РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 64, № 3, 2018

Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-3
http://journals.rudn.ru/cmfd

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print)
4 выпуска в год
http://journals.rudn.ru/cmfd
Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.
Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.
Индексируется в международных базах данных научных публикаций *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.
Полный текст журнала размещен в базах данных компании *EBSCO Publishing* на платформе *EBSCOhost*.
Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты. Объем статьи, занимающий целый том, должен составлять 140–190 страниц в стиле нашего журнала.

Правила оформления статей, архив публикаций и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала на Общероссийском математическом портале: http://www.mathnet.ru/cmfd.

Редактор: *Е. М. Варфоломеев*
Компьютерная верстка: *Е. М. Варфоломеев*

Адрес редакции:
115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: journal.cmfd@gmail.com

Подписано в печать 28.08.2018. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.
Усл. печ. л. 19,53. Тираж 150 экз. Заказ 1231.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов» (РУДН)
117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН
115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 952-04-41; e-mail: ipk@rudn.university

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 64, No. 3, 2018

Proceedings of the Crimean Autumn Mathematical School-Symposium

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-3

http://journals.rudn.ru/cmfd

Founded in 2003

Founder: PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS
Published by the Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print)
4 issues per year
http://journals.rudn.ru/cmfd
Reviewed in *MathSciNet* and *Zentralblatt Math*.
The full texts can be found in the *EBSCOhost* databases by *EBSCO Publishing*.
Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results. Occupying the whole volume, an article should make up 140–190 pages in the format of the journal.

Guidelines for authors, archive of issues, and other information can be found at the journal's website at *All-Russian Mathematical Portal*: http://www.mathnet.ru/eng/cmfd.

Editor: *E. M. Varfolomeev*
Computer design: *E. M. Varfolomeev*
Address of the Editorial Office:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: journal.cmfd@gmail.com
Printing run 150 copies.
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia
Printed at RUDN Publishing House:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: ipk@rudn.university

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 3 (2018). С. 427–458

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-3-427-458 УДК 517.984

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С УСЛОВИЯМИ РАЗРЫВА

© 2018 г. **С. А. БУТЕРИН**

Аннотация. Рассматривается возмущение интегральным оператором свертки оператора Штурма—Лиувилля на конечном интервале с краевыми условиями Дирихле и условиями разрыва в середине интервала. Исследуется обратная задача восстановления сверточного слагаемого по спектру. Вопрос сведен к решению так называемого основного нелинейного интегрального уравнения с особенностью, для вывода и исследования которого проведен детальный анализ ядер операторов преобразования для рассматриваемого интегро-дифференциального выражения. Доказывается глобальная разрешимость основного уравнения, что позволяет доказать единственность решения обратной задачи и получить необходимые и достаточные условия ее разрешимости в терминах асимптотики спектра. Доказательство конструктивно и дает алгоритм решения обратной задачи.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

1.1. Предварительные сведения. Обратные задачи спектрального анализа заключаются в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам. Такие задачи часто возникают в математике, механике, физике, электронике, геофизике, метеорологии и других областях естествознания и техники. Наиболее полные результаты в теории обратных задач получены для дифференциальных операторов Штурма—Лиувилля и Дирака (см. монографии [10, 12, 18, 27, 47] и литературу в них), а в последствии — и для дифференциальных операторов высших порядков, а также для дифференциальных систем с произвольным расположением характеристических чисел главной части [17–19, 46, 47]. Однако классические методы решения обратных задач (такие, как метод оператора преобразования [10, 12, 18, 27] и метод спектральных отображений [17, 18, 27, 46, 47]), которые для дифференциальных операторов позволяют получить глобальное решение обратных задач вместе с необходимыми и достаточными условиями их разрешимости, не работают для интегро-дифференциальных и других классов нелокальных операторов. Поэтому общая теория обратных задач для интегро-дифференциальных операторов еще не построена, а имеются лишь отдельные фрагменты, не составляющие общей картины [2–4, 6, 8, 11, 14, 15, 20–26, 31, 32, 34, 36, 41, 48–50]. В то же время, интегро-дифференциальные операторы представляют значительный интерес в связи с многочисленными приложениями (см., например, [35]).

1.2. Постановка задачи. В работе исследуется обратная задача для интегро-дифференциального оператора ℓ, соответствующего следующей краевой задаче $L = L(q, M, \alpha_0, \alpha_1, \beta)$ с условиями разрыва в середине интервала:

$$\ell y = -y'' + q(x)y + \int\limits_0^x M(x-t)y(t)\,dt = \lambda y, \quad x \in \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big) \cup \Big(\frac{\pi}{2}, \pi\Big), \tag{1.1}$$

$$y\Big(\frac{\pi}{2}+0\Big) = \alpha_0 y\Big(\frac{\pi}{2}-0\Big), \quad y'\Big(\frac{\pi}{2}+0\Big) = \alpha_1 y'\Big(\frac{\pi}{2}-0\Big) + \beta y\Big(\frac{\pi}{2}-0\Big), \tag{1.2}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \tag{1.3}$$

где $q(x)$, $M(x)$ — комплекснозначные функции, такие что $q(x) \in L_2(0,\pi)$ и

$$(\pi - x)M(x) \in L_2(0,\pi), \tag{1.4}$$

а α_0, α_1, β — комплексные числа, причем выполняется условие регулярности $\alpha_0 + \alpha_1 \neq 0$.

Пусть $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — спектр краевой задачи L. Доказывается следующая теорема.

Теорема 1.1. *Собственные значения λ_k, $k \in \mathbb{N}$, задачи L имеют вид*

$$\lambda_k = \Big(k + \frac{\omega_1 - (-1)^k \omega_2}{\pi k} + \frac{\varkappa_k}{k}\Big)^2, \quad \{\varkappa_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in l_2, \tag{1.5}$$

где

$$\omega_1 = \frac{\beta}{\alpha_0+\alpha_1} + \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(x)\,dx, \quad \omega_2 = \frac{\beta}{\alpha_0+\alpha_1} + \frac{\alpha_0-\alpha_1}{2(\alpha_0+\alpha_1)}\Big(\int\limits_{\pi/2}^{\pi} q(x)\,dx - \int\limits_0^{\pi/2} q(x)\,dx\Big). \tag{1.6}$$

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Задача 1.1. По заданному спектру $\{\lambda_k\}_{k\geqslant 1}$ краевой задачи L вида (1.1)–(1.3) найти функцию $M(x)$ в предположении, что потенциал $q(x)$ и параметры разрыва $\alpha_0, \alpha_1, \beta$ известны априори.

1.3. История вопроса и основной результат работы. Присутствие разрыва в математической модели связано с разрывными свойствами материалов или с наличием разрыва в соответствующем физическом процессе. Для дифференциальных операторов с условиями разрыва обратные задачи исследовались в [16, 28, 29, 33, 37–40, 42–45]. Различные аспекты обратных задач для интегро-дифференциальных операторов без разрыва изучались в [2, 6, 8, 11, 14, 15, 20–22, 24–26, 31, 32, 34, 41, 48–50]. В частности, в [2, 11, 15] задача 1.1 исследовалась в случае, когда $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ и $\beta = 0$. Так, например, в [15] была установлена единственность ее решения, локальная разрешимость и устойчивость. В [2] было построено глобальное решение задачи 1.1 и получены необходимые и достаточные условия ее разрешимости в терминах асимптотики спектра. При этом в [2] использовался иной, нежели в [15], метод (см. также [22] для случая $q(x) \equiv const$), основанный на сведении обратной задачи к так называемому основному нелинейному интегральному уравнению с особенностью, которое было решено глобально. В дальнейшем, развивая идеи этого метода, были исследованы обратные задачи для интегро-дифференциальных систем Дирака [21], для интегро-дифференциальных операторов на геометрическом графе [20], а также для скалярных интегро-дифференциальных операторов дробных порядков [31, 32].

Целью настоящей работы является доказательство единственности решения задачи 1.1, а также получение необходимых и достаточных условий ее разрешимости в случае наличия разрыва (1.2) у решения соответствующей краевой задачи. При этом, как будет видно из дальнейшего, необходимо наложить на параметры разрыва следующее дополнительное ограничение:

$$\alpha_0 + \alpha_1 \notin (-\infty, 0]. \tag{1.7}$$

Доказывается следующая теорема.

Теорема 1.2. *Пусть задана произвольная комплекснозначная функция $q(x) \in L_2(0,\pi)$ и комплексные числа α_0, α_1, β, причем выполнено* (1.7)*. Тогда для всякой последовательности комплексных чисел $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ вида* (1.5), (1.6) *существует единственная* (*с точностью до значений на множестве нулевой меры*) *функция $M(x)$, $(\pi - x)M(x) \in L_2(0,\pi)$, такая что последовательность $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ является спектром соответствующей краевой задачи $L(q, M, \alpha_0, \alpha_1, \beta)$.*

Таким образом, асимптотика (1.5), (1.6) *является необходимым и достаточным условием разрешимости обратной задачи.*

Доказательство теоремы 1.2 конструктивно и дает алгоритм решения обратной задачи (см. ниже алгоритм 6.1). Использованный метод позволяет получить аналогичные результаты и для произвольного конечного набора точек разрыва.

Отметим, что обратные задачи для интегро-дифференциальных операторов с условиями разрыва исследовались также в [3,4,23,36]. При этом в [3,23] рассматривались операторы первого порядка, а в [4,36] — второго. В [36] исследовался вопрос единственности решения обратной задачи в специальном случае, когда терпит разрыв только y', но его величина зависит от λ. В [4] установлена единственность решения и получены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи в случае $q(x)=0$, но в более широком классе сверточных ядер, а именно когда под интегралом в (1.1) вместо $y(t)$ присутствует $y'(t)$. Следует отметить, что случай $q(x)\neq 0$ значительно более трудный.

1.4. О структуре работы. В следующем разделе исследуется характеристическая функция краевой задачи L и доказывается теорема 1.1. Для этих целей используется специальное решение уравнения (1.1), а также строятся операторы преобразования, связанные с соответствующим интегро-дифференциальным выражением. В разделе 3 устанавливаются дополнительные свойства ядер операторов преобразования, которые будут использованы в дальнейшем при доказательстве разрешимости обратной задачи. В разделе 4 выводится основное нелинейное интегральное уравнение обратной задачи и отыскивается его решение на первой половине интервала. В разделе 5 находится решение основного уравнения на второй половине интервала, при этом центральным местом является исследование особенности некоторого линейного интегрального уравнения Вольтерра третьего рода. В разделе 6 доказывается теорема 1.2 и приводится конструктивная процедура решения обратной задачи.

2. Характеристическая функция и операторы преобразования

2.1. Характеристическая функция. Построим решение $y=U(x,\lambda)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям
$$U(0,\lambda)=0,\quad U'(0,\lambda)=1, \tag{2.1}$$
а также условиям разрыва (1.2). Для этой цели рассмотрим непрерывно дифференцируемые решения $C(x,\lambda)=C(x,\lambda;q,M)$, $S(x,\lambda)=S(x,\lambda;q,M)$ уравнения (1.1), удовлетворяющие начальным условиям
$$C(0,\lambda)=S'(0,\lambda)=1,\quad C'(0,\lambda)=S(0,\lambda)=0. \tag{2.2}$$
Здесь и далее для того, чтобы подчеркнуть зависимость той или иной функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ от каких-либо функций $f_1,\ldots,f_m$, иногда будем писать $f(x_1,\ldots,x_n;f_1,\ldots,f_m)$. Непосредственной подстановкой в (1.1), (1.2) и (2.1) легко проверить, что функция $U(x,\lambda)$ имеет вид
$$U(x,\lambda)=\begin{cases} S(x,\lambda), \quad 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\\[2ex] S(x,\lambda)+(\alpha_0-1)S\Big(\dfrac{\pi}{2},\lambda\Big)C_1\Big(x-\dfrac{\pi}{2},\lambda\Big)+\\[2ex] \qquad +\Big((\alpha_1-1)S'\Big(\dfrac{\pi}{2},\lambda\Big)+\beta S\Big(\dfrac{\pi}{2},\lambda\Big)\Big)S_1\Big(x-\dfrac{\pi}{2},\lambda\Big), \quad \dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi,\end{cases} \tag{2.3}$$
где
$$C_1(x,\lambda)=C(x,\lambda;q_1,M),\quad S_1(x,\lambda)=S(x,\lambda;q_1,M),\quad q_1(x)=q\Big(x+\frac{\pi}{2}\Big),\quad 0<x<\frac{\pi}{2}. \tag{2.4}$$

Нетрудно видеть, что в силу единственности решения задачи Коши (1.1), (1.2), (2.1) собственные значения краевой задачи L совпадает с нулями целой функции
$$\Delta(\lambda):=U(\pi,\lambda) \tag{2.5}$$
с учетом кратности, которая называется *характеристической функцией* задачи L.

2.2. Операторы преобразования. В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Интегральные уравнения*

$$F(x,t,\tau)=F_0(x,t,\tau)+\frac{1}{2}\Big(\int\limits_t^x q(s)\,ds\int\limits_\tau^t F(s,\xi,\tau)\,d\xi+\int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^t q(s)\,ds\int\limits_\tau^{2s-t}F(s,\xi,\tau)\,d\xi-$$
$$-\int\limits_{\frac{\tau-t}{2}+x}^x q(s)\,ds\int\limits_\tau^{2(s-x)+t}F(s,\xi,\tau)\,d\xi+\int\limits_0^{t-\tau}M(s)\,ds\int\limits_t^x d\xi\int\limits_\tau^{t-s}F(\xi-s,\eta,\tau)\,d\eta+$$
$$+\int\limits_0^{t-\tau}M(s)\,ds\int\limits_{\frac{t+\tau+s}{2}}^t d\xi\int\limits_\tau^{2\xi-t-s}F(\xi-s,\eta,\tau)\,d\eta-$$
$$-\int\limits_0^{t-\tau}M(s)\,ds\int\limits_{\frac{s+\tau-t}{2}+x}^x d\xi\int\limits_\tau^{2(\xi-x)+t-s}F(\xi-s,\eta,\tau)\,d\eta\Big),\quad 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant x\leqslant\pi,\tag{2.6}$$

$$G(x,t,\tau)=G_0(x,t,\tau)+\frac{1}{2}\Big(\int\limits_0^{x-t}ds\int\limits_{\tau+s}^{t+s}q(\xi)G(\xi,\xi-s,\tau)\,d\xi+\int\limits_0^{\frac{t-\tau}{2}}ds\int\limits_{\tau+s}^{t-s}q(\xi)G(\xi,\xi-s,\tau)\,d\xi+$$
$$+\int\limits_{x-t}^{x-\frac{t+\tau}{2}}ds\int\limits_{\tau+s}^{2x-t-s}q(\xi)G(\xi,\xi-s,\tau)\,d\xi+\int\limits_0^{t-\tau}M(s)\,ds\int\limits_0^{x-t}d\xi\int\limits_\tau^{t-s}G(\xi+\eta,\eta,\tau)\,d\eta+$$
$$+\int\limits_0^{t-\tau}M(s)\,ds\int\limits_0^{\frac{t-\tau-s}{2}}d\xi\int\limits_\tau^{t-s-2\xi}G(\xi+\eta,\eta,\tau)\,d\eta+$$
$$+\int\limits_0^{t-\tau}M(s)\,ds\int\limits_{x-t}^{x-\frac{t+\tau+s}{2}}d\xi\int\limits_\tau^{2(x-\xi)-t-s}G(\xi+\eta,\eta,\tau)\,d\eta\Big),\quad 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant x\leqslant\pi,\tag{2.7}$$

с непрерывными свободными членами $F_0(x,t,\tau)$ *и* $G_0(x,t,\tau)$ *имеют единственные решения* $F(x,t,\tau)=F(x,t,\tau;q,M)$ *и* $G(x,t,\tau)=G(x,t,\tau;q,M)$, *соответственно, также являющиеся, в свою очередь, непрерывными функциями.*

Доказательство. Для уравнения (2.6) метод последовательных приближений дает

$$F(x,t,\tau)=\sum_{k=0}^\infty F_k(x,t,\tau),\tag{2.8}$$

где

$$F_{k+1}(x,t,\tau)=\frac{1}{2}\Big(\int\limits_t^x q(s)\,ds\int\limits_\tau^t F_k(s,\xi,\tau)\,d\xi+\int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^t q(s)\,ds\int\limits_\tau^{2s-t}F_k(s,\xi,\tau)\,d\xi-$$
$$-\int\limits_{\frac{\tau-t}{2}+x}^x q(s)\,ds\int\limits_\tau^{2(s-x)+t}F_k(s,\xi,\tau)\,d\xi+\int\limits_0^{t-\tau}M(s)\,ds\int\limits_t^x d\xi\int\limits_\tau^{t-s}F_k(\xi-s,\eta,\tau)\,d\eta+$$

$$+\int_0^{t-\tau} M(s)\,ds \int_{\frac{t+\tau+s}{2}}^{t} d\xi \int_\tau^{2\xi-t-s} F_k(\xi-s,\eta,\tau)\,d\eta-$$

$$-\int_0^{t-\tau} M(s)\,ds \int_{\frac{s+\tau-t}{2}+x}^{x} d\xi \int_\tau^{2(\xi-x)+t-s} F_k(\xi-s,\eta,\tau)\,d\eta\Big),\quad k\geqslant 0. \tag{2.9}$$

Положим

$$F_0:=\max_{0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant x\leqslant\pi}|F_0(x,t,\tau)|,\quad C=\int_0^\pi |q(s)|\,ds+\frac{3}{4}\int_0^\pi(\pi-s)|M(s)|\,ds.$$

Покажем, что

$$|F_k(x,t,\tau)|\leqslant F_0\frac{(Ct)^k}{k!},\quad 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant x\leqslant\pi,\quad k\geqslant 0. \tag{2.10}$$

В самом деле, при $k=0$ оценка (2.10) очевидна. Предполагая, что она верна при $k=j$ для некоторого $j\geqslant 0$, покажем ее справедливость и для $k=j+1$. Согласно (2.9) и (2.10), будем иметь

$$|F_{j+1}(x,t,\tau)|\leqslant\frac{1}{2}\Big(\int_{\frac{t+\tau}{2}}^{x}|q(s)|\,ds\int_\tau^t|F_j(s,\xi,\tau)|\,d\xi+\int_{\frac{\tau-t}{2}+x}^{x}|q(s)|\,ds\int_\tau^t|F_j(s,\xi,\tau)|\,d\xi+$$

$$+\int_0^{t-\tau}|M(s)|\,ds\int_{\frac{t+\tau+s}{2}}^{x}d\xi\int_\tau^t|F_j(\xi-s,\eta,\tau)|\,d\eta+\int_0^{t-\tau}|M(s)|\,ds\int_{\frac{s+\tau-t}{2}+x}^{x}d\xi\int_\tau^t|F_j(\xi-s,\eta,\tau)|\,d\eta\Big).$$

Поскольку в последних двух интегралах $2x-t-\tau-s\leqslant 2(\pi-s)$ и $t-\tau-s\leqslant\pi-s$, приходим к оценке

$$|F_{j+1}(x,t,\tau)|\leqslant F_0\frac{C^j}{2j!}\Big(\int_{\frac{t+\tau}{2}}^{x}|q(s)|\,ds\int_\tau^t\xi^j\,d\xi+\int_{\frac{\tau-t}{2}+x}^{x}|q(s)|\,ds\int_\tau^t\xi^j\,d\xi+$$

$$+\frac{3}{2}\int_0^{t-\tau}(\pi-s)|M(s)|\,ds\int_\tau^t\eta^j\,d\eta\Big)\leqslant F_0\frac{(Ct)^{j+1}}{(j+1)!},$$

которая совпадает с (2.10) для $k=j+1$. Таким образом, ряд (2.8) сходится равномерно в пирамиде $0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant x\leqslant\pi$, а значит, его сумма является решением уравнения (2.6).

Для единственности достаточно показать, что $F_0(x,t,\tau)\equiv 0$ влечет $F(x,t,\tau)\equiv 0$. В самом деле, при нулевом свободном члене определим $F_k(x,t,\tau)$ по формулам (2.9), положив $F_0(x,t,\tau):=F(x,t,\tau)$. Тогда, очевидно, $F_k(x,t,\tau)=F(x,t,\tau)$ для всех $k\geqslant 0$, и в силу (2.10) приходим к $F(x,t,\tau)\equiv 0$.

Для уравнения (2.7) рассуждения аналогичны. □

Заметим, что в уравнениях (2.6) и (2.7) переменная τ фактически является параметром, т. е. утверждение леммы 2.1 останется справедливым, если зафиксировать $\tau\in[0,\pi)$.

Следующая лемма дает операторы преобразования для функций $S(x,\lambda)$ и $C(x,\lambda)$.

Лемма 2.2. *Положим $\rho^2=\lambda$. Имеют место следующие представления*:

$$S(x,\lambda)=\frac{\sin\rho x}{\rho}+\int_0^x P(x,t)\frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}\,dt, \tag{2.11}$$

$$C(x,\lambda)=\cos\rho x+\int_0^x Q(x,t)\cos\rho(x-t)\,dt, \tag{2.12}$$

где функции

$$P(x,t)=P(x,t;q,M)=F(x,t,0;q,M),\quad Q(x,t)=Q(x,t;q,M)=G(x,t,0;q,M) \tag{2.13}$$

являются решениями уравнений (2.6) *и* (2.7)*, соответственно, при* $\tau=0$ *и*

$$F_0(x,t,0)=\frac{1}{2}\Big(\int\limits_{\frac{t}{2}}^{x-\frac{t}{2}} q(s)\,ds+\int\limits_0^t (x-t)M(s)\,ds\Big), \tag{2.14}$$

$$G_0(x,t,0)=\frac{1}{2}\Big(\int\limits_0^{x-\frac{t}{2}} q(s)\,ds+\int\limits_0^{\frac{t}{2}} q(s)\,ds+\int\limits_0^t (x-s)M(s)\,ds\Big).$$

При этом функции $P(x,t)$ *и* $Q(x,t)$ *непрерывны в треугольнике* $0\leqslant t\leqslant x\leqslant\pi$*. Кроме того,* $P(x,\cdot\,)$, $Q(x,\cdot\,)\in W_2^1[0,x]$ *для всех* $x\in(0,\pi]$ *и* $P(\,\cdot,t)$, $Q(\,\cdot,t)\in W_2^1[t,\pi]$ *для всех* $t\in[0,\pi)$*, а также*

$$P(x,0)=Q(x,0)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt,\quad P(x,x)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant\pi. \tag{2.15}$$

Доказательство. Подстановкой легко проверить, что задача Коши (1.1), (2.2) для функции $y=S(x,\lambda)$ равносильна интегральному уравнению

$$S(x,\lambda)=\frac{\sin\rho x}{\rho}+\int\limits_0^x \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}\Big(q(t)S(t,\lambda)+\int\limits_0^t M(t-s)S(s,\lambda)\,ds\Big)\,dt. \tag{2.16}$$

Подставляя искомое представление (2.11) в уравнение (2.16) и умножая на ρ, получим

$$\int\limits_0^x P(x,t)\sin\rho(x-t)\,dt=\sum_{\nu=1}^4 \mathcal{P}_\nu(x,\lambda), \tag{2.17}$$

где

$$\mathcal{P}_1(x,\lambda)=\int\limits_0^x \sin\rho(x-t)q(t)\,dt\int\limits_0^t \cos\rho s\,ds,$$

$$\mathcal{P}_2(x,\lambda)=\int\limits_0^x \sin\rho(x-t)\,dt\int\limits_0^t M(t-s)\,ds\int\limits_0^s \cos\rho\xi\,d\xi,$$

$$\mathcal{P}_3(x,\lambda)=\int\limits_0^x \sin\rho(x-t)q(t)\,dt\int\limits_0^t P(t,t-s)\,ds\int\limits_0^s \cos\rho\xi\,d\xi,$$

$$\mathcal{P}_4(x,\lambda)=\int\limits_0^x \sin\rho(x-t)\,dt\int\limits_0^t M(t-s)\,ds\int\limits_0^s P(s,s-\xi)\,d\xi\int\limits_0^\xi \cos\rho\eta\,d\eta.$$

Поскольку

$$\sin\rho(x-t)\cos\rho s=\frac{1}{2}\Big(\sin\rho(x-t+s)+\sin\rho(x-t-s)\Big),$$

преобразуя переменные и меняя порядок интегрирования, получаем

$$\mathcal{P}_1(x,\lambda)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt\int\limits_{x-2t}^x \sin\rho s\,ds=\frac{1}{2}\int\limits_0^x \sin\rho(x-t)\,dt\int\limits_{\frac{t}{2}}^{x-\frac{t}{2}} q(s)\,ds, \tag{2.18}$$

$$\mathcal{P}_2(x,\lambda)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x\Big(\int\limits_{x-t}^x\sin\rho s\,ds\int\limits_0^{x-s}M(\xi)\,d\xi+\int\limits_{x-2t}^{x-t}\sin\rho s\,ds\int\limits_0^{2t-x+s}M(\xi)\,d\xi\Big)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^x\sin\rho t\,dt\int\limits_{x-t}^x ds\int\limits_0^{x-t}M(\xi)\,d\xi=\frac{1}{2}\int\limits_0^x(x-t)\sin\rho(x-t)\,dt\int\limits_0^t M(s)\,ds,\quad(2.19)$$

$$\mathcal{P}_3(x,\lambda)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt\Big(\int\limits_{x-t}^x\sin\rho s\,ds\int\limits_{s-x+t}^t P(t,t-\xi)\,d\xi+$$

$$+\int\limits_{x-2t}^{x-t}\sin\rho s\,ds\int\limits_{x-t-s}^t P(t,t-\xi)\,d\xi\Big)dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^x\sin\rho(x-t)\Big(\int\limits_t^x q(s)\,ds\int\limits_0^t P(s,\xi)\,d\xi+$$

$$+\int\limits_{\frac{t}{2}}^t q(s)\,ds\int\limits_0^{2s-t}P(s,\xi)\,d\xi-\int\limits_{x-\frac{t}{2}}^x q(s)\,ds\int\limits_0^{2(s-x)+t}P(s,\xi)\,d\xi\Big)dt,\quad(2.20)$$

$$\mathcal{P}_4(x,\lambda)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x\Big(\int\limits_{x-t}^x\sin\rho s\,ds\int\limits_0^{x-s}M(\xi)\,d\xi\int\limits_0^{x-s-\xi}P(t-\xi,\eta)\,d\eta+$$

$$+\int\limits_{x-2t}^{x-t}\sin\rho s\,ds\int\limits_0^{2t-x+s}M(\xi)\,d\xi\int\limits_0^{2t-x+s-\xi}P(t-\xi,\eta)\,d\eta\Big)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^x\sin\rho(x-t)\Big(\int\limits_0^t M(s)\,ds\int\limits_t^x d\xi\int\limits_0^{t-s}P(\xi-s,\eta)\,d\eta+$$

$$+\int\limits_0^t M(s)\,ds\int\limits_{\frac{t+s}{2}}^t d\xi\int\limits_0^{2\xi-t-s}P(\xi-s,\eta)\,d\eta-\int\limits_0^t M(s)\,ds\int\limits_{\frac{s-t}{2}+x}^x d\xi\int\limits_0^{2(\xi-x)+t-s}P(\xi-s,\eta)\,d\eta\Big)dt.\quad(2.21)$$

Согласно (2.18)–(2.21) тождество (2.17) выполняется при всех $\lambda\in\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда функция $P(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$P(x,t)=\frac{1}{2}\Big(\int\limits_{\frac{t}{2}}^{x-\frac{t}{2}}q(s)\,ds+\int\limits_0^t(x-t)M(s)\,ds+\int\limits_t^x q(s)\,ds\int\limits_0^t P(s,\xi)\,d\xi+$$

$$+\int\limits_{\frac{t}{2}}^t q(s)\,ds\int\limits_0^{2s-t}P(s,\xi)\,d\xi-\int\limits_{x-\frac{t}{2}}^x q(s)\,ds\int\limits_0^{2(s-x)+t}P(s,\xi)\,d\xi+$$

$$+\int\limits_0^t M(s)\,ds\int\limits_t^x d\xi\int\limits_0^{t-s}P(\xi-s,\eta)\,d\eta+\int\limits_0^t M(s)\,ds\int\limits_{\frac{t+s}{2}}^t d\xi\int\limits_0^{2\xi-t-s}P(\xi-s,\eta)\,d\eta-$$

$$-\int\limits_0^t M(s)\,ds\int\limits_{\frac{s-t}{2}+x}^x d\xi\int\limits_0^{2(\xi-x)+t-s}P(\xi-s,\eta)\,d\eta\Big),\quad 0\leqslant t\leqslant x\leqslant\pi,\quad(2.22)$$

которое, в свою очередь, в соответствии с (2.13), (2.14) равносильно уравнению (2.6) при $\tau=0$.

Остальные свойства функции $P(x,t)$ непосредственно вытекают из вида уравнения (2.22). Для $C(x,\lambda)$ и $Q(x,\lambda)$ доказательство аналогично. $\square$

2.3. Различные представления характеристической функции. Обозначим

$$f*g(x)=\int\limits_0^x f(x-t)g(t)\,dt,\quad f*1(x)=\int\limits_0^x f(t)\,dt.$$

Следующая лемма дает основополагающее представление для характеристической функции.

Лемма 2.3. *Характеристическая функция краевой задачи L имеет вид*

$$\Delta(\lambda)=\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}\frac{\sin\rho\pi}{\rho}+\int\limits_0^\pi w(x)\frac{\sin\rho x}{\rho}\,dx,\quad w(x)\in W_2^1[0,\pi],\tag{2.23}$$

причем функция $w(x)$ удовлетворяет краевым условиям

$$w(0)=\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha_0-\alpha_1}{4}\Big(\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}q(x)\,dx-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}q(x)\,dx\Big),\quad w(\pi)=\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha_0+\alpha_1}{4}\int\limits_0^{\pi}q(x)\,dx.\tag{2.24}$$

При этом имеет место представление

$$w(\pi-x)=\frac{\beta}{2}+w_1(x)+V(x),\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\tag{2.25}$$

где

$$V(x)=V(x;M)=\frac{1}{2}\begin{cases}(\alpha_0-1)\Big(w_2+w_3+w_2*w_3\Big)(x)+\\ \qquad+(\alpha_1-1)\Big(w_4+w_5+w_4*w_5\Big)(x)+\\ \qquad\qquad+\beta\Big(w_2+w_4+w_2*w_4\Big)*1(x),\quad 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ (\alpha_0-1)V_1(x)+(\alpha_1-1)V_2(x)+\beta V_3(x),\quad \dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi,\end{cases}\tag{2.26}$$

$$w_1(x)=w_1(x;M)=P(\pi,x;q,M),\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\tag{2.27}$$

$$\left.\begin{array}{r}w_2(x)=w_2(x;M)=P\Big(\dfrac{\pi}{2},x;q,M\Big),\ w_3(x)=w_3(x;M)=Q\Big(\dfrac{\pi}{2},x;q_1,M\Big),\\ w_4(x)=w_4(x;M)=P\Big(\dfrac{\pi}{2},x;q_1,M\Big),\ w_5(x)=w_5(x;M)=K\Big(\dfrac{\pi}{2},x;q,M\Big),\\ w_6(x)=w_6(x;M)=w_4*1(x),\qquad\qquad\end{array}\right\}\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\tag{2.28}$$

$$K(x,t;q,M)=P(x,t;q,M)+\int\limits_0^t P_x(x,\tau;q,M)\,d\tau,\tag{2.29}$$

$$V_1(x)=V_1(x;M)=w_3(\pi-x)-w_2(\pi-x)+\int\limits_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}w_2(t)w_3(x-t)\,dt-$$
$$-\int\limits_{\pi-x}^{\frac{\pi}{2}}w_2(t)w_3(x-\pi+t)\,dt+\int\limits_0^{x-\frac{\pi}{2}}w_2(t)w_3(\pi-x+t)\,dt,\tag{2.30}$$

$$V_2(x)=V_2(x;M)=w_5(\pi-x)-w_4(\pi-x)+\int\limits_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}w_4(t)w_5(x-t)\,dt-$$

$$-\int\limits_{\pi-x}^{\frac{\pi}{2}} w_4(t)w_5(x-\pi+t)\,dt + \int\limits_0^{x-\frac{\pi}{2}} w_4(t)w_5(\pi-x+t)\,dt, \quad (2.31)$$

$$V_3(x) = V_3(x;M) = w_6(\pi-x) + w_2 * 1(\pi-x) + \int\limits_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} w_2(t)w_6(x-t)\,dt -$$

$$-\int\limits_{\pi-x}^{\frac{\pi}{2}} w_2(t)w_6(x-\pi+t)\,dt + \int\limits_0^{x-\frac{\pi}{2}} w_2(t)w_6(\pi-x+t)\,dt. \quad (2.32)$$

Доказательство. Согласно лемме 2.2, функции

$$P_1(x,t) := P(x,t;q_1,M), \quad Q_1(x,t) := Q(x,t;q_1,M)$$

непрерывны в треугольнике $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant \pi/2$ и $P_1(x,\,\cdot\,)$, $Q_1(x,\,\cdot\,) \in W_2^1[0,x]$ для всех $x \in (0,\pi/2]$, а также

$$P_1(x,0) = Q_1(x,0) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x q_1(t)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+x} q(t)\,dt, \quad P_1(x,x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}. \quad (2.33)$$

Таким образом, согласно (2.15), (2.27)–(2.29) и (2.33) имеем

$$w_1(x) \in W_2^1[0,\pi], \quad w_\nu(x) \in W_2^1\Big[0,\frac{\pi}{2}\Big], \ \ \nu = \overline{2,6}, \quad (2.34)$$

$$\left.\begin{aligned} w_1(0) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} q(t)\,dt, \quad w_2(0) = w_5(0) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)\,dt, \\ w_3(0) = w_4(0) = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} q(t)\,dt, \quad w_6(0) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (2.35)$$

$$w_1(\pi) = w_2\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = w_4\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 0. \quad (2.36)$$

Далее, согласно (2.3) и (2.5) получаем

$$\Delta(\lambda) = S(\pi,\lambda) + (\alpha_0-1)S\Big(\frac{\pi}{2},\lambda\Big)C_1\Big(\frac{\pi}{2},\lambda\Big) + \Big((\alpha_1-1)S'\Big(\frac{\pi}{2},\lambda\Big) + \beta S\Big(\frac{\pi}{2},\lambda\Big)\Big)S_1\Big(\frac{\pi}{2},\lambda\Big), \quad (2.37)$$

где в силу (2.4), (2.11)–(2.13), (2.27) и (2.28) будем иметь

$$S(\pi,\lambda) = \frac{1}{\rho}\Big(\sin\rho\pi + \int\limits_0^{\pi} w_1(x)\sin\rho(\pi-x)\,dx\Big), \quad (2.38)$$

$$S\Big(\frac{\pi}{2},\lambda\Big) = \frac{1}{\rho}\Big(\sin\frac{\rho\pi}{2} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_2(x)\sin\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx\Big), \quad (2.39)$$

$$C_1\Big(\frac{\pi}{2},\lambda\Big) = \cos\frac{\rho\pi}{2} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_3(x)\cos\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx, \quad (2.40)$$

$$S_1\Big(\frac{\pi}{2},\lambda\Big) = \frac{1}{\rho}\Big(\sin\frac{\rho\pi}{2} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_4(x)\sin\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx\Big). \quad (2.41)$$

Кроме того, дифференцируя (2.11) с учетом (2.15), а затем интегрируя по частям, получаем

$$S'(x,\lambda)=\cos\rho x+\int_0^x P_x(x,t)\frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}\,dt+\int_0^x P(x,t)\cos\rho(x-t)\,dt=$$

$$=\cos\rho x+\int_0^x\cos\rho(x-t)\,dt\int_0^t P_x(x,\tau)\,d\tau+\int_0^x P(x,t)\cos\rho(x-t)\,dt.$$

Таким образом, согласно определениям (2.13) и (2.29) будем иметь

$$S'(x,\lambda)=\cos\rho x+\int_0^x K(x,t;q,M)\cos\rho(x-t)\,dt,$$

и, наконец, согласно (2.28) приходим к представлению

$$S'\Big(\frac{\pi}{2},\lambda\Big)=\cos\frac{\rho\pi}{2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} w_5(x)\cos\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx. \tag{2.42}$$

Подставляя представления (2.38)–(2.42) в (2.37), получаем

$$\Delta(\lambda)=\sum_{j=0}^{9}\Delta_j(\lambda), \tag{2.43}$$

где

$$\Delta_0(\lambda):=\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}\frac{\sin\rho\pi}{\rho}+\int_0^{\pi}\Big(\frac{\beta}{2}+w_1(x)\Big)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx, \tag{2.44}$$

$$\Delta_1(\lambda):=\frac{\alpha_0-1}{\rho}\cos\frac{\rho\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} w_2(x)\sin\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx=\frac{\alpha_0-1}{2\rho}\int_0^{\frac{\pi}{2}} w_2(x)\Big(\sin\rho(\pi-x)-\sin\rho x\Big)\,dx=$$

$$=\frac{\alpha_0-1}{2}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} w_2(x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} w_2(\pi-x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx\Big), \tag{2.45}$$

$$\Delta_2(\lambda):=\frac{\alpha_0-1}{\rho}\sin\frac{\rho\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} w_3(x)\cos\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx=$$

$$=\frac{\alpha_0-1}{2}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} w_3(x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} w_3(\pi-x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx\Big), \tag{2.46}$$

$$\Delta_3(\lambda):=\frac{\alpha_0-1}{\rho}\int_0^{\frac{\pi}{2}} w_2(x)\sin\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} w_3(x)\cos\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx=$$

$$=\frac{\alpha_0-1}{2\rho}\int_0^{\frac{\pi}{2}} w_2(x)\,dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} w_3(t)\Big(\sin\rho(\pi-x-t)+\sin\rho(t-x)\Big)\,dt=$$

$$=\frac{\alpha_0-1}{2\rho}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} w_2(x)\,dx\int_x^{x+\frac{\pi}{2}} w_3(t-x)\sin\rho(\pi-t)\,dt+$$

$$+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_2(x)\,dx \int\limits_{x+\frac{\pi}{2}}^{x+\pi} w_3(\pi+x-t)\sin\rho(\pi-t)\,dt\Big) =$$

$$= \frac{\alpha_0-1}{2}\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_2 * w_3(x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\Big(\int\limits_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} w_2(t)w_3(x-t)\,dt -$$

$$- \int\limits_{\pi-x}^{\frac{\pi}{2}} w_2(t)w_3(x-\pi+t)\,dt + \int\limits_0^{x-\frac{\pi}{2}} w_2(t)w_3(\pi-x+t)\,dt\Big)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx\Big) \quad (2.47)$$

и, аналогично,

$$\Delta_4(\lambda) := \frac{\alpha_1-1}{\rho}\cos\frac{\rho\pi}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_4(x)\sin\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx =$$

$$= \frac{\alpha_1-1}{2}\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_4(x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} w_4(\pi-x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx\Big), \quad (2.48)$$

$$\Delta_5(\lambda) := \frac{\alpha_1-1}{\rho}\sin\frac{\rho\pi}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_5(x)\cos\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx =$$

$$= \frac{\alpha_1-1}{2}\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_5(x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} w_5(\pi-x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx\Big), \quad (2.49)$$

$$\Delta_6(\lambda) := \frac{\alpha_1-1}{\rho}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_4(x)\sin\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_5(x)\cos\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx =$$

$$= \frac{\alpha_1-1}{2}\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_4 * w_5(x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\Big(\int\limits_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} w_4(t)w_5(x-t)\,dt -$$

$$- \int\limits_{\pi-x}^{\frac{\pi}{2}} w_4(t)w_5(x-\pi+t)\,dt + \int\limits_0^{x-\frac{\pi}{2}} w_4(t)w_5(\pi-x+t)\,dt\Big)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx\Big), \quad (2.50)$$

$$\Delta_7(\lambda) := \frac{\beta}{\rho^2}\sin\frac{\rho\pi}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_4(x)\sin\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx = \frac{\beta}{\rho}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_4(x)\sin\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\rho x\,dx =$$

$$= \frac{\beta}{2}\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_6(x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} w_6(\pi-x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx\Big), \quad (2.51)$$

$$\Delta_8(\lambda) := \frac{\beta}{\rho^2}\sin\frac{\rho\pi}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_2(x)\cos\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx =$$

$$= \frac{\beta}{2}\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_2 * 1(x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} w_2 * 1(\pi - x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx\Big), \quad (2.52)$$

$$\Delta_9(\lambda) := \frac{\beta}{\rho^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_2(x)\sin\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_4(x)\sin\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx =$$

$$= \frac{\beta}{\rho}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_2(x)\sin\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_6(x)\cos\rho\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\,dx =$$

$$= \frac{\beta}{2}\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} w_2 * w_6(x)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\Big(\int\limits_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} w_2(t)w_6(x-t)\,dt -$$

$$- \int\limits_{\pi-x}^{\frac{\pi}{2}} w_2(t)w_6(x-\pi+t)\,dt + \int\limits_0^{x-\frac{\pi}{2}} w_2(t)w_6(\pi-x+t)\,dt\Big)\frac{\sin\rho(\pi-x)}{\rho}\,dx\Big). \quad (2.53)$$

Подставляя (2.44)–(2.53) в (2.43), приходим к (2.23), где функция $w(x)$ имеет вид (2.25). При этом, согласно (2.26), (2.30)–(2.32) и (2.34) заключаем, что $w(x) \in W_2^1[0,\pi/2]$ и $w(x) \in W_2^1[\pi/2,\pi]$. Далее, используя (2.26), (2.30)–(2.32) и (2.35), вычисляем

$$V\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\alpha_0 - 1}{2}(w_3 + w_2 * w_3)\Big(\frac{\pi}{2}\Big) + \frac{\alpha_1 - 1}{2}(w_5 + w_4 * w_5)\Big(\frac{\pi}{2}\Big) + \\ + \frac{\beta}{2}(w_2 + w_4 + w_2 * w_4) * 1\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = V\Big(\frac{\pi}{2} + 0\Big),$$

что вместе с (2.25) и (2.34) дает $w(x) \in W_2^1[0,\pi]$. Наконец, используя (2.25), (2.26), (2.30)–(2.32) и (2.36), получаем (2.24). □

Известным методом (см., например, [12]) при помощи теоремы Руше [13] доказывается следующее утверждение.

Лемма 2.4. *Всякая функция* $\Delta(\lambda)$ *вида* (2.23), (2.24) *имеет бесконечное множество нулей* λ_k, $k \in \mathbb{N}$, *вида* (1.5), (1.6).

Отметим, что теорема 1.1 является прямым следствием леммы 2.4. Также известным методом при помощи теоремы Адамара [9] о разложении целой функции в бесконечное произведение доказывается следующее утверждение (см., например, [15]).

Лемма 2.5. *Всякая функция* $\Delta(\lambda)$ *вида* (2.23) *определяется своими нулями однозначно. При этом*

$$\Delta(\lambda) = \pi\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k - \lambda}{k^2}. \quad (2.54)$$

3. Дополнительные свойства ядер операторов преобразования

3.1. Предварительное наблюдение. Заметим, что для всякого фиксированного $\delta \in (0,\pi]$ каждое из интегральных уравнений (2.6) и (2.7) можно сузить на множество

$$\mathcal{D}_\delta := \Big\{(x,t,\tau) : 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant \min\{\delta, x\}\Big\}.$$

Иными словами, при $(x,t,\tau) \in \mathcal{D}_\delta$ правые части этих уравнений зависят от значений неизвестной функции только на множестве $\mathcal{D}_\delta$. При этом очевидно, что на $\mathcal{D}_\delta$ решения соответствующих «суженных» уравнений совпадают с решениями исходных. Поэтому функции $F(x,t,\tau;q,M)$ и

$G(x,t,\tau;q,M)$ при $(x,t,\tau)\in\mathcal{D}_\delta$ зависят от значений функции $M(s)$ только при $s\in(0,\delta)$. В частности, ввиду (2.13), функции $P(x,t)$ и $Q(x,t)$ на трапеции

$$D_\delta := \Big\{(x,t): 0\leqslant x\leqslant\pi,\ 0\leqslant t\leqslant\min\{\delta,x\}\Big\}$$

зависят от $M(s)$ тоже только при $s\in(0,\delta)$. Введем обозначения

$$\|f\|_\delta := \|f\|_{L_2(0,\delta)} = \sqrt{\int\limits_0^\delta |f(x)|^2\,dx},\quad B_{\delta,r} := \{f: \|f\|_\delta\leqslant r\},\quad B_\delta := B_{\delta,1}. \tag{3.1}$$

3.2. Локальные оценки. Следующая лемма дает оценки для ядер $P(x,t)=P(x,t;q,M)$ и $Q(x,t)=Q(x,t;q,M)$ при $(x,t)\in D_\delta$ для малых $\delta>0$.

Лемма 3.1. *Существуют $\delta_q\in(0,\pi]$ и $C_q>0$, зависящие только от функции $q(x)$, такие что для любого $\delta\in(0,\delta_q]$ и для всех M, $\tilde M\in B_\delta$ при $(x,t)\in D_\delta$ справедливы оценки*

$$|P(x,t)|\leqslant C_q,\quad |\hat P(x,t)|\leqslant C_q\sqrt{\delta}\|\hat M\|_\delta,\quad |Q(x,t)|\leqslant C_q,\quad |\hat Q(x,t)|\leqslant C_q\sqrt{\delta}\|\hat M\|_\delta, \tag{3.2}$$

где $\hat P(x,t)=P(x,t;q,M)-P(x,t;q,\tilde M)$, $\hat Q(x,t)=Q(x,t;q,M)-Q(x,t;q,\tilde M)$, $\hat M = M-\tilde M$.

Доказательство. Докажем утверждение леммы для $P(x,t)$; для $Q(x,t)$ доказательство аналогично. Положим

$$C_q := \pi+\max\Big\{\pi,\int\limits_0^\pi |q(x)|\,dx\Big\},\quad \delta_q := (2C_q)^{-1},\quad P:=\max_{(x,t)\in D_\delta}|P(x,t)|,\quad \hat P := \max_{(x,t)\in D_\delta}|\hat P(x,t)|.$$

Тогда в силу (2.22) имеем $P\leqslant C_q/2+C_q\delta P$, т. е. $P\leqslant(2-2\delta C_q)^{-1}C_q$. Учитывая, что $2C_q\delta\leqslant 2C_q\delta_q=1$, приходим к первой оценке в (3.2). Далее, почленно вычитая уравнение (2.22) для $P(x,t;q,\tilde M)$ (т. е. при $M(x)=\tilde M(x)$) из уравнения для $P(x,t;q,M)$, будем иметь

$$\hat P(x,t) = \frac12\Big(\int\limits_t^x q(s)\,ds\int\limits_0^t \hat P(s,\xi)\,d\xi + \int\limits_{\frac t2}^t q(s)\,ds\int\limits_0^{2s-t}\hat P(s,\xi)\,d\xi -$$

$$-\int\limits_{x-\frac t2}^x q(s)\,ds\int\limits_0^{2(s-x)+t}\hat P(s,\xi)\,d\xi\Big) + \frac12\int\limits_0^t \hat M(s)\Big((x-t)+\int\limits_t^x d\xi\int\limits_0^{t-s}P(\xi-s,\eta)\,d\eta +$$

$$+\int\limits_{\frac{t+s}{2}}^t d\xi\int\limits_0^{2\xi-t-s}P(\xi-s,\eta)\,d\eta - \int\limits_{\frac{s-t}{2}+x}^x d\xi\int\limits_0^{2(\xi-x)+t-s}P(\xi-s,\eta)\,d\eta\Big)\,ds +$$

$$+\frac12\int\limits_0^t\tilde M(s)\Big(\int\limits_t^x d\xi\int\limits_0^{t-s}\hat P(\xi-s,\eta)\,d\eta + \int\limits_{\frac{t+s}{2}}^t d\xi\int\limits_0^{2\xi-t-s}\hat P(\xi-s,\eta)\,d\eta -$$

$$-\int\limits_{\frac{s-t}{2}+x}^x d\xi\int\limits_0^{2(\xi-x)+t-s}\hat P(\xi-s,\eta)\,d\eta\Big)\,ds,$$

откуда приходим к $\hat P\leqslant C_q\delta\hat P+\pi\sqrt{\delta}\|\hat M\|_\delta$, что дает вторую оценку в (3.2). □

3.3. Пошаговая линеаризуемость. В дальнейшем для каждого фиксированного $\delta \in (0, \pi]$ будем использовать обозначения

$$M_1(x) = \begin{cases} M(x), & x \in (0, \delta), \\ 0, & x \in (\delta, \sigma), \end{cases} \qquad M_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, \delta), \\ M(x), & x \in (\delta, \sigma), \end{cases} \tag{3.3}$$

где $\sigma = \min\{2\delta, \pi\}$.

Лемма 3.2. *Для всякого $\delta \in (0, \pi/2]$ имеет место представление*

$$P(x, t; q, M) = P(x, t; q, M_1) + \int_0^t F(x, t, \tau; q, M_1) M_2(\tau)\, d\tau, \quad (x, t) \in D_{2\delta}, \tag{3.4}$$

где функция $F(x, t, \tau; q, M_1)$ является решением уравнения (2.6) *при $M_1(x)$ вместо $M(x)$, $(x, t, \tau) \in \mathcal{D}_{2\delta}$ и*

$$F_0(x, t, \tau) = \frac{1}{2}\Big(x - t + \int_t^x ds \int_0^{t-\tau} P(s - \tau, \xi; q, M_1)\, d\xi +$$

$$+ \int_{\frac{t+\tau}{2}}^t ds \int_0^{2s-t-\tau} P(s - \tau, \xi; q, M_1)\, d\xi - \int_{\frac{\tau-t}{2}+x}^x ds \int_0^{2(s-x)+t-\tau} P(s - \tau, \xi; q, M_1)\, d\xi\Big). \tag{3.5}$$

Доказательство. С помощью непосредственной подстановки получаем, что правая часть (3.4) является решением интегрального уравнения (2.22) при $(x, t) \in D_{2\delta}$ тогда и только тогда, когда при $(x, t) \in D_{2\delta}$ выполняется следующее соотношение:

$$\int_0^t F(x, t, \tau; q, M_1) M_2(\tau)\, d\tau = \int_0^t F_0(x, t, \tau) M_2(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^3 (\mathcal{Q}_k(x, t) + \mathcal{M}_k(x, t)), \tag{3.6}$$

где функция $F_0(x, t, \tau)$ определяется по формуле (3.5), а также после перемены порядка интегрирования имеем

$$\mathcal{Q}_1(x, t) := \int_t^x q(s)\, ds \int_0^t d\xi \int_0^\xi F(s, \xi, \tau; q, M_1) M_2(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_t^x q(s)\, ds \int_0^t M_2(\tau)\, d\tau \int_\tau^t F(s, \xi, \tau; q, M_1)\, d\xi = \int_0^t M_2(\tau)\, d\tau \int_t^x q(s)\, ds \int_\tau^t F(s, \xi, \tau; q, M_1)\, d\xi,$$

$$\mathcal{Q}_2(x, t) := \int_{\frac{t}{2}}^t q(s)\, ds \int_0^{2s-t} d\xi \int_0^\xi F(s, \xi, \tau; q, M_1) M_2(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{\frac{t}{2}}^t q(s)\, ds \int_0^{2s-t} M_2(\tau)\, d\tau \int_\tau^{2s-t} F(s, \xi, \tau; q, M_1)\, d\xi = \int_0^t M_2(\tau)\, d\tau \int_{\frac{t+\tau}{2}}^t q(s)\, ds \int_\tau^{2s-t} F(s, \xi, \tau; q, M_1)\, d\xi,$$

$$\mathcal{Q}_3(x, t) := -\int_{x-\frac{t}{2}}^x q(s)\, ds \int_0^{2(s-x)+t} d\xi \int_0^\xi F(s, \xi, \tau; q, M_1) M_2(\tau)\, d\tau =$$

$$= -\int_{x-\frac{t}{2}}^{x} q(s)\,ds \int_{0}^{2(s-x)+t} M_2(\tau)\,d\tau \int_{\tau}^{2(s-x)+t} F(s,\xi,\tau;q,M_1)\,d\xi =$$

$$= -\int_{0}^{t} M_2(\tau)\,d\tau \int_{\frac{\tau-t}{2}+x}^{x} q(s)\,ds \int_{\tau}^{2(s-x)+t} F(s,\xi,\tau;q,M_1)\,d\xi$$

и, кроме того,

$$\mathcal{M}_1(x,t) := \int_0^t M(s)\,ds \int_t^x d\xi \int_0^{t-s} d\eta \int_0^{\eta} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)M_2(\tau)\,d\tau, \tag{3.7}$$

$$\mathcal{M}_2(x,t) := \int_0^t M(s)\,ds \int_{\frac{t+s}{2}}^{t} d\xi \int_0^{2\xi-t-s} d\eta \int_0^{\eta} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)M_2(\tau)\,d\tau,$$

$$\mathcal{M}_3(x,t) := -\int_0^t M(s)\,ds \int_{\frac{s-t}{2}+x}^{x} d\xi \int_0^{2(\xi-x)+t-s} d\eta \int_0^{\eta} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)M_2(\tau)\,d\tau.$$

Меняя порядок интегрирования в (3.7) и учитывая, что $M(x) = M_1(x) + M_2(x)$ при $x \in (0, 2\delta)$, получаем

$$\mathcal{M}_1(x,t) = \int_0^t M(s)\,ds \int_0^{t-s} M_2(\tau)\,d\tau \int_t^x d\xi \int_{\tau}^{t-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta =$$

$$= \int_0^t M_2(\tau)\,d\tau \int_0^{t-\tau} (M_1(s)+M_2(s))\,ds \int_t^x d\xi \int_{\tau}^{t-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta. \tag{3.8}$$

Поскольку $M_2(x) = 0$ на $(0,\delta)$ и $t \in [0, 2\delta]$, будем иметь

$$\int_0^t M_2(\tau)\,d\tau \int_0^{t-\tau} M_2(s)\,ds \int_t^x d\xi \int_{\tau}^{t-s} F(\xi-s,\eta,\tau;M_1)\,d\eta = 0.$$

Таким образом, под вторым интегралом в (3.8) исчезает слагаемое $M_2(s)$, а значит, получим

$$\mathcal{M}_1(x,t) = \int_0^t M_2(\tau)\,d\tau \int_0^{t-\tau} M_1(s)\,ds \int_t^x d\xi \int_{\tau}^{t-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta.$$

Аналогичным образом вычисляем

$$\mathcal{M}_2(x,t) = \int_0^t M(s)\,ds \int_{\frac{t+s}{2}}^{t} d\xi \int_0^{2\xi-t-s} M_2(\tau)\,d\tau \int_{\tau}^{2\xi-t-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta =$$

$$= \int_0^t M(s)\,ds \int_0^{t-s} M_2(\tau)\,d\tau \int_{\frac{t+\tau+s}{2}}^{t} d\xi \int_{\tau}^{2\xi-t-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta =$$

$$= \int_0^t M_2(\tau)\,d\tau \int_0^{t-\tau} M_1(s)\,ds \int_{\frac{t+\tau+s}{2}}^{t} d\xi \int_{\tau}^{2\xi-t-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta,$$

$$\mathcal{M}_3(x,t) = -\int\limits_0^t M(s)\,ds \int\limits_{\frac{s-t}{2}+x}^{x} d\xi \int\limits_0^{2(\xi-x)+t-s} M_2(\tau)\,d\tau \int\limits_\tau^{2(\xi-x)+t-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta =$$

$$= -\int\limits_0^t M(s)\,ds \int\limits_0^{t-s} M_2(\tau)\,d\tau \int\limits_{\frac{s+\tau-t}{2}+x}^{x} d\xi \int\limits_\tau^{2(\xi-x)+t-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta =$$

$$= -\int\limits_0^t M_2(\tau)\,d\tau \int\limits_0^{t-\tau} M_1(s)\,ds \int\limits_{\frac{s+\tau-t}{2}+x}^{x} d\xi \int\limits_\tau^{2(\xi-x)+t-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta.$$

Учитывая все сделанные преобразования, заключаем, что если функция $F(x,t,\tau;q,M_1)$ удовлетворяет условиям леммы, то выполняется тождество (3.6). Таким образом, обе части (3.4) будут удовлетворять одному и тому же уравнению (2.22), имеющему единственное решение, что и доказывает лемму. □

Аналогично лемме 3.2 доказывается следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Для всякого $\delta \in (0,\pi/2]$ имеет место представление*

$$Q(x,t;q,M) = Q(x,t;q,M_1) + \int\limits_0^t G(x,t,\tau;q,M_1)M_2(\tau)\,d\tau, \quad (x,t) \in D_{2\delta},$$

где функция $G(x,t,\tau;q,M_1)$ является решением уравнения (2.7) *при $M_1(x)$ вместо $M(x)$, $(x,t,\tau) \in \mathcal{D}_{2\delta}$ и*

$$G_0(x,t,\tau) = \frac{1}{2}\Big(x-\tau+\int\limits_0^{x-t} ds \int\limits_0^{t-\tau} Q(\xi+s,\xi;q,M_1)\,d\xi +$$

$$+\int\limits_0^{\frac{t-\tau}{2}} ds \int\limits_0^{t-\tau-2s} Q(\xi+s,\xi;q,M_1)\,d\xi + \int\limits_{x-t}^{x-\frac{t+\tau}{2}} ds \int\limits_0^{2(x-s)-t-\tau} Q(\xi+s,\xi;q,M_1)\,d\xi\Big).$$

4. Основное нелинейное интегральное уравнение обратной задачи

4.1. Основное уравнение. Дифференцируя соотношение (2.25) по x, получаем

$$-w'(\pi-x) = w_1'(x;M) + V'(x;M), \quad 0<x<\pi. \tag{4.1}$$

На это соотношение можно смотреть, как на нелинейное уравнение относительно функции $M(x)$, которое мы назовем *основным нелинейным интегральным уравнением обратной задачи* или кратко *основным уравнением*.

Основное уравнение (4.1) занимает центральное место при исследовании задачи 1.1. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть выполнено условие* (1.7)*. Тогда для любой функции $w(x) \in W_2^1[0,\pi]$, удовлетворяющей краевым условиям* (2.24)*, уравнение* (4.1) *имеет единственное решение $M(x)$, удовлетворяющее условию* (1.4).

Отметим, что из определения функций $w_1(x)$ и $V(x)$ нетрудно увидеть, что правая часть (4.1) при $x \in (0,\pi/2)$ не зависит от значений функции $M(x)$ на $(\pi/2,\pi)$. Это обстоятельство позволяет сначала решить уравнение (4.1) отдельно на интервале $(0,\pi/2)$, а затем — на $(\pi/2,\pi)$. В связи с этим доказательство теоремы 4.1 подразделяется на два основных этапа. На первом этапе устанавливается существование и единственность квадратично суммируемого решения на интервале $(0,\pi/2)$, а на втором этапе решение отыскивается уже на интервале $(\pi/2,\pi)$. Если основная трудность, которую необходимо преодолеть на первом этапе, связана с нелинейностью данного уравнения, то на втором этапе трудность связана с наличием в уравнении особенности и, как следствие, с попаданием решения в нужный класс (1.4). Данный раздел посвящен первому этапу.

Для каждого $k = \overline{1,5}$ разложим функцию $w_k(x)$ на сумму трех функций:

$$w_k(x) = w_{k,1}(x) + w_{k,2}(x) + w_{k,3}(x),$$

где

$$\left.\begin{aligned}
w_{1,1}(x) &= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x}{2}}^{\pi-\frac{x}{2}} q(t)\,dt, \quad w_{1,2}(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)\int\limits_0^x M(t)\,dt,\\
w_{2,1}(x) &= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} q(t)\,dt, \quad w_{2,2}(x) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2} - x\Big)\int\limits_0^x M(t)\,dt,\\
w_{3,1}(x) &= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi-x}{2}} q_1(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{x}{2}} q_1(t)\,dt, \quad w_{3,2}(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x \Big(\frac{\pi}{2} - t\Big)M(t)\,dt,\\
w_{4,1}(x) &= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} q_1(t)\,dt, \quad w_{4,2}(x) = w_{2,2}(x),\\
w_{5,1}(x) &= w_{2,1}(x) + \frac{1}{2}\int\limits_{\pi-\frac{x}{2}}^{\pi} q_1(t)\,dt, \quad w_{5,2}(x) = w_{2,2}(x).
\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Таким образом, $w_{k,3}(x)$ определяются по формулам

$$w_{k,3}(x) := w_k(x) - w_{k,1}(x) - w_{k,2}(x), \quad k = \overline{1,5}. \tag{4.3}$$

Кроме того, положим

$$w_{k,4}(x) := w_{k,2}(x) + w_{k,3}(x), \quad k = \overline{2,5}. \tag{4.4}$$

С учетом введенных обозначений, а также формул (2.26)–(2.29), уравнение (4.1) на первой половине интервала $(0, \pi)$ примет вид

$$g(x) = A(x)M(x) + \mathcal{F}M(x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \tag{4.5}$$

где $g(x) \in L_2(0, \pi/2)$ — свободный член, определяемый по формуле

$$\begin{gathered}
g(x) = -w'(\pi - x) - w'_{1,1}(x) - \frac{\alpha_0 - 1}{2}\Big(w'_{2,1} + w'_{3,1} + w_2(0)w_{3,1} + w'_{2,1} * w_{3,1}\Big)(x) - \\
- \frac{\alpha_0 - 1}{2}\Big(w'_{4,1} + w'_{5,1} + w_4(0)w_{5,1} + w'_{4,1} * w_{5,1}\Big)(x) - \frac{\beta}{2}\Big(w_{2,1} + w_{4,1} + w_{2,1} * w_{4,1}\Big)(x),\\
A(x) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{4}\pi - \frac{\alpha_0 + \alpha_1 - 1}{2}x,
\end{gathered} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}M(x) = \frac{1 - \alpha_0 - 2\alpha_1}{4}\int\limits_0^x M(t)\,dt + w'_{1,3}(x) + \\
+ \frac{\alpha_0 - 1}{2}\Big(w'_{2,3} + w'_{3,3} + w_2(0)w_{3,4} + w'_{2,1} * w_{3,4} + w'_{2,4} * w_3\Big)(x) + \\
+ \frac{\alpha_1 - 1}{2}\Big(w'_{4,3} + w'_{5,3} + w_4(0)w_{5,4} + w'_{4,1} * w_{5,4} + w'_{4,4} * w_5\Big)(x) + \\
+ \frac{\beta}{2}\Big(w_{2,4} + w_{4,4} + w_{2,1} * w_{4,4} + w_{2,4} * w_4\Big)(x).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Коэффициент* $A(x)$ *в уравнении* (4.5) *удовлетворяет условию*

$$A(x) \neq 0, \quad x \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big], \tag{4.8}$$

тогда и только тогда, когда выполняется условие (1.7).

Доказательство. Согласно (4.6), условие (4.8) является противоположным условию
$$\frac{\alpha_0+\alpha_1}{\alpha_0+\alpha_1-1}\in[0,1],$$
которое, в свою очередь, равносильно $\alpha_0+\alpha_1\in(-\infty,0]$, что и доказывает лемму. □

4.2. Классы $\mathcal{E}_b$. Прежде чем перейти непосредственно к доказательству разрешимости уравнения (4.5), проведем некоторую вспомогательную работу.

Определение 4.1. Оператор $\mathcal{D}: L_2(0,b)\to L_2(0,b)$ назовем *оператором класса* $\mathcal{E}_b$ (т. е. $\mathcal{D}\in\mathcal{E}_b$), если выполнены следующие четыре условия:

1) для всякой функции $f(x)\in L_2(0,b)$ и для любого числа $\gamma\in(0,b)$ функция $\mathcal{D}f(x)$ на $(0,\gamma)$ не зависит от значений $f(x)$ на (γ,b);
2) для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta\in(0,b]$, такое что $\mathcal{D}: B_\delta\to B_{\delta,\varepsilon}$, где B_δ и $B_{\delta,\varepsilon}$ определены в (3.1);
3) для любого $\alpha>0$ найдется $\delta\in(0,b]$, такое что для любых функций $f(x),\tilde f(x)\in B_\delta$ имеет место оценка $\|\mathcal{D}f-\mathcal{D}\tilde f\|_\delta\leqslant\alpha\|f-\tilde f\|_\delta$;
4) для всякого $\delta\in(0,b/2]$ и для любой функции $f(x)\in L_2(0,2\delta)$ справедливо представление
$$\mathcal{D}f(x)=\mathcal{D}f_1(x)+\int_\delta^x R(x,t;f_1)f_2(t)\,dt,\quad 0<x<2\delta,\tag{4.9}$$
где
$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\delta),\\ 0, & x\in(\delta,2\delta),\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases} 0, & x\in(0,\delta),\\ f(x), & x\in(\delta,2\delta),\end{cases}\tag{4.10}$$
функция $R(x,t;f_1)$ суммируема с квадратом в треугольнике $\delta<t<x<2\delta$ и не зависит от $f_2(x)$.

Замечание 4.1. В условиях 2)–4) определения 4.1 тем же символом $\mathcal{D}$ обозначено расширение оператора $\mathcal{D}$ на пространства $L_2(0,\delta)$, $\delta<b$, которое в силу условия 1) определено однозначно.

Замечание 4.2. Нетрудно убедиться, что для всякого оператора $\mathcal{D}\in\mathcal{E}_b$ в условиях 2) и 3) можно взять любое достаточно малое $\delta>0$. Иными словами, эти условия можно эквивалентно представить следующим образом:

2') для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta\in(0,b]$, такое что $\mathcal{D}: B_{\delta_1}\to B_{\delta_1,\varepsilon}$ для всех $\delta_1\in(0,\delta]$;
3') для любого $\alpha>0$ найдется $\delta\in(0,b]$, такое что для любых функций $f(x),\tilde f(x)\in B_{\delta_1}$ имеет место оценка $\|\mathcal{D}f-\mathcal{D}\tilde f\|_{\delta_1}\leqslant\alpha\|f-\tilde f\|_{\delta_1}$ для всех $\delta_1\in(0,\delta]$.

В самом деле, пусть $f(x)$, $\tilde f(x)\in B_{\delta_1}$ при некотором $\delta_1\in(0,\delta]$. Положим
$$f_c(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\delta_1),\\ 0, & x\in(\delta_1,\delta),\end{cases}\qquad \tilde f_c(x)=\begin{cases} \tilde f(x), & x\in(0,\delta_1),\\ 0, & x\in(\delta_1,\delta).\end{cases}$$
Тогда $f_c(x)$, $\tilde f_c(x)\in B_\delta$. Согласно 2) будем иметь $\mathcal{D}f_c(x)\in B_{\delta,\varepsilon}$. С другой стороны, в силу 1)
$$\|\mathcal{D}f\|_{\delta_1}=\|\mathcal{D}f_c\|_{\delta_1}\leqslant\|\mathcal{D}f_c\|_\delta\leqslant\varepsilon,$$
и $2')$ доказано. Далее, согласно 3) имеем
$$\|\mathcal{D}f_c-\mathcal{D}\tilde f_c\|_\delta\leqslant\alpha\|f_c-\tilde f_c\|_\delta=\alpha\|f-\tilde f\|_{\delta_1}.$$
С другой стороны, в силу 1) получаем
$$\|\mathcal{D}f-\mathcal{D}\tilde f\|_{\delta_1}=\|\mathcal{D}f_c-\mathcal{D}\tilde f_c\|_{\delta_1}\leqslant\|\mathcal{D}f_c-\mathcal{D}\tilde f_c\|_\delta\leqslant\alpha\|f-\tilde f\|_{\delta_1}$$
и приходим к $3')$.

Следующая лемма устанавливает замкнутость класса $\mathcal{E}_b$ относительно некоторых операций.

Лемма 4.2. *Пусть $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2\in\mathcal{E}_b$, а $g_1(x)$ и $g_2(x)$ — ограниченные на интервале $(0,b)$ функции. Тогда $\mathcal{D}\in\mathcal{E}_b$, где оператор $\mathcal{D}$ определен любым из следующих способов*:

а) $\mathcal{D}f(x)=g_1(x)\mathcal{D}_1f(x)+g_2(x)\mathcal{D}_2f(x)$;

b) $\mathcal{D}f(x) = \mathcal{D}_1 f * \mathcal{D}_2 f(x)$;
c) $\mathcal{D}f(x) = \mathcal{D}_1 f * (g_1 f)(x)$;
d) $\mathcal{D}f(x) = \int\limits_0^x K(x,t) f(t)\,dt$;
e) $\mathcal{D}f(x) = \int\limits_0^x K(x,t) \mathcal{D}_1 f(t)\,dt$;
f) $\mathcal{D}f(x) = f_1(x)$.

Здесь функция $K(x,t)$ суммируема с квадратом в треугольнике $0 < t < x < b$, а функция $f_1(x) \in L_2(0,b)$ не зависит от $f(x)$.

Доказательство. Положим
$$g_k := \sup_{0<x<b} |g_k(x)|, \quad k = 1, 2.$$

a) Условия 1) и 4) определения 4.1 очевидны. Условия 2) и 3) следуют из оценок
$$\|\mathcal{D}f\|_\delta \leqslant g_1 \|\mathcal{D}_1 f\|_\delta + g_2 \|\mathcal{D}_2 f\|_\delta, \quad \|\mathcal{D}f - \mathcal{D}\tilde{f}\|_\delta \leqslant g_1 \|\mathcal{D}_1 f - \mathcal{D}_1 \tilde{f}\|_\delta + g_2 \|\mathcal{D}_2 f - \mathcal{D}_2 \tilde{f}\|_\delta,$$
соответственно.

b) Условие 1) очевидным образом следует из представлений
$$\mathcal{D}f(x) = \int\limits_0^x \mathcal{D}_1 f(t) \mathcal{D}_2 f(x-t)\,dt = \int\limits_0^x \mathcal{D}_1 f(x-t) \mathcal{D}_2 f(t)\,dt.$$

Условия 2) и 3) следуют из оценок $\|\mathcal{D}f\|_\delta \leqslant \sqrt{\delta} \|\mathcal{D}_1 f\|_\delta \|\mathcal{D}_2 f\|_\delta$ и
$$\|\mathcal{D}f - \mathcal{D}\tilde{f}\|_\delta \leqslant \sqrt{\delta} \Big(\|\mathcal{D}_1 f\|_\delta \|\mathcal{D}_2 f - \mathcal{D}_2 \tilde{f}\|_\delta + \|\mathcal{D}_2 \tilde{f}\|_\delta \|\mathcal{D}_1 f - \mathcal{D}_1 \tilde{f}\|_\delta \Big).$$

Далее, при $x \in (0, 2\delta)$ согласно (4.9) будем иметь
$$\mathcal{D}f(x) = \int\limits_0^x \Big(\mathcal{D}_1 f_1(x-t) + \int\limits_\delta^{x-t} R_1(x-t,\tau; f_1) f_2(\tau)\,d\tau \Big) \Big(\mathcal{D}_2 f_1(t) + \int\limits_\delta^t R_2(t,\tau; f_1) f_2(\tau)\,d\tau \Big)\,dt.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем
$$\mathcal{D}f(x) = \mathcal{D}f_1(x) + \int\limits_\delta^x R(x-t,\tau; f_1) f_2(\tau)\,d\tau + h(x), \quad 0 < x < 2\delta,$$
где
$$R(x,t; f_1) = \int\limits_0^{x-t} \Big(R_2(x-\tau, t; f_1) \mathcal{D}_1 f_1(\tau) + R_1(x-\tau, t; f_1) \mathcal{D}_2 f_1(\tau) \Big)\,d\tau,$$
$$h(x) = \int\limits_\delta^x f_2(t)\,dt \int\limits_\delta^{x-t} f_2(\tau)\,d\tau \int\limits_\tau^{x-t} R_1(x-s, t; f_1) R_2(s,\tau; f_1)\,ds.$$

В силу (4.10) имеем $h(x) = 0$ при $x \in [0, 2\delta]$. Кроме того, нетрудно показать, что $R(x,t; f_1)$ суммируема с квадратом в треугольнике $\delta < t < x < 2\delta$, и 4) доказано для b).

Для c)–e) доказательство аналогично, а f) очевидно. □

Теорема 4.2. *Пусть $f(x) \in L_2(0,b)$ и $\mathcal{D} \in \mathcal{E}_b$. Тогда уравнение*
$$f(x) = y(x) + \mathcal{D}y(x), \quad 0 < x < b, \tag{4.11}$$
имеет единственное решение $y(x) \in L_2(0,b)$.

Доказательство. Согласно условию 1) из определения 4.1 уравнение (4.11) можно решать шагами, т. е. для любого $\gamma\in(0,b)$ сначала отыскать решение на интервале $(0,\gamma)$, а затем продолжить это решение на (γ,b).

Выберем $\delta>0$ так, чтобы оно отвечало условиям 2) и 3) из определения 4.1 для $\varepsilon=1/2$ и некоторого фиксированного $\alpha\in(0,1)$, соответственно, и чтобы $\|f\|_\delta\leqslant 1/2$. Рассмотрим оператор $\psi y(x):=f(x)-\mathcal{D}y(x)$, который в силу нашего выбора δ отображает шар B_δ в себя и является в нем сжатием. Таким образом, согласно принципу сжимающих отображений, уравнение (4.11) на интервале $(0,\delta)$ имеет единственное решение в шаре B_δ.

Далее, пусть для некоторого $\delta\in(0,b/2)$ на интервале $(0,\delta)$ решение уравнения (4.11) уже найдено. Будем искать решение на $(0,2\delta)$ в виде $y(x)=y_1(x)+y_2(x)$, где $y_1(x)=0$ на $(\delta,2\delta)$, а $y_2(x)=0$ на $(0,\delta)$. Тогда согласно условию 4) из определения 4.1 уравнение (4.11) на $(\delta,2\delta)$ примет вид

$$f_1(x)=y_2(x)+\int\limits_\delta^x R(x,t)y_2(t)\,dt,\quad \delta<x<2\delta, \tag{4.12}$$

где функции $f_1(x)=f(x)-\mathcal{D}y_1(x)$ и $R(x,t)=R(x,t;y_1)$ суммируемы с квадратом в своих областях определения и не зависят от $y_2(x)$. Уравнение (4.12) имеет единственное решение $y_2(x)\in L_2(\delta,2\delta)$. Продолжая этот процесс, за конечное число шагов находим суммируемое с квадратом решение $y(x)$ уравнения (4.11) на всем интервале $(0,b)$.

Покажем, что найденное решение единственно. Пусть $\tilde y(x)\in L_2(0,b)$ — еще одно решение. Тогда в соответствии с нашим первоначальным выбором $\delta>0$ при некотором $\delta_1\in(0,\delta)$ оба решения на интервале $(0,\delta_1)$ попадут в шар B_{δ_1}, и значит, в силу принципа сжимающих отображений $y(x)=\tilde y(x)$ п.в. на $(0,\delta_1)$, а ввиду единственности продолжения решения на (δ_1,b) они совпадут и на всем $(0,b)$. □

4.3. Решение основного уравнения на первой половине интервала. Используя результаты предыдущего подраздела, здесь мы докажем разрешимость нелинейного уравнения (4.5).

Лемма 4.3. *Оператор $\mathcal{F}$, определенный формулой (4.7), принадлежит классу $\mathcal{E}_{\pi/2}$.*

Доказательство. Согласно (4.2)–(4.4), (4.7) и лемме 4.2 достаточно доказать, что $w_{k,3}^{(j)}(x)=w_{k,3}^{(j)}(x;M)$, как операторы от $M(x)$, принадлежат классу $\mathcal{E}_{\pi/2}$ для всех $k=\overline{1,5}$ и $j=0,1$.

Покажем, например, что $w_{1,3}(x;M)$, $w_{1,3}'(x;M)\in\mathcal{E}_\pi$. В самом деле, согласно (2.22), (2.27), (4.2) и (4.3) имеем

$$w_{1,3}(x;M)=\frac12\Big(\int\limits_x^\pi q(s)\,ds\int\limits_0^x P(s,\xi;q,M)\,d\xi+\int\limits_{\frac{x}{2}}^x q(s)\,ds\int\limits_0^{2s-x}P(s,\xi;q,M)\,d\xi-$$
$$-\int\limits_{\pi-\frac{x}{2}}^\pi q(s)\,ds\int\limits_0^{2(s-\pi)+x}P(s,\xi;q,M)\,d\xi+\int\limits_0^x M(s)\,ds\int\limits_x^\pi d\xi\int\limits_0^{x-s}P(\xi-s,\eta;q,M)\,d\eta+$$
$$+\int\limits_0^x M(s)\,ds\int\limits_{\frac{x+s}{2}}^x d\xi\int\limits_0^{2\xi-x-s}P(\xi-s,\eta;q,M)\,d\eta-$$
$$-\int\limits_0^x M(s)\,ds\int\limits_{\pi+\frac{s-x}{2}}^\pi d\xi\int\limits_0^{2(\xi-\pi)+x-s}P(\xi-s,\eta;q,M)\,d\eta\Big),$$

$$w_{1,3}'(x;M)=\frac12\Big(\int\limits_x^\pi q(s)P(s,x;q,M)\,ds-\int\limits_{\frac{x}{2}}^x q(s)P(s,2s-x;q,M)\,d\xi-$$

$$-\int_{\pi-\frac{x}{2}}^{\pi} q(s)P(s,2(s-\pi)+x;q,M)\,ds+\int_0^x M(s)\,ds\int_x^{\pi} P(\xi-s,x-s;q,M)d\xi-$$

$$-\int_0^x M(s)\,ds\int_{\frac{x+s}{2}}^{x} P(\xi-s,2\xi-x-s;q,M)d\xi-$$

$$-\int_0^x M(s)\,ds\int_{\pi+\frac{s-x}{2}}^{\pi} P(\xi-s,2(\xi-\pi)+x-s;q,M)d\xi\Big).$$

Заметим, что во всех подынтегральных выражениях двух предыдущих формул значение аргумента функции M, а также второго аргумента функции P никогда не превосходит x. Используя это обстоятельство и опираясь на леммы 3.1 и 3.2, нетрудно проверить, что для операторов $w_{1,3}(x;M)$, и $w'_{1,3}(x;M)$ выполняются все условия в определении 4.1.

Для операторов $w^{(j)}_{k,3}(x)=w^{(j)}_{k,3}(x;M)$, $j=0,1$, при $k=\overline{2,5}$ доказательство аналогично, с той разницей, что при таких k функции $w_{k,3}(x)$ определены только при $x\in(0,\pi/2)$, а значит, соответствующие операторы принадлежат только $\mathcal{E}_{\pi/2}$. □

Из лемм 4.1–4.3 и теоремы 4.2 непосредственно вытекает, что уравнение (4.5) имеет единственное решение $M(x)\in L_2(0,\pi/2)$, что, в свою очередь, означает разрешимость основного уравнения (4.1) на первой половине интервала $(0,\pi)$.

5. Решение основного уравнения на второй половине интервала

5.1. Сведение к линейному интегральному уравнению Вольтерра третьего рода. Согласно (2.27) и (3.4) имеем

$$w_1(x;M)=w_1(x;M_1)+\int_0^x F(\pi,x,t;q,M_1)M_2(t)\,dt,\quad 0\leqslant x\leqslant\pi, \tag{5.1}$$

где функции $M_1(x)$ и $M_2(x)$ определены по формулам (3.3) при $\delta=\pi/2$, $\sigma=\pi$. В силу (2.6) и (3.5) справедливо тождество

$$F(\pi,x,x;q,M_1)=\frac{\pi-x}{2}. \tag{5.2}$$

Дифференцируя представление (5.1) по x и учитывая (5.2), получаем

$$w_1'(x;M)=w_1'(x;M_1)+\frac{\pi-x}{2}M_2(x)+\int_0^x \Phi(x,t;q,M_1)M_2(t)\,dt,\quad 0<x<\pi, \tag{5.3}$$

где функция

$$\Phi(x,t;q,M)=\frac{\partial}{\partial x}F(\pi,x,t;q,M) \tag{5.4}$$

суммируема с квадратом в треугольнике $0<t<x<\pi$. Используя (5.3), можно записать основное уравнение (4.1) следующим образом:

$$g_1(x)=(\pi-x)M_2(x)+2\int_{\frac{\pi}{2}}^x \Phi(x,t;q,M_1)M_2(t)\,dt,\quad 0<x<\pi, \tag{5.5}$$

где функция $g_1(x)\in L_2(0,\pi)$ имеет вид

$$g_1(x)=-2w'(\pi-x)-2w_1'(x;M_1)-2V'(x;M),\quad 0<x<\pi. \tag{5.6}$$

Заметим, что согласно (2.26) и (2.28)–(2.32) функция $V(x;M)$ на интервале $(\pi/2,\pi)$ зависит от значений функции $M(x)$ только при $x\in(0,\pi/2)$, т. е. $V(x;M)=V(x;M_1)$ на всем $(0,\pi)$. Поэтому соотношение (5.5) на интервале $(\pi/2,\pi)$ становится линейным интегральным уравнением Вольтерра относительно функции $M_2(x)$ со свободным членом $g_1(x)$. Однако за счет наличия множителя $(\pi - x)$ оно является так называемым уравнением третьего рода, которое имеет на интервале $(\pi/2, \pi)$ единственное решение $M_2(x)$, принадлежащее классу $L_2(\pi/2, T)$ для всякого $T \in (\pi/2, \pi)$.

Таким образом, с учетом предыдущего раздела приходим к тому, что основное уравнение (4.1) имеет единственное решение $M(x)$, $0 < x < \pi$, принадлежащее классу $L_2(0, T)$ для всякого $T \in (0, \pi)$. По причине наличия множителя $(\pi - x)$ в (5.5) пока трудно сказать что-либо о его суммируемости на всем интервале $0 < x < \pi$. Целью данного раздела является доказательство того, что решение $M(x)$ удовлетворяет условию (1.4).

5.2. Предварительное уточнение. Перепишем (5.5) в виде

$$g_1(x) = h(x) - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{h(t)}{\pi - t}\, dt + \varphi(x), \quad 0 < x < \pi, \tag{5.7}$$

где $h(x) = (\pi - x)M_2(x)$,

$$\varphi(x) = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} \Psi(x,t)h(t)\, dt, \quad \Psi(x,t) = \frac{2\Phi(x,t;q,M_1) + 1}{\pi - t}. \tag{5.8}$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 5.1. *Пусть η, θ — вещественные числа, $\theta \geqslant 0$. Решение $y(x)$ уравнения*

$$y(x) = f(x) + \eta \int\limits_{a}^{x} \frac{y(t)\, dt}{b - t}, \quad a < x < b, \tag{5.9}$$

удовлетворяет условию $(b - x)^\theta y(x) \in L_2(a, b)$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий (в зависимости от значения разности $\eta - \theta$):

1) $(b - x)^\theta f(x) \in L_2(a, b)$ *при* $\eta - \theta < 1/2$;
2) $(b - x)^\theta f(x) \in L_2(a, b)$,

$$\int\limits_{a}^{b} (b - x)^{\eta - 1} f(x)\, dx = 0 \tag{5.10}$$

при $\eta - \theta > 1/2$.

Для доказательства нам потребуется следующее утверждение (см. [1]), которое следует из частного случая неравенств Харди [30].

Предложение 5.1. *Зафиксируем $\alpha < 1/2$. Операторы*

$$T_\alpha f = \frac{1}{(b - x)^\alpha} \int\limits_{a}^{x} \frac{f(t)\, dt}{(b - t)^{1-\alpha}}, \quad T_\alpha^* f = \frac{1}{(b - x)^{1-\alpha}} \int\limits_{x}^{b} \frac{f(t)\, dt}{(b - t)^{\alpha}}, \quad a < x < b,$$

отображают $L_2(a, b)$ в $L_2(a, b)$ и ограничены.

Доказательство леммы 5.1. Подстановкой нетрудно проверить, что решение уравнения (5.9) имеет вид

$$y(x) = f(x) + \frac{\eta}{(b - x)^\eta} \int\limits_{a}^{x} (b - t)^{\eta - 1} f(t)\, dt. \tag{5.11}$$

Пусть $\eta - \theta < 1/2$. Легко видеть, что $(b - x)^\theta y(x) = f_0(x) + \eta T_\alpha f_0(x)$, где $f_0(x) = (b - x)^\theta f(x) \in L_2(a, b)$, $\alpha = \eta - \theta < 1/2$. Согласно предложению 5.1 имеем $(b - x)^\theta y(x) \in L_2(a, b)$.

Пусть теперь $\eta - \theta > 1/2$. Используя (5.10), преобразуем (5.11) к виду

$$y(x) = f(x) - \frac{\eta}{(b - x)^\eta} \int\limits_{x}^{b} (b - t)^{\eta - 1} f(t)\, dt,$$

откуда, умножая на $(b-x)^\theta$, получаем $(b-x)^\theta y(x) = f_0(x) - \eta T_\alpha^* f_0(x)$, где $\alpha = \theta - \eta + 1 < 1/2$. Снова используя предложение 5.1, получаем $(b-x)^\theta y(x) \in L_2(a,b)$.

Достаточность доказана, перейдем к необходимости. Согласно (5.9) имеем

$$(b-x)^\theta |f(x)| \leqslant |y_0(x)| + \eta \int_a^x \frac{|y_0(t)|\,dt}{b-t} \in L_2(a,b),$$

где $y_0(x) = (b-x)^\theta y(x) \in L_2(a,b)$. Пусть $\eta - \theta > 1/2$. Тогда

$$(b-x)^{\eta-1} y(x) = (b-x)^{\eta-\theta-1} y_0(x) \in L(0,\pi).$$

Поэтому, умножая обе части (5.9) на $(b-x)^{\eta-1}$, интегрируя от a до b и меняя порядок интегрирования в повторном интеграле, будем иметь

$$\int_a^b (b-x)^{\eta-1} f(x)\,dx = \int_a^b (b-x)^{\eta-1} y(x)\,dx - \eta \int_a^b \frac{y(x)\,dx}{b-x} \int_x^b (b-t)^{\eta-1}\,dt = 0,$$

т. е. приходим к (5.10). □

Лемма 5.2. *Зафиксируем* $\eta \geqslant 0$. *Уравнение*

$$y(x) = f(x) + \eta \int_a^x \frac{y(t)\,dt}{b-t} + \int_a^x G(x,t) y(t)\,dt, \quad a < x < b, \tag{5.12}$$

где

$$(b-x)^\eta f(x) \in L_2(a,b), \quad \int_a^b \int_a^x |G(x,t)|^2\,dt\,dx < \infty,$$

имеет единственное решение $y(x)$, $(b-x)^\eta y(x) \in L_2(a,b)$.

Доказательство. Положим $\beta(x) = (x-b)^{2\eta+1}/(2\eta+1)$ и обозначим через $L_{2,\beta}(a,b)$ пространство функций $f(x)$, $a < x < b$, с нормой

$$\|f\|_{L_{2,\beta}} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,d\beta(x)} = \sqrt{\int_a^b (b-x)^{2\eta} |f(x)|^2\,dx}.$$

Пусть линейный ограниченный оператор F взаимно однозначно отображает банахово пространство $\mathcal{B}$ на себя, а линейный оператор $G : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ вполне непрерывен. Тогда если оператор $S = F + G$ является инъекцией, то он является и биекцией $\mathcal{B}$ на $\mathcal{B}$. Действительно, обозначив $S_1 = SF^{-1}$, имеем $S_1 = E + G_1$, где E — единичный оператор, а $G_1 = GF^{-1}$. Тогда S_1 — инъекция, а G_1 вполне непрерывен. Согласно альтернативе Фредгольма (см. [5]) S_1 — биекция. Следовательно, S — тоже биекция. Обозначим $F := E - \eta T_0$,

$$Gy := -\int_a^x G(x,t) y(t)\,dt = -\int_a^x G_\beta(x,t) y(t)\,d\beta(t), \quad G_\beta(x,t) := \frac{G(x,t)}{(b-t)^{2\eta}},$$

и запишем уравнение (5.12) в операторном виде: $f = Fy + Gy$. С помощью предложения 5.1 легко показать, что оператор F ограничен в $L_{2,\beta}(a,b)$, и согласно лемме 5.1 для $\theta = \eta$ он является биекцией $L_{2,\beta}(a,b)$ на $L_{2,\beta}(a,b)$. Кроме того, легко видеть, что оператор G отображает $L_{2,\beta}(a,b)$ в себя. Поскольку

$$\int_a^b \int_a^x |G_\beta(x,t)|^2\,d\beta(t)\,d\beta(x) \leqslant \int_a^b \int_a^x |G(x,t)|^2\,dt\,dx < \infty,$$

то G является оператором Гильберта—Шмидта, а значит, он вполне непрерывен в $L_{2,\beta}(a,b)$ (см., например, [7]). Осталось заметить, что $F + G$ — инъекция, а следовательно, и биекция $L_{2,\beta}(a,b)$ на $L_{2,\beta}(a,b)$. □

В силу (2.6), (3.5) и (5.4) будем иметь

$$\Phi(x,t;q,M)=\frac{1}{2}\Big(-1+\int\limits_x^\pi P(s-t,x-t;q,M)\,ds-$$

$$-\int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{x} P(s-t,2s-x-t;q,M)\,ds-\int\limits_{\frac{t-x}{2}+\pi}^{\pi} P(s-t,2(s-\pi)+x-t;q,M)\,ds+$$

$$+\int\limits_x^\pi q(s)F(s,x,t;q,M)\,ds-\int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{x} q(s)F(s,2s-x,t;q,M)\,ds-$$

$$-\int\limits_{\frac{t-x}{2}+\pi}^{\pi} q(s)F(s,2(s-\pi)+x,t;q,M)\,ds+\int\limits_0^{x-t} M(s)\,ds\int\limits_x^\pi F(\xi-s,x-s,t;q,M)\,d\xi-$$

$$-\int\limits_0^{x-t} M(s)\,ds\int\limits_{\frac{x+t+s}{2}}^{x} F(\xi-s,2\xi-x-s,t;q,M)\,d\xi-$$

$$-\int\limits_0^{x-t} M(s)\,ds\int\limits_{\frac{s+t-x}{2}+\pi}^{\pi} F(\xi-s,2(\xi-\pi)+x-s,t;q,M)\,d\xi\Big). \qquad (5.13)$$

Согласно (5.8) и (5.13) функция $\Psi(x,t)$ суммируема с квадратом в треугольнике $\pi/2<t<x<\pi$, и, применяя лемму 5.2 к (5.7), (5.8), получаем $(\pi-x)h(x)\in L_2(0,\pi)$.

5.3. Окончательное уточнение. До сих пор использовалась лишь принадлежность производной $w'(x)$ классу $L_2(0,\pi)$. Покажем теперь, что выполнение краевых условий (2.24) влечет (1.4), т. е. уточним, что $h(x)\in L_2(0,\pi)$. Для этой цели потребуется лемма 5.1 и следующие два вспомогательные утверждения.

Лемма 5.3. *Зафиксируем* $\theta\in[1/3,1]$. *Тогда если* $(\pi-x)^\theta h(x)\in L_2(0,\pi)$, *то*

$$(\pi-x)^{\theta-\frac13}\varphi(x)\in L_2(0,\pi).$$

Доказательство. Согласно (5.8) и (5.13) найдется функция $f(x)\in L_2(0,\pi)$, такая что $|\Psi(x,t)|\leqslant f(t)$. Таким образом, получаем

$$(\pi-x)^{\theta-\frac13}|\varphi(x)|\leqslant(\pi-x)^{-\frac13}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)(\pi-t)^\theta|h(t)|\,dt\leqslant C(\pi-x)^{-\frac13}\in L_2(0,\pi),$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 5.4. *Если* $(\pi-x)^{1-\varepsilon}h(x)\in L_2(0,\pi)$ *при некотором* $\varepsilon>0$, *то*

$$\int\limits_0^\pi \varphi(x)\,dx=0. \qquad (5.14)$$

Доказательство. В силу (5.2), (5.4) и (5.8) имеем

$$\int\limits_0^\zeta\varphi(x)\,dx=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\zeta}\varphi(x)\,dx=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\zeta}dx\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x}\Big(2\frac{\partial}{\partial x}F(\pi,x,\tau;q,M_1)+1\Big)\frac{h(\tau)}{\pi-\tau}\,d\tau=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\zeta}\frac{h(\tau)}{\pi-\tau}\,d\tau\int\limits_{\tau}^{\zeta}\Big(2\frac{\partial}{\partial x}F(\pi,x,\tau;q,M_1)+1\Big)\,dx=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\zeta}\frac{h(\tau)}{\pi-\tau}\Big(2F(\pi,\zeta,\tau;q,M_1)-(\pi-\zeta)\Big)\,d\tau.$$

Согласно (2.6), (3.5) приходим к соотношению

$$\int_0^{\zeta} \varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{6} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\zeta} \frac{h(\tau)}{\pi-\tau} F_k(\zeta,\tau)\,d\tau, \tag{5.15}$$

где

$$F_1(\zeta,\tau) := \int_{\zeta}^{\pi} ds \int_0^{\zeta-\tau} P(s-\tau,\xi;q,M_1)\,d\xi,$$

$$F_2(\zeta,\tau) := \int_{\frac{\zeta+\tau}{2}}^{\zeta} ds \int_0^{2s-\zeta-\tau} P(s-\tau,\xi;q,M_1)\,d\xi - \int_{\frac{\tau-\zeta}{2}+\pi}^{\pi} ds \int_0^{2(s-\pi)+\zeta-\tau} P(s-\tau,\xi;q,M_1)\,d\xi,$$

$$F_3(\zeta,\tau) := \int_{\zeta}^{\pi} q(s)\,ds \int_{\tau}^{\zeta} F(s,\xi,\tau;q,M_1)\,d\xi,$$

$$F_4(\zeta,\tau) := \int_{\frac{\zeta+\tau}{2}}^{\zeta} q(s)\,ds \int_{\tau}^{2s-\zeta} F(s,\xi,\tau;q,M_1)\,d\xi - \int_{\frac{\tau-\zeta}{2}+\pi}^{\pi} q(s)\,ds \int_{\tau}^{2(s-\pi)+\zeta} F(s,\xi,\tau;q,M_1)\,d\xi,$$

$$F_5(\zeta,\tau) := \int_0^{\zeta-\tau} M_1(s)\,ds \int_{\zeta}^{\pi} d\xi \int_{\tau}^{\zeta-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta,$$

$$F_6(\zeta,\tau) := \int_0^{\zeta-\tau} M_1(s)\,ds \int_{\frac{\zeta+\tau+s}{2}}^{\zeta} d\xi \int_{\tau}^{2\xi-\zeta-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta -$$

$$- \int_0^{\zeta-\tau} M_1(s)\,ds \int_{\frac{s+\tau-\zeta}{2}+\pi}^{\pi} d\xi \int_{\tau}^{2(\xi-\pi)+\zeta-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta.$$

В оставшейся части доказательства одним и тем же символом C будем обозначать различные константы в оценках, не зависящие от аргументов функций.

Так как $P(x,t;q,M_1)$ — ограниченная функция, то

$$|F_1(\zeta,\tau)| \leqslant \int_{\zeta}^{\pi} ds \int_0^{\zeta-\tau} |P(s-\tau,\xi;q,M_1)|\,d\xi \leqslant C(\pi-\zeta)(\zeta-\tau).$$

Далее, доопределяя функцию $P(x,t;q,M_1)$ нулем вне треугольника D_π и преобразуя пределы интегрирования, будем иметь

$$F_2(\zeta,\tau) = \int_{\frac{\zeta+\tau}{2}}^{\frac{\tau-\zeta}{2}+\pi} ds \int_0^{2s-\zeta-\tau} P(s-\tau,\xi;q,M_1)\,d\xi + \int_{\frac{\tau-\zeta}{2}+\pi}^{\zeta} ds \int_{2(s-\pi)+\zeta-\tau}^{2s-\zeta-\tau} P(s-\tau,\xi;q,M_1)\,d\xi -$$

$$- \int_{\zeta}^{\pi} ds \int_0^{2(s-\pi)+\zeta-\tau} P(s-\tau,\xi;q,M_1)\,d\xi.$$

Здесь

$$\Big|\int\limits_{\frac{\zeta+\tau}{2}}^{\frac{\tau-\zeta}{2}+\pi} ds \int\limits_0^{2s-\zeta-\tau} P(s-\tau,\xi;q,M_1)\,d\xi\Big| \leqslant C \int\limits_{\frac{\zeta+\tau}{2}}^{\frac{\tau-\zeta}{2}+\pi} ds \int\limits_0^{2s-\zeta-\tau} d\xi \leqslant C(\pi-\zeta)^2,$$

$$\Big|\int\limits_{\frac{\tau-\zeta}{2}+\pi}^{\zeta} ds \int\limits_{2(s-\pi)+\zeta-\tau}^{2s-\zeta-\tau} P(s-\tau,\xi;q,M_1)\,d\xi\Big| \leqslant C\Big(\frac{\zeta-\tau}{2}+\pi-\zeta\Big)(\pi-\zeta),$$

$$\Big|\int\limits_{\zeta}^{\pi} ds \int\limits_0^{2(s-\pi)+\zeta-\tau} P(s-\tau,\xi;q,M_1)\,d\xi\Big| \leqslant C(\pi-\zeta)\Big(2(\pi-\zeta)+\zeta-\tau\Big).$$

Таким образом, приходим к оценке

$$|F_2(\zeta,\tau)| \leqslant C(\pi-\zeta)(\pi-\tau).$$

Далее, так как $F(x,t,\tau;q,M_1)$ — ограниченная функция, а $q(x), M_1(x) \in L_2(0,\pi)$, аналогично приходим к следующим оценкам для остальных $F_k(\zeta,\tau)$:

$$|F_3(\zeta,\tau)| \leqslant \int\limits_\zeta^\pi |q(s)|\,ds \int\limits_\tau^\zeta |F(s,\xi,\tau;q,M_1)|\,d\xi \leqslant C\sqrt{\pi-\zeta}(\zeta-\tau),$$

$$|F_4(\zeta,\tau)| = \int\limits_{\frac{\zeta+\tau}{2}}^{\frac{\tau-\zeta}{2}+\pi} |q(s)|\,ds \int\limits_\tau^{2s-\zeta} |F(s,\xi,\tau;q,M_1)|\,d\xi + \\ + \Big|\int\limits_{\frac{\tau-\zeta}{2}+\pi}^{\zeta} q(s)\,ds \int\limits_{2(s-\pi)+\zeta}^{2s-\zeta} F(s,\xi,\tau;q,M_1)\,d\xi\Big| + \\ + \Big|\int\limits_\zeta^\pi q(s)\,ds \int\limits_\tau^{2(s-\pi)+\zeta} F(s,\xi,\tau;q,M_1)\,d\xi\Big| \leqslant C\sqrt{\pi-\zeta}(\pi-\tau),$$

$$|F_5(\zeta,\tau)| \leqslant \int\limits_0^{\zeta-\tau} |M_1(s)|\,ds \int\limits_\zeta^\pi d\xi \int\limits_\tau^{\zeta-s} |F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)|\,d\eta \leqslant C(\pi-\zeta)(\zeta-\tau)^{\frac32},$$

$$|F_6(\zeta,\tau)| = \int\limits_0^{\zeta-\tau} |M_1(s)|\,ds \int\limits_{\frac{\zeta+\tau+s}{2}}^{\frac{s+\tau-\zeta}{2}+\pi} d\xi \int\limits_\tau^{2\xi-\zeta-s} |F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)|\,d\eta + \\ + \Big|\int\limits_0^{\zeta-\tau} M_1(s)\,ds \int\limits_{\frac{s+\tau-\zeta}{2}+\pi}^{\zeta} d\xi \int\limits_{2(\xi-\pi)+\zeta-s}^{2\xi-\zeta-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta\Big| + \\ + \Big|\int\limits_0^{\zeta-\tau} M_1(s)\,ds \int\limits_\zeta^\pi d\xi \int\limits_\tau^{2(\xi-\pi)+\zeta-s} F(\xi-s,\eta,\tau;q,M_1)\,d\eta\Big| \leqslant C\sqrt{\zeta-\tau}(\pi-\zeta)(\pi-\tau).$$

Итак, справедлива следующая общая оценка:

$$|F_k(\zeta,\tau)| \leqslant C\sqrt{\pi-\zeta}\,(\pi-\tau), \quad k=\overline{1,6},$$

которая вместе с (5.15) дает

$$\Big|\int\limits_0^\zeta \varphi(x)\,dx\Big| \leqslant C(\pi-\zeta)^{\frac{\varepsilon}{2}} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\zeta} \frac{(\pi-\tau)^{1-\varepsilon}|h(\tau)|}{(\pi-\tau)^{\frac{1-\varepsilon}{2}}}\,d\tau,$$

где правая часть стремится к нулю при $\zeta\to\pi$, что влечет (5.14). □

Рассмотрим соотношение (5.7). Имеем $g_1(x)$, $(\pi-x)h(x)\in L_2(0,\pi)$. Согласно лемме 5.3 получаем $(\pi-x)^{2/3}\varphi(x)\in L_2(0,\pi)$. Применяя лемму 5.1 к (5.7), (5.8), уточняем $(\pi-x)^{2/3}h(x)\in L_2(0,\pi)$. Снова используя лемму 5.3, получим $(\pi-x)^{1/3}\varphi(x)\in L_2(0,\pi)$.

Далее, согласно лемме 5.4 имеем (5.14). Кроме того, согласно (5.6) будем иметь

$$\int\limits_0^\pi g_1(x)\,dx = 2\Big(w(\pi-x)-w_1(x;M_1)-V(x;M)\Big)\Big|_{x=0}^{\pi}. \tag{5.16}$$

Используя (2.24), вычисляем

$$2w(\pi-x)\Big|_{x=0}^{\pi} = 2(w(0)-w(\pi)) = -\alpha_0\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} q(x)\,dx-\alpha_1\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} q(x)\,dx. \tag{5.17}$$

В силу (2.35) и (2.36) имеем

$$-2w_1(x;M_1)\Big|_{x=0}^{\pi} = 2(w_1(0)-w_1(\pi)) = \int\limits_0^\pi q(x)\,dx. \tag{5.18}$$

Наконец, используя (2.26), (2.30)–(2.32), (2.35) и (2.36) получим

$$-2V(x;M)\Big|_{x=0}^{\pi} = 2(V(0)-V(\pi)) = \alpha_0\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} q(x)\,dx+\alpha_1\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} q(x)\,dx-\int\limits_0^\pi q(x)\,dx. \tag{5.19}$$

Таким образом, в силу (5.16)–(5.19) приходим к равенству

$$\int\limits_0^\pi g_1(x)\,dx=0,$$

которое вместе с (5.7), (5.14) и леммой 5.1 дает $(\pi-x)^{1/3}h(x)\in L_2(0,\pi)$. Снова применяя леммы 5.1 и 5.3, окончательно уточняем, что $(\pi-x)M_2(x)=h(x)\in L_2(0,\pi)$, и приходим к утверждению теоремы 4.1.

6. Решение обратной задачи. Доказательство теоремы 1.2

Известным методом (см., например, [22, лемма 3.3]) доказывается следующее утверждение, являющееся обратным к лемме 2.5.

Лемма 6.1. *Пусть заданы произвольные комплексные числа* λ_k, $k\geqslant 1$, *вида* (1.5)*,* (1.6)*. Тогда функция* $\Delta(\lambda)$*, определенная по формуле* (2.54)*, имеет вид* (2.23)*,* (2.24).

Отметим также, что лемма 6.1 может быть получена непосредственно из [22, леммы 3.3 и 3.4].

Доказательство теоремы 1.2. Пусть задана комплекснозначная функция $q(x)\in L_2(0,\pi)$ и комплексные числа α_0, α_1, β, причем $\alpha_0+\alpha_1\notin(-\infty,0]$, а также некоторая последовательность комплексных чисел $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ вида (1.5), (1.6). Тогда согласно лемме 6.1 функция $\Delta(\lambda)$, построенная по формуле (2.54), имеет вид (2.23) с некоторой функцией $w(x)\in W_2^1[0,\pi]$, удовлетворяющей краевым условиям (2.24). В силу теоремы 4.1 основное уравнение (4.1) с этой функцией $w(x)$ имеет единственное решение $M(x)$, удовлетворяющее условию (1.4). Рассмотрим соответствующую краевую задачу $L = L(q, M, \alpha_0, \alpha_1, \beta)$. Пусть $\tilde{\Delta}(\lambda)$ — ее характеристическая функция. Тогда согласно лемме 2.3 она имеет вид

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} \frac{\sin \rho\pi}{\rho} + \int_0^\pi \tilde{w}(x) \frac{\sin \rho x}{\rho} \, dx, \quad \tilde{w}(x) \in W_2^1[0, \pi], \tag{6.1}$$

где

$$\tilde{w}(\pi - x) = \frac{\beta}{2} + w_1(x; M) + V(x; M), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \tag{6.2}$$

а функции $w_1(x; M)$ и $V(x; M)$ определены при помощи формул (2.25)–(2.29). При этом

$$\tilde{w}(\pi) = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{4} \int_0^\pi q(x) \, dx = w(\pi). \tag{6.3}$$

Дифференцируя (6.2) по x и сравнивая с (4.1), получаем $\tilde{w}'(x) = w'(x)$ п.в. на $(0, \pi)$, а учитывая (6.3) и тот факт, что $w(x), \tilde{w}(x) \in W_2^1[0, \pi]$, приходим к тождеству $\tilde{w}(x) \equiv w(x)$. Итак, принимая во внимание (2.23) и (6.1), окончательно заключаем, что $\tilde{\Delta}(\lambda) \equiv \Delta(\lambda)$. Таким образом, спектр построенной краевой задачи L совпадает с заданной последовательностью $\{\lambda_k\}_{k \geqslant 1}$.

Единственность $M(x)$ следует из единственности решения основного уравнения (4.1). □

Доказательство теоремы 1.2 конструктивно и дает следующий алгоритм решения задачи 1.1.

Алгоритм 6.1. *Пусть заданы спектр* $\{\lambda_k\}_{k \geqslant 1}$ *некоторой краевой задачи* $L(q, M, \alpha_0, \alpha_1, \beta)$, *функция* $q(x)$ *и числа* α_0, α_1, β.

1) *Строим функцию* $\Delta(\lambda)$ *по формуле* (2.54).
2) *В соответствии с* (2.23) *вычисляем функцию* $w(x)$ *по формуле*

$$w(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k \Delta(k^2) \sin kx.$$

3) *Находим функцию* $M(x)$ *из основного уравнения* (4.1).

7. Информация о финансовой поддержке

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01193).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутерин С. А.* Обратная спектральная задача восстановления оператора свертки, возмущенного одномерным оператором// Мат. заметки. — 2006. — *80*, № 5. — С. 668–682.
2. *Бутерин С. А.* О восстановлении сверточного возмущения оператора Штурма—Лиувилля по спектру// Дифф. уравн. — 2010. — *46*, № 1. — С. 146–149.
3. *Бутерин С. А.* Обратная спектральная задача для интегро-дифференциальных операторов с условием разрыва// В сб.: «Математика. Механика. Т. 17». — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2015. — С. 9–12.
4. *Бутерин С. А.* Обратная задача для интегро-дифференциального оператора второго порядка с условием разрыва// В сб.: «Совр. пробл. теории функций и их прил.». — Саратов: Изд-во «Научная книга», 2018. — С. 70–73.
5. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
6. *Еремин М. С.* Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения второго порядка с особенностью// Дифф. уравн. — 1988. — *24*, № 2. — С. 350–351.
7. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
8. *Курышова Ю. В.* Обратная спектральная задача для интегро-дифференциальных операторов// Мат. заметки. — 2007. — *81*, № 6. — С. 855–866.
9. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956.
10. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма—Лиувилля и Дирака. — М.: Наука, 1988.
11. *Маламуд М. М.* О некоторых обратных задачах// В сб.: «Краевые задачи математической физики». — Киев: Наукова Думка, 1979. — С. 116–124.
12. *Марченко В. А.* Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1977.

13. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Физматгиз, 1977.
14. *Юрко В. А.* Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов первого порядка// В сб.: «Функциональный анализ». — Ульяновск, 1984. — С. 144–151.
15. *Юрко В. А.* Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов// Мат. заметки. — 1991. — *50*, № 5. — С. 134–144.
16. *Юрко В. А.* О краевых задачах с условиями разрыва внутри интервала// Дифф. уравн. — 2000. — *36*, № 8. — С. 1139–1140.
17. *Юрко В. А.* Обратная задача для дифференциальных систем на конечном интервале в случае кратных корней характеристического многочлена// Дифф. уравн. — 2005. — *41*, № 6. — С. 781–786.
18. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. — М.: Физматлит, 2007.
19. *Beals R., Deift P., Tomei C.* Direct and inverse scattering on the line. — Providence: AMS, 1988.
20. *Bondarenko N. P.* An inverse problem for an integro-differential operator on a star-shaped graph// Math. Methods Appl. Sci. — 2018. — *41*, № 4. — С. 1697–1702.
21. *Bondarenko N., Buterin S.* On recovering the Dirac operator with an integral delay from the spectrum// Results Math. — 2017. — *71*, № 3-4. — С. 1521–1529.
22. *Buterin S. A.* On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator// Results Math. — 2007. — *50*, № 3-4. — С. 173–181.
23. *Buterin S. A.* On inverse spectral problems for first-order integro-differential operators with discontinuities// Appl. Math. Lett. — 2018. — *78*. — С. 65–71.
24. *Buterin S. A., Choque Rivero A. E.* On inverse problem for a convolution integro-differential operator with Robin boundary conditions// Appl. Math. Lett. — 2015. — *48*. — С. 150–155.
25. *Buterin S. A., Sat M.* On the half inverse spectral problem for an integro-differential operator// Inverse Probl. Sci. Eng. — 2017. — *25*, № 10. — С. 1508–1518.
26. *Buterin S. A., Vasiliev S. V.* On uniqueness of recovering the convolution integro-differential operator from the spectrum of its non-smooth one-dimensional perturbation// Bound. Value Probl. — 2018. — *2018*, № 55. — https://doi.org/10.1186/s13661-018-0974-2.
27. *Freiling G., Yurko V. A.* Inverse Sturm—Liouville problems and their applications. — New York: NOVA Science Publ., 2001.
28. *Freiling G., Yurko V. A.* Inverse spectral problems for singular non-selfadjoint differential operators with discontinuities in an interior point// Inverse Problems. — 2002. — *18*. — С. 757–773.
29. *Hald O. H.* Discontinuous inverse eigenvalue problems// Commun. Pure Appl. Math. — 1984. — *37*. — С. 539–577.
30. *Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G.* Inequalities. — Cambridge: Cambridge University Press, 1988.
31. *Ignatiev M.* On an inverse spectral problem for one integro-differential operator of fractional order// J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2018. — DOI: 10.1515/jiip-2017-0121.
32. *Ignatyev M.* On an inverse spectral problem for the convolution integro-differential operator of fractional order// Results Math. — 2018. — DOI: 10.1007/s00025-018-0800-2.
33. *Krueger R. J.* Inverse problems for nonabsorbing media with discontinuous material properties// J. Math. Phys. — 1982. — *23*, № 3. — С. 396–404.
34. *Kuryshova Yu. V., Shieh C.-T.* An inverse nodal problem for integro-differential operators// J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2010. — *18*, № 4. — С. 357–369.
35. *Lakshmikantham V., Rama Mohana Rao M.* Theory of integro-differential equations. — Singapore: Gordon & Breach Sci. Publ., 1995.
36. *Manafov M. Dzh.* An inverse spectral problem for Sturm—Liouville operator with integral delay// Electron. J. Differ. Equ. — 2017. — *2017*, № 12. — С. 1–8.
37. *Shepelsky D. G.* The inverse problem of reconstruction of the medium's conductivity in a class of discontinuous and increasing functions// В сб.: «Spectral Operator Theory and Related Topics». — Providence: Am. Math. Soc., 1994. — С. 209–232.
38. *Shieh C.-T., Yurko V. A.* Inverse nodal and inverse spectral problems for discontinuous boundary value problems// J. Math. Anal. Appl. — 2008. — *347*. — С. 266–272.
39. *Wang Y.-P.* Inverse problems for Sturm—Liouville operators with interior discontinuities and boundary conditions dependent on the spectral parameter// Math. Methods Appl. Sci. — 2013. — *36*, № 7. — С. 857–868.
40. *Wang Y. P.* Inverse problems for discontinuous Sturm—Liouville operators with mixed spectral data// Inverse Probl. Sci. Eng. — 2015. — *23*, № 7. — С. 1180–1198.
41. *Wang Y.-P., Wei G.* The uniqueness for Sturm—Liouville problems with aftereffect// Acta Math. Sci. — 2012. — *32A*, № 6. — С. 1171–1178.

42. *Wang Y. P., Yurko V. A.* On the inverse nodal problems for discontinuous Sturm—Liouville operators// J. Differ. Equ. — 2016. — *260*, № 5. — С. 4086–4109.
43. *Yang C. F.* Inverse nodal problems of discontinuous Sturm—Liouville operator// J. Differ. Equ. — 2013. — *254*, № 4. — С. 1992–2014.
44. *Yang C.-F., Yang X.-P.* An interior inverse problem for the Sturm—Liouville operator with discontinuous conditions// Appl. Math. Lett. — 2009. — *22*, № 9. — С. 1315–1319.
45. *Yurko V. A.* Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems// Integral Transforms Spec. Funct. — 2000. — 10, № 2. — С. 141–164.
46. *Yurko V. A.* Inverse spectral problems for differential operators and their applications. — Amsterdam: Gordon & Breach Sci. Publ., 2000.
47. *Yurko V. A.* Method of spectral mappings in the inverse problem theory. — Utrecht: VSP, 2002.
48. *Yurko V. A.* An inverse spectral problems for integro-differential operators// Far East J. Math. Sci. — 2014. — *92*, № 2. — С. 247–261.
49. *Yurko V. A.* Inverse problems for second order integro-differential operators// Appl. Math. Lett. — 2017. — *74*. — С. 1–6.
50. *Yurko V. A.* Inverse spectral problems for first order integro-differential operators// Bound. Value Probl. — 2017. — *2017*, № 98. — `https://doi.org/10.1186/s13661-017-0831-8`.

С. А. Бутерин
Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83, корпус IX
E-mail: `buterinsa@info.sgu.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-3-427-458 UDC 517.984

Inverse Spectral Problem for Integrodifferential Sturm–Liouville Operators with Discontinuity Conditions

 S. A. Buterin

Abstract. We consider the Sturm—Liouville operator perturbed by a convolution integral operator on a finite interval with Dirichlet boundary-value conditions and discontinuity conditions in the middle of the interval. We study the inverse problem of restoration of the convolution term by the spectrum. The problem is reduced to solution of the so-called main nonlinear integral equation with a singularity. To derive and investigate this equations, we do detailed analysis of kernels of transformation operators for the integrodifferential expression under consideration. We prove the global solvability of the main equation, this implies the uniqueness of solution of the inverse problem and leads to necessary and sufficient conditions for its solvability in terms of spectrum asymptotics. The proof is constructive and gives the algorithm of solution of the inverse problem.

REFERENCES

1. S. A. Buterin, "Obratnaya spektral'naya zadacha vosstanovleniya operatora svertki, vozmushchennogo odnomernym operatorom" [Inverse spectral problem of restoration of a convolution operator perturbed by a one-dimensional operator], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2006, **80**, No. 5, 668–682 (in Russian).
2. S. A. Buterin, "O vosstanovlenii svertochnogo vozmushcheniya operatora Shturma—Liuvillya po spektru" [On restoration of a convolutional perturbation of the Sturm—Liouville operator from the spectrum], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2010, **46**, No. 1, 146–149 (in Russian).
3. S. A. Buterin, "Obratnaya spektral'naya zadacha dlya integro-differentsial'nykh operatorov s usloviem razryva" [Inverse spectral problem for integrodifferential operators with discontinuity condition], In: *Matematika. Mekhanika. T. 17* [Mathematics. Mechanics. Vol. 17], Saratov Univ, Saratov, 2015, pp. 9–12 (in Russian).

4. S. A. Buterin, “Obratnaya zadacha dlya integro-differentsial’nogo operatora vtorogo poryadka s usloviem razryva” [Inverse problem for a second-order integrodifferential operator with discontinuity condition], In: *Sovr. probl. teorii funktsiy i ikh pril.* [Contemp. Probl. Funct. Theory Appl.], Nauchnaya kniga, Saratov, 2018, pp. 70–73 (in Russian).
5. N. Dunford and J. Schwartz, *Lineynye operatory. Obshchaya teoriya* [Linear Operators. General Theory], IL, Moscow, 1962 (Russian translation).
6. M. S. Eremin, “Obratnaya zadacha dlya integro-differentsial’nogo uravneniya vtorogo poryadka s osobennost’yu” [Inverse problem for a second-order integrodifferential equation with a singularity], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1988, **24**, No. 2, 350–351 (in Russian).
7. K. Yosida, *Funktsional’nyy analiz* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
8. Yu. V. Kuryshova, “Obratnaya spektral’naya zadacha dlya integro-differentsial’nykh operatorov” [Inverse spectral problem for integrodifferential operators], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2007, **81**, No. 6, 855–866 (in Russian).
9. B. Ya. Levin, *Raspredelenie korney tselykh funktsiy* [Distribution of Roots of Entire Functions], Gostekhizdat, Moscow, 1956 (in Russian).
10. B. M. Levitan and I. S. Sargsyan, *Operatory Shturma—Liuvillya i Diraka* [Sturm—Liouville and Dirac Operators], Nauka, Moscow, 1988 (in Russian).
11. M. M. Malamud, “O nekotorykh obratnykh zadachakh” [On some inverse problems], In: *Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki* [Boundary-value Problems of Mathematical Physics], Naukova Dumka, Kiev, 1979, pp. 116–124 (in Russian).
12. V. A. Marchenko, *Operatory Shturma—Liuvillya i ikh prilozheniya* [Sturm—Liouville Operators and Their Applications], Naukova dumka, Kiev, 1977 (in Russian).
13. I. I. Privalov, *Vvedenie v teoriyu funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Introduction to the Theory of Functions of Complex Variable], Fizmatgiz, Moscow, 1977 (in Russian).
14. V. A. Yurko, “Obratnaya zadacha dlya integro-differentsial’nykh operatorov pervogo poryadka” [Inverse problem for first-order integrodifferential operators], In: *Funktsional’nyy analiz* [Functional Analysis], Ul’yanovsk, 1984, pp. 144–151 (in Russian).
15. V. A. Yurko, “Obratnaya zadacha dlya integro-differentsial’nykh operatorov” [Inverse problem for integrodifferential operators], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1991, **50**, No. 5, 134–144 (in Russian).
16. V. A. Yurko, “O kraevykh zadachakh s usloviyami razryva vnutri intervala” [On boundary-value problems with discontinuity conditions inside the interval], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2000, **36**, No. 8, 1139–1140 (in Russian).
17. V. A. Yurko, “Obratnaya zadacha dlya differentsial’nykh sistem na konechnom intervale v sluchae kratnykh korney kharakteristicheskogo mnogochlena” [Inverse problem for differential systems on a finite interval in the case of multiple roots of the characteristic polynomial], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2005, **41**, No. 6, 781–786 (in Russian).
18. V. A. Yurko, *Vvedenie v teoriyu obratnykh spektral’nykh zadach* [Introduction to the Theory of Inverse Spectral Problems], Fizmatlit, Moscow, 2007 (in Russian).
19. R. Beals, P. Deift, and C. Tomei, *Direct and Inverse Scattering on the Line*, AMS, Providence, 1988.
20. N. P. Bondarenko, “An inverse problem for an integro-differential operator on a star-shaped graph,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2018, **41**, No. 4, 1697–1702.
21. N. Bondarenko and S. Buterin, “On recovering the Dirac operator with an integral delay from the spectrum,” *Results Math.*, 2017, **71**, No. 3-4, 1521–1529.
22. S. A. Buterin, “On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator,” *Results Math.*, 2007, **50**, No. 3-4, 173–181.
23. S. A. Buterin, “On inverse spectral problems for first-order integro-differential operators with discontinuities,” *Appl. Math. Lett.*, 2018, **78**, 65–71.
24. S. A. Buterin and A. E. Choque Rivero, “On inverse problem for a convolution integro-differential operator with Robin boundary conditions,” *Appl. Math. Lett.*, 2015, **48**, 150–155.
25. S. A. Buterin and M. Sat, “On the half inverse spectral problem for an integro-differential operator,” *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 2017, **25**, No. 10, 1508–1518.
26. S. A. Buterin and S. V. Vasiliev, “On uniqueness of recovering the convolution integro-differential operator from the spectrum of its non-smooth one-dimensional perturbation,” *Bound. Value Probl.*, 2018, **2018**, No. 55, `https://doi.org/10.1186/s13661-018-0974-2`.
27. G. Freiling and V. A. Yurko, *Inverse Sturm—Liouville Problems and Their Applications*, NOVA Science Publ., New York, 2001.
28. G. Freiling and V. A. Yurko, “Inverse spectral problems for singular non-selfadjoint differential operators with discontinuities in an interior point,” *Inverse Problems*, 2002, **18**, 757–773.

29. O. H. Hald, “Discontinuous inverse eigenvalue problems,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1984, **37**, 539–577.
30. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
31. M. Ignatiev, “On an inverse spectral problem for one integro-differential operator of fractional order,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2018, DOI: 10.1515/jiip-2017-0121.
32. M. Ignatyev, “On an inverse spectral problem for the convolution integro-differential operator of fractional order,” *Results Math.*, 2018, DOI: 10.1007/s00025-018-0800-2.
33. R. J. Krueger, “Inverse problems for nonabsorbing media with discontinuous material properties,” *J. Math. Phys.*, 1982, **23**, No. 3, 396–404.
34. Yu. V. Kuryshova and C.-T. Shieh, “An inverse nodal problem for integro-differential operators,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2010, **18**, No. 4, 357–369.
35. V. Lakshmikantham and M. Rama Mohana Rao, *Theory of Integro-Differential Equations*, Gordon & Breach Sci. Publ., Singapore, 1995.
36. M. Dzh. Manafov, “An inverse spectral problem for Sturm—Liouville operator with integral delay,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2017, **2017**, No. 12, 1–8.
37. D. G. Shepelsky, “The inverse problem of reconstruction of the medium’s conductivity in a class of discontinuous and increasing functions,” In: *Spectral Operator Theory and Related Topics*, Am. Math. Soc., Providence, 1994, pp. 209–232.
38. C.-T. Shieh and V. A. Yurko, “Inverse nodal and inverse spectral problems for discontinuous boundary value problems,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, **347**, 266–272.
39. Y.-P. Wang, “Inverse problems for Sturm—Liouville operators with interior discontinuities and boundary conditions dependent on the spectral parameter,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2013, **36**, No. 7, 857–868.
40. Y. P. Wang, “Inverse problems for discontinuous Sturm—Liouville operators with mixed spectral data,” *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 2015, **23**, No. 7, 1180–1198.
41. Y.-P. Wang and G. Wei, “The uniqueness for Sturm—Liouville problems with aftereffect,” *Acta Math. Sci.*, 2012, **32A**, No. 6, 1171–1178.
42. Y. P. Wang and V. A. Yurko, “On the inverse nodal problems for discontinuous Sturm—Liouville operators,” *J. Differ. Equ.*, 2016, **260**, No. 5, 4086–4109.
43. C. F. Yang, “Inverse nodal problems of discontinuous Sturm—Liouville operator,” *J. Differ. Equ.*, 2013, **254**, No. 4, 1992–2014.
44. C.-F. Yang and X.-P. Yang, “An interior inverse problem for the Sturm—Liouville operator with discontinuous conditions,” *Appl. Math. Lett.*, 2009, **22**, No. 9, 1315–1319.
45. V. A. Yurko, “Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems,” *Integral Transforms Spec. Funct.*, 2000, 10, No. 2, 141–164.
46. V. A. Yurko, *Inverse Spectral Problems for Differential Operators and Their Applications*, Gordon & Breach Sci. Publ., Amsterdam, 2000.
47. V. A. Yurko, *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory*, VSP, Utrecht, 2002.
48. V. A. Yurko, “An inverse spectral problems for integro-differential operators,” *Far East J. Math. Sci.*, 2014, **92**, No. 2, 247–261.
49. V. A. Yurko, “Inverse problems for second order integro-differential operators,” *Appl. Math. Lett.*, 2017, **74**, 1–6.
50. V. A. Yurko, “Inverse spectral problems for first order integro-differential operators,” *Bound. Value Probl.*, 2017, **2017**, No. 98, `https://doi.org/10.1186/s13661-017-0831-8`.

S. A. Buterin
Saratov State University, Saratov, Russia
E-mail: `buterinsa@info.sgu.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 3 (2018). С. 459–489

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-3-459-489 УДК 517.9:532

ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ ИДЕАЛЬНОЙ РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

© 2018 г. **Д. А. ЗАКОРА**

Аннотация. В работе исследуется задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей равномерно вращающийся либо неподвижный контейнер. Доказана теорема об однозначной сильной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи. В случае, когда система не вращается, найдено асимптотическое поведение решения задачи при нагрузках специального вида. Исследована спектральная задача, ассоциированная с изучаемой системой. Доказаны утверждения о локализации спектра, о существенном и дискретном спектре, об асимптотике спектра. В случае, если система находится в невесомости и не вращается, доказаны утверждения о кратной базисности специальной системы элементов. В этом случае найдено разложение решения эволюционной задачи по специальной системе элементов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В работе изучается задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей равномерно вращающийся либо неподвижный контейнер. Модель идеальной релаксирующей жидкости является обобщением модели идеальной баротропной жидкости и состоит в учете эффектов памяти в соотношении, связывающем давление и плотность жидкости. Эта модель изучалась в [18, гл. 11, § 6] в случае неподвижного контейнера и при дополнительном условии на динамическую плотность.

Во втором разделе приводится постановка начально-краевой задачи, описывающей изучаемую систему. В третьем разделе начально-краевая задача сводится к задаче Коши для системы интегродифференциальных уравнений первого порядка в некоторых гильбертовых пространствах. Доказывается теорема об однозначной сильной разрешимости изучаемой задачи. При этом система интегродифференциальных уравнений и начальных условий специальным образом сводится к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в некотором гильбертовом пространстве. Главный оператор этого уравнения есть операторная блок-матрица, а задача о спектре этого оператора ассоциируется с задачей о спектре идеальной релаксирующей жидкости. В случае, если система не вращается, этот оператор генерирует равномерно экспоненциально устойчивую полугруппу. Отсюда находится асимптотическое поведение решения изучаемой задачи при нагрузках, близких к почти периодическим.

В четвертом разделе исследуется спектр операторной блок-матрицы. В случае, если система вращается, существенный спектр оператора состоит из отрезка на мнимой оси, обусловленного внутренними инерционными волнами в жидкости, и набора отрезков на действительной оси,

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

обусловленного эффектами памяти в системе. В случае, когда система не вращается, существенный спектр задачи состоит только из отрезков на действительной оси. Если при этом система находится в невесомости, указанные отрезки схлопываются в конечный набор точек. Оставшийся спектр оператора — дискретный, расположен в некоторой вертикальной полосе и сгущается к бесконечности. В связи со спектральной задачей отметим здесь монографию [4] (см. также указанную там литературу), в которой проводится систематическое исследование широкого класса функционально-дифференциальных и интегродифференциальных уравнений методами спектральной теории.

В пятом разделе исследуется случай, когда система находится в невесомости и не вращается. В этом случае весь спектр главного оператора может быть найден из счетного набора характеристических уравнений. Доказано, что система корневых элементов главного оператора образует p-базис при $p > 3$ в основном гильбертовом пространстве. Отсюда находится представление решения исходной задачи в виде ряда по некоторой системе элементов.

2. Постановка задачи

Рассмотрим контейнер, равномерно вращающийся вокруг оси, сонаправленной с действием силы тяжести, и полностью заполненный идеальной неоднородной жидкостью. Будем считать, что жидкость занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор, нормальный к границе $\partial\Omega$ и направленный вне области Ω. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с контейнером, таким образом, что ось Ox_3 совпадает с осью вращения и направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится в области Ω. В этом случае равномерная скорость вращения контейнера запишется в виде $\omega_0\mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_3$ — орт оси вращения Ox_3, а $\omega_0 > 0$, для определенности. Будем считать, что внешнее стационарное поле сил $\mathbf{F}_0$ является гравитационным и действует вдоль оси вращения, т. е. $\mathbf{F}_0 = -g\mathbf{e}_3$, $g > 0$.

Рассмотрим состояние относительного равновесия жидкости. Из уравнения Эйлера движения идеальной жидкости, записанного в подвижной системе координат, найдем формулу для градиента стационарного давления (см. [9, гл. 5, § 1, п. 1]):

$$\nabla P_0 = \rho_0\big(-\omega_0^2\mathbf{e}_3 \times (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}) - g\mathbf{e}_3\big) = \rho_0\nabla\Big(\frac{\omega_0^2}{2}|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}|^2 - gx_3\Big) = \rho_0\nabla\Big(\frac{\omega_0^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) - gx_3\Big), \quad (2.1)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор текущей точки области Ω, а ρ_0 — стационарная плотность жидкости.

В состоянии относительного равновесия динамические составляющие давления и плотности, отвечающие за эффекты релаксации в жидкости, отсутствуют. Поэтому будем считать, что в состоянии относительного равновесия жидкость баротропна и удовлетворяет следующему уравнению состояния: $P_0 = a_\infty^2\rho_0$, где a_∞ — скорость звука в жидкости. Из этого уравнения и соотношения (2.1) заключаем, что ρ_0 и a_∞^2 могут быть в общем случае функциями параметра $z := 2^{-1}\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) - gx_3$. Далее будем считать, что в жидкости задана скорость звука $a_\infty^2 = \mathrm{const}$, тогда стационарная плотность может быть найдена из (2.1) как функция параметра z следующим образом: $\rho_0(z) = \rho_0(0)\exp(za_\infty^{-2})$, где $\rho_0(0)$ — плотность жидкости в начале координат. При этом стационарная плотность ρ_0 будет постоянной, только если в системе отсутствует вращение и гравитационное поле, т. е. при $\omega_0 = 0$ и $g = 0$.

Представим теперь полное давление и плотность жидкости в виде: $\widehat{P}(t,x) = P_0(z) + p(t,x)$, $\widehat{\rho}(t,x) = \rho_0(z) + \widetilde{\rho}(t,x)$, где $p(t,x)$ и $\widetilde{\rho}(t,x)$ — это динамическое давление и плотность, соответственно, возникающие при малых движениях жидкости относительно стационарного состояния. Предположим, что динамические составляющие удовлетворяют следующему реологическому соотношению:

$$P_m\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\nabla p(t,x) = a_\infty^2\Big(P_m\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) + \rho_0(z)Q_{m-1}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\Big)\nabla\widetilde{\rho}(t,x), \quad (2.2)$$

где $P_m(\lambda)$, $Q_{m-1}(\lambda)$ — полиномы степеней m и $m-1$, соответственно. Предположим, что корни полинома $P_m(\lambda)$ вещественны, различны и отрицательны, обозначим их через $-b_l$ $(l = \overline{1,m})$, а дробь $Q_{m-1}(\lambda)P_m^{-1}(\lambda)$ имеет следующее разложение:

$$\frac{Q_{m-1}(\lambda)}{P_m(\lambda)} = \sum_{l=1}^{m}\frac{k_l}{b_l + \lambda}, \quad (2.3)$$

где $k_l > 0$ $(l = \overline{1,m})$. Из определяющего соотношения (2.2) с помощью преобразования Лапласа и представлений (2.3) можно вывести (см. [7, с. 43–46]) следующее уравнение состояния:

$$\nabla p(t,x) = a_\infty^2 \nabla \widetilde{\rho}(t,x) - a_\infty^2 \rho_0(z) \sum_{l=1}^{m} \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \nabla\big(k_l \widetilde{\rho}(s,x)\big)\, ds. \tag{2.4}$$

В (2.4) мы пренебрегли экспоненциально затухающим во времени слагаемым, порождаемым состоянием жидкости в начальный момент времени. Это слагаемое можно считать отнесенным к полю внешних сил. Числа b_l^{-1} имеют смысл времен релаксации в системе, а k_l — некоторые структурные постоянные. В качестве математического обобщения будем считать, что $k_l = k_l(x)$ — непрерывно дифференцируемые положительные и отделенные от нуля функции. В случае, когда система не вращается и находится в невесомости ($\omega_0 = 0$, $g = 0$), функции $k_l(x)$ будем считать положительными константами.

Осуществим линеаризацию уравнения Эйлера, записанного в подвижной системе координат, относительно состояния относительного равновесия. С использованием уравнения состояния (2.4) получим задачу о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей равномерно вращающееся твердое тело:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}(t,x)}{\partial t} - 2\omega_0\big(\mathbf{u}(t,x)\times \mathbf{e}_3\big) + \nabla\Big(\dfrac{a_\infty^2}{\rho_0(z)}\widetilde{\rho}(t,x)\Big) - \displaystyle\sum_{l=1}^{m}\int_0^t e^{-b_l(t-s)}\nabla\big(a_\infty^2 k_l(x)\widetilde{\rho}(s,x)\big)\, ds = \mathbf{f}(t,x), \\ \dfrac{\partial \widetilde{\rho}(t,x)}{\partial t} + \operatorname{div}\big(\rho_0(z)\mathbf{u}(t,x)\big) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \qquad \mathbf{u}(t,x)\cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega), \end{cases}$$

где $\mathbf{u}(t,x)$ — поле скоростей жидкости в подвижной системе координат, а $\mathbf{f}(t,x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное поле.

Осуществим в полученной системе, с целью ее симметризации, следующую замену:

$$a_\infty \rho_0^{-1/2}(z)\widetilde{\rho}(t,x) =: \rho(t,x).$$

В результате получим основную задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}(t,x)}{\partial t} - 2\omega_0\big(\mathbf{u}(t,x)\times \mathbf{e}_3\big) + \\ \qquad + \nabla\big(a_\infty \rho_0^{-1/2}(z)\rho(t,x)\big) - \displaystyle\sum_{l=1}^{m}\int_0^t e^{-b_l(t-s)}\nabla\big(a_\infty \rho_0^{1/2}(z) k_l(x)\rho(s,x)\big)\, ds = \mathbf{f}(t,x), \\ \dfrac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} + a_\infty \rho_0^{-1/2}(z)\operatorname{div}\big(\rho_0(z)\mathbf{u}(t,x)\big) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \qquad \mathbf{u}(t,x)\cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega). \end{cases} \tag{2.5}$$

Для полноты формулировки задачи зададим начальные условия:

$$\mathbf{u}(0,x) = \mathbf{u}^0(x), \quad \rho(0,x) = \rho^0(x). \tag{2.6}$$

Всюду далее будем предполагать, что физические параметры связаны следующим неравенством, характеризующим малость времен релаксации b_l^{-1} или структурных функций $k_l(x)$:

$$1 - \sum_{l=1}^{m} \frac{k_l(x)\rho_0(z)}{b_l} > 0 \quad \forall\, x \in \overline{\Omega} \quad \Big(z = \frac{\omega_0^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) - g x_3\Big). \tag{2.7}$$

3. Теорема о разрешимости начально-краевой задачи и об асимптотическом поведении решений при нагрузках специального вида

В этом разделе начально-краевая задача (2.5)-(2.6), описывающая малые движения вращающейся идеальной релаксирующей жидкости, с помощью специальных операторов сводится к задаче Коши (3.20) (в векторно-матричной форме (3.21)) для системы дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве. Затем исследуется вопрос разрешимости задачи Коши (3.21) и доказывается теорема 3.1.

В случае, когда система не вращается, т. е. при $\omega_0 = 0$, исследуется поведение решения задачи (2.5)-(2.6) при нагрузках вида $\mathbf{f}(t,x) = \mathbf{g}(t,x) + \sum\limits_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathbf{f}_k(t,x)$, где $\sigma_k \in \mathbb{R}$ $(k = \overline{0,n})$. Доказывается теорема 3.2 об асимптотическом поведении решения задачи.

3.1. Проектирование уравнений движения. Для перехода к операторной формулировке задачи (2.5)-(2.6) применим метод ортогонального проектирования уравнений движения на специальные подпространства [9]. Введем векторное пространство $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ со скалярным произведением и нормой следующего вида:

$$(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} := \int\limits_\Omega \rho_0(z)\mathbf{u}_1(x)\cdot\overline{\mathbf{u}_2(x)}\,d\Omega, \quad \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} = \int\limits_\Omega \rho_0(z)|\mathbf{u}(x)|^2\,d\Omega. \tag{3.1}$$

В силу свойств функции $\rho_0(z)$ очевидно, что нормы в пространствах $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ и $\mathbf{L}_2(\Omega)$ эквивалентны, а значит $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ — гильбертово. Можно проверить, что имеет место разложение (аналог разложения Г. Вейля пространства векторных полей $\mathbf{L}_2(\Omega)$ (см. [9, гл. 2, § 1, п. 8])):

$$\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0) = \mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus\mathbf{G}(\Omega,\rho_0), \tag{3.2}$$

$$\mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0) := \big\{\mathbf{u}\in\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)\big|\ \mathrm{div}\big(\rho_0(z)\mathbf{u}\big) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \mathbf{u}_n := \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega)\big\},$$

$$\mathbf{G}(\Omega,\rho_0) := \big\{\mathbf{u}\in\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)\big| \quad \mathbf{u} = \nabla\varphi, \quad \int\limits_\Omega \varphi\,d\Omega = 0\big\}.$$

Здесь операции $\mathrm{div}\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}_n$ понимаются в смысле теории обобщенных функций (распределений), см. [9, гл. 2, § 1, п. 6]. Введем ортопроекторы P_0 и P_G пространства $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ на $\mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0)$ и $\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)$ соответственно. Будем разыскивать поле $\mathbf{u}$ в виде:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \nabla\varphi, \quad \text{где} \quad \mathbf{v}\in\mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0), \quad \nabla\varphi\in\mathbf{G}(\Omega,\rho_0). \tag{3.3}$$

Подставим представление (3.3) в уравнения (2.5) и применим к правой и левой частям первого уравнения ортопроекторы P_0 и P_G, отвечающие разложению (3.2). Преобразуем также граничное условие в (2.5) и начальные условия (2.6). В результате получим следующую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathbf{v}(t,x)}{\partial t} - 2\omega_0 P_0\big(\mathbf{v}(t,x)\times\mathbf{e}_3\big) - 2\omega_0 P_0\big(\nabla\varphi(t,x)\times\mathbf{e}_3\big) = P_0\mathbf{f}(t,x), \\ \dfrac{\partial\nabla\varphi(t,x)}{\partial t} - 2\omega_0 P_G\big(\mathbf{v}(t,x)\times\mathbf{e}_3\big) - 2\omega_0 P_G\big(\nabla\varphi(t,x)\times\mathbf{e}_3\big) + \\ \qquad +\nabla\big(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho(t,x)\big) - \sum\limits_{l=1}^{m}\int\limits_0^t e^{-b_l(t-s)}\nabla\big(a_\infty\rho_0^{1/2}(z)k_l(x)\rho(s,x)\big)\,ds = P_G\mathbf{f}(t,x), \\ \dfrac{\partial\rho(t,x)}{\partial t} + a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\nabla\varphi(t,x)\big) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \qquad \dfrac{\partial\varphi(t,x)}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega), \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\mathbf{v}(0,x) = P_0\mathbf{u}^0(x), \quad \nabla\varphi(0,x) = P_G\mathbf{u}^0(x), \quad \rho(0,x) = \rho^0(x). \tag{3.5}$$

3.2. Операторная формулировка задачи. Введем операторы S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}:

$$S_{11}\mathbf{v} := iP_0(\mathbf{v}\times\mathbf{e}_3), \quad S_{12}\nabla\varphi := iP_0(\nabla\varphi\times\mathbf{e}_3), \quad S_{21}\mathbf{v} := iP_G(\mathbf{v}\times\mathbf{e}_3), \quad S_{22}\nabla\varphi := iP_G(\nabla\varphi\times\mathbf{e}_3). \tag{3.6}$$

Обозначим через S операторный блок, составленный из операторов S_{jk} и действующий в гильбертовом пространстве $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0) = \mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)$. Имеет место лемма, доказательство которой подобно доказательству аналогичной леммы о свойствах кориолисова оператора из [9].

Лемма 3.1 (см. [9, гл. 5, § 1, п. 2]). *Оператор S является самосопряженным и ограниченным в $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$: $S = S^*$, $S\in\mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))$; более того, $\|S\| = 1$. Спектр оператора S_{11} существенный* (*см.* [19]) *и заполняет отрезок* $[-1,1]$: $\sigma(S_{11}) = \sigma_{ess}(S_{11}) = [-1,1]$ (*здесь через* $\sigma_{ess}(S_{11})$ *обозначен существенный* (*предельный*) *спектр оператора* S_{11} — *см. определение* 4.1).

Будем считать далее, что граница $\partial\Omega$ области Ω класса C^2.

Лемма 3.2. *Введем пространство*

$$\mathbf{H}_A := \{\nabla\varphi \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) \Big| \ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \ \ (\textit{на } \partial\Omega), \quad \int\limits_\Omega \varphi\, d\Omega = 0\}$$

с нормой, порожденной скалярным произведением следующего вида:

$$(\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2)_A := \int\limits_\Omega \frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)} \operatorname{div}\bigl(\rho_0(z)\nabla\varphi_1\bigr)\overline{\operatorname{div}\bigl(\rho_0(z)\nabla\varphi_2\bigr)}\, d\Omega.$$

Пространство $\mathbf{H}_A$ *является гильбертовым, оно компактно вложено в пространство* $\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$. *Порождающий оператор* A *гильбертовой пары* $(\mathbf{H}_A; \mathbf{G}(\Omega, \rho_0))$, *являющийся самосопряженным и положительно определенным в* $\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$, *обладает дискретным спектром. Для каждого поля* $\nabla q \in \mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$ *существует и единственно обобщенное решение задачи*

$$-\nabla\Bigl(\frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)}\operatorname{div}\bigl(\rho_0(z)\nabla\varphi\bigr)\Bigr) = \nabla q \quad (\textit{в } \Omega), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad (\textit{на } \partial\Omega), \quad \int\limits_\Omega \varphi\, d\Omega = 0,$$

выражаемое формулой $\nabla\varphi = A^{-1}\nabla q$. *Более того,* $A^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathbf{G}(\Omega, \rho_0))$ *при* $p > 3/2$ *и справедлива следующая асимптотическая формула для собственных значений оператора* A:

$$\lambda_k(A) = \Bigl(\frac{1}{6\pi^2 a_\infty^6}\int\limits_\Omega \rho_0^{-3/2}(z)\, d\Omega\Bigr)^{-2/3} k^{2/3}(1 + o(1)) \quad (k \to +\infty).$$

Доказательство. **1.** Покажем, что $\mathbf{H}_A$ — гильбертово пространство. Рассмотрим задачу

$$L\varphi := -\operatorname{div}\bigl(\rho_0(z)\nabla\varphi\bigr) = f \quad (\text{в } \Omega), \quad B\varphi := \frac{\partial\varphi}{\partial n} = g \quad (\text{на } \partial\Omega). \tag{3.7}$$

Можно проверить, что дифференциальное выражение L правильно эллиптично, а граничное условие B накрывает его (см. [2, гл. 3, § 6, п. 1, с. 222]). Таким образом, задача (3.7) эллиптична, а ее ядро, т. е. решение задачи (3.7) при $f \equiv 0$, $g \equiv 0$, как несложно проверить, состоит из констант. Из [2, гл. 3, § 6, п. 2, лемма 6.3] следует, что существует такая константа $c > 0$, что

$$c^{-1}\|\varphi\|^2_{W_2^2(\Omega)} \leqslant \|L\varphi\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant c\|\varphi\|^2_{W_2^2(\Omega)} \quad \forall\, \varphi \in W_2^2(\Omega, B), \tag{3.8}$$

$$\text{где} \quad W_2^2(\Omega, B) := \{\varphi \in W_2^2(\Omega) \Big| \ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } \partial\Omega), \quad (\varphi, 1)_{L_2(\Omega)} = 0\}.$$

Из (3.8) для каждого поля $\nabla\varphi \in \mathbf{H}_A$ выведем следующие неравенства:

$$\|\nabla\varphi\|_A^2 \geqslant c^{-1}a_\infty^2 \min_{x\in\overline{\Omega}} \rho_0^{-1}(z)\|\varphi\|^2_{W_2^2(\Omega)} \geqslant c^{-1}a_\infty^2 \min_{x\in\overline{\Omega}} \rho_0^{-1}(z)\|\nabla\varphi\|^2_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)}, \tag{3.9}$$

$$\|\nabla\varphi\|_A^2 \leqslant c a_\infty^2 \max_{x\in\overline{\Omega}} \rho_0^{-1}(z)\|\varphi\|^2_{W_2^2(\Omega)} \leqslant c c_1 a_\infty^2 \max_{x\in\overline{\Omega}} \rho_0^{-1}(z)\|\nabla\varphi\|^2_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)}, \tag{3.10}$$

где $c_1 > 0$ некоторая константа. Таким образом, $\mathbf{H}_A$ — гильбертово пространство.

2. Пространство $\mathbf{H}_A$ является плотным множеством в $\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$. Из неравенства (3.9), с учетом того, что $\|\nabla\varphi\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} \leqslant \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} \rho_0(z)\|\nabla\varphi\|^2_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)}$ для каждого $\nabla\varphi \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) \cap \mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$, следует, что $\mathbf{H}_A$ и $\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$ образуют гильбертову пару $(\mathbf{H}_A; \mathbf{G}(\Omega, \rho_0))$.

Найдем порождающий оператор A указанной гильбертовой пары; он определяется из тождества (см. [9, гл. 1, § 3, п. 1, формула (3.5)])

$$(A\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} = (\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2)_A, \quad \nabla\varphi_1 \in \mathcal{D}(A), \quad \nabla\varphi_2 \in \mathbf{H}_A. \tag{3.11}$$

Для дважды дифференцируемого поля $\nabla\varphi_1$ с использованием формулы Грина для оператора Лапласа тождество (3.11) можно преобразовать следующим образом:

$$(A\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} = \int\limits_\Omega \frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)} \operatorname{div}\bigl(\rho_0(z)\nabla\varphi_1\bigr)\operatorname{div}\bigl(\rho_0(z)\nabla\varphi_2\bigr)\, d\Omega =$$

$$= -\int\limits_\Omega \rho_0(z)\nabla\Bigl(\frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)}\operatorname{div}\bigl(\rho_0(z)\nabla\varphi_1\bigr)\Bigr)\cdot\nabla\varphi_2\, d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} a_\infty^2 \operatorname{div}\bigl(\rho_0(z)\nabla\varphi_1\bigr)\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\, dS =$$

$$= \Big(-\nabla\Big(\frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)}\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\nabla\varphi_1\big)\Big), \nabla\varphi_2\Big)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}.$$

Отсюда следует, что дважды дифференцируемое решение уравнения $A\nabla\varphi_1 = \nabla q$ является решением задачи

$$-\nabla\Big(\frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)}\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\nabla\varphi_1\big)\Big) = \nabla q \quad (\text{в } \Omega), \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega), \qquad \int\limits_\Omega \varphi_1\, d\Omega = 0.$$

Эта задача имеет единственное обобщенное решение $\nabla\varphi_1 = A^{-1}\nabla q$ для каждого поля $\nabla q \in \mathbf{G}(\Omega,\rho_0)$.

Из неравенств (3.9)-(3.10) и компактности вложения пространства $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$ в $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ следует, что пространство $\mathbf{H}_A$ компактно вложено в $\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)$. Это влечет компактность оператора A^{-1}, а значит, оператор A обладает дискретным спектром. Асимптотическая формула для собственных значений оператора A следует из общих формул из работы [3]. $\square$

Введем скалярное гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ функций суммируемых со своими квадратами по области Ω, а также его подпространство $L_{2,\rho_0}(\Omega) := \{f \in L_2(\Omega) \mid (f,\rho_0^{1/2})_{L_2(\Omega)} = 0\}$. Ортопроектор пространства $L_2(\Omega)$ на подпространство $L_{2,\rho_0}(\Omega)$ имеет следующий вид:

$$\Pi f := f - (f,\rho_0^{1/2})_{L_2(\Omega)}\|\rho_0^{1/2}\|^{-2}_{L_2(\Omega)}\rho_0^{1/2}(z).$$

Определим оператор

$$B\nabla\varphi := a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\nabla\varphi\big), \quad \mathcal{D}(B) := \mathbf{H}_A. \tag{3.12}$$

Тогда $B : \mathcal{D}(B) \subset \mathbf{G}(\Omega,\rho_0) \to L_{2,\rho_0}(\Omega)$, $\mathrm{Ker} B = \{0\}$, оператор B замкнут и

$$B^*\rho = -\nabla\big(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho\big), \quad \mathcal{D}(B^*) = W_2^1(\Omega) \cap L_{2,\rho_0}(\Omega), \quad \mathrm{Ker} B^* = \{0\}. \tag{3.13}$$

По теореме о полярном представлении замкнутого оператора [15, гл. 8, § 1] существует унитарный оператор $U : \mathbf{G}(\Omega,\rho_0) \to L_{2,\rho_0}(\Omega)$ такой, что $B = UA^{1/2}$.

Определим операторы

$$M_l\rho := \Pi\rho_0 k_l\Pi\rho \quad (l = \overline{1,m}). \tag{3.14}$$

Эти операторы, очевидно, являются ограниченными, самосопряженными и положительно определенными операторами в $L_{2,\rho_0}(\Omega)$. Кроме того, $M_l\mathcal{D}(B^*) \subset \mathcal{D}(B^*)$ $(l = \overline{1,m})$. Из (2.7) следует, что $I - \sum\limits_{l=1}^m b_l^{-1}M_l \gg 0$.

С помощью введенных операторов задачу (3.4)-(3.5) перепишем в виде основной задачи Коши для следующей системы дифференциально-операторных уравнений в гильбертовых пространствах $\mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0)$, $\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)$ и $L_{2,\rho_0}(\Omega)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = -2\omega_0 i\big[S_{11}\mathbf{v} + S_{12}\nabla\varphi\big] + P_0\mathbf{f}(t), \\ \dfrac{d\nabla\varphi(t)}{dt} = -2\omega_0 i\big[S_{21}\mathbf{v} + S_{22}\nabla\varphi\big] + B^*\rho(t) - \sum\limits_{l=1}^m \int\limits_0^t e^{-b_l(t-s)}B^*M_l\rho(s)\,ds + P_G\mathbf{f}(t), \\ \dfrac{d\rho(t)}{dt} = -B\nabla\varphi(t), \qquad \mathbf{v}(0) = P_0\mathbf{u}^0, \quad \nabla\varphi(0) = P_G\mathbf{u}^0, \quad \rho(0) = \rho^0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Определение 3.1. *Сильным решением исходной начально-краевой задачи* (2.5)-(2.6) назовем такие $\mathbf{u}$ и ρ, для которых $\mathbf{v}$, $\nabla\varphi$ и ρ являются сильным решением задачи Коши (3.15). В свою очередь *сильным решением задачи Коши* (3.15) назовем такие $\mathbf{v}$, $\nabla\varphi$ и ρ, что $\nabla\varphi(t) \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A^{1/2})$, $\rho(t) \in \mathcal{D}(B^*)$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$, $B^*\rho(t)$, $\nabla\varphi'(t) \in C(\mathbb{R}_+;\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))$, $B\nabla\varphi(t)$, $\rho'(t) \in C(\mathbb{R}_+;L_{2,\rho_0}(\Omega))$, выполнены начальные условия и уравнения из (3.15) для любого $t \in \mathbb{R}_+ := [0,+\infty)$.

3.3. Теорема о разрешимости.

Теорема 3.1. *Пусть* $P_0\mathbf{u}^0 \in \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0)$, $P_G\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(B)$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, $\mathbf{f}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$. *Тогда задача Коши* (3.15) *имеет единственное сильное решение.*

Доказательство. **1.** Предположим, что задача (3.15) имеет сильное решение, и сведем ее к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка.

Пусть $\nabla\varphi(t)$, $\rho(t)$ — сильное решение системы (3.15) (см. определение 3.1). С использованием леммы 3.2, интегрирования по частям и формул (3.12)–(3.14) можно проверить, что функции $\mathbf{v}(t)$, $\nabla\varphi(t)$ и $\rho(t)$ удовлетворяют также следующей системе:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = -2\omega_0 i\big[S_{11}\mathbf{v} + S_{12}\nabla\varphi\big] + P_0\mathbf{f}(t), \\ \dfrac{d\nabla\varphi(t)}{dt} = -2\omega_0 i\big[S_{21}\mathbf{v} + S_{22}\nabla\varphi\big] + A^{1/2}\Big\{U^*\Big[I - \displaystyle\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l}M_l\Big]\rho(t) + \sum_{l=1}^{m} e^{-b_l t}\frac{1}{b_l}U^* M_l \rho^0 + \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{l=1}^{m} U^*\Big[\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}\int_0^t e^{-b_l(t-s)}\Big[\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}\frac{d\rho(s)}{ds}\,ds\Big\} + P_G\mathbf{f}(t), \\ \dfrac{d\rho(t)}{dt} = -UA^{1/2}\nabla\varphi(t). \end{cases} \tag{3.16}$$

Введем по $\rho(t)$ следующие функции:

$$u_0(t) := -\Big[I - \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}\rho(t), \quad u_l(t) := -\int_0^t e^{-b_l(t-s)}\Big[\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}\frac{d\rho(s)}{ds}\,ds \quad (l = \overline{1,m}). \tag{3.17}$$

Функции $u_0(t)$, $u_l(t)$ $(l = \overline{1,m})$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}_+$. Из (3.16), (3.17) получим, что они удовлетворяют следующей системе уравнений и начальных условий:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = -\Big\{2\omega_0 i\big[S_{11}\mathbf{v} + S_{12}A^{-1/2}A^{1/2}\nabla\varphi\big]\Big\} + P_0\mathbf{f}(t), \\ \dfrac{d\nabla\varphi(t)}{dt} = -A^{1/2}\Big\{2\omega_0 i\big[A^{-1/2}S_{21}\mathbf{v} + A^{-1/2}S_{22}A^{-1/2}A^{1/2}\nabla\varphi\big] + \\ \quad + U^*\Big[I - \displaystyle\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}u_0(t) + \sum_{l=1}^{m}U^*\Big[\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}u_l(t) - \sum_{l=1}^{m}e^{-b_l t}\frac{1}{b_l}U^*M_l\rho^0\Big\} + P_G\mathbf{f}(t), \\ \dfrac{du_0(t)}{dt} = -\Big\{-\Big[I - \displaystyle\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}UA^{1/2}\nabla\varphi(t)\Big\}, \\ \dfrac{du_l(t)}{dt} = -\Big\{-\Big[\dfrac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}UA^{1/2}\nabla\varphi(t) + b_l u_l(t)\Big\} \quad (l = \overline{1,m}), \end{cases} \tag{3.18}$$

$$\mathbf{v}(0) = P_0\mathbf{u}^0, \quad \nabla\varphi(0) = P_G\mathbf{u}^0, \quad u_0(0) = -\Big[I - \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}\rho^0, \quad u_l(0) = 0 \quad (l = \overline{1,m}).$$

Определим операторы

$$\begin{gathered} T_{11} := 2\omega_0 i S_{11}, \ \ T_{12} := 2\omega_0 i S_{12}A^{-1/2}, \ \ T_{21} := 2\omega_0 i A^{-1/2}S_{21}, \ \ T_{22} := 2\omega_0 i A^{-1/2}S_{22}A^{-1/2}, \\ Q_0 := \Big[I - \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}U, \quad Q_l := \Big[\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}U \quad (l = \overline{1,m}) \end{gathered} \tag{3.19}$$

и перепишем систему (3.18) следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = -\Big[T_{11}\mathbf{v} + T_{12}A^{1/2}\nabla\varphi\Big] + P_0\mathbf{f}(t), \\ \dfrac{d\nabla\varphi(t)}{dt} = -A^{1/2}\Big[T_{21}\mathbf{v} + T_{22}A^{1/2}\nabla\varphi + Q_0^* u_0(t) + \sum\limits_{l=1}^{m} Q_l^* u_l(t) - \sum\limits_{l=1}^{m} e^{-b_l t} Q_l^* Q_l U^* \rho^0\Big] + P_G\mathbf{f}(t), \\ \dfrac{du_0(t)}{dt} = -\Big[-Q_0 A^{1/2}\nabla\varphi(t)\Big], \\ \dfrac{du_l(t)}{dt} = -\Big[-Q_l A^{1/2}\nabla\varphi(t) + b_l u_l(t)\Big] \quad (l = \overline{1,m}), \end{cases}$$
$$\mathbf{v}(0) = P_0\mathbf{u}^0, \quad \nabla\varphi(0) = P_G\mathbf{u}^0, \quad u_0(0) = -Q_0 U^*\rho^0, \quad u_l(0) = 0 \quad (l = \overline{1,m}). \tag{3.20}$$

Систему (3.20) запишем в виде задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\omega_0} := \mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus \mathbf{G}(\Omega,\rho_0) \oplus \big(\oplus_{l=0}^{m} L_{2,\rho_0}(\Omega)\big)$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}_{\omega_0}\big(\xi + \xi_{\rho^0}(t)\big) + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0, \tag{3.21}$$
$$\xi(t) := \big(\mathbf{v}(t); \nabla\varphi(t); w(t)\big)^\tau := \big(\mathbf{v}(t); \nabla\varphi(t); u_0(t); u_1(t); \ldots; u_m(t)\big)^\tau,$$
$$\xi_{\rho^0}(t) := \big(0; 0; -(Q_0^*)^{-1}\sum_{l=1}^{m} e^{-b_l t} Q_l^* Q_l U^*\rho^0; 0; \ldots; 0\big)^\tau, \tag{3.22}$$
$$\xi^0 := \big(P_0\mathbf{u}^0; P_G\mathbf{u}^0; -Q_0U^*\rho^0; 0; \ldots; 0\big)^\tau, \quad \mathcal{F}(t) := \big(P_0\mathbf{f}(t); P_G\mathbf{f}(t); 0; 0; \ldots; 0\big)^\tau.$$

Оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ определяется по следующим формулам:

$$\mathcal{A}_{\omega_0} = \operatorname{diag}(I, A^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{21} & T_{22} & \mathcal{Q}^* \\ 0 & -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \operatorname{diag}(I, A^{1/2}, \mathcal{I}), \tag{3.23}$$
$$\mathcal{Q} := \big(Q_0, Q_1, \ldots, Q_m\big)^\tau, \quad \mathcal{G} := \operatorname{diag}\big(0, b_1 I, \ldots, b_m I\big), \quad \mathcal{I} := \operatorname{diag}\big(I, I, \ldots, I\big),$$
$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\omega_0}) = \Big\{\xi = (\mathbf{v}; \nabla\varphi; w)^\tau \in \mathcal{H} \Big| \ \mathbf{v} \in \mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0), \ \ \nabla\varphi \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \ \ \mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(A^{1/2})\Big\}.$$

2. Докажем, что оператор $-\mathcal{A}_{\omega_0}$ является генератором C_0-полугруппы.

Оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ плотно определен, так как множество $\mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus \mathcal{D}(A^{1/2}) \oplus \big(\oplus_{l=0}^{m}\mathcal{D}(B^*)\big)$ содержится в $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\omega_0})$ и плотно в $\mathcal{H}$. Оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ аккретивен. Действительно, из леммы 3.1, (3.19) и (3.23) следует, что

$$\operatorname{Re}\big(\mathcal{A}_{\omega_0}\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}} = \big(\mathcal{G}w, w\big)_{\oplus_{l=0}^{m} L_{2,\rho_0}(\Omega)} = \sum_{l=1}^{m} b_l \|u_l\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)} \geqslant 0, \quad \forall\, \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\omega_0}).$$

Осталось доказать, что оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ замкнут и максимален. Для этого достаточно установить, что оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ имеет на отрицательной полуоси регулярные точки. В связи с этим рассмотрим операторный пучок следующего вида:

$$\mathcal{L}(\lambda) := \begin{pmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda A^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{Q}^* \end{pmatrix} \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \Big(0, \mathcal{Q}\Big) = \begin{pmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} \end{pmatrix}, \tag{3.24}$$

где $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) := (\mathcal{G} - \lambda)^{-1}$ — резольвента оператора $\mathcal{G}$. Из (3.19) и (3.23) найдем, что при всех $\lambda < 0$

$$\operatorname{Re}\mathcal{L}(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} \end{pmatrix} \gg 0.$$

Отсюда и из факторизации оператора $\mathcal{A}_{\omega_0} - \lambda$ в форме Шура—Фробениуса теперь найдем, что при всех $\lambda < 0$ оператор $\mathcal{A}_{\omega_0} - \lambda$ непрерывно обратим и

$$\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}_{\omega_0}) = \operatorname{diag}\bigl(I, A^{-1/2}, \mathcal{I}\bigr) \begin{pmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & 0 \\ T_{21} & T_{22} - \lambda A^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ 0 & -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix}^{-1} \operatorname{diag}\bigl(I, A^{-1/2}, \mathcal{I}\bigr) =$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & A^{-1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bigl[\mathcal{L}^{-1}(\lambda)\bigr]_{11} & \bigl[\mathcal{L}^{-1}(\lambda)\bigr]_{12} & 0 \\ \bigl[\mathcal{L}^{-1}(\lambda)\bigr]_{21} & \bigl[\mathcal{L}^{-1}(\lambda)\bigr]_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & A^{-1/2} & -\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

3. Осуществим в задаче (3.21) замену искомой функции $\zeta(t) := \xi(t) + \xi_{\rho^0}(t)$, с учетом (3.22) получим следующую задачу Коши

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\mathcal{A}_{\omega_0}\zeta + \xi'_{\rho^0}(t) + \mathcal{F}(t), \quad \zeta(0) = \zeta^0 := \bigl(P_0\mathbf{u}^0; P_G\mathbf{u}^0; -(Q_0^*)^{-1}U^*\rho^0; 0; \ldots; 0\bigr)^\tau. \quad (3.26)$$

Оператор $-\mathcal{A}_{\omega_0}$ является генератором C_0-полугруппы $\mathcal{U}(t)$. Из условий на начальные данные следует, что $\mathbf{v}(0) = P_0\mathbf{u}^0 \in \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0)$, $\nabla\varphi(0) = P_G\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A^{1/2})$, $\mathcal{Q}^*w(0) = -U^*\rho^0 = -A^{-1/2}(UA^{1/2})^*\rho^0 = -A^{-1/2}B^*\rho^0 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, т. е. $\zeta^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\omega_0})$. Из условия на функцию $\mathbf{f}(t)$ следует, что $\xi'_{\rho^0}(t) + \mathcal{F}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_{\omega_0})$. Из теоремы о разрешимости абстрактной задачи Коши (см. [10, гл. 1, § 6, п. 2, теорема 6.5], [17, гл. 2, § 1, теорема 1.3]) следует, что задача Коши (3.26) имеет единственное решение $\zeta(t)$ такое, что $\zeta(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\omega_0})$ при $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{A}_{\omega_0}\zeta(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_{\omega_0})$, $\zeta(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_{\omega_0})$. Отсюда выводится утверждение о сильной разрешимости. □

3.4. Об асимптотическом поведении решений при отсутствии вращения ($\omega_0 = 0$) **и при нагрузках специального вида.** Предположим, что в системе отсутствует вращение, т. е., что $\omega_0 = 0$. В этом случае система (3.15) операторных уравнений и начальных условий распадается, и из нее может быть найдена вихревая составляющая $\mathbf{v}(t) \in \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0)$ поля скоростей релаксирующей жидкости:

$$\mathbf{v}(t) = P_0\mathbf{u}^0 + \int_0^t P_0\mathbf{f}(s)\,ds.$$

Таким образом, система (3.15) преобразуется в задачу Коши для следующей системы из двух дифференциально-операторных уравнений в гильбертовых пространствах $\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$ и $L_{2,\rho_0}(\Omega)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\nabla\varphi(t)}{dt} = B^*\rho(t) - \displaystyle\sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)}B^*M_l\rho(s)\,ds + P_G\mathbf{f}(t), \\ \dfrac{d\rho(t)}{dt} = -B\nabla\varphi(t), \qquad \nabla\varphi(0) = P_G\mathbf{u}^0, \quad \rho(0) = \rho^0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Систему (3.27) можно свести, как и в теореме 3.1, к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := \mathbf{G}(\Omega, \rho_0) \oplus \bigl(\oplus_{l=0}^m L_{2,\rho_0}(\Omega)\bigr)$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\bigl(\xi + \xi_{\rho^0}(t)\bigr) + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0, \quad (3.28)$$

$$\xi(t) := \bigl(\nabla\varphi(t); w(t)\bigr)^\tau := \bigl(\nabla\varphi(t); u_0(t); u_1(t); \ldots; u_m(t)\bigr)^\tau,$$

$$\xi_{\rho^0}(t) := \bigl(0; -(Q_0^*)^{-1}\sum_{l=1}^m e^{-b_lt}Q_l^*Q_lU^*\rho^0; 0; \ldots; 0\bigr)^\tau, \quad (3.29)$$

$$\xi^0 := \bigl(P_G\mathbf{u}^0; -Q_0U^*\rho^0; 0; \ldots; 0\bigr)^\tau, \quad \mathcal{F}(t) := \bigl(P_G\mathbf{f}(t); 0; 0; \ldots; 0\bigr)^\tau.$$

Оператор $\mathcal{A}$ в (3.28) определяется по следующим формулам:

$$\mathcal{A} = \operatorname{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \operatorname{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) = \begin{pmatrix} 0 & A^{1/2}\mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q}A^{1/2} & \mathcal{G} \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

$$\mathcal{Q} := \bigl(Q_0, Q_1, \ldots, Q_m\bigr)^\tau, \quad \mathcal{G} := \operatorname{diag}\bigl(0, b_1I, \ldots, b_mI\bigr), \quad \mathcal{I} := \operatorname{diag}\bigl(I, I, \ldots, I\bigr),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Bigl\{\xi = (\nabla\varphi; w)^\tau \in \mathcal{H} \bigm| \nabla\varphi \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \ \mathcal{Q}^*w \in \mathcal{D}(A^{1/2})\Bigr\}.$$

Резольвента $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$, как и в (3.25), может быть найдена из факторизации оператора $\mathcal{A}-\lambda$ в форме Шура—Фробениуса:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) &= \operatorname{diag}(A^{-1/2},\mathcal{I})\begin{pmatrix}-\lambda A^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}-\lambda\end{pmatrix}^{-1}\operatorname{diag}(A^{-1/2},\mathcal{I}) = \\
&= \begin{pmatrix}A^{-1/2} & 0 \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{-1/2} & -\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix}A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2} & -A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2} & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\big[\mathcal{I}-\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\big]\end{pmatrix}, \\
&\qquad \lambda\notin\sigma(\mathcal{G})\cup\sigma(L(\lambda)), \quad L(\lambda):=-\lambda A^{-1}+\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Оператор $-\mathcal{A}$ является генератором равномерно экспоненциально устойчивой C_0-полугруппы $\mathcal{U}(t)$ (см. [6]), тип которой может быть оценен по специальной формуле. Таким образом, существуют $\omega>0$ и $M\geqslant 1$ такие, что

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\leqslant Me^{-\omega t} \quad \forall\, t\in\mathbb{R}_+. \tag{3.32}$$

Основным утверждением в данном пункте является следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть* $P_G\mathbf{u}^0\in\mathcal{D}(B)$, $\rho^0\in\mathcal{D}(B^*)$, $\mathbf{f}(t)\in C^1(\mathbb{R}_+;\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))$. *Тогда задача Коши* (3.27) *имеет единственное сильное решение.*

Пусть $\mathbf{f}(t)=\mathbf{g}(t)+\sum\limits_{k=0}^{n}e^{-i\sigma_k t}\mathbf{f}_k(t)$, *где* $\mathbf{g}(t)$, $\mathbf{f}_k(t)\in C^1(\mathbb{R}_+;\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))$, $\sigma_k\in\mathbb{R}$ $(k=\overline{0,n})$ (*будем считать далее, что* $\sigma_0=0$, $\sigma_k\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ $(k=\overline{1,n})$). *Тогда существуют константы* $\omega>0$, $M_1\geqslant 1$, $M_2\geqslant 1$ *такие, что при всех* $t\in\mathbb{R}_+$ *выполнено неравенство*

$$\begin{aligned}
&\Big\|\nabla\varphi(t)+\sum_{k=1}^{n}e^{-i\sigma_k t}i\sigma_k\mathbf{M}(i\sigma_k)P_G\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}+ \\
&\qquad+\Big\|\rho(t)+B\Big(\mathbf{M}(0)P_G\mathbf{f}_0(t)+\sum_{k=1}^{n}e^{-i\sigma_k t}\mathbf{M}(i\sigma_k)P_G\mathbf{f}_k(t)\Big)\Big\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}\leqslant \\
&\qquad\leqslant M_1e^{-2\omega t}\Big[\|P_G\mathbf{u}^0\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}+\|\rho^0\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}+\sum_{k=0}^{n}\|\mathbf{f}_k(0)\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}\Big]+ \\
&\qquad+M_2\Big[\int_0^t e^{-\omega(t-s)}\Big(\|\mathbf{g}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}+\sum_{k=0}^{n}\|\mathbf{f}'_k(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}\Big)\,ds\Big]^2,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\mathbf{M}(\lambda):=A^{-1/2}\Big[I+\lambda^2A^{-1}-\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l-\lambda}U^*M_lU\Big]^{-1}A^{-1/2}. \tag{3.34}$$

В частности, если $\|\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}$, $\|\mathbf{f}'_k(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}\to 0$ $(k=\overline{0,n})$ *при* $t\to+\infty$, *то*

$$\begin{aligned}
&\Big\|\nabla\varphi(t)+\sum_{k=1}^{n}e^{-i\sigma_k t}i\sigma_k\mathbf{M}(i\sigma_k)P_G\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}+ \\
&\quad+\Big\|\rho(t)+B\Big(\mathbf{M}(0)P_G\mathbf{f}_0(t)+\sum_{k=1}^{n}e^{-i\sigma_k t}\mathbf{M}(i\sigma_k)P_G\mathbf{f}_k(t)\Big)\Big\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}\to 0 \quad (t\to+\infty).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Если дополнительно $\mathbf{f}_k(t)=\mathbf{0}$ $(k=\overline{1,n})$, $\mathbf{f}_0(t)=\nabla p(t)$, $p(t)\in\mathcal{D}(B^*)$, $\|\nabla p'(t)\|_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}\to 0$ *при* $t\to+\infty$, *то*

$$\|\nabla\varphi(t)\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}+\Big\|\rho(t)-\Big[I-\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{-1}\big(a_\infty^{-1}\rho_0^{1/2}(z)p(t)\big)\Big\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}\to 0 \quad (t\to+\infty). \tag{3.36}$$

Доказательство. Утверждение о разрешимости следует из теоремы 3.1.

1. Пусть $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) + \sum\limits_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathbf{f}_k(t)$, где $\mathbf{g}(t)$, $\mathbf{f}_k(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$, $\sigma_k \in \mathbb{R}$ $(k = \overline{0,n})$. Представим функцию $\mathcal{F}(t)$ из (3.28) следующим образом:

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{T}(t) + \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{F}_k(t), \quad \mathcal{T}(t) := \big(P_G\mathbf{g}(t); 0; \ldots; 0\big)^\tau, \quad \mathcal{F}_k(t) := \big(P_G\mathbf{f}_k(t); 0; \ldots; 0\big)^\tau \ \ (k = \overline{0,n}). \tag{3.37}$$

Из формулы для оператора $\mathcal{A}^{-1}$, которая может быть найдена непосредственно, из (3.37) и (3.31) теперь найдем, что

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0 &= \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}_0 = \big(0; (Q_0^*)^{-1}A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_0; 0; \ldots; 0\big)^\tau, \\
\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) &= \big(A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t); \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t)\big)^\tau = \\
&= \big(A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t); \frac{1}{-\lambda}Q_0L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t); \\
&\qquad \frac{1}{b_1-\lambda}Q_1L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t); \ldots; \frac{1}{b_m-\lambda}Q_mL^{-1}(\lambda)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t)\big)^\tau \\
&\qquad \forall\, \lambda \in i\mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad k = \overline{1,n}.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Пусть $\nabla\varphi(t), \rho(t)$ — сильное решение задачи Коши (3.27). Используя представление $Q_0^*Q_0 = I - \sum\limits_{l=1}^{m} Q_l^*Q_l = I - \sum\limits_{l=1}^{m} b_l^{-1}U^*M_lU$ и формулы (3.34), (3.37), (3.38), (3.17), (3.28) при $t \in \mathbb{R}_+$ получим

$$\begin{aligned}
&\Big\|\nabla\varphi(t) + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k\mathbf{M}(i\sigma_k)P_G\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} + \\
&\qquad + \Big\|\rho(t) + B\Big(\mathbf{M}(0)P_G\mathbf{f}_0(t) + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathbf{M}(i\sigma_k)P_G\mathbf{f}_k(t)\Big)\Big\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)} = \\
&= \Big\|\nabla\varphi(t) + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A^{-1/2}\Big[I - \sigma_k^2A^{-1} - \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l - i\sigma_k}U^*M_lU\Big]^{-1}A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} + \\
&\qquad + \Big\|\rho(t) + UA^{1/2}\Big(A^{-1/2}\Big[I - \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l}U^*M_lU\Big]^{-1}A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_0(t) + \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}A^{-1/2}\Big[I - \sigma_k^2A^{-1} - \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l - i\sigma_k}U^*M_lU\Big]^{-1}A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t)\Big)\Big\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Отсюда, из (3.30), (3.31) (см. формулу для пучка $L(\lambda)$) получим, что

$$\begin{aligned}
&\Big\|\nabla\varphi(t) + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k\mathbf{M}(i\sigma_k)P_G\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} + \\
&\qquad + \Big\|\rho(t) + B\Big(\mathbf{M}(0)P_G\mathbf{f}_0(t) + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathbf{M}(i\sigma_k)P_G\mathbf{f}_k(t)\Big)\Big\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)} = \\
&\qquad = \Big\|\nabla\varphi(t) - \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}A^{-1/2}L^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} + \\
&\quad + \Big\|\rho(t) + U\Big((Q_0^*Q_0)^{-1}A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_0(t) + \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-i\sigma_k t}}{-i\sigma_k}L^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t)\Big)\Big\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)} \leqslant \\
&\qquad \leqslant \Big\|\nabla\varphi(t) - \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}A^{-1/2}L^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} +
\end{aligned}$$

$$
+\|UQ_0^{-1}\|^2\Big\|u_0(t)-(Q_0^*)^{-1}A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_0(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-i\sigma_k t}}{-i\sigma_k}Q_0L^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}+
$$

$$
+\sum_{l=1}^{m}\Big\|u_l(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-i\sigma_k t}}{b_l-i\sigma_k}Q_lL^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}\leqslant
$$

$$
\leqslant\max\{1,\|UQ_0^{-1}\|^2\}\cdot\Big\|\xi(t)-\mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0-\sum_{k=1}^{n}e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)\Big\|^2_{\mathcal{H}}. \quad (3.39)
$$

Напомним, что оператор $-\mathcal{A}$ — генератор равномерно экспоненциально устойчивой C_0-полугруппы $\mathcal{U}(t)$, удовлетворяющей неравенству (3.32). Будем искать (единственное) решение задачи (3.28) при $\mathcal{F}(t)=\mathcal{T}(t)+\sum\limits_{k=0}^{n}e^{-i\sigma_k t}\mathcal{F}_k(t)$ в виде $\xi(t)=-\xi_{\rho_0}(t)+\sum\limits_{k=0}^{n}e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)+\eta(t)$. Тогда функция $\eta(t)$ будет решением следующей задачи Коши:

$$
\begin{gathered}
\frac{d\eta}{dt}=-\mathcal{A}\eta+\xi'_{\rho^0}(t)+\mathcal{T}(t)-\sum_{k=0}^{n}e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}'_k(t),\\
\eta(0)=\xi^0+\xi_{\rho_0}(0)-\sum_{k=0}^{n}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0)\in\mathcal{D}(\mathcal{A}).
\end{gathered}\quad (3.40)
$$

Из (3.40) найдем, что

$$
\xi(t)=\sum_{k=0}^{n}e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)-\xi_{\rho^0}(t)+\mathcal{U}(t)\Big(\xi^0+\xi_{\rho_0}(0)-\sum_{k=0}^{n}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0)\Big)+
$$

$$
+\int_0^t\mathcal{U}(t-s)\Big(\xi'_{\rho^0}(s)+\mathcal{T}(s)-\sum_{k=0}^{n}e^{-i\sigma_k s}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}'_k(s)\Big)\,ds. \quad (3.41)
$$

Из (3.41), (3.37) и (3.32) найдем, что

$$
\Big\|\xi(t)-\mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0(t)-\sum_{k=1}^{n}e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)\Big\|^2_{\mathcal{H}}=
$$

$$
=\Big\|\mathcal{U}(t)\Big(\xi^0+\xi_{\rho_0}(0)-\sum_{k=0}^{n}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0)\Big)-\xi_{\rho^0}(t)+
$$

$$
+\int_0^t\mathcal{U}(t-s)\Big(\xi'_{\rho^0}(s)+\mathcal{T}(s)-\sum_{k=0}^{n}e^{-i\sigma_k s}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}'_k(s)\Big)\,ds\Big\|^2_{\mathcal{H}}\leqslant
$$

$$
\leqslant\Big[Me^{-\omega t}\Big(\|\xi^0+\xi_{\rho_0}(0)\|_{\mathcal{H}}+\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\sum_{k=0}^{n}\|\mathbf{f}_k(0)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}\Big)+\big\|\xi_{\rho^0}(t)\big\|_{\mathcal{H}}+
$$

$$
+M\int_0^t e^{-\omega(t-s)}\Big(\|\xi'_{\rho^0}(s)\|_{\mathcal{H}}+\|\mathbf{g}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}+\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\sum_{k=0}^{n}\|\mathbf{f}'_k(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}\Big)\,ds\Big]^2. \quad (3.42)
$$

Используя формулы для $\xi_{\rho^0}(t)$ и ξ^0 (см. (3.29)), из (3.42) найдем

$$
\Big\|\xi(t)-\mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0-\sum_{k=1}^{n}e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)\Big\|^2_{\mathcal{H}}\leqslant
$$

$$
\leqslant\Big[Me^{-\omega t}\big(\|P_G\mathbf{u}^0\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}+\|(Q_0^*)^{-1}U^*\|^2\|\rho^0\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}\big)^{1/2}+
$$

$$
+Me^{-\omega t}\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\sum_{k=0}^{n}\|\mathbf{f}_k(0)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}+
$$

$$+ Me^{-\omega t}\|\rho^0\|_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}\sum_{l=1}^m\|(Q_0^*)^{-1}Q_l^*Q_l\|\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\left\{\frac{e^{-(b_l-\omega)t}}{M}+b_l\int\limits_0^t e^{-(b_l-\omega)s}\,ds\right\}+$$

$$+ M\int\limits_0^t e^{-\omega(t-s)}\Big(\|\mathbf{g}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}+\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\sum_{k=0}^n\|\mathbf{f}_k'(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}\Big)\,ds\Bigg]^2\leqslant$$

$$\leqslant Ne^{-2\omega t}\Big[\|P_G\mathbf{u}^0\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}+\|\rho^0\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}+\sum_{k=0}^n\|\mathbf{f}_k(0)\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}\Big]+$$

$$+(n+4)M^2\Bigg[\int\limits_0^t e^{-\omega(t-s)}\Big(\|\mathbf{g}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}+\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\sum_{k=0}^n\|\mathbf{f}_k'(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}\Big)\,ds\Bigg]^2, \quad (3.43)$$

$$N:=(n+4)M^2\max\Bigg\{1,\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H})},\|(Q_0^*)^{-1}U^*\|^2+$$
$$+\Bigg[\sum_{l=1}^m\|(Q_0^*)^{-1}Q_l^*Q_l\|\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\left\{\frac{e^{-(b_l-\omega)t}}{M}+b_l\int\limits_0^t e^{-(b_l-\omega)s}\,ds\right\}\Bigg]^2\Bigg\}. \quad (3.44)$$

Из (3.39), (3.43), (3.44) следует (3.33) с константами

$$M_1=N\max\big\{1,\|UQ_0^{-1}\|^2\big\},$$
$$M_2=(n+4)M^2\max\Big\{1,\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\Big\}\cdot\max\big\{1,\|UQ_0^{-1}\|^2\big\}.$$

2. Докажем формулу (3.35). Пусть $\|\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}\to 0$, $\|\mathbf{f}_k'(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}\to 0$ $(k=\overline{0,n})$ при $t\to+\infty$. Очевидно, достаточно доказать, что интегральное слагаемое в (3.33) стремится к нулю при $t\to+\infty$. Обозначим $h(t):=\|\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}+\sum\limits_{k=0}^n\|\mathbf{f}_k'(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)}$. Фиксируем $\varepsilon>0$ и выберем последовательно числа $t_{\varepsilon,1}$ и $t_{\varepsilon,2}$ следующим образом:

$$t_{\varepsilon,1}>0:\ \sup_{t\geqslant t_{\varepsilon,1}}h(t)<\frac{\varepsilon\omega}{2},\qquad t_{\varepsilon,2}:=\frac{1}{\omega}\ln\Big[\frac{2}{\varepsilon\omega}\big(e^{\omega t_{\varepsilon,1}}-1\big)\sup_{t\geqslant 0}h(t)\Big].$$

Теперь для любого $t\geqslant t(\varepsilon):=\max\{t_{\varepsilon,1},t_{\varepsilon,2}\}$ найдем, что

$$\int\limits_0^t e^{-\omega(t-s)}h(s)\,ds=\int\limits_0^{t_{\varepsilon,1}}e^{-\omega(t-s)}h(s)\,ds+\int\limits_{t_{\varepsilon,1}}^t e^{-\omega(t-s)}h(s)\,ds\leqslant$$
$$\leqslant\frac{e^{-\omega t}}{\omega}\big(e^{\omega t_{\varepsilon,1}}-1\big)\sup_{t\geqslant 0}h(t)+\frac{1}{\omega}\sup_{t\geqslant t_{\varepsilon,1}}h(t)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

3. Пусть $\mathbf{f}_k(t)=\mathbf{0}$ $(k=\overline{1,n})$, $\mathbf{f}_0(t)=\nabla p(t)$, $p(t)\in\mathcal{D}(B^*)$, $\|\nabla p'(t)\|_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}\to 0$ при $t\to+\infty$. Тогда $P_G\mathbf{f}_0(t)=\nabla p(t)=-B^*\big(a_\infty^{-1}\rho_0^{1/2}(z)p(t)\big)$ и из (3.13)-(3.14), (3.34) найдем, что

$$B\mathbf{M}(0)P_G\mathbf{f}_0(t)=-(UA^{1/2})A^{-1/2}\Big[I-\sum_{l=1}^m\frac{1}{b_l}U^*M_lU\Big]^{-1}A^{-1/2}B^*\big(a_\infty^{-1}\rho_0^{1/2}(z)p(t)\big)=$$

$$=-\Big[I-\sum_{l=1}^m\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{-1}UA^{-1/2}B^*\big(a_\infty^{-1}\rho_0^{1/2}(z)p(t)\big)=-\Big[I-\sum_{l=1}^m\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{-1}BA^{-1}B^*\big(a_\infty^{-1}\rho_0^{1/2}(z)p(t)\big)=$$

$$=-\Big[I-\sum_{l=1}^m\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{-1}(BA^{-1/2})(BA^{-1/2})^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)}\big(a_\infty^{-1}\rho_0^{1/2}(z)p(t)\big)=$$

$$= -\Big[I - \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{b_l} M_l\Big]^{-1} (UU^*)\Big|_{\mathcal{D}(B^*)} \big(a_\infty^{-1} \rho_0^{1/2}(z) p(t)\big) = -\Big[I - \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{b_l} M_l\Big]^{-1} \big(a_\infty^{-1} \rho_0^{1/2}(z) p(t)\big).$$

Отсюда и из (3.35) следует (3.36). □

4. Задача о спектре идеальной релаксирующей жидкости

В этом разделе исследуются спектры операторов $\mathcal{A}_{\omega_0}$ (см. (3.23)) и $\mathcal{A}$ (см. (3.30)), связанных с задачей о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей вращающийся и, соответственно, неподвижный контейнер. Основным утверждением здесь является следующая теорема, доказываемая в леммах 4.1–4.6.

Теорема 4.1. *Имеют место следующие утверждения.*

1. $\{b_1, \ldots, b_m\} \notin \sigma_p(\mathcal{A}_{\omega_0})$, $\{0, b_1, \ldots, b_m\} \notin \sigma_p(\mathcal{A})$, *где* $\sigma_p(\mathcal{A}_{\omega_0})$, $\sigma_p(\mathcal{A})$ — *точечные спектры операторов* $\mathcal{A}_{\omega_0}$ *и* $\mathcal{A}$ (*лемма* 4.1). *Спектр оператора* $\mathcal{A}$ *расположен симметрично относительно действительной оси* (*лемма* 4.2).
2. *Для существенных спектров* $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0})$, $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ *операторов* $\mathcal{A}_{\omega_0}$ *и* $\mathcal{A}$ *справедливы формулы*
$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0}) = \big[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i\big] \cup \sigma_{ess}(\mathcal{A}), \quad \sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \big|\, 1 - \sum_{l=1}^{m} \frac{\rho_0(z) k_l(x)}{b_l - \lambda} = 0, \ \ x \in \overline{\Omega}\Big\}.$$
Множество $\mathbb{C} \backslash \sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0})$ ($\mathbb{C} \backslash \sigma_{ess}(\mathcal{A})$) *состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора* $\mathcal{A}_{\omega_0}$ (*оператора* $\mathcal{A}$) (*лемма* 4.3).
3. *Имеет место включение* $\sigma(\mathcal{A}_{\omega_0}) \subset \Lambda := \{\lambda \in \mathbb{C} |\, 0 \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant b_m\}$. *Оператор* $\mathcal{A}_{\omega_0}$ *имеет две ветви собственных значений* $\{\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A}_{\omega_0})\}_{k=1}^{\infty}$, *расположенных в области* Λ *со следующей асимптотикой* (*лемма* 4.4):
$$\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A}_{\omega_0}) = \pm i \lambda_k^{1/2}(A)(1 + o(1)) \quad (k \to +\infty).$$
4. *Существует* $\beta > 0$ *такое, что* (*лемма* 4.5)
$$\sigma(\mathcal{A}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Im}\lambda \neq 0\} \subset \big\{\lambda \in \mathbb{C} |\, \beta \leqslant \mathrm{Re}\lambda < \frac{b_m}{2}\big\}.$$
5. *Если* $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega, \rho_0))}$ *достаточно мала, то точки из множества* $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ *не могут быть предельными для* (*комплексно сопряженных*) *ветвей собственных значений из* $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ (*лемма* 4.6).

4.1. Основные спектральные задачи и операторные пучки. Будем разыскивать решения уравнения (3.21) при $\mathcal{F}(t) \equiv 0$ и $\xi_{\rho_0}(t) \equiv 0$ в виде $\xi(t) = \exp(-\lambda t)\xi$, где λ — спектральный параметр, а ξ — амплитудный элемент. В результате придем к следующей основной спектральной задаче:
$$\mathcal{A}_{\omega_0} \xi = \lambda \xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\omega_0}) \subset \mathcal{H}_{\omega_0}, \tag{4.1}$$
которую будем ассоциировать с задачей о спектре идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей равномерно вращающийся контейнер (оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ определен в (3.23)).

При $\lambda \notin \{0, b_1, \ldots, b_m\} = \sigma(\mathcal{G})$ с задачей (4.1) свяжем также следующую спектральную задачу:
$$\mathcal{L}(\lambda) \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \nabla\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \nabla\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \big(\mathbf{v}; \nabla\varphi\big)^\tau \in \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \mathbf{G}(\Omega, \rho_0). \tag{4.2}$$

В случае, когда система не вращается, т. е. $\omega_0 = 0$, будем разыскивать решения уравнения (3.28) при $\mathcal{F}(t) \equiv 0$ и $\xi_{\rho_0}(t) \equiv 0$ в виде $\xi(t) = \exp(-\lambda t)\xi$, где λ — спектральный параметр, а ξ — амплитудный элемент. В результате придем к следующей основной спектральной задаче:
$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}, \tag{4.3}$$
которую будем ассоциировать с задачей о спектре идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей неподвижный контейнер (оператор $\mathcal{A}$ определен в (3.30)).

При $\lambda \notin \{0, b_1, \ldots, b_m\} = \sigma(\mathcal{G})$ с задачей (4.3) свяжем следующую спектральную задачу:
$$L(\lambda)\nabla\varphi = \big[-\lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q}\big]\nabla\varphi =$$

$$= \Big[-\lambda A^{-1} - \frac{1}{\lambda} Q_0^* Q_0 + \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{b_l - \lambda}\, Q_l^* Q_l \Big] \nabla\varphi = 0, \quad \nabla\varphi \in \mathbf{G}(\Omega, \rho_0). \tag{4.4}$$

Операторы T_{jk}, Q_l определены в (3.19).

4.2. О существенном и дискретном спектре задачи.

Лемма 4.1. $\{b_1, \ldots, b_m\} \notin \sigma_p(\mathcal{A}_{\omega_0})$, $\{0, b_1, \ldots, b_m\} \notin \sigma_p(\mathcal{A})$, *где* $\sigma_p(\mathcal{A}_{\omega_0})$, $\sigma_p(\mathcal{A})$ — *точечные спектры операторов* $\mathcal{A}_{\omega_0}$ *и* $\mathcal{A}$.

Доказательство. Запишем уравнение $(\mathcal{A}_{\omega_0} - \lambda)\xi = \xi_0$ в виде системы (см. (3.20), (3.23), (3.19)):

$$\begin{cases} 2\omega_0 i S_{11}\mathbf{v} + 2\omega_0 i S_{12}\nabla\varphi - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \\ 2\omega_0 i S_{21}\mathbf{v} + 2\omega_0 i S_{22}\nabla\varphi + A^{1/2}\Big[Q_0^* u_0(t) + \sum\limits_{l=1}^{m} Q_l^* u_l(t)\Big] - \lambda\nabla\varphi = \nabla\varphi_0, \\ -Q_0 A^{1/2}\nabla\varphi(t) - \lambda u_0 = u_{00}, \\ -Q_l A^{1/2}\nabla\varphi(t) + b_l u_l(t) - \lambda u_l = u_{l0} \quad (l = \overline{1,m}). \end{cases} \tag{4.5}$$

Положим в (4.5) $\lambda = b_q$, $\xi_0 = (\mathbf{v}_0; \nabla\varphi_0; u_{00}; u_{10}; \ldots; u_{m0})^\tau = 0$. Из четвертого уравнения при $l = q$ найдем, что $\nabla\varphi = 0$. Теперь из третьего уравнения и четвертого уравнения при $l \neq q$ получим, что $u_l = 0$, а из первого уравнения, (3.6) и леммы 3.1, что $\mathbf{v} = 0$. Теперь из второго уравнения системы (4.5) следует, что $u_q = 0$. Таким образом, $\xi = 0$ и $b_q \notin \sigma_p(\mathcal{A}_{\omega_0})$. Аналогичным образом доказывается утверждение для оператора $\mathcal{A}$. □

Лемма 4.2. *Спектр оператора* $\mathcal{A}$, *за исключением точек* $\{0, b_1, \ldots, b_m\} = \sigma(\mathcal{G})$, *совпадает со спектром пучка* $L(\lambda)$ *и расположен симметрично относительно действительной оси.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \rho(L(\lambda))$, тогда из (3.31) следует, что $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$. Пусть теперь $\lambda \in \rho(\mathcal{A}) \backslash \sigma(\mathcal{G})$. Предположим, что $\lambda \notin \rho(L(\lambda))$. Тогда $L^{-1}(\lambda)$ существует, однако неограничен.

По теореме [15, гл. 8, § 1, теоремы 2 и 3] о полярном разложении плотно определенного замкнутого оператора существует единственный частично изометричный оператор $\mathcal{U}$, действующий из $\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$ в $\bigoplus\limits_{l=0}^{m} L_{2,\rho_0}(\Omega)$, такой, что

$$\mathcal{Q} = \mathcal{U}(\mathcal{Q}^*\mathcal{Q})^{1/2}, \quad \mathcal{Q}^* = (\mathcal{Q}^*\mathcal{Q})^{1/2}\mathcal{U}^*, \quad \mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{I}, \quad \mathcal{R}(\mathcal{Q}^*) = \mathcal{R}((\mathcal{Q}^*\mathcal{Q})^{1/2}) = \mathbf{G}(\Omega, \rho_0).$$

Отсюда следует, что существует последовательность $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \oplus_{l=0}^{m} L_{2,\rho_0}(\Omega)$ такая, что $\|w_k\| = 1$, $\|L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})w_k\|_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} \to +\infty$ $(k \to +\infty)$. Тогда

$$\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})w_k\|^2 \geqslant \|\mathcal{G} - \lambda\|^{-2}_{\mathcal{L}(\oplus_{l=0}^{m} L_{2,\rho_0}(\Omega))} \|\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})w_k\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant \|\mathcal{G} - \lambda\|^{-2}_{\mathcal{L}(\oplus_{l=0}^{m} L_{2,\rho_0}(\Omega))} \gamma(\mathcal{Q}^*\mathcal{Q})\, \|L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})w_k\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} \to +\infty \quad (k \to +\infty),$$

где $\gamma(\mathcal{Q}^*\mathcal{Q}) > 0$ — нижняя грань оператора $\mathcal{Q}^*\mathcal{Q}$. Отсюда и из (3.31) получим противоречие с предположением $\lambda \in \rho(\mathcal{A}) \backslash \sigma(\mathcal{G})$. Таким образом, $\lambda \in \rho(L(\lambda))$. Из проведенных рассуждений следует, что $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(L(\lambda))$.

Симметричность расположения спектра оператора $\mathcal{A}$ относительно действительной оси следует из самосопряженности пучка $L(\lambda)$: $L^*(\lambda) = L(\overline{\lambda})$ (см. [11, гл. 4, § 30, п. 1]). □

Определение 4.1. *Существенным спектром* оператора $\mathcal{A}_{\omega_0}$ (спектральной задачи (4.1)) назовем множество $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0}) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\mathcal{A}_{\omega_0} - \lambda) - \text{не фредгольмов}\}$.

Лемма 4.3. *Имеют место следующие формулы*:

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0}) = \big[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i\big] \cup \sigma_{ess}(\mathcal{A}), \quad \sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \Big|\ 1 - \sum_{l=1}^{m} \frac{\rho_0(z)k_l(x)}{b_l - \lambda} = 0, \ \ x \in \overline{\Omega}\Big\}. \tag{4.6}$$

Множество $\mathbb{C} \backslash \sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0})$ $(\mathbb{C} \backslash \sigma_{ess}(\mathcal{A}))$ *состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора* $\mathcal{A}_{\omega_0}$ *(оператора* $\mathcal{A}$*).*

Доказательство. **1.** Запишем оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ (см. (3.23)) следующим образом относительно разложения $\mathcal{H}_{\omega_0} := \mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus \big[\mathbf{G}(\Omega,\rho_0) \oplus \big(\oplus_{l=0}^{m} L_{2,\rho_0}(\Omega)\big)\big] = \mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus \mathcal{H}$:

$$\mathcal{A}_{\omega_0} = \begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{11} & \mathcal{S}_{12} \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{A} + \mathcal{S}_{22} \end{pmatrix}, \ \ \mathcal{S}_{12} := \begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{12}, 0 \end{pmatrix}, \ \ \mathcal{S}_{21} = \begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{21} \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ \mathcal{S}_{22} = \begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{22} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

где операторы S_{jk} определены в (3.6) (см. лемму 3.1), а оператор $\mathcal{A}$ определен в (3.30).

Из теоремы [8, гл. 4, § 5, п. 6, теорема 5.35] об устойчивости существенного спектра при относительно компактных возмущениях, равенств (4.7), формулы для $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})$ (см. (3.31)), включения $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))$ (см. лемму 3.2) и соотношений

$$\mathcal{A}_{\omega_0} = \begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{11} & 0 \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{A} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{S}_{12} \\ 0 & \mathcal{S}_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{S}_{12} \\ 0 & \mathcal{S}_{22} \end{pmatrix} \mathcal{R}_\lambda\left(\begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{11} & 0 \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{A} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{S}_{12} \\ 0 & \mathcal{S}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_\lambda(2\omega_0 i S_{11}) & 0 \\ -\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{S}_{21}\mathcal{R}_\lambda(2\omega_0 i S_{11}) & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\mathcal{S}_{12}\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{S}_{21}\mathcal{R}_\lambda(2\omega_0 i S_{11}) & \mathcal{S}_{12}\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) \\ -\mathcal{S}_{22}\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{S}_{21}\mathcal{R}_\lambda(2\omega_0 i S_{11}) & \mathcal{S}_{22}\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_{\omega_0})$$

получим, что

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0}) = \sigma_{ess}\left(\begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{11} & 0 \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{A} \end{pmatrix}\right). \quad (4.8)$$

Из [8, гл. 4, § 5, п. 6, задача 5.38], соотношения

$$\mathcal{R}_\lambda\left(\begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{11} & 0 \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{A} \end{pmatrix}\right) - \mathcal{R}_\lambda\left(\begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{11} & 0 \\ 0 & \mathcal{A} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{S}_{21}\mathcal{R}_\lambda(2\omega_0 i S_{11}) & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_{\omega_0}),$$

формулы (4.8) и леммы 3.1 теперь найдем, что

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0}) = \sigma_{ess}\left(\begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{11} & 0 \\ 0 & \mathcal{A} \end{pmatrix}\right) = \sigma_{ess}(2\omega_0 i S_{11}) \cup \sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \big[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i\big] \cup \sigma_{ess}(\mathcal{A}). \quad (4.9)$$

2. Докажем формулу для существенного спектра операторного пучка $L(\lambda)$ (см. (3.31)):

$$\sigma_{ess}(L(\lambda)) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \big|\ 1 - \sum_{l=1}^{m} \frac{\rho_0(z)k_l(x)}{b_l - \lambda} = 0, \ \ x \in \overline{\Omega}\Big\}. \quad (4.10)$$

Пусть $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G})$. Из леммы 3.2, теоремы [16, гл. 17, § 4, теорема 4.3] об относительно компактных возмущениях, формулы (3.19) и преобразований

$$-\lambda L(\lambda) = \lambda^2 A^{-1} - \lambda \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} = \lambda^2 A^{-1} + Q_0^*Q_0 + \sum_{l=1}^{m} \frac{-\lambda}{b_l - \lambda}\, Q_l^*Q_l =$$

$$= \lambda^2 A^{-1} + U^*\Big[I - \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{b_l} M_l\Big]U + \sum_{l=1}^{m} \frac{-\lambda}{b_l(b_l - \lambda)}\, U^* M_l U =$$

$$= \lambda^2 A^{-1} + I - \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{b_l - \lambda}\, U^* M_l U = \lambda^2 A^{-1} + U^*\Pi\Big[1 - \sum_{l=1}^{m} \frac{\rho_0 k_l}{b_l - \lambda}\Big]\Pi U$$

получим, что

$$\sigma_{ess}(L(\lambda)) = \sigma_{ess}\Big(U^*\Pi\Big[1 - \sum_{l=1}^{m} \frac{\rho_0 k_l}{b_l - \lambda}\Big]\Pi U\Big) = \sigma_{ess}\Big(\Pi\Big[1 - \sum_{l=1}^{m} \frac{\rho_0 k_l}{b_l - \lambda}\Big]\Pi\Big).$$

Отсюда, из одномерности (а значит, и компактности) ортогонального проектора $I - \Pi$ и теоремы [16, гл. 17, § 4, теорема 4.3] следует (4.10).

3. Докажем вторую формулу в (4.6). Пусть $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G})$ и оператор $L(\lambda)$ (см. (3.31)) фредгольмов. Из теоремы [16, гл. 17, § 3, теорема 3.1] о произведении фредгольмовых операторов и (3.30) найдем, что оператор

$$\mathcal{A}-\lambda=\begin{pmatrix}A^{1/2} & 0\\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\lambda A^{-1} & \mathcal{Q}^*\\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{1/2} & 0\\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}A^{1/2} & 0\\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L(\lambda) & 0\\ 0 & \mathcal{G}-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ -\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{1/2} & 0\\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix},$$

фредгольмов. Следовательно, для существенного спектра оператора $\mathcal{A}$ получаем включение $\sigma_{ess}(\mathcal{A})\subset\sigma_{ess}(L(\lambda))$. Из леммы 4.2 следует, что $\sigma_{ess}(\mathcal{A})=\sigma_{ess}(L(\lambda))$. Отсюда и (4.10) следует вторая формула в (4.6).

4. Множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0})$ ($\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$) является связным, а оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ ($\mathcal{A}$) имеет регулярные точки. Отсюда и из [16, гл. 17, § 2, теорема 2.1] (или [8, гл. 4, § 5, п. 2, теорема 5.17] — теорема об устойчивости индекса и дефекта замкнутого оператора) следует, что множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0})$ ($\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$) состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}_{\omega_0}$ ($\mathcal{A}$). □

Замечание 4.1. Существенный спектр $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ представляет из себя объединение m отрезков, расположенных на интервалах (b_{l-1},b_l) ($l=\overline{1,m}$, $b_0:=0$). В случае $\omega_0=0$ и $g=0$ отрезки, составляющие множество $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$, схлопываются и превращается в набор m точек, расположенных на тех же интервалах.

4.3. О локализации и асимптотике дискретного спектра.

Лемма 4.4. *Имеет место включение* $\sigma(\mathcal{A}_{\omega_0})\subset\Lambda:=\{\lambda\in\mathbb{C}|\ 0\leqslant\mathrm{Re}\lambda\leqslant b_m\}$. *Оператор* $\mathcal{A}_{\omega_0}$ *имеет две ветви собственных значений* $\{\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A}_{\omega_0})\}_{k=1}^\infty$, *расположенных в области* Λ *со следующей асимптотикой* (*см. лемму* 3.2):

$$\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A}_{\omega_0})=\pm i\lambda_k^{1/2}(A)(1+o(1))\quad(k\to+\infty).\tag{4.11}$$

Доказательство. Включение $\sigma(\mathcal{A}_{\omega_0})\subset\Lambda$ следует из [8, гл. 5, § 3, п. 1, теорема 3.2] и того простого факта, что числовая область значений оператора $\mathcal{A}_{\omega_0}$ содержится в Λ.

Из (3.25) следует, что собственные значения оператора $\mathcal{A}_{\omega_0}$ являются также собственными значениями операторного пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ (см. (4.2)). Верно и обратное. Таким образом, в области $\mathbb{C}\backslash[\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\omega)\cup\sigma(\mathcal{G})]$ спектральная задача (4.1) эквивалентна задаче (4.2):

$$\begin{cases}\big(T_{11}-\lambda\big)\mathbf{v}+T_{12}\nabla\varphi=0,\\ T_{21}\mathbf{v}+\big(T_{22}-\lambda A^{-1}+\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}\big)\nabla\varphi=0,\quad \mathbf{v}\in\mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0),\ \ \nabla\varphi\in\mathbf{G}(\Omega,\rho_0),\end{cases}$$

или, с учетом (3.19),

$$\big[\lambda^2A^{-1}-\lambda T_{22}+\lambda T_{21}\mathcal{R}_\lambda(T_{11})T_{12}-\lambda\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}\big]\nabla\varphi=$$

$$=\Big[\lambda^2A^{-1}-\lambda T_{22}+\lambda T_{21}\mathcal{R}_\lambda(T_{11})T_{12}+Q_0^*Q_0+\sum_{l=1}^m\frac{-\lambda}{b_l-\lambda}\,Q_l^*Q_l\Big]\nabla\varphi=$$

$$=\Big[I+\lambda^2A^{-1}-2\omega_0i\lambda A^{-1/2}S_{22}A^{-1/2}+\lambda T_{21}\mathcal{R}_\lambda(T_{11})T_{12}-\sum_{l=1}^m\frac{1}{b_l-\lambda}\,U^*M_lU\Big]\nabla\varphi=$$

$$=:\big[I+\lambda^2A^{-1}+G(\lambda)\big]\nabla\varphi=0.\tag{4.12}$$

С использованием оценок из [14] найдем, что при $\lambda\to\infty$ ($\lambda\in\Lambda\backslash[\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\omega)\cup\sigma(\mathcal{G})]$)

$$\|(I-\lambda A^{-1/2})^{-1}G(\lambda)(I+\lambda A^{-1/2})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))}\leqslant$$

$$\leqslant 2\omega_0|\lambda|\cdot\|(I-\lambda A^{-1/2})^{-1}A^{-1/4}(A^{-1/4}S_{22}A^{-1/4})\|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))}\cdot\|(I+\lambda A^{-1/2})^{-1}A^{-1/4}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))}+$$

$$+\|(I-\lambda A^{-1/2})^{-1}T_{21}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))}\cdot\|\lambda\mathcal{R}_\lambda(T_{11})T_{12}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))}\cdot\|(I+\lambda A^{-1/2})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))}+$$

$$+\sum_{l=1}^m\frac{1}{|b_l-\lambda|}\,\|(I-\lambda A^{-1/2})^{-1}U^*M_lU(I+\lambda A^{-1/2})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))}=o(1).$$

Отсюда и из [13] (см. также [1]) следует, что спектральная задача (4.12), а значит и оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$, имеет в области Λ две ветви собственных значений, удовлетворяющих асимптотической формуле (4.11). □

Лемма 4.5. *Существует $\beta > 0$ такое, что*

$$\sigma(\mathcal{A}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}|\ \mathrm{Im}\lambda \neq 0\} \subset \Big\{\lambda \in \mathbb{C}|\ \beta \leqslant \mathrm{Re}\lambda < \frac{b_m}{2}\Big\}.$$

Доказательство. Множество $\sigma(\mathcal{A}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}|\ \mathrm{Im}\lambda \neq 0\}$ в силу леммы 4.3 состоит из изолированных собственных значений конечной кратности. Пусть $\lambda^{(+i)}$ — собственное значение оператора $\mathcal{A}$ из $\{\lambda \in \mathbb{C}|\ \mathrm{Im}\lambda \neq 0\}$. Тогда $\lambda^{(+i)}$ является также собственным значением пучка $L(\lambda)$ (см. (4.4) и лемму 4.2), т. е. существует $0 \neq \nabla\varphi^{(+i)} \in \mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$ такой, что $L(\lambda^{(+i)})\nabla\varphi^{(+i)} = 0$. Умножая последнее равенство скалярно на $\nabla\varphi^{(+i)}$, получим уравнение, которому удовлетворяет $\lambda^{(+i)}$:

$$-\lambda p - \frac{1}{\lambda}\, q_0 + \sum_{l=1}^{m} \frac{q_l}{b_l - \lambda} = 0, \tag{4.13}$$

$$p := \frac{\|A^{-1/2}\nabla\varphi^{(+i)}\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}}{\|\nabla\varphi^{(+i)}\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}}, \quad q_l := \frac{\|Q_l\nabla\varphi^{(+i)}\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}}{\|\nabla\varphi^{(+i)}\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}} \quad (l = \overline{0, m}).$$

Уравнение (4.13) имеет m действительных положительных корней и еще два корня — пару комплексно сопряженных чисел, либо пару действительных положительных чисел. Рассмотрим ситуацию, когда имеется пара комплексно сопряженных корней $\lambda^{(+i)}$ и $\lambda^{(-i)} := \overline{\lambda^{(+i)}}$. В этом случае обозначим действительные корни уравнения (4.13) через $\lambda^{(l)}$ и запишем (4.13) в виде

$$(-1)^m p\,(\lambda - \lambda^{(+i)})(\lambda - \lambda^{(-i)}) \prod_{l=1}^{m} (\lambda - \lambda^{(l)}) =$$
$$= \lambda^{m+2}(-1)^m p + \lambda^{m+1}(-1)^{m+1} p\Big[2\mathrm{Re}\lambda^{(\pm i)} + \sum_{l=1}^{m} \lambda^{(l)}\Big] + \dots = 0. \tag{4.14}$$

С другой стороны, уравнение (4.13) можно переписать в следующем виде:

$$\lambda^2 p \prod_{l=1}^{m} (b_l - \lambda) + q_0 \prod_{l=1}^{m} (b_l - \lambda) - \lambda \sum_{l=1}^{m} q_l \prod_{k=1,\, k\neq l}^{m} (b_k - \lambda) =$$
$$= \lambda^{m+2}(-1)^m p + \lambda^{m+1}(-1)^{m+1} p \sum_{l=1}^{m} b_l + \dots = 0. \tag{4.15}$$

Приравнивая коэффициенты при λ^{m+1} в уравнениях (4.14) и (4.15), найдем, что

$$0 < \mathrm{Re}\lambda^{(\pm i)} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m} (b_l - \lambda^{(l)}) < \frac{b_m}{2}. \tag{4.16}$$

Далее, выделим из (4.13) действительную и мнимую части, получим

$$\mathrm{Re}\lambda\Big[p + \frac{q_0}{|\lambda|^2} + \sum_{l=1}^{m} \frac{q_l}{|b_l - \lambda|^2}\Big] = \sum_{l=1}^{m} \frac{q_l b_l}{|b_l - \lambda|^2}, \quad \mathrm{Im}\lambda\Big[\frac{q_0}{|\lambda|^2} + \sum_{l=1}^{m} \frac{q_l}{|b_l - \lambda|^2} - p\Big] = 0. \tag{4.17}$$

Допустим, что оператор $\mathcal{A}$ имеет в $\{\lambda \in \mathbb{C}|\ \mathrm{Im}\lambda > 0\}$ последовательность собственных значений $\{\lambda_k^{(+i)}\}_{k=1}^{+\infty}$ такую, что $\mathrm{Re}\lambda_k^{(+i)} \to 0$ при $k \to +\infty$. При этом $|\lambda_k^{(+i)}| \to +\infty$ при $k \to +\infty$, так как дискретный спектр оператора $\mathcal{A}$ может сгущаться только к ∞ и к $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}|\ \lambda > 0\}$ (см. лемму 4.3). Таким образом, числа $\lambda_k^{(+i)}$ удовлетворяют уравнениям (4.13) при

$$p_k := \frac{\|A^{-1/2}\nabla\varphi_k^{(+i)}\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}}{\|\nabla\varphi_k^{(+i)}\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}}, \quad q_{lk} := \frac{\|Q_l\nabla\varphi_k^{(+i)}\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}}{\|\nabla\varphi_k^{(+i)}\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}} \quad (l = \overline{0, m}). \tag{4.18}$$

Можно считать (см. (3.19)), что существуют пределы последовательностей

$$\lim_{k\to+\infty} p_k = p_0 \geqslant 0, \quad \lim_{k\to+\infty} q_{lk} = q_{l0} > 0 \quad (l=\overline{0,m}), \tag{4.19}$$

иначе мы ограничимся соответствующими сходящимися подпоследовательностями.

Теперь из (4.19) и (4.17) найдем, что

$$\lim_{k\to+\infty} \mathrm{Re}\lambda_k^{(+i)} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\sum\limits_{l=1}^{m} \dfrac{q_{lk} b_l |\lambda_k^{(+i)}|^2}{|b_l-\lambda_k^{(+i)}|^2}}{2\Big[q_{0k}+\sum\limits_{l=1}^{m}\dfrac{q_{lk}|\lambda_k^{(+i)}|^2}{|b_l-\lambda_k^{(+i)}|^2}\Big]} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{m} q_{l0} b_l}{2\Big[q_{00}+\sum\limits_{l=1}^{m} q_{l0}\Big]} > 0.$$

Полученное противоречие и (4.16) завершают доказательство. □

Лемма 4.6. *Если $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))}$ достаточно мала, то точки из множества $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ не могут быть предельными для (комплексно сопряженных) ветвей собственных значений из $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.*

Доказательство. Предположим, что оператор $\mathcal{A}$ имеет ветвь собственных значений $\{\lambda_k^{(+i)}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{\lambda\in\mathbb{C}|\ \mathrm{Im}\lambda>0\}$, стремящихся к числу $\gamma\in\sigma_{ess}(\mathcal{A})$. При этом $\gamma\notin\{0,b_1,\ldots,b_m\}$ в силу лемм 4.1, 4.3. Тогда числа $\lambda_k^{(+i)}$ суть корни уравнения (4.13) с коэффициентами, определяемыми по формулам (4.18). При этом числа $\lambda_k^{(-i)} := \overline{\lambda_k^{(+i)}}$ также будут собственными значениями оператора $\mathcal{A}$ (см. лемму 4.2) и будут корнями уравнения (4.13) при тех же коэффициентах (4.18). Таким образом, числа $\lambda_k^{(\pm i)}$ будут корнями следующих функций:

$$f_k(\lambda) := -\lambda p_k - \frac{1}{\lambda}\, q_{0k} + \sum_{l=1}^{m} \frac{q_{lk}}{b_l-\lambda}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Можно считать, не ограничивая общности, что для коэффициентов выполнены формулы (4.19). В противном случае мы ограничимся соответствующими подпоследовательностями. По предельным коэффициентам определим следующую функцию:

$$f(\lambda) := -\lambda p_0 - \frac{1}{\lambda}\, q_{00} + \sum_{l=1}^{m} \frac{q_{l0}}{b_l-\lambda}.$$

Таким образом, последовательность функций $\{f_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится (равномерно) к функции $f(\lambda)$ в каждой замкнутой ограниченной области, не содержащей точек из $\sigma(\mathcal{G})=\{0,b_1,\ldots,b_m\}$. По теореме Гурвица (см. [12, гл. 4, § 3, п. 3.6]) функция $f(\lambda)$ имеет в точке $\lambda=\gamma$ кратный нуль, т. е. $f'(\gamma)=0$. Итак, имеем

$$0 = f'(\gamma) = \lim_{k\to+\infty} f_k'(\gamma) = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\|\nabla\varphi_k^{(+i)}\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}} \Big[-\|A^{-1/2}\nabla\varphi_k^{(+i)}\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} +$$
$$+ \frac{\|Q_0\nabla\varphi_k^{(+i)}\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}}{\gamma^2} + \sum_{l=1}^{m} \frac{\|Q_l\nabla\varphi_k^{(+i)}\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}}{(b_l-\gamma)^2}\Big] \geqslant$$
$$\geqslant \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\|\nabla\varphi_k^{(+i)}\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}} \Big[-\|A^{-1/2}\|^2_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))}\cdot\|\nabla\varphi_k^{(+i)}\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)} +$$

$$+\min\Big\{\frac{1}{\gamma^2},\frac{1}{(b_l-\gamma)^2}\ \ (l=\overline{1,m})\Big\}\big(\mathcal{Q}^*\mathcal{Q}\nabla\varphi_k^{(+i)},\nabla\varphi_k^{(+i)}\big)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}\Big]\geqslant$$

$$\geqslant\min\Big\{\frac{1}{\gamma^2},\frac{1}{(b_l-\gamma)^2}\ \ (l=\overline{1,m})\Big\}\gamma(\mathcal{Q}^*\mathcal{Q})-\|A^{-1/2}\|^2_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))},$$

где $\gamma(\mathcal{Q}^*\mathcal{Q})>0$ — нижняя грань оператора $\mathcal{Q}^*\mathcal{Q}$ (см. (3.19), (3.30)). Таким образом, при достаточно малой $\|A^{-1}\|^2_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega,\rho_0))}$ из последней оценки получим противоречие: $0=f'(\gamma)>0$. □

5. Случай отсутствия вращения и гравитационного поля ($\omega_0=0$, $g=0$)

5.1. Постановка задачи. Пусть $\omega_0=0$ и $g=0$, т. е. система не вращается и находится в невесомости. В этом случае считаем, что постоянны стационарная плотность $\rho_0=\mathrm{const}$ и структурные константы $k_l>0$ $(l=\overline{1,m})$. Все константы задачи связаны неравенством (2.7).

В рассматриваемом случае $L_{2,\rho_0}(\Omega)=L_{2,\Omega}:=\{f\in L_2(\Omega)\mid (f,1)_{L_2(\Omega)}=0\}$. Операторы M_l (см. (3.14)) станут операторами умножения элементов пространства $L_{2,\Omega}$ на константы ρ_0k_l.

Будем считать, в соответствии с теоремой 3.2 (или теоремой 3.1), что $\rho^0\in\mathcal{D}(B^*)$. Тогда в уравнении (3.28) $\xi_{\rho^0}(t)\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (3.30)), и скобки в уравнении (3.28) можно раскрыть. Запишем уравнение из (3.28) в виде системы и применим к обеим частям второго и последующих уравнений оператор U^*. Полученную систему вместе с соответствующим начальным условием перепишем в виде задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}:=\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)\oplus\big(\oplus_{l=0}^m\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)\big)$:

$$\frac{d\zeta}{dt}=-\mathcal{A}\zeta+\zeta_{\rho^0}(t)+\mathcal{F}(t),\quad \zeta(0)=\zeta^0, \tag{5.1}$$

$$\zeta(t):=\big(\nabla\varphi(t);\mathbf{w}(t)\big)^\tau:=\big(\nabla\varphi(t);\mathbf{u}_0(t);\mathbf{u}_1(t);\ldots;\mathbf{u}_m(t)\big)^\tau,\quad \mathbf{u}_l(t):=U^*u_l(t)\quad (l=\overline{0,m}),$$

$$\zeta_{\rho^0}(t):=\Big(\sum_{l=1}^m e^{-b_lt}\frac{\rho_0k_l}{b_l}B^*\rho^0;0;0;\ldots;0\Big)^\tau,\quad \mathcal{F}(t):=\big(P_G\mathbf{f}(t);0;0;\ldots;0\big)^\tau,$$

$$\zeta^0:=\Big(P_G\mathbf{u}^0;-\Big[1-\sum_{l=1}^m\frac{\rho_0k_l}{b_l}\Big]^{1/2}U^*\rho^0;0;\ldots;0\Big)^\tau.$$

Оператор $\mathcal{A}$ в (5.1) определяется по следующим формулам:

$$\mathcal{A}=\mathrm{diag}(A^{1/2},\mathcal{I})\begin{pmatrix}0&\mathcal{Q}^*\\-\mathcal{Q}&\mathcal{G}\end{pmatrix}\mathrm{diag}(A^{1/2},\mathcal{I})=\begin{pmatrix}0&A^{1/2}\mathcal{Q}^*\\-\mathcal{Q}A^{1/2}&\mathcal{G}\end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

$$\mathcal{Q}:=\big(\beta_0^{1/2}I,\beta_1^{1/2}I,\ldots,\beta_m^{1/2}I\big)^\tau,\quad \mathcal{G}:=\mathrm{diag}\big(0,b_1I,\ldots,b_mI\big),\quad \mathcal{I}:=\mathrm{diag}\big(I,I,\ldots,I\big),$$

$$\beta_0:=1-\sum_{l=1}^m\frac{\rho_0k_l}{b_l},\quad \beta_l:=\frac{\rho_0k_l}{b_l}\quad (l=\overline{1,m}),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A})=\Big\{\xi=(\nabla\varphi;\mathbf{w})^\tau\in\mathcal{H}\Big|\ \nabla\varphi\in\mathcal{D}(A^{1/2}),\ \ \mathcal{Q}^*\mathbf{w}\in\mathcal{D}(A^{1/2})\Big\}.$$

Замечание 5.1. В рассматриваемом частном случае (в этом разделе) основное гильбертово пространство $\mathcal{H}$ и операторный блок $\mathcal{A}$ определяются несколько иначе, чем в (3.28)–(3.30). Здесь основная задача Коши (5.1) записана так, что в конструкции операторного блока $\mathcal{A}$, кроме оператора A (см. лемму 3.2), все входящие в него операторы пропорциональны единичным. Оператор (5.2) унитарно эквивалентен оператору (3.30).

5.2. Спектральная задача и лемма о пересчете корневых элементов. Рассмотрим задачу о спектре оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}\xi=\lambda\xi,\quad \xi\in\mathcal{D}(\mathcal{A})\subset\mathcal{H}. \tag{5.3}$$

При $\lambda\notin\{0,b_1,\ldots,b_m\}=\sigma(\mathcal{G})$, как и в (4.3)-(4.4), с задачей (5.3) свяжем спектральную задачу для операторного пучка $L(\lambda)$:

$$L(\lambda)\nabla\eta:=\big[-\lambda A^{-1}+\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\lambda)^{-1}\mathcal{Q}\big]\nabla\eta=0,\quad \nabla\eta\in\mathbf{G}(\Omega,\rho_0). \tag{5.4}$$

Определение 5.1 (см. [11, гл. 2, § 11, с 61]). Пусть λ_0 — собственное значение (с.з.), а $\nabla\eta_0$ — отвечающий ему собственный элемент (с.э.) оператор-функции $L(\lambda)$, т. е. $L(\lambda_0)\nabla\eta_0 = 0$. Элементы $\nabla\eta_1, \nabla\eta_2, \ldots, \nabla\eta_{n-1}$ называют *присоединенными* к с.э. $\nabla\eta_0$, если $\sum\limits_{k=0}^{j}(k!)^{-1}L^{(k)}(\lambda_0)\nabla\eta_{j-k} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$. Число n называют *длиной* цепочки $\{\nabla\eta_k\}_{k=0}^{n-1}$ из собственного и присоединенных элементов (с.п.э.).

Следующая лемма по аналогии с [11, гл. 2, § 12, следствие 12.4] установлена в [5].

Лемма 5.1. *Пусть набор элементов $\{\xi_k = (\nabla\varphi_k; \mathbf{w}_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ является цепочкой из с.п.э. задачи* (5.3)*, отвечающей с.з. λ_0, тогда $\{\nabla\eta_k\}_{k=0}^{n-1} := \{A^{1/2}\nabla\varphi_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из с.п.э. задачи* (5.4)*, отвечающая собственному значению λ_0.*

Обратно, пусть набор элементов $\{\nabla\eta_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из с.п.э. спектральной задачи (5.4)*, отвечающая с.з. λ_0, тогда набор $\{\xi_k = (A^{-1/2}\nabla\eta_k; \mathbf{w}_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$, где $\mathbf{w}_k = \sum\limits_{l=0}^{k}(\mathcal{G} - \lambda_0)^{-(k-l+1)}\mathcal{Q}\nabla\eta_l$, является цепочкой из с.п.э. спектральной задачи* (5.3).

Пусть $\lambda_k = \lambda_k(A^{-1})$, $\nabla\eta_k = \nabla\eta_k(A^{-1})$ $(k \in \mathbb{N})$ — k-е собственное значение и соответствующий ему нормированный к единице собственный элемент оператора A^{-1}. Тогда $\nabla\eta_k$ — собственный элемент операторного пучка $L(\lambda)$, и спектр задачи (5.4), а значит, и задачи (5.3), может быть полностью найден из следующей последовательности характеристических уравнений:

$$\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q} \equiv -\frac{1}{\lambda}\beta_0 + \sum_{l=1}^{m}\frac{\beta_l}{b_l - \lambda} = \lambda\lambda_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5.5}$$

Здесь и далее $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}^*$ и $\mathcal{G}$ мы будем понимать также как вектор-столбец, вектор-строку и матрицу соответственно, действующие в $\mathbb{C}^{m+1}$.

Определим характеристические функции

$$\begin{aligned} g_k(\lambda) &:= \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q} - \lambda\lambda_k \equiv -\frac{1}{\lambda}\beta_0 + \sum_{l=1}^{m}\frac{\beta_l}{b_l - \lambda} - \lambda\lambda_k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ g_\infty(\lambda) &:= \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q} \equiv -\frac{1}{\lambda}\beta_0 + \sum_{l=1}^{m}\frac{\beta_l}{b_l - \lambda} \equiv -\frac{1}{\lambda}\Big[\sum_{l=0}^{m}\beta_l - \sum_{l=1}^{m}\frac{\beta_l b_l}{b_l - \lambda}\Big]. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Обозначим через γ_p $(p = \overline{1,m})$ корни уравнения $g_\infty(\lambda) = 0$. Простые геометрические рассуждения показывают, что $\gamma_p \in (b_{p-1}, b_p)$ $(p = \overline{1,m},\ b_0 := 0)$, $g'_\infty(\gamma_p) > 0$ $(p = \overline{1,m})$.

Обозначим через $\lambda_k^{(p)}$ $(p = \overline{1,m+2})$ корни уравнения $g_k(\lambda) = 0$ при каждом $k \in \mathbb{N}$. Можно проверить, что это уравнение всегда имеет m действительных корней $\lambda_k^{(p)} \in (\gamma_p, b_p)$ $(p = \overline{1,m})$ и еще два корня. Если $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ $(p = \overline{1,m})$, то $g'_k(\lambda_k^{(p)}) > 0$. Оставшиеся два корня $\lambda_k^{(m+1)}$ и $\lambda_k^{(m+2)}$ являются комплексно сопряженными начиная с некоторого номера k_0. В силу конечной кратности собственных значений оператора A^{-1} легко видеть также, что может быть только конечное количество номеров $k \in \mathbb{N}$, при которых характеристическое уравнение $g_k(\lambda) = 0$ имеет кратные (действительные) корни.

Оператор (5.2) подчиняется теореме 4.1, при этом его более простая структура позволяет уточнить информацию о спектре. Применение асимптотических методов к уравнениям (5.6) приводит к следующей теореме.

Теорема 5.1. $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$. *Спектр оператора $\mathcal{A}$ (или пучка $L(\lambda)$) расположен в правой открытой полуплоскости и в $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из изолированных конечнократных собственных значений, которые расположены симметрично относительно действительной полуоси. Все собственные значения можно разбить на $(m+2)$-е серии $\{\lambda_k^{(p)}\}_{k=1}^\infty$ $(p = \overline{1,m})$, $\{\lambda_k^{(m+1)}\}_{k=1}^\infty := \{\lambda_k^{(+i\infty)}\}_{k=1}^\infty$, $\{\lambda_k^{(m+2)}\}_{k=1}^\infty := \{\lambda_k^{(-i\infty)}\}_{k=1}^\infty$ со следующим асимптотическим поведением*:

$$\lambda_k^{(p)} = \gamma_p + \frac{\gamma_p}{g'_\infty(\gamma_p)}\lambda_k(A^{-1}) + O(\lambda_k^2(A^{-1})) \quad (k \to +\infty), \quad p = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\lambda_k^{(\pm i\infty)} = \pm i\alpha^{1/2}\lambda_k^{-1/2}(A^{-1}) + \sum_{l=1}^{m}\frac{\beta_l b_l}{2\alpha} + O(\lambda_k^{1/2}(A^{-1})) \quad (k \to +\infty), \quad \alpha := \sum_{l=0}^{m}\beta_l = 1.$$

5.3. Некоторые леммы о системах векторов в $\mathbb{C}^{m+2}$. В соответствии с леммой 5.1 собственные элементы оператора $\mathcal{A}$, после группировки по сериям (см. теорему 5.1), могут быть записаны следующим образом:

$$\widetilde{\xi}_k^{(p)} = \big(A^{-1/2}\nabla\eta_k; (\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\nabla\eta_k\big)^\tau = \big(\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\big)^\tau\nabla\eta_k \equiv$$
$$\equiv \Big(\lambda_k^{1/2}; \frac{-\beta_0^{1/2}}{\lambda_k^{(p)}}; \frac{\beta_1^{1/2}}{b_1-\lambda_k^{(p)}}; \ldots; \frac{\beta_m^{1/2}}{b_m-\lambda_k^{(p)}}\Big)^\tau\nabla\eta_k, \quad p=\overline{1,m+2}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

В связи с этой формулой докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 5.2. *Пусть $J := \operatorname{diag}(1,-I)$ — матрица в $\mathbb{C}^{m+2} = \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}^{m+1}$,*

$$\varphi_k^{(p)} := R_{k,p}\big(\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\big)^\tau, \quad p=\overline{1,m+2}, \quad k\in\mathbb{N},$$
$$R_{k,p} := \begin{cases} \big[g'_\infty(\gamma_p)\big]^{-1/2}, & p=\overline{1,m}, \quad k\in\mathbb{N},\\ \big[2\lambda_k\big]^{-1/2}, & p=m+1,m+2, \quad k\in\mathbb{N}.\end{cases} \tag{5.7}$$

При всех $p,q=\overline{1,m+2}$, $k\in\mathbb{N}$ имеют место следующие формулы:

$$\big(J\varphi_k^{(p)},\varphi_k^{(q)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = 0 \ \ (\lambda_k^{(p)} \neq \overline{\lambda_k^{(q)}}), \quad \big(J\varphi_k^{(p)},\overline{\varphi_k^{(p)}}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = -g'_k(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}^2. \tag{5.8}$$

Доказательство. При $\lambda_k^{(p)} \neq \overline{\lambda_k^{(q)}}$ из (5.5), (5.6), $g_k(\lambda_k^{(p)})=0$ и тождества Гильберта найдем, что

$$\big(J\varphi_k^{(p)},\varphi_k^{(q)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = R_{k,p}R_{k,q}\Big[\lambda_k - \big((\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q},(\mathcal{G}-\lambda_k^{(q)})^{-1}\mathcal{Q}\big)_{\mathbb{C}^{m+1}}\Big] =$$
$$= R_{k,p}R_{k,q}\Big[\lambda_k - \mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\overline{\lambda_k^{(q)}})^{-1}(\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\Big] =$$
$$= R_{k,p}R_{k,q}\Big[\lambda_k - \frac{1}{\overline{\lambda_k^{(q)}}-\lambda_k^{(p)}}\Big[\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\overline{\lambda_k^{(q)}})^{-1}\mathcal{Q} - \mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\Big]\Big] =$$
$$= R_{k,p}R_{k,q}\Big[\lambda_k - \frac{1}{\overline{\lambda_k^{(q)}}-\lambda_k^{(p)}}\Big[\overline{\lambda_k^{(q)}}\lambda_k - \lambda_k^{(p)}\lambda_k\Big]\Big] = 0.$$

Далее, из (5.5) имеем

$$\big(J\varphi_k^{(p)},\overline{\varphi_k^{(p)}}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = R_{k,p}^2\Big[\lambda_k - \mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-2}\mathcal{Q}\Big] = -g'_k(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}^2.$$

Лемма доказана. □

Лемма 5.3. *Пусть $M_k := M_k(\varphi_k^{(1)},\varphi_k^{(2)},\ldots,\varphi_k^{(m+2)})$ $(k\in\mathbb{N})$ — матрица, столбцами которой являются векторы $\varphi_k^{(p)}$ $(p=\overline{1,m+2})$. Имеют место следующие утверждения.*

1) *Существует $C_1>0$ такое, что $\|M_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leqslant C_1$ при всех $k\in\mathbb{N}$.*
2) *Если $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ $(p=\overline{1,m+2},\ k\in\mathbb{N})$, то $\det M_k \neq 0$.*
3) *В условиях пункта 2) существует $C_2>0$ такое, что $\|M_k^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leqslant C_2$ при всех $k\in\mathbb{N}$.*

Доказательство. Из теоремы 5.1 несложно вывести, что нормы $\|\varphi_k^{(p)}\|_{\mathbb{C}^{m+2}}$ равномерно ограничены при $p=\overline{1,m+2}$, $k\in\mathbb{N}$. Отсюда и из оценки

$$\|M_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leqslant \Big[\sum_{p=1}^{m+2}\|\varphi_k^{(p)}\|^2_{\mathbb{C}^{m+2}}\Big]^{1/2}$$

следует первое утверждение леммы.

Далее, с помощью формул (5.7), (5.8) из леммы 5.2 найдем, что

$$M_k^\tau J M_k = -\operatorname{diag}\big(g'_k(\lambda_k^{(1)})R_{k,1}^2, g'_k(\lambda_k^{(2)})R_{k,2}^2, \ldots, g'_k(\lambda_k^{(m+2)})R_{k,m+2}^2\big).$$

Отсюда следует, что

$$(-1)^{m+1}\big(\det M_k\big)^2 = \det M_k^\tau J M_k = (-1)^{m+2}\prod_{p=1}^{m+2} g_k'(\lambda_k^{(p)}) R_{k,p}^2,$$

а значит, учитывая (5.7) и $g_k'(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ ($p=\overline{1,m+2}$, $k\in\mathbb{N}$), получим, что

$$\big(\det M_k\big)^2 = -1\cdot\frac{-g_k'(\lambda_k^{(m+1)})}{2\lambda_k}\cdot\frac{-g_k'(\lambda_k^{(m+2)})}{2\lambda_k}\cdot\prod_{p=1}^{m}\frac{g_k'(\lambda_k^{(p)})}{g_\infty'(\gamma_p)}\neq 0.$$

Далее, с использованием (5.5), (5.6) и теоремы 5.1 вычислим

$$\lim_{k\to+\infty}\big(\det M_k\big)^2 = -\prod_{p=1}^{m}\lim_{k\to+\infty}\frac{g_k'(\lambda_k^{(p)})}{g_\infty'(\gamma_p)}\cdot\lim_{k\to+\infty}\frac{-g_k'(\lambda_k^{(m+1)})}{2\lambda_k}\cdot\lim_{k\to+\infty}\frac{-g_k'(\lambda_k^{(m+2)})}{2\lambda_k} = -1.$$

Отсюда, из 1) и оценки $\|M_k^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}\leqslant|\det M_k|^{-1}\|M_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}^{m+1}$ (см. [8, гл. 1, § 4, п. 2, формула (4.12)]) следует третье утверждение в лемме. □

Лемма 5.4. *Система векторов*

$$\begin{aligned}
&\varphi_\infty^{(p)} := \big[g_\infty'(\gamma_p)\big]^{-1/2}\big(0;(\mathcal{G}-\gamma_p)^{-1}\mathcal{Q}\big)^\tau,\quad p=\overline{1,m},\\
&\varphi_\infty^{(m+1)} \equiv \varphi_\infty^{(+i\infty)} := 2^{-1/2}\big(1;+i\alpha^{-1/2}\mathcal{Q}\big)^\tau,\\
&\varphi_\infty^{(m+2)} \equiv \varphi_\infty^{(-i\infty)} := 2^{-1/2}\big(1;-i\alpha^{-1/2}\mathcal{Q}\big)^\tau,\quad \alpha=\sum_{l=0}^{m}\beta_l = 1,
\end{aligned}\tag{5.9}$$

является ортонормированным базисом в $\mathbb{C}^{m+2}=\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}^{m+1}$.

Доказательство проводится, как и в лемме 5.2, прямой проверкой с учетом соотношений (5.5), (5.6), $g_\infty(\gamma_p)=0$ и тождества Гильберта.

Лемма 5.5. *Пусть* $M_\infty := M_\infty(\varphi_\infty^{(1)},\varphi_\infty^{(2)},\ldots,\varphi_\infty^{(m+2)})$ — *матрица, столбцами которой являются векторы* $\varphi_\infty^{(p)}$ ($p=\overline{1,m+2}$). *Тогда* $M_\infty^* = M_\infty^{-1}$.

Доказательство проводится прямой проверкой с использованием леммы 5.4.

Замечание 5.2. Система (5.9) является предельной для системы (5.7) при $k\to+\infty$. Далее из системы (5.9) и собственных элементов оператора A будет сконструирован ортонормированный базис пространства $\mathcal{H}$. Дальнейшая идея состоит в том, чтобы оценить уклонение системы собственных (а в вырожденном случае — системы корневых) элементов оператора $\mathcal{A}$ от построенного ортонормированного базиса пространства $\mathcal{H}$.

В связи с этим замечанием докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 5.6. *Существует* $C>0$ *такое, что при всех* $k\in\mathbb{N}$

$$\|M_k - M_\infty\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}\leqslant C\big[\lambda_k(A^{-1})\big]^{1/2}.$$

Доказательство. Как и в лемме 5.3, воспользуемся формулой

$$\|M_k - M_\infty\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}\leqslant\Big[\sum_{p=1}^{m+2}\|\varphi_k^{(p)}-\varphi_\infty^{(p)}\|_{\mathbb{C}^{m+2}}^2\Big]^{1/2}.\tag{5.10}$$

Из (5.7), (5.9), теоремы 5.1 при $p=\overline{1,m}$ и тождества Гильберта имеем

$$\begin{aligned}
\varphi_k^{(p)}-\varphi_\infty^{(p)} &= \big[g_\infty'(\gamma_p)\big]^{-1/2}\Big(\lambda_k^{1/2};\Big[(\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-1}-(\mathcal{G}-\gamma_p)^{-1}\Big]\mathcal{Q}\Big)^\tau =\\
&= \big[g_\infty'(\gamma_p)\big]^{-1/2}\Big(\lambda_k^{1/2};\big[\lambda_k^{(p)}-\gamma_p\big](\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-1}(\mathcal{G}-\gamma_p)^{-1}\mathcal{Q}\Big)^\tau =\\
&= \lambda_k^{1/2}\cdot\big[g_\infty'(\gamma_p)\big]^{-1/2}\Big(1;\lambda_k^{1/2}\Big[\frac{\gamma_p}{g_\infty'(\gamma_p)}+O(\lambda_k)\Big](\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-1}(\mathcal{G}-\gamma_p)^{-1}\mathcal{Q}\Big)^\tau
\end{aligned}$$

при $k \to +\infty$. Отсюда следует, что

$$\exists\, C_p > 0: \quad \|\varphi_k^{(p)} - \varphi_\infty^{(p)}\|_{\mathbb{C}^{m+2}} \leqslant C_p\big[\lambda_k(A^{-1})\big]^{1/2}, \quad p = \overline{1,m}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5.11}$$

Из (5.7), (5.9), теоремы 5.1 при $p = m+1$ и тождества Гильберта имеем

$$\varphi_k^{(m+1)} - \varphi_\infty^{(m+1)} = \frac{1}{2^{1/2}}\Big(0; \Big[\frac{1}{\lambda_k^{1/2}}(\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+1)})^{-1} - i\alpha^{-1/2}I\Big]\mathcal{Q}\Big)^\tau =$$
$$= \frac{1}{2^{1/2}}\Big(0; \Big[I - i\alpha^{-1/2}\lambda_k^{1/2}(\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+1)})\Big](\lambda_k^{1/2}\mathcal{G} - \lambda_k^{1/2}\lambda_k^{(m+1)})^{-1}\mathcal{Q}\Big)^\tau =$$
$$= \lambda_k^{1/2}\cdot\frac{1}{2^{1/2}}\Big(0; \Big[\frac{i\alpha^{-3/2}}{2}\sum_{l=1}^{m} k_l I - i\alpha^{-1/2}\mathcal{G} + O(\lambda_k^{1/2})\Big](\lambda_k^{1/2}\mathcal{G} - \lambda_k^{1/2}\lambda_k^{(m+1)})^{-1}\mathcal{Q}\Big)^\tau$$

при $k \to +\infty$. Аналогичные вычисления справедливы и при $p = m+2$. Таким образом, имеют место неравенства (5.11) при $p = m+1$ и $p = m+2$. Теперь из (5.10) и (5.11) следует утверждение леммы. □

5.4. О p-базисности системы корневых элементов оператора $\mathcal{A}$. Следствием лемм 5.4 и 5.5 является следующее утверждение.

Лемма 5.7. *Система элементов $\{\xi_{k,\infty}^{(p)} := \varphi_\infty^{(p)}\nabla\eta_k\}_{p=\overline{1,m+2},\, k\in\mathbb{N}}$ является ортонормированным базисом пространства $\mathcal{H}$.*

Доказательство. Ортонормированность введенной системы следует из леммы 5.4 и ортонормированности системы $\{\nabla\eta_k\}_{k=1}^\infty$. Покажем, что введенная система полна в $\mathcal{H}$. Пусть существует $\xi = (\nabla\varphi; \mathbf{u}_0; \mathbf{u}_1; \ldots; \mathbf{u}_m)^\tau \in \mathcal{H}$ такой, что $\big(\xi_{k,\infty}^{(p)}, \xi\big)_{\mathcal{H}} = 0$ при всех $p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$. Последнее означает, что

$$M_\infty^\tau\big((\nabla\eta_k, \nabla\varphi)_{\mathbf{H}}; (\nabla\eta_k, \mathbf{u}_0)_{\mathbf{H}}; (\nabla\eta_k, \mathbf{u}_1)_{\mathbf{H}}; \ldots; (\nabla\eta_k, \mathbf{u}_m)_{\mathbf{H}}\big)^\tau = 0 \quad (\mathbf{H} = \mathbf{G}(\Omega, \rho_0))$$

при $k \in \mathbb{N}$. Отсюда, из леммы 5.5 и из полноты системы $\{\nabla\eta_k\}_{k=1}^\infty$ в пространстве $\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$ тогда получим, что $\nabla\varphi = \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_1 = \cdots = \mathbf{u}_m = 0$. т. е., $\xi = 0$. □

С помощью набора матриц S_k ($k \in \mathbb{N}$), действующих в $\mathbb{C}^{m+2}$, определим оператор

$$\mathcal{S}\xi := \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\xi_{k,\infty}^{(1)}; \ldots; \xi_{k,\infty}^{(m+2)}\Big) S_k \begin{pmatrix} (\xi, \xi_{k,\infty}^{(1)})_{\mathcal{H}} \\ \vdots \\ (\xi, \xi_{k,\infty}^{(m+2)})_{\mathcal{H}} \end{pmatrix} := \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\sum_{p=1}^{m+2}\xi_{k,\infty}^{(p)}\sum_{q=1}^{m+2} S_k^{pq}\big(\xi, \xi_{k,\infty}^{(q)}\big)_{\mathcal{H}}\right]$$

и будем писать при этом $\mathcal{S} \longleftrightarrow S_k$.

Лемма 5.8. *Имеют место следующие утверждения.*

1) $\|\mathcal{S}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant \sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\|S_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}$.
2) *Пусть $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Если $\mathcal{S} \longleftrightarrow S_k$, то $\mathcal{S}^* \longleftrightarrow S_k^*$.*
3) *Пусть $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, тогда $\mathcal{S}\mathcal{T} \longleftrightarrow S_k T_k$. В частности, $\mathcal{S}^{-1} \longleftrightarrow S_k^{-1}$.*

Доказательство. Лемма доказывается непосредственной проверкой с использованием ортонормированности системы $\{\xi_{k,\infty}^{(p)}\}_{p=\overline{1,m+2},\, k\in\mathbb{N}}$. □

Основываясь на доказанных фактах, установим две теоремы: о p-базисности специальным образом нормированной системы собственных элементов оператора $\mathcal{A}$ в невырожденном случае, а также о p-базисности системы корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ в вырожденном случае.

Теорема 5.2. *Пусть $g_k'(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ ($p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$). Тогда система собственных элементов $\{\xi_k^{(p)} := \varphi_k^{(p)}\nabla\eta_k\}_{p=\overline{1,m+2},\, k\in\mathbb{N}}$ оператора $\mathcal{A}$ образует p-базис пространства $\mathcal{H}$ при $p > 3$ (напомним, что $A^{-1} \in \mathfrak{S}_p(H)$ при $p > 3/2$ — см. лемму 3.2).*

Доказательство. Положим $\mathcal{S} \longleftrightarrow S_k := M_\infty^* M_k$ и покажем, что $\mathcal{S}\xi_{l,\infty}^{(q)} = \xi_l^{(q)}$ при $q = \overline{1, m+2}$, $l \in \mathbb{N}$. Учитывая, что $S_k^{pq} = \overline{(\varphi_\infty^{(p)}, \varphi_k^{(q)})_{\mathbb{C}^{m+2}}}$ и $(\xi_l^{(q)}, \xi_{k,\infty}^{(p)})_{\mathcal{H}} = 0$ при $l \neq k$, вычислим

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}\xi_{l,\infty}^{(q)} &= \Big(\xi_{l,\infty}^{(1)}; \ldots; \xi_{l,\infty}^{(m+2)}\Big) M_\infty^* M_l \Big(0; \ldots; 0; 1_q; 0; \ldots; 0\Big)^\tau = \\
&= \Big(\xi_{l,\infty}^{(1)}; \ldots; \xi_{l,\infty}^{(m+2)}\Big)\Big(\overline{(\varphi_\infty^{(1)}, \varphi_l^{(q)})_{\mathbb{C}^{m+2}}}; \ldots; \overline{(\varphi_\infty^{(m+2)}, \varphi_l^{(q)})_{\mathbb{C}^{m+2}}}\Big)^\tau = \\
&= \sum_{p=1}^{m+2} \overline{(\varphi_\infty^{(p)}, \varphi_l^{(q)})_{\mathbb{C}^{m+2}}}\, \xi_{l,\infty}^{(p)} = \sum_{p=1}^{m+2} (\varphi_l^{(q)}, \varphi_\infty^{(p)})_{\mathbb{C}^{m+2}} \xi_{l,\infty}^{(p)} = \\
&= \sum_{p=1}^{m+2} (\xi_l^{(q)}, \xi_{l,\infty}^{(p)})_{\mathcal{H}} \xi_{l,\infty}^{(p)} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{m+2} (\xi_l^{(q)}, \xi_{k,\infty}^{(p)})_{\mathcal{H}} \xi_{k,\infty}^{(p)} = \xi_l^{(q)}.
\end{aligned}$$

Из леммы 5.8, условия $g_k'(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ ($p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$), лемм 5.3 и 5.5 следует, что оператор $\mathcal{S}$ непрерывно обратим: $\mathcal{S}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Отсюда и из леммы 5.7 тогда следует, что система элементов $\{\xi_k^{(p)}\}_{p=\overline{1,m+2},\, k\in\mathbb{N}}$ — базис Рисса пространства $\mathcal{H}$. Для доказательства теоремы остается показать, что $\mathcal{S} = \mathcal{I} + \mathcal{T}$, где $\mathcal{T} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ при $p > 3$.

Положим $T_k := M_k - M_\infty$, тогда с учетом лемм 5.5 и 5.8 получим, что

$$\mathcal{S} \longleftrightarrow M_\infty^* M_k = M_\infty^*(M_\infty + T_k) = I + M_\infty^* T_k \longleftrightarrow \mathcal{I} + \mathcal{T}, \quad \mathcal{T}^*\mathcal{T} \longleftrightarrow (T_k^* M_\infty)(M_\infty^* T_k) = T_k^* T_k.$$

Обозначим через $\lambda_k\big((\mathcal{T}^*\mathcal{T})^{1/2}\big)$ и $\lambda_k\big((T^*T)^{1/2}\big)$ собственные значения оператора $(\mathcal{T}^*\mathcal{T})^{1/2}$ и матрицы $(T^*T)^{1/2}$ соответственно, занумерованные в порядке убывания и с учетом кратности. Тогда из последних соотношений и леммы 5.7 получим, что

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{+\infty} \lambda_r^p\big((\mathcal{T}^*\mathcal{T})^{1/2}\big) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{m+2} \lambda_l^p\big((T_k^*T_k)^{1/2}\big) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{m+2} \big[\lambda_l\big(T_k^*T_k\big)\big]^{p/2} \leqslant \\
&\leqslant (m+2)\sum_{k=1}^{+\infty} \big[\lambda_{\max}\big(T_k^*T_k\big)\big]^{p/2} = (m+2)\sum_{k=1}^{+\infty} \|T_k^*T_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}^{p/2} \leqslant \\
&\leqslant (m+2)\sum_{k=1}^{+\infty} \|T_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}^{p} \leqslant (m+2)C^p \sum_{k=1}^{+\infty} \big[\lambda_k(A^{-1})\big]^{p/2} < +\infty
\end{aligned}$$

при $p/2 > 3/2$, так как $A^{-1} \in \mathfrak{S}_p(H)$ при $p > 3/2$. Следовательно, $\mathcal{T} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ при $p > 3$. □

Рассмотрим теперь ситуацию, когда при некотором $k \in \mathbb{N}$ уравнение $g_k(\lambda) = 0$ имеет кратный корень. В этом случае может быть один или два двукратных корня, либо один трехкратный корень.

Разберем случай двукратного корня. В этом случае при некоторых $k \in \mathbb{N}$ (таких номеров конечное количество) будет либо $\lambda_k^{(m+1)} = \lambda_k^{(m+2)} \in \mathbb{R}$, либо $\lambda_k^{(p_1)} = \lambda_k^{(m+1)}$, $\lambda_k^{(p_2)} = \lambda_k^{(m+2)}$ при некоторых $p_1, p_2 \in \{1, \ldots, m\}$. Не ограничивая общности, предположим первую ситуацию. Пусть $\nabla\eta$ — это первый присоединенный элемент к собственному элементу $\nabla\eta_k$ пучка $L(\lambda)$ в точке $\lambda_k^{(m+2)}$ (см. определение 5.1). Тогда $L'(\lambda_k^{(m+2)})\nabla\eta_k = g_k'(\lambda_k^{(m+2)})\nabla\eta_k = 0$ и

$$L'(\lambda_k^{(m+2)})\nabla\eta_k + L(\lambda_k^{(m+2)})\nabla\eta = g_k'(\lambda_k^{(m+2)})\nabla\eta_k + L(\lambda_k^{(m+2)})\nabla\eta = L(\lambda_k^{(m+2)})\nabla\eta = 0.$$

Таким образом, в качестве первого присоединенного к $\nabla\eta_k$ элемента можно взять элемент $\nabla\eta_k$.

Пусть $\xi_{k0}^{(m+2)} = \big(\lambda_k^{1/2}\nabla\eta_k; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-1}\mathcal{Q}\nabla\eta_k\big)^\tau$ — собственный элемент оператора $\mathcal{A}$, отвечающий с.з. $\lambda_k^{(m+2)}$ (см. лемму 5.1). Вычислим в соответствии с леммой 5.1 присоединенный элемент η_1 оператора $\mathcal{A}$. Поскольку присоединенный элемент определяется с точностью до собственного элемента, то можно считать, что $\xi_{k1}^{(m+2)} = \eta_1 - \xi_{k0}^{(m+2)} = \big(0; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-2}\mathcal{Q}\nabla\eta_k\big)^\tau$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ имеет следующую цепочку из собственного и присоединенного к нему элемента:

$$\begin{aligned}
\xi_{k0}^{(m+2)} &= \big(\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-1}\mathcal{Q}\big)^\tau\nabla\eta_k =: \varphi_{k0}^{(m+2)}\nabla\eta_k, \\
\xi_{k1}^{(m+2)} &= \big(\ 0; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-2}\mathcal{Q}\big)^\tau\nabla\eta_k =: \varphi_{k1}^{(m+2)}\nabla\eta_k.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Разберем теперь ситуацию, когда при некотором $k \in \mathbb{N}$ уравнение $g_k(\lambda) = 0$ имеет трехкратный корень. В этом случае при некотором $p \in \{1, \dots, m\}$ будет $\lambda_k^{(p)} = \lambda_k^{(m+1)} = \lambda_k^{(m+2)} \in \mathbb{R}$. Пусть $\nabla\eta$ — это второй присоединенный элемент к собственному элементу $\nabla\eta_k$ пучка $L(\lambda)$ в точке $\lambda_k^{(p)}$. Тогда $L''(\lambda_k^{(p)})\nabla\eta_k = g_k''(\lambda_k^{(p)})\nabla\eta_k = g_\infty''(\lambda_k^{(p)})\nabla\eta_k = 0$, $L'(\lambda_k^{(p)})\nabla\eta_k = g_k'(\lambda_k^{(p)})\nabla\eta_k = 0$ и

$$2^{-1}L''(\lambda_k^{(p)})\nabla\eta_k + L'(\lambda_k^{(p)})\nabla\eta_k + L(\lambda_k^{(p)})\nabla\eta =$$
$$= 2^{-1}g_\infty''(\lambda_k^{(p)})\nabla\eta_k + g_k'(\lambda_k^{(p)})\nabla\eta_k + L(\lambda_k^{(p)})u = L(\lambda_k^{(p)})\nabla\eta = 0.$$

Таким образом, в качестве второго присоединенного к $\nabla\eta_k$ элемента можно взять элемент $\nabla\eta_k$.

Вычислим в соответствии с леммой 5.1 первый η_1 и второй η_2 присоединенные элементы оператора $\mathcal{A}$. Легко проверить, что цепочкой из собственного и присоединенных к нему элементов будет также $\xi_{k0}^{(p)}$, $\xi_{k1}^{(p)} := \eta_1 - \xi_{k0}^{(p)}$, $\xi_{k2}^{(p)} := \eta_2 - \eta_1$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
\xi_{k0}^{(p)} &= \big(\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\big)^\tau \nabla\eta_k =: \varphi_{k0}^{(p)}\nabla\eta_k, \\
\xi_{k1}^{(p)} &= \big(\ 0; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-2}\mathcal{Q}\big)^\tau \nabla\eta_k =: \varphi_{k1}^{(p)}\nabla\eta_k, \\
\xi_{k2}^{(p)} &= \big(\ 0; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-3}\mathcal{Q}\big)^\tau \nabla\eta_k =: \varphi_{k2}^{(p)}\nabla\eta_k.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Далее будем считать, что система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ нормируется следующим образом. *Если собственный элемент не имеет присоединенного, то он выбирается по формуле из леммы* 5.1. *Если собственный элемент имеет один или два присоединенных элемента, то соответствующая цепочка выбирается по формуле* (5.12) *или* (5.13) *соответственно.*

Отметим, что собственных элементов оператора $\mathcal{A}$, имеющих один или два присоединенных элемента может быть лишь конечное количество.

Теорема 5.3. *Система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$, нормированных специальным образом, образует p-базис пространства $\mathcal{H}$ при $p > 3$.*

Доказательство. Покажем сначала, что система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ полна в $\mathcal{H}$. Рассмотрим для простоты ситуацию, когда у оператора $\mathcal{A}$ есть одно собственное значение $\lambda_s^{(p)}$, которому отвечает цепочка из собственного и одного или двух присоединенных элементов. Проведем доказательство в несколько этапов.

1. Пусть собственному значению $\lambda_s^{(m+2)}$ оператора $\mathcal{A}$ отвечает цепочка из собственного и присоединенного к нему элемента, определяемых по формулам (5.12). Предположим, что рассматриваемая система не полна в $\mathcal{H}$ и существует $\xi = (\nabla\varphi; \mathbf{u}_0; \mathbf{u}_1; \dots; \mathbf{u}_m)^\tau \in \mathcal{H}$ такой, что

$$\begin{aligned}
&\big(\xi_k^{(p)}, \xi\big)_{\mathcal{H}} = 0, \ \ p = \overline{1, m+2}, \ \ k = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, \\
&\big(\xi_s^{(p)}, \xi\big)_{\mathcal{H}} = 0, \ \ p = \overline{1, m}, \quad \big(\xi_{s0}^{(m+2)}, \xi\big)_{\mathcal{H}} = 0, \quad \big(\xi_{s1}^{(m+2)}, \xi\big)_{\mathcal{H}} = 0.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Первая строчка в (5.14) означает, что

$$M_k^\tau\big((\nabla\eta_k, \nabla\varphi)_{\mathbf{H}}; (\nabla\eta_k, \mathbf{u}_0)_{\mathbf{H}}; (\nabla\eta_k, \mathbf{u}_1)_{\mathbf{H}}; \dots; (\nabla\eta_k, \mathbf{u}_m)_{\mathbf{H}}\big)^\tau = 0 \quad (\mathbf{H} = \mathbf{G}(\Omega, \rho_0))$$

при $k = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots$ (см. лемму 5.3). Отсюда следует, что

$$(\nabla\eta_k, \nabla\varphi)_{\mathbf{H}} = (\nabla\eta_k, \mathbf{u}_0)_{\mathbf{H}} = \dots = (\nabla\eta_k, \mathbf{u}_m)_{\mathbf{H}} = 0, \quad k \in \mathbb{N}\backslash\{s\}. \tag{5.15}$$

Вторая строчка в (5.14) означает, что

$$M_{s,1}^\tau\big((\nabla\eta_s, \nabla\varphi)_{\mathbf{H}}; (\nabla\eta_s, \mathbf{u}_0)_{\mathbf{H}}; (\nabla\eta_s, \mathbf{u}_1)_{\mathbf{H}}; \dots; (\nabla\eta_s, \mathbf{u}_m)_{\mathbf{H}}\big)^\tau = 0 \quad (\mathbf{H} = \mathbf{G}(\Omega, \rho_0)),$$

где $M_{s,1} = M_{s,1}(\varphi_s^{(1)}, \varphi_s^{(2)}, \dots, \varphi_s^{(m)}, \varphi_{s0}^{(m+2)}, \varphi_{s1}^{(m+2)})$ — матрица, столбцами которой являются соответствующие векторы. Покажем, что $\det M_{s,1} \neq 0$, тогда из последней системы, соотношений (5.15) и полноты в $\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$ системы $\{\nabla\eta_k\}_{k=1}^\infty$ получим, что $\nabla\varphi = \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_1 = \dots = \mathbf{u}_m = 0$, т. е., $\xi = 0$.

Пусть, как и в лемме 5.2, $J = \operatorname{diag}(1, -I)$. Несложно проверить, что

$$\begin{gathered}
\big(J\varphi_{s0}^{(m+2)}, \varphi_{s0}^{(m+2)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = 0, \quad \big(J\varphi_{s0}^{(m+2)}, \varphi_{s1}^{(m+2)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = -\frac{1}{2}g_s''(\lambda_s^{(m+2)}) \neq 0, \\
\big(J\varphi_{s1}^{(m+2)}, \varphi_{s1}^{(m+2)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m+2)}).
\end{gathered} \tag{5.16}$$

Для дальнейших вычислений понадобится формула, которая может быть получена последовательным дифференцированием тождества Гильберта:

$$(\mathcal{G}-\lambda)^{-n}(\mathcal{G}-\mu)^{-1}=\frac{1}{(\mu-\lambda)^n}(\mathcal{G}-\mu)^{-1}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(\mu-\lambda)^{k+1}}(\mathcal{G}-\lambda)^{-(n-k)},\qquad \mu,\lambda\in\rho(\mathcal{G}),\quad n\in\mathbb{N}. \tag{5.17}$$

С использованием соотношений $g_s(\lambda_s^{(p)})=0$ $(p=\overline{1,m})$ (см. (5.6)), $g_s(\lambda_s^{(m+2)})=g_s'(\lambda_s^{(m+2)})=0$, формулы (5.17) при $n=2$, можно найти, что при всех $p=\overline{1,m}$

$$\begin{aligned}\big(J\varphi_s^{(p)},\varphi_{s1}^{(m+2)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}}&=-R_{s,p}\big((\mathcal{G}-\lambda_s^{(p)})^{-1}\mathcal{Q},(\mathcal{G}-\lambda_s^{(m+2)})^{-2}\mathcal{Q}\big)_{\mathbb{C}^{m+1}}=\\&=-R_{s,p}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\lambda_s^{(m+2)})^{-2}(\mathcal{G}-\lambda_s^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}=\\&=-R_{s,p}\mathcal{Q}^*\Big[\frac{(\mathcal{G}-\lambda_s^{(p)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m+2)})^2}-\frac{(\mathcal{G}-\lambda_s^{(m+2)})^{-2}}{\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m+2)}}-\frac{(\mathcal{G}-\lambda_s^{(m+2)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m+2)})^2}\Big]\mathcal{Q}=\\&=-R_{s,p}\Big[\frac{\lambda_s^{(p)}\lambda_k}{(\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m+2)})^2}-\frac{\lambda_k}{\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m+2)}}-\frac{\lambda_s^{(m+2)}\lambda_k}{(\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m+2)})^2}\Big]=0.\end{aligned} \tag{5.18}$$

Из (5.16) и (5.18) найдем, что

$$M_{s,1}^{\tau}JM_{s,1}=\begin{pmatrix}-g_s'(\lambda_s^{(1)})R_{s,1}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -g_s'(\lambda_s^{(2)})R_{s,2}^2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2!}g_s''(\lambda_s^{(m+2)})\\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2!}g_s''(\lambda_s^{(m+2)}) & -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m+2)})\end{pmatrix},$$

$$(-1)^{m+1}\big(\det M_{s,1}\big)^2=\det M_{s,1}^{\tau}JM_{s,1}=(-1)^{m+1}\Big[\frac{1}{2!}g_s''(\lambda_s^{(m+2)})\Big]^2\prod_{p=1}^{m}g_s'(\lambda_s^{(p)})R_{s,p}^2\neq 0.$$

Следовательно, $\det M_{s,1}\neq 0$.

2. Пусть теперь собственному значению $\lambda_s^{(p)}$ оператора $\mathcal{A}$ отвечает цепочка из собственного и двух присоединенных элементов, определяемых по формулам (5.13). Не ограничивая общности, можно считать, что $p=m$. Предположим, что система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ не полна в $\mathcal{H}$ и существует $\xi=(\nabla\varphi;\mathbf{u}_0;\mathbf{u}_1;\ldots;\mathbf{u}_m)^{\tau}\in\mathcal{H}$ такой, что

$$\begin{aligned}&\big(\xi_k^{(p)},\xi\big)_{\mathcal{H}}=0,\ \ p=\overline{1,m+2},\ \ k=1,2,\ldots,s-1,s+1,\ldots,\\&\big(\xi_s^{(p)},\xi\big)_{\mathcal{H}}=0,\ \ p=\overline{1,m-1},\quad \big(\xi_{s0}^{(m)},\xi\big)_{\mathcal{H}}=0,\quad \big(\xi_{s1}^{(m)},\xi\big)_{\mathcal{H}}=0,\quad \big(\xi_{s2}^{(m)},\xi\big)_{\mathcal{H}}=0.\end{aligned} \tag{5.19}$$

Первая строчка в (5.19), как и выше, влечет (5.15). Вторая строчка в (5.19) означает, что

$$M_{s,2}^{\tau}\big((\nabla\eta_s,\nabla\varphi)_{\mathbf{H}};(\nabla\eta_s,\mathbf{u}_0)_{\mathbf{H}};(\nabla\eta_s,\mathbf{u}_1)_{\mathbf{H}};\ldots;(\nabla\eta_s,\mathbf{u}_m)_{\mathbf{H}}\big)^{\tau}=0\quad(\mathbf{H}=\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)),$$

где $M_{s,2}=M_{s,2}(\varphi_s^{(1)},\ldots,\varphi_s^{(m-1)},\varphi_{s0}^{(m)},\varphi_{s1}^{(m)},\varphi_{s2}^{(m)})$ — матрица, столбцами которой являются соответствующие векторы. Покажем, что $\det M_{s,2}\neq 0$, тогда из последней системы, соотношений (5.15) и полноты в $\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)$ системы $\{\nabla\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ получим, как и выше, что $\nabla\varphi=\mathbf{u}_0=\mathbf{u}_1=\cdots=\mathbf{u}_m=0$ и, значит, $\xi=0$.

Несложно проверить, что

$$\begin{gathered}\big(J\varphi_{s0}^{(m)},\varphi_{s0}^{(m)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}}=0,\quad \big(J\varphi_{s0}^{(m)},\varphi_{s1}^{(m)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}}=0,\\ \big(J\varphi_{s0}^{(m)},\varphi_{s2}^{(m)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}}=\big(J\varphi_{s1}^{(m)},\varphi_{s1}^{(m)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}}=-\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)})\neq 0,\\ \big(J\varphi_{s1}^{(m)},\varphi_{s2}^{(m)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}}=-\frac{1}{4!}g_s^{(4)}(\lambda_s^{(m)}),\quad \big(J\varphi_{s2}^{(m)},\varphi_{s2}^{(m)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}}=-\frac{1}{5!}g_s^{(5)}(\lambda_s^{(m)}),\\ \big(J\varphi_s^{(p)},\varphi_{s1}^{(m)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}}=0,\quad p=1,2,\ldots,m-1.\end{gathered} \tag{5.20}$$

Здесь последнее соотношение выводится также как в (5.18). Далее, с использованием соотношений $g_s(\lambda_s^{(p)}) = 0$ $(p = \overline{1, m-1})$ (см. (5.6)), $g_s(\lambda_s^{(m)}) = g_s'(\lambda_s^{(m)}) = g_s''(\lambda_s^{(m)}) = 0$, формулы (5.17) при $n = 3$ можно найти, что при всех $p = \overline{1, m-1}$

$$\begin{aligned}
\big(J\varphi_s^{(p)}, \varphi_{s2}^{(m)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} &= -R_{s,p}\big((\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}, (\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-3}\mathcal{Q}\big)_{\mathbb{C}^{m+1}} = \\
&= -R_{s,p}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-3}(\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1}\mathcal{Q} = \\
&= -R_{s,p}\mathcal{Q}^*\Big[\frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^3} - \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-3}}{\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)}} - \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-2}}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^2} - \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^3}\Big]\mathcal{Q} = \\
&= -R_{s,p}\Big[\frac{\lambda_s^{(p)}\lambda_k}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^3} - \frac{\lambda_k}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^2} - \frac{\lambda_s^{(m)}\lambda_k}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m+2)})^3}\Big] = 0.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Из (5.20) и (5.21) найдем, что

$$M_{s,2}^{\tau}JM_{s,2} =$$

$$= \begin{pmatrix}
-g_s'(\lambda_s^{(1)})R_{s,1}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -g_s'(\lambda_s^{(2)})R_{s,2}^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)}) \\
0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)}) & -\frac{1}{4!}g_s^{(4)}(\lambda_s^{(m)}) \\
0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)}) & -\frac{1}{4!}g_s^{(4)}(\lambda_s^{(m)}) & -\frac{1}{5!}g_s^{(5)}(\lambda_s^{(m)})
\end{pmatrix},$$

$$(-1)^{m+1}\big(\det M_{s,2}\big)^2 = \det M_{s,2}^{\tau}JM_{s,2} = (-1)^{m-1}\Big[\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)})\Big]^3\prod_{p=1}^{m-1}g_s'(\lambda_s^{(p)})R_{s,p}^2 \neq 0.$$

Таким образом, $\det M_{s,2} \neq 0$, и система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ полна в $\mathcal{H}$.

3. Построим теперь, как и в теореме 5.2, оператор $\mathcal{S} \longleftrightarrow S_k := M_\infty^* M_k$ с заменой вырожденных матриц M_s на какие-либо невырожденные. При этом оператор $\mathcal{S}$ будет непрерывно обратим и по-прежнему представим в виде $\mathcal{S} = \mathcal{I} + \mathcal{T}$, где $\mathcal{T} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ $(p > 3)$, так как вырожденных матриц M_s может быть лишь конечное количество. Таким образом, система $\{\mathcal{S}\xi_{k,\infty}^{(p)}\}_{p=\overline{1,m+2},\, k\in\mathbb{N}}$ есть p-базис $(p > 3)$ пространства $\mathcal{H}$, который отличается от системы специальным образом нормированных корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ лишь на конечное количество элементов. Отсюда следует, что система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$, учитывая ее полноту, есть также p-базис $(p > 3)$ пространства $\mathcal{H}$. □

5.5. Построение биортогональной системы в невырожденном случае и представление решения исходной задачи.

В качестве следствия из леммы 5.2 и теоремы 5.2 сформулируем следующее утверждение.

Теорема 5.4. *Пусть* $g_k'(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ $(p = \overline{1, m+2},\ k \in \mathbb{N})$. *Тогда система*

$$\xi_k^{(p)} := R_{k,p}\big(\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\big)^{\tau}\nabla\eta_k, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$R_{k,p} := \begin{cases} \big[g_\infty'(\gamma_p)\big]^{-1/2}, & p = \overline{1, m}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \big[2\lambda_k\big]^{-1/2}, & p = m+1, m+2, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

собственных элементов оператора $\mathcal{A}$ образует p-базис пространства $\mathcal{H}$ при $p > 3$, согласно теореме 5.2, и имеет следующую биортогональную систему:

$$\zeta_k^{(p)} := -\big[g_k'(\overline{\lambda_k^{(p)}})R_{k,p}\big]^{-1}\big(\lambda_k^{1/2}; -(\mathcal{G} - \overline{\lambda_k^{(p)}})^{-1}\mathcal{Q}\big)^{\tau}\nabla\eta_k, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Теорема доказывается непосредственной проверкой. □

Будем разыскивать решение задачи (5.1) в виде разложения по базису, составленному из собственных элементов оператора $\mathcal{A}$:

$$\zeta(t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{m+2}C_k^{(p)}(t)\xi_k^{(p)},\quad C_k^{(p)}(0)=\big(\zeta^0,\zeta_k^{(p)}\big)_{\mathcal{H}}.$$

Отсюда и из (5.1) найдем, что

$$\zeta(t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{m+2}\bigg[e^{-\lambda_k^{(p)}t}\big(\zeta^0,\zeta_k^{(p)}\big)_{\mathcal{H}}+\int\limits_0^t e^{-\lambda_k^{(p)}(t-s)}\big(\zeta_{\rho^0}(s)+\mathcal{F}(s),\zeta_k^{(p)}\big)_{\mathcal{H}}\,ds\bigg]\xi_k^{(p)}. \tag{5.22}$$

Учитывая явный вид ζ^0, $\zeta_{\rho^0}(t)$, $\mathcal{F}(t)$ (см. (5.1)), (5.2) и теорему 5.4, найдем

$$\big(\zeta^0,\zeta_k^{(p)}\big)_{\mathcal{H}}=\frac{-\lambda_k^{1/2}(A^{-1})}{g_k'(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}}\bigg[\big(P_G\mathbf{u}^0,\nabla\eta_k\big)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}-\frac{\beta_0}{\lambda_k^{(p)}}\big(B^*\rho^0,\nabla\eta_k\big)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}\bigg], \tag{5.23}$$

$$\big(\zeta_{\rho^0}(t)+\mathcal{F}(t),\zeta_k^{(p)}\big)_{\mathcal{H}}=\frac{-\lambda_k^{1/2}(A^{-1})}{g_k'(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}}\bigg[\sum_{l=1}^{m}e^{-b_lt}\beta_l\big(B^*\rho^0,\nabla\eta_k\big)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}+\big(P_G\mathbf{f}(t),\nabla\eta_k\big)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}\bigg]. \tag{5.24}$$

Подставим (5.23), (5.24) в (5.22). После простых вычислений получим представление для решения задачи Коши (5.1):

$$\begin{aligned}\zeta(t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{m+2}\frac{-\lambda_k^{1/2}(A^{-1})}{g_k'(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}}\bigg[&e^{-\lambda_k^{(p)}t}\big(P_G\mathbf{u}^0,\nabla\eta_k(A)\big)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}+\\&+\bigg\{g_\infty(\lambda_k^{(p)})e^{-\lambda_k^{(p)}t}-\sum_{l=1}^{m}\frac{\beta_le^{-b_lt}}{b_l-\lambda_k^{(p)}}\bigg\}\big(B^*\rho^0,\nabla\eta_k(A)\big)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}+\\&+\int\limits_0^t e^{-\lambda_k^{(p)}(t-s)}\big(P_G\mathbf{f}(s),\nabla\eta_k(A)\big)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}\,ds\bigg]\xi_k^{(p)}.\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая вид $\zeta(t)$, $\xi_k^{(p)}$, связь (3.17) функций $u_0(t)$ и $\rho(t)$, найдем представление для решения $\nabla\varphi(t)$, $\rho(t)$ задачи (3.27) (в случае, когда $g=0$):

$$\begin{pmatrix}\nabla\varphi(t)\\ \rho(t)\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{m+2}T_k^{(p)}(t)\begin{pmatrix}\lambda_k^{-1/2}(A)\nabla\eta_k(A)\\ (\lambda_k^{(p)})^{-1}U\nabla\eta_k(A)\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}T_k^{(p)}(t):=\frac{-\lambda_k^{-1/2}(A)}{g_k'(\lambda_k^{(p)})}\bigg[&e^{-\lambda_k^{(p)}t}\big(\mathbf{u}^0,\nabla\eta_k(A)\big)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}+\\&+\bigg\{g_\infty(\lambda_k^{(p)})e^{-\lambda_k^{(p)}t}-\sum_{l=1}^{m}\frac{\rho_0k_le^{-b_lt}}{b_l(b_l-\lambda_k^{(p)})}\bigg\}\big(B^*\rho^0,\nabla\eta_k(A)\big)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}+\\&+\int\limits_0^t e^{-\lambda_k^{(p)}(t-s)}\big(\mathbf{f}(s),\nabla\eta_k(A)\big)_{\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)}\,ds\bigg],\end{aligned}$$

где $g_k(\lambda)$ и $g_\infty(\lambda)$ определены в (5.6).

Автор приносит благодарность проф. Н. Д. Копачевскому за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Авакян В. А.* Асимптотическое распределение спектра линейного пучка, возмущенного аналитической оператор-функцией// Функц. анализ и его прилож. — 1978. — *12*, № 2. — С. 66-67.
2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наукова думка, 1965.

3. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений// Итоги науки и техн. Сер. мат. анализ. — 1977. — *14*. — С. 5–58.
4. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.
5. *Закора Д. А.* Операторный подход к модели Ильюшина вязкоупругого тела параболического типа// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *57*. — С. 31–64.
6. *Закора Д. А.* Экспоненциальная устойчивость одной полугруппы и приложения// Мат. заметки. — 2018. — *103*, № 5. — С. 702–719.
7. *Звягин В. Г., Турбин М. В.* Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина—Фойгта// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *31*. — С. 3–144.
8. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
9. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
10. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
11. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.
12. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Т. 1. — М.: Наука, 1967.
13. *Оразов М. Б.* Некоторые вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов и связанные с ними задачи из механики// Дисс. докт. физ.-мат. наук (01.01.02). — Ашхабад, 1982.
14. *Радзиевский Г. В.* Квадратичный пучок операторов// Препринт. — Киев, 1976.
15. *Birman M. Sh., Solomjak M. Z.* Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space. — Dordrecht—Boston—Lancaser—Tokyo: D. Reidel Publ. Co., 1986.
16. *Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M. A.* Classes of linear operators. Vol. 1. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1990.
17. *Goldstein J. A.* Semigroups of linear operators and applications. — New York: Oxford University Press, 1989.
18. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Nonselfadjoint problems for viscous fluids. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2003.
19. *Ralston J. V.* On stationary modes in inviscid rotating fluids// J. Math. Anal. Appl. — 1973. — *44*. — С. 366–383.

Д. А. Закора
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, Симферополь, проспект Вернадского, 4;
Воронежский государственный университет,
394006, Воронеж, Университетская площадь, 1
E-mail: dmitry.zkr@gmail.com, dmitry_@crimea.edu

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-3-459-489 UDC 517.9:532

Operator Approach to the Problem on Small Motions of an Ideal Relaxing Fluid

© 2018 **D. A. Zakora**

Abstract. In this paper, we study the problem on small motions of an ideal relaxing fluid that fills a uniformly rotating or fixed container. We prove a theorem on uniform strong solvability of the corresponding initial-boundary value problem. In the case where the system does not rotate, we find an asymptotic behavior of the solution under the stress of special form. We investigate the spectral problem associated with the system under consideration. We obtain results on localization of the spectrum, on essential and discrete spectrum, and on spectral asymptotics. For nonrotating system in zero-gravity conditions we prove the multiple basis property of a special system of elements. In this case, we find an expansion of the solution of the evolution problem in the special system of elements.

REFERENCES

1. V. A. Avakyan, "Asimptoticheskoe raspredelenie spektra lineynogo puchka, vozmushchennogo analiticheskoy operator-funktsiey" [Asymptotic distribution of the spectrum of a linear pencil perturbed by an analytic operator-function], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1978, **12**, No. 2, 66-67 (in Russian).
2. Yu. M. Berezanskiy, *Razlozhenie po sobstvennym funktsiyam samosopryazhennykh operatorov* [Expansion in Eigenfunctions of Self-Adjoint Operators], Naukova dumka, Kiev, 1965 (in Russian).
3. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, "Asimptotika spektra differentsial'nykh uravneniy" [Asymptotics of the spectrum of differential equations], *Itogi nauki i tekhn. Ser. mat. analiz* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1977, **14**, 5–58 (in Russian).
4. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral'nyy analiz funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equations], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).
5. D. A. Zakora, "Operatornyy podkhod k modeli Il'yushina vyazkouprugogo tela parabolicheskogo tipa" [Operator approach to the Ilyushin model for a viscoelastic body of parabolic type], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **57**, 31–64 (in Russian).
6. D. A. Zakora, "Eksponentsial'naya ustoychivost' odnoy polugruppy i prilozheniya" [Exponential stability of one semigroup and applications], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2018, **103**, No. 5, 702–719 (in Russian).
7. V. G. Zvyagin and M. V. Turbin, "Issledovanie nachal'no-kraevykh zadach dlya matematicheskikh modeley dvizheniya zhidkostey Kel'vina—Foygta" [The study of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin–Voigt fluids], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **31**, 3–144 (in Russian).
8. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
9. N. D. Kopachevsky, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: evolyutsionnye i spektral'nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolution and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
10. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
11. A. S. Markus, *Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu polinomial'nykh operatornykh puchkov* [Introduction to Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils], Shtiintsa, Kishinev, 1986 (in Russian).
12. A. I. Markushevich, *Teoriya analiticheskikh funktsiy. T. 1* [Theory of Analytic Functions. Vol. 1], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
13. M. B. Orazov, "Nekotorye voprosy spektral'noy teorii nesamosopryazhennykh operatorov i svyazannye s nimi zadachi iz mekhaniki" [Some questions of spectral theory of nonself-adjoint operators and related problems of mechanics], *Doctoral Thesis*, Ashkhabad, 1982 (in Russian).
14. G. V. Radzievskiy, "Kvadratichnyy puchok operatorov" [Quadratic pencil of operators], *Preprint*, Kiev, 1976 (in Russian).
15. M. Sh. Birman and M. Z. Solomjak, *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space*, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht—Boston—Lancaser—Tokyo, 1986.
16. I. Gohberg, S. Goldberg, and M. A. Kaashoek, *Classes of Linear Operators. Vol. 1*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1990.
17. J. A. Goldstein, *Semigroups of Linear Operators and Applications*, Oxford University Press, New York, 1989.
18. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-Adjoint Problems for Viscous Fluids*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 2003.
19. J. V. Ralston, "On stationary modes in inviscid rotating fluids," *J. Math. Anal. Appl.*, 1973, **44**, 366–383.

D. A. Zakora
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia;
Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: dmitry.zkr@gmail.com, dmitry_@crimea.edu

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 3 (2018). С. 490–546

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-3-490-546 УДК 512.7

О ТЕОРИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ РАДИКАЛОВ

© 2018 г. **Э. В. КИССИН, Ю. В. ТУРОВСКИЙ, В. С. ШУЛЬМАН**

Светлой памяти Виктора Иосифовича Ломоносова

Аннотация. В работе обсуждаются основные направления и результаты теории топологических радикалов. Рассматриваются приложения к различным проблемам теории операторов и теории банаховых алгебр.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Классическая теория радикалов является частью теории не обязательно ассоциативных колец и алгебр. Построение конкретного радикала обычно связано с изучением того или иного свойства кольца и означает выделение в каждом кольце A некоторого фиксированного идеала J, обладающего этим свойством, причем наибольшего — в том смысле, что фактор-кольцо A/J идеалов с таким свойством уже не содержит (точные определения будут даны ниже).

Наша статья посвящена менее известному типу радикалов, а именно топологическим радикалам, которые определены на подходящих классах нормированных алгебр. Эти радикалы выделяют замкнутые идеалы в решетке идеалов нормированной алгебры. Первые примеры таких радикалов возникли в теории конечномерных алгебр; в классе банаховых алгебр радикал Джекобсона активно использовался задолго до аксиоматики топологических радикалов, данной Диксоном в статье [37]. Эта аксиоматика была дополнена в [37] чисто алгебраическим вариантом для радикалов на классах комплексных алгебр. Такие радикалы мы называем алгебраическими, они играют определенную роль в конструировании топологических радикалов из алгебраических и в вопросах продолжения некоторых топологических радикалов до алгебраических.

За 20 лет, которые прошли после выхода статьи [37], выяснилось, что теория топологических радикалов имеет взаимно плодотворные связи с такими разделами функционального анализа, как теория операторов, спектральная теория, теория инвариантных подпространств, теория банаховых алгебр, теория динамических систем и операторных полугрупп, теория операторных алгебр, теория представлений групп и алгебр Ли и др. Некоторые из полученных в результате такого взаимодействия результатов будут здесь представлены.

1.1. Структура работы. Во второй части введения кратко рассматриваются идеология и основные этапы развития общей теории радикалов.

В разделе 2 обсуждаются эвристические и логические связи этой теории с топологическими и алгебраическими радикалами. Этот раздел содержит новые конструкции и результаты.

Начиная с раздела 3, мы рассматриваем конкретные топологические радикалы банаховых алгебр, построенные с целью изучения тех или иных проблем анализа, и, разумеется, приводим результаты этого изучения. Сразу отметим, что самым известным примером топологического радикала на этом классе алгебр является радикал Джекобсона Rad; по определению, $\mathrm{Rad}(A)$ — пересечение ядер всех алгебраически неприводимых представлений алгебры A. Можно сказать, что он выделяет свойство не иметь неприводимых представлений, или свойство квазинильпотентности всех элементов алгебры; существуют и многие другие эквивалентные его описания. В теории банаховых алгебр под радикальностью обычно понимается свойство $\mathrm{Rad}(A) = A$; мы будем следовать этой традиции: радикальность без указания радикала означает радикальность в смысле Джекобсона.

В разделе 4 определяющей проблемой является вопрос об условиях непрерывности спектра и спектрального радиуса. Для его изучения строится *рассеянный радикал* $\mathcal{R}_s$, выделяющий класс алгебр, элементы которых имеют счетные спектры. Далее устанавливается ряд удобных свойств этого радикала и указываются приложения к проблеме непрерывности спектральных характеристик.

В разделе 5 рассматривается важная для широкого класса приложений характеристика семейства операторов (или элементов банаховой алгебры) — совместный спектральный радиус (ССР). Главной, остающейся пока нерешенной проблемой здесь является вопрос о равенстве нулю ССР конечного семейства элементов в произвольной радикальной банаховой алгебры. Этот вопрос весьма важен как для теории динамических систем, так и для теории операторов (в частности, теории инвариантных подпространств). Его решение при некоторых дополнительных условиях компактности обсуждается в разделе 7; в разделе 5 лишь строится весьма нетривиальная теория связанных с ССР радикальных отображений $\mathcal{R}_{fq}$, $\mathcal{R}_{cq}$ и $\mathcal{R}_{bq}$. Одно из этих трех отображений, а именно, $\mathcal{R}_{cq}$, является топологическим радикалом; этот радикал называется *компактно-квазинильпотентным*.

В теории банаховых алгебр остается до сих пор открытой следующая проблема: является ли радикальной алгеброй проективное тензорное произведение двух радикальных банаховых алгебр? Положительный ответ был получен лишь при условии, что одна из алгебр-сомножителей коммутативна (Б. Опти, [20]). Радикал $\mathcal{R}_t$, связанный с этой задачей (он называется *тензорным радикалом*) рассматривается в разделе 6, его конструкция схожа с конструкцией радикала $\mathcal{R}_{cq}$, с тем отличием, что роль ССР здесь играет так называемый ℓ_1-радиус. Доказано, что $\mathcal{R}_t$ занимает промежуточное положение между $\mathcal{R}_{cq}$ и Rad, что позволит нам впоследствии заключить, что проблема тензорного произведения решается положительно для алгебр, удовлетворяющих некоторым условиям компактности.

В разделе 7 вводится в рассмотрение радикал $\mathcal{R}_{hc}$, выделяющий свойство компактности операторов двустороннего умножения; он называется *гипокомпактным радикалом*. $\mathcal{R}_{hc}$-радикальные алгебры называются гипокомпактными, они характеризуются тем свойством, что во всех их фактор-алгебрах имеются компактные элементы, т. е., такие $a \in A$, что операторы $x \mapsto axa$ компактны. Именно для этого класса алгебр доказывается совпадение идеалов $\mathcal{R}_t(A)$, $\mathcal{R}_{cq}(A)$ и $\mathrm{Rad}(A)$. В доказательстве большую роль играют результаты теории инвариантных подпространств, и в частности, *техника Ломоносова*, созданная в удивительной работе В. И. Ломоносова [8]. В свою очередь, для доказательства некоторых из этих результатов существенно использовалась техника ССР.

Предметом рассмотрений раздела 8 является спектральная теория операторов умножения в банаховых и операторных бимодулях. Результаты разделов 6 и 7 позволили изучать спектры, следы и спектральные подпространства операторов умножения, среди коэффициентов которых «достаточно много» компактных операторов. Как следствие, здесь доказано, что все решения линейных операторных уравнений с «полукомпактными» коэффициентами принадлежат пересечению всех квазибанаховых операторных идеалов.

В разделе 9 мы продолжаем, используя результаты о тензорном радикале, изучать операторы умножения, но уже не на общих банаховых модулях, а на исходной алгебре (которой принадлежат коэффициенты уравнения). Одна из проблем, вокруг которых строится изложение — вопрос о существовании тотальной цепочки идеалов в радикальных банаховых алгебрах при условии компактности операторов двустороннего умножения (в общем случае неизвестно, имеет ли радикальная банахова алгебра хотя бы один нетривиальный идеал). В этом вопросе есть результаты «в обе стороны». Рассматриваются также условия, при которых спектры операторов умножения можно вычислять по естественным формулам через спектры их коэффициентов; это имеет место, например, для банаховых алгебр, порожденных энгелевыми алгебрами Ли.

Раздел 10 посвящен вопросу о способах вычисления ССР семейства операторов в терминах спектров этих элементов и ССР образа семейства в алгебре Калкина (фактор-алгебре алгебры всех операторов по идеалу компактных операторов). Соответствующее равенство обобщает формулу, полученную в 1992-м году Бергером и Вонгом [25] для семейств матриц. Мы получаем также аналогичную формулу для произвольной банаховой алгебры, причем роль идеала компактных операторов в ней исполняет гипокомпактный радикал. Далее результаты применяются для доказательства существования инвариантных подпространств для алгебр Ли компактных операторов, а также йордановых алгебр и других операторно-алгебраических систем.

В разделе 11 рассматриваются вопросы непрерывности совместного спектрального радиуса и аналог обобщенной формулы Бергера—Вонга для элементов C*-алгебр. Здесь роль гипокомпактного радикала играет максимальный GCR-идеал.

Разумеется, содержание разделов 4–11 данной работы можно рассматривать как обзор, однако оно не совсем укладывается в рамки обычного представления об обзорах, так как для некоторых ключевых результатов мы стараемся продемонстрировать схемы доказательств (например, предваряя их формулировки последовательностью вспомогательных утверждений). Кроме того, основные результаты, о которых пойдет речь, получены в сравнительно небольшом числе публикаций, принадлежащих авторам данной статьи, что сильно отличает ее от обзоров, которые авторам случалось читать и писать. Поэтому вернее было бы считать ее введением и приглашением в проблематику топологических радикалов. Тем вернее, что в большинстве разделов приводятся формулировки не решенных к настоящему времени проблем теории.

1.2. Возникновение и развитие теории радикалов. Не ставя целью детальность результатов, мы обсудим концепции аксиоматики радикалов и коснемся задач и проблем, приводящих к развитию теории радикалов.

Поскольку приложения касаются нормированных алгебр, естественно ограничиться при рассмотрении результатов не общими кольцами или алгебрами над коммутативно-ассоциативном кольцом, как это принято в *алгебре*, а обычными алгебрами над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. В этом разделе алгебры не предполагаются ассоциативными.

1.2.1. Результаты Веддерберна. Согласно [2], первые результаты в связи с радикалами алгебр были (в несколько ином виде) получены Вейерштрассом (1861). Усилия многих математиков с финальными аккордами от Веддерберна в конце 19-го века привели к следующим положениям: всякая конечномерная (комплексная) ассоциативная алгебра $\mathcal{A}$ разлагается в прямую сумму (как подпространств) *выделенного идеала* $\mathcal{I}$ и подалгебры $\mathcal{B}$, состоящей из прямой суммы матричных алгебр $\mathcal{B}_j \simeq \mathbb{M}_k(\mathbb{C})$. Этот *выделенный идеал* характеризуется свойством *нильпотентности*: существует $n \in \mathbb{N}$ такой, что $\mathcal{I}^n = 0$. Следует отметить, что среди $\mathcal{B}_j$ и их прямых сумм нет нильпотентных идеалов; более того, все $\mathcal{B}_j$ очевидно *просты* (т. е. у них нет идеалов кроме тривиальных, нулевого и себя), в то время как все идеалы, и даже подалгебры, идеала $\mathcal{I}$ не просты. Заметим, что в это время математиками вырабатывались понятия радикала, (полу)простоты и другие структурные понятия (такие, к примеру, как гомоморфизмы и мономорфизмы в трудах Нетер), а также (подчас различные) требования к радикалам. Использование этих понятий характеризует происшедшее *математическое открытие*, заключающееся в постулировании существования разложения.

Таким образом, как правило, с каждым радикалом можно связать *проблемную часть* (постановки проблем) и *математическое явление*, выражающееся в утверждениях о свойствах выявленного радикала. Вопросы и проблемы, разрешаемые с помощью теории радикалов, мы будем называть *структурными вопросами и проблемами*.

1.2.2. Аккумуляция свойства. Теория радикалов — это теория *выделенных,* точнее *отмеченных, идеалов*. Выделение идеала (или алгебры) происходит по некоторому признаку или свойству $\mathcal{P}$. В теории Веддерберна таким признаком является нильпотентность. Это свойство присуще (кольцам и) алгебрам, соответственно, оно переносится изоморфизмами алгебр: образ нильпотентного идеала нильпотентен.

Вот два других свойства, родственных нильпотентности. Алгебра называется *локально нильпотентной*, если нильпотентны все ее конечно порожденные подалгебры. Если же нильпотентны все элементы алгебры, то она называется *ниль-алгеброй*. Подчеркивая различие между нильпотентностью и локальной нильпотентностью, нильпотентные алгебры иногда называют *глобально нильпотентными*.

На примере теории Веддерберна очевидно, что выделенный идеал $\mathcal{I}$ алгебры $\mathcal{A}$ удовлетворяет свойству $\mathcal{P}$ так, что всякий другой идеал, также удовлетворяющий свойству $\mathcal{P}$, содержится в $\mathcal{I}$. С другой стороны, всякий идеал, собственно содержащий $\mathcal{I}$, уже не удовлетворяет данному свойству (полностью). Таким образом, $\mathcal{I}$ — наибольший идеал, удовлетворяющий свойству. Более того, фактор-алгебра $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ не содержит ненулевых идеалов, удовлетворяющих свойству $\mathcal{P}$.

1.2.3. Классический период развития радикалов ассоциативных алгебр. Этот период охватывает первую половину 20-го века. Попытки расширить теорию Веддерберна на бесконечномерные алгебры (и кольца, в частности, на кольца с условием минимальности) привели к появлению нескольких радикалов, сужение которых на конечномерные алгебры нильпотентно. Наиболее известны нижний ниль-радикал Бэра [23] (он строится с помощью специального процесса расширения из нильпотентных идеалов), локально нильпотентный радикал Левицкого [56] (он сопоставляет алгебре ее наибольший локально нильпотентный идеал), верхний ниль-радикал Кете [51] (наибольший ниль идеал). Со многими радикалами связаны структурные проблемы, конструкции, результаты. К примеру, *трансфинитный процесс Бэра* в работе Р. Бэра [23] оказался важным структурным элементом теории. Проблема различения радикалов Кете и Левицкого была положительно решена Е. С. Голодом [3]: существуют ненильпотентные конечнопорожденные ниль алгебры (заведомо бесконечномерные). Наиболее широкие применения не только в алгебре, но и в анализе нашел радикал Джекобсона [46]. Это, вообще говоря, не ниль-идеал, его важное место в теории определяется большим числом характеризаций, в то же время сужение его на конечномерные ассоциативные алгебры дает наибольший нильпотентный идеал.

1.2.4. Неассоциативные алгебры. Одновременно шло исследование выделенных идеалов в неассоциативных (кольцах и) алгебрах. Оказалось, что основная проблема структурной теории неассоциативных алгебр состоит в конкретной реализации и интерпретации явлений и понятий из теории ассоциативных алгебр, в то время как сами основные понятия теории радикалов не встречают принципиальных затруднений.

В теории конечномерных неассоциативных алгебр Альберт [13] построил отмеченный идеал, который называется *радикалом Альберта* и который является аналогом наибольшего нильпотентного идеала (см. также [42, гл. 7]).

В остальных случаях содержательные результаты были получены для классов алгебр определенной сигнатуры. В классах таких алгебр естественно действуют такие элементы структурной теории, как гомоморфизмы (см. по этому вопросу [5]).

С каждой неассоциативной алгеброй $\mathcal{A}$ можно связать ассоциативную алгебру $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$, порожденную в некотором смысле операторами умножения $\mathrm{L}_a : b \longmapsto ab$ и $\mathrm{R}_a : b \longmapsto ba$, $a \in \mathcal{A}$. Таким образом, существуют интересные задачи выявления структурных свойств алгебры $\mathcal{A}$ при наличии структурных или радикальных свойств $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ (см., например, работу А. Паласиоса [59]).

1.2.5. Структуры. Теорию радикалов ассоциируют со (и иногда прямо называют) *структурной теорией*. В нашей литературе структура часто обозначает *решетку*. Напомним, множество Q с частичным порядком $\leqslant$ называется *решеткой*, если для любой пары a, b элементов Q имеется наименьшая точная грань $a \vee b$ элементов, не меньших a и b, а также имеется наибольшая точная грань $a \wedge b$ элементов, не больших a и b.

Хороший пример решетки — это структура линейного оператора, т. е. решетка его инвариантных подпространств. Для оператора $T : X \longrightarrow X$ его решетка $\mathbf{lat}(T)$ инвариантных подпространств обладает свойством, что для всякого подмножества $M \subset \mathbf{lat}(T)$ существует наименьшая точная грань $\vee M$ элементов, не меньших любого элемента из M, а также имеется наибольшая точная грань $\wedge M$ элементов, не больших любого элемента из M. Одновременно, $\vee M$ есть наибольшая точная грань в $\mathbf{lat}(T)$ множества M, $\wedge M$ есть наименьшая точная грань в $\mathbf{lat}(T)$ множества M. Это свойство называется *полнотой решетки,* оно не зависит от того, имеет ли X топологию, является ли T ограниченным. Конкретно для решетки $\mathbf{lat}(T)$, подпространство $\vee M$ есть сумма подпространств из M, и $\wedge M$ есть пересечение подпространств из M. Аналогично, если $\mathcal{A}$ — алгебра, ее решетка $\mathbf{lat}_I(\mathcal{A})$ идеалов является *полной решеткой*.

Если T ограничен, $T \in \mathcal{B}(X)$, или $\mathcal{A}$ — нормированная алгебра, то возникают другие полные решетки: решетка $\mathbf{Lat}(T)$ замкнутых инвариантных подпространств и решетка $\mathbf{Lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$ замкнутых идеалов. Следует отметить, что $\mathbf{Lat}(T)$ — подмножество, но не подрешетка $\mathbf{lat}(T)$, и $\mathbf{Lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$ — подмножество, но не подрешетка $\mathbf{lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$. В самом деле, верхняя точная грань множества M в решетке $\mathbf{Lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$ есть замыкание в $\mathcal{A}$ суммы идеалов из M, которое в общем положении не совпадает с суммой идеалов из M.

1.2.6. Влияние Куроша на формирование общей теории радикалов. В 1953 году Курош опубликовал знаменитую статью [7], в которой, обобщая замеченное предшественниками, сформулировал следующее определение радикала.

Пусть $\mathfrak{U}$ — класс алгебр, замкнутый относительно взятия идеалов и гомоморфных образов, и пусть $\mathcal{P}$ — свойство алгебр из $\mathfrak{U}$; можно, к примеру, отождествить $\mathcal{P}$ с подклассом $\mathfrak{U}$. Алгебры из $\mathcal{P}$ удобно называть *$\mathcal{P}$-алгебрами*; идеал, являющийся $\mathcal{P}$-алгеброй, называется *$\mathcal{P}$-идеалом* алгебры; $\mathcal{P}$-идеал алгебры $\mathcal{A}$, который содержит всякий другой $\mathcal{P}$-идеал алгебры $\mathcal{A}$, называется *$\mathcal{P}$-радикалом* алгебры $\mathcal{A}$; алгебра $\mathcal{A}$ называется *$\mathcal{P}$-полупростой*, если она не содержит ненулевых $\mathcal{P}$-идеалов. Отображение $\mathcal{P} : \mathcal{A} \longmapsto \mathcal{P}(\mathcal{A}) \in \mathbf{lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$ для $\mathcal{A} \in \mathfrak{U}$ называется *$\mathcal{P}$-радикалом в* $\mathfrak{U}$, если $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ есть наибольший $\mathcal{P}$-идеал алгебры $\mathcal{A}$, т. е. он — $\mathcal{P}$-радикал алгебры $\mathcal{A}$, фактор-алгебра $\mathcal{A}/\mathcal{P}(\mathcal{A})$ $\mathcal{P}$-полупроста и всякий гомоморфный образ $\mathcal{P}$-алгебры есть $\mathcal{P}$-алгебра. При этом всякая $\mathcal{P}$-алгебра называется *$\mathcal{P}$-радикальной*.

Про эти радикалы обычно говорят, что они — *типа Амицура—Куроша*, или просто *типа Куроша*. В статье Курош упоминает влияние работ Амицура [15] и Андрунакиевича [1]. Амицур в своей работе строит теорию радикалов в абстрактных полных решетках и применяет общую схему к радикалам колец. Об этом мы расскажем ниже. На основе аксиоматики, данной Курошем, написаны монографии [2, 5, 42, 76] по теории радикалов колец и алгебр. Многочисленные статьи, указанные в библиографии этих книг, используют (не всегда подчеркивая это) радикалы типа Куроша.

Важно, что радикал типа Куроша можно задавать, указывая класс полупростых алгебр или класс радикальных алгебр.

1.2.7. Диксон и топологические радикалы. Топологические радикалы — это радикалы классов нормированных алгебр, специализированные под обслуживание нормированных алгебр. Примером для топологических рассмотрений могут служить конечномерные алгебры, которые автоматически нормированы, и в этом классе наибольший нильпотентный идеал играет роль конкретного топологического радикала. Поскольку фактор-алгебра по радикалу должна быть нормированной, топологический радикал нормированной алгебры очевидно замкнут. Казалось бы, добавляя требование замкнутости радикала к аксиомам Куроша и предполагая гомоморфизмы непрерывными, можно получить аксиомы топологических радикалов. Однако возникают некоторые несоответствия между классами определения радикалов и взятием гомоморфных образов. К тому ведет, например, простое наблюдение: гомоморфные образы C*-алгебр выходят за пределы C*-алгебр, и, как следствие, трудно удовлетворительно строить структурную теорию C*-алгебр в рамках радикалов типа Куроша.

В 1997 году П. Диксон в работе [37] предложил модификацию аксиом как для топологических, так и для алгебраических радикалов. Некоторые уточнения аксиом в случае произвольных классов нормированных алгебр были даны в работе [75, см. замечание 2.2]. Суть изменений с учетом [75] такова, что в топологическом случае вместо гомоморфных образов лучше брать изоморфные образы относительно непрерывных в обе стороны изоморфизмов. Этого достаточно (и необходимо) для существования изоморфизма радикалов нормированных алгебр при наличии изоморфизма топологических свойств. Существование изоморфизма радикалов при непрерывном, но не открытом изоморфизме, как предлагал Диксон в своей работе 1997 г., — условие более жесткое (и, как показывает исследовательская практика, ограничительное).

1.2.8. Сравнение радикалов. Система аксиом топологических и алгебраических радикалов представлена ниже. В любой системе аксиом для радикалов есть «абсолютная часть», характеризующая наиболее емко суть выделения идеалов и независимая от топологических или алгебраических рассмотрений. Это

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{A})) = \mathcal{P}(\mathcal{A}), \tag{1.1}$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}/\mathcal{P}(\mathcal{A})) = 0 \tag{1.2}$$

для любой алгебры $\mathcal{A} \in \mathfrak{U}$. Соотношение (1.1) есть следствие аксиомы о радикале алгебры для радикалов типа Куроша, в теории топологических и алгебраических радикалов соотношение (1.1) есть прямая аксиома. В то же время соотношение (1.2) отражено аксиомой в любой системе для радикалов. В системе аксиом для топологических и алгебраических радикалов, кроме того, что радикал алгебры — наибольший выделенный идеал, постулируется, что *радикал идеала есть идеал алгебры.* Это выглядит сильнее, чем аналогичное условие для радикалов типа Куроша, однако не является основанием для сравнения радикалов разного назначения в силу того, что области определения этих радикалов, вообще говоря, разные (вспомним хотя бы пример с C*-алгебрами, разобранный выше).

2. Полные решетки и радикалы

2.1. Определения. Радикалы типа Амицура—Куроша оказались крепко спаяны с именами выдающихся исследователей тем обстоятельством, что аксиоматика радикалов алгебр и колец, данная Курошем, удовлетворяет *схеме Амицура* для полных решеток, когда вместо абстрактных полных решеток рассматриваются решетки $\mathbf{lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$ для произвольных (колец и) алгебр $\mathcal{A}$. Одна из целей этого раздела — показать, что аксиоматика топологических и алгебраических радикалов и схема Амицура также тесно связаны. Теория Амицура радикалов полных решеток в определенном смысле независима как от аксиоматики Куроша для радикалов колец и алгебр, так и от аксиоматики топологических и алгебраических радикалов. Мы начнем с точного определения топологических и алгебраических радикалов алгебр.

2.1.1. Классы [нормированных] алгебр. При параллельном рассмотрении алгебраической и топологической обстановки одновременно нам удобно добавлять необходимые уточняющие спецификации в квадратных скобках. Например, выражение «классы [нормированных] алгебр» означает, что в топологическом контексте выделены классы нормированных алгебр, тогда как в алгебраическом контексте слово «нормированных» не имеет смысла и соответственно опускается. Очевидны определенные требования, которыми должны обладать классы [нормированных] алгебр, чтобы быть полноценными областями задания [топологических] радикалов. Класс $\mathfrak{U}$ нормированных алгебр называется *основным,* если он замкнут относительно взятия замкнутых идеалов и фактор-алгебр по замкнутому идеалу. Основной класс называется *универсальным*, если он замкнут относительно взятия идеалов. Например, класс банаховых алгебр является основным, а класс всех нормированных алгебр — универсальным.

2.1.2. Морфизмы классов. При рассмотрении радикалов алгебр можно считать, хотя это не является необходимым, что мы находимся в соответствующих категориях алгебр. Мы используем термин «морфизм» для обозначения эпиморфизма в алгебраическом контексте и открытого непрерывного эпиморфизма в топологическом случае.

2.1.3. Топологические и алгебраические радикалы алгебр. Пусть задан основной или универсальный класс $\mathfrak{U}$ [нормированных] алгебр. [*Топологический*] *радикал* $\mathcal{P}$ — это отображение, заданное на $\mathfrak{U}$, сопоставляющее каждой алгебре $\mathcal{A} \in \mathfrak{U}$ ее [замкнутый] идеал $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, и удовлетворяющее следующим условиям:

Аксиома 1. $f(\mathcal{P}(\mathcal{A})) \subset \mathcal{P}(f(\mathcal{A}))$ *для всякого морфизма* $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *алгебр из* $\mathfrak{U}$.

Аксиома 2. $\mathcal{P}(\mathcal{A}/\mathcal{P}(\mathcal{A})) = 0$.

Аксиома 3. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{A})) = \mathcal{P}(\mathcal{A})$.

Аксиома 4. $\mathcal{P}(\mathcal{I})$ — *идеал в* $\mathcal{A}$, *содержащийся в* $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, *для любого идеала* $\mathcal{I} \in \mathfrak{U}$ *алгебры* $\mathcal{A} \in \mathfrak{U}$.

Отметим, что в случае нормированных алгебр Диксон в аксиоме 4 предполагал идеал $\mathcal{I}$ замкнутым в алгебре $\mathcal{A}$. Мы нашли это условие идеала слишком ограничительным. Например, аксиома 4 перестает быть при этом условии естественной, когда топологический радикал определен на универсальном классе. Более того, [75, теорема 3.1] дополняет построение структурных конструкций, описанных в [37, следствие 6.12], на случай незамкнутых идеалов в аксиоме 4.

2.1.4. Предрадикальные отображения. Для построения радикалов часто используются отображения на $\mathfrak{U}$, которые лишь частично удовлетворяют аксиомам.

Если $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ — [замкнутый] идеал в $\mathcal{A}$ для любой алгебры $\mathcal{A}$ из класса $\mathfrak{U}$ [нормированных] алгебр, то отображение $\mathcal{P}$, удовлетворяющее аксиоме 1, называется [*топологическим*] *предрадикалом* на $\mathfrak{U}$. Если [топологический] предрадикал $\mathcal{P}$, удовлетворяет всем аксиомам, кроме аксиомы 2, то $\mathcal{P}$ называется [*топологическим*] *подрадикалом*. Симметрично, если [топологический] предрадикал $\mathcal{P}$, удовлетворяющий всем аксиомам кроме аксиомы 3, то $\mathcal{P}$ называется [*топологическим*] *надрадикалом*. Последние два отображения были введены Диксоном в [37] для (трансфинитных) процедур построения [топологических] радикалов.

2.1.5. Амицур и его общая теория радикалов. В 1953 году Амицур опубликовал статью [15], где было введено понятие радикала на абстрактной полной решетке. Эта работа вместе с работами [16, 17] оказала огромное влияние на развитие теории радикалов различных алгебраических систем. Толчком к рассмотрению радикалов в полных решетках явилась работа Брауна и МакКоя [28] о радикалах в группах. Большую роль в формировании общей теории сыграл трансфинитный метод Бэра в конструкции нижнего ниль-радикала в [23].

В основе рассмотрений Амицура — полная решетка Q с порядком $\leqslant$. Если $\mathcal{A}$ — алгебра, то в качестве Q мы рассматриваем полную решетку $\mathbf{lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$ всех идеалов алгебры $\mathcal{A}$ относительно включения $\subset$, т. е. включение играет роль порядка. При этом наибольшую точную грань $\vee M$ множества $M \subset \mathbf{lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$ идеалов играет сумма $\sum\limits_{I \in M} I$ идеалов из M, а наименьшую точную грань $\wedge M$ — пересечение $\bigcap\limits_{I \in M} I$ идеалов из M.

2.1.6. Выделение по свойству. Пусть $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$ — множество всех рефлексивных отношений $\ll$ на полной решетке $(Q, \leqslant)$, которые *строже* отношения $\leqslant$. Это означает, что

$$a \ll b \text{ влечет } a \leqslant b \tag{2.1}$$

для произвольных $a, b \in Q$.

Для $Q = \mathbf{lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$ отношение $a \ll b$ влечет, в силу (2.1), тот факт, что идеал b содержит идеал a. Удобно считать, что $a \ll b$ выражает некоторое свойство $\mathcal{P}$ пары a и b. Мы интерпретируем это свойство как *выделенное свойство*, присущее фактор-алгебре b/a. Иными словами, b/a есть $\mathcal{P}$-*алгебра* (или $\mathcal{P}$ *-радикальная) алгебра* :

$$a \ll b \text{ это то же самое, что } b/a = \mathcal{P}(b/a). \tag{2.2}$$

Заметим, что свойство $\mathcal{P}$, возникающее между идеалами a и b решетки $\mathbf{lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$, записывается как свойство в полной решетке $\mathbf{lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A}/a)$. Напомним, что алгебра $\mathcal{A}$ $\mathcal{P}$-*полупроста*, если $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = 0$. В этом смысле говорят о «полупростом» свойстве $\mathcal{P}$, которое *полностью не присутствует* между идеалами a и b: $\mathcal{P}(b/a) = 0$.

2.1.7. **H**-*отношения.* Амицур назвал отношение $\ll$ из $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$ **H**-*отношением,* если

$$a \ll b \text{ и } a \leqslant c \text{ влекут } c \ll b \vee c \tag{2.3}$$

для произвольных $a, b, c \in Q$.

Для $Q = \mathbf{lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$ условие (2.3) можно переписать так: для идеалов a, b, c

$$a \subset c \text{ и } b/a = \mathcal{P}(b/a) \text{ влекут } (b+c)/c = \mathcal{P}((b+c)/c).$$

В то же время для $Q = \mathbf{Lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$ условие (2.3) переписывается как

$$a \subset c \text{ и } b/a = \mathcal{P}(b/a) \text{ влекут } \overline{b+c}/c = \mathcal{P}\left(\overline{b+c}/c\right).$$

2.2. Топологические (пред)радикалы индуцируют H-отношения. Рассмотрим важные примеры **H**-отношений.

Предложение 2.1. *Пусть P — [топологический] предрадикал в $\mathfrak{U}$. Для любой алгебры $\mathcal{A} \in \mathfrak{U}$ P индуцирует* **H**-*отношение $\ll$ [в $\mathbf{Lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$] по правилу*

$$I \ll J, \textit{ если } I \subset J \textit{ и } J/I = P(J/I).$$

Доказательство. Пусть $I, J, K \in \mathbf{lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$, $I \subset J$, $I \subset K$, $J/I = P(J/I)$.

Предположим, что P — алгебраический радикал. Положим $M = J + K$ и $f : J/I \longrightarrow M/K$ — стандартный морфизм. Тогда $f(J/I) = f(P(J/I)) \subset P(M/K)$ по аксиоме 1. Но $f(J/I) = M/K$, поэтому $M/K = P(M/K)$.

Пусть теперь P — топологический радикал и $I, J, K \in \mathbf{Lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$. При $M = \overline{J+K}$ получим $f(J/I) = f(P(J/I)) \subset P(M/K)$. Но образ $f(J/I)$ плотен в M/K, отсюда $P(M/K)$ плотен в M/K. Значит, $P(M/K) = M/K$. □

Важный смысл этого предложения в том, что многие утверждения, известные об **H**-отношениях, могут с успехом интерпретироваться для топологических и алгебраических радикалов, и даже для предрадикалов.

2.2.1. Дополнения отношения. Следуя Амицуру, для любого $\ll$ из $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$ определим *нижнее дополнение* $\overrightarrow{\lessdot}$ из $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$ и *верхнее дополнение* $\overleftarrow{\lessdot}$ из $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$ следующим образом: для $a \leqslant b$ положим

$$a \overrightarrow{\lessdot} b, \text{ если } [a, \ll] \cap [a, b] = \{a\}\,; \; a \overleftarrow{\lessdot} b, \text{ если } [\ll, b] \cap [a, b] = \{b\}\,, \tag{2.4}$$

где $[a, b] = \{x \in Q : a \leqslant x \leqslant b\}$, $[a, \ll] = \{x \in Q : a \ll x\}$, $[\ll, b] = \{x \in Q : x \ll b\}$.

Для $Q = \mathbf{lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$ интерпретация дополнений в терминах выделенного свойства $\mathcal{P}$ (см. (2.2)) достаточно элементарна. Действительно, $a \overrightarrow{\lessdot} b$ означает, что алгебра x/a $\mathcal{P}$-полупроста для любого идеала x, удовлетворяющего цепочке $a \subset x \subset b$; в то время как $a \overleftarrow{\lessdot} b$ — что b/x $\mathcal{P}$-полупроста для любого идеала x, удовлетворяющего цепочке $a \subset x \subset b$.

2.2.2. Радикалы полных решеток и отношений. Пусть $\ll$ — это какое-либо отношение из $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$. Пишем $\mathbf{0}$ или $\mathbf{0}_Q$ в качестве $\wedge Q$ и $\mathbf{1}$ или $\mathbf{1}_Q$ в качестве $\vee Q$. Элемент $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\ll} \in Q$ называется $\ll$-*радикалом* в Q или *радикалом отношения* $\ll$ в Q, если выполнена цепочка

$$\mathbf{0} \ll \mathbf{r} \overleftarrow{\lessdot} \mathbf{1}. \tag{2.5}$$

Аналогично, элемент $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{\ll} \in Q$ называется *дуальным* $\ll$-*радикалом* в Q или *дуальным радикалом отношения* $\ll$ в Q, если выполнена цепочка

$$\mathbf{0} \overrightarrow{\lessdot} \mathbf{p} \ll \mathbf{1}. \tag{2.6}$$

Для $Q = \mathbf{lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$ мы увидим из соотношения (2.5), что $\mathbf{r}$ — $\mathcal{P}$-идеал (свойство $\mathcal{P}$ между идеалами a и b означает как обычно $a \ll b$), в то время как алгебра $\mathcal{A}/x$ $\mathcal{P}$-полупроста для любого идеала x, удовлетворяющего $\mathbf{r} \leqslant x$.

Произвольное отношение может иметь разное количество радикалов, вплоть до пустого множества.

2.2.3. Элементарные отношения и $\mathbf{R}$*-порядки.* Суть рассмотрения элементарных отношений — это то обстоятельство, что с их помощью можно выбрать отношения с разным букетом свойств, в том числе $\mathbf{H}$-отношения и дуальные $\mathbf{H}$-отношения.

Отношение $\ll$ из $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$ называется *примыкающим сверху*, если $a \ll b$ влечет $[a, b] \subset [\ll, b]$ для всех $a, b \in Q$; *сбалансированным сверху*, если $a \wedge b \ll b$ влечет $a \ll a \vee b$ для всех $a, b \in Q$; *расширенным сверху,* если $[a, \ll]$ $\vee$-полно для всех $a \in Q$.

Напомним, $\vee$*-полнота* множества $G \subset Q$ означает, что $G = G^{\vee} := \{\vee M : M \subset G\}$; G $\wedge$*-полно в* Q, если $G = G^{\wedge} := \{\wedge M : M \subset G\}$, и *полно в* Q, если $G = G^{\vee} = G^{\wedge}$.

Легко видеть, что $\mathbf{H}$-отношения — это в точности примыкающие и сбалансированные сверху отношения из $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$. Другая важная характеристика: отношение $\ll$ из $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$ является $\mathbf{H}$-отношением тогда и только тогда, когда $a \ll b$ влечет $a \vee x \ll b \vee x$ для всех $a, b, x \in Q$.

Если $\mathbf{H}$-отношение транзитивно, то оно называется $\mathbf{H}$*-порядком.* Расширенный сверху $\mathbf{H}$-порядок называется $\mathbf{R}$*-порядком.*

$\mathbf{R}$-порядки были (иным, но эквивалентным способом) введены Амицуром [15], назвавшим их $\mathbf{R}$-отношениями.

2.2.4. Двойственность. Двойственной решеткой $(Q^{\circ}, \leqslant^{\circ})$ к $(Q, \leqslant)$ называется решетка Q°, совпадающая с Q как множество, с противоположно определенным отношением: $b \leqslant^{\circ} a$, если только $a \leqslant b$, для всех $a, b \in Q$. Если $(Q, \leqslant)$ — полная решетка, то $(Q^{\circ}, \leqslant^{\circ})$ тоже.

Двойственность заключается в равенстве $(Q^{\circ\circ}, \leqslant^{\circ\circ}) = (Q, \leqslant)$. Если $\ll$ из $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$, то противоположно определенное отношение $\ll^{\circ}$ также из $\mathrm{Ref}(Q^{\circ}, \leqslant^{\circ})$. Отношение $\ll$ определим *примыкающим снизу, сбалансированным снизу, расширенным снизу*, если $\ll^{\circ}$ обладает соответствуюшим свойством *сверху*. Таким образом, $\ll$ примыкает снизу, если $a \ll b$ влечет $[a, b] \subset [a, \ll]$ для всех $a, b \in Q$; сбалансировано снизу, если $a \ll a \vee b$ влечет $a \wedge b \ll b$ для всех $a, b \in Q$; расширено снизу, если $[\ll, a]$ $\wedge$-полно для всех $a \in Q$.

Аналогично, через двойственные решетки, определяются «двойственные» понятия: *дуальные* $\mathbf{H}$-отношения, $\mathbf{H}$-порядки, $\mathbf{R}$-порядки.

Согласно принципу двойственности, двойственно формулируемые результаты для $\ll$ в $(Q, \leqslant)$ следуют из соответствующих «прямых» результатов для $\ll^{\circ}$ в $(Q^{\circ}, \leqslant^{\circ})$.

2.2.5. Радикалы $\mathbf{H}$*-отношений и* $\mathbf{R}$*-порядков.* Важность этих и вводимых ниже понятий заключается в рассмотрении условий (2.5) и (2.6), когда $\ll$ является $\mathbf{H}$-отношением или дуальным $\mathbf{H}$-отношением. Амицур [15] показал, что (дуальное) $\mathbf{H}$-отношение может иметь не более одного (дуального) радикала; существование же (дуальных) радикалов доказано лишь для (дуальных) $\mathbf{R}$-порядков.

Если $\ll$ есть $\mathbf{H}$-отношение, то $\overleftarrow{\ll}$ есть дуальный $\mathbf{R}$-порядок; если $\ll$ является дуальным $\mathbf{H}$-отношением, то $\overrightarrow{\ll}$ есть $\mathbf{R}$-порядок. Таким образом, мы очевидно получаем, что для радикала $\mathbf{r}$ $\mathbf{H}$-отношения $\ll$, если он существует, выполнено условие

$$\mathbf{0} \overrightarrow{\overleftarrow{\ll}} \mathbf{r} \overleftarrow{\ll} \mathbf{1}, \tag{2.7}$$

при этом $\mathbf{r}$ как радикал отношения $\overrightarrow{\overleftarrow{\ll}}$ существует; для дуального радикала $\mathbf{p}$ дуального $\mathbf{H}$-отношения $\ll$, если он существует, верно

$$\mathbf{0} \overrightarrow{\ll} \mathbf{p} \overleftarrow{\overrightarrow{\ll}} \mathbf{1}, \tag{2.8}$$

при этом $\mathbf{p}$ как дуальный радикал отношения $\overleftarrow{\overrightarrow{\ll}}$ существует. Важно отметить, что $\mathbf{r}$ можно рассматривать как дуальный радикал отношения $\overleftarrow{\ll}$, и $\mathbf{p}$ как радикал отношения $\overrightarrow{\ll}$. В этом проявляется *двойственная природа* радикалов и дуальных радикалов отношений.

2.2.6. Арифметика правых и левых дополнений. Можно ожидать наличия дополнительных удобных свойств у отношения $\overleftarrow{\ll}$ (или $\overrightarrow{\ll}$) для обычных отношений $\ll$ из $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$. Действительно, $\overleftarrow{\ll}$ очевидным образом *примыкает сверху*, и множество $[a, \overleftarrow{\ll}]$ $\wedge$-полно для любого $a \in Q$.

Еще более важными свойствами обладает отношение $\overrightarrow{\overleftarrow{\ll}}$. Множество G в Q называется *нижним* $\ll$*-множеством*, если каждый элемент $x \in G \setminus \{\wedge G\}$ имеет $\ll$-предшествующий элемент $y \in G$, т. е. такой, что $x \neq y$ и $y \ll x$. Двойственно определяются верхние $\ll$-множества.

Определим $a \ll^{\mathrm{lo}} b$, если $[a,b]$ — нижнее $\ll$-множество; $a \ll^{\mathrm{up}} b$, если $[a,b]$ — верхнее $\ll$-множество. Оказывается, что $\overset{\rightleftarrows}{\ll} = \ll^{\mathrm{up}}$ и $\overset{\leftrightarrows}{\ll} = \ll^{\mathrm{lo}}$, и на втором шаге наступает стабилизация:

$$\ll^{\mathrm{up}} = (\ll^{\mathrm{up}})^{\mathrm{up}}, \qquad \ll^{\mathrm{lo}} = \left(\ll^{\mathrm{lo}}\right)^{\mathrm{lo}}. \tag{2.9}$$

Смысл этих отношений в том, что, имея их в распоряжении, легко строить убывающие или возрастающие трансфинитные последовательности (от какого-то элемента, чаще всего от $\mathbf{0}$ или $\mathbf{1}$) до радикалов и дуальных радикалов отношений с выделенным свойством между элементами.

2.2.7. Цепи. Напомним, что *цепью* в решетке Q называют всякое тотально упорядоченное подмножество в Q (в такой цепи либо $a \leqslant b$, либо $b \leqslant a$ для всех a, b). Под цепью C от a до b понимаем цепь, в которой $a = \wedge C$ и $b = \vee C$; такую цепь называют *нижней $\ll$-разрывной цепью*, если каждый элемент $x \in C \setminus \{a\}$ имеет непосредственно $\ll$-предшествующий элемент $y \in C$, т. е. такой, что $y \ll x$ и $[y,x] \cap C = \{y,x\}$. Двойственным образом определяются *верхние $\ll$-разрывные цепи*.

Наиболее важны цепи, обладающие той или иной степенью полноты. Так, если $\wedge$-полная нижняя $\ll$-разрывная цепь C содержит $\vee C$, то она полна. Полная нижняя $\ll$-разрывная цепь есть в иных терминах *убывающий композиционный $\ll$-ряд* (*убывающая трансфинитная $\ll$-последовательность*) $(x_\alpha)_{1 \leqslant \alpha \leqslant \gamma}$ от $x_1 = b$ до $x_\gamma = a$ с правилом $x_{\alpha+1} \ll x_\alpha$ для любого ординала $\alpha < \gamma$ и $x_\beta = \wedge_{\alpha<\beta}\{x_\alpha\}$ для любого предельного ординала $\beta \leqslant \gamma$. Также, полная верхняя $\ll$-разрывная цепь есть *возрастающий композиционный $\ll$-ряд* (*возрастающая трансфинитная $\ll$-последовательность*) $(x_\alpha)_{1 \leqslant \alpha \leqslant \gamma}$ от $x_1 = a$ до $x_\gamma = b$ с правилом $x_\alpha \ll x_{\alpha+1}$ для любого ординала $\alpha < \gamma$ и $x_\beta = \vee_{\alpha<\beta}\{x_\alpha\}$ для любого предельного ординала $\beta \leqslant \gamma$.

Для $\ll$ из $\mathrm{Ref}(Q,\leqslant)$ определим отношения $\ll^{\triangleleft}$ и $\ll^{\triangleright}$ из $\mathrm{Ref}(Q,\leqslant)$, полагая $a \ll^{\triangleleft} b$, если найдется полная нижняя $\ll$-разрывная цепь C от a до b, и $a \ll^{\triangleright} b$, если найдется полная верхняя $\ll$-разрывная цепь C от a до b. Можно показать, что если $\ll$ является $\mathbf{H}$-отношением, то

$$\ll^{\mathrm{up}} = \ll^{\triangleright} = (\ll^{\triangleright})^{\triangleright} \text{ есть } \mathbf{R}\text{-порядок и}$$

$$\overleftarrow{\ll} = \overleftarrow{\ll^{\triangleright}} = (\overleftarrow{\ll})^{\triangleleft} = (\overleftarrow{\ll})^{\mathrm{lo}} \text{ есть дуальный } \mathbf{R}\text{-порядок,}$$

причем $\ll$ является на деле $\mathbf{R}$-порядком тогда и только тогда, когда $\ll = \ll^{\triangleright}$.

2.2.8. Радикалы полных подрешеток. Можно показать, что если $\ll$ есть *расширенный сверху порядок*, то $\mathbf{r} = \vee [\mathbf{0}, \ll]$ есть $\ll$-радикал в Q; если к тому же $\ll$ *примыкает сверху,* то $\mathbf{r}$ — единственный в Q $\ll$-радикал. Тогда при этих условиях для любого $a \in Q$ существует единственный $\ll$-радикал $\mathbf{r}_{\ll}(a) := \mathbf{r}(a)$ в *подрешетке* $[a, \mathbf{1}]$,

$$a \ll \mathbf{r}(a) \overleftarrow{\ll} \mathbf{1}, \tag{2.10}$$

причем $\mathbf{r}(a) = \vee [a, \ll]$ есть наибольший элемент в $[a, \ll]$, $\mathbf{r}(\mathbf{r}(a)) = \mathbf{r}(a)$ и $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ при $a \ll b$ или при $a \leqslant b \leqslant \mathbf{r}(a)$. Если вдобавок $\ll$ примыкает снизу, то $[a, \ll]$ есть просто весь отрезок $[a, \mathbf{1}]$.

Итак, если $\ll$ есть *расширенный сверху и примыкающий сверху порядок*, то радикал $\mathbf{r}_{[\mathbf{0},x]}$ отношения $\ll$ в отрезке $[\mathbf{0}, x]$ не превосходит $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{0})$ для любого $x \in Q$ и совпадает с $\mathbf{r}$ при $x = \mathbf{r}$; в отрезке $[\mathbf{r}, \mathbf{1}]$ нет отношений $\mathbf{r} \ll y$ при $\mathbf{r} \neq y$ ($\mathbf{r} \ll y$ вкупе с $\mathbf{0} \ll \mathbf{r}$ дает $\mathbf{0} \ll y \leqslant \vee [\mathbf{0}, \ll] = \mathbf{r}$).

Напомним, что в решетке Q [замкнутых] идеалов [нормированной] алгебры $\mathcal{A}$ отрезок $[a,b]$ интерпретируется как соответствующая решетка идеалов алгебры b/a, а отношение $\ll$ из $\mathrm{Ref}(Q,\leqslant)$ как некое «радикальное» свойство (отображение) P между идеалами a и b: $b/a = P(b/a)$.

Таким образом, *если $\ll$ есть расширенный сверху и примыкающий сверху порядок в решетке $Q = \mathbf{lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$ [соответственно, $\mathbf{Lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$], то $P(P(\mathcal{A})) = P(\mathcal{A})$, $P(\mathcal{A}/P(\mathcal{A})) = 0$, $P(I) \subset P(\mathcal{A})$ и $P(I)$ — идеал для любого идеала I алгебры A.* т. е., для «радикального» отображения P и алгебры $\mathcal{A}$ выполнены аксиомы 2, 3 и фактически аксиома 4 [топологических] радикалов [нормированных] алгебр.

Двойственно для общих полных решеток Q, если $\ll$ есть *расширенный снизу порядок*, то $\mathbf{p} = \wedge [\ll, \mathbf{1}]$ есть дуальный $\ll$-радикал в Q; если к тому же $\ll$ *примыкает снизу,* то $\mathbf{p}$ —

единственный в Q дуальный $\ll$-радикал. При этих же условиях для любого $b \in Q$ существует единственный дуальный $\ll$-радикал $\mathbf{p}_{\ll}(b) := \mathbf{p}(b)$ в *подрешетке* $[\mathbf{0}, b]$,

$$\mathbf{0} \overrightarrow{\ll} \mathbf{p}(b) \ll b, \tag{2.11}$$

причем $\mathbf{p}(b) = \wedge[\ll, b]$ есть наименьший элемент в $[\ll, b]$, $\mathbf{p}(\mathbf{p}(b)) = \mathbf{p}(b)$ и $\mathbf{p}(a) = \mathbf{p}(b)$ при $a \ll b$ или при $\mathbf{p}(b) \leqslant a \leqslant b$. Если вдобавок $\ll$ примыкает сверху, то $[\ll, b]$ есть просто весь отрезок $[\mathbf{0}, b]$.

Предположим для простоты, что отношение $\ll$ взято из $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$ и $\overleftarrow{\ll}$ является дуальным $\mathbf{R}$-порядком и, в частности, является *расширенным снизу и примыкающим снизу порядком*. Например, это происходит, когда $\ll$ является $\mathbf{H}$-отношением и при этом если существует радикал $\mathbf{r}_{\ll}$ отношения $\ll$, то $\mathbf{r}_{\ll}$ совпадает с дуальным радикалом $\mathbf{p}$ отношения $\overleftarrow{\ll}$. В любом случае отношение $\overset{\rightleftarrows}{\ll}$ является $\mathbf{R}$-порядком и его радикал совпадает с $\mathbf{p}$. Следовательно, для решетки идеалов [нормированной] алгебры $\mathcal{A}$ дуальный $\mathbf{R}$-порядок $\overleftarrow{\ll}$ индуцирует *радикальное свойство* (*отображение*) $\mathcal{P}$ между идеалами посредством отношения $\overset{\rightleftarrows}{\ll}$: $b/a = \mathcal{P}(b/a)$, если только $a \overset{\rightleftarrows}{\ll} b$, в то время как само отношение $\overleftarrow{\ll}$ индуцирует *полупростое свойство* $\mathcal{S}$ между идеалами: $\mathcal{S}(b/a) = 0$, если только $a \overleftarrow{\ll} b$. При этом для отображения $\mathcal{P}$ и алгебры $\mathcal{A}$ выполнены формально аксиомы 2–4 радикалов алгебр.

2.2.9. Изоморфизм решеток. Допустим, что $F : (Q, \leqslant) \longrightarrow (Q', \leqslant')$ является изоморфизмом решеток в том смысле, что $a \leqslant b$ есть то же самое, что $F(a) \leqslant' F(b)$. Допустим, что решетки полны. Тогда F — *изоморфизм полных решеток*, т. е. $\wedge F(G) = F(\wedge G)$ и $\vee F(G) = F(\vee G)$ для любого $G \subset Q$. В частности, $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}'$ и $F(\mathbf{1}) = \mathbf{1}'$.

Если отношение $\ll$ взято из $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$, то оно индуцирует отношение $\ll'$ из $\mathrm{Ref}(Q', \leqslant')$ по правилу $F(a) \ll' F(b)$, если имеет место $a \ll b$. Пишем: $\ll'$ есть $F(\ll)$ (тем самым F распространяется как изоморфизм полных решеток $\mathrm{Ref}(Q, \leqslant)$ и $\mathrm{Ref}(Q', \leqslant')$). Изоморфизм F переносит свойства отношения $\ll$ в свойства $\ll'$: к примеру, если $\ll$ является $\mathbf{H}$-отношением ($\mathbf{R}$-порядком), то и $\ll'$ является $\mathbf{H}$-отношением ($\mathbf{R}$-порядком). Верно и обратное, поскольку $\ll$ есть $F^{-1}(\ll')$.

Нетрудно заметить, что левое и правые дополнения сохраняются произвольным изоморфизмом решеток. При этом $F(\overleftarrow{\ll}) = \overleftarrow{F(\ll)}$ и $F(\overrightarrow{\ll}) = \overrightarrow{F(\ll)}$. Следовательно, если $\ll$ является $\mathbf{R}$-порядком, то его радикал $\mathbf{r}_{\ll}$ переходит в радикал $\mathbf{r}_{F(\ll)}$ отношения $F(\ll)$; соответственно, дуальный радикал $\mathbf{p}_{\ll}$ дуального $\mathbf{R}$-порядка $\ll$ переходит в дуальный радикал $\mathbf{p}_{F(\ll)}$ дуального $\mathbf{R}$-порядка $F(\ll)$.

В связи с изоморфизмами рассмотрим решетки [нормированных] алгебр. В частности, удобно разбить аксиому 1 [топологических] (пред)радикалов на два следующих условия.

Отображение P, сопоставляющее каждой алгебре $\mathcal{A}$ из класса $\mathfrak{U}$ [нормированных] алгебр [замкнутый] идеал $P(\mathcal{A})$, называется [*топологическим*] *предрадикалом,* если выполнены

Аксиома 1.1. *$P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}')$ для любого [открытого непрерывного] изоморфизма $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$.*

Аксиома 1.2. *$(P(\mathcal{A}) + I)/I \subset P(\mathcal{A}/I)$ [в топологическом случае $\overline{(P(\mathcal{A}) + I)}/I \subset P(\mathcal{A}/I)$] для любого [замкнутого] идеала I алгебры $\mathcal{A}$.*

Понятно, что изоморфизм f алгебр индуцирует изоморфизм F_f их решеток идеалов. Обратное неверно, что определяет трудности непосредственной ассоциации (дуальных) $\mathbf{R}$-порядков с радикалами алгебр.

2.2.10. $\mathbf{R}$*-порядки и радикалы алгебр.* Наша задача здесь — показать, что у $\mathbf{R}$-порядка $\ll$, заданного на решетке идеалов алгебры, нет проблем с выполнением аксиомы 1.2. Действительно, если $\ll$ — $\mathbf{R}$-порядок в полной решетке $(Q, \leqslant)$, то радикал $\mathbf{r}_{\ll}$ существует и отношение $\mathbf{0} \ll \mathbf{r}_{\ll}$ влечет $x = \mathbf{0} \vee x \ll \mathbf{r}_{\ll} \vee x$, поскольку $\ll$ — $\mathbf{H}$-отношение. Рассматривая теперь в качестве Q решетку идеалов алгебры $\mathcal{A}$ и радикальное свойство P, индуцированное отношением $\ll$, получим, что

$$\mathbf{0}_{\mathcal{A}/x} = x/x \ll (\mathbf{r}_{\ll} \vee x)/x \leqslant \vee\left[\mathbf{0}_{\mathcal{A}/x}, \ll\right] = \mathbf{r}_{\mathcal{A}/x} = P(\mathcal{A}/x),$$

где $\mathbf{r}_{\mathcal{A}/x} = P(\mathcal{A}/x)$ есть радикал алгебры $\mathcal{A}/x$, $\mathbf{r}_{\ll}$ есть радикал $P(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$, $(\mathbf{r}_{\ll} \vee x)/x$ есть $(P(\mathcal{A}) + I)/I \subset P(\mathcal{A}/I)$ в решетке $\mathbf{lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$ [или $\overline{(P(\mathcal{A}) + I)}/I \subset P(\mathcal{A}/I)$ в решетке $\mathbf{Lat}_{\mathbb{I}}(\mathcal{A})$] при $x = I$.

Таким образом, *если* $\ll$ *есть* $\mathbf{R}$*-порядок в решетке идеалов* [*нормированной*] *алгебры* $\mathcal{A}$, то соответствующее радикальное *свойство* (*отображение*) P ($a \ll b$ равносильно $b/a = P(b/a)$) *на решетке идеалов алгебры* $\mathcal{A}$ *удовлетворяет аксиомам* 1.2, 2, 3, 4 [*топологических*] *радикалов.*

3. Топологические радикалы банаховых алгебр

В оставшейся части работы будут рассмотрены некоторые результаты теории топологических радикалов и связанные с ними проблемы, возникающие в различных областях функционального анализа и теории операторов. Хотя для обсуждения некоторых из этих задач было бы удобнее работать с радикалами, определенными на более обширных классах нормированных алгебр, мы здесь ограничиваемся рассмотрением радикалов банаховых алгебр, руководствуясь, во-первых, нежеланием слишком усложнять изложение и, во-вторых, стремлением избежать необузданного увеличения объема статьи. Изучению радикалов нормированных алгебр, так же как и освещению не затронутых здесь направлений теории топологических радикалов авторы надеются посвятить продолжение данной работы.

В связи с тем, что мы будем заниматься исключительно банаховыми алгебрами, представляется целесообразным повторить определение топологического радикала в варианте, рассчитанном именно на этот случай.

Итак, *топологический радикал* на классе всех банаховых алгебр — это отображение P, сопоставляющее каждой банаховой алгебре A ее замкнутый идеал $P(A)$ и удовлетворяющее условиям:

(R1) $f(P(A)) \subset P(B)$ для любого непрерывного эпиморфизма $f: A \to B$.
(R2) $P(A/P(A)) = 0$.
(R3) $P(P(A)) = P(A)$.
(R4) Если J — замкнутый идеал алгебры A, то $P(J)$ — идеал алгебры A, содержащийся в $P(A)$.

Алгебра называется P*-радикальной*, если $A = P(A)$. Можно показать (см. [73, следствие 2.8 и теорема 2.9(i)]), что для любого радикала P класс всех P-радикальных алгебр устойчив относительно расширений (это означает, что если идеал J алгебры A и фактор-алгебра A/J P-радикальны, то A также P-радикальна). Важно, что это свойство выполняется в значительно более общем варианте.

Назовем занумерованное ординалами семейство $(J_\alpha)_{\alpha\leqslant\gamma}$ идеалов алгебры A, содержащихся в некотором идеале J алгебры A, *возрастающей трансфинитной цепочкой* идеалов, если $J_\alpha \subset J_\beta$ при $\alpha < \beta$ и $J_\beta = \overline{\bigcup_{\alpha<\beta} J_\alpha}$ для любого предельного ординала $\beta \leqslant \gamma$, и *убывающей трансфинитной цепочкой*, если $J_\beta \subset J_\alpha$ при $\alpha < \beta$ и $J_\beta = \bigcap_{\alpha<\beta} J_\alpha$ для любого предельного ординала $\beta \leqslant \gamma$. Следующий результат выводится из [73, теоремы 2.9(i) и 2.10(i)]; он естественно переносится в контекст радикалов на решетках и играет важную роль в этой общей теории.

Лемма 3.1. *Пусть P — топологический радикал. Если в возрастающей трансфинитной цепочке $(J_\alpha)_{\alpha\leqslant\gamma}$ идеалов банаховой алгебры A первый идеал J_0 и все факторы $J_{\alpha+1}/J_\alpha$ P-радикальны, то и ее последний элемент J_γ P-радикален.*

Мы в основном будем иметь дело с радикалами, обладающими удобными дополнительными свойствами.

Топологический радикал P называется *наследственным*, если выполняется условие

(R5) $P(J) = J \cap P(A)$ для любого идеала J алгебры A.

Далее, P называется *равномерным*, если все замкнутые подалгебры произвольной P-радикальной алгебры P-радикальны.

Легко видеть, что равномерные радикалы наследственны, и что (R5) влечет (R3) и (R4). Поэтому наследственные радикалы можно определять условиями (R1), (R2) и (R5), чем мы и будем пользоваться в дальнейшем.

Будем называть *банаховым идеалом* банаховой алгебры A ее идеал J, полный относительно нормы $\|\cdot\|_J$, которая связана с нормой в A условием $\|x\|_A \leqslant C\|x\|_J$ для всех $x \in J$.

Радикал P называется *гибко наследственным*, если

$$P(J, \|\cdot\|_J) = J \cap P(A)$$

для любого банахова идеала J алгебры A.

Эквивалентное условие: если $f : L \to A$ — непрерывный гомоморфизм банаховых алгебр, образ которого является идеалом алгебры A, то

$$f(P(L)) = f(L) \cap P(A).$$

В классе всех (топологических) радикалов введем частичный порядок, полагая $P_1 \leqslant P_2$, если $P_1(A) \subset P_2(A)$ для любой банаховой алгебры.

Лемма 3.2.

a) *Любое семейство радикалов $\{P_i : i \in \Lambda\}$ имеет точную верхнюю грань $\vee_i P_i$ и точную нижнюю грань $\wedge_i P_i$ в классе всех топологических радикалов.*
b) *Пусть $P = \vee\{P_i : i \in \Lambda\}$. В любой алгебре A существует возрастающая трансфинитная цепочка замкнутых идеалов $(J_\alpha)_{\alpha\leqslant\gamma}$, такая что $J_0 = 0$, $J_\gamma = P(A)$ и каждая фактор-алгебра $J_{\alpha+1}/J_\alpha$ является P_i-радикальной для некоторого i.*
c) *Если все P_i наследственны, то радикал $\wedge\{P_i : i \in \Lambda\}$ является наследственным и сопоставляет каждой алгебре A идеал $\bigcap_i P_i(A)$.*

Мы будем использовать символ a/J (вместо более привычного $a + J$) для обозначения образа элемента a алгебры A в ее фактор-алгебре A/J по идеалу J при каноническом эпиморфизме $q_J : A \to A/J$.

Как и в чисто алгебраической теории, многие важные топологические радикалы строятся с помощью специальных процедур из отображений, удовлетворяющих не всем условиям (R1)–(R4). Будем называть *топологическим предрадикалом* любое отображение P, сопоставляющее каждой банаховой алгебре A ее замкнутый идеал $P(A)$ и удовлетворяющее условию (R1). Если для P выполнены все условия (R1)–(R4), кроме, возможно, (R2) (или (R3)), то P называется подрадикалом (соответственно, надрадикалом).

Опишем подробнее предложенный Диксоном [37] топологический вариант *верхней процедуры Бэра*, сопоставляющей каждому предрадикалу P новый предрадикал P^*. В этой конструкции для любой банаховой алгебры A следующим образом строится трансфинитная последовательность идеалов $P_\alpha(A)$:

$$P_0(A) = P(A), \quad P_{\alpha+1}(A) = \{x \in A : x/P_\alpha(A) \in P(A/P_\alpha(A))\},$$
$$P_\alpha(A) = \overline{\bigcup_{\beta<\alpha} P_\beta(A)}, \quad \text{если } \alpha \text{ — предельный ординал.}$$

Эта цепочка стабилизируется на каком-то ординале γ, и мы полагаем $P^*(A) = P_\gamma(A)$.

Теорема 3.3 (см. [37]). *Если P — подрадикал, то P^* — топологический радикал. Он является наименьшим из всех радикалов R, мажорирующих P (в том смысле что $P(A) \subset R(A)$ для всех A).*

При достаточно слабых ограничениях на P из наследственности P следует наследственность P^*. Чтобы сформулировать результат более точно, назовем предрадикал P *правильным*, если все нильпотентные алгебры P-радикальны.

Теорема 3.4 (см. [75, теорема 4.30]). *Если правильный подрадикал P является наследственным, то и радикал P^* — наследственный.*

Часто бывает удобно увеличить радикал P таким образом, чтобы класс радикальных алгебр включал в себя все коммутативные банаховы алгебры. Соответствующая процедура называется *централизацией*. Положим

$$P^a(A) = \{x \in A : x[a,b] \in P(A) \text{ для любых } a, b \in A\}.$$

Теорема 3.5 (см. [75, теорема 4.30]).

(i) *Для любого правильного радикала P отображение $P^a : A \mapsto P^a(A)$ является подрадикалом.*
(ii) *Если P — наследственный радикал, то предрадикал P^a также наследственный.*

(iii) *Если P — гибко наследственный радикал, то P^a является радикалом.*

Как известно, одним из сильнейших технических средств теории банаховых алгебр является изучение неприводимых представлений и их ядер, примитивных идеалов. В теории топологических радикалов этому подходу соответствует следующая процедура *примитивизации* радикала.

Пусть P — топологический радикал. Обозначая через $\mathrm{Prim}(A)$ пространство примитивных идеалов банаховой алгебры A, положим

$$P^p(A) = \{x \in A : x/I \in P(A/I) \text{ для любого } I \in \mathrm{Prim}(A)\}.$$

Теорема 3.6 (см. [75, теорема 7.7]). *Если радикал P является гибко наследственным, то отображение $P^p : A \mapsto P^p(A)$ — наследственный подрадикал.*

Вскоре мы увидим, что P^p не обязан быть радикалом, даже если радикал P наследственный.

Заметим, что если в качестве P взять *тривиальный радикал*, сопоставляющий каждой алгебре ее нулевой идеал, то P^p — это радикал Джекобсона Rad. Напомним, что если термины «радикальный», «радикал» и т. д. употребляются без пояснения, какой радикал имеется в виду, то речь идет о радикале Джекобсона. Нетрудно проверить непосредственно, что Rad — это правильный и гибко наследственный топологический радикал.

4. Рассеянный радикал и непрерывность спектра

4.1. Счетность спектра. Для любой банаховой алгебры A обозначим через $S(A)$ множество всех ее элементов, имеющих (не более чем) счетный спектр. Если $S(A) = A$, то алгебра A называется *рассеянной*.

Следующий часто используемый в дальнейшем результат показывает, что свойство счетности спектра элемента устойчиво по отношению к выбору содержащей его подалгебры.

Предложение 4.1. *Пусть A — унитальная банахова алгебра, а B — подалгебра в A, содержащая единицу алгебры A. Пусть $\|\cdot\|_B$ — некоторая норма на B, относительно которой B полна, причем $\|a\|_A \leqslant \|a\|_B$ для всех $a \in B$. Тогда:*

(i) *для любого $a \in B$ имеет место включение $\sigma_A(a) \subset \sigma_B(a)$, причем всякое открыто-замкнутое подмножество в $\sigma_B(a)$ имеет ненулевое пересечение с полиномиально выпуклой оболочкой множества $\sigma_A(a)$;*

(ii) *если $\sigma_B(a)$ конечен или счетен, то $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.*

В частности, говоря о рассеянной подалгебре, можно не уточнять, в каком смысле это нужно понимать.

Замкнутый идеал $I \subset A$ называется *тонким*, если для любого элемента $a \in A$ полиномиальная оболочка спектра $pc(\sigma(a/I))$ его образа a/I в A/I отличается от $\sigma(a)$ не более, чем на счетное множество. Легко видеть, что все тонкие идеалы являются рассеянными алгебрами.

Теорема 4.2. *В любой банаховой алгебре существует наибольший рассеянный идеал. Этот идеал, который мы будем обозначать $\mathcal{R}_s(A)$, замкнут и обладает следующими свойствами:*

(i) *$\mathcal{R}_s(A)$ содержит все односторонние (даже не замкнутые) рассеянные идеалы.*

(ii) *$\mathcal{R}_s(A)$ является наибольшим тонким идеалом.*

(iii) *$\mathcal{R}_s(A) = \{a \in A : \sigma(ax)$ счетен $\forall x \in A\}$.*

(iv) *$\mathcal{R}_s(A) + S(A) \subset S(A)$.*

Теорема 4.3. *Отображение $A \mapsto \mathcal{R}_s(A)$ является равномерным топологическим радикалом.*

Так как всякий равномерный радикал является наследственным, то из теоремы 4.2 следует, что $\mathcal{R}_s$ — наследственный радикал. Это утверждение можно существенно усилить:

Теорема 4.4. *Радикал $\mathcal{R}_s$ является гибко наследственным.*

Доказательства перечисленных утверждений существенно используют то обстоятельство, что $\mathcal{R}_s$ является сужением на класс банаховых алгебр некоторого алгебраического радикала. Он строится с помощью верхней процедуры Бэра из предрадикала psoc, который ставит в соответствие алгебре A ее идеал $\{x \in A : x/\mathrm{rad}(A) \in \mathrm{soc}(A/\mathrm{rad}(A))\}$. Здесь rad — это радикал Джекобсона на классе всех алгебр, а отображение soc сопоставляет любой алгебре сумму ее минимальных левых идеалов.

Следствие 4.5. *Если $f : A \to B$ — не обязательно непрерывный эпиморфизм банаховых алгебр, то $f(\mathcal{R}_s(A)) \subset \mathcal{R}_s(B)$.*

Теорема 4.6. *Если алгебра A рассеянна, то*

(i) *классы эквивалентности ее неприводимых представлений полностью определяются своими ядрами*;

(ii) *пространство $\mathrm{Prim}(A)$ дисперсно* (*любое замкнутое подмножество имеет изолированную точку*);

(iii) *если A сепарабельна, то $\mathrm{Prim}(A)$ счетно.*

Банахова алгебра называется *наследственно полупростой*, если все ее фактор-алгебры полупросты. Эквивалентное условие: каждый замкнутый идеал — пересечение некоторого семейства примитивных идеалов (в коммутативном случае это условие называют свойством спектрального синтеза).

Теорема 4.7. *Наследственно полупростая банахова алгебра A рассеянна тогда и только тогда, когда каждая ненулевая ее фактор-алгебра имеет минимальные ненулевые левые идеалы.*

Так как всякая C*-алгебра наследственно полупроста, то отсюда можно получить ряд эквивалентных условий рассеянности C*-алгебр; мы приведем лишь небольшую часть этого длинного списка; другие характеризации можно найти в работе М. Кусуды [54].

Следствие 4.8. *Для C*-алгебры A следующие условия эквивалентны*:

(i) *A рассеянна*;

(ii) *A типа 1 и пространство максимальных идеалов ее центра дисперсно*;

(iii) *A типа 1 и пространство $\mathrm{Prim}(A)$ дисперсно*;

(iv) *всякий самосопряженный элемент $a \in A$ имеет счетный спектр*;

(v) *всякая ненулевая фактор-алгебра алгебры A имеет минимальный проектор.*

4.2. Спектральная непрерывность. Пусть A — банахова алгебра. Мы говорим, что спектр *непрерывен* в точке $a \in A$, если $\sigma(a_n)$ стремится к $\sigma(a)$ в метрике Хаусдорфа, когда $\|a_n - a\| \to 0$. Вопросы непрерывности спектра играют большую роль в спектральной теории; им посвящена обширная литература (см., например, [29, 40] и приведенную там библиографию).

Хорошо известно (см. [21, 58]), что элементы, в спектрах которых плотны изолированные точки, являются точками непрерывности спектра. Следовательно, таковы все элементы идеала $\mathcal{R}_s(A)$. Мы обсудим возможность расширить этот результат на более широкие идеалы. Начнем с централизации ($\mathcal{R}_s^a$) и примитивизации $\mathcal{R}_s^p$ этого радикала.

Из теоремы 4.4, с учетом теорем 3.5 и 3.6, немедленно получаем следующий результат.

Предложение 4.9.

(i) *$\mathcal{R}_s^a$ — наследственный топологический радикал.*

(ii) *Подрадикал $\mathcal{R}_s^p$ является наследственным.*

Рассмотрим алгебру $A = C([0,1], \mathcal{K}(H))$ всех непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ со значениями в алгебре $\mathcal{K}(H)$ всех компактных операторов в гильбертовом пространстве H. Она не содержит ненулевых элементов с дискретным спектром, поэтому $\mathcal{R}_s(A) = 0$. Ненулевых коммутативных идеалов в A нет, поэтому $\mathcal{R}_s^a(A) = 0$. Примитивными идеалами в A являются идеалы $J_t = \{f \in A : f(t) = 0\}$, $t \in [0,1]$. Так как все фактор-алгебры A/J_t изоморфны $\mathcal{K}(H)$, то $\mathcal{R}_s^p(A) = A$. Таким образом, в данном примере $\mathcal{R}_s^p(A) \supsetneqq \mathcal{R}_s^a(A)$.

Рассмотрим теперь C*-алгебру A_τ операторов в пространстве $\ell^2(\mathbb{N})$, порожденную оператором одностороннего сдвига V (C*-алгебра Теплица). Известно, что она содержит идеал $\mathcal{K}(H)$, фактор по которому изоморфен алгебре $C(\mathbb{T})$ непрерывных функций на единичной окружности. Легко проверить, что $\mathcal{R}_s(A_\tau) = \mathcal{K}(H)$, а так как $0 \in \mathrm{Prim}(A_\tau)$, то и $\mathcal{R}_s^p(A_\tau) = \mathcal{K}(H)$. В то же время, $\mathcal{R}_s^a(A_\tau) = A_\tau$, поскольку A_τ коммутативна по модулю $\mathcal{K}(H)$. Мы получили пример с противоположным включением: $\mathcal{R}_s^a(A) \supsetneqq \mathcal{R}_s^p(A)$.

Как обычно, через $\mathcal{R}_s^{p*}(A)$ обозначается топологический радикал, получаемый из $\mathcal{R}_s^p(A)$ верхней процедурой Бэра. Оказывается, что этот радикал уже мажорирует радикал $\mathcal{R}_s^a$:

Лемма 4.10. $\mathcal{R}_s^a \leqslant \mathcal{R}_s^{p*}$.

Отсюда, в частности, следует, что $\mathcal{R}_s^p \neq \mathcal{R}_s^{p*}$, т. е., $\mathcal{R}_s^p$ не является радикалом.

Теорема 4.11. *Для любой банаховой алгебры A все элементы идеала $\mathcal{R}_s^p(A)$ являются точками непрерывности спектра.*

В доказательстве существенную роль играет следующее равенство, справедливое (см. работу Я. Земанека [84]) для любого элемента a банаховой алгебры A:

$$\sigma(a) = \overline{\bigcup_{I \in \mathrm{Prim}(A)} \sigma(a/I)}. \tag{4.1}$$

В формулировке теоремы 4.11 нельзя заменить $\mathcal{R}_s^p(A)$ на $\mathcal{R}_s^a(A)$ (и тем более на $\mathcal{R}_s^{p*}(A)$). Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть пример разрывности спектра, построенный Люмером (см. [44, гл. 11]). В этом примере операторы принадлежат C*-алгебре A, порожденной двусторонним сдвигом и алгеброй $\mathcal{K}(H)$ всех компактных операторов. Так как $A/\mathcal{K}(H)$ коммутативна, а $\mathcal{K}(H)$ рассеянна, то $A = \mathcal{R}_s^a(A)$.

Мы уже обсуждали строение рассеянных идеалов C*-алгебр, т. е., действие радикала R_s на этом важном классе банаховых алгебр. Обсудим теперь действие его расширений.

Напомним, что C*-алгебра A называется GCR C*-алгеброй (или C*-алгеброй типа 1), если $\pi(A)$ содержит ненулевой компактный оператор (а значит, и все компактные операторы) для любого неприводимого представления π. Если же для любого π алгебра $\pi(A)$ *состоит* из компактных операторов, то A называется CCR C*-алгеброй. Известно, что всякая C*-алгебра A имеет GCR идеал J, такой что A/J не имеет ненулевых GCR идеалов. Обозначим этот идеал через $\mathcal{R}_{GCR}(A)$.

Теорема 4.12.

(i) *$\mathcal{R}_s^{p*}(A) = \mathcal{R}_{GCR}(A)$ для любой C*-алгебры A.*
(ii) *$\mathcal{R}_s^p(A) = A$ для любой CCR C*-алгебры A.*

Таким образом, справедлив следующий результат:

Следствие 4.13. *Непрерывность спектра имеет место на любой CCR C*-алгебре.*

Однако и некоторые C*-алгебры, не принадлежащие к классу CCR алгебр, являются $\mathcal{R}_s^p$-радикальными (и более того, рассеянными) — например, алгебра $\mathcal{K}(H) + \mathbb{C}1$ всех операторов, представимых в виде суммы скалярного и компактного.

Рассмотренные выше примеры показывают, что класс $\mathcal{R}_s^a$-радикальных C*-алгебр не содержит класс CCR алгебр и не содержится в нем (алгебра Теплица не является CCR алгеброй, а алгебра $C([0,1],\mathcal{K}(H))$ является). Большое разнообразие примеров $\mathcal{R}_s^a$-радикальных C*-алгебр доставляет теория Дугласа—Брауна—Филлмора коммутативных расширений алгебры $\mathcal{K}(H)$ (см. [27, 31]).

Приведем еще один результат о точках непрерывности спектра в C*-алгебрах. Алгебра называется *остаточно конечномерной* (сокращенно, RFD), если пересечение ядер ее конечномерных представлений тривиально. Это широкий и важный класс C*-алгебр, содержащий, например, все C*-алгебры свободных групп.

Теорема 4.14. *Всякий нормальный элемент любой RFD C*-алгебры является точкой непрерывности спектра.*

Представляет значительный интерес вопрос о том, в каких алгебрах непрерывен спектральный радиус. Наличие этого свойства значительно упрощает решение многих спектральных задач — достаточно сказать, что в этом случае множество квазинильпотентных элементов замкнуто.

Теорема 4.15. *Для любой банаховой алгебры A все элементы идеала $\mathcal{R}_s^{p*}(A)$ являются точками непрерывности спектрального радиуса.*

В частности, функция $a \mapsto \rho(a)$ непрерывна во всех точках из $\mathcal{R}_s^a(A)$.

В классе C*-алгебр теорема устанавливает непрерывность спектрального радиуса в точках из идеала $\mathcal{R}_{GCR}(A)$, и в частности, на всех GCR алгебрах. В работе Т. В. Шульман [69] показано, что верно и обратное: если спектральный радиус непрерывен во всех точках C*-алгебры A, то

A является GCR алгеброй. Доказательство этого результата потребовало привлечения тонкого аппарата некоммутативной топологии (полупроективность, AF-телескопы и др.).

Утверждение теоремы 4.15 можно дополнить следующим образом: спектральный радиус непрерывен не только в точках идеала $\mathcal{R}_s^{p*}(A)$, но и в любой точке $a \in A$, такой что $\rho(a) > \rho(a/\mathcal{R}_s^{p*}(A))$.

К рассмотрению вопросов спектральной непрерывности и введенным здесь радикалам мы будем возвращаться в последующих разделах.

Основные результаты этого раздела получены в работе Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [75]. В недавней работе П. Као и Ю. Туровского [60] был предложен подход к построению и анализу рассеянного радикала, основанный на теории аналитических мультифункций (об этой теории см. [21, гл. 3]). Кроме ряда новых результатов для нормированных ассоциативных алгебр, этот подход позволил также построить рассеянный радикал для нормированных йордановых алгебр.

5. Компактно-квазинильпотентный радикал

5.1. Совместный спектральный радиус. Пусть $A \in (BA)$. Для любого подмножества $N \subset A$ будем обозначать через $\operatorname{abs}(N)$ замыкание его абсолютно выпуклой оболочки. Обычным образом определим сумму и произведение подмножеств алгебры:

$$M + N = \{a + b : a \in M, b \in N\},$$
$$MN = \{ab : a \in M, b \in N\}; \tag{5.1}$$

это позволяет рассматривать суммы и произведения нескольких подмножеств, и в частности, степень: M^n, $n \in \mathbb{N}$. Множество $\mathcal{S}(M) = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} M^n$ — это *полугруппа, порожденная* M. Если A унитальна, то, по определению, $\mathcal{S}_1(M) = \mathcal{S}(M) \cup \{1\}$.

Мы будем обозначать символами $\mathcal{M}_f(A)$, $\mathcal{M}_c(A)$ и $\mathcal{M}_b(A)$ соответственно классы всех конечных, предкомпактных и ограниченных подмножеств алгебры A. Далее определяется норма

$$\|M\| = \sup_{a\in M} \|a\|$$

и спектральный радиус

$$\rho(M) = \inf \|M^n\|^{1/n}.$$

подмножества $M \subset A$.

Понятие спектрального радиуса подмножеств, или, как принято говорить, *совместного спектрального радиуса* (сокращенно, ССР), впервые введенное в 1960-м году Ротой и Стрэнгом [68], оказалось исключительно плодотворным при изучении динамических систем; ему посвящено огромное число работ (см., например, книгу Р. Юнгерса [47] и библиографический обзор В. Козякина [53]), в большинстве из которых речь идет о конечномерных задачах, т. е. о множествах матриц.

Нетрудно проверить, что выполняются равенства

$$\rho(M) = \rho(M^n)^{1/n}, \quad \rho(\lambda M) = |\lambda|\,\rho(M) \quad \text{и} \quad \rho(MN) = \rho(NM),$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $M, N \in \mathcal{M}_b(A)$.

Удобным свойством ССР является определенного рода полунепрерывность величины $\rho(M/J)$ как функции от идеала J:

Лемма 5.1. *Если $J = \overline{\bigcup J_\alpha}$, где (J_α) — направленная по возрастанию сеть замкнутых идеалов алгебры A, то для любого $M \in \mathcal{M}_c(A)$*

$$\|M/J\| = \lim_\alpha \|M/J_\alpha\| = \inf_\alpha \|M/J_\alpha\|, \tag{5.2}$$
$$\rho(M/J) = \lim_\alpha \rho(M/J_\alpha) = \inf_\alpha \rho(M/J_\alpha). \tag{5.3}$$

Следующее утверждение играет важную роль в доказательстве основных результатов этого раздела.

Теорема 5.2 (см. [70, теорема 3.5])**.** *Пусть $V \subset \mathbb{C}$ открыто, и пусть F — такое семейство аналитических функций на V со значениями в A, что*

$$\lim_{\mu\to\lambda} \sup\{\|f(\mu) - f(\lambda)\| : f \in F\} = 0$$

для любого $\lambda \in V$, *причем все множества* $M(\lambda) = \{f(\lambda) : f \in F\}$ *ограничены. Тогда функции* $\lambda \longmapsto \ln \rho(M(\lambda))$ *и* $\lambda \longmapsto \rho(M(\lambda))$ *субгармоничны на* V.

Банахова алгебра A называется *конечно квазинильпотентной* (соответственно, *компактно квазинильпотентной*; *ограниченно квазинильпотентной*), если $\rho(M) = 0$ для всех $M \in \mathcal{M}_f(A)$ (соответственно, $\mathcal{M}_c(A)$; $\mathcal{M}_b(A)$). Для краткости, мы будем в этих случая говорить, что A является *f-квазинильпотентной*, *c-квазинильпотентной*, или *b-квазинильпотентной*.

Ограниченно квазинильпотентные алгебры обычно называют *топологически нильпотентными* (см., например, [36, 38, 39, 61]).

Для $* \in \{f, c, b\}$, положим

$$\mathcal{R}_{*q}(A) = \{a \in A : \rho(\{a\} \cup M) = \rho(M) \quad \forall M \in \mathcal{M}_*(A)\}.$$

Теорема 5.3. *Все* $\mathcal{R}_{*q}(A)$ — *замкнутые идеалы алгебры* A.

Ясно, что все идеалы $\mathcal{R}_{*q}(A)$ состоят из квазинильпотентных элементов, и потому содержатся в $\mathrm{Rad}(A)$. Более подробно,

$$\mathcal{R}_{bq}(A) \subset \mathcal{R}_{cq}(A) \subset \mathcal{R}_{fq}(A) \subset \mathrm{Rad}(A). \tag{5.4}$$

Нетрудно показать, что для $* \in \{f, c\}$ идеалы $\mathcal{R}_{*q}(A)$ являются $*$-квазинильпотентными. В то же время, идеал $\mathcal{R}_{bq}(A)$ не обязательно b-квазинильпотентен даже для коммутативной A.

Предложение 5.4. *Если* A *коммутативна, то* $\mathcal{R}_{bq}(A) = \mathrm{Rad}(A)$.

Известно, что не всякая коммутативная радикальная банахова алгебра является b-квазинильпотентной. Один из примеров — замкнутая по операторной норме алгебра, порожденная оператором интегрирования Вольтерры (см. работу Дж. Петерса и Р. Уогена [61], где приводятся и другие примеры). В то же время из предложения 5.4 следует c-квазинильпотентность всех коммутативных радикальных алгебр, поскольку c-квазинильпотентность равносильна условию $\mathcal{R}_{cq}(A) = \mathrm{Rad}(A)$.

Теорема 5.5. *Пусть* M, N — *ограниченные подмножества унитальной банаховой алгебры* A. *Если множество* $N\mathcal{S}_1(M)$ *ограничено и* $\rho(N\mathcal{S}_1(M)) = 0$, *то* $\rho(N \cup M) = \rho(M)$.

Напомним, что если J — замкнутый идеал алгебры A, то через M/J обозначается образ подмножества $M \subset A$ относительно канонического эпиморфизма $q_J : A \to A/J$.

Теорема 5.6. *Пусть* A — *банахова алгебра,* $* \in \{f, c\}$ *и* $J = \mathcal{R}_{*q}(A)$. *Тогда* $\rho(M) = \rho(M/J)$ *для любого* $\mathcal{M}_*(A)$. *Равенство верно и при* $* = b$, *если в качестве* J *взять любой b-квазинильпотентный идеал.*

Разумеется, для *предкомпактного* M верно и равенство $\rho(M) = \rho(M/\mathcal{R}_{bq}(A))$, поскольку $\mathcal{R}_{bq}(A) \subset \mathcal{R}_{cq}(A)$.

Два следующих утверждения показывают, что идеалы $\mathcal{R}_{*q}(A)$ разделяют с радикалом Джекобсона многие из его известных свойств.

Лемма 5.7. *Пусть* $* \in \{f, c, b\}$ *и идеал* J — *это* $\mathcal{R}_{*q}(A)$ *при* $* \in \{f, c\}$ *и произвольный b-квазинильпотентный идеал алгебры* A *при* $* = b$. *Тогда*

$$\rho(NM) = 0 \;\; \textit{и} \;\; \rho(N + M) = \rho(M),$$

если выполнено одно из условий:

(i) $N \in \mathcal{M}_*(J)$ *и* $M \in \mathcal{M}_*(A)$;

(ii) $N \in \mathcal{M}_c(\mathcal{R}_{bq}(A))$ *и* $M \in \mathcal{M}_b(A)$.

Теорема 5.8. *Пусть* A — *банахова алгебра. Элемент* $a \in A$ *тогда и только тогда принадлежит* $\mathcal{R}_{bq}(A)$ (*соответственно,* $\mathcal{R}_{cq}(A)$), *когда* $\rho(aM) = 0$ *для любого ограниченного* (*соответственно, предкомпактного*) *подмножества* $M \subset A$.

Следствие 5.9.

(i) *Для* $* \in \{c, b\}$ *идеал* $\mathcal{R}_{*q}(A)$ *содержит все* (*даже односторонние*) *$*$-квазинильпотентные идеалы алгебры* A;

(ii) $\mathcal{R}_{cq}(A)$ *является наибольшим c-квазинильпотентным идеалом алгебры* A.

Следующий пример показывает, что банахова алгебра может не иметь наибольшего b-квазинильпотентного идеала.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ пусть A_n — алгебра всех верхне-треугольных матриц порядка n, рассматриваемых как операторы на n-мерном гильбертовом пространстве H_n. Обозначим через A замыкание прямой суммы всех A_n в алгебре всех операторов на гильбертовом пространстве $H = \oplus H_n$. Так как все A_n — нильпотентные идеалы, то наибольший из b-квазинильпотентных идеалов (если таковой существует) должен совпадать с A. Однако если M — единичный шар алгебры A, то $\|M^n\| = 1$ для любого n, так что A не является b-квазинильпотентной.

5.2. Радикальные свойства отображений $A \mapsto \mathcal{R}_{*q}(A)$. Основываясь на приведенных выше результатах, уже нетрудно получить следующее основное утверждение:

Теорема 5.10.

(i) *Отображение* $\mathcal{R}_{cq} : A \mapsto \mathcal{R}_{cq}(A)$ — *наследственный* (*более того, равномерный*) *топологический радикал.*

(ii) *Отображение* $\mathcal{R}_{bq}$ — *наследственный подрадикал.*

(iii) *Отображение* $\mathcal{R}_{fq}$ *удовлетворяет условиям* (R1), (R2), (R3) *из определения топологического радикала* (*неизвестно лишь, выполнено ли включение* $P(I) \subset P(A)$).

Доказательство. В самом деле, пусть I — идеал банаховой алгебры A. Если $* \in \{b, c\}$, то для любых $a \in \mathcal{R}_{*q}(I)$ и $M \in \mathcal{M}_*(A)$ имеем $(aM)^2 = aN$, где $N = MaM \in \mathcal{M}_*(I)$. По теореме 5.8 $\rho((aM)^2) = 0$, откуда $\rho(aM) = 0$ и $a \in \mathcal{R}_{*q}(A)$ снова в силу теоремы 5.8. Мы доказали, что $\mathcal{R}_{*q}(I) \subset \mathcal{R}_{*q}(A)$. Таким образом, $\mathcal{R}_{*q}(I) \subset \mathcal{R}_*(A) \cap I$. Обратное включение очевидно для всех $* \in \{f, b, c\}$.

Равенство $\mathcal{R}_{*q}(\mathcal{R}_{*q}(A)) = \mathcal{R}_{*q}(A)$ для $* \in \{f, c, b\}$ легко следует из определения.

Докажем, что $\mathcal{R}_{*q}(A/\mathcal{R}_{*q}(A)) = 0$ для $* \in \{f, c\}$. Пусть $a \in A$; положим $\widehat{a} = a/\mathcal{R}_{*q}(A)$, и пусть $\widehat{M} = M/\mathcal{R}_{*q}(A)$ для $M \in \mathcal{M}_*(A)$. Если $\widehat{a} \in \mathcal{R}_{*q}(A/\mathcal{R}_{*q}(A))$, то

$$\rho(\{a\} \cup M) = \rho((\{a\} \cup M)/\mathcal{R}_{*q}(A)) = \rho(\{\widehat{a}\} \cup \widehat{M}) = \rho(\widehat{M}) = \rho(M)$$

по теореме 5.6. Это показывает, что $a \in \mathcal{R}_{*q}(A)$, т. е. $\widehat{a} = 0$.

Пусть теперь I — замкнутый идеал банаховой алгебры A, и $* \in \{f, b, c\}$. Для $M \in \mathcal{M}_*(A/I)$ пусть $N \in \mathcal{M}_*(A)$ таково, что $q_I(N) = M$. Если $a \in \mathcal{R}_{*q}(A)$, то

$$\rho(\{\lambda q_I(a)\} \cup M) = \rho(\{\lambda q_I(a)\} \cup q_I(N)) \leqslant \rho(\{\lambda a\} \cup N) = \rho(N)$$

для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Используя теорему 5.2, можно заключить, что $q_I(a) \in \mathcal{R}_*(A/I)$.

Мы доказали, что $q_I(\mathcal{R}_{*q}(A)) \subset \mathcal{R}_{*q}(A/I)$ для $* \in \{f, b, c\}$. □

Свойство наследственности радикала $\mathcal{R}_{cq}$ и предрадикала $\mathcal{R}_{bq}$ распространяется на банаховы идеалы:

Теорема 5.11. *Радикал* $\mathcal{R}_{cq}$ *и предрадикал* $\mathcal{R}_{bq}$ *являются гибко наследственными.*

Очевидно, что все отображения $\mathcal{R}_{*q}$ являются равномерными, т. е., из того, что $\mathcal{R}_{*q}(A) = A$ следует, что $\mathcal{R}_{*q}(B) = B$ для любой замкнутой подалгебры B алгебры A.

Предрадикал $\mathcal{R}_{bq}$ не является радикалом. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим свободную (не унитальную) полугруппу G со счетным числом образующих $\{x_0, x_1, \ldots\}$. Пусть I — ее идеал, состоящий из тех слов, которые не являются подсловами бесконечного слова

$$W = x_0 x_1 x_0 x_2 \ldots x_0 x_{n-1} x_0 x_n \ldots$$

Алгебра $l^1(I)$ изометрически вложена в алгебру $l^1(G)$ и является ее идеалом. Пусть $A = l^1(G)/l^1(I)$, и пусть X_i — образы образующих x_i в A. Заметим, что $X_0 X_0 = 0$ и $X_i P X_i = 0$ для любого монома P, если $i > 0$. Следовательно, $X_i A X_i = 0$ и

$$(X_i M)^2 = 0$$

для любого ограниченного подмножества $M \subset A$ при $i > 0$. Поэтому $X_i \in \mathcal{R}_{bq}(A)$ для всех $i > 0$. Пусть J — замкнутый идеал алгебры A, порожденный множеством $N = \{X_i : i > 0\}$, тогда $J = \mathcal{R}_{bq}(J)$. Так как A/J — одномерная алгебра, порожденная нильпотентным элементом, то $A/J = \mathcal{R}_{bq}(A/J)$. Если бы отображение $\mathcal{R}_{bq}$ было радикалом, то отсюда следовало бы, что $\mathcal{R}_{bq}(A) = A$. Однако это неверно: $X_0 \notin \mathcal{R}_{bq}(A)$, поскольку

$$\|(X_0N)^n\|^{1/n} = \|X_0X_1 \cdots X_0X_n\|^{1/n} = 1$$

для всех $n \in \mathbb{N}$.

В частности, $\mathcal{R}_{bq} \neq \mathcal{R}_{cq}$.

Представляет первостепенный интерес вопрос о различении радикалов $\mathcal{R}_{cq}$ и Rad. Известно, что их расширенные версии на классе всех нормированных алгебр не совпадают (следует заметить, что распространение Rad на нормированные алгебры — вопрос тонкий, сужение алгебраического радикала Джекобсона rad на нормированные алгебры не является топологическим радикалом; в то же время определения предрадикалов $\mathcal{R}_{fq}$, $\mathcal{R}_{cq}$ и $\mathcal{R}_{bq}$ переносятся на класс нормированных алгебр без изменения). Более того, на этом классе не совпадают $\mathcal{R}_{cq}$ и $\mathcal{R}_{fq}$; это можно доказать, используя построенный Диксоном [35] пример непрерывного гомоморфизма радикальной банаховой алгебры на плотную подалгебру полупростой банаховой алгебры.

В работе Ю. В. Туровского [9] доказано, что на классе нормированных алгебр не совпадают радикалы $\mathcal{R}_{cq}$ и rad. Более того, для любого $n > 1$ существует нормированная алгебра, в которой любое подмножество из менее, чем n элементов, имеет нулевой ССР, но есть n-элементное подмножество с ненулевым ССР. Доказательство использует замечательную конструкцию Е. С. Голода [3] n-порожденной не нильпотентной алгебры, в которой все $(n-1)$-порожденные подалгебры нильпотентны (см. прозрачное и многое проясняющее доказательство этого результата в книге [2]).

Результаты раздела, приведенные без ссылок, получены в работах Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [10, 73].

6. Тензорный радикал

Здесь будет построен радикал, выделяющий класс тензорно радикальных алгебр, т. е., банаховых алгебр, остающихся радикальными при тензорном умножении на любую банахову алгебру. Сильным техническим средством изучения этого радикала является некоторый аналог совместного спектрального радиуса, который мы называем ℓ_1-радиусом.

6.1. ℓ_1-радиус суммируемого семейства. Пусть A — банахова алгебра. Мы будем рассматривать последовательности элементов алгебры A; при этом две последовательности считаются эквивалентными ($\{a_n\}_1^\infty \simeq \{b_n\}_1^\infty$), если одну из другой можно получить, изменив нумерацию. Классы эквивалентности называются *семействами* (элементов алгебры); допуская вольность, мы иногда будем называть семействами сами последовательности (которые, строго говоря, нужно называть представителями семейств). Семейства можно также рассматривать как счетные *обобщенные подмножества*: чтобы задать класс, нужно указать, сколько раз в него входит каждый элемент алгебры A.

По определению, [73, раздел 3.4], *обобщенное подмножество* (о.м.) S алгебры A — это функция $\varkappa_S$ на A, значения которой — кардинальные числа. Каждой последовательности $M = \{a_n\}_{n=1}^\infty$ элементов алгебры A сопоставляется о.м. $S = S_{(M)}$ правилом

$$\varkappa_S(a) = \mathrm{card}\{n : a_n = a\}$$

для всех $a \in A$; мы говорим, что M — *представитель* S.

Множество $\{a \in A : \varkappa_S(a) > 0\}$ называется *носителем* о.м. S. Обычные множества можно рассматривать как о.м. S, у которых все значения функции $\varkappa_S$ принадлежат $\{0, 1\}$. О.м. S называется *счетным*, если его носитель (не более, чем) счетен и все $\varkappa_S(a)$ не превосходят $\aleph_0$.

Включение $S \subset P$ для о.м. означает, что выполняется условие

$$\varkappa_S(a) \leqslant \varkappa_P(a)$$

для всех $a \in A$.

Мы определим дизъюнктное объединение $S \sqcup P$ о.м. условием

$$\varkappa_{S \sqcup P}(a) = \varkappa_S(a) + \varkappa_P(a)$$

для всех $a \in A$. Аналогично определяется дизъюнктное объединение любого семейства о.м.

Определим произведение SP о.м. равенством

$$\varkappa_{SP}(a) = \sum_{(b,c)\in A\times A,\, bc=a} \varkappa_S(b)\varkappa_P(c)$$

для всех $a \in A$.

Для любого о.м. S алгебры A положим

$$\eta(S) = \sum_{a\in A} \varkappa_S(a)\|a\|$$

и

$$\|S\| = \sup_{\varkappa_S(a)>0} \{\|a\| : a \in A,\ \varkappa_S(a) > 0\}.$$

Если $\eta(S) < \infty$, то S называется *суммируемым*; если $\|S\| < \infty$, то S называется *ограниченным*.

В терминах представителей $M = \{a_n\}_1^\infty$ and $N = \{b_n\}_1^\infty$ семейство MN соответствует двухиндексной последовательности $\{a_nb_m\}_{n,m=1}^\infty$ (с произвольной нумерацией), а $M \sqcup N$ — последовательности $\{c_n\}_1^\infty$, где $c_{2k-1} = a_k$, $c_{2k} = b_k$. Тогда очевидно, что

$$MN \simeq \bigsqcup_{i=1}^\infty a_iN \simeq \bigsqcup_{j=1}^\infty Mb_j,$$

где $aN = \{ab_n\}_1^\infty$ и $Mb = \{a_nb\}_1^\infty$, как обычно. В частности,

$$M(N_1 \sqcup N_2) \simeq MN_1 \sqcup MN_2 \text{ и } (M_1 \sqcup M_2)N \simeq M_1N \sqcup M_2N$$

для любых семейств M_i, N_i, $i = 1, 2$, и

$$(MN)K \simeq M(NK) \tag{6.1}$$

для любых семейств в A. Положим $M^1 \simeq M$, $M^n \simeq M^{n-1}M$ для любого $n > 0$. Тогда из (6.1)

$$M^{n+m} \simeq M^nM^m \tag{6.2}$$

для всех $n, m \in \mathbb{N}$.

Включение семейств ($M \sqsubset N$) определяется как включение соответствующих о.м.

Если S — суммируемое о.м., то оно имеет представителя M из $\ell_1(A)$, т. е. $S = S_{(M)}$. Мы полагаем $\eta(M) = \eta\left(S_{(M)}\right)$ и говорим, что семейство M суммируемо. При этом

$$\|M\|_{\ell_1(A)} = \eta(M) = \eta(N)$$

если $N \simeq M$.

Ясно, что если M и N — суммируемые семейства в A, то

$$\eta(M \sqcup N) = \eta(M) + \eta(N)$$

и

$$\eta(MN) \leqslant \eta(M)\eta(N). \tag{6.3}$$

Из (6.2) и (6.3) следует, что

$$\eta(M^{n+m}) \leqslant \eta(M^n)\eta(M^m) \tag{6.4}$$

Для всех $n, m \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что для любого суммируемого семейства M существует предел

$$\rho_t(M) = \lim(\eta(M^n))^{1/n} = \inf(\eta(M^n))^{1/n}.$$

Число $\rho_t(M)$ называется *ℓ_1-радиусом* семейства M.

Так как $(M^m)^n \simeq M^{mn}$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$, то

$$\rho_t(M^m)^{1/m} = (\lim_n(\eta((M^m)^n))^{1/n})^{1/m} = \lim_n(\eta(M^{mn}))^{1/nm} = \rho_t(M). \tag{6.5}$$

Пусть S — ограниченное счетное о.м. в A. Тогда S имеет представителя L из $\ell_\infty(B)$. Полагая $\|L\| = \left\|S_{(L)}\right\|$, имеем

$$\|L\|_{\ell_\infty(B)} = \|L\| = \|K\|$$

для любого $K \simeq L$.

Ясно, что

$$\|L \sqcup K\| = \max\{\|L\|, \|K\|\} \text{ и } \|LK\| \leqslant \|L\|\,\|K\|$$

для любых L и K. Отсюда, как и выше, выводится, что для любого ограниченного семейства L существует предел
$$\rho(L) = \lim(\|L^n\|)^{1/n} = \inf(\|L^n\|)^{1/n},$$
совместный спектральный радиус семейства.

Мы пишем $\eta_{\|\cdot\|}(M)$ вместо $\eta(M)$, если необходимо указать, какая норма в A рассматривается.

Определим свертку $M * N = \{c_n\}$ суммируемых семейств $M = \{a_n\}$ и $N = \{b_n\}_1^\infty$ правилом: $c_n = \sum\limits_{i+j=n+1} a_i b_j$.

Предложение 6.1. *Если $M = \{a_n\}_1^\infty$ и $N = \{b_n\}_1^\infty$ — суммируемые семейства в A, то $\rho_t(M * N) \leqslant \rho_t(MN) = \rho_t(NM)$ и $\rho_t(M + N) \leqslant \rho_t(M \sqcup N)$.*

Будем говорить, что семейства M и N *коммутируют*, если $MN \simeq NM$. Это, разумеется, не означает, что элементы M коммутируют с элементами N.

Предложение 6.2. *Для коммутирующих семейств верны равенства*
$$\rho_t(MN) \leqslant \rho_t(M)\rho_t(N), \quad \rho_t(M \sqcup N) \leqslant \rho_t(M) + \rho_t(N).$$

Суммируемое семейство M называется *ℓ_1-квазинильпотентным* , если $\rho_t(M) = 0$.

Абсолютно выпуклой оболочкой $\mathrm{abs}_t(M)$ последовательности $M = \{a_n\}_1^\infty \in \ell_1$ называется множество всех таких последовательностей $N = \{b_n\}_1^\infty$, что $b_m = \sum\limits_{n=1}^\infty t_{nm} a_n$, где t_{nm} — комплексные числа и $\sum\limits_{m=1}^\infty |t_{nm}| \leqslant 1$ для всех n. Ясно, что $\mathrm{abs}_t(M)$ — абсолютно выпуклое подмножество в $\ell_1(A)$.

Предложение 6.3. *Если $M = \{a_n\}_1^\infty \in \ell_1$, то $\rho_t(N) \leqslant \rho_t(M)$ для любого $N = \{b_n\}_1^\infty \in \mathrm{abs}_t(M)$.*

Для произвольного суммируемого семейства $M = \{a_n\}_1^\infty$ в банаховой алгебре A мы будем обозначать через $\Omega(M)$ множество всех элементов из A, представимых в виде $\sum t_n a_n$, где $t_n \in \mathbb{C}$ и $|t_n| \leqslant 1$.

Следствие 6.4.

(i) *Множество $\Omega(M)$ — абсолютно выпукло и компактно.*

(ii) *$\rho(a) \leqslant \rho_t(M)$ для любого $a \in \Omega(M)$.*

(iii) *$\Omega(M) = \{\sum b_n : \{b_n\}_1^\infty \in \mathrm{abs}_t(M)\}$.*

Следствие 6.5. *Если семейство $M = \{a_n\}_1^\infty$ является ℓ_1-квазинильпотентным, то порожденная им подалгебра состоит из квазинильпотентых элементов.*

Так как любому элементу из $\ell_1(A)$ соответствует суммируемое семейство, то ℓ_1-радиус можно рассматривать как функцию на $\ell_1(A)$. Можно доказать (хотя это требует более тонкой техники, чем аналогичные утверждения для совместного спектрального радиуса), что эта функция полунепрерывна сверху и субгармонична. Приведем точные формулировки.

Предложение 6.6. *Пусть $M \in \ell_1(A)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\rho_t(N) \leqslant \rho_t(M) + \varepsilon$, если $\|N - M\|_{\ell_1} < \delta$.*

Теорема 6.7. *Если $\mathcal{F}$ — аналитическая $\ell_1(A)$-значная функция на $\mathcal{D}$, то функции $\ln(\rho_t(\mathcal{F})) : \lambda \longmapsto \ln(\rho_t(\mathcal{F}(\lambda)))$ и $\rho_t(\mathcal{F}) : \lambda \longmapsto \rho_t(\mathcal{F}(\lambda))$ субгармоничны на $\mathcal{D}$.*

Пусть a — элемент банаховой алгебры A, а $M = \{a_n\}_{n=1}^\infty$ — суммируемое семейство в A. Через $\{a\} \sqcup M$ мы обозначаем семейство $\{x_n\}_1^\infty$, где $x_1 = a$ и $x_n = a_{n-1}$ при $n > 1$.

Пусть $\mathcal{R}_t(A)$ — множество всех таких $a \in A$, что $\rho_t(\{a\} \sqcup M) = \rho_t(M)$ при любом $M \in \ell_1(A)$. Легко видеть, что $\mathcal{R}_t(A)$ состоит из квазинильпотентных элементов алгебры A.

Теорема 6.8. *$\mathcal{R}_t(A)$ — замкнутый идеал алгебры A.*

Заметим, что отсюда легко следует включение $\mathcal{R}_t(A) \subset \mathrm{Rad}(A)$.

Теорема 6.9. *$\rho_t(M \sqcup N) = \rho_t(N)$ для любых $M \in \ell_1(\mathcal{R}_t(A))$ и $N \in \ell_1(A)$.*

Подмножество G банаховой алгебры A называется *ℓ_1-квазинильпотентным,* если любое суммируемое семейство, состоящее из элементов G, ℓ_1-квазинильпотентно. В этом же смысле мы будем употреблять термин *ℓ_1-квазинильпотентный идеал*.

Следствие 6.10. *$\mathcal{R}_t(A)$ — ℓ_1-квазинильпотентный идеал.*

Следствие 6.11. *$\rho_t(M+N) = \rho_t(N)$ и $\rho_t(M*N) = \rho_t(MN) = 0$ для любых $M \in \ell_1(\mathcal{R}_t(A))$ и $N \in \ell_1(A)$.*

Теорема 6.12. *Для элемента a банаховой алгебры A следующие условия эквивалентны:*
(i) *$a \in \mathcal{R}_t(A)$;*
(ii) *$\rho_t(aM) = 0$ для любого $M \in \ell_1(A)$.*

Следующий результат устанавливает, что $\mathcal{R}_t(A)$ — *наибольший* из ℓ_1-квазинильпотентных идеалов алгебры A, т. е. идеал $\mathcal{R}_t(A)$ собирает свойство ℓ_1-квазинильпотентности (типичная черта радикалов).

Теорема 6.13. *Если I — ℓ_1-квазинильпотентный (возможно, односторонний, не обязательно замкнутый) идеал алгебры A, то $I \subset \mathcal{R}_t(A)$.*

Теперь рассмотрим функториальные свойства отображения $A \mapsto \mathcal{R}_t(A)$.

Теорема 6.14. *Если g — непрерывное отображение банаховой алгебры A на банахову алгебру B, то $g(\mathcal{R}_t(A)) \subset \mathcal{R}_t(B)$.*

Как обычно, через a/I мы обозначаем образ элемента a банаховой алгебры A в ее фактор-алгебре A/I по замкнутому идеалу I. Аналогичные обозначения приняты для образов подмножеств и семейств элементов алгебры A.

Теорема 6.15. *Если M — суммируемое семейство элементов в банаховой алгебре A, то $\rho_t(M) = \rho_t(M/I)$ для любого ℓ_1-квазинильпотентного идеала I. В частности, $\rho_t(M) = \rho_t(M/\mathcal{R}_t(A))$.*

Следствие 6.16. $\mathcal{R}_t(A/\mathcal{R}_t(A)) = 0$.

Теорема 6.17. *Для любого замкнутого идеала I банаховой алгебры A выполнено условие $\mathcal{R}_t(I) = \mathcal{R}_t(A) \cap I$. Более общим образом, $\mathcal{R}_t(I, \|\cdot\|_I) = I \cap \mathcal{R}_t$ для любого банахова идеала $I \subset A$.*

Следствие 6.18. $\mathcal{R}_t(\mathcal{R}_t(A)) = \mathcal{R}_t(A)$.

Таким образом, установлен следующий результат:

Теорема 6.19. *Отображение $A \mapsto \mathcal{R}_t(A)$ является равномерным, гибко наследственным топологическим радикалом.*

Полученный радикал называется *тензорным*, поскольку, как мы далее увидим, он тесно связан с проблемой радикальности тензорных произведений.

6.2. Тензорно радикальные алгебры. Банахова алгебра A называется *тензорно радикальной*, если для любой банаховой алгебры B проективное тензорное произведение $A\widehat{\otimes}B$ радикально.

Из ассоциативности и дистрибутивности тензорного произведения немедленно следует, что тензорное произведение тензорно радикальной алгебры на произвольную, так же как и прямая сумма тензорно радикальных алгебр, тензорно радикальны.

Выясним связь между понятиями тензорной радикальности и ℓ_1-квазинильпотентности.

Пусть A и B — банаховы алгебры, $M = \{a_n\}_1^\infty \in \ell_1(A)$ и $L = \{b_n\}_1^\infty \in \ell_\infty(B)$. Обозначим через $M_\otimes L$ элемент $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \otimes b_n \in A\widehat{\otimes}B$. Ясно, что любой элемент из $A\widehat{\otimes}B$ имеет такой вид.

Теорема 6.20. *Пусть A — банахова алгебра. Тогда:*
(i) *$\rho(M_\otimes L) \leqslant \rho_t(M)\rho(L)$ для любой банаховой алгебры B и любых $M \in \ell_1(A)$ и $L \in \ell_\infty(B)$.*

(ii) *Существуют унитальная банахова алгебра B и элемент $L \in \ell_\infty(B)$, такие что отображение $M \longmapsto M_\otimes L$ из $\ell_1(A)$ в $A\widehat{\otimes}B$ удовлетворяет условиям*: $\|M_\otimes L\| = \eta(M)$ *и* $\rho(M_\otimes L) = \rho_t(M)$ *для всех* $M \in \ell_1(A)$.

Банахова алгебра B из части (ii) теоремы 6.20 — это $l^1(G)$, где G — свободная полугруппа со счетным числом образующих w_n, а в качестве L берется семейство, соответствующее последовательности образующих.

Следующий результат непосредственно следует из части (i) теоремы 6.20.

Следствие 6.21. *Если семейство M в A является ℓ_1-квазинильпотентным, то для любого ограниченного семейства N в произвольной алгебре B элемент $M_\otimes N$ является ℓ_1-квазинильпотентным в $A\widehat{\otimes}B$.*

Теорема 6.22. *Для банаховой алгебры A следующие условия эквивалентны*:

(i) *A тензорно радикальна*;
(ii) *A ℓ_1-квазинильпотентна*;
(iii) *$A\widehat{\otimes}B$ ℓ_1-квазинильпотентна для любой банаховой алгебры B.*

Следствие 6.23. *Всякая замкнутая подалгебра тензорно радикальной банаховой алгебры тензорно радикальна.*

Следствие 6.24. *Если в банаховой алгебре A есть плотная подалгебра B, такая что все суммируемые семейства элементов из B ℓ_1-квазинильпотентны, то A также ℓ_1-квазинильпотентна.*

Применяя следствие 6.10 и теорему 6.22, мы заключаем, что в любой банаховой алгебре A идеал $\mathcal{R}_t(A)$ является ее наибольшим тензорно радикальным идеалом.

Теорема 6.25. *Элемент a банаховой алгебры A тогда и только тогда принадлежит идеалу $\mathcal{R}_t(A)$, когда $a \otimes b \in \operatorname{Rad}\left(A\widehat{\otimes}B\right)$ для любой банаховой алгебры B и любого элемента $b \in B$.*

Предложение 6.26. *Пусть I — замкнутый идеал банаховой алгебры A. Если алгебры I и A/I тензорно радикальны, то и A тензорно радикальна.*

Предложение 6.27. *Пусть I — банахов идеал банаховой алгебры A. Если A тензорно радикальна, то и алгебра $(I, \|\cdot\|_I)$ тензорно радикальна.*

Легко проверить, что сумма $I + J$ и пересечение $I \cap J$ банаховых идеалов I, J алгебры A являются банаховыми идеалами относительно «естественных» норм

$$\|x\|_{I+J} = \inf\{\|a\|_I + \|b\|_J : a \in I, b \in J, a + b = x\} \text{ и } \|x\|_{I\cap J} = \max\{\|x\|_I, \|x\|_J\}.$$

Следствие 6.28. *Пусть I и J — гибкие идеалы банаховой алгебры A. Если I и J тензорно радикальны, то их сумма $I+J$ и пересечение $I\cap J$ тензорно радикальны* (*как банаховы алгебры с нормами* $\|x\|_{I+J}$ *и* $\|x\|_{I\cap J}$).

Условимся обозначать через $Q(A)$ множество всех квазинильпотентных элементов банаховой алгебры A. Далее, для произвольного идеала $J \subset A$ положим $Q_J(A) = \{x \in A : x/\overline{J} \in Q(A/\overline{J})\}$ — множество элементов *квазинильпотентных по модулю J*.

Следующий результат важен для приложений в теории операторов умножения.

Лемма 6.29. *Пусть A_1, A_2 — банаховы алгебры, и пусть $J_i \subset I_i$ — идеалы алгебры A_i, при $i = 1, 2$. Обозначим через J идеал алгебры $A = A_1\widehat{\otimes}A_2$, порожденный $J_1 \otimes A_2 + A_1 \otimes J_2$, а через I — идеал алгебры A, порожденный $I_1 \otimes A_2 + A_1 \otimes I_2$. Если $\overline{I_i}/\overline{J_i}$ тензорно радикальны, то $\overline{I} \subset Q_J(A)$.*

Естественный вопрос о связи между радикалами $\mathcal{R}_t$ и $\mathcal{R}_{cq}$ решается с помощью техники тензорных произведений; прямых оценок ℓ_1-радиуса недостаточно.

Теорема 6.30. *Всякая компактно квазинильпотентная алгебра тензорно радикальна.*

Доказательство. В самом деле, пусть алгебра A компактно квазинильпотентна, алгебра B произвольна, и пусть $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \otimes b_n \in A\widehat{\otimes}B$. Можно считать, что последовательность $\alpha_n = \|a_n\|$ суммируема и что $\|b_n\| \leqslant 1$ для всех n. Легко видеть, что можно найти такую числовую последовательность $\varepsilon_n \to 0$, что последовательность $\lambda_n := \alpha_n/\varepsilon_n$ суммируема. Пусть $c_n = \lambda_n^{-1} a_n$, тогда $\|c_n\| \to 0$, так что множество $N := \{c_n : n = 1, 2, \ldots\}$ предкомпактно, а потому $\rho(N) = 0$. Полагая $K = \{c_n \otimes b_n : n = 1, 2, \ldots\}$, нетрудно проверить, что

$$\|K^k\| \leqslant \|N^k\|,$$

откуда $\rho(K) \leqslant \rho(N) = 0$. Из этого уже прямой оценкой нетрудно вывести, что

$$\rho(x) = \rho(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n \otimes b_n) = 0.$$

Таким образом $A\widehat{\otimes}B$ состоит из квазинильпотентных элементов, что и требовалось. □

Таким образом, тензорный радикал находится между компактно квазинильпотентным радикалом и радикалом Джекобсона. Следующий результат уточняет эти сравнения.

Следствие 6.31. $\mathcal{R}_{cq} \leqslant \mathcal{R}_t \leqslant \mathcal{R}_{fq} \leqslant \mathrm{Rad}$.

Пользуясь теоремой 6.22, можно усилить теорему 6.30 следующим образом:

Теорема 6.32. *Если алгебра A компактно квазинильпотентна, то и $A\widehat{\otimes}B$ компактно квазинильпотентна для любой B.*

Для приложений важно иметь информацию об алгебрах, коммутативных по модулю тензорного радикала.

Теорема 6.33.

(i) *Если банаховы алгебры A_1 и A_2 коммутативны по модулю тензорного радикала, то такова же и алгебра $A_1\widehat{\otimes}A_2$.*

(ii) *Если A_1 коммутативна по модулю тензорного радикала, а A_2 радикальна, то $A_1\widehat{\otimes}A_2$ радикальна.*

6.3. Тензорные произведения и общие радикалы. Пусть P — произвольный ТР; банахова алгебра A называется *тензорно P-радикальной*, если P-радикальны все алгебры $A\widehat{\otimes}B$, где B — произвольная банахова алгебра.

Будем говорить, что радикал P *тензорно устойчив*, если все P-радикальные алгебры тензорно P-радикальны.

Более сильное требование — справедливость включения

$$P(A) \otimes B \subset P(A\widehat{\otimes}B)$$

для любой банаховой алгебры B; если это условие выполнено, то говорим, что радикал P тензорно согласован. Ясно, что тензорно согласованные радикалы тензорно устойчивы.

Теорема 6.34. *Для гибко наследственных радикалов условия тензорной согласованности и тензорной устойчивости эквивалентны.*

Любому топологическому радикалу P мы сопоставим отображение P^t, действующее на классе банаховых алгебрах по следующему правилу:

$$P^t(A) = \{a \in A : a \otimes B \subset P(A\widehat{\otimes}B), \text{ для любой банаховой алгебры } B\}.$$

Легко убедиться, что $P^t(A)$ — замкнутый идеал в A. Будем называть отображение P^t *тензорным оснащением* радикала P.

Теорема 6.35. *Если радикал P является гибко наследственным, то отображение P^t удовлетворяет условиям* (R1), (R2) *и второму условию в* (R4): *$P^t(J) \subset P^t(A)$ для любого замкнутого идеала J алгебры A.*

В частности, тензорное оснащение любого гибко наследственного радикала является предрадикалом. Чтобы выяснить, в каких случаях P^t является радикалом, введем в рассмотрение один специальный класс банаховых алгебр.

Пусть I — замкнутый идеал банаховой алгебры A. Для банаховой алгебры B естественно определяется гомоморфизм $i = i_{I,A,B} : I\widehat{\otimes}B \to A\widehat{\otimes}B$. Во многих случаях такой гомоморфизм инъективен — например, если I имеет ограниченную аппроксимативную единицу, то i даже ограничен снизу. Однако в общем случае его ядро $K = K(I, A, B)$ может быть ненулевым. Будем называть алгебры вида $K(I, A, B)$ *тензорно патологическими алгебрами*.

Теорема 6.36. *Если гибко наследственный радикал P обладает тем свойством, что все тензорно патологические алгебры $K(I, A, B)$ являются P-радикальными, то его тензорное оснащение P^t — наследственный топологический радикал.*

Из теоремы 6.25 следует, что радикал $\mathcal{R}_t$ — это тензорное оснащение радикала Джекобсона.

Будем говорить, что P является *тензорно оснащенным*, если $P^t = P$. Прямо из определений следует, что тензорно оснащенные радикалы являются тензорно согласованными. Верно ли обратное?

Основные результаты раздела получены в работах Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [10, 73, 74].

7. Условия компактности и радикалы

Предмет данного раздела — положительное решение вопроса о совпадении радикала Джекобсона с компактно-квазинильпотентным радикалом (а следовательно, и с тензорным радикалом) в классе алгебр с условиями компактности некоторых операторов умножения. Этот результат основан на взаимодействии теории топологических радикалов, теории совместного спектрального радиуса и теории инвариантных подпространств, причем в процессе доказательства были получены существенные продвижения в каждой из этих трех теорий.

7.1. Гипокомпактный радикал. Каждый элемент a банаховой алгебры A определяет действующие в A операторы L_a, R_a левого и правого умножения на a: $L_a(x) = ax$, $R_a(x) = xa$. Элемент a называется *компактным*, если компактен оператор $W_a = L_aR_a$. Если оператор W_a имеет конечный ранг, то говорят, что a — элемент *конечного ранга*.

Множество всех компактных элементов алгебры A мы обозначим $\mathcal{C}(A)$. Это замкнутый полугрупповой идеал в A (т. е., $A\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{C}(A), \mathcal{C}(A)A \subset \mathcal{C}(A)$), так что его линейная оболочка $\operatorname{span}\mathcal{C}(A)$ — идеал в A.

Алгебра A называется *компактной*, если $A = \mathcal{C}(A)$, и *бикомпактной*, если компактны все операторы $L_aR_b : a \in D, b \in A$. Алгебра A называется *аппроксимативной*, если в ней плотны элементы конечного ранга.

Как показал Вала [78], компактные элементы алгебры $\mathcal{B}(X)$ — это просто компактные операторы. В этом же смысле оправдан и термин «элемент конечного ранга». Алгебра $\mathcal{K}(X)$ всех компактных операторов в X бикомпактна, а алгебра $\mathcal{A}(X) = \overline{\mathcal{F}(X)}$ всех операторов, аппроксимируемых операторами конечного ранга, аппроксимативна.

В настоящее время известно большое количество примеров банаховых пространств X, для которых $\mathcal{K}(X) \neq \mathcal{A}(X)$ (см., например, книгу А. Пича [63]). Учитывая результат Дж. Александера [14], отсюда можно получить ряд интересных примеров бикомпактных радикальных банаховых алгебр:

Лемма 7.1. *Для любого банахова пространства X алгебра $\mathcal{K}(X)/\mathcal{A}(X)$ радикальна.*

Напомним, что операторы, образы которых в алгебре $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ квазинильпотентны, называются *операторами Рисса*.

Следствие 7.2. *Если $a \in \mathcal{B}(X)$ — оператор Рисса, то для любого $\varepsilon > 0$ неравенство*

$$\operatorname{dist}_{\|\cdot\|_{\mathcal{B}}}(a^n, \mathcal{F}(X)) < \varepsilon^n$$

выполняется для всех достаточно больших n.

Условимся для любого нормированного пространства $\mathcal{Y}$ обозначать через $\mathcal{Y}_{\odot}$ его замкнутый единичный шар.

Лемма 7.3. *Если $f : A \to B$ — непрерывный эпиморфизм банаховых алгебр, то $f(\mathcal{C}(A)) \subset \mathcal{C}(B)$.*

Доказательство. Пусть $a \in \mathcal{C}(A)$. Так как $fW_a = W_{f(a)}f$ и $f(A_\odot)$ содержит открытый шар пространства B, то $W_{f(a)}$ компактен в B. □

Лемма 7.4. *Пусть J — идеал в A. Если $\mathcal{C}(J) \neq 0$, то $J \cap \mathcal{C}(A) \neq 0$.*

Доказательство. Легко видеть, что

$$W_{ba} = L_b W_a R_{bq} = R_a W_b L_a \tag{7.1}$$

для всех $a, b \in A$. Если $a \in \mathcal{C}(J)$, то при любом $b \in J$ оператор W_{ba} компактен в A. Поэтому $J\mathcal{C}(J) \subset J \cap \mathcal{C}(A)$ и все доказано, если $J\mathcal{C}(J) \neq 0$. С другой стороны, если $J\mathcal{C}(J) = 0$, то $\mathcal{C}(J) \subset \mathcal{C}(A)$, поскольку $W_a(x) = (ax)\, a = 0$ для всех $a \in \mathcal{C}(J)$ и $x \in A$. □

Следующий результат легко следует из (7.1).

Лемма 7.5. *Замкнутый идеал, порожденный компактным элементом банаховой алгебры A, бикомпактен.*

Банахова алгебра A называется *гипокомпактной* (*гипофинитной*) если любой ее ненулевой фактор A/J содержит ненулевой компактный элемент (соответственно, элемент конечного ранга). Эти понятия распространим на замкнутые идеалы и подалгебры, рассматривая их как банаховы алгебры.

Лемма 7.6. *Любой* (*возможно, односторонний, не обязательно замкнутый*) *ненулевой идеал гипокомпактной алгебры содержит ненулевой компактный элемент этой алгебры.*

Все бикомпактные алгебры очевидным образом гипокомпактны. Следующий результат показывает, что все гипокомпактные алгебры могут быть получены последовательным расширением бикомпактных.

Предложение 7.7. *Пусть J — идеал в банаховой алгебре A. Тогда следующие условия эквивалентны*:
- (i) *J гипокомпактен*;
- (ii) *для всякого непрерывного открытого эпиморфизма $f : A \longrightarrow B$ либо $f(J) = 0$, либо $f(J) \cap \mathcal{C}(B) \neq 0$*;
- (iii) *существует возрастающая трансфинитная цепочка $(J_\alpha)_{\alpha \leqslant \gamma}$ идеалов в A, такая что $J_0 = 0$, $J_\gamma = J$, все J_α замкнуты в J, и все факторы $J_{\alpha+1}/J_\alpha$ бикомпактны.*

Следствие 7.8. *Пусть A — банахова алгебра. Тогда следующие условия эквивалентны*:
- (i) *A гипокомпактна*;
- (ii) *все идеалы и факторы алгебры A гипокомпактны*;
- (iii) *J и A/J гипокомпактны для некоторого замкнутого идеала J алгебры A.*

Следствие 7.9. *В любой банаховой алгебре есть наибольший гипокомпактный идеал.*

Обозначим наибольший гипокомпактный идеал алгебры A через $\mathcal{R}_{hc}(A)$.

Лемма 7.10. *Если J — замкнутый идеал в A, то $\mathcal{R}_{hc}(J) = J \cap \mathcal{R}_{hc}(A)$.*

Лемма 7.11. *Алгебра $A/\mathcal{R}_{hc}(A)$ не имеет ненулевых гипокомпактных идеалов и компактных элементов.*

Доказательство. В самом деле, если J — гипокомпактный идеал алгебры $A/\mathcal{R}_{hc}(A)$, то, по следствию 7.8, его прообраз $\left\{x \in A : q_{\mathcal{R}_{hc}(A)}(x) \in J\right\}$ — гипокомпактный идеал в A, строго содержащий $\mathcal{R}_{hc}(A)$, что дает противоречие. □

По лемме 7.5, если $A/\mathcal{R}_{hc}(A)$ имеет ненулевые компактные элементы, то у нее есть ненулевые бикомпактные идеалы, что невозможно.

Теорема 7.12. *Отображение $A \longmapsto \mathcal{R}_{hc}(A)$ — наследственный топологический радикал.*

Доказательство. Требует доказательства только (R1), поскольку (R2) и (R5) установлены в леммах 7.11 и 7.10.

Пусть $f : A \to B$ — непрерывный открытый эпиморфизм. Обозначим, для краткости, $q_{\mathcal{R}_{hc}(B)}$ через q. Ясно, что $q \circ f$ — непрерывный открытый эпиморфизм A на $B/\mathcal{R}_{hc}(B)$. Так как идеал $\mathcal{R}_{hc}(A)$ гипокомпактен, то, по предложению 7.7, его образ $(q \circ f)(\mathcal{R}_{hc}(A))$ либо равен нулю, либо содержит ненулевой компактный элемент алгебры $B/\mathcal{R}_{hc}(B)$. Но последнее невозможно в силу леммы 7.11. Значит, $(q \circ f)(\mathcal{R}_{hc}(A)) = 0$ и $f(\mathcal{R}_{hc}(A)) \subset \mathcal{R}_{hc}(B)$. □

Замечание 7.13. Как уже отмечалось, $\mathcal{K}(X)$ — бикомпактный идеал алгебры $\mathcal{B}(X)$, и потому содержится в $\mathcal{R}_{hc}(\mathcal{B}(X))$. Во многих случаях (например, для гильбертова пространства) $\mathcal{K}(X)$ совпадает с $\mathcal{R}_{hc}(\mathcal{B}(X))$, однако это происходит не всегда.

Пусть $\mathcal{K}_w(X)$ — идеал всех слабо компактных операторов в X. Как известно (см. [4, следствие 6.8.13]), для широкого класса банаховых пространств X, включающего все пространства L^1 суммируемых функций, произведение двух операторов из $\mathcal{K}_w(X)$ компактно, так что фактор-алгебра $\mathcal{K}_w(X)/\mathcal{K}(X)$ имеет тривиальное умножение, а значит, бикомпактна. Поэтому для таких X идеал $\mathcal{K}_w(X)$ гипокомпактен, т. е. содержится в $\mathcal{R}_{hc}(\mathcal{B}(X))$. Таким образом, идеал $\mathcal{R}_{hc}(\mathcal{B}(X))$ может строго включать $\mathcal{K}(X)$.

Еще более яркий пример — пространство Аргироса—Хейдона [19], где каждый оператор — сумма скалярного и компактного; для него, конечно, $\mathcal{R}_{hc}(\mathcal{B}(X)) = \mathcal{B}(X)$.

7.2. Совместный спектральный радиус и инвариантные подпространства. Пусть X — банахово пространство; замкнутое подпространство $Y \subset X$ называется инвариантным для оператора $T \in \mathcal{B}(X)$, если $TY \subset Y$, т. е. $Tx \in Y$ для любого $x \in Y$; более общим образом, подпространство инвариантно для семейства операторов, если оно инвариантно для каждого оператора из этого семейства. Подпространство, инвариантное для всех операторов, коммутирующих с T, называется *гиперинвариантным*; для произвольного семейства $W \subset \mathcal{B}(X)$ гиперинвариантное подпространство— это подпространство, инвариантное для W и его коммутанта $W' := \{S : TS = ST \text{ при } T \in W\}$.

Множество операторов $W \subset \mathcal{B}(X)$ называется *транзитивным*, если оно не имеет нетривиальных инвариантных подпространств, и *нетранзитивным* в противном случае. Далее, W называется *триангулируемым*, если существует максимальная цепь подпространств пространства X, состоящая из инвариантных подпространств для $\mathcal{W}$

В работе В. И. Ломоносова [8] был получен фундаментальный результат об инвариантных подпространствах операторов, коммутирующих с компактными операторами, давший новый импульс многим дальнейшим достижениям теории инвариантных подпространств.

Теорема 7.14. *Пусть X — банахово пространство. Если алгебра $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X)$ не имеет инвариантных подпространств, а $K \in \mathcal{K}(X)$ — ненулевой компактный оператор, то найдется такой оператор $T \in \mathcal{A}$, что $KTx = x$ для некоторого ненулевого вектора $x \in X$.*

Доказательство этого утверждения замечательным образом использует теорему Шаудера о неподвижной точке.

Следствием теоремы 7.14 является результат бернсайдовского типа:

Теорема 7.15. *Если алгебра операторов в банаховом пространстве X содержит ненулевой компактный оператор и не имеет инвариантных подпространств, то она плотна в $\mathcal{B}(X)$ в слабой операторной топологии.*

Применяя эту теорему к коммутанту не скалярного оператора и учитывая, что этот коммутант не может быть плотным в $\mathcal{B}(X)$, получаем следующее утверждение:

Следствие 7.16. *Любой не кратный единичному оператор T, коммутирующий с ненулевым компактным оператором, имеет гиперинвариантное подпространство.*

Следуя М. Г. Крейну, будем называть оператор *вольтерровым*, если он компактен и квазинильпотентен. Работать с не вольтерровыми компактными операторами обычно проще, так как у них есть собственные векторы и порожденные ими алгебры содержат конечномерные проекторы; сила техники Ломоносова в том, что она позволяет работать с вольтерровыми. Вот одно из важных следствий приведенных выше результатов:

Следствие 7.17. *Если радикал* $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ *замкнутой подалгебры* $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X)$ *содержит ненулевой компактный оператор, то* $\mathcal{A}$ *имеет инвариантное подпространство.*

В самом деле, если алгебра $\mathcal{A}$ транзитивна, то транзитивен и ее идеал $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$. Поскольку в нем есть компактные операторы, он, в силу теоремы 7.14, содержит оператор с собственным значением 1, а это противоречит определению радикала Джекобсона.

В частности, любая алгебра вольтерровых операторов имеет инвариантное подпространство. Поскольку вольтерровы операторы остаются вольтерровыми при сужении на инвариантные подпространства и факторпространства, приходим к следующему утверждению:

Следствие 7.18. *Всякая алгебра* $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X)$ *вольтерровых операторов триангулируема.*

В работе В. С. Шульмана [12] следствие 7.17 было усилено следующим образом:

Теорема 7.19. *Если радикал алгебры* $\mathcal{A}$ *операторов содержит компактный оператор, то* $\mathcal{A}$ *имеет гиперинвариантное подпространство. В частности, любая алгебра вольтерровых операторов имеет гиперинвариантное подпространство.*

Здесь впервые в теории инвариантных подпространств применялась техника совместного спектрального радиуса. В [12] основной результат выводился из двух утверждений, которые нам будет удобно отдельно сформулировать:

Лемма 7.20. *Если конечное множество вольтерровых операторов триангулируемо, то его ССР равен нулю.*

Схема доказательства леммы 7.20. Пусть $M \subset \mathcal{B}(X)$ — фиксированное конечное множество. Прямая оценка норм показывает, что если $Y \subset X$ — инвариантное подпространство для M, то $\rho(M) = \max\{\rho(M|_Y), \rho(M|_{X/Y})\}$. Отсюда следует, что для любой цепи $\Gamma = \{0 = X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n = X\}$

$$\rho(M) = \max_{i=0}^{n-1}\{\rho(M|_{X_{i+1}/X_i})\} \leqslant \max_{i=0}^{n-1}\{\|M|_{X_{i+1}/X_i}\|\}.$$

Будем говорить, что Γ является *ε-цепью* для M, если $\|M|_{X_{i+1}/X_i}\| < \varepsilon$ для всех i.

Используя соображения компактности, можно доказать, что если $M \subset \mathcal{K}(X)$ и Λ — произвольная цепь инвариантных подпространств для M, на разрывах которой операторы из M обращаются в нуль, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти в Λ конечную ε-цепь. Учитывая предыдущее, мы заключаем, что в этом случае $\rho(M) = 0$. Пусть теперь M состоит из вольтерровых операторов, и пусть Λ — максимальная цепь подпространств, состоящая из инвариантных подпространств для M (она существует по условию). Так как разрывы в этом случае одномерны, то операторы, индуцируемые операторами из M на разрывах, скалярны, и соответствующие скаляры принадлежат их спектрам (см., например, книгу [24]). Из вольтерровости следует, что числа эти нулевые; в силу доказанного выше, $\rho(M) = 0$. $\square$

Лемма 7.21. *Если множество* W *компактных операторов конечно квазинильпотентно* (*т. е. ССР всех его конечных подмножеств равен нулю*), *то* W *имеет гиперинвариантное подпространство.*

Доказательство. В самом деле, прямо из определения ССР легко вывести, что свойство конечной квазинильпотентности переносится на объединение всех степеней множества W, т. е., на порожденную W полугруппу. Поэтому можно считать, что W — полугруппа.

Обозначим через $\mathcal{D}$ алгебру, порожденную W и его коммутантом W'; требуется доказать, что $\mathcal{D}$ не транзитивна. Множество $\mathcal{J}$ всех операторов, представимых в виде $T = \sum\limits_{i=1}^{k} T_i S_i$, где $k \in \mathbb{N}$, $T_i \in W'$, $S_i \in W$, является идеалом в $\mathcal{D}$, поэтому достаточно доказать, что $\mathcal{J}$ имеет инвариантное подпространство. Так как $\mathcal{J}$ состоит из компактных операторов, то, согласно следствию 7.18, нужно лишь проверить, что все эти операторы квазинильпотентны. Это делается прямой оценкой норм степеней суммы, с учетом того, что $\rho(\{S_1, \ldots, S_k\}) = 0$, а условие $\rho(M) = 0$ эквивалентно условию $\|M^n\| = o(\varepsilon^n)$ для любого $\varepsilon > 0$. $\square$

Теперь уже легко получить доказательство теоремы 7.19. Пусть $W = \mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{K}(X)$. Алгебра, порожденная W и $\mathcal{A}'$, является идеалом в алгебре, порожденной $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$; так как $\mathcal{A}' \subset W'$, то достаточно доказать, что W имеет гиперинвариантное подпространство. Но алгебра W вольтеррова, любое ее конечное подмножество имеет нулевой ССР в силу леммы 7.20. Остается применить лемму 7.21.

Следующий результат — решение известной «проблемы вольтерровой полугруппы», полученное Ю. В. Туровским [77] (см. историю этого вопроса в книге Х. Раджави и П. Розенталя [65]).

Теорема 7.22. *Всякая полугруппа вольтерровых операторов в банаховом пространстве*:

(i) *конечно квазинильпотентна*;
(ii) *имеет гиперинвариантное подпространство*;
(iii) *триангулируема.*

Доказательство. Наметим схему доказательства. Пусть $G \subset \mathcal{B}(X)$ — полугруппа вольтерровых операторов, а M — ее конечное подмножество. Докажем прежде всего, что если $\rho(M) \neq 0$, то M имеет инвариантное подпространство.

Не ограничивая общности, можно считать, что $\rho(M) = 1$. Пусть $\mathcal{F} = SG(M) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M^n$ — полугруппа, порожденная множеством M. Нетрудно доказать, что если полугруппа $\mathcal{F}$ ограничена, то она предкомпактна. В этом случае, заменяя норму $\|\cdot\|$ эквивалентной нормой $|x| = \max\{\|x\|, \|\mathcal{F}x\|\}$ (совместный спектральный радиус при этом не меняется), можно считать, что $\|T\| \leqslant 1$ для любого $T \in \mathcal{F}$.

Легко видеть, что если $\|M^n\| < 1$ при некотором n, то $\rho(M) < 1$ в противоречие с нашим предположением. Поэтому существует такая последовательность $T_n \in M^n$, что $\|T_n\| = 1$. Обозначим через $\mathcal{E}$ множество предельных точек всех таких последовательностей. Ясно, что любой оператор из $\mathcal{E}$ имеет норму 1 и вольтерров. Нетрудно показать, что каждый оператор $T \in \mathcal{E}$ допускает факторизацию: $T = UV$, где $U, V \in \mathcal{E}$. Используя компактность $\mathcal{E}$, отсюда нетрудно вывести, что существуют такие операторы $T, U \in \mathcal{E}$, что $T = UT$. В самом деле, для $T \in \mathcal{E}$ имеем $T = V_1T_1$, аналогично $T_1 = V_2T_2$, и т. д., $T_n = V_{n+1}T_{n+1}$. Выбирая из последовательности T_n сходящую подпоследовательность и переобозначая, имеем $T_n = U_nT_{n+1}$, $T_n \to T$. Отсюда следует, что $T = UT$ для любой предельной точки U последовательности U_n. Но тогда U имеет собственное значение 1, что невозможно, так как U квазинильпотентен.

Таким образом, полугруппа $\mathcal{F}$ неограничена. Для любого n обозначим через $\mathcal{F}_n$ полугруппу, порожденную множеством t_nM, где $t_n = 1 - 1/n$, и единичным оператором. Из определения ССР легко следует, что $\mathcal{F}_n$ ограничена. Определим норму $|\cdot|_n$ на X формулой $|x|_n = \|\mathcal{F}_nx\|/\|\mathcal{F}_n\|$; ясно, что все эти нормы эквивалентны $\|\cdot\|$. Полагая $|x| = \limsup_n |x|_n$, легко проверить, что $|\cdot|$ — полунорма, $|x| \leqslant \|x\|$ и $|Tx| \leqslant |x|$ для всех $T \in \mathcal{F}$, $x \in X$. Значит, подпространство $N = \{x \in X : |x| = 0\}$ замкнуто и инвариантно для M.

Докажем, что N нетривиально. Так как полугруппа $\mathcal{F}_n$ ограничена, то существуют такие $T_n \in \mathcal{F}_n$ и $x_n \in X$, что $\|x_n\| = 1$ и $\|T_nx_n\| > t_n\|\mathcal{F}_n\|$. При этом можно выбрать T_n так, что $T_n \notin \{1\} \cup t_nM$, т. е. $T_n = R_nV_n$, где $R_n \in \mathcal{F}_n$, $V_n \in t_nM$. Тогда

$$|V_nx_n|_n = \|\mathcal{F}_nV_nx_n\|/\|\mathcal{F}_n\| \geqslant \|R_nV_nx_n\|/\|\mathcal{F}_n\| = \|T_nx_n\|/\|\mathcal{F}_n\| > t_n.$$

Условие $V_n \in t_nM$ M позволяет считать (переходя к подпоследовательности номеров), что $V_n = t_nS$ для некоторого $S \in M$. В силу компактности S, можно считать, что $V_nx_n \to x_0$ для некоторого $x_0 \in X$. Следовательно,

$$|x_0|_n \geqslant |V_nx_n| - |x_0 - V_nx_n|_n \geqslant t_n - \|x_0 - V_nx_n\|,$$

откуда, переходя к верхнему пределу, получим $|x_0| \geqslant 1$, $x_0 \notin N$, $N \neq X$.

С другой стороны, если $N = 0$, то, по теореме о замкнутом графике, $|\cdot|$ — норма, эквивалентная $\|\cdot\|$. Так как $\|M^n\| \to \infty$, то существует такая последовательность номеров n_m, что $\|M^{n_m}\| > \|\bigcup\limits_{j<n_m} M^j\|$. Выберем $T_m \in M^{n_m}$ с $\|T_m\| = \|M^{n_m}\|$. Так как M конечно, то мы можем, переходя к подпоследовательности, считать, что $T_m = S_1R_mS_2$, где $R_m \in M^{n_m-2}$, а $S_1, S_2 \in M$.

В силу компактности оператора $L_{S_1}R_{S_2}$ и ограниченности последовательности $\|R_m\|/\|T_m\|$, последовательность $T_m/\|T_m\|$ имеет предельную точку, так что можно считать, что $T_m/\|T_m\| \to T$, где T — компактный оператор единичной нормы.

Для любого вектора $x_0 \in X$ имеем $\|(T_m/\|T_m\|)x_0\| \to \|Tx_0\|$ и, в то же время, $|(T_m/\|T_m\|)x_0| = |T_m x_0|/\|T_m\| \leqslant |x_0|/\|T_m\| \to 0$. Выбрав x_0 так, что $Tx_0 \neq 0$, получим противоречие. Итак, пространство N ненулевое.

Так как условие вольтерровости сохраняется для сужений на подпространства и фактор-пространства, то множество M триангулируемо. По лемме 7.20, $\rho(M) = 0$. Полученное противоречие доказывает (i).

Часть (ii) теперь следует из леммы 7.21. Чтобы доказать (iii), нужно снова применить результат к сужениям (уже всей полугруппы) на инвариантные подпространства и фактор-пространства. $\square$

Оценивая нормы сужений операторов на разрывы конечных цепочек более точно, чем это было сделано при доказательстве леммы 7.20, можно получить (см. работу Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [70]), что алгебра вольтерровых операторов компактно квазинильпотентна. Это влечет соответствующее усиление утверждения (i) теоремы 7.22:

Следствие 7.23. *Всякая полугруппа вольтерровых операторов компактно квазинильпотентна.*

7.3. Условия компактности и совместный спектральный радиус. В этом разделе будет показано, что на гипокомпактных алгебрах радикалы $\mathcal{R}_{cq}$ и $\mathcal{R}_t$ совпадают с радикалом Джекобсона.

Переход от алгебраической ситуации к операторной удобно осуществлять через рассмотрение операторов умножения. Как обычно, символами L_a и R_a мы обозначаем операторы левого и правого умножения на элемент a в алгебре A: $L_a x = ax$, $R_a x = xa$. Далее, для $M \subset A$ полагаем $L_M = \{L_a : a \in M\}$ и $R_M = \{R_a : a \in M\}$. Нетрудно проверить, что если M ограничено, то $\rho(L_M) = \rho(R_M) = \rho(M)$. Важно, что $\rho(M)$ находит отражение в свойствах семейства операторов $L_M R_M = \{L_a R_b : a, b \in M\}$.

Лемма 7.24. *Пусть M — ограниченное подмножество банаховой алгебры A. Тогда* $\rho(M)^2 = \rho(L_M R_M)$.

Отсюда и из теоремы 7.22 легко следует такое утверждение:

Лемма 7.25. *Если G — полугруппа квазинильпотентных элементов бикомпактной банаховой алгебры A, то ее линейная оболочка* $\operatorname{span} G$ *состоит из квазинильпотентных элементов.*

В самом деле, достаточно заметить, что $L_G R_G$ — полугруппа вольтерровых операторов на A, и следовательно, конечно квазинильпотентна. Поэтому $\rho(M)^2 = \rho(L_M R_M) = 0$ для любого конечного множества $M \subset G$, т. е. G конечно квазинильпотентна, а потому и порожденная ею подалгебра $\operatorname{span} G$ состоит из квазинильпотентных элементов.

Рассмотрим радикал $\mathcal{R}_{hc} \wedge \operatorname{Rad}$. Так как радикалы $\mathcal{R}_{hc}$ и Rad наследственны, то, согласно лемме 3.2, $\mathcal{R}_{hc} \wedge \operatorname{Rad}$ — наследственный радикал, сопоставляющий каждой алгебре A замкнутый идеал $\mathcal{R}_{hc}(A) \cap \operatorname{Rad}(A)$.

Теорема 7.26. $\mathcal{R}_{hc} \wedge \operatorname{Rad} \leqslant \mathcal{R}_{cq}$.

Доказательство. В самом деле, если радикальная банахова алгебра A бикомпактна, то для любого $M \in \mathcal{M}_c(A)$ множество $N = L_M R_M = \{L_a R_b : a, b \in M\}$ предкомпактно и состоит из компактных операторов. Порожденная им полугруппа $S(N)$ состоит из операторов $L_a R_b$ где $a, b \in S(M)$, т. е. является полугруппой вольтерровых операторов. По следствию 7.23, $\rho(N) = 0$, а значит, в силу леммы 7.24, и $\rho(M) = 0$. Мы доказали, что A компактно квазинильпотентна, а потому содержится в $\mathcal{R}_{hc}(A)$.

Пусть теперь A — произвольная банахова алгебра и $J = \operatorname{Rad}(A) \cap \mathcal{R}_{hc}(A)$. Так как идеал J гипокомпактен, то, по предложению 7.7, существует возрастающая трансфинитная цепочка $(J_\alpha)_{\alpha \leqslant \gamma}$ замкнутых идеалов в A, такая что $J_0 = 0$, $J_\gamma = J$, и все факторы $J_{\alpha+1}/J_\alpha$ бикомпактны. Из доказанного выше следует, что эти факторы компактно-квазинильпотентны, т. е., $\mathcal{R}_{cq}$-радикальны. Тогда идеал J также $\mathcal{R}_{cq}$-радикален по лемме 3.1.

Для доказательства совпадения радикалов Rad и $\mathcal{R}_{cq}$ на гипокомпактных алгебрах остается сослаться на очевидное неравенство $\mathcal{R}_{cq} \leqslant \operatorname{Rad}$. $\square$

Следующий результат неоднократно используется в дальнейшем:

Теорема 7.27. *Если банахова алгебра гипокомпактна, то спектры ее элементов* (*не более чем*) *счетны.*

Доказательство. Доказательство легко провести для бикомпактных алгебр, и остается воспользоваться тем, что $\mathcal{R}_s$ — радикал (т. е., свойство рассеянности выдерживает трансфинитные расширения). □

Таким образом, $\mathcal{R}_{hc} \leqslant \mathcal{R}_s$. Как показывает следующая теорема, на классе наследственно полупростых алгебр эти радикалы совпадают.

Теорема 7.28. *Для наследственно полупростых алгебр условия рассеянности, гипокомпактности и гипофинитности эквивалентны.*

Свяжем теперь гипокомпактность с тензорными произведениями.

Лемма 7.29. *Пусть A, B — унитальные банаховы алгебры, J — замкнутый идеал в $A\widehat{\otimes}B$, а I_1 и I_2 — замкнутые идеалы в A и B, соответственно. Пусть элементы $a \in A$, $b \in B$ удовлетворяют условиям $a \otimes I_2 \subset J$, $I_1 \otimes b \subset J$. Если a/I_1 и b/I_2 — компактные элементы алгебр A/I_1 и B/I_2, то $(a \otimes b)/J$ — компактный элемент алгебры $(A\widehat{\otimes}B)/J$.*

Теорема 7.30. *Если банаховы алгебры A и B гипокомпактны, то и алгебра $A\widehat{\otimes}B$ гипокомпактна.*

Так как тензорный радикал является промежуточным между компактно квазинильпотентным и радикалом Джекобсона, то из теоремы 7.26 получаем такое следствие:

Следствие 7.31. *На классе гипокомпактных алгебр тензорный радикал совпадает с радикалом Джекобсона.*

Таким образом, радикальные гипокомпактные алгебры тензорно радикальны:

Следствие 7.32. *Если A — гипокомпактная радикальная* (*в смысле Джекобсона*) *алгебра, то $A\widehat{\otimes}B$ радикальна для любой банаховой алгебры B.*

В заключение отметим, что в работе Г. Андреоласа и М. Ануссиса [18] проведено интересное исследование топологических радикалов гнездовых алгебр. *Гнездовой алгеброй* называется алгебра всех операторов, оставляющих инвариантными все подпространства из некоторого линейно упорядоченного по включению семейства подпространств гильбертова пространства H. Хорошо известно описание радикала Джекобсона гнездовых алгебр, найденное Дж. Рингроузом [67]. В [18] доказано, что для любой гнездовой алгебры A ее гипокомпактный, гипофинитный и рассеянный радикалы совпадают между собой и равны сумме ее радикала Джекобсона и идеала $A \cap \mathcal{K}(H)$ всех компактных операторов из A.

Результаты, приведенные в этом разделе без ссылки на источник, опубликованы в работах Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [10, 11, 70, 74].

8. Операторы умножения и линейные операторные уравнения

8.1. Банаховы бимодули. Пусть U — бимодуль над банаховыми алгебрами A, B; коротко — (A, B)-бимодуль. Тогда U можно рассматривать и как (A^1, B^1)-бимодуль. Скажем, что U является *банаховым бимодулем*, если он является банаховым пространством относительно некоторой нормы $\|\cdot\|_U$, причем
$$\|aub\|_U \leqslant \|a\|_A \, \|u\|_U \, \|b\|_B$$
для всех $a \in A^1$, $b \in B^1$ и $u \in U$.

Элементам $a \in A$, $b \in B$ сопоставим операторы L_a и R_b левого и правого умножения на U, полагая $L_a x = ax$ и $R_b x = xb$ для всех $x \in U$. Алгебра, порожденная всеми такими операторами, называется алгеброй *элементарных операторов* на U с коэффициентами в A, B и обозначается $\mathcal{E}\ell_{A,B}(U)$. Если A, B унитальны, то $\mathcal{E}\ell_{A,B}(U)$ совпадает с алгеброй $\mathcal{E}_{A,B}(U)$, порожденной всеми L_aR_b. В общем случае, $\mathcal{E}_{A,B}(U)$ является идеалом алгебры $\mathcal{E}\ell_{A,B}(U)$, в свою очередь являющейся идеалом в $\mathcal{E}_{A^1,B^1}(U)$. Ясно, что

$$\mathcal{E}\ell_{A,B}(U) = \mathcal{E}_{A^1,B}(U) + \mathcal{E}_{A,B^1}(U),$$

т. е. операторы из $\mathcal{E}_{A,B}(U)$ и $\mathcal{E}\ell_{A,B}(U)$ имеют вид $T = \sum\limits_{i=1}^{n} L_{a_i}R_{b_i}$ и, соответственно, $T = L_a + R_b + \sum\limits_{i=1}^{n} L_{a_i}R_{b_i}$, где $a, a_i \in A$, $b, b_i \in B_i$.

Правое действие алгебры B на U можно рассматривать как левое действие противоположной алгебры B^{op}. Это дает естественный гомоморфизм $\psi = \psi_U$ алгебры $A \otimes B^{op}$ в $\mathcal{B}(U)$:

$$\psi : z = \sum_{i=0}^{n} a_i \otimes b_i \longmapsto \sum_{i=0}^{n} L_{a_i}R_{b_i}.$$

Так как

$$\|\psi(z)\,u\|_U \leqslant \gamma(z)\,\|u\|_U \tag{8.1}$$

для $u \in U$, то идеал $\ker\psi$ замкнут. Поскольку образ ψ равен $\mathcal{E}_{A,B}(U)$, мы можем рассматривать $\mathcal{E}_{A,B}(U)$ как фактор-алгебру алгебры $A \otimes B^{op}$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{E}_{A,B}}$, или, более кратко, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$:

$$\|T\|_{\mathcal{E}} = \inf\left\{\sum \|a_i\|_A \|b_i\|_B : \sum L_{a_i}R_{b_i} = T\right\} \tag{8.2}$$

для $T \in \mathcal{E}_{A,B}(U)$.

Пополнение $\widehat{\mathcal{E}}_{A,B}(U)$ алгебры $\mathcal{E}_{A,B}(U)$ по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ является банаховой подалгеброй алгебры $\mathcal{B}(U)$. Элементы этой алгебры операторов называются *операторами умножения* в (A,B)-бимодуле U.

Предложение 8.1. *Если I и J — банаховы идеалы алгебр A и B, то $\widehat{\mathcal{E}}_{I,J}(U)$ — банахов идеал алгебры $\mathcal{E}_{A,B}(U)$.*

Ниже нам будет удобнее обозначать коэффициентные алгебры через A_1, A_2 вместо A, B.

Теорема 8.2. *Пусть U — банахов бимодуль над банаховыми алгебрами A_1, A_2.*

(i) *Если A_1 и A_2 гипокомпактны, то гипокомпактна и алгебра $\widehat{\mathcal{E}}_{A_1,A_2}(U)$.*

(ii) *Если хотя бы одна из алгебр A_i тензорно радикальна, то $\widehat{\mathcal{E}}_{A_1,A_2}(U)$ тензорно радикальна.*

(iii) *Если обе алгебры A_i коммутативны по модулю тензорного радикала, то тем же свойством обладает и $\widehat{\mathcal{E}}_{A_1,A_2}(U)$.*

Отсюда, используя теорему 7.27, получаем следующий результат.

Следствие 8.3. *Пусть U — банахов бимодуль над унитальными банаховыми алгебрами A_1, A_2. Если A_1 и A_2 гипокомпактны, то спектр любого оператора $T \in \widehat{\mathcal{E}}_{A_1,A_2}(U)$ в алгебре $\mathcal{B}(U)$ не более чем счетен и совпадает с его спектром в $\mathcal{E}_{A_1,A_2}(U)$.*

Следствие 8.4. *Пусть I_i — замкнутые идеалы банаховых алгебр A_i, $i = 1, 2$. Если I_1 и I_2 тензорно радикальны, то алгебра $\widehat{\mathcal{E}}_{A_1,I_2}(U) + \widehat{\mathcal{E}}_{I_1,A_2}(U)$ (с гибкой нормой суммы) тензорно радикальна.*

Доказательство основано на теореме 8.2 и существенно использует предложение 6.28.

Обратимся теперь к более общей конструкции.

Теорема 8.5. *Пусть $J_i \subset I_i$ — идеалы в A_i, $i = 1, 2$, такие что алгебры $\overline{I_i}/\overline{J_i}$ тензорно радикальны. Положим $\widehat{\mathcal{E}}_I = \widehat{\mathcal{E}}_{A_1,I_2}(U) + \widehat{\mathcal{E}}_{I_1,A_2}(U)$ и $\mathcal{E}_J = \mathcal{E}_{A_1,J_2}(U) + \mathcal{E}_{J_1,A_2}(U)$. Тогда $\overline{\mathcal{E}_J}$ — идеал в $\widehat{\mathcal{E}}_I$ и алгебра $\widehat{\mathcal{E}}_I/\overline{\mathcal{E}_J}$ тензорно радикальна.*

Теорема 8.5 активно используется в разделе 8.3.

Следствие 8.6. *Пусть I_i, J_i удовлетворяют условиям теоремы 8.5. Тогда $\widehat{\mathcal{E}}_I \subset Q_{\mathcal{E}_J}(\widehat{\mathcal{E}}_{A_1,A_2}(U))$. Другими словами, если $T \in \widehat{\mathcal{E}}_I$, то, каким бы ни было $\varepsilon > 0$, для всех достаточно больших номеров n найдутся элементарные операторы $S_n \in \mathcal{E}_J$ на U, такие что $\|T^n - S_n\|_{\mathcal{E}} < \varepsilon^n$.*

8.2. Операторные бимодули. Рассмотрим теперь случай, когда A_1, A_2 — это алгебры $\mathcal{B}(Y)$, $\mathcal{B}(X)$ всех операторов на банаховых пространствах X, Y, а U — нормированное подпространство в пространстве $\mathcal{B}(X, Y)$ всех операторов из X в Y, такое что $A_1 U A_2 \subset U$ и норма в U согласована с модульной структурой:

$$\|\cdot\|_U \geqslant \|\cdot\|_{\mathcal{B}} = \|\cdot\| \ \text{ и } \ \|axb\|_U \leqslant \|a\| \, \|x\|_U \, \|b\|$$

для всех $a \in \mathcal{B}(Y)$, $b \in \mathcal{B}(X)$, $x \in U$. В этом случае мы говорим, что U — операторный бимодуль.

Легко видеть, что U содержит все операторы конечного ранга. Можно также считать, что

$$\|x\|_U = \|x\|$$

для любого оператора x ранга 1.

Если U полно относительно нормы $\|\cdot\|_U$, то говорим, что U является *банаховым операторным бимодулем*. Для краткости мы пишем $\widehat{\mathcal{B}}_*(U)$ вместо $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}(Y),\mathcal{B}(X)}(U)$ и называем элементы этого пространства *операторами умножения на* U.

Операторные бимодули тесно связаны с операторными идеалами. Если $\mathcal{U}$ — банахов операторный идеал в смысле Пича [62] (например, идеал $\mathcal{K}$ компактных операторов, или идеал $\mathcal{N}$ ядерных операторов), то каждая *компонента* $U = \mathcal{U}(X, Y)$ идеала $\mathcal{U}$ является банаховым операторным бимодулем. Можно показать, что каждый банахов операторный бимодуль является компонентой банахова операторного идеала.

Алгебры $A_1 = \mathcal{B}(Y)$, $A_2 = \mathcal{B}(X)$ полупросты, они не имеют радикальных идеалов, но они могут иметь пары идеалов $J_i \subset I_i$ с радикальными $I_i/\overline{J_i}$. Именно так, согласно лемме 7.1, обстоит дело, если мы выбираем в качестве I_i идеалы компактных операторов, а в качестве J_i идеалы операторов конечного ранга. Прежде чем формулировать соответствующие следствия теоремы 8.5, введем необходимую терминологию. Положим

$$\widehat{\mathcal{K}}_{\frac{1}{2}}(U) = \widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}(Y),\mathcal{K}(X)}(U) + \widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{K}(Y),\mathcal{B}(X)}(U),$$
$$\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}(U) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}(Y),\mathcal{F}(X)}(U) + \mathcal{E}_{\mathcal{F}(Y),\mathcal{B}(X)}(U).$$

Иными словами, $\widehat{\mathcal{K}}_{\frac{1}{2}}(U)$ состоит из операторов умножения на U вида $T = \sum\limits_{i=1}^{\infty} L_{a_i} R_{b_i}$, где $\sum\limits_i \|a_i\| \|b_i\| < \infty$ и при каждом i хотя бы один из операторов a_i, b_i компактен. Норма, как обычно для суммы банаховых подпространств, определяется равенством

$$\|T\|_{\widehat{\mathcal{K}}_{\frac{1}{2}}} = \inf \sum_i \|a_i\| \|b_i\|,$$

где нижняя грань берется по всем таким представлениям оператора T. Операторы из $\widehat{\mathcal{K}}_{\frac{1}{2}}(U)$ называются *полукомпактными операторами умножения*.

Аналогично, операторы из $\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}(U)$ называются *полуконечными элементарными операторами*. Это те элементарные операторы $\sum\limits_{i=1}^{n} L_{a_i} R_{b_i}$, у которых из каждой пары коэффициентов a_i, b_i хотя бы один имеет конечный ранг.

Следствие 8.7. *Для любого банахова операторного бимодуля* $U \subset \mathcal{B}(X, Y)$ *алгебра* $\widehat{\mathcal{K}}_{\frac{1}{2}}(U) / \overline{\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}(U)}$ *тензорно радикальна.*

В частности,

$$\widehat{\mathcal{K}}_{\frac{1}{2}}(U) \subset Q_{\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}(U)}(\widehat{\mathcal{B}}_*(U)).$$

Так как норма в $\widehat{\mathcal{K}}_{\frac{1}{2}}(U)$ мажорирует операторную норму пространства $\mathcal{B}(U)$, то мы приходим к следующему результату:

Следствие 8.8. *Пусть T — полукомпактный оператор умножения на банаховом бимодуле U. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность полуконечных элементарных операторов S_n на U, что $\|T^n - S_n\|_{\mathcal{B}(U)} < \varepsilon^n$ при всех достаточно больших n.*

Имеет смысл также рассматривать в $\widehat{\mathcal{B}}_*(U)$ идеал $\widehat{\mathcal{K}}_*(U)$ всех $(\mathcal{K})$-*операторов*, определенный равенством

$$\widehat{\mathcal{K}}_*(U) = \widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{K}(Y),\mathcal{K}(X)}(U).$$

Во многих случаях (например, когда норма в U совпадает с операторной) все операторы из $\widehat{\mathcal{K}}_*(U)$ компактны. Ясно, что $\widehat{\mathcal{K}}_*(U)$ — банахов идеал в алгебрах $\widehat{\mathcal{K}}_{\frac{1}{2}}(U)$ и $\widehat{\mathcal{B}}_*(U)$ относительно нормы $\|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{K}}_*} = \|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{K}(Y),\mathcal{K}(X)}}$.

Используя лемму 7.29, нетрудно доказать, что $\widehat{\mathcal{K}}_*(U)$ — бикомпактная банахова алгебра для любого банахова операторного бимодуля U.

Следствие 8.9. *Пусть U — банахов операторный бимодуль. Тогда $\sigma_{\mathcal{B}(U)}(T)$ счетен и $\sigma_{\mathcal{B}(U)}(T) \cup \{0\} = \sigma_{\widehat{\mathcal{K}}_*(U)}(T) \cup \{0\} = \sigma_{\widehat{\mathcal{B}}_*(U)}(T) \cup \{0\}$ для любого $T \in \widehat{\mathcal{K}}_*(U)$.*

Нормы и спектры элементарных операторов — весьма популярный объект исследования (см., например, статью Р. Курто [30] и цитированную там литературу). Сделаем небольшое отступление, чтобы представить простую формулу для вычисления следов этих операторов.

Пусть $\mathcal{N}$ — операторный идеал ядерных операторов. По определению, каждый оператор $a \in \mathcal{N}(X,Y)$ представим в виде $\sum f_i \otimes x_i$, где $f_i \in X^*$, $x_i \in Y$ и $\sum \|f_i\| \|x_i\| < \infty$. Норма $\|a\|_{\mathcal{N}}$ определяется как нижняя грань чисел $\sum \|f_i\| \|x_i\|$ по всем таким представлениям. Таким образом, $\mathcal{N}(X,Y)$ можно отождествить с $X^* \widehat{\otimes} Y$. Если $X = Y$, то след оператора a задается формулой

$$\operatorname{trace}(a) = \sum f_i(x_i).$$

Пусть $U \subset \mathcal{B}(X,Y)$ — банахов операторный бимодуль. Идеал $\mathcal{N}_*(U)$ всех $(\mathcal{N})$-*операторов умножения* определим равенством

$$\widehat{\mathcal{N}}_*(U) = \widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{N}(Y),\mathcal{N}(X)}(U)$$

и снабдим его нормой $\|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{N}}_*} = \|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{N}(Y),\mathcal{N}(X)}}$.

Предложение 8.10. *Всякий оператор $T \in \mathcal{N}_*(U)$ является ядерным. Если $T = \sum L_{a_i} R_{b_i}$, где $a_i, b_i \in \mathcal{N}$ и $\sum \|a_i\|_{\mathcal{N}} \|b_i\|_{\mathcal{N}} < \infty$, то*

$$\operatorname{trace}(T) = \sum_i \operatorname{trace}(a_i) \operatorname{trace}(b_i).$$

В заключение данного раздела заметим, что многие из приведенных в нем результатов переносятся на операторы умножения с матричными коэффициентами (и тем самым на системы линейных операторных уравнений), а также на интегральные операторы умножения

$$T_{a,b}(x) = \int\limits_{\Omega} a(\omega) x b(\omega) d\mu$$

с естественными ограничениями на функции $a(\omega)$ и $b(\omega)$.

8.3. Спектральные подпространства операторов умножения. В этом разделе рассматриваются инвариантные подпространства полукомпактных операторов умножения, на которых эти операторы сюръективны — в частности, собственные подпространства, или спектральные подпространства, соответствующие компонентам спектра, не содержащим нуля. Наш подход основан (кроме техники, связанной с тензорным радикалом) на изучении операторов, действующих в упорядоченной паре банаховых пространств.

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ банаховы пространства, причем $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ и

$$\|y\|_{\mathcal{X}} \leqslant \|y\|_{\mathcal{Y}} \tag{8.3}$$

для всех $y \in \mathcal{Y}$. Мы называем пару $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *упорядоченной парой банаховых пространств*.

Обозначим через $\mathcal{B}(\mathcal{X}||\mathcal{Y})$ пространство всех таких операторов $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, что $T\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}$.

Используя теорему о замкнутом графике, нетрудно получить следующий результат.

Теорема 8.11.

(i) *Если $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}||\mathcal{Y})$, то $T|_{\mathcal{Y}} \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$.*

(ii) $\mathcal{B}(\mathcal{X}||\mathcal{Y})$ — *унитальная банахова подалгебра в* $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ *относительно нормы*

$$\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{X}||\mathcal{Y})} = \max\left\{\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{X})}, \|T|_{\mathcal{Y}}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y})}\right\}.$$

Предложение 8.12. *Пусть* $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ — *упорядоченная пара банаховых пространств. Тогда*

(i) $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ — *банахова алгебра относительно нормы* $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$;

(ii) $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ — *банахов идеал в* $\mathcal{B}(\mathcal{X}||\mathcal{Y})$;

(iii) *любой оператор* $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, *образ которого содержится в* $\mathcal{Y}$, *принадлежит* $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.

Нас будут интересовать инвариантные подпространства оператора $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}||\mathcal{Y})$, на которых T сюръективен. Разумеется, такие подпространства содержатся в $\mathcal{Y}$, если $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. Оказывается, что то же справедливо, если оператор лишь квазинильпотентен по модулю $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.

Теорема 8.13. *Пусть* $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}||\mathcal{Y})$, *причем*

$$T \in Q_{\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{B}(\mathcal{X}||\mathcal{Y})). \tag{8.4}$$

Если $\mathcal{Z} = T\mathcal{Z}$ *для некоторого замкнутого подпространства* $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$, *то* $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y}$. *Кроме того, нормы* $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ *и* $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$ *эквивалентны на* $\mathcal{Z}$, *так что подпространство* $\mathcal{Z}$ *замкнуто и в* $\mathcal{Y}$.

Доказательство состоит в последовательной аппроксимации, основанной на спектральных оценках.

Следствие 8.14. *Пусть* $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ *и* T *такие же, как в теореме* 8.13. *Тогда*:

(i) *если* $\lambda \neq 0$ — *собственное значение оператора* T, *то собственное подпространство* $\{x \in \mathcal{X} : Tx = \lambda x\}$ *содержится в* $\mathcal{Y}$;

(ii) *если* σ_0 — *открытое и замкнутое подмножество спектра* $\sigma_{\mathcal{B}(\mathcal{X})}(T)$ *оператора* T *и* $0 \notin \sigma_0$, *то спектральное подпространство* $E_{\sigma_0}(T)$ *содержится в* $\mathcal{Y}$.

8.4. Полукомпактные операторы умножения. Применим теперь теорему 8.13 к полукомпактным операторам умножения на упорядоченной паре пространств, соответствующей вложению пространства ядерных операторов в пространство ограниченных операторов.

Начнем с оценки норм операторов умножения на упорядоченной паре компонент банаховых операторных идеалов.

Пусть $V = \mathcal{V}(X,Y)$ и $U = \mathcal{U}(X,Y)$, где $\mathcal{V}$ и $\mathcal{U}$ — банаховы операторные идеалы. Мы предполагаем, что V — банахово подпространство в U. Так как V инвариантно относительно алгебры $\widehat{\mathcal{B}}_*(U)$ всех операторов умножения на U, то, согласно теореме 8.11, алгебра $\mathcal{B}(\mathcal{X}||\mathcal{Y})$ содержит $\widehat{\mathcal{B}}_*(U)$.

Лемма 8.15. *Если* $T \in \widehat{\mathcal{B}}_*(U)$, *то* $\|T|_V\|_{\widehat{\mathcal{B}}_*(V)} \leqslant \|T\|_{\widehat{\mathcal{B}}_*(U)}$ *и* $\|T\|_{\mathcal{B}(U||V)} \leqslant \|T\|_{\widehat{\mathcal{B}}_*(U)}$.

Для произвольных банаховых пространств X,Y обозначим через $\mathcal{X}$ пространство $\mathcal{B}(X,Y)$, а через $\mathcal{Y}$ — пространство $\mathcal{N}(X,Y)$ всех ядерных операторов из $\mathcal{B}(X,Y)$. Ясно, что $\mathcal{Y}$ является банаховым подпространством пространства $\mathcal{X}$. Кроме того, $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — банаховы операторные бимодули над алгебрами $\mathcal{B}(X)$ и $\mathcal{B}(Y)$, так что алгебра $\mathcal{B}(\mathcal{X}||\mathcal{Y})$ содержит алгебру $\widehat{\mathcal{B}}_*(\mathcal{X})$ всех операторов умножения $T = \sum\limits_i L_{a_i}R_{b_i}$, таких что $a_i \in \mathcal{B}(Y)$, $b_i \in \mathcal{B}(X)$ и $\sum\limits_i \|a_i\|\|b_i\| < \infty$.

Из сказанного выше следует, что $\widehat{\mathcal{K}}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{X}||\mathcal{Y})$. Используя следствие 8.8, лемму 8.15 и предложение 8.12, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 8.16. *Пусть* $\mathcal{X} = \mathcal{B}(X,Y)$ *и* $\mathcal{Y} = \mathcal{N}(X,Y)$. *Тогда*

$$\widehat{\mathcal{K}}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{X}) \subset Q_{\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{B}(\mathcal{X}||\mathcal{Y})). \tag{8.5}$$

Следующая теорема — один из основных результатов данного раздела.

Теорема 8.17. *Пусть* T — *полукомпактный оператор умножения на* $\mathcal{B}(X,Y)$. *Если замкнутое подпространство* $\mathcal{Z}$ *в* $\mathcal{B}(X,Y)$ *инвариантно для* T, *и* T *сюръективен на* $\mathcal{Z}$, *то* $\mathcal{Z}$ *состоит из ядерных операторов, и на нем операторная норма эквивалентна ядерной.*

В частности, собственные подпространства оператора T, *соответствующие ненулевым собственным значениям, а также спектральные подпространства, соответствующие компонентам спектра, не содержащим нуля, состоят из ядерных операторов.*

Аналогичные результаты справедливы для ядерных интегральных операторов, а также для матричных операторов умножения.

Предположим теперь, что T — элементарный оператор на $\mathcal{B}(X,Y)$:

$$T=\sum_{i=1}^{n} L_{a_i} R_{x_i} + \sum_{j=1}^{k} L_{y_j} R_{b_j},$$

причем $x_i \in \mathcal{B}(X)$, $y_j \in \mathcal{B}(Y)$, $a_i \in \mathcal{K}(Y)$, $b_j \in \mathcal{K}(X)$ для всех i,j.

Оказывается, что в этом случае утверждение теоремы 8.17 может быть значительно усилено: инвариантные подпространства, на которых T сюръективен, содержатся в $\mathfrak{J}(X,Y)$-компоненте любого квазибанахова операторного идеала $\mathfrak{J}$. Здесь подход, основанный на технике тензорного радикала и ℓ_1-радиуса, не может быть применен непосредственно; для доказательства того, что некоторая степень оператора T близка к полуконечному элементарному оператору, требуются дополнительные аргументы, основанные на анализе триангулируемых семейств компактных операторов (близкие по духу к доказательству леммы 7.20, но более тонкие). Сформулируем эти вспомогательные результаты, которые могут представлять и независимый интерес.

Лемма 8.18. *Пусть K — конечное множество компактных операторов из радикала некоторой алгебры $A \subset \mathcal{B}(X)$, а F — ограниченное подмножество в A. Для $\lambda \in (0,1)$ и $m \in \mathbb{N}$ обозначим через $E^{\lambda}_{K,F}(m)$ множество всех произведений $b_1 \dots b_m$, где все b_i принадлежат $K \cup F$, причем не менее λm из них лежат в K. Тогда $\|E^{\lambda}_{K,F}(m)\|^{1/m} \to 0$ при $m \to \infty$.*

Следствие 8.19. *Пусть M — конечное подмножество банаховой алгебры A, содержащееся в ее радикале, причем операторы $L_a R_b$ компактны на A для всех $a,b \in M$. Пусть N — произвольное ограниченное подмножество в A.*

Для любого $m \in \mathbb{N}$ обозначим через $H(m)$ множество всех произведений $x_1 \dots x_m$ элементов из $M \cup N$, таких что не менее $m/2$ сомножителей принадлежит M. Тогда $\|H(m)\|^{1/m} \to 0$ при $m \to \infty$.

Квазинормой на линейном пространстве $\mathcal{L}$ называется отображение $\|\cdot\|_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to \mathbb{R}^{+}$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} &\|x+y\|_{\mathcal{L}} \leqslant t_{\mathcal{L}}(\|x\|_{\mathcal{L}}+\|y\|_{\mathcal{L}}) \text{ для всех } x,y \in \mathcal{L} \text{ и некоторого } t_{\mathcal{L}} \geqslant 1, \\ &\|\lambda x\|_{\mathcal{L}} = |\lambda|\,\|x\|_{\mathcal{L}} \text{ для всех } \lambda \in \mathbb{C}, x \in \mathcal{L}, \\ &\|x\|_{\mathcal{L}} = 0 \text{ лишь при } x=0. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Как известно, [52, с. 162], квазинорма порождает линейную метризуемую топологию на $\mathcal{L}$. В этом смысле можно говорить о полноте $\mathcal{L}$ относительно квазинормы, или о полноте квазинормы.

Согласно [62], *квазибанахов операторный идеал* $\mathfrak{J}$ состоит из компонент $\mathfrak{J}(X,Y) \subset \mathcal{B}(X,Y)$, являющихся подмодулями в $\mathcal{B}(X,Y)$ и наделенными полными квазинормами $\|\cdot\|_{\mathfrak{J}(X,Y)} = \|\cdot\|_{\mathfrak{J}}$, где X и Y произвольные банаховы пространства. При этом предполагается, что выполнены условия:

1) константа $t = t_{\mathfrak{J}(X,Y)}$ из определения квазинормы — одна и та же для всех компонент: $t_{\mathfrak{J}(X,Y)} = t_{\mathfrak{J}}$,
2) $\|axb\|_{\mathfrak{J}} \leqslant \|a\|\,\|x\|_{\mathfrak{J}}\,\|b\|$ для всех $x \in \mathfrak{J}(X,Y)$, $a \in \mathcal{B}(Y,Z)$, $b \in \mathcal{B}(W,X)$,
3) $\|x\|_{\mathfrak{J}} = ||x||$ для любого оператора x ранга 1.

В силу [62, теорема 6.2.5], всякий квазибанахов идеал $\mathfrak{J}$ допускает эквивалентную квазинорму $|\cdot|_{\mathfrak{J}}$ (в каждой компоненте), обладающую свойством: существует такое число $p \in (0,1]$ что

$$|x+y|^p_{\mathfrak{J}} \leqslant |x|^p_{\mathfrak{J}} + |y|^p_{\mathfrak{J}} \tag{8.7}$$

для всех $x,y \in \mathfrak{J}(X,Y)$. Мы будем рассматривать только квазинормы с этим свойством и писать $\|\cdot\|_p$, вместо $|\cdot|_{\mathfrak{J}}$. Идеал $\mathfrak{J}$ называется при этом банаховым операторным *p-идеалом*.

Соответственно мы определяем квазинорму на операторах, действующих в $\mathfrak{J}(X,Y)$:

$$\|T\|_p = \|T\|_{p,\mathfrak{J}} = \inf\{t>0 : \|Tx\|_p \leqslant t\|x\|_p \text{ для всех } x \in \mathfrak{J}(X,Y)\}.$$

Нетрудно показать, что если T — элементарный оператор на $\mathcal{B}(X,Y)$, $Tx = \sum_{i=1}^{n} a_i x b_i$, где $a_i \in \mathcal{B}(Y)$, $b_i \in \mathcal{B}(X)$, то

$$\|T\|_p \leqslant n^{\frac{1-p}{p}} \sum_{i=1}^{n} \|a_i\| \|b_i\|.$$

Теорема 8.20. *Пусть* $T = \sum_{i=1}^{n} L_{a_i} R_{x_i} + \sum_{j=1}^{k} L_{y_j} R_{b_j}$ *— полукомпактный элементарный оператор на* $\mathcal{B}(X,Y)$, *где* $x_i \in \mathcal{B}(X)$, $y_j \in \mathcal{B}(Y)$, $a_i \in \mathcal{K}(Y)$, $b_j \in \mathcal{K}(X)$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся* $m \in \mathbb{N}$ *и полуфинитный оператор* $S = \sum_{i=1}^{(n+k)^m} L_{c_i} R_{d_i}$, *такие что* $\|T^m - S\|_p < \varepsilon^m$.

Теперь по уже обсуждавшейся схеме (хотя и несколько сложнее, чем в случае банаховых идеалов) можно получить результаты о спектральных и собственных подпространствах.

Теорема 8.21. *Пусть* T *— полукомпактный элементарный оператор на* $\mathcal{B}(X,Y)$, *а* $\mathcal{Z}$ *— замкнутое подпространство в* $\mathcal{B}(X,Y)$, *на котором* T *сюръективен. Тогда* $\mathcal{Z}$ *содержится в пересечении* (X,Y)*-компонент всех квазибанаховых идеалов.*

Не формулируя в общем виде следствий о собственных и спектральных подпространствах, рассмотрим лишь случай операторных уравнений.

Следствие 8.22. *Рассмотрим линейное операторное уравнение*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x b_i = \lambda x, \ \text{где } \lambda \neq 0. \tag{8.8}$$

Если для каждого i *хотя бы один из операторов* a_i, b_i *компактен, то пространство решений этого уравнения содержится в пересечении всех квазибанаховых идеалов.*

В работе Войтыньского [82] при более сильных ограничениях на коэффициенты (все коэффициенты компактны, кроме, может быть, a_1 и b_2, которые кратны единичному оператору) было доказано, что все решения уравнения (8.8) являются ядерными операторами, т. е. $x \in \mathfrak{S}_1$. Разумеется, результат следствия 8.22 дает значительно больше, даже если ограничиться идеалами Шаттена: $x \in \bigcap_{p>0} \mathfrak{S}_p$.

Результаты данного раздела, приведенные без указания на источники, были получены в работе Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [74].

9. Операторы умножения на алгебрах с условиями компактности

В этом разделе рассматриваются операторы умножения в наиболее привычном значении этого термина — они действуют на банаховой алгебре, содержащей их коэффициенты. Другими словами, здесь $A_1 = A_2 = U = A$, и для краткости мы будем опускать индексы: например, обозначать алгебру всех элементарных операторов $\mathcal{E}\ell(A)$ вместо $\mathcal{E}\ell_{A,A}(A)$.

Мы будем накладывать на A различные ограничения компактности. Как было показано, даже наиболее слабое из них — гипокомпактность — влечет совпадение $\mathrm{Rad}(A)$ с $\mathcal{R}_t(A)$.

9.1. Операторы умножения на алгебрах, коммутативных по модулю радикала.

Из совпадения (при условии гипокомпактности) тензорного радикала с радикалом Джекобсона и общих результатов раздела 8 вытекает следующий факт.

Следствие 9.1. *Если* A *гипокомпактна, то алгебра* $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{Rad}(A),A} + \widehat{\mathcal{E}}_{A,\mathrm{Rad}(A)}$ *гипокомпактна и радикальна.*

В частности, все элементарные операторы $L_a + R_b + \sum_{i=1}^{n} L_{a_i} R_{b_i}$, у которых при любом i хотя бы один из коэффициентов a_i или b_i принадлежит $\mathrm{Rad}(A)$, являются квазинильпотентными элементами алгебры $\widehat{\mathcal{E}}_{A,A}$. Так как норма в $\widehat{\mathcal{E}}_{A,A}$ мажорирует операторную, они квазинильпотентны как операторы на A.

В дальнейшем, говоря о спектрах элементарных операторов, мы имеем в виду их спектры в алгебре $\mathcal{B}(A)$.

Доказательство следующего результата существенно использует независимость спектра элемента от выбора содержащей его подалгебры с гибкой нормой (см. предложение 4.1).

Теорема 9.2. *Пусть A — гипокомпактная банахова алгебра. Если $u = \sum_{i=1}^{n} L_{a_i}R_{b_i} \in \mathcal{E}\ell(A)^1$, $v = \sum_{j=1}^{m} L_{c_j}R_{b_j} \in \mathcal{E}\ell(A)^1$ и все коммутаторы $[a_i, c_j]$, $[b_i, d_j]$ принадлежат $\mathrm{Rad}(A)$, то*

$$\sigma(u+v) \subset \sigma(u) + \sigma(v), \tag{9.1}$$

$$\sigma(uv) \subset \sigma(u)\sigma(v). \tag{9.2}$$

Напомним, что центр по модулю радикала $Z_{\mathrm{Rad}}(A)$ алгебры A определяется как $\{a \in A : [a,x] \in \mathrm{Rad}(A)$ для всех $x \in A\}$.

Следствие 9.3. *Если A гипокомпактна, а элемент u принадлежит $L_{Z_{\mathrm{Rad}}(A)}R_A + L_A R_{Z_{\mathrm{Rad}}(A)}$, то включения* (9.1) *и* (9.2) *справедливы для всех $v \in \mathcal{E}\ell(A)$.*

Будем называть подалгебру B банаховой алгебры *спектрально вычислимой*, если условия (9.1) и (9.2) выполнены для всех $u, v \in B$. Предыдущие результаты показывают, что если A гипокомпактна и коммутативна по модулю радикала, то $\mathcal{E}\ell(A)$ — спектрально вычислимая подалгебра в $\mathcal{B}(A)$.

9.2. Энгелевы алгебры. В классической теории конечномерных алгебр Ли важную роль играет класс нильпотентных алгебр, т. е. таких алгебр Ли $\mathcal{L}$, для которых все операторы $\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(a) : x \to [a,x]$ на $\mathcal{L}$ нильпотентны. Функционально-аналитический вариант теории алгебр Ли имеет дело с топологическими, и в частности, банаховыми алгебрами Ли, т. е. алгебрами Ли $(\mathcal{L}, [\cdot,\cdot])$, полными относительно некоторой нормы $\|\cdot\|$, причем выполнено условие $\|[x,y]\| \leqslant C\|x\|\|y\|$, где C — некоторая константа. Если все операторы $\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(a)$ квазинильпотентны, то $\mathcal{L}$ называется *энгелевой*.

Любая (ассоциативная) банахова алгебра A может быть рассмотрена как банахова алгебра Ли относительно произведения $[x,y] = xy - yx$; энгелевость в этом случае означает квазинильпотентность всех операторов $L_a - R_a$. Известно (см. работу Б. Опти и М. Мэтью [22]), что всякая энгелева банахова алгебра коммутативна по модулю радикала.

Будем называть банахову алгебру A *строго энгелевой*, если

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} L_{a_i}R_{b_i}\right) \subset \sigma\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)$$

для всех $a_i, b_i \in A^1$ и $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 9.4. *Пусть A гипокомпактна и коммутативна по модулю своего радикала. Если операторы $L_a - R_a$ квазинильпотентны для всех элементов a из некоторого множества $M \subset A$, порождающего A как банахову алгебру, то A является строго энгелевой.*

В частности, для гипокомпактных алгебр понятия энгелевости и строгой энгелевости совпадают.

Теорема 9.5. *Пусть гипокомпактная банахова алгебра A порождена замкнутой подалгеброй Ли $\mathcal{L}$. Если $\mathcal{L}$ является энгелевой, то A строго энгелева.*

Заметим, что хотя теорема 9.4 играет важную роль в доказательстве этого результата, он не является ее непосредственным следствием, так как в теореме 9.5 операторы $L_a - R_a$ при $a \in \mathcal{L}$ предполагаются квазинильпотентными лишь на $\mathcal{L}$, а не на всей алгебре $\mathcal{A}$.

9.3. Обобщенные операторы умножения. Из результатов предыдущих разделов следует, в частности, что если A — гипокомпактная радикальная алгебра, то все операторы из $\mathcal{E}\ell\,(A)$ и, более сильно, из $\widehat{\mathcal{E}}_{A,A}$ квазинильпотентны. Здесь мы обсудим возможность перенесения этих результатов на операторы из замыкания $\mathrm{Mul}(A)$ алгебры $\mathcal{E}\ell\,(A)$ в $\mathcal{B}(A)$. Сразу отметим, что проблема радикальности алгебры $\mathrm{Mul}(A)$ открыта даже для бикомпактных A (и в частности, для случая, когда A — это радикальная алгебра компактных операторов). Будем называть элементы алгебры $\mathrm{Mul}(A)$ *обобщенными операторами умножения*.

Теорема 9.6. *Если алгебра A компактна и $J = \mathrm{Rad}(A)$, то замкнутый идеал I алгебры* $\mathrm{Mul}(A)$, *порожденный $L_J R_A \cup L_A R_J$, содержится в* $\mathrm{Rad}(\mathrm{Mul}(A))$. *Как следствие, $L_J + R_J + I$ состоит из квазинильпотентов.*

Будем обозначать через $\mathrm{Mul}_2(A)$ замкнутую подалгебру в $\mathrm{Mul}(A)$, порожденную $L_A R_A$.

Следствие 9.7. *Если радикальная банахова алгебра A компактна, то*

$$\mathrm{Mul}_2(A) \subset \mathrm{Rad}(\mathrm{Mul}(A)).$$

В частности, алгебра $\mathcal{E}\ell(A) + \mathrm{Mul}_2(A)$ состоит из квазинильпотентных операторов.

9.4. Перманентно радикальные алгебры. Будем называть некоторый класс $\mathcal{P}$ банаховых алгебр *перманентным*, если вместе с каждой алгеброй он содержит замыкание ее образа при любом непрерывном гомоморфизме. Таковы, например, классы коммутативных, сепарабельных, аменабельных алгебр, или алгебр с ограниченной аппроксимативной единицей.

Пример Диксона [37, пример 9.3] показывает, что класс всех радикальных банаховых алгебр не перманентен. Будем говорить, что банахова алгебра A перманентно радикальна, если $\overline{f(A)}$ радикальна для любого непрерывного гомоморфизма $f : A \longrightarrow B$. Очевидно, что класс всех перманентно радикальных алгебр перманентен. Нетрудно показать также, что этот класс выдерживает расширения. Обратно, фактор-алгебры перманентно радикальных алгебр перманентно радикальны, однако неясно, наследуется ли перманентная радикальность идеалами.

Легко проверить, что если в алгебре есть направленная по возрастанию сеть перманентно радикальных идеалов, объединение которой плотно, то сама алгебра перманентно радикальна.

Ясно, что класс перманентно радикальных алгебр содержит все коммутативные и все конечномерные радикальные алгебры.

Теорема 9.8. *Всякая гипофинитная радикальная банахова алгебра перманентно радикальнва.*

Предложение 9.9. *Радикальная гипофинитная банахова алгебра не имеет нетривиальных топологически неприводимых представлений.*

Верно ли, что всякая радикальная бикомпактная банахова алгебра перманентно радикальна? Если да, то все гипокомпактные радикальные алгебры перманентно радикальны.

Следующий результат показывает, что предложение 9.9 не переносится на гипокомпактные алгебры (даже коммутативные).

Теорема 9.10. *Существует радикальная бикомпактная алгебра, имеющая нетривиальное топологически неприводимое представление.*

В самом деле, пусть T — квазинильпотентный оператор на банаховом пространстве X, не имеющий нетривиальных инвариантных подпространств (как показал Ч. Рид [66], такие операторы существуют уже при $X = \ell_1$). Обозначим через B замкнутую подалгебру в $\mathcal{B}(X)$, порожденную T. Из теоремы Бонсолла (см. [26, теорема 3]) следует существование такой нормы $\|\cdot\|'$ на B, что

1) $\|a\| \leqslant \|a\|'$ для любого $a \in B$,
2) пополнение A алгебры B по норме $\|\cdot\|'$ является банаховой подалгеброй в $\mathcal{B}(X)$,
3) элемент b алгебры A, соответствующий оператору T, компактен.

Поскольку алгебра A порождена элементом b, она бикомпактна. Так как всякий компактный элемент имеет счетный спектр, то, в силу предложения 4.1(ii), $\sigma_A(b) = \sigma(T)$. Следовательно, b квазинильпотентен и A радикальна. Тождественное вложение алгебры A в $\mathcal{B}(X)$, определяет ее представление на X, которое топологически неприводимо, поскольку $\pi(b) = T$.

Теорема 9.11. *Если алгебра A компактна, а алгебра* $\mathrm{Rad}(A)$ *перманентно радикальна, то* $L_{\mathrm{Rad}(A)} \cup R_{\mathrm{Rad}(A)} \subset \mathrm{Rad}(\mathrm{Mul}(A))$.

Следствие 9.12. *Если A — аппроксимативная банахова алгебра, то*

$$L_{\mathrm{Rad}(A)} \cup R_{\mathrm{Rad}(A)} \subset \mathrm{Rad}(\mathrm{Mul}(A)).$$

Следствие 9.13. *Если аппроксимативная банахова алгебра A коммутативна по модулю радикала, то и алгебра* $\mathrm{Mul}(A)$ *коммутативна по модулю радикала.*

9.5. Цепочки замкнутых идеалов. Рассмотрим теперь инвариантные подпространства для алгебры всех элементарных операторов — т. е. идеалы. До сих пор открыта (даже в коммутативном случае) проблема существования замкнутых идеалов в радикальных банаховых алгебрах. В работе Войтыньского [82] было доказано, что эта проблема решается положительно для алгебр, имеющих ненулевые компактные элементы. Следующее утверждение, доказательство которого использует теорему 7.22, усиливает этот глубокий результат.

Напомним, что *центральным мультипликатором* на банаховой алгебре A называется любой ограниченный оператор на A, перестановочный с операторами левого и правого умножения.

Теорема 9.14. *Если радикальная банахова алгебра A имеет ненулевой компактный элемент, то либо умножение в ней тривиально, либо A имеет замкнутый идеал, инвариантный относительно всех центральных мультипликаторов.*

Естественно возникает вопрос о том, имеет ли бикомпактная радикальная банахова алгебра тотальную цепочку замкнутых идеалов. Мы покажем, что ответ на него, вообще говоря, отрицателен.

Напомним, что тотальность цепочки подпространств банахова пространства, т. е., максимальность ее в решетке всех подпространств, эквивалентна одномерности всех разрывов. В общем случае, если пара $I_1 \subset I_2$ замкнутых идеалов образует разрыв решетки всех идеалов (промежуточных идеалов нет), то фактор алгебра I_2/I_1 называется *алгеброй разрыва*.

Примером разрыва является любая пара $(0, I)$, где I — минимальный замкнутый идеал. Следовательно, если любая цепь идеалов продолжается до тотальной, то минимальные идеалы одномерны (или отсутствуют). Оказывается, что этот факт имеет место во всех гипофинитных радикальных алгебрах, но не во всех бикомпактных.

Теорема 9.15.

(i) *Существует радикальная бикомпактная банахова алгебра, не имеющая тотальной цепочки замкнутых идеалов.*

(ii) *Радикальная бикомпактная банахова алгебра может иметь бесконечномерный минимальный замкнутый идеал.*

Доказательство. Схема доказательства такова. Пусть A — коммутативная радикальная банахова алгебра, имеющая топологически неприводимое представление $\pi : A \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ (см. теорему 9.10). На банаховом пространстве $B = A \oplus X$ определим умножение правилом $(a \oplus x)(b \oplus y) = ab \oplus \pi(a)y$. Нетрудно проверить, что с этим умножением и $\max$-нормой B становится радикальной банаховой алгеброй.

Покажем, что B бикомпактна. Для любых $a \oplus x, b \oplus y \in B$ оператор $T = L_{a \oplus x} R_{b \oplus y}$ отображает элемент $c \oplus z$ в $acb \oplus \pi(ac)y$. Так как единичный шар $B_\odot$ пространства B равен $A_\odot \oplus X_\odot)$, то

$$T(B_\odot) \subset L_a R_b(A_\odot) \oplus \pi(L_a(A_\odot)y).$$

Поскольку операторы $L_a R_b$ на A компактны, достаточно установить предкомпактность множества $\pi(L_a(A_\odot)y)$. Другими словами, нам нужно показать, что любой оператор $S_y : c \longmapsto \pi(ac)y$ компактен. Если $y = \pi(d)z$ для некоторых $d \in A$, $z \in X$, то S_y компактен, поскольку факторизуется через $L_a R_d$. Отсюда следует, что S_y компактен для всех y из линейной оболочки Y множества $\pi(A)X$. Но так как подпространство Y инвариантно для $\pi(A)$, то $\overline{Y} = X$, поэтому все операторы S_y компактны.

Подпространство $I = 0 \oplus X$ является замкнутым идеалом алгебры B, и легко проверить, что этот идеал минимален. Более того, можно показать, что любой ненулевой замкнутый идеал J алгебры B содержит I. Это доказывает оба утверждения теоремы. ☐

В оставшейся части этого раздела мы приведем некоторые результаты «положительного» характера.

Лемма 9.16. *Если $J \subset I$ — разрыв в решетке идеалов радикальной компактной банаховой алгебры A, то выполнено хотя бы одно из включений $AI \subset J$ и $IA \subset J$.*

Теорема 9.17. *Если A — бесконечномерная компактная радикальная банахова алгебра, то любая цепь ее замкнутых идеалов продолжается до бесконечной цепи.*

Напомним, что через $\mathcal{A}(X)$ обозначается замыкание (по операторной норме) идеала $\mathcal{F}(X)$ всех операторов конечного ранга в X. Нас интересует структура промежуточных идеалов алгебры $\mathcal{B}(X)$.

Следствие 9.18.

(i) *Если* $\dim(\mathcal{K}(X)/\mathcal{A}(X)) = n$ *(где* $n \leqslant \infty$*), то* $\mathcal{K}(X)$ *имеет цепочку из* n *различных идеалов, содержащих* $\mathcal{F}(X)$.

(ii) *Пусть* M *и* N *— замкнутые идеалы алгебры* $\mathcal{B}(X)$*, такие что* $\mathcal{A}(X) \subset N \subset M \subset \mathcal{K}(X)$*. Если* M^2 *не содержится в* N*, то между* N *и* M *имеется хотя бы один замкнутый идеал алгебры* $\mathcal{B}(X)$*. В частности, если* $(\mathcal{K}(X)/\mathcal{A}(X))^2 \neq 0$*, то между* $\mathcal{A}(X)$ *и* $\mathcal{K}(X)$ *есть замкнутые идеалы алгебры* $\mathcal{B}(X)$.

(iii) *Если алгебра* $\mathcal{K}(X)/\mathcal{A}(X)$ *не является нильпотентной, то всякая максимальная цепь замкнутых идеалов алгебры* $\mathcal{B}(X)$*, лежащих между* $\mathcal{A}(X)$ *и* $\mathcal{K}(X)$*, бесконечна.*

Пример банахова пространства X, для которого алгебра $\mathcal{K}(X)/\mathcal{A}(X)$ не является нильпотентной, можно построить, используя построенный Уиллисом [80] пример банахова пространства без свойства аппроксимации, обладающего свойством ограниченной компактной аппроксимации.

По определению, X имеет свойство аппроксимации (AP) (свойство компактной аппроксимации (CAP)), если для любого компакта $M \subset X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой оператор S конечного ранга (соответственно, компактный), что $\|Sx - x\| < \varepsilon$ при всех $x \in M$. Если оператор S всегда можно выбрать так, что его норма не превышает некоторого $C > 0$, то X обладает свойством ограниченной аппроксимации (BAP) (соответственно, свойством ограниченной компактной аппроксимации (BCAP)).

Если X имеет свойство (BCAP), то легко показать, что $\mathcal{K}(X)$ имеет ограниченную аппроксимативную единицу, а потому $\overline{\mathcal{K}(X)^n}$ плотно в $\mathcal{K}(X)$ для всех n, поэтому из нильпотентности $\mathcal{K}(X)/\mathcal{A}(X)$ следовало бы, что $\mathcal{K}(X) = \overline{\mathcal{A}(X)}$, а это означает, ввиду (BCAP), что X имеет (BAP). Поскольку для пространства, построенного в [80], это не так, алгебра $\mathcal{K}(X)/\mathcal{A}(X)$ не нильпотентна.

Обозначая через $\mathcal{K}$ и $\mathcal{A}$ операторные идеалы компактных и аппроксимируемых идеалов, можно теперь доказать следующий результат:

Следствие 9.19. *Существует бесконечная цепь замкнутых операторных идеалов, промежуточных между* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{K}$.

Теорема 9.20. *Если* A *— радикальная аппроксимируемая банахова алгебра, то любой разрыв в решетке ее идеалов одномерен.*

Доказательство. Доказательство основано на лемме 9.16. В самом деле, рассматривая разрыв $J \subset I$, мы можем считать, для определенности, что $IA \subset J$. Обозначим через π естественное представление алгебры $\mathrm{Mul}(A)$ на I/J, тогда $\pi(R_A) = 0$, откуда $\pi(\mathcal{E}\ell(A)) = \pi(L_A)$ и $\pi(\mathrm{Mul}(A)) \subset \overline{\pi(L_A)}$. Отображение $a \longmapsto \pi(L_a)$ является топологически неприводимым представлением алгебры A on I/J, а значит, согласно предложению 9.9, оно действует в одномерном пространстве. □

Следствие 9.21. *Всякая радикальная гипофинитная банахова алгебра имеет тотальную цепь замкнутых идеалов и все ее минимальные замкнутые идеалы одномерны.*

Подпространство I банаховой алгебры A называется *квазиидеалом*, если $AIA \subset I$.

Теорема 9.22. *Всякая бикомпактная радикальная банахова алгебра имеет тотальную цепь замкнутых квазиидеалов.*

Результаты, рассмотренные в данном разделе, получены в работе Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [74].

10. Формулы типа Бергера—Вонга

10.1. Формула Бергера—Вонга и ССР множеств компактных операторов. В теории конечномерных динамических систем важную роль играет формула для вычисления ССР ограниченного множества матриц, найденная в 1992 году Бергером и Вонгом [25] (см., например, книгу [47], где эта формула называется основной теоремой теории совместного спектрального радиуса). Чтобы сформулировать этот результат, введем, следуя [25], иную спектральную характеристику ограниченного подмножества M алгебры — его *BW-радиус*:

$$r(M) := \limsup_{n\to\infty} R_n(M), \text{ где } R_n(M) = \sup\{\rho(a) : a \in M^n\}^{1/n}. \tag{10.1}$$

Ясно, что $r(M) \leqslant \rho(M)$. Формула Бергера—Вонга — это равенство

$$\rho(M) = r(M), \tag{10.2}$$

справедливое для любого ограниченного множества матриц.

В работе Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [70] был получен первый бесконечномерный вариант формулы (10.2):

Теорема 10.1. *Равенство* (10.2) *выполняется для всех предкомпактных множеств M компактных операторов в произвольном банаховом пространстве.*

Чтобы убедиться в полезности этого результата, достаточно увидеть, как легко из него следует решение проблемы вольтерровой полугруппы (теорема 7.22). В самом деле, если G — полугруппа вольтерровых операторов, то $r(M) = 0$ для любого конечного множества $M \subset G$. Из (10.2) следует, что $\rho(M) = 0$, и значит, линейная оболочка $\mathrm{span}(G)$ множества M состоит из вольтерровых операторов. Так как $\mathrm{span}(G)$ является алгеброй, то остается лишь применить следствие 7.18.

Разумеется, это нельзя считать простым доказательством теоремы 7.22, поскольку в доказательстве теоремы 10.1 эта теорема существенно использовалась. Однако теорема 10.1 сыграла важную роль в исследовании многих других задач теории операторов, о которых пойдет речь ниже.

Подчеркнем, что оба ограничения компактности в теореме 10.1 существенны. В статье П. Гюйнанда [43] приведен пример пары операторов T, S, для которых $r(\{T, S\}) = 0 \neq \rho(\{T, S\})$. Известны и примеры ограниченных множеств компактных операторов, для которых равенство (10.2) не выполнено (см., например, [61, предложение 2.16]).

Мы приведем результаты о связи совместного спектрального радиуса и BW-радиуса для множеств не обязательно компактных элементов банаховых алгебр и операторов. В частности, будет показано, что для любого предкомпактного множества $M \subset \mathcal{B}(X)$ справедливо равенство

$$\rho(M) = \max\{r(M), \rho_e(M)\}, \tag{10.3}$$

где $\rho_e(M) := \rho(\pi(M))$, т. е. ССР образа M в алгебре Калкина $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ при естественном эпиморфизме π.

10.2. Некоторые вспомогательные результаты. Как и выше, для $M \subset A$ полагаем $L_M = \{L_a : a \in M\}$ и $R_M = \{R_a : a \in M\}$. Нетрудно проверить, что $r(L_M) = r(R_M) = r(M)$ и $\rho(L_M) = \rho(R_M) = \rho(M)$ для любого ограниченного множества M. Справедлив также следующий аналог леммы 7.24:

Лемма 10.2. *Пусть M — ограниченное подмножество банаховой алгебры A. Тогда $\rho(M^m) = \rho(M)^m$ и $r(M^m) = r(M)^m$ для любого $m \in \mathbb{N}$, $\rho(M)^2 = \rho(L_M R_M)$ и $r(M)^2 = r(L_M R_M)$.*

Запишем определение существенного ССР ρ_e в более подробной форме:

$$\rho_e(M) := \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{\|T\|_e : T \in M^n\}\right)^{1/n} = \inf_n \left(\sup\{\|T\|_e : T \in M^n\}\right)^{1/n},$$

где $||T||_e = ||\pi(T)||$ — существенная норма T. Характеристикой оператора T, близкой к $||T||_e$, является его *хаусдорфова норма* $\|T\|_\chi$; она определяется (см., например, статью А. Лебова и М. Шехтера [55]) как хаусдорфова мера некомпактности образа $TX_\odot$ единичного шара $X_\odot$ при отображении T (напомним, что это точная нижняя грань множества тех $\varepsilon > 0$, для которых $TX_\odot$ имеет конечную ε-сеть). Легко видеть, что $\|T\|_\chi \leqslant ||T||_e$. Преимущество полунормы $\|T\|_\chi$ объясняется тем, что она хорошо согласована с сужениями оператора на инвариантное подпространство и фактор-пространство (см., например, [71, лемма 2.5]):

$$\|T|\mathcal{Y}\|_\chi \leqslant 2\|T\|_\chi \text{ и } \|T|(X/\mathcal{Y})\|_\chi \leqslant \|T\|_\chi. \tag{10.4}$$

Важный технический результат был получен в [70, следствие 6.5]:

Лемма 10.3. $\|L_M R_M\|_\chi \leqslant 16\|M\|_\chi \|M\|$ *для любого предкомпактного множества* M *операторов.*

Определим *хаусдорфов радиус* ρ_χ равенством

$$\rho_\chi(M) := \lim_{n\to\infty}\left(\sup\left\{\|T\|_\chi : T\in M^n\right\}\right)^{1/n} = \inf_n \left(\sup\left\{\|T\|_\chi : T\in M^n\right\}\right)^{1/n}.$$

Ясно, что

$$\rho_\chi(M) \leqslant \rho_e(M), \tag{10.5}$$

поэтому для доказательства формулы (10.3) достаточно установить равенство

$$\rho\,(M) = \max\left\{r\,(M)\,, \rho_\chi\,(M)\right\}. \tag{10.6}$$

Важный случай выполнения этого равенства доказан в [70, предложение 9.6]:

Лемма 10.4. *Если* $\rho\,(M) = 1$ *для предкомпактного множества* M *операторов, и полугруппа, порожденная* M, *ограничена, то* (10.6) *выполнено для* M.

Для любого ограниченного множества M элементов банаховой алгебры A положим $\rho^\chi(M) = \rho_\chi(L_M R_M)^{1/2}$. Легко видеть, учитывая (10.4), что

$$\rho^\chi(M/J) \leqslant \rho^\chi(M) \tag{10.7}$$

для любого замкнутого идеала J алгебры A.

10.3. Смешанная БВ-формула. Равенство

$$\rho(M) = \max\{\rho^\chi(M), r(M)\} \tag{10.8}$$

мы называем смешанной формулой Бергера—Вонга, так как оно связывает спектральные характеристики предкомпактного множества M элементов произвольной банаховой алгебры A с хаусдорфовым радиусом набора операторов $L_M R_M$. Его достаточно доказать, считая, что M порождает A. В самом деле, величины $\rho(M)$ и $r(M)$ не изменятся, если их вычислять в замкнутой подалгебре $\mathcal{A}(M)$, порожденной M. Значение же $\rho^\chi(M) = \rho_\chi(L_M R_M)^{1/2}$ при этом не может возрасти (так как операторы $L_M R_M$ сужаются на подпространство $\mathcal{A}(M)$), а нетривиальной частью (10.8) является лишь неравенство $\leqslant$.

Полугруппа G элементов алгебры A называется *полугруппой Раджави* (или, коротко, *R-полугруппой*), если $\lambda a \in G$ для любых $a \in G$ и $\lambda \geqslant 0$. Для любого множества $M \subset A$ мы обозначаем через $\mathcal{S}(M)$ полугруппу, порожденную M, а через $\mathcal{S}_+(M)$ — R-полугруппу, порожденную M. Ясно, что $\mathcal{S}(M) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M^n$ и $\mathcal{S}_+(M) = \mathbb{R}_+\mathcal{S}(M)$, где $\mathbb{R}_+ = \{t\in\mathbb{R} : t \geqslant 0\}$.

Пусть N — множество операторов в банаховом пространстве и $G = \mathcal{S}(N)$. Оператор $T \in N^n$ называется *ведущим* (точнее, *n-ведущим*), если $\|T\| \geqslant \|S\|$ для всех $S \in \bigcup\limits_{k<n} N^k$. Уточнение термина существенно, так как один оператор может принадлежать разным N^n. Далее, *ведущая последовательность* в G — это последовательность $n(k)$-ведущих операторов $T_k \in N^{n(k)}$, где $n(k) \to \infty$. Если G неограничена, то очевидно, что хотя бы одна ведущая последовательность в G существует.

Лемма 10.5. *Пусть* N — *предкомпактное множество операторов. Если* $\rho_\chi(N) < \rho(N) = 1$ *и полугруппа* $\mathcal{S}(N)$ *неограничена, то существует последовательность операторов единичной нормы* $T_n \in \mathcal{S}_+(N)$, *сходящаяся к компактному оператору* T. *Более того, можно выбрать в качестве такой последовательности любую сходящуюся подпоследовательность из* $\{S_n/\|S_n\|\}$, *где* $\{S_n\}$ — *произвольная ведущая последовательность в* $\mathcal{S}(N)$.

Лемма 10.6. *Пусть* $A = \mathcal{A}(M)$, *где* M *предкомпактно, и пусть* $N = L_M R_M$. *Если* $\rho_\chi(N) < \rho(N) = 1$ *и полугруппа* $\mathcal{S}(N)$ *неограничена, то* $\overline{\mathcal{S}_+(N)}$ *содержит ненулевой компактный оператор* T, *такой что*

(i) *оператор* $L_{Th}R_{Tg}$ *компактен при любых* $h, g \in A$;
(ii) *если* $r(N) < 1$, *то* $T(A) \subset \mathrm{Rad}(A)$.

Бикомпактные идеалы, состоящие из квазинильпотентных элементов, мы будем называть *QB-идеалами.*

Следствие 10.7. *Пусть* $M \in \mathcal{M}_c(A)$. *Если* $\max\{\rho^{\chi}(M), r(M)\} < \rho(M) = 1$ *и полугруппа* $\mathcal{S}(L_M R_M)$ *неограничена, то* $\mathcal{A}(M)$ *имеет ненулевой* QB-*идеал.*

Следствие 10.8. *Пусть* $M \in \mathcal{M}_c(A)$. *Если* $\mathcal{A}(M)$ *не имеет ненулевых* QB-*идеалов, то равенство* (10.8) *справедливо.*

Теорема 10.9. *Формула* (10.8) *верна для любой банаховой алгебры* A *и любого предкомпактного множества* $M \subset A$.

Доказательство теоремы, как и доказательства ряда других результатов данного раздела, существенно использует технику теории топологических радикалов. Пусть $J = \mathrm{Rad}(A) \cap \mathcal{R}_{\mathrm{hc}}(A)$. Так как, в силу теоремы 7.26, $J \subset \mathcal{R}_{\mathrm{cq}}(A)$, то $\rho(M) = \rho(M/J)$ по теореме 5.6. Далее, алгебра A/J не имеет ненулевых QB-идеалов. Действительно, пусть I — какой-нибудь QB-идеал в A/J, тогда его прообраз U в A содержится в $\mathrm{Rad}(A)$ и $\mathcal{R}_{\mathrm{hc}}(A)$, поскольку радикалы устойчивы относительно расширений. Поэтому $U \subset J$, откуда $I = 0$.

Учитывая, что $A/J = \mathcal{A}(M/J)$, и применяя следствие 10.8, заключаем, что

$$\rho(M) = \rho(M/J) = \max\{\rho^{\chi}(M/J), r(M/J)\} \leqslant \max\{\rho^{\chi}(M), r(M)\}$$

в силу (10.7). Обратное неравенство очевидно.

10.4. Операторная БВ-формула. Теперь уже легко получить формулу (10.3).

Теорема 10.10. *Если множество* $M \subset \mathcal{B}(X)$ *предкомпактно, то*

$$\rho(M) = \max\{\rho_e(M), r(M)\}.$$

В самом деле, из леммы 10.3 следует, что $\|L_M R_M\|_{\chi} \leqslant 16\|M\|_{\chi}\|M\|$. Заменяя M на M^n, извлекая корни n-й степени и переходя к пределу при $n \to \infty$, придем к неравенству $\rho^{\chi}(M)^2 = \rho_{\chi}(L_M R_M) \leqslant \rho_{\chi}(M)\rho(M)$. Применяя теорему 10.9, получим $\rho(M)^2 \leqslant \max\{\rho_{\chi}(M)\rho(M), r(M)^2\}$, откуда, в силу неравенств $r(M) \leqslant \rho(M)$ и (10.5),

$$\rho(M) \leqslant \max\{\rho_{\chi}(M), r(M)\} \leqslant \max\{\rho_e(M), r(M)\}.$$

Обратное неравенство очевидно.

10.5. Алгебраическая БВ-формула. Наша следующая цель — доказать, что

$$\rho(M) = \max\{\rho(M/\mathcal{R}^r_{\mathrm{hc}}(A)), r(M)\} \tag{10.9}$$

для любой банаховой алгебры A и для любого $M \in \mathcal{M}_c(A)$. Нам будет удобнее сформулировать результат в более общей форме:

Теорема 10.11. *Если* J — *замкнутый гипокомпактный идеал банаховой алгебры* A, *то*

$$\rho(M) = \max\{\rho(M/J), r(M)\} \tag{10.10}$$

для любого предкомпактного множества $M \subset A$.

Схема доказательства такова. Если идеал J бикомпактен, то простым приемом (заменой идеала его степенью) задача сводится к случаю, когда все операторы $L_a R_b$, где $a, b \in J$, компактны на A (а не только на J). В этом случае существенная норма множества $L_M R_M$ легко оценивается через расстояние от M до J: $\|L_M R_M\|_e \leqslant 3\|M/J\|\|M\|$. Заменяя M на M^n, извлекая корни и переходя к пределу, получим, что $\rho_e(L_M R_M) \leqslant \rho(M/J)\rho(M)$. Следовательно, $\rho^{\chi}(M)^2 \leqslant \rho(M/J)\rho(M)$. Применяя (10.8), получим

$$\rho(M)^2 \leqslant \max\{(\rho^{\chi}(M))^2, r(M)^2\} \leqslant \rho(M)\max\{\rho(M/J), r(M)\},$$

что и требуется.

Переходом к фактор-алгебрам отсюда выводится следующий результат:

Лемма 10.12. *Если* $I \subset K$ — *замкнутые идеалы алгебры* A, *и алгебра* K/I *бикомпактна, то из справедливости равенства* (10.10) *при* $J = I$ *вытекает его справедливость при* $J = K$.

Теперь заметим, что из гипокомпактности идеала J следует существование такой возрастающей трансфинитной цепочки $\{J_\alpha\}_{\alpha\leqslant\beta}$ замкнутых идеалов алгебры A, что $J_0=0$, $J_\beta=J$, и все $J_{\alpha+1}/J_\alpha$ бикомпактны. Если есть ординалы α, для которых (10.10) при $J=J_\alpha$ не выполнено, то пусть γ — наименьший из них. Он не является предельным в силу леммы 5.1, и не имеет предыдущего в силу леммы 10.12. Значит, (10.10) выполнено для всех α.

Разумеется, теорема 10.10 является частным случаем теоремы 10.11, поскольку $\mathcal{K}(X)$ — бикомпактный идеал в $\mathcal{B}(X)$. Стоит отметить, что даже в применении к алгебре $\mathcal{B}(X)$ теорема 10.11 дает больше, чем теорема 10.10, поскольку $\mathcal{R}_{\mathrm{hc}}(\mathcal{B}(X))$ может быть шире, чем $\mathcal{K}(X)$ (см. замечание 7.13). В частности, для пространств Аргироса—Хейдона теорема 10.9 устанавливает совпадение $\rho(M)$ с $r(M)$ для всех предкомпактных множеств операторов.

10.6. Приложения к теории инвариантных подпространств. Оператор $T\in\mathcal{B}(X)$ называется *основным*, если $\rho(T)=\rho_e(T)$. Здесь мы применим теоремы типа Бергера—Вонга для доказательства нетранзитивности некоторых полугрупп основных операторов, а затем рассмотрим следствия этих результатов для семейств операторов, образующих другие алгебраические структуры (алгебры Ли, градуированные алгебры Ли, йордановы алгебры, тройные системы Ли).

Легко проверить, что если полугруппа $\mathcal{S}(M)$, порожденная предкомпактным множеством M, состоит из основных операторов, то $r(M)=r_e(M)$.

Теорема 10.13. *Если полугруппа $G\subset\mathcal{B}(X)$ состоит из основных операторов и содержит группу $\{\exp(tT):t\in\mathbb{R}\}$, где T — некоторый вольтерров оператор, то она имеет инвариантное подпространство.*

Доказательство. Наметим план доказательства этого результата.

Пусть M — конечное множество операторов из G. Положим

$$M_1=\{\exp(sT):s\in\mathbb{R},|s|\leqslant 1\}\cup M.$$

Для $t\in\mathbb{R}$ обозначим через $N(t)$ множество $\exp(tT)M_1\cup M_1$; ясно, что $N(t)$ предкомпактно.

Так как оператор T вольтерров, то $\rho(\exp(sT))=\rho_e(\exp(sT))=1$ для всех $s\in\mathbb{C}$.

Легко видеть, что оператор $\exp(tT)S-S$ компактен для любого $S\in M_1$, откуда следует, что $\pi_K(\exp(tT)S)=\pi_K(S)$. Следовательно, $\pi_K(\exp(tT)M_1)=\pi_K(M_1)$, $\pi_K(N(t))=\pi_K(M_1)$ и $\rho_e(N(t))=\rho_e(M_1)=\rho_e(M)$.

Применяя теорему 10.10, получим

$$\rho(N(t))=\max\{\rho_e(M),r(N(t))\}.$$

Так как все операторы из G основные, то $r(N(t))=R_e(N(t))\leqslant\rho_e(N(t))=\rho_e(M_1)=\rho_e(M)$. Таким образом,

$$\rho(N(t))\leqslant\rho_e(M),$$

функция $t\to\rho(N(t))$ ограничена на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим теперь функцию $f(t)=\rho(N(t))$ на комплексной плоскости; из теоремы 5.2 следует, что она субгармонична на $\mathbb{C}$. Так как $\|N(t)\|\leqslant\|\exp(tT)\|\,\|M_1\|$, то $f(t)$ мажорируется функцией нулевого экспоненциального типа. Из общей теории субгармонических функций следует (см., например, книгу У. Хеймана и П. Кеннеди [45]), что эта функция постоянна.

Положим $M(t)=t^{-1}(\exp(tT)-1)M$ при $t\neq 0$, и пусть $M(0)=TM$; те же аргументы, что и выше, показывают, что функция $t\to\rho(M(t))$ субгармонична на $\mathbb{C}$. Так как $tM(t)\subset 2\cdot\mathrm{abs}(N(t))$ и ρ не меняется при переходе к выпуклой оболочке, то $\rho(M(t))$ — ограниченная субгармоническая функция, причем $\lim\limits_{t\to\infty}\rho(M(t))=0$, поскольку

$$\rho(M(t))\leqslant 2\,|t|^{-1}\,\rho(\mathrm{abs}(N(t)))=2\,|t|^{-1}\,\rho(N(0)).$$

Таким образом, $\rho(M(t))=0$, в частности, $\rho(M(0))=0$, т. е. $\rho(TM)=0$. Переходя к выпуклым оболочкам и учитывая, что $M\subset G$ произвольно, мы заключаем, что все операторы TW, где $W\in\mathrm{span}G=\mathcal{A}(G)$, квазинильпотентны. Это означает, что $T\in\mathrm{Rad}(A(G)$. Так как T компактен, то $A(G)$ имеет гиперинвариантное подпространство по теореме 7.19. □

Было бы интересно ослабить в теореме 10.13 условие, что G содержит группу $\{\exp(tT) : t \in \mathbb{R}\}$ с вольтерровым T. Однако сделать это пока не удается. В частности, неизвестно, всякая ли группа операторов вида $1 + T$ с вольтерровыми T имеет инвариантное подпространство.

Одним из важнейших приложений теоремы 10.13 является решение поставленной Войтыньским [81] проблемы инвариантного подпространства для алгебр Ли вольтерровых операторов.

Теорема 10.14. *Пусть π — представление энгелевой банаховой алгебры Ли $\mathcal{L}$ в банаховом пространстве. Если $\overline{\pi(\mathcal{L})} \cap \mathcal{K}(X) \neq 0$, то $\pi(\mathcal{L})$ имеет гиперинвариантное подпространство.*

Здесь из формулировки исключен тривиальный случай представления операторами, кратными единичному (возможный лишь при $\dim X < \infty$). В этом случае инвариантных подпространств сколько угодно, но гиперинвариантных нет.

Схема доказательства теоремы 10.14 такова. Пусть $\mathcal{E} = \pi(\mathcal{L})$ и T — ненулевой оператор из $\overline{\mathcal{E}} \cap \mathcal{K}(X)$. Можно доказать, что если какой-то оператор $S \in \mathcal{E}$ имеет несвязный спектр, то у $\mathcal{E}$ есть ГИП: таковым является образ проектора Рисса, соответствующего компоненте $\sigma(S)$. Поэтому мы будем считать, что все операторы из $\mathcal{E}$ имеют связные спектры. По теореме Ньюбурга [58], то же верно для всех операторов из $\overline{\mathcal{E}}$. В частности, оператор T вольтерров.

Пусть $G = \{\exp(S) : S \in \mathcal{E}\}$. По теореме Войтыньского [83], G является группой. Так как $\sigma(\exp(S)) = \exp(\sigma(S))$, то G состоит из операторов со связным спектром, а потому ее замыкание $\overline{G}$ — полугруппа основных операторов, содержащая все операторы $\exp(tT)$. По теореме 10.13, $\overline{G}$ имеет гиперинвариантное подпространство, которое, очевидно, будет гиперинвариантным и для $\mathcal{E}$.

Следствие 10.15. *Всякая алгебра Ли вольтерровых операторов порождает алгебру, состоящую из вольтерровых операторов. Как следствие, такая алгебра Ли триангулируема и имеет гиперинвариантное подпространство.*

Для построения бесконечномерного варианта классической теории конечномерных алгебр Ли (в частности, для исследования естественных аналогов классов нильпотентных и разрешимых алгебр) оказался важен вопрос о том, имеет ли инвариантное подпространство алгебра Ли компактных операторов, обладающая ненулевым вольтерровым идеалом (Ли). Этот и близкие вопросы рассматривались в работе Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [72].

Теорема 10.16. *Пусть алгебра Ли $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}(X)$ состоит из операторов, имеющих одноточечный существенный спектр. Если $\mathcal{L}$ имеет ненулевой вольтерров идеал J, то она имеет инвариантное подпространство.*

Приведем одно из следствий этой теоремы, дополняющее следствие 10.15 и далеко не очевидное даже для вольтерровых алгебр (ассоциативных).

Следствие 10.17. *Пусть $\mathcal{L}$ — алгебра Ли вольтерровых операторов. Существует подпространство, инвариантное относительно множества $D(\mathcal{L})$ всех компактных операторов T, дифференцирующих $\mathcal{L}$, т. е. удовлетворяющих условию $TS - ST \in \mathcal{L}$ для любого $S \in \mathcal{L}$.*

Из многочисленных приложений теоремы 10.16 к структурной теории алгебр Ли компактных операторов и общих банаховых алгебр Ли с компактным присоединенных действием приведем лишь результаты о «компактных аналогах» радикала Леви—Мальцева и ниль-радикала.

В полной аналогии с конечномерным случаем будем называть *E-разрешимыми* банаховы алгебры Ли, у которых в любой фактор-алгебре (по замкнутому идеалу) есть ненулевой энгелев идеал.

Следствие 10.18.

(i) *Любая алгебра Ли $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}(X)$ (и любая банахова алгебра Ли с компактным присоединенным действием) имеет наибольший энгелев идеал $R^o(\mathcal{L})$ и наибольший E-разрешимый идеал $R(\mathcal{L})$.*

(ii) *Алгебра Ли $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}(X)$ имеет инвариантное подпространство тогда и только тогда, когда $R(\mathcal{L}) \neq 0$; $\mathcal{L}$ триангулируема тогда и только тогда, когда $R(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$.*

(iii) $[R(\mathcal{L}), R(\mathcal{L})] \subset R^0(\mathcal{L})$.

Отсюда следует, что алгебра Ли компактных операторов (и алгебра Ли с компактным присоединенным действием) E-разрешима тогда и только тогда, когда она коммутативна по модулю своего наибольшего энгелева идеала (в полной аналогии с классическим случаем).

Заметим, что отображение, сопоставляющее каждой алгебре Ли $\mathcal{L}$ с компактным присоединенным действием ее идеал $R(\mathcal{L})$ является радикалом на данном классе алгебр Ли, обобщающим радикал Леви—Мальцева. В работе Э. Киссина, Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [50] строился также бесконечномерный аналог другого классического радикала алгебр Ли: радикала Фраттини, который выделяет свойство банаховой алгебры Ли не иметь замкнутых подалгебр конечной коразмерности. Как показано в работе тех же авторов [49], это свойство эквивалентно отсутствию замкнутых идеалов конечной коразмерности.

Значительный интерес представляет также вопрос о критериях нетранзитивности другого важного класса неассоциативных операторных алгебр — йордановых. Напомним, что линейное подпространство $\mathcal{J} \subset \mathcal{B}(X)$ называется *йордановой алгеброй*, если $TS + ST \in J$ для любых $S, T \in \mathcal{J}$. Вопрос о существовании инвариантных подпространств для йордановых алгебр вольтерровых операторов изучался в работе М. Кеннеди, Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [48]. Оказалось, что изучение этого вопроса наиболее удобно проводить в значительно более общем контексте *градуированных алгебр Ли*.

Пусть Γ — коммутативная группа, а $\mathcal{L}$ — алгебра Ли. Будем говорить, что $\mathcal{L}$ является Γ-*субградуированной*, если каждому элементу $\gamma \in \Gamma$ соответствует подпространство $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ (компонента алгебры $\mathcal{L}$), так что $[\mathcal{L}_\gamma, \mathcal{L}_\delta] \subset \mathcal{L}_{\gamma+\delta}$ и $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{L}_\gamma = \mathcal{L}$. Если последняя сумма прямая, то $\mathcal{L}$ называется Γ-*градуированной*. В дальнейшем Γ предполагается конечной.

Следующая теорема устанавливает триангулируемость Γ-субградуированных алгебр Ли компактных операторов при условиях вольтерровости некоторых их компонент.

Теорема 10.19. *Пусть алгебра Ли $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}(X)$ является Γ-субградуированной, и пусть H — такая подгруппа в Γ, что группа Γ/H циклическая.*

(i) *Если компоненты $\mathcal{L}_\gamma$ для всех $\gamma \in H$ состоят из вольтерровых операторов, то алгебра $\mathcal{L}$ триангулируема. В частности, при $\Gamma = \mathbb{Z}_n$ для триагулируемости достаточно, чтобы вольтерровой была подалгебра $\mathcal{L}_0$.*

(ii) *Если $\Gamma = \mathbb{Z}_2$, то для триангулируемости $\mathcal{L}$ достаточно, чтобы компонента $\mathcal{L}_1$ состояла из вольтерровых операторов.*

Можно сказать, что в утверждениях 10.15, 10.16 и 10.19 условие вольтерровости последовательно ослабляется: в первом из них вольтерровость требуется от всех операторов алгебры Ли, во втором от всех операторов из идеала, а в третьем от всех операторов из одной компоненты.

Подпространство $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}(X)$ называется тройной системой Ли, если $[\mathcal{E}, [\mathcal{E}, \mathcal{E}]] \subset \mathcal{E}$, т. е., $[x, [y, z]] \in \mathcal{E}$ для любых $x, y, z \in \mathcal{E}$. Этот класс алгебраических систем очень широк: достаточно сказать, что тройными системами Ли являются все операторные алгебры Ли и все йордановы операторные алгебры.

Если $\mathcal{E}$ — тройная система Ли, то полагая $\mathcal{L}_1 = \mathcal{E}$, $\mathcal{L}_0 = [\mathcal{E}, \mathcal{E}]$, мы получим $\mathbb{Z}_2$-градуированную алгебру Ли $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$. Применяя к ней теорему 10.19 (ii), получим:

Следствие 10.20. *Всякая тройная система Ли, состоящая из вольтерровых операторов, триангулируема.*

Отсюда немедленно вытекает следующий результат:

Следствие 10.21. *Всякая йорданова алгебра вольтерровых операторов триангулируема.*

Обширный перечень приложений к структурной теории градуированных алгебр Ли, тройных систем Ли и йордановых алгебр можно найти в [48].

Те результаты этого раздела, для которых мы не привели ссылок, были анонсированы в работе [10]; их доказательства были опубликованы в [11]. После появления препринтной версии статьи [11] (`arXiv:0805.0209[math.FA] 2 May 2008`) И. Моррис опубликовал в (тоже архивной) статье [57] другое доказательство формулы (10.3), основанное на мультипликативной эргодической теории. В [57] доказано также, что $\rho_e(M) = \rho_\chi(M)$ для любого предкомпактного множества M операторов в банаховом пространстве.

11. C*-версия формул Бергера—Вонга и непрерывность совместного спектрального радиуса

11.1. Спектральные характеристики и примитивные идеалы. Здесь будет рассмотрен вопрос о том, как различные спектральные характеристики элементов или подмножеств банаховой алгебры могут быть выражены через характеристики их образов в фактор-алгебрах (прежде всего — в фактор-алгебрах по примитивным идеалам). Особое внимание уделено совместному спектральному радиусу.

Из формулы (4.1) следует, что для любого элемента a произвольной банаховой алгебры A верно равенство

$$\rho(a) = \sup\{\rho(a/I) : I \in \mathrm{Prim}(A)\}. \tag{11.1}$$

Каким условиям должен удовлетворять набор идеалов (не обязательно примитивных), чтобы равенство (11.1) сохранялось? Можно ли перенести его на $\rho(M)$, где $M \subset A$ предкомпактно? Эти вопросы актуальны в спектральной теории.

Начнем со следующего простого результата.

Теорема 11.1. *Пусть $I_1, \ldots, I_n$ — замкнутые идеалы банаховой алгебры A, такие что $\bigcap\limits_{k=1}^{n} I_k \subset \mathrm{Rad}(A)$. Тогда*

$$\sigma(a) = \bigcup_{k=1}^{n} \sigma(a/I_k)$$

для любого $a \in A$.

Если алгебра рассеянна, то имеет место прямое обобщение данного равенства на бесконечные семейства идеалов:

Теорема 11.2. *Пусть A — банахова алгебра. Если изолированные точки плотны в спектре элемента $a \in A$, то $\sigma(a) = \overline{\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} \sigma(a/I_\alpha)}$ для любого семейства $\mathcal{F} = (I_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ замкнутых идеалов, пересечение которых содержится в радикале алгебры.*

В общем случае, теорема 11.1 на бесконечные цепочки не переносится, но имеет место более слабое соотношение:

Предложение 11.3. *Пусть A — алгебра, а $\mathcal{F} = (I_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ — семейство ее идеалов. Для $\alpha \in \Lambda$, положим $J_\alpha = \bigcap\limits_{\beta\neq\alpha} I_\beta$. Если $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha \subset \mathrm{rad}(A)$, то*

$$\sigma(a) = \left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \sigma(a/I_\alpha)\right) \cup \left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \sigma(a/J_\alpha)\right),$$

для любого $a \in A$.

В доказательствах соответствующих результатов для совместного спектрального радиуса существенно используются оценки $\rho(M)$ для семейств операторов на разрывах конечных цепочек, о которых шла речь в разделе 7 (см. лемма 7.20).

Напомним, что символом W_a мы обозначаем оператор L_aR_a на A, и что $W_M := \{W_a : a \in M\}$, где $M \subset A$.

Предложение 11.4. *Пусть A — банахова алгебра, $I_1, \ldots, I_n$ — ее замкнутые идеалы и $J = \bigcap\limits_{i=1}^{n} I_i$. Тогда*

$$\rho(M)^2 = \max\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} \rho(M/I_i)^2, \rho(W_M|_J)\}, \tag{11.2}$$

для любого ограниченного множества $M \subset A$.

Следствие 11.5. *Пусть $\mathcal{F} = \{I_1, \ldots, I_n\}$ — конечный набор идеалов банаховой алгебры A, такой что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} I_i \subset \mathcal{R}_{cq}(A)$. Тогда*

$$\rho(M) = \max\{\rho(M/I_1), \ldots, \rho(M/I_n)\} \tag{11.3}$$

для любого предкомпактного подмножества $M \subset A$.

Теорема 11.6. *Пусть $\mathcal{F}$ — семейство замкнутых идеалов алгебры A, такое что $\bigcap_{I\in\mathcal{F}} I = 0$, а $\mathcal{E}$ — множество всех конечных пересечений идеалов из $\mathcal{F}$. Тогда*

$$\rho(M) = \max\left\{\inf_{K\in\mathbb{K}_{\mathcal{E}}(A)} \rho(M/K), \sup_{I\in\mathcal{F}} \rho(M/I)\right\} \tag{11.4}$$

для любого ограниченного подмножества M алгебры A.

Банахова алгебра A называется *алгеброй Бергера—Вонга*, если равенство $\rho(M) = r(M)$ выполнено для всех ее предкомпактных подмножеств M. Роль теорем типа Бергера—Вонга в этих вопросах объясняется тем, что для BW-радиуса верны те же соотношения, что и для индивидуальных спектральных радиусов:

Предложение 11.7. *Пусть $\mathcal{F}$ — семейство замкнутых идеалов банаховой алгебры A, такое что*

$$\rho(a) = \sup_{J\in\mathcal{F}} \rho(a/J)$$

для всех $a \in A$. Тогда

$$r(M) = \sup_{I\in\mathcal{F}} r(M/I) \tag{11.5}$$

для каждого ограниченного множества $M \subset A$.

Из предложения 11.7 и равенства (11.1) следует, что в алгебрах Бергера—Вонга равенство

$$\rho(M) = \sup_{I\in\mathrm{Prim}(A)} \rho(M/I) \tag{11.6}$$

выполнено для любого предкомпактного множества M.

Это позволяет получить приложение к вопросу о непрерывности функции $M \mapsto \rho(M)$:

Теорема 11.8. *Пусть A — алгебра Бергера—Вонга. Тогда любое предкомпактное подмножество идеала $\mathcal{R}_s^{p*}(A)$ — точка непрерывности совместного спектрального радиуса.*

11.2. ССР и топология пространства примитивных идеалов в C*-алгебрах. В дальнейшем нас будут интересовать свойства пространств примитивных идеалов банаховых алгебр, а эти пространства большей частью не хаусдорфовы.

Напомним, что (не обязательно хаусдорфово) пространство T называется *квазикомпактным*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное.

Как обычно, функция $\phi : T \longrightarrow \mathbb{R}$ называется *полунепрерывной снизу* (*сверху*), если для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ множество $\{t \in T : \phi(t) \leqslant \lambda\}$ (соответственно, $\{t \in T : \phi(t) \geqslant \lambda\}$) замкнуто.

Выделим следующие два свойства, которыми может обладать банахова алгебра A:

(1_c) $\|a\| = \sup\{\|a/I\| : I \in \mathrm{Prim}(A)\}$ для любого $a \in A$;

(2_c) для любого $a \in A$ отображение $I \longmapsto \|a/I\|$ полунепрерывно сверху на $\mathrm{Prim}(A)$.

Лемма 11.9. *Пусть M — предкомпактное подмножества банаховой алгебры A.*

(i) *Если A обладает свойством (1_c), то $\|M\| = \sup_{I\in\mathrm{Prim}(A)} \|M/I\|$.*

(ii) *Если A обладает свойством (2_c), то отображение $I \longmapsto \|M/I\|$ полунепрерывно сверху на $\mathrm{Prim}(A)$.*

Теорема 11.10. *Пусть A — банахова алгебра, удовлетворяющая условиям (1_c) и (2_c), а M — ее предкомпактное подмножество. Если $\rho(M/I) = r(M/I)$ для всех $I \in \mathrm{Prim}(A)$, то*

$$\rho(M) = \sup_{I\in\mathrm{Prim}(A)} \rho(M/I) = r(M). \tag{11.7}$$

Заслуживает внимания (и используется в доказательствах некоторых дальнейших результатов) близкое к теореме 11.10 утверждение об алгебрах непрерывных функций на квазикомпактных пространствах.

Теорема 11.11. *Пусть B — банахова алгебра, $A = C(T, B)$ — алгебра всех непрерывных B-значных функций на квазикомпактном пространстве T.*

(i) *Если B — алгебра Бергера—Вонга, то и A — алгебра Бергера—Вонга.*

(ii) *Если спектральный радиус непрерывен на B, то совместный спектральный радиус непрерывен на A.*

Из результатов предыдущего раздела ясно, что в качестве B может выступать любая алгебра компактных операторов на банаховом пространстве.

Как мы знаем, для любого предкомпактного подмножества M произвольной банаховой алгебры A справедливо равенство

$$\rho(M) = \max\{r(M), \rho(M/\mathcal{R}_{hc}(A))\}. \tag{11.8}$$

Наша цель — выяснить, можно ли, работая с C*-алгебрами, заменять в этой важной формуле идеал $\mathcal{R}_{hc}(A)$ существенно большим идеалом $\mathcal{R}_{GCR}(A)$. Другими словами, нас интересует справедливость равенства

$$\rho(M) = \max\{r(M), \rho(M/\mathcal{R}_{GCR}(A))\}. \tag{11.9}$$

Наш подход основан на использовании примитивных идеалов; в частности, нас будет интересовать, для каких C*-алгебр выполнено равенство (11.6).

Предыдущие результаты уже дают нам полезную информацию. Можно показать, используя результаты Диксмье [34, гл. 3], что введенное выше условие (1_c) выполняется во всех C*-алгебрах, а (2_c) — во всех C*-алгебрах с хаусдорфовым спектром. Применяя теорему 11.10, мы можем заключить, что равенство (11.7) верно для всех CCR C*-алгебр с хаусдорфовым пространством примитивных идеалов.

Мы увидим, что этот результат верен в значительно большей общности. Условимся говорить, что топологическое пространство имеет *свойство* (QC), если пересечение направленного вниз семейства непустых квазикомпактных подмножеств непусто. Это свойство выделяет широкий класс пространств, включающий все хаусдорфовы пространства и замкнутый относительно многих естественных операций.

Пусть $\mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$ — класс всех C*-алгебр A, для которых пространство $\mathrm{Prim}(A)$ имеет свойство (QC).

Вопрос: совпадает ли $\mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$ с классом всех C*-алгебр?

Предложение 11.12.

(i) *Если C*-алгебра A входит в класс $\mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$, то и все ее замкнутые идеалы и фактор-алгебры принадлежат этому классу.*

(ii) *Если A имеет замкнутый идеал $J \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$, причем пространство $\mathrm{Prim}(A/J)$ хаусдорфово, то $A \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$.*

(iii) *Если A является замыканием объединения направленного вверх семейства идеалов, каждый из которых принадлежит классу $\mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$, то и A принадлежит $\mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$.*

Следствие 11.13. *Все C*-алгебры типа* 1 *входят в* $\mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$.

Теорема 11.14. *Если C*-алгебра A принадлежит классу $\mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$, то равенство* (11.6) *выполняется для каждого предкомпактного множества $M \subset A$.*

Следствие 11.15. *Пусть A — C*-алгебра из класса $\mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$, а M — ее предкомпактное подмножество. Если $\rho(M/I) = r(M/I)$ для всех $I \in \mathrm{Prim}(A)$, то*

$$\rho(M) = r(M).$$

Следующий результат устанавливает справедливость равенства (11.9) для C*-алгебр, удовлетворяющих условию (11.6) вместе со всеми своими фактор-алгебрами.

Предложение 11.16. *Пусть A — C*-алгебра. Если условие*

$$\rho(N) = \sup_{I \in \mathrm{Prim}(B)} \rho(N/I) \text{ для всех предкомпактных } N \subset B$$

выполняется для любой фактор-алгебры B C-алгебры A, то*

$$\rho(M) = \max\{r(M), \rho(M/\mathcal{R}_{GCR}(A))\}$$

для любого предкомпактного подмножества M алгебры A.

Следствие 11.17. *Если* $A \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$, *то*

$$\rho(M) = \max\{r(M), \rho(M/\mathcal{R}_{GCR}(A))\}$$

для любого предкомпактного $M \subset A$.

В самом деле, так как класс $\mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$ замкнут относительно перехода к фактор-алгебрам и каждая алгебра из $\mathfrak{C}_{\mathfrak{qc}}$ удовлетворяет условию (11.6), то достаточно просто применить предложение 11.16.

Следствие 11.18. *Всякая GCR C*-алгебра является алгеброй Бергера—Вонга.*

Следствие 11.19. *Пусть A — C*-алгебра. Всякое предкомпактное подмножество в* $\mathcal{R}_{GCR}(A)$ *является точкой непрерывности совместного спектрального радиуса.*

Действительно, так как для C*-алгебр $\mathcal{R}_s^{p*}(A) = \mathcal{R}_{GCR}(A)$ (теорема 4.12), то результат прямо следует из теоремы 11.8 и следствия (11.18).

Результаты данного раздела получены в работе Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [75].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андрунакиевич В. А.* К определению радикала кольца// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1952. — *16.* — С. 217–224.
2. *Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М.* Радикалы алгебр и структурная теория. — М.: Наука, 1979.
3. *Голод Е. С.* О нильалгебрах и финитно-аппроксимируемых p-группах// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1964. — *28.* — С. 273–276.
4. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 1. — М.: ИЛ, 1962.
5. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.
6. *Зельманов Е. И.* Об энгелевых алгебрах Ли// Докл. АН СССР. — 1987. — *292*, № 2. — С. 265–268.
7. *Курош А. Г.* Радикалы колец и алгебр// Мат. сб. — 1953. — *33*, № 1. — С. 13–26.
8. *Ломоносов В. И.* Инвариантные подпространства для операторов, коммутирующих с компактными операторами// Функц. анализ и его прилож. — 1973. — *7.* — С. 213–214.
9. *Туровский Ю. В.* О спектральных свойствах некоторых лиевых подалгебр и спектральном радиусе подмножеств в банаховых алгебрах// Спектр. теор. опер. и ее прилож. — 1985. — *6.* — С. 144–181.
10. *Туровский Ю. В., Шульман В. С.* Радикалы в банаховых алгебрах и некоторые проблемы теории радикальных банаховых алгебр// Функц. анализ и его прилож. — 2001. — *35*, № 4. — С. 88–91.
11. *Туровский Ю. В., Шульман В. С.* Топологические радикалы и совместный спектральный радиус// Функц. анализ и его прилож. — 2012. — *46*, № 4. — С. 61–82.
12. *Шульман В. С.* Об инвариантных подпространствах вольтерровых операторов// Функц. анализ и его прилож. — 1984. — *18*, № 2. — С. 84–85.
13. *Albert A. A.* The radical of a non-associative algebra// Bull. Am. Math. Soc. — 1942. — *48.* — С. 891–897.
14. *Alexander J. C.* Compact Banach algebras// Proc. London Math. Soc. (3). — 1968. — *18.* — С. 1–18.
15. *Amitsur S. A.* A general theory of radicals, I: Radicals in complete lattices// Amer. J. Math. — 1952. — *74.* — С. 774–786.
16. *Amitsur S. A.* A general theory of radicals, II: Rings and bicategories// Amer. J. Math. — 1954. — *76*, № 1. — С. 100–125.
17. *Amitsur S. A.* A general theory of radicals, III: Applications// Amer. J. Math. — 1954. — *76*, № 1. — С. 126–136.
18. *Andreolas G., Anoussis M.* Topological radicals of nest algebras// arXiv:1608.05857v2 [math.OA] 10 Oct 2016.
19. *Argiros S. A., Haydon R.* A hereditarily indecomposable L_∞-space that solves the scalar-plus-compact problem// Acta Math. — 2011. — *206.* — С. 1–54.
20. *Aupetit B.* Propriétés spectrales des algèbres de Banach. — Berlin: Springer, 1979.
21. *Aupetit B.* Primer to spectral theory. — N.Y.: Springer, 1991.
22. *Aupetit B., Mathieu M.* The continuity of Lie homomorphisms// Stud. Math. — 2000. — *138.* — С. 193–199.
23. *Baer R.* Radical ideals// Amer. J. Math. — 1943. — *65.* — С. 537–568.
24. *Barnes B. A., Murphy G. J., Smyth M. R. F., West T. T.* Riesz and Fredholm theory in Banach algebras. — Boston: Pitman Publ. Inc., 1982.
25. *Berger M. A., Wang Y.* Bounded semigroups of matrices// Linear Algebra Appl. — 1992. — *166.* — С. 21–27.

26. *Bonsall F. F.* Operators that act compactly on an algebra of operators// Bull. London Math. Soc. — 1969. — *1*. — С. 163–170.
27. *Brown L. G., Douglas R. G., Fillmore P. A.* Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C*-algebras// Proc. of Conf. on Operator Theory, Halifax, Nova Scotia. — 1973. — С. 58–128.
28. *Brown F., McCoy N. H.* Some theorems on groups with applications to ring theory// Trans. Am. Math. Soc. — 1950. — *69*. — С. 302–311
29. *Burlando L.* Spectral continuity in some Banach algebras// Rocky Mountain J. Math. — 1993. — *23*. — С. 17–39.
30. *Curto R. E.* Spectral theory of elementary operators// В сб.: «Elementary operators and applications». — Singapour—New Jersey—London: World Sci. Publ., 1992. — С. 3–54.
31. *Davidson K. R.* C*-algebras by examples. — Providence: Am. Math. Soc., 1996.
32. *Defant A., Floret K.* Tensor norms and operator ideals. — Amsterdam: Elsevier, 1993.
33. *Divinsky N. J.* Rings and radicals. — London: Allen and Unwin, 1965.
34. *Dixmier J.* Les C*-algébres et leur reprèsentations. — Paris: Gauthier-Villars, 1964.
35. *Dixon P. G.* A Jacobson-semisimple Banach algebra with a dense nil subalgebra// Colloq. Math. — 1977. — *37*. — С. 81–82.
36. *Dixon P. G.* Topologically nilpotent Banach algebras and factorization// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 1991. — *119*. — С. 329–341.
37. *Dixon P. G.* Topologically irreducible representations and radicals in Banach algebras// Proc. London Math. Soc. (3). — 1997. — *74*. — С. 174–200.
38. *Dixon P. G., Müller V.* A note on topologically nilpotent Banach algebras// Stud. Math. — 1992. — *102*. — С. 269–275.
39. *Dixon P. G., Willis G. A.* Approximate identities in extensions of topologically nilpotent Banach algebras// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 1992. — *122*. — С. 45–52.
40. *Feldman I., Krupnik N.* On the continuity of the spectrum in certain Banach algebras// Integral Equ. Operator Theory. — 2000. — *38*. — С. 284–301.
41. *Gardner B. J., Wieland R.* Radical theory of rings. — New York: Marcel Dekker Inc., 2004.
42. *Gray M.* A radical approach to algebra. — Massachusetts: Addison-Wesley Publ. Comp., 1970.
43. *Guinand P. G.* On quasinilpotent semigroups of operators// Proc. Am. Math. Soc. — 1982. — *86*. — С. 485–486.
44. *Halmos P.* Hilbert space problem book. — Toronto—London: Van Nostrand, 1967.
45. *Hayman W. K., Kennedy C. B.* Subharmonic functions. Vol. 1. — London—New York—San Francisko: Academic Press, 1976.
46. *Jacobson N.* The radical and semi simplicity for arbitrary rings// Am. J. Math. — 1945. — *67*. — С. 300–320.
47. *Jungers R.* Joint spectral radius, theory and applications. — Berlin: Springer, 2009.
48. *Kennedy M., Shulman V. S., Turovskii Yu. V.* Invariant subspaces of subgraded Lie algebras of compact operators// Integral Equ. Operator Theory. — 2009. — *63*. — С. 47–93.
49. *Kissin E., Shulman V. S., Turovskii Yu. V.* Banach Lie algebras with Lie subalgebras of finite codimension have Lie ideals// J. London Math. Soc. (2). — 2009. — *80* . — С. 603–626.
50. *Kissin E., Shulman V. S., Turovskii Yu. V.* Topological radicals and Frattini theory of Banach Lie algebras// Integral Equ. Operator Theory. — 2012. — *74*. — С. 51–121
51. *Köthe G.* Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollstandig reduzibel ist// Math. Z. — 1930. — *32*. — С. 161–186.
52. *Köthe G.* Topological vector spaces. I. — New York: Spinger, 1969.
53. *Kozyakin V.* An annotated bibliography on convergence of matrix products and the theory of convergence of the joint/generalized spectral radius// Preprint Inst. Inform. Transmission Prob., 2013.
54. *Kusuda M.* A characterization of scattered C*-algebras and its applications to C*-crossed products// J. Operator Theory. — 2010. — *63*, № 2. — С. 417–424.
55. *Lebow A., Schechter M.* Semigroups of operators and measures of noncompactness// J. Funct. Anal. — 1971. — *7* . — С. 1–26.
56. *Levitzki A.* On the radical of a general ring// Bull. Am. Math. Soc. — 1943. — *43*. — С. 462–466.
57. *Morris I. D.* The generalized Berger—Wang formula and the spectral radius of linear cocycles// Preprint. — ArXiv:0906.2915v1 [math.DS] 16 Jun 2009.
58. *Newburgh J. D.* The variation of spectra// Duke Math. J. — 1951. — *18*. — С. 165–176.
59. *Palacios A. R.* The uniqueness of the complete norm topology in complete normed nonassociative algebras// J. Funct. Anal. — 1985. — *60*. — С. 1–15.

60. *Peng C., Turovskii Yu.* Topological radicals, VI. Scattered elements in Banach, Jordan, and associative algebras// Stud. Math. — 2016. — *235.* — С. 171–208.
61. *Peters J. R., Wogen R. W.* Commutative radical operator algebras// J. Operator Theory. — 1999. — *42.* — С. 405–424.
62. *Pietsch A.* Operator ideals. — Berlin: Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978.
63. *Pietsch A.* History of Banach spaces and linear operators. — Boston: Birkhauser, 2007.
64. *Protasov V. Yu.* The generalized joint spectral radius. A geometric approach// Izv. Math. — 1997. — *61*, № 5. — С. 995–1030.
65. *Radjavi H., Rosenthal P.* Simultaneous triangularization. — N.Y.: Springer, 2000.
66. *Read C. J.* Quasinilpotent operators and the invariant subspace problem// J. London Math. Soc. (2). — 1997. — *56.* — С. 595–606.
67. *Ringrose J. R.* On some algebras of operators // Proc. London Math. Soc. — 1965. — *15.* — С. 61–83.
68. *Rota G.-C., Strang W. G.* A note on the joint spectral radius// Indag. Math. — 1960. — *22.* — С. 379–381.
69. *Shulman T.* Continuity of spectral radius and type I C*-algebras// arXiv: 1707.08848 (to appear in Proc. Am. Math. Soc.).
70. *Shulman V. S., Turovskii Yu. V.* Joint spectral radius, operator semigroups and a problem of a Wojtynski// J. Funct. Anal. — 2000. — *177.* — С. 383–441.
71. *Shulman V. S., Turovskii Yu. V.* Formulae for joint spectral radii of sets of operators// Stud. Math. — 2002. — *149.* — С. 23–37.
72. *Shulman V. S., Turovskii Yu. V.* Invariant subspaces of operator Lie algebras and Lie algebras with compact adjoint action// J. Funct. Anal. — 2005. — *223.* — С. 425–508.
73. *Shulman V. S., Turovskii Yu. V.* Topological radicals, I. Basic properties, tensor products and joint quasinilpotence// Banach Center Publ. — 2005. — *67.* — С. 293–333.
74. *Shulman V. S., Turovskii Yu. V.* Topological radicals, II. Applications to the spectral theory of multiplication operators// Oper. Theory Adv. Appl. — 2010. — *212.* — С. 45–114.
75. *Shulman V. S., Turovskii Yu. V.* Topological radicals, V. From algebra to spectral theory// Oper. Theory Adv. Appl. — 2014. — *233.* — С. 171–280.
76. *Szász F. A.* Radicals of rings — Budapest: Akadémiai Kiadó, 1981.
77. *Turovskii Yu. V.* Volterra semigroups have invariant subspaces// J. Funct. Anal. — 1999. — *182.* — С. 313–323.
78. *Vala K.* On compact sets of compact operators// Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. — 1964. — *351.* — С. 1–8.
79. *Vesentini E.* On the subharmonicity of the spectral radius// Boll. Unione Mat. Ital. (9). — 1968. — *4.* — С. 427–429.
80. *Willis G.* Compact approximation property does not imply approximation property// Stud. Math. — 1992. — *103.* — С. 99–108.
81. *Wojtynski W.* A note on compact Banach—Lie algebras of Volterra type// Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys. — 1978. — *26*, № 2. — С. 105–107.
82. *Wojtynski W.* On the existence of closed two-sided ideals in radical Banach algebras with compact elements// Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys. — 1978. — *26*, № 2. — С. 109–113.
83. *Wojtynski W.* Quasinilpotent Banach—Lie algebras are Baker—Campbell—Hausdorff// J. Funct. Anal. — 1998. — *153.* — С. 405–413.
84. *Zemanek J.* Spectral characterization of two-sided ideals in Banach algebras// Stud. Math. — 1980. — *67.* — С. 1–12.

E. Kissin
STORM/SCDM, London Metropolitan University,
166-220, Holloway Road, N7 8DB, UK
E-mail: `e.kissin@londonmet.ac.uk`

Ю. В. Туровский
171252, г. Конаково, ул. Учебная, д. 5, кв. 37
E-mail: `yuri.turovskii@gmail.com`

В. С. Шульман
Вологодский государственный университет,
160000, г. Вологда, ул. Ленина, д. 15
E-mail: `victor.shulman80@gmail.com`

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-3-490-546 UDC 512.7

On the Theory of Topological Radicals

© 2018 **E. Kissin, Yu. V. Turovskii, V. S. Shulman**

Светлой памяти Виктора Иосифовича Ломоносова

Abstract. In this paper, we review main directions and results of the theory of topological radicals. We consider applications to different problems in the theory of operators and Banach algebras.

REFERENCES

1. V. A. Andrunakievich, "K opredeleniyu radikala kol'tsa" [To the definition of a radical of a ring], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1952, **16**, 217–224 (in Russian).
2. V. A. Andrunakievich and Yu. M. Ryabukhin, *Radikaly algebr i strukturnaya teoriya* [Radicals of Algebras and Structural Theory], Nauka, Moscow, 1979 (in Russian).
3. E. C. Golod, "O nil'algebrakh i finitno-approksimiruemykh p-gruppakh" [On nil algebras and finite-approximable p-groups], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1964, **28**, 273–276 (in Russian).
4. N. Dunford and J. Schwartz, *Lineynye operatory. T. 1* [Linear Operators. Vol. 1], IL, Moscow, 1962 (Russian translation).
5. K. A. Zhevlakov, A. M. Slin'ko, I. P. Shestakov, and A. I. Shirshov, *Kol'tsa, blizkie k assotsiativnym* [Rings Close to Associative], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
6. E. I. Zel'manov, "Ob engelevykh algebrakh Li" [On Engel Lie-algebras], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1987, **292**, No. 2, 265–268 (in Russian).
7. A. G. Kurosh, "Radikaly kolets i algebr" [Radicals of rings and algebras], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1953, **33**, No. 1, 13–26 (in Russian).
8. V. I. Lomonosov, "Invariantnye podprostranstva dlya operatorov, kommutiruyushchikh s kompaktnymi operatorami" [Invariant subspaces for operators commuting with compact operators], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1973, **7**, 213–214 (in Russian).
9. Yu. V. Turovskii, "O spektral'nykh svoystvakh nekotorykh lievykh podalgebr i spektral'nom radiuse podmnozhestv v banakhovykh algebrakh" [On spectral properties of some Lie-subalgebras and spectral radius of subsets in Banach algebras], *Spektr. teor. oper. i ee prilozh.* [Spectr. Theor. Oper. Appl.], 1985, **6**, 144–181 (in Russian).
10. Yu. V. Turovskii and B. C. Shul'man, "Radikaly v banakhovykh algebrakh i nekotorye problemy teorii radikal'nykh banakhovykh algebr" [Radicals in Banach algebras and some problems of the theory of radical Banach algebras], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2001, **35**, No. 4, 88–91 (in Russian).
11. Yu. V. Turovskii and B. C. Shul'man, "Topologicheskie radikaly i sovmestnyy spektral'nyy radius" [Topological radicals and mutual spectral radius], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2012, **46**, No. 4, 61–82 (in Russian).
12. B. C. Shul'man, "Ob invariantnykh podprostranstvakh vol'terrovykh operatorov" [On invariant subspaces of Volterra operators], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1984, **18**, No. 2, 84–85 (in Russian).
13. A. A. Albert, "The radical of a non-associative algebra," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1942, **48**, 891–897.
14. J. C. Alexander, "Compact Banach algebras," *Proc. London Math. Soc. (3)*, 1968, **18**, 1–18.
15. S. A. Amitsur, "A general theory of radicals, I: Radicals in complete lattices," *Amer. J. Math.*, 1952, **74**, 774–786.
16. S. A. Amitsur, "A general theory of radicals, II: Rings and bicategories," *Amer. J. Math.*, 1954, **76**, No. 1, 100–125.
17. S. A. Amitsur, "A general theory of radicals, III: Applications," *Amer. J. Math.*, 1954, **76**, No. 1, 126–136.
18. G. Andreolas and M. Anoussis, "Topological radicals of nest algebras," *ArXiv*: 1608.05857v2 [math.OA] 10 Oct 2016.

19. S. A. Argiros and R. Haydon, “A hereditarily indecomposable L_∞-space that solves the scalar-plus-compact problem,” *Acta Math.*, 2011, **206**, 1–54.
20. B. Aupetit, *Propriétés Spectrales des Algèbres de Banach*, Springer, Berlin, 1979.
21. B. Aupetit, *Primer to Spectral Theory*, Springer, N.Y., 1991.
22. B. Aupetit and M. Mathieu, “The continuity of Lie homomorphisms,” *Stud. Math.*, 2000, **138**, 193–199.
23. R. Baer, “Radical ideals,” *Amer. J. Math.*, 1943, **65**, 537–568.
24. B. A. Barnes, G. J. Murphy, M. R. Smyth, and T. T. West, *Riesz and Fredholm Theory in Banach Algebras*, Pitman Publ. Inc., Boston, 1982.
25. M. A. Berger and Y. Wang, “Bounded semigroups of matrices,” *Linear Algebra Appl.*, 1992, **166**, 21–27.
26. F. F. Bonsall, “Operators that act compactly on an algebra of operators,” *Bull. London Math. Soc.*, 1969, **1**, 163–170.
27. L. G. Brown, R. G. Douglas, and P. A. Fillmore, “Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C*-algebras,” *Proc. of Conf. on Operator Theory*, Halifax, Nova Scotia, 1973, 58–128.
28. F. Brown and N. H. McCoy, “Some theorems on groups with applications to ring theory,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1950, **69**, 302–311
29. L. Burlando, “Spectral continuity in some Banach algebras,” *Rocky Mountain J. Math.*, 1993, **23**, 17–39.
30. R. E. Curto, “Spectral theory of elementary operators,” In: *Elementary Operators and Applications*, World Sci. Publ., Singapour—New Jersey—London, 1992, pp. 3–54.
31. K. R. Davidson, *C*-Algebras by Examples*, Am. Math. Soc., Providence, 1996.
32. A. Defant and K. Floret, *Tensor Norms and Operator Ideals*, Elsevier, Amsterdam, 1993.
33. N. J. Divinsky, *Rings and Radicals*, Allen and Unwin, London, 1965.
34. J. Dixmier, *Les C*-algébres et leur Reprèsentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.
35. P. G. Dixon, “A Jacobson-semisimple Banach algebra with a dense nil subalgebra,” *Colloq. Math.*, 1977, **37**, 81–82.
36. P. G. Dixon, “Topologically nilpotent Banach algebras and factorization,” *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 1991, **119**, 329–341.
37. P. G. Dixon, “Topologically irreducible representations and radicals in Banach algebras,” *Proc. London Math. Soc. (3)*, 1997, **74**, 174–200.
38. P. G. Dixon and V. Müller, “A note on topologically nilpotent Banach algebras,” *Stud. Math.*, 1992, **102**, 269–275.
39. P. G. Dixon and G. A. Willis, “Approximate identities in extensions of topologically nilpotent Banach algebras,” *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 1992, **122**, 45–52.
40. I. Feldman and N. Krupnik, “On the continuity of the spectrum in certain Banach algebras,” *Integral Equ. Operator Theory*, 2000, **38**, 284–301.
41. B. J. Gardner and R. Wieland, *Radical Theory of Rings*, Marcel Dekker Inc., New York, 2004.
42. M. Gray, *A Radical Approach to Algebra*, Addison-Wesley Publ. Comp., Massachusetts, 1970.
43. P. G. Guinand, “On quasinilpotent semigroups of operators,” *Proc. Am. Math. Soc.*, 1982, **86**, 485–486.
44. P. Halmos, *Hilbert Space Problem Book*, Van Nostrand, Toronto—London, 1967.
45. W. K. Hayman and C. B. Kennedy, *Subharmonic Functions. Vol. 1*, Academic Press, London—New York—San Francisko, 1976.
46. N. Jacobson, “The radical and semi simplicity for arbitrary rings,” *Am. J. Math.*, 1945, **67**, 300–320.
47. R. Jungers, *Joint Spectral Radius, Theory and Applications*, Springer, Berlin, 2009.
48. M. Kennedy, V. S. Shulman, and Yu. V. Turovskii, “Invariant subspaces of subgraded Lie algebras of compact operators,” *Integral Equ. Operator Theory*, 2009, **63**, 47–93.
49. E. Kissin, V. S. Shulman, and Yu. V. Turovskii, “Banach Lie algebras with Lie subalgebras of finite codimension have Lie ideals,” *J. London Math. Soc. (2)*, 2009, **80** , 603–626.
50. E. Kissin, V. S. Shulman, and Yu. V. Turovskii, “Topological radicals and Frattini theory of Banach Lie algebras,” *Integral Equ. Operator Theory*, 2012, **74**, 51–121
51. G. Köthe, “Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollstandig reduzibel ist,” *Math. Z.*, 1930, **32**, 161–186.
52. G. Köthe, *Topological Vector Spaces. I*, Springer, New York, 1969.
53. V. Kozyakin, “An annotated bibliography on convergence of matrix products and the theory of convergence of the joint/generalized spectral radius,” Preprint Inst. Inform. Transmission Prob., 2013.
54. M. Kusuda, “A characterization of scattered C*-algebras and its applications to C*-crossed products,” *J. Operator Theory*, 2010, **63**, No. 2, 417–424.
55. A. Lebow and M. Schechter, “Semigroups of operators and measures of noncompactness,” *J. Funct. Anal.*, 1971, **7** , 1–26.
56. A. Levitzki, “On the radical of a general ring,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1943, **43**, 462–466.

57. I. D. Morris, "The generalized Berger—Wang formula and the spectral radius of linear cocycles," *ArXiv*: 0906.2915v1 [math.DS] 16 Jun 2009.
58. J. D. Newburgh, "The variation of spectra," *Duke Math. J.*, 1951, **18**, 165–176.
59. A. R. Palacios, "The uniqueness of the complete norm topology in complete normed nonassociative algebras," *J. Funct. Anal.*, 1985, **60**, 1–15.
60. C. Peng and Yu. Turovskii, "Topological radicals, VI. Scattered elements in Banach, Jordan, and associative algebras," *Stud. Math.*, 2016, **235**, 171–208.
61. J. R. Peters and R. W. Wogen, "Commutative radical operator algebras," *J. Operator Theory*, 1999, **42**, 405–424.
62. A. Pietsch, *Operator Ideals*, Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.
63. A. Pietsch, *History of Banach Spaces and Linear Operators*, Birkhauser, Boston, 2007.
64. V. Yu. Protasov, "The generalized joint spectral radius. A geometric approach," *Izv. Math.*, 1997, **61**, No. 5, 995–1030.
65. H. Radjavi and P. Rosenthal, *Simultaneous Triangularization*, Springer, N.Y., 2000.
66. C. J. Read, "Quasinilpotent operators and the invariant subspace problem," *J. London Math. Soc. (2)*, 1997, **56**, 595–606.
67. J. R. Ringrose, "On some algebras of operators," *Proc. London Math. Soc.*, 1965, **15**, 61–83.
68. G.-C. Rota and W. G. Strang, "A note on the joint spectral radius," *Indag. Math.*, 1960, **22**, 379–381.
69. T. Shulman, "Continuity of spectral radius and type I C*-algebras," *ArXiv*: 1707.08848 (to appear in Proc. Am. Math. Soc.).
70. V. S. Shulman and Yu. V. Turovskii, "Joint spectral radius, operator semigroups and a problem of a Wojtynski," *J. Funct. Anal.*, 2000, **177**, 383–441.
71. V. S. Shulman and Yu. V. Turovskii, "Formulae for joint spectral radii of sets of operators," *Stud. Math.*, 2002, **149**, 23–37.
72. V. S. Shulman and Yu. V. Turovskii, "Invariant subspaces of operator Lie algebras and Lie algebras with compact adjoint action," *J. Funct. Anal.*, 2005, **223**, 425–508.
73. V. S. Shulman and Yu. V. Turovskii, "Topological radicals, I. Basic properties, tensor products and joint quasinilpotence," *Banach Center Publ.*, 2005, **67**, 293–333.
74. V. S. Shulman and Yu. V. Turovskii, "Topological radicals, II. Applications to the spectral theory of multiplication operators," *Oper. Theory Adv. Appl.*, 2010, **212**, 45–114.
75. V. S. Shulman and Yu. V. Turovskii, "Topological radicals, V. From algebra to spectral theory," *Oper. Theory Adv. Appl.*, 2014, **233**, 171–280.
76. F. A. Szász, *Radicals of Rings*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1981.
77. Yu. V. Turovskii, "Volterra semigroups have invariant subspaces," *J. Funct. Anal.*, 1999, **182**, 313–323.
78. K. Vala, "On compact sets of compact operators," *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 1964, **351**, 1–8.
79. E. Vesentini, "On the subharmonicity of the spectral radius," *Boll. Unione Mat. Ital. (9)*, 1968, **4**, 427–429.
80. G. Willis, "Compact approximation property does not imply approximation property," *Stud. Math.*, 1992, **103**, 99–108.
81. W. Wojtynski, "A note on compact Banach—Lie algebras of Volterra type," *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys.*, 1978, **26**, No. 2, 105–107.
82. W. Wojtynski, "On the existence of closed two-sided ideals in radical Banach algebras with compact elements," *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys.*, 1978, **26**, No. 2, 109–113.
83. W. Wojtynski, "Quasinilpotent Banach—Lie algebras are Baker—Campbell—Hausdorff," *J. Funct. Anal.*, 1998, **153**, 405–413.
84. J. Zemanek, "Spectral characterization of two-sided ideals in Banach algebras," *Stud. Math.*, 1980, **67**, 1–12.

E. Kissin
STORM/SCDM, London Metropolitan University, London, UK
E-mail: e.kissin@londonmet.ac.uk

Yu. V. Turovskii
E-mail: yuri.turovskii@gmail.com

V. S. Shulman
Vologda State University, Vologda, Russia
E-mail: victor.shulman80@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 3 (2018). С. 547–572

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-3-547-572 УДК 517.958

К ПРОБЛЕМЕ МАЛЫХ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМЫ ИЗ ДВУХ ВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ В НЕПОДВИЖНОМ СОСУДЕ

© 2018 г. **Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ**

Аннотация. В данной работе изучается проблема малых движений двух вязкоупругих несжимаемых жидкостей модели Олдройта, заполняющих неподвижный сосуд. С помощью применения операторного подхода исходная начально-краевая задача приведена к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения в некотором гильбертовом пространстве, доказана теорема о корректной разрешимости проблемы на произвольном промежутке времени. Выведено уравнение для нормальных колебаний гидросистемы (обобщенный операторный пучок С. Г. Крейна).

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

1.1. О модели вязкоупругой жидкости. В данной работе изучается проблема малых движений вязкоупругих несжимаемых жидкостей модели Олдройта (см., например, [10]). В этой модели связь между тензором вязких напряжений и удвоенным тензором скоростей деформаций в вязкоупругой жидкости описывается не простейшим законом Гука, а линейным дифференциальным соотношением, где фигурируют производные первого порядка по времени как у тензора вязких напряжений, так и у тензора скоростей деформаций.

Некоторые исследователи (см., например, [7, 14, 15], а также [9, 13]) рассматривают так называемую обобщенную модель Олдройта, когда упомянутая выше связь описывается линейным дифференциальным соотношением порядка $m \geqslant 1$. Тогда при естественном условии, что если в начальный момент времени тензор скорости деформации и его производные по времени вплоть до порядка $m-1$ равны нулю, то эти же условия выполнены и для тензора вязких напряжений, получается связь между этими тензорами в любой момент времени с помощью интегрального оператора Вольтерра. Этот переход от дифференциальной связи к интегральной описан, например, в [13, с. 316–318].

Пусть $\vec{u}(t,x) = \sum_{k=1}^{3} u_k(t,x)\vec{e}_k$ — поле скоростей в вязкоупругой жидкости, $\tau_{kl}(\vec{u}) := \dfrac{\partial u_k}{\partial x_l} + \dfrac{\partial u_l}{\partial x_k}$, $(k,l = 1,2,3)$ — удвоенный тензор скоростей деформаций, а σ'_{kl} — тензор вязких напряжений. Тогда связь между ними описывается соотношением

$$\sigma' = \mu I_0(t)\tau, \tag{1.1}$$

где $\mu > 0$ — коэффициент динамической вязкой жидкости, а

$$I_0(t)\tau := \tau(t) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \int_0^t e^{-\beta_j(t-s)}\tau(s)ds, \tag{1.2}$$

где α_j и β_j — положительные константы, характеризующие вязкоупругую жидкость. Если $\alpha_j = 0$, $j = 1, \ldots, m$, то отсюда получаем модель обычной вязкой несжимаемой жидкости, а из (1.1) — закон Гука. Отметим еще следующий факт: интегральный оператор Вольтерра из (1.1) является обратимым интегральным оператором второго рода, причем обратный оператор также является интегральным оператором Вольтерра.

1.2. Об истории вопроса и содержании данной работы. Одними из первых работ, связанных с применением методов функционального анализа к исследованию проблемы малых движений и нормальных колебаний вязкоупругой жидкости в частично заполненном сосуде, являются работы А. И. Милославского [7, 14, 15]. В них для обобщенной модели Олдройта ($m > 1$) применен операторный подход, развивающий построения, проведенные ранее С. Г. Крейном и его учениками применительно к задаче о малых колебаниях вязкой жидкости в частично заполненном сосуде. Исследования А. И. Милославского отражены, в частности, в главе 8 монографии [13]. Случай полного заполнения полости вязкоупругой жидкостью рассмотрен в [9], а также в [13, п. 7.1].

В данной работе, которая является продолжением исследований из [3], изучается проблема малых движений системы из двух вязкоупругих несмешивающихся жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд. Для простоты взята модель Олдройта ($m = 1$), хотя все построения можно провести и для обобщенной модели Олдройта ($m > 1$) по той же схеме. Аналогичный подход можно применить и к случаю, когда сосуд заполнен не двумя, а системой из произвольного числа несмешивающихся вязкоупругих жидкостей обобщенной модели Олдройта.

Изложение в данной работе проведено по следующей схеме. После введения в разделе 2 дается постановка начально-краевой задачи о малых движениях системы из двух несмешивающихся вязкоупругих жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд и находящихся в однородном гравитационном поле, действующем вертикально вниз. Для классического решения задачи выведен закон баланса полной энергии. Это позволяет в разделе 3 осуществить выбор функциональных гильбертовых пространств, в которых естественно изучать поставленную проблему. Далее в разделе 4 приводится вывод формул для ортопроекторов, непосредственно связанных с указанными пространствами. После этого в разделе 5 осуществлен операторный подход к исследуемой задаче, позволяющий привести проблему к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения в некотором гильбертовом пространстве. Затем в разделе 6 осуществлен переход к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в ортогональной сумме гильбертовых пространств. После подробного изучения свойств операторной матрицы, отвечающей возникшей системе уравнений (факторизация, аккретивность, замыкание) в разделе 7 доказываются теоремы о сильной разрешимости полученной задачи Коши на конечном интервале времени. На этой основе доказана также теорема о существовании обобщенного решения исходной начально-краевой задачи. Наконец, для проблемы нормальных колебаний гидросистемы получено уравнение (операторный пучок), обобщающее соответствующие уравнения как для проблемы с двумя обычными вязкими жидкостями (пучок С. Г. Крейна), так и для задачи о колебаниях одной вязкой жидкости.

2. Постановка задачи. Закон баланса полной энергии

2.1. Классическая постановка задачи. Будем считать, что две вязкоупругие жидкости модели Олдройта заполняют произвольный сосуд $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и в состоянии равновесия под действием гравитационного поля занимают области Ω_1 и Ω_2, соответственно, с горизонтальной границей раздела Г. Обозначим через S_1 и S_2 те части границы $\partial\Omega$, которые примыкают к первой и второй жидкостям, соответственно.

Введем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, чтобы ось Ox_3 была направлена вверх, т. е. против действия однородного гравитационного поля, а начало координат O находилось на Г. Тогда ускорение гравитационного поля $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, $g > 0$, а в состоянии покоя поля давлений в жидкостях выражаются по законам

$$P_{0,k}(x_3) = p_0 - \rho_k g x_3, \quad k = 1, 2, \tag{2.1}$$

где ρ_k — плотности жидкостей, а p_0 — давление на границе раздела Γ, т. е. при $x_3 = 0$.

Рассмотрим малые движения системы из двух жидкостей, близкие к состоянию покоя. Пусть $\vec{u}_k(t,x)$ — поля малых скоростей, а $p_k(t,x)$ — отклонения полей давлений от их равновесных значений (см. (2.1)). Для простоты рассматриваем вязкоупругие жидкости модели Олдройта, когда в (1.1) $m = 1$. Кроме того, полагаем, что на исследуемую гидродинамическую систему дополнительно к гравитационному полю действует малое поле внешних сил $\vec{f} = \vec{f}(t,x)$, $x \in \Omega$.

Тогда линеаризованные уравнения движения жидкостей имеют следующий вид (см., например, [13, с. 318, 342-343]):

$$\rho_k \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} = -\nabla p_k + \mu_k \triangle \vec{v}_k + \rho_k \vec{f}_k(t,x), \quad \mathrm{div}\, \vec{u}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \tag{2.2}$$

$$\vec{v}_k(t,x) = \vec{u}_k(t,x) + \alpha_k \int\limits_0^t e^{-\beta_k(t-s)} \vec{u}_k(s,x)ds =: I_{0,k}(t)\vec{u}_k, \quad k = 1, 2, \tag{2.3}$$

где $\mu_k > 0$ — динамические вязкости жидкостей, $\alpha_k \geqslant 0$, $\beta_k > 0$ — коэффициенты, характеризующие свойства вязкоупругости жидкостей модели Олдройта, $\vec{f}_k(t,x) := \vec{f}(t,x)|_{x\in\Omega_k}$, а $\triangle$ — трехмерный оператор Лапласа.

Для вязких жидкостей, как известно, на твердых стенках S_k сосуда должны выполняться условия прилипания, т. е.

$$\vec{u}_k = \vec{0} \quad (\text{на } S_k), \quad k = 1, 2, \tag{2.4}$$

а на границе раздела Γ — условие непрерывности полей скоростей:

$$\vec{u}_1(t,x) = \vec{u}_2(t,x), \quad x \in \Gamma. \tag{2.5}$$

Будем описывать малые перемещения границы раздела между жидкостями с помощью функции вертикального отклонения

$$x_3 = \zeta(t, x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma. \tag{2.6}$$

Тогда на Γ должно выполняться кинематическое условие

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \vec{u}_1 \cdot \vec{n} =: \gamma_{n,1}\vec{u}_1 = \vec{u}_2 \cdot \vec{n} =: \gamma_{n,2}\vec{u}_2, \quad \vec{n} = \vec{e}_3, \tag{2.7}$$

а символом $\gamma_{n,k}$ обозначена операция взятия нормального следа на Γ, т. е. следа нормальной компоненты поля скорости. Заметим еще, что из условия сохранения объема каждой из жидкостей имеем интегральную связь

$$\int\limits_\Gamma \zeta d\Gamma = 0. \tag{2.8}$$

Сформулируем теперь динамические условия на Γ. Они состоят в том, что на движущейся границе раздела векторное поле напряжений при переходе от одной жидкости к другой изменяется непрерывно. Линеаризация этого условия и его снос на Γ приводят к следующим соотношениям: на Γ касательные напряжения (т. е. вдоль Γ) изменяются непрерывно, а нормальное напряжение (т. е. вдоль оси Ox_3) компенсируется гравитационным скачком давлений. Имеем

$$\begin{gathered} \mu_1 \tau_{j3}(\vec{v}_1) = \mu_2 \tau_{j3}(\vec{v}_2), \quad \vec{v}_k = I_{0,k}(t)\vec{u}_k, \quad k = 1, 2, \quad j = 1, 2; \\ [-p_1 + \mu_1 \tau_{33}(\vec{v}_1)] - [-p_2 + \mu_2 \tau_{33}(\vec{v}_2)] = -g(\rho_1 - \rho_2)\zeta \quad (\text{на } \Gamma). \end{gathered} \tag{2.9}$$

Наконец, для искомых функций $\vec{u}_k(t,x)$, $p_k(t,x)$, $k = 1, 2$, и $\zeta(t, x_1, x_2)$ необходимо еще задать начальные условия:

$$\begin{gathered} \vec{u}_k(0,x) = \vec{u}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad \vec{u}_1^0(x) \equiv \vec{u}_2^0(x), \quad x \in \Gamma, \\ \zeta(0,x) = \zeta^0(x), \quad x \in \Gamma. \end{gathered} \tag{2.10}$$

2.2. Закон баланса полной энергии. Будем считать, что задача (2.2)–(2.10) имеет классической решение, и выведем закон баланса полной энергии гидросистемы. Предварительно выпишем формулы Грина для векторных полей скоростей в областях Ω_1 и Ω_2, соответственно. Для дважды непрерывно дифференцируемых полей они имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}\mu_1 E_1(\vec{\eta}_1,\vec{u}_1) := \frac{1}{2}\mu_1 \int\limits_{\Omega_1}\left(\sum_{j,l=1}^{3}\tau_{jl}(\vec{\eta}_1)\overline{\tau_{jl}(\vec{u}_1)}\right)d\Omega_1 = \\ = \int\limits_{\Omega_1}\vec{\eta}_1\cdot\overline{(-\mu_1\triangle\vec{u}_1+\nabla p_1)}d\Omega_1 + \int\limits_{\Gamma}\sum_{j=1}^{3}\eta_{1,j}\overline{(\mu_1\tau_{j,3}(\vec{u}_1)-p_1\delta_{j3})}d\Gamma, \\ \mathrm{div}\vec{\eta}_1=\mathrm{div}\vec{u}_1=0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{\eta}_1=\vec{u}_1\equiv\vec{0} \quad (\text{на } S_1),\end{gathered} \tag{2.11}$$

$$\begin{gathered}\mu_2 E_2(\vec{\eta}_2,\vec{u}_2) := \frac{1}{2}\mu_2 \int\limits_{\Omega_2}\left(\sum_{j,l=1}^{3}\tau_{jl}(\vec{\eta}_2)\overline{\tau_{jl}(\vec{u}_2)}\right)d\Omega_2 = \\ = \int\limits_{\Omega_2}\vec{\eta}_2\cdot\overline{(-\mu_2\triangle\vec{u}_2+\nabla p_2)}d\Omega_2 - \int\limits_{\Gamma}\sum_{j=1}^{3}\eta_{2,j}\overline{(\mu_2\tau_{j,3}(\vec{u}_2)-p_2\delta_{j3})}d\Gamma, \\ \mathrm{div}\vec{\eta}_2=\mathrm{div}\vec{u}_2=0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \vec{\eta}_2=\vec{u}_2\equiv\vec{0} \quad (\text{на } S_2).\end{gathered} \tag{2.12}$$

(В этих формулах учтено, что направление внешней нормали на Γ для области Ω_1 будет $\vec{n}_1=\vec{e}_3$, а для Ω_2 — соответственно, $\vec{n}_2=-\vec{n}_1=-\vec{e}_3$.)

Умножим обе части (2.2) слева на $\vec{u}_k$, проинтегрируем по Ω_k и сложим результаты; будем иметь (для вещественнозначных полей):

$$\sum_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}\vec{u}_k\cdot\frac{\partial\vec{u}_k}{\partial t}d\Omega_k = -\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\vec{u}_k\cdot\nabla p_k d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2}\mu_k\int\limits_{\Omega_k}\vec{u}_k\cdot(\triangle\vec{v}_k)d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}\vec{u}_k\cdot\vec{f}_k d\Omega_k.$$

Используя формулы Грина (2.11), (2.12), а также граничные условия задачи (2.2)–(2.10), отсюда получаем соотношение

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}|\vec{u}_k|^2\,d\Omega_k\right\} = -\sum_{k=1}^{2}\mu_k E_k(\vec{u}_k,\vec{v}_k) + \sum_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}\vec{u}_k\cdot\vec{f}_k d\Omega_k + \\ + \int\limits_{\Gamma}\sum_{j=1}^{3}u_{k,j}\left(\mu_1\tau_{j3}(\vec{u}_1)-\mu_2\tau_{j3}(\vec{u}_2)-(p_1-p_2)\delta_{j3}\right)d\Gamma.\end{gathered}$$

Учитывая еще соотношения (2.8) и (2.9), окончательно приходим к выводу, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}|\vec{u}_k|^2\,d\Omega_k + g(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma}|\zeta|^2\,d\Gamma\right\} = -\sum_{k=1}^{2}\mu_k E_k(\vec{u}_k,\vec{v}_k) + \sum_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}\vec{u}_k\cdot\vec{f}_k d\Omega_k. \tag{2.13}$$

Это тождество есть закон баланса полной энергии системы в дифференциальной форме. Здесь в фигурных скобках стоит удвоенная полная (кинетическая плюс потенциальная) энергия гидросистемы, а справа — мощность диссипативных вязкоупругих сил и мощность дополнительных внешних сил, действующих на систему. После интегрирования (2.13) по t в пределах от 0 до t получаем закон баланса полной энергии в интегральной форме, т. е. на произвольном отрезке времени $(0,t)$.

3. Выбор функциональных пространств

3.1. Предварительные соображения. Будем исследовать задачу (2.2)–(2.10) методами теории операторов, действующих в гильбертовых пространствах (см. [4, 12, 13]). Тождество (2.13) показывает, что поля скоростей в данной задаче следует считать элементами векторного пространства пар функций

$$\vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\}, \quad \vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega), \tag{3.1}$$

со скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega)} := \sum_{k=1}^{2} \rho_k (\vec{u}_k, \vec{v}_k)_{\vec{L}_2(\Omega_k)} := \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \overline{\vec{v}_k} d\Omega_k.$$

Точнее говоря, следует выбирать (см. [4]) лишь элементы

$$\vec{u}_k \in \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k) := \left\{ \vec{u}_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \operatorname{div}\vec{u}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \gamma_{n,k}\vec{u}_k := \vec{u}_k \cdot \vec{n}_k = 0 \quad (\text{на } S_k) \right\},$$

где $\vec{n}_k$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega_k$. Такие поля отвечают конечной кинетической энергии системы.

Заметим, что пространство $\vec{L}_2(\Omega_k)$ со скалярным произведением

$$(\vec{u}_k, \vec{v}_k)_{\vec{L}_2(\Omega_k)} := \int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \overline{\vec{v}_k} d\Omega_k$$

имеет ортогональное разложение (см. [4])

$$\vec{L}_2(\Omega_k) = \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_k), \tag{3.2}$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_k) := \left\{ \vec{w}_k = \nabla\varphi_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \quad \varphi_k = 0 \quad (\text{на } \Gamma) \right\}, \tag{3.3}$$

причем

$$\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k) = \vec{J}_0(\Omega_k) \oplus \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k), \tag{3.4}$$

$$\vec{J}_0(\Omega_k) = \left\{ \vec{v}_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \operatorname{div}\vec{v}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \gamma_{n,k}\vec{v}_k = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega_k) \right\}, \tag{3.5}$$

$$\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k) = \left\{ \vec{w}_k = \nabla\Phi_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \ \triangle\Phi_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k} = 0 \quad (\text{на } S_k), \int\limits_{\Gamma} \Phi_k d\Gamma = 0 \right\}. \tag{3.6}$$

Будем далее обозначать подпространство пар из $\vec{L}_2(\Omega)$, у которых компоненты являются элементами из $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$, через $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, т. е.

$$\vec{J}_{0,S}(\Omega) := \left\{ \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\} \in \vec{L}_2(\Omega) : \quad \vec{u}_k \in \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k), \quad k = 1, 2 \right\}. \tag{3.7}$$

Тогда в силу (3.2)–(3.6) будем иметь

$$\begin{gathered} \vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega), \\ \vec{J}_{0,S}(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2), \\ \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) = \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2). \end{gathered} \tag{3.8}$$

Далее, с конечной потенциальной энергией системы связано пространство $L_2(\Gamma)$ скалярных функций, заданных на Γ, с квадратом нормы

$$||\zeta||^2_{L_2(\Gamma)} := \int\limits_{\Gamma} |\zeta|^2 d\Gamma.$$

Точнее говоря, ввиду условия (2.8) далее будем считать, что вертикальные отклонения границы раздела жидкостей

$$\zeta \in L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\},$$

где 1_Γ — функция, тождественно равная 1 на Γ.

Введем еще пространства векторных полей с конечной скоростью диссипации энергии в жидкости:

$$\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k) := \left\{ \vec{u}_k \in \vec{H}^1(\Omega_k) : \operatorname{div}\vec{u}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \vec{u}_k = \vec{0} \quad (\text{на } S_k) \right\}.$$

Здесь скалярное произведение определяется по формуле (см. (2.11), (2.12))

$$(\vec{u}_k, \vec{v}_k)_{\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)} := E_k(\vec{u}_k, \vec{v}_k), \tag{3.9}$$

а на множестве пар (3.1) — по формуле

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)} := \sum_{k=1}^{2} \mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{v}_k),$$

$$\vec{J}^1_{0,S}(\Omega) := \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{J}^1_{0,S_2}(\Omega_2).$$

Отметим, что $\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)$ плотно вложено в $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$ и имеет место неравенство Корна:

$$||\vec{u}_k||^2_{\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)} \geqslant \tilde{c}_k ||\vec{u}_k||^2_{\vec{H}^1(\Omega_k)} \geqslant c_k ||\vec{u}_k||^2_{\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)}, \quad c_k > 0, \quad \forall \vec{u}_k \in \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k),$$

а метрика, порожденная скалярным произведением (3.9), эквивалентна стандартной метрике пространства $\vec{H}^1(\Omega_k)$. Отсюда следует, что $\Big(\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k); \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)\Big)$ — гильбертова пара пространств. Обозначим через $A_k : \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k) \to \Big(\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)\Big)^*$ оператор этой гильбертовой пары. Тогда будем иметь соотношения

$$(\vec{u}_k, \vec{v}_k)_{\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)} = (A_k^{1/2}\vec{u}_k, A_k^{1/2}\vec{v}_k)_{\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)} = \langle \vec{u}_k, A_k\vec{v}_k \rangle_{\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)}, \quad \forall \vec{u}_k, \vec{v}_k \in \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k). \tag{3.10}$$

Здесь косыми скобками обозначено значение функционала, стоящего на втором месте, на элементе, стоящем на первом месте.

Таким образом, возникают оснащенные гильбертовы пространства

$$\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k) \hookrightarrow\hookrightarrow J_{0,S_k}(\Omega_k) \hookrightarrow\hookrightarrow \left(J^1_{0,S_k}(\Omega_k)\right)^*, \quad k = 1, 2, \tag{3.11}$$

причем вложения, обозначаемые символом $\hookrightarrow\hookrightarrow$, компактные.

Введем, наконец, пространство $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ пар векторных полей (3.1) со скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)} := \sum_{k=1}^{2} \mu_k (\vec{u}_k, \vec{v}_k)_{\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{2} \mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{v}_k). \tag{3.12}$$

Из приведенных построений очевидно, что

$$\Big(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega); \vec{J}_{0,S}(\Omega)\Big)$$

— гильбертова пара пространств, причем оператор A этой пары имеет вид

$$A = (\mu_1 A_1; \mu_2 A_2), \tag{3.13}$$

а формулы (3.10), (3.12) порождают соотношения

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)} = (A^{1/2}\vec{u}, A^{1/2}\vec{v})_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} = \sum_{k=1}^{2} \mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{v}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \mu_k (A_k^{1/2}\vec{u}_k, A_k^{1/2}\vec{v}_k)_{\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)} = \langle \vec{u}, A\vec{v} \rangle_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} = \tag{3.14}$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \langle \vec{u}_k, \mu_k A_k \vec{v}_k \rangle_{\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)}, \quad \forall \vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\}, \quad \vec{v} = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2\} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega).$$

3.2. Выбор функциональных пространств, порожденных задачей. Кинематическое условие (2.7) показывает, что в данной задаче элементы $\vec{u}_k$, составляющие пару (3.1), не могут быть произвольными: для них нормальные компоненты на Γ должны совпадать, т. е.

$$\gamma_{n,1}\vec{u}_1 = \gamma_{n,2}\vec{u}_2 \quad (\text{на } \Gamma).$$

Совокупность таких пар $\vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ образует подпространство, которое обозначим через $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, т. е.

$$\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) := \{\vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega): \quad \gamma_{n,1}\vec{u}_1 = \gamma_{n,2}\vec{u}_2 \quad (\text{на } \Gamma)\}. \tag{3.15}$$

Далее, условие (2.5) показывает также, что на Γ все векторное поле для пары $\vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ изменяется непрерывно, т. е.

$$\gamma_1\vec{u}_1 = \gamma_2\vec{u}_2 \quad (\text{на } \Gamma),$$

где γ_k — операция(оператор) взятия полного следа векторного поля $\vec{u}_k$ из области Ω_k на границу Γ.

Такие пары векторных полей образуют подпространство в пространстве $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, которое обозначим через $\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, т. е.

$$\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega) := \left\{\vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega): \quad \gamma_1\vec{u}_1 = \gamma_2\vec{u}_2 \quad (\text{на } \Gamma)\right\}. \tag{3.16}$$

Это подпространство плотно вложено в $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ и потому

$$\left(\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega); \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)\right) \tag{3.17}$$

— гильбертова пара пространств.

Обозначим через $\tilde{A}$ оператор гильбертовой пары (3.17). Очевидно, он является сужением оператора A из (3.13) с $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ на $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, и для него в силу (3.14) выполнены тождества

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = (\tilde{A}^{1/2}\vec{u}, \tilde{A}^{1/2}\vec{v})_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = \sum_{k=1}^{2} \mu_k E_k(\vec{u}_k; \vec{v}_k) = \langle \vec{u}, \tilde{A}\vec{v}\rangle_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)}, \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega). \tag{3.18}$$

Отметим еще, что оснащения (3.11) порождают оснащение

$$\vec{J}^1_{0,S}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \vec{J}_{0,S}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \left(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)\right)^*, \tag{3.19}$$

из которого следует, что

$$\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \left(\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)\right)^*. \tag{3.20}$$

Будем далее считать, что область Ω, составленная из двух областей Ω_1 и Ω_2, имеет липшицеву границу. При этом $\partial\Omega_1 = S_1 \cup \Gamma$, $\partial\Omega_2 = S_2 \cup \Gamma$, где S_k — липшицевы куски $\partial\Omega_k$, имеющие также липшицевы границы $\partial S_k : \partial S_1 = \partial S_2 = \partial\Gamma$. Такие предположения позволяют использовать обобщенные формулы Грина для оператора Лапласа в случае как скалярных полей, заданных в Ω_k, так и в случае векторных полей скоростей (см. [2]).

4. Вывод формул для ортопроекторов

4.1. Первая формула. Получим сначала закон действия ортопроектора

$$P_0 := P_{0,S,\Gamma} : \vec{J}_{0,S}(\Omega) \to \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \tag{4.1}$$

(см. (3.7), (3.8), (3.15)). Для этого выясним, каково ортогональное дополнение в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ к подпространству $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$.

Учтем структуру (3.8) подпространства $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ и заметим, что для элементов из $\vec{J}_0(\Omega_1)$ и $\vec{J}_0(\Omega_2)$ нормальные компоненты полей равны нулю на всей границе. Отсюда получаем, что $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ имеет структуру

$$\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega),$$

$$\vec{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega)=\Big\{\vec{u}=\Big\{\frac{1}{\rho_1}\nabla\varphi_1;\frac{1}{\rho_2}\nabla\varphi_2\Big\}:\triangle\varphi_k=0\quad(\text{в }\Omega_k),$$
$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial n_k}=0\quad(\text{на }S_k),\quad\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\quad(\text{на }\Gamma),\quad\vec{n}=\vec{e}_3,\tag{4.2}$$
$$\int\limits_\Gamma\varphi_k d\Gamma=0\Big\}\subset\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)\oplus\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2).$$

Пусть $\vec{u}=\Big\{\frac{1}{\rho_1}\nabla\varphi_1;\frac{1}{\rho_2}\nabla\varphi_2\Big\}\in\vec{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega)$, а $\vec{v}=\{\nabla\psi_1;\nabla\psi_2\}$ ортогональна $\vec{u}$ в $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)\oplus\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2)$. Тогда

$$\rho_1\int\limits_{\Omega_1}\nabla\psi_1\cdot\Big(\frac{1}{\rho_1}\nabla\varphi_1\Big)d\Omega_1+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\nabla\psi_2\cdot\Big(\frac{1}{\rho_2}\nabla\varphi_2\Big)d\Omega_2=0.\tag{4.3}$$

Воспользуемся теперь обобщенными формулами Грина для оператора Лапласа и скалярных полей (см. [2]). В рассматриваемом случае для липшицевых областей Ω_1 и Ω_2 они имеют следующий вид:

$$\int\limits_{\Omega_1}\nabla\psi_1\cdot\overline{\nabla\varphi_1}d\Omega_1=\langle\psi_1,(-\triangle\varphi_1)\rangle_{L_2(\Omega_1)}+\langle\gamma_1\psi_1,\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma)},\tag{4.4}$$

$$\int\limits_{\Omega_2}\nabla\psi_2\cdot\overline{\nabla\varphi_2}d\Omega_2=\langle\psi_2,(-\triangle\varphi_2)\rangle_{L_2(\Omega_1)}-\langle\gamma_2\psi_2,\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma)},\tag{4.5}$$

$$\forall\psi_k,\varphi_k\in H^1_\Gamma(\Omega_k),\quad\gamma_k\psi_k:=\psi_k|_\Gamma\in H^{1/2}_\Gamma:=H^{1/2}(\Gamma)\cap L_{2,\Gamma},$$
$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial n}\in\tilde{H}^{-1/2}_\Gamma:=(H^{1/2}_\Gamma)^*,\quad\vec{n}=\vec{e}_3,\quad\triangle\varphi_k\in(H^1_\Gamma(\Omega_k))^*,\quad k=1,2.\tag{4.6}$$

Поясним смысл обозначений в (4.4)–(4.6). Прежде всего, слева в этих формулах стоит скалярное произведение функций из $H^1_\Gamma(\Omega_k)$:

$$(\psi_k,\varphi_k)_{H^1_\Gamma(\Omega_k)}:=\int\limits_{\Omega_k}\nabla\psi_k\cdot\overline{\nabla\varphi_k}d\Omega_k,\quad\int\limits_\Gamma\varphi_k d\Gamma=\int\limits_\Gamma\psi_k d\Gamma=0.\tag{4.7}$$

Соответствующая норма эквивалентна стандартной норме $H^1(\Omega_k)$, а $H^1_\Gamma(\Omega_k)$ — подпространство пространства $H^1(\Omega_k)$ коразмерности 1. Далее, γ_k — операторы следа скалярных функций, заданных в Ω_k, на границе $\Gamma\subset\partial\Omega_k$. Согласно теореме Гальярдо (см. [11]), следы $\gamma_k\psi_k\in H^{1/2}(\Gamma)$ и удовлетворяют условиям нормировки (4.7). Как известно, см. [1, 16], множество $H^{1/2}_\Gamma$ плотно в $L_{2,\Gamma}$ и имеет место оснащение

$$H^{1/2}_\Gamma\hookrightarrow\hookrightarrow L_{2,\Gamma}\hookrightarrow\hookrightarrow\tilde{H}^{-1/2}_\Gamma:=\Big(H^{1/2}_\Gamma\Big)^*.$$

Здесь символом ˜ обозначен класс функций из $H^{1/2}_\Gamma$, продолжимых нулем на всю границу $\partial\Omega_k$ в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega_k)$ (см. [1,8]). В частности, в формулах Грина (4.4), (4.5) производные по нормали $\partial\varphi_k/\partial n\in\tilde{H}^{-1/2}_\Gamma$, так как в силу постановки задачи (см. (3.6), (4.2)) должны быть выполнены условия Неймана $\partial\varphi_k/\partial n_k=0$ (на S_k).

Отметим еще, что имеется также оснащение

$$H^1_\Gamma(\Omega_k)\hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega_k)\hookrightarrow\hookrightarrow\Big(H^1_\Gamma\Big)^*,$$

и потому $\triangle\varphi_k\in\Big(H^1_\Gamma\Big)^*$, а косыми скобками в (4.4), (4.5) обозначены значения функционалов, стоящих на втором месте, на элементе, стоящем на первом месте.

Возвращаясь к тождеству (4.3) и используя (4.4), (4.5), будем иметь соотношение (с учетом свойств (4.2) для φ_k)

$$\int\limits_{\Omega_1}\nabla\psi_1\cdot\overline{\nabla\varphi_1}d\Omega_1+\int\limits_{\Omega_2}\nabla\psi_2\cdot\overline{\nabla\varphi_2}d\Omega_2=0=\langle\rho_1\gamma_1\psi_1-\rho_2\gamma_2\psi_2,\overline{\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}}\rangle_{L_2(\Gamma)}.$$

Отсюда в силу свойства $\langle 1_\Gamma, \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}\rangle_{L_{2,\Gamma}} = 0$ получаем, что

$$\rho_1\gamma_1\psi_1 - \rho_2\gamma_2\psi_2 = const = 0 \quad (\text{на } \Gamma),$$

где использовано также свойство нормировки (4.7) для ψ_k, $k = 1, 2$.

Итогом проведенных рассмотрений является следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Элементы из* $\left(\vec{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega)\right)^{\perp}$ *образуют множество*

$$\left(\vec{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega)\right)^{\perp} = \Big\{\{\nabla\psi_1; \nabla\psi_2\} : \triangle\psi_k = 0 \quad (\textit{в } (\Omega_k)), \frac{\partial\psi_k}{\partial n_k} = 0 \quad (\textit{на } S_k), k = 1, 2, \\ \psi := \rho_1\gamma_1\psi_1 = \rho_2\gamma_2\psi_2 \in H_\Gamma^{1/2}\Big\}. \tag{4.8}$$

Опираясь на представление (4.8), получим закон действия ортопроектора P_0 из (4.1). Для любого $\vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ должно быть

$$P_0\vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\} - \{\nabla\psi_1; \nabla\psi_2\} \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega),$$

и потому

$$\gamma_{n,1}(P_0\vec{u})_1 = \gamma_{n,2}(P_0\vec{u})_2 \Rightarrow \gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \frac{\partial\psi_1}{\partial n}|_\Gamma = \gamma_{n,2}\vec{u}_2 - \frac{\partial\psi_2}{\partial n}|_\Gamma, \quad \vec{n} = \vec{e}_3.$$

Значит, для ψ_1 и ψ_2 должно выполняться условие

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial n} - \frac{\partial\psi_2}{\partial n} = \gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,2}\vec{u}_2 \quad (\text{на } \Gamma).$$

Таким образом, для определения пары функций $\{\psi_1; \psi_2\}$ возникает следующая задача сопряжения:

$$\triangle\psi_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n_k} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad k = 1, 2, \\ \psi := \rho_1\psi_1 = \rho_2\psi_2, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial n} - \frac{\partial\psi_2}{\partial n} = \gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,2}\vec{u}_2 \quad (\text{на } \Gamma). \tag{4.9}$$

Найдем решение задачи (4.9), опираясь на свойства решений задач Неймана в областях Ω_k:

$$\triangle\psi_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n} = \zeta_k \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_\Gamma \zeta_k d\Gamma = 0.$$

Используя известные результаты разрешимости таких задач в областях Ω_k с липшицевыми границами, разбитыми на липшицевы куски (см. [1, 2, 8, 16]), сформулируем итоговые утверждения, основанные на формулах Грина (4.4), (4.5).

1. Слабое решение $\psi_k|_{\Omega_k} \in H_\Gamma^1(\Omega_k)$ существует и единственно тогда и только тогда, когда $\psi_k|_\Gamma \in \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}$. В этом случае

$$\psi_1 = V_1\zeta_1, \quad \psi_2 = -V_2\zeta_2, \quad V_k \in \mathcal{L}(\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}; H_\Gamma^1(\Omega_k)), \tag{4.10}$$

при этом

$$\gamma_1\psi_1 = \gamma_1 V_1\frac{\partial\psi_1}{\partial n} =: C_1\frac{\partial\psi_1}{\partial n}, \quad C_1 \in \mathcal{L}(\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}; H_\Gamma^{1/2}), \tag{4.11}$$

и аналогично

$$\gamma_2\psi_2 = -\gamma_2 V_2\frac{\partial\psi_2}{\partial n} =: -C_2\frac{\partial\psi_2}{\partial n}, \quad C_2 \in \mathcal{L}(\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}; H_\Gamma^{1/2}). \tag{4.12}$$

2. Операторы C_k (их называют операторами Стеклова) обладают свойствами положительности:

$$\langle C_k\frac{\partial\psi_k}{\partial n_k}, \frac{\partial\psi_k}{\partial n}\rangle_{L_{2,\Gamma}} = \int_{\Omega_k} |\nabla\psi_k|^2 d\Omega_k, \quad \vec{n}_1 = \vec{e}_3, \quad \vec{n}_2 = -\vec{e}_3, \quad k = 1, 2.$$

Они отображают $\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ на $H_\Gamma^{1/2}$, и потому существуют обратные операторы

$$C_k^{-1} \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{1/2}; \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}),$$

которые также обладают свойством положительности.

Учитывая эти свойства, вернемся к задаче (4.9) и будем считать, в силу уравнений и краевых условий этой задачи, что имеются связи (4.11), (4.12), а тогда

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial n} = C_1^{-1}\gamma_1\psi_1 = \rho_1^{-1}C_1^{-1}\psi, \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial n} = -C_2^{-1}\gamma_2\psi_2 = \rho_2^{-1}C_2^{-1}\psi.$$

Подставляя эти соотношения во второе условие на Γ из (4.9), приходим к уравнению для нахождения функции ψ:

$$(\rho_1^{-1}C_1^{-1} + \rho_2^{-1}C_2^{-1})\psi = \gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,2}\vec{u}_2. \tag{4.13}$$

Из свойств положительности операторов C_1^{-1} и C_2^{-1} следует, что оператор $\rho_1^{-1}C_1^{-1}+\rho_2^{-1}C_2^{-1}$ также положителен и отображает $H_\Gamma^{1/2}$ на $\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}$. Поэтому существует обратный оператор

$$(\rho_1^{-1}C_1^{-1} + \rho_2^{-1}C_2^{-1})^{-1} \in \mathcal{L}(\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}; H_\Gamma^{1/2}).$$

Далее, ввиду ортогональных разложений (3.2)–(3.6) и описаний подпространств $\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$ приходим к выводу, что для любого поля $\vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ имеют место свойства

$$\gamma_{n,k}\vec{u}_k \in \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}, \quad k = 1, 2,$$

и потому правая часть в (4.13) есть элемент этого пространства. Следовательно, уравнение (4.13) однозначно разрешимо и

$$\psi = (\rho_1^{-1}C_1^{-1} + \rho_2^{-1}C_2^{-1})^{-1}(\gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,2}\vec{u}_2) \in H_\Gamma^{1/2}.$$

Зная значение ψ, теперь решаем задачи Зарембы

$$\triangle\psi_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n_k} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad k = 1, 2, \quad \gamma_k\psi_k = \rho_k^{-1}\psi \quad (\text{на } \Gamma).$$

Так как $\psi \in H_\Gamma^{1/2}$, то каждая из этих задач имеет единственное решение из $H_\Gamma^1(\Omega_k)$, и тогда можно считать, что

$$\nabla\psi_k = \rho_k^{-1}G_k(\gamma_k\psi_k) = \rho_k^{-1}G_k\psi,$$
$$G_k \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{1/2}; \vec{G}_{h,S_k(\Omega_k)}), \quad k = 1, 2. \tag{4.14}$$

Проведенные рассуждения приводят к следующему выводу.

Лемма 4.2. *Ортопроектор $P_{0,S,\Gamma} : \vec{J}_{0,S}(\Omega) \to \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ действует по следующему закону: для любого $\vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$*

$$\begin{aligned} P_{0,S,\Gamma}\vec{u} = \vec{u} - \Big\{&\rho_1^{-1}G_1\left(\rho_1^{-1}C_1^{-1} + \rho_2^{-1}C_2^{-1}\right)^{-1}(\gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,2}\vec{u}_2); \\ &\rho_2^{-1}G_2(\rho_1^{-1}C_1^{-1} + \rho_2^{-1}C_2^{-1})^{-1}(\gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,2}\vec{u}_2)\Big\}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

(Если $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}\vec{u}$, то, очевидно, $P_{0,S,\Gamma}\vec{u} = \vec{u}$, как это и следует из (4.15).)

Замечание 4.1. Имеет место тождество

$$(\rho_1^{-1}C_1^{-1} + \rho_2^{-1}C_2^{-1})^{-1} = \rho_2C_2(\rho_1C_1 + \rho_2C_2)^{-1}\rho_1C_1.$$

Замечание 4.2. Так как для G_k выполнены свойства (4.14), то

$$\nabla\psi := \{\nabla\psi_1; \nabla\psi_2\} =: G\psi : H_\Gamma^{1/2} \to \vec{G}_{h,S}(\Omega) \subset \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2).$$

4.2. Вторая формула. Получим теперь закон действия ортопроектора

$$P_1 := P_{0,S,\Gamma}^1 : \vec{J}_{0,S}^1(\Omega) \to \vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega) \tag{4.16}$$

(см. (3.12), (3.16)). Рассуждения проведем по тому же плану, который был реализован в пункте 4.1 для скалярных полей (потенциалов скоростей), однако теперь для векторных полей из $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$.

Найдем сначала ортогональное дополнение

$$\vec{J}_{0,S}^1(\Omega) \ominus \vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega).$$

Для этого понадобится обобщенная формула Грина

$$\mu_kE_k(\vec{\eta}_k, \vec{u}_k) = \langle\vec{\eta}_k, \overline{[-\mu_kP_{0,S_k}\triangle\vec{u}_k + \nabla\tilde{p}_k]}\rangle_{\vec{L}_2(\Omega_k)} -$$

$$-\left\{\langle\gamma_k\eta_{k,1},\mu_k\tau_{13}(\vec{u}_k)\rangle_{L_2(\Gamma)}+\langle\gamma_k\eta_{k,2},\mu_k\tau_{23}(\vec{u}_k)\rangle_{L_2(\Gamma)}-\right.$$
$$\left.+\langle\gamma_k\eta_{k,3},[-\tilde{p}_k+\mu_k\tau_{33}(\vec{u}_k)]\rangle_{L_2(\Gamma)}\right\}(-1)^{k-1},\quad\forall\vec{\eta}_k,\vec{u}_k\in\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k) \tag{4.17}$$

(см. [2]). (Здесь учтено, что на Γ имеем $\vec{n}_1=\vec{e}_3$, $\vec{n}_2=-\vec{e}_3$.) В (4.17) слева стоит скалярное произведение в $\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)$ (см. (3.9)); далее, в первом слагаемом справа P_{0,S_k} — ортопроектор на $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$, а выражение

$$-\mu_kP_{0,S_k}(\Omega_k)\triangle\vec{u}_k+\nabla\tilde{p}_k\in\left(\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)\right)^*$$

(после замыкания на гладких функциях $\vec{u}_k\in\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)\cap\vec{H}^2(\Omega_k)$),

$$\nabla\tilde{p}_k\in\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k),\quad\mu_k\tau_{j3}(\vec{u}_k)\in H^{-1/2}(\Gamma),\quad j=1,2,\quad-\tilde{p}_k+\mu_k\tau_{33}(\vec{u}_k)\in H^{-1/2}_\Gamma.$$

Предположим теперь, что $\vec{\eta}\in\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, а $\vec{u}\in J^1_{0,S}(\Omega)$ и ортогонален $\vec{\eta}$. Тогда, опираясь на (3.18) и (4.17), будем иметь тождество

$$\mu_1E_1(\vec{\eta}_1,\vec{u}_1)+\mu_2E_2(\vec{\eta}_2,\vec{u}_2)=\sum_{k=1}^{2}\langle\vec{\eta}_k,[-\mu_kP_{0,S_k}\triangle\vec{u}_k+\nabla\tilde{p}_k]\rangle_{\vec{L}_2(\Omega_k)}-$$
$$-\langle\gamma_1\eta_{1,1},[\mu_1\tau_{13}(\vec{u}_1)-\mu_2\tau_{13}(\vec{u}_2)]\rangle_{L_2(\Gamma)}-\langle\gamma_1\eta_{1,2},[\mu_1\tau_{23}(\vec{u}_1)-\mu_2\tau_{23}(\vec{u}_2)]\rangle_{L_2(\Gamma)}-$$
$$-\langle\gamma_1\eta_{1,3}[(-\tilde{p}_1+\mu_1\tau_{33}(\vec{u}_1))-(-p_2+\mu_2\tau_{33}(\vec{u}_2))]\rangle_{L_2(\Gamma)}=0.$$

Отсюда, пользуясь обычными приемами вариационного исчисления, приходим к следующему выводу.

Лемма 4.3. *Ортогональное дополнение* $\left(\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)\right)^\perp$ *к подпространству* $\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ *в пространстве* $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ *состоит из слабых решений* $\vec{v}=(\vec{v}_1;\vec{v}_2)\in\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ *краевых задач*

$$\begin{gathered}-\mu_1P_{0,S_1}\triangle\vec{v}_1+\nabla\tilde{p}_1=\vec{0},\quad\mathrm{div}\vec{v}_1=0\quad(\textit{в }\Omega_1),\quad\vec{v}_1=\vec{0}\quad(\textit{на }S_1),\\-\mu_2P_{0,S_2}\triangle\vec{v}_2+\nabla\tilde{p}_2=\vec{0},\quad\mathrm{div}\vec{v}_2=0\quad(\textit{в }\Omega_2),\quad\vec{v}_2=\vec{0}\quad(\textit{на }S_2),\\\mu_1\tau_{j3}(\vec{v}_1)-\mu_2\tau_{j3}(\vec{v}_2)=0\quad(\textit{на }\Gamma),\quad j=1,2,\\{}[(-\tilde{p}_1+\mu_1\tau_{33}(\vec{v}_1))-(-\tilde{p}_2+\mu_2\tau_{33}(\vec{v}_2))]=0\quad(\textit{на }\Gamma).\end{gathered}\tag{4.18}$$

Опираясь на (4.18), выведем формулу действия ортопроектора P_1 из (4.16). Если $\vec{u}$ — любой элемент из $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, то должно быть

$$P_1\vec{u}=P_1\{\vec{u}_1;\vec{u}_2\}=\{\vec{u}_1;\vec{u}_2\}-\{\vec{v}_1;\vec{v}_2\},\tag{4.19}$$

где $\{\vec{v}_1;\vec{v}_2\}$ — решение задачи (4.18) с дополнительным условием на Γ, которое сейчас получим. Именно, должно выполняться свойство

$$\gamma_1(P_1\vec{u})_1=\gamma_2(P_1\vec{u})_2\quad(\text{на }\Gamma),$$

откуда с учетом (4.19) получаем, что

$$\gamma_1\vec{v}_1-\gamma_2\vec{v}_2=\gamma_1\vec{u}_1-\gamma_2\vec{u}_2=:\vec{\varphi}\in\tilde{\vec{H}}^{1/2}_\Gamma:=\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)(\dot{+})\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)(\dot{+})\tilde{H}^{1/2}_\Gamma.\tag{4.20}$$

Таким образом, для нахождения $\vec{v}=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2\}$ возникает векторная задача Стеклова (4.18), (4.20).

Переходя к ее решению, будем считать, что на Γ задано векторное поле

$$\begin{gathered}\vec{\psi}:=\{-\tilde{p}_1\delta_{j3}+\mu_1\tau_{j3}(\vec{u}_1)\}_{j=1}^3=\{-\tilde{p}_2\delta_{j3}+\mu_3\tau_{j3}(\vec{u}_2)\}_{j=1}^3\in\vec{H}^{-1/2}_\Gamma:=\\:=(\tilde{H}^{1/2}(\Gamma))^*(\dot{+})(\tilde{H}^{1/2}(\Gamma))^*(\dot{+})(\tilde{H}^{1/2}_\Gamma)^*.\end{gathered}\tag{4.21}$$

Тогда из (4.18) возникает две независимые задачи (их называют вторыми вспомогательными задачами С. Г. Крейна) в областях Ω_1 и Ω_2:

$$\begin{gathered}-\mu_kP_{0,S_k}\triangle\vec{v}_k+\nabla\tilde{p}_k=\vec{0},\quad\mathrm{div}\vec{v}_k=0\quad(\text{в }\Omega_k),\quad\vec{v}_k=\vec{0}\quad(\text{на }S_k),\\-\tilde{p}_k\delta_{j3}+\mu_k\tau_{j3}(\vec{v}_k)=(\vec{\psi})_j=:\psi_j,\quad j=1,2,3,\quad k=1,2.\end{gathered}$$

Для существования слабого решения этих задач необходимо и достаточно (в областях Ω_k с липшицевыми $\partial\Omega_k$), чтобы выполнялось условие (4.21). Эти решения, с использованием формул Грина (4.17), определяются из следующих тождеств:

$$\mu_1 E_1(\vec{\eta}_1, \vec{v}_1) = \langle \gamma_1 \vec{\eta}_1, \vec{\psi} \rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)}, \quad \forall \vec{\eta}_1 \in \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1), \tag{4.22}$$

$$\mu_2 E_2(\vec{\eta}_2, \vec{v}_2) = -\langle \gamma_2 \vec{\eta}_2, \vec{\psi} \rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)}, \quad \forall \vec{\eta}_2 \in \vec{J}^1_{0,S_2}(\Omega_2), \tag{4.23}$$

$$\vec{L}_2(\Gamma) := L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma) \oplus L_{2,\Gamma}.$$

Каждая из задач (4.22), (4.23) имеет единственное слабое решение, и тогда можно считать, что

$$\mu_1 \vec{v}_1 = V_1 \vec{\psi}, \quad \mu_2 \vec{v}_2 = -V_2 \vec{\psi}, \quad V_k \in \mathcal{L}(\vec{H}_\Gamma^{-1/2}; \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)), \quad k = 1, 2. \tag{4.24}$$

Введем еще операторы Стеклова

$$C_k := \gamma_k V_k, \quad k = 1, 2, \quad C_k \in \mathcal{L}(\vec{H}_\Gamma^{-1/2}; \tilde{\vec{H}}_\Gamma^{1/2}), \tag{4.25}$$

переводящие (векторные) данные Неймана в (векторные) данные Дирихле. Тогда из (4.24), (4.25) и (4.20) получаем связь

$$(\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2) \vec{\psi} = \vec{\varphi}. \tag{4.26}$$

Здесь снова, как и в п. 4.1, операторы C_k из (4.25) обладают свойствами положительности:

$$\langle C_k \vec{\psi}_k, \vec{\psi}_k \rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)} = E_k(\vec{v}_k, \vec{v}_k),$$

при этом C_k отображает $\vec{H}_\Gamma^{-1/2}$ на $\tilde{\vec{H}}_\Gamma^{1/2}$. Поэтому существует ограниченный оператор

$$C_k^{-1} \in \mathcal{L}(\tilde{\vec{H}}_\Gamma^{-1/2}; \vec{H}_\Gamma^{1/2}).$$

Отсюда следует, что существует ограниченный обратный положительный оператор

$$(\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2)^{-1} \in \mathcal{L}(\tilde{\vec{H}}_\Gamma^{-1/2}; \vec{H}_\Gamma^{1/2}),$$

поэтому уравнение (4.26) однозначно разрешимо и

$$\vec{\psi} = (\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2)^{-1} \vec{\varphi}.$$

Тогда в силу (4.24) и (4.20) имеем

$$\vec{v}_1 = \mu_1^{-1} V_1 (\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2)^{-1} (\gamma_1 \vec{u}_1 - \gamma_2 \vec{u}_2),$$
$$\vec{v}_2 = -\mu_2^{-1} V_2 (\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2)^{-1} (\gamma_1 \vec{u}_1 - \gamma_2 \vec{u}_2).$$

Итогом проведенных рассуждений является следующее утверждение.

Лемма 4.4. *Ортопроектор P_1 действует по закону*

$$P_1 \vec{u} = \vec{u} - \{\mu_1^{-1} V_1 (\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2)^{-1} (\gamma_1 \vec{u}_1 - \gamma_2 \vec{u}_2); -\mu_2^{-1} V_2 (\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2)^{-1} (\gamma_1 \vec{u}_1 - \gamma_2 \vec{u}_2)\},$$

где V_k и C_k — операторы, определенные в (4.24)*,* (4.25).

(Если $\vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\} \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, то, очевидно, $P_1 \vec{u} = \vec{u}$.)

5. Применение операторного подхода. Переход к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения

5.1. Вспомогательные краевые задачи. Перепишем исходную задачу (2.2)–(2.10) в виде пар соотношений для искомых объектов; тогда уравнения (2.2) принимают вид

$$\left\{ \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}; \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} \right\} = -\left\{ \frac{1}{\rho_1} \nabla p_1; \frac{1}{\rho_2} \nabla p_2 \right\} + \{\nu_1 \triangle \vec{v}_1; \nu_2 \triangle \vec{v}_2\} + \left\{ \vec{f}_1; \vec{f}_2 \right\}, \tag{5.1}$$

$$\nu_k = \mu_k / \rho_k, \quad \vec{f}_k = \vec{f}|_{\Omega_k}, \quad k = 1, 2.$$

Дальнейшая цель состоит в том, чтобы перейти от (5.1) к уравнению в гильбертовом пространстве $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$.

Для этого применим сначала слева ортопроекторы P_{0,S_k} на подпространства $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$, $k=1,2$, на первую и вторую составляющие. Будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\vec{u}_1;\vec{u}_2\} = -\left\{\frac{1}{\rho_1}\nabla\tilde{p}_1;\frac{1}{\rho_2}\nabla\tilde{p}_2\right\} + \{\nu_1 P_{0,S_1}\triangle\vec{v}_1;\nu_2 P_{0,S_2}\triangle\vec{v}_2\} + \left\{\tilde{\vec{f}}_1;\tilde{\vec{f}}_2\right\}, \tag{5.2}$$

$$\vec{v}_k = I_{0,k}(t)\vec{u}_k, \quad \tilde{\vec{f}}_k = P_{0,S_k}\vec{f}_k, \quad k=1,2.$$

Это соотношение — связь между элементами в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$.

Теперь применим еще слева в (5.2) ортопроектор

$$P_0 = P_{0,S,\Gamma} : \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)\oplus\vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2) = \vec{J}_{0,S}(\Omega)\to\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega).$$

Это дает соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\vec{u}_1;\vec{u}_2\} = -P_0\left\{\frac{1}{\rho_1}\nabla\tilde{p}_1;\frac{1}{\rho_2}\nabla\tilde{p}_2\right\} + P_0\{\nu_1 P_{0,S_1}\triangle\vec{v}_1;\nu_2 P_{0,S_2}\triangle\vec{v}_2\} + P_0\left\{\tilde{\vec{f}}_1;\tilde{\vec{f}}_2\right\}. \tag{5.3}$$

Отметим еще одно обстоятельство. Так как в (5.3) $\nabla\tilde{p}_k\in\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$ (см. (3.6)), то $\int_\Gamma \tilde{p}_k d\Gamma = 0$, $k=1,2$. Используя еще соотношения

$$\int_\Gamma \tau_{33}(\vec{u}_k)d\Gamma = 0, \quad k=1,2,$$

см. [4, с. 115], получаем, что в граничном условии (2.9) на Γ можно $p_k|_\Gamma$ заменить на $\tilde{p}_k|_\Gamma = \gamma_k\tilde{p}_k$, $k=1,2$.

Учитывая эти факты, представим решение исходной начально-краевой задачи в виде суммы пар векторных полей. Именно, будем считать, что

$$P_0\left\{\frac{1}{\rho_1}\nabla\tilde{p}_1;\frac{1}{\rho_2}\nabla\tilde{p}_2\right\} = \left\{\frac{1}{\rho_1}\nabla p_{11};\frac{1}{\rho_2}\nabla p_{12}\right\} + \left\{\frac{1}{\rho_1}\nabla p_{21};\frac{1}{\rho_2}\nabla p_{22}\right\},$$

и потребуем, чтобы наборы

$$\{\vec{v}_1;\vec{v}_2\}, \quad \left\{\frac{1}{\rho_1}\nabla p_{11};\frac{1}{\rho_2}\nabla p_{12}\right\}$$

были решениями первой вспомогательной задачи

$$\begin{gathered}
-P_0\{\nu_1 P_{0,S_1}\triangle\vec{v}_1;\nu_2 P_{0,S_2}\triangle\vec{v}_2\} + \left\{\frac{1}{\rho_1}\nabla p_{11};\frac{1}{\rho_2}\nabla p_{12}\right\} = \{\vec{F}_1;\vec{F}_2\} := \\
= -\frac{\partial}{\partial t}\{\vec{u}_1;\vec{u}_2\} - \left\{\frac{1}{\rho_1}\nabla p_{21};\frac{1}{\rho_2}\nabla p_{22}\right\} + P_0\{\tilde{\vec{f}}_1;\tilde{\vec{f}}_2\}, \\
\vec{u}_k = \vec{0} \quad (\text{на } S_k), \quad k=1,2; \\
\{-\tilde{p}_1\delta_{j3} + \mu_1\tau_{j3}(\vec{v}_1)\}_{j=1}^3 - \{-\tilde{p}_2\delta_{j3} + \mu_2\tau_{j3}(\vec{v}_2)\}_{j=1}^3 = \vec{0} \quad (\text{на } \Gamma),
\end{gathered} \tag{5.4}$$

а набор $\{\frac{1}{\rho_1}\nabla p_{21};\frac{1}{\rho_2}\nabla p_{22}\}$ — решением второй вспомогательной задачи для потенциалов (задачи Стеклова):

$$\begin{gathered}
\triangle p_{2k} = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial p_{2k}}{\partial n_k} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad k=1,2, \\
\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_{21}}{\partial n} = \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p_{22}}{\partial n}, \quad p_{21}-p_{22} = g(\rho_1-\rho_2)\zeta \quad (\text{на } \Gamma).
\end{gathered} \tag{5.5}$$

Рассмотрим сначала задачу (5.5). Введем функции φ_k, $k=1,2$, которые являются решениями вспомогательной задачи

$$\begin{gathered}
\triangle\varphi_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial\varphi_k}{\partial n_k} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad \int_\Gamma \varphi_k d\Gamma = 0, \quad k=1,2, \\
\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}, \quad \rho_1\gamma_1\varphi_1 - \rho_2\gamma_2\varphi_2 = (\rho_1-\rho_2)\zeta \quad (\text{на } \Gamma).
\end{gathered} \tag{5.6}$$

Обозначим
$$\psi := \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\Big|_\Gamma = \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\Big|_\Gamma, \quad \int\limits_\Gamma \psi d\Gamma = 0.$$
Тогда, как и в (4.9)–(4.12), будем иметь
$$\gamma_1\varphi_1 = C_1\psi, \quad \gamma_2\varphi_2 = -C_2\psi,$$
и последнее условие на Γ приводит к связи
$$(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)\psi = (\rho_1 - \rho_2)\zeta.$$
Отсюда, учитывая, что
$$\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2 \in \mathcal{L}(\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}; H_\Gamma^{1/2})$$
является положительным оператором и действует на $H_\Gamma^{1/2}$, получаем:
$$\psi = (\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)^{-1}\zeta,$$
и потому
$$\varphi_1 = (\rho_1 - \rho_2)V_1(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)^{-1}\zeta, \quad \varphi_2 = -(\rho_1 - \rho_2)V_2(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)^{-1}\zeta. \tag{5.7}$$
Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 5.1. *Задача* (5.6) *имеет* (*единственное*) *слабое решение тогда и только тогда, когда выполнено условие*
$$\zeta \in H_\Gamma^{1/2}.$$
Это решение дается формулами (5.7).

Опираясь на эту лемму, введем оператор G по закону
$$G\zeta := \{\nabla\varphi_1; \nabla\varphi_2\} \in \vec{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega), \quad G \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{1/2}; \vec{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega)) \tag{5.8}$$
(определение $\vec{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega)$ см. в (4.2)), а также общий оператор нормального следа
$$\hat{\gamma}_n\vec{u} := \gamma_{n,1}\vec{u}_1 = \gamma_{n,2}\vec{u}_2, \quad \vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\} \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega). \tag{5.9}$$

Лемма 5.2. *Имеет место соотношение*
$$G^* = (\rho_1 - \rho_2)\hat{\gamma}_n, \quad \hat{\gamma}_n \in \mathcal{L}(\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega); \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}). \tag{5.10}$$

Доказательство. Пусть $\zeta \in H_\Gamma^{1/2}$, $\vec{\eta} = \{\vec{\eta}_1; \vec{\eta}_2\} \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$. Тогда
$$(G\zeta, \vec{\eta})_{\vec{L}_2(\Omega)} = \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \nabla\varphi_1 \cdot \bar{\vec{\eta}}_1 d\Omega_1 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \nabla\varphi_2 \cdot \bar{\vec{\eta}}_2 d\Omega_2 =$$
$$= \ldots = \rho_1\langle\gamma_1\varphi_1, \gamma_{n,1}\vec{\eta}_1\rangle_{L_2(\Gamma)} - \rho_2\langle\gamma_2\varphi_2, \gamma_{n,2}\vec{\eta}_2\rangle_{L_2(\Gamma)} =$$
$$= |\gamma_{n,1}\vec{\eta}_1 = \gamma_{n,2}\vec{\eta}_2 = \hat{\gamma}_n\vec{\eta}| = \langle\rho_1\gamma_1\varphi_1 - \rho_2\gamma_2\varphi_2, \hat{\gamma}_n\vec{\eta}\rangle_{L_2(\Gamma)} =$$
$$= \quad (\text{см. последнее условие (5.6)}) = \langle(\rho_1 - \rho_2)\zeta, \hat{\gamma}_n\vec{\eta}\rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle\zeta, (\rho_1 - \rho_2)\hat{\gamma}_n\vec{\eta}\rangle_{L_2(\Gamma)}.$$
Отсюда и следует утверждение леммы. □

С помощью оператора G из (5.8), функций φ_1 и φ_2 из (5.6) и из (5.5) получаем, что в задаче (5.5)
$$\begin{gathered} p_{21}|_{\Omega_1} = g\rho_1\varphi_1, \quad p_{22}|_{\Omega_2} = g\rho_2\varphi_2, \\ \left\{\frac{1}{\rho_1}\nabla p_{21}; \frac{1}{\rho_2}\nabla p_{22}\right\} = gG\zeta. \end{gathered} \tag{5.11}$$

5.2. Переход к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения. Опираясь на полученные в п. 5.1 выводы, рассмотрим теперь вспомогательную задачу (5.4). Предварительно воспользуемся тождествами, следующими из (4.17). Имеем

$$\begin{gathered}\mu_1 E_1(\vec{\eta}_1, \vec{v}_1) + \mu_2 E_2(\vec{\eta}_2, \vec{v}_2) = \langle \vec{\eta}_1, P_{0,S_1}(-\mu_1 \triangle \vec{v}_1) + \nabla \tilde{p}_1 \rangle_{\vec{L}_2(\Omega_1)} + \\ + \langle \vec{\eta}_2, P_{0,S_2}(-\mu_2 \triangle \vec{v}_2) + \nabla \tilde{p}_2 \rangle_{\vec{L}_2(\Omega_2)} + \langle \gamma_1 \eta_{1,1}, [\mu_1 \tau_{13}(\vec{v}_1) - \mu_2 \tau_{13}(\vec{v}_2)] \rangle_{L_2(\Gamma)} + \\ + \langle \gamma_1 \eta_{1,2}, [\mu_1 \tau_{23}(\vec{v}_1) - \mu_2 \tau_{23}(\vec{v}_2)] \rangle_{L_2(\Gamma)} + \langle \gamma_1 \eta_{1,3}, [(-\tilde{p}_1 + \mu_1 \tau_{33}(\vec{v}_1)) - (-\tilde{p}_2 + \mu_2 \tau_{33}(\vec{v}_2))] \rangle_{L_2(\Gamma)}, \\ \forall \vec{\eta} = \{\vec{\eta}_1; \vec{\eta}_2\} \in \vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega), \quad \vec{v} = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2\} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega).\end{gathered} \tag{5.12}$$

Так как $\vec{\eta} = P_0 \vec{\eta}$, $\vec{\eta} \in \vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega) \subset \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, $P_0 : \vec{J}_{0,S}(\Omega) \to \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ — ортопроектор (см. (4.15)), то (5.12) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}\mu_1 E_1(\vec{\eta}_1, \vec{v}_1) + \mu_2 E_2(\vec{\eta}_2, \vec{v}_2) = (\vec{\eta}, \vec{v})_{\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)} = \\ = \langle \vec{\eta}, P_0 \{P_{0,S_k}(-\nu_k \triangle \vec{v}_k) + \nabla \tilde{p}_k\}_{k=1}^2 \rangle_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} + \\ + \sum_{j=1}^{3} \langle \gamma_1 \eta_{1,j}, [(-\tilde{p}_1 \delta_{j3} + \mu_1 \tau_{j3}(\vec{v}_1)) - (-\tilde{p}_2 \delta_{j3} + \mu_2 \tau_{j3}(\vec{v}_2))] \rangle_{L_2(\Gamma)},\end{gathered} \tag{5.13}$$

приспособленном к формулировке обобщенного решения вспомогательной задачи (5.4).

Определение 5.1. Назовем обобщенным решением задачи (5.4) такую функцию

$$\vec{v}(t) = \{\vec{v}_1(t); \vec{v}_2(t)\} = \{I_{0,1}(t)\vec{u}_1(t); I_{0,2}(t)\vec{u}_2(t)\}$$

переменной t со значениями в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, для которой выполнено тождество, следующее из (5.13):

$$(\vec{\eta}, \vec{v}(t))_{\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)} = (\vec{\eta}, -\frac{d\vec{u}}{dt} - gG\zeta + \vec{p}(t))_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)}, \quad \forall \vec{\eta} \in \vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega). \tag{5.14}$$

Здесь использовано обозначение (5.8) и последняя формула (5.11), а производные $\partial/\partial t$ заменены на d/dt (для функций переменной t со значениями в гильбертовом пространстве) и

$$\vec{p}(t) := P_0\{\vec{f}_1; \vec{f}_2\}. \tag{5.15}$$

Перейдем от (5.14) к интегро-дифференциальному уравнению в пространстве $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$. Так как

$$(\vec{\eta}, \vec{v}(t))_{\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)} = (P_1 \vec{\eta}, \vec{v}(t))_{\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)} = (\vec{\eta}, P_1 \vec{v}(t))_{\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)} == (\tilde{A}^{1/2} \vec{\eta}, \tilde{A}^{1/2} P_1 \vec{v}(t))_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)}, \tag{5.16}$$

где $\tilde{A}$ — оператор гильбертовой пары $(\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega); \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega))$, см. (3.16)–(3.20), $P_1 : \vec{J}^1_{0,S}(\Omega) \to \vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ — ортопроектор, то тождество (5.14) с учетом (5.16) равносильно соотношению

$$\tilde{A} P_1 \vec{v}(t) = -\frac{d\vec{u}}{dt} - gG\zeta + \vec{p}(t),$$

если правая часть — функция t со значениями в $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$.

Теорема 5.1. *Исходная начально-краевая задача* (2.2)–(2.10) *о малых движениях двух вязкоупругих жидкостей равносильна* (*после отделения тривиальных соотношений*) *задаче Коши*

$$\begin{gathered}\frac{d\vec{u}}{dt} = -\tilde{A} P_1 (I_0(t)\vec{u}) - gG\zeta + \vec{p}(t), \\ \frac{d\zeta}{dt} = \hat{\gamma}_n \vec{u}, \quad \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \quad \zeta(0) = \zeta^0,\end{gathered} \tag{5.17}$$

для системы двух уравнений, из которых первое является интегро-дифференциальным уравнением первого порядка,

$$\vec{v}(t) = I_0(t)\vec{u}(t) = \{\vec{u}_k\}_{k=1}^2 + \{\alpha_k \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)\vec{u}_k(s)ds}\}_{k=1}^2, \tag{5.18}$$

а второе — дифференциальным уравнением первого порядка.

Решение $\vec{u}(t) = \{\vec{u}_1(t); \vec{u}_2(t)\}$, $\zeta(t)$ *является функцией* t *со значениями в* $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ *и* $L_{2,\Gamma}$, *соответственно.*

Замечание 5.1. Если жидкости невязкоупругие, то $\alpha_k = 0$ $(k = 1, 2)$ и $\vec{v}(t) \equiv \vec{u}(t)$. Эта задача разобрана в [13, п. 8.6, с. 133–140].

6. Преобразование задачи к стандартному виду

6.1. Переход к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведем задачу (5.17) к более симметричному виду, воспользовавшись формулой (5.10). Осуществим в (5.17) замену искомой функции по формуле

$$\eta = (g(\rho_1 - \rho_2)^{1/2})\zeta. \tag{6.1}$$

Тогда приходим к задаче Коши

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt} &= -\tilde{A}P_1(I_0(t)\vec{u}) - (g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2}G\eta + \vec{p}(t) \\ \frac{d\eta}{dt} &= (g/(\rho_1 - \rho_2)^{1/2}G^*\vec{u}), \quad \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \quad \eta(0) = \eta^0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Дальнейшее рассмотрение связано с выделением в задаче (6.2) операторной матрицы, отвечающей системе вязкоупругих жидкостей, изучению свойств этой матрицы, ее расширению (путем замыкания) до максимального аккретивного оператора. Параллельно будет осуществлен переход к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Введем в (6.2) новую искомую функцию

$$\vec{w}(t) := \{\alpha_k^{1/2} \int\limits_0^t e^{-\beta_k(t-s)}\vec{u}_k(s)ds\}_{k=1}^2 \in \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{J}^1_{0,S_2}(\Omega_2) = \vec{J}_{0,S}(\Omega), \tag{6.3}$$

см. (5.18), а также операторы

$$\alpha^{1/2} := \{\alpha_k^{1/2}\}_{k=1}^2, \quad \beta := \{\beta_k\}_{k=1}^2, \tag{6.4}$$

действующие в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$. Тогда

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \{\alpha_k^{1/2}\vec{u}_k - \beta_k[\alpha_k^{1/2} \int\limits_0^t e^{-\beta_k(t-s)}\vec{u}_k(s)ds]\}_{k=1}^2 = \alpha^{1/2}\vec{u} - \beta\vec{w}. \tag{6.5}$$

С учетом (6.3)–(6.5) задачу (6.2) можно переписать в виде задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} &\frac{d\vec{u}}{dt} = -\tilde{A}(\vec{u} + P_1\alpha^{1/2}\vec{w}) - (g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2}G\vec{\eta} + \vec{p}(t), \\ &\frac{d\vec{w}}{dt} = \alpha^{1/2}\vec{u} - \beta\vec{w}, \quad \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \quad \vec{w}(0) = \vec{0}, \\ &\frac{d\eta}{dt} = (g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2}G^*\vec{u}, \quad \eta(0) = \eta^0, \quad \vec{p}(t) := P_0\{P_{0,S_1}\vec{f}_1; P_{0,S_2}\vec{f}_2\}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Коротко эту задачу можно записать в виде

$$\frac{dz}{dt} = -\tilde{\mathcal{A}}z + p(t), \quad z(0) = z^0,$$

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{A}P_1\alpha^{1/2} & (g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2}G \\ -\alpha^{1/2}P_1 & \beta & 0 \\ -(g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2}G^* & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{w} \\ \eta \end{pmatrix}, \quad p(t) = \begin{pmatrix} \vec{p}(t) \\ \vec{0} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6.2. Дополнительная симметризация. Осуществим в (6.6) еще одну замену

$$\vec{w} = A^{-1/2}\vec{\psi}, \quad \vec{\psi} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega).$$

Тогда из второй строчки (6.6) имеем соотношение

$$\frac{d}{dt}(A^{-1/2}\vec{\psi}) = \alpha^{1/2}P_1\vec{u} - \beta A^{-1/2}\vec{\psi}, \tag{6.7}$$

и если $\vec{u}(t)$ — непрерывная по t функция со значениями в $\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, а $\vec{\psi}(t)$ — со значениями в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, то правая часть в (6.7) непрерывна по t со значениями в $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2})$. Поэтому к обеим частям в (6.7) можно применить оператор $A^{1/2}$. В итоге вместо (6.6) возникает задача Коши

$$\begin{aligned}
&\frac{d\vec{u}}{dt} = -(\tilde{A}\vec{u} + \tilde{A}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\vec{\psi}) - bG\eta + \vec{p}(t),\\
&\frac{d\vec{\psi}}{dt} = A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\vec{u} - A^{1/2}\beta A^{-1/2}\vec{\psi}, \quad \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \quad \vec{\psi}(0) = \vec{0},\\
&\frac{d\eta}{dt} = bG^*\vec{u}, \quad \eta(0) = (g(\rho_1 - \rho_2))^{1/2}\zeta^0, \quad b := (g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2} > 0.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Эта система снова коротко переписывается в виде

$$\frac{dy}{dt} = -\mathcal{A}y + p(t), \quad y(0) = y^0, \quad y = (\vec{u}; \vec{\psi}; \eta)^\tau, \tag{6.9}$$

где операторная матрица

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{A}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2} & bG \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1 & A^{1/2}\beta A^{-1/2} & 0 \\ -bG^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

задана на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\tilde{A}) \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \mathcal{D}(G) \tag{6.11}$$

и действует в пространстве $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \oplus \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma}$. Здесь

$$\mathcal{D}_2 := \{\vec{\psi} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega) : P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\vec{\psi} \in \mathcal{D}(\tilde{A})\}. \tag{6.12}$$

Замечание 6.1. Оператор $P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}$ переводит пространство $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ в $\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega) = \mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2}) \supset \mathcal{D}(\tilde{A})$, причем $\mathcal{D}(\tilde{A})$ плотно в $\mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2})$.

Изучим теперь общие свойства оператора $\mathcal{A}$ из (6.10), (6.11).

Лемма 6.1. *Операторная матрица $\mathcal{A}$ допускает факторизацию в виде произведения трех матриц с симметричным окаймлением средней матрицы*:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \tilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2} & b\tilde{A}^{-1/2}G \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\tilde{A}^{-1/2} & A^{1/2}\beta A^{-1/2} & 0 \\ -bG^*\tilde{A}^{-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}. \tag{6.13}$$

Лемма 6.2. *Операторы*

$$\tilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2} : \vec{J}_{0,S}(\Omega) \to \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega), \quad A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\tilde{A}^{-1/2} : \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \to \vec{J}_{0,S}(\Omega) \tag{6.14}$$

ограничены и взаимно сопряжены.

Доказательство. Ограниченность этих операторов проверяется непосредственно. Например, для оператора $\tilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}$ имеем свойства

$$\begin{gathered}
A^{-1/2} \in \mathcal{L}(\vec{J}_{0,S}(\Omega); \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)), \quad \alpha^{1/2} \in \mathcal{L}(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)),\\
P_1 \in \mathcal{L}(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega); \vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)) \quad \text{(см. лемму 4.3)},\\
\tilde{A}^{1/2} \in \mathcal{L}(\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega); \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)),
\end{gathered}$$

и потому имеет место первое свойство ограниченности в (6.14). Второе свойство из (6.14) проверяется аналогично.

Проверим теперь свойство взаимной сопряженности этих операторов. Для любых $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, $\vec{\psi} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ имеем

$$(\tilde{A}^{1/2} P_1 \alpha^{1/2} A^{-1/2} \vec{\psi}, \vec{u})_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = (P_1 \alpha^{1/2} A^{-1/2} \vec{\psi}, \tilde{A}^{-1/2} \vec{u})_{\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} =$$
$$= (\alpha^{1/2} A^{-1/2} \vec{\psi}, P_1 \tilde{A}^{-1/2} \vec{u})_{\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)} = (A^{-1/2} \vec{\psi}, \alpha^{1/2} P_1 \tilde{A}^{-1/2} \vec{u})_{\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)} = (\vec{\psi}, A^{1/2} \alpha^{1/2} P_1 \tilde{A}^{-1/2} \vec{u})_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)}.$$

Здесь при выводе были использованы свойства (3.14) и (3.18) для операторов A и $\tilde{A}$, а также свойство самосопряженности оператора $\alpha^{1/2}$ в $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, которое проверяется непосредственно. □

Замечание 6.2. Из определения оператора β (см. (6.4)) и структуры оператора A (см. (3.13)) следует, что

$$A^{1/2} \beta A^{-1/2} = \beta.$$

Лемма 6.3. *Справедливо соотношение*

$$\tilde{A}^{-1/2} G = (G^* \tilde{A}^{-1/2})^*|_{\mathcal{D}(G)}, \tag{6.15}$$

причем замыкание по непрерывности оператора $\tilde{A}^{-1/2} G$ совпадает с $(G^* \tilde{A}^{-1/2})^*$.

Доказательство. Убедимся сначала, что оператор $G^* \tilde{A}^{-1/2} : \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \to L_{2,\Gamma}$ ограничен и даже компактен. Действительно, $\tilde{A}^{-1/2} \in \mathcal{L}(\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega); \vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega))$, а оператор $G^* = (\rho_1 - \rho_2)\hat{\gamma}_n$, согласно определению $\hat{\gamma}_n$ (см. (5.9)) и теореме Гальярдо [11], ограничено действует из $\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega) \subset \vec{H}^1(\Omega)$ на $\tilde{H}^{1/2}_\Gamma \subset H^{1/2}_\Gamma \hookrightarrow\hookrightarrow L_{2,\Gamma}$.

Пусть теперь $\eta \in \mathcal{D}(G)$, $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$. Тогда

$$(\tilde{A}^{-1/2} G\eta, \vec{u})_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = (G\eta, \tilde{A}^{-1/2} \vec{u})_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = (\eta, G^* \tilde{A}^{-1/2} \vec{u})_{L_{2,\Gamma}}.$$

Отсюда и следует (6.15), и из плотности $\mathcal{D}(G) \equiv H^{1/2}_\Gamma$ (см. (5.8)) в $L_{2,\Gamma}$ получаем, что оператор $\tilde{A}^{-1/2} G$ ограничен (и даже компактен) на плотном множестве и поэтому допускает расширение путем замыкания до оператора $\overline{\tilde{A}^{-1/2} G} = (G^* \tilde{A}^{-1/2})^*$. □

7. Теоремы о корректной разрешимости

7.1. Свойства основной операторной матрицы. Опираясь на приведенные выше свойства коэффициентов операторной матрицы $\mathcal{A}$ (см. (6.10)–(6.13) и леммы 6.1–6.3), установим общие свойства этой матрицы.

Лемма 7.1. *Операторная матрица* (6.10) *является аккретивной в пространстве* $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \oplus \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma} =: \mathcal{H}$, *т. е.*

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}} \geqslant 0, \quad \forall y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}.$$

Доказательство. В силу факторизации (6.13) достаточно убедиться, что средний множитель

$$\mathcal{J}_0 := \begin{pmatrix} I & \tilde{A}^{1/2} P_1 \alpha^{1/2} A^{-1/2} & b\tilde{A}^{-1/2} G \\ -A^{1/2} \alpha^{1/2} P_1 \tilde{A}^{-1/2} & \beta & 0 \\ -bG^* \tilde{A}^{-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

обладает свойством аккретивности на множестве

$$\mathcal{D}(\mathcal{J}_0) := \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \oplus \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \mathcal{D}(G).$$

Имеем

$$\begin{gathered} \operatorname{Re}(\mathcal{J}_0 y, y)_{\mathcal{H}} = \operatorname{Re}\Big\{ (\vec{u}, \vec{u})_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + (\tilde{A}^{-1/2} P_1 \alpha^{1/2} A^{-1/2} \vec{\psi}, \vec{u})_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + \\ + b(\tilde{A}^{-1/2} G\eta, \vec{u})_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} - (A^{1/2} \alpha^{1/2} P_1 \tilde{A}^{-1/2} \vec{u}, \vec{\psi})_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} + (\beta\vec{\psi}, \vec{\psi})_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} - \\ - b(G^* \tilde{A}^{-1/2} \vec{u}, \eta)_{L_{2,\Gamma}} \Big\} = ||\vec{u}||^2_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + (\beta\vec{\psi}, \vec{\psi})_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} \geqslant 0. \end{gathered} \tag{7.1}$$

Здесь при выводе были использованы свойства взаимной сопряженности операторов из леммы 6.2 (второе и четвертое слагаемые справа), а также утверждение леммы 6.3 (третье и шестое слагаемые). □

Введем операторную матрицу

$$\mathcal{J}_a := \mathcal{J}_0 + a\,\mathrm{diag}(0;0;I), \quad a > 0. \tag{7.2}$$

Тогда для $\mathcal{J}_a$ из (7.1) имеем

$$\mathrm{Re}(\mathcal{J}_a y, y)_{\mathcal{H}} = ||\vec{u}||^2_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + (\beta\vec{\psi}, \vec{\psi})_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} + a||\eta||^2_{L_{2,\Gamma}} \geqslant c||y||^2_{\mathcal{H}}, \quad c > 0, \tag{7.3}$$

так как β — положительно определенный оператор (см. (6.4), $\beta_k > 0$, $k = 1,2$).

Из (7.2), (7.3) следует, что операторная матрица $\mathcal{A}$ из (6.13) принимает вид

$$\mathcal{A} = \mathrm{diag}(\tilde{A}^{1/2}; I; I)\mathcal{J}_a \mathrm{diag}(\tilde{A}^{1/2}; I; I) - a\,\mathrm{diag}(0;0;I) =: \mathcal{A}_a - a\,\mathrm{diag}(0;0;I). \tag{7.4}$$

При этом оператор $\mathcal{A}_a$ представлен в виде произведения трех сомножителей, каждый из которых имеет ограниченный обратный. Поэтому $\mathcal{A}_a$ допускает расширение путем замыкания среднего сомножителя, и в итоге возникает максимальный равномерно аккретивный оператор.

Лемма 7.2. *Замыкание $\bar{\mathcal{A}}_a$ оператора $\mathcal{A}_a$ представляется в виде*

$$\bar{\mathcal{A}}_a = \mathrm{diag}(\tilde{A}^{1/2}; I; I)\bar{\mathcal{J}}_a \mathrm{diag}(\tilde{A}^{1/2}; I; I),$$

$$\bar{\mathcal{J}}_a = \begin{pmatrix} I & \tilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2} & b(G^*\tilde{A}^{-1/2})^* \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\tilde{A}^{-1/2} & \beta & 0 \\ -bG^*\tilde{A}^{-1/2} & 0 & a \end{pmatrix},$$

где $\bar{\mathcal{J}}_a$ — равномерно аккретивный оператор, для которого выполнено свойство (7.3) (*с заменой $\mathcal{J}_a \to \bar{\mathcal{J}}_a$*). *При этом*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a) = \Big\{ y = (\vec{u}; \vec{\psi}; \eta)^\tau : \vec{u} \in \mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2}),\ \tilde{A}^{1/2}\vec{u} + \tilde{A}^{-1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\vec{\psi} + \\ + b(G^*\tilde{A}^{-1/2})^*\eta \in \mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2}) \Big\}, \quad \mathcal{R}(\bar{\mathcal{A}}_a) = \mathcal{H},\end{aligned} \tag{7.5}$$

и оператор $\bar{\mathcal{A}}_a$ действует на $\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a)$ по закону

$$\bar{\mathcal{A}}_a y = \begin{pmatrix} \tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{1/2}\vec{u} + \tilde{A}^{1/2}\alpha^{1/2}P_1A^{-1/2}\vec{\psi} + b(G^*\tilde{A}^{-1/2})^*\eta) \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\vec{u} + \beta\vec{\psi} \\ -bG^*\vec{u} + a\eta \end{pmatrix}. \tag{7.6}$$

7.2. Теорема о разрешимости задачи Коши. Вернемся к задаче (6.9)–(6.13) и перепишем ее с учетом (7.4) в виде

$$\begin{gathered}\frac{dy}{dt} = -(\mathcal{A}_a - a\mathcal{P}_3)y + p(t), \quad y(0) = y^0 = (\vec{u}^0; \vec{0}; \eta^0)^\tau, \\ y = (\vec{u}; \vec{\psi}; \eta)^\tau, \quad \mathcal{P}_3 := \mathrm{diag}(0;0;I).\end{gathered} \tag{7.7}$$

Рассмотрим также аналогичную задачу с замкнутым максимальным аккретивным оператором:

$$\frac{dy}{dt} = -(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P}_3)y + p(t), \quad y(0) = y^0. \tag{7.8}$$

Теорема 7.1. *Пусть в исходной начально-краевой задаче* (2.2)–(2.10) *выполнены условия*

$$\begin{gathered}\vec{u}^0 = \{\vec{u}_1^0; \vec{u}_2^0\} \in \mathcal{D}(\tilde{A}) \subset \mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2}) = \vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega), \quad \zeta^0 = H^{1/2}_\Gamma, \\ \vec{f}_k(t,x) \in C^1([0,T]; \vec{L}_2(\Omega_k)), \quad k = 1,2.\end{gathered} \tag{7.9}$$

Тогда задача Коши (7.8) *имеет единственное сильное решение $y(t)$ на отрезке $[0,T]$, т. е. $y(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a))$, $dy/dt \in C([0,T]; \mathcal{H})$, выполнено уравнение* (7.8) *при любом $t \in [0,T]$ и начальное условие $y(0) = y^0$.*

Доказательство. Так как согласно лемме 7.2 оператор $\bar{\mathcal{A}}_a$ является максимальным равномерно аккретивным оператором, а $\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P}_3$ — максимальным аккретивным оператором, то оператор $-(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P}_3)$ является генератором сжимающей полугруппы, действующей в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \oplus \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma}$. Поэтому для разрешимости задачи (7.8) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия (см. [6, с. 166]):

$$y^0 = (\vec{u}^0; \vec{\psi}^0; \eta^0)^\tau \in \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P}_3) = \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a), \quad p(t) = (\vec{p}(t); \vec{0}; 0)^\tau \in C^1([0,T]; \mathcal{H}). \tag{7.10}$$

Проверим, что условия (7.9) являются достаточными для выполнения соотношений (7.10). В самом деле, если выполнены условия (7.9) для $\vec{f}_k(t,x)$, то $P_{0,S_k}\vec{f}_k \in C^1([0,T];\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k))$, $k=1,2$, а потому $P_0\{P_{0,S_1}\vec{f}_1; P_{0,S_2}\vec{f}_2\} = \vec{p}(t) \in C^1([0,T];\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega))$ (см. (5.15)). Поэтому $p(t) = (\vec{p}(t);\vec{0};0)^\tau \in C^1([0,T];\mathcal{H})$, т. е. последнее условие в (7.10) выполнено.

Далее, если выполнены условия (7.9) для $\vec{u}^0$ и ζ^0, то при $\vec{\varphi}^0 = \vec{0}$ имеем свойство

$$\tilde{A}^{1/2}\vec{u}^0 + \vec{0} + b\tilde{A}^{-1/2}G\eta^0 \in \mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2}) \tag{7.11}$$

(см. (7.5)), так как по лемме 6.3 $(G^*\tilde{A}^{-1/2})^*|_{\mathcal{D}(G)} = \tilde{A}^{-1/2}G$, $\mathcal{D}(G) = H_\Gamma^{1/2}$ (см. (5.8)) и $\eta^0 = (g(\rho_1-\rho_2))^{1/2}\zeta^0 \in H_\Gamma^{1/2}$ (см. (6.1)).

Таким образом, при выполнении условий (7.9) имеют место условия (7.10). Значит, задача (7.8) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. $\square$

Теорема 7.2. *При выполнении условий* (7.9) *задача* (7.7) *также имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Если выполнены условия (7.9), то по теореме 7.1 задача (7.8) имеет сильное решение на отрезке $[0,T]$. Это означает, согласно закону (7.6) для оператора $\bar{\mathcal{A}}_a$, что имеют место три уравнения

$$\begin{aligned}
&\frac{d\vec{u}}{dt} = -\tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{1/2}\vec{u} + \tilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\vec{\psi} + b(G^*\tilde{A}^{-1/2})^*\eta) + \vec{p}(t),\\
&\frac{d\vec{\psi}}{dt} = A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\vec{u} - \beta\vec{\psi}, \quad \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \quad \vec{\psi}(0) = \vec{0},\\
&\frac{d\eta}{dt} = bG^*\vec{u}, \quad \eta(0) = (g(\rho_1-\rho_2))^{1/2}\zeta^0,
\end{aligned}$$

где все слагаемые являются непрерывными функциями $t \in [0,T]$ со значениями в $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ и $L_{2,\Gamma}$, соответственно. $\square$

При исследовании задачи Коши (6.8)–(6.12) возможен еще один подход, связанный с факторизацией операторной матрицы (6.10) по Шуру—Фробениусу.

Лемма 7.3. *Операторная матрица $\mathcal{A}$ из* (6.10) *допускает факторизацию вида*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{A}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2} & bG \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1 & A^{1/2}\beta A^{-1/2} & 0 \\ -bG^* & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -Q\tilde{A}^{-1/2} & I & 0 \\ -bQ_1\tilde{A}^{-1/2} & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 & 0 \\ 0 & \beta + QQ^* & bQQ_1^+ \\ 0 & bQ_1Q^* & b^2Q_1Q_1^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \tilde{A}^{-1/2}Q^* & b\tilde{A}^{-1/2}Q_1^+ \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \tag{7.12}$$

$$\begin{gathered}
Q^* := \tilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2} \in \mathcal{L}(\vec{J}_{0,S}(\Omega); \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)),\\
Q_1 := G^*\tilde{A}^{-1/2} \in \mathcal{L}(\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega); \tilde{H}_\Gamma^{1/2} \subset H_\Gamma^{1/2}),\\
Q = A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\tilde{A}^{-1/2} \in \mathcal{L}(\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega); \vec{J}_{0,S}(\Omega)),\\
Q_1^+ = \tilde{A}^{-1/2}G \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{1/2}; \vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)).
\end{gathered} \tag{7.13}$$

Замыкание $\bar{\mathcal{A}}$ операторной матрицы $\mathcal{A}$ представляется в виде

$$\bar{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -Q\tilde{A}^{-1/2} & I & 0 \\ -bQ_1\tilde{A}^{-1/2} & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 & 0 \\ 0 & \beta + QQ^* & \beta QQ_1^* \\ 0 & bQ_1Q^* & b^2Q_1Q_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \tilde{A}^{-1/2}Q^* & b\tilde{A}^{-1/2}Q_1^* \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \tag{7.14}$$

$$Q_1^* := \bar{Q}_1^+ \quad (\textit{см.}\ (6.15)),$$

и этот оператор действует на области определения

$$\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}) = \{y = (\vec{u};\vec{\psi};\eta)^\tau : \vec{u} + \tilde{A}^{-1/2}Q^*\vec{\psi} + b\tilde{A}^{-1/2}Q_1^*\eta \in \mathcal{D}(\tilde{A})\},$$

совпадающей, очевидно, с (7.5), *по закону* (*сравн. с* (7.6))

$$\bar{\mathcal{A}}y = \begin{pmatrix} \tilde{A}(\vec{u} + \tilde{A}^{-1/2}Q^*\vec{\psi} + b\tilde{A}^{-1/2}Q_1^*\eta) \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\vec{u} + \beta\vec{\psi} \\ -bG^*\vec{u} \end{pmatrix}, \quad y \in \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}).$$

Доказательство. Факторизация (7.12), (7.13) проверяется непосредственно. Далее, по лемме 6.2 получаем, что операторы Q и Q^* взаимно сопряжены, а из леммы 6.3 имеем связи

$$Q_1^+ = Q_1^*|_{\mathcal{D}(G)}, \quad \bar{Q}_1^+ = Q_1^*.$$

□

Замечание 7.1. Из леммы 7.3 следует, что крайние сомножители в (7.14) обратимы и равны сумме единичного и компактного оператора, а средний множитель — квазидиагональный самосопряженный неотрицательный оператор, так как

$$\begin{pmatrix} \beta + QQ^* & \beta QQ_1^* \\ bQ_1Q^* & b^2Q_1Q_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\psi} \\ \eta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{\psi} \\ \eta \end{pmatrix} = (\beta\vec{\psi}, \vec{\psi})_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} + ||Q^*\vec{\psi} + bQ_1^*\eta||^2_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} \geqslant 0. \qquad (7.15)$$

Рассмотрим теперь, как и выше, задачу Коши с замкнутым оператором из (7.14):

$$\frac{dy}{dt} = -(\mathcal{J} - \mathcal{F}_1)\mathcal{A}_0(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)y + p(t), \quad y(0) = y^0, \qquad (7.16)$$

$$\mathcal{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ Q\tilde{A}^{-1/2} & 0 & 0 \\ bQ_1^*\tilde{A}^{-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad \mathcal{A}_0 := \operatorname{diag}(\tilde{A}; A_{00}), \qquad (7.17)$$

где A_{00} — матричный ограниченный неотрицательный оператор из (7.15).

Теорема 7.3. *Пусть в задаче Коши* (7.16) *выполнены первые два условия* (7.9), *а условия для* $\vec{f}_k(t,x)$ *заменены менее ограничительными*:

$$\vec{f}_k(t,x) \in C^\delta([0,T]; \vec{L}_2(\Omega_k)), \quad k = 1,2, \quad 0 < \delta \leqslant 1. \qquad (7.18)$$

Тогда задача (7.16) *имеет единственное сильное решение* $y(t)$ *на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Осуществим в задаче (7.16) замену искомой функции:

$$(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)y(t) =: w(t). \qquad (7.19)$$

Тогда для $w(t)$ возникает задача Коши

$$\frac{dw}{dt} = -(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)(\mathcal{J} - \mathcal{F}_1)\mathcal{A}_0 w + p(t), \quad w(0) = w^0, \qquad (7.20)$$

где учтено, что

$$(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)^{-1} = (\mathcal{J} - \mathcal{F}_2), \quad (\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)p(t) = p(t).$$

В задаче (7.20) оператор $-\mathcal{A}_0$ является самосопряженным неотрицательным оператором и потому генератором аналитической полугруппы операторов, действующих в пространстве $\mathcal{H}$. Так как операторы $\mathcal{F}_k$ из (7.17) — компактные, то оператор

$$-(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)(\mathcal{J} - \mathcal{F}_1)\mathcal{A}_0$$

также является генератором полугруппы, аналитической в секторе, содержащем положительную полуось. Значит, уравнение (7.20) является абстрактным параболическим, и для его сильной разрешимости требуется выполнение условий

$$w(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(\tilde{A}) \oplus \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma}, \quad p(t) \in C^\delta([0,T]; \mathcal{H}), \quad 0 < \delta \leqslant 1. \qquad (7.21)$$

Однако при выполнении первых двух условий (7.9), как и при доказательстве теоремы 7.1, можно проверить (см. (7.11)), что $w(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$. Далее, при выполнении условий (7.18) аналогично убеждаемся, что для $p(t)$ выполнено условие (7.21). Значит, задача Коши (7.20) имеет на отрезке $[0,T]$ единственное сильное решение

$$w(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{H}) \cap C([0,T]; \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)).$$

Отсюда, возвращаясь от (7.20) к задаче Коши (7.16) путем обратной замены (7.19), приходим к выводу, что задача (7.16) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. □

7.3. О существовании обобщенного решения исходной начально-краевой задачи. Напомним (теорема 5.1), что исходная начально-краевая задача равносильна (после отделения тривиальных соотношений) задаче Коши (5.17).

Определение 7.1. Будем говорить, что исходная начально-краевая задача (2.2)–(2.10) имеет *обобщенное решение* $\{\vec{u}(t);\zeta(t)\}$ на отрезке $[0,T]$, если выполнены следующие условия:

1. $\vec{u}(t)\in C^1([0,T];\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega))$;
2. $\vec{v}(t)=I_0(t)\vec{u}(t)$ (см. (5.18)) обладает свойством $P_1\vec{v}(t)\in C([0,T];\mathcal{D}(\tilde{A}))$;
3. $\zeta(t)\in C^1([0,T];H_\Gamma^{1/2})$;
4. для любого $t\in[0,T]$ выполнена система уравнений (5.17), где все слагаемые в первом уравнении — элементы из $C([0,T];\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega))$, а во втором — элементы из $C([0,T];H_\Gamma^{1/2})$;
5. выполнены начальные условия (5.17).

Теоремы 7.1 либо 7.3 позволяют доказать существование обобщенного решения исследуемой начально-краевой задачи.

Теорема 7.4. *Пусть выполнены условия теорем* 7.1 *либо* 7.3. *Тогда задача* (2.2)–(2.10) *имеет единственное обобщенное решение на отрезке* $[0,T]$ (*в смысле определения* 7.1).

Доказательство. Если условия теоремы 7.1 либо 7.3 выполнены, то каждая из задач (7.8) либо (7.16) имеет сильное решение на отрезке $[0,T]$. В частности, для задачи (7.8) получаем, что справедлива система уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{d\vec{u}}{dt}=-\tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{1/2}\vec{u}+Q^*\vec{\psi}+bQ_1^*\eta)+p(t),\\
&\frac{d\vec{\psi}}{dt}=Q\tilde{A}^{1/2}\vec{u}-\beta\vec{\psi},\quad \vec{u}(0)=\vec{u}^0,\quad \vec{\psi}(0)=\vec{0},\\
&\frac{d\eta}{dt}=bQ_1\tilde{A}^{1/2}\vec{u},\quad \eta(0)=(g(\rho_1-\rho_2))^{1/2}\zeta^0.
\end{aligned}\tag{7.22}$$

Здесь в первом уравнении все слагаемые — элементы из $C([0,T];\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega))$, во втором — из $C([0,T];\vec{J}_{0,S}(\Omega))$, а в третьем — из $C([0,T];\tilde{H}_\Gamma^{1/2})$, $\tilde{H}_\Gamma^{1/2}\subset H_\Gamma^{1/2}$. Поясним утверждения о последних двух свойствах.

Из второго уравнения имеем $\vec{\varphi}(t):=Q\tilde{A}^{1/2}\vec{u}=A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\vec{u}=A^{1/2}\alpha^{1/2}\vec{u}$ для $\vec{u}\in\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)=\mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2})$, причем $\vec{\varphi}(t)\in C([0,T];\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega))$. Отсюда в силу свойств $\alpha^{1/2}$ и $A^{1/2}$ (см. (6.4), (3.13)) получаем, что $\vec{u}(t)\in C([0,T];\mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2}))$. Тогда $Q_1\tilde{A}^{1/2}\vec{u}=G^*\vec{u}=(\rho_1-\rho_2)\hat{\gamma}_n\vec{u}$, и потому эта функция — элемент из $C([0,T];\tilde{H}_\Gamma^{1/2})$, $\tilde{H}_\Gamma^{1/2}\subset H_\Gamma^{1/2}$.

Из третьего уравнения (7.22) имеем

$$\eta(t)=(g(\rho_1-\rho_2))^{1/2}\zeta(t)=\eta^0+b\int_0^t Q_1\tilde{A}^{1/2}\vec{u}(s)ds=(g(\rho_1-\rho_2))^{1/2}\zeta^0+b\int_0^t G^*\vec{u}(s)ds=$$
$$=g(\rho_1-\rho_2)^{1/2}[\zeta^0+\int_0^t\hat{\gamma}_n\vec{u}(s)ds]\in C^1([0,T];\tilde{H}_\Gamma^{1/2}).$$

Тогда (лемма 6.3)

$$bQ_1^*\eta(t)=bQ_1^+\eta(t)=g\tilde{A}^{-1/2}G\zeta(t)=g\tilde{A}^{-1/2}(G\zeta^0+\int_0^t G\hat{\gamma}_n\vec{u}(s)ds)\in C([0,T];\mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2})),$$

и потому в (7.22)

$$\tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{1/2}\vec{u}+Q^*\vec{\psi}+bQ_1^*\eta)=\tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{1/2}\vec{u}+Q^*\vec{\psi})+bG\zeta.$$

Далее, из второго уравнения (7.22) получаем

$$\vec{\psi}(t) = A^{1/2}\vec{w}(t) = \int\limits_0^t e^{-\beta(t-s)}Q\tilde{A}^{1/2}\vec{u}(s)ds = \int\limits_0^t e^{-\beta(t-s)}A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\vec{u}(s)ds,$$

и потому

$$Q^*\vec{\psi} = \tilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\int\limits_0^t e^{-\beta(t-s)}A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\vec{u}(s)ds = \tilde{A}^{1/2}\int\limits_0^t P_1\alpha e^{-\beta(t-s)}P_1\vec{u}(s)ds.$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{A}^{1/2}\vec{u} + Q^*\vec{\psi} = \tilde{A}^{1/2}(\vec{u}(t) + \int\limits_0^t P_1\alpha e^{-\beta(t-s)}P_1\vec{u}(s)ds) = \tilde{A}^{1/2}P_1I_0(t)\vec{u}(t).$$

Таким образом, при выполнении условий теоремы задача Коши для системы уравнений (7.22) преобразована в задачу Коши (5.17):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt} &= -\tilde{A}P_1(I_0(t)\vec{u}) - gG\zeta + p(t), \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \hat{\gamma}_n\vec{u}, \quad \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \quad \zeta(0) = \zeta^0, \end{aligned}$$

т. е., согласно определению 7.1, исходная задача (2.2)–(2.10) имеет обобщенное решение $\{\vec{u}(t);\zeta(t)\}$ на отрезке $[0,T]$. □

7.4. К задаче о нормальных колебаниях гидросистемы. Рассмотрим теперь постановку задачи о малых нормальных движениях исследуемой гидросистемы, т. е. о таких решениях однородной задачи (7.22), которые зависят от t по закону

$$(\vec{u}(t);\vec{\psi}(t);\eta(t))^\tau = (\vec{u};\vec{\psi};\eta)^\tau e^{-\lambda t},$$

где $\lambda\in\mathbb{C}$ — комплексный декремент затухания, а $(\vec{u};\vec{\psi};\eta)^\tau$ — амплитудный элемент.

Тогда для отыскания амплитудных элементов возникает спектральная задача

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{1/2}\vec{u} + Q^*\vec{\psi} + bQ_1^*\eta) &= \lambda\vec{u}, \\ -Q\tilde{A}^{1/2}\vec{u} + \beta\vec{\psi} &= \lambda\vec{\psi}, \\ -bQ_1\tilde{A}^{1/2}\vec{u} &= \lambda\eta. \end{aligned} \tag{7.23}$$

В случае $\lambda = 0$ приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} &\tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{1/2}\vec{u} + Q^*\vec{\psi} + bQ_1^*\eta) = \vec{0}, \\ &\beta\vec{\psi} = Q\tilde{A}^{1/2}\vec{u}, \quad bQ_1\tilde{A}^{1/2}\vec{u} = \vec{0}. \end{aligned} \tag{7.24}$$

Из первой связи с учетом второй и третьей получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{A}^{1/2}\vec{u},\tilde{A}^{1/2}\vec{u})_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + (Q^*\beta^{-1}Q\tilde{A}^{1/2}\vec{u},\tilde{A}^{1/2}\vec{u})_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + (bQ_1^*\eta,\tilde{A}^{1/2}\vec{u})_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = ||\tilde{A}^{1/2}\vec{u}||^2_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + \\ + ||\beta^{-1/2}Q\tilde{A}^{1/2}\vec{u}||^2_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} + (\eta, bQ_1\tilde{A}^{1/2}\vec{u})_{L_{2,\Gamma}} = ||\tilde{A}^{1/2}\vec{u}||^2_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + ||\beta^{-1/2}Q\tilde{A}^{1/2}\vec{u}||^2_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\vec{u} = \vec{0}$, а потому и $\vec{\psi} = \beta^{-1}Q\tilde{A}^{1/2}\vec{u} = \vec{0}$.

Далее, из (7.24) имеем

$$\tilde{A}^{1/2}Q_1^*\eta = \tilde{A}^{1/2}(G^*\tilde{A}^{-1/2})^*\eta = (G^*)^*\eta =: \bar{G}\eta = G\eta = 0,$$

так как G — ограниченный оператор из $H_\Gamma^{1/2}$ на $\vec{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega)$ (см. (5.8)). Отсюда и из леммы 5.1 (см. также (5.6)) получаем, что $\eta = 0$. Таким образом, задача (7.24) имеет лишь тривиальное решение, т. е. $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (7.23).

Опираясь на этот факт, преобразуем при $\lambda \neq 0$ задачу (7.23) к спектральной проблеме для одного искомого элемента, исключив $\vec{\psi}$ и η (при условии $\lambda \notin \sigma(\beta)$). Имеем

$$\vec{\psi} = (\beta - \lambda I)^{-1} Q \tilde{A}^{1/2} \vec{u}, \quad \eta = -\lambda^{-1} b Q_1 \tilde{A}^{1/2} \vec{u},$$

и тогда $\vec{u}$ является собственным элементом задачи

$$\vec{u} + \tilde{A}^{-1/2} Q^* (\beta - \lambda I)^{-1} Q \tilde{A}^{-1/2} \vec{u} = \lambda \tilde{A}^{-1} \vec{u} + b^2 \lambda^{-1} \tilde{A}^{-1/2} Q_1^* Q_1 \tilde{A}^{1/2} \vec{u}.$$

Осуществляя еще здесь замену

$$\tilde{A}^{1/2} \vec{u} =: \vec{\varphi} \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega),$$

приходим к спектральной проблеме

$$L(\lambda) \vec{\varphi} := (I + Q^* (\beta - \lambda I)^{-1} Q - \lambda \tilde{A}^{-1} - b^2 \lambda^{-1} Q_1^* Q_1) \vec{\varphi} = \vec{0} \tag{7.25}$$

в пространстве $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ для операторного пучка $L(\lambda)$.

В этом пучке

$$Q^* (\beta - \lambda I)^{-1} Q = \tilde{A}^{1/2} P_1 \alpha (\beta - \lambda I)^{-1} P_1 \tilde{A}^{-1/2}$$

— оператор-функция, принимающая ограниченные значения из $\mathcal{L}(\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega))$, $\tilde{A}^{-1}$ — положительный компактный оператор, действующий в $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, а

$$Q_1^* Q_1 = \tilde{A}^{-1/2} (\bar{G} G^*) \tilde{A}^{-1/2}$$

— неотрицательный компактный оператор, действующий в $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$.

Исследование спектральной проблемы (7.25) будет проведено в другой работе.

8. Заключительные замечания

В работе [5] получены формулы для ортопроекторов P_0 и P_1 (см. раздел 4) в случае, когда неподвижный сосуд заполнен не двумя, а тремя несмешивающимися вязкоупругими жидкостями. Это позволяет применить операторный подход к проблеме малых движений системы из трех вязкоупругих жидкостей, находящихся в полностью заполненном неподвижном сосуде, свести проблему к задаче Коши вида (7.8) и доказать теорему о сильной разрешимости исходной задачи на произвольном промежутке времени. Кроме того, как уже упоминалось во введении, переход от интегро-дифференциального уравнения первого порядка (см. (6.2)) к системе дифференциальных уравнений первого порядка, осуществленный в пункте 6.1 для модели Олдройта вязкоупругих жидкостей ($m = 1$), можно осуществить также и для жидкостей обобщенной модели Олдройта ($m > 1$) с помощью аналогичных приемов.

Наконец, имея формулы для ортопроекторов P_0 и P_1 для проблемы малых движений системы из произвольного числа несмешивающихся вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный контейнер, можно с помощью примененного в данной работе подхода доказать теорему о сильной разрешимости задачи о малых движениях гидросистемы на произвольном отрезке времени. При этом для нахождения формул действия ортопроекторов P_0 и P_1 возникают скалярные и векторные задачи сопряжения, описанные в случае трех жидкостей в работе [5].

Автор благодарит Е. В. Семкину за сотрудничество, связанное с исследованием обсуждаемых здесь проблем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С.* Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 5(347). — С. 3–78.
2. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения. — Симферополь: ООО «Форма», 2016.
3. *Копачевский Н. Д.* О малых движениях системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд// Динам. системы. — 2017. — *7* (*35*), № 1-2. — С. 109–145.
4. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
5. *Копачевский Н. Д., Семкина Е. В.* Формулы для ортопроекторов, связанных с проблемой малых движений трех вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2017. — № 2 (35). — С. 48–61.

6. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
7. *Милославский А. И.* Спектральный анализ малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом контейнере// Ин-т мат. НАН Украины. — Киев, 1989. — Деп. рукопись № 1221.
8. *Agranovich M. S.* Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary// Russ. J. Math. Phys. — 2008. — *15*, № 2. — C. 146–155.
9. *Azizov T. Ya., Kopachevskii N. D., Orlova L. D.* Evolution and spectral problems related to small motions of viscoelastic fluid// Am. Math. Soc. Transl. — 2000. — *199*. — C. 1–24.
10. *Eirich F. R.* Rheology. Theory and applications. — New York: Academic Press, 1956.
11. *Galiardo E.* Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1957. — *27*. — C. 284–305.
12. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint problems for an ideal fluid. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 2001.
13. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Nonselfadjoint problems for viscous fluid. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 2003.
14. *Miloslavskii A. I.* Stability of certain classes of evolution equations// Sib. Math. J. — 1985. — *26*, № 5. — C. 723–735.
15. *Miloslavskii A. I.* Stability of a viscoelastic isotropic medium// Sov. Phys. Dokl. — 1988. — *33*. — C. 300.
16. *Rychkov V. S.* On restrictions and extensions of the Besov and Triebel—Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains// J. London Math. Soc. (2). — 1999. — *60*, № 1. — C. 237–257.

Н. Д. Копачевский
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, г. Симферополь, пр. Академика Вернадского, д. 4, корпус «В», каб. № 403
E-mail: `kopachevsky@list.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-3-547-572 UDC 517.958

To the Problem on Small Motions of the System of Two Viscoelastic Fluids in a Fixed Vessel

 N. D. Kopachevsky

Abstract. In this paper, we study the problem of small motions of two Oldroyd viscoelastic incompressible fluids contained in a fixed vessel. By means of the operator approach, we reduce the original initial-boundary value problem to the Cauchy problem for a differential operator equation in a Hilbert space and prove the well-posed solvability of the problem on an arbitrary interval of time. We obtain the equation for normal oscillations of the hydraulic system under consideration (Krein generalized operator pencil).

REFERENCES

1. M. S. Agranovich, "Spektral'nye zadachi dlya sil'no ellipticheskikh sistem vtorogo poryadka v oblastyakh s gladkoy i negladkoy granitsey" [Spectral problems for second-order strongly elliptic systems in domains with smooth and nonsmooth boundary], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2002, **57**, No. 5 (347), 3–78 (in Russian).
2. N. D. Kopachevsky, *Abstraktnaya formula Grina i nekotorye ee prilozheniya* [Abstract Green Formula and Some Its Applications], FORMA, Simferopol', 2016 (in Russian).
3. N. D. Kopachevsky, "O malykh dvizheniyakh sistemy iz dvukh vyazkouprugikh zhidkostey, zapolnyayushchikh nepodvizhnyy sosud" [On small motions of a system of two viscoelastic fluids contained in a fixed vessel], *Dinam. sistemy* [Dynam. Syst.], 2017, **7** (**35**), No. 1-2, 109–145 (in Russian).
4. N. D. Kopachevsky, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: evolyutsionnye i spektral'nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolution and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).

5. N. D. Kopachevsky and E. V. Semkina, "Formuly dlya ortoproektorov, svyazannykh s problemoy malykh dvizheniy trekh vyazkouprugikh zhidkostey, zapolnyayushchikh nepodvizhnyy sosud" [Formulas for orthoprojectors related to the problem on small motions of three viscoelastic fluids contained in a fixed vessel], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2017, No. 2 (35), 48–61 (in Russian).
6. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in a Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
7. A. I. Miloslavskiy, "Spektral'nyy analiz malykh kolebaniy vyazkouprugoy zhidkosti v otkrytom konteynere" [Spectral analysis of small oscillations of a viscoelastic fluid in an open container], *In-t mat. NAN Ukrainy* [Inst. Math. Ukr. Acad. Sci.], Kiev, 1989, Dep. manuscript No. 1221 (in Russian).
8. M. S. Agranovich, "Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary," *Russ. J. Math. Phys.*, 2008, **15**, No. 2, 146–155.
9. T. Ya. Azizov, N. D. Kopachevskii, and L. D. Orlova, "Evolution and spectral problems related to small motions of viscoelastic fluid," *Am. Math. Soc. Transl.*, 2000, **199**, 1–24.
10. F. R. Eirich, *Rheology. Theory and Applications*, Academic Press, New York, 1956.
11. E. Galiardo, "Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili," *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1957, **27**, 284–305.
12. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Self-Adjoint Problems for an Ideal Fluid*, Birkhauser, Basel—Boston—Berlin, 2001.
13. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonselfadjoint Problems for Viscous Fluid*, Birkhauser, Basel—Boston—Berlin, 2003.
14. A. I. Miloslavskii, "Stability of certain classes of evolution equations," *Sib. Math. J.*, 1985, **26**, No. 5, 723–735.
15. A. I. Miloslavskii, "Stability of a viscoelastic isotropic medium," *Sov. Phys. Dokl.*, 1988, **33**, 300.
16. V. S. Rychkov, "On restrictions and extensions of the Besov and Triebel—Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains," *J. London Math. Soc. (2)*, 1999, **60**, No. 1, 237–257.

N. D. Kopachevsky
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: kopachevsky@list.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 3 (2018). С. 573–590

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-3-573-590 УДК 517.98

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В БАССЕЙНЕ, ПОКРЫТОМ ЛЬДОМ

© 2018 г. **Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ, Д. О. ЦВЕТКОВ**

Аннотация. Изучается задача о малых движениях идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, частично покрытой крошеным льдом. Под крошеным льдом подразумеваем плавающие на свободной поверхности весомые частицы некоторого вещества, которые в процессе колебания свободной поверхности друг с другом не взаимодействуют или их взаимодействие пренебрежимо мало, причем частицы все время находятся на поверхности в процессе малых движений. Используя метод ортогонального проектирования граничных условий на подвижной поверхности и введения вспомогательных задач, исходная начально-краевая задача сводится к равносильной задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в некотором гильбертовом пространстве. Получены условия, при которых существует сильное по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию данной гидросистемы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

В связи с новыми потребностями прикладных наук возрос интерес к изучению динамических характеристик жидкостей, обладающих разными специфическими свойствами. К таким жидкостям, в частности, относятся стратифицированные и флотирующие жидкости. Данная работа является продолжением цикла работ, связанных с изучением колебаний стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, покрытой крошеным льдом. Под крошеным льдом подразумеваем плавающие на свободной поверхности весомые частицы некоторого вещества, которые в процессе колебания свободной поверхности друг с другом не взаимодействуют или их взаимодействие пренебрежимо мало, причем частицы все время находятся на поверхности в процессе малых движений данной гидродинамической системы.

В представленной работе рассматривается ситуация, когда идеальная стратифицированная жидкость покрыта крошеным льдом и есть участки чистой воды. Эта задача близка к проблеме флотации, частично исследованной С. А. Габовым и А. Г. Свешниковым (см. [1, 2]), а также в работе М. А. Солдатова [9] для однородной жидкости.

В данной работе для получения операторного уравнения исходной задачи граничные условия на подвижной поверхности проектируются на подпространства ортогонального разложения H:

$$H = H_0 \oplus H_2 \oplus H_3, \tag{1}$$
$$H_1 := \{ (\zeta_1; \zeta_2) \,|\, \zeta_1 \in L_2(\Gamma_1) \ominus \{1_{\Gamma_1}\}, \zeta_2 \equiv 0 \},$$
$$H_2 := \{ (\zeta_1; \zeta_2) \,|\, \zeta_2 \in L_2(\Gamma_2) \ominus \{1_{\Gamma_2}\}, \zeta_1 \equiv 0 \},$$

где функция ζ отклонения подвижной поверхности от ее равновесного состояния представлена в виде пары функций $\zeta = (\zeta_1; \zeta_2)$, $\zeta_1 = \zeta|_{\Gamma_1}$ и $\zeta_2 = \zeta|_{\Gamma_2}$, Γ_1 — участок «чистой воды» , Γ_2 — участок «крошеного льда». Доказано, что H_3 есть одномерное подпространство, что существенно используется в дальнейшем.

Отметим, что ортогональное разложение (1) естественным образом приспособлено к применению метода ортогонального проектирования для исходной задачи, т. е. для случая, когда на различных участках подвижной границы заданы различные граничные условия.

Операторное уравнение в этой задаче имеет вид

$$\mathcal{A}\frac{d^2x}{dt^2} + \mathcal{C}x = \mathcal{F}, \quad x(0) = x^0, \quad x^{'}(0) = x^1, \tag{2}$$
$$0 < \mathcal{A} = \mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad 0 \leqslant \mathcal{C} = \mathcal{C}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, где $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ — это операторные блок-матрицы. Для вывода уравнения (2) рассматриваются три вспомогательные задачи, связанные с проектированием граничных условий на поверхности Γ. Применение метода операторных блок-матриц позволило доказать теоремы о сильной разрешимости исходной начально-краевой задачи.

1. Постановка задачи. Переход к системе операторных уравнений

1.1. Математическая формулировка задачи. Пусть идеальная стратифицированная жидкость, плотность ρ_0 которой в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси Ox_3: $\rho_0 = \rho_0(x_3)$, частично заполняет неподвижный сосуд и занимает в состоянии покоя область Ω, ограниченную твердой стенкой S и свободной поверхностью $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 — участок «чистой воды» , Γ_2 — участок «крошеного льда». Обозначим через ρ_1 поверхностную плотность крошеного льда. Предположим, что начало O декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ выбрано на свободной равновесной поверхности Γ, которая является плоской и расположена перпендикулярно ускорению силы тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — орт оси Ox_3. Предполагаем далее, что твердая стенка $S \subset \partial\Omega$ является липшицевой поверхностью, причем $\partial S = \partial\Gamma$ — липшицева кривая.

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкости по плотности:

$$0 < N^2_{min} \leqslant N^2(x_3) \leqslant N^2_{max} = N_0^2 < \infty, \quad N^2(x_3) = -\frac{g\rho_0'(x_3)}{\rho_0(x_3)}, \quad \rho_0(0) > 0, \tag{1.3}$$

Функцию $N(x_3)$ называют частотой Вейсяля—Брента, или частотой плавучести.

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Обозначим через $\vec{u} = \vec{u}(t,x)$, $x = (x_1,x_2,x_3) \in \Omega$, поле скорости в жидкости, $p = p(t,x)$ — отклонение поля давлений от равновесного давления $P_0 = P_0(x_3)$, $\rho = \rho(t,x)$ — отклонение поля плотности от исходного поля $\rho_0(x_3)$, а через $\zeta = \zeta(t,\hat{x})$ ($\hat{x} = (x_1,x_2) \in \Gamma$) — отклонение свободно движущейся поверхности жидкости $\Gamma(t)$ от Γ по нормали $\vec{n}$. Тогда малые движения исходной системы описываются следующей начально-краевой задачей (см., например, [2, 7]):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = \rho_0^{-1}(x_3)\Big(-\nabla p - g\rho\vec{e}_3\Big) + \vec{f}(t,x) \quad (\text{в}\,\Omega),\\
&\operatorname{div}\vec{u} = 0, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\rho_0\cdot\vec{u} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega),\\
&\vec{u}\cdot\vec{n} =: u_n = 0 \quad (\text{на}\,S), \quad u_n = \frac{\partial\zeta}{\partial t} \quad (\text{на}\,\Gamma), \quad \int_\Gamma \zeta\,d\Gamma = 0,\\
&p = g\rho_0(0)\zeta \quad (\text{на}\,\Gamma_1), \qquad p = g\rho_0(0)\zeta + \rho_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \quad (\text{на}\,\Gamma_2),\\
&\vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \rho(0,x) = \rho^0(x) \quad (x\in\Omega), \quad \zeta(0,\hat{x}) = \zeta_0(\hat{x}) \quad (\hat{x}\in\Gamma).
\end{aligned} \tag{1.4}$$

1.2. Исключение поля плотности. Использование поля малых смещений жидкости. В начально-краевой задаче (1.4) можно исключить одну искомую функцию — поле плотности $\rho(t,x)$, если ввести взамен поля скорости $\vec{u}(t,x)$ поле малых смещений частиц жидкости $\vec{v}(t,x)$, связанное с $\vec{u}(t,x)$ соотношениями

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{u}, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega). \tag{1.5}$$

Тогда придем к связи

$$\begin{aligned} &\rho(t,x) = -\nabla\rho_0 \cdot \vec{v}(t,x) + f_0(x) = -\rho_0'(x_3)v_3(t,x) + f_0(x), \\ &f_0(x) := \rho(0,x) + \rho_0'(x_3)v_3(0,x), \quad v_3 := \vec{v}\cdot\vec{e}_3, \end{aligned} \tag{1.6}$$

и к уравнениям для $\vec{v}(t,x)$ и $p(t,x)$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = -\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p - N^2(x_3)v_3\vec{e}_3 + \psi_0(x), \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega), \\ &\psi_0(x) = \vec{f}(t,x) - g f_0(x)\vec{e}_3/\rho_0(x_3). \end{aligned} \tag{1.7}$$

С учетом сказанного перепишем исходную задачу (1.4) в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = -\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p - N^2(x_3)v_3\vec{e}_3 + \psi_0(x), \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega), \\ &\vec{v}\cdot\vec{n} =: v_n = 0 \quad (\text{на}\,S), \qquad \int\limits_{\Gamma} v_3\,d\Gamma = 0, \\ &p = g\rho_0(0)v_3 \quad (\text{на}\,\Gamma_1), \qquad p = g\rho_0(0)v_3 + \rho_1\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \quad (\text{на}\,\Gamma_2), \\ &\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(0,x) = \vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \vec{v}(0,x) = \vec{v}^0(x), \\ &v_3(0,\hat{x}) = \zeta(0,\hat{x}) = \zeta^0(\hat{x}) \quad (\hat{x}\in\Gamma). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Начально-краевая задача (1.8) содержит лишь две искомые функции: векторное поле $\vec{v}(t,x)$ и скалярное поле давлений $p(t,x)$. По решению $\vec{v}(t,x)$ задачи (1.8) решения $\vec{u}(t,x)$ и $\rho(t,x)$ задачи (1.4) можно найти по формулам (1.5) и (1.6).

1.3. Проектирование уравнений движения на ортогональные подпространства. Начально-краевую задачу (1.8) приведем в дальнейшем к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве. Для этого применим прием проектирования первого уравнения (1.8) на ортогональные подпространства (см. [6]). Свяжем с функцией ρ_0 гильбертово пространство $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ вектор-функций со скалярным произведением

$$(\vec{u},\vec{v}) = \int\limits_{\Omega} \rho_0(x_3)\vec{u}(x)\overline{\vec{v}(x)}\,d\Omega. \tag{1.9}$$

Как следует из (1.3), для $\rho = \rho_0(x_3)$ справедливы неравенства

$$0 < m \leqslant \rho_0 \leqslant M < \infty,$$

обеспечивающие эквивалентность норм, определенных по закону (1.9) и обычным скалярным произведением в $\vec{L}_2(\Omega)$.

Обозначим через $\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)$ подпространство $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$, которое получается замыканием в норме $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ множества гладких функций

$$\{\,\vec{v}\in\vec{C}^1(\Omega) : \operatorname{div}\vec{v} = 0 \ (\text{в }\Omega),\ v_n = 0 \ (\text{на }\ \partial\Omega)\,\}.$$

В качестве других подпространств возьмем подпространства

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) = \{\,\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0) : \vec{v} = \rho_0^{-1}\nabla p,\ v_n = 0 \ (\text{на }\ S), \nabla\cdot\vec{v} = 0 \ (\text{в }\ \Omega),\ \int\limits_{\Gamma} p\,d\Gamma = 0\,\},$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0) = \{\,\vec{w}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0) : \vec{w} = \rho_0^{-1}\nabla\varphi, \quad \varphi = 0 \ (\text{на}\,\Gamma)\,\}.$$

Лемма 1.1. *Имеет место следующее ортогональное разложение*:
$$\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)=\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0). \tag{1.10}$$

Доказательство леммы повторяет доказательство аналогичного утверждения для пространства $\vec{L}_2(\Omega)$, когда в (1.10) $\rho_0(x_3)=\mathrm{const}$ (см. [6, с. 106]).

Будем считать $\vec{v}(t,x)$ и $\rho_0^{-1}\nabla p(t,x)$ функциями переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$, тогда в силу уравнений и граничных условий (1.8) и ортогонального разложения (1.10) имеем
$$\vec{v}(t,x)\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)=:\vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0),$$
$$\rho_0^{-1}\nabla p(t,x)\in\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)=:\vec{G}(\Omega,\rho_0).$$
Поэтому при каждом t будем разыскивать их в виде
$$\begin{gathered}\vec{v}(t,x)=\vec{w}(t,x)+\rho_0^{-1}\nabla\Phi(t,x),\ \vec{w}(t,x)\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0),\ \rho_0^{-1}\nabla\Phi(t,x)\in\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0),\\ \rho_0^{-1}\nabla p(t,x)=\rho_0^{-1}\nabla p_1(t,x)+\rho_0^{-1}\nabla p_2(t,x),\\ \rho_0^{-1}\nabla p_1(x,t)\in\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0),\quad \rho_0^{-1}\nabla p_2(t,x)\in\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0).\end{gathered} \tag{1.11}$$

Обозначим через P_0, $P_{h,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ ортопроекторы на подпространства $\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)$, $\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)$, $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0)$, соответственно. Тогда, подставляя (1.11) в первое уравнение (1.8) и применяя ортопроекторы, получаем
$$\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2}+P_0\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)\vec{e}_3\right]=P_0\psi_0, \tag{1.12}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\right)+\rho_0^{-1}\nabla p_1+P_{h,S}\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)\vec{e}_3\right]=P_{h,S}\psi_0, \tag{1.13}$$
$$\rho_0^{-1}\nabla p_2+P_{0,\Gamma}\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)\vec{e}_3\right]=P_{0,\Gamma}\psi_0. \tag{1.14}$$

Из соотношения (1.14) следует, что составляющая поля давлений, обусловленная слагаемым $\rho_0^{-1}\nabla p_2$, определяется лишь полем вертикального смещения v_3 и начальными условиями, следовательно, достаточно ограничиться рассмотрением первых двух соотношений, а также граничного условия с соответствующей заменой $p\to p_1$, так как $p=p_1+p_2$, $p_2=0$ (на Γ).

Для перехода от (1.12), (1.13) к системе уравнений с двумя искомыми функциями введем новые элементы:
$$P_{h,S}\left[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\right]:=\rho_0^{-1}\nabla\Psi,\qquad P_{h,S}\left[N^2(x_3)\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\vec{e}_3\right]:=\rho_0^{-1}\nabla\eta. \tag{1.15}$$

Тогда (1.13) дает интеграл Коши—Лагранжа
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+p_1+\Psi+\eta-F=c(t)\quad(\text{в }\Omega), \tag{1.16}$$
где $c(t)$ — произвольная функция времени, $P_{h,S}\psi_0=\rho_0^{-1}\nabla F$.

Рассмотрим (1.16) на Γ_2 и воспользуемся равенством
$$\begin{aligned}p_1&=g\rho_0(0)v_3+\rho_1\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2}=g\rho_0(0)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)+\rho_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)=\\ &=g\rho_0(0)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)+\rho_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)=g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+\rho_1\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)\quad(\text{на }\Gamma_2);\end{aligned}$$
получим
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+\rho_1\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)+\Psi+\eta=F+c(t)\quad(\text{на }\Gamma_2). \tag{1.17}$$

Аналогично, получаем
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+\Psi+\eta=F+c(t)\quad(\text{на }\Gamma_1). \tag{1.18}$$

Соотношения (1.17) и (1.18) вместе с (1.12) дают два уравнения для определения двух искомых функций $\vec{w}(t,x)$ и $\Phi(t,x)$, при этом учитываются связи (1.15), а также ограничения, следующие из (1.12)–(1.14). Таким образом, начально-краевую задачу (1.8) перепишем в виде:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} + P_0\Big[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3\right)\vec{e}_3\Big] = P_0\psi_0 \quad (\,\text{в}\,\Omega\,),\\
&\operatorname{div}\vec{w} = 0 \quad (\,\text{в}\,\Omega\,), \quad \vec{w}\cdot\vec{n} = 0 \quad (\,\text{на }\ \partial\Omega\,),\\
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на}\,\Gamma_1\,),\\
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + \rho_1\rho_0^{-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на}\,\Gamma_2\,),\\
&\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi) = 0 \quad (\,\text{в}\ \ \Omega\,), \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi\cdot\vec{n} = 0 \quad (\,\text{на}\ \ S\,),\\
&\int_\Gamma \Phi\, d\Gamma = 0, \quad \int_\Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\, d\Gamma = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial t}w(0,x) = P_0\vec{u}^0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}(0,\hat{x})\right)_\Gamma = \left[\left(P_{h,S}\vec{u}^0(x)\right)\cdot\vec{n}\right]_\Gamma,\\
&\vec{w}(0,x) = P_0\vec{v}^0, \quad \left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}(0,\hat{x})\right)_\Gamma = \zeta^0(\hat{x}) \quad (\,\hat{x}\in\Gamma\,).
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

1.4. Переход к системе дифференциально-операторных уравнений. Напомним, что отклонение $v_3|_\Gamma = \left(\rho_0^{-1}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3\right)_\Gamma$ частиц подвижной поверхности должно удовлетворять условию сохранения объема жидкости при колебаниях:

$$
\int_\Gamma v_3\, d\Gamma = \int_\Gamma \left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3\right) d\Gamma = 0 \implies \int_\Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\, d\Gamma = 0,
$$

так как $w_3|_\Gamma = 0$, $\rho_0^{-1}|_\Gamma = \mathrm{const}$. Это же условие является необходимым условием разрешимости задачи Неймана

$$
\begin{gathered}
\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi) = 0 \quad (\,\text{в}\ \ \Omega\,), \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi\cdot\vec{n} = 0 \quad (\,\text{на}\ \ S\,),\\
\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} = \psi \quad (\,\text{на}\ \ \Gamma\,), \quad \int_\Gamma \psi\, d\Gamma = 0.
\end{gathered}
\tag{1.20}
$$

Функцию $\psi = \rho_0^{-1}(0)\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_3}\Big|_\Gamma$ будем рассматривать как элемент пространства $H = L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma)\ominus\{1_\Gamma\}$ и искать в виде пары функций $\psi = (\psi_1;\psi_2)$, где $\psi_1 = \psi|_{\Gamma_1}$ и $\psi_2 = \psi|_{\Gamma_2}$, т. е. функций, заданных на соответствующих областях Γ_1 и Γ_2.

Рассмотрим следующие подпространства пространства H:

$$
H_1 := \{\ (\psi_1;\psi_2)\ |\ \psi_1 \in L_2(\Gamma_1)\ominus\{1_{\Gamma_1}\}, \psi_2 \equiv 0\ \}, \tag{1.21}
$$

$$
H_2 := \{\ (\psi_1;\psi_2)\ |\ \psi_2 \in L_2(\Gamma_2)\ominus\{1_{\Gamma_2}\}, \psi_1 \equiv 0\ \}. \tag{1.22}
$$

Очевидно, что пространства H_1 и H_2 ортогональны относительно скалярного произведения в $L_2(\Gamma)$. Тогда пространство H можно разложить в ортогональную сумму трех пространств:

$$
H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3, \tag{1.23}
$$

где H_3 есть одномерное подпространство пространства H, натянутое на вектор $\widehat{\varphi}$:

$$
H_3 = \{\ \widehat{v}\ |\ \widehat{v} = \alpha\widehat{\varphi}, \quad \forall\,\alpha\in\mathbb{C}, \quad \widehat{\varphi} = (\operatorname{mes}\Gamma_2; -\operatorname{mes}\Gamma_1)\ \}. \tag{1.24}
$$

Введем действующие в пространстве H ортопроекторы P_1, P_2 и P_3 на подпространства H_1, H_2 и H_3, соответственно. Они будут действовать по следующим правилам:

$$
P_1 u = (u_1 - \tilde{u}_1; 0), \quad \tilde{u}_1 = (\operatorname{mes}\Gamma_1)^{-1}\int_{\Gamma_1} u_1\, d\Gamma_1, \tag{1.25}
$$

$$P_2 u = (0; u_2 - \tilde{u}_2), \quad \tilde{u}_2 = (\operatorname{mes}\Gamma_2)^{-1} \int_{\Gamma_2} u_2\, d\Gamma_2, \tag{1.26}$$

$$P_3 u = (I - P_1 - P_2)\, u = (\tilde{u}_1; \tilde{u}_2)\,. \tag{1.27}$$

Цель дальнейших построений — перейти от начально-краевой задачи (1.19) к задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в некотором гильбертовом пространстве.

Граничные условия в (1.19) на Γ_1 и Γ_2 можно записать покомпонентно в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\rho_0\psi_1 + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на } \Gamma_1\,), \\ &\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\rho_0\psi_2 + \rho_1\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на } \Gamma_2\,). \end{aligned} \tag{1.28}$$

Перейдем к построению потенциала Φ в области Ω, выразив его через $\psi = \rho_0^{-1}(0)\left.\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right|_\Gamma$. Так как $\rho_0^{-1}\nabla\Phi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$, то функция Φ является решением задачи Неймана (1.20).

Будем использовать в дальнейшем знак «$\widetilde{\ }$» для обозначения среднего интегрального значения функции, заданной на Γ или ее части (см. (1.25), (1.26)).

Для получения общего вида функции Φ, учитывающего представление ψ в виде

$$\psi = \Big(\psi_1 - \widetilde{\psi}_1; 0\Big) + \Big(0; \psi_2 - \widetilde{\psi}_2\Big) + \Big(\widetilde{\psi}_1; \widetilde{\psi}_2\Big) =: P_1\psi + P_2\psi + P_3\psi, \tag{1.29}$$

рассмотрим три вспомогательные задачи.

Вспомогательная задача I. *Найти обобщенное решение* $\Phi = \Phi_1$ *задачи* (1.20) *при* $\psi = (\psi_1 - \widetilde{\psi}_1; 0) = P_1\psi \in H_1$:

$$\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi_1) = 0 \quad (\textit{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi_1\cdot\vec{n} = 0 \quad (\textit{на } S), \qquad \int_\Gamma \Phi_1\, d\Gamma = 0,$$

$$\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3} = \psi_1 - \widetilde{\psi}_1 \quad (\textit{на } \Gamma_1), \qquad \rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3} = 0 \quad (\textit{на } \Gamma_2). \tag{1.30}$$

Так как $H_1 \subset H$, то необходимое условие разрешимости задачи (1.30) выполнено, а значит, эта задача имеет единственное решение (см., например, [6, с. 46]) $\Phi_1 = \Phi_1(x)$ из пространства $H^1_\Gamma(\Omega, \rho_0)$.

Введем оператор T_1, который ставит в соответствие функции $P_1\psi$ решение задачи (1.30):

$$\Phi_1 = \Phi_1|_\Omega =: T_1 P_1\psi = T_1(\psi_1 - \widetilde{\psi}_1; 0) =: T_1 u_1, \qquad u_1 := P_1\psi \in H_1. \tag{1.31}$$

Рассмотрим теперь значения функции Φ_1 на границе Γ. Введем оператор следа на границе Γ:

$$\gamma\,(\Phi_1|_\Omega) := \Phi_1|_\Gamma \tag{1.32}$$

и представим функцию $\Phi_1|_\Gamma$ в виде суммы ее проекций на подпространства H_1, H_2 и H_3:

$$\Phi_1|_\Gamma = P_1\gamma T_1 P_1\psi + P_2\gamma T_1 P_1\psi + P_3\gamma T_1 P_1\psi =: C_{11}u_1 + C_{21}u_1 + C_{31}u_1. \tag{1.33}$$

Вспомогательная задача II. *Найти обобщенное решение* $\Phi = \Phi_2$ *задачи* (1.20) *при* $\psi = (0; \psi_2 - \widetilde{\psi}_2) = P_2\psi \in H_2$:

$$\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi_2) = 0 \quad (\textit{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi_2\cdot\vec{n} = 0 \quad (\textit{на } S), \qquad \int_\Gamma \Phi_2\, d\Gamma = 0,$$

$$\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3} = 0 \quad (\textit{на } \Gamma_1), \qquad \rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3} = \psi_2 - \widetilde{\psi}_2 \quad (\textit{на } \Gamma_2). \tag{1.34}$$

Вспомогательная задача II имеет единственное решение $\Phi_2 = \Phi_2(x) \in H^1_\Gamma(\Omega, \rho_0)$. Введем оператор T_2, который ставит в соответствие функции $P_2\psi$ решение задачи (1.34):

$$\Phi_2 = \Phi_2|_\Omega =: T_2 P_2\psi = T_2(0; \psi_2 - \widetilde{\psi}_2) =: T_2 u_2, \quad u_2 = P_2\psi \in H_2. \tag{1.35}$$

Снова рассмотрим значения функции Φ_2 на границе Γ и представим функцию $\Phi_2|_\Gamma$ в виде суммы проекций этой функции на подпространства H_1, H_2 и H_3:

$$\Phi_2|_\Gamma = P_1\gamma T_2 P_2\psi + P_2\gamma T_2 P_2\psi + P_3\gamma T_2 P_2\psi =: C_{12}u_2 + C_{22}u_2 + C_{32}u_2. \tag{1.36}$$

Вспомогательная задача III. *Найти обобщенное решение* $\Phi = \Phi_3$ *задачи* (1.20) *при* $\psi = (\widetilde{\psi}_1; \widetilde{\psi}_2) = P_3\psi \in H_3$:

$$\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi_3) = 0 \quad (\textit{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi_3\cdot\vec{n} = 0 \quad (\textit{на } S),$$
$$\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_3} = P_3\psi \quad (\textit{на } \Gamma), \qquad \int\limits_\Gamma \Phi_3\, d\Gamma = 0. \tag{1.37}$$

Так как H_3 — одномерное подпространство, $H_3 = \{\alpha\widehat{\varphi}\}$, $\alpha\in\mathbb{C}$, $\widehat{\varphi} = (\operatorname{mes}\Gamma_2; -\operatorname{mes}\Gamma_1)$, то достаточно рассмотреть граничную задачу (1.37) с функцией $\widehat{\varphi}$ вместо $P_3\psi$, т. е. с граничными условиями на Γ_1 и Γ_2 следующего вида:

$$\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_3} = \operatorname{mes}\Gamma_2 \quad (\text{на } \Gamma_1), \qquad \rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_3} = -\operatorname{mes}\Gamma_1 \quad (\text{на } \Gamma_2). \tag{1.38}$$

Задача (1.34) имеет единственное решение $\Phi_3 = \alpha\widehat{\Phi} \in H^1_\Gamma(\Omega, \rho_0)$, где $\widehat{\Phi}$ — решение задачи (1.37) с граничными условиями (1.38). Аналогично предыдущему, введем оператор T_3, который ставит в соответствие функции $P_3\psi$ решение задачи (1.37)-(1.38):

$$\Phi_3 =: T_3P_3\psi =: T_3u_3, \quad u_3 = P_3\psi \in H_3. \tag{1.39}$$

Представим функцию $\Phi_3|_\Gamma$ в виде суммы ее проекций на подпространства H_1, H_2 и H_3:

$$\Phi_3|_\Gamma = P_1\gamma T_3P_3\psi + P_2\gamma T_3P_3\psi + P_3\gamma T_3P_3\psi =: C_{13}u_3 + C_{23}u_3 + C_{33}u_3. \tag{1.40}$$

В этом случае операторы C_{13}, C_{23} и C_{33} — одномерные.

В дальнейшем все функции, зависящие от t, будем считать функциями переменной t со значениями в соответствующем гильбертовом пространстве; в связи с этим в уравнениях задачи заменим $\partial/\partial t$ на d/dt.

В соответствии с разложением (1.29) представим решение исходной задачи (1.20) в виде суммы решений трех вспомогательных задач:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3. \tag{1.41}$$

Перепишем соотношения (1.28) в виде пары условий:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\Phi|_{\Gamma_1};\Phi|_{\Gamma_2}) + \rho_0 g(\psi_1;\psi_2) + \rho_1\frac{d^2}{dt^2}(0;\psi_2) + (\Psi|_{\Gamma_1};\Psi|_{\Gamma_2}) + (\eta|_{\Gamma_1};\eta|_{\Gamma_2}) = (F|_{\Gamma_1};F|_{\Gamma_2}) + (c(t);c(t)), \tag{1.42}$$

и рассмотрим его как дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве

$$H = H_0 \oplus H_2 \oplus H_3$$

относительно искомых функций $u_1(t)$, $u_2(t)$ и $u_3(t)$. Предварительно преобразуем отдельные группы слагаемых в (1.38), чтобы можно было ввести операторные матрицы, действующие на искомый вектор-столбец $u := (u_1; u_2; u_3)^t$.

Прежде всего, в силу (1.33), (1.36), (1.40) и (1.41) имеем

$$(\Phi|_{\Gamma_1};\Phi|_{\Gamma_2}) = \Phi|_\Gamma = \Phi_1|_\Gamma + \Phi_2|_\Gamma + \Phi_3|_\Gamma =$$
$$= C_{11}u_1 + C_{21}u_1 + C_{31}u_1 + C_{12}u_2 + C_{22}u_2 + C_{32}u_2 + C_{13}u_3 + C_{23}u_3 + C_{33}u_3, \tag{1.43}$$

где элементы C_{ik} определены формулами (1.33), (1.36) и (1.40). Поэтому согласно этим определениям имеем, соответственно,

$$C_{11}u_1 + C_{12}u_2 + C_{13}u_3 \in H_1, \quad C_{21}u_1 + C_{22}u_2 + C_{23}u_3 \in H_2, \quad C_{31}u_1 + C_{32}u_2 + C_{33}u_3 \in H_3.$$

Далее, очевидно соотношение

$$(\psi_1;\psi_2) = \left(\psi_1 - \widetilde{\psi}_1; 0\right) + \left(0; \psi_2 - \widetilde{\psi}_2\right) + \left(\widetilde{\psi}_1; \widetilde{\psi}_2\right) = u_1 + u_2 + u_3. \tag{1.44}$$

Пусть P_H — ортопроектор на $H = L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$. Тогда простые вычисления показывают, что

$$P_H(0;\psi_2) = \left(0;\psi_2 - \widetilde{\psi}_2\right) + P_H\left(0;\widetilde{\psi}_2\right) = \left(0;\psi_2 - \widetilde{\psi}_2\right) + \alpha\left(\widetilde{\psi}_1;\widetilde{\psi}_2\right) = u_2 + \alpha u_3,$$

$$0 < \alpha := \frac{\operatorname{mes}\Gamma_1}{\operatorname{mes}\Gamma_1 + \operatorname{mes}\Gamma_2} < 1.$$

Спроектируем обе части (1.42) на подпространства H_1, H_2 и H_3, соответственно.

Введем ряд обозначений:

$$P_H(F|_{\Gamma_1};F|_{\Gamma_2}) = (F|_{\Gamma_1};F|_{\Gamma_2}) = P_1(F|_{\Gamma_1};F|_{\Gamma_2}) + P_2(F|_{\Gamma_1};F|_{\Gamma_2}) + P_3(F|_{\Gamma_1};F|_{\Gamma_2}) =: f_1 + f_2 + f_3,$$

$$P_H(\Psi|_{\Gamma_1};\Psi|_{\Gamma_2}) = (\Psi|_{\Gamma_1};\Psi|_{\Gamma_2}) = P_1(\Psi|_{\Gamma_1};\Psi|_{\Gamma_2}) + P_2(\Psi|_{\Gamma_1};\Psi|_{\Gamma_2}) + P_3(\Psi|_{\Gamma_1};\Psi|_{\Gamma_2}) =: \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3,$$

$$\Psi_i =: B_{2,i}\vec{w}, \qquad \rho_0^{-1}\nabla\Psi_i = P_{h,S}\left[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\right], \qquad i = \overline{1,3}; \tag{1.45}$$

$$P_H(\eta|_{\Gamma_1};\eta|_{\Gamma_2}) = (\eta|_{\Gamma_1};\eta|_{\Gamma_2}) = P_1(\eta|_{\Gamma_1};\eta|_{\Gamma_2}) + P_2(\eta|_{\Gamma_1};\eta|_{\Gamma_2}) + P_3(\eta|_{\Gamma_1};\eta|_{\Gamma_2}) =: \eta_1 + \eta_2 + \eta_3,$$

$$\eta_i =: B_i u_i, \qquad \rho_0^{-1}\nabla\eta_i = P_{h,S}\left[N^2(x_3)\left((U_i u_i)\vec{e}_3\right)\vec{e}_3\right], \qquad i = \overline{1,3}; \tag{1.46}$$

$$B_{11}\vec{w} := P_0\left[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\right], \quad B_{1,i}u_i := P_0\left[N^2(x_3)\left((U_i u_i)\vec{e}_3\right)\vec{e}_3\right], \qquad i = \overline{1,3}. \tag{1.47}$$

Здесь через U_i $(i = \overline{1,3})$ обозначен оператор, который посредством решения вспомогательной задачи (см. (1.30), (1.34), (1.37)) ставит в соответствие элементу u_i функцию $\rho_0^{-1}\nabla\Phi_i \in \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)$.

Перепишем первое уравнение (1.19) и (1.42) с учетом замен (1.45)–(1.47) в виде системы уравнений, которая в векторно-матричной форме принимает вид:

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ u \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \vec{w} \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0\psi_0 \\ f \end{pmatrix}, \tag{1.48}$$

$$(\vec{w};u)^t \in \mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus H, \qquad u = (u_1;u_2;u_3)^t \in H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3,$$

$$f = (f_1;f_2;f_3)^t, \quad I := \operatorname{diag}(\rho_0 g I_1;\rho_0 g I_2;\rho_0 g I_3),$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\rho_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}, \quad B_{21} := \begin{pmatrix} B_{2,1} \\ B_{2,2} \\ B_{2,3} \end{pmatrix}, \tag{1.49}$$

$$B_{12} := \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \end{pmatrix}, \quad B_{22} := \operatorname{diag}(B_1;B_2;B_3).$$

Начальные условия задачи (1.19) порождают начальные условия для уравнения (1.48):

$$\vec{w}(0) = P_0\vec{v}^0, \quad u_i(0) = P_i\zeta^0, \quad i = \overline{1,3}; \tag{1.50}$$

$$\vec{w}'(0) = P_0\vec{u}^0, \quad u_i'(0) = P_i\left(\left(P_{h,S}\vec{u}^0\right)\cdot\vec{n}\right), \quad i = \overline{1,3}. \tag{1.51}$$

Итогом рассмотрения задачи (1.19) в этом пункте является

Теорема 1.1. *Начально-краевая задача* (1.19) *равносильна задаче Коши* (1.48)–(1.51) *для дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$.

1.5. Свойства операторных коэффициентов задачи.

Лемма 1.2. *Оператор*

$$C := \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

— самосопряженный компактный и положительный оператор, действующий в пространстве $H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$.

Доказательство. Все операторы C_{ij} $(i,j=\overline{1,3})$, из которых состоит оператор C, являются произведением ограниченных операторов ортогонального проектирования на компактный оператор γT_j (см., например, [6]). Следовательно, все C_{ij} $(i,j=\overline{1,3})$ являются компактными операторами, а значит, и оператор C является компактным.

Докажем, что оператор C является самосопряженным. Обозначим через Φ решение задачи Неймана (1.20) при $\psi = u = (u_1;u_2;u_3)^t$. Для $\forall\, u,\, v \in H$ имеем:

$$(Cu,v)_H = \left(\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right) =$$
$$= (C_{11}u_1,v_1)+(C_{12}u_2,v_1)+(C_{13}u_3,v_1)+(C_{21}u_1,v_2)+(C_{22}u_2,v_2)+(C_{23}u_3,v_2)+$$
$$+(C_{31}u_1,v_3)+(C_{32}u_2,v_3)+(C_{33}u_3,v_3) = [(C_{11}u_1,P_1v)+(C_{21}u_1,P_2v)+(C_{31}u_1,P_3v)]+$$
$$+[(C_{12}u_2,P_1v)+(C_{22}u_2,P_2v)+(C_{32}u_2,P_3v)]+[(C_{13}u_3,P_1v)+(C_{23}u_3,P_2v)+(C_{33}u_3,P_3v)] =$$
$$= \left(\Phi_1|_\Gamma, v\right)_H + \left(\Phi_2|_\Gamma, v\right)_H + \left(\Phi_3|_\Gamma, v\right)_H .$$

Обозначим через Υ решение задачи Неймана (1.20) при $\psi = v = (v_1;v_2;v_3)^t$. Тогда, учитывая условия задачи (1.20), имеем:

$$(Cu,v)_H = \int\limits_\Gamma \Phi_1{\cdot}v\, d\Gamma + \int\limits_\Gamma \Phi_2{\cdot}v\, d\Gamma + \int\limits_\Gamma \Phi_3{\cdot}v\, d\Gamma = \int\limits_\Gamma \Phi\cdot v\, d\Gamma = \int\limits_\Gamma \Phi\cdot\rho_0^{-1}\frac{\partial\Upsilon}{\partial x_3}\, d\Gamma =$$
$$= \int\limits_\Gamma \Phi\cdot\rho_0^{-1}\frac{\partial\Upsilon}{\partial x_3}\, d\Gamma + \int\limits_S \Phi\cdot\rho_0^{-1}\frac{\partial\Upsilon}{\partial x_3}\, dS = \int\limits_{\partial\Omega} \Phi\cdot\rho_0^{-1}\frac{\partial\Upsilon}{\partial x_3}\, dS =$$
$$= \int\limits_\Omega \Phi\cdot\nabla\left(\rho_0^{-1}\nabla\Upsilon\right)\, d\,\Omega + \int\limits_\Omega \rho_0(x_3)\cdot\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\right)\cdot\left(\rho_0^{-1}\nabla\Upsilon\right)\, d\,\Omega =$$
$$= \int\limits_\Omega \rho_0(x_3)\cdot\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\right)\cdot\left(\rho_0^{-1}\nabla\Upsilon\right)\, d\,\Omega = \ldots = (u,Cv)_H.$$

Так как оператор C является ограниченным, то из полученного выражения следует, что оператор C — самосопряженный.

Рассмотрим теперь форму оператора C:

$$(Cu,u)_H = \int\limits_\Omega \rho_0(x_3)\cdot\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\right)\cdot\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\right)\, d\,\Omega \geqslant 0.$$

Если $(Cu,u)_H = 0$, то $\Phi \equiv \varphi = \mathrm{const}$. Тогда из условия нормировки функции Φ

$$\int\limits_\Gamma \Phi\, d\Gamma = 0$$

получаем, что $\Phi \equiv 0$, а следовательно, и $u = 0$. Отсюда приходим к выводу, что оператор C положительный. Лемма доказана. □

Лемма 1.3. *Оператор*

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

— самосопряженный, ограниченный и неотрицательный оператор, действующий в пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus H_1\oplus H_2\oplus H_3$.

Доказательство следует из равенства

$$(\mathcal{B}\mathcal{X},\mathcal{X})_\mathcal{H} = (B_{11}\vec{w},\vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} + \sum_{i=1}^{3}(B_{1,i}u_i,\vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} + \sum_{i=1}^{3}(B_{2,i}\vec{w},u_i)_{H_i} + \sum_{i=1}^{3}(B_iu_i,u_i)_{H_i} =$$
$$= \int\limits_\Omega N^2(x_3)\rho_0(x_3)\left|w_3 + \left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\cdot\vec{e}_3\right)\right|^2\, d\Omega.$$

Замечание 1.1. В уравнении (1.48) оператор A, с учетом его определения и леммы 1.2, удовлетворяет следующим свойствам: $0 < A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ — пространство ограниченных операторов, действующих в пространстве $\mathcal{H}$. Однако операторный коэффициент при искомой функции не является положительно определенным оператором, а именно

$$0 \leqslant \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Данный факт не позволяет воспользоваться известной теоремой о существовании и единственности сильного решения (см., например, [5, с. 44]).

2. Теорема существования сильного решения

2.1. Вспомогательные утверждения. Введем пространства:

$$H_1^+ = H_1^{1/2} := \widetilde{H}_{\Gamma_1}^{1/2} = \left\{ v \in H^{1/2}(\Gamma) : \, v \equiv 0 \ (\text{на } \Gamma_2)\,, \int\limits_{\Gamma_1} v \, d\Gamma_1 = 0 \right\}, \tag{2.1}$$

$$H_2^+ = H_2^{1/2} := \widetilde{H}_{\Gamma_2}^{1/2} = \left\{ v \in H^{1/2}(\Gamma) : \, v \equiv 0 \, (\text{на } \Gamma_1)\,, \int\limits_{\Gamma_2} v \, d\Gamma_2 = 0 \right\}, \tag{2.2}$$

$$H_3 = H_3^{1/2} = H^{1/2}(\Gamma) \cap H_3, \qquad H_i^- = \left(H_i^+\right)^*, \ i = \overline{1,2}, \quad H_3^- = (H_3)^*. \tag{2.3}$$

Построение этих пространств и изучение их свойств проводится аналогично случаю, когда граница области состоит из жесткой стенки и подвижной поверхности одного типа (см, например, [6]). Как следствие, имеем следующую лемму о свойствах операторов C_{ij}.

Лемма 2.1. *Оператор C_{ij} является ограниченным оператором, действующим из H_j^- в H_i^+, при этом он является компактным как оператор, действующий из H_j^- в H_i. Оператор C_{ii}^{-1} является ограниченным как оператор, действующий из H_i^+ в H_i^-, при этом $C_{ii}^{-1/2}$ ограниченно действует из H_i^+ в H_i и из H_i в H_i^-, $i, j = \overline{1,3}$.*

Обозначим пространства $E_1 := H_1$ и $E_2 := \widehat{H}_2 = H_2 \oplus H_3$. Оснащение H_1 имеет вид (см. (2.1)) $E_1^+ = H_1^+ \subset E_1 = H_1 \subset E_1^- = H_1^-$. Для E_2 имеем: $E_2^+ \subset E_2 \subset E_2^-$, где

$$E_2^+ := \{ (\widetilde{\psi}_1; \psi_2) \,|\, \widetilde{\psi}_1 = \text{const}, \quad \psi_2 \in H^{1/2}(\Gamma_2)\,, \quad \int\limits_{\Gamma_1} \widetilde{\psi}_1 \, d\Gamma_1 + \int\limits_{\Gamma_2} \psi_2 \, d\Gamma_2 = 0 \}, \quad E_2^- := \left(E_2^+\right)^*.$$

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $E = E_1 \oplus E_2$ операторную матрицу (см. (1.49))

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \widehat{J} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{C}_{11} & \widehat{C}_{12} \\ \widehat{C}_{21} & \widehat{C}_{22} \end{pmatrix}, \qquad \widehat{J} = \text{diag}\,(\rho_1; \alpha\rho_1)\,, \tag{2.4}$$

$$\widehat{C}_{11} = C_{11}, \quad \widehat{C}_{12} = \begin{pmatrix} C_{12} & C_{13} \end{pmatrix}, \quad \widehat{C}_{21} = \begin{pmatrix} C_{21} \\ C_{31} \end{pmatrix}, \quad \widehat{C}_{22} = \begin{pmatrix} C_{22} & C_{23} \\ C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

где операторы (согласно их определениям и леммам 1.2, 2.1) обладают следующими свойствами.

1. Оператор $\widehat{J} : E_2 \to E_2$ является ограниченным и положительно определенным.
2. $\widehat{C}_{ij}$ действует ограниченно из E_j^- в E_i^+ $(i, j = 1, 2)$. Оператор $\widehat{C}_{ij} : E_j^- \to E_i$ является при этом компактным. Оператор $\widehat{C}_{ii}^{-1} : E_i^+ \to E_i^-$ также ограниченный.
3. Оператор A ограниченно действует из $E^- = E_1^- \times E_2$ в $E^+ = E_1^+ \times E_2$, причем сужение оператора A на $E = E_1 \times E_2$ является ограниченным положительным самосопряженным оператором.

2.2. Теорема существования сильного решения вспомогательной задачи. Перепишем (1.48) в следующем виде:

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ Au \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_0 + B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & I + B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0\psi_0 \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ u \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Осуществляя замену $Au = z$ в (2.5), перейдем от задачи (1.48)–(1.51) к следующей задаче Коши:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \mathcal{A}v = g + Rv, \quad v(0) = (\vec{w}(0); z(0))^t, \quad v^{'}(0) = (\vec{w}^{'}(0); z^{'}(0))^t \tag{2.6}$$

$$\mathcal{A} := I_B F, \quad R = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = (P_0\psi_0; f)^t, \quad v = (\vec{w}; z)^t.$$

$$I_B = \begin{pmatrix} I_0 + B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & I + B_{22} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(I_B F) = \mathcal{D}(F). \tag{2.7}$$

Введем эквивалентную норму в пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H$:

$$[v_1; v_2] := (I_B^{-1} v_1; v_2),$$

тогда

$$[I_B F v_1; v_2] = (F v_1; v_2) = (v_1; F v_2) = (v_1; I_B^{-1} I_B F v_2) = [v_1; I_B F v_2],$$

следовательно, $\mathcal{A} = I_B F$ — самосопряженный оператор, более того, он является неограниченным и положительно определенным оператором (см. (2.7)).

Определение 2.1. *Сильным* (по переменной t) *решением* задачи (2.6) на отрезке $[0, T]$ назовем такую функцию $v(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$, для которой выполнены следующие условия:

1°. $v(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при любом $t \in [0; T]$ и $\mathcal{A}v(t) \in C([0; T]; \mathcal{H})$;
2°. $v^{'}(t) \in C^1\left([0; T]; \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})\right)$;
3°. $v^{''}(t) \in C([0; T]; \mathcal{H})$;
4°. выполнено уравнение (2.6), где все слагаемые — функции из $C([0; T]; \mathcal{H})$, и начальные условия.

Теорема 2.1. *Если выполнены условия*

$$v(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(I_B F) = \mathcal{D}(F), \qquad v'(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}) = \mathcal{D}((I_B F)^{1/2}) = \mathcal{D}(F^{1/2}), \tag{2.8}$$

$$f(t) \in C^1([0; T]; \mathcal{H}), \quad \mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H, \tag{2.9}$$

тогда задача (2.6) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0; T]$.

Доказательство. Если для задачи Коши

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \mathcal{A}v = g, \quad v(0) = v^0, \quad v^{'}(0) = v^1, \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}^* \gg 0, \tag{2.10}$$

выполнены условия

$$v(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad v'(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}), \quad g(t) \in C^1([0; T]; \mathcal{H}), \tag{2.11}$$

то задача (2.10) имеет единственное сильное решение $v = v_0(t)$ на отрезке $[0; T]$, выражаемое формулой (см. [5, с. 67])

$$v_0(t) = \cos(t\mathcal{A}^{1/2})v^0 + \mathcal{A}^{-1/2}\sin(t\mathcal{A}^{1/2})v^1 + \int_0^t \mathcal{A}^{-1/2}\sin\left((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\right)g(s)ds, \tag{2.12}$$

где $\cos(t\mathcal{A}^{1/2})$ и $\mathcal{A}^{-1/2}\sin(t\mathcal{A}^{1/2})$ — семейство операторных косинус-функций и синус-функций, построенное по $\mathcal{A}$ (см., например, [5, с. 48–56]).

Обозначим в (2.6)

$$\widehat{g}(t) = g(t) + Rv.$$

Считая, что $\widehat{g}(t)$ известна, и используя формулу (2.12) для решения задачи Коши (2.10), приходим к следующему интегральному уравнению Вольтерра для искомой функции $v(t)$:

$$v(t)=\cos(t\mathcal{A}^{1/2})v^0+\mathcal{A}^{-1/2}\sin(t\mathcal{A}^{1/2})v^1+\int\limits_0^t\mathcal{A}^{-1/2}\sin\Big((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\Big)g(s)ds+$$

$$+\int\limits_0^t\mathcal{A}^{-1/2}\sin\Big((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\Big)Rv(s)ds=v_0(t)+\int\limits_0^t\mathcal{A}^{-1/2}\sin\Big((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\Big)Rv(s)ds. \tag{2.13}$$

Здесь $v_0(t)$ задана формулой (2.12) и строится по данным (2.11), причем она в силу условий (2.11) является сильным решением задачи (2.10). Это означает, в частности, что

$$v_0(t)\in C^2\left([0;T];\mathcal{H}\right)\cap C^1\left([0;T];\mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})\right)\cap C\left([0;T];\mathcal{D}(\mathcal{A})\right). \tag{2.14}$$

Отметим, что $\mathcal{A}^{-1/2}\sin(t\mathcal{A}^{1/2})Rv(s)$ непрерывно дифференцируема по t (см., например, [4,10], а также [5, свойство 3, с. 51]), следовательно, уравнение (2.13) имеет решение $v(t)\in C\left([0;T];\mathcal{H}\right)$.

Оставшаяся часть доказательства теоремы сводится к проверке того, что выполнены свойства 2°, 3° и 4° из определения сильного решения задачи (2.6).

Формальное дифференцирование обеих частей (2.13) приводит к формулам

$$v'(t)=v_0'(t)+\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\mathcal{A}^{-1/2}\sin\Big((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\Big)Rv(s)ds=v_0'(t)+ \tag{2.15}$$

$$+\int\limits_0^t\frac{\partial}{\partial t}\Big\{\mathcal{A}^{-1/2}\sin\Big((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\Big)Rv(s)\Big\}\,ds=v_0'(t)+\int\limits_0^t\cos\Big((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\Big)Rv(s)\,ds;$$

$$v''(t)=v_0''(t)+\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\cos\Big((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\Big)Rv(s)=v_0''(t)+Rv(t)+ \tag{2.16}$$

$$+\int\limits_0^t\frac{\partial}{\partial t}\Big\{\cos\Big((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\Big)Rv(s)\Big\}\,ds=v_0''(t)+Rv(t)-\int\limits_0^t\mathcal{A}^{1/2}\sin\Big((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\Big)Rv(s)ds.$$

Из полученных формул (2.15) и (2.16) можно сделать следующие выводы. Так как в силу (2.14) $v_0'(t)\in C\left([0;T];\mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})\right)$, то из (2.15), а также того, что оператор-функция $\cos(t\mathcal{A}^{1/2})$ непрерывно дифференцируема по t, следует свойство 2° из определения сильного решения, т. е. $v'(t)\in C\left([0;T];\mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})\right)$. Далее, так как $v_0''(t)\in C\left([0;T];\mathcal{H}\right)$, тогда из (2.16) и того, что оператор-функция $\mathcal{A}^{-1/2}\sin(t\mathcal{A}^{1/2})$ непрерывно дифференцируема, получаем свойство 3°, т. е. $v''(t)\in C\left([0;T];\mathcal{H}\right)$.

Наконец, непосредственный подсчет показывает, что функция $v(t)$ являющаяся решением уравнения (2.13), удовлетворяет также исходному уравнению (2.6), причем все слагаемые в нем — непрерывные функции t со значениями в $\mathcal{H}$.

Заметим еще, что из (2.13) следует, что

$$v(0)=v_0(0)+0=v_0(0),$$

а из (2.15)

$$v'(0)=v_0'(0)+0=v_0'(0).$$

Теорема доказана. □

Лемма 2.2. *Если в задаче* (1.48)–(1.51) *выполнены условия*:

$$(\vec{w}^0;u^0)^t\in\mathcal{H},\quad(\vec{w}^1;u^1)^t\in\mathcal{H},\quad(P_0\psi_0;f)^t\in C^1\left([0,T];\mathcal{H}\right),\quad\mathcal{H}=\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus H, \tag{2.17}$$

то имеют место начальные условия (2.8)-(2.9) *в задаче* (2.6).

Доказательство. С учетом замены $Au=z$, пусть выполнены условия (2.8)-(2.9), тогда имеем

$$\left(\ v^0=(\vec{w}^0;z^0)^t\in\mathcal{D}(I_BF)=\mathcal{D}(F)\ \right)\quad\Longleftrightarrow\quad\Big(\vec{w}^0\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0),\ z^0=Au^0\in\mathcal{D}(A^{-1})\Big),$$

последнее условие равносильно тому, что $u^0 \in H$.

Далее,

$$\Big(\ v^1 = (\vec{w}^1; z^1)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}) = \mathcal{D}((I_B F)^{1/2}) = \mathcal{D}(F^{1/2})\ \Big) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \Big(\ \vec{w}^1 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad z^1 = Au^1 \in \mathcal{D}(A^{-1/2})\ \Big) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \Big(\ \vec{w}^1 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad A^{-1/2}Au^1 = A^{1/2}u^1 \in H\ \Big) \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(\ \vec{w}^1 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad u^1 \in H\ \Big).$$

□

2.3. Теорема существования сильного решения исходной начально-краевой задачи. Исходя из формулировок задач (1.4), (1.8) и (1.19), дадим (согласованные между собой) определения сильных по переменной t решений этих задач.

Определение 2.2. *Сильным* (по переменной t) *решением задачи* (1.4) на промежутке $[0,T]$ назовем набор функций $\vec{u}\,(t,x)$, $p\,(t,x)$, $\rho\,(t,x)$, $\zeta\,(t,\hat{x})$, для которых выполнены следующие условия:

1°. $\vec{u}\,(t) \in C^1\Big([0,T]\,; \vec{J}_{0,S}\,(\Omega,\rho_0)\Big)$, $\rho_0^{-1}\nabla p \in C\Big([0,T]\,; \vec{G}\,(\Omega,\rho_0)\Big)$, $\rho\,(t) \in C^1\left([0,T]\,; \mathfrak{L}\,(\Omega)\right)$, где $\mathfrak{L}_2(\Omega)$ — гильбертово пространство скалярных функций со скалярным произведением

$$(\varphi,\psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} := g^2 \int_\Omega \left[\rho_0(x_3)N^2(x_3)\right]^{-1}\varphi(x)\overline{\psi(x)}\,d\Omega,$$

и при любом $t \in [0,T]$ справедливо первое уравнение (1.4);

2°. $u_n = \dfrac{\partial\zeta}{\partial t} \in C\left([0,T]\,; H\right)$;

3°. выполнено граничное условие на Γ_1 и Γ_2:

$$p = g\rho_0(0)\zeta \in C\left([0,T]\,; L_2(\Gamma_1)\right),$$

$$p = g\rho_0(0)\zeta + \rho_2\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \in C\left([0,T]\,; L_2(\Gamma_2)\right),$$

где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями в $L_2(\Gamma_1)$ и $L_2(\Gamma_2)$, соответственно;

4°. выполнены начальные условия (1.4).

Определение 2.3. *Сильным* (по переменной t) *решением задачи* (1.8) на промежутке $[0,T]$ назовем набор функций $\vec{v}\,(t,x)$, $p\,(t,x)$, для которых выполнены следующие условия:

1°. $\vec{v}\,(t) \in C^2\Big([0,T]\,; \vec{J}_{0,S}\,(\Omega,\rho_0)\Big)$, $\rho_0^{-1}\nabla p \in C\Big([0,T]\,; \vec{G}\,(\Omega,\rho_0)\Big)$, и при любом $t \in [0,T]$ справедливо первое уравнение (1.8);

2°. выполнено граничное условие на Γ_1 и Γ_2:

$$p = g\rho_0(0)v_3 \in C\left([0,T]\,; L_2(\Gamma_1)\right), \quad v_3 = \vec{v}\cdot\vec{e}_3,$$

$$p = g\rho_0(0)v_3 + \rho_2\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \in C\left([0,T]\,; L_2(\Gamma_2)\right),$$

где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями в $L_2(\Gamma_1)$ и $L_2(\Gamma_2)$, соответственно;

3° выполнены связи (1.5) и (1.6);

4°. выполнены начальные условия (1.8).

Определение 2.4. *Сильным* (по переменной t) *решением задачи* (1.19) на промежутке $[0,T]$ назовем такие функции $\vec{w}(t,x)$ из $\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)$ и $\Phi\,(t,x)$ со значениями в $H^1_\Gamma\,(\Omega,\rho_0)$, для которых выполнены следующие условия:

1°. $\vec{w}\,(t) \in C^2\Big([0,T]\,; \vec{J}_0\,(\Omega,\rho_0)\Big)$;

2°. $\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma \in C^2\left([0,T]\,; H\right)$, $\Phi_\Gamma \in C^2\Big([0,T]\,; H^{1/2}_\Gamma\Big)$, для $\forall t \in [0,T]$;

3°. выполнены соотношения

$$\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2}+P_0\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)\vec{e}_3\right]=P_0\psi_0 \quad (\text{в } \Omega),$$
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+\Psi+\eta=F+c(t) \quad (\text{на } \Gamma_1),$$
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+\rho_2\rho_0^{-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)+\Psi+\eta=F+c(t) \quad (\text{на } \Gamma_2),$$

где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями соответственно в $\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)$, $L_2(\Gamma_1)$, $L_2(\Gamma_2)$, причем $\rho_0^{-1}\nabla\Phi\in C^2\left([0,T];\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)\right)$;

4°. выполнены начальные условия (1.19).

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия*

$$\vec{u}^0\in\vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0),\quad \rho^0\in\mathfrak{L}_2(\Omega),\quad \zeta^0\in H=L_2(\Gamma)\ominus\{1_\Gamma\}, \tag{2.18}$$
$$\left[\left(P_{h,S}\vec{u}^0(x)\right)\cdot\vec{n}\right]_\Gamma\in H,\quad f(t)\in C^1\left([0,T];\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)\right). \tag{2.19}$$

Тогда каждая из задач (1.4), (1.8) *и* (1.19) *имеет единственное сильное по* t *решение.*

Доказательство. Доказательство теоремы проведем по этапам, переходя последовательно от задачи (1.48)–(1.51) к (1.19), затем от (1.19) к (1.8) и от (1.8) к (1.4).

От задачи (1.48)–(1.51) *к* (1.19).

Если выполнены условия (2.18) и (2.19), то для функций

$$(\vec{w}^0;u^0)^t=(P_0v^0;u_1^0;u_2^0;u_3^0)^t,\quad u_i^0=P_i\zeta^0,\quad i=\overline{1,3},$$
$$(\vec{w}^1;u^1)^t=(P_0\vec{u}^0;P_1\zeta^1;P_2\zeta^1;P_3\zeta^1)^t,\quad P_i\zeta^1=P_i\left[(P_{h,S}\vec{u})\cdot\vec{n}\right],\quad i=\overline{1,3},$$
$$(P_0\psi_0;f)^t=(P_0\psi_0;f_1;f_2;f_3)^t,\quad f_i=P_iF_\Gamma,\quad i=\overline{1,3},$$

выполнены условия (2.17) леммы 2.2.

Действительно, для функции $\vec{w}(t,x)$

$$\left(\vec{w}^0=P_0\vec{v}^0\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0),\quad \vec{w}^1=P_0\vec{u}^0\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\right)\iff$$
$$\iff\left((w_3(0,\hat{x}))_\Gamma=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}(\vec{w}(0,x))=P_0\vec{u}^0(x)\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\right). \tag{2.20}$$

Кроме того, $\vec{w}(t)\in C^2\left([0,T];\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\right)$.

Так как $\zeta^0\in H=L_2(\Gamma)\ominus\{1_\Gamma\}$, $\left[\left(P_{h,S}\vec{u}^0(x)\right)\cdot\vec{n}\right]_\Gamma\in H$, с учетом (2.20), получаем

$$(\vec{w}^0;u^0)^t\in\mathcal{H}=\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus H,\quad (\vec{w}^1;u^1)^t\in\mathcal{H}=\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus H.$$

Далее,

$$f(t)\in C^1\left([0,T];\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)\right)\iff \psi_0\in C^1\left([0,T];\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)\right)\iff$$
$$\iff P_0\psi_0\in C^1\left([0,T];\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\right),\quad P_{h,S}\psi_0=\rho_0^{-1}\nabla F\in C^1\left([0,T];\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)\right)\iff$$
$$\iff P_0\psi_0\in C^1\left([0,T];\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\right),\quad F_\Gamma\in C^1\left([0,T];H_\Gamma^{1/2}\right),$$

и если $F_\Gamma\in H_\Gamma^{1/2}$, то $P_iF_\Gamma\in H_i$. Поэтому по лемме 2.2 получаем, что задача (1.48)–(1.51) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. Тогда

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{w}\in C\left([0,T];\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\right),\quad \frac{d^2}{dt^2}Au\in C([0,T];H). \tag{2.21}$$

Покажем, что функция $\Phi|_\Gamma\in C^2\left([0,T];H_\Gamma^{1/2}\right)$. Для этого, используя представление (2.4), перепишем второе условие (2.21) в виде двух:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\widehat{C}_{11}u_1+\widehat{C}_{12}\widehat{u}_2\right)\in C\left([0,T];H_1^+\right), \tag{2.22}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\widehat{C}_{21}u_1+\left(\widehat{J}+\widehat{C}_{22}\right)\widehat{u}_2\right)\in C\left([0,T];\widehat{H}_2\right). \tag{2.23}$$

Поскольку $\left(\widehat{J}+\widehat{C}_{22}\right)$ — ограниченный и положительно определенный, то из условия

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\widehat{J}+\widehat{C}_{22}\right)\widehat{u}_2\in C\left([0,T];\widehat{H}_2\right), \tag{2.24}$$

подействовав ограниченным оператором $\left(\widehat{J}+\widehat{C}_{22}\right)^{-1}$, получаем, что

$$\frac{d^2\widehat{u}_2}{dt^2}\in C\left([0,T];\widehat{H}_2\right). \tag{2.25}$$

Следовательно, по свойствам операторов $\widehat{C}_{ij}$ (см. после (2.4)) получаем, что

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\widehat{C}_{12}\widehat{u}_2\right)\in C\left([0,T];H_1^+\right),\quad \frac{d^2}{dt^2}\left(\widehat{C}_{22}\widehat{u}_2\right)\in C\left([0,T];\widehat{H}_2^+\right). \tag{2.26}$$

Тогда из (2.22) следует, что

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\widehat{C}_{11}u_1\right)\in C\left([0,T];H_1^+\right). \tag{2.27}$$

Подействуем слева в (2.27) оператором $\widehat{C}_{11}^{-1/2}$, ограниченным из H_1^+ в H_1; имеем:

$$\widehat{C}_{11}^{-1/2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\widehat{C}_{11}u_1\right)=\frac{d^2}{dt^2}\left(\widehat{C}_{11}^{1/2}u_1\right)\in C\left([0,T];H_1\right). \tag{2.28}$$

Далее, оператор $\widehat{C}_{11}^{-1/2}$ ограниченно действует из H_1 в H_1^-. Поэтому оператор $\widehat{C}_{21}\widehat{C}_{11}^{-1/2}$ ограничен как оператор, действующий из H_1 в $\widehat{H}_2^+$, а следовательно,

$$\widehat{C}_{21}\widehat{C}_{11}^{-1/2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\widehat{C}_{11}^{1/2}u_1\right)=\frac{d^2}{dt^2}\left(\widehat{C}_{21}u_1\right)\in C\left([0,T];\widehat{H}_2^+\right). \tag{2.29}$$

Тогда из (2.22), (2.26) и (2.29) в силу вложений $H_1^+\subset H_\Gamma^{1/2}$ и $\widehat{H}_2^+\subset H_\Gamma^{1/2}$ получаем, что

$$\Phi|_\Gamma=(\Phi|_{\Gamma_1};\Phi|_{\Gamma_2})=\widehat{C}_{11}u_1+\widehat{C}_{12}\widehat{u}_2+\widehat{C}_{21}u_1+\widehat{C}_{22}\widehat{u}_2\in C^2\left([0,T];H_\Gamma^{1/2}\right)\quad\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\quad \rho_0^{-1}\nabla\Phi\,(t,x)\in C^2\left([0,T];\vec{G}_{h,S}\,(\Omega)\right).$$

Отсюда следует, что для функции $\Phi=\Phi\,(t,x)$ выполнены уравнения и краевые условия задачи (1.19), причем в краевых условиях все функции являются непрерывными по t.

Кроме того, выполнены начальные условия

$$\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\,(0,x)\right)_\Gamma=\zeta^0\,(\hat{x})\in H,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\,(0,\hat{x})\right)_\Gamma=\left[\left(P_{h,S}\vec{u}^0(x)\right)\cdot\vec{n}\right]_\Gamma\in H,$$

а также

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\right)(0,x)=P_{h,S}\vec{u}^0\in\vec{G}_{h,S}\,(\Omega,\rho_0). \tag{2.30}$$

Значит, согласно определению 2.4, функции $\vec{w}(t,x)$ и $\Phi\,(t,x)$ является сильным (по t) решением задачи (1.19) на отрезке $[0,T]$.

От задачи (1.19) *к* (1.8). Убедимся теперь, что из доказанных фактов следует существование сильного (по t) решения задачи (1.8). Следуя обратному ходу преобразований (см. (1.11)), введем по сильному решению $\vec{w}(t,x)$ и $\Phi\,(t,x)$ задачи (1.19) функции $\vec{v}\,(t,x)$ и $p\,(t,x)$:

$$\vec{v}(t,x)=\vec{w}(t,x)+\rho_0^{-1}\nabla\Phi(t,x)\in C^2\left([0,T];\vec{J}_{0,S}\,(\Omega,\rho_0)\right).$$

Так как

$$\vec{w}(t,x)\in C^2\left([0,T];\vec{J}_0\,(\Omega,\rho_0)\right),\quad \rho_0^{-1}\nabla\Phi(t,x)\in C^2\left([0,T];\vec{G}_{h,S}\,(\Omega,\rho_0)\right),$$

$$p_1|_{\Gamma_1} = g\rho_0(0)v_3|_{\Gamma_1} = g\rho_0(0)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_{\Gamma_1} \in C\left([0,T]\,; L_2(\Gamma_1)\right),$$

$$p_1|_{\Gamma_2} = g\rho_0 v_3|_{\Gamma_2} + \rho_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}v_3|_{\Gamma_2} = g\rho_0\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_{\Gamma_2} + \rho_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_{\Gamma_2} \in C\left([0,T]\,; L_2(\Gamma_2)\right),$$

то $\rho_0^{-1}\nabla p_1(x,t) \in C\left([0,T]; \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)\right)$, и тогда

$$\rho_0^{-1}\nabla p(t,x) = \rho_0^{-1}\nabla p_1(t,x) + \rho_0^{-1}\nabla p_2(t,x) \in C\left([0,T]; \vec{G}(\Omega,\rho_0)\right),$$

Далее, начальные условия задачи (1.19) порождают начальные условия задачи (1.8):

$$v_3(0,\hat{x}) = \zeta^0(\hat{x}) \in H, \quad \frac{\partial}{\partial t}\vec{v}(0,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{w} + \rho_0^{-1}\nabla\Phi\right)(0,x) = \vec{u}^0 \in \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0).$$

От задачи (1.20) *к* (1.4). Опираясь на доказанные факты выше, учитывая связи (1.5), (1.6), легко проверить, что при условиях теоремы задача (1.4) имеет сильное (по t) решение в смысле определения 2.2. □

2.4. Заключительные замечания.

Замечание 2.1. Теорему существования сильного решения задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения (2.6) можно доказать также, опираясь на следующие преобразования, изложенные в [8, с. 291–293], применительно к уравнению

$$v'' + I_B F v = g + Rv, \tag{2.31}$$

рассматриваемому в гильбертовом пространстве H.

Введем новые искомые функции

$$F^{1/2}v =: u, \quad u' = F^{1/2}v' = F^{1/2}w, \quad v' = w, \tag{2.32}$$

и перейдем к системе уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\vec{w}\\ u\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & -I_BF^{1/2}\\ F^{1/2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{w}\\ u\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}g + RF^{-1/2}u\\ 0\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix}I_B & 0\\ 0 & I_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -F^{1/2}\\ F^{1/2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{w}\\ u\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}g + RF^{-1/2}u\\ 0\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{2.33}$$

Здесь оператор $\mathrm{diag}(I_B; I_2)$ ограничен и положительно определен, а оператор

$$\begin{pmatrix}0 & -F^{1/2}\\ F^{1/2} & 0\end{pmatrix} = i\begin{pmatrix}0 & iF^{1/2}\\ -iF^{1/2} & 0\end{pmatrix}$$

является генератором унитарной группы операторов, действующей в пространстве $H \oplus H$. Поэтому произведение таких операторов обладает таким же свойством в пространстве с эквивалентной нормой, определяемой оператором $\mathrm{diag}(I_B^{-1}; I_2)$.

Далее, дополнительное слагаемое, определяемое выражением $(RF^{-1/2}u; 0)^t$, соответствует ограниченному возмущению генератора унитарной и потому сильно непрерывной группы операторов. Поэтому операторный коэффициент в полученной задаче Коши является генератором сильно непрерывной группы операторов. Значит, если выполнены условия

$$F^{1/2}v^0 = u^0 \in \mathcal{D}(F^{1/2}) \iff v^0 \in \mathcal{D}(F), \ v^1 = w^0 \in \mathcal{D}(F^{1/2}), \quad g(t) \in C^1\left([0,T]; H\right),$$

то задача (2.33) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$ (теорема 2.1).

Замечание 2.2. Теорему 2.1 можно доказать также, опираясь на тот факт, что в задаче (2.31) оператор I_BF является самосопряженным и положительно определенным в пространстве с эквивалентной нормой (см. п. 2.2). Поэтому он является генератором семейства косинус-функций, действующих в этом пространстве (см. [3, с. 175–177]). Далее, так как оператор R из (2.6) ограничен, то возмущенный оператор $I_BF - R$, согласно [3, теорема 8.5, с. 177], также является генератором семейства косинус-функций. Отсюда снова следует, что при выполнении условий (2.8), (2.9) задача (2.6) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$.

Авторы благодарят Д. А. Закору за внимание к работе, замечания и полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Габов С. А.* Об одной задаче гидродинамики идеальной жидкости, связанной с флотацией// Дифф. уравн. — 1986. — *24*, № 1. — С. 16–21.
2. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Математические задачи динамики флотирующей жидкости// Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. — 1990. — *28*. — С. 3–86.
3. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Выща школа, 1989.
4. *Иванов И. В., Мельников И. В., Филинков А. И.* Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. — М.: Физматлит, 1995.
5. *Копачевский Н. Д.* Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве. Специальный курс лекций. — Симферополь: ФЛП «Бондаренко О. А.», 2012.
6. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
7. *Копачевский Н. Д., Цветков Д. О.* Колебания стратифицированных жидкостей// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — *29*. — С. 103–130.
8. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
9. *Солдатов М. А.* Колебания жидкости в бассейне, частично покрытом льдом// Уч. зап. СГУ. — 2000. — *12*, № 2. — С. 80–83.
10. *Sowa M.* Cosine operator functions// Rozpr. Math. — 1966. — *49*. — С. 1–47.

Н. Д. Копачевский
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, г. Симферополь, пр. Академика Вернадского, д. 4
E-mail: kopachevsky@list.ru

Д. О. Цветков
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, г. Симферополь, пр. Академика Вернадского, д. 4
E-mail: tsvetdo@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-3-573-590 UDC 517.98

Small Motions of an Ideal Stratified Fluid in a Basin Covered with Ice

© 2018 **N. D. Kopachevsky, D. O. Tsvetkov**

Abstract. We study the problem on small motions of an ideal stratified fluid with a free surface partially covered with crushed ice. The crushed ice is supposed to be ponderable particles of some matter floating on the free surface. These particles do not interact with each other during oscillations of the free boundary (or this interaction is neglible) and stay on the surface during these oscillations. Using the method of orthogonal projecting of boundary-value conditions on the free surface and introducing auxiliary problems, we reduce the original initial-boundary value problem to the equivalent Cauchy problem for a second-order differential equation in some Hilbert space. We obtain conditions under which there exists a strong with respect to time solution of the initial-boundary value problem describing the evolution of this hydraulic system.

REFERENCES

1. S. A. Gabov, “Ob odnoy zadache gidrodinamiki ideal’noy zhidkosti, svyazannoy s flotatsiey” [On one problem of hydrodynamics of an ideal fluid related to flotation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1986, **24**, No. 1, 16–21 (in Russian).

2. S. A. Gabov and A. G. Sveshnikov, “Matematicheskie zadachi dinamiki flotiruyushchey zhidkosti” [Mathematical problems of hydrodynamics of floating fluid], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Mat. analiz* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1990, **28**, 3–86 (in Russian).
3. J. Goldstein, *Polugruppy lineynykh operatorov i ikh prilozheniya* [Semigroups of Linear Operators and Applications], Vyshcha shkola, Kiev, 1989 (Russian translation).
4. I. V. Ivanov, I. V. Mel’nikov, and A. I. Filinkov, *Differentsial’no-operatornye uravneniya i nekorrektnye zadachi* [Differential-Operator Equations and Ill-Posed Problems], Fizmatlit, M., 1995 (in Russian).
5. N. D. Kopachevsky, *Integrodifferentsial’nye uravneniya Vol’terra v gil’bertovom prostranstve. Spetsial’nyy kurs lektsiy* [Volterra Integrodifferential Equations in a Hilbert Space. A Special Course], FLP O. A. Bondarenko, Simferopol’, 2012 (in Russian).
6. N. D. Kopachevsky, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: evolyutsionnye i spektral’nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolution and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
7. N. D. Kopachevsky and D. O. Tsvetkov, “Kolebaniya stratifitsirovannykh zhidkostey” [Oscillations of stratified fluids], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2008, **29**, 103–130 (in Russian).
8. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial’nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
9. M. A. Soldatov, “Kolebaniya zhidkosti v basseyne, chastichno pokrytom l’dom” [Oscillations of a fluid in a basin partially covered with ice], *Uch. zap. SGU* [Sci. Notes SGU], 2000, **12**, No. 2, 80–83 (in Russian).
10. M. Sowa, “Cosine operator functions,” *Rozpr. Math.*, 1966, **49**, 1–47.

N. D. Kopachevsky
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: kopachevsky@list.ru

D. O. Tsvetkov
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: tsvetdo@gmail.com