theta_n,\varepsilon)dx',$$

где

$$C_1(\sigma,\,\varepsilon,\theta_n):=C(\sigma,\,\varepsilon)\cos\theta_n+\sin\theta_n\operatorname{tg}\theta_n C(\sigma,0),$$
$$\phi_1(x',\theta_n,\sigma,\varepsilon):=\phi(x',x_n(x',\theta_n,\sigma,\varepsilon),\sigma)\cos\theta_n+\theta_n\sin\theta_n g(x',\theta_n,\sigma,\varepsilon).$$

Следовательно, первоначальный оператор усреднения $A_t^{\sigma,\varepsilon}$ записывается в виде:

$$A_t^{\sigma,\varepsilon}f(y)=\int\limits_{-b_n}^{b_n}(R^{\theta_n}\mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon,\theta_n}R^{-\theta_n})f(y)d\theta_n.$$

В частности, в случае $n=2$ придем к доказательству леммы 7.1. В случае $n>2$ используется метод индукции и доказательство леммы 7.1 завершается. □

Доказательство теоремы 7.1. Если $\phi(x,\sigma)$ удовлетворяет условиям теоремы 7.1, то вращением системы координат можем считать, что $\alpha:=(\tau,0,\ldots,0)$, иными словами,

$$\partial_1^\tau\phi(0,0)\neq 0.$$

Теперь, применяя лемму 7.1, можно записать оператор усреднения в виде (7.4). Если $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, то $\mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon}f(y)$ — непрерывная функция от (t,y,σ,ε), и $\mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon,\theta}f(y)$ — также непрерывная функция от $(t,y,\sigma,\theta,\varepsilon)$. Заметим, что согласно лемме 7.1 для полученной функции $\phi_2(x_1,\theta,\sigma,\varepsilon)$ выполняется условие

$$\partial_1^\tau\phi_2(0,0,0,0)\neq 0.$$

Поэтому, фиксируя y, можем записать следующее очевидное неравенство:

$$\sup_{t>0} |A_t^{\sigma,\varepsilon} f(y)| \leqslant \int\limits_{-b_n}^{b_n} \int\limits_{-b_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \int\limits_{-b_2}^{b_2} \sup_{t>0} |R^\theta \mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon,\theta} R^{-\theta} f(y)| d\theta.$$

Так как θ не зависит от t, то для фиксированного θ можем использовать «монотонность» оператора вращения и имеем:

$$\sup_{t>0} |R^\theta \mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon,\theta} R^{-\theta} f(y)| \leqslant R^\theta \sup_{t>0} |\mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon,\theta} R^{-\theta} f(y)|.$$

Введем максимальный оператор, зависящий от параметров $(\sigma, \varepsilon, \theta)$:

$$\mathcal{M}^{\sigma,\varepsilon,\theta} f(y)| := \sup_{t>0} |\mathcal{A}_t^{\sigma,\varepsilon,\theta} R^{-\theta} f(y)|. \tag{7.8}$$

Согласно [27, теорема 4.2], для максимального оператора (7.8) при любом фиксированном $p > \tau$ получим оценку:

$$\|\mathcal{M}^{\sigma,\varepsilon,\theta} f(y)|\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} \leqslant C_p \varepsilon^{-\frac{1}{p}} \|R^{-\theta} f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} = C_p \varepsilon^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

Наконец, интегрируя последнюю оценку по множеству $\{|\theta_n| < b_n, |\theta_{n-1}| < b_{n-1} \dots, |\theta_2| < b_2\}$, получим искомую оценку. Что завершает доказательство теоремы 7.1. □

8. Оценки максимальных операторов, ассоциированных с выпуклыми гиперповерхностями

В этом разделе докажем аналог теоремы Иосевича—Соера [33] для произвольных выпуклых аналитических гиперповерхностей.

Теорема 8.1. *Пусть S — произвольная выпуклая аналитическая гиперповерхность, удовлетворяющая условиям трансверсальности в каждой точке носителя плотности $0 \leqslant \psi \in C_0^\infty(S)$, и*

$$h_\psi(S) := \sup_{x \in \mathrm{supp}(\psi)} h_x(S).$$

Тогда для любого $p > \max\{h_\psi(S), 2\}$ максимальный оператор $\mathcal{M}$ ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$.

Более того, если для некоторой точки $x^0 \in S$ выполняется неравенство

$$\psi(x^0) > 0,$$

то для любого $1 \leqslant p \leqslant h_{x^0}(S)$ максимальный оператор $\mathcal{M}$ неограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$. В частности, если $h_{x^0}(S) \geqslant 2$, то имеет место равенство

$$\mathbb{P}_{x^0}(S) = h_{x^0}(S).$$

Доказательство. Используя стандартное разбиение единицы, мы можем считать, что плотность ψ сосредоточена в достаточно малой окрестности фиксированной точки x^0, скажем, $x^0 = (0, \dots, 0, 1)$, а также гиперповерхность S задана в виде графика выпуклой вещественно-аналитической функции, т. е.

$$x_{n+1} = 1 + \phi(x).$$

Здесь ϕ — вещественно-аналитическая выпуклая функция, удовлетворяющая условиям: $\phi(0) = 0$, $\nabla\phi(0) = 0$. Тогда покажем, что существует окрестность U точки $x^0 := (0, \dots, 0, 1)$ такая, что для любой неотрицательной функции $\psi \in C_0^\infty(S \bigcap U)$ и $p > \max\{h(\phi), 2\}$ максимальный оператор $\mathcal{M}$ ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$. Более, того, если $\psi(0) \neq 0$, а также $h(\phi) \geqslant 2$, то для любого $1 \leqslant p \leqslant h(\phi)$ максимальный оператор $\mathcal{M}$ неограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$.

Как известно, поведение максимальных операторов инвариантно относительно линейной замены переменных пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. С другой стороны, согласно следствию 5.2 функция ϕ приводится к специальному виду

$$\phi(x) = p(x') + R(x', x''),$$

где $p(x')$ — выпуклый полином и $R(x', x'')$ — остаточный член. Поэтому без ограничения общности можем считать, что первоначальная функция приведена к этому виду и, следовательно, исходная система координат приспособлена к функции ϕ. Исследуем поведение оператора усреднения

$$A_t f(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y - tx, y_{n+1} - t(1 + \phi(x)))\psi_1(x)dx, \tag{8.1}$$

где

$$\psi_1(x) = \psi(x)\sqrt{1 + |\nabla\phi(x)|^2},\ \psi_1 \in C_0^\infty(V),$$

а $V \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая окрестность начала координат.

Пусть $\rho(x')$ — квазиоднородная «норма», определяемая весом κ:

$$\rho(x') = x_1^{k_1} + \ldots + x_m^{k_m},$$

и ω — бесконечно гладкая функция, удовлетворяющая условиям $0 \leqslant \omega \leqslant 1$,

$$\omega(x') = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \rho(x') \leqslant 1, \\ 0 & \text{при} \quad \rho(x') \geqslant 2. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию:

$$\chi(x') := \omega(x') - \omega(\delta_2(x')).$$

Тогда

$$\mathrm{supp}(\chi) \subset D := \{\frac{1}{2} \leqslant \rho(x') \leqslant 2\}.$$

Пусть $\chi_j(x') := \chi(\delta_{2^j}(x'))$. Легко показать, что выполняется следующее равенство:

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \chi_j(x') = 1 \quad \text{при} \quad 0 < \rho(x') \leqslant 2^{1-j_0}.$$

В соответствии с этим разложением для оператора усреднения $A_t f$ получим

$$A_t f = \sum_{j=j_0}^{\infty} A_t^j f(y),$$

где

$$A_t^j f(y) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y - tx, y_{n+1} - t(1 + \phi(x)))\psi_1(x)\chi_j(x')dx.$$

Соответствующий максимальный оператор обозначается через $\mathcal{M}^j$.

Теперь используем замену переменных, заданную растяжением $x' = \delta_{2^{-j}}(w')$, $x_i = w_i$, где $w' \in D$, $i = \overline{m+1, n}$. В результате для оператора усреднения $A_t^j f$ получим выражение

$$A_t^j f(y) = 2^{-j|\kappa|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y' - t\delta_{2^{-j}}(w'), y_{m+1} - tw_{m+1}, \ldots, y_n - tw_n,$$
$$y_{n+1} - t(1 + 2^{-j}(p(w') + R_j(w)))\tilde{\psi}_1((\delta_{2^{-j}}w'), w'')\chi(w')dw,$$

где $R_j(w) = 2^j R(\delta_{2^{-j}}w', w'')$, $\tilde{\psi}_j(w) = \psi_1(\delta_{2^{-j}}(w'), w'')$, $|\kappa| = \dfrac{1}{h(\phi)}$. Здесь $j \geqslant j_0$, и в зависимости от малости носителя ψ_1 можем выбрать j_0 достаточно большим.

Следующий оператор растяжения

$$T^j f(y) := 2^{\frac{j|\kappa|}{p}} f(\delta_{2^j}(y'),\, y'',\, y_{n+1})$$

преобразуют оператор усреднения $A_t^j f$ к новому оператору:

$$T^{-j}A_t^j T^j f(y) = 2^{-j|\kappa|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\Big(y - tw, y_{n+1} - t(1 + 2^{-j}(p(w') + R_j(w))\Big)\tilde{\psi}_1(w)\chi(w')dw.$$

Так как $\operatorname{supp}(\chi) \subset \{\frac{1}{2} \leqslant \rho(w') \leqslant 2\}$, то тип гиперповерхности S, заданной уравнением

$$w_{n+1} = p(w') \neq 0,$$

в каждой точке w' носителя функции χ совпадает с 2, т. е. $\tau_{w'}(S) = 2$ (см. [33]). Поэтому, используя подходящее разбиение единицы, можем применить теорему 7.1 к максимальному оператору $\mathcal{M}^j$, так что этот оператор ограничен в L^p при $p > 2$. Более того, справедлива следующая оценка:

$$\|\mathcal{M}^j f\|_{L^p} \leqslant \|\sup_{t>0} |A_t^j f|\|_{L^p} \leqslant D_p 2^{-\frac{j}{h(\phi)}+\frac{j}{p}} \|f\|_{L^p}.$$

Следовательно,

$$\sum_{j\geqslant j_0} \|M^j f\|_{L^p} \leqslant \sum_{j\geqslant j_0} D_p 2^{-\frac{j}{h(\phi)}+\frac{j}{p}} \|f\|_{L^p},$$

где D_p — некоторое положительное число.

Последний ряд сходится при $p > \max\{2, h(\phi)\}$. Поэтому для произвольного $p > \max\{2, h(\phi)\}$ справедлива следующая оценка:

$$\|\mathcal{M} f\|_{L^p} \leqslant \sum_{j\geqslant j_0} \|M^j f\|_{L^p} \leqslant C_p \|f\|_{L^p}.$$

Следовательно, максимальный оператор $\mathcal{M}$ ограничен в L^p при $p > \max\{2, h(\phi)\}$.

Теперь, предполагая $\psi_1(0) > 0$, покажем, что максимальный оператор $\mathcal{M}$ не ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ при $p \leqslant h$. Рассмотрим следующую функцию:

$$f(x, x_{n+1}) = \frac{\eta_1(x)\eta_2(x_{n+1})}{|x_{n+1}|^{\frac{1}{p}} |\ln |x_{n+1}||}$$

(см. [41]), где η_1, η_2 — некоторые неотрицательные финитные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\eta_1(x)\eta_2(x_{n+1}) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant \dfrac{\delta}{2}, \\ 0, & |x| \geqslant \delta. \end{cases}$$

Тогда $f \in L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ при $p > 1$. Здесь κ — достаточно малое число. Значение оператора усреднения в этой функции записывается в виде:

$$A_t f(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\eta_1(y - tz)\eta_2(y_{n+1} - t(1 + p(x') + R(x', x'')))}{|y_{n+1} - t(1 + p(x') + R(x', x''))|^{\frac{1}{p}} |\ln |y_{n+1} - t(1 + p(x') + R(x', x''))||} \psi_1(x) dx.$$

Следовательно, при $t = y_{n+1} > 0$ и достаточно малых $(y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1})$ получим:

$$\sup_{t>0} |A_t^1 f(y)| \geqslant C_1 \int\limits_{|x|\leqslant\frac{\delta}{2}} \frac{1}{||p(x') + R(x', x'')|^{\frac{1}{p}} \ln |p(x') + R(x', x'')||^{\frac{1}{p}}} dx,$$

где C_1 — некоторое положительное число.

Таким образом, если $\psi_1(0) \neq 0$, то последний интеграл в правой части неравенства расходится при $p \leqslant h(\phi)$. Поэтому для таких значений y имеем $\mathcal{M}f(y) = +\infty$ и, следовательно, $\mathcal{M}f \notin L^q(\mathbb{R}^{n+1})$ для произвольного $q \geqslant 1$. Мы можем заключить, что для $h(\phi) \geqslant p > 1$ имеет место включение $f \in L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ и $\mathcal{M}f \notin L^q(\mathbb{R}^{n+1})$ для произвольного числа $q \geqslant 1$. В частности, максимальный оператор неограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$.

Наконец, стандартные методы разбиения единицы завершают доказательство теоремы 8.1. $\square$

Пусть S — гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, и пусть $\mathfrak{B}_u(x^0, S)$ обозначает множество всех $\beta \leqslant 0$, для которых существует окрестность U_β точки x^0 в S такая, что для всех функций $\psi \in C_0^\infty(U_\beta)$ выполняется следующая оценка:

$$\left|\int\limits_S e^{i(x,\xi)} \psi(x) dS(x)\right| \leqslant C_\beta(\psi)(1 + |\xi|)^\beta \quad \text{для каждого} \quad \xi \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{8.2}$$

Тогда

$$\beta_u(x^0, S) := \inf\{\beta : \beta \in \mathfrak{B}_u(x^0, S)\}.$$

Число $\beta_u(x^0, S)$ называется *равномерным показателем осцилляции* преобразования Фурье поверхностной меры dS в точке x^0.

Это определение близко первоначальному определению В. И. Арнольда [1].

Если мы ограничимся нормальным направлением к гиперповерхности S в точке x^0, то можем определить аналогичное понятие: *индивидуальный показатель осцилляции* гиперповерхности S в этой точке $x^0 \in S$. Точнее, если $N(x^0)$ — единичный вектор нормали к S в точке x^0, то определим $\mathfrak{B}(x^0, S)$ как множество всех $\beta \leqslant 0$ таких, что существует окрестность U_β точки x^0 в S такая, что для произвольной функции $\psi \in C_0^\infty(U_\beta)$, выполняется оценка (8.2) вдоль направления $\mathbb{R}\, N(x^0)$, т. е.

$$\left|\int_S e^{i\lambda(x, N(x^0))}\psi(x) dS(x)\right| \leqslant C_\beta\, (1 + |\lambda|)^\beta \text{ для любого } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{8.3}$$

Тогда

$$\beta(x^0, S) := \inf\{\beta : \beta \in \mathfrak{B}(x^0, S)\}.$$

Это число называется *индивидуальным показателем осцилляции* преобразования Фурье поверхностной меры dS в точке x^0. Здесь аналитичность фазы не предполагается. Следует отметить, что определение, данное в монографии [3], более точное. Однако оно основывается на явном виде асимптотического разложения осцилляторного интеграла с аналитической фазой и, как следствие, не применимо для случая, когда фаза является произвольной гладкой функцией, так как асимптотическое поведение осцилляторных интегралов с гладкой фазой может быть довольно экзотичным.

В случае, когда S задается в виде графика функции ϕ, то понятие $\beta_u(\phi)$ совпадает с определением равномерного показателя осцилляции, данным в монографии [3, с. 148], если мы ограничимся с «линейными» деформациями, и $\beta(\phi)$ совпадает с индивидуальным показателем осцилляции для ϕ, данным в работе [1] (ср. с [27]).

В работе [16] доказано равенство

$$\beta_u(x^0, S) = \max\{\beta(x^0, S), -\frac{1}{2}\}$$

для произвольных выпуклых аналитических гиперповерхностей.

Теперь мы определим *равномерный контактный индекс* $\gamma_u(x^0, S)$ гиперповерхности S в точке $x^0 \in S$ следующим образом (см. [27]). Пусть $\mathfrak{C}_u(x^0, S)$ обозначает множество всех вещественных чисел $\gamma \geqslant 0$, для которых существует открытая окрестность U_γ точки x^0 на S такая, что для произвольной аффинной гиперплоскости H в $\mathbb{R}^{n+1}$ выполняется оценка

$$\int_{U_\gamma} d_H(x)^{-\gamma}\, dS(x) < \infty, \tag{8.4}$$

где $d_H(x)$ — расстояние от точки x до гиперплоскости H.

Наконец, положим

$$\gamma_u(x^0, S) := \sup\{\gamma : \gamma \in \mathfrak{C}_u(x^0, S)\}.$$

Аналогично, пусть $\mathfrak{C}(x^0, S)$ обозначает множество всех $\gamma \geqslant 0$, для которых существует окрестность U_γ точки x^0 на S такая, что

$$\int_{U_\gamma} d_{T,x^0}(x)^{-\gamma}\, dS(x) < \infty, \tag{8.5}$$

где T — касательная плоскость к S в точке x^0, и назовем число

$$\gamma(x^0, S) := \sup\{\gamma : \gamma \in \mathfrak{C}(x^0, S)\}$$

контактным индексом $\gamma(x^0, S)$ гиперповерхности S в точке $x^0 \in S$.

Ясно, что

$$\beta_u(x^0, S) \geqslant \beta(x^0, S), \quad \gamma_u(x^0, S) \leqslant \gamma(x^0, S). \tag{8.6}$$

Следующее утверждение подтверждает гипотезу Стейна—Иосевича—Соера для выпуклых аналитических гиперповерхностей.

Теорема 8.2. *Пусть S — аналитическая выпуклая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, и пусть $x^0 \in S$ — фиксированная точка такая, что $h(x^0, S) \geqslant 2$. Тогда справедливы следующие равенства*:

$$-\beta_u(x^0, S) = -\beta(x^0, S) = \gamma_u(x^0, S) = \gamma(x^0, S) = 1/h(x^0, S) = 1/p_{x^0}(S).$$

Заметим, что для аналитических гиперповерхностей оценка $\gamma(x^0, S) \geqslant 1/h(x^0, S)$ в случае $h(x^0, S) \geqslant 1$ доказана в классической работе А. Н. Варченко [6], а также в работе [36] рассмотрены аналогичные задачи. Частные результаты содержатся в работах [23, 24].

Как следствие теоремы 8.2, получим

Следствие 8.1. *Пусть S — аналитическая выпуклая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, и пусть $x^0 \in S$ — фиксированная точка такая, что $h(x^0, S) \geqslant 2$. Тогда существует окрестность $U \subset S$ такая, что для произвольной точки $x \in U$ выполняется неравенство*

$$h(x, S) \leqslant h(x^0, S).$$

9. Критерий L^p-ограниченности максимальных операторов

Результаты следующей теоремы отвечают на следующий вопрос: для каких гиперповерхностей соответствующий максимальный оператор ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ при некотором конечном значении p?

Теорема 9.1. *Пусть S — гладкая гиперповерхность, удовлетворяющая условию трансверсальности в каждой точке носителя плотности $0 \leqslant \psi \in C_0^\infty(S)$, и*

$$\tau_\psi(S) := \sup_{x \in \operatorname{supp}(\psi)} \tau_x(S).$$

Тогда для любого $p > \tau_\psi(S)$ максимальный оператор $\mathcal{M}$ ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$. Обратно, если максимальный оператор ограничен в L^p при некотором конечном p, то гиперповерхность S имеет конечный тип в каждой точке x^0 такой, что $\psi(x^0) > 0$.

Доказательство. Используя стандартное разбиение единицы, мы можем считать, что плотность ψ сосредоточена в достаточно малой окрестности фиксированной точки x^0, скажем, $x^0 = (0, \dots, 0, 1)$, а также гиперповерхность S задана в виде графика гладкой функции, т. е.

$$x_{n+1} = 1 + \phi(x).$$

Здесь ϕ — гладкая функция, удовлетворяющая условиям: $\phi(0) = 0$, $\nabla\phi(0) = 0$ см. [8]. Покажем, что существует окрестность U точки $(0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ такая, что для любой неотрицательной функции $\psi \in C_0^\infty(S \bigcap U)$ и $p > \tau_{x^0}(S)$ максимальный оператор $\mathcal{M}$ ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$.

Свойство $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$-ограниченности максимальных операторов инвариантно относительно линейной замены переменных пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Поэтому без ограничения общности можем считать, что

$$\partial_1^m \phi(0) \neq 0,$$

где $m = \tau_{x^0}(S)$.

Пусть $0 \leqslant \omega \leqslant 1$ — бесконечно гладкая сферически-симметричная функция, удовлетворяющая условиям:

$$\omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{при} \quad |x| \geqslant 2. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$\chi(x) := \omega(x) - \omega(2x).$$

Тогда

$$\operatorname{supp}(\chi) \subset D := \{\frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2\}.$$

Пусть $\chi_j(x) := \chi(2^j x)$. Легко показать, что выполняется следующее равенство:

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \chi_j(x) = 1 \quad \text{при} \quad 0 < |x| \leqslant 2^{1-j_0}.$$

В соответствии с этим разложением для оператора усреднения $A_t f$ получим

$$A_t f = \sum_{j=j_0}^{\infty} A_t^j f(y),$$

где

$$A_t^j f(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y - tx, y_{n+1} - t(1 + \phi(x)))\psi(x)\chi_j(x)dx.$$

Соответствующий максимальный оператор обозначается через $\mathcal{M}^j$.

Теперь используем замену переменных, заданную растяжением $x = 2^{-j}w$. В результате для оператора усреднения $A_t^j f$ получим выражение

$$A_t^j f(y) = 2^{-jn} \int_{\mathbb{R}^n} f(y - t2^{-j}w,\, y_{n+1} - t(1 + 2^{-jm}(p(w) + R_j(w))) \times \times\tilde{\psi}(2^{-jm}w)\chi(w)dw,$$

где

$$R_j(w) = 2^j R(2^{-j}w), \quad \tilde{\psi}_j(w) = \psi(2^{-j}w),$$

здесь $j \geqslant j_0$, и в зависимости от малости носителя ψ мы можем выбрать j_0 достаточно большим.

Операторы растяжений

$$T^j f(y) := 2^{\frac{jn}{p}} f(2^j y)$$

преобразуют операторы усреднения $A_t^j f$ в новые операторы:

$$T^{-j} A_t^j T^j f(y) = 2^{-jn} \int_{\mathbb{R}^n} f\Big(y - tw, y_{n+1} - t(1 + 2^{-jm}(p(w) + R_j(w))\Big)\tilde{\psi}(w)\chi(w)dw.$$

Теперь, согласно теореме 7.1 при $p > m$, получим:

$$\|\mathcal{M}^j f\|_{L^p} \leqslant \|\sup_{t>0} |A_t^j f|\|_{L^p} \leqslant D_p 2^{-jn + \frac{jm}{p}} \|f\|_{L^p}. \tag{9.1}$$

Следовательно,

$$\sum_{j \geqslant j_0} \|M^j f\|_{L^p} \leqslant \sum_{j \geqslant j_0} D_p 2^{-jn + \frac{jm}{p}} \|f\|_{L^p}, \tag{9.2}$$

где D_p — некоторое положительное число. Последний ряд сходится при $p > m$. Поэтому для произвольного $p > m$ справедлива следующая оценка:

$$\|\mathcal{M} f\|_{L^p} \leqslant \sum_{j \geqslant j_0} \|M^j f\|_{L^p} \leqslant C_p \|f\|_{L^p}. \tag{9.3}$$

Следовательно, максимальный оператор $\mathcal{M}$ ограничен в L^p при $p > m$.

Теперь, предполагая $\psi(0) > 0$, покажем, что максимальный оператор $\mathcal{M}$ неограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ при $p < \infty$, если функция ϕ плоская в начале координат. Действительно, если ϕ — плоская в начале координат, то для любого конечного q следующий интеграл расходится:

$$\int_U \frac{dx}{|\phi(x)|^{\frac{1}{q}}} = \infty,$$

где U — произвольная окрестность начала координат. Поэтому, согласно необходимому условию, приведенному в работе [33], соответствующий максимальный оператор неограничен в L^p при $p < q$. Таким образом, если максимальный оператор ограничен в некотором конечном значении $p < q$, то гиперповерхность в каждой точке x^0 такой, что $\psi(x^0) > 0$, имеет конечный тип. $\square$

Теперь приведем критерий L^p-ограниченности максимального оператора в терминах инварианта Λ_1 гиперповерхности S.

Следствие 9.1. *Если для гладкой гиперповерхности, удовлетворяющей условиям трансверсальности, инвариант $\Lambda_1(x)$ не имеет нулей бесконечного порядка, то существует конечное число $p(S)$ такое, что при любом $p > p(S)$ соответствующий максимальный оператор ограничен в L^p.*

Обратно, если максимальный оператор ограничен в L^p для некоторого конечного p, то инвариант $\Lambda_1(x)$ не имеет нулей бесконечного порядка в точках, где плотность положительна.

В частности, для максимального оператора $\mathcal{M}$, ассоциированного с аналитической гиперповерхностью S, показатель ограниченности $p(S)$ является конечным числом тогда и только тогда, когда для S выполняется соотношение $\Lambda_1 \not\equiv 0$.

Следствие 9.1 является обобщением теоремы С. Д. Согги. Он доказал, что если S — гладкая гиперповерхность и $\Lambda_1 \neq 0$, то максимальный оператор ограничен в L^p при $p > 2$.

10. Максимальные операторы, ассоциированные с вырожденными гиперповерхностями

В этом заключительном разделе мы рассмотрим оценку максимальных операторов, ассоциированных с вырожденными гиперповерхностями. Это такие гиперповерхности, для которых ранг нормального отображения всюду не превосходит единицы.

Теорема 10.1. *Пусть S — гладкая гиперповерхность, удовлетворяющая условию $\Lambda_2 \equiv 0$, а также условию трансверсальности в каждой точке носителя плотности $0 \leqslant \psi \in C_0^\infty(S)$, и*

$$h_\psi(S) := \sup_{x \in \operatorname{supp}(\psi)} h_x(S).$$

Тогда для любого $p > h_\psi(S)$ максимальный оператор $\mathcal{M}$ ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$. Более того, если $\psi(x^0) > 0$, то для любого числа p, принадлежащего интервалу $(1, h_{x^0})$, максимальный оператор $\mathcal{M}$ неограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$. При этом, если S — аналитическая гиперповерхность в точке x^0 и $\psi(x^0) > 0$, то для $p = h_{x^0}(S)$ максимальный оператор $\mathcal{M}$ также неограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$.

Доказательство. Снова ограничимся исследованием максимального оператора, когда носитель плотности находится в достаточно малой окрестности фиксированной точки. Следовательно, можем предполагать, что гиперповерхность задана в виде графика функции $1 + \phi$. Как известно, поведение максимальных операторов инвариантно относительно линейной замены переменных пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. С другой стороны, согласно теореме 5.2, функция ϕ приводится к следующему специальному виду:

$$\phi(x) = x_1^h g(x) + \sum_{j=0}^{h-1} x_1^j g_j(x_2, \ldots, x_n),$$

где $g(x)$ — бесконечно гладкая функция, такая что $g(0) \neq 0$, а также $\{g_j(x_2, \ldots, x_n)\}_{j=0}^{h-1}$ — бесконечно гладкие плоские функции в нуле. Теперь, применяя теорему 7.1, получим, что при $p > h(\phi)$ максимальный оператор $\mathcal{M}$ ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$.

Наконец, докажем неограниченность максимального оператора $\mathcal{M}$ в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ при $1 < p < h(\phi)$. Согласно необходимому условию ограниченности максимальных операторов [33], достаточно доказать соотношение

$$\int_U \frac{dx}{|\phi(x)|^{\frac{1}{p}}} = \infty$$

при $p < h$. При доказательстве этого соотношения используем следующую лемму.

Лемма 10.1. *Пусть γ — вещественное число, удовлетворяющее условию*

$$\frac{1}{h} < \gamma < \frac{1}{h-1},$$

и $\rho(b) \leqslant 1$, где

$$\rho(b) := |b_0| + |b_1|^{\frac{h-1}{h}} + \ldots + |b_{h-2}|^{\frac{2}{h}}.$$

Тогда существует положительное число c такое, что справедливо следующее неравенство:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx_1}{|x_1^h + \sum\limits_{j=0}^{h-2} b_j x_1^j|^\gamma} \geqslant \frac{c}{\rho(b)^{\gamma - \frac{1}{n}}}.$$

Доказательство. Фактически справедлива аналогичная оценка сверху. Это утверждение можно рассмотреть как аналог результатов Дж. Дж. Дейстермата [22]. В рассматриваемом интеграле сделаем замену переменных, заданную растяжением $x_1 = \rho(b)^{\frac{1}{h}} y_1$ и получим:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx_1}{|x_1^h + \sum\limits_{j=0}^{h-2} b_j x_1^j|^\gamma} = \rho(b)^{\frac{1}{n} - \gamma} \int\limits_0^{\rho(b)^{-\frac{1}{h}}} \frac{dy_1}{|y_1^h + \sum\limits_{j=0}^{h-2} \tilde{b}_j y_1^j|^\gamma},$$

где

$$\tilde{b}_j := \frac{b_j}{\rho(b)^{\frac{h-j}{h}}}.$$

Заметим, что для любого $b \neq 0$ выполняется равенство $\rho(\tilde{b}_j) = 1$. Поскольку $\rho(\tilde{b}_j) = 1$, то

$$y_1^h + \sum_{j=0}^{h-2} \tilde{b}_j y_1^j$$

— равномерно ограниченная функция при $y_1 \in [0, 1]$. Таким образом, мы имеем:

$$\rho(b)^{\frac{1}{n} - \gamma} \int\limits_0^{\rho(b)^{-\frac{1}{h}}} \frac{dy_1}{|y_1^h + \sum\limits_{j=0}^{h-2} \tilde{b}_j y_1^j|^\gamma} \geqslant \rho(b)^{\frac{1}{n} - \gamma} \int\limits_0^1 \frac{dy_1}{|y_1^h + \sum\limits_{j=0}^{h-2} \tilde{b}_j y_1^j|^\gamma} \geqslant C\rho(b)^{\frac{1}{n} - \gamma}.$$

Что и требовалось доказать. □

Следующее утверждение является простым следствием теоремы о приведении нормальной формы функции (см. [2], а также [18, теорема 7.5.13, с. 247]).

Лемма 10.2. *Пусть бесконечно гладкая функция $\phi(x)$ имеет вид*

$$\phi(x) = x_1^h g(x) + \sum_{j=0}^{h-1} x_1^j g_j(x_2, \ldots, x_n),$$

где $g(x)$ — бесконечно гладкая функция, удовлетворяющая условию $g(0) \neq 0$, а также $\{g_j(x_2, \ldots, x_n)\}_{j=0}^{h-1}$ — бесконечно гладкие плоские функции в нуле. Тогда в некоторой окрестности нуля существует бесконечно гладкая функция $X_1 = X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая условиям

$$X_1(0) = 0, \quad \partial_1 X_1(0, \ldots, 0) \neq 0,$$

и выполняется соотношение

$$\phi(x_1(X_1, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)) = \pm X_1^h + \sum_{j=0}^{h-2} X_1^j b_j(x_2, \ldots, x_n),$$

где $x_1 = x_1(X_1, x_2, \ldots, x_n)$ — обратная функция, причем $\{b_j\}_{j=0}^{h-2}$ — бесконечно гладкие плоские функции в начале координат.

Теперь покажем, что для функции

$$\phi(x) = x_1^h g(x) + \sum_{j=0}^{h-1} x_1^j g_j(x_2, \ldots, x_n)$$

в любой достаточно малой окрестности нуля U имеет место соотношение

$$\int\limits_U \frac{dx}{|\phi(x)|^{\frac{1}{p}}} = \infty$$

при только $p < h$. Действительно, в интеграле

$$\int\limits_U \frac{dx}{|\phi(x)|^{\frac{1}{p}}}$$

можем считать, что $U = [-\delta, \delta]^n$ для некоторого достаточно малого положительного числа δ. Теперь используем замену переменных

$$x_1 = x_1(X_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x_2 = X_2, \ldots x_n = X_n$$

и согласно лемме 10.2 имеем:

$$\int\limits_U \frac{dx}{|\phi(x)|^{\frac{1}{p}}} = \int\limits_V \frac{|\partial_1 x_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)| dX}{|\pm X_1^h + \sum\limits_{j=0}^{h-2} X_1^j b_j(X_2, \ldots, X_n)|^{\frac{1}{p}}}.$$

Теперь предположим, что $h - 1 < p < h$. Так как в некоторой окрестности нуля выполняется следующая оценка снизу:

$$|\partial_1 x_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)| \geqslant \varepsilon > 0,$$

то, применяя лемму 10.1, получим:

$$\int\limits_U \frac{dx}{|\phi(x)|^{\frac{1}{p}}} \geqslant C \int\limits_{[-\delta,\delta]^{n-1}} \frac{dX_2 \ldots dX_n}{(|b_0(X_2, \ldots, X_n)| + |b_1(X_2, \ldots, X_n)|^{\frac{h-1}{h}} + \ldots + |b_{h-2}(X_2, \ldots, X_n)|^{\frac{2}{h}})^{\frac{1}{p} - \frac{1}{h}}}.$$

Поскольку $\{b_j\}_{j=0}^{h-2}$ — бесконечно гладкие плоские функции в начале координат, то последний интеграл расходится для любого $p < h$. Для аналитических функций соответствующий интеграл также расходится при $p = h(\phi)$. Таким образом, согласно результатам работы [33], максимальный оператор неограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ при $1 < p < h(\phi)$ для гладких гиперповерхностей. При этом, если ϕ аналитична, то соответствующий максимальный оператор также неограничен в $L^{h(\phi)}(\mathbb{R}^{n+1})$. Что и требовалось доказать. $\square$

Заметим, что в случае, когда ϕ — бесконечно гладкая функция, удовлетворяющая условиям теоремы 10.1, вопрос об ограниченности в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ максимального оператора $\mathcal{M}$ при $p = h(\phi)$ остается открытым. В работе [33] приведен пример, когда при $p = h(\phi)$ максимальный оператор ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$. Таким образом, теорема 10.1 подтверждает гипотезу Иосевича—Соера для вырожденных гиперповерхностей.

Аналогом результатов работы [27] является следующая теорема.

Теорема 10.2. *Если S — бесконечно гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, удовлетворяющая условиям трансверсальности в каждой точке, $\Lambda_2 \equiv 0$ и $x^0 \in S$ фиксированная точка, то справедливы следующие равенства*:

$$-\beta_u(x^0, S) = -\beta(x^0, S) = \gamma_u(x^0, S) = \gamma(x^0, S) = 1/h(x^0, S) = 1/\mathbb{P}_{x^0}(S).$$

Таким образом, задача, об L^p-ограниченности максимальных операторов для некоторого конечного значения p имеет окончательное решение. Однако проблема о точном значении показателя ограниченности максимальных операторов в общем случае остается открытой.

Основные результаты настоящей статьи доложены на Узбекско-Израильской международной конференции «Contemporary problems in mathematics and physics», проходившей в Ташкенте 6–10 октября 2017 года. Авторы благодарят академика А. С. Садуллаева и профессора Э. Х. Якубова за полезное обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Замечания о методе стационарной фазы и числах Кокстера// Усп. мат. наук. — 1973. — *28*, № 5. — С. 17–44.
2. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. Т. 1. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. — М.: Наука, 1982.
3. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. Т. 2. Монодромия и асимптотики интегралов. — М.: Наука, 1984.
4. *Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н.* Тригонометрические интегралы// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1979. — *43*, № 5. — С. 971–1003.
5. *Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М.* Мероморфность функции P^{λ}// Функц. анализ и его прилож. — 1969. — *3*, № 1. — С. 84–86.
6. *Варченко А. Н.* Многогранники Ньютона и оценки осциллирующих интегралов// Функц. анализ и его прилож. — 1976. — *10*, № 3. — С. 13–38.
7. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Физматгиз, 1959.
8. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
9. *Икромов И. А.* Демпфированные осцилляторные интегралы и максимальные операторы// Мат. заметки. — 2005. — *78*, № 6. — С. 833–852.
10. *Икромов И. А.* Суммируемость осцилляторных интегралов по параметрам и проблема об ограничении преобразования Фурье на кривых// Мат. заметки. — 2010. — *87*, № 5. — С. 734–755.
11. *Икромов И. А., Муранов Ш. А.* Об оценках осцилляторных интегралов с множителем гашения// Мат. заметки. — 2018. — *104*, № 2. — С. 200–215.
12. *Карпушкин В. Н.* Равномерные оценки осциллирующих интегралов с параболической и гиперболической фазой// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1983. — *9*. — С. 3–39.
13. *Карпушкин В. Н.* Теорема о равномерных оценках осциллирующих интегралов с фазой, зависящей от двух переменных// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1983. — *10*. — С. 150–169.
14. *Паламодов В. П.* Обобщенные функции и гармонический анализ// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. Фундам. направл. — 1991. — *72*. — С. 5–134.
15. *Соболев С. Л.* Об одной теореме функционального анализа// Мат. сб. — 1938. — *4*. — № 3. — С. 471–497.
16. *Туракулов Д. Д.* Равномерные оценки осцилляторных интегралов с выпуклой фазой// Вестн. Башкир. ун-та. — 2008. — *13*, № 2. — С. 236–240.
17. *Федорюк М. В.* Метод перевала. — М.: Наука, 1977.
18. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. — М.: Мир, 1986.
19. *Atiyah M. F.* Resolution of singularities and division of distributions// Commun. Pure Appl. Math. — 1970. — *23*, № 2. — С. 145–150.
20. *Bourgain J.* Averages in the plane convex curves and maximal operators// J. Anal. Math. — 1986. — *47*. — С. 69–85.
21. *Buschenhenke S., Dendrinos S., Ikromov I. A., Müller D.* Estimates for maximal functions associated to hypersurfaces in $\mathbb{R}^3$ with height $h < 2$: Part I// arXiv: 1704.06520 [math.CA].
22. *Duistermaat J. J.* Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities// Commun. Pure Appl. Math. — 1974. — *27*. — С. 207–281.
23. *Greenblatt M.* Newton polygons and local integrability of negative powers of smooth functions in the plane// Trans. Am. Math. Soc. — 2006. — *358*, № 2. — С. 657–670.
24. *Greenblatt M.* L^p boundedness of maximal averages over hypersurfaces in $\mathbb{R}^3$// Trans. Am. Math. Soc. — 2013. — *365*, № 4. — С. 1875–1900.
25. *Greenleaf A.* Principal curvature and harmonic analysis// Indiana Univ. Math. J. — 1981. — *30*, № 4. — С. 519–537.
26. *Hartman P., Nirenberg L.* On spherical image maps whose Jacobians do not change sign// Am. J. Math. — 1959. — *81*. — С. 901–920.
27. *Ikromov I. A., Kempe M., Müller D.* Estimates for maximal functions associated to hypersurfaces in $\mathbb{R}^3$ and related problems of harmonic analysis// Acta Math. — 2010. — *204*. — С. 151–271.
28. *Ikromov I. A., Müller D.* On adapted coordinate systems// Trans. Am. Math. Soc. — 2011. — *363*, № 6. — С. 2821–2848.
29. *Ikromov I. A., Müller D.* Uniform estimates for the Fourier transform of surface carried measures in $\mathbb{R}^3$ and an application to Fourier restriction// J. Fourier Anal. Appl. — 2011. — *17*, № 6. — С. 1292–1332.
30. *Ikromov I. A., Müller D.* Fourier restriction for hypersurfaces in three dimensions and Newton polyhedra. — Princeton—Oxford: Princeton Univ. Press, 2016.

31. *Iosevich A.* Maximal operators associated to families of flat curves in the plane// Duke Math. J. — 1994. — *76*, № 2. — С. 633–644.
32. *Iosevich A., Liflyand E.* Decay of the Fourier transform. Analytic and geometric aspects. — Basel: Birkhäuser/Springer, 2014.
33. *Iosevich A., Sawyer E.* Maximal averages over surfaces// Adv. Math. — 1997. — *132*, № 1. — С. 46–119.
34. *Iosevich A., Sawyer E., Seeger A.* On averaging operators associated with convex hypersurfaces of finite type// J. Anal. Math. — 1999. — *79*. — С. 159–187.
35. *Nagel A., Seeger A., Wainger S.* Averages over convex hypersurfaces// Am. J. Math. — 1993. — *115*, № 4. — С. 903–927.
36. *Phong D. H., Stein E. M., Sturm J. A.* On the growth and stability of real-analytic functions// Am. J. Math. — 1999. — *121*, № 3. — С. 519–554.
37. *Schulz H.* Convex hypersurfaces of finite type and the asymptotics of their Fourier transforms// Indiana Univ. Math. J. — 1999. — *40*, № 4. — С. 1267–1275.
38. *Sogge C. D.* Maximal operators associated to hypersurfaces with one nonvanishing principal curvature// В сб.: «Fourier analysis and partial differential equations». — Boca Raton: CRC, 1995. — С. 317–323.
39. *Sogge C. D., Stein E. M.* Averages of functions over hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$// Invent. Math. — 1985. — *82*, № 3. — С. 543–556.
40. *Stein E. M.* Maximal functions. I. Spherical means// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1976. — *73*, № 7. — С. 2174–2175.
41. *Stein E. M.* Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.
42. *Tristan C., Greenleaf A., Pramanik M.* A multi-dimensional resolution of singularities with applications to analysis// Am. J. Math. — 2013. — *135*, № 5. — С. 1179–1252.
43. *Zimmermann E.* On L^p-estimates for maximal averages over hypersurfaces not satisfying the transversality condition// Doctoral PhD thesis. — Kiel: Christian-Albrechts-Universität, 2014.

И. А. Икромов
Самаркандский государственный университет им. А. Навои,
Узбекистан, 703004, г. Самарканд, Университетский бульвар, д. 15
E-mail: ikromov1@rambler.ru

С. Э. Усманов
Самаркандский государственный университет им. А. Навои,
Узбекистан, 703004, г. Самарканд, Университетский бульвар, д. 15
E-mail: usmanov-salim@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-650-681 UDC 517.982.42

On Boundedness of Maximal Operators Associated with Hypersurfaces

© 2018 **I. A. Ikromov, S. E. Usmanov**

Abstract. In this paper, we obtain the criterion of boundedness of maximal operators associated with smooth hypersurfaces. Also we compute the exact value of the boundedness index of such operators associated with arbitrary convex analytic hypersurfaces in the case where the height of a hypersurface in the sense of A. N. Varchenko is greater than 2. Moreover, we obtain the exact value of the boundedness index for degenerated smooth hypersurfaces, i.e., for hypersurfaces satisfying conditions of the classical Hartman—Nirenberg theorem. The obtained results justify the Stein—Iosevich—Sawyer hypothesis for arbitrary convex analytic hypersurfaces as well as for smooth degenerated hypersurfaces. Also we discuss some related problems of the theory of oscillatory integrals.

REFERENCES

1. V. I. Arnold, “Zamechaniya o metode statsionarnoy fazy i chislakh Kokstera” [Remarks on the stationary phase method and the Coxeter numbers], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1973, **28**, No. 5, 17–44 (in Russian).
2. V. I. Arnold, A. N. Varchenko, and S. M. Guseyn-Zade, *Osobennosti differentsiruemykh otobrazheniy. T. 1. Klassifikatsiya kriticheskikh tochek, kaustik i volnovykh frontov* [Singularities of Differentiable Mappings. Vol. 1. Classification of singular points, caustics, and wave fronts], Nauka, Moscow, 1982 (in Russian).
3. V. I. Arnold, A. N. Varchenko, and S. M. Guseyn-Zade, *Osobennosti differentsiruemykh otobrazheniy. T. 2. Monodromiya i asimptotiki integralov* [Singularities of Differentiable Mappings. Vol. 2. Monodromy and Asymptotics of Integrals], Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).
4. G. I. Arkhipov, A. A. Karatsuba, and V. N. Chubarikov, “Trigonometricheskie integraly” [Trigonometric integrals], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1979, **43**, No. 5, 971–1003 (in Russian).
5. I. N. Bernshteyn and I. M. Gel’fand, “Meromorfnost’ funktsii P^{λ}” [Meromorphic property of the function P^{λ}], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1969, **3**, No. 1, 84–86 (in Russian).
6. A. N. Varchenko, “Mnogogranniki N’yutona i otsenki ostsilliruyushchikh integralov” [Newton’s polyhedrons and estimates of oscillating integrals], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1976, **10**, No. 3, 13–38 (in Russian).
7. I. M. Gel’fand and G. E. Shilov, *Obobshchennye funktsii i deystviya nad nimi* [Generalized Functions and Operations on Them], Fizmatgiz, Moscow, 1959 (in Russian).
8. B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, and A. T. Fomenko, *Sovremennaya geometriya* [Contemporary Geometry], Nauka, Moscow, 1979 (in Russian).
9. I. A. Ikromov, “Dempfirovannye ostsillyatornye integraly i maksimal’nye operatory” [Dampened oscillatory integrals and maximal operators], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2005, **78**, No. 6, 833–852 (in Russian).
10. I. A. Ikromov, “Summiruemost’ ostsillyatornykh integralov po parametram i problema ob ogranichenii preobrazovaniya Fur’e na krivykh” [Summability of oscillatory integrals with respect to parameters and the problem on boundedness of the Fourier transformation on curves], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2010, **87**, No. 5, 734–755 (in Russian).
11. I. A. Ikromov and Sh. A. Muranov, “Ob otsenkakh ostsillyatornykh integralov s mnozhitelem gasheniya” [On estimates of oscillatory integrals with fading factor], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2018, **104**, No. 2, 200–215 (in Russian).
12. V. N. Karpushkin, “Ravnomernye otsenki ostsilliruyushchikh integralov s parabolicheskoy i giperbolicheskoy fazoy” [Uniform estimates of oscillating integrals with parabolic and hyperbolic phase], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 1983, **9**, 3–39 (in Russian).
13. V. N. Karpushkin, “Teorema o ravnomernykh otsenkakh ostsilliruyushchikh integralov s fazoy, zavisyashchey ot dvukh peremennykh” [Theorem on uniform estimates of oscillating integrals with phase depending on two variables], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 1983, **10**, 150–169 (in Russian).
14. V. P. Palamodov, “Obobshchennye funktsii i garmonicheskiy analiz” [Generalized functions and harmonic analysis], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat. Fundam. napravl.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math. Fundam. Napravl.], 1991, **72**, 5–134 (in Russian).
15. S. L. Sobolev, “Ob odnoy teoreme funktsional’nogo analiza” [On one theorem of functional analysis], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1938, **4**, No. 3, 471–497 (in Russian).
16. D. D. Turakulov, “Ravnomernye otsenki ostsillyatornykh integralov s vypukloy fazoy” [Uniform estimates of oscillating integrals with convex phase], *Vestn. Bashkir. un-ta* [Bull. Bashkir Univ.], 2008, **13**, No. 2, 236–240 (in Russian).
17. M. V. Fedoryuk, *Metod perevala* [Saddle-Point Method], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
18. L. Hörmander, *Analiz lineynykh differentsial’nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. T. 1. Teoriya raspredeleniy i analiz Fur’e* [The Analysis of Linear Partial Differential Operators. I. Distribution Theory and Fourier Analysis], Mir, Moscow, 1986 (Russian translation).
19. M. F. Atiyah, “Resolution of singularities and division of distributions,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1970, **23**, No. 2, 145–150.
20. J. Bourgain, “Averages in the plane convex curves and maximal operators,” *J. Anal. Math.*, 1986, **47**, 69–85.
21. S. Buschenhenke, S. Dendrinos, I. A. Ikromov, and D. Müller, “Estimates for maximal functions associated to hypersurfaces in $\mathbb{R}^3$ with height $h < 2$: Part I,” *arXiv: 1704.06520 [math.CA]*.

22. J. J. Duistermaat, "Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities," *Commun. Pure Appl. Math.*, 1974, **27**, 207–281.
23. M. Greenblatt, "Newton polygons and local integrability of negative powers of smooth functions in the plane," *Trans. Am. Math. Soc.*, 2006, **358**, No. 2, 657–670.
24. M. Greenblatt, "L^p boundedness of maximal averages over hypersurfaces in $\mathbb{R}^3$," *Trans. Am. Math. Soc.*, 2013, **365**, No. 4, 1875–1900.
25. A. Greenleaf, "Principal curvature and harmonic analysis," *Indiana Univ. Math. J.*, 1981, **30**, No. 4, 519–537.
26. P. Hartman and L. Nirenberg, "On spherical image maps whose Jacobians do not change sign," *Am. J. Math.*, 1959, **81**, 901–920.
27. I. A. Ikromov, M. Kempe, and D. Müller, "Estimates for maximal functions associated to hypersurfaces in $\mathbb{R}^3$ and related problems of harmonic analysis," *Acta Math.*, 2010, **204**, 151–271.
28. I. A. Ikromov and D. Müller, "On adapted coordinate systems," *Trans. Am. Math. Soc.*, 2011, **363**, No. 6, 2821–2848.
29. I. A. Ikromov and D. Müller, "Uniform estimates for the Fourier transform of surface carried measures in $\mathbb{R}^3$ and an application to Fourier restriction," *J. Fourier Anal. Appl.*, 2011, **17**, No. 6, 1292–1332.
30. I. A. Ikromov and D. Müller, *Fourier restriction for hypersurfaces in three dimensions and Newton polyhedra*, Princeton Univ. Press, Princeton—Oxford, 2016.
31. A. Iosevich, "Maximal operators associated to families of flat curves in the plane," *Duke Math. J.*, 1994, **76**, No. 2, 633–644.
32. A. Iosevich and E. Liflyand, *Decay of the Fourier transform. Analytic and geometric aspects*, Birkhäuser/Springer, Basel, 2014.
33. A. Iosevich and E. Sawyer, "Maximal averages over surfaces," *Adv. Math.*, 1997, **132**, No. 1, 46–119.
34. A. Iosevich, E. Sawyer, and A. Seeger, "On averaging operators associated with convex hypersurfaces of finite type," *J. Anal. Math.*, 1999, **79**, 159–187.
35. A. Nagel, A. Seeger, and S. Wainger, "Averages over convex hypersurfaces," *Am. J. Math.*, 1993, **115**, No. 4, 903–927.
36. D. H. Phong, E. M. Stein and J. A. Sturm, "On the growth and stability of real-analytic functions," *Am. J. Math.*, 1999, **121**, No. 3, 519–554.
37. H. Schulz, "Convex hypersurfaces of finite type and the asymptotics of their Fourier transforms," *Indiana Univ. Math. J.*, 1999, **40**, No. 4, 1267–1275.
38. C. D. Sogge, "Maximal operators associated to hypersurfaces with one nonvanishing principal curvature," In: *Fourier analysis and partial differential equations*, CRC, Boca Raton, 1995, pp. 317–323.
39. C. D. Sogge and E. M. Stein, "Averages of functions over hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$," *Invent. Math.*, 1985, **82**, No. 3, 543–556.
40. E. M. Stein, "Maximal functions. I. Spherical means," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1976, **73**, No. 7, 2174–2175.
41. E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1993.
42. C. Tristan and A. Greenleaf, M. Pramanik, "A multi-dimensional resolution of singularities with applications to analysis," *Am. J. Math.*, 2013, **135**, No. 5, 1179–1252.
43. E. Zimmermann, "On L^p-estimates for maximal averages over hypersurfaces not satisfying the transversality condition," Doctoral PhD thesis, Christian-Albrechts-Universität, Kiel, 2014.

I. A. Ikromov
Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan
E-mail: `ikromov1@rambler.ru`

S. E. Usmanov
Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan
E-mail: `usmanov-salim@mail.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 4 (2018). С. 682–705

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-682-705 УДК 510.5+510.6+512.57+519.68

ВЫЧИСЛИМО ОТДЕЛИМЫЕ МОДЕЛИ

© 2018 г. **Н. Х. КАСЫМОВ, Ф. Н. ИБРАГИМОВ**

Аннотация. Приведены основополагающие результаты структурной теории вычислимо отделимых моделей и продемонстрированы приложения этой теории к решению некоторых актуальных вопросов теории эффективных линейных порядков и теоретической информатики.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Предварительные сведения

Базовые понятия, используемые в работе, содержатся в [1–4, 20–25].

Под словом *модель* понимается множество вместе с фиксированным семейством операций и отношений, заданных на этом множестве.

Введенное академиком А. И. Мальцевым в [21] понятие нумерованной модели — одно из наиболее общих центральных понятий, возникших на стыке теории моделей и теории нумераций. В силу чрезвычайной общности класса всех нумерованных моделей изучение последних обычно проводится в предположениях наличия ограничений на алгоритмические сложности нумерационных эквивалентностей. В этом аспекте, в первую очередь, нужно отметить вычислимые и, в более общем случае, позитивные и негативные модели, теория которых представляет бурно развивающийся раздел современной математической логики. Проблемы существования и числа вычислимых нумераций (представлений) моделей стали уже классическими (Ю. Л. Ершов [3, 4], Ю. Л. Ершов, С. С. Гончаров [2]), а ослабление требований к алгоритмической сложности нумерационных эквивалентностей является одним из общепринятых способов расширения исследуемого класса нумерованных моделей.

Другой путь ограничения исследуемого класса нумерованных моделей, который, в отличие от предыдущего, игнорирует сложность нумерационной эквивалентности, заключается в наложении эффективных условий типа отделимости. Идеи использования понятия отделимости в теории нумераций восходят к В. А. Успенскому [26, 27] и А. Нероуду [37] и развиваются в работах А. И. Мальцева [21] и Ю. Л. Ершова [3]. Классическим условием отделимости в теории алгоритмов является условие вычислимой отделимости. Синтез понятий модели и вычислимо отделимой нумерации образует понятие вычислимо отделимой модели. В работах [5–12] Н. Х. Касымова изучены наиболее общие эффективные, структурные и топологические свойства вычислимо отделимых алгебр и описаны важнейшие типы таких алгебр. Многие естественные и важные типы нумерованных алгебр оказались вычислимо отделимыми, в том числе — среди неочевидных — негативные алгебры,

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда «Наследие академика Т. Н. Кары-Ниязова».

позитивные алгебры со счетными решетками конгруэнций, стандартно нумерованные конечно-порожденные и финитно-аппроксимируемые алгебры и ряд других. В предлагаемой работе демонстрируется возможность естественного обобщения основополагающих структурных результатов теории вычислимо отделимых алгебр на нумерованные модели.

В различных по методам доказательства и звучанию результатах о нумерованных моделях из упомянутых выше классов имеется немало принципиальных общих моментов, причем справедливость весьма сильных свойств оказалась не зависящей от сложности нумерационной эквивалентности. Эти факты становятся прозрачными именно при обобщенном взгляде на ситуацию — с точки зрения теории вычислимо отделимых нумерованных моделей. На базе и в рамках этой теории решается ряд естественных вопросов, возникших в связи с работами А. И. Мальцева [21], В. Баура [28, 29], Д. Бергстры и Д. Такера [30], М. Броя и др. [31], С. Камина [34] в теории вычислимо представимых моделей и в теории абстрактных типов данных.

Целесообразность изучения вычислимо отделимых нумерованных моделей обуславливается еще одним обстоятельством. Несмотря на обширность, класс этих моделей допускает вполне удовлетворительные, в тех или иных смыслах, описания. Для естественного класса отделимых нумерованных моделей справедливы только релятивизированные варианты основных утверждений. В связи с этим уместно отметить, что в теории нумерованных моделей роль и место вычислимо отделимых нумерованных моделей — с точки зрения сложности отделяющих множеств, подобны роли и месту вычислимых моделей — с точки зрения сложности нумерационной эквивалентности.

Понятие нумерованной модели является естественным обобщением понятия нумерованной алгебры. При изучении нумерованных моделей, так же, как в случае алгебр, налагаются ограничения на алгоритмические сложности нумерационных эквивалентностей, хотя здесь имеются принципиальные отличия.

В данном обзоре изучается понятие вычислимо отделимой нумерованной модели, являющейся обобщением понятия вычислимо отделимой универсальной нумерованной алгебры, и приводятся основные факты о ее структурных свойствах. Неформально говоря, нумерованная модель вычислимо отделима, если каждая точка ложности любого основного отношения (включая равенство) имеет вычислимую окрестность, не пересекающуюся с областью истинности данного отношения. В работе также продемонстрирована возможность приложения результатов этой теории к решению некоторых принципиальных вопросов, возникших в смежных областях математической логики и теоретической информатики.

Следуя академикам Ю. Л. Ершову и С. С. Гончарову [2–4], приведем ряд основных определений.

Напомним, что всюду определенная функция из множества натуральных чисел ω в ω называется *вычислимой*, если существует вычисляющий ее алгоритм. Подмножество $\alpha \subseteq \omega$ называется *вычислимым* (*перечислимым*, соответственно *коперечислимым*), если вычислима его характеристическая функция (α, соответственно $\omega \setminus \alpha$ — область значений некоторой вычислимой функции). Эти определения естественным образом переносятся на многоместные функции и отношения.

Если $\langle M; \Sigma\rangle$ — счетная модель эффективной сигнатуры Σ, то ее *нумерацией* будем называть всякое такое отображение ν множества натуральных чисел ω на основное множество модели M, для которого существует эффективное семейство F вычислимых функций, представляющих Σ-операции модели M в нумерации ν, т. е. всякая операция $\sigma \in \Sigma$ представляется соответствующей ей такой вычислимой функцией $f \in F$, что $\forall \overline{x}$

$$\sigma\nu(\overline{x}) = \nu f(\overline{x}).$$

Заметим, что любая не более чем счетная модель эффективной сигнатуры имеет нумерацию (например, индуцированную геделевской нумерацией абсолютно свободной Σ-модели от счетного множества свободных порождающих, т. к. любая Σ-модель есть гомоморфный образ абсолютно свободной от подходящего числа свободных порождающих).

Ядром нумерации ν модели M будем называть нумерационную эквивалентность

$$\{\langle x, y\rangle | \nu x = \nu y\}.$$

Если ν — нумерация, то через $\ker(\nu)$ будем обозначать ее ядро.

Будем говорить, что модель M *представима* над эквивалентностью η на множестве натуральных чисел ω, если существует нумерация ν модели M с ядром, равным η (т. е. $\ker(\nu) = \eta$).

Характеристической трансверсалью эквивалентности η на ω (обозначаемой через $\mathrm{tr}(\eta)$) называется множество всех натуральных чисел, являющихся наименьшими в содержащих их смежных η-классах, т. е.

$$\{x|x = y \pmod{\eta} \to x \leqslant y\}.$$

Характеристической трансверсалью нумерации ν называется характеристическая трансверсаль ее ядра, т. е. $\mathrm{tr}(\ker(\nu))$.

Пусть $(M;\nu)$ — нумерованная модель. Подмножество B основного множества модели M называется *ν-вычислимым* (*ν-перечислимым*, *ν-коперечислимым*), если вычислимо (перечислимо, соответственно коперечислимо) множество $\nu^{-1}(B)$. Если из контекста будет ясно, какая нумерация имеется в виду, то подмножества основного множества модели будем называть просто *вычислимыми* (*перечислимыми*, *коперечислимыми*) без приставки ν.

Если даны две нумерованные модели (M,μ) и (N,ν), то гомоморфизм φ из M в N называется *морфизмом*, если он эффективен на номерах, т. е. существует такая вычислимая функция g, что

$$\varphi\mu = \nu g.$$

Другими словами, мы рассматриваем только гомоморфизмы, эффективные на номерах, т. е. по любому μ-номеру любого элемента модели (M,μ) можно эффективно, с помощью функции g, вычислить некоторый ν-номер φ-образа этого элемента. Далее под гомоморфизмами нумерованных моделей мы понимаем их морфизмы, т. е. мы работаем в категории нумерованных моделей с морфизмами в качестве эффективных на номерах гомоморфизмов.

Нумерованная модель, в которой все основные отношения (включая равенства) перечислимы (коперечислимы) на номерах, называется *позитивной* (*негативной*).

Пусть (M,ν) — нумерованное множество. Подмножество $A \subseteq \omega$ называется *ν-замкнутым*, если оно является объединением подходящих смежных $\ker(\nu)$-классов, т. е.

$$(x \in A \wedge \nu x = \nu y) \to y \in A.$$

Определение 1.1. Нумерованная модель (M,ν) называется *вычислимо отделимой*, если для всякого n-местного отношения P (включая равенство) модели M и любого такого кортежа натуральных чисел $\overline{x} \in \omega^n$, что $M \models \neg P(\nu\overline{x})$, существует такое ν-замкнутое вычислимое множество $A \subseteq \omega^n$, что

$$\overline{x} \in A \& \forall a \in A(M \models \neg P(\nu a)).$$

Это определение является естественным обобщением определения вычислимо отделимой алгебры. Неформально говоря, вычислимая отделимость нумерованной модели означает, что каждая точка ложности любого предиката имеет вычислимую окрестность, не пересекающуюся с областью истинности данного предиката. С технической точки зрения удобнее следующее определение.

Определение 1.2. Нумерованная модель (M,ν) называется *вычислимо отделимой*, если для всякого n-местного отношения P (включая равенство) модели M и любого такого кортежа натуральных чисел $\overline{x} \in \omega^n$, что $M \models \neg P(\nu\overline{x})$, существуют такие ν-замкнутые вычислимые множества $A_1 \subseteq \omega, \ldots, A_n \subseteq \omega$, что

$$\overline{x} \in A_1 \times \ldots \times A_n \& \forall a \in A_1 \times \ldots \times A_n (M \models \neg P(\nu a)).$$

Предложение 1.1. *Определения* 1.1 *и* 1.2 *эквивалентны.*

Доказательство. Достаточно показать, что из вычислимой отделимости модели по первому определению следует вычислимая отделимость модели по второму определению.

Пусть A — вычислимое множество, отделяющее фиксированную точку ложности $\overline{x} = \langle x_1,\ldots,x_n\rangle \in \omega^n$ n-местного отношения P от области истинности данного отношения. Рассмотрим следующую процедуру.

Шаг 0: Положим $A_i{}^0 = \{x_i\}$ для всех $i = \overline{1,n}$ и $B^0 = \varnothing$.

Шаг $e+1$: Берем первый кортеж $\overline{z} = \langle z_1,\ldots,z_n\rangle$, не принадлежащий множеству $A_1{}^e \times \ldots \times A_n{}^e \cup B^e$ при перечислении A. Если для всех $i = \overline{1,n}$ выполняется условие

$$A_1{}^e \times \ldots \times \{z_i\} \times \ldots \times A_n{}^e \subseteq A,$$

то полагаем

$$A_i^{e+1} = A_i^{e} \cup \{z_i\}, \quad B^{e+1} = B^e.$$

В противном случае

$$A_i^{e+1} = A_i^{e}, \quad B^{e+1} = B^e \cup \{\overline{z}\}.$$

Конец шага $e+1$.

Положим

$$A_i = \bigcup_{e\in\omega} A_i^{e}, \quad B = \bigcup_{e\in\omega} B^e.$$

Тогда $A = A_1 \times \ldots \times A_n \cup B$, и множества $A_1 \times \ldots \times A_n$ и B перечислимы. Поскольку A — вычислимое множество, то построенное множество вычислимо. По построению и из ν-замкнутости A следует ν-замкнутость $A_1 \times \ldots \times A_n$. Отсюда вытекает, что A_i (для всех $i = \overline{1,n}$) является ν-вычислимыми множествами и

$$\overline{x} \in A_1 \times \ldots \times A_n \& \forall a \in A_1 \times \ldots \times A_n (M \models \neg P(\nu a)).$$

□

2. Критерий вычислимой отделимости

Из результатов обзорной работы [14] вытекает исключительная важность негативных нумераций и негативных алгебр с точки зрения теории вычислимо отделимых нумерованных алгебр. Негативные модели играют аналогичную роль в характеризации вычислимо отделимых нумерованных моделей. Кроме того, понятие негативной модели является алгоритмически «двойственным» одному из важнейших понятий теории вычислимых моделей и теории абстрактных типов данных — понятию позитивной модели. Наконец, негативные нумерации и негативные модели сами по себе являются весьма естественным объектами. В данном разделе дается характеризация вычислимо отделимых нумерованных моделей в терминах их гомоморфизмов на негативные модели. Следующая теорема показывает, что негативные модели являются важными (и неочевидными) примерами вычислимо отделимых моделей.

Теорема 2.1. *Всякая негативная модель является вычислимо отделимой.*

Доказательство. Пусть (M,ν) — негативная модель. Обозначим через $[\ ]_\nu$ оператор ν-замыкания, т. е. $[\alpha]_\nu$ есть наименьшее ν-замкнутое множество, содержащее α. Будем говорить, что натуральное число z ***отвергается*** множеством α, если $z \notin [\alpha]_\nu$. Пусть $\delta_0, \ldots \delta_n, \ldots$ — сильно перечислимая последовательность конечных множеств (т. е. по номеру n множества δ_n можно эффективно восстановить все элементы этого множества). Заметим, что в силу негативности ν отношение «z отвергается множеством δ_n» является перечислимым, равномерно зависящим от z и n. Допустим, что $M \models \neg P(\nu\overline{x})$. Построим множество $A \subseteq \omega^n$, определяемое следующей процедурой.

Шаг 0: Полагаем $\alpha^0 = \{\overline{x}\}, \beta^0 = \varnothing$.

Шаг $e+1$: Выбираем первый кортеж $\overline{z} \in \omega^n$ (в некотором фиксированном перечислении всех кортежей длины n, например, заданном канторовской нумерационной функцией), не принадлежащий $\alpha^e \cup \beta^e$ и начинаем проверять $\overline{z}$ на предмет отвержения каждым из этих множеств. Если $\overline{z}$ отвергается α^e, то полагаем

$$\alpha^{e+1} = \alpha^e, \quad \beta^{e+1} = \beta^e \cup \{\overline{z}\}.$$

Если $\overline{z}$ отвергается β^e, то начинаем проверять, что условие $P(\nu\overline{z})$ ложно. Если ответ «да», то полагаем

$$\alpha^{e+1} = \alpha^e \cup \{\overline{z}\}.$$

Если это не так, то гарантированно через конечное число шагов $\overline{z}$ отвергнется α^e, и в этом случае полагаем

$$\alpha^{e+1} = \alpha^e, \quad \beta^{e+1} = \beta^e \cup \{\overline{z}\}.$$

Конец шага $e+1$.

Покажем, что каждый шаг e завершается с занесением текущего набора $\overline{z}$ в одно из множеств α^e, β^e.

На шаге 0 имеем

$$[\alpha^0]_\nu \cap [\beta^0]_\nu = \varnothing.$$

Пусть

$$[\alpha^e]_\nu \cap [\beta^e]_\nu = \varnothing,$$

тогда любое $\overline{z}$ отвергается хотя бы одним из множеств α^e, β^e. Если $\overline{z}$ отвергается β^e, то либо $M \models \neg P(\nu\overline{z})$, либо $\overline{z}$ отвергается α^e. Следовательно, множества α^e и β^e определены для всех e.

Положим

$$\alpha = \bigcup_{e \geqslant 0} \alpha^e, \quad \beta = \bigcup_{e \geqslant 0} \beta^e.$$

Поскольку $\overline{z}$ относится к одному из этих множеств, то

$$\alpha \cup \beta = \omega^n.$$

Из $[\alpha^e]_\nu \cap [\beta^e]_\nu = \varnothing$ для всех e, следует что

$$\alpha \cap \beta = \varnothing.$$

Остается проверить, что α (а значит, и β) является ν-замкнутым. Пусть $\overline{u} \in \alpha$ и $\nu\overline{u} = \nu\overline{v}$. Если $c\overline{u} < c\overline{v}$ (c — канторовская функция свертки), то для некоторого e имеем

$$\overline{u} \in \alpha^e \quad \text{и} \quad \overline{v} \notin \alpha^e \cap \beta^e,$$

тогда $\overline{v}$ не отвергается множеством α ни на каком шаге, а значит, $\overline{v}$ отвергается на некотором шаге $e_1 > e$ множеством β^{e_1} и имеет место $M \models \neg P(\nu\overline{v})$, следовательно, $\overline{v} \in \alpha$. Если $c\overline{u} > c\overline{v}$, то $\overline{v} \in \alpha$, так как в противном случае $\overline{u}$ не отвергается β^e ни на каком шаге, а значит, $\overline{u}$ отвергается α^e, но тогда $\overline{u} \notin \alpha^e$. Противоречие. Следовательно, α — ν-замкнутое вычислимое множество.

Положим $A = \alpha$. Тогда, по построению, $\overline{x} \in A$ и

$$\forall a \in A(M \models \neg P(\nu a)).$$

□

Формулировке следующей теоремы предпошлем замечание алгебраического характера.

Пусть A_0, A_1 — разбиение основного множества модели M на две непересекающиеся части. Рассмотрим множество $\Theta(A_0, A_1)$ всех конгруэнций функционального обеднения модели M, не «склеивающих» никакой элемент из A_0 ни с каким элементом из A_1. Тогда в $\Theta(A_0, A_1)$ имеется наибольший элемент. Обозначим эту конгруэнцию через $Q^*(A_0, A_1)$.

Теперь, если (M, ν) — нумерованная модель и $\nu^{-1}A_0$ (а значит, и $\nu^{-1}A_1$) вычислимо, то функциональное обеднение нумерованной фактор-модели $(M/Q^*(A_0, A_1), \nu^*)$, где через ν^* обозначена естественная проекция ν по конгруэнции $Q^*(A_0, A_1)$ (т. е. $\nu^* = \nu/Q^*(A_0, A_1)$), является негативным (Н. Х. Касымов [13]).

Теорема 2.2. *Нумерованная модель (M, ν) является вычислимо отделимой тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными моделями.*

Доказательство. Пусть (M, ν) — вычислимо отделимая модель и для некоторого $\overline{x} \in \omega^n$ и n-местного отношения модели $(M \models \neg P(\nu\overline{x}))$. Тогда, по условию, существуют вычислимые множества $A_1 \subseteq \omega^n, \ldots, A_1 \subseteq \omega^n$ такие, что

$$\overline{x} \in A_1 \times \ldots \times A_n \wedge \forall a \in A_1 \times \ldots \times A_n(M \models \neg P(\nu a)).$$

Рассмотрим негативные конгруэнции $Q_i^*(A_i, \overline{A_i})$ $(i = \overline{1, n})$ функционального обеднения модели.

Лемма 2.1. *Пересечение вычислимого семейства S негативных конгруэнций является негативной конгруэнцией.*

Согласно этой лемме конгруэнция

$$Q^* = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i^*(A_i, \overline{A_i})$$

является негативной конгруэнцией функционального обеднения модели (M,ν), не «склеивающей» никакой элемент из $A_1\times\ldots\times A_n$ ни с каким элементом из его дополнения. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi:(M,\nu)\to(M/Q^*,\nu^*)$ такой, что

$$M/Q^*\models\neg P(\varphi\nu a)\Leftrightarrow a\in A_1\times\ldots\times A_n,$$

а остальные отношения (исключая равенство) полагаем тождественно истинными в $(M/Q^*,\nu^*)$. В силу вычислимости $A_1\times\ldots\times A_n$, P является негативным отношением, сохраняющим ложность в точке $\varphi\nu\overline{x}$.

Обратно, пусть нумерованная модель (M,ν) аппроксимируется негативными моделями. Если для некоторого $\overline{x}\in\omega^n$ и n-местного отношения P имеет место $(M\models\neg P(\nu\overline{x}))$, то согласно условию, существует такая негативная модель (N,μ), гомоморфизм $\varphi:(M,\nu)\to(N,\mu)$ и вычислимая функция f, что

$$N\models\neg P(\varphi\nu\overline{x})\quad\text{и}\quad\varphi\nu=\mu f.$$

По теореме 2.1 негативная модель (N,μ) вычислимо отделима. Следовательно, существует μ-замкнутое вычислимое множество α, отделяющее $f\overline{x}$ от области истинности P, но тогда $f^{-1}\alpha$ является ν-замкнутым вычислимым множеством, отделяющим $\overline{x}$ от области истинности отношения P. □

Эти теоремы подчеркивают исключительную роль негативных моделей с точки зрения структурной теории вычислимо отделимых нумерованных моделей.

В некотором, уточняемом ниже, смысле, негативные модели приоритетнее позитивных. Например, всякое позитивное поле вычислимо, тогда как любое бесконечное вычислимо представимое поле имеет негативную невычислимую нумерацию (см. [35]).

В этой же статье показано существование негативных невычислимых представлений следующих классических объектов:

(а) стандартной модели арифметики $\langle\omega;S,+,\times\rangle$;
(б) вычислимо представимой абелевой группы без кручения;
(в) бесконечного вычислимо представимого векторного пространства над конечным полем;
(г) алгебры термов от эффективного множества порождающих.

Заметим, что все позитивные представления указанных выше систем являются вычислимыми.

Покажем, что негативность может иметь место при весьма общих ограничениях на свойства нумераций моделей.

Определение 2.1. Нумерация называется T_1-*отделимой* (T_2-*отделимой*; T_3-*отделимой*; T_4-*отделимой*), если для всякой пары натуральных чисел, различных по модулю ее нумерационной эквивалентности, найдется перечислимая окрестность первого числа, не содержащая второе, и перечислимая окрестность второго, не содержащая первое (найдутся непересекающиеся перечислимые окрестности этих чисел; для всякого элемента и замкнутого в эффективно порожденной топологии множества, не содержащего этот элемент, найдутся их непересекающиеся окрестности; для всякой пары непересекающихся замкнутых множеств найдутся их непересекающиеся окрестности).

Обозначим через K_m $(0\leqslant m\leqslant 4)$ класс пространств, гомеоморфных эффективно порожденным пространствам, для которых выполняется аксиома T_m-отделимости.

Предложение 2.1. *$K_m\setminus K_{m+1}\neq\varnothing$ для $m\in\{0,1\}$, $K_3=K_4$.*

Для $m=0$ тривиальный пример дается связным двоеточием, т. к. если α — перечислимое невычислимое множество, то двухэлементное множество $\{\alpha,\omega\setminus\alpha\}$ с естественной нумерацией, сопоставляющей каждому числу содержащее его множество, есть эффективно порожденное отделимое и не T_1-отделимое пространство.

Для $m=1$ в [14] построен пример эффективно порожденного пространства, гомеоморфного счетно-бесконечному пространству Зарисского, т. к. непустыми вполне перечислимыми подмножествами в этом примере являются все коконечные множества и только они.

Для $m=3$ вопрос так же, как и для $m=0$, тривиален, т. к. для счетных топологических пространств регулярность и нормальность равносильны (предполагается T_1-отделимость).

Для $m = 2$ вопрос открыт.

В случае вычислимо порожденных пространств ситуацию полностью описывает

Предложение 2.2. *Нумерация модели вычислимо отделима тогда и только тогда, когда вычислимо порожденное топологическое пространство совершенно нормально и вполне несвязно.*

Доказательство см. в [14].

В заключение раздела продемонстрируем возможность наличия тесных связей между отделимостью и негативностью на двух естественных примерах алгебр, всякие T_2-отделимые (T_1-отделимые) нумерации которых негативны.

Простейшей подпрямо неразложимой бесконечной алгеброй с артиновой решеткой конгруэнций является алгебра предшествования $(\omega; p)$, где ω — множество натуральных чисел, $p(x+1) = x$, $p(0) = 0$.

Предложение 2.3. *Всякая T_2-отделимая нумерация алгебры предшествования является негативной.*

Доказательство. Пусть ν — T_2-отделимая нумерация алгебры предшествования $P = (\omega; p)$, η — нумерационная эквивалентность нумерации ν. На самом деле, доказательство можно провести в гораздо более слабых предположениях T_2-отделимости элементов 0 и 1 алгебры P (т. е. $p(0) = 0$, $p(1) = 0$). Пусть α, β — такие η-замкнутые непересекающиеся перечислимые множества, что $0 \in \nu\alpha$ и $1 \in \nu\beta$. Тогда

$$x \neq y \ (\ker\ \eta) \leftrightarrow \exists n \in \omega[(p^n(x) \in \alpha \wedge p^n(y) \in \beta) \vee (p^n(y) \in \alpha \wedge p^n(x) \in \beta)],$$

где $p^0(z) = z$. □

Заметим, что в доказательстве этого предложения не используются ни T_2-отделимость нумерации ν (достаточно предположить T_2-отделимость неподвижной точки и ее непосредственного последователя), ни теорема об аппроксимируемости эффективно отделимыми алгебрами из [16], ни теорема о вычислимости отделимой нумерации алгебры с артиновой решеткой конгруэнций (также из [16]), что дает повод для предположения возможности наблюдения аналогичных эффектов негативности в достаточно широких классах T_2-отделимых нумерованных алгебр.

Алгеброй Мальцева назовем алгебру, удовлетворяющую тождествам

$$\varphi(x, x, z) = z, \quad \varphi(x, z, z) = x,$$

где φ — термальный многочлен в сигнатуре исходной алгебры (алгебра из конгруэнц-перестановочного многообразия).

Рассмотрим алгебру $M = (\omega; f)$, где

$$f(x, y, z) = \begin{cases} z, & x = y; \\ x, & x \neq y. \end{cases}$$

Очевидно, что M — алгебра Мальцева.

Предложение 2.4. *Всякая T_1-отделимая нумерация алгебры M является вычислимой.*

Доказательство. Пусть ν — T_1-отделимая нумерация алгебры M, η — нумерационная эквивалентность нумерации ν. Так же, как и в случае предложения 2.3, доказательство можно провести при более слабых предположениях. Допустим, что имеется пара таких различных элементов a, b, что для подходящих η-замкнутых перечислимых множеств α, β имеем

$$a \in \nu\alpha \wedge b \notin \nu\alpha \quad \text{и} \quad b \in \nu\beta \wedge a \notin \nu\beta.$$

Докажем, что элемент α вполне вычислим. В самом деле, пусть $\nu m = a$ и $\nu n = b$, тогда

$$x = m \ (\ker\ \eta) \leftrightarrow f(m, x, n) \in \beta.$$

Заметим, что область значений одноместной вычислимой функции $\lambda x.f(m, x, n)$ с параметрами m, n есть $m/\eta \cup n/\eta$ и потому не пересекается с множеством $\alpha \cap \beta$. Если $x \neq m$ $(\ker\ \eta)$, то

$f(m,x,n) \in \alpha$, следовательно, приведенная процедура определения принадлежности классу m/η успешно и корректно завершается для каждого $x \in \omega$, т. е. $\nu^{-1}(a)$ вычислимо. Положим

$$\gamma = \nu^{-1}(a).$$

Покажем, что алгебра M простая. В самом деле, пусть $a \neq b$, θ — ненулевая конгруэнция алгебры M, «склеивающая» пару элементов a, b, а z — произвольный элемент этой алгебры. Тогда

$$f(a,b,z) = f(a,a,z)\ (\ker\ \theta) \to a = z\ (\ker\ \theta).$$

Поскольку M простая, то ν вычислима. Легко понять, что вычислимая отделяющая последовательность множеств, определяемых как эффективные прообразы вычислимого множества γ относительно множества всех трансляций, представляющих операции алгебры M в нумерации ν, является сильно вычислимой и потому η негативна. Очевидно, что

$$x = y\ (\ker\ \eta) \leftrightarrow \exists z[x \neq z\ (\ker\ \eta) \wedge f(x,y,z) \neq x\ (\ker\ \eta)],$$

так как

$$x \neq y\ (\ker\ \eta) \to \forall z(f(x,y,z) = x\ (\ker\ \eta)),$$

$$x = y\ (\ker\ \eta) \to \forall z[z \neq x\ (\ker\ \eta) \to (f(x,y,z) \neq x\ (\ker\ \eta)],$$

и алгебра M, согласно сделанному выше замечанию, неодноэлементная.

В силу негативности η правая часть вышеуказанной равносильности перечислима, т. е. η позитивна, а значит, и вычислима. □

Таким образом, в некоторых важных частных случаях, для известных типов алгебр, существование T_1-отделимых (T_2-отделимых) нумераций может являться достаточным условием их негативности.

3. Равномерность

С фундаментальным в теории алгоритмов принципом равномерности можно ознакомиться в монографиях [3, 24].

Если в определении вычислимой отделимости нумерованной модели потребовать наличие эффективного процесса, который для каждой точки ложности любого предиката «выдает» соответствующий алгоритм разрешения множества, содержащего данную точку и не пересекающегося с областью истинности данного предиката, то получим понятие равномерно вычислимо отделимой модели.

Формально, дадим следующее

Определение 3.1. Нумерованная модель (M, ν) называется *равномерно вычислимо отделимой*, если существует частичная вычислимая функция $g(c(\overline{x}), \gamma(P), z)$, где c — канторовская функция свертки и $\gamma(P)$ — клиниевский индекс характеристической функции ν-прообраза предиката P, со следующим свойством: для всякого n-местного отношения P и любого такого набора натуральных чисел $\overline{x} \in \omega^n$, что $M \models \neg P(\nu\overline{x})$, одноместная функция $\lambda z[g(c(\overline{x}), \gamma(P), z)]$ (λ — стандартное λ-обозначение) есть вычислимая характеристическая функция множества, являющегося сверткой ν-замкнутого вычислимого множества, отделяющего $\overline{x}$ от области истинности отношения $\nu^{-1}P$.

Под перечислимым индексом негативной модели мы понимаем алгоритм, определяющий процедуру перечисления дополнения всех основных отношений.

Пусть K — некоторый фиксированный класс негативно нумерованных моделей.

Определение 3.2. Нумерованная модель (M, ν) называется *равномерно аппроксимируемой* K-моделями, если существует алгоритм, значение которого на каждой паре $\langle P, \overline{x}\rangle$ при $M \models \neg P(\nu\overline{x})$ определено и равно перечислимому индексу негативной K-модели, сохраняющей ложность P в естественном гомоморфном образе набора $\nu\overline{x}$.

Определение 3.3. Бескванторная формула вида $A_1 \vee \ldots \vee A_n \to \Phi$, где A_i — атомарные, Φ — позитивная формулы, называется *дизъюнктивно-импликативно-позитивной* (*ДИП-формулой*).

ДИП-формулами являются, в частности, позитивные формулы (при $n = 0$), конъюнкции отрицаний атомарных формул (при $\Phi = \varnothing$), а также бескванторные части однопосылочных квазитождеств вида $S \to \Phi$ (при $n = 1$). Универсальное замыкание ДИП-формулы называется *универсальным ДИП-предложением*.

Негативные модели, опять-таки, образуют важный класс равномерно вычислимо отделимых моделей (см. [15]).

Теорема 3.1. *Для нумерованной модели* (M, ν) *равносильны следующие условия* (*см.* [15]):

1. (M, ν) — *равномерно вычислимо отделимая модель*;
2. *если* Φ — *перечислимое множество универсальных ДИП-предложений, реализующееся в* M, *то* (M, ν) *равномерно аппроксимируется негативными* Φ-*моделями.*

В формулировке этой теоремы нельзя заменить универсальные ДИП-предложения произвольными универсальными и экзистенциальными ДИП-предложениями, так же, как нельзя опустить условие равномерности.

Следствие 3.1. *Нумерованная модель равномерно вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она равномерно аппроксимируется негативными моделями.*

Подмножество $A \subset M$ называется *слабо перечислимым*, если существует такое перечислимое множество $\alpha \subset \omega$, что $\nu\alpha = A$.

Используя предыдущие соображения, легко доказать следующий критерий негативности нумерованной модели.

Теорема 3.2. *Нумерованная модель негативна тогда и только тогда, когда она является равномерно вычислимо отделимой моделью со слабо перечислимыми дополнениями всех основных отношений.*

Следствие 3.2. *Всякая негативная модель равномерно вычислимо отделима.*

Следующий результат из [13] имеет важные применения в теоретической информатике и теории нумерованных систем с условиями конечности, что будет показано ниже в разделе 5.

Предложение 3.1. *Существует конечно порожденная равномерно вычислимо отделимая позитивная модель с иммунной характеристической трансверсалью.*

Общий метод построения таких моделей приведен в [14].

4. Вычислимо отделимые линейные порядки

4.1. Представимость линейных порядков над эквивалентностями. Понятие линейно упорядоченного множества (далее — линейного порядка), являющееся фундаментальным математическим понятием, играет также важную роль в теории абстрактной вычислимости. Линейные порядки вместе с их вычислимыми представлениями являются классическими объектами исследования в теории вычислимых моделей. Имеется, по крайней мере, четыре причины, мотивационно обуславливающих целесообразность изучения негативных моделей вообще и негативных линейных порядков в частности.

Во-первых, естественные расширения класса вычислимых линейных порядков — позитивные и алгоритмически двойственные к ним, т. е. негативные, также образуют важные классы линейных порядков, хотя бы потому, что вычислимость порядка равносильна его одновременной позитивности и негативности. Однако, больший приоритет в исследовании нумерованных структур отдается позитивным моделям, т. к. позитивные модели естественным образом возникают в различных областях математики и теоретической информатики (классический пример — перечислимо определенные свободные системы эффективно аксиоматизируемых квазимногообразий [20]). Априори могло казаться, что ситуация при сравнении понятий позитивных и негативных линейных порядков будет вполне симметричной. Тем не менее, с алгоритмической точки зрения, свойства позитивных и негативных порядков оказались не просто различными, но и, в определенном смысле, противоположными, что подтверждается результатами данной статьи. Так, например, еще в 1970 году L. Feiner в [32] указал позитивно представимый линейный порядок, не имеющий вычислимого представления, тогда как почти очевидно, что всякий негативно представимый линейный порядок имеет вычислимое представление.

Во-вторых, особенно наглядно и выпукло различия между алгоритмическими свойствами позитивных и негативных линейных порядков проявляются в рамках понятия их представимости над заданными эквивалентностями. Так, существуют позитивные эквивалентности, над которыми позитивно не представимы никакие линейные порядки. Если же эквивалентность негативна и обладает бесконечным числом смежных классов, то над ней, как минимум, негативно представимы все типы изоморфизмов счетных плотных линейных порядков (и не только они!). Более того, существует позитивное представление естественного порядка рациональных чисел, в котором множество вычислимых сечений пусто [36]. Множество же вычислимых сечений любого негативного представления плотного линейного порядка оказалось не просто труднообозримым, но и эффективно неисчерпаемым (т. е. продуктивным в обычном алгоритмическом смысле). В этом же русле, связанном с представимостью порядка над эквивалентностью, лежит и ряд исследований по структурам степеней представимости моделей над эквивалентностями. В работе [33] были получены некоторые принципиальные результаты о строении структуры степеней позитивной представимости линейных порядков. Ответы на некоторые аналогичные вопросы для степеней негативной представимости оказались существенно иными и приводятся в настоящей статье. При этом, в настоящее время, вопросов, в т. ч. принципиальных, касающихся структуры степеней негативной представимости линейных порядков, больше, чем ответов. Например, существуют ли две несравнимые бесконечные степени негативной представимости линейных порядков? С точки зрения теоретической информатики именно понятие степени представимости может быть одним из возможных уточнений понятия реализуемости моделей данных над заданными эффективными универсумами. Отметим, что с точки зрения представимости алгебр над эквивалентностями класс негативных систем также оказался существенно богаче класса позитивных. К примеру, над любой негативной эквивалентностью представима конгруэнц-простая конечно-порожденная алгебра [13], в то время как существуют позитивные эквивалентности, над которыми представимы лишь тривиальнейшие алгебры [14] (т. е. все сигнатурные операции которых действуют на основном множестве как проектирующие или константы).

Третий аспект мотивации изучения данного понятия связан с эффективной отделимостью как основой распознавания при функционировании сложных систем (заданных своими представлениями/нумерациями с теми или иными ограничениями алгебраическо-алгоритмического характера). Вычислимая отделимость любой пары смежных классов негативной эквивалентности впервые была отмечена академиком А. И. Мальцевым в [22]. В обзорной работе [14], в которой описаны основы теории вычислимо отделимых универсальных алгебр и их приложения в теоретической информатике, центральным результатом является теорема о равносильности свойств вычислимой отделимости нумерованной алгебры и ее аппроксимируемости негативными алгебрами, позволяющая развить структурную теорию таких алгебр и устанавливающая фундаментальную роль негативных алгебр в этой теории.

Эффекты негативности часто возникают даже при довольно общих предположениях на свойства отделимости [16], что дает дополнительное обоснование целесообразности систематического изучения негативных систем наряду с позитивными.

И, наконец, в-четвертых. Классический конструктивный анализ при рассмотрении вычислимых вещественных чисел аппелирует к множеству рациональных чисел как к базисному конструктивному универсуму, вместе с его естественным порядком (см., например, [25]). Вопрос о возможности существования более общих алгоритмических представлений этого базиса, в рамках которых можно получить основные факты конструктивного анализа, также приводит к негативным линейным порядкам, т. к. для позитивных плотных порядков (как было отмечено выше) возможны ситуации пустых семейств вычислимых сечений. Более того, бóльшая часть классических методов построения вычислимых последовательностей в области рациональных чисел естественным образом переносится на любые негативные плотные линейные порядки, что позволяет развить для них основы элементарного конструктивного анализа (на языке вычислимых последовательностей или вычислимых дедекиндовых сечений).

Терминологическое замечание. В прежней русскоязычной терминологии вычислимые модели назывались конструктивными, а вычислимо представимые — конструктивизируемыми. В современной западной литературе по теории абстрактной вычислимости под вычислимыми моделями обычно понимаются системы с вычислимыми носителями (алгоритмически разрешимыми подмножествами ω), на которых заданы вычислимые операции и отношения, а под вычислимо представимыми — те, для которых существуют вычислимые копии, т. е. изоморфные системам с вычислимыми носителями, на которых заданы вычислимые операции и отношения.

Мы будем придерживаться рамок ныне принятой терминологии, хотя, как отмечалось выше, понятие вычислимости имеет и другие, не менее важные, интерпретации (см. Ю. Л. Ершов [3]), что может создавать ощутимые неудобства в восприятии излагаемых фактов. Следуя сказанному, дадим следующее неформальное

Определение 4.1. Нумерованное семейство объектов $(\Re, \nu)$ называется *вычислимым*, если существует равномерно эффективная процедура, транслирующая ν-номер любого $\Re$-объекта в его (заранее оговоренные) алгоритмические свойства.

Далее, исходя из необходимости, данное определение будет уточняться так, чтобы из контекста всегда было ясно, что мы вкладываем в понятие вычислимости. Так, к примеру, вычислимость (относительно нумерации μ) семейства $\Im$ представляющих вычислимых функций нумерованной унарной алгебры (A, μ) означает существование такой нумерации γ семейства $\Im$, что для подходящей вычислимой функции f имеет место

$$\gamma = \chi f$$

(где χ — клиниевская нумерация унарных частично вычислимых функций).

Определение 4.2. Если система имеет нумерацию, в которой все основные отношения (включая равенство) являются $\sum\limits_n^0(\prod\limits_n^0)$-вычислимыми (а функции, представляющие операции, согласно данному выше определению, автоматически вычислимы), то говорят, что данная модель $\sum\limits_n^0(\prod\limits_n^0)$-*представима*.

Как отмечалось выше, с понятием позитивной (негативной) представимости системы уместно (и, как оказалось, полезно) связать двойственное понятие представимости системы над эквивалентностью η над ω, подразумевая следующее

Определение 4.3. Система M называется $\sum\limits_n^0(\prod\limits_n^0)$-*представимой над эквивалентностью* η на ω, если существует $\sum\limits_n^0(\prod\limits_n^0)$-нумерация системы M с нумерационной эквивалентностью, равной η.

При этом, вообще говоря, в самом общем случае можно не предполагать, что ядро нумерации, т. е. η, является $\sum\limits_n^0(\prod\limits_n^0)$-множеством.

Замечание 4.1. С точки зрения представимости систем над эквивалентностью, «первичным» фиксированным понятием является эквивалентность (что порождает проблему описания общих свойств всех систем, представимых над заданной эквивалентностью), в то время как в рамках теории нумерованных систем основной объект есть сама система, по отношению к которой все ее нумерации «вторичны» (соответственно, в этом случае основная проблематика — описание свойств нумераций с теми или иными свойствами и соотношений между ними). Однако эти понятия двойственны, что мы и будем использовать в дальнейшем без каких-либо ограничений и оговорок, если из контекста будет явно вытекать то, что имеется в виду.

Как обычно, *сечением* линейного порядка $\langle L; \preceq_L\rangle$ (к символу порядка, заданного на множестве, мы часто будем приписывать имя этого множества в качестве нижнего индекса, что позволит избежать возможных недоразумений) назовем такое разбиение основного множества этого порядка на два непустых непересекающихся множества A и B, что всякий элемент из A строго меньше (в смысле $\preceq_L$) всякого элемента из B. При этом множество A называется *нижним классом* сечения, а B — *верхним классом*. Существует три типа сечений:

1. в A есть наибольший элемент и в B есть наименьший (скачок);
2. в A есть наибольший элемент, а в B нет наименьшего, либо в A нет наибольшего, а в B есть наименьший (дедекиндово сечение);
3. в A нет наибольшего элемента и в B нет наименьшего (щель).

В случае плотных порядков случай скачков не имеет места, что будет использоваться далее без напоминаний.

Сечение $A|B$ нумерованного линейного порядка $\langle L, \nu\rangle$ называется *вычислимым*, если вычислимо множество всех ν-номеров нижнего класса сечения. Заметим, что в силу симметричности понятия вычислимости и непустоты обоих классов сечения, не имеет значения, брать ли нижний класс или верхний.

Элемент a линейного порядка $\langle L; \preceq_L\rangle$ называется *предельным снизу*, если

$$\forall x[x \prec_L a \to \exists y(x \prec_L y \prec_L a)],$$

где $\prec_L$ обозначает «строго меньше». Аналогично определяется *предельность сверху*. *Предельным* называется элемент, предельный либо снизу, либо сверху. Если элемент пределен как сверху, так и снизу, то мы будем называть его *двухсторонне предельным*.

Пусть η — произвольная (не обязательно негативная или позитивная) бесконечная эквивалентность на ω. Предельный снизу элемент n/η представимого над η линейного порядка $\langle \omega/\eta; \preceq_\eta\rangle$ называется *эффективно предельным снизу*, если существует такая вычислимая последовательность $x_0, x_1, \ldots$ натуральных чисел, что

$$x_0/\eta \prec_\eta x_1/\eta \prec_\eta \cdots \prec n/\eta,$$
$$\forall z[z/\eta \prec_\eta n/\eta \to \exists i \in \omega(z/\eta \prec_\eta x_i/\eta)],$$

где $\prec_\eta = \preceq_\eta \setminus id\ \omega/\eta$.

Аналогично определяется *эффективно предельный сверху* элемент.

Данное в предыдущем подразделе определение позитивного (негативного) линейного порядка можно обобщить, имея в виду произвольные нумерационные эквивалентности.

Определение 4.4. Линейный порядок $\langle L; \preceq_L\rangle$ называется *негативно* (*позитивно*) *представимым* над эквивалентностью η на ω, если существует такая его нумерация ν, что

$$\eta = \{\langle x, y\rangle \mid \nu x = \nu y\}$$

и множество $\{\langle x, y\rangle \mid \nu x \preceq_L \nu y\}$ является коперечислимым (соответственно перечислимым).

Далее, во избежание перегрузки текста термином «*представимый*», будем без оговорок использовать как его синонимы прилагательные «*определимый*» и «*реализуемый*».

Предложение 4.1. *Негативный* (*позитивный*) *линейный порядок с позитивной* (*соответственно, негативной*) *нумерационной эквивалентностью является вычислимым.*

Доказательство см. в [17].

Таким образом, для рассмотрения собственных расширений класса линейных порядков, обладающих вычислимыми представлениями, имеет смысл изучение линейных порядков, негативно (позитивно) представимых над негативными же (соответственно позитивными) эквивалентностями, т. к. другие комбинации дают вычислимые порядки.

Далее через $\langle Q; \preceq_Q\rangle$ будем обозначать множество рациональных чисел вместе с их естественным упорядочением типа τ. Отметим, что сами рациональные числа (точнее, их изображения) удобно считать их же номерами, сопоставляя каждому числу все его представления в виде пары целых чисел (числитель/знаменатель). Эквивалентно, можно выбрать любую геделевскую нумерацию всех пар целых чисел, отождествляя их с рациональными и считать основным множеством ω, на котором задается вычислимый линейный порядок. Детали мы опускаем. Очевидно, что для любого такого представления полученная модель будет вычислимой.

Предложение 4.2. *Существует позитивная эквивалентность, над которой не определим никакой линейный порядок.*

Доказательство также см. в [17].

Заметим, что любая позитивная (негативная) эквивалентность с конечным числом смежных классов является вычислимой, и порядковый тип всякого линейного порядка, эффективно реализуемого над ней, с точностью до изоморфизма, есть начальный отрезок порядкового числа ω. Поэтому с точки зрения дескриптивной теории алгоритмов (т. е. принципиального наличия или отсутствия алгоритмов) интерес представляют лишь бесконечные эквивалентности.

Известно, что всякий предельный элемент негативного линейного порядка является эффективно предельным, в то время как предельный элемент позитивного линейного порядка может не быть эффективно предельным и, более того, существует позитивная совершенная нумерация порядка рациональных чисел $\langle Q; \preceq_Q\rangle$, в которой никакой элемент не является эффективно предельным (см. [17]), т. е. в данном позитивном представлении порядкового типа τ множество вычислимых сечений пусто. Для любой же негативной нумерации порядка типа τ семейство вычислимых сечений, как будет показано далее, трудно обозримо.

Можно показать, что всякий не двухсторонне предельный элемент негативного линейного порядка является рубежом подходящего вычислимого дедекиндова сечения, в то время как для двухсторонне предельных это не так.

Следующая теорема из [17] вместе с предыдущим предложением обосновывает целесообразность рассмотрения именно негативных линейных порядков как наиболее широкого и естественного класса моделей, в котором можно развить теорию эффективных предельных переходов. Эти же факты в определенном смысле обуславливают приоритетность негативных порядков перед позитивными, хотя, традиционно считалось, что позитивные модели гораздо важнее негативных.

Теорема 4.1. *Над всякой бесконечной негативной эквивалентностью негативно представимы все типы изоморфизмов счетных плотных линейных порядков.*

Автоморфизм нумерованной системы называется *вычислимым*, если он поддерживается вычислимой на номерах функцией, т. е. если M — модель, α — ее автоморфизм, а ν — нумерация модели M, то α называется вычислимым (точнее, *ν-вычислимым*), если существует такая вычислимая функция f, что

$$\alpha\nu = \nu f.$$

Очевидно, что вычислимые автоморфизмы любой нумерованной модели образуют полугруппу. Легко также понять, что множество вычислимых автоморфизмов любой позитивной модели есть группа.

В [19] доказана следующая теорема.

Теорема 4.2. *Существует негативный линейный порядок, полугруппа вычислимых автоморфизмов которой не является группой.*

Более того, можно указать негативный линейный порядок с бесконечной полугруппой вычислимых автоморфизмов, среди которых единственным вычислимо обратимым является тождественный.

Обозначим $\eta(\beta) = \beta^2 \cup id\,\omega$ для любого $\beta \subseteq \omega$. Оказалось, что в рамках эквивалентностей типа $\eta(\beta)$ можно характеризовать линейные порядки, определимые над ними (см. [19]).

Теорема 4.3. *Пусть β — коперечислимое, но невычислимое множество, а $\langle L; \preceq\rangle$ — произвольный линейный порядок. Тогда эквивалентны следующие условия*:

(а) $\langle L; \preceq\rangle$ *негативно представим над* $\eta(\beta)$;

(б) $\langle L; \preceq\rangle$ *имеет вычислимое представление и обладает хотя бы одним предельным элементом.*

4.2. Степени негативной представимости. Для негативной эквивалентности η обозначим через $L(\eta)$ класс всех линейных порядков, негативно представимых над η.

На множестве негативных эквивалентностей на ω введем следующее бинарное отношение $\trianglelefteq_{NLO}$:

$$\eta_1 \trianglelefteq_{NLO} \eta_2 \Leftrightarrow L(\eta_1) \subseteq L(\eta_2).$$

Очевидно, что $\trianglelefteq_{NLO}$ является предпорядком (т. е. рефлексивным и транзитивным отношением) на множестве всех негативных эквивалентностей на ω. Тогда его симметричное замыкание

$\equiv_{NLO}$ есть эквивалентность, факторизация по которой разбивает множество всех негативных эквивалентностей на $\equiv_{NLO}$-классы эквивалентности. Содержательно, $\equiv_{NLO}$-эквивалентность двух эквивалентностей означает совпадение представимых над ними классов порядковых типов.

Если Π — семейство всех негативных эквивалентностей, то на $\Pi/\equiv_{NLO}$ действует частичный порядок, индуцированный предпорядком $\trianglelefteq_{NLO}$, который мы будем обозначать так же (корректность этого очевидна). Частично упорядоченное множество $\langle \Pi/\equiv_{NLO}; \trianglelefteq_{NLO}\rangle$ будем называть *структурой негативной представимости линейных порядков*, а его элементы — *степенями негативной представимости*. Далее, если будет ясно, о чем идет речь, структуру негативной представимости линейных порядков будем называть просто структурой негативной представимости, а ее элементы — степенями. Для сокращения обозначений через $d(\eta)$ будем обозначать степень эквивалентности η. Будем также говорить, что линейный порядок *представим* над заданной степенью, если он представим над некоторой (а значит, и над любой) эквивалентностью из этой степени.

Строение структуры негативной представимости линейных порядков отражает алгоритмическую природу эквивалентностей с точки зрения предоставляемых возможностей для реализации над ними важных объектов, каковыми являются линейные порядки. Ясно, что чем $\trianglelefteq_{NLO}$-выше расположена степень, тем больше реализационных возможностей она предоставляет. Такой подход может оказаться также полезным в рамках теоретической информатики.

Отметим, что конечные негативные эквивалентности (которые в данном случае, очевидно, будут вычислимыми) порождают изолированные степени в структуре негативной представимости, т. к. если число классов эквивалентности есть n, то над ней представим только порядковый тип, изоморфный конечному ординалу n. Отбросив все $\equiv_{NLO}$-классы, порожденные конечными эквивалентностями, получим ограничения отношений $\trianglelefteq_{NLO}, \equiv_{NLO}$ на бесконечные негативные эквивалентности. Всюду далее, структура негативной представимости рассматривается в контексте отсутствия степеней, содержащих конечные эквивалентности.

Пусть Σ — множество бесконечных позитивных эквивалентностей, и отношение $\eta_1 \trianglelefteq_{PLO} \eta_2$ на Σ означает, что всякий линейный порядок, позитивно представимый над η_1, позитивно представим и над η_2. Совершенно аналогично негативному случаю, путем симметричного замыкания предпорядка $\trianglelefteq_{PLO}$ и факторизации относительно полученного отношения эквивалентности на множестве всех бесконечных позитивных эквивалентностей, получим структуру позитивной представимости линейных порядков $\langle \Sigma/\equiv_{PLO}; \trianglelefteq_{PLO}\rangle$, которая оказалась совершенно отличной от структуры негативной представимости линейных порядков $\langle \Pi/\equiv_{NLO}; \trianglelefteq_{NLO}\rangle$. Так, в структуре позитивной представимости имеется бесконечная позитивная степень, над которой не определим никакой линейный порядок, в то время как над любой бесконечной негативной степенью представим плотный порядок. Из вышесказанного также следует, что существует наименьшая позитивная степень. Изучению основных свойств структуры $\langle \Sigma/\equiv_{PLO}; \trianglelefteq_{PLO}\rangle$ посвящена работа [33], в которой, в частности, показано, что эта структура не имеет наибольшего элемента, но имеет максимальный (им будет степень $d(id\ \omega)$), существует бесконечно убывающая цепь позитивных степеней и имеются несравнимые степени (аналог теоремы Фридберга—Мучника). Некоторые принципиальные вопросы, рассмотренные в работе [33], являются в настоящий момент открытыми для структуры $\langle \Pi/\equiv_{NLO}; \trianglelefteq_{NLO}\rangle$.

Вместо линейных порядков можно также рассматривать другие объекты, в т. ч. универсальные алгебры (не фиксируя сигнатуру), которые широко используются в абстрактных типах данных и объектно-ориентированном программировании. Так например, как уже отмечалось, над любой негативной эквивалентностью представима конечно-порожденная конгруэнц-простая алгебра (см. [13]), тогда как существуют позитивные эквивалентности, над которыми представимы только тривиальные структуры (см. [14]), заданные проектирующими функциями и функциями-константами, которые, очевидно, представимы над любой эквивалентностью. С другой стороны, разумные расширения класса рассматриваемых эквивалентностей также позволяют получать структуры с содержательными свойствами. Так, для эффективно отделимых эквивалентностей (которые содержат и негативные, и позитивные) показано, что они являются основой теории отделимых алгебр — отделимость нумерованной алгебры равносильна ее аппроксимируемости эффективно отделимыми, см. [16]. В этой же работе показаны примеры использования классических условий конечности с точки зрения представимости алгебр над эквивалентностями — для нумерованных алгебр с артиновыми решетками конгруэнций их отделимость равносильна эффективной отделимости.

Цель настоящего подраздела — изучение простейших свойств структуры негативной представимости, а также роли и места плотных линейных порядков в этой структуре. Из сказанного выше вытекает важный факт:

Предложение 4.3. *Структура негативной представимости имеет наибольший элемент.*

Доказательство вытекает из того, почти очевидного, факта, что всякий негативно представимый линейный порядок имеет вычислимую нумерацию.

Таким образом, всякий негативно представимый бесконечный линейный порядок представим над степенью $d(id\,\omega)$, которая и является наибольшей в структуре негативной представимости.

Важно подчеркнуть (см. [32]), что наличие позитивного представления линейного порядка вовсе не влечет существование его вычислимого представления.

По теореме 4.1 над всякой бесконечной негативной эквивалентностью представим плотный линейный порядок, по теореме 4.3 — существует негативная эквивалентность, над которой не представим порядок, имеющий непредельный элемент, что порождает естественный вопрос: «*является ли структура негативной представимости бесконечной*?».

В [17] доказана следующая теорема.

Теорема 4.4. *Существует бесконечно убывающая цепь степеней негативной представимости линейных порядков.*

Через ω^* обозначим тип линейного упорядочения, двойственный типу ω, т. е. изоморфный естественному порядку целых отрицательных чисел.

Следствие 4.1. *Структура бесконечных степеней негативной представимости линейных порядков содержит множество степеней, упорядоченное по типу* $1+\omega^*$.

4.3. Продуктивность негативных плотных порядков. Факт эффективной реализуемости плотных линейных порядков над любой бесконечной негативной эквивалентностью особо значим как на фоне предложения 4.2 о существовании бесконечных позитивных эквивалентностей, над которыми вовсе не представимы никакие линейные порядки, так и в свете следующего утверждения о существовании богатых семейств вычислимых сечений негативных плотных порядков.

Теорема 4.5. *Для любого негативного плотного линейного порядка существует эффективная процедура, сопоставляющая всякой паре различных элементов этого порядка вычислимую щель, отделяющую эти элементы.*

Доказательство в [17].

Таким образом, в негативных плотных линейных порядках для любой пары различных элементов отделяющая их вычислимая щель не просто существует, но, более того, разрешающий алгоритм соответствующей щели дается равномерно эффективной процедурой по данной паре элементов.

Дадим точное определение вычислимого семейства вычислимых сечений негативного линейного порядка.

Пусть χ — фиксированная вычислимая нумерация семейства всех одноместных частично вычислимых функций. Например, если k — бинарная клиниевская функция, универсальная для класса унарных частично вычислимых функций (т. е. семейство одноместных частично вычислимых функций есть множество объектов $\{\lambda x.k(x,n)|n\in\omega\}$), то можно положить

$$\chi(n)=\lambda x.k(x,n).$$

Следующие определения содержат неизбежные коллизии, возникающие при различных толкованиях вездесущего прилагательного «вычислимый», о чем было упомянуто выше.

Определение 4.5. Нумерация γ семейства вычислимых сечений $\Re$ негативного линейного порядка называется *вычислимой*, если существует такая вычислимая функция f, что

$$\gamma=\chi f$$

(т. е. по любому γ-номеру сечения эффективно определяется некоторый его χ-номер, являющийся индексом характеристической функции нижнего класса данного сечения).

Семейство вычислимых сечений негативного линейного порядка называется вычислимым, если существует его вычислимая нумерация.

Неформально, вычислимость семейства вычислимых сечений означает перечислимость алгоритмов разрешения для сечений данного семейства.

Назовем семейство вычислимых щелей негативного линейного порядка *относительно полным*, если любая пара различных элементов этого порядка отделяется подходящей щелью из данного семейства.

Следствие 4.2. *Для всякого негативного плотного линейного порядка существует вычислимая* (*даже негативная*) *нумерация относительно полного семейства вычислимых щелей.*

Множество всех пар различных по модулю негативной эквивалентности натуральных чисел перечислимо. Сопоставляя каждой такой паре индекс характеристической функции нижнего класса, отделяющей их щели, получим искомую вычислимую нумерацию. В действительности, всякая такая вычислимая нумерация будет негативной, т. к. для двух различных сечений гарантированно найдется элемент, принадлежащий верхнему классу для одного из этих сечений и нижнему классу — для другого. Детали мы опускаем.

Определение 4.6. *Вычислимым пополнением* негативного плотного линейного порядка называется множество всех вычислимых щелей (индексов вычислимых характеристических функций их нижних классов) данного порядка.

Ниже будет показано, что вышеупомянутая относительно полная система отделяющих вычислимых щелей негативного плотного линейного порядка далеко не исчерпывает всего разнообразия вычислимых сечений, что обосновывает введение данного определения.

Обратим внимание на два обстоятельства, связанные с этим определением. Во-первых, сечения, рубежами которых являются элементы самого порядка (т. е. дедекиндовы сечения), определены неоднозначно (элемент может быть как наибольшим в нижнем классе, так и наименьшим в верхнем). Во-вторых (и это — главное!), ни одно из двух дедекиндовых сечений, рубежами которых являются элементы порядка, вообще говоря, не обязано быть вычислимым. Иными словами, в множестве всех вычислимых сечений негативного порядка могут не оказаться сами элементы порядка в качестве пределов подходящих вычислимых последовательностей. Поэтому мы определяем вычислимые пополнения именно как щели. Впрочем, для задачи эффективного сравнения рубежей дедекиндовых сечений и щелей эти факты не являются препятствием, поскольку для различных рубежей вычислимых сечений (неважно, дедекиндовых или щелей) всегда эффективно найдется пара различных элементов линейного порядка, отделяющих эти рубежи.

Если элемент негативного порядка не является двухсторонне предельным, то он есть рубеж вычислимого сечения. В самом деле, пусть $\langle\omega/\eta;\preceq_\eta\rangle$ — негативный линейный порядок и его элемент m/η (смежный η-класс, содержащий число m) не пределен, скажем, справа. Тогда существует элемент n/η, расположенный непосредственно над m/η (т. е. строго между m/η и n/η нет других элементов). Следовательно, множества

$$A=\{x|x\preceq_\eta m\}\ (=\{x|x\prec_\eta n\})\quad \text{и}\quad B=\{x|n\preceq_\eta x\}\ (=\{x|m\prec_\eta x\})$$

— перечислимые (а значит, и вычислимые, т. к. A и B — непересекающиеся, объединение которых есть ω), первое из которых определяет нижний класс дедекндова сечения $A|B$, а второе — верхний. При этом, элемент m/η является наибольшим в нижнем классе.

Аналогично доказывается случай, когда m/η не пределен слева (тогда m/η оказывается наименьшим в верхнем классе).

Приведем простейший пример негативной нумерации порядкового типа $\omega+1+\omega^*$, в которой для единственного предельного (как снизу, так и сверху) элемента нет вычислимого сечения, рубежом которого он является.

Пусть α, β — вычислимо перечислимые невычислимые множества, объединение которых невычислимо (существование таких множеств вытекает, например, из теоремы Фридберга о разложении) и $a_0, a_1, \dots$; $b_0, b_1, \dots$ — эффективные пересчеты без повторений множеств α и β соответственно. Положим $\gamma = \omega \setminus (\alpha \cup \beta)$ и рассмотрим эквивалентность

$$\eta(\gamma) = \gamma^2 \cup id\, \omega,$$

которая, очевидно, негативна. Единственным неодноэлементным смежным классом по этой эквивалентности является множество γ, которое и будет определять предельный элемент. Определим следующий линейный порядок $\preceq$ над $\eta(\gamma)$ (т. е. на $\omega/\eta(\gamma)$):

$$a_0/\eta \prec a_1/\eta \prec \cdots \prec \gamma \prec \cdots \prec b_1/\eta \prec b_0/\eta,$$

где через $\prec$ обозначен строгий порядок, т. е. $\prec = \preceq \setminus id\, \omega/\eta(\gamma)$.

Нетрудно заметить, что дополнение линейного порядка $\preceq$ есть объединение двух множеств

$$\{\langle x, a_i\rangle | i \in \omega, x \in \omega \setminus \{a_0, \dots, a_i\}\} \cup \{\langle a_i, a_j\rangle | i \in \omega, j < i\},$$

$$\{\langle b_i, x\rangle | i \in \omega, x \in \omega \setminus \{b_0, \dots, b_i\}\} \cup \{\langle b_j, b_i\rangle | i \in \omega, j < i\},$$

которые, очевидно, перечислимы, т. е. $\preceq$ — действительно негативный линейный порядок на фактор-множестве $\omega/\eta(\gamma)$.

Элемент γ негативного линейного порядка $\langle \omega/\eta(\gamma); \preceq\rangle$ является рубежом двух сечений. Покажем, что ни одно из них не может быть вычислимым. Если γ является наибольшим в нижнем классе, то верхний класс сечения есть множество β, которое невычислимо, поэтому невычислим и нижний класс. Аналогично рассматривается случай, когда γ — наименьший в верхнем классе.

В связи с существованием относительно полной системы отделяющих вычислимых щелей, задаваемой равномерно эффективной процедурой, возникает естественный и принципиальный вопрос об алгоритмической природе совокупности всех вычислимых сечений негативного плотного линейного порядка.

Определение 4.7. Семейство $\Re$ вычислимых сечений нумерованного линейного порядка называется *продуктивным*, если существует эффективная процедура, позволяющая по каждому вычислимому подсемейству $\Re_0 \subseteq \Re$ строить вычислимое сечение из $\Re \setminus \Re_0$.

Теорема 4.6. *Семейство всех вычислимых сечений негативного плотного линейного порядка является продуктивным.*

Доказательство в [17].

Следствие 4.3. *Множество всех вычислимых сечений произвольного негативного плотного линейного порядка не является вычислимым.*

5. Спецификации

5.1. Алгебраические спецификации. В теории спецификаций программ и эффективной реализуемости можно считать достаточно утвердившимся тезис о позитивной представимости любой модели данных. Семантика таких моделей должна адекватно определяться их синтаксическими описаниями, которые, очевидно, обязаны иметь однозначно определенную интерпретацию и механизмы генерирования фактов о свойствах моделей. Другими словами, языки описания по определению являются логическими.

На сегодняшний день наиболее изученным и обладающим достаточно большой областью применимости является язык исчисления предикатов первого порядка и различные его фрагменты. Особенно часто применяемую на практике часть этого языка образуют универсальные хорновские предложения, на которых основаны языки логического программирования. Этот факт связан с двумя обстоятельствами:

1. всякое непротиворечивое эффективное множество универсальных хорновских предложений имеет позитивно представимую модель;
2. семантика этой модели заключена в устройстве инициальной модели данного множества предложений, которая всегда существует и, более того, существует алгоритм извлечения ее эффективной реализации из синтаксического описания.

Эти факты являются классическими в математической логике, поэтому определение границ применимости данного языка, вопросы определимости моделей в классах их гомоморфных образов (инициальная семантика — строение свободной системы соответствующего ранга), а также о числе реализаций (эффективных, поскольку ничто другое нельзя считать реализацией в рамках идеологии Computer Science) являются основополагающими в этой парадигме программирования. Согласно этой парадигме алгоритм должен иметь не императивный, а декларативный характер, и решение задачи должно заключаться не в описании конкретных процедур достижения цели, а в формулировке желаемой цели, при предоставлении поиска реализующей процедуры самой машине (универсальному алгоритму), предпринимающему эти попытки, исходя из синтаксического материала описания модели данных.

Вопросы о числе эффективных реализаций (с точностью до вычислимой эквивалентности) входят в число принципиальных вопросов теории вычислимо представимых моделей и теории спецификаций программ. Например, как заметил С. С. Гончаров, для классических аксиом Пеано, описывающих стандартную модель арифметики, эта стандартная модель является единственной (с точностью до изоморфизма) среди тех, которые имеют позитивные представления. Более того, для аксиоматики арифметики С. С. Гончарова [1], в которой определен естественный линейный порядок, единственной эффективно реализуемой моделью как в классе позитивно, так и негативно представимых является стандартная модель арифметики [15].

Вообще, любое непротиворечивое множество формул логики первого порядка, имеющее счетно-бесконечную модель, как правило, имеет и массу других, в том числе элементарно эквивалентных, а также элементарно расширяемых счетных моделей. В рамках инициальной семантики, которую мы принимаем, разумно исключить различные расширения и сосредоточиться на гомоморфных образах. Можно принять в определении модели данных пункт, требующий порожденности сигнатурными константами, который автоматически выводит из класса реализаций те, которые нестандартны в данном смысле. В любом случае следует помнить, что говоря о единственности реализации, мы подразумеваем эту единственность для стандартной модели.

Если (M,ν) — нумерованная модель, то через M_ν будем обозначать следующее обогащение модели M счетным множеством констант, каждая из которых не принадлежит сигнатуре модели M:

$$\nu n = c_n.$$

Модель M_ν будем называть *стандартным ν-обогащением* модели M. Далее нумерованная модель (M,ν) и обогащение M_ν модели M будут отождествляться, поскольку в рассматриваемых нами случаях эти представления вычислимо эквивалентны.

Определение 5.1. *Спецификацией* называется любое непротиворечивое перечислимое множество предложений логики первого порядка.

Спецификация называется *хорновской* (*универсальной*, *экзистенциальной*, *индуктивной* и т. д.), если каждое предложение из предложение хорновское (соответственно универсальное, экзистенциальное, индуктивное и т. д.). В работах [30, 31, 34] был поставлен принципиальный вопрос: всякая ли модель данных имеет обогащение, обладающее конечной алгебраической спецификацией? Равносильно, всякая ли конечно-порожденная позитивно представимая модель имеет обогащение, являющееся свободной системой некоторого конечно-базируемого многообразия (квазимногообразия, позитивного класса и т. д.)?

Из теоремы 3.1 и предложения 3.1 вытекает следующая теорема.

Теорема 5.1. *Существует конечно-порожденная позитивно представимая модель, никакое обогащение которой не является инициальной системой ни в каком конечно-базируемом многообразии* (*квазимногообразии, заданном однопосылочными квазитождествами, позитивном классе*).

Доказательство. В самом деле, упомянутый пример модели M обладает позитивной нумерацией μ с иммунной характеристической трансверсалью $\mathrm{tr}(\ker(\mu))$. По условию (M,μ) равномерно аппроксимируется негативными моделями. Пусть $\varphi : (M,\mu) \to (N,\nu)$ — один из этих гомоморфизмов. Очевидно,

$$\mathrm{tr}(\ker(\nu)) \subseteq \mathrm{tr}(\ker(\mu)),$$

однако в силу негативности ν характеристическая трансверсаль $\mathrm{tr}(\ker(\nu))$ перечислима, а значит, она конечна (т. к. $\mathrm{tr}(\ker(\mu))$ иммунна). Следовательно, M финитно аппроксимируема моделями, в которых реализуется любое перечислимое множество ДИП-предложений, выполняющихся в M. Отсюда следует вычислимость M. Противоречие. □

Таким образом, выразительная мощность естественных фрагментов языка логики предикатов первого порядка с хорошими интерпретациями оказывается недостаточной для адекватного алгебраического описания класса всех моделей данных.

5.2. Универсальная спецификация с единственной эффективной реализацией. Пусть (M, ν) — позитивная модель, Φ — универсальная хорновская спецификация в сигнатуре модели M, реализующаяся в M. Тогда, очевидно, Φ реализуется и в M_ν. Н. Х. Касымов показал в [14], что если Φ не реализуется ни в каком эффективном гомоморфном образе модели M_ν, то ν — вычислимая нумерация. Другими словами, если (M, ν) — позитивная невычислимая модель и Φ — универсальная хорновская спецификация, реализующаяся в M, то в классе Φ-моделей содержатся собственные позитивно представимые гомоморфные образы M.

Следовательно, никакую позитивную невычислимую модель нельзя выделить в классе ее собственных позитивных гомоморфных образов никакой универсальной хорновской спецификацией.

Известно также, что никакую позитивную невычислимую модель нельзя выделить в классе ее собственных гомоморфных образов никакой универсальной спецификацией (см. [14]).

Сказанное выше поставило проблему определения тонкой грани (если она существует) между выразительными возможностями универсальных хорновских и универсальных спецификаций в рамках проблемы определимости модели в классе ее гомоморфных образов (см. [14, проблема № 13]). Иначе говоря, можно ли в принципе выделить позитивную невычислимую модель в классе ее собственных эффективных гомоморфных образов подходящей универсальной спецификацией?

Теорема 5.2. *Существует позитивно представимая модель M, не обладающая вычислимыми представлениями, которая выделяется в классе своих собственных позитивно представимых гомоморфных образов подходящей универсальной спецификацией.*

Доказательство. Пусть A — простое не гиперпростое множество, $d_0, d_1, \ldots$ — сильная таблица для дополнения A, т. е. процедура построения каждого d_i по каноническим индексам вычислима (d_i не пересекается с d_j для различных i, j, и для каждого i множество d_i содержит элемент из дополнения A). Можно считать, что семейство d_i покрывает весь натуральный ряд ω, каждое d_i имеет вид

$$y + 1, y + 2, \ldots, y + f(i),$$

где вычислимая функция f определяет мощность множеств d_i, т. е.

$$f(i) = \mathrm{card}(d_i)$$

для каждого i, и все числа из предыдущего (по номерам) множества меньше всех чисел из последующего. Кроме того, можно считать, что каждый член сильной таблицы содержит как минимум два элемента из дополнения A.

Определим неформальную процедуру построения вычислимого дерева T на ω следующим образом.

Обозначим d_0 через $\{x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^{f(0)}\}$. Эти числа — единственные минимальные в T. Пусть $z_0, \ldots, z_m$ — все максимальные в T элементы, построенные на предыдущем шаге, расположенные в порядке возрастания как натуральные числа, k — номер множества из сильной таблицы, содержащего число $z_m + 1$. Определим $T(z_0, x)$ для всех x из d_k, $T(z_1, x)$ для всех x из d_{k+1}, $\ldots$, $T(z_m, x)$ для всех x из d_{k+m}. Рефлексивное и транзитивное замыкание данного множества завершает процедуру.

По построению, если $T(x, y) \& T(x, z) \& T(y, u) \& T(z, u)$, то $T(y, z) \vee T(z, y)$, т. е. T — дерево. Очевидно, оно вычислимо.

Теперь определим множество B как совокупность $\{x | x \in A \vee \exists y \in A(T(y, x))\}$.

Лемма 5.1. *B — простое не гиперпростое множество.*

Доказательство. В d_0 есть элемент из дополнения A. Над ним (в смысле частичного порядка, определяющего дерево T) есть минимум два элемента из дополнения A. Рассуждая таким же образом далее, получим континуум ветвей, целиком лежащих в дополнении B. Следовательно, B — перечислимое расширение простого множества A с бесконечным дополнением, т. е. оно простое. Не гиперпростота следует из построения, для которого на каждом шаге явно строится множество, заведомо содержащее числа из дополнения B. □

Зафиксируем разбиение B на две непересекающиеся бесконечные части P и Q. Построим модель $M = (\omega; P, Q, C)$, где P, Q определены выше, а интерпретация I множества $C = \{c_0, c_1, \ldots\}$ определяется стандартным образом: $I(c_n) = n$. Пусть $w_1, w_2, \ldots$ — сильная таблица для дополнения B из построения, т. е. в терминах нашего построения на шаге n конечное множество w_n есть объединение d_k, d_{k+1}, …, d_{k+m}. Определим следующее множество Φ универсальных предложений:

1. $\forall x \forall y((P(x) \vee Q(x)) \& T(x, y)) \to (P(y) \vee Q(y))$;
2. $c_i \neq c_j$ для всех различных i, j;
3. $\forall x((P(x) \to Q(x)) \& (Q(x) \to \neg P(x)))$.

Очевидно, Φ реализуется в M.

Лемма 5.2. *Модель M имеет континуум гомоморфных образов, реализующих Φ, и всякий собственный Φ-образ модели M содержит бесконечное расширение либо отношения P, либо отношения Q.*

Доказательство. Любая ветвь (максимальное линейно упорядоченное подмножество) дерева T, не пересекающаяся с B, может быть континуумом способов разбита на две части, одна из которых расширяет P, а другая Q.

Для доказательства второй части леммы заметим, что всякое собственное расширение отношения P (или Q) содержит элемент из дополнения B (назовем его g), над которым, опять-таки, есть элемент из дополнения B и т. д. Универсальное предложение 1 гарантирует вовлеченность всех элементов над g в процесс расширения хотя бы одного из отношений — P либо Q. Таким образом, любая собственная Φ-реализация модели M содержит бесконечное расширение хотя бы одного из двух основных отношений. □

Для завершения доказательства теоремы покажем, что можно выбрать P и Q так, чтобы они реализовали поставленную перед нами цель.

Лемма 5.3. *Существует такое разложение множества B на две перечислимые части P и Q, что всякое перечислимое расширение множества P (соответственно Q), не пересекающееся с Q (соответственно с P) отличается от P (от Q) на конечное число элементов.*

Доказательство. Применим к множеству B классическую процедуру разложения Фридберга [24] любого перечислимого невычислимого множества на две перечислимые невычислимые части. Пусть это будут P и Q. Согласно построению Фридберга, любое перечислимое расширение множества P (соответственно Q), не пересекающееся с Q (соответственно с P), отличается от P (от Q) на конечное число элементов. Предположим противное. Пусть, например, P' — бесконечное расширение P, не пересекающееся с Q. Тогда из построения Фридберга следует, что разность между P' и P перечислима. Но B, по лемме 5.1, простое, а значит, его дополнение иммунно. Противоречие. Аналогично рассматриваются и расширения Q. □

Таким образом, собственное расширение любого из отношений P или Q в модели M, реализующее Φ, согласно лемме 5.2 является бесконечным. По лемме 5.3 никакое из этих расширений не является перечислимым, т. е. все эти гомоморфные образы не имеют эффективных представлений. □

Уникальность модели из теоремы 5.2 демонстрирует следующий факт.

Следствие 5.1. *Существуют позитивно представимая модель M и ее универсальная спецификация Φ со следующими свойствами*:

1. *M не имеет вычислимого представления*;

2. *всякая позитивно представимая Ф-модель, построенная из констант, изоморфна M*;
3. *M изоморфно вложима во всякую позитивно представимую Ф-модель.*

Заметим, что теорему 5.2 можно усилить.

Следствие 5.2. *Существует позитивно представимая модель, не обладающая вычислимыми представлениями, которая выделяется в классе своих собственных позитивно представимых гомоморфных образов подходящей бескванторной спецификацией.*

Очевидно, что такая спецификация не может быть хорновской.

Таким образом, язык универсальных спецификаций оказывается существенно богаче языка универсальных хорновских предложений с точки зрения адекватного описания эффективно представимых моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гончаров С. С.* Модели данных и языки их описаний// Выч. сист. (Тр. ИМ СО АН СССР). — 1985. — *107*. — С. 52–70.
2. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. — Новосибирск: Научная книга, 1999.
3. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. — М.: Наука, 1977.
4. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. — М.: Наука, 1980.
5. *Касымов Н. Х.* Об алгебрах с финитно аппроксимируемыми позитивно представимыми обогащениями// Алгебра и логика. — 1987. — *26*, № 6. — С. 715–730.
6. *Касымов Н. Х.* Позитивные алгебры с конгруэнциями конечного индекса// Алгебра и логика. — 1991. — *30*, № 3. — С. 293–305.
7. *Касымов Н. Х.* Позитивные алгебры со счетными решетками конгруэнций// Алгебра и логика. — 1992. — *31*, № 1. — С. 21–37.
8. *Касымов Н. Х.* Позитивные алгебры с нетеровыми решетками конгруэнций// Сиб. мат. ж. — 1992. — *33*, № 2. — С. 181–185.
9. *Касымов Н. Х.* О числе конгруэнций алгебр над простыми множествами// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 150–152.
10. *Касымов Н. Х.* О гомоморфизмах на негативные алгебры// Алгебра и логика. — 1992. — *31*, № 2. — С. 132–144.
11. *Касымов Н. Х.* Аксиомы отделимости и разбиения натурального ряда// Сиб. мат. ж. — 1993. — *34*, № 3. — С. 81–85.
12. *Касымов Н. Х.* Нумерованные алгебры с равномерно рекурсивно отделимыми классами// Сиб. мат. ж. — 1993. — *34*, № 5. — С. 85–102.
13. *Касымов Н. Х.* Об алгебрах над негативными эквивалентностями// Алгебра и логика. — 1994. — *33*, № 1. — С. 76–80.
14. *Касымов Н. Х.* Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры// Усп. мат. наук. — 1996. — *51*, № 3. — С. 145–176.
15. *Касымов Н. Х.* О вычислимости негативных представлений стандартной модели арифметики Гончарова// Тезисы докладов Межд. конф. «Алгебра, анализ и квантовая вероятность». — Ташкент, 2015. — С. 117–119.
16. *Касымов Н. Х.* О гомоморфизмах на эффективно отделимые алгебры// Сиб. мат. ж. — 2016. — *57*, № 1. — С. 47–66.
17. *Касымов Н. Х., Дадажанов Р. Н.* Негативные плотные линейные порядки// Сиб. мат. ж. — 2017. — *58*, № 6. — С. 1306–1331.
18. *Касымов Н. Х., Ибрагимов Ф. Н.* Структурная характеризация рекурсивно отделимых моделей// Докл. АН РУз. — 1998. — № 11. — С. 14–16.
19. *Касымов Н. Х., Морозов А. С.* Об определимости линейных порядков над негативными эквивалентностями// Алгебра и логика. — 2016. — *55*, № 1. — С. 37–57.
20. *Мальцев А. И.* К общей теории алгебраических систем// Мат. сб. — 1954. — *35*, № 1. — С. 3–20.
21. *Мальцев А. И.* Конструктивные алгебры. I// Усп. мат. наук. — 1961. — *16*, № 3. — С. 3–60.
22. *Мальцев А. И.* Позитивные и негативные нумерации// Докл. АН СССР. — 1965. — *160*, № 2. — С. 278–280.
23. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.
24. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. — М.: Наука, 1986.
25. *Мартин-Леф П.* Очерки по конструктивной математике. — М.: Мир, 1975.
26. *Успенский В. А.* О вычислимых операциях// Докл. АН СССР. — 1955. — *103*, № 5. — С. 773–776.

27. *Успенский В. А.* Системы перечислимых множеств и их нумерации// Докл. АН СССР. — 1955. — *105*, № 6. — С. 1155–1158.
28. *Baur W.* Rekursive algebren mit kettenbedingungen// Z. Math. Logik Grundl. Math. — 1974. — *20.* — С. 37–46.
29. *Baur W.* Uber recursive strukturen// Invent. Math. — 1974. — *23*, № 2. — С. 89–95.
30. *Bergstra J. A., Tucker J. V.* A characterization of computable data types by means of a finite, equational specification method// Lecture Notes in Comput. Sci. — 1980. — *85.* — С. 76–90.
31. *Broy M., Dosch W., Partsch H., Pepper P., Wirsing M.* Existential quantifiers in abstract data types// Lecture Notes in Comput. Sci. — 1979. — *71.* — С. 73–81.
32. *Feiner L.* Hierarchies of Boolean algebras// J. Symb. Logic. — 1970. — *35*, № 2. — С. 365–373.
33. *Fokina E. B., Khoussainov B., Semukhin P. D.* Linear orders realized by C.E. equivalence relations// J. Symb. Logic. — 2016. — *81*, № 2. — С. 463–482.
34. *Kamin S.* Some definitions for algebraic data type specifications// SIGPLAN Notes. — 1979. — *14*, № 3. — С. 28–37.
35. *Khoussainov B., Slaman T., Semukhin P.* $\prod_1^0$-presentasions of algebras// Arch. Math. Logic. — 2006. — *45*, № 6. — С. 769–781.
36. *Morozov A. S., Truss J. K.* On computable automorphisms of the rational numbers// J. Symb. Logic. — 2001. — *66*, № 3. — С. 1458–1470.
37. *Nerode A.* General topology and partial recursive functionals// Talks Cornell Summ. Inst. Symb. Log. — Cornell, 1957. — С. 247–251.

Н. Х. Касымов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 4
E-mail: nadim59@mail.ru

Ф. Н. Ибрагимов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 4
E-mail: farkh-i@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-682-705 UDC 510.5+510.6+512.57+519.68

Computably Separable Models

 N. Kh. Kasymov, F. N. Ibragimov

Abstract. We state fundamental results of structural theory of computably separable models and consider applications of this theory to solution of some actual problems of the theory of effective linear orders and theoretical informatics.

REFERENCES

1. S. S. Goncharov, “Modeli dannykh i yazyki ikh opisaniy” [Data models and languages for their description], *Vych. sist.* (*Tr. IM SO AN SSSR*) [Comput. Syst. (Proc. Inst. Math. Sib. Branch Acad. Sci. USSR)], 1985, **107**, 52–70 (in Russian).
2. S. S. Goncharov and Yu. L. Ershov, *Konstruktivnye modeli* [Constructive Models], Nauchnaya kniga, Novosibirsk, 1999 (in Russian).
3. Yu. L. Ershov, *Teoriya numeratsiy* [Numeration Theory], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
4. Yu. L. Ershov, *Problemy razreshimosti i konstruktivnye modeli* [Solvability Problems and Constructive Models], Nauka, Moscow, 1980 (in Russian).
5. N. Kh. Kasymov, “Ob algebrakh s finitno approksimiruemymi pozitivno predstavimymi obogashcheniyami” [On algebras with finitely approximable positively representable enrichments], *Algebra i logika* [Algebra Logic], 1987, **26**, No. 6, 715–730 (in Russian).

6. N. Kh. Kasymov, "Pozitivnye algebry s kongruentsiyami konechnogo indeksa" [Positive algebras with congruences of finite index], *Algebra i logika* [Algebra Logic], 1991, **30**, No. 3, 293–305 (in Russian).
7. N. Kh. Kasymov, "Pozitivnye algebry so schetnymi reshetkami kongruentsiy" [Positive algebras with countable congruence lattices], *Algebra i logika* [Algebra Logic], 1992, **31**, No. 1, 21–37 (in Russian).
8. N. Kh. Kasymov, "Pozitivnye algebry s neterovymi reshetkami kongruentsiy" [Positive algebras with Noetherian congruence lattices], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1992, **33**, No. 2, 181–185 (in Russian).
9. N. Kh. Kasymov, "O chisle kongruentsiy algebr nad prostymi mnozhestvami" [On the number of congruences of algebras over simple sets], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1992, **52**, No. 2, 150–152 (in Russian).
10. N. Kh. Kasymov, "O gomomorfizmakh na negativnye algebry" [Homomorphisms onto negative algebras], *Algebra i logika* [Algebra Logic], 1992, **31**, No. 2, 132–144 (in Russian).
11. N. Kh. Kasymov, "Aksiomy otdelimosti i razbieniya natural'nogo ryada" [Separation axioms and partitions of the set of natural numbers], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1993, **34**, No. 3, 81–85 (in Russian).
12. N. Kh. Kasymov, "Numerovannye algebry s ravnomerno rekursivno otdelimymi klassami" [Enumerated algebras with uniformly recursive-separable classes], *Sib. mat. zh.* [Sib. mat. zh.], 1993, **34**, No. 5, 85–102 (in Russian).
13. N. Kh. Kasymov, "Ob algebrakh nad negativnymi ekvivalentnostyami" [Algebras over negative equivalences], *Algebra i logika* [Algebra Logic], 1994, **33**, No. 1, 76–80 (in Russian).
14. N. Kh. Kasymov, "Rekursivno otdelimye numerovannye algebry" [Recursively separable enumerated algebras], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1996, **51**, No. 3, 145–176 (in Russian).
15. N. Kh. Kasymov, "O vychislimosti negativnykh predstavleniy standartnoy modeli arifmetiki Goncharova" [On computability of negative representations of the Goncharov standard model of arithmetics], Proc. Int. Conf. «Algebra, analiz i kvantovaya veroyatnost'» [Algebra, Analysis and Quantum Probability], Tashkent, 2015, 117–119 (in Russian).
16. N. Kh. Kasymov, "O gomomorfizmakh na effektivno otdelimye algebry" [Homomorphisms onto effectively separable algebras], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 2016, **57**, No. 1, 47–66 (in Russian).
17. N. Kh. Kasymov and R. N. Dadazhanov, "Negativnye plotnye lineynye poryadki" [Negative dense linear orders], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 2017, **58**, No. 6, 1306–1331 (in Russian).
18. N. Kh. Kasymov and F. N. Ibragimov, "Strukturnaya kharakterizatsiya rekursivno otdelimykh modeley" [Structure characterization of the recursively separable models], *Dokl. AN RUz* [Rep. Acad. Sci. Resp. Uzbekistan], 1998, No. 11, 14–16 (in Russian).
19. N. Kh. Kasymov and A. S. Morozov, "Ob opredelimosti lineynykh poryadkov nad negativnymi ekvivalentnostyami" [Definability of linear orders over negative equivalences], *Algebra i logika* [Algebra Logic], 2016, **55**, No. 1, 37–57 (in Russian).
20. A. I. Mal'tsev, "K obshchey teorii algebraicheskikh sistem" [To general theory of algebraic systems], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1954, **35**, No. 1, 3–20 (in Russian).
21. A. I. Mal'tsev, "Konstruktivnye algebry. I" [Constructive algebras. I], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1961, **16**, No. 3, 3–60 (in Russian).
22. A. I. Mal'tsev, "Pozitivnye i negativnye numeratsii" [Positive and negative numerations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1965, **160**, No. 2, 278–280 (in Russian).
23. A. I. Mal'tsev, *Algebraicheskie sistemy* [Algebraic Systems], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
24. A. I. Mal'tsev, *Algoritmy i rekursivnye funktsii* [Algorithms and Recursive Functions], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
25. P. Martin-Lef, *Ocherki po konstruktivnoy matematike* [Sketches on Constructive Mathematics], Mir, Moscow, 1975 (in Russian).
26. V. A. Uspenskiy, "O vychislimykh operatsiyakh" [On computable operations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1955, **103**, No. 5, 773–776 (in Russian).
27. V. A. Uspenskiy, "Sistemy perechislimykh mnozhestv i ikh numeratsii" [Systems of countable sets and their numerations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1955, **105**, No. 6, 1155–1158 (in Russian).
28. W. Baur, "Rekursive algebren mit kettenbedingungen," *Z. Math. Logik Grundl. Math.*, 1974, **20**, 37–46.
29. W. Baur, "Uber recursive strukturen," *Invent. Math.*, 1974, **23**, No. 2, 89–95.
30. J. A. Bergstra and J. V. Tucker, "A characterization of computable data types by means of a finite, equational specification method," *Lecture Notes in Comput. Sci.*, 1980, **85**, 76–90.
31. M. Broy, W. Dosch, H. Partsch, P. Pepper, and M. Wirsing, "Existential quantifiers in abstract data types," *Lecture Notes in Comput. Sci.*, 1979, **71**, 73–81.
32. L. Feiner, "Hierarchies of Boolean algebras," *J. Symb. Logic*, 1970, **35**, No. 2, 365–373.
33. E. B. Fokina, B. Khoussainov, and P. D. Semukhin, "Linear orders realized by C.E. equivalence relations," *J. Symb. Logic*, 2016, **81**, No. 2, 463–482.

34. S. Kamin, “Some definitions for algebraic data type specifications,” *SIGPLAN Notes*, 1979, **14**, No. 3, 28–37.
35. B. Khoussainov, T. Slaman, and P. Semukhin, “$\prod_1^0$-presentasions of algebras,” *Arch. Math. Logic*, 2006, **45**, No. 6, 769–781.
36. A. S. Morozov and J. K. Truss, “On computable automorphisms of the rational numbers,” *J. Symb. Logic*, 2001, **66**, No. 3, 1458–1470.
37. A. Nerode, “General topology and partial recursive functionals,” *Talks Cornell Summ. Inst. Symb. Log.*, Cornell, 1957, 247–251.

N. Kh. Kasymov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: nadim59@mail.ru

F. N. Ibragimov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: farkh-i@yandex.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 4 (2018). С. 706–722

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-706-722 УДК 517.982

О КОМПЛЕКСИФИКАЦИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ И ЕЕ ПРОЯВЛЕНИЯХ В ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛОВ БОХНЕРА И ПЕТТИСА

© 2018 г. **М. Е. ЛУНА-ЭЛИЗАРРАРАС, Ф. РАМИРЕЗ-РЕЙЕС, М. ШАПИРО**

Аннотация. Данная работа является продолжением нашей работы [12], в которой рассматривались линейные пространства в следующих двух случаях: вещественное пространство допускает умножение на комплексные скаляры без изменения самого множества; вещественное пространство вложено в более широкое множество с умножением на комплексные скаляры. Мы также изучили, как они проявляются в случае, когда исходное пространство обладает дополнительными структурами: топологией, нормой, скалярным произведением, равно как и то, что происходит с линейными операторами, действующими в таких пространствах. Изменение линейности линейных пространств выявляет несколько довольно тонких свойств, не столь очевидных в случае, когда множество скаляров остается неизменным. В настоящей работе мы следуем той же идее, теперь уже при рассмотрении интегралов Бохнера и Петтиса для функций, принимающих значения в вещественных или комплексных банаховых и гильбертовых пространствах. В итоге это приводит нас к изучению сильных и слабых случайных величин со значениями в вещественных и комплексных банаховых и гильбертовых пространствах, в частности, к некоторым свойствам их математических ожиданий.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Данная работа является продолжением нашей предыдущей работы [12]; обе были вдохновлены работой [26], в которой авторы изучали некоторые явления для случайных величин, возникающие при вложении области, из которой берутся эти величины, т. е. гильбертова пространства, в более широкое комплексное гильбертово пространство, или когда данная область, будучи комплексным гильбертовым пространством, допускает существование «случайных собственных векторов». Более детальную информацию можно найти во введении к работе [12].

В [12] мы рассматривали линейные пространства в следующих четырех ситуациях: вещественное пространство допускает умножение на комплексные скаляры без изменения самого множества; вещественное пространство вложено в более широкое множество с умножением на комплексные скаляры; комплексное пространство имеет инволюцию и, таким образом, содержит «вещественные» и «мнимые» элементы; комбинация предыдущих ситуаций. Также мы изучили, как они проявляются в случае, когда исходное пространство обладает дополнительными структурами: топологией, нормой, скалярным произведением, равно как и то, что происходит с линейными операторами, действующими в таких пространствах.

В настоящей работе мы развиваем результаты, полученные в [12], и устанавливаем связи между интегралами Бохнера и Петтиса для функций, принимающих значения в вещественных и комплексных банаховых и гильбертовых пространствах. Проведенный анализ мы применяем к изучению сильных и слабых случайных величин со значениями в вещественных и комплексных банаховых и гильбертовых пространствах, в частности, некоторых свойств их математических ожиданий.

Необходимо заметить, что за работой [26] последовала работа [24], в которой вместо комплексных скаляров рассматриваются кватернионные. Наш подход в этом отношении будет опубликован позднее, где мы частично применим техники, разработанные в [4, 13, 14, 16]. Также отметим, что рассмотрение иных классов скаляров, гиперболических и бикомплексных чисел можно найти в [15].

Стоит упомянуть и о том, что исследование комплексификации вещественных линейных пространств содержится в работах М. Риса [18] и Г. О. Торина [23], поскольку во многих областях математики (например, в теории интерполяции, квантовой механике или теории стохастических процессов) она необходима для решения определенных задач. Данная тема вызывала интерес и в последующем, см., например, работы И. Э. Вербицкого и П. П. Середы [1, 2], Г. А. Сухомлинова [20], А. Дефанта [5], Дж. И. Кривина [10, 11] и Т. Фигеля, Т. Иванца и А. Пельтшински [7]. Также см. книгу А. Зигмунда [27].

2. Пространства функций со значениями в линейных пространствах

2.1. Внутренняя комплексификация. Начнем с напоминания о том, что $\mathbb{R}$-линейное пространство X допускает умножение на комплексные скаляры тогда и только тогда, когда существует автоморфизм u пространства X такой, что $u^2 = -Id_X$ — тождественный автоморфизм, т. е. u выполняет роль умножения на $\mathbf{i}$. В этом случае X называется *внутренне комплексифицируемым*, а возникающее $\mathbb{C}$-линейное пространство называется *внутренней алгебраической комплексификацией* пространства X. Автоморфизм u носит название «*комплексифицирующего автоморфизма*».

Пусть Ω — это произвольное непустое множество, X — $\mathbb{R}$-линейное пространство. Рассмотрим множество

$$\Phi := \{\phi |\ \phi : \Omega \to X\}. \tag{2.1}$$

С поточечным сложением и умножением на вещественные скаляры Φ превращается в вещественное линейное пространство. И хотя мы заинтересованы в изучении пространств X с большим количеством структур, но даже на таком общем уровне можно сделать некоторое утверждение.

Теорема 2.1. *При соблюдении вышеизложенных условий и предположении, что X допускает комплексифицирующий автоморфизм u, множество Φ также допускает внутреннюю комплексификацию.*

Доказательство. Определим отображение $u_\Phi : \Phi \to \Phi$ как

$$u_\Phi(\phi) := u \circ \phi \quad \forall\ \phi \in \Phi.$$

Так как u обратим, то u_Φ является взаимно-однозначным отображением. Это очевидным образом подтверждает, что u_Φ обладает всеми необходимыми свойствами. □

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, однако можно делать выводы, «управляя» постоянными функциями в Φ. Прежде всего, возьмем $x \in X$ и соответствующую постоянную функцию в Φ

$$\psi_x : \omega \in \Omega \mapsto x \in X.$$

Определим множество

$$C_\Phi := \{\phi \in \Phi \mid \phi \text{ является постоянной}\}$$

и отображение $\varphi : X \to C_\Phi$, заданное как

$$\varphi(x) := \psi_x.$$

Это отображение является биективным $\mathbb{R}$-линейным отображением. В самом деле:

- $\varphi(x + y) = \psi_{x+y} = \psi_x + \psi_y = \varphi(x) + \varphi(y)$.
- Даны $x \in X$, $a \in \mathbb{R}$, и тогда

$$\varphi(ax) = \psi_{ax} = a\psi_x = a\varphi(x).$$

- Биективность φ очевидна.

Конечно, обратное к φ отображение φ^{-1} из C_Φ в X также является $\mathbb{R}$-линейным.

Теорема 2.2. *Пусть X — вещественное линейное пространство и Φ — такое же, как в* (2.1). *Если Φ допускает комплексифицирующий автоморфизм u_Φ, переводящий постоянные функции в постоянные функции, то X допускает комплексифицирующий автоморфизм.*

Доказательство. Вспомним, что автоморфизм u_Φ определяет на Φ умножение на $\mathbf{i}$, а именно,

$$u_\Phi(\phi) = \mathbf{i}\phi \quad \forall \phi \in \Phi.$$

Тот факт, что u_Φ переводит постоянные функции из Φ в постоянные функции, означает, что для любого $x \in X$ существует $\widehat{x} \in X$ такой, что

$$u_\Phi(\psi_x) = \psi_{\widehat{x}}$$

т. е.

$$u_\Phi \circ \varphi(x) = \varphi(\widehat{x}).$$

Зададим $u : X \to X$ как

$$u(x) := (\varphi^{-1} \circ u_\Phi \circ \varphi)(x) := \widehat{x}.$$

Таким образом, u является $\mathbb{R}$-линейным отображением и удовлетворяет

$$u^2 = (\varphi^{-1} \circ u_\Phi \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ u_\Phi \circ \varphi) = -Id_X,$$

следовательно, отображение u — комплексифицирующий автоморфизм для X. □

Если X — это вещественное линейное пространство, не допускающее комплексифицирующий автоморфизм, то по теореме 2.2 существуют два возможных варианта для пространства функций Φ: оно либо не допускает комплексифицирующий автоморфизм, либо допускает, но при этом комплексифицирующий автоморфизм не переводит постоянные функции в постоянные функции.

В качестве примера рассмотрим множество $\Omega = \{1, 2\}$ и вещественное линейное пространство $X = \mathbb{R}$. В этом случае вещественное линейное пространство

$$\Phi = \{f : \{1, 2, \} \to \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^2 \tag{2.2}$$

допускает комплексифицирующий автоморфизм

$$u_\Phi(x, y) := (-y, x).$$

Пусть задана постоянная функция $\psi_a \in \Phi$, тогда, используя (2.2), получаем, что

$$\psi_a = (a, a)$$

и

$$u_\Phi(\psi_a) = (-a, a),$$

что не является постоянной функцией. Этот пример противоречит тому факту, что $X = \mathbb{R}$ не допускает комплексифицирующий автоморфизм.

2.2. Внешняя комплексификация. Вспомним, что внешняя комплексификация вещественного линейного пространства X предполагает поиск более широкого комплексного пространства $\widehat{X}_\mathbb{C}$ такого, что $X \subset \widehat{X}_\mathbb{C}$. Обычный способ построения внешней комплексификации (см. [12, п. 2.2]) заключается в рассмотрении прямой суммы $X \oplus X$ (которая является $\mathbb{R}$-линейным пространством) и определении операции умножения на комплексные скаляры следующим образом:

$$(a + \mathbf{i}b) \cdot (x, y) := (ax - by, ay + bx), \quad \forall (x, y) \in X \oplus X,\ a + \mathbf{i}b \in \mathbb{C}.$$

В силу того, что определена операция умножения на комплексные скаляры, $X \oplus X$ можно обозначить как $\widehat{X}_\mathbb{C}$. Также известно, что подмножество

$$\{(x, 0) \mid x \in X\}$$

является $\mathbb{R}$-линейным пространством, изоморфным X; подмножество $\{(0, x) \mid x \in X\}$ можно записать как

$$\mathbf{i} \cdot \{(x, 0) \mid x \in X\},$$

и, ассоциируя $\{(x, 0) \mid x \in X\}$ с X, получаем изоморфизм двух $\mathbb{C}$-линейных пространств:

$$\widehat{X}_\mathbb{C} = X + \mathbf{i}X.$$

Пространство функций Φ, заданное в (2.1), является $\mathbb{R}$-линейным пространством. Таким образом, мы вправе рассмотреть его внешнюю комплексификацию

$$\widehat{\Phi}_{\mathbb{C}} = \Phi + \mathbf{i}\Phi;$$

тогда всякий элемент $\phi_1 + \mathbf{i}\phi_2 \in \Phi$ умножается на произвольное комплексное число $a + \mathbf{i}b$ по правилу:

$$(a+ib)(\phi_1 + i\phi_2) = (a\phi_1 - b\phi_2) + i(a\phi_2 + b\phi_1).$$

3. Интегралы Бохнера и Петтиса для функций со значениями в вещественных и комплексных банаховых пространствах

3.1. Случай внутренней комплексификации. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — это вещественное банахово пространство с комплексифицирующим автоморфизмом u, а $X_{\mathbb{C}}$ — его внутренняя алгебраическая комплексификация. Имеются примеры, показывающие, что норма $\|\cdot\|$ в X необязательно совместима с комплексной структурой $X_{\mathbb{C}}$ (см. [12, п. 4]). Однако существуют некоторые способы определения новых норм на X, которые уже будут совместимы с комплексной структурой. Рассмотрим следующую формулу:

$$\|x\|_{\mathbb{C}} := \sup_{\theta}\{\|x\cos\theta + u(x)\sin\theta\| : \theta \in [0, 2\pi]\ \}, \tag{3.1}$$

Следующее утверждение было доказано в [3]. Для удобства приведем доказательство и здесь.

Лемма 3.1. *Формула* (3.1) *задает норму на внутренней комплексификации* $X_{\mathbb{C}}$ *пространства* X; *кроме того, если* u *непрерывен, то*

$$\|x\| \leqslant \|x\|_{\mathbb{C}} \leqslant (1 + \|u\|)\|x\|. \tag{3.2}$$

Доказательство. Доказательство того, что (3.1) обладает всеми свойствами нормы на $X_{\mathbb{C}}$, является прямым, кроме доказательства факта, что $\forall\lambda \in \mathbb{C}$

$$\|\lambda x\|_{\mathbb{C}} = |\lambda| \cdot \|x\|_{\mathbb{C}}. \tag{3.3}$$

Возьмем $\lambda \in \mathbb{C}$ и представим

$$\lambda = |\lambda| \cdot (\cos\theta_\lambda + \mathbf{i}\sin\theta_\lambda),$$

тогда

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\|_{\mathbb{C}} &= \||\lambda| \cdot (\cos\theta_\lambda + \mathbf{i}\sin\theta_\lambda) \cdot x\|_{\mathbb{C}} = |\lambda| \cdot \|x\cos\theta_\lambda + u(x)\sin\theta_\lambda\|_{\mathbb{C}} = \\
&= |\lambda| \cdot \sup_{\theta}\{\|(x\cos\theta_\lambda + u(x)\sin\theta_\lambda)\cdot\cos\theta + u(x\cos\theta_\lambda + u(x)\sin\theta_\lambda)\cdot\sin\theta\| : \theta \in [0, 2\pi]\} = \\
&= |\lambda| \cdot \sup_{\theta}\{\|x(\cos\theta_\lambda\cdot\cos\theta - \sin\theta_\lambda\cdot\sin\theta) + u(x)(\sin\theta_\lambda\cdot\cos\theta + \cos\theta_\lambda\cdot\sin\theta\| : \theta \in [0, 2\pi]\} = \\
&= |\lambda| \cdot \sup_{\theta}\{\|x\cos(\theta_\lambda + \theta) + u(x)\sin(\theta_\lambda + \theta)\| : \theta \in [0, 2\pi]\} = \\
&= |\lambda| \cdot \sup_{\widetilde{\theta}}\left\{\left\|x\cos\widetilde{\theta} + u(x)\sin\widetilde{\theta}\right\| : \widetilde{\theta} \in [0, 2\pi]\right\} = |\lambda| \cdot \|x\|_{\mathbb{C}},
\end{aligned}$$

что доказывает (3.3).

Наконец, чтобы доказать (3.2), отметим сперва, что

$$\|x\| = \|x\cos 0 + u(x)\sin 0\|$$

— это некоторый элемент множества

$$\{\|x\cos\theta + u(x)\sin\theta\| : \theta \in [0, 2\pi]\},$$

тогда

$$\|x\| \leqslant \|x\|_{\mathbb{C}}.$$

Возьмем теперь произвольный $\theta \in [0, 2\pi]$. Так как u непрерывно, получим, что

$$\|x\cos\theta + u(x)\sin\theta\| \leqslant (1 + \|u\|) \cdot \|x\|.$$

$\square$

Замечание 3.1. Если u непрерывно, то из (3.2) можно заключить:

1. если $(X, \|\cdot\|)$ — вещественное банахово пространство, то $(X_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|\mathbb{C})$ — комплексное банахово пространство;
2. нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ порождают эквивалентные топологии;
3. нельзя утверждать, что нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ эквивалентны, потому что понятие эквивалентности норм применимо только к нормам, действующим на линейных пространствах с одинаковыми скалярами.

Обозначим, как обычно, через $\mathcal{B}(X)$ и $\mathcal{B}(X_{\mathbb{C}})$ соответствующие борелевские σ-алгебры. Очевидно, что $(X, \mathcal{B}(X))$ и $(X_{\mathbb{C}}, \mathcal{B}(X_{\mathbb{C}}))$ — измеримые пространства.

В дальнейшем речь пойдет о $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, конечном пространстве с мерой $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, и об X, вещественном нормированном пространстве с непрерывным комплексифицирующим автоморфизмом u.

Как известно, функция $\psi : \Omega \longrightarrow X$ называется простой, если она имеет форму

$$\psi = \sum_{j=1}^{k} v_j \chi_{A_j}$$

где $v_j \in X$, $A_j \in \mathcal{A}$, $j = 1, \ldots, k$ — непересекающиеся множества такие, что $\Omega = \bigcup_{j=1}^{k} A_j$. Интеграл от простой функции ψ по $A \in \mathcal{A}$ определяется как

$$\int_A \psi d\mu = \sum_{j=1}^{k} v_j \ \mu(A \cap A_j).$$

Обозначим через $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}$ множества простых функций из Ω в X и из Ω в $X_{\mathbb{C}}$, соответственно; ясно, что $\mathcal{J}$ — это $\mathbb{R}$-линейное пространство, а $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}$ — $\mathbb{C}$-линейное пространство.

Если задана функция $\psi : \Omega \to X$, записываем $\psi_{\mathbb{C}}$, если X рассматривается как $X_{\mathbb{C}}$. Скажем, что $\psi_{\mathbb{C}}$ — комплексная версия ψ. Очевидно, что значения $\psi_{\mathbb{C}}$ и ψ одинаковы, однако они принадлежат линейным пространствам различной природы, т. е. ψ принадлежит множеству $\{\varphi : \Omega \longrightarrow X \mid \varphi \text{ является функцией}\}$, являющемуся вещественным линейным пространством, а $\psi_{\mathbb{C}}$ принадлежит $\{\varphi_{\mathbb{C}} : \Omega \longrightarrow X_{\mathbb{C}} \mid \varphi_{\mathbb{C}} \text{ является функцией}\}$, которое является комплексным линейным пространством.

Вспомним также следующее определение (см. [19]).

Определение 3.1. Функция $\psi : \Omega \to X$ называется *сильно измеримой*, если существует такая последовательность $\{\psi_n\}$ из $\mathcal{J}$, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n(\omega) - \psi(\omega)\| = 0 \quad \mu\text{-п.в. в } \Omega.$$

Далее приведем аналогичное определение:

Определение 3.2. Функция $\psi_{\mathbb{C}} : \Omega \to X_{\mathbb{C}}$ называется *сильно измеримой*, если существует такая последовательность $\{\psi_{n\mathbb{C}}\}$ из $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}$, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_{n\mathbb{C}}(\omega) - \psi_{\mathbb{C}}(\omega)\|_{\mathbb{C}} = 0 \quad \mu\text{-п.в. в } \Omega.$$

Обозначим через $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ множества всех функций $\psi : \Omega \longrightarrow X$ и $\psi_{\mathbb{C}} : \Omega \longrightarrow X_{\mathbb{C}}$, которые сильно измеримы.

Если заданы $\psi \in \mathcal{B}$ и $\psi_{\mathbb{C}} \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$, возьмем последовательности простых функций $\{\psi_n\}$ и $\{\psi_{n\mathbb{C}}\}$ такими, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n(\omega) - \psi(\omega)\| = 0$$

почти всюду относительно μ (далее будем использовать обозначение «μ-п.в.») и

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_{n\mathbb{C}}(\omega) - \psi_{\mathbb{C}}(\omega)\|_{\mathbb{C}} = 0$$

μ-п.в. в Ω. Вспомним (см. [19]), что интегралы Бохнера от ψ и $\psi_{\mathbb{C}}$ определяются следующим образом:

$$(\mathcal{B})\int\limits_{\Omega}\psi := \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega}\psi_n, \tag{3.4}$$

$$(\mathcal{B})\int\limits_{\Omega}\psi_{\mathbb{C}} := \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega}\psi_{n\mathbb{C}}. \tag{3.5}$$

Как известно, интеграл Бохнера не зависит от выбора последовательности $\{\psi_n\}$ or $\{\psi_{n\mathbb{C}}\}$.

Из уравнения (3.2) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\|\psi_{n\mathbb{C}}(\omega)-\psi_{\mathbb{C}}(\omega)\|_{\mathbb{C}}=0 \text{ тогда и только тогда, когда } \lim_{n\to\infty}\|\psi_n(\omega)-\psi_(\omega)\|=0,$$

а учитывая замечание 3.1, получаем следующую теорему.

Теорема 3.1. *При вышеизложенных условиях ψ является сильно измеримой тогда и только тогда, когда сильно измерима $\psi_{\mathbb{C}}$; кроме того, если задано $A\in\mathcal{A}$, функция ψ интегрируема по Бохнеру на A тогда и только тогда, когда интегрируема по Бохнеру $\psi_{\mathbb{C}}$, и*

$$(\mathcal{B})\int\limits_{A}\psi\ d\mu = (\mathcal{B})\int\limits_{A}\psi_{\mathbb{C}}\ d\mu \quad \forall\ A\in\mathcal{A},$$

где

$$(\mathcal{B})\int\limits_{A}\psi\ d\mu$$

обозначает интеграл Бохнера от ψ на A.

Теперь вспомним понятие слабо измеримых функций. В первую очередь, как обычно, обозначим

$$X^* := \{\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ — вещественная линейная}\},$$

$$X^*_{\mathbb{C}} := \{\varphi : X_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \psi \text{ — комплексная линейная}\}.$$

Пусть даны $\psi\in X^*_{\mathbb{C}}$, $\psi=\psi_1+\mathbf{i}\psi_2$, где $\psi_1,\,\psi_2 : X\longrightarrow\mathbb{R}$. Так как ψ, в частности, $\mathbb{C}$-линейна, имеем:

$$\psi(\mathbf{i}x)=\mathbf{i}\psi(x)=\mathbf{i}(\psi_1(x)+\mathbf{i}\psi_2(x)),$$

или, что эквивалентно,

$$\psi_1(\mathbf{i}x)+\mathbf{i}\psi_2(\mathbf{i}x)=-\psi_2(x)+\mathbf{i}\psi_1(x),$$

откуда

$$\begin{cases}\psi_1(\mathbf{i}x) &= -\psi_2(x),\\ \psi_1(x) &= \psi_2(\mathbf{i}x),\end{cases}$$

что сводится к

$$\psi_2(x)=-\psi_1(\mathbf{i}x). \tag{3.6}$$

С учетом (3.6) и учитывая то, что автоморфизм u играет роль умножения на $\mathbf{i}$, имеем:

$$\psi(x)=\psi_1(x)-\mathbf{i}\psi_1(\mathbf{i}x)=\psi_1(x)-\mathbf{i}(\psi_1\circ u)(x). \tag{3.7}$$

Говоря иначе, существует взаимно-однозначное отношение между X^* и $X^*_{\mathbb{C}}$

$$X^*_{\mathbb{C}}\ni\psi\longleftrightarrow\psi_1\in X^*,$$

определяемое в (3.7).

Напомним еще немного определений.

Определение 3.3. Функция $f:\Omega\longrightarrow X$ является $\mathbb{R}$-*слабо измеримой*, если для любого $\varphi\in X^*$ вещественнозначная функция $\varphi\circ f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ измерима, а именно: существует $\{\varphi_n\}$, последовательность простых функций $\varphi:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ такая, что

$$\lim n\to\infty|\varphi_n(\omega)-(\varphi\circ f)(\omega)|=0$$

μ-п.в. на Ω.

Определение 3.4. Функция $g:\Omega\longrightarrow X_{\mathbb{C}}$ является $\mathbb{C}$-*слабо измеримой*, если для любого $\psi\in X^*_{\mathbb{C}}$ комплекснозначная функция $\psi\circ g:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ измерима.

Определение 3.5. Слабо измеримая функция $f : \Omega \longrightarrow X$ такая, что $x^* \circ f \in L_1$ для всех $x^* \in X^*$, называется *интегрируемой по Петтису*, если для всякого измеримого множества $A \in \mathcal{A}$ существует такой элемент $x_A \in X$, что

$$x^*(x_A) = \int\limits_A x^* \circ f \quad \forall x^* \in X^*.$$

В этом случае элемент x_A называется интегралом Петтиса от f и обозначается как

$$x_A = (\mathcal{P}) \int\limits_A f d\mu.$$

Здесь возникает вопрос: если $f : \Omega \longrightarrow X$ является $\mathbb{R}$-слабо измеримой, является ли функция $f_{\mathbb{C}} : \Omega \longrightarrow X_{\mathbb{C}}$ $\mathbb{C}$-слабо измеримой? Следующая теорема дает положительный ответ на этот вопрос и, помимо этого, устанавливает отношение между соответствующими интегралами Петтиса.

Теорема 3.2. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *определяется, как и ранее. Функция* $\psi : \Omega \longrightarrow X$ *является слабо измеримой тогда и только тогда, когда слабо измерима* $\psi_{\mathbb{C}} : \Omega \longrightarrow X_{\mathbb{C}}$. *Кроме того, на* $A \in \mathcal{A}$ *функции* ψ *и* $\psi_{\mathbb{C}}$ *интегрируются по Петтису одновременно, и*

$$(\mathcal{P}) \int\limits_A \psi_{\mathbb{C}} \, d\mu = (\mathcal{P}) \int\limits_A \psi \, d\mu. \tag{3.8}$$

Доказательство. Пусть дана слабо измеримая ψ, тогда $\varphi^* \circ \psi$ измерима для любых $\varphi^* \in X^*$. Возьмем $\phi^* \in X^*_{\mathbb{C}}$. Из (3.7) знаем их вид:

$$\phi^* = \phi_1^* - \mathbf{i}(\phi_1^* \circ u) \quad \text{при} \quad \phi_1^* \in X^*. \tag{3.9}$$

Очевидно, что $\phi_1^* \circ u \in X^*$, более того,

$$\phi^* \circ \psi_{\mathbb{C}} = (\phi_1^* - \mathbf{i}\phi_1^* \circ u) \circ \psi_{\mathbb{C}} = \phi_1^* \circ \psi - \mathbf{i}(\phi_1^* \circ u) \circ \psi.$$

Из этой зависимости можно заключить, что ψ слабо измерима тогда и только тогда, когда слабо измерима $\psi_{\mathbb{C}}$.

Предположим теперь, что $\psi_{\mathbb{C}}$ — слабо измеримая, а $\phi^* \circ \psi_{\mathbb{C}}$ интегрируема по Лебегу при любых $\phi^* \in X^*_{\mathbb{C}}$, тогда из (3.9) следует, что интегралы

$$\int\limits_A \phi^* \circ \psi_{\mathbb{C}} \, d\mu \quad \text{и} \quad \int\limits_A \phi_1^* \circ \psi \, d\mu, \int\limits_A (\phi_1^* \circ u) \circ \psi \, d\mu$$

существуют одновременно, т. е., $\phi^* \circ \psi_{\mathbb{C}}$ является интегрируемой по Лебегу тогда и только тогда, когда интегрируемы по Лебегу $\phi_1^* \circ \psi$ и $(\phi_1^* \circ u) \circ \psi$.

Предположим, что $\psi_{\mathbb{C}}$ интегрируема по Петтису. Возьмем $A \in \mathcal{A}$ и положим $x_A \in X_{\mathbb{C}}$ таким, что

$$\phi^*(x_A) = \int\limits_A \phi^* \circ \psi_{\mathbb{C}} \qquad \forall \phi^* \in X^*_{\mathbb{C}}.$$

Видим теперь, что x_A из X, и можем утверждать, что

$$\phi(x_A) = \int\limits_A \phi \circ \psi \qquad \forall \phi \in X^*.$$

Действительно, имея $\phi \in X^*$, возьмем

$$\phi^* := \phi - \mathbf{i}(\phi \circ u) \in X^*_{\mathbb{C}},$$

тогда

$$\phi^*(x_A) = \phi(x_A) - \mathbf{i}(\phi \circ u) = \int\limits_A (\phi - \mathbf{i}(\phi \circ u)) \circ \psi = \int\limits_A \phi \circ \psi - \mathbf{i} \int\limits_A (\phi \circ u) \circ \psi,$$

откуда следует

$$\int\limits_A \phi \circ \psi = \phi(x_A).$$

Так как $\phi \in X^*$ и $A \in \mathcal{A}$ были выбраны произвольными, можем заключить, что ψ также интегрируема по Петтису, и что для любого $A \in \mathcal{A}$

$$(\mathcal{P}) \int_A \psi d\mu = (\mathcal{P}) \int_A \psi_{\mathbb{C}} d\mu.$$

Аналогично доказывается и то, что, если ψ интегрируема по Петтису, то интегрируема по Петтису и $\psi_{\mathbb{C}}$, и что справедливо (3.8). $\square$

3.2. Случай внешней комплексификации. Пусть, снова, X — это вещественное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Известно множество норм $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ в $\widehat{X}_{\mathbb{C}}$, которые продолжают исходную норму $\|\cdot\|$ на X, а именно, $\|x\|_{\mathbb{C}} = \|x\|$ для всех $x \in X$. Из того, что $\widehat{X}_{\mathbb{C}}$ допускает разложение $\widehat{X}_{\mathbb{C}} = X + \mathbf{i}X$, немедленно вытекают два следствия. Первое состоит в том, что X можно рассматривать как подмножество $\widehat{X}_{\mathbb{C}}$, а второе — что $\widehat{X}_{\mathbb{C}}$ обладает инволюцией:

$$Inv(x + \mathbf{i}y) := x - \mathbf{i}y \quad \forall x, y \in X.$$

Интересующие нас нормы должны сохраняться при инволюции:

$$\|x + \mathbf{i}y\|_{\mathbb{C}} = \|x - \mathbf{i}y\|_{\mathbb{C}} \qquad \forall x, y \in X. \tag{3.10}$$

В работе [12] было доказано, что норма, определяемая как

$$\|z\|_{\mathbb{C}} = \|x + \mathbf{i}y\|_{\mathbb{C}} := \sup\left\{ \left(\|x\cos\theta - y\sin\theta\|^2 + \|y\cos\theta - x\sin\theta\|^2\right)^{1/2} \mid \theta \in [0, 2\pi] \right\}$$

для любых $z = x + \mathbf{i}y \in \widehat{X}_{\mathbb{C}}$, является нормой в $\mathbb{C}$-линейном пространстве $\widehat{X}_{\mathbb{C}}$ и обладает следующими свойствами:

1. она продолжает исходную норму $\|\cdot\|$ на X;
2. она сохраняет норму инволюции, т. е. удовлетворяет (3.10);
3. $\widehat{X}_{\mathbb{C}}$ с этой нормой является комплексным банаховым пространством.

Теперь рассмотрим топологию, порожденную $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$, и обозначим через $\mathcal{B}(\widehat{X}_{\mathbb{C}})$ борелевскую σ-алгебру на $\widehat{X}_{\mathbb{C}}$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ определяется, как и ранее. Вновь, в силу разложения $\widehat{X}_{\mathbb{C}}$ любая заданная функция $\psi : \Omega \longrightarrow \widehat{X}_{\mathbb{C}}$ принимает вид

$$\psi = \psi_1 + \mathbf{i}\psi_2,$$

где ψ_1, $\psi_2 : \Omega \longrightarrow X$. Тем самым вполне очевидно, что ψ является простой функцией тогда и только тогда, когда ψ_1 и ψ_2 также простые; следовательно, в данном случае ψ и ψ_1, ψ_2 интегрируемы одновременно, а в последнем случае

$$\int_A \psi \, d\mu = \int_A \psi_1 \, d\mu + \mathbf{i} \int_A \psi_2 \, d\mu \quad \forall \, A \in \mathcal{A}.$$

Следующая теорема описывает общую ситуацию.

Теорема 3.3. *При вышеизложенных условиях заданная функция $\psi : \Omega \to \widehat{X}_{\mathbb{C}}$ с разложением*

$$\psi = \psi_1 + \mathbf{i}\psi_2,$$

где $\psi_\ell : \Omega \to X$, $\ell \in \{1, 2\}$, является сильно измеримой тогда и только тогда, когда сильно измеримы ψ_1 и ψ_2. Кроме того, сильно измеримая функция ψ интегрируема по Бохнеру тогда и только тогда, когда интегрируемы по Бохнеру функции ψ_1 и ψ_2, и в этом случае

$$(\mathcal{B}) \int_A \psi \, d\mu = (\mathcal{B}) \int_A \psi_1 \, d\mu + \mathbf{i}(\mathcal{B}) \int_A \psi_2 \, d\mu \quad \forall \, A \in \mathcal{A}.$$

Доказательство. Для сильно измеримой функции ψ существует последовательность функций $\{\psi_n\}$, сходящаяся к ψ μ-п.в. и разложимая в виде

$$\psi_n = \psi_{n1} + \mathbf{i}\psi_{n2}.$$

По определению нормы $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ имеем:

$$\begin{aligned}\|\psi_n(\omega)-\psi(\omega)\|_{\mathbb{C}} &= \|\,(\psi_{n1}(\omega)+\mathbf{i}\psi_{n2}(\omega))-(\psi_1(\omega)+\mathbf{i}\psi_2(\omega))\,\|_{\mathbb{C}} = \\ &= \|\,(\psi_{n1}(\omega)-\psi_1(\omega))+\mathbf{i}\,(\psi_{n2}(\omega)-\psi_2(\omega))\,\|_{\mathbb{C}} = \\ &= \sup\Big\{\big(\|\,(\psi_{n1}(\omega)-\psi_1(\omega))\cos\theta-(\psi_{n2}(\omega)-\psi_2(\omega))\sin\theta\|^2 + \\ &+ \|\,(\psi_{n2}(\omega)-\psi_2(\omega))\cos\theta+(\psi_{n1}(\omega)-\psi_1(\omega))\sin\theta\|^2\big)^{1/2} \mid \theta\in[0,2\pi]\Big\}. \quad (3.11)\end{aligned}$$

Так как $\theta = 0$ дает нам элемент из множества, по которому берется супремум, получим, что

$$\|\psi_{n1}(\omega)-\psi_1(\omega)\|^2+\|\psi_{n2}(\omega)-\psi_2(\omega)\|^2 \leqslant \|\psi_n(\omega)-\psi(\omega)\|_{\mathbb{C}}, \quad (3.12)$$

что доказывает, что функции ψ_1 и ψ_2 являются сильно измеримыми. Аналогично в обратную сторону: если ψ_1 и ψ_2 — сильно измеримые функции, то существуют последовательности функций $\{\psi_{n1}\}$ и $\{\psi_{n2}\}$, которые сходятся к ψ_1 и ψ_2 μ-п.в., соответственно. Тогда, используя свойства нормы $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ и неравенство треугольника, можно непосредственно доказать сходимость последовательности $\{\psi_{n1}+\mathbf{i}\psi_{n2}\}$ к ψ μ-п.в.

Предполагая дополнительно, что ψ интегрируема по Бохнеру, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\int_A \|\psi_n-\psi\|_{\mathbb{C}}\, d\mu = 0 \quad \forall\, A\in\mathcal{A},$$

где ψ_n — простые функции. Из уравнений (3.11) и (3.12) можно сделать вывод, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_A \|\psi_n-\psi\|_{\mathbb{C}}\, d\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\int_A \|\psi_{n\ell}-\psi_\ell\|\, d\mu = 0,$$

для любых $A\in\mathcal{A}$ и $\ell\in\{1,2\}$. Таким образом, интегрируемость функции ψ эквивалентна интегрируемости функций ψ_1 и ψ_2. Отметим, что

$$\left\{\int_A \psi_n\, d\mu\right\} \quad \text{и} \quad \left\{\int_A \psi_{n\ell}\, d\mu\right\}$$

при $\ell = 1,2$ являются последовательностями Коши в $\widehat{X}_{\mathbb{C}}$ и X, соответственно. Следовательно, для любого $A\in\mathcal{A}$ справедливо:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_A \psi_n\, d\mu &= \lim_{n\to\infty}\int_A (\psi_{n1}+\mathbf{i}\psi_{n2})\, d\mu = \lim_{n\to\infty}\left(\int_A \psi_{n1}\, d\mu+\mathbf{i}\int_A \psi_{n2}\, d\mu\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_A \psi_{n1}\, d\mu+\mathbf{i}\lim_{n\to\infty}\int_A \psi_{n2}\, d\mu. \quad (3.13)\end{aligned}$$

Как следствие имеем:

$$(\mathcal{B})\int_A \psi\, d\mu = (\mathcal{B})\int_A \psi_1\, d\mu+\mathbf{i}(\mathcal{B})\int_A \psi_2\, d\mu \quad \forall\, A\in\mathcal{A}.$$

□

Теперь мы хотим установить связь между функцией $\psi:\Omega\longrightarrow\widehat{X}_{\mathbb{C}}$ и ее компонентами ψ_1, $\psi_2:\Omega\longrightarrow X$, где $\psi=\psi_1+\mathbf{i}\psi_2$, в смысле слабой измеримости и интегрируемости по Петтису.

Теорема 3.4. *При вышеизложенных условиях заданная функция $\psi:\Omega\longrightarrow\widehat{X}_{\mathbb{C}}$ с разложением*

$$\psi=\psi_1+\mathbf{i}\psi_2,$$

где ψ_1, $\psi_2:\Omega\longrightarrow X$, является слабо измеримой тогда и только тогда, когда слабо измеримы ψ_1 and ψ_2. Кроме того, ψ интегрируема по Петтису тогда и только тогда, когда интегрируемы по Петтису ψ_1 и ψ_2, и

$$(\mathcal{P})\int_A \psi\, d\mu = (\mathcal{P})\int_A \psi_1\, d\mu+\mathbf{i}(\mathcal{P})\int_A \psi_2\, d\mu \quad \forall\, A\in\mathcal{A}.$$

Доказательство. Возьмем $\psi : \Omega \to \widehat{X}_{\mathbb{C}}$. Для любой $\phi^* \in (\widehat{X}_{\mathbb{C}})^*$ при

$$\phi^* = \phi_1^* + i\phi_2^*,$$

где $\phi_\ell^* : \widehat{X}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$ — вещественные линейные функционалы при $\ell \in \{1, 2\}$, выполняется следующее:

$$\begin{aligned}\phi^* \circ \psi = \phi^* \circ (\psi_1 + \mathbf{i}\psi_2) = (\phi^* \circ \psi_1) + \mathbf{i}(\phi^* \circ \psi_2) = \\ = ((\phi_1^* + \mathbf{i}\phi_2^*) \circ \psi_1) + \mathbf{i}((\phi_1^* + \mathbf{i}\phi_2^*) \circ \psi_2) = (\phi_1^* \circ \psi_1 - \phi_2^* \circ \psi_2) + \mathbf{i}(\phi_1^* \circ \psi_2 + \phi_2^* \circ \psi_1).\end{aligned} \tag{3.14}$$

Из уравнения (3.14) следует, что $\phi^* \circ \psi$ измерима по Лебегу тогда и только тогда, когда функции

$$\phi_1^* \circ \psi_1 - \phi_2^* \circ \psi_2 \quad \text{и} \quad \phi_1^* \circ \psi_2 + \phi_2^* \circ \psi_1 \tag{3.15}$$

измеримы по Лебегу. Таким образом, отсюда немедленно следует, что если ψ_1 и ψ_2 слабо измеримы, то слабо измерима и ψ. Аналогично в обратную сторону: если ψ слабо измерима, докажем, что слабо измеримы ψ_1 и ψ_2. Возьмем $\varphi^* \in X^*$ и определим $\widetilde{\varphi}^* : \widehat{X}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ как

$$\widetilde{\varphi}^*(x_1 + ix_2) := \varphi^*(x_1) + \mathbf{i}\varphi^*(x_2) \tag{3.16}$$

для любых $x_1 + \mathbf{i}x_2 \in \widehat{X}_{\mathbb{C}}$. Можно непосредственно показать, что $\widetilde{\varphi}^*$ является $\mathbb{C}$-линейным функционалом. Предположение о том, что $\phi^* \circ \psi$ интегрируема по Лебегу, вместе с (3.14) приводит к тому, что $\varphi^* \circ \psi_1 - \varphi^* \circ \psi_2$ и $\varphi^* \circ \psi_2 + \varphi^* \circ \psi_1$ измеримы по Лебегу; следовательно, их разность и сумма также измеримы, и, так как φ^* произвольна, это доказывает, что ψ_1 и ψ_2 слабо измеримы. Первая часть доказательства завершена.

Что касается интегрируемости по Лебегу, уравнение (3.14) означает, что интегралы

$$\int\limits_A \phi^* \circ \psi \, d\mu$$

и

$$\int\limits_A (\phi_1^* \circ \psi_1 - \phi_2^* \circ \psi_2) \, d\mu, \quad \int\limits_A (\phi_1^* \circ \psi_2 + \phi_2^* \circ \psi_1) \, d\mu$$

имеют конечные значения одновременно. Этот факт, наравне со схожим рассуждением в предыдущем разделе, позволяет утверждать, что $\phi^* \circ \psi$ интегрируема по Лебегу для любой $\phi^* \in (\widehat{X}_{\mathbb{C}})^*$ тогда и только тогда, когда $\varphi^* \circ \psi_1$ и $\chi^* \circ \psi_2$ интегрируемы по Лебегу для любых φ^*, $\chi^* \in X^*$.

Предположим дополнительно, что ψ интегрируема по Петтису. Тогда для любого заданного $A \in \mathcal{A}$ существует единственный $x_A \in \widehat{X}_{\mathbb{C}}$ такой, что

$$\phi^*(x_A) = \int\limits_A \phi^* \circ \psi \, d\mu \quad \forall \ \phi^* \in \left(\widehat{X}_{\mathbb{C}}\right)^*. \tag{3.17}$$

Из (3.14) имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_A \phi^* \circ \psi \, d\mu = \int\limits_A [(\phi_1^* \circ \psi_1 - \phi_2^* \circ \psi_2) + \mathbf{i}((\phi_1^* \circ \psi_2 + \phi_2^* \circ \psi_1))] \, d\mu = \\ = \int\limits_A (\phi_1^* \circ \psi_1 - \phi_2^* \circ \psi_2) \, d\mu + \mathbf{i} \int\limits_A ((\phi_1^* \circ \psi_2 + \phi_2^* \circ \psi_1)) \, d\mu.\end{aligned} \tag{3.18}$$

С другой стороны, поскольку $x_A = x_{1A} + \mathbf{i}x_{2A}$, выполняется:

$$\begin{aligned}\phi^*(x_A) = \phi^*(x_{1A} + \mathbf{i}x_{2A}) = \phi^*(x_{1A}) + \mathbf{i}\phi^*(x_{2A}) = \\ = (\phi_1^* + \mathbf{i}\phi_2^*)(x_{1A}) + \mathbf{i}(\phi_1^* + \mathbf{i}\phi_2^*)(x_{2A}) = (\phi_1^*(x_{1A}) - \phi_2^*(x_{2A})) + \mathbf{i}(\phi_1^*(x_{2A}) + \phi_2^*(x_{1A})).\end{aligned} \tag{3.19}$$

Утверждаем, что

$$(\mathcal{P}) \int\limits_A \psi_\ell \, d\mu = x_{\ell A}, \quad \ell \in \{1, 2\}.$$

Действительно, возьмем любую $\varphi^* \in X^*$ и рассмотрим, как в (3.16), $\mathbb{C}$-линейный функционал $\widetilde{\varphi}^* := \varphi^* + \mathbf{i}\varphi^*$. Таким образом, из (3.18) и (3.19) получим, что

$$\varphi^*(x_{1A}) - \varphi^*(x_{2A}) = \int_A (\varphi^* \circ \psi_1 - \varphi^* \circ \psi_2)\, d\mu = \int_A \varphi^* \circ \psi_1 d\mu - \int_A \varphi^* \circ \psi_2 d\mu$$

и

$$\varphi^*(x_{2A}) + \varphi^*(x_{1A}) = \int_A (\varphi^* \circ \psi_2 + \varphi^* \circ \psi_1)\, d\mu = \int_A \varphi^* \circ \psi_2 d\mu + \int_A \varphi^* \circ \psi_1 d\mu,$$

откуда следует, что

$$\varphi^*(x_{1A}) = \int_A \varphi^* \circ \psi_1 d\mu \qquad \text{и} \quad \varphi^*(x_{2A}) = \int_A \varphi^* \circ \psi_2 d\mu,$$

а поскольку φ^* была выбрана произвольно, то получаем доказательство утверждения.

Аналогично действуем и при доказательстве в обратную сторону. Предположим, что ψ_1 и ψ_2 интегрируемы по Петтису. Тогда для любого заданного $A \in \mathcal{A}$ существуют такие x_{1A} и x_{2A}, что для всех $\varphi \in X^*$ справедливо

$$(\mathcal{P}) \int_A \psi_1\, d\mu = x_{1A} \quad \text{и} \quad (\mathcal{P}) \int_A \psi_2\, d\mu = x_{2A}.$$

Покажем, что

$$(\mathcal{P}) \int_A \psi\, d\mu = x_{1A} + \mathbf{i} x_{2A}.$$

Действительно, как и ранее, возьмем $\phi^* \in (\widehat{X}_{\mathbb{C}})^*$, где $\phi^* = \phi_1^* + \mathbf{i}\phi_2^*$, $\phi_\ell^* : \widehat{X}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$ при $\ell \in \{1, 2\}$. Из (3.18) и (3.19) имеем:

$$\begin{aligned}\int_A \phi^* \circ \psi \; d\mu = \int_A \phi_1^* \circ \psi_1 d\mu - \int_A \phi_2^* \circ \psi_2 d\mu + \mathbf{i} \left(\int_A \phi_1^* \circ \psi_2\, d\mu + \int_A \phi_2^* \circ \psi_1\, d\mu \right) = \\ = (\phi_1^*(x_{1A}) - \phi_2^*(x_{2A})) + \mathbf{i}\; (\phi_1^*(x_{2A}) + \phi_2^*(x_{1A})) = \phi^*(x_{1A} + \mathbf{i}\, x_{2A}).\end{aligned}$$

И вновь, поскольку $\phi^* \in (\widehat{X}_{\mathbb{C}})^*$ была выбрана произвольно, мы можем заключить, что утверждение верно. Таким образом, теорема доказана. □

4. Математические ожидания случайных величин, принимающих значения в вещественных и комплексных пространствах

Хотя данный раздел и является главным в нашей работе, введенные нами определения и доказанные теоремы позволяют описать и подать его содержание как немедленное следствие предыдущих разделов. Безусловно, все нижеизложенное по-прежнему сохраняет все мелкие детали и тонкости, представленные выше.

Начнем со случая банаховых пространств. В данном разделе $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ будет обозначать вероятностное пространство, т. е. теперь $\mu(\Omega) = 1$. Более того, будем использовать P вместо μ.

Выпишем для удобства некоторые определения, приведенные в [8, 17, 21, 22, 25].

Пусть Z — вещественное или комплексное банахово пространство.

1. Простая функция $\psi : \Omega \to Z$ называется *простой случайной величиной* (п.с.в. для краткости), если существуют $z_1, \ldots, z_n$ из Z и $A_1, \ldots, A_n$ из $\mathcal{A}$ такие, что

$$A_i \cap A_j = \varnothing \text{ при } i \neq j, \quad \Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad \psi = \sum_{i=1}^n z_i I_{A_i},$$

где I_{A_i} — характеристическая функция A_i.

2. Интеграл от простой случайной величины называется ее *математическим ожиданием* (или просто *ожиданием*) $E_S[\psi]$, т. е.
$$E_S[\psi] := \sum_{i=1}^{n} z_i P(A_i).$$
3. Отображение $\psi : \Omega \to Z$ называется *сильной случайной величиной* (с.с.в. для краткости), если ψ — сильно измеримая функция, а именно, существует последовательность п.с.в. $\{\psi_n\}$ такая, что
$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n - \psi\| = 0 \quad P\text{-п.в.}$$
4. Если ψ — это с.с.в., и, кроме того,
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} \|\psi_n - \psi\| \, dP = 0,$$
то ее математическое ожидание определяется через интеграл Бохнера:
$$E_{St}[\psi] := \lim_{n\to\infty} E_S[\psi_n].$$
5. Отображение $\psi : \Omega \to Z$ называется *слабой случайной величиной* (сл.с.в. для краткости), если ψ — слабо измеримая функция, т. е. для всякой $\phi^* \in Z^*$ композиция $\phi^* \circ \psi$ является измеримой функцией и в данном случае называется *случайной переменной* (с.п.).
6. Если ψ — это сл.с.в., и, кроме того, $E[\phi^* \circ \psi] < \infty$ для всех $\phi^* \in Z^*$ (другими словами, ψ — интегрируемая по Петтису функция), ее интеграл Петтиса называется *математическим ожиданием* ψ. Это означает, что существует единственный элемент $z_\psi \in Z$ такой, что
$$\phi^*(z_\psi) = E[\phi^* \circ \psi] \quad \forall\ \phi^* \in Z^*.$$
Такой элемент z_ψ обозначается через $E_W[\psi]$. Таким образом, выполняется следующее: для всякой $\phi^* \in Z^*$
$$\phi^*(E_W[\psi]) = E[\phi^* \circ \psi].$$

4.1. Случай внутренней комплексификации. Пусть теперь X — вещественное банахово пространство с комплексифицирующим автоморфизмом u; пусть $X_{\mathbb{C}}$ — его внутренняя алгебраическая комплексификация; напомним, что если u непрерывен, то $X_{\mathbb{C}}$ является комплексным банаховым пространством с нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$, задаваемой уравнением (3.1), а $(X_{\mathbb{C}}, \mathcal{B}(X_{\mathbb{C}}))$ — измеримое пространство.

Из определений выше вытекают три теоремы, являющиеся прямыми следствиями ранее доказанных теорем.

Теорема 4.1. *Пусть ψ определяется, как и ранее, и пусть $\psi_{\mathbb{C}} : \Omega \to X_{\mathbb{C}}$. Тогда ψ является п.с.в тогда и только тогда, когда $\psi_{\mathbb{C}}$ тоже п.с.в., и в данном случае $E_S[\psi] = E_S[\psi_{\mathbb{C}}]$.*

Теорема 4.2. *При вышеизложенных условиях ψ является с.с.в. тогда и только тогда, когда $\psi_{\mathbb{C}}$ тоже с.с.в. Кроме того, ψ обладает математическим ожиданием тогда и только тогда, когда математическим ожиданием обладает и $\psi_{\mathbb{C}}$, и в данном случае $E_{St}[\psi] = E_{St}[\psi_{\mathbb{C}}]$.*

Теорема 4.3. *При вышеизложенных условиях ψ является сл.с.в. тогда и только тогда, когда $\psi_{\mathbb{C}}$ тоже сл.с.в. Кроме того, ψ и $\psi_{\mathbb{C}}$ обладают математическими ожиданиями одновременно, и в данном случае $E_W[\psi] = E_W[\psi_{\mathbb{C}}]$.*

4.2. Случай внешней комплексификации. Теперь перейдем к случайным величинам, принимающим значения из внешней комплексификации $\widehat{X}_{\mathbb{C}}$, которая является комплексным банаховым пространством с нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$; кроме того, $(\widehat{X}_{\mathbb{C}}, \mathcal{B}(\widehat{X}_{\mathbb{C}}))$ является измеримым пространством.

Теорема 4.4. *Заданное отображение $\psi = \psi_1 + \mathbf{i}\psi_2 : \Omega \to \widehat{X}_{\mathbb{C}}$ является п.с.в. тогда и только тогда, когда ψ_1 и ψ_2 являются п.с.в., и для их математических ожиданий справедливо*:
$$E_S[\psi] = E_S[\psi_1] + \mathbf{i}E_S[\psi_2].$$

Теорема 4.5. *Заданное отображение $\psi = \psi_1 + \mathbf{i}\psi_2 : \Omega \to \widehat{X}_{\mathbb{C}}$ является с.с.в. тогда и только тогда, когда ψ_1 и ψ_2 являются с.с.в., и для их математических ожиданий справедливо*:

$$E_{St}[\psi] = E_{St}[\psi_1] + \mathbf{i}E_{St}[\psi_2].$$

Теорема 4.6. *Отображение $\psi = \psi_1 + \mathbf{i}\psi_2 : \Omega \to \widehat{X}_{\mathbb{C}}$ является сл.с.в. тогда и только тогда, когда ψ_1 и ψ_2 являются сл.с.в. Кроме того, математическое ожидание ψ существует тогда и только тогда, когда существуют математические ожидания ψ_1 и ψ_2, и выполняется*:

$$E_W[\psi] = E_W[\psi_1] + \mathbf{i}E_W[\psi_2].$$

4.3. Гильбертовы пространства и внутренняя комплексификация. Рассмотрим теперь случай, когда H — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$, следовательно, H — это банахово пространство с нормой $\|h\| := \langle h, h \rangle_{\mathbb{R}}^{\frac{1}{2}}$. Будем считать u комплексифицирующим автоморфизмом в H. Таким образом, $H_{\mathbb{C}}$ теперь $\mathbb{C}$-линейное пространство.

Здесь возникает один нюанс. Скалярное произведение — это функция

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}} : H \times H \longrightarrow \mathbb{R};$$

если мы хотим, чтобы $H_{\mathbb{C}}$ также было комплексным гильбертовым пространством, нам необходимо комплексное скалярное произведение:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}} : H_{\mathbb{C}} \times H_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

В работе [12] было доказано, что, если комплексифицирующий автоморфизм u удовлетворяет

$$\langle u(x_1), x_2 \rangle_{\mathbb{R}} = -\langle x_1, u(x_2) \rangle_{\mathbb{R}} \quad \forall\, x_1,\, x_2 \in H, \tag{4.1}$$

то во внутренней алгебраической комплексификации $H_{\mathbb{C}}$ можно ввести следующее скалярное произведение:

$$\langle h_1, h_2 \rangle_{\mathbb{C}} := \langle h_1, h_2 \rangle_{\mathbb{R}} + \mathbf{i}\langle h_1, u(h_2) \rangle_{\mathbb{R}}. \tag{4.2}$$

Соответствующая норма $\| \cdot \|_{\mathbb{C}}$ продолжает исходную, а именно, $\|h\|_{\mathbb{C}} = \|h\|$ для любого $h \in H_{\mathbb{C}}$; кроме того, $H_{\mathbb{C}}$ — комплексное гильбертово пространство. Так как, в частности, $H_{\mathbb{C}}$ — также и комплексное банахово пространство, то все полученные в разделе 3 результаты верны и в данном случае.

Теорема 4.7. *При вышеизложенных условиях справедливо*:

1. *Отображение $\psi : \Omega \to H$ является п.с.в., с.с.в. или сл.с.в. тогда и только тогда, когда $\psi_{\mathbb{C}}$ является п.с.в., с.с.в. или сл.с.в., соответственно. Кроме того, ψ и $\psi_{\mathbb{C}}$ обладают математическими ожиданиями $E_\bullet[\psi]$ одновременно, и*

   $$E_\bullet[\psi_{\mathbb{C}}] = E_\bullet[\psi].$$

   Здесь мы используем символ $E_\bullet$ для обозначения E_S, E_{St} или E_W.
2. *Если ψ — это случайная величина (простая, сильная или слабая) с математическим ожиданием $E_\bullet[\psi]$, то для любых $h \in H_{\mathbb{C}}$ имеем*:

   $$\langle E_\bullet[\psi_{\mathbb{C}}], h \rangle_{\mathbb{C}} := \langle E_\bullet[\psi], h \rangle + \mathbf{i}\langle E_\bullet[\psi], u(h) \rangle.$$

Доказательство. Доказательство пункта 1 немедленно вытекает из теорем 4.1, 4.2 и 4.3.

2. Пусть задан любой $h \in H_{\mathbb{C}}$, и пусть $\phi_h^* \in H_{\mathbb{C}}^*$ — соответствующий элемент такой, что

$$\phi_h^*(x) = \langle x, h \rangle_{\mathbb{C}}, \quad \forall x \in X_{\mathbb{C}}. \tag{4.3}$$

Если ψ — случайная величина (простая, сильная или слабая) с математическим ожиданием $E_\bullet[\psi]$, то по пункту 1 таковой является и $\psi_{\mathbb{C}}$, и

$$\phi_h^*(E_\bullet[\psi_{\mathbb{C}}]) = \int\limits_{\Omega} \phi_h^* \circ \psi \; dP = \langle E_\bullet[\psi_{\mathbb{C}}], h \rangle_{\mathbb{C}}. \tag{4.4}$$

Это уравнение совместно с (4.2) доказывает утверждение. $\square$

4.4. Гильбертовы пространства и внешняя комплексификация. Перейдем ко внешней алгебраической комплексификации $\widehat{H}_{\mathbb{C}}$ пространства H. В работе [12] было доказано, что $\widehat{H}_{\mathbb{C}}$ допускает следующее скалярное произведение:

$$\langle v, h\rangle_{\mathbb{C}} = \langle v_1, h_1\rangle + \langle v_2, h_2\rangle + \mathbf{i}[\langle v_2, h_1\rangle - \langle v_1, h_2\rangle], \tag{4.5}$$

где $v = v_1 + \mathbf{i}v_2$ и $h = h_1 + \mathbf{i}h_2$ — это элементы из $H_{\mathbb{C}}$, что делает $H_{\mathbb{C}}$ гильбертовым пространством; следовательно, $\widehat{H}_{\mathbb{C}}$ является банаховым пространством с нормой $\|h\|_{\mathbb{C}} := \langle h, h\rangle_{\mathbb{C}}^{1/2}$, для которой выполнено

$$\|h\|_{\mathbb{C}}^2 = \|h_1\|^2 + \|h_2\|^2.$$

Как и ранее, $(\widehat{H}_{\mathbb{C}}, \mathcal{B}(\widehat{H}_{\mathbb{C}}))$ является измеримым пространством.

Теорема 4.8. *При вышеизложенных условиях справедливо*:

1. *Отображение* $\psi = \psi_1 + i\psi_2 : \Omega \to \widehat{H}_{\mathbb{C}}$ *является п.с.в., с.с.в. или сл.с.в. тогда и только тогда, когда таковыми являются и* ψ_1 *и* ψ_2; *кроме того,*
$$E_\bullet[\psi] = E_\bullet[\psi_1] + \mathbf{i}E_\bullet[\psi_2].$$
2. *Если* $\psi = \psi_1 + \mathbf{i}\psi_2 : \Omega \to \widehat{H}_{\mathbb{C}}$ — *случайная величина* (*простая, сильная или слабая*) *с математическим ожиданием* $E_\bullet[\psi]$, *то для любых* $h = h_1 + \mathbf{i}h_2 \in H_{\mathbb{C}}$ *имеем*:
$$\langle E_\bullet[\psi], h\rangle_{\mathbb{C}} := \langle E_\bullet[\psi_1], h_1\rangle + \langle E_\bullet[\psi_2], h_2\rangle + \mathbf{i}\left(\langle E_\bullet[\psi_2], h_1\rangle - \langle E_\bullet[\psi_1], h_2\rangle\right).$$

Доказательство. Пункт 1 вытекает непосредственно из теорем 4.4, 4.5 и 4.6. Пункт 2 доказывается аналогично пункту 2 из теоремы 4.7, теперь с использованием (4.5). □

5. Заключительное замечание

Следует отметить, что задачей данной работы является не определение математических объектов, рассматриваемых как комплекснозначные. Как отмечалось во введении, наша цель состоит в описании взаимосвязей между этими объектами при переходе от вещественно-линейных пространств к комплексно-линейным. Такая стратегия позволяет устанавливать некоторые свойства, которые иначе не обнаруживаются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вербицкий И. Э.* О некоторых соотношениях между нормами оператора и его комплексного расширения// Мат. иссл. — 1976. — *42*. — С. 3–12.
2. *Вербицкий И. Э., Середа П. П.* О норме комплексного расширения оператора// Мат. иссл. — 1995. — *37*. — С. 201–206.
3. *Abramovich Y. A., Aliprantis C. D., Sirotkin G., Troitsky G.* Some open problems and conjectures associated with the invariant subspace problem// Positivity. — 2005. — *9*, № 3. — С. 273–286.
4. *Alpay D., Luna-Elizarrarás M. E., Shapiro M.* Normes des extensions quaternionique d'operateurs réels// C.R. Math. Acad. Sci. Paris. — 2005. — *340*, № 9. — С. 639–643.
5. *Defant A.* Best constants for the norm of the complexification of operators between L_p-spaces// Lect. Notes Pure Appl. Math. — 1994. — *150*. — С. 173–180.
6. *Engelking R.* General topology. — Berlin: Heldermann Verlag, 1989.
7. *Figiel T., Iwaniec T., Pelczyński A.* Computing norms and critical exponents of some operators in L_p-spaces// Stud. Math. — 1984. — *79*, № 3. — С. 227–274.
8. *Fréchet M.* Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié// Ann. Inst. Henri Poincaré. — 1948. — *10*, № 4. — С. 215–310.
9. *Glazman I. M., Ljubič J. I.* Finite-dimensional linear analysis: a systematic presentation in problem form. — London: The MIT Press, 1974.
10. *Krivine J. I.* Sur la complexification des opérateurs de L_∞ dans L_1// C.R. Math. Acad. Sci. Paris. — 1977. — *284*. — С. 377–379.
11. *Krivine J. I.* Constantes de Grothendieck et fonctions de type positif sur les sphéres// Adv. Math. — 1979. — *31*. — С. 16–30.
12. *Luna-Elizarrarás M. E., Ramírez-Reyes F., Shapiro M.* Complexifications of real spaces: general aspects// Georgian Math. J. — 2012. — *19*. — С. 259–282.

13. *Luna-Elizarrarás M. E., Shapiro M.* On some properties of quaternionic inner product spaces// В сб.: «25th Int. Coll. Group theoretical methods in physics, Cocoyoc, México, 2–6 August 2004». — Bristol—Philadelphia: Inst. of Phys. Publ., 2005. — С. 371–376.
14. *Luna-Elizarrarás M. E., Shapiro M.* Preservation of the norms of linear operator acting on some quaternionic function spaces// Oper. Theory Adv. Appl. — 2005. — *157*. — С. 205–220.
15. *Luna-Elizarrarás M. E., Shapiro M.* On modules over bicomplex and hyperbolic numbers// В сб.: «Applied complex and quaternionic approximation». — Rome: Edizioni Nuova Cultura, 2009. — С. 76–92.
16. *Luna-Elizarrarás M. E., Shapiro M.* On some relations between real, complex and quaternionic linear spaces// В сб.: «More progresses in analysis». — Singapore: World Scientific, 2009. — С. 999–1008.
17. *Mourier E.* Éléments aléatoires dans un espace de Banach// Ann. Inst. Henri Poincaré. — 1953. — *13*, № 3. — С. 161–244.
18. *Riesz M.* Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionelles linéaires// Acta Math. — 1926. — *49*. — С. 465–497.
19. *Schwabik S., Gouju Y.* Topics in Banach space integration. — Hackensack: World Scientific, 2005.
20. *Soukhomlinoff G. A.* Über fortsetzung von linearen funktionalen in linearen komplexen räumen und linearen quaternionräumen// Mat. Sb. (N.S.). — 1938. — *3*. — С. 353–358.
21. *Taylor R. L.* Some weak laws for random elements in normed linear spaces// Ann. Math. Stat. — 1972. — *43*. — С. 1267–1274.
22. *Taylor R. L., Wei D.* Laws of large numbers for tight random elements in normed linear spaces// Ann. Probab. — 1979. — *7*, № 1. — С. 150–155.
23. *Thorin G. O.* Convexity theorems generalizing those of M. Riesz and Hadamard with some applications// Comm. Sem. Math. Univ. Lund Medd. Lunds Univ. Sem. — 1948. — *9*. — С. 1–58.
24. *Vakhania N. N.* Random vectors with values in quaternion Hilbert spaces// Theory Probab. Appl. — 1999. — *43*, № 1. — С. 99–115.
25. *Vakhania N. N., Chobanyan S. A., Tarieladze V. I.* Probability distributions on Banach spaces. — Dordrecht: D. Reidel Publ., 1987.
26. *Vakhania N. N., Kandelaki N. P.* Random vectors with values in complex Hilbert spaces// Theory Probab. Appl. — 1997. — *41*, № 1. — С. 116–131.
27. *Zygmund A.* Trigonometric series. Vol. I. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1968.

М. Е. Луна-Элизаррарас
Holon Institute of Technology, Holon, Israel
E-mail: `lunae@hit.ac.il`

Ф. Рамирез-Рейес
Departamento de Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional, Mexico City, Mexico
E-mail: `framirez@esfm.ipn.mx`

М. Шапиро
Holon Institute of Technology, Holon, Israel
E-mail: `shapiro1945@outlook.com`

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-706-722 UDC 517.982

On Complexification of Real Spaces and Its Manifestations in the Theory of Bochner and Pettis Integrals

© 2018 **M. E. Luna-Elizarrarás, F. Ramírez-Reyes, M. Shapiro**

Abstract. This work is a continuation of our work [12] where we considered linear spaces in the following two situations: a real space admits a multiplication by complex scalars without changing the set itself; a real space is embedded into a wider set with a multiplication by complex scalars. We studied there also how they manifest themselves when the initial space possesses additional structures: topology, norm, inner product, as well as what happens with linear operators acting between such spaces. Changing the linearities of the linear spaces unmasks some very subtle properties which are not so obvious when the set of scalars is not changed. In the present work, we follow the same idea considering now Bochner and Pettis integrals for functions ranged in real and complex Banach and Hilbert spaces. Finally, this leads to the study of strong and weak random elements with values in real and complex Banach and Hilbert spaces, in particular, some properties of their expectations.

REFERENCES

1. I. E. Verbitskiy, "O nekotorykh sootnosheniyakh mezhdu normami operatora i ego kompleksnogo rasshireniya" [Some relations between the norm of an operator and that of its complex extension], *Mat. issl.* [Math. Stud.], 1976, **42**, 3–12 (in Russian).
2. I. E. Verbitskiy and P. P. Sereda, "O norme kompleksnogo rasshireniya operatora" [About the norm of the complex extension of an operator], *Mat. issl.* [Math. Stud.], 1995, **37**, 201–206 (in Russian).
3. Y. A. Abramovich, C. D. Aliprantis, G. Sirotkin, and G. Troitsky, "Some open problems and conjectures associated with the invariant subspace problem," *Positivity*, 2005, **9**, No. 3, 273–286.
4. D. Alpay, M. E. Luna-Elizarrarás, and M. Shapiro, "Normes des extensions quaternionique d'operateurs réels," *Comtes Rendus de l'Acadèmie des Sciences Mathematique, Ser. I*, 2005, **340**, 639–643.
5. A. Defant, "Best constants for the norm of the complexification of operators between L_p-spaces," *Lect. Notes Pure Appl. Math.*, 1994, **150**, 173–180.
6. R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
7. T. Figiel, T. Iwaniec, and A. Pelczyński, "Computing norms and critical exponents of some operators in L_p-spaces," *Stud. Math.*, 1984, **79**, No. 3, 227–274.
8. M. Fréchet, "Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié," *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 1948, **10**, No. 4, 215–310.
9. I. M. Glazman and J. I. Ljubič, *Finite-Dimensional Linear Analysis: A Systematic Presentation in Problem Form*, The MIT Press, London, 1974.
10. J. I. Krivine, "Sur la complexification des opérateurs de L_∞ dans L_1," *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1977, **284**, 377–379.
11. J. I. Krivine, "Constantes de Grothendieck et fonctions de type positif sur les sphéres," *Adv. Math.*, 1979, **31**, 16–30.
12. M. E. Luna-Elizarrarás, F. Ramírez-Reyes, and M. Shapiro, "Complexifications of real spaces: general aspects," *Georgian Math. J.*, 2012, **19**, 259–282.
13. M. E. Luna-Elizarrarás and M. Shapiro, "On some properties of quaternionic inner product spaces," In: *25th Int. Coll. Group Theoretical Methods in Physics, Cocoyoc, México, 2–6 August 2004*, Inst. of Phys. Publ., Bristol—Philadelphia, 2005, 371–376.
14. M. E. Luna-Elizarrarás and M. Shapiro, "Preservation of the norms of linear operator acting on some quaternionic function spaces," *Oper. Theory Adv. Appl.*, 2005, **157**, 205–220.
15. M. E. Luna-Elizarrarás and M. Shapiro, "On modules over bicomplex and hyperbolic numbers," In: *Applied Complex and Quaternionic Approximation*, Edizioni Nuova Cultura, Rome, 2009, 76–92.
16. M. E. Luna-Elizarrarás and M. Shapiro, "On some relations between real, complex and quaternionic linear spaces," In: *More Progresses in Analysis*, World Scientific, Singapore, 2009, 999–1008.

17. E. Mourier, “Éléments aléatoires dans un espace de Banach,” *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 1953, **13**, No. 3, 161–244.
18. M. Riesz, “Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionelles linéaires,” *Acta Math.*, 1926, **49**, 465–497.
19. S. Schwabik and Y. Gouju, *Topics in Banach Space Integration*, World Scientific, Hackensack, 2005.
20. G. A. Soukhomlinoff, “Über fortsetzung von linearen funktionalen in linearen komplexen räumen und linearen quaternionräumen,” *Mat. Sb. (N.S.)*, 1938, **3**, 353–358.
21. R. L. Taylor, “Some weak laws for random elements in normed linear spaces,” *The Annals Mathematical Statistics*, 1972, **43**, 1267–1274.
22. R. L. Taylor and D. Wei, “Laws of large numbers for tight random elements in normed linear spaces,” *Ann. Probab.*, 1979, **7**, No. 1, 150–155.
23. G. O. Thorin, “Convexity theorems generalizing those of M. Riesz and Hadamard with some applications,” *Comm. Sem. Math. Univ. Lund Medd. Lunds Univ. Sem.*, 1948, **9**, 1–58.
24. N. N. Vakhania, “Random vectors with values in quaternion Hilbert spaces,” *Theory Probab. Appl.*, 1999, **43**, No. 1, 99–115.
25. N. N. Vakhania, S. A. Chobanyan, and V. I. Tarieladze, *Probability Distributions on Banach Spaces*, D. Reidel Publ., Dordrecht, 1987.
26. N. N. Vakhania and N. P. Kandelaki, “Random vectors with values in complex Hilbert spaces,” *Theory Probab. Appl.*, 1997, **41**, No. 1, 116–131.
27. A. Zygmund, *Trigonometric Series. Vol. I*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1968.

M. E. Luna-Elizarrarás
Holon Institute of Technology, Holon, Israel
E-mail: lunae@hit.ac.il

F. Ramírez-Reyes
Departamento de Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional, Mexico City, Mexico
E-mail: framirez@esfm.ipn.mx

M. Shapiro
Holon Institute of Technology, Holon, Israel
E-mail: shapiro1945@outlook.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 4 (2018). С. 723–735

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-723-735 УДК 519.652

ПОСТРОЕНИЕ ФОРМУЛ ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

© 2018 г. **Х. М. ШАДИМЕТОВ, А. Р. ХАЁТОВ, Ф. А. НУРАЛИЕВ**

Аннотация. В данной работе строятся формулы оптимальной интерполяции в пространстве $L_2^{(4)}(0,1)$ с помощью дискретного аналога дифференциального оператора $\dfrac{d^{2m}}{dx^{2m}}$. Также нами были получены явные формулы для коэффициентов формул оптимальной интерполяции.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение: постановка задачи

Задача интерполяции является одной из самых распространенных задач в теории приближений. Классический метод ее решения заключается в построении интерполяционных полиномов. Однако интерполяционные полиномы имеют ряд недостатков при использовании их для функций с сингулярностями или для недостаточно гладких функций. Доказано, что последовательность интерполяционных полиномов Лагранжа, построенных для конкретной непрерывной функции, не сходится к самой функции. В связи с этим на практике вместо интерполяционных полиномов высокого порядка используются сплайн-функции.

Первые сплайновые функции формировались из отдельных кусков кубических полиномов. Затем это построение было преобразовано, была увеличена степень полинома, изменены граничные значения, но сама идея осталась неизменной. Следующим шагом в развитии теории сплайнов стал результат Д. Холладея [12], связывающий кубический сплайн И. Шенберга с решением задачи нахождения минимума нормы функции из пространства $L_2^{(2)}$. Далее Карл Де Боор в работе [10] обобщил результат Д. Холладея. Полученные результаты вызвали огромный интерес, в связи с чем появилось большое количество работ, в которых в зависимости от конкретных требований вариационный функционал подвергался изменениям. Теория сплайнов, основанная на вариационных методах, была изучена и получила развитие в работах Дж. Элберга, Э. Нельсона и Дж. Уолша [7], Р. Аркангели, Лопеса де Силаньес и Дж. Дж. Торреса [8], М. Аттея [9], К. де Боора [10, 11], М. И. Игнатова и А. Б. Певного [2], П. Дж. Лоурента [3], Дж. Мастроянни и Г. В. Миловановича [13], И. Я. Шенберга [14], Л. Л. Шумакера [15], С. Б. Стечкина и Ю. Н. Субботина [5], В. А. Василенко [1] и других. Вполне исчерпывающий список литературы по теории сплайновых функций можно найти, например, в [15].

Настоящая же работа посвящена построению формул оптимальной интерполяции.

Предположим, что у нас имеется таблица значений $\varphi(x_\beta)$, $\beta = 0, 1, \ldots, N$ функций φ в точках $x_\beta \in [0,1]$. Требуется аппроксимировать функции φ другими, более простыми функциями P_φ, т. е.

$$\varphi(z) \cong P_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\varphi(x_\beta) + \sum_{\alpha=1}^{2}(A_\alpha(z)\varphi^{(2\alpha-1)}(0) + B_\alpha(z)\varphi^{(2\alpha-1)}(1)), \tag{1.1}$$

что удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\varphi(x_\beta) = P_\varphi(x_\beta), \ \beta = 0, 1, \ldots, N. \tag{1.2}$$

Здесь $C_\beta(z)$, $\beta = \overline{0, N}$, $A_\alpha(z)$, $B_\alpha(z)$ и x_β $(\in [0,1])$ — *коэффициенты* и *узлы* интерполяционной формулы (1.1), соответственно.

Теперь, следуя Соболеву [18], можем поставить задачу нахождения формул оптимальной интерполяции.

Предположим, что функции φ принадлежат пространству Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$, где $L_2^{(m)}(0,1)$ — это пространство интегрируемых с квадратом функций с m-ой обобщенной производной и с нормой

$$\left\|\varphi | L_2^{(m)}(0,1)\right\| = \left\{\int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x)\right)^2 dx\right\}^{1/2}, \tag{1.3}$$

где

$$\int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x)\right)^2 dx < \infty.$$

Разность $\varphi - P_\varphi$ называется *погрешностью* формулы интерполяции (1.1). Значение этой погрешности в конкретной точке $z \in [0,1]$ определяется линейным функционалом на пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$, т. е.

$$\begin{aligned}(\ell, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x,z)\varphi(x)dx = \varphi(z) - P_\varphi(z) = \\ &= \varphi(z) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\varphi(x_\beta) - \sum_{\alpha=1}^{2}(A_\alpha(z)\varphi^{(2\alpha-1)}(0) + B_\alpha(z)\varphi^{(2\alpha-1)}(1)),\end{aligned} \tag{1.4}$$

где δ — это дельта-функция Дирака, и

$$\ell(x,z) = \delta(x - z) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\delta(x - h\beta) + \sum_{\alpha=1}^{2}(A_\alpha(z)\delta^{(2\alpha-1)}(x) + B_\alpha(z)\delta^{(2\alpha-1)}(x-1)) \tag{1.5}$$

— это *функционал погрешности* интерполяционной формулы (1.1), и он принадлежит пространству $L_2^{(m)*}(0,1)$. Пространство $L_2^{(m)*}(0,1)$ является сопряженным к пространству $L_2^{(m)}(0,1)$. Далее для простоты обозначим $\ell(x,z)$ как $\ell(x)$.

Абсолютное значение погрешности (1.4) оценивается с помощью неравенства Коши—Шварца следующим образом:

$$|(\ell, \varphi)| \leqslant \|\varphi | L_2^{(m)}\| \cdot \|\ell | L_2^{(m)*}\|,$$

где

$$\left\|\ell | L_2^{(m)*}\right\| = \sup_{\varphi, \|\varphi\| \neq 0} \frac{|(\ell, \varphi)|}{\|\varphi\|}.$$

Следовательно, чтобы оценить погрешность интерполяционной формулы (1.1) для функций из пространства $L_2^{(m)}(0,1)$, необходимо найти норму функционала погрешности ℓ в сопряженном пространстве $L_2^{(m)*}(0,1)$.

Отсюда получаем

Задача 1.1. Найти норму функционала погрешности ℓ интерполяционной формулы (1.1) в пространстве $L_2^{(m)*}(0,1)$.

Очевидно, что норма функционала погрешности ℓ зависит от коэффициентов $C_\beta(z)$, $\beta=\overline{0,N}$, $A_\alpha(z)$, $B_\alpha(z)$, $\alpha=1,2$, и узлов x_β. Задача минимизации величины $\|\ell\|$ по коэффициентам $C_\beta(z)$, $\beta=\overline{0,N}$, $A_\alpha(z)$, $B_\alpha(z)$ является линейной задачей, а по узлам x_β, вообще говоря, является задачей нелинейной и довольно трудной. Рассмотрим задачу минимизации величины $\|\ell\|$ по коэффициентам $C_\beta(z)$, $\beta=\overline{0,N}$, $A_\alpha(z)$, $B_\alpha(z)$ при фиксированных узлах x_β.

Коэффициенты $\mathring{C}_\beta(z)$, $\beta=\overline{0,N}$, $\mathring{A}_\alpha(z),\mathring{B}_\alpha(z)$ (если таковые существуют), удовлетворяющие уравнению

$$\left\|\mathring{\ell}|L_2^{(m)*}\right\|=\inf_{C_\beta(z),A_\alpha(z),B_\alpha(z)}\left\|\ell|L_2^{(m)*}\right\|, \tag{1.6}$$

называются *оптимальными коэффициентами*, а соответствующая интерполяционная формула

$$\mathring{P}_\varphi(z)=\sum_{\beta=0}^{N}\mathring{C}_\beta(z)\varphi(x_\beta)+\sum_{\alpha=1}^{2}(\mathring{A}_\alpha(z)\varphi^{(2\alpha-1)}(0)+\mathring{B}_\alpha(z)\varphi^{(2\alpha-1)}(1))$$

называется *формулой оптимальной интерполяции* в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$.

Таким образом, для построения формулы оптимальной интерполяции в форме (1.1) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ нам необходимо решить следующую задачу.

Задача 1.2. Найти коэффициенты $\mathring{C}_\beta(z)$, $\beta=\overline{0,N}$, $\mathring{A}_\alpha(z),\mathring{B}_\alpha(z)$, $\alpha=1,2$, удовлетворяющие уравнению (1.6) при фиксированных узлах x_β.

Основная цель настоящей работы заключается в построении формул оптимальной интерполяции в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$. Впервые данная задача была опубликована и изучена С. Л. Соболевым в работе [18]; в ней была найдена экстремаль интерполяционной формулы в пространстве $L_2^{(m)}$.

Остальная часть нашей работы построена следующим образом. В разделе 2 мы находим экстремаль, которая соответствует функционалу погрешности ℓ, и с ее помощью вычисляем норму функционала погрешности (1.5), т. е. решаем, таким образом, задачу 1.1. В разделе 3 для нахождения минимума $\|\ell\|^2$ по коэффициентам $C_\beta(z)$, $\beta=\overline{0,N}$, $A_\alpha(z),B_\alpha(z)$ мы рассматриваем систему линейных уравнений для коэффициентов формул оптимальной интерполяции (1.1) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$; кроме того, в этом разделе обсуждаются существование и единственность решения такой системы. Раздел 4 приведены некоторые предварительные сведения. Раздел 5 посвящен вычислению коэффициентов формулы оптимальной интерполяции в форме (1.1) для случая $m=4$.

2. Экстремальная функция и норма функционала погрешности (1.5)

В этом разделе мы решаем задачу 1.1, т. е. мы ищем явный вид нормы функционала погрешности ℓ.

Для нахождения явного вида нормы функционала погрешности ℓ в пространстве $L_2^{(m)}$ мы используем его экстремаль [4,18]. Функция ψ_ℓ из пространства $L_2^{(m)}(0,1)$ называется *экстремальной* для функционала погрешности ℓ, если выполняется следующее равенство:

$$(\ell,\psi_\ell)=\left\|\ell\left|L_2^{(m)*}\right.\right\|\cdot\left\|\psi_\ell\left|L_2^{(m)}\right.\right\|.$$

Пространство $L_2^{(m)}(0,1)$ является гильбертовым, и скалярное произведение в этом пространстве определяется следующей формулой:

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\int_0^1\varphi^{(m)}(x)\psi^{(m)}(x)dx. \tag{2.1}$$

Согласно теореме Риса любой линейный непрерывный функционал ℓ в гильбертовом пространстве представляется в виде скалярного произведения. Таким образом, в нашем случае для любой функции φ из пространства $L_2^{(m)}(0,1)$ имеем

$$(\ell,\varphi)=\langle\psi_\ell,\varphi\rangle. \tag{2.2}$$

Здесь ψ_ℓ — функция из $L_2^{(m)}(0,1)$, и она определяется единственным образом с помощью функционала ℓ и его экстремали.

Из (2.2) достаточно легко видеть, что функционал погрешности ℓ, определенный на пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$, удовлетворяет равенствам

$$(\ell, x^p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ell(x)x^p dx = 0, \quad p = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{2.3}$$

Равенства (2.3) означают, что наша интерполяционная формула точна для любого полинома степени $\leqslant m-1$.

Уравнение (2.2) было решено в [18], и для экстремальной функции ψ_ℓ было получено следующее выражение:

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \ell(x) * G_m(x) + P_{m-1}(x), \tag{2.4}$$

где

$$G_m(x) = \frac{x^{2m-1}\operatorname{sgn} x}{2(2m-1)!}, \tag{2.5}$$

$P_{m-1}(x)$ — это полином степени $m-1$, а $*$ означает операцию свертки, определяемую для функций f и g таким образом:

$$f(x) * g(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy.$$

Итак, мы получили норму функционала погрешности ℓ. Так как пространство $L_2^{(m)}(0,1)$ является гильбертовым, то по теореме Риса имеем

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell\| \cdot \|\psi_\ell\| = \|\ell\|^2.$$

Следовательно, используя (1.5) и (2.4), с учетом (2.3) получаем

$$\|\ell\|^2 = (\ell, \psi_\ell) = (\ell(x), (-1)^m \ell(x) * G_m(x)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \left((-1)^m \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ell(y) G_m(x-y) dy \right) dx.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $G_m(x)$, определяемая по формуле (2.5), является четной функцией, имеем

$$\begin{aligned} \|\ell\|^2 \;&=\; (\ell, \psi_\ell) = \Bigg[\sum_{\beta=0}^{N} \sum_{\gamma=0}^{N} C_\beta(z) C_\gamma(z) \frac{|h\beta - h\gamma|^{2m-1}}{2(2m-1)!} - \\ &- 2 \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z) \frac{(z-h\beta)^{2m-1}\operatorname{sgn}(z-h\beta)}{2(2m-1)!} - \\ &- 2 \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z) \left(A_\alpha(z) \frac{(h\beta)^{2m-2\alpha}}{2(2m-2\alpha)!} - B_\alpha(z) \, \frac{(1-h\beta)^{2m-2\alpha}}{2(2m-2\alpha)!} \right) + \\ &+ 2 \sum_{\alpha=1}^{2} \left(A_\alpha(z) \frac{z^{2m-2\alpha}}{2(2m-2\alpha)!} - B_\alpha(z) \, \frac{(1-z)^{2m-2\alpha}}{2(2m-2\alpha)!} \right) - \\ &- \frac{A_1(z)B_1(z)}{(2m-3)!} - \frac{A_1(z)B_2(z)}{(2m-5)!} - \frac{A_2(z)B_1(z)}{(2m-5)!} - \frac{A_2(z)B_2(z)}{(2m-7)!} \Bigg]. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Таким образом, задача 1.1 решена.

В следующих разделах будет представлено решение задачи 1.2.

3. Существование и единственность формулы оптимальной интерполяции

Предположим, что узлы x_β интерполяционной формулы (1.1) фиксированы. Функционал погрешности (1.5) удовлетворяет условиям (2.3). Норма функционала погрешности ℓ — это функция многих переменных относительно коэффициентов $C_\beta(z)$, $\beta=\overline{0,N}$, $A_1(z)$, $A_2(z)$, $B_1(z)$, $B_2(z)$. Для нахождения точки условного минимума выражения (2.6) с соблюдением условий (2.3) мы применим метод Лагранжа.

Рассмотрим функцию

$$\Psi(C_0(z),C_1(z),\dots,C_N(z),A_1(z),A_2(z),B_1(z),B_2(z),\lambda_0(z),\dots,\lambda_{m-1}(z)) = \\ = \|\ell\|^2 - 2(-1)^m\sum_{\alpha=0}^{m-1}\lambda_\alpha(z)\,(\ell,x^\alpha)\,.$$

Приравнивая частные производные функции Ψ по $C_\beta(z)$, $\beta=\overline{0,N}$, $A_1(z)$, $A_2(z)$, $B_1(z)$ и $B_2(z)$, $\lambda_0(z),\lambda_1(z),\dots,\lambda_{m-1}(z)$ к нулю, мы получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)\frac{|h\beta-h\gamma|^{2m-1}}{2(2m-1)!}-A_1(z)\frac{(h\beta)^{2m-2}}{2(2m-2)!}+B_1(z)\frac{(1-h\beta)^{2m-2}}{2(2m-2)!}-A_2(z)\frac{(h\beta)^{2m-4}}{2(2m-4)!}+ \\ +B_2(z)\frac{(1-h\beta)^{2m-4}}{2(2m-4)!}+\sum_{\alpha=0}^{m-1}\lambda_\alpha(z)(h\beta)^\alpha=\frac{|z-h\beta|^{2m-1}}{2(2m-1)!},\ \ \beta=\overline{0,N}, \tag{3.1}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)\frac{(h\gamma)^{2m-2}}{2(2m-2)!}+\frac{B_1(z)}{2(2m-3)!}+\frac{B_2(z)}{2(2m-5)!}-\lambda_1(z)=\frac{z^{2m-2}}{2(2m-2)!}, \tag{3.2}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)\frac{(h\gamma-1)^{2m-2}}{2(2m-2)!}-\frac{A_1(z)}{2(2m-3)!}-\frac{A_2(z)}{2(2m-5)!}+\sum_{\alpha=1}^{m-1}\alpha\lambda_\alpha(z)=\frac{(1-z)^{2m-2}}{2(2m-2)!}, \tag{3.3}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)\frac{(h\gamma)^{2m-4}}{2(2m-4)!}+\frac{B_1(z)}{2(2m-5)!}+\frac{B_2(z)}{2(2m-7)!}-6\lambda_3(z)=\frac{z^{2m-4}}{2(2m-4)!}, \tag{3.4}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)\frac{(h\gamma-1)^{2m-4}}{2(2m-4)!}-\frac{A_1(z)}{2(2m-5)!}-\frac{A_2(z)}{2(2m-7)!}+6\lambda_3(z)+ \\ +\sum_{\alpha=4}^{m-1}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\lambda_\alpha(z)=\frac{(1-z)^{2m-4}}{2(2m-4)!}, \tag{3.5}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)=1, \tag{3.6}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^2+2B_1(z)=z^2, \tag{3.7}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^3+3B_1(z)+6A_2(z)+6B_2(z)=z^3, \tag{3.8}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^\alpha+\alpha B_1(z)+\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)B_2(z)=z^\alpha,\quad \alpha=\overline{4,m-1}. \tag{3.9}$$

Система (3.1)–(3.9) называется *дискретной системой типа Винера—Хопфа* для оптимальных коэффициентов [4, 20]. В системе (3.1)–(3.9) коэффициенты $C_\beta(z)$, $\beta=\overline{0,N}$, $A_1(z)$, $A_2(z)$, $B_1(z)$, $B_2(z)$ и $\lambda_\alpha(z)$, $\alpha=\overline{0,m-1}$ неизвестны. Система (3.1)–(3.9) имеет единственное решение, и это решение дает минимум для $\|\ell\|^2$ при условиях (3.6)–(3.9), когда $N+5\geqslant m$. Здесь мы опустим доказательство существования и единственности решения системы (3.1)–(3.9), так как доказательство для этой системы проводится аналогично доказательству существования и единственности решения дискретной системы типа Винера—Хопфа для оптимальных коэффициентов в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ для квадратурных формул (см. [4, 20]).

Тем самым, в фиксированных значениях узлов x_β квадрат нормы функционала погрешности ℓ, будучи квадратичной функцией коэффициентов $C_\beta(z)$, $\beta=\overline{0,N}$, $A_1(z)$, $A_2(z)$, $B_1(z)$ и $B_2(z)$, имеет единственный минимум для некоторого значения

$$C_\beta(z)=\mathring{C}_\beta(z),\quad A_1(z)=\mathring{A}_1(z),\quad A_2(z)=\mathring{A}_2(z),\quad B_1(z)=\mathring{B}_1(z),\quad B_2(z)=\mathring{B}_2(z).$$

Ниже для удобства сохраним прежние обозначения коэффициентов $\mathring{C}_\beta(z)$, $\beta=\overline{0,N}$, $\mathring{A}_1(z)$, $\mathring{A}_2(z)$, $\mathring{B}_1(z)$ и $\mathring{B}_2(z)$, т. е. $C_\beta(z)$, $A_1(z)$, $A_2(z)$, $B_1(z)$, $B_2(z)$.

Замечание 3.1. Легко проверить, что для оптимальных коэффициентов $C_\beta(z)$, $A_1(z)$, $A_2(z)$, $B_1(z)$, $B_2(z)$ и $\lambda_\alpha(z)$, $\alpha=\overline{1,m-1}$ справедливо следующее:

$$\begin{aligned}
&C_\beta(h\gamma)=\begin{cases}1, & \gamma=\beta,\\ 0, & \gamma\neq\beta,\end{cases}\quad \gamma=0,1,\ldots,N,\ \beta=0,1,2,\ldots,N,\\
&A_1(h\beta)=0,\ A_2(h\beta)=0,\ B_1(h\beta)=0,\ B_2(h\beta)=0,\ \beta=0,1,\ldots,N,\\
&\lambda_\alpha(h\beta)=0,\ \alpha=0,1,\ldots,m-1,\ \beta=0,1,\ldots,N.
\end{aligned}$$

4. Предварительные сведения

Далее в основном будут использоваться понятия, касающиеся функций с дискретным аргументом и операций над ними. Теория функций дискретного переменного представлена в [4, 20]. Для полноты дадим несколько определений, относящихся к функциям дискретного переменного.

Пусть узлы x_β — равноотстоящие, т. е.

$$x_\beta=h\beta,\quad h=\frac{1}{N},\quad N=1,2,\ldots.$$

Определение 4.1. Функция $\varphi(h\beta)$ является *функцией дискретного переменного*, если она задается на некотором множестве целых значений β.

Определение 4.2. *Скалярное произведение* двух функций дискретного переменного $\varphi(h\beta)$ и $\psi(h\beta)$ задается таким образом:

$$[\varphi(h\beta),\psi(h\beta)]=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\varphi(h\beta)\cdot\psi(h\beta),$$

если ряд в правой части сходится абсолютно.

Определение 4.3. *Сверткой* двух функций $\varphi(h\beta)$ и $\psi(h\beta)$ называется скалярное произведение

$$\varphi(h\beta)*\psi(h\beta)=[\varphi(h\gamma),\psi(h\beta-h\gamma)]=\sum_{\gamma=-\infty}^{\infty}\varphi(h\gamma)\cdot\psi(h\beta-h\gamma).$$

Нам необходим дискретный аналог $D_m(h\beta)$ дифференциального оператора d^{2m}/dx^{2m}, который удовлетворял бы следующему равенству:

$$hD_m(h\beta)*G_m(h\beta)=\delta(h\beta),$$

где $G_m(h\beta)$ — это функция дискретного переменного, соответствующая функции $G_m(x)$, определяемой в (2.5), $\delta(h\beta)$ — это дискретная дельта-функция. Дискретный аналог $D_m(h\beta)$ был построен, и следующий результат был доказан в работе [6].

Теорема 4.1. *Дискретный аналог дифференциального оператора d^{2m}/dx^{2m} имеет вид*

$$D_m(h\beta) = \frac{(2m-1)!}{h^{2m}} \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m-1} \dfrac{(1-q_k)^{2m+1} q_k^{|\beta|}}{q_k E_{2m-1}(q_k)} & \text{при} \quad |\beta| \geqslant 2, \\ 1 + \sum\limits_{k=1}^{m-1} \dfrac{(1-q_k)^{2m+1}}{E_{2m-1}(q_k)} & \text{при} \quad |\beta| = 1, \\ -2^{2m-1} + \sum\limits_{k=1}^{m-1} \dfrac{(1-q_k)^{2m+1}}{q_k E_{2m-1}(q_k)} & \text{при} \quad \beta = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

где $E_{2m-1}(q)$ — это полином Эйлера—Фробениуса степени $2m-1$, q_k — корни полинома Эйлера—Фробениуса $E_{2m-2}(q)$, $|q_k| < 1$, h — малый положительный параметр.

Кроме того, в [6] было доказано несколько свойств функции дискретного переменного $D_m(h\beta)$. Здесь мы приводим свойства функции дискретного переменного $D_m(h\beta)$, необходимые для наших последующих вычислений.

Теорема 4.2. *Функция дискретного переменного $D_m(h\beta)$ и мономы $(h\beta)^k$ связаны друг с другом следующим образом*:

$$\sum_{\beta=-\infty}^{\infty} D_m(h\beta)(h\beta)^k = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant k \leqslant 2m-1, \\ (2m)! & \text{при} \quad k = 2m, \\ 0 & \text{при} \quad 2m+1 \leqslant k \leqslant 4m-1, \\ \dfrac{h^{2m}(4m)! B_{2m}}{(2m)!} & \text{при} \quad k = 4m. \end{cases} \tag{4.2}$$

5. Вычисление коэффициентов формул оптимальной интерполяции (1.1) в случае $m = 4$

В этом разделе мы решаем задачу 1.2 для случая $m = 4$, а также ищем явные формулы для коэффициентов $C_\beta(z)$, $\beta = 0, 1, \ldots, N$, $A_\alpha(z), B_\alpha(z)$, $\alpha = 1, 2$ формул оптимальной интерполяции в пространстве $L_2^{(4)}(0,1)$.

Справедливо следующее:

Теорема 5.1. *Коэффициенты $C_\beta(z)$, $\beta = 0, 1, \ldots, N$, $A_\alpha(z)$, $B_\alpha(z)$, $\alpha = 1, 2$ формул оптимальной интерполяции в форме* (1.1) *в пространстве $L_2^{(4)}(0,1)$ представляются в следующем виде*:

$$\begin{aligned} C_0(z) &= \frac{1}{2h^7}\Bigg[-128z^7 + |z-h|^7 + (z+h)^7 - 14h^6 A_1(z) - 420h^4 A_2(z) + \\ &\quad + 10080(\lambda_1(z) + 2\lambda_2(z))h^2 + \sum_{k=1}^{3} \frac{A_k}{q_k} \left(\sum_{\gamma=0}^{N} q_k^\gamma |z-h\gamma|^7 + M_k(z) + q_k^N N_k(z) \right) \Bigg], \\ C_\beta(z) &= \frac{1}{2h^7}\Bigg[|z-h(\beta-1)|^7 - 128|z-h\beta|^7 + |z-h(\beta+1)|^7 + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{3} \frac{A_k}{q_k} \left(\sum_{\gamma=0}^{N} q_k^{|\beta-\gamma|} |z-h\gamma|^7 + q_k^\beta M_k(z) + q_k^{N-\beta} N_k(z) \right) \Bigg], \qquad \beta = \overline{1, N-1}, \\ C_N(z) &= \frac{1}{2h^7}\Bigg[-128(1-z)^7 + |z-h(N-1)|^7 + (h+1-z)^7 + 14h^6 B_1(z) + 420h^4 B_2(z) - \\ &\quad - 10080h^2\lambda_1(z) + \sum_{k=1}^{3} \frac{A_k}{q_k} \left(\sum_{\gamma=0}^{N} q_k^{N-\gamma} |z-h\gamma|^7 + q_k^N M_k(z) + N_k(z) \right) \Bigg], \end{aligned}$$

где

$$M_k(z) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} q_k^\gamma \left((z+h\gamma)^7 - 14(h\gamma)^6 A_1(z) - 420(h\gamma)^4 A_2(z) + 10080 \left(\lambda_1(z) + 2(h\gamma)^2 \lambda_2(z) \right) \right),$$

$$N_k(z) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} q_k^{\gamma}\left((h\gamma+1-z)^7+14(h\gamma)^6B_1(z)+420(h\gamma)^4B_1(z)-10080(h\gamma)^2\lambda_1(z)\right),$$

$A_1(z)$, $A_2(z)$, $B_1(z)$, $B_2(z)$, $\lambda_1(z)$ и $\lambda_2(z)$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$A_1(z)\left[-h^6\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_4(h\gamma+h\beta)\gamma^6\right]+B_1(z)\left[h^6\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_4(h(N+\gamma)-h\beta)\gamma^6\right]+$$

$$+A_2(z)\left[-30h^4\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_4(h\gamma+h\beta)\gamma^4\right]+B_2(z)\left[30h^4\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_4(h(N+\gamma)-h\beta)\gamma^4\right]+$$

$$+6!\lambda_1(z)\left[h^2\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_4(h\gamma+h\beta)\gamma^2-h^2\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_4(h(N+\gamma)-h\beta)\gamma^2\right]+$$

$$+2\cdot 6!\lambda_2(z)\left[h^2\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_4(h\gamma+h\beta)\gamma^2\right]=-\frac{1}{14}\sum_{\gamma=-\infty}^{\infty}D_4(h\beta-h\gamma)|z-h\gamma|^7,$$

$\beta=-1, \beta=-2, \beta=-3, \beta=N+1, \beta=N+2, \beta=N+3.$

Доказательство. В случае $m=4$ система (3.1)–(3.9) дает следующее:

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)\frac{|h\beta-h\gamma|^7}{2\cdot 7!}-A_1(z)\frac{(h\beta)^6}{2\cdot 6!}+B_1(z)\frac{(h\beta-1)^6}{2\cdot 6!}-A_2(z)\frac{(h\beta)^4}{2\cdot 6!}+$$

$$+B_2(z)\frac{(h\beta-1)^4}{2\cdot 6!}+\sum_{\alpha=0}^{2}\lambda_\alpha(z)(h\beta)^\alpha=\frac{|z-h\beta|^7}{2\cdot 7!},\quad \beta=\overline{0,N}, \tag{5.1}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^6+6B_1(z)+120B_2(z)-2\cdot 6!\lambda_1(z)=z^6, \tag{5.2}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^5+5B_1(z)+60B_2(z)-4\cdot 5!\lambda_1(z)-4\cdot 5!\lambda_2(z)=z^5, \tag{5.3}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^4+4B_1(z)+24B_2(z)=z^4, \tag{5.4}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^3+3B_1(z)+6A_2(z)+6B_2(z)=z^3, \tag{5.5}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^2+2B_1(z)=z^2, \tag{5.6}$$

$$\sum_{\beta=0}^{N}C_\gamma(z)(h\beta)+A_1(z)+B_1(z)=z, \tag{5.7}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)=1. \tag{5.8}$$

Далее мы решаем систему (5.1)–(5.8). Введем следующие обозначения:

$$v(h\beta) = \sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)\frac{|h\beta-h\gamma|^7}{2\cdot 7!}, \tag{5.9}$$

$$u(h\beta) = v(h\beta)-A_1(z)\frac{(h\beta)^6}{2\cdot 6!}+B_1(z)\frac{(h\beta-1)^6}{2\cdot 6!}-$$

$$- A_2(z)\frac{(h\beta)^4}{2\cdot 4!} + B_2(z)\frac{(h\beta-1)^4}{2\cdot 4!} + \sum_{\alpha=0}^{2}\lambda_\alpha(z)(h\beta)^\alpha. \tag{5.10}$$

В этом утверждении следует выразить $C_\gamma(z)$, $\beta = 0,1,\dots,N$ через функцию $u(h\beta)$. Для этого нам необходим дискретный аналог $D_4(h\beta)$ дифференциального оператора $\frac{d^8}{dx^8}$, который удовлетворял бы уравнению

$$hD_4(h\beta) * \frac{|h\beta|^7}{2\cdot 7!} = \delta(h\beta),$$

где $\delta(h\beta)$ — дискретная дельта-функция. Из теоремы 4.1 в случае $m = 4$ получаем следующую форму дискретного аналога $D_4(h\beta)$ оператора $\frac{d^8}{dx^8}$:

$$D_4(h\beta) = \frac{7!}{h^8}\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{3} A_k\ q_k^{|\beta|-1} & \text{при} \quad |\beta| \geqslant 2,\\ 1 + \sum\limits_{k=1}^{3} A_k & \text{при} \quad |\beta| = 1,\\ C + \sum\limits_{k=1}^{3} \frac{A_k}{q_k} & \text{при} \quad \beta = 0, \end{cases} \tag{5.11}$$

где

$$A_k = \frac{(1-q_k)^9}{E_7(q_k)},\ C = -128,$$
$$E_6(x) = x^6 + 120x^5 + 1191x^4 + 2416x^3 + 1191x^2 + 120x + 1,$$
$$E_7(x) = x^7 + 247x^6 + 4293x^5 + 15619x^4 + 15619x^3 + 4293x^2 + 247x + 1$$

являются полиномами Эйлера—Фробениуса, а $q_k,\ k = 1,2,3$ — корнями полинома $E_6(x)$, причем $|q_k| < 1$, $k = 1,2,3$.

Применяя дискретный аналог (5.11) к коэффициентам C_β, $\beta = 0,1,\dots,N$, интерполяционной формулы (1.1), получаем следующее равенство:

$$C_\beta(z) = hD_4(h\beta) * u(h\beta). \tag{5.12}$$

Отсюда можно заключить, что, если мы найдем функцию $u(h\beta)$, то коэффициенты C_β, $\beta = 0,1,\dots,N$, из формулы (1.1) будут получены из (5.12).

Теперь отыщем явное представление функции $u(h\beta)$. Так как

$$C_\beta(z) = 0 \ \text{ для } \ h\beta \notin [0,1],$$

то из (5.12) получаем

$$C_\beta(z) = hD_4(h\beta) * u(h\beta) = 0 \text{ при } h\beta \notin [0,1]. \tag{5.13}$$

Рассмотрим равенство (5.9) для $h\beta \notin [0,1]$.

Положим $\beta < 0$. Тогда, с учетом (5.2)–(5.8), имеем

$$\begin{aligned} v(h\beta) \ = \ -\frac{1}{2\cdot 7!}\Big((h\beta)^7 &- 7(h\beta)^6(z - A_1(z) - B_1(z)) + 21(h\beta)^5(z^2 - 2B_1(z)) - \\ &- 35(h\beta)^4(z^3 - 3B_1(z) - 6A_2(z) - 6B_2(z)) + 35(h\beta)^3(z^4 - 4B_1 - 24B_2) - \\ &- 21(h\beta)^2(z^5 - 5B_1 - 60B_2 + 4\cdot 5!\lambda_1 + 4\cdot 5!\lambda_2) + \\ &+ 7(h\beta)(z^6 - 6B_1 - 120B_2 + 2\cdot 6!\lambda_1) - \sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z)(h\gamma)^7\Big). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Теперь положим $\beta > N$, и тогда схожим образом из (5.9) получим

$$\begin{aligned} v(h\beta) \ = \ \frac{1}{2\cdot 7!}\Big((h\beta)^7 &- 7(h\beta)^6(z - A_1(z) - B_1(z)) + 21(h\beta)^5(z^2 - 2B_1(z)) - \\ &- 35(h\beta)^4(z^3 - 3B_1(z) - 6A_2(z) - 6B_2(z)) + 35(h\beta)^3(z^4 - 4B_1 - 24B_2) - \\ &- 21(h\beta)^2(z^5 - 5B_1 - 60B_2 + 4\cdot 5!\lambda_1 + 4\cdot 5!\lambda_2) + \end{aligned}$$

$$+ 7(h\beta)(z^6 - 6B_1 - 120B_2 + 2\cdot 6!\lambda_1) - \sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z)(h\gamma)^7\Big). \tag{5.15}$$

Далее, используя (5.14) и (5.15), из (5.10) получаем

$$u(h\beta) = \begin{cases} \dfrac{(z-h\beta)^7}{2\cdot 7!} - \dfrac{A_1(z)}{6!}(h\beta)^6 - \dfrac{A_2(z)}{4!}(h\beta)^4 + (\lambda_1(z) + 2\lambda_2(z))(h\beta)^2, & \beta < 0, \\ \dfrac{|z-h\beta|^7}{2\cdot 7!}, \qquad 0 \leqslant \beta \leqslant N, & \\ -\dfrac{(z-h\beta)^7}{2\cdot 7!} + \dfrac{B_1(z)}{6!}(1-h\beta)^6 + \dfrac{B_2(z)}{4!}(1-h\beta)^4 - \lambda_1(z)(1-h\beta)^2, & \beta > N. \end{cases} \tag{5.16}$$

Здесь $A_1(z), A_2(z)$, $B_1(z)$ и $B_2(z)$ неизвестны. Они могут быть получены из (5.13).

Теперь, с учетом (5.16), из (5.13) получаем

$$D_4(h\beta) * u(h\beta) = 0, \qquad \beta < 0, \quad \beta > N,$$

т. е., для $\beta < 0$ и $\beta > N$

$$\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h\gamma + h\beta)\left(\frac{(z+h\gamma)^7}{2\cdot 7!} - \frac{A_1(z)}{6!}(h\gamma)^6 - \frac{A_2(z)}{4!}(h\gamma)^4 + (\lambda_1(z) + 2\lambda_2(z))(h\gamma)^2\right) +$$
$$+ \sum_{\gamma=0}^{N} D_4(h\gamma - h\beta)\frac{|z-h\gamma|^7}{2\cdot 7!} +$$
$$+ \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h(N+\gamma) - h\beta)\left(\frac{-(z-1-h\gamma)^7}{2\cdot 7!} + \frac{B_1(z)}{6!}(h\gamma)^6 + \frac{B_2(z)}{4!}(h\gamma)^4 - \lambda_1(z)(h\gamma)^2\right) = 0.$$

Из последнего равенства для $\beta < 0$ и $\beta > N$ имеем

$$A_1(z)\left(-h^6\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h\gamma + h\beta)\gamma^6\right) + B_1(z)\left(h^6\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h(N+\gamma) - h\beta)\gamma^6\right) +$$
$$+ A_2(z)\left(-30h^4\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h\gamma + h\beta)\gamma^4\right) + B_2(z)\left(30h^4\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h(N+\gamma) - h\beta)\gamma^4\right) +$$
$$+ 6!\lambda_1(z)\left(h^2\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h\gamma + h\beta)\gamma^2 - h^2\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h(N+\gamma) - h\beta)\gamma^2\right) +$$
$$+ 2\cdot 6!\lambda_2(z)\left(h^2\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h\gamma + h\beta)\gamma^2\right) = -\sum_{\gamma=0}^{N} D_4(h\gamma - h\beta)\frac{|z-h\gamma|^7}{14} -$$
$$-\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h\gamma + h\beta)\frac{(h\gamma+z)^7}{14} - \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h(N+\gamma) - h\beta)\frac{(h\gamma + (1-z))^7}{14}.$$

Следовательно, при

$$\beta = -1, \quad \beta = -2, \quad \beta = -3, \quad \beta = N+1, \quad \beta = N+2, \quad \beta = N+3,$$

после ряда упрощений, получим $A_1(z)$, $A_2(z)$, $B_1(z)$, $B_2(z)$, $\lambda_1(z)$ и $\lambda_2(z)$, которые были даны в утверждении теоремы.

Затем из (5.12), используя (5.11) и (5.16), для $\beta = 0, 1, 2, \ldots, N$ мы получаем аналитические формулы для коэффициентов $C_\beta(z)$, $\beta = \overline{0, N}$, данные в утверждении теоремы. Теорема 5.1 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Василенко В. А.* Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. — Новосибирск: Наука, 1983.
2. *Игнатьев М. И., Певний А. Б.* Натуральные сплайны многих переменных. — Л.: Наука, 1991.
3. *Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация. — М.: Мир, 1975.
4. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. — М.: Наука, 1974.
5. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. — М.: Наука, 1976.
6. *Шадиметов Х. М.* Дискретный аналог дифференциального оператора d^{2m}/dx^{2m} и его построение// В сб.: «Вопросы вычислительной и прикладной математики». — Ташкент: АН УзССР, 1985. — *79.* — С. 22–35. — ArXiv:1001.0556.v1 [math.NA] Jan. 2010.
7. *Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L.* The theory of splines and their applications. — New York: Academic Press, 1967.
8. *Arcangeli R., Lopez de Silanes M. C., Torrens J. J.* Multidimensional minimizing splines. — Boston: Kluwer Academic publishers, 2004.
9. *Attea M.* Hilbertian kernels and spline functions. — Amsterdam: North-Holland, 1992.
10. *de Boor C.* Best approximation properties of spline functions of odd degree// J. Math. Mech. — 1963. — *12.* — С. 747–749.
11. *de Boor C.* A practical guide to splines. — New York—Heidelberg—Berlin: Springer, 1978.
12. *Holladay J. C.* Smoothest curve approximation// Math. Tables Aids Comput. — 1957. — *11.* — С. 223–243.
13. *Mastroianni G., Milovanović G. V.* Interpolation processes. Basic theory and applications. — Berlin: Springer, 2008.
14. *Schoenberg I. J.* On trigonometric spline interpolation// J. Math. Mech. — 1964. — *13.* — С. 795–825.
15. *Schumaker L. L.* Spline functions: basic theory. — Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
16. *Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R., Nuraliev F. A.* On an optimal quadrature formula in Sobolev space $L_2^{(m)}(0,1)$// J. Comput. Appl. Math. — 2013. — *243.* — С. 91–112.
17. *Sobolev S. L.* Formulas of mechanical cubature in n-dimensional space// В сб.: «Selected works of S. L. Sobolev». — New York: Springer, 2006. — С. 445–450.
18. *Sobolev S. L.* On interpolation of functions of n variables// В сб.: «Selected works of S. L. Sobolev». — New York: Springer, 2006. — С. 451–456.
19. *Sobolev S. L.* The coefficients of optimal quadrature formulas// В сб.: «Selected works of S. L. Sobolev». — New York: Springer, 2006. — С. 561–566.
20. *Sobolev S. L., Vaskevich V. L.* The theory of cubature formulas. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. Group, 1997.

Х. М. Шадиметов
Институт математики АН Узбекистана,
Узбекистан, 100170, Ташкент, ул. М. Улугбека, 81
E-mail: kholmatshadimetov@mail.ru

А. Р. Хаётов
Институт математики АН Узбекистана,
Узбекистан, 100170, Ташкент, ул. М. Улугбека, 81
E-mail: hayotov@mail.ru

Ф. А. Нуралиев
Институт математики АН Узбекистана,
Узбекистан, 100170, Ташкент, ул. М. Улугбека, 81
E-mail: nuraliyevf@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-723-735 UDC 519.652

Construction of Optimal Interpolation Formulas in the Sobolev Space

© 2018 **Kh. M. Shadimetov, A. R. Hayotov, F. A. Nuraliev**

Abstract. In the present paper, using the discrete analog of the differential operator $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$, optimal interpolation formulas are constructed in $L_2^{(4)}(0,1)$ space. The explicit formulas for coefficients of optimal interpolation formulas are obtained.

REFERENCES

1. V. A. Vasilenko, *Splayn-funktsii: teoriya, algoritmy, programmy* [Spline-Functions: Theory, Algorithms, Programs], Nauka, Novosibirsk, 1983 (in Russian).
2. M. I. Ignat'ev, A. B. Pevniy, *Natural'nye splayny mnogikh peremennykh* [Natural Splines of Many Variables], Nauka, L., 1991 (in Russian).
3. P.-J. Laurent, *Approksimatsiya i optimizatsiya* [Approximation and Optimization], Mir, Moscow, 1975 (Russian translation).
4. S. L. Sobolev, *Vvedenie v teoriyu kubaturnykh formul* [Introduction to the Theory of Cubature Formulas], Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).
5. S. B. Stechkin, Yu. N. Subbotin, *Splayny v vychislitel'noy matematike* [Splines in Computational Mathematics], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
6. Kh. M. Shadimetov, "Diskretnyy analog differentsial'nogo operatora d^{2m}/dx^{2m} i ego postroenie" [The discrete analogue of the differential operator d^{2m}/dx^{2m} and its construction], In: *Voprosy vychislitel'noy i prikladnoy matematiki* [Questions of Computations and Applied Mathematics], AN UzSSR, Tashkent, 1985, **79**, 22–35, ArXiv:1001.0556.v1 [math.NA] Jan. 2010 (in Russian).
7. J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, J. L. Walsh, *The theory of splines and their applications*, Academic Press, New York, 1967.
8. R. Arcangeli, M. C. Lopez de Silanes, J. J. Torrens, *Multidimensional minimizing splines*, Kluwer Academic publishers, Boston, 2004.
9. M. Attea, *Hilbertian kernels and spline functions*, North-Holland, Amsterdam, 1992.
10. C. de Boor, "Best approximation properties of spline functions of odd degree," *J. Math. Mech.*, 1963, **12**, 747–749.
11. C. de Boor, *A practical guide to splines*, Springer, New York—Heidelberg—Berlin, 1978.
12. J. C. Holladay, "Smoothest curve approximation," *Math. Tables Aids Comput.*, 1957, **11**, 223–243.
13. G. Mastroianni, G. V. Milovanović, *Interpolation processes. Basic theory and applications*, Springer, Berlin, 2008.
14. I. J. Schoenberg, "On trigonometric spline interpolation," *J. Math. Mech.*, 1964, **13**, 795–825.
15. L. L. Schumaker, *Spline functions: basic theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
16. Kh. M. Shadimetov, A. R. Hayotov, F. A. Nuraliev, "On an optimal quadrature formula in Sobolev space $L_2^{(m)}(0,1)$," *J. Comput. Appl. Math.*, 2013, **243**, 91–112.
17. S. L. Sobolev, "Formulas of mechanical cubature in n-dimensional space," In: *Selected works of S. L. Sobolev*, Springer, New York, 2006, pp. 445–450.
18. S. L. Sobolev, "On interpolation of functions of n variables," In: *Selected works of S. L. Sobolev*, Springer, New York, 2006, pp. 451–456.
19. S. L. Sobolev, "The coefficients of optimal quadrature formulas," In: *Selected works of S. L. Sobolev*, Springer, New York, 2006, pp. 561–566.
20. S. L. Sobolev, V. L. Vaskevich, *The theory of cubature formulas*, Kluwer Acad. Publ. Group, Dordrecht, 1997.

Kh. M. Shadimetov
Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: kholmatshadimetov@mail.ru

A. R. Hayotov
Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: hayotov@mail.ru

F. A. Nuraliev
Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: nuraliyevf@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 4 (2018). С. 736–748

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-736-748 УДК 517.983

СВЯЗЬ МЕЖДУ ОДНОСТОРОННИМИ ШАРОВЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

© 2018 г. **М. У. ЯХШИБОЕВ**

Аннотация. В работе устанавливается связь между односторонними шаровыми потенциалами с помощью радиально-сингулярных операторов в шаровом слое. Кроме того, построены новые односторонние шаровые потенциалы типа Чженя.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В работах [6,7,13,16,17] были рассмотрены односторонние шаровые потенциалы (о.ш.п.) B_{a+}^{α} и B_{b-}^{α} — многомерные аналоги операторов дробного интегрирования Римана—Лиувилля. Ряд свойств односторонних шаровых потенциалов можно найти в работах [6,7] (см. также [12, § 29]).

Хорошо известна связь между левосторонними и правосторонними дробными интегралами Римана—Лиувилля: интегралы первого типа выражаются через интегралы второго типа и наоборот с помощью сингулярных интегралов. Такие связи (в случае оси, полуоси и отрезка) рассматривались Л. фон Вольфередорфром [18], С. Г. Самко [9, 10], Х. Кобером [15], А. А. Килбасом [2], Б. Рубином [5] (см. также [12, § 11]).

Эти связи применяются при решении обобщенных интегральных уравнений Абеля [9, 10, 18]. Кроме того, в теории вырождающихся дифференциальных уравнений смешанного и параболического типов уравнений в частных производных знаковую роль играют и законы композиции операторов дробного интегрирования и дифференцирования с различными началами [3].

В работе [13] устанавливается связь односторонних шаровых потенциалов с помощью радиально-сингулярного оператора в $L_p(\mathbb{R}^n)$. Мы увидим, что она содержит радиальный сингулярный оператор, ядро которого является однородным степени $-n$ и инвариантным относительно вращений.

Показывается, что символ получаемого сингулярного оператора удовлетворяет условиям соответствующей теоремы о Фурье-мультипликаторах, откуда следует ограниченность этого оператора в $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ (см. [13]).

В этой работе показано распространение подобных связей в шаровой слой, т. е. устанавливается связь между односторонними шаровыми потенциалами разных типов. Вопрос заключается в следующем: к какому результату приводят композиции $(B_{a+}^{\alpha})^{-1} B_{b-}^{\alpha}$ и $(B_{b-}^{\alpha})^{-1} B_{a+}^{\alpha}$? Естественно ожидать, что операторы $(B_{a+}^{\alpha})^{-1} \cdot B_{b-}^{\alpha}$, $(B_{b-}^{\alpha})^{-1} \cdot B_{a+}^{\alpha}$ в каком-то смысле уничтожают действие друг друга и их композиция является оператором, ограниченным в пространстве $L_p(U(a,b))$.

Эта статья структурирована следующим образом. В пункте 2.1 приводятся предварительные сведения о преобразовании Меллина коэффициентов Фурье—Лапласа. Теорема о радиально-сферическом мультипликаторе Фурье изучается в пункте 2.2. В пункте 2.3 рассматривается разложение односторонних шаровых потенциалов в ряды Фурье—Лапласа. Связи односторонних шаровых потенциалов друг с другом с помощью радиально-сингулярного оператора приведены в пункте 2.4. В пункте 2.5 показывается ограниченность радиально-сингулярного оператора в $L_P(\mathbb{R}^n)$. Основные утверждения приведены в пунктах 3.1 и 3.2.

Основные обозначения.

- $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$;
- $(x \cdot y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$;
- $r = |x| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$;
- $x' = \dfrac{x}{|x|}$;
- $f(x) = f(r, x')$;
- $U(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant a < |x| < b \leqslant \infty\}$ — шаровой слой в $\mathbb{R}^n$;
- S^{n-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$;
- $\omega_{n-1} = 2\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma^{-1}(\dfrac{n}{2})$ — площадь ее поверхности;
- $Y_{k,v}(x')(k = 0, 1, 2, \ldots;\ v = 1, 2, \ldots, d_n(k))$ — полная ортонормированная система сферических гармоник;
- $d_n(k)$ — размерность подпространства сферических гармоник порядка k;
- всюду ниже $\sum\limits_{k,v} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{v=1}^{d_n(k)}$;
- $C_{0,0}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ — класс бесконечно-дифференцируемых финитных функций с носителем вне начала координат.

2. Определения и вспомогательные утверждения

2.1. Предварительные сведения о преобразовании Меллина коэффициентов Фурье—Лапласа. Пусть

$$\varphi(x) \approx \sum_{k,v} \varphi_{k,v}(r)\, Y_{k,v}\left(x'\right), \quad \varphi_{k,v}(r) = \int\limits_{S^{n-1}} \varphi(r, \sigma)\, Y_{k,\nu}(\sigma)\, d\sigma, \quad r = |x|$$

есть разложение функции в ряд Фурье—Лапласа по сферическим гармоникам.

Пусть $x = (r, x')$, $r = |x|$. Заменим в соответствии функцию $\varphi(x) = \varphi(r, x')$ последовательностью $\left\{\varphi_{k,v}^*(z)\right\}$ в преобразовании Меллина коэффициентов Фурье—Лапласа:

$$\varphi_{k,v}^*(z) = m\left\{\varphi_{k,v}(r); z\right\} = \int\limits_0^{\infty} r^{z-1} \varphi_{k,v}(r) dr,$$

где

$$\varphi_{k,v}(r) = \int\limits_{S^{n-1}} \varphi(r, \sigma) Y_{k,v}(\sigma) d\sigma.$$

Следуя [8], отображение $\varphi(x) \to \left\{\varphi_{k,v}^*(z)\right\}$ назовем *радиально-сферическим преобразованием Фурье* (*Р.С.Ф.-преобразованием*) функции $\varphi(x)$, а ряд

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k,v} Y_{k,v}(x') \int\limits_{\operatorname{Re} z = \vartheta} r^{-z} \varphi_{k,v}^*(z) dz, \tag{2.1}$$

где ϑ выбирается подходящим образом, *радиально-сферическим разложением Фурье* (*Р.С.Ф.-разложением*) этой функции. Справедлива следующая лемма (см. [8]).

Лемма 2.1. *Если $\varphi(x) \in C_{0,0}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, то при любом $\vartheta \in \mathbb{R}^1$ ряд* (2.1) *сходится к $\varphi(x)$ абсолютно и равномерно в произвольном слое $0 < \alpha \leqslant |x| \leqslant \beta < \infty$.*

2.2. Теорема о радиально-сферическом мультипликаторе Фурье. Рассмотрим оператор

$$A_\vartheta \varphi = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k,v} Y_{k,v}(x') \int\limits_{\mathrm{Re}\, z=\vartheta} r^{-z} a_k(z) \varphi^*_{k,v}(z) dz, \tag{2.2}$$

порожденный последовательностью измеримых функций $a_k(z)$ заданных на прямой $\mathrm{Re}\, z = \vartheta$. Можно показать, что для $\varphi \in C^\infty_{0,0}(\mathbb{R}^n)$ ряд в правой части (2.2) сходится, если

$$\sup \left\{ |a_k(z)| : k \in \mathbb{Z}^0_+, \mathrm{Re}\, z = \vartheta \right\} < \infty, \tag{2.3}$$

где $\mathbb{Z}^0_+ = \{0, 1, \ldots\}$.

Определение 2.1. Последовательность измеримых функций, заданных на прямой

$$\mathrm{Re}\, z = \vartheta = \lambda + \frac{n}{p}$$

и удовлетворяющих условию (2.3), называется *радиально-сферическим мультипликатором Фурье в* $L_p(\mathbb{R}^n)$, если для любой функции $\varphi \in C^\infty_{0,0}(\mathbb{R}^n)$ выполняется оценка

$$||A_\vartheta \varphi||_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \, ||\varphi||_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

где C не зависит от φ.

Совокупность всех мультипликаторов обозначим через $m(L_p(\mathbb{R}^n))$.

Следующая теорема (см. [8, с. 13-14]) содержит достаточное условие принадлежности последовательности $\{a_k(z)\}$, $k \in \mathbb{Z}^+_0$ классу $m(L_p(\mathbb{R}^n))$.

Теорема 2.1. *Пусть* $w \in a^\lambda_p$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$, $1 < p < \infty$. *Предположим, что для заданной последовательности* $\{a_k(z)\}$, $k \in \mathbb{Z}^+_0$ *найдутся числа* $N_0 \in \mathbb{Z}^0_+$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, *удовлетворяющие следующим условиям*:

1. $\left| \xi^j \dfrac{\partial^j}{\partial \xi^j} a_k(\lambda + \dfrac{n}{p} + i\xi) \right| < c_1$ *для всех* $\xi \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}, k = 0, 1, \ldots, N_0$ *и* $j = 0, 1$;
2. *существует функция* $m(\xi, r) : \mathbb{R}^1 \times [N_0, \infty) \to \mathbb{C}$ *такая, что*

$$m(\xi, k) = a_k(\lambda + \frac{n}{p} + i\xi) \quad \text{для всех} \quad k \geqslant \vartheta,$$

$$\left| \xi^j \eta^l \frac{\partial^j}{\partial \xi^j} \frac{\partial^l}{\partial \eta^l} m(\xi, \eta) \right| \leqslant c_2 \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}, \eta \geqslant N_0,\ l = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right],\ j = 0, 1.$$

Тогда $\{a_k(z)\} \in m(L_p(\mathbb{R}^n), w)$.

2.3. Разложение односторонних шаровых потенциалов в ряды Фурье—Лапласа. *Односторонние шаровые потенциалы* (*шаровые дробные интегралы*, *ball fractional integrals*) порядка α $(\alpha > 0)$ в шаровом слое $U(a, b)$, $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant \infty$, определим равенством

$$\left(B^\alpha_{a+} \varphi\right)(x) = \gamma_{n,\alpha} \int\limits_{a \leqslant |y| < |x|} \frac{\left(|x|^2 - |y|^2\right)^\alpha}{|x-y|^n} \varphi(y) \, dy, \ |x| > a,$$

$$\left(B^\alpha_{b-} \varphi\right)(x) = \gamma_{n,\alpha} \int\limits_{|x| < |y| < b} \frac{\left(|y|^2 - |x|^2\right)^\alpha}{|x-y|^n} \varphi(y) \, dy, \ |x| < b,$$

где

$$\gamma_{n,\alpha} = \frac{2}{\omega_{n-1} \Gamma(\alpha)} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi^n}\, \Gamma(\alpha)}.$$

Потенциалы $B^\alpha_{a+}\varphi$ назовем *левосторонними*, а $B^\alpha_{b-}\varphi$ *правосторонними*. При $a = 0$, $b = \infty$ будем писать соответственно $B^\alpha_+ \varphi$, $B^\alpha_- \varphi$.

Обратные односторонние шаровые потенциалы порядка $\alpha\,(0<\alpha<1)$ и шаровой слой $U\,(a,b)\,,\ 0\leqslant a<b\leqslant\infty$, определим равенством

$$(B_{a+}^{\alpha})^{-1}f=\frac{f\,(x)}{\Gamma\,(1-\alpha)\left(|x|^2-a^2\right)^{\alpha}}+\frac{2\alpha}{\Gamma\,(1-\alpha)\,\omega_{n-1}}\int\limits_{a<|y|<|x|}\frac{\left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{n-2}f\,(x)-f\,(y)}{\left(|x|^2-|y|^2\right)^{\alpha}|x-y|^n}dy,$$

$$\left(B_{b-}^{\alpha}\right)^{-1}f=\frac{f\,(x)}{\Gamma\,(1-\alpha)\left(|b|^2-|x|^2\right)^{\alpha}}+\frac{2\alpha}{\Gamma\,(1-\alpha)\,\omega_{n-1}}\int\limits_{|x|<|y|<b}\frac{f\,(x)-f\,(y)}{\left(|y|^2-|x|^2\right)^{\alpha}}\frac{dy}{|x-y|^n}.$$

Известно, что действие операторов $B_{a+}^{\alpha}\varphi$ и $B_{b-}^{\alpha}\varphi$ сводится к дробному интегрированию (*типа Эрдейи—Кобера*) по радиальной переменной. А именно,

$$(B_{a+}^{\alpha}\varphi)_{k,v}(r)=\frac{2r^{2-n-k}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^r\frac{\rho^{n+k-1}\varphi_{k,v}\,(\rho)}{(r^2-\rho^2)^{1-\alpha}}d\rho,\qquad(2.4)$$

$$(B_{b-}^{\alpha}\varphi)_{k,v}(r)=\frac{2r^{k}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_r^b\frac{\rho^{1-k}\varphi_{k,v}\,(\rho)}{(\rho^2-r^2)^{1-\alpha}}d\rho.$$

Для обратных односторонних шаровых потенциалов порядка $\alpha\ (0<\alpha<1)\ \left(B_{a+}^{\alpha}\right)^{-1},\ \left(B_{b-}^{\alpha}\right)^{-1}$ имеем:

$$\left(\left(B_{a+}^{\alpha}\right)^{-1}f\right)_{k,\nu}(r)=\frac{r^{1-n-k}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dr}\int\limits_a^r\frac{\rho^{n+k-1}f_{k,\nu}\,(\rho)}{(r^2-\rho^2)^{\alpha}}d\rho,\qquad(2.5)$$

$$\left(\left(B_{b-}^{\alpha}\right)^{-1}f\right)_{k,\nu}(r)=-\frac{r^{k-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dr}\int\limits_r^b\frac{\rho^{1-k}f_{k,\nu}\,(\rho)}{(\rho^2-r^2)^{\alpha}}d\rho.\qquad(2.6)$$

Будем предполагать, что функция $f_{k,\nu}\,(r)$ достаточно «хорошая», тогда (2.5), (2.6) можно привести к другому виду:

$$\left(\left(B_{a+}^{\alpha}\right)^{-1}f\right)_{k,\nu}(r)=\frac{f_{k,\nu}\,(r)}{\Gamma(1-\alpha)(r^2-a^2)^{\alpha}}+\frac{2\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_a^r\frac{f_{k,\nu}\,(r)-\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+k-2}f_{k,\nu}\,(\rho)}{(r^2-\rho^2)^{\alpha+1}}\rho d\rho,\qquad(2.7)$$

$$\left(\left(B_{b-}^{\alpha}\right)^{-1}f\right)_{k,\nu}(r)=\frac{f_{k,\nu}\,(r)}{\Gamma(1-\alpha)(b^2-r^2)^{\alpha}}+\frac{2\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_r^b\frac{f_{k,\nu}\,(r)-\left(\frac{r}{\rho}\right)^{k}f_{k,\nu}\,(\rho)}{(\rho^2-r^2)^{\alpha+1}}\rho d\rho.\qquad(2.8)$$

Конструкции (2.7), (2.8) будем называть *дробными производными типа Маршо*. Справедлива следующая лемма (см. [7, 8]).

Лемма 2.2. *Пусть* $1<p<\infty,\ r=|x|$. *Операторы* $B_{\underset{+a+}{+}}^{\alpha}$ *и* $B_{\underset{-b-}{-}}^{\alpha}$ *ограничены в следующих пространствах*:

1. $B_{\pm}^{\alpha}:L_p\left(\mathbb{R}^n;r^{\lambda^{\pm}}\right)\to L_q\left(\mathbb{R}^n;r^{\beta}\right)$, *где* $\alpha-\frac{n}{p}<\lambda^{+}<\frac{n}{p},\ 2\alpha-\frac{n}{p}<\lambda^{-}<\frac{n}{p'}+\alpha,\ \beta\leqslant\lambda^{\pm}-\alpha,$ $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{\lambda^{\pm}-2\alpha-\beta}{n},\ p\leqslant q<\infty;$
2. $B_{+}^{\alpha}:L_p\left(\mathbb{R}^n;r^{\lambda}\right)\to L_p\left(\mathbb{R}^n;r^{\lambda-2\alpha}\right)$, *где* $\lambda<\frac{n}{p'};$
3. $B_{\underset{+b-}{a+}}^{\alpha}:L_p\left(U\,(a,b)\,;\omega^{\lambda}\right)\to L_p\left(U\,(a,b)\,;\omega^{\lambda-\alpha}\right)$, *где* $0<a<b<\infty,\ \lambda<\frac{n}{p'},\ \omega=r^2-a^2$ *для оператора* $B_{a+}^{\alpha}\varphi,\ \omega=b^2-r^2$ *для оператора* $B_{b-}^{\alpha}\varphi$.

2.4. Связь односторонних шаровых потенциалов друг с другом с помощью радиально-сингулярного оператора.

Теорема 2.2 (см. [13]). *Пусть* $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \dfrac{n}{2\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. *Тогда односторонние шаровые потенциалы* B_+^α, B_-^α *и сингулярные операторы* S, $\tilde{S}$, *связаны между собой соотношениями*

$$\begin{aligned} &B_-^\alpha\varphi = \cos\alpha\pi\, B_+^\alpha\varphi + \sin\alpha\pi\, B_+^\alpha\,|x|^{-2\alpha}\,S\,|y|^{2\alpha}\,\varphi,\\ &B_+^\alpha\varphi = \cos\alpha\pi\, B_-^\alpha\varphi - \sin\alpha\pi\, B_-^\alpha\tilde{S}\varphi,\\ &B_-^\alpha\varphi = \cos\alpha\pi\, B_+^\alpha\varphi + \sin\alpha\pi\, SB_+^\alpha\varphi,\\ &B_+^\alpha\varphi = \cos\alpha\pi\, B_-^\alpha\varphi - \sin\alpha\pi\;|x|^{2\alpha}\,\tilde{S}\;|y|^{-2\alpha}\,B_-^\alpha\varphi, \end{aligned} \tag{2.9}$$

где

$$\begin{aligned} &(S\varphi)(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{G\left(\frac{|y|}{|x|}, x'\cdot y'\right)}{|y|^2-|x|^2}\,\frac{\varphi(y)}{|y|^{n-2}}dy,\\ &\left(\tilde{S}\varphi\right)(x) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{|x|^{n-2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{G\left(\frac{|x|}{|y|}, x'y'\right)}{|y|^2-|x|^2}\varphi(y)\,dy, \end{aligned} \tag{2.10}$$

S — *оператор* (2.10) *с «характеристикой»* $G(t,w)$ $(t \in \mathbb{R}_+^1, w \in [-1,1])$, *вычисляемой по формуле*

$$G(t,w) = \frac{2}{(n-2)\omega_{n-1}}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{n}{2}+k-1)C_k^{\frac{n}{2}-1}(w)\Lambda_k(t),$$

где

$$\begin{aligned} &\Lambda_k(t) = \left\{ \begin{array}{ll} A_k(t) & \text{при } 0 < t < 1,\\ B_k(t) & \text{при } t > 1, \end{array}\right.\\ &A_k(t) = \alpha B(\alpha, \frac{n}{2}+k)t^{n+k-2}{}_2F_1(\alpha, \frac{n}{2}+k-1; \frac{n}{2}+k+\alpha; t^2),\\ &B_k(t) = (\frac{n}{2}+k-\alpha)B(1-\alpha, \frac{n}{2}+k)t^{-k}{}_2F_1(-\alpha, \frac{n}{2}+k-1; \frac{n}{2}+k-\alpha; t^{-2}), \end{aligned}$$

$C_k^\lambda(w)$ — *многочлены Генебауэра, или ультрасферические многочлены,* ${}_2F_1(a,b;c;z)$ — *гипергеометрическая функция Гаусса* [1, 11].

Возникающий сингулярный оператор $(S\varphi)(x)$ можем интерпретировать в смысле главного значения по радиальной переменной

$$(S\varphi)(x) = \frac{2}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\left|\frac{|y|}{|x|}-1\right|>\varepsilon} \frac{G\left(\frac{|y|}{|x|}, x'\cdot y'\right)}{|y|^2-|x|^2}\,\frac{\varphi(y)}{|y|^{n-2}}dy.$$

2.5. Об ограниченности в $L_p(\mathbb{R}^n)$ радиально-сингулярного оператора.

Лемма 2.3 (см. [13]). *Справедливо равенство*

$$m\left\{r^{2\alpha}((B_+^\alpha)^{-1}B_-^\alpha\varphi)_{k,v}(r); z\right\} = a_k(z)\cdot\varphi_{k,v}^*(z+2\alpha)$$

для всех $n+k-\operatorname{Re}z > 0$, $k+\operatorname{Re}z > 0$ *и* $\varphi \in C_{0,0}^\infty(\mathbb{R}^n)$, *где*

$$a_k(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{z+k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+k-z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z+k}{2}+\alpha\right)\Gamma\left(\frac{n+k-z}{2}-\alpha\right)},\ z = \frac{n}{p}+i\xi. \tag{2.11}$$

Лемма 2.4 (см. [13]). *Справедливо равенство*

$$m\left\{r^{2\alpha}((B_-^\alpha)^{-1}B_+^\alpha\varphi)_{k,v}(r); z\right\} = b_k(z)\varphi_{k,v}^*(z+2\alpha)$$

для всех $\dfrac{n+k}{2}-\alpha-\dfrac{1}{2}\operatorname{Re}z>0$, $\dfrac{k}{2}+\alpha+\dfrac{1}{2}\operatorname{Re}z>0$ *и* $\varphi\in C_{0,0}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, *где*

$$b_k(z)=-\frac{\Gamma\left(\frac{n+k-z}{2}-\alpha\right)\Gamma\left(\frac{z+k}{2}+\alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{n+k-z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+k}{2}\right)}=\frac{1}{a_k(z)},\ z=\frac{n}{p}+i\xi. \tag{2.12}$$

Теорема 2.3 (см. [13]). *Пусть* $\varphi\in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$. *Тогда последовательности* (2.11) *и* (2.12) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1 *при* $w=1$, *так что для операторов* S, $\tilde{S}$ *справедливы оценки*

$$||S\varphi||_{L_p(\mathbb{R}^n)}\leqslant c\,||\varphi||_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

$$\left|\left|\tilde{S}\varphi\right|\right|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\leqslant c\,||\varphi||_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

для любой функции $\varphi\in C_{0,0}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

3. Основное утверждение

3.1. Связь между односторонними шаровыми потенциалами через радиально-сингулярные операторы в шаровом слое.

Лемма 3.1. *Пусть* $0<\alpha<1$ *и* $\varphi(x)\in C_{0,0}^{\infty}(U(a,b))$. *Справедливы равенства*

$$((B_{a+}^{\alpha})^{-1}B_{b-}^{\alpha}\varphi)(x)=\cos\alpha\pi\,\varphi(x)+\sin\alpha\pi(N_{\alpha}^{a}\varphi)(x), \tag{3.1}$$

$$((B_{b-}^{\alpha})^{-1}B_{a+}^{\alpha}\varphi)(x)=\cos\alpha\pi\varphi(x)-\sin\alpha\pi(N_{\alpha}^{b}\varphi)(x), \tag{3.2}$$

где

$$\begin{aligned}(N_a^{\alpha}\varphi)(x):=\frac{2}{\pi}\left(\frac{a}{|x|}\right)^{n-2}\int\limits_{a<|y|<b}\left(\frac{|y|^2-a^2}{|x|^2-a^2}\right)^{\alpha}\frac{P(x',\frac{a^2}{|x||y|}y')}{|y|^2-|x|^2}\frac{\varphi(y)}{|y|^{n-2}}dy+\\+\frac{2}{\pi}\int\limits_{a<|y|<b}\frac{F(|y|,|x|,x'y')}{|y|^2-|x|^2}\varphi(y)dy.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь

$$P(x',\xi\,y')=\frac{1}{\omega_{n-1}}\frac{1-\xi^2}{|x'-\xi\,y'|^n},\quad 0<\xi<1, \tag{3.4}$$

есть ядро Пуассона для единичного шара,

$$F_1(\rho,r,w)=\frac{2}{\omega_{n-1}(n-2)}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{n}{2}+k-1)C_k^{\frac{n}{2}-1}(w)R_k(\rho,r),$$

$$R_k(\rho,r)=\begin{cases}Q_k(\rho,r) & \text{при}\,\rho<r,\\ P_k(\rho,r) & \text{при}\ \rho>r,\end{cases} \tag{3.5}$$

$$Q_k(\rho,r)=(\frac{n}{2}+k-1)(\rho r)^{2-k-n}\int\limits_0^{\rho^2-a^2}\left(\frac{t}{r^2-\rho^2+t}\right)^{\alpha}(\rho^2-t)^{\frac{n}{2}+k-2}dt, \tag{3.6}$$

$$P_k(\rho,r)=(\frac{n}{2}+k-1)(\rho r)^{2-k-n}\int\limits_0^{r^2-a^2}\left(\frac{\rho^2-r^2+t}{t}\right)^{\alpha}(r^2-t)^{\frac{n}{2}+k-2}dt. \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}(N_b^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{2}{\pi\,b^{n-2}}\int\limits_{a<|y|<b}\left(\frac{b^2-|y|^2}{b^2-|x|^2}\right)^{\alpha}\frac{P\left(x',\frac{|x||y|}{b^2}y'\right)}{|y|^2-|x|^2}\varphi(y)dy+\\+\frac{2}{\pi}\int\limits_{a<|y|<b}\frac{F_2(|y|,|x|,x'y')}{|y|^2-|x|^2}\varphi(y)dy.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Здесь

$$F_2(\rho,r,w)=\frac{2}{\omega_{n-1}(n-2)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n}{2}+k-1\right)C_k^{\frac{n}{2}-1}(w)\tilde{R}_k\left(\rho,r\right),$$

$$\tilde{R}_k(\rho,r)=\begin{cases}\tilde{Q}_k(\rho,r) & \text{при}\ \rho<r,\\ \tilde{P}_k(\rho,r) & \text{при}\ \rho>r,\end{cases}$$

$$\tilde{Q}_k(\rho,r)=\left(\frac{n}{2}+k-1\right)(\rho\, r)^k\int_0^{b^2-r^2}\left(\frac{r^2-\rho^2+t}{t}\right)^{\alpha}\left(r^2+t\right)^{-k-\frac{n}{2}}dt,$$

$$\tilde{P}_k(\rho,r)=\left(\frac{n}{2}+k-1\right)(\rho\, r)^k\int_0^{b^2-\rho^2}\left(\frac{t}{\rho^2-r^2+t}\right)^{\alpha}\left(\rho^2+t\right)^{-k-\frac{n}{2}}dt.$$

Доказательство. Вычислим композицию $(B^{\alpha}_{a+})^{-1}B^{\alpha}_{b-}$. Для этого рассмотрим действие этой композиции по радиальной переменной (т. е. на коэффициентах Фурье—Лапласа). Согласно (2.4) и (2.5) имеем

$$((B^{\alpha}_{a+})^{-1}B^{\alpha}_{b-}\varphi)_{k,v}(r)=\frac{2r^{1-k-n}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dr}\int_a^r\frac{\rho^{2k+n-1}}{(r^2-\rho^2)^{\alpha}}d\rho\int_{\rho}^{b}\frac{\xi^{1-k}\varphi_{k,v}(\xi)}{(\xi^2-\rho^2)^{1-\alpha}}d\xi.$$

Поменяв порядок интегрирования по формуле Дирихле, придем к равенству:

$$\begin{gathered}((B^{\alpha}_{a+})^{-1}B^{\alpha}_{b-}\varphi)_{k,v}(r)=\frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}r^{1-k-n}\times\\ \times\frac{d}{dr}\int_a^b\xi^{1-k}\varphi_{k,v}(\xi)d\xi\int_a^{\min(\xi,r)}\rho^{2k+n-1}\frac{(\xi^2-\rho^2)^{\alpha-1}}{(r^2-\rho^2)^{\alpha}}d\rho=\lim_{\varepsilon\to 0}J_{\varepsilon}(r),\end{gathered}\tag{3.9}$$

где

$$\begin{gathered}J_{\varepsilon}(r)=\frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}r^{1-k-n}\frac{d}{dr}\left\{\int_a^{r(1-\varepsilon)}\xi^{1-k}\varphi_{k,v}(\xi)d\xi\int_a^{\xi}\frac{\rho^{2k+n-1}}{(r^2-\rho^2)^{\alpha}}(\xi^2-\rho^2)^{\alpha-1}d\rho+\right.\\ \left.+\int_{r(1+\varepsilon)}^{b}\xi^{1-k}\varphi_{k,v}(\xi)d\xi\int_a^r\rho^{2k+n-1}\,\frac{(\xi^2-\rho^2)^{\alpha-1}}{(r^2-\rho^2)^{\alpha}}\right\}d\rho.\end{gathered}$$

Замены $\dfrac{\xi^2-\rho^2}{r^2-\xi^2}=s$ и $\dfrac{r^2-\rho^2}{\xi^2-r^2}=s$ дают:

$$\begin{gathered}J_{\varepsilon}(r)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}r^{1-k-n}\frac{d}{dr}\left\{\int_a^{r(1-\varepsilon)}\xi^{1-k}\varphi_{k,v}(\xi)d\xi\int_0^{\frac{\xi^2-0^2}{r^2-\xi^2}}\frac{s^{\alpha-1}}{(1+s)^{\alpha}}(\xi^2-(r^2-\xi^2)s)^{\frac{n}{2}+k-1}ds+\right.\\ \left.+\int_{r(1+\varepsilon)}^{b}\xi^{1-k}\varphi_{k,v}(\xi)d\xi\int_0^{\frac{r^2-0^2}{\xi^2-r^2}}s^{-\alpha}(1+s)^{\alpha-1}(r^2-s(\xi^2-r^2))^{\frac{n}{2}+k-1}ds\right\}.\end{gathered}$$

Отсюда

$$J_{\varepsilon}(r)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}r^{1-k-n}\frac{d}{dr}\left\{\int_a^{r(1-\varepsilon)}\xi^{1-k}\varphi_{k,v}(\xi)K_1(\xi,r)dS+\int_{r(1+\varepsilon)}^{b}\xi^{1-k}\varphi_{k,v}(\xi)K_2(\xi,r)d\xi\right\},\tag{3.10}$$

где

$$K_1(\xi,r)=\int\limits_0^{\frac{\xi^2-a^2}{r^2-\xi^2}} s^{\alpha-1}(1+s)^{-\alpha}(\xi^2-(r^2-\xi^2)s)^{\frac{n}{2}+k-1}ds,$$

$$K_2(\xi,r)=\int\limits_0^{\frac{r^2-a^2}{\xi^2-r^2}} s^{-\alpha}(1+s)^{\alpha-1}(r^2-(\xi^2+r^2)s)^{\frac{n}{2}+k-1}ds.$$

Из (3.10) имеем:

$$\begin{gathered}J_\varepsilon(r)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}r^{1-k-n}\left\{\int\limits_a^{r(1-\varepsilon)}\xi^{1-k}\varphi_{k,v}(\xi)[K_1(\xi,r)]_r'd\xi+\int\limits_{r(1+\varepsilon)}^{b}\xi^{1-k}\varphi_{k,v}(\xi)[K_2(\xi,r)]_r'd\xi\right\}+\\+\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}r^{2-2k-n}\Big\{(1-\varepsilon)^{2-k}\varphi_{k,v}(r(1-\varepsilon))K_1(r(1-\varepsilon),r)-\\-(1-\varepsilon)^{2-k}\varphi_{k,v}(r(1+\varepsilon))K_2(r(1+\varepsilon),r)\Big\}=J_\varepsilon^1(r)+J_\varepsilon^2(r).\end{gathered}\tag{3.11}$$

Вычисляя предел второго слагаемого, имеем:

$$\lim_{\varepsilon\to0}J_\varepsilon^2(r)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\varphi_{k,v}(r)\lim_{\varepsilon\to0}\left\{\int\limits_0^{\frac{r^2(1-\varepsilon)^2-a^2}{r^2((1+\varepsilon)^2-1)}}s^{\alpha-1}(1+s)^{-\alpha}((1-\varepsilon)^2-(1-(1-\varepsilon)^2)s)^{\frac{n}{2}+k-1}ds-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^{\frac{r^2-a^2}{r^2(1-(1-\varepsilon)^2)}}s^{-\alpha}(1+s)^{\alpha-1}(1-((1+\varepsilon)^2-1)s)^{\frac{n}{2}+k-1}ds\right\}.$$

Здесь возможен предельный переход под знаком интеграла на основании мажорантной теоремы Лебега. Получим

$$\lim_{\varepsilon\to0}J_\varepsilon^2(r)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\varphi_{k,v}(r)\int\limits_0^\infty\left[\frac{s^{\alpha-1}}{(1+s)^\alpha}-\frac{(1+s)^{\alpha-1}}{s^\alpha}\right]ds=\cos\alpha\pi\varphi_{k,v}(r)\tag{3.12}$$

в силу [4, формулы 2.2 и 12.3, с. 317].

Переходим к вычислению предела $\lim\limits_{\varepsilon\to0}J_\varepsilon^1(r)$. Известна формула

$$\frac{d}{dy}\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f(x,y)dx=\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f_y'(x,y)dx+\psi'(y)f(\psi(y),y)-\varphi'(y)f(\varphi(y),y),$$

в силу которой

$$[K_1(\xi,r)]_r'=\frac{2r(\frac{n}{2}+k-1)}{\xi^2-r^2}\int\limits_0^{\xi^2-a^2}\left(\frac{y}{r^2-\xi^2+y}\right)^\alpha(\xi^2-y)^{\frac{n}{2}+k-2}dy+\frac{2ra^{2k+n-2}}{\xi^2-r^2}\left(\frac{\xi^2-a^2}{r^2-a^2}\right)^\alpha,$$

$$[K_2(\xi,r)]_r'=\frac{2r(\frac{n}{2}+k-1)}{\xi^2-r^2}\int\limits_0^{r^2-a^2}\left(\frac{\xi^2-r^2+y}{y}\right)^\alpha(r^2-y)^{\frac{n}{2}+k-2}dy+\frac{2ra^{2k+n-2}}{\xi^2-r^2}\left(\frac{\xi^2-a^2}{r^2-a^2}\right)^\alpha.$$

Поэтому слагаемое $J_\varepsilon^1(r)$ из (3.11) имеет вид

$$\begin{gathered}J_\varepsilon^1(r)=\frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}\left\{\left(\int\limits_a^{r(1-\varepsilon)}+\int\limits_{r(1+\varepsilon)}^b\right)\frac{\xi^{1-k}a^{2k+n-2}}{\xi^2-r^2}r^{2-k-n}\left(\frac{\xi^2-a^2}{r^2-a^2}\right)^\alpha\varphi_{k,v}(\xi)d\xi+\right.\\ \left.+\int\limits_a^{r(1-\varepsilon)}\frac{Q_k(\xi,r)}{\xi^2-r^2}\varphi_{k,v}(\xi)\xi^{n-1}d\xi+\int\limits_{r(1+\varepsilon)}^b\frac{P_k(\xi,r)}{\xi^2-r^2}\varphi_{k,v}(\xi)\xi^{n-1}d\xi\right\},\end{gathered}\tag{3.13}$$

где $Q_k(\xi,r)$, $P_k(\xi,r)$ — функции (3.6) и (3.7). Прямые вычисления показывают, что

$$Q_k(r,r)=P_k(r,r)=\frac{r^{n+2k-2}-a^{n+2k-2}}{r^{2n+2k-4}}.$$

Это означает, что при переходе к пределу в (3.13) мы можем интерпретировать интеграл

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left(\int\limits_a^{r(1-\varepsilon)}+\int\limits_{r(1+\varepsilon)}^b\right)=\int\limits_a^b$$

в смысле главного значения и записать, что

$$\begin{gathered}\lim_{\varepsilon\to0}J_\varepsilon^1(r)=\frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{a}{r}\right)^{n-2}\times\\ \times\times\int\limits_a^b\left(\frac{\xi^2-a^2}{r^2-a^2}\right)^\alpha\frac{\varphi_{k,v}(\xi)}{\xi^2-r^2}\left(\frac{a^2}{\xi\,r}\right)^k\xi\,d\xi+\frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_a^b\frac{R_k(\xi,r)}{\xi^2-r^2}\varphi_{k,v}(\xi)\xi^{n-1}d\xi,\end{gathered}\tag{3.14}$$

где $R_k(\xi,r)$ — функция (3.5).

В силу (3.12), (3.14) мы получаем из (3.9) и (3.11):

$$\begin{gathered}((B_{a+}^\alpha)^{-1}B_{b-}^\alpha\varphi)_{k,v}(r)=\cos\alpha\pi\,\varphi_{k,v}(r)+\\ +\frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{a}{r}\right)^{n-2}\int\limits_a^b\left(\frac{\xi^2-a^2}{r^2-a^2}\right)^\alpha\frac{\varphi_{k,v}(\xi)}{\xi^2-r^2}\left(\frac{a^2}{\xi\,r}\right)^k\xi\,d\xi+\\ +\frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_a^b\frac{R_k(\xi,r)}{\xi^2-r^2}\varphi_{k,v}(\xi)\xi^{n-1}d\xi.\end{gathered}\tag{3.15}$$

Так как

$$((B_{a+}^\alpha)^{-1}B_{b-}^\alpha\varphi)(x)\sim\sum_{k,v}((B_{a+}^\alpha)^{-1}B_{b-}^\alpha\varphi)_{k,v}(r)Y_{k,v}(x'),$$

то согласно (3.15) получаем (на достаточно хороших функциях $\varphi(x)$)

$$\begin{gathered}((B_{a+}^\alpha)^{-1}B_{b-}^\alpha\varphi)(x)=\cos\alpha\pi\varphi(x)+\frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{a}{|x|}\right)^{n-2}\int\limits_a^b\left(\frac{\xi^2-a^2}{r^2-a^2}\right)^\alpha\frac{\xi}{\xi^2-r^2}d\xi\times\\ \times\int\limits_{S^{n-1}}\varphi(\xi,y')\sum_{k,v}\left(\frac{a^2}{\xi\,r}\right)^kY_{k,v}(x')Y_{k,v}(y')d\sigma(y')+\\ +\frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_a^b\frac{\xi^{n-1}}{\xi^2-r^2}d\xi\int\limits_{S^{n-1}}\varphi(\xi,y')\sum_{k,v}R_k(\xi,r)Y_{k,v}(y')Y_{k,v}(x')d\sigma(y').\end{gathered}\tag{3.16}$$

В силу формулы сложения для сферических гармоник (см., например, [11, с. 38]) и с учетом равенства из [10, с. 165]

$$P(x',\xi z')=\sum_{k,v}\xi^k Y_{k,v}(x')Y_{k,v}(z'),\quad 0<\xi<1,$$

где $P(x',\xi z')$ — функция (3.4), из (3.16) имеем

$$(B^\alpha_{a+})^{-1}B^\alpha_{b-}\varphi(x)=\cos\alpha\pi\varphi(x)+\frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{a}{|x|}\right)^{n-2}\int\limits_a^b\left(\frac{\xi^2-a^2}{r^2-a^2}\right)^\alpha\frac{1}{\xi^{n-2}}\frac{\xi^{n-1}d\xi}{\xi^2-r^2}\times$$

$$\times\int\limits_{S^{n-1}}\varphi(\xi,y')P(x',\frac{a^2}{\xi\, r}y')d\sigma(y')+$$

$$+\frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_a^b\frac{\xi^{n-1}}{\xi^2-r^2}d\xi\int\limits_{S^{n-1}}\varphi(\xi,y')\frac{2}{\omega_{n-1}\,(n-2)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n}{2}+k-1\right)C_k^{\frac{n}{2}-1}(x'y')R_k(\xi,r)d\sigma(y'),$$

откуда и вытекает равенство (3.1).

Тождество (3.2) устанавливается точно также, как тождество (3.1). □

Теорема 3.1. *Пусть* $0<\alpha<1,\varphi\in L_p\left(U\left(a,b\right),\omega\right),1<p<\infty$. *Тогда о.ш.п.* $B^\alpha_{a+},B^\alpha_{b-}$ *и сингулярные операторы* N^α_a, N^b_a *связаны между собой соотношениями*:

$$B^\alpha_{b-}\varphi=\cos\alpha\pi B^\alpha_{a+}\varphi+\sin\alpha\pi B^\alpha_{a+}N^\alpha_a\varphi, \tag{3.17}$$

$$B^\alpha_{a+}\varphi=\cos\alpha\pi B^\alpha_{b-}\varphi-\sin\alpha\pi B^\alpha_{b-}N^\alpha_b\varphi, \tag{3.18}$$

где N^α_a, N^α_b — *сингулярные операторы* (3.3), (3.7).

Доказательство. Пусть вначале $\varphi\in C^\infty_{0,0}\left(U\left(a,b\right)\right)$. Тождество (3.17) вытекает из (3.1), поскольку $B^\alpha_{a+}(B^\alpha_{a+})^{-1}f=f$, но может быть проверено и непосредственной перестановкой порядка интегрирования в правой части в (3.17). Соотношение (3.18) вытекает из (3.2). Подобным же образом обосновывается равенство (3.18).

Итак, тождества (3.17) и (3.18) установлены для $\varphi\in C^\infty_{0,0}(U(a,b))$. Операторы N^α_a, N^b_a ограничены в L_p при $1<p<\infty$ в силу теоремы 2.2. Тогда ввиду ограниченности операторов $B^\alpha_{a+},B^\alpha_{b-}$ из $L_p\left(U\left(a,b\right),\omega\right)$ в $L_p\left(U\left(a,b\right),\omega\right)$ (см. лемму 2.2) можно сделать вывод о справедливости тождеств (3.17) и (3.18) на плотном в L_p множестве $\varphi\in C^\infty_{0,0}$. Ввиду теоремы Банаха получаем их справедливость на всех функциях $\varphi\in L_p\left(U\left(a,b\right),\omega\right),1<p<\infty$. □

3.2. Сведения об односторонних шаровых потенциалах типа Чженя.

Определение 3.1. Зафиксируем произвольную точку $c\in\mathbb{R}^1_+$, и для функции $\varphi(x)$, заданной на $\mathbb{R}^n$, интегралы

$$(B^\alpha_c\varphi)(x):=\begin{cases}\gamma_{n,\alpha}\displaystyle\int\limits_{c<|y|<|x|}\frac{\left(|x|^2-|y|^2\right)^\alpha}{|x-y|^n}\varphi\left(y\right)dy, & |x|>c,\\ \gamma_{n,\alpha}\displaystyle\int\limits_{|x|<|y|<c}\frac{\left(|y|^2-|x|^2\right)^\alpha}{|x-y|^n}\varphi\left(y\right)dy, & |x|<c\end{cases} \tag{3.19}$$

будем называть *односторонними шаровыми потенциалами порядка* $\alpha\,(\alpha>0)$ *типа Чженя.*

Введя функции

$$\left(P_{c+}\varphi\right)\ (x)=\varphi_{c+}(x)=\begin{cases}\varphi(x), & |x|>c,\\ 0, & |x|<c,\end{cases}$$

$$\left(P_{c-}\varphi\right)(x)=\varphi_{c-}(x)=\begin{cases}0, & |x|>c,\\ \varphi(x), & |x|<c\end{cases}$$

можно записать односторонние шаровые потенциалы порядка $\alpha\,(\alpha > 0)$ типа Чженя (3.19) в виде

$$(B_c^\alpha\varphi)(x) = (B_+^\alpha\varphi_{c+})(x) + (B_-^\alpha\varphi_{c-})(x)$$

или в операторной форме

$$B_c^\alpha = B_+^\alpha P_{c+} + B_-^\alpha P_{c-} = P_{c+}B_+^\alpha P_{c+} + P_{c-}B_-^\alpha P_{c-}. \tag{3.20}$$

Из (3.20) нетрудно заключить, что операторы B_c^α обладают полугрупповым свойством:

$$B_c^\alpha B_c^\beta\varphi = B_c^{\alpha+\beta}\varphi$$

для любой локально интегрируемой функции $\varphi(t)$ и $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Теорема 3.2. *Пусть $f\,(x)$ представима в виде $f\,(x) = (B_c^\alpha\varphi)\,(x))$, где $\varphi \in L_p\,(U\,(a,b))$, $1 < p < \dfrac{n}{2\alpha}$. Тогда*

$$f\,(x) = \left(B_+^\alpha\psi_C\right)(x),$$

$$\psi_c(x) = N_c\varphi = \nu_c\,(x)\,\varphi\,(x) + \frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_{|x|<c}\frac{G\left(\frac{|y|}{|x|}, x'y'\right)}{|y|^2-|x|^2}\frac{\varphi\,(y)}{|y|^{n-2}}dy, \tag{3.21}$$

где $\nu_c\,(x) = 1$ при $x > c$ и $\nu_c\,(x) = \cos\alpha\pi$ при $x < c$, а $\psi_c(x) \in L_p\,(U\,(a,b))$. Если $\varphi \in L_p\,(\mathbb{R}^n)$, то и $\psi_c(x) \in L_p\,(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. В равенстве (3.20) заменим B_-^α по формуле (2.9) с учетом $SB_+^\alpha\varphi = B_+^\alpha S\varphi$ на B_+^α. Тогда получим

$$B_c^\alpha\varphi = B_+^\alpha[P_{c+}\varphi + \cos\alpha\pi\,P_{c-}\varphi + \sin\alpha\pi\,SP_{c-}\varphi],$$

что совпадает с (3.21). Оператор

$$N_c = P_{c+} + \cos\alpha\pi P_{c-} + \sin\alpha\pi\,SP_{c-}$$

ограничен в $L_p\,(\mathbb{R}^n)$ согласно теореме 2.2. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. — М.: Наука, 1965.
2. *Килбас А. А.* Об интегральных уравнениях первого рода с логарифмическими ядрами произвольного порядка// Докл. АН БССР. — 1977. — *21*, № 12. — С. 1078–1081.
3. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
4. *Прудников А. Г., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды: элементарные функции. — М.: Наука, 1981.
5. *Рубин Б. С.* Общий метод исследования на непрерывность операторов типа потенциала со степенно-логарифмическими ядрами на конечном отрезке// Изв. АН АрмССР. Мат. — 1977. — *12*, № 6. — С. 447–461.
6. *Рубин Б. С.* Односторонние шаровые потенциалы и обращение потенциалов Рисса по n-мерному шару и его внешности// Деп. ВИНИТИ. — 1984. — 18.07.84, № 5150.
7. *Рубин Б. С.* Обращение потенциалов Рисса по n-мерному шару и его внешности// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1985. — № 6. — С. 81–85.
8. *Рубин Б. С.* Гармонический анализ операторов, коммутирующих с вращениями и растяжениями в $\mathbb{R}^n$// Деп. ВИНИТИ. — 1988. — 6.01.88, № 294.
9. *Самко С. Г.* Обобщенное уравнение Абеля и уравнение с ядром Коши// Докл. АН СССР. — 1967. — *176*, № 5. — С. 1019–1022.
10. *Самко С. Г.* Об обобщенном уравнении Абеля и операторах дробного интегрирования// Дифф. уравн. — 1968. — *4*, № 2. — С. 298–314.
11. *Самко С. Г.* Гиперсингулярные интегралы и их приложения. — Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1984.
12. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
13. *Самко С. Г., Яхшибоев М. У.* Связи между односторонними шаровыми потенциалами через радиально сингулярные операторы// Деп. ВИНИТИ. — 1992. — 16.01.91, № 172.
14. *Стейн Е. М., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. — М.: Мир, 1974.

15. *Kober H.* A modification of Hilbert transforms, the Weyl integral and functional equations// J. London Math. Soc. — 1967. — *42*, № 1. — С. 42–50.
16. *Rubin B. S.* Fractional integrals and weakly singular equations of the first king in the n-dimensional ball// J. Anal. Math. — 1994. — *63*. — С. 55–102.
17. *Rubin B. S.* Fractional integrals and potential. — Harlow—Essex: Addison Wesley Longman, 1996.
18. *von Wolfersdorf L.* Über eine Beziehung zwischen Integralen nichtganzer Ordnung// Math. Z. — 1965. — *90*, № 1. — С. 24–28.

М. У. Яхшибоев
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 700174, г. Ташкент, ВУЗ городок
E-mail: yaxshiboyev@rambler.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-4-736-748 UDC 517.983

Relation between One-Sided Ball Potentials

© 2018 **M. U. Yakhshiboev**

Abstract. In this paper, we establish the relation between one-sided ball potentials by means of radially singular operators in a spherical layer. Moreover, we construct new Chern-type one-sided ball potentials.

REFERENCES

1. H. Bateman and A. Erdélyi, *Vysshie transtsendentnye funktsii. T.* 1 [Higher transcendental functions. Vol. 1], Nauka, Moscow, 1965 (Russian translation).
2. A. A. Kilbas, “Ob integral’nykh uravneniyakh pervogo roda s logarifmicheskimi yadrami proizvol’nogo poryadka” [On integral equations of the first kind with logarithmic kernels of arbitrary type], *Dokl. AN BSSR* [Rep. Acad. Sci. Belorus. SSR], 1977, **21**, No. 12, 1078–1081 (in Russian).
3. A. M. Nakhushev, *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional Calculus and Its Application], Fizmatlit, Moscow, 2003 (in Russian).
4. A. G. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, and O. I. Marichev, *Integraly i ryady: elementarnye funktsii* [Integrals and Series: Elementary Functions], Nauka, Moscow, 1981 (in Russian).
5. B. S. Rubin, “Obshchiy metod issledovaniya na nepreryvnost’ operatorov tipa potentsiala so stepenno-logarifmicheskimi yadrami na konechnom otrezke” [General method of investigation of continuity for potential-type operators with power-logarithmic kernels on a finite segment], *Izv. AN ArmSSR. Mat.* [Bull. Acad. Sci. Arm. SSR. Math.], 1977, **12**, No. 6, 447–461 (in Russian).
6. B. S. Rubin, “Odnostoronnie sharovye potentsialy i obrashchenie potentsialov Rissa po n-mernomu sharu i ego vneshnosti” [One-sided ball potentials and inversion of Riesz potentials with respect to an n-dimensional sphere and its exterior], *Dep. VINITI*, 1984, 18.07.84, No. 5150 (in Russian).
7. B. S. Rubin, “Obrashchenie potentsialov Rissa po n-mernomu sharu i ego vneshnosti” [Inversion of Riesz potentials with respect to an n-dimensional sphere and its exterior], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1985, No. 6, 81–85 (in Russian).
8. B. S. Rubin, “Garmonicheskiy analiz operatorov, kommutiruyushchikh s vrashcheniyami i rastyazheniyami v $\mathbb{R}^n$” [Harmonic analysis of operators commuting with rotations and dilatations in $\mathbb{R}^n$], *Dep. VINITI*, 1988, 6.01.88, No. 294 (in Russian).
9. S. G. Samko, “Obobshchennoe uravnenie Abelya i uravnenie s yadrom Koshi” [Generalized Abel equation and an equation with the Cauchy kernel], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1967, **176**, No. 5, 1019–1022 (in Russian).
10. S. G. Samko, “Ob obobshchennom uravnenii Abelya i operatorakh drobnogo integrirovaniya” [On generalized Abel equation and operators of fractional integration], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1968, **4**, No. 2, 298–314 (in Russian).

11. S. G. Samko, *Gipersingulyarnye integraly i ikh prilozheniya* [Hypersingular Integrals and Their Applications], Rostov Univ., Rostov-na-Donu, 1984 (in Russian).
12. S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some Their Applications], Nauka i tekhnika, Minsk, 1987 (in Russian).
13. S. G. Samko and M. U. Yakhshiboev, "Svyazi mezhdu odnostoronnimi sharovymi potentsialami cherez radial'no singulyarnye operatory" [Relations between one-sided ball potentials via radially singular operators], *Dep. VINITI*, 1992, 16.01.91, No. 172 (in Russian).
14. E. M. Stein and G. Weiss, *Vvedenie v garmonicheskiy analiz na evklidovykh prostranstvakh* [Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces], Mir, Moscow, 1974 (Russian translation).
15. H. Kober, "A modification of Hilbert transforms, the Weyl integral and functional equations," *J. London Math. Soc.* , 1967, **42**, No. 1, 42–50.
16. B. S. Rubin, "Fractional integrals and weakly singular equations of the first king in the n-dimensional ball," *J. Anal. Math.*, 1994, **63**, 55–102.
17. B. S. Rubin, *Fractional integrals and potential*, Addison Wesley Longman, Harlow—Essex, 1996.
18. L. von Wolfersdorf, "Über eine Beziehung zwischen Integralen nichtganzer Ordnung," *Math. Z.*, 1965, **90**, No. 1, 24–28.

M. U. Yakhshiboev
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: yaxshiboyev@rambler.ru